ФИЗИКА
2

General Physics

DOUGLAS C. GIANCOLI

Prentice-Hall, Inc.
1984

Д. Джанколи

ФИЗИКА

В двух томах

2

Перевод с английского
Ю. А. ДАНИЛОВА И
А. С. ДОБРОСЛАВСКОГО

под редакцией
Е. М. ЛЕЙКИНА

Москва «Мир» 1989

ББК 22.3
Д40
УДК 530.1

Джанколи Д.

Д40 Физика: В 2-х т. Т. 2: Пер. с англ.– М.: Мир, 1989.–000 с., ил.

ISBN 5-03-000347-9

Написанная в живой и увлекательной форме книга американского ученого охватывает большой материал по всем разделам классической и современной физики. При изложении используются основы дифференциального и интегрального исчислений. Каждая глава снабжена хорошо подобранными задачами и вопросами с указанием категории трудности. В русском переводе выходит в двух томах. В т. 2 обсуждаются: электричество, магнетизм, оптика, специальная теория относительности, теория элементарных частиц.

Для школьников старших классов, желающих более глубоко изучить курс физики, для студентов первых курсов естественнонаучных и технических вузов, для преподавателей средних школ и первых курсов вузов, а также для всех желающих расширить свои знания об окружающем нас мире.

Д $\frac{1604010000-309}{041(01)-89}$ 34–89, ч. 1 **ББК 22.3**

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN 5-03-000347-9 (русск.)
ISBN 5-03-000345-2 (русск.)
ISBN 0-13-350884-6 (англ.)

© 1984 by Douglas C. Giancoli
© перевод на русский язык, «Мир», 1989

22 Электрический заряд и электрическое поле

Слово «электричество» может вызвать представление о сложной современной технике: компьютерах, светильниках, электродвигателях, электрогенераторах. Но электричество играет в нашей жизни гораздо более серьезную роль. Ведь, согласно атомной теории строения вещества, силы, действующие между атомами и молекулами, в результате чего возникают жидкости и твердые тела,– это электрические силы. Они ответственны и за обмен веществ, происходящий в человеческом организме. Даже когда мы что-нибудь тянем или толкаем, это оказывается результатом действия электрических сил между молекулами руки и того предмета, на который мы воздействуем. И вообще большинство сил, с которыми мы имели дело начиная с гл. 4 (например, силы упругости и реакция опоры), сегодня принято считать электрическими силами, действующими между атомами. Сила тяжести, однако, не относится к электрическим силам[1)].

Электрические явления известны с древних времен, но лишь в последние два столетия они были досконально изучены. В следующих двенадцати главах мы проследим, как развивались представления об электричестве, а также рассмотрим связь между электричеством и магнетизмом и познакомимся с некоторыми практическими приложениями.

22.1. Статическое электричество. Закон сохранения электрического заряда

Слово *электричество* происходит от греческого названия янтаря – «электрон». Янтарь – это окаменевшая смола хвойных деревьев; древние заметили, что если потереть

[1)] В нынешнем столетии физики пришли к выводу о существовании лишь четырех различных видов сил: 1) гравитационных, 2) электромагнитных (далее мы увидим, что электрические и магнитные силы тесно связаны между собой), 3) сильных ядерных и 4) слабых ядерных. Последние два вида сил действуют в пределах атомных ядер и гораздо реже дают о себе знать в нашей повседневной практике, хотя именно они ответственны за такие явления, как радиоактивность и ядерная энергия. Мы поговорим о них в гл. 42 и 43.

Рис. 22.1. Потрите пластмассовую линейку (*а*) и поднесите ее к мелко нарезанным кусочкам бумаги (*б*).

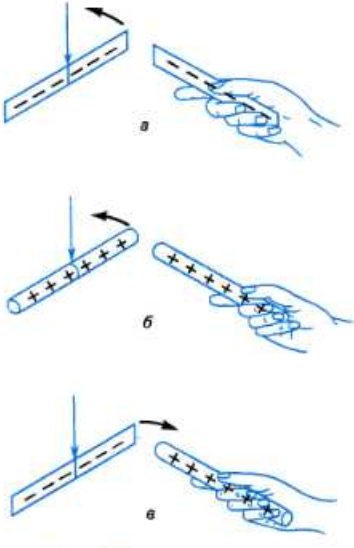


Рис. 22.2 Разноименные заряды отталкиваются, одноименные заряды притягиваются друг к другу. *а* – две пластмассовые линейки отталкиваются; *б* – два стеклянных стержня отталкиваются; *в* – стеклянный стержень притягивает пластмассовую линейку.

янтарь куском ткани, то он будет притягивать легкие предметы или пыль. Это явление, которое мы сегодня называем *статическим электричеством*, можно наблюдать, и натерев тканью эбонитовую или стеклянную палочку или же просто пластмассовую линейку. Пластмассовая линейка, которую хорошенько потерли бумажной салфеткой, притягивает мелкие кусочки бумаги (рис. 22.1). Разряды статического электричества вы могли наблюдать, расчесывая волосы или снимая с себя нейлоновую блузку или рубашку. Не исключено, что вы ощущали электрический удар, прикоснувшись к металлической дверной ручке после того, как встали с сиденья автомобиля или прошлись по синтетическому ковру. Во всех этих случаях объект приобретает **электрический заряд** благодаря трению; говорят, что происходит *электризация трением*.

Все ли электрические заряды одинаковы или существуют различные их виды? Оказывается, существует два вида электрических зарядов, что можно доказать следующим простым опытом. Подвесим пластмассовую линейку за середину на нитке и хорошенько потрем ее куском ткани. Если теперь поднести к ней другую наэлектризованную линейку, мы обнаружим, что линейки *отталкивают* друг друга (рис. 22.2, *а*). Точно так же, поднеся к одной наэлектризованной стеклянной палочке другую, мы будем наблюдать их отталкивание (рис. 22.2, *б*). Если же заряженный стеклянный стержень поднести к наэлектризованной пластмассовой линейке, они *притянутся* (рис. 22.2, *в*). Линейка, по-видимому, обладает зарядом иного вида, нежели стеклянная палочка. Экспериментально установлено, что все заряженные объекты делятся на две категории: либо они притягиваются пластмассой и отталкиваются стеклом, либо, наоборот, отталкиваются пластмассой и притягиваются стеклом. Существуют, по-видимому, два и только два вида зарядов, причем заряды одного и того же вида отталкиваются, а заряды разных видов притягиваются. Мы говорим, что *одноименные заряды отталкиваются*, а *разноименные притягиваются*.

Американский государственный деятель, философ и ученый Бенджамин Франклин (1706–1790) назвал эти два вида зарядов *положительным* и *отрицательным*. Какой заряд как назвать, было совершенно безразлично; Франклин предложил считать заряд наэлектризованной стеклянной палочки положительным. В таком случае заряд, появляющийся на пластмассовой линейке (или янтаре), будет отрицательным; этого соглашения придерживаются и по сей день.

Разработанная Франклином теория электричества в действительности представляла собой концепцию «одной жидкости»: положительный заряд рассматривался как избыток «электрической жидкости» против ее нормального содержания в данном объекте, а отрицательный –

как ее недостаток. Франклин утверждал, что, когда в результате какого-либо процесса в одном теле возникает некоторый заряд, в другом теле одновременно возникает такое же количество заряда противоположного вида. Названия «положительный» и «отрицательный» следует поэтому понимать в *алгебраическом* смысле, так что суммарный заряд, приобретаемый телами в каком-либо процессе, всегда равен нулю. Например, когда пластмассовую линейку натирают бумажной салфеткой, линейка приобретает отрицательный заряд, а салфетка – равный по величине положительный заряд. Происходит разделение зарядов, но их сумма равна нулю. Этим примером иллюстрируется твердо установленный **закон сохранения электрического заряда**, который гласит:

Суммарный электрический заряд, образующийся в результате любого процесса, равен нулю.

Отклонений от этого закона никогда не наблюдалось, поэтому можно считать, что он столь же твердо установлен, как и законы сохранения энергии и импульса.

22.2. Электрические заряды в атомах

Лишь в прошлом столетии стало ясно, что причина существования электрического заряда кроется в самих атомах. Позднее мы обсудим строение атома и развитие представлений о нем более подробно; здесь же кратко остановимся на основных идеях, которые помогут нам лучше понять природу электричества.

По современным представлениям атом (несколько упрощенно) состоит из тяжелого положительно заряженного ядра, окруженного одним или несколькими отрицательно заряженными электронами. В нормальном состоянии положительный и отрицательный заряды в атоме равны по величине, и атом в целом электрически нейтрален. Однако атом может терять или приобретать один или несколько электронов. Тогда его заряд будет положительным или отрицательным, и такой атом называют *ионом*.

В твердом теле ядра могут колебаться, оставаясь вблизи фиксированных положений, в то время как часть электронов движется совершенно свободно. Электризацию трением можно объяснить тем, что в различных веществах ядра удерживают электроны с различной силой. Когда пластмассовая линейка, которую натирают бумажной салфеткой, приобретает отрицательный заряд, это означает, что электроны в бумажной салфетке удерживаются слабее, чем в пластмассе, и часть их переходит с салфетки на линейку. Положительный заряд салфетки равен по величине отрицательному заряду, приобретенному линейкой.

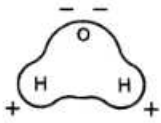


Рис. 22.3. Схематическое изображение молекулы воды. Такую молекулу называют «полярной», поскольку у нее возникает разделение зарядов.

Обычно предметы, наэлектризованные трением, лишь некоторое время удерживают заряд и в конце концов возвращаются в электрически нейтральное состояние. Куда исчезает заряд? Он «стекает» на содержащиеся в воздухе молекулы воды. Дело в том, что молекулы воды *полярны*: хотя в целом они электрически нейтральны, заряд в них распределен неоднородно (рис. 22.3). Поэтому лишние электроны с наэлектризованной линейки будут «стекать» в воздух, притягиваясь к положительно заряженной области молекулы воды. С другой стороны, положительный заряд предмета будет нейтрализоваться электронами, которые слабо удерживаются молекулами воды в воздухе. В сухую погоду влияние статического электричества гораздо заметнее: в воздухе содержится меньше молекул воды и заряд стекает не так быстро. В сырую дождливую погоду предмет не в состоянии надолго удержать свой заряд.

22.3. Изоляторы и проводники

Пусть имеются два металлических шара, один из которых сильно заряжен, а другой электрически нейтрален. Если мы соединим их, скажем, железным гвоздем, то незаряженный шар быстро приобретет электрический заряд. Если же мы одновременно коснемся обоих шаров деревянной палочкой или куском резины, то шар, не имевший заряда, останется незаряженным. Такие вещества, как железо, называют **проводниками** электричества; дерево же и резину называют **непроводниками, или изоляторами**.

Металлы обычно являются хорошими проводниками; большинство других веществ изоляторы (впрочем, и изоляторы чуть-чуть проводят электричество). Любопытно, что почти все природные материалы попадают в одну из этих двух резко различных категорий. Есть, однако, вещества (среди которых следует назвать кремний, германий и углерод), принадлежащие к промежуточной (но тоже резко обособленной) категории. Их называют *полупроводниками*.

С точки зрения атомной теории электроны в изоляторах связаны с ядрами очень прочно, в то время как в проводниках многие электроны связаны очень слабо и могут свободно перемещаться внутри вещества[1]. Когда положительно заряженный предмет подносится вплотную к проводнику или соприкасается с ним, свободные электроны быстро перемещаются к положительному заряду.

[1] Свободные электроны довольно легко перемещаются внутри металла, однако обычно нелегко покидают его. Действительно, натирая металлический предмет, редко удается получить статический заряд, как в случае непроводников типа стекла или пластмассы.

Если же предмет заряжен отрицательно, то электроны, наоборот, стремятся удалиться от него. В полупроводниках свободных электронов очень мало, а в изоляторах они практически отсутствуют.

22.4. Индуцированный заряд. Электроскоп

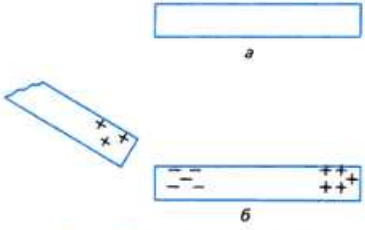


Рис. 22.4. Индуцированный заряд. *а* – нейтральный металлический стержень; *б* – металлический стержень в целом по-прежнему нейтрален, но на его концах возникает разделение зарядов.

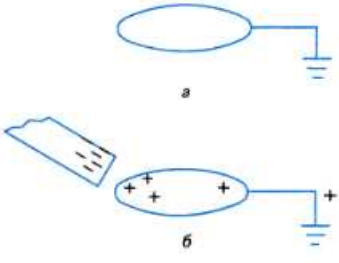


Рис. 22.5. Индуцированный заряд на объекте, соединенном с землей.

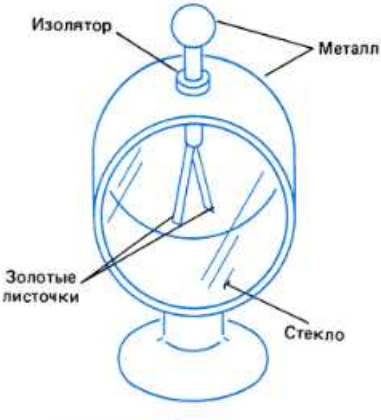


Рис. 22.6. Электроскоп.

Поднесем положительно заряженный металлический предмет к другому (нейтральному) металлическому предмету. При соприкосновении свободные электроны нейтрального предмета притянутся к положительно заряженному и часть их перейдет на него. Поскольку теперь у второго предмета недостает некоторого числа электронов, заряженных отрицательно, он приобретает положительный заряд. Этот процесс называется электризацией за счет электропроводности.

Приблизим теперь положительно заряженный предмет к нейтральному металлическому стержню, но так, чтобы они не соприкасались. Хотя электроны не покинут металлического стержня, они тем не менее переместятся в направлении заряженного предмета; на противоположном конце стержня возникнет положительный заряд (рис. 22.4). В таком случае говорят, что на концах металлического стержня индуцируется (или наводится) заряд. Разумеется, никаких новых зарядов не возникает: произошло просто *разделение* зарядов, в целом же стержень остался электрически нейтральным. Однако если бы мы теперь разрезали стержень поперек посредине, то получили бы два заряженных предмета – один с отрицательным зарядом, другой с положительным.

Сообщить металлическому предмету заряд можно также, соединив его проводом с землей (или, например, с водопроводной трубой, уходящей в землю), как показано на рис. 22.5, *а* (значок $\perp$ обозначает заземление). Предмет, как говорят, заземлен. Благодаря своим огромным размерам земля принимает и отдает электроны; она действует как резервуар заряда. Если поднести близко к металлу заряженный, скажем, отрицательно предмет, то свободные электроны металла будут отталкиваться и многие уйдут по проводу в землю (рис. 22.5, *б*). Металл окажется заряженным положительно. Если теперь отсоединить провод, на металле останется положительный наведенный заряд. Но если сделать это после того, как отрицательно заряженный предмет удален от металла, то все электроны успеют вернуться назад и металл останется электрически нейтральным.

Для обнаружения электрического заряда используется *электроскоп* (или простой *электрометр*). Как видно из рис. 22.6, он состоит из корпуса, внутри которого находятся два подвижных листочка, сделанных нередко из золота. (Иногда подвижным делается только один листо-

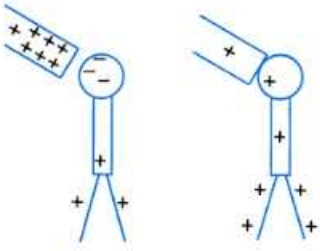


Рис. 22.7. Сообщение электроскопу заряда за счет индукции (*а*) и за счет проводимости (*б*).

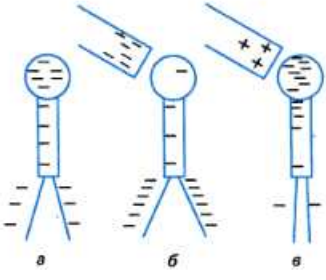


Рис. 22.8. Предварительно заряженный электроскоп может использоваться для определения знака неизвестного заряда.

чек.) Листочки укреплены на металлическом стержне, который изолирован от корпуса и заканчивается снаружи металлическим шариком. Если поднести заряженный предмет близко к шарику, в стержне происходит разделение зарядов (рис. 22.7, *а*), листочки оказываются одноименно заряженными и отталкиваются друг от друга, как показано на рисунке. Можно целиком зарядить стержень за счет электропроводности (рис. 22.7, *б*). В любом случае, чем больше заряд, тем сильнее расходятся листочки.

Заметим, однако, что знак заряда таким способом определить невозможно: отрицательный заряд разведет листочки точно на такое же расстояние, как и равный ему по величине положительный заряд. И все же электроскоп можно использовать для определения знака заряда – для этого стержню надо сообщить предварительно, скажем, отрицательный заряд (рис. 22.8, *а*). Если теперь к шарику электроскопа поднести отрицательно заряженный предмет (рис. 22.8, *б*), то дополнительные электроны переместятся к листочкам и они раздвинутся сильнее. Наоборот, если к шарику поднести положительный заряд, то электроны переместятся от листочков и они сблизятся (рис. 22.8, *в*), так как их отрицательный заряд уменьшится.

Электроскоп широко применялся на заре электротехники. На том же принципе при использовании электронных схем работают весьма чувствительные современные *электрометры*.

22.5. Закон Кулона

Итак, между электрическими зарядами действует сила. Как она зависит от величины зарядов и других факторов? Этот вопрос исследовал в 1780-е годы французский физик Шарль Кулон (1736–1806). Он воспользовался крутильными весами (рис. 22.9), очень похожими на те, которые применял Кавендиш для определения гравитационной постоянной (разд. 5.2).

Хотя в те времена еще не было приборов для точного определения величины заряда, Кулон сумел приготовить небольшие шарики с известным *соотношением* зарядов. Если заряженный проводящий шарик, рассуждал он, при-

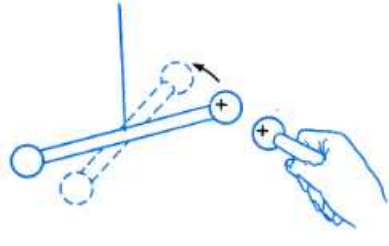


Рис. 22.9. Схема опыта Кулона. Установка аналогична той, которую использовал Кавендиш для измерения гравитационной постоянной. Когда к шарику на конце стержня, подвешенного на нити, подносят заряд, стержень слегка отклоняется, нить закручивается, и угол закручивания нити пропорционален действующей между зарядами силе (крутильные весы). С помощью этого прибора Кулон определил зависимость силы от величины зарядов и расстояния между ними.

вести в соприкосновение с точно таким же незаряженным шариком, то имевшийся на первом заряд в силу симметрии распределится поровну между двумя шариками. Это дало ему возможность получать заряды, составлявшие $^1/_2$, $^1/_4$ и т.д. от первоначального. Несмотря на некоторые трудности, связанные с индуцированием зарядов, Кулону удалось доказать, что сила, с которой одно заряженное тело действует на другое малое заряженное тело, прямо пропорциональна электрическому заряду каждого из них. Другими словами, если заряд любого из этих тел удвоить, то удвоится и сила; если же удвоить одновременно заряды обоих тел, то сила станет вчетверо больше. Это справедливо при условии, что расстояние между телами остается постоянным. Изменяя расстояние между телами, Кулон обнаружил, что действующая между ними сила обратно пропорциональна квадрату расстояния: если расстояние, скажем, удваивается, сила становится вчетверо меньше. Итак, заключил Кулон, сила, с которой одно малое заряженное тело (в идеальном случае – *точечный заряд*, т.е. тело, подобно материальной точке не имеющее пространственных размеров) действует на другое заряженное тело, пропорциональна произведению их зарядов Q_1 и Q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{22.1}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Это соотношение известно как **закон Кулона**; его справедливость подтверждена тщательными экспериментами, гораздо более точными, чем первоначальные трудно воспроизводимые опыты Кулона. Показатель степени 2 установлен в настоящее время с точностью 10^{-16}, т.е. он равен $2 \pm 2 \cdot 10^{-16}$.

Коль скоро мы теперь имеем дело с новой величиной – электрическим зарядом, – мы можем подобрать такую единицу измерения, чтобы постоянная k в формуле (22.1) равнялась единице. И действительно, такая система единиц еще недавно широко использовалась в физике[1]. Теперь, однако, заряд чаще всего выражают в системе СИ, где его единицей является *кулон* (Кл). Точное определение кулона через электрический ток и магнитное поле мы приведем позднее (разд. 29.4). В системе СИ постоянная k имеет величину

$$k = 8{,}988 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2 \approx 9{,}0 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2 .$$

---

[1] Речь идет о системе СГС (сантиметр – грамм – секунда), в которой используется *электростатическая единица заряда* СГСЭ. По определению два малых тела, каждое с зарядом 1 СГСЭ, расположенные на расстоянии 1 см друг от друга, взаимодействуют с силой 1 дина.

Таким образом, заряды в 1 Кл, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, взаимодействуют с силой, равной $(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2)(1{,}0\ \text{Кл})(1{,}0\ \text{Кл})/(1{,}0\ \text{м}^2) = 9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}$.

Заряды, возникающие при электризации трением обычных предметов (расчески, пластмассовой линейки и т. п.), по порядку величины составляют микрокулон и меньше ($1\ \text{мкКл} = 10^{-6}\ \text{Кл}$). Заряд электрона (отрицательный) приблизительно равен $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл. Это наименьший известный заряд[1]; он имеет фундаментальное значение и обозначается символом e; его часто называют *элементарным зарядом*:

$$e = (1{,}6021892 \pm 0{,}0000046) \cdot 10^{-19}\ \text{Кл},$$

или

$$e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Поскольку тело не может приобрести или потерять долю электрона, суммарный заряд тела должен быть целым кратным элементарного заряда. Говорят, что заряд *квантуется* (т. е. может принимать лишь дискретные значения). Однако, поскольку заряд электрона e очень мал, мы обычно не замечаем дискретности макроскопических зарядов (заряду 1 мкКл соответствуют примерно 10^{13} электронов) и считаем заряд непрерывным.

Формула (22.1) характеризует силу, с которой один заряд действует на другой. Эта сила направлена вдоль линии, соединяющей заряды. Если знаки зарядов одинаковы, то силы, действующие на заряды, направлены в противоположные стороны. Если же знаки зарядов различны, то действующие на заряды силы направлены навстречу друг другу (рис. 22.10). Заметим, что в соответствии с третьим законом Ньютона сила, с которой один заряд действует на другой, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой второй заряд действует на первый. Закон Кулона можно записать в векторной форме подобно закону всемирного тяготения

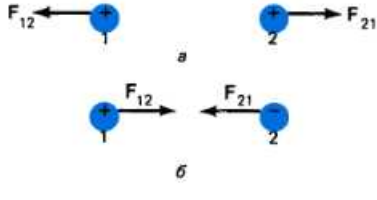


Рис. 22.10. Направление силы зависит от того, имеют ли заряды одинаковые (*а*) или противоположные (*б*) знаки. $\mathbf{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд *1* со стороны заряда *2*; $\mathbf{F}_{21}$ – сила, действующая на заряд *2* со стороны заряда *1*.

[1] В физике элементарных частиц предполагается существование субэлементарных частиц – кварков с зарядом $^1/_3 e$ и $^2/_3 e$. Экспериментально кварки не удалось зарегистрировать, а теория предсказывает, что кварки не могут существовать в свободном состоянии (см. гл. 43).

Ньютона (гл. 5):

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21},$$

где $\mathbf{F}_{12}$ – вектор силы, действующей на заряд Q_1 со стороны заряда Q_2, а $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ – единичный вектор, направленный от Q_2 к Q_1[1].

Следует иметь в виду, что формула (22.1) применима лишь к телам, расстояние между которыми значительно больше их собственных размеров. В идеальном случае это точечные заряды. Для тел конечного размера не всегда ясно, как отсчитывать расстояние r между ними, тем более что распределение заряда может быть и неоднородным. Если оба тела – сферы с равномерным распределением заряда, то r означает расстояние между центрами сфер. (Мы обсудим это далее в настоящей и следующей главах.) Важно также понимать, что формула (22.1) определяет силу, действующую на данный заряд со стороны *единственного* заряда. Если система включает несколько (или много) заряженных тел, то результирующая сила, действующая на данный заряд, будет равнодействующей (векторной суммой) сил, действующих со стороны остальных зарядов.

Пример 22.1. Чему равна электрическая сила, действующая на электрон в атоме водорода со стороны ядра (единственного протона) с зарядом $Q_2 = e$, когда электрон движется вокруг протона по орбите со средним радиусом $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м?

Решение. Подставим в формулу (22.1) значения $Q_2 = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $Q_1 = -Q_2$, $r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м:

$$F = (0{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{м})^{-2}(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2) \times (+1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}) = -8{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{Н}.$$

Знак минус означает, что заряды притягиваются.

Пример 22.2. Рассчитайте результирующую электрическую силу, действующую на заряд Q_3 на рис. 22.11, *а* со стороны двух других зарядов.

Решение. Результирующая сила, действующая на заряд Q_3, представляет собой сумму сил $\mathbf{F}_{31}$, действующей со стороны Q_1, и $\mathbf{F}_{32}$, действующей со стороны Q_2. Эти силы равны:

$$\mathbf{F}_{31} = (0{,}30\ \text{м})^{-2}(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2) \times (-4{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл})(-3{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл}) = 1{,}2\ \text{Н},$$

$$\mathbf{F}_{32} = (0{,}20\ \text{м})^{-2}(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2) \times (5{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл})(-4{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл}) = -4{,}5\ \text{Н}.$$

Сила $\mathbf{F}_{31}$ – отталкивание, а $\mathbf{F}_{32}$ – притяже-

[1] Заметим, что если Q_1 и Q_2 имеют одинаковый знак, то $Q_1 Q_2 > 0$ и сила, действующая на Q_1, направлена в сторону, противоположную Q_2: заряды отталкиваются. Если же знаки Q_1 и Q_2 различны, то $Q_1 Q_2 < 0$, и сила $\mathbf{F}_{12}$ направлена в сторону Q_2: заряды притягиваются.

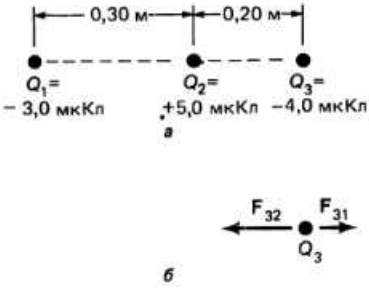


Рис. 22.11. К примеру 22.2.

Решение. Силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены, как показано на чертеже, поскольку Q_1 создает силу притяжения, а Q_2 – силу отталкивания. По величине силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ составляют (без учета знаков, так как их направления нам известны):

$$F_1 = (0{,}60\ \text{м})^{-2}(9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)\times$$
$$\times\,(6{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{Кл})(8{,}6\cdot 10^{-5}\ \text{Кл}) = 140\ \text{Н},$$
$$F_2 = (0{,}30\ \text{м})^{-2}(9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)\times$$
$$\times\,(6{,}5\cdot 10^{-15}\ \text{Кл})(5{,}0\cdot 10^{-5}\ \text{Кл}) = 330\ \text{Н}.$$

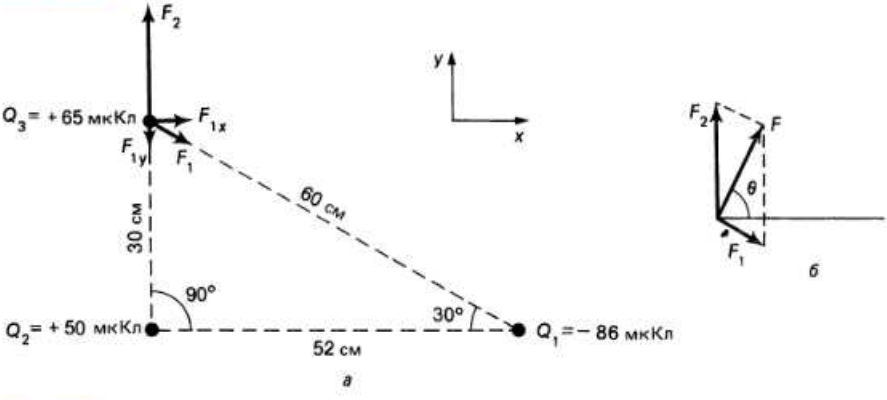


Рис. 22.12. К определению сил в примере 22.3.

ние, и эти силы действуют как показано на рис. 22.11, *б*. Тогда результирующая сила, действующая на заряд Q_3, равна

$$F = F_{32} + F_{31} = -4{,}5\ \text{Н} + 1{,}2\ \text{Н} = -3{,}3\ \text{Н}.$$

Результирующая сила имеет величину 3,3 Н и направлена на рисунке влево. (Обратим внимание на тот факт, что средний заряд Q_2 никак не препятствует влиянию заряда Q_1, а лишь создает свою собственную силу.)

Пример 22.3. Рассчитайте силу, действующую на заряд Q_3 со стороны зарядов Q_1 и Q_2 на рис. 22.12.

Разложим $\mathbf{F}_1$ на составляющие по осям x и y:

$$F_{1x} = F_1\cos 30^\circ = 120\ \text{Н},$$
$$F_{1y} = -F_1\sin 30^\circ = -70\ \text{Н}.$$

Сила $\mathbf{F}_2$ имеет только составляющую по оси y. Таким образом, результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая на заряд Q_3, имеет составляющие $F_x = F_{1x} = 120$ Н и $F_y = F_2 + F_{1y} = 330\ \text{Н} - 70\ \text{Н} = 260$ Н. Отсюда величина результирующей силы составит $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(120\,\text{Н})^2 + (260\,\text{Н})^2} = 290$ Н, а угол θ, который составляет направление этой силы с осью x, определится (рис. 22.12, *б*) соотношением $\operatorname{tg}\theta = F_y/F_x = 260\ \text{Н}/120\ \text{Н} = 2{,}2$; отсюда $\theta = 65^\circ$.

Постоянная k в формуле (22.1) обычно выражается через другую константу, ε_0, так называемую **электрическую постоянную**, которая связана с k соотношением $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. С учетом этого закон Кулона можно пе-

реписать в виде

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{22.2}$$

где с наивысшей на сегодня точностью

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = (8{,}85418782 \pm 0{,}00000007)\cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2,$$

или округленно

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2.$$

Хотя формула (22.2) выглядит несколько сложнее, чем (22.1), запись большинства других уравнений электромагнитной теории упрощается при использовании ε_0, поскольку 4π в окончательном результате часто сокращается. Поэтому мы будем обычно использовать формулу (22.2), считая, что

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2.$$

Закон Кулона описывает силу, действующую между двумя покоящимися зарядами. Когда заряды движутся, между ними возникают дополнительные силы, и их мы обсудим в последующих главах. Здесь же рассматриваются только покоящиеся заряды; этот раздел учения об электричестве называется **электростатикой**.

22.6. Электрическое поле

В гл. 5 (разд. 5.9) мы видели, что мыслителям прошлого трудно было принять концепцию «действия на расстоянии». И правда, как может один заряд действовать на другой, если они не соприкасаются? Даже Ньютону, применившему эту идею в теории всемирного тяготения, нелегко было свыкнуться с нею. Как мы видели, однако, эти трудности можно преодолеть с помощью понятия *поля*, которое ввел английский ученый Майкл Фарадей (1791–1867). Согласно Фарадею, от каждого заряда исходит *электрическое поле*, пронизывающее все пространство. Когда к одному заряду подносят другой, он испытывает действие силы, которая обусловлена электрическим полем первого заряда. Электрическое поле в точке, где находится второй заряд, влияет непосредственно на этот заряд, создавая действующую на него силу. Следует подчеркнуть, что поле *не* является некой разновидностью

вещества; правильнее сказать, это – чрезвычайно полезная концепция[1].

Поле, создаваемое одним или несколькими зарядами, можно исследовать с помощью небольшого положительного пробного заряда, измеряя действующую на него силу. Под пробным зарядом мы понимаем достаточно малый заряд, собственное поле которого не меняет существенно распределения остальных зарядов, создающих исследуемое поле. Силы, действующие на малый пробный заряд q в окрестности уединенного положительного заряда Q, показаны на рис. 22.13. Сила в точке b меньше, чем в a, из-за большего расстояния между зарядами (закон Кулона); в точке c сила еще меньше. Во всех случаях сила направлена радиально от заряда Q. По определению **напряженность электрического поля** (или просто **электрическое поле**) $\mathbf{E}$ в любой точке пространства равна отношению силы $\mathbf{F}$, действующей на малый положительный пробный заряд, к величине этого заряда q:

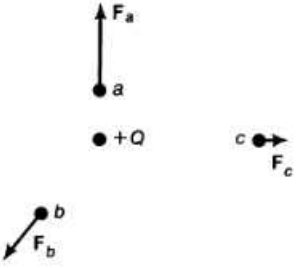


Рис. 22.13. Сила, действующая со стороны заряда $+Q$ на малый пробный заряд q, помещаемый в точки a, b и c.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \tag{22.3}$$

(Более строго $\mathbf{E}$ определяется как предел отношения $\mathbf{F}/q$ при q, стремящемся к нулю.) Из определения (22.3) следует, что направление напряженности электрического поля в любой точке пространства совпадает с направлением силы, действующей в этой точке на положительный пробный заряд. Напряженность электрического поля представляет собой *силу, действующую на единицу заряда*; она измеряется в ньютонах на кулон (Н/Кл).

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ определяется через отношение $\mathbf{F}/q$, чтобы исключить зависимость поля $\mathbf{E}$ от величины пробного заряда q. Иначе говоря, $\mathbf{E}$ учитывает только те заряды, которые создают рассматриваемое в данной точке электрическое поле. Поскольку $\mathbf{E}$ – векторная величина, электрическое поле является *векторным полем*.

22.7. Расчет напряженности электрического поля E

Для многих простых случаев можно рассчитать напряженность электрического поля в заданной точке с по

[1] Вопрос о «реальности» и существовании электрического поля на самом деле – это философский, скорее даже метафизический вопрос. В физике представление о поле оказалось чрезвычайно полезным – это одно из величайших достижений человеческого разума. (С автором вряд ли можно согласиться. Вопрос о «реальности» того или иного понятия относится к компетенции соответствующей области физики, т.е. является естественнонаучной, а не гносеологической проблемой.– *Прим. ред.*)

мощью формулы (22.3). Например, напряженность поля, создаваемого уединенным точечным зарядом Q на расстоянии r от этого заряда, равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\cdot\frac{1}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{[уединенный точечный заряд]}. \tag{22.4}$$

Наряду с формулой (22.2) это выражение для напряженности электрического поля точечного заряда также называют часто законом Кулона. Заметим еще раз, что E не зависит от q: напряженность электрического поля определяется только зарядом Q, который создает это поле, и не зависит от величины пробного заряда.

Пример 22.4. Рассчитайте величину и направление напряженности электрического поля в точке P, расположенной на расстоянии 30 см вправо от точечного заряда $Q = -3{,}0\cdot10^{-6}$ Кл.

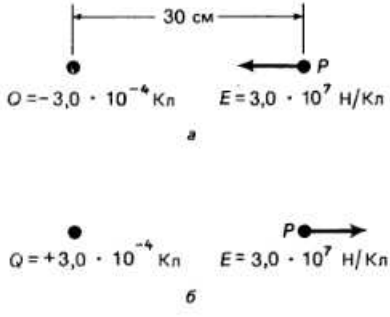


Рис. 22.14. Электрическое поле, создаваемое в точке P отрицательным зарядом Q (*а*) и положительным зарядом Q (*б*) (к примеру 22.4).

Решение. Напряженность электрического поля равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{(9{,}0\cdot10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(3{,}0\cdot10^{-6}\ \text{Кл})}{(0{,}30\ \text{м})^2} = 3{,}0\cdot10^5\ \text{Н/Кл}.$$

Вектор напряженности электрического поля направлен *в сторону* заряда Q, как показано на рис. 22.14, *а*, поскольку, согласно определению, его направление совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд. Если бы заряд Q был положительным, то вектор напряженности поля был бы направлен *от заряда* (рис. 22.14, *б*).

Напряженность поля нескольких зарядов рассчитывается как векторная сумма напряженностей, создаваемых каждым из зарядов. Напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля n точечных зарядов равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i, \tag{22.5}$$

где $\mathbf{E}_i$ – напряженность электрического поля создаваемого i-м зарядом. Справедливость этого *принципа суперпозиции* подтверждена экспериментально, и исключений из него не наблюдалось.

Пример 22.5. Рассчитайте напряженность электрического поля в точках A и B (рис. 22.15).

Решение. а) Расчет очень похож на проведенный в примере 22.3, но теперь мы имеем дело с электрическими полями. Напряженность электрического поля в точке A есть векторная сумма напряженностей $\mathbf{E}_{A1}$, обусловленной зарядом Q_1, и $\mathbf{E}_{A2}$,

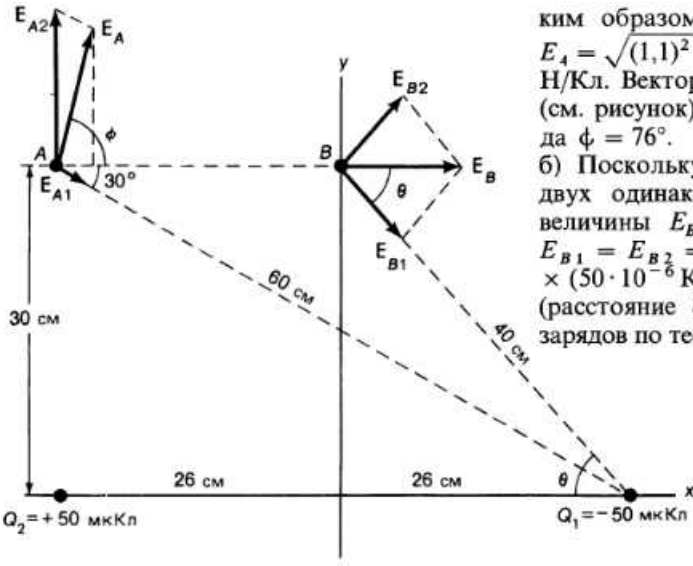


Рис. 22. 15. К расчету электрического поля в точках A и B в примере 22.5.

ким образом, по абсолютной величине $E_A = \sqrt{(1,1)^2 + (4,4)^2} \cdot 10^6$ Н/Кл $= 4,5 \cdot 10^6$ Н/Кл. Вектор $\mathbf{E}_A$ направлен под углом ϕ (см. рисунок), и $\operatorname{tg}\phi = 4,4/1,1 = 4,0$, откуда $\phi = 76°$.

б) Поскольку точка B равноудалена от двух одинаковых зарядов, абсолютные величины E_{B1} и E_{B2} также одинаковы: $E_{B1} = E_{B2} = (9,0 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл$^2) \times$ $\times (50 \cdot 10^{-6}$ Кл$)/(0,40$ м$)^2 = 2,8 \cdot 10^6$ Н/Кл (расстояние от точки B до каждого из зарядов по теореме Пифагора равно 40 см).

обусловленной Q_2: $E_{A1} = (9,0 \cdot 10^9$ Н $\times$ $\times$ м^2/Кл$^2)(50 \cdot 10^{-6}$ Кл$)/(0,60$ м$)^2 = 1,25 \times$ $\times 10^6$ Н/Кл; аналогично $E_{A2} = 5,0 \cdot 10^6$ Н/Кл. Векторы направлены, как показано на рисунке; соответственно результирующий вектор $\mathbf{E}_A$ в точке A имеет составляющие $E_{Ax} = E_{A1} \cos 30° = 1,1 \cdot 10^6$ Н/Кл и $E_{Ay} = E_{A2} - E_{A1} \sin 30° = 4,4 \cdot 10^6$ Н/Кл. Таким образом, по абсолютной величине $E_A = \sqrt{(1,1)^2 + (4,4)^2} \cdot 10^6$ Н/Кл $= 4,5 \cdot 10^6$ Н/Кл. Вектор $\mathbf{E}_A$ направлен под углом ϕ (см. рисунок), и $\operatorname{tg}\phi = 4,4/1,1 = 4,0$, откуда $\phi = 76°$.

В силу симметрии задачи y-компоненты равны между собой и противоположно направлены. Отсюда результирующая напряженность поля E_B направлена по оси x и равна $E_{B1}\cos\theta + E_{B2}\cos\theta = 2E_{B1}\cos\theta$; из рисунка $\cos\theta = 26$ см$/40$ см $= 0,65$ и $E_B = 2(2,8 \cdot 10^6$ Н/Кл$)(0,65) = 3,6 \cdot 10^6$ Н/Кл.

Во многих случаях распределение заряда можно считать непрерывным. Это означает, что распределенные заряды можно представить в виде набора бесконечно малых элементов dQ, каждый из которых создает на расстоянии r электрическое поле напряженностью

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}. \qquad (22.6а)$$

Значение напряженности электрического поля в любой точке можно получить, просуммировав вклады всех бесконечно малых элементов, т. е. взяв интеграл

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}. \qquad (22.6б)$$

Заметим, что $d\mathbf{E}$ – вектор [величина которого дается формулой (22.6а)], так что интегрирование может оказаться непростым. Поэтому для вычисления $\mathbf{E}$ часто используются другие методы, которые мы обсудим в двух следующих главах. Тем не менее формулы (22.6) в относительно простых случаях нередко позволяют аналитически рассчитать $\mathbf{E}$. Во многих случаях применяются также методы численного интегрирования.

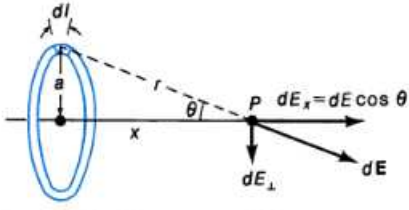


Рис. 22.16. К примеру 22.6.

Пример 22.6. По тонкому кольцу радиусом a равномерно распределен заряд Q. Определить напряженность электрического поля в точке P на оси кольца на расстоянии x от его центра (рис. 22.16).

Решение. Напряженность электрического поля $d\mathbf{E}$, обусловленная элементом кольца длиной dl, равна

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2},$$

где $dQ = Q(dl/2\pi a)$, поскольку заряд равномерно распределен по длине кольца $2\pi a$. Отсюда

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,dl}{r^2 2\pi a}.$$

Вектор $d\mathbf{E}$ имеет компоненты dE_x вдоль оси x и $dE_\perp$ в направлении, перпендикулярном оси x (рис. 22.16). Суммируя (интегрируя) по всему кольцу, заметим, что каждому элементу dl кольца соответствует диаметрально противоположный элемент равной длины такой, что перпендикулярные компоненты напряженности электрического поля этих двух элементов взаимно компенсируются. Это справедливо для всех элементов кольца, так что в итоге вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль оси x и нам остается просуммировать только x-компоненты, dE_x. Тогда полная напряженность электрического поля равна

$$E = \int dE_x \int dE\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a}\int\frac{dl}{r^2}\cos\theta.$$

Заметив, что $\cos\theta = x/r$, где $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$, получим

$$E = \frac{Q}{(4\pi\varepsilon_0)(2\pi a)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} dl =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

На больших расстояниях ($x \gg a$) полученное выражение сводится к $E = Q/4\pi\varepsilon_0 x^2$. Этого следовало ожидать, так как на больших расстояниях кольцо подобно точечному заряду (имеет место зависимость $1/r^2$). Подобная «проверка» при больших r служит подтверждением (но не доказательством) правильности полученного ответа. Если бы в пределе больших r результат оказался иным, наше решение было бы заведомо неверным.

Пример 22.7. *Линейное распределение заряда.* Определите напряженность электрического поля в точке P на расстоянии x от очень длинного, линейного, равномерно распределенного заряда (например, проводника, рис. 22.17). Пусть λ – заряд, приходящийся на единицу длины (Кл/м); будем считать, что величина x мала по сравнению с длиной проводника.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось y совпадала с проводником, а начало отсчета находилось в точке O (как показано на рисунке). Элемент

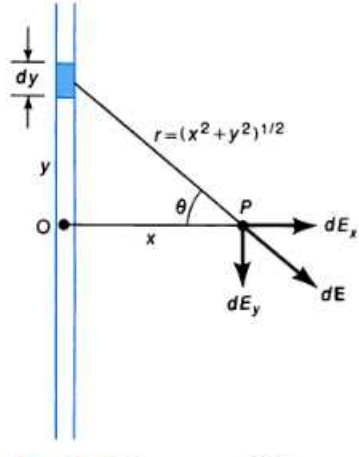


Рис. 22.17. К примеру 22.7.

длины dy несет заряд $dQ = \lambda dy$; создаваемая этим элементом напряженность электрического поля в точке P равна

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{(x^2 + y^2)}.$$

Вектор $d\mathbf{E}$ обладает компонентами dE_x и dE_y, причем $dE_x = dE\cos\theta$ и $dE_y = dE\sin\theta$. Если проводник имеет большую протяженность в обе стороны от O (так что вкладами удаленных частей можно пренебречь по сравнению с близкими) или если точка O находится точно посередине отрезка проводника (даже короткого), то y-компонента $\mathbf{E}$ обратится в нуль, так как вклады в $E_y = \int dE_y$ участков проводника, расположенных выше и ниже точки O, будут одинаковы, т. е.

$$E_y = \int dE\sin\theta = 0.$$

Тогда

$$E = E_x = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\cos\theta dy}{(x^2 + y^2)}.$$

Теперь мы должны выразить θ через y или y через θ. Сделаем последнее: поскольку $y = x\,\mathrm{tg}\,\theta$, то $dy = x\,d\theta/\cos^2\theta$ и $(x^2 + y^2) = x^2/\cos^2\theta$. Тогда

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x},$$

где мы предположили, что проводник имеет очень большую протяженность в обоих направлениях ($y \to \pm\infty$), т. е. пределы интегрирования равны $\theta = \pm\pi/2$. Таким образом, напряженность электрического поля линейного распределения заряда изменяется обратно пропорционально первой степени расстояния до заряда. Этот результат, полученный нами для бесконечно длинного линейного заряда, является хорошим приближением и для линейного заряда конечной длины при условии, что величина x мала по сравнению с расстоянием от точки P до обоих концов проводника.

Пример 22.8. *Равномерно заряженная плоскость.* Заряд равномерно распределен в пределах большой квадратной плоскости со стороной L (рис. 22.18). Заряд, приходящийся на единицу площади, равен σ. Рассчитайте напряженность электрического поля в точке P на расстоянии z над центром квадрата (z намного меньше L).

Решение. Поскольку мы уже знаем, какое поле создается равномерным линейным распределением заряда (пример 22.7), разобьем плоскость на узкие полоски шириной dy и длиной L и затем просуммируем значения напряженности поля, создаваемые каждой такой полоской. Поскольку на единицу площади приходится заряд σ, то для каждой полоски $\sigma = dQ/Ldy$, где dQ – заряд полоски, а Ldy – ее площадь. Таким образом, $dQ =$

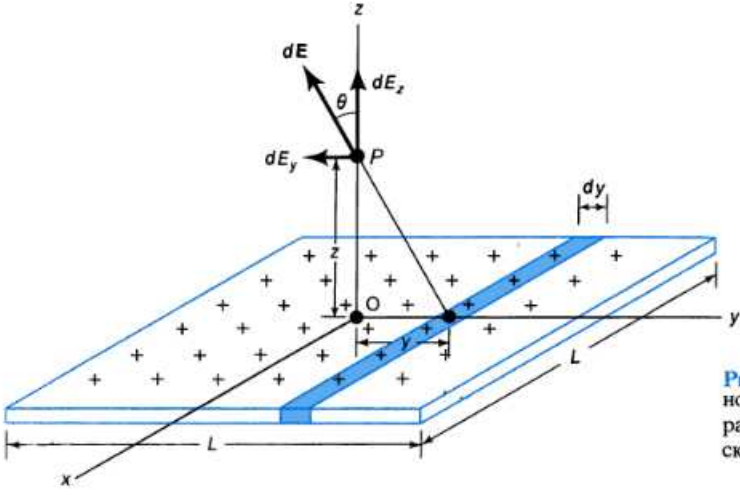


Рис. 22.18. Расчет напряженности электрического поля над равномерно заряженной плоскостью.

$= \sigma L dy$, и каждую полоску мы можем рассматривать как равномерное распределение заряда с линейной плотностью

$$\lambda = \frac{dQ}{L} = \frac{\sigma L dy}{L} = \sigma dy.$$

Пользуясь результатом примера 22.7, мы можем написать для напряженности электрического поля, создаваемого полоской (поскольку $z \ll L$),

$$dE = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{(z^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dy}{(z^2+y^2)^{1/2}},$$

где $(z^2+y^2)^{1/2}$ – расстояние от точки P до середины полоски. Квадрат симметричен относительно оси x, поэтому при суммировании по всем полоскам y-компоненты взаимно уничтожатся. Таким образом, нам достаточно провести суммирование по z-компонентам, для которых

$$dE_z = dE\cos\theta = dE\frac{z}{(z^2+y^2)^{1/2}}.$$

Тогда напряженность электрического поля на расстоянии z равна

$$E = \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy}{(z^2+y^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z}\operatorname{arctg}\frac{y}{z}\right)_{y=-L/2}^{y=L/2}.$$

Поскольку $z \ll L$, вклад удаленных участков плоскости мал (согласно закону Кулона), и можно положить $y = \pm L/2 \to \infty$; таким образом,

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Этот результат справедлив для любой точки над (или под) бесконечной заряженной плоскостью. Он выполняется также для точки, находящейся достаточно близко к плоскости конечных размеров[1)], если расстояние до плоскости намного меньше расстояния до ее краев. Мы видим, что электрическое поле большой равномерно заряженной плоскости однородно и направлено перпендикулярно плоскости.

Пример 22.9. Определите напряженность электрического поля между двумя большими параллельными пластинами, расположенными на расстоянии d друг от друга, мало по сравнению с размерами пластин. Поверхностная плотность заряда одной пластины равна $+\sigma$, другой $-\sigma$ (рис. 21.19).

Решение. Согласно результату примера 22.8, каждая пластина создает электрическое поле напряженностью $E = \pm \sigma/2\varepsilon_0$. Поле, создаваемое положительно заря-

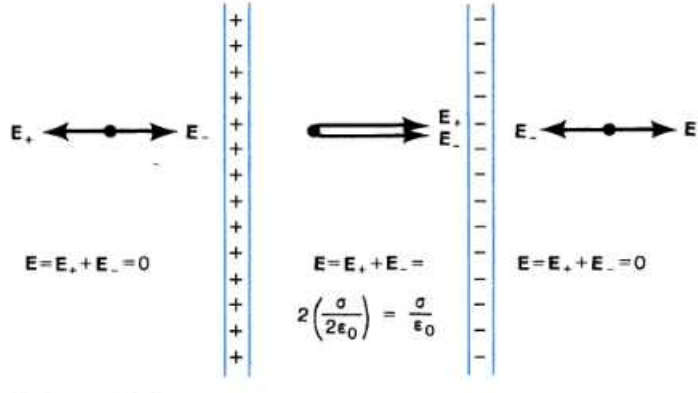


Рис. 22.19. К примеру 22.9.

[1)] Точность этого результата для больших L определяется значением $\operatorname{arctg}(L/2z)$. Например, для $(z/L) \lesssim 0{,}008$ результат, полученный в предположении, что $L = \infty$ и $z/L = 0$, выполняется с точностью примерно 1%, так как $\operatorname{arctg}(L/2z)$ отличается от $\pi/2$ не более чем на 1%.

женной пластиной, направлено от этой пластины, а поле, создаваемое отрицательной пластиной, направлено к пластине. Таким образом, в зазоре между пластинами создаваемые ими электрические поля складываются:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ [между параллельными пластинами].}$$

Поле однородно, и поэтому его напряженность одинакова в любой точке между пластинами. Во внешней же области поля взаимно компенсируются:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0,$$

как показано на рисунке. Полученные результаты в идеальном случае справедливы для пластин бесконечно большого размера; они служат хорошим приближением в том случае, когда расстояние между пластинами конечных размеров намного меньше их размеров, и для точек, не слишком близких к краям пластин. (Эти полезные и довольно неожиданные результаты наглядно иллюстрируют принцип суперпозиции и его большие возможности с точки зрения практических расчетов.)

22.8. Силовые линии

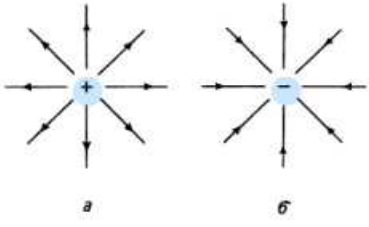


Рис. 22.20. Силовые линии электрического поля вблизи положительного точечного заряда (*а*) и отрицательного точечного заряда (*б*).

Коль скоро электрическое поле является *векторным*, его можно изображать в различных точках стрелками, как это сделано на рис. 22.13. Направления векторов $\mathbf{E}_a$, $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{E}_c$ совпадали бы с направлениями показанных на этом рисунке сил и лишь длина их была бы уже иной в результате деления на q. Отношение длин векторов $\mathbf{E}_a$, $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{E}_c$ сохранится прежним, так как мы делим на один и тот же заряд. Однако изображать электрическое поле таким образом неудобно, поскольку при большом числе точек весь рисунок будет испещрен стрелками. Поэтому пользуются другим способом изображения поля – методом силовых линий.

Для наглядного представления электрического поля его изображают семейством линий, указывающих направление напряженности поля в каждой точке пространства. Эти так называемые **силовые линии** проводятся так, чтобы указывать направление силы, действующей в данном поле на положительный пробный заряд. Силовые линии точечного положительного заряда показаны на рис. 22.20, *а*, отрицательного – на рис. 22.20, *б*. В первом случае линии радиально расходятся от заряда, во втором они радиально сходятся к заряду. Именно в таком направлении будут действовать силы на положительный пробный заряд. Конечно, силовые линии можно нанести и в промежутках между изображенными на рисунке. Но мы условимся наносить силовые линии с таким расчетом, чтобы число линий, исходящих от положительного заряда или заканчивающихся на отрицательном заряде, было пропорционально величине этого заряда. Обратим внимание на то, что вблизи заряда, где сила максимальна, линии расположены более тесно. Это общее свойство силовых линий: *чем теснее расположены силовые линии, тем сильнее элек-*

трическое поле в этой области. Вообще говоря, можно всегда изображать силовые линии таким образом, чтобы число линий, пересекающих единичную площадку, перпендикулярную направлению поля **E**, было пропорционально напряженности электрического поля. Например, для уединенного точечного заряда (рис. 22.20) напряженность электрического поля убывает как $1/r^2$; так же будет уменьшаться с расстоянием и число равномерно распределенных силовых линий, пересекающих единичную площадку: ведь общее число силовых линий остается постоянным, а площадь поверхности, через которую они проходят, растет как $4\pi r^2$ (поверхность сферы радиусом r). Соответственно число силовых линий на единицу площади пропорционально $1/r^2$.

На рис. 22.21, *а* показаны силовые линии поля, создаваемого двумя зарядами противоположных знаков. Здесь силовые линии искривлены и направлены от положительного заряда к отрицательному. Поле в любой точке направлено по касательной к силовой линии, как показано стрелкой в точке *P*. Чтобы убедиться в том, что силовые линии идут именно так, а не иначе, вы можете проделать вычисления в духе примера 22.5 специально для этого случая (см. рис. 22.15). На рис. 22.21, *б* и *в* показаны силовые линии электрического поля двух положительных зарядов и поля между двумя параллельными противоположно заряженными пластинами. Заметим, что силовые линии поля между пластинами параллельны и расположены на равном расстоянии друг от друга, исключая область вблизи краев. Таким образом, в центральной области напряженность электрического поля во всех точках одинакова, и мы можем написать

$$E = \text{const}\ [\text{между близко расположенными параллельными пластинами}]. \qquad (22.7)$$

Хотя вблизи краев это не так (силовые линии изгибаются), часто этим можно пренебречь, особенно если расстояние между пластинами мало по сравнению с их размерами. [Сравните этот результат со случаем уединенного точечного заряда, где поле изменяется обратно пропорцио-

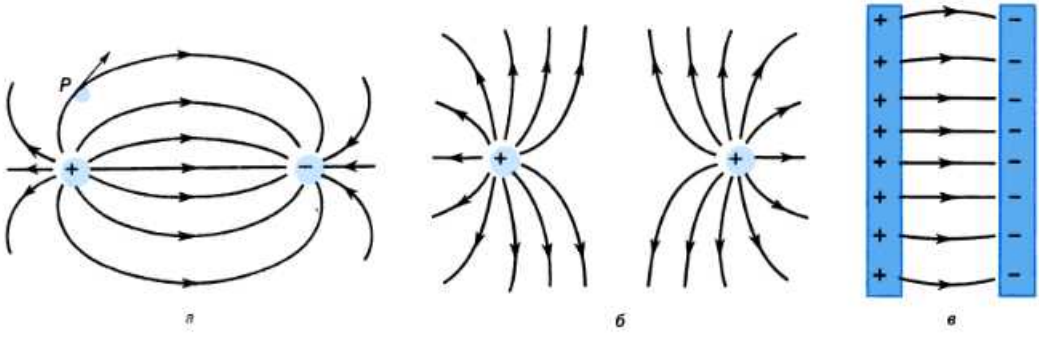


Рис. 22.21. Силовые линии электрического поля для двух разноименных зарядов (*а*), двух одноименных зарядов (*б*) и параллельных, противоположно заряженных пластин (*в*).

нально квадрату расстояния; формула (22.4).] Итак, силовые линии обладают следующими свойствами:

1. Силовые линии указывают направление напряженности электрического поля: в любой точке напряженность поля направлена по касательной к силовой линии.
2. Силовые линии проводятся так, чтобы напряженность электрического поля E была пропорциональна числу линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную линиям.
3. Силовые линии начинаются только на положительных зарядах и заканчиваются только на отрицательных зарядах; число линий, выходящих из заряда или входящих в него, пропорционально величине заряда.

Можно также сказать, что силовая линия электрического поля – это траектория, по которой следовал бы помещенный в поле малый пробный заряд. (Строго говоря, это верно лишь в том случае, если пробный заряд не обладает инерцией или движется медленно, например вследствие трения.) Силовые линии никогда не пересекаются. (Если бы они пересекались, это означало бы, что в одной и той же точке напряженность электрического поля имеет два различных направления, что лишено смысла.)

22.9. Электрические поля и проводники

В статическом случае (т.е. когда заряды покоятся) электрическое поле внутри хорошего проводника отсутствует. Если бы в проводнике существовало электрическое поле, то на внутренние свободные электроны действовала бы сила, вследствие чего электроны пришли бы в движение и двигались до тех пор, пока не заняли бы такое положение, при котором, напряженность электрического поля, а стало быть, и действующая на них сила обратились бы в нуль.

Рис. 22.22. Точечный заряд, помещенный внутрь металлической сферической оболочки. На поверхности оболочки индуцируется заряд. Электрическое поле существует и вне оболочки, но в самой оболочке равно нулю.

Из этого рассуждения вытекают любопытные следствия. В частности, если проводник обладает результирующим зарядом, то этот заряд распределяется по внешней поверхности проводника. Этот факт можно объяснить с иной точки зрения. Если, например, проводник заряжен отрицательно, то мы легко можем представить, что отрицательные заряды отталкивают друг друга и устремляются к поверхности проводника, чтобы расположиться как можно дальше друг от друга. Другое следствие состоит в следующем. Пусть положительный заряд Q помещен в центр полого изолированного проводника в форме сферической оболочки (рис. 22.22). Поскольку внутри проводника электрического поля быть не может, силовые линии, идущие от положительного заряда, должны заканчиваться на отрицательных зарядах на внутренней поверхности металлической сферы. В результате на внутренней поверхности сферического проводника будет индуцирован соот-

ветствующий отрицательный заряд $-Q$, а равный по величине положительный заряд $+Q$ распределится по внешней поверхности сферы (поскольку в целом оболочка нейтральна). Таким образом, хотя внутри проводника электрическое поле отсутствует, снаружи сферы существует электрическое поле (рис. 22.22), как если бы металлической сферы вовсе не было.

С этим связано также и то обстоятельство, что силовые линии электрического поля всегда перпендикулярны поверхности проводника. Действительно, если бы вектор напряженности электрического поля **E** имел компоненту, параллельную поверхности проводника, то электроны под действием силы двигались бы до тех пор, пока не заняли положение, в котором на них не действует сила, т. е. пока вектор напряженности электрического поля не будет перпендикулярен поверхности.

Все сказанное относится только к проводникам. В изоляторах, у которых нет свободных электронов, может существовать электрическое поле и силовые линии не обязательно перпендикулярны поверхности.

22.10. Движение заряженной частицы в электрическом поле

Как мы уже видели, понятие поля оказывается очень удобным для описания сил, действующих на заряженное тело со стороны одного или нескольких заряженных тел. Сила, действующая на заряд q в некоторой точке пространства, определяется выражением

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

[см. (22.3)], где **E** – напряженность электрического поля, создаваемого в данной точке остальными зарядами.

Из предшествующих разделов мы узнали, как в некоторых конкретных ситуациях можно определить напряженность электрического поля **E**. Теперь будем считать, что напряженность поля **E** известна, и необходимо найти силу, действующую на заряженное тело, и определить характер его движения.

Пример 22.10. Электрон (масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг) ускоряется в однородном поле **E** ($E = 2{,}0 \cdot 10^4$ Н/Кл) между двумя параллельными заряженными пластинами. Расстояние между пластинами 1,5 см. Электрон разгоняется из состояния покоя вблизи отрицательной пластины и пролетает через небольшое отверстие в положительной пластине (рис. 22.23). а) С какой скоростью электрон вылетает из отверстия? б) Покажите, что действием силы тяжести можно пренебречь.

Решение. а) Сила, действующая на электрон, равна

$$F = qE$$

и направлена вправо. Ускорение электрона составляет

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}.$$

В зазоре между пластинами поле **E** однородно, поэтому движение электрона про-

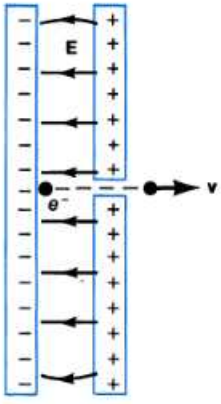


Рис. 22.23. К примеру 22.10.

исходит равноускоренно с ускорением

$$a = \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(2{,}0\cdot 10^{4}\ \text{Н/Кл})}{(9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг})} =$$

$$= 3{,}5\cdot 10^{15}\ \text{м/с}^2.$$

До отверстия электрон проходит путь $x = 1{,}5\cdot 10^{-2}$ м, и, поскольку его начальная скорость равна нулю, мы можем воспользоваться формулой (2.9в) с $v_0 = 0$:

$$v = \sqrt{2ax} =$$

$$= \sqrt{2(3{,}5\cdot 10^{15}\ \text{м/с}^2)(1{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{м})} =$$

$$= 1{,}0\cdot 10^{7}\ \text{м/с}.$$

Во внешней области электрическое поле отсутствует, и, пролетев через отверстие, электрон движется с постоянной скоростью.

б) Действующая на электрон электрическая сила равна $qE = (1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}) \times (2{,}0\cdot 10^{4}\ \text{Н/Кл}) = 3{,}2\cdot 10^{-15}$ Н, а сила тяжести равна $mg = (9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг}) \times (9{,}8\ \text{м/с}^2) = 8{,}9\cdot 10^{-30}$ Н, т. е. в 10^{14} раз меньше! Обратите внимание на то, что мы не учитывали электрическое поле самого электрона. Его пришлось бы учесть, если бы требовалось найти силу, действующую на пластины.

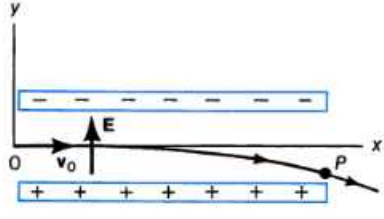


Рис. 22.24. К примерам 22.11 и 22.12.

Пример 22.11. Пусть электрон (из предыдущей задачи), движущийся со скоростью $v_0 = 1{,}0\cdot 10^{7}$ м/с, влетает в однородное электрическое поле **E**, направленное под прямым углом к $\mathbf{v}_0$, как показано на рис. 22.24. Требуется найти уравнение траектории электрона в электрическом поле.

Решение. На входе в электрическое поле (в точке $x = y = 0$) скорость электрона равна $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ в направлении x. Электрическое поле **E** направлено вертикально вверх и сообщает электрону постоянное вертикальное ускорение

$$a_y = \frac{F}{m} = -\frac{qE}{m}.$$

Перемещение электрона в вертикальном направлении дается выражением

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{qE}{2m}t^2,$$

а в горизонтальном – выражением

$$x = v_0 t,$$

так как $a_x = 0$. Исключая t из этих уравнений, получаем уравнение параболы

$$y = -\frac{qE}{2mv_0^2}x^2.$$

Пример 22.12. На какой угол отклонится электрон в примере 22.11, пройдя однородное электрическое поле до конца пластин (точка P на рис. 22.24)? Длина пластин составляет 6,0 см, $E = 5{,}0\times 10^{3}$ Н/Кл.

Решение. В точке P y-компонента скорости равна [см. (2.9в)]

$$v_y = \sqrt{2a_y y} = \sqrt{\left(\frac{2qE}{m}\right)\left(\frac{qEx^2}{2mv_0^2}\right)} = \frac{qEx}{mv_0},$$

а $v_x = v_0 = \text{const}$.

Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{qEx}{mv_0^2} =$$

$$= \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(5{,}0\cdot 10^{3}\ \text{Н/Кл})(6{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{м})}{(9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг})(1{,}0\cdot 10^{7}\ \text{м/с})^2} =$$

$$= 0{,}53,$$

откуда $\theta = 28^\circ$ (вниз от горизонтали).

22.11. Электрические диполи

Два равных по величине заряда противоположного знака, $+Q$ и $-Q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, образуют **электрический диполь**. Величина Ql называется **дипольным моментом** и обозначается символом p. Дипольным моментом обладают многие молекулы, например двухатомная молекула CO (атом C имеет небольшой положительный заряд, а O – небольшой отрицательный заряд); несмотря на то что молекула в целом нейтральна, в ней происходит разделение зарядов из-за неравного распределения электронов между двумя атомами. (Симметричные двухатомные молекулы, такие, как O_2, не обладают дипольным моментом.)

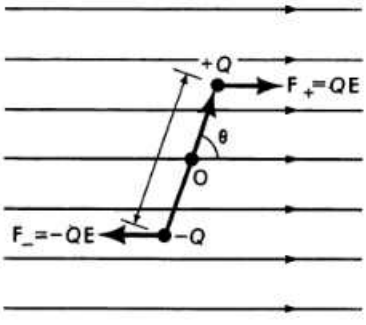


Рис. 22.25. Электрический диполь в однородном электрическом поле.

Рассмотрим вначале диполь с моментом $p = Ql$, помещенный в однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$ (рис. 22.25). Дипольный момент можно представить в виде вектора $\mathbf{p}$, равного по абсолютной величине Ql и направленного от отрицательного заряда к положительному. Если поле однородно, то силы, действующие на положительный заряд, $Q\mathbf{E}$, и отрицательный, $-Q\mathbf{E}$, не создают результирующей силы, действующей на диполь. Однако они приводят к возникновению *вращающего момента*, величина которого относительно середины диполя O равна

$$\tau = QE\frac{l}{2}\sin\theta + QE\frac{l}{2}\sin\theta = pE\sin\theta, \qquad (22.8а)$$

или в векторной записи

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \qquad (22.8б)$$

В результате диполь стремится повернуться так, чтобы вектор $\mathbf{p}$ был параллелен $\mathbf{E}$. Работа W, совершаемая электрическим полем над диполем, когда угол θ изменяется от θ_1 до θ_2, дается выражением [см. (9.20)]

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = pE\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = pE(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

В результате работы, совершаемой электрическим полем, уменьшается потенциальная энергия U диполя; если положить $U = 0$, когда $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}(\theta = 90°)$, то

$$U = -W = -pE\cos\theta = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}. \qquad (22.9)$$

Если электрическое поле *неоднородно*, то силы, действующие на положительный и отрицательный заряды диполя, могут оказаться неодинаковыми по величине, и тогда на диполь, кроме вращающего момента, будет действовать еще и результирующая сила.

Итак, мы видим, что происходит с электрическим диполем, помещенным во внешнее электрическое поле. Обратимся теперь к другой стороне дела. Предположим,

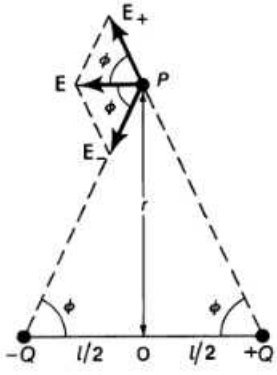


Рис. 22.26. Электрическое поле, создаваемое электрическим диполем.

что внешнее поле отсутствует, и определим электрическое поле, создаваемое *самим диполем* (способное действовать на другие заряды). Для простоты ограничимся точками, расположенными на перпендикуляре к середине диполя, подобно точке P на рис. 22.26, находящейся на расстоянии r от середины диполя. (Заметим, что r на рис. 22.26 не является расстоянием от каждого из зарядов до P, которое равно $(r^2 + l^2/4)^{1/2}$, и именно его следует подставить в формулу (22.4).) Напряженность электрического поля в точке P равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-,$$

где $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ – напряженности поля, создаваемые соответственно положительным и отрицательным зарядами, равные между собой по абсолютной величине:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(r^2 + l^2/4)}.$$

Их y-компоненты в точке P взаимно уничтожаются, и по абсолютной величине напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ равна

$$E = 2E_+ \cos\phi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(r^2 + l^2/4)}\frac{l}{2(r^2 + l^2/4)^{1/2}},$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} \quad [\text{вдоль перпендикуляра к середине диполя}]. \tag{22.10}$$

Вдали от диполя ($r \gg l$) это выражение упрощается:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \quad [\text{вдоль перпендикуляра к середине диполя, при } r \gg l]. \tag{22.11}$$

Видно, что напряженность электрического поля диполя убывает с расстоянием быстрее, чем для точечного заряда (как $1/r^3$ вместо $1/r^2$). Этого и следовало ожидать: на больших расстояниях два заряда противоположных знаков кажутся столь близкими, что нейтрализуют друг друга. Зависимость вида $1/r^3$ справедлива и для точек, не лежащих на перпендикуляре к середине диполя (см. задачи).

Заключение

Существуют два вида *электрических зарядов* – положительные и отрицательные. Эти названия следует понимать алгебраически: всякий заряд содержит в единицах системы СИ плюс или минус столько-то кулонов (Кл). Электрический заряд *сохраняется*: если в результате какого-либо процесса возникает некоторое количество заряда одного знака, то непременно появляется равное количество заряда противоположного знака на этом же или на

других телах; *суммарный* же заряд останется равен нулю. Согласно атомной теории, источником электрического заряда является атом, который состоит из положительно заряженного ядра, окруженного отрицательно заряженными электронами. Заряд электрона равен $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Проводниками являются вещества, в которых имеется достаточно электронов, обладающих свободой передвижения, в то время как вещества, у которых мало свободных электронов, оказываются изоляторами. Тело с избытком электронов заряжено отрицательно, а тело, в котором электронов меньше нормального количества, заряжено положительно. Тело может приобретать заряд одним из трех способов: трением, когда электроны переходят с одного тела на другое; за счет электропроводности, когда заряд при контакте переходит с одного заряженного тела на другое, и посредством индукции, когда разделение зарядов происходит при приближении к телу заряженного предмета без прямого контакта между ними.

Электрические заряды взаимодействуют друг с другом. Между зарядами противоположного знака возникает сила притяжения. Заряды одного знака отталкиваются. Сила, с которой один точечный заряд действует на другой, пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (*закон Кулона*):

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Заряд или группа зарядов создают в пространстве *электрическое поле*. Силу, действующую на заряженный предмет, можно объяснить существованием в месте его расположения электрического поля. *Напряженность электрического поля* $\mathbf{E}$ в любой точке пространства представляет собой отнесенную к единице заряда силу, действующую на положительный пробный заряд q в этой точке: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$. Электрическое поле графически представляют в виде *силовых линий*, которые начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Направление силовой линии в каждой точке соответствует направлению силы, которая действует на малый положительный пробный заряд, помещенный в эту точку; плотность силовых линий пропорциональна E. Электростатическое поле (т.е. поле в отсутствие движущихся зарядов) внутри хорошего проводника равно нулю; силовые линии вблизи заряженного проводника перпендикулярны его поверхности.

Электрический диполь – это система из двух равных по величине зарядов противоположного знака $+Q$ и $-Q$, находящихся на расстоянии l. Величина $p = Ql$ называется дипольным моментом. Диполь, помещенный в однородное электрическое поле, испытывает действие момента

сил (если **p** и **E** не параллельны) и не испытывает действия результирующей силы. Создаваемое диполем электрическое поле убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния r от диполя ($E \sim 1/r^3$) при $r \gg l$.

Вопросы

1. Вы наэлектризовали пластмассовую расческу, потерев ее шелковым шарфом. Как определить, какой заряд у расчески, положительный или отрицательный?
2. Почему грамофонная пластинка, протертая тканью, начинает притягивать пыль?
3. Почему капли тумана или дождя образуются на ионах или электронах в воздухе?
4. Догадываетесь ли вы, для чего к автомобилям, перевозящим огнеопасные жидкости, прикрепляют цепь, которая волочится по земле?
5. Объясните разницу между *полным зарядом* проводника и «свободными» зарядами в проводнике.
6. Может ли индуцироваться заряд на изоляторе так же, как и на проводнике (рис. 22.4 и 22.5)?
7. На рис. 22.4 и 22.5 показано, что заряженный стержень, поднесенный к незаряженному металлическому предмету, притягивает или отталкивает электроны. В металле очень много электронов, однако лишь некоторые из них перемещаются, как это показано на рисунках. А почему не все?
8. Когда электроскоп заряжают, его листочки отталкиваются друг от друга и располагаются под углом. Какая сила компенсирует электрическое отталкивание, не давая листочкам расходиться еще дальше?
9. Почему нейлоновая рубашка или блузка, которую вынули из сушильного барабана, иногда липнет к телу?
10. Натертую тканью пластмассовую линейку подносят к электрически нейтральному кусочку бумаги, который притягивается к ней. Изобразите происходящее разделение зарядов и объясните, отчего возникает притяжение.
11. Математическая запись закона Кулона очень напоминает закон всемирного тяготения Ньютона. В чем различие этих законов? Сравните гравитационную массу и электрический заряд.
12. Обычно мы не замечаем электрического или гравитационного взаимодействия между телами. Объясните, в чем причина в каждом из этих случаев. Приведите примеры, когда такие взаимодействия наблюдаются, и объясните, по чему.
13. Являются ли электрические силы консервативными? Объясните ответ (см. гл. 7).
14. Существует ли притяжение между телами на рис. 22.5, *б*? Почему?
15. Какие экспериментальные факты, упоминаемые в тексте, исключают возможность того, что числитель в выражении для закона Кулона содержит сумму зарядов $(Q_1 + Q_2)$, а не их произведение $Q_1 Q_2$?
16. Отрицательно заряженная линейка притягивает подвешенный на нитке предмет (рис. 22.2). Обязательно ли предмет имеет положительный заряд? Если предмет отталкивается, то значит ли это, что он заряжен отрицательно?
17. Когда заряженная линейка притягивает кусочки бумаги, некоторые из них, коснувшись линейки, тут же отскакивают. Объясните это наблюдение.
18. При определении напряженности электрического поля обязательно ли пользоваться *положительным* пробным зарядом или можно воспользоваться отрицательным зарядом? Объясните ответ.
19. Мы хотим определить напряженность электрического поля вблизи положительно заряженной металлической сферы (хорошего проводника). Для этого подносим к ней небольшой пробный заряд q_0 и измеряем действующую на него силу F_0. Будет ли отношение F_0/q_0 больше, меньше или равно напряженности электрического поля **E** в этой точке до того, как в нее поместили пробный заряд? Что можно сказать о напряженности поля **E** в этой точке в присутствии пробного заряда q_0?
20. Почему при определении напряженности электрического поля используется *малый* пробный заряд?
21. Имеются два точечных заряда, Q и $2Q$, на расстоянии l друг от друга. Существует ли на соединяющей их прямой точка, где $E = 0$, если знаки зарядов а) противоположны и б) одинаковы? Если существует, то укажите, где примерно находится эта точка.
22. Пусть по кольцу (рис. 22.16) равномерно распределен отрицательный заряд Q. Каковы величина и направление **E** в точке P?
23. Объясните, почему для электрического поля справедлив принцип суперпозиции [формула (22.5)].
24. Рассмотрим малый положительный пробный заряд, помещенный на силовую линию электрического поля (например, в точку P на

рис. 22.21, *а*). Будут ли скорость и ускорение пробного заряда направлены вдоль этой линии? Дайте подробный ответ.

25. Пользуясь тремя свойствами силовых линий, указанными в разд. 22.8, покажите, что силовые линии, начинающиеся или заканчивающиеся на уединенном точечном заряде, распределены симметрично вокруг этого заряда.

26. Отрицательный точечный заряд помещен строго в середине отрезка между двумя равными по величине положительными точечными зарядами. Как будет двигаться отрицательный заряд? Находится ли он в равновесии? Если да, то какого типа это равновесие? Что будет, если взять не отрицательный, а положительный заряд?

27. Изобразите силовые линии электрического поля, создаваемого двумя отрицательными зарядами, находящимися на расстоянии l друг от друга.

28. Пусть два противоположных по знаку заряда (рис. 22.21, *а*) удалены друг от друга на 12,0 см. Определите напряженность электрического поля на расстоянии 2,5 см от положительного заряда. С какой стороны от заряда (сверху, снизу, справа или слева) напряженность электрического поля максимальна? Минимальна?

29. Почему силовые линии никогда не пересекаются?

30. В каком отношении движение электронов в примере 22.11 сходно с движением брошенного тела (разд. 3.8)? В чем разница?

31. Опишите движение диполя (рис. 22.25) из начального положения, показанного на рисунке.

32. Объясните, как может возникать результирующая сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле.

Задачи

Раздел 22.5

1. (I) Какое число электронов соответствует заряду 100 мкКл?

2. (I) Два заряженных тела взаимодействуют с силой 480 мН. С какой силой они будут действовать друг на друга, если расстояние между ними уменьшить в 8 раз?

3. (I) С какой силой ядро атома железа ($q = +26e$) притягивает электрон на внутренней оболочке, находящийся на расстоянии $1{,}0 \cdot 10^{-12}$ м.

4. (I) Чему равен суммарный заряд всех электронов в 1,0 кг H_2O?

5. (II) На каком расстоянии друг от друга должны находиться два электрона, чтобы сила электрического взаимодействия между ними равнялась весу каждого из них у поверхности Земли?

6. (II) Три заряда, $+4{,}0$, $-3{,}0$ и $-5{,}0$ мкКл, помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 1,40 м. Определите величину и направление силы, действующей на каждый заряд со стороны двух других.

7. (II) Точечные заряды $+88$, -55 и $+70$ мкКл расположены на одной прямой с интервалом 0,75 м. Определите силу, действующую на каждый из зарядов со стороны двух других.

8. (II) Заряды $+0{,}0050$ Кл помещены в вершинах квадрата со стороной 1,15 м. Определите величину и направление силы, действующей на каждый заряд.

9. (II) Решите предыдущую задачу, заменив два заряда по диагонали квадрата отрицательными той же величины.

10 (II) В простейшей модели атома водорода предполагается, что электрон движется вокруг ядра по круговой орбите со скоростью $1{,}1 \cdot 10^6$ м/с. Чему равен радиус орбиты?

11 (II) Заряды $-8{,}0$ и $+1{,}8$ мкКл находятся на расстоянии 11,8 см друг от друга. Где можно поместить третий заряд, чтобы действующая на него сила равнялась нулю?

12. (II) Два точечных заряда составляют в сумме 880 мкКл. При расстоянии между зарядами 1,10 м между ними действует сила отталкивания, равная 22,8 Н. Чему равен каждый заряд? А если заряды притягиваются?

13. (II) Два точечных заряда находятся на фиксированном расстоянии друг от друга, а их суммарный заряд равен Q_T. Чему должен быть равен каждый заряд, чтобы действующая между ними сила была максимальна? Минимальна?

14. (II) Медная монетка массой 3,0 г обладает положительным зарядом 0,55 мкКл. Какую долю своих электронов она потеряла?

15. (II) Листочками большого электроскопа служат проводники длиной 60 см с 25-граммовыми шариками на концах. Почти весь заряд сосредоточен на шариках. Чему равен суммарный заряд, сообщенный электроскопу, если каждый проводник отклонился на 30° от вертикали?

16. (II) Два заряда, $-Q_0$ и $-3Q_0$, находятся на расстоянии l друг от друга. Они свободны, однако остаются неподвижными из-за наличия третьего заряда. Чему равен третий заряд и где он находится?

17. (III) В каждую из вершин куба с ребром l помещен заряд Q. Чему равна сила, действующая на каждый заряд со стороны остальных?

18. (III) Две нити спиральной молекулы ДНК (носителя генетического кода клеток) удерживаются вместе электростатическими силами

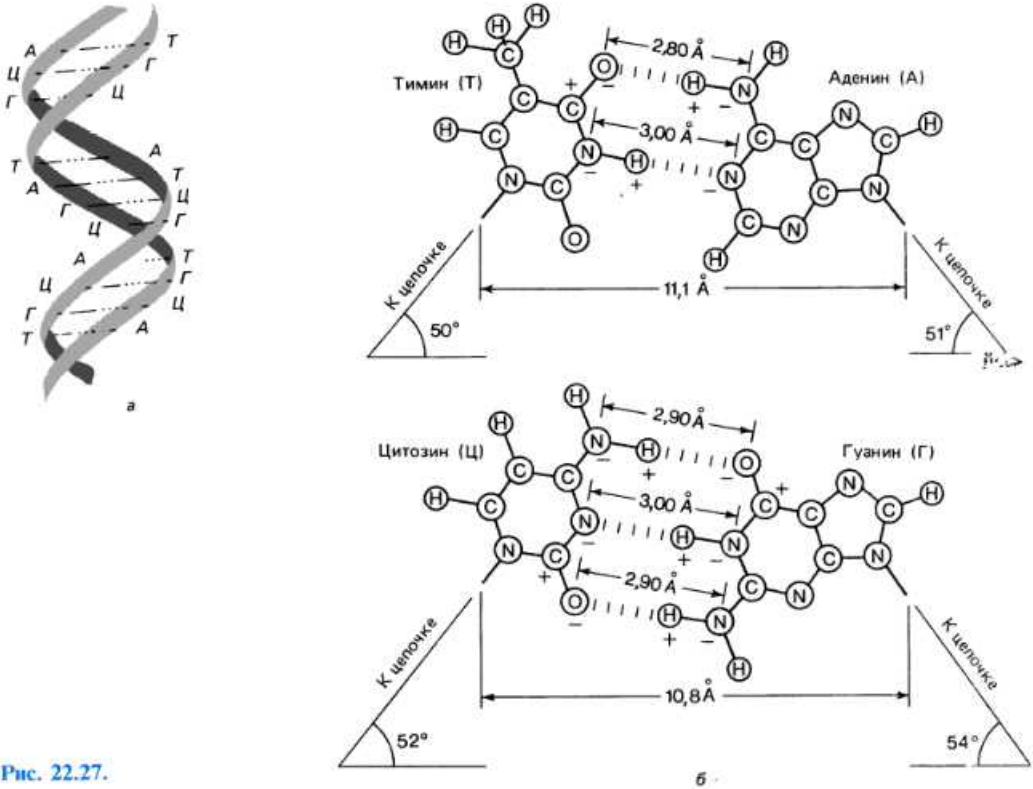


Рис. 22.27.

(рис. 22.27). Пусть заряд атомов H и N равен $0{,}2e$, заряд атомов C и O равен $0{,}4e$, атомы в каждой молекуле находятся на расстоянии $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ м, а углы между связями составляют 120°. Оцените силу, действующую между а) тимином и аденином; б) между цитозином и гуанином; в) между нитями ДНК, содержащими 10^5 пар таких молекул.

Раздел 22.7

19. (I) Каковы величина и направление напряженности электрического поля в точке, расположенной на расстоянии 35,0 см точно над зарядом $35{,}0 \cdot 10^{-4}$ Кл?

20. (I) Каковы величина и направление напряженности электрического поля в точке посредине между зарядами -20 и $+60$ мкКл, удаленными на расстояние 40 см друг от друга?

21. (I) Протон ($m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг) неподвижно висит в электрическом поле напряженностью **E**. Приняв во внимание силу тяжести, определите **E**.

22. (II) Имеются два неизвестных заряда, Q_1 и Q_2. Что можно сказать об их величине, если напряженность электрического поля равна нулю в точке на линии, соединяющей заряды и отстоящей от Q_1 на $^1/_3$ общего расстояния между зарядами?

23. (II) Используя закон Кулона, определите величину и направление напряженности электрического поля в точках A и B на рис. 22.28, создаваемого двумя положительными зарядами ($Q = 4{,}0$ мкКл). Согласуется ли полученный результат с рис. 22.21, *б*?

24. (II) Рассчитайте напряженность электрического поля в центре квадрата со стороной 25 см, когда в одной из вершин находится заряд $+33{,}0$ мкКл, а в остальных – заряды по $-21{,}0$ мкКл.

25. (II) Рассчитайте напряженность электрического поля в вершине квадрата со стороной 80 см, если в три остальные вершины помещены заряды по $18{,}2 \cdot 10^{-7}$ Кл.

26. (II) Рассчитайте напряженность электрического поля в центре квадрата со стороной 10 см, если в его вершинах находятся (по порядку) заряды 1,0; 2,0; 3,0 и 4,0 мкКл.

27. (II) В какой точке $x = x_M$ напряженность электрического поля на оси кольца (пример 22.6) максимальна?

28. (II) Покажите, что напряженность электри-

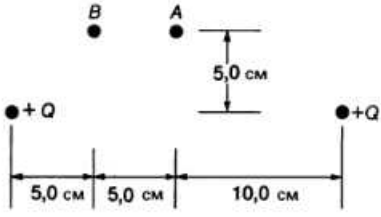


Рис. 22.28.

ческого поля однородно заряженного проводника (рис. 22.17) длиной L в точке P, находящегося на перпендикуляре к середине проводника O на расстоянии x от проводника, равна

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \frac{L}{(L^2 + 4x^2)^{1/2}},$$

где λ – заряд единицы длины.

29. (II) По диску радиусом a равномерно распределен заряд Q. а) Выразите зависимость $\mathbf{E}$ от расстояния r вдоль оси диска. (Подсказка: воспользуйтесь результатом примера 22.6). б) Покажите, что при $a \to \infty$ напряженность поля равна $E = \sigma/2\varepsilon_0$, где σ – поверхностная плотность заряда, и не зависит от расстояния (другими словами, поле $\mathbf{E}$ однородно).

30. (II) Пусть заряд равномерно распределен только по верхней половине кольца (рис. 22.16). Определите напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в точке P (направьте ось y вертикально вверх).

31. (III) Получите формулу для напряженности электрического поля на расстоянии z над центром заряженной плоскости (рис. 22.18) в общем случае, когда z не обязательно много меньше L.

32. (III) Пусть однородно заряженный проводник (рис. 22.17) направлен вертикально вверх от точки O и имеет длину L. а) Определите величину и направление напряженности электрического поля в точке P на расстоянии x от точки O (иными словами, надо рассчитать $\mathbf{E}$ вблизи одного из концов длинного проводника). б) Покажите, что при $L = \infty$ вектор $\mathbf{E}$ составляет угол 45° с горизонталью для любых x.

33. (III) Пусть в примере 22.7 $x = 0{,}250$ м, $Q = 2{,}0$ мкКл и концы однородно заряженного проводника расположены на 2,0 м выше точки O и на 4,0 м ниже точки O. а) Рассчитайте E_x и E_y. б) Оцените ошибку, возникшую при использовании для этого случая результата примера 22.7 ($E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 x$), выразив ее в виде $(E_x - E)/E$ и E_y/E.

Раздел 22.8

34. (I) Число силовых линий электрического поля, пересекающих перпендикулярную единичную поверхность, всегда можно сделать пропорциональным напряженности электрического поля E. Если бы, однако, закон Кулона не выполнялся (т. е. если бы создаваемое уединенным зарядом поле не убывало пропорционально квадрату расстояния, а показатель в знаменателе отличался хотя бы немного от 2), то силовые линии не обладали бы этим свойством. Почему? (Подсказка: рассмотрите уединенный точечный заряд.)

35. (II) Изобразите силовые линии электрического поля двух точечных зарядов, $+q$ и $-2q$, находящихся на расстоянии l друг от друга.

36. (II) Изобразите силовые линии электрического поля для не слишком длинного прямолинейного, равномерно заряженного проводника. Расстояние между линиями вблизи проводника должно быть несколько меньше его длины l. (Подсказка: рассмотрите также точки, сильно удаленные от проводника.)

Раздел 22.9

37. (II) Рассмотрим две тонкие цилиндрические коаксиальные оболочки из металла (например, коаксиальный кабель). По внешней оболочке распределен заряд Q_1, по внутренней – заряд $-Q_2$. Изобразите силовые линии электрического поля на плоскости, перпендикулярной оси цилиндров, если а) $Q_1 = Q_2$; б) $Q_1 < Q_2$; в) $Q_1 > Q_2$.

Раздел 22.10

38. (I) Какова напряженность электрического поля в точке пространства, где протон ($m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг) движется с ускорением $7{,}6 \cdot 10^4$ м/с^2?

39. (II) Электрон с начальной скоростью $v_0 = 2{,}4 \cdot 10^6$ м/с движется параллельно электрическому полю ($\mathbf{v}_0 \| \mathbf{E}$) с напряженностью $E = 8{,}4 \cdot 10^3$ Н/Кл. а) Какое расстояние он пройдет, прежде чем начнет двигаться в обратном направлении? б) Через какое время он вернется в исходную точку?

40. (II) Предположим, что электрон влетает в однородное электрическое поле, как показано на рис. 22.24, посередине между пластинами, но движется вверх под углом 45°. Какую максимальную скорость должен иметь электрон, чтобы не попасть на верхнюю пластину?

41. (II) Пусть электрон из примера 22.12 влетает в электрическое поле посередине между пластинами под углом θ_0 к горизонтали. Его

траектория симметрична, и он выходит из зазора под тем же углом θ_0 у края верхней пластины. Чему равен угол θ_0?

42. (II) Водяная капля радиусом 0,020 мм неподвижно взвешена в воздухе. Если напряженность электрического поля у поверхности земли равна 100 Н/Кл, сколько электронов на этой капле?

Раздел 22.11

43. (II) Дипольный момент молекулы HCl равен $3{,}4\cdot10^{-30}$ Кл·м. Расстояние между атомами составляет около $1{,}0\cdot10^{-10}$ м. а) Чему равен результирующий заряд каждого атома? б) Является ли он целым кратным e? Если нет, то почему? в) Какой максимальный момент силы будет действовать на этот диполь в поле напряженностью $2{,}5\cdot10^{4}$ Н/Кл? г) Какая энергия необходима для поворота одной молекулы на 45° из равновесного положения с минимальной потенциальной энергией?

44. (II) Предположим, что оба заряда на рис. 22.26 положительны. а) Покажите, что напряженность поля вдоль перпендикуляра к середине соединяющего их отрезка равна $(1/4\pi\varepsilon_0)(2Q/r^2)$ при $r \gg l$. б) Объясните, почему напряженность электрического поля в отличие от диполя убывает обратно пропорционально квадрату, а не кубу расстояния.

45. (II) Электрический диполь p с моментом инерции I помещен в однородное электрическое поле напряженностью **E**. а) Если отклонить диполь на угол θ (рис. 22.25), то при каких условиях он начнет совершать простые гармонические колебания? б) Какова будет частота колебаний?

46. (II) Диполь **p** помещен в неоднородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$, направленное вдоль оси x. Покажите, что если **E** зависит только от x, то действующая на диполь результирующая сила равна

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{E}}{dx}\right)\mathbf{i},$$

где $d\mathbf{E}/dx$ – градиент поля по оси x.

47. (II) а) Покажите, что на оси диполя (т. е. на линии, проходящей через оба заряда) электрическое поле имеет напряженность

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

при $r \gg l$ (рис. 22.26), где r – расстояние от данной точки до середины диполя. б) Куда направлен вектор **E**?

48. (II) Один из вариантов *электрического квадруполя* образован двумя диполями, соединенными, скажем, отрицательными зарядами. Иначе говоря, посередине находится заряд $-2Q$, а по обе стороны от него – заряды $+Q$. Определите напряженность электрического поля **E** вдоль перпендикуляра к середине квадруполя и покажите, что E убывает как $1/r^4$.

49. (III) *Напряженность электрического поля диполя в произвольной точке.* Примем точку O на рис. 22.26 за начало прямоугольной системы координат, направив ось x горизонтально вправо, а ось y вертикально вверх. а) Покажите, что в любой удаленной точке $P(x, y)$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}},$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3pxy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

б) Покажите, что в полярных координатах r, θ (см. приложение В) при $r \gg l$ компоненты напряженности электрического поля имеют вид

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3},$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}.$$

Задачи для программируемого калькулятора

***50.** (III) *Расчет силовых линий электрического поля.* Составьте по приведенным указаниям программу, позволяющую нарисовать картину силовых линий для заданного распределения зарядов на плоскости. Мы ограничимся не более чем тремя зарядами в плоскости xy. Величина зарядов (в кулонах) и их координаты будут исходными параметрами: (Q_a, x_a, y_a; Q_b, x_b, y_b; Q_c, x_c, y_c). Поскольку нам необходимо получать точки вдоль данной силовой линии, в число исходных параметров войдет Δl – шаг, с которым определяется положение точки на силовой линии; величину Δl следует выбирать не больше $^1/_{50}$ расстояния между ближайшими друг к другу зарядами; если же график не получается, то Δl следует сделать еще меньше. Наконец, задается точка (x_1, y_1) вблизи одного из зарядов. В этой исходной точке вычисляются по закону Кулона значения E_{1x} и E_{1y}, а затем угол $\theta_1 = \operatorname{arctg}(E_{1y}/E_{1x})$. Угол θ_1 задает направление электрического поля в этой точке. Следующая точка на этой силовой линии [обозначим ее (x_2, y_2)] лежит на расстоянии Δl от точки (x_1, y_1) под углом θ_1, т. е. $x_2 = x_1 + \Delta l\cos\theta_1$, $y_2 = y_1 + \Delta l\sin\theta_1$. После определения (x_2, y_2) вычисляется значение **E** в этой точке. Затем определяются координаты треть-

ей точки и т. д. до некоторой последней точки (x_N, y_N). (Нужно ли задать N в качестве исходного параметра?) Вычисленные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) и т. д. (или для простоты каждая пятая или десятая из ряда) наносятся на график и соединяются линией. Таким образом мы получаем одну силовую линию. Для построения следующей линии задается новая начальная точка (x_1, y_1). В качестве исходных следует, по-видимому, выбрать несколько точек, равномерно распределенных около каждого заряда (следует иметь в виду, что некоторые силовые линии могут начинаться на одном заряде и заканчиваться на другом). В таблице приведено несколько конфигураций зарядов, для которых полезно провести расчет силовых линий. Попробуйте предусмотреть в программе критерии, останавливающие расчет, когда линия подходит слишком близко к заряду или выходит за пределы интересующей нас области.

*51. (III) *Равномерно заряженный проводник.* Составьте программу (по указаниям задачи 50) для вычисления координат силовых линий поля тонкого заряженного проводника (рис. 22.17) конечной длины L. Нанесите по меньшей мере шесть линий через равные промежутки от одного конца до середины проводника. Это даст вам четвертую часть общей картины, остальные же три четверти получаются из соображений симметрии. Линии следует рассчитывать примерно до расстояния L от проводника.

Q_a	x_a	y_a	Q_b	x_b	y_b	Q_c	x_c	y_c	Примечание
+1	0	0	−1	10,0	0	0	0	0	Диполь (ср. рис. 22. 21, *а*)
+1	0	0	+1	10,0	0	0	0	0	Ср. рис. 22. 21, *б*
+2	0	0	−1	10,0	0	0	0	0	
+1	0	0	+1	10,0	0	+1	5,0	8,66	Равносторонний треугольник
−3	0	0	−1	0	5,0	+2	5,0	0,0	

23 Теорема Гаусса

Теорема Гаусса [1], которую мы докажем и обсудим в настоящей главе, устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона.

В принципе напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, всегда можно вычислить с помощью закона Кулона. Полное электрическое поле в любой точке является векторной суммой (интегралом) вкладов всех зарядов [см. уравнения (22.5) и (22.6)]. Однако, за исключением самых простых случаев, вычислить эту сумму или интеграл крайне сложно; если получить аналитическое решение не удается (как в примерах разд. 22.7), можно воспользоваться компьютером.

В ряде случаев напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, удается рассчитать гораздо проще и изящнее, пользуясь теоремой Гаусса (как мы увидим в разд. 23.3). Основная ценность теоремы Гаусса состоит в том, что она позволяет глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядами и полем (по этой причине настоящая глава может показаться до некоторой степени формальной).

Прежде чем переходить собственно к теореме Гаусса, необходимо ввести понятие *потока*.

23.1. Поток напряженности электрического поля

Рассмотрим площадку A, которую пронизывают силовые линии однородного электрического поля напряженностью $\mathbf{E}$ (рис. 23.1). Площадка может иметь форму прямоугольника (как на рисунке), круга или любую другую. Если напряженность электрического поля перпендикулярна площадке (рис. 23.1, *а*), то **поток напряженности** Φ_E через

[1] Эту теорему М. В. Остроградский (1801–1862) доказал в 1828 г. применительно к теории теплоты; К. Гаусс (1777–1855) получил соответствующий результат для электрического поля и опубликовал его в 1839 г.– *Прим. перев.*

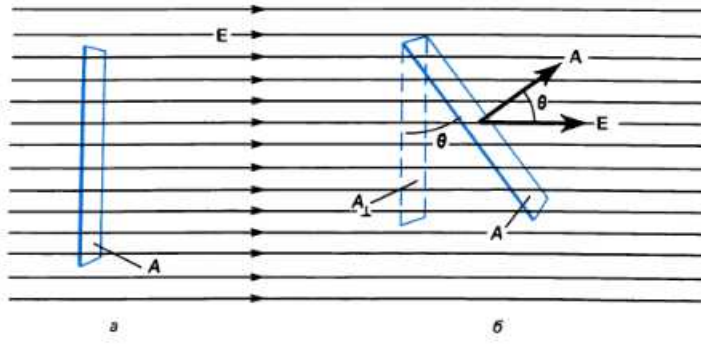


Рис. 23.1 Однородное электрическое поле **E** (изображенное параллельными силовыми линиями) проходит через поверхность площадки A, перпендикулярную силовым линиям (*а*) и не перпендикулярную силовым линиям (*б*). Штриховыми линиями изображена проекция $A_\perp$ площади A на плоскость, перпендикулярную силовым линиям поля **E**.

нее определяется как

$$\Phi_E = E A .$$

Если площадка A не перпендикулярна **E**, а составляет с **E** некоторый угол θ (рис. 23.1, *б*), то ее будет пронизывать меньше силовых линий. В этом случае поток напряженности через площадку будет определяться формулой

$$\Phi_E = E A_\perp = E A \cos\theta \qquad \text{[поле } \mathbf{E} \text{ однородно]}, \qquad (23.1а)$$

где $A_\perp$ – проекция площадки A на плоскость, перпендикулярную **E**. Площадку A можно представить вектором **A**, направленным перпендикулярно ее поверхности, а по величине пропорциональным площади (рис. 23.1, *б*). Тогда θ – угол между **E** и **A**, и поток напряженности можно записать в виде произведения двух векторов:

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{[поле } \mathbf{E} \text{ однородно]}, \qquad (23.1б)$$

В силу принятого нами определения поток напряженности допускает наглядное толкование, основанное на понятии силовых линий. Как мы видели в разд. 22.8, число силовых линий N, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную направлению поля ($A_\perp$), пропорционально напряженности электрического поля: $E \sim N/A_\perp$. Следовательно,

$$N \sim E A_\perp = \Phi_E ,$$

т. е. поток напряженности поля через площадку пропорционален числу силовых линий, пересекающих ее поверхность.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда электрическое поле **E** неоднородно, а поверхность не плоская (рис. 23.2). Разобъем эту поверхность на n элементов, площади которых обозначим $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$. Разбиение должно быть таким, чтобы можно было считать 1) каждый элемент ΔA_i плоским и 2) электрическое поле в пределах элемента однородным. Тогда поток напряженности через всю поверхность будет суммой

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i ,$$

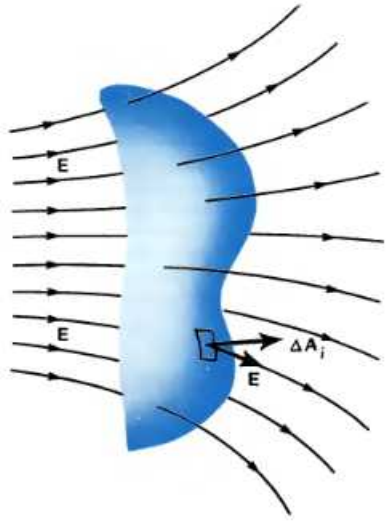


Рис. 23.2. Определение потока напряженности через искривленную поверхность; $\Delta\mathbf{A}_i$ – векторный элемент поверхности.

где $\mathbf{E}_i$ – напряженность поля, отвечающая элементу $\Delta\mathbf{A}_i$. В пределе $\Delta\mathbf{A}_i \to 0$ сумма переходит в интеграл по всей поверхности, и равенство становится точным:

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \qquad (23,2)$$

Во многих случаях (и, в частности, в случае теоремы Гаусса) мы имеем дело с потоком через замкнутую поверхность, т. е. через поверхность, ограничивающую замкнутый объем, подобно шару или футбольному мячу (рис. 23.3). В таком случае результирующий поток через поверхность записывают в виде

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \qquad \text{[через замкнутую поверхность]}, \qquad (23.3)$$

где знак $\oint$ означает, что интеграл берется по замкнутой поверхности.

До сих пор мы не учитывали существование неоднозначности в выборе направления вектора $\mathbf{A}$; например, на рис. 23.1 вектор $\mathbf{A}$ может быть направлен как вправо

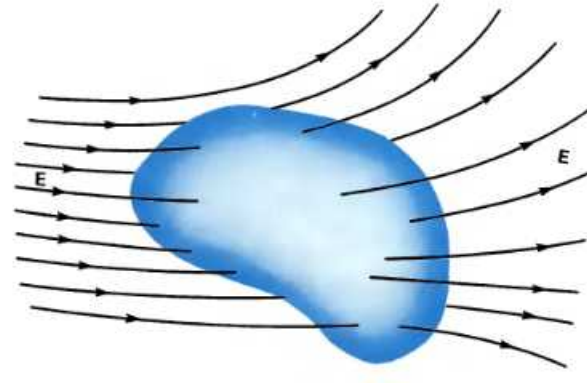


Рис. 23.3. Поток напряженности через замкнутую поверхность.

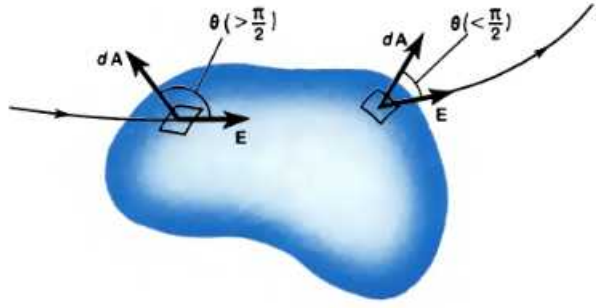


Рис. 23.4. Вектор $d\mathbf{A}$ элемента замкнутой поверхности принято направлять нормально к поверхности наружу.

вверх, так и влево вниз – в любом случае он все равно будет перпендикулярен поверхности. В случае замкнутой поверхности условились направлять вектор $\mathbf{A}$ (или $d\mathbf{A}$) *наружу* из ограниченного поверхностью объема (рис. 23.4). Для силовой линии, выходящей из объема (справа на рис. 23.4), угол θ между $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{A}$ меньше $\pi/2$ ($= 90°$) и $\cos\theta > 0$; для линии, входящей в объем (слева на рис. 23.4), $\theta > \pi/2$ и $\cos\theta < 0$. Соответственно *поток, входящий в замкнутый объем, отрицателен* ($\int E\cos\theta dA < 0$), а *поток, выходящий из объема, положителен*. Формула (23.3) дает, таким образом, величину потока, выходящего из объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Если значение Φ_E отрицательно, то результирующий поток направлен внутрь объема.

На рис. 23.3 число линий, входящих в объем, равно числу выходящих линий. Поэтому $\Phi_E = 0$: результирующий поток через поверхность равен нулю. Поток $\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ отличен от нуля лишь в том случае, когда какое-то число силовых линий начинается или заканчивается внутри замкнутой поверхности. А поскольку силовые линии могут начинаться или заканчиваться только на электрических зарядах, поток будет отличен от нуля лишь в том случае, когда суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю. Например, поверхность A_1 на рис. 23.5 окружает положительный заряд, и поток напряженности электрического поля через эту поверхность направлен наружу ($\Phi_E > 0$); внутри поверхности A_2 заключен такой же по величине отрицательный заряд, и поток направлен внутрь этой поверхности ($\Phi_E < 0$). Для конфигурации, показанной на рис. 23.6, поток через поверхность отрицателен (подсчитайте число силовых линий!). Поток Φ_E

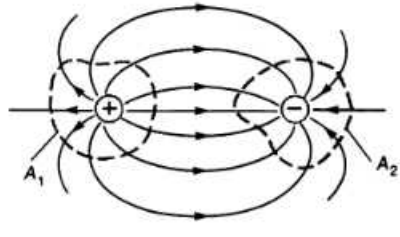


Рис. 23.5. Электрический диполь. Поток через поверхность A_1 положителен, а через поверхность A_2 отрицателен.

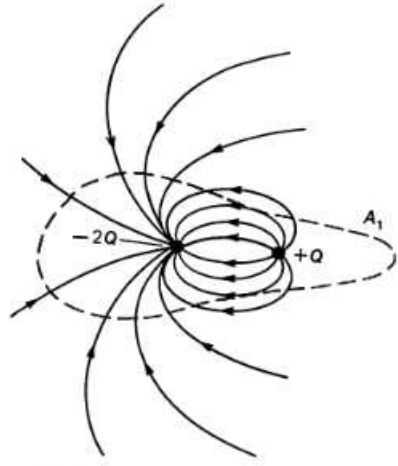


Рис. 23.6. Суммарный поток через поверхность A_1 отрицателен.

зависит от заряда, и именно в этом состоит суть теоремы Гаусса [1].

23.2. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса устанавливает точное соотношение между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность и суммарным зарядом Q внутри этой поверхности:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{23.4}$$

где ε_0 – та же константа (электрическая постоянная), что и в законе Кулона. Подчеркнем, что Q – это заряд, заключенный внутри той поверхности, по которой берется интеграл в левой части. При этом не существенно, как

[1] Понятие потока в равной степени применимо и к течению жидкости, и здесь возникает интересная аналогия. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в каждой точке можно сопоставить скорости течения жидкости $\mathbf{v}$, а силовые линии поля – линиям тока жидкости. Поток Φ через поверхность это не что иное, как объемный расход жидкости, $\Phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$. Силовые линии (линии тока) на рис. 23.1–23.3 соответствуют установившемуся ламинарному течению жидкости без источников (например, кранов) и стоков (сливных отверстий). Результирующий поток через замкнутую поверхность равен нулю: сколько жидкости втекает, столько и вытекает (рис. 23.3). На рис. 23.5 и 23.6 имеются источники (соответствующие положительным зарядам), где силовые линии начинаются, и стоки (отрицательные заряды), где силовые линии кончаются. Хотя эта аналогия интересна и наглядна, не следует заходить слишком далеко: электрическое поле не связано с потоком какого-либо вещества. Понятие потока можно ввести для любого векторного поля, как это мы сделаем ниже для магнитного поля.

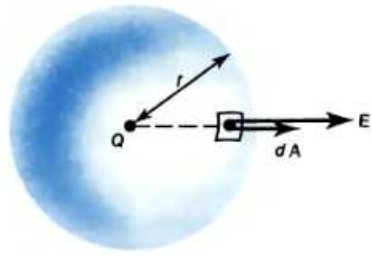


Рис. 23.7. Сферическая поверхность, окружающая уединенный точечный заряд Q.

именно распределен заряд внутри поверхности; заряды вне поверхности не учитываются. (Внешний заряд может повлиять на расположение силовых линий, но не на алгебраическую сумму линий, входящих внутрь поверхности и выходящих наружу.) [1)]

Прежде чем переходить к обсуждению теоремы Гаусса, заметим, что интеграл по поверхности на практике не всегда легко вычисляется, однако необходимость в этом возникает не часто, за исключением самых простых ситуаций, которые мы рассмотрим ниже (в основном в разд. 23.3).

Как же связаны между собой теорема Гаусса и закон Кулона? Покажем вначале, что закон Кулона следует из теоремы Гаусса. Рассмотрим уединенный точечный заряд Q. По предположению теорема Гаусса справедлива для произвольной замкнутой поверхности. Выберем поэтому такую поверхность, с которой удобнее всего иметь дело: симметричную поверхность сферы радиусом r, в центре которой находится наш заряд Q (рис. 23.7). Поскольку сфера (конечно, воображаемая) симметрична относительно заряда, расположенного в ее центре, напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ должна иметь одно и то же значение в любой точке сферы; кроме того, вектор $\mathbf{E}$ всюду направлен наружу (или всюду внутрь) параллельно вектору $d\mathbf{A}$ элемента поверхности. Тогда равенство

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

[1)] Заметим, что теорема Гаусса выглядела бы намного сложнее, если бы мы воспользовались постоянной $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, которая применялась в законе Кулона (22.1):

Закон Кулона	*Теорема Гаусса*
$E = k\dfrac{Q}{r^2}$,	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi k Q$,
$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$,	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0$.

Теорема Гаусса проще записывается через ε_0; закон Кулона – через k. Сейчас принято пользоваться постоянной ε_0, так как теорема Гаусса отражает более общие закономерности, и поэтому лучше записывать ее в более простом виде.

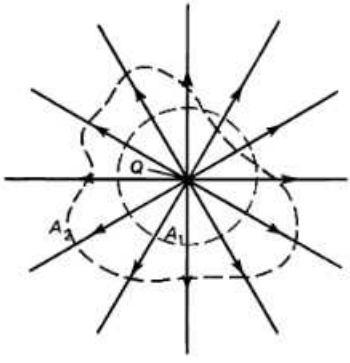


Рис. 23.8. Уединенный точечный заряд, окруженный сферической поверхностью A_1 и поверхностью формы A_2.

принимает вид

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \oint d\mathbf{A} = E(4\pi r^2),$$

(площадь сферы радиусом r равна $4\pi r^2$). Отсюда находим

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Мы получили закон Кулона в форме (22.4).

Теперь об обратном. В общем случае теорему Гаусса нельзя вывести из закона Кулона: теорема Гаусса является более общим (и более тонким) утверждением, нежели закон Кулона. Однако для некоторых частных случаев теорему Гаусса удается получить из закона Кулона; мы используем общие рассуждения относительно силовых линий. Рассмотрим для начала уединенный точечный заряд, окруженный сферической поверхностью (рис. 23.7). Согласно закону Кулона, напряженность электрического поля в точке на поверхности сферы равна $E = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q/r)$. Проделав в обратном порядке аналогичные рассуждения, получим

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} d\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Это и есть теорема Гаусса, и мы вывели ее для частного случая точечного заряда в центре сферической поверхности. Но что можно сказать о поверхности неправильной формы, например поверхности A_2 на рис. 23.8? Через эту поверхность проходит то же число силовых линий, что и через сферу A_1, но поскольку, как мы видели в разд. 23.1, поток напряженности электрического поля через поверхность пропорционален числу проходящих через нее силовых линий, поток через A_2 равен потоку через A_1:

$$\oint_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Следует ожидать поэтому, что формула

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

справедлива для *любой* замкнутой поверхности, окружающей точечный заряд.

Рассмотрим, наконец, случай, когда внутри поверхности находится не единственный заряд. Для каждого заряда в отдельности

$$\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}.$$

Но коль скоро полная напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ есть сумма напряженностей, обусловленных от-

дельными зарядами, $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$, то

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint (\sum \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{A} = \sum \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где $Q = \sum Q_i$ – суммарный заряд, заключенный внутри поверхности. Итак, эти простые рассуждения подсказывают нам, что теорема Гаусса справедлива для любого распределения электрических зарядов внутри любой замкнутой поверхности. Следует иметь в виду, однако, что поле $\mathbf{E}$ не обязательно обусловлено только зарядами Q, которые находятся внутри поверхности. Например, на рис. 23.3 электрическое поле $\mathbf{E}$ существует во всех точках поверхности, однако оно создается вовсе не зарядом внутри поверхности (здесь $Q = 0$). Теорема Гаусса справедлива для потока напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность; она утверждает, что если поток, направленный внутрь поверхности, не равен потоку, направленному наружу, то это обусловлено наличием зарядов внутри поверхности.

Теорема Гаусса справедлива для любого векторного поля, обратно пропорционального квадрату расстояния, например для гравитационного поля. Но для полей другого типа она не будет выполняться. Допустим, например, что поле точечного заряда убывает как kQ/r; тогда поток через сферу радиусом r определялся бы выражением

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \left(\frac{kQ}{r}\right)\left(4\pi r^2\right) = \left(4\pi kQ\right) r.$$

Чем больше радиус сферы, тем больше был бы поток, несмотря на то что заряд внутри сферы остается постоянным.

23.3. Применения теоремы Гаусса

Теорема Гаусса позволяет выразить связь между электрическим зарядом и напряженностью электрического поля в очень компактной и элегантной форме. С помощью этой теоремы удается легко найти напряженность поля в случае, когда распределение зарядов оказывается достаточно простым и симметричным. При этом, однако, необходимо позаботиться о надлежащем выборе поверхности интегрирования. Обычно стремятся выбрать поверхность так, чтобы напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ была постоянна по всей поверхности, или по крайней мере на определенных ее участках.

Пример 23.1. *Сферическая оболочка.* По тонкой сферической оболочке радиусом r_0 равномерно распределен заряд Q (рис. 23.9). Определите напряженность электрического поля а) вне оболочки, б) внутри оболочки.

Решение. а) Поскольку заряд распределен симметрично, электрическое поле

также должно быть симметричным. Оно должно быть направлено вдоль радиуса сферы к поверхности ($Q > 0$) или от нее ($Q < 0$) и в полярных координатах должно зависеть только от r, но не от θ. Напряженность поля будет, таким образом, одинакова во всех точках воображаемой сферы радиусом r, концентричной с оболочкой (A_1 на рис. 23.9). Поскольку напряженность поля $\mathbf{E}$ перпендикулярна

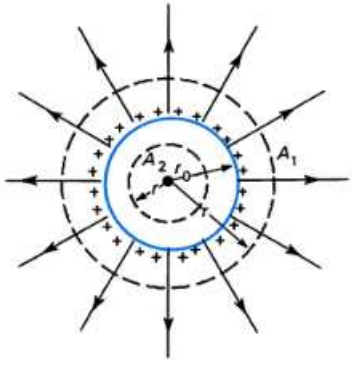


Рис. 23.9. Однородное распределение заряда по тонкой сферической оболочке радиусом r_0.

поверхности, теорема Гаусса дает

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad [r > r_0].$$

Таким образом, поле снаружи равномерно заряженной сферической оболочки имеет такую же напряженность, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре сферы.

б) Внутри оболочки поле также должно быть симметричным; поэтому напряженность поля E должна иметь одно и то же значение во всех точках сферической поверхности (A_2 на рис. 23.9), концентричной с оболочкой. Следовательно, E можно вынести из-под знака интеграла, и мы получим

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(4\pi r^2) = 0,$$

поскольку заряд Q внутри воображаемой сферы равен нулю. Итак,

$$E = 0 \qquad [r < r_0]$$

внутри равномерно заряженной сферы.

Полученный результат очень важен; он справедлив и для однородно заряженного проводящего шара, весь заряд которого будет сосредоточен в тонком поверхностном слое.

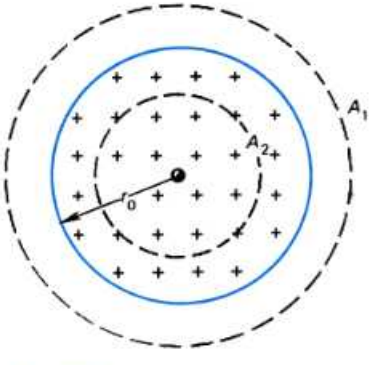


Рис. 23.10. Сплошной шар с однородной объемной плотностью заряда.

Пример. 23.2. *Однородно заряженный шар.* Электрический заряд равномерно распределен по объему непроводящего шара радиусом r_0 (рис. 23.10). Определите электрическое поле а) снаружи шара ($r > r_0$) и б) внутри шара ($r < r_0$).

Решение. Поскольку заряд распределен внутри шара равномерно, электрическое поле также должно быть симметричным. Напряженность поля $\mathbf{E}$ зависит только от r и направлена вдоль радиуса наружу (или внутрь, если $Q < 0$). а) Выберем в качестве поверхности интегрирования сферу радиусом $r (r > r_0)$ (A_1 на рис. 23.10). Поскольку E зависит только

от r, имеем

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\,(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

или

$$E = \frac{1}{1\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Мы вновь получили, что поле снаружи однородно заряженного шара имеет такую же напряженность, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре шара.

б) Внутри шара в качестве поверхности интегрирования выберем сферу радиусом $r\,(r < r_0)$ (A_2 на рис. 23.10). В силу симметрии напряженность $\mathbf{E}$ постоянна во всех точках поверхности A_2 и перпендикулярна ей, так что

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\,(4\pi r^2).$$

Это выражение следует приравнять заряду, заключенному внутри сферы A_2 (и деленному на ε_0); этот заряд не равен полному заряду Q, а составляет лишь часть его. Так как заряд единицы объема (*объемная плотность заряда* ρ) всюду одинаков, внутри A_2 заключен заряд, равный

$$\left(\frac{4/3\pi r^3\rho}{4/3\pi r_0^3\rho}\right)Q = \frac{r^3}{r_0^3}Q.$$

Отсюда по теореме Гаусса

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{r^3}{r_0^3}\cdot\frac{Q}{\varepsilon_0},$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0^3}r \qquad [r < r_0].$$

Таким образом, с увеличением расстояния r от центра шара поле вначале линейно растет (до $r = r_0$), а затем при $r > r_0$ убывает как $1/r^2$ (рис. 23.11)

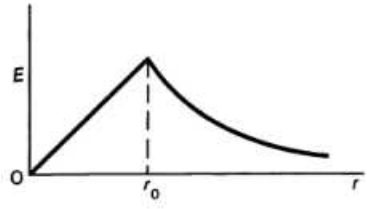


Рис. 23.11. Зависимость напряженности электрического поля от расстояния до центра r однородно заряженного сплошного шара.

Чтобы получить эти результаты на основании закона Кулона, нам пришлось бы потрудиться, интегрируя по объему шара. Благодаря использованию теоремы Гаусса и симметрии задачи решение оказалось почти тривиальным. Это демонстрирует огромные возможности теоремы Гаусса. Однако подобное использование этой теоремы ограничено в основном случаями, когда распределение зарядов обладает высокой симметрией. В подобных ситуациях мы *выбираем* простую поверхность, на которой $E = \text{const}$, и интеграл берется без труда. Разумеется, теорема Гаусса справедлива для любой поверхности, «простые» поверхности выбираются лишь для облегчения интегрирования. В следующих двух примерах мы рассмотрим задачи, обладающие симметрией, которые уже были решены с помощью закона Кулона. И здесь теорема Гаусса упрощает решение.

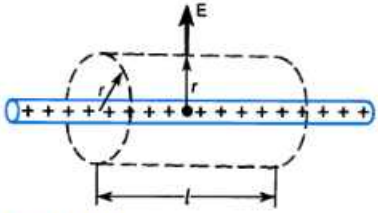


Рис. 23.12. К расчету напряженности электрического поля **E**, создаваемого длинным линейным зарядом.

Пример 23.3. *Длинный равномерно заряженный проводник.* Очень длинный прямой линейный проводник равномерно заряжен; линейная плотность заряда равна λ. Рассчитайте напряженность электрического поля вблизи проводника на достаточно большом расстоянии от его концов.

Решение. В силу симметрии задачи электрическое поле должно быть направлено вдоль радиуса наружу (если $Q > 0$) и зависеть только от расстояния r по перпендикуляру от проводника. Благодаря цилиндрической симметрии напряженность электрического поля должна быть постоянна по поверхности цилиндра, охватывающего проводник и коаксиального с ним (рис. 23.12). Вектор **E** во всех точках перпендикулярен поверхности цилиндра. Чтобы применить теорему Гаусса, нам нужна замкнутая поверхность, поэтому следует учесть и плоские торцы цилиндра. Однако, поскольку вектор **E** параллелен торцам, поток сквозь торцы отсутствует, и

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E(2\pi r l) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},$$

где l – высота цилиндра, по поверхности которого проводится интегрирование (l много меньше длины проводника). Отсюда

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

Этот же результат мы получили в примере 22.7, пользуясь законом Кулона (вместо r мы писали там x); использование теоремы Гаусса упростило решение, и мы вновь убедились, каким мощным инструментом является эта теорема.

Пример. 23.4. *Бесконечная заряженная плоскость.* Заряд равномерно распределен по непроводящей плоскости; поверхностная плотность заряда равна σ. Определите напряженность электрического поля вблизи плоскости.

Решение. Выберем в качестве поверхности интегрирования небольшой замкнутый цилиндр, ось которого перпендикулярна плоскости и который пересекается плоскостью (рис. 23.13). В силу симметрии следует ожидать, что вектор **E** по обе стороны плоскости перпендикулярен ей и постоянен в пределах торца цилиндра площадью a. Поскольку через боковую поверхность цилиндра поток равен нулю, весь поток приходится на торцы. По теореме Гаусса

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 2E\,A = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0},$$

где $Q = \sigma A$ – заряд, заключенный внутри цилиндра. Напряженность электрического поля равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Этот же результат мы получили более сложным путем в примере 22.8. Вблизи заряженной плоскости (далеко от краев) электрическое поле однородно.

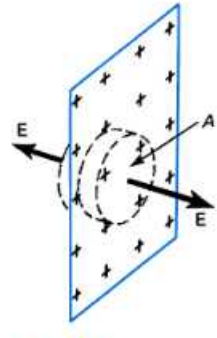


Рис. 23.13. К расчету напряженности электрического поля вблизи большой, однородно заряженной плоскости.

Пример 23.5. Покажите, что напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника произвольной формы определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где σ – плотность заряда в данной точке поверхности проводника.

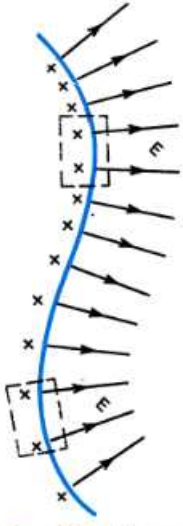


Рис. 23.14. Электрическое поле у поверхности проводника.

Решение. В качестве поверхности интегрирования выберем небольшую цилиндрическую поверхность, как и в предыдущем примере. Пусть цилиндр имеет очень малую высоту, так что его торец едва возвышается над поверхностью проводника (рис. 23.14); другой торец находится под поверхностью, а боковая поверхность перпендикулярна проводнику. Электрическое поле внутри проводника отсутствует, а вблизи поверхности вектор напряженности электрического поля перпендикулярен ей (разд. 22.9). Поэтому поток напряженности проходит только через наружный торец цилиндра. Площадь A торца выберем достаточно малой, чтобы напряженность поля E можно было считать в его пределах постоянной. Тогда по теореме Гаусса

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E\,A = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

и

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{[у поверхности проводника]}. \tag{23.5}$$

Этот полезный результат справедлив для проводников любой формы.

Может возникнуть вопрос, почему поле у поверхности заряженного плоского изолятора (пример 23.4) имеет напряженность $E = \sigma/2\varepsilon_0$, а у поверхности проводника $K = \sigma/\varepsilon_0$. Двойка в знаменателе обусловлена не тем, что в одном случае мы имеем проводник, а в другом – изолятор, а различным определением поверхностной плотности заряда в этих случаях. У проводника весь заряд сосредоточен на поверхности и все силовые линии поля выходят в одну сторону. Из плоского изолятора силовые линии выходят в обе стороны (рис. 23.13). На большом плоском тонком проводнике заряд располагался бы по обе стороны, и силовые линии выходили бы с обеих сторон. И тогда, если бы мы считали σ плотностью заряда для *всей* поверхности, а не только для плоскости, то плотность заряда с одной стороны поверхности составляла бы $\sigma/2$ и напряженность электрического поля была бы такой же, как и в случае изолятора [$E = (\sigma/2)/\varepsilon_0 = \sigma/2\varepsilon_0$]. Принято, однако, относить σ к одной поверхности заряженной плоскости, и тогда $E = \sigma/\varepsilon_0$. Таким образом, результаты примеров 23.4 и 23.5 различаются в два раза из-за того, что σ определяется по-разному.

Заключение

Поток напряженности однородного электрического поля **E** через плоскую площадку A равен $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$. Если поле неоднородно, то поток определяется интегралом $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$. Вектор **A** (или $d\mathbf{A}$) направлен перпендикулярно площадке A (или dA); для замкнутой поверхности вектор **A** направлен наружу. Поток через поверхность пропорционален числу силовых линий, проходящих через эту поверхность.

Теорема Гаусса утверждает, что результирующий поток наряженности электрического поля, проходящий через замкнутую поверхность, равен суммарному заряду внутри поверхности, деленному на ε_0:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

В принципе теорему Гаусса можно использовать для определения напряженности электрического поля, создаваемого заданным распределением зарядов. Однако на практике ее применение ограничено в основном несколькими частными случаями, когда распределение зарядов имеет высокую симметрию. Истинная ценность теоремы Гаусса состоит в том, что она устанавливает в более общем и более элегантном виде, чем закон Кулона, связь между электрическим зарядом и напряженностью электрического поля. Теорема Гаусса является одним из фундаментальных уравнений электромагнитной теории.

Вопросы

1. Если поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен нулю, означает ли это, что напряженность электрического поля равна нулю во всех точках поверхности? Справедливо ли обратное: если $\mathbf{E} = 0$ во всех точках поверхности, то поток через поверхность равен нулю?
2. Обусловлена ли напряженность электрического поля **E** в теореме Гаусса $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0$ только зарядом Q?
3. Точечный заряд окружен сферической поверхностью интегрирования радиусом r. Изменится ли значение Φ_E, если сферу заменить кубом со стороной $r/2$?
4. Что вы можете сказать о потоке напряженности электрического поля через замкнутую поверхность, окружающую электрический диполь?
5. Напряженность электрического поля **E** равна нулю во всех точках замкнутой поверхности. Значит ли это, что внутри нет зарядов? Если суммарный заряд внутри замкнутой поверхности равен нулю, то обязательно ли равна нулю напряженность электрического поля во всех точках поверхности?
6. Дайте определение гравитационного потока по аналогии с потоком напряженности электрического поля. Существуют ли в гравитационном поле «источники» и «стоки», как в электрическом? Объясните ответ.
7. Можно ли применить теорему Гаусса для определения напряженности электрического поля диполя?
8. Сферический баскетбольный мяч (непроводник) обладает зарядом Q, равномерно распределенным по его поверхности. Что можно сказать о напряженности электрического поля внутри мяча? Человек наступил на мяч и выпустил почти весь воздух из него, причем электрический заряд не изменился. Что можно теперь сказать о напряженности электрического поля внутри мяча?
9. Может показаться, что рассчитанная в примере 23.3 напряженность электрического поля обусловлена лишь теми зарядами, которые попали внутрь цилиндрической поверхности интегрирования. В действительности же рассчитанная напряженность учитывает вклад зарядов по всей длине проводника. Объясните, каким образом учитывается этот вклад (рис. 23.12). (Подсказка; рассмотрите поле, создаваемое коротким проводником.)

10. Вернемся к комментарию к примеру 23.5. Можно ли определить поверхностную плотность заряда с каждой стороны непроводящей плоскости? Если можно, то при каком условии?

11. Точечный заряд Q окружен сферической поверхностью радиусом r_0, центр которой совпадает с Q. Затем заряд перемещают вправо на расстояние $r_0/2$, сфера же остается на месте. Изменится ли поток Φ_E через сферу? Изменится ли распределение напряженности электрического поля на поверхности сферы? Если да, то как?

12. Предположим, что проводник в примере 23.3 имеет не слишком большую длину и лишь немного выходит за торцы цилиндра, показанного на рис. 23.12. Как изменится результат примера 23.3 в этом случае?

13. Проводник обладает зарядом Q. В проводнике имеется полость, в центр которой помещается точечный заряд q. Чему равен заряд а) на внешней поверхности проводника; б) на внутренней поверхности проводника?

14. Точечный заряд q помещен в центре тонкой металлической незаряженной оболочки. Будет ли действовать электрическая сила на заряд Q, находящийся снаружи? Объясните ответ.

Задачи

Раздел 23.1

1. (I) Круг радиусом 15 см помещен в однородное электрическое поле напряженностью $3{,}6 \cdot 10^2$ Н/Кл. Чему равен поток напряженности поля сквозь круг, если его плоскость а) перпендикулярна силовым линиям; б) составляет угол 45° с силовыми линиями; в) параллельна силовым линиям?

2. (I) Куб со стороной l помещен в однородное электрическое поле напряженностью $E = 8{,}1 \times 10^3$ Н/Кл так, что его ребра параллельны силовым линиям. Чему равен суммарный поток напряженности электрического поля через куб?

3. (II) Точечный заряд Q помещен в центр куба со стороной l. Чему равен поток напряженности электрического поля через одну грань куба?

4. (II) Однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$ параллельно оси полусферы радиусом R. Чему равен поток напряженности поля через поверхность полусферы? Каким будет результат, если вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен оси?

Раздел 23.2

5. (I) Из куба со стороной 18,0 см выходит поток напряженности электрического поля, равный $1{,}45 \cdot 10^3$ Н·м^2/Кл. Какой заряд находится внутри куба?

6. (II) Запишите теорему Гаусса для гравитационного поля $\mathscr{G}$ (разд. 5.9).

7. (II) Пользуясь теоремой Гаусса, докажите, что результирующий заряд изолированного проводника находится на его внешней поверхности. (Подсказка: выберите поверхность интегрирования прямо под поверхностью проводника.)

8. (II) Понятие потока применимо также к течению жидкости. При этом скорость течения жидкости $\mathbf{v}$ соответствует $\mathbf{E}$, а силовые линии электрического поля – линиям тока жидкости: а) Какая характеристика течения жидкости соответствует потоку напряженности электрического поля Ф? б) Запишите теорему Гаусса для ламинарного течения несжимаемой жидкости.

Раздел 23.3

9. (I) Напряженность электрического поля снаружи металлического шара радиусом 3,0 см вблизи его поверхности равна $2{,}1 \cdot 10^2$ Н/Кл и направлена к шару. Каким зарядом обладает шар?

10. (I) Пользуясь результатом примера 23.1, покажите, что напряженность электрического поля вблизи однородно заряженного сферического проводника равна $E = \sigma/\varepsilon_0$ в согласии с результатом примера 23.5.

11. (II) Объемная плотность заряда ρ (заряд/объем) постоянна внутри сферы радиусом r_0. Выразите напряженность электрического поля через ρ в зависимости от r а) при $r < r_0$; б) при $r > r_0$. Согласуются ли результаты при $r = r_0$?

12. (II) Точечный заряд Q помещен на расстоянии $r_0/2$ выше центра сферической поверхности радиусом r_0. а) Чему равен поток напряженности электрического поля через сферу? б) В каких пределах меняется E на поверхности сферы? в) Всюду ли вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен поверхности сферы? г) Удобно ли воспользоваться теоремой Гаусса для определения E на поверхности сферы?

13. (II) Электрическое поле вблизи поверхности Земли имеет напряженность $E \approx 150$ Н/Кл и направлено к центру Земли. а) Чему равен суммарный заряд Земли? б) Сколько лишних электронов приходится на 1 м^2 земной поверхности?

14. (II) Две большие плоские круглые металлические пластины находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем их диаметров. Проводники имеют равные по величине и противоположные по знаку поверхностные плотности заряда σ. Пренебрегая краевыми эффектами, воспользуйтесь теоремой Гаусса, чтобы показать, что а) вдали от краев напряженность электрического поля между пластинами равна

$E = \sigma/\varepsilon_0$; б) с внешней стороны пластин напряженность электрического поля всюду равна нулю. в) Каким был бы ответ, если бы пластины были непроводящими?

15. (II) Предположим, что проводящие пластины в предыдущей задаче имеют заряд *одного и того же* знака. Чему тогда равна напряженность электрического поля а) между пластинами; б) с наружной стороны пластин. в) Каким был бы ответ, если бы пластины были непроводящими?

16. (II) Заряд Q помещен в вершину куба со стороной a. Определите поток напряженности электрического поля через куб. (Подсказка: в интегрировании и сложных расчетах нет необходимости.)

17. (II) Вершина куба со стороной l находится в начале координат, а оси x, y и z направлены по ребрам куба. Напряженность электрического поля в этой области определяется формулой $\mathbf{E} = (a + by)\mathbf{j}$. Определите величину заряда внутри куба.

18. (II) Тонкая цилиндрическая оболочка радиусом R_1 окружена концентрической цилиндрической оболочкой радиусом R_2 ($R_1 < R_2$). Внутренняя оболочка несет заряд $+Q$, а внешняя – заряд $-Q$. Считая длину цилиндров L много больше, чем R_1 и R_2, определите зависимость напряженности электрического поля от r (расстояния от общей оси цилиндров) для а) $r < R_1$; б) $R_1 < r < R_2$, в) $r > R_2$. г) Чему равна кинетическая энергия электрона, который движется в промежутке между цилиндрами по концентрической окружности радиусом $(R_1 + R_2)/2$?

19. (II) При каких условиях в предыдущей задаче $E = 0$ при $r > R_2$? При каких условиях $E = 0$ при $R_1 < r < R_2$?

20. (II) Две концентрические сферические оболочки радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда соответственно σ_1 и σ_2. Определите напряженность электрического поля а) при $r < R_1$; б) при $R_1 < r < R_2$; в) при $r > R_2$. г) При каких условиях $E = 0$ при $r > R_2$? д) При каких условиях $E = 0$ при $R_1 < r < R_2$?

21. (II) Сферический резиновый воздушный шарик несет заряд Q, равномерно распределенный по его поверхности. При $t = 0$ радиус шарика равен r_0; шарик начинают медленно надувать, и за 30 с его радиус линейно растет от r_0 до $2r_0$. Определите временну́ю зависимость напряженности электрического поля а) снаружи шарика вблизи поверхности; б) в точке $r = 4r_0$.

22. (II) Пусть сфера в примере 23.2 имеет концентрическую сферическую полость радиусом r_1. Считая заряд Q равномерно распределенным по объему оболочки (между $r = r_1$ и $r = r_0$), определите зависимость напряженности электрического поля от r при а) $r < r_1$; б) $r_1 < r < r_0$; в) $r > r_0$.

23. (II) Пусть плотность заряда в пустотелом шарике в предыдущей задаче меняется по закону $\rho = \rho_0 r_1/r$. Рассчитайте напряженность электрического поля как функцию r для а) $r < r_1$; б) $r_1 < r < r_0$; в) $r > r_0$. г) Постройте график $E(r)$ для $0 < r < 2r_0$.

24. (II) Пусть в центре оболочки на рис. 23.9 (пример 23.1) имеется точечный заряд $q \neq Q$. Определите напряженность электрического поля при а) $r < r_0$; б) $r > r_0$. Каким будет ответ, если в) $q = Q$; г) $q = -Q$?

25. (II) Длинная цилиндрическая оболочка радиусом R_0 и длиной L ($R_0 \ll L$) имеет однородную поверхностную плотность заряда σ. Определите напряженность электрического поля а) снаружи цилиндра ($r > R_0$); б) внутри цилиндра ($r < R_0$); в точках, находящихся далеко от концов цилиндра и не слишком далеко от поверхности ($r \ll L$). в) Сравните полученный результат с результатом для длинного заряженного проводника (пример 23.3).

26. (II) Очень длинный сплошной непроводящий цилиндр радиусом R_0 и длиной L ($R_0 \ll L$) обладает однородной объемной плотностью заряда ρ (Кл/м^3). Определите напряженность электрического поля в точках а) вне цилиндра ($r > R_0$); б) внутри цилиндра ($r < R_0$). Сделайте это для точек, удаленных от концов цилиндра, для которых также $r \ll L$.

27. (II) По плоскому квадратному алюминиевому листу со стороной 20 см равномерно распределен заряд 35 нКл. Чему приблизительно равна напряженность электрического поля над листом на расстоянии а) 1,0 см; б) 15 м?

28. (II) Точечный заряд Q находится в центре цилиндра на его оси. Длина цилиндра l равна его диаметру. Чему равен поток напряженности электрического поля через боковую поверхность цилиндра? (Подсказка: рассчитайте вначале поток через торцы.)

29. (III) Сплошной непроводящий шар радиусом r_0 обладает зарядом Q, который распределен в объеме по закону

$$\rho = br,$$

где ρ – объемная плотность заряда, b – постоянная. а) Выразите b через Q. Рассчитайте напряженность электрического поля для точек б) внутри шара; в) снаружи шара.

24 Электрический потенциал

Как мы видели в гл. 6 и 7, понятие энергии исключительно полезно для решения задач механики. Прежде всего энергия сохраняется и поэтому служит важной характеристикой явлений природы. Кроме того, мы видели, что, используя представления об энергии, многие задачи удается решить, не имея детальных сведений о силах или в случае, когда применение законов Ньютона потребовало бы сложных вычислений.

Энергетическим подходом можно воспользоваться и при изучении электрических явлений, и здесь он оказывается чрезвычайно полезным: позволяет не только обобщить закон сохранения энергии, но и в новом аспекте увидеть электрические явления, а также служит средством более просто находить решения, чем путем рассмотрения сил и электрических полей.

24.1. Электрический потенциал и разность потенциалов

В разд. 7.1 было показано, что потенциальную энергию можно определить лишь для консервативных сил; работа такой силы по перемещению частицы между двумя точками не зависит от выбранного пути. Легко видеть, что электростатическая сила является консервативной: сила, с которой один точечный заряд действует на другой, определяется законом Кулона: $F = kQ_1Q_2/r^2$; здесь та же обратно пропорциональная зависимость от квадрата расстояния, что и в законе всемирного тяготения: $F = Gm_1m_2/r^2$. Такие силы, как говорилось в разд. 7.5, консервативны. Сила, действующая на выбранный заряд со стороны любого распределения зарядов, может быть записана в виде суммы кулоновских сил (разд. 22.7); следовательно, и сила, создаваемая произвольным распределением зарядов, консервативна. А это позволяет ввести потенциальную энергию электростатического поля.

Разность потенциальных энергий точечного заряда q в двух различных точках электрического поля можно определить как работу, совершаемую внешними силами по перемещению заряда (против действия электрической силы) из одной точки в другую. Это равносильно определе-

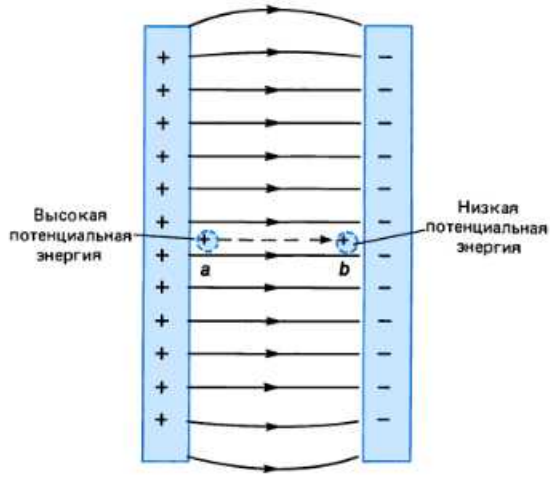


Рис. 24. 1. Электрическое поле совершает работу по перемещению положительного заряда из точки *a* в точку *b*.

нию изменения потенциальной энергии заряда в поле как взятой с обратным знаком работы, совершаемой самим полем по перемещению заряда из одной точки в другую (разд. 6.5).

Рассмотрим для примера электрическое поле между двумя пластинами с равным по величине и противоположным по знаку зарядом. Пусть размеры пластин велики по сравнению с расстоянием между ними, и поэтому поле между пластинами можно считать однородным (рис. 24.1). Поместим в точку *a* вблизи положительно заряженной пластины точечный положительный заряд q. Электрическая сила, действующая на заряд, будет стремиться переместить его к отрицательной пластине (в точку *b*), совершая работу по переносу заряда. Под действием силы заряд приобретет ускорение и его кинетическая энергия возрастет; при этом потенциальная энергия уменьшится на величину работы, совершенной электрической силой по перемещению заряда из точки *a* в точку *b*. Согласно закону сохранения энергии, потенциальная энергия заряда в электрическом поле перейдет в кинетическую энергию, но полная энергия останется неизменной. Заметим, что положительный заряд q обладает наибольшей потенциальной энергией U вблизи положительной пластины (в этой точке его способность совершать работу над другим телом или системой максимальна). Для отрицательного заряда справедливо обратное: его потенциальная энергия будет максимальна вблизи отрицательной пластины.

Напряженность электрического поля (гл. 22) мы определяли как силу, действующую на единичный заряд; аналогично удобно ввести **электрический потенциал** (или просто **потенциал**, если это не вызывает недоразумений) как *потенциальную энергию единичного заряда*. Электрический потенциал обозначается символом V; итак, если

в некоторой точке a точечный заряд q обладает потенциальной энергией U_a, то электрический потенциал в этой точке равен

$$V_a = \frac{U_a}{q}.$$

Как показано в гл. 6, реально мы измеряем только изменение потенциальной энергии. Соответственно фактически можно измерить лишь **разность потенциалов** между двумя точками (например, точками a и b на рис. 24.1). Если работа электрических сил по перемещению заряда от точки a в точку b есть W_{ba} (а разность потенциальных энергий соответственно равна этой величине с обратным знаком), то для разности потенциалов можно написать

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\frac{W_{ba}}{q}. \qquad (24.1)$$

Единицей электрического потенциала (и разности потенциалов) является джоуль на кулон (Дж/Кл); этой единице присвоено наименование *вольт* (В) в честь Алессандро Вольты (1745–1827) (он известен как изобретатель электрической батареи); 1 В = 1 Дж/Кл. Заметим, что, согласно данному определению, положительно заряженная пластина на рис. 24.1 имеет более высокий потенциал, чем отрицательная. Таким образом, положительно заряженное тело будет стремиться перейти из точки с более высоким потенциалом в точку с более низким потенциалом, отрицательно заряженное тело – наоборот. Разность потенциалов часто называют **электрическим напряжением**.

Потенциал в данной точке V_a зависит от выбора «нуля» потенциала; как и в случае потенциальной энергии, нулевой уровень может выбираться произвольно, поскольку измерить можно лишь изменение потенциальной энергии (разность потенциалов). Часто за нулевой принимают потенциал земли или проводника, соединенного с землей, и остальные значения потенциалов отсчитывают относительно «земли». (Например, говоря, что потенциал в какой-то точке равен 50 В, имеют в виду, что разность потенциалов между этой точкой и землей равна 50 В.) В иных случаях, как мы увидим, удобно считать нулевым потенциал на бесконечности.

Поскольку электрический потенциал определяется как потенциальная энергия единичного заряда, изменение потенциальной энергии заряда q при перемещении его из точки a в точку b равно

$$\Delta U = U_b - U_a = qV_{ba}. \qquad (24.2)$$

Другими словами, когда заряд q перемещается между точками с разностью потенциалов V_{ba}, его потенциальная энергия изменяется на величину qV_{ba}. Если, например, разность потенциалов между пластинами на рис. 24.1

составляет 6 В, то заряд 1 Кл, перемещенный (внешней силой) из точки b в точку a, увеличит свою потенциальную энергию на (1 Кл)(6 В) = 6 Дж. (Перемещаясь же из a в b, он потеряет потенциальную энергию 6 Дж.) Аналогично энергия заряда 2 Кл увеличится на 12 Дж и т. п. Таким образом, электрический потенциал служит мерой изменения потенциальной энергии электрического заряда в данной ситуации. А поскольку потенциальная энергия – это способность совершать работу, электрический потенциал служит мерой той работы, которую может совершить данный заряд. Количество работы зависит как от разности потенциалов, так и от величины заряда.

Чтобы лучше понять смысл электрического потенциала, проведем аналогию с гравитационным полем. Пусть камень падает с вершины скалы. Чем выше скала, тем большей потенциальной энергией обладает камень и тем больше будет его кинетическая энергия, когда он долетит до подножия скалы. Величина кинетической энергии и соответственно работа, которую может совершить камень, зависят от высоты скалы и от массы камня. Точно так же и в электрическом поле изменение потенциальной энергии (и работа, которую можно совершить) зависит от разности потенциалов (эквивалентной высоте скалы) и заряда (эквивалентного массе) [см. (24.1)].

Используемые на практике источники электроэнергии – батареи, электрогенераторы – создают определенную разность потенциалов. Количество энергии, отбираемой от источника, зависит от величины переносимого заряда. Рассмотрим, например, автомобильную фару, соединенную с аккумулятором, разность потенциалов на зажимах которого равна 12 В. Количество энергии, преобразуемой фарой в свет (и, конечно, в тепло), пропорционально заряду, протекшему через фару, что в свою очередь зависит от того, как долго включена фара. Если за некоторое время через фару прошел заряд 5,0 Кл, то преобразованная фарой энергия составит (5,0 Кл)(12,0 В) = = 60 Дж. Если оставить фару включенной вдвое дольше, то через нее пройдет заряд 10,0 Кл, и количество преобразованной энергии составит (10,0 Кл)(12,0 В) = = 120 Дж.

Пример 24.1. Электрон в кинескопе телевизора ускоряется из состояния покоя разностью потенциалов $V_{ba} = 5000$ В. а) Чему равно изменение потенциальной энергии электрона? б) Какую скорость приобретает электрон в результате этого ускорения?

Решение. а) Заряд электрона равен $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta U = qV_{ba} = (-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(+5000\ \text{В}) = \\ = -8{,}0 \cdot 10^{-16}\ \text{Дж}.$$

[Разность потенциалов V_{ba} положительна, так как потенциал конечной точки выше потенциала начальной точки; отрицательно заряженные электроны движутся от отрицательного электрода (катода) к по-

ложительному (аноду).] б) Потенциальная энергия электрона переходит в его кинетическую энергию. По закону сохранения энергии [см. (7.3)]

$$\Delta\text{КЭ} = -\Delta U,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -qV_{ba},$$

где начальное значение кинетической энергии равно нулю, поскольку электрон покоился. Подставив значение массы электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, найдем скорость:

$$v = \sqrt{-\frac{2qV_{ba}}{m}} = \sqrt{\frac{-2(-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(5000\ \text{В})}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}}} = 4{,}2 \cdot 10^7\ \text{м/с}.$$

24.2. Связь между электрическим потенциалом и напряженностью электрического поля

Эффекты, обусловленные тем или иным распределением зарядов, можно описать как с помощью напряженности электрического поля, так и через электрический потенциал. Между напряженностью поля и потенциалом существует тесная связь. Рассмотрим вначале эту связь для случая однородного электрического поля, например поля между пластинами на рис. 24.1 с разностью потенциалов V_{ba}. Работа электрического поля по перемещению положительного заряда q из точки a в точку b, согласно соотношению (24.1), равна

$$W = -qV_{ba}.$$

Обратим внимание на то, что величина $V_{ba} = V_b - V_a$ отрицательна ($V_{ba} < 0$), так как потенциал в точке a выше, чем в точке b (и положителен по отношению к потенциалу в точке b). Поэтому совершаемая полем работа положительна. С другой стороны, работа равна произведению силы на перемещение, а сила, действующая на заряд q, есть $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – напряженность однородного электрического поля между пластинами. Таким образом,

$$W = Fd = qEd,$$

где d – расстояние между точками a и b (вдоль силовой линии). Приравняв эти выражения для работы, получим

$$-qV_{ba} = qEd,$$

или

$$V_b - V_a = V_{ba} = -Ed \quad [\text{поле } E \text{ однородно}]. \qquad (24.3)$$

Знак минус в правой части указывает просто на то, что $V_a > V_b$, т. е. потенциал положительной пластины выше, чем отрицательной, как мы уже говорили. Положительные заряды стремятся двигаться из области с высоким потенциалом в область с низким потенциалом. Отсюда можно найти E: $E = -V_{ba}/d$.

Из последнего равенства видно, что напряженность электрического поля можно измерять как в вольтах на метр (В/м), так и в ньютонах на кулон (Н/Кл). Эти единицы эквивалентны между собой: 1 Н/Кл = = 1 Н·м/Кл·м = 1 Дж/Кл·м = 1 В/м.

Пример 24.2. Две параллельные пластины заряжены до разности потенциалов 50 В. Рассчитать напряженность поля между пластинами, если расстояние между ними равно 5,0 см.

Решение. По формуле (24.3) без учета знака находим

$$E = V/d = 50 \text{ В}/0{,}050 \text{ м} = 1000 \text{ В/м}.$$

Чтобы перейти к общему случаю неоднородного электрического поля, вспомним соотношение между силой **F** и потенциальной энергией U, обусловленной этой силой. Как говорилось в разд. 6.5, разность потенциальных энергий в двух точках пространства a и b дается формулой (6.13):

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l},$$

где $d\boldsymbol{l}$ – бесконечно малое перемещение, а интеграл берется вдоль произвольной траектории между точками a и b. В случае электрического поля нас больше интересует разность не потенциальных энергий, а потенциалов [формула (24.2)]: $V_{ba} = V_b - V_a = (U_b - U_a)/q$. Напряженность электрического поля **E** в любой точке пространства определяется отношением силы к заряду [формула (22.3)]: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$. Подставляя эти два равенства в (6.13), получим

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l}. \qquad (24.4)$$

Это и есть общее соотношение, связывающее напряженность электрического поля с разностью потенциалов.

Когда поле однородно, формула (24.4) переходит в (24.3). Например, на рис. 24.1 вдоль траектории, параллельной силовым линиям, от точки a у положительной пластины до точки b у отрицательной пластины (поскольку направления **E** и $d\boldsymbol{l}$ всюду совпадают) имеем

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -E\int_a^b dl = -Ed,$$

где d – расстояние вдоль силовой линии между точками a и b. И вновь знак минус в правой части свидетельствует лишь о том, что на рис. 24.1 $V_a > V_b$.

24.3. Эквипотенциальные поверхности

Электрический потенциал можно представить графически, изображая **эквипотенциальные линии** или в трех измерениях – **эквипотенциальные поверхности**. Всем точкам эквипотенциальной поверхности соотвстствует один и тот же потенциал. Иначе говоря, разность потенциалов между любыми двумя точками этой поверхности равна нулю, и при перемещении заряда из одной точки в другую работа не совершается. *Эквипотенциальная поверхность в любой точке должна быть перпендикулярна направлению*

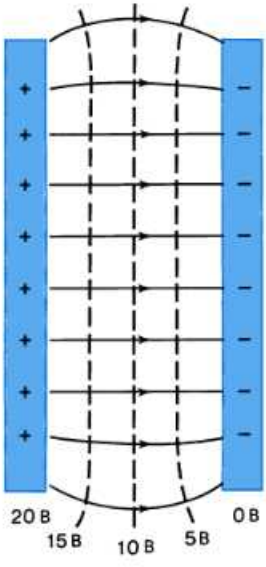


Рис. 24.2. Эквипотенциальные линии (штриховые) между двумя заряженными параллельными пластинами, перпендикулярные силовым линиям поля (сплошные линии).

напряженности электрического поля. Если бы это было не так (т. е. если бы существовала компонента **E**, параллельная поверхности), то для перемещения заряда вдоль поверхности в направлении, противоположном этой компоненте **E**, приходилось бы совершать работу, что противоречит предположению об *эквипотенциальности* поверхности.

Тот факт, что силовые линии электрического поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, помогает построению эквипотенциальных поверхностей, если известно расположение силовых линий. На рис. 24.2 изображено несколько эквипотенциальных линий (штриховые линии) для поля между параллельными пластинами, разность потенциалов которых составляет 20 В. Эти линии принадлежат эквипотенциальным поверхностям, которые пересекают рисунок перпендикулярно плоскости книжной страницы. Потенциал отрицательной пластины условно принят за нулевой; указан соответствующий потенциал каждой эквипотенциальной линии. Эквипотенциальные линии для случая двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов показаны штриховыми линиями на рис. 24.3.

В разд. 22.9 мы видели, что в статическом случае внутри проводника не существует электрическое поле, так как в противном случае на свободные электроны действовала бы сила и они пришли бы в движение. Иными словами, *в статическом случае проводник должен находиться целиком под одним и тем же потенциалом*, и поверхность проводника является, таким образом, эквипотенциальной. (Иначе свободные электроны на поверх-

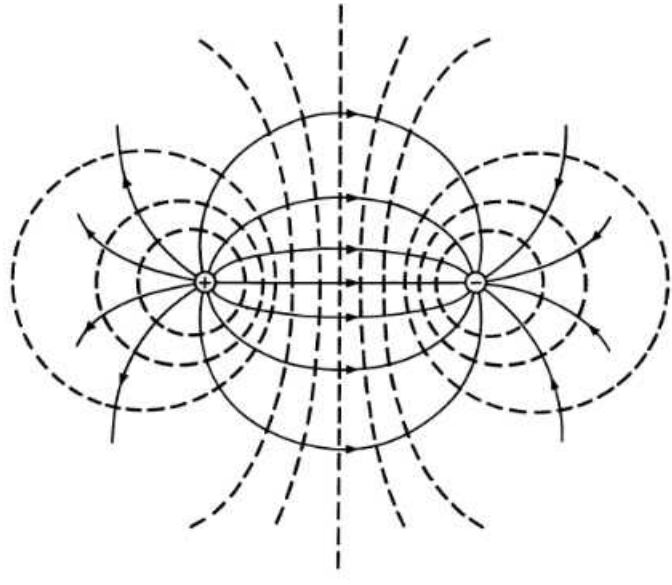


Рис. 24.3. Эквипотенциальные линии (штриховые) и силовые линии электрического поля (сплошные линии) вблизи двух противоположно заряженных частиц.

ности пришли бы в движение.) Это полностью согласуется с уже отмеченным выше фактом, что электрическое поле у поверхности проводника перпендикулярно поверхности.

24.4. Электрон-вольт, единица энергии

Как мы увидим, джоуль оказывается слишком крупной единицей для измерения энергии электронов, атомов, молекул как в атомной и ядерной физике, так и в химии и молекулярной биологии. Здесь удобнее пользоваться единицей *электрон-вольт* (эВ). Один электрон-вольт равен энергии, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов 1 В. Заряд электрона равен $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, и, поскольку изменение потенциальной энергии равно qV,

$$1\text{ эВ} = (1{,}6\cdot10^{-19}\text{ Кл})(1{,}0\text{ В}) = 1{,}6\cdot10^{-19}\text{ Дж}.$$

Электрон, ускоренный разностью потенциалов 1000 В, теряет потенциальную энергию 1000 эВ и приобретает кинетическую энергию 1000 эВ (или 1 кэВ). Если той же разностью потенциалов ускорить частицу с вдвое большим зарядом ($2e = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл), ее энергия изменится на 2000 эВ.

Электрон-вольт – удобная единица для *измерения* энергии молекул и элементарных частиц, но он не принадлежит к системе СИ. Поэтому при расчетах следует переводить электрон-вольты в джоули, пользуясь приведенным выше коэффициентом. В примере 24.1 кинетическая энергия электрона составила $8{,}0\cdot10^{-16}$ Дж. Привычнее было бы сказать, что энергия электрона равна 5000 эВ ($= 8{,}0\cdot10^{-16}$ Дж/$1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж/эВ), но при определении скорости электрона в единицах СИ кинетическую энергию следует выражать в джоулях.

24.5. Электрический потенциал уединенного точечного заряда

Электрический потенциал на расстоянии r от уединенного точечного заряда Q можно получить непосредственно из формулы (24.4). Электрическое поле точечного заряда имеет напряженность [см. (22.4)]

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

и направлено вдоль радиуса от заряда (или к заряду, если $Q < 0$). Возьмем интеграл в (24.4) вдоль прямой линии (рис. 24.4) от точки a на расстоянии r_a от Q до точки b на расстоянии r_b от Q. Тогда вектор $d\mathbf{l}$ параллелен $\mathbf{E}$ и $dl = dr$.

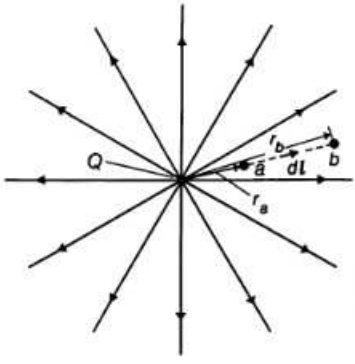


Рис. 24.4. Уравнение (24.4) интегрируется вдоль прямой (штриховой) линии от точки a до точки b; траектория интегрирования направлена вдоль силовой линии поля.

Таким образом,

$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_b} - \frac{Q}{r_a}\right).$$

Как уже говорилось, физический смысл имеет лишь разность потенциалов. Поэтому мы вправе присвоить потенциалу в какой-либо точке произвольное значение. Принято считать потенциал равным нулю на бесконечности (например, $V_b = 0$ при $r_b = \infty$), и тогда электрический потенциал на расстоянии r от уединенного точечного заряда равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad \text{[уединенный точечный заряд]}. \qquad (24.5)$$

Это электрический потенциал относительно бесконечности; он иногда называется «абсолютным потенциалом» уединенного точечного заряда. Обратим внимание на то, что потенциал V убывает как первая степень расстояния от заряда, в то время как напряженность электрического поля [см. (22.4)] убывает как *квадрат* расстояния. Потенциал велик вблизи положительного заряда и убывает до нуля на очень большом расстоянии. Вблизи отрицательного заряда потенциал *меньше* нуля (отрицателен) и с увеличением расстояния возрастает до нуля.

Пример 24.3. Какую работу требуется совершить, чтобы перенести заряд $q = 3{,}0$ мкКл из бесконечности ($r = \infty$) в точку на расстоянии 0,50 м от заряда $Q = 20{,}0$ мкКл?

Решение. Работа равна

$$W = qV_{ba} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_b} - \frac{Q}{r_a}\right),$$

где $r_b = 0{,}50$ м, а $r_a = \infty$. Отсюда

$$W = (3{,}0\cdot 10^{-6}\ \text{Кл}) \times \frac{(9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(2{,}00\cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}500\ \text{м}} =$$

$$= 1{,}08\ \text{Дж}.$$

(Вспомним, что $1/4\pi\varepsilon_0 = 9{,}0\cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2.)

Чтобы определить напряженность электрического поля системы зарядов, необходимо просуммировать напряженности полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Поскольку напряженность поля – вектор, такое суммирование нередко вырастает в проблему. Найти же электрический потенциал нескольких точечных зарядов гораздо проще: потенциал – скалярная величина и при сложении потенциалов не требуется учитывать направление. В этом большое преимущество электрического потенциала.

Пример 24.4. Рассчитайте электрический потенциал в точках A и B, обусловленный зарядами на рис. 22.15 (см. также пример 22.5, где мы рассчитывали напряженность поля в этих точках).

Решение. Потенциал в точке A есть сумма потенциалов, обусловленных положительным и отрицательным зарядами; для определения каждого из них используем формулу (24.5):

$$V_A \sim V_{A2} + V_{A1} = \frac{(9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(5{,}0\cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}30\ \text{м}} + \frac{(9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(-5{,}0\cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}60\ \text{м}} = 7{,}5\cdot 10^5\ \text{В}.$$

Для точки B

$$V_B = V_{B2} + V_{B1} = \frac{(9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(5{,}0\cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}40\ \text{м}} + \frac{(9{,}0\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(-5{,}0\cdot 10^{5}\ \text{Кл})}{0{,}40\ \text{м}} = 0\ \text{В}.$$

Потенциал будет равен нулю не только в этой точке, но и во всех точках плоскости, равноудаленной от обоих зарядов.

Подобное суммирование легко выполнить для любого числа точечных зарядов.

24.6. Потенциал электрического диполя

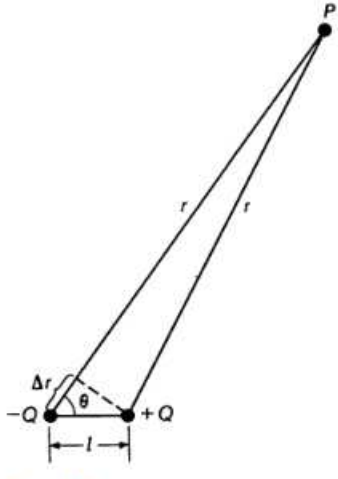


Рис. 24.5. Электрический диполь. Расчет потенциала V в точке P.

Два равных по величине и противоположных по знаку точечных заряда Q, находящиеся на расстоянии l друг от друга, называются *электрическим диполем* (разд. 22.11). Силовые линии и эквипотенциальные поверхности диполя показаны на рис. 24.3.

Рассчитаем электрический потенциал, создаваемый диполем в произвольной точке P (рис. 24.5). Потенциал V представляет собой сумму потенциалов, создаваемых каждым из зарядов:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)}{r+\Delta r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\Delta r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta r}{r(r+\Delta r)},$$

где r – расстояние от точки P до положительного заряда, а $r + \Delta r$ – до отрицательного заряда. Выражение упростится, если рассматривать точки, расстояние которых до диполя гораздо больше расстояния между зарядами ($r \gg l$). Как видно из рисунка, в этом случае $\Delta r \approx l\cos\theta$; тогда $r \gg \Delta r = l\cos\theta$, и в знаменателе величиной Δr можно пренебречь по сравнению с r. Такого рода приближения часто оказываются полезными и позволяют получить простое выражение для потенциала

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \quad [\text{диполь};\ r \gg l], \tag{24.6}$$

где $p = Ql$ – *дипольный момент*. При $0° < \theta < 90°$ потенциал V положителен, при $90° < \theta < 180°$ потенциал отрицателен (поскольку отрицательно значение $\cos\theta$). Это разумно, поскольку в первом случае точка P ближе к положительному заряду, а во втором – к отрицательному. При $\theta = 90°$ потенциал равен нулю ($\cos 90° = 0$) в соответствии с результатом примера 24.4. Из (24.6) мы видим, что потенциал убывает как *квадрат* расстояния до диполя, в то время как потенциал точечного заряда убывает как первая степень расстояния [см. (24.5)]. Это неудивительно: на больших расстояниях от диполя заряды кажутся столь близкими друг к другу, что взаимно нейтрализуются.

Во многих молекулах, в целом электрически нейтральных, электроны проводят больше времени у одного атома, чем у другого, что эквивалентно разделению зарядов. Такие молекулы обладают дипольным моментом и называются *полярными*.

Пример 24.5. Расстояние между атомами углерода (C) и кислорода (O) в группе C=O, встречающейся у многих органических молекул, составляет примерно $1{,}2 \cdot 10^{-10}$ м; дипольный момент этой группы равен $8{,}0 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Рассчитайте а) результирующий заряд Q атомов C(+) и O(−); б) потенциал на расстоянии $9{,}0 \cdot 10^{-10}$ м от кислорода вдоль продольной оси диполя (т. е. влево на рис. 24.5, $\theta = 180°$); в) чему был бы равен потенциал в этой точке в случае просто атома кислорода с тем же зарядом?

Решение. а) Дипольный момент равен $p = Ql$. Отсюда

$$Q = \frac{p}{l} = \left(\frac{8{,}0 \cdot 10^{-30}\ \text{Кл}\cdot\text{м}}{1{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{м}}\right) = 6{,}6 \cdot 10^{-20}\ \text{Кл}.$$

б) Из (24.6) при $\theta = 180°$ находим

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(8{,}0 \cdot 10^{-30}\ \text{Кл}\cdot\text{м})(-1{,}0)}{(9{,}0 \cdot 10^{-10}\ \text{м})^2} =$$

$$= -0{,}088\ \text{В}.$$

в) Согласно п. «а», заряд кислорода равен $Q = -6{,}6 \cdot 10^{-20}$ Кл; используем формулу (24.5) для уединенного точечного заряда:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(-6{,}6 \cdot 10^{-20}\ \text{Кл})}{9{,}0 \cdot 10^{-10}\ \text{м}} =$$

$$= -0{,}66\ \text{В}.$$

Как и следовало ожидать, потенциал уединенного заряда больше, чем диполя с одинаковыми зарядами, расположенными на таком же расстоянии.

24.7. Потенциал произвольного распределения зарядов

Зная напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, можно рассчитать разность потенциалов между любыми двумя точками, пользуясь формулой (24.4). Но нередко поле **E** неизвестно и его сложно рассчитать. Потенциал любого распределения зарядов можно получить иным и часто более простым способом, вычисляя потенциалы, создаваемые каждым

точечным зарядом [см. (24.5)]:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

и затем суммируя их. Если имеется n точечных зарядов, то потенциал в некоторой точке c равен

$$V_c = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_{ic}}, \qquad (24.7а)$$

где r_{ic} – расстояние от i-го заряда Q_i до точки c. Такой подход использовался в примере 24.4 для случая диполя (разд. 24.6). Если распределение зарядов можно считать непрерывным, то

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \qquad (24.7б)$$

где r – расстояние от элемента заряда dq до точки, в которой определяется V.

Пример 24.6. Заряд Q распределен равномерно по тонкому кольцу радиусом R. Определите электрический потенциал в точке P на оси кольца на расстоянии x от его центра (рис. 24.6).

Решение. Все точки кольца удалены от точки P на расстояние $(x^2 + R^2)^{1/2}$. По формуле (24.7б) потенциал в точке P равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}}\int dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(x^2+R^2)^{1/2}}.$$

Пример 24.7. Заряд Q равномерно распределен по тонкому диску радиусом R (рис. 24.7). Определите потенциал в точке P на оси диска на расстоянии x от его центра.

Решение. Разобьем диск на элементарные кольца радиусом r и шириной dr. Поскольку заряд Q распределен равномерно, заряд каждого элементарного кольца пропорционален его площади:

$$dq = Q\frac{(2\pi r)(dr)}{\pi R^2} = \frac{2Qrdr}{R^2}.$$

Тогда потенциал в точке P, согласно

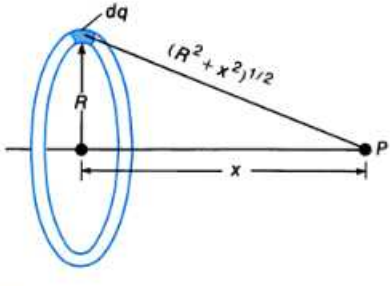


Рис. 24.6. Расчет потенциала в точке P на расстоянии x от центра равномерно заряженного кольца (пример 24.6).

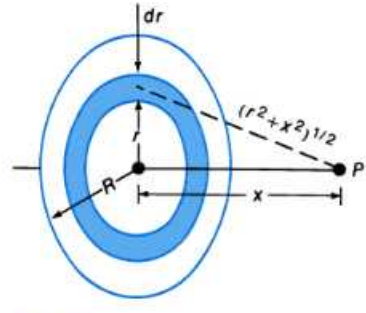


Рис. 24.7. Расчет электрического потенциала в точке P на оси равномерно заряженного тонкого диска (пример 24.7).

(24.7б), равен

$$V = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2 + r^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(x^2 + r^2)^{1/2}\Big|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[(x^2 + R^2)^{1/2} - x].$$

Пример 24.8. *Однородно заряженная проводящая сфера.* Определите потенциал на расстоянии r от центра однородно заряженной проводящей сферы радиусом R при а) $r > R$; б) $r = R$; в) $r < R$. Полный заряд сферы равен Q.

Решение. а) Заряд Q распределен по поверхности сферы, поскольку она проводник. В примере 23.1 мы показали, что электрическое поле снаружи сферы в этом случае равно

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad [r > R]$$

и направлено по радиусу (к центру, если $Q < 0$). Зная поле $\mathbf{E}$, воспользуемся формулой (24.4); проинтегрируем по радиусу, учитывая, что вектор $d\boldsymbol{l}$ параллелен $\mathbf{E}$ (как на рис. 24.4), между двумя точками, отстоящими от центра сферы на расстояния r_a и r_b:

$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right).$$

Если положить $V = 0$ при $r = \infty$ (скажем, $V_b = 0$ при $r_b = \infty$), то в любой точке $r\,(r > R)$ потенциал равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad [r > R].$$

б) Если r приближается к R, то потенциал на поверхности проводника равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad [r = R].$$

в) Внутри проводника поле равно $E = 0$. Поэтому интеграл $\int\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ между $r = R$ и любой точкой внутри проводника равен нулю, и потенциал постоянен внутри проводника:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad [r \leqslant R].$$

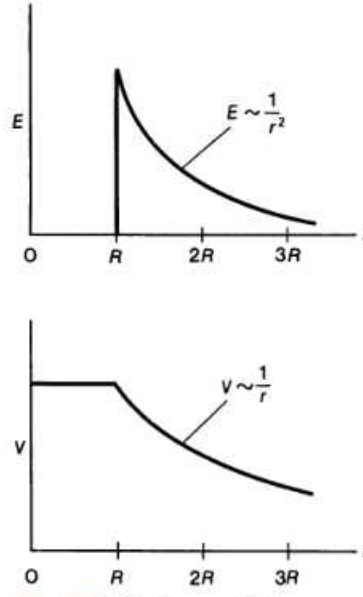


Рис. 24.8. Графики $E(r)$ и $V(r)$ для однородно заряженного сплошного проводящего шара радиусом R (заряд равномерно распределен по поверхности); r – расстояние до центра шара.

Итак, не только поверхность, но и весь проводник находится под одним и тем же потенциалом. Графики зависимости E и V от r для проводящего шара приведены на рис. 24.8.

Пример 24.9. *Напряжение пробоя.* Во многих установках используются очень высокие напряжения. Проблема, связанная с высоким напряжением, заключается в том, что поля больших напряженностей могут ионизовать воздух – электрическое поле вырывает электроны из атомов кислорода и азота; воздух становится проводящим, и это препятствует поддержанию высокого напряжения из-за утечки заряда. Электрический пробой воздуха происходит при напряженности поля примерно $3\cdot10^6$ В/м. а) Покажите, что напряжение пробоя для сферического про-

водника в воздухе пропорционально радиусу сферы, и б) рассчитайте напряжение пробоя в воздухе для сферы диаметром 1,0 см.

Решение. а) Электрический потенциал поверхности сферического проводника радиусом R (пример 24.8) равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$$

а напряженность поля вблизи поверхности (пример 23.1) равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}.$$

Отсюда

$$V = RE \quad \left[\begin{array}{l}\text{вблизи поверхности}\\ \text{сферического проводника}\end{array}\right].$$

б) При $R = 5\cdot 10^{-3}$ м напряжение пробоя в воздухе составит

$$V = (5\cdot 10^{-3}\text{ м})(3\cdot 10^{6}\text{ В/м}) \approx 15\,000\text{ В}.$$

Из этого примера ясно, почему вводы установок высокого напряжения делают большими. Понятно также, почему пробой (искрение) возникает на шероховатостях и остриях (области малого радиуса кривизны) и почему обычно проводники стараются делать как можно более гладкими.

24.8. Определение напряженности электрического поля E с помощью потенциала V

Формулу (24.4) можно использовать для определения разности потенциалов между двумя точками электрического поля, если напряженность поля в области между этими точками известна. Обращая формулу (24.4), мы можем выразить напряженность электрического поля через его потенциал, т. е., зная V, мы сможем определить $\mathbf{E}$. Посмотрим, как это делается.

Уравнение (24.4) можно переписать в дифференциальной форме:

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -E_l dl,$$

где dV – бесконечно малая разность потенциалов между точками на расстоянии dl друг от друга, а E_l – составляющая напряженности электрического поля в направлении этого бесконечно малого перемещения $d\boldsymbol{l}$. Тогда

$$E_l = -\frac{dV}{dl}. \qquad (24.8)$$

Таким образом, *составляющая напряженности электрического поля по любому направлению равна градиенту потенциала в этом направлении, взятому с обратным знаком*. Градиентом величины V называется ее производная по определенному направлению dV/dl. Если направление не указывается, то *градиент* соответствует направлению наиболее быстрого изменения V; это соответствует направлению вектора $\mathbf{E}$ в данной точке, поскольку именно в таком направлении составляющая вектора $\mathbf{E}$ совпадает с полной величиной напряженности поля:

$$E = -\frac{dV}{dl} \quad [\text{при } d\boldsymbol{l} \,||\, \mathbf{E}].$$

Если расписать составляющие вектора **E** по координатам x, y, z и в качестве l взять направления вдоль осей x, y, z, то уравнение (24.8) можно записать в виде

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{24.9}$$

Здесь $\partial V/\partial x$ – частная производная V по направлению x при условии, что y и z фиксированы.

Пример 24.10. Определите напряженность электрического поля в точке P на оси а) заряженного кольца (рис. 24.6), б) заряженного диска (рис. 24.7).

Решение. а) Из примера 24.6 потенциал равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}.$$

Тогда

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}},$$

$$E_y = E_z = 0.$$

Этот результат совпадает с полученным в примере 22.6.

б) Из примера 24.7 потенциал равен

$$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[(x^2 + R^2)^{1/2} - x],$$

и

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\right],$$

$$E_y = E_z = 0.$$

Для точек, близких к диску, $x \ll R$, и выражение упрощается:

$$E_x \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где $\sigma = Q/\pi R^2$ – поверхностная плотность заряда. Этот результат мы получили в примере 22.8 при рассмотрении заряженной плоскости. В чем, по-вашему, причина совпадения результатов?

Пример 24.11. Определите составляющие напряженности E_x и E_y электрического поля диполя в произвольной точке P плоскости xy (рис. 24.9). Предположите, что $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \gg l$.

Решение. Согласно (24.6), потенциал равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

поскольку $r^2 = x^2 + y^2$ и $\cos\theta = x/r = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$. Тогда

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} =$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}\right) =$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

и

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

В разд. 22.11 мы показали, что $E = -E_x = (p/4\pi\varepsilon_0)(1/r^3)$ для точек на оси y ($x = 0$); это согласуется с более общими результатами, полученными здесь.

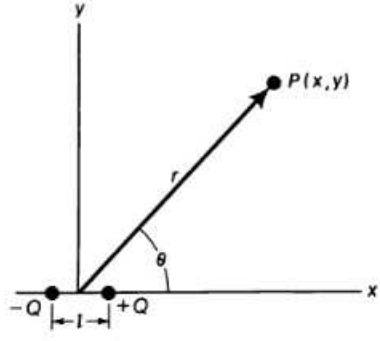


Рис. 24.9. Определение напряженности электрического поля, создаваемого диполем в любой точке плоскости xy (пример 24.11).

В последнем примере мы вычислили напряженность электрического поля **E** диполя в произвольной точке пространства. Складывая векторы напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности, как в разд. 22.11, получить этот результат было бы гораздо сложнее (нам удалось рассчитать поле **E** только вдоль оси y). Вообще говоря, для многих распределений зарядов гораздо проще рассчитать потенциал, а затем по формуле (24.9) – напряженность электрического поля **E**, чем вычислять по закону Кулона по отдельности **E** для каждого заряда: скалярные величины складывать намного проще, чем векторы.

24.9. Электростатическая потенциальная энергия

Предположим, что точечный заряд q перемещают в пространстве из точки a в точку b, электрические потенциалы в которых, обусловленные другими зарядами, равны соответственно V_a и V_b. Изменение электростатической потенциальной энергии заряда q в поле других зарядов составляет, согласно (24.2),

$$\Delta U = U_b - U_a = q(V_b - V_a) = qV_{ba}.$$

Пусть теперь имеется система нескольких точечных зарядов. Чему равна электростатическая потенциальная энергия системы? Удобнее всего выбрать за нуль потенциальную энергию зарядов на очень больших (в идеале бесконечно больших) расстояниях друг от друга. Потенциальная энергия уединенного точечного заряда Q_1 равна нулю, поскольку в отсутствие других зарядов на него не действует никакая сила. Если к нему поднести второй точечный заряд, Q_2, потенциал в точке, где находится второй заряд, будет равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_{12}},$$

где r_{12} – расстояние между зарядами; потенциальная энергия двух зарядов равна

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}}. \qquad (24.10)$$

Она характеризует работу, необходимую для перемещения заряда Q_2 из бесконечности ($V = 0$) на расстояние r_{12} до заряда Q_1 (или со знаком минус работу, необходимую для разнесения зарядов на бесконечно большое расстояние).

Если система состоит из трех зарядов, то ее полная потенциальная энергия будет равна работе по перемещению всех трех зарядов из бесконечности в место их расположения. Работа по сближению зарядов Q_2 и Q_1 определяется выражением (24.10); чтобы перенести заряд Q_3 из бесконечности в точку на расстоянии r_{13} от Q_1 и на

расстоянии r_{23} от Q_2, требуется совершить работу

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}.$$

В этом случае потенциальная энергия системы трех точечных зарядов равна

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}}+\frac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right).$$

Для системы четырех зарядов выражение для потенциальной энергии будет содержать шесть таких членов и т. п. (При составлении подобных сумм необходимо следить за тем, чтобы не учитывать одну и ту же пару дважды.)

Часто нас интересует не полная электростатическая потенциальная энергия, а лишь часть ее. Например, может возникнуть необходимость найти потенциальную энергию одного диполя в присутствии другого диполя. Во взаимодействии участвуют четыре заряда: Q_1 и $-Q_1$ первого диполя и Q_2 и $-Q_2$ второго диполя. Потенциальная энергия одного диполя и в присутствии другого (иногда ее называют *энергией взаимодействия*) представляет собой работу по сближению диполей с бесконечно большого расстояния. В этом случае нас не интересует взаимная потенциальная энергия зарядов Q_1 и $-Q_1$ или Q_2 и $-Q_2$; выражение для потенциальной энергии двух диполей будет содержать лишь четыре члена, соответствующие энергиям взаимодействия между зарядами: Q_1 и Q_2, Q_1 и $-Q_2$, $-Q_1$ и Q_2, $-Q_1$ и $-Q_2$.

Пример 24.12. Две нити молекулы ДНК (носителя генетического кода человеческих и других биологических клеток) связаны друг с другом электростатическими силами (см. рис. 22.27 и подпись к нему). Эти силы включают и взаимодействие между диполями, подобное показанному на рис. 24.10. Рассчитайте энергию взаимодействия между диполем C=O (в молекуле тимина) и диполем H—N (в молекуле аденина) в конфигурации, показанной на рис. 24.10 (все расстояния взяты из экспериментальных данных, 1 Å $= 10^{-10}$ м). Дипольные моменты C=O и H—N составляют соответственно $8{,}0\cdot10^{-30}$ и $3{,}0\cdot10^{-30}$ Кл·м.

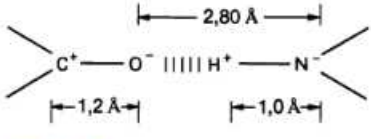


Рис. 24.10. Диаграмма для расчета энергии взаимодействия между диполем тимина C = O и диполем аденина H – N.

Решение. Энергия взаимодействия U равна потенциальной энергии одного диполя в присутствии другого диполя, которая равна (со знаком минус) работе по разнесению диполей на бесконечно большое расстояние друг от друга. Однако мы не можем воспользоваться приближенной формулой (24.6) для потенциала, так как расстояния между диполями лишь незначительно превышают размеры самих диполей. Поэтому нам придется применить формулу (24.10) для потенциальной энергии точечных зарядов; в выражение войдут четыре члена:

$$U = U_{CH} + U_{CN} + U_{OH} + U_{ON}.$$

Здесь U_{CH} обозначает потенциальную

энергию атома C в присутствии атома H и т. п. Сюда не входят члены, соответствующие парам C и O и N и H, поскольку каждый диполь рассматривается как единое целое. Выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_C Q_H}{r_{CH}} + \frac{Q_C Q_N}{r_{CN}} + \frac{Q_O Q_H}{r_{OH}} + \frac{Q_O Q_N}{r_{ON}}\right).$$

Здесь $Q_C = -Q_O = p_{CO}/l = (8{,}0\cdot 10^{-30}$ Кл·м)/$/(1{,}2\cdot 10^{-10}$ м$) = 6{,}6\cdot 10^{-20}$ Кл; $Q_H = -Q_N = p_{HN}/l = (3{,}0\cdot 10^{-30}$ Кл·м)/$(1{,}0\cdot 10^{-10}$ м$) = 3{,}0\cdot 10^{-20}$ Кл. Расстояния, согласно рис. 24.10, равны: $r_{CH} = 3{,}0\cdot 10^{-10}$ м, $r_{CN} = 4{,}0\cdot 10^{-10}$ м, $r_{OH} = 1{,}8\cdot 10^{-10}$ м и $r_{ON} = 2{,}8\cdot 10^{-10}$ м. Подставляя эти числа и вынося за скобки степени десяти, получим

$$U = (9\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)\left(\frac{(6{,}6)(3{,}0)}{3{,}0} + \frac{(6{,}6)(-3{,}0)}{4{,}0} + \frac{(-6{,}6)(3{,}0)}{1{,}8} + \frac{(-6{,}6)(-3{,}0)}{2{,}8}\right)\frac{10^{-40}\ \text{Кл}^2}{10^{-10}\ \text{м}} =$$

$$= (5{,}9 - 4{,}5 - 9{,}9 + 6{,}4)\cdot 10^{-20}\ \text{Дж} =$$

$$= -2{,}1\cdot 10^{-20}\ \text{Дж} = -0{,}13\ \text{эВ}.$$

Потенциальная энергия отрицательна; это значит, что для разделения молекул необходимо совершить работу.

Заключение

Электрический потенциал в любой точке пространства определяется как электростатическая потенциальная энергия единицы заряда. *Разность потенциалов* между двумя точками определяется взятой с обратным знаком работой, которая совершается полем при перемещении единичного электрического заряда между этими точками. Разность потенциалов измеряется в вольтах (1 В = 1 Дж/Кл) и иногда называется *напряжением*. Изменение потенциальной энергии заряда q при прохождении им разности потенциалов V_{ba} равно $\Delta U = qV_{ba}$. Разность потенциалов V_{ba} между точками b и a в однородном электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}$ определяется формулой $V = -Ed$, где d – расстояние вдоль силовой линии поля между этими точками. В неоднородном электрическом поле $\mathbf{E}$ соответствующее выражение имеет вид $V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$; таким образом, зная $\mathbf{E}$, всегда можно определить V_{ba}. Если значение V известно, то составляющие напряженности поля $\mathbf{E}$ можно найти, обращая приведенное соотношение: $E_x = -\partial V/\partial x$, $E_y = -\partial V/\partial y$, $E_z = -\partial V/\partial z$.

Эквипотенциальные линии или *поверхности* представляют собой геометрическое место точек одного потенциала; они всюду перпендикулярны силовым линиям поля.

Электрический потенциал уединенного точечного заряда Q относительно нулевого потенциала (на бесконечности) равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Потенциал произвольного распределения зарядов можно определить, суммируя (интегрируя) потенциалы отдельных зарядов.

Вопросы

1. Электрон ускоряется разностью потенциалов, скажем, 100 В. Во сколько раз возрастет его конечная скорость, если разность потенциалов увеличить в 4 раза?
2. Можно ли зарядить пластмассовую расческу до потенциала 0,5 В?
3. Две точки имеют одинаковый потенциал. Значит ли это, что при перемещении пробного заряда из одной точки в другую не совершается работа? Верно ли, что для перемещения заряда не надо прикладывать силу?
4. Отрицательный заряд вначале покоится в электрическом поле. Куда он будет двигаться: в направлении более высокого или более низкого потенциала? А положительный заряд? Как меняется потенциальная энергия заряда в каждом случае?
5. Может ли частица перемещаться из области с более низким потенциалом в область с более высоким потенциалом так, чтобы при этом ее электростатическая потенциальная энергия уменьшалась? Объясните.
6. Определите четко различие между а) электрическим потенциалом и напряженностью электрического поля; б) электрическим потенциалом и электростатической потенциальной энергией.
7. Если в некоторой точке пространства $V = 0$, то обязательно ли в этой точке и $\mathbf{E} = 0$? Если в некоторой точке $\mathbf{E} = 0$, то всегда ли и $V = 0$ в этой точке? Проиллюстрируйте ответ примерами.
8. На практике мы часто принимаем потенциал земли за 0 В. А если бы мы считали его равным, скажем, -10 В, то как это повлияло бы на значения а) потенциала V; б) напряженности E в других точках? Влияет ли на выбор потенциала земли тот факт, что она обладает ненулевым электрическим зарядом?
9. Проведите на рис. 22.21, *б* несколько эквипотенциальных линий.
10. Могут ли эквипотенциальные линии пересекаться? Объясните.
11. Что можно сказать о напряженности электрического поля в области пространства с одним и тем же потенциалом?
12. Существует ли в области между двумя равными положительными зарядами точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю? Точка с нулевым потенциалом? Объясните.
13. Если в некоторой точке потенциал равен нулю, то обязательно ли напряженность электрического поля здесь тоже равна нулю? Приведите пример.
14. Спутник движется вокруг Земли вдоль эквипотенциальной линии гравитационного поля. Какова форма его орбиты?
15. Предположим, что кольцо в примере 24.6 заряжено неравномерно: в верхней точке плотность заряда вдвое больше, чем в нижней. Повлияет ли это на потенциал в точке P, расположенной на оси (рис. 24.6)? Изменится ли значение напряженности поля $\mathbf{E}$ в этой точке? Нет ли здесь противоречия? Объясните.
16. Представьте себе продолговатый проводник, например слиток металла в форме мяча для регби. Полный заряд проводника равен Q. Где плотность заряда σ будет максимальна: на концах или с боков? Объясните. (Подсказка: у поверхности проводника $E = \sigma/\varepsilon_0$.)
17. Из двух одинаковых проводящих шаров один нейтрален, а другой обладает зарядом Q. Вначале шары изолированы друг от друга, а затем приводятся в соприкосновение. а) Что можно сказать о потенциале каждого из шаров, когда их соединили? б) Перейдет ли заряд с одного шара на другой? Если да, то в каком количестве? в) Как изменятся ответы, если радиусы шаров будут разными?
18. Почему напряженность электрического поля вблизи центра заряженного диска (пример 24.10) такая же, как и в случае заряженной плоскости (пример 22.8)?
19. В некоторой точке вектор напряженности поля направлен точно на север. В каких направлениях изменения потенциала будут а) максимальными; б) минимальными; в) равными нулю?
20. Зная потенциал V в некоторой точке пространства, можно ли рассчитать напряженность поля $\mathbf{E}$ в этой точке? Наоборот, можно ли рассчитать V, зная напряженность поля $\mathbf{E}$? Если нельзя, то что еще нужно знать в каждом случае?
21. Эквипотенциальные линии проведены с расстоянием 1 В. Говорит ли что-либо расстояние между линиями о напряженности электрического поля в различных областях? Что именно?
22. Если напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в некоторой области постоянна, что можно сказать о потенциале в этой области? Если потенциал V в некоторой области постоянен, то что можно сказать о напряженности электрического поля $\mathbf{E}$?
23. Положительна или отрицательна электростатическая потенциальная энергия двух разноименных зарядов? Двух одноименных зарядов? Какой смысл имеет знак потенциальной энергии в том и другом случае?

Задачи

Раздел 24.1

1. (I) Какую работу надо совершить по переносу заряда $-8{,}0$ мкКл от «земли» в точку с потенциалом $+600$ В?
2. (I) Ускоряемый электрическим полем электрон, перемещаясь от пластины A к пластине B, приобретает кинетическую энергию $6{,}4\cdot10^{-16}$ Дж. Какова разность потенциалов между пластинами? Какая из пластин имеет более высокий потенциал?
3. (II) Заряд, переносимый на Землю разрядом молнии при разности потенциалов $3{,}5\cdot10^{7}$ В, составляет 30 Кл. а) Сколько при этом выделяется энергии? б) Какое количество воды при 0 °C можно было бы довести до кипения?
4. (II) Работа, совершаемая внешней силой по переносу заряда $-2{,}0$ мкКл из точки a в точку b, равна $8{,}0\cdot10^{-4}$ Дж. Если заряд первоначально покоился, то в точке b он приобретает кинетическую энергию $1{,}0\cdot10^{-4}$ Дж. Чему равна разность потенциалов между a и b?
5. (II) Покажите аналитически, что электростатическая сила, описываемая законом Кулона, является консервативной.

Раздел 24.2

6. (I) Электрическое поле между двумя параллельными пластинами, подключенными к батарее с напряжением 45 В, имеет напряженность 1500 В/м. Каково расстояние между пластинами?
7. (I) Какую напряженность имеет электрическое поле между параллельными пластинами, находящимися друг от друга на расстоянии 5,0 мм, если разность потенциалов между ними составляет 110 В?
8. (II) В кинескопе телевизора электроны ускоряются в вакууме разностью потенциалов в несколько тысяч вольт. Если положить телевизор экраном вверх, смогут ли электроны двигаться против действия силы тяжести? Какую разность потенциалов надо приложить между пластинами, отстоящими друг от друга по вертикали на 20 см, чтобы действующая на электрон электростатическая сила скомпенсировала силу тяжести? Электрическое поле считайте однородным.
9. (II) Электрон ускоряется в кинескопе телевизора в горизонтальном направлении разностью потенциалов 20 000 В. Затем он проходит между двумя параллельными горизонтальными пластинами длиной 6,0 см, расстояние между которыми равно 1,0 см, а разность потенциалов 200 В (рис. 24.11). На какой угол θ отклонится электрон в результате прохождения пластин?

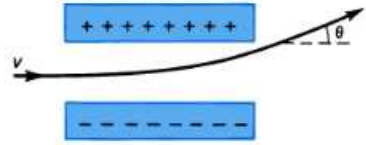


Рис. 24.11.

Раздел 24.3

10. (II) На каком расстоянии друг от друга будут находиться эквипотенциальные поверхности, проведенные через 1,0 В вблизи большой однородно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 0,55 мКл/м^2?

Раздел 24.4

11. (I) Какая разность потенциалов необходима, чтобы сообщить ядру гелия ($Q = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл) кинетическую энергию 48 кэВ?
12. (I) Чему равна средняя кинетическая энергия (в электрон-вольтах) молекулы кислорода в воздухе при стандартных условиях (0 °C, 1 атм)?
13. (I) Чему равна скорость протона с кинетической энергией 20 МэВ?

Раздел 24.5

14. (I) а) Чему равен электрический потенциал на расстоянии $0{,}50\cdot10^{-10}$ м от протона (с зарядом $+e$)? б) Чему равна в этой точке потенциальная энергия электрона?
15. (II) Рассмотрим точку a на расстоянии 85 см к северу от точечного заряда -45 мКл и точку b на расстоянии 60 см к западу от этого заряда. Определите а) $V_{ba} = V_b - V_a$; б) величину и направление напряженности поля $\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a$.
16. (II) Заряд $+25$ мкКл находится на расстоянии 5,0 см от такого же заряда $+25$ мкКл. Какую работу должна совершить внешняя сила, чтобы переместить пробный заряд $+0{,}12$ мкКл из точки посредине между зарядами на 1,0 см ближе к одному из зарядов?
17. (II) Заряды $+3{,}0$ и $-2{,}0$ мкКл находятся на расстоянии 2,0 см друг от друга. В какой точке на соединяющей их прямой а) напряженность электрического поля равна нулю; б) потенциал равен нулю?

Раздел 24.6

18. (I) Электрон и протон находятся на расстоянии $0{,}53\cdot10^{-10}$ см друг от друга. а) Чему равен дипольный момент системы, когда оба заряда покоятся? б) Чему равен средний дипольный момент системы, когда электрон движется вокруг протона по круговой орбите?

19. (I) Рассчитайте электрический потенциал, создаваемый диполем с дипольным моментом $4{,}8\cdot10^{-30}$ Кл·м в точке, отстоящей на $1{,}0\cdot10^{-9}$ м, если эта точка а) находится на оси диполя ближе к положительному заряду; б) направление на точку составляет 45° с осью диполя в направлении положительного заряда; в) направление на точку составляет 45° с осью диполя в направлении отрицательного заряда.

20. (II) а) В примере 24.5, п. «б», рассчитайте электрический потенциал, не пользуясь формулой (24.6), т.е. не предполагая $r \gg l$. б) Какую ошибку в процентах дает в данном случае так называемое дипольное приближение?

21. (II) Один из типов *электрического квадруполя* представляет собой диполи, приставленные друг к другу отрицательными зарядами. Другими словами, по обе стороны от заряда $-2Q$ на расстоянии l находятся заряды $+Q$. а) Получите точную формулу для потенциала V на расстоянии r от центрального заряда вдоль линии, соединяющей три заряда (считайте, что $r > l$, но не $r \gg l$). б) Покажите, что при $r \gg l$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ql^2}{r^3}.$$

Величина $(2Ql^2)$ называется *квадрупольным моментом*. Сравните зависимости от расстояния r потенциалов диполя и уединенного точечного заряда. в) Как будет зависеть от расстояния r потенциал электрического *октуполя*? Что может представлять собой электрический октуполь?

22. (II) Дипольный момент представляет собой вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному. Молекула воды (рис. 24.12) обладает дипольным моментом $\mathbf{p}$, равным векторной сумме двух дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Расстояние от каждого атома H до атома O равно $0{,}96\cdot10^{-10}$ м; линии, соединяющие центр атома O с атомами H, образуют угол 104°, и по результатам измерений результирующий дипольный момент молекулы равен $p = 6{,}1\cdot10^{-30}$ Кл·м. а) Определите заряд q, приходящийся на каждый атом H. б) Определите электрический потенциал, создаваемый каждым из диполей $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ вдали от молекулы, и покажите, что

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2},$$

где p – величина результирующего дипольного момента $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, а V – потенциал, обусловленный совместно $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$.

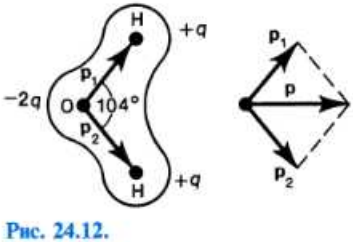


Рис. 24.12.

Раздел 24.7

23. (I) Нарисуйте продолговатый проводник в форме мяча для регби. Пусть этот проводник обладает отрицательным зарядом $-Q$. Изобразите десяток силовых и эквипотенциальных линий.

24. (II) Электрический потенциал очень большой плоской металлической пластины равен V_0; поверхностная плотность заряда постоянна и равна σ (Кл/м^2). Определите V на расстоянии x от пластины. Точка x находится далеко от краев, и расстояние до пластины намного меньше ее размеров.

25. (II) Электрическое поле вблизи поверхности Земли направлено к поверхности и имеет напряженность 150 В/м. а) Чему равен потенциал Земли относительно потенциала на бесконечности, принятого за нуль? б) Если считать нулевым потенциал Земли, то чему равен потенциал на бесконечности? (Игнорируйте тот факт, что положительный заряд ионосферы примерно уравновешивает заряд Земли. Как этот факт повлиял бы на ответ?)

26. (II) Какой максимальный заряд может нести сферический проводник радиусом 5,0 см?

27. (II) Каким может быть минимальный радиус шара разрядника электростатического генератора, который можно зарядить до 30 000 В без возникновения разряда в воздухе? Каков заряд шара?

28. (II) Проводящая сфера радиусом 32 см заряжена до потенциала 500 В. а) Чему равна поверхностная плотность заряда σ? б) На каком расстоянии от сферы ее потенциал равен 10 В?

29. (II) Какой разностью потенциалов надо ускорить протон, чтобы его энергия оказалась достаточной для достижения поверхности ядра железа? Заряд ядра железа в 26 раз больше заряда протона ($=e$), а его радиус равен $4{,}0\cdot10^{-15}$ м. Считайте ядро однородно заряженным шаром.

30. (II) Изолированный сферический проводник радиусом R_1 обладает зарядом Q. Вторая проводящая сфера радиусом R_2, вначале не заряженная, соединяется длинным проводом с первой. а) Что можно сказать о потенциалах обеих сфер после их соединения? б) Чему равен

заряд, перешедший на вторую сферу? Считайте расстояние между сферами большим по сравнению с их радиусами. (Для чего нужно это предположение?)

31. (II) Предположим, что однородный слой электронов удерживается силой тяжести недалеко над поверхностью Земли. Какое максимальное число электронов может удерживаться таким образом? В расчете следует учитывать заряды и поля только самих электронов.

32. (II) Определите разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях R_a и R_b от очень длинного ($L \gg R_a$, R_b) прямолинейного заряженного проводника с линейной плотностью заряда λ.

33. (II) Очень длинный проводящий цилиндр длиной L и радиусом $R_0 (L \gg R_0)$ равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ (Кл/м^2). Электрический потенциал цилиндра V_0. Чему равен потенциал на расстоянии r от оси цилиндра в точках, удаленных от его концов при а) $r > R_0$; б) $r < R_0$. в) Будет ли $V = 0$ при $r = \infty$ (считая $L = \infty$)? Объясните.

34. (III) Полый сферический проводник с зарядом $+Q$ имеет внутренний радиус R_1 и внешний радиус $R_2 = 2R_1$. В центре сферы находится точечный заряд $+Q/2$. Определите зависимость потенциала от r – расстояния от центра – при а) $0 < r < R_1$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r > R_2$. г) Определите зависимость напряженности электрического поля E от r в указанных областях. д) Постройте графики $V(r)$ и $E(r)$ в области от $r = 0$ до $r = 2R_2$.

35. (III) В объеме непроводящего шара радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определите зависимость электрического потенциала от расстояния r до центра шара при а) $r > R$; б) $r < R$. Положите $V = 0$ при $r = \infty$. в) Постройте графики $V(r)$ и $E(r)$. Сравните с примером 24.8.

36. (III) В непроводящем шаре радиусом R_2 имеется концентрическая сферическая полость радиусом R_1. По шару равномерно распределен электрический заряд с объемной плотностью ρ (Кл/м^3). Определить зависимость электрического потенциала (относительно $V = 0$ при $r = \infty$) от расстояния r до центра шара при а) $r > R_2$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r < R_1$. Сохраняется ли непрерывность V при $r = R_1$ и $r = R_2$?

37. (III) Решите задачу 35, считая, что плотность заряда ρ растет пропорционально квадрату расстояния от центра шара, где $\rho = 0$.

Раздел 24.8

38. (I) Чему равен градиент потенциала у поверхности ядра урана ($Q = +92e$), диаметр которого составляет примерно $15 \cdot 10^{-15}$ м?

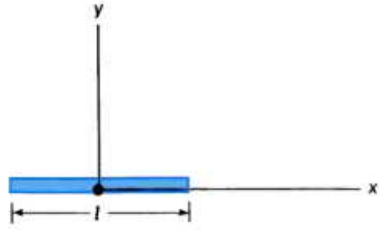


Рис. 24.13.

39. (I) Покажите, что напряженность электрического поля уединенного точечного заряда [уравнение (22.4)] следует из уравнения (24.5): $V = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q/r)$.

40. (II) Электрический потенциал в некоторой области пространства определяется выражением $V = ay/(b^2 + y^2)$. Определите напряженность электрического поля $\mathbf{E}$.

41. (II) В полярных координатах (см. приложение В) связь между $\mathbf{E}$ и V дается выражениями

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

а) Докажите, исходя из формулы (24.8), справедливость этих выражений. б) Определите составляющие напряженности поля E_r и E_θ электрического диполя (рис. 24.5) в любой точке пространства (r, θ), считая $r \gg l$.

42. (III) По тонкому короткому горизонтальному отрезку проволоки длиной l равномерно распределен заряд Q (рис. 24.13). Определите электрический потенциал а) на расстоянии y от середины отрезка; б) на расстоянии x от середины отрезка вдоль линии, являющейся его продолжением ($x > l/2$). Считайте $V = 0$ на бесконечности. в) Определите x- и y-компоненты напряженности поля $\mathbf{E}$ в точках $(0, y)$ и $(x, 0)$.

Раздел 24.9

43. (I) Определите электростатическую потенциальную энергию (в электрон-вольтах) двух протонов в ядре урана (^{235}U), если а) протоны находятся на поверхности ядра и диаметрально противоположны; б) один протон находится в центре ядра, а другой – на поверхности. Диаметр ядра урана равен примерно $15 \cdot 10^{-15}$ м.

44. (I) Запишите полную электростатическую энергию U для а) четырех точечных зарядов; б) пяти точечных зарядов.

Рис. 24.14.

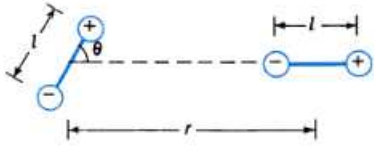


Рис. 24.15.

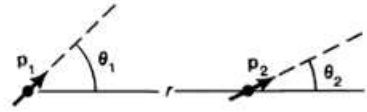


Рис. 24.16.

45. (I) Какую работу необходимо совершить по переводу трех электронов из бесконечности на расстояние $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ м друг от друга?

46. (II) Покажите, что, когда два диполя с дипольными моментами p_1 и p_2 располагаются вдоль одной прямой (рис. 24.14), потенциальная энергия одного в присутствии другого (их энергия взаимодействия) равна

$$U = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p_1 p_2}{r^3},$$

где r – расстояние между диполями (r много больше размеров каждого из диполей).

47. (II) Два диполя сильнее всего взаимодействуют, когда они выстроены непосредственно в линию. Чтобы убедиться в этом, рассчитайте энергию взаимодействия двух диполей (рис. 24.15), а) когда они выстроены вдоль одной прямой ($\theta = 0°$); б) когда угол между их осями $\theta = 45°$; в) $\theta = 90°$; г) $\theta = 180°$. Считайте, что $|q| = 0{,}40e$, $l = 1{,}0$ Å, $r = 3{,}0$ Å.

48. (II) Четыре точечных заряда расположены в вершинах квадрата со стороной 8,0 см. Заряды равны (по часовой стрелке) Q, $2Q$, $-3Q$ и $2Q$, где $Q = 4{,}8$ мкКл. Чему равна полная электростатическая потенциальная энергия системы?

49. (II) Четыре равных точечных заряда Q расположены в вершинах квадрата со стороной b. а) Чему равна полная электростатическая потенциальная энергия системы? б) Какую потенциальную энергию будет иметь пятый заряд Q, помещенный в центре квадрата (относительно $V = 0$ на бесконечности)? в) В устойчивом или неустойчивом равновесии находится пятый заряд? Если в неустойчивом, то какую максимальную кинетическую энергию он может приобрести? г) Ответьте на вопрос «в» в случае, когда пятый заряд отрицателен ($-Q$).

50. (II) Решите задачу 49, заменив два заряда в противоположных вершинах по диагонали на отрицательные ($-Q$).

51. (II) В модели атома водорода Бора электрон вращается вокруг ядра (протона) по круговой орбите радиусом r. Определите r, зная, что энергия ионизации (т. е. энергия, необходимая для отрыва электрона) по результатам измерений равна 13,6 эВ.

52. (II) Определите полную электростатическую потенциальную энергию проводящей сферы радиусом R, по поверхности которой равномерно распределен заряд Q.

53. (III) Определите полную электростатическую потенциальную энергию непроводящего шара радиусом R, по объему которого равномерно распределен заряд Q.

54. (III) Покажите, что электростатическая потенциальная энергия двух диполей, расположенных в одной плоскости (рис. 24.16), определяется выражением

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_1 p_2}{r^3}[\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos\theta_1 \cos\theta_2].$$

Считайте, что r намного больше размеров каждого из диполей. Векторы дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ направлены от отрицательного заряда к положительному.

25 Электрическая емкость, диэлектрики, накопление электрической энергии

Этой главой завершается изучение электростатики. Прежде всего речь пойдет о конденсаторах – важных устройствах, применяемых почти во всех электронных схемах. Мы обсудим также возможности накопления электрической энергии и влияние так называемых диэлектриков (непроводников) на электрические поля и разность потенциалов.

25.1. Конденсаторы

Конденсатор – это устройство для накопления электрического заряда; он состоит из двух проводников (обкладок), расположенных близко друг к другу, но не соприкасающихся. Типичный плоский конденсатор представляет собой пару параллельных пластин площадью A, разделенных небольшим промежутком d (рис. 25.1, *а*). Часто пластины, разделяют прокладкой из бумаги или другого диэлектрика (изолятора) и сворачивают в рулон (рис. 25.1, *б*).

Предположим, что конденсатор подключен к источнику напряжения, например к батарее (рис. 25.2). (Батарея – это устройство, на клеммах которого поддерживается

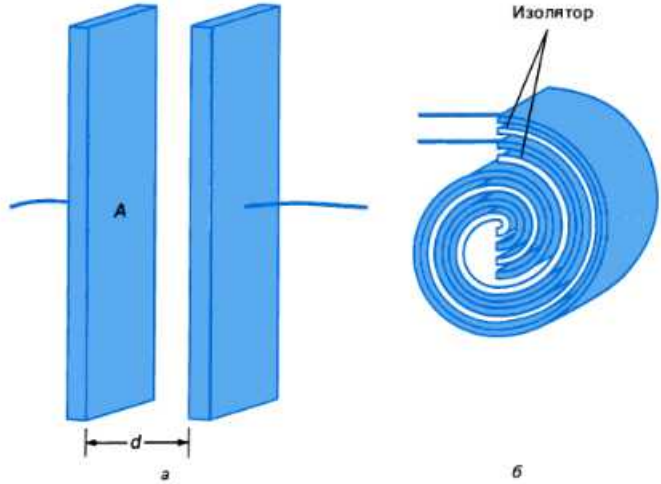


Рис. 25.1. Конденсаторы.

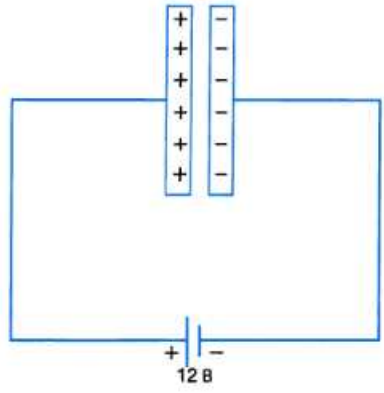


Рис. 25.2. Конденсатор с параллельными обкладками, соединенный с батареей.

относительно постоянная разность потенциалов.) Подсоединенный к батарее конденсатор быстро заряжается: одна его обкладка приобретает положительный заряд, другая – равный по величине отрицательный. Заряд, приобретаемый каждой из обкладок конденсатора, пропорционален разности потенциалов V_{ba}:

$$Q = CV_{ba}. \tag{25.1}$$

Коэффициент пропорциональности C называется **емкостью** конденсатора. Единица емкости, кулон на вольт, называется *фарад* (Ф). На практике чаще всего применяются конденсаторы емкостью от 1 пФ (пикофарад, 10^{-12} Ф) до 1 мкФ (микрофарад, 10^{-6} Ф). Формулу (25.1) впервые вывел Вольта (разд. 26.1) в конце XVIII в.

25.2. Определение емкости конденсатора

Емкость C служит характеристикой данного конденсатора. Величина емкости C зависит от размеров, формы и взаимного расположения обкладок, а также от вещества, заполняющего промежуток между обкладками. В этом разделе мы будем считать, что между обкладками находится вакуум или воздух.

Емкость конденсатора, согласно (25.1), можно определить экспериментально, непосредственно измерив заряд Q пластины при известной разности потенциалов V_{ba}.

Если геометрическая конфигурация конденсаторов достаточно проста, то можно определить емкость C аналитически. Для иллюстрации рассчитаем емкость C конденсатора с параллельными пластинами площадью A, находящимися на расстоянии d друг от друга (плоский конденсатор) (рис. 25.3). Будем считать, что величина d мала по сравнению с размерами пластин, так что электрическое поле **E** между пластинами однородно и искривлением силовых линий у краев пластин можно пренебречь. Ранее мы показали (пример 22.9), что напряженность

электрического поля между близко расположенными параллельными пластинами равна $\mathbf{E} = \sigma/\varepsilon_0$, а силовые линии перпендикулярны пластинам. Поскольку плотность заряда равна $\sigma = Q/A$, то

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Согласно (24.4), напряженность электрического поля связана с разностью потенциалов соотношением

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Мы можем взять интеграл от одной пластины до другой вдоль траектории, направленной навстречу силовым линиям:

$$V_{ba} = +\int_a^b E dl = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\int_a^b dl = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

Установив связь между Q и V_{ba}, выразим теперь емкость C через геометрические параметры:

$$C = \frac{Q}{V_{ba}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{[плоский конденсатор]}. \tag{25.2}$$

Справедливость полученного вывода очевидна: чем больше площадь A, тем «свободнее» разместятся на ней заряды, отталкивание между ними будет меньше и каждая пластина сможет удерживать больший заряд. Чем больше расстояние d между пластинами, тем слабее заряды на одной пластине будут притягивать заряды на другой: на пластины от батареи поступает меньше заряда и емкость оказывается меньше.

Обратим также внимание на то, что, согласно (25.2), C не зависит от Q или V и, как и следует из опыта, величина Q пропорциональна V.

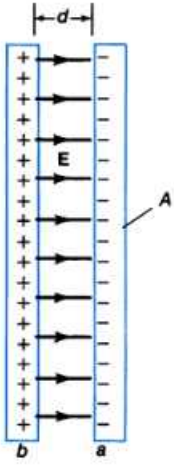


Рис. 25.3. Конденсатор с параллельными обкладками площадью A.

Пример 25.1. а) Рассчитайте емкость плоского конденсатора, пластины которого имеют размеры 20 × 3,0 см и разделены воздушным промежутком 1,0 мм. б) Чему равен заряд каждой пластины, когда конденсатор подключен к клеммам батареи с напряжением 12 В?

Решение. а) Площадь $A = (20\cdot10^{-2}\text{ м}) \times (3{,}0\cdot10^{-2}\text{ м}) = 6{,}0\cdot10^{-3}\text{ м}^2$. Емкость конденсатора равна

$$C = (8{,}85\cdot10^{-12}\text{ Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2) \times \frac{(6{,}0\cdot10^{-3}\text{ м}^2)}{(1{,}0\cdot10^{-3}\text{ м})} = 53\text{ пФ}.$$

б) Заряд каждой пластины равен

$$Q = CV = (53\cdot10^{-12}\text{ Ф})(12\text{ В}) = 6{,}4\cdot10^{-10}\text{ Кл}.$$

Формула (25.2), согласно которой $C \sim A/d$, справедлива и для конденсатора с пластинами, свернутыми в рулон (рис. 25.1, *б*). Однако, если между обкладками, как обычно, находится изолятор, коэффициент ε_0 следует изменить. Этот вопрос мы обсудим в разд. 25.5. Для конденсатора, состоящего из двух длинных коаксиальных

цилиндров, результат будет несколько иным, как показывает следующий пример.

Пример 25.2. Цилиндрический конденсатор представляет собой цилиндр (или провод) радиусом R_1, окруженный коаксиальным цилиндром (или оболочкой) с внутренним радиусом R_2 (рис. 25.4, *а*). Будем считать, что длина обоих цилиндров L намного больше зазора между цилиндрами $R_2 - R_1$. Конденсатор заряжен (например, подключен к батарее), и одна его обкладка имеет заряд $+Q$, а другая $-Q$. Выведите формулу для емкости конденсатора.

Решение. Нам необходимо выразить разность потенциалов между обкладками V_{ba} через заряд Q. Мы вполне могли бы воспользоваться полученным ранее результатом (пример 22.7), согласно которому электрическое поле длинного проводника направлено радиально наружу и имеет напряженность $E = (1/2\pi\varepsilon_0)(\lambda/r)$, где r – расстояние от оси, а λ – заряд, приходящийся на единицу длины проводника: Q/L. Далее легко было бы догадаться, что напряженность электрического поля между цилиндрами равна $E = (1/2\pi\varepsilon_0)(Q/Lr)$. Но давайте начнем с нуля и честно рассчитаем напряженность электрического поля, пользуясь теоремой Гаусса. Будем считать, что цилиндры заряжены равномерно и поэтому напряженность электрического поля зависит только от расстояния r от оси цилиндра. В силу симметрии вектор напряженности будет перпендикулярен оси (рис. 25.4, *б*). (Поскольку $R_2 - R_1 \ll L$, мы можем пренебречь искривлением силовых линий у торцов цилиндров.) Проведем воображаемую цилиндрическую поверхность радиусом r ($R_1 < r < R_2$), коаксиальную с цилиндрическими обкладками (штриховая линия на рис. 25.4, *б*). Это поверхность интегрирования. Поток напряженности электрического поля сквозь торцы отсутствует, так что весь поток направлен через боковую поверхность цилиндра, площадь которой равна $(2\pi r)(L)$. Поскольку напряженность электрического поля E на этой поверхности постоянна, теорема Гаусса дает

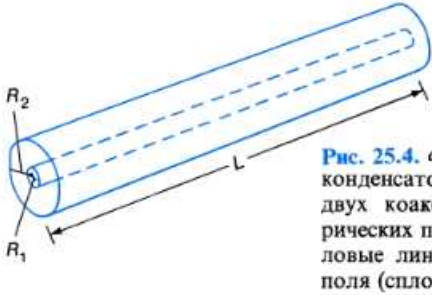
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0,$$

$$E(2\pi rL) = Q/\varepsilon_0,$$

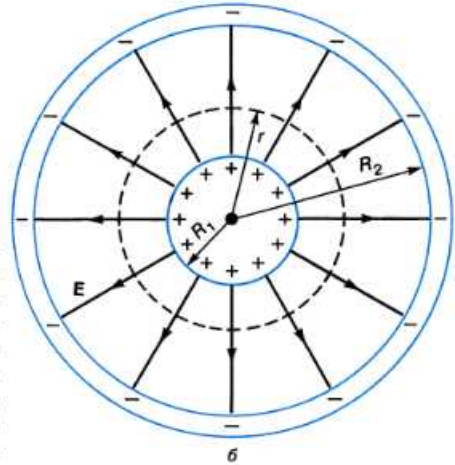
поскольку поверхность охватывает весь заряд Q на внутренней обкладке. Тогда

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{Q}{r} \quad [R_1 < r < R_2],$$

что подтверждает полученный ранее результат. Чтобы выразить V_{ba} через Q, подставим его в (24.4) и вычислим интеграл вдоль радиуса в пределах от внеш-



а



б

Рис. 25.4. *а* – цилиндрический конденсатор, состоящий из двух коаксиальных цилиндрических проводников; *б* – силовые линии электрического поля (сплошные линии) и цилиндрическая поверхность интегрирования (штриховая кривая) в поперечном сечении конденсатора.

него цилиндра до внутреннего:

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \\ = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_2}{R_1},$$

где, поскольку мы движемся «вовнутрь», $d\mathbf{l} = -d\mathbf{r}$ и направление вектора $\mathbf{E}$ противоположно $d\mathbf{l}$. И величины Q и V_{ba} оказываются взаимно пропорциональными, а емкость C равна

$$C = \frac{Q}{V_{ba}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \quad \left[\begin{matrix}\text{цилиндрический}\\ \text{конденсатор}\end{matrix}\right].$$

Подтверждается ли полученная формула, т. е. зависимость C от L, R_1 и R_2 общими соображениями? [См. замечания после формулы (25.2).]

Уединенный проводник также обладает емкостью C. В этом случае C определяется как отношение заряда к абсолютному потенциалу проводника (по отношению к $V = 0$ при $r = \infty$), и равенство

$$Q = CV$$

остается справедливым. Например, потенциал проводящей сферы радиусом r_0 (пример 24.8) с зарядом Q равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0},$$

а ее емкость равна

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 r_0.$$

Заметим, однако, что уединенный проводник не может служить конденсатором. На практике вблизи него могут находиться другие проводники или земля, которые представляют собой вторую «обкладку» конденсатора, и емкость будет зависеть от взаимного расположения этих тел.

Пример 25.3. *Электрометр.* Покажите, что простейший электроскоп с подвижными листочками (электрометр) (разд. 22.4) измеряет потенциал, а не заряд других тел. (Все потенциалы и емкости следует рассматривать относительно земли.)

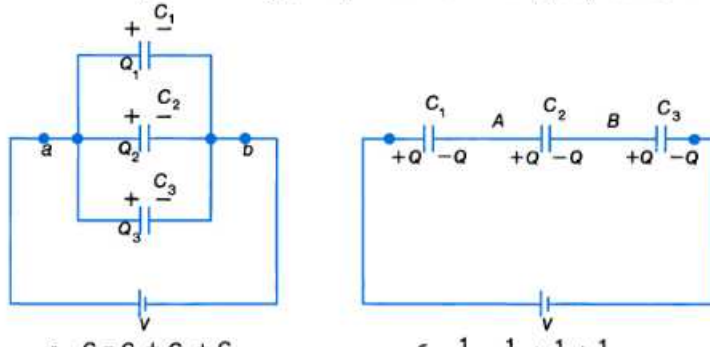
Решение. Как мы видели в разд. 22.4, отклонение листочков служит мерой заряда электроскопа. Поскольку $Q = CV$, отклонение листочков можно откалибровать также в единицах потенциала V электроскопа. (Ни та ни другая шкала не будет линейной; не будут они и совпадать между собой, так как емкость электроскопа C_e зависит, пусть и незначительно, от расстояния между листочками.) Если мы хотим воспользоваться электроскопом для определения «электрического состояния» какого-либо тела, то следует иметь в виду, что после соединения тела с электроскопом оба приобретут один и тот же потенциал (скажем, по отношению к земле). После соединения часть заряда тела перейдет на первоначально незаряженный электроскоп. Если этот перешедший на электроскоп заряд не составляет ничтожно малой доли исходного заряда тела, то собственный потенциал тела (и, разумеется, его заряд) изменится; другими словами, процесс измерения заметно повлияет на систему и изменит измеряемую величину. Это влияние можно уменьшить, потребовав, чтобы емкость электроскопа C_e была много меньше емкости C заряженного тела: коль скоро их потенциал V одинаков, то $Q = CV$ и $Q_e = C_e V$ и тогда $Q_e \ll Q$ при условии, что $C_e \ll C$. Отсюда следует, что потенциал тела при соединении с электроскопом изменится

незначительно. Заряд Q_e, переходящий на электроскоп, и, следовательно, отклонение листочков будут зависеть только от потенциала V (поскольку $Q_e = C_e V$) при условии, что тело находится достаточно далеко (а соединительный проводник достаточно тонок и его зарядом можно пренебречь) и не оказывает дополнительного влияния на электроскоп (например, индуцируя заряд). Таким образом, электроскоп можно проградуировать в значениях потенциала V. Но откалибровать его для измерения заряда различных тел *не удастся*. Чтобы пояснить это рассмотрим другое тело с тем же самым потенциалом V, но емкостью, вдвое большей: $C' = 2C$. Отклонение листочков электроскопа будет прежним: оно определяется равенством $Q_e = C_e V$, а значение V не изменилось. В то же время заряд второго тела равен $Q' = C'V = 2CV = 2Q$, т. е. вдвое больше заряда первого. Электроскоп же дает одинаковые показания для зарядов обоих тел (Q и $2Q$) и, очевидно, не пригоден для измерения заряда различных тел. Есть, впрочем, одно исключение: если измерение проводится всегда на одном и том же теле (или тела всегда имеют одну и ту же емкость), то для такой системы электроскоп можно проградуировать и в единицах заряда. Но столь серьезное ограничение не позволяет нам утверждать, будто электроскоп вообще годится для измерения заряда.

Этот пример с, казалось бы, простым устройством должен служить предостережением относительно использования измерительных устройств. Всегда надо тщательно проанализировать: 1) что именно измеряет прибор и с какой погрешностью и 2) насколько введение измерительного прибора влияет на систему, над которой проводится измерение. (С подобными примерами мы столкнемся при рассмотрении вольтметров и амперметров в разд. 27.6 и 27.7.)

25.3. Последовательное и параллельное соединения конденсаторов

Конденсаторы можно соединять различными способами. На практике это используют очень часто, и емкость комбинации конденсаторов зависит от того, как они соединены. Два основных способа соединения – параллельное и последовательное (рис. 25.5). (На принципиальных схемах конденсатор обозначается символом ⊣⊢, источник напряжения (батарея) – символом ⊣|⊢.) Рассмотрим сначала параллельное соединение (рис. 25.5, *а*). Если батарея с напряжением V подключена к точкам a и b, то это напряжение будет приложено к каждому из кон-



а $C = C_1 + C_2 + C_3$ *б* $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

Рис. 25.5. Параллельное (*а*) и последовательное (*б*) соединения конденсатора.

денсаторов: поскольку левые пластины всех конденсаторов соединены между собой проводником, они имеют одинаковый потенциал; то же самое можно сказать и о правых пластинах. Тогда заряд на пластинах каждого из конденсаторов будет равен соответственно $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$, $Q_3 = C_3V$. Полный заряд, отбираемый от батареи, составит

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1V + C_2V + C_3V.$$

Емкость эквивалентного конденсатора, который в состоянии накопить заряд Q при том же напряжении V, дается соотношением

$$Q = CV = C_1V + C_2V + C_3V,$$

т. е.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad \left[\begin{array}{l}\text{параллельное соединение}\\ \text{конденсаторов}\end{array}\right]. \qquad (25.3)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов результирующая емкость возрастает (и равна сумме емкостей отдельных конденсаторов). Этого и следовало ожидать: ведь происходит увеличение площади пластин, на которых накапливается заряд [см., например, (25.2)].

Если конденсаторы соединены последовательно (рис. 25.5, *б*), заряд $+Q$ переходит от батареи на пластину (левую) C_1, а заряд $-Q$ – на пластину (правую) C_3. Участки A и B между конденсаторами были вначале электрически нейтральными; поэтому результирующий заряд по-прежнему должен быть равен нулю. Заряд $+Q$ на левой пластине C_1 вызывает появление заряда $-Q$ на противоположной пластине, а поскольку в целом заряд участка A равен нулю, на левой пластине C_2 должен появиться заряд $+Q$. Аналогичные соображения применимы и к остальным конденсаторам; в результате оказывается, что на каждом конденсаторе имеется один и тот же заряд Q. Конденсатор, которым можно заменить все последовательно соединенные конденсаторы, должен иметь емкость C такую, чтобы выполнялось равенство

$$Q = CV.$$

Полное напряжение V на концах цепочки последовательно соединенных конденсаторов равно сумме напряжений на каждом конденсаторе:

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Мы знаем, кроме того, что $Q = C_1V_1$, $Q = C_2V_2$ и $Q = C_3V_3$; подставляя V_1, V_2 и V_3 в последнее равенство, получим

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3},$$

или

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{последовательное соединение}\\ \text{конденсаторов}\end{array}\right]. \tag{25.4}$$

Остальные соединения можно рассматривать как комбинации параллельных и последовательных соединений.

Пример 25.4. Определите емкость конденсатора, эквивалентного цепи на рис. 25.6. (Пусть $C_1 = C_2 = C_3 = C$.)

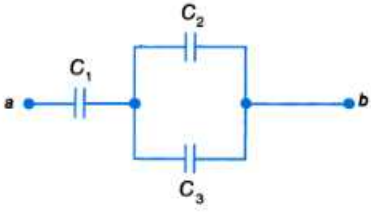


Рис. 25.6. К примеру 25.4.

Решение. Конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно и поэтому эквивалентны конденсатору емкостью

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 2C.$$

C_{23} и C_1 соединены последовательно, и эквивалентная им емкость C_e определяется из равенства

$$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{23}}=\frac{1}{C}+\frac{1}{2C}=\frac{3}{2C}.$$

Отсюда $C_e = {}^2/_3 C$ – это и есть эквивалентная емкость всей цепи.

25.4. Накопление электрической энергии

В заряженном конденсаторе накоплена (аккумулирована) электрическая энергия. Эта энергия конденсатора равна работе, необходимой для зарядки конденсатора. Процесс зарядки конденсатора состоит, по сути, в том, что заряд с одной пластины переносится на другую. Именно это совершает источник напряжения, когда его подключают к конденсатору. Сначала, когда конденсатор не заряжен, для переноса первой порции заряда не требуется работы. Но когда на каждой из пластин уже имеется заряд, для пополнения его приходится совершать работу против сил электрического отталкивания. Чем больше накопленный пластинами заряд, тем бóльшую работу, необходимо совершить для его увеличения. Если на пластинах существует разность потенциалов V, работа по переносу элемента заряда dq равна $dW = Vdq$. Поскольку $V = q/C$ [см. (25.1)], где C – емкость, работа по заряду конденсатора составит

$$W=\int_0^Q Vdq=\frac{1}{C}\int_0^Q qdq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Итак, мы можем сказать, что энергия, запасенная, или аккумулированная, конденсатором, равна

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

если заряды обкладок конденсатора емкостью C равны соответственно $+Q$ и $-Q$. А так как $Q = CV$, где V – раз-

ность потенциалов между обкладками, мы можем написать

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV. \qquad (25.5)$$

Пример 25.5. Конденсатор емкостью 20 мкФ подключен к батарее напряжением 12 В. Какую энергию может запасти конденсатор?

Решение. Согласно (25.5),

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(20\cdot 10^{-6}\ \text{Ф})(12\ \text{В})^2 =$$
$$= 1{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Энергия не является «вещественной субстанцией», поэтому она вовсе не должна быть где-то сосредоточена. Тем не менее принято считать, что она запасена электрическим полем между пластинами. Для примера выразим энергию плоского конденсатора через напряженность электрического поля.

Мы показали [см. (24.3)], что между параллельными пластинами существует приблизительно однородное электрическое поле **E** и его напряженность связана с разностью потенциалов соотношением $V = Ed$, где d – расстояние между пластинами. Кроме того, согласно (25.2), емкость плоского конденсатора равна $C = \varepsilon_0 A/d$. Тогда

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\left(E^2 d^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ad.$$

Произведение Ad характеризует объем, занимаемый электрическим полем E. Разделив обе части формулы на объем, получим выражение для энергии, запасенной в единице объема, или **плотности энергии** u:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \qquad (25.6)$$

Плотность электростатической энергии, запасенной в любой части пространства, пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в этой области. Выражение (25.6) получено для частного случая плоского конденсатора. Можно показать, однако, что оно справедливо для любой области пространства, в которой существует электрическое поле.

25.5. Диэлектрики

В большинстве конденсаторов между пластинами проложен изолирующий материал (**диэлектрик**), например бумага или пластмассовая пленка. Этим достигается сразу несколько целей. Во-первых, диэлектрики лучше противостоят электрическому пробою, чем воздух, и к конденсатору можно приложить более высокое напряжение без утечки заряда через зазор между обкладками. Во-вторых,

Таблица 25.1. Диэлектрическая проницаемость (при 20 °С)

Вещество	K
Вакуум	1,0000
Воздух (1 атм)	1,0006
Парафин	2,2
Эбонит	2,8
Пластик (поливинильный)	2,8–4,5
Бумага	3–7
Кварц	4,3
Стекло	4–7
Фарфор	6–8
Слюда	7
Этиловый спирт	24
Вода	80

при наличии прокладки из диэлектрика пластины можно расположить ближе друг к другу без опасения, что они могут соприкасаться[1]. Наконец, экспериментально обнаружено, что при заполнении пространства между пластинами диэлектриком его емкость увеличивается в K раз, т. е.

$$C = KC_0, \tag{25.7}$$

где C_0 – емкость, отвечающая вакууму между обкладками, а C – емкость в случае, когда пространство между пластинами заполнено диэлектриком. Множитель K называют **относительной диэлектрической проницаемостью**; значения K для ряда диэлектриков приведены в табл. 25.1. Обратите внимание на то, что для воздуха при давлении 1 атм $K = 1{,}0006$, и поэтому емкость конденсатора с воздушным зазором очень мало отличается от емкости этого конденсатора в вакууме.

Для плоского конденсатора

$$C = K\varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{[плоский конденсатор]} \tag{25.8}$$

[см. (25.2)], когда пространство между пластинами целиком заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью K. (Случай, когда диэлектрик заполняет лишь часть пространства между пластинами, рассматривается ниже – см. пример 25.6.) Величина $K\varepsilon_0$ так часто встречается в формулах, что нередко вводят величину

$$\varepsilon = K\varepsilon_0, \tag{25.9}$$

которую называют *абсолютной диэлектрической проницаемостью*. Тогда емкость плоского конденсатора прини-

[1] Как мы видели в примере 25.1, емкость простого плоского конденсатора обычных размеров составляет всего несколько пикофарад. Чтобы получить емкость 1 мкФ без использования диэлектрика, потребовались бы пластины гигантских размеров.

мает вид

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}.$$

Напомним, что ε_0 – это электрическая постоянная. Плотность энергии, запасенной электрическим полем E (разд. 25.4), определяется выражением [ср. (25.6)]

$$u = \frac{1}{2} K \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2.$$

Влияние диэлектрика на емкость впервые всесторонне исследовал Фарадей. Он обнаружил, что, когда пространство между пластинами конденсатора заполнено диэлектриком, на пластинах при том же напряжении накапливается несколько больший заряд, нежели когда между пластинами воздух. Иначе говоря, если заряд на каждой пластине конденсатора с воздушным промежутком равен Q_0, то после введения диэлектрика и подключения конденсатора к батарее с прежним напряжением V_0 заряд каждой из пластин увеличится до

$$Q = KQ_0 \quad \text{[при постоянном напряжении]}.$$

Это соответствует формуле (25.7), поскольку после введения диэлектрика емкость равна

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{KQ_0}{V_0} = KC_0,$$

где $C_0 = Q_0/V_0$ – емкость в отсутствие диэлектрика.

Рассмотрим теперь несколько иной случай (выше мы, вводя диэлектрик, поддерживали напряжение постоянным). Пусть пластины конденсатора, подключенного к батарее с напряжением V_0, приобретают заряд

$$Q_0 = CV_0.$$

Прежде чем ввести диэлектрик, отключим конденсатор от батареи. После введения диэлектрика (который заполняет все пространство между пластинами) заряд Q_0 на каждой из пластин не изменится. В этом случае мы обнаружим, что разность потенциалов между пластинами уменьшится в K раз:

$$V = \frac{V_0}{K}.$$

Емкость же вновь будет равна

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/K} = K \frac{Q_0}{V_0} = KC_0.$$

Оба этих результата согласуются с выражением (25.7).

Электрическое поле внутри диэлектрика также изменяется. При отсутствии диэлектрика между пластинами напряженность электрического поля между обкладками

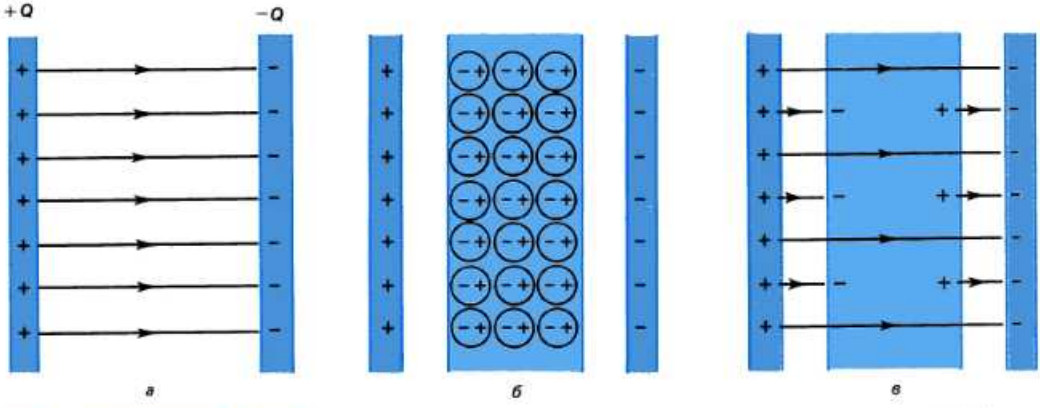


Рис. 25.7. Молекулярные представления о свойствах диэлектрика.

плоского конденсатора определяется формулой (24.3):

$$E_0 = \frac{V_0}{d},$$

где V_0 – разность потенциалов между пластинами, а d – расстояние между ними. Если конденсатор изолирован, так что заряд на пластинах после введения диэлектрика не изменяется, то разность потенциалов упадет до значения $V = V_0/K$. Напряженность электрического поля в диэлектрике теперь будет равна

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{Kd},$$

или

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad \text{[в диэлектрике]}. \qquad (25.10)$$

Таким образом, напряженность электрического поля внутри диэлектрика также ослабляется в K раз. Электрическое поле внутри диэлектрика (изолятора) ослабляется, но не до нуля, как в случае проводника.

Происходящее в диэлектрике можно объяснить с молекулярной точки зрения. Рассмотрим конденсатор, обкладки которого разделены воздушным промежутком. На одной обкладке имеется заряд $+Q$, на другой заряд $-Q$ (рис. 25.7, *а*). Конденсатор изолирован (не подключен к батарее). Разность потенциалов между пластинами V_0 определяется выражением (25.1): $Q = C_0 V_0$. (Индекс 0 соответствует воздуху между пластинами.) Введем теперь между пластинами диэлектрик (рис. 25.7, *б*). Молекулы диэлектрика могут быть *полярными* – иначе говоря, они могут обладать постоянным дипольным моментом, будучи нейтральными. В электрическом поле возникнет вращательный момент, который будет стремиться развернуть диполи параллельно полю (рис. 25.7, *б*); тепловое движение препятствует идеальной ориентации всех молекул, однако, чем сильнее поле, тем выше будет степень

выстроенности молекул. Даже если молекулы не полярны, в электрическом поле между обкладками у них произойдет разделение заряда, и молекулы приобретут *индуцированный (наведенный) дипольный момент*: электроны, не отрываясь от молекулы, сместятся в сторону положительной обкладки. Поэтому картина всегда будет такой, как показано на рис. 25.7, *б*. В конечном итоге все выглядит так, как если бы на обращенной к положительной обкладке внешней стороне диэлектрика имелся результирующий отрицательный заряд, а на противоположной – положительный (рис. 25.7, *в*). Из-за появления на диэлектрике этого индуцированного заряда часть электрических силовых линий не пройдет сквозь диэлектрик, а будет заканчиваться (или начинаться) на зарядах, наведенных на его поверхности. Соответственно напряженность электрического поля внутри диэлектрика окажется меньше, чем в воздухе.

Можно представить себе эту картину и по-иному (рис. 25.7, *г*). Напряженность электрического поля внутри диэлектрика представляет собой векторную сумму напряженности поля $\mathbf{E}_0$, создаваемого «свободными» зарядами на обкладках, и напряженности поля $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, создаваемого зарядами, индуцированными в диэлектрике; поскольку эти поля направлены в противоположные стороны, результирующая напряженность электрического поля внутри диэлектрика $E_0 - E_{\text{инд}}$ будет меньше E_0. Точное соотношение дается формулой (25.10):

$$E_0 - E_{\text{инд}} = \frac{E_0}{K},$$

или

$$E_{\text{инд}} = E_0\left(1 - \frac{1}{K}\right).$$

[Из соображений симметрии ясно, что, если размеры пластин велики по сравнению с расстоянием между ними, заряд, индуцированный на поверхности диэлектрика, не зависит от того, заполняет ли диэлектрик все пространство между пластинами или нет, если только его поверхности параллельны обкладкам. Формула (25.10) справедлива и в этом случае, хотя равенство $V = V_0/K$ уже не верно (почему?).]

Электрическое поле между двумя параллельными пластинами связано с поверхностной плотностью заряда σ выражением $E = \sigma/\varepsilon_0$ (разд. 23.3). Таким образом,

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma = Q/A$ – поверхностная плотность заряда на обкладке, а Q – полный заряд проводника, называемый часто *свободным зарядом* (поскольку в проводнике заряды могут свободно перемещаться). Аналогично мы определим

поверхностную плотность индуцированного заряда $\sigma_{инд}$ и

$$E_{инд} = \frac{\sigma_{инд}}{\varepsilon_0},$$

где $E_{инд}$ – напряженность электрического поля, создаваемого индуцированным зарядом $Q_{инд} = \sigma_{инд} A$ на поверхности диэлектрика (рис. 25.7, *г*); $Q_{инд}$ называют обычно *связанным зарядом* (так как в диэлектрике (изоляторе) заряды не могут свободно перемещаться). Поскольку, как показано выше, $E_{инд} = E_0(1 - 1/K)$, получаем

$$\sigma_{инд} = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \tag{25.11а}$$

и

$$Q_{инд} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right). \tag{25.11б}$$

Так как K больше 1, индуцированный на диэлектрике заряд всегда меньше заряда на обкладках конденсатора.

Пример 25.6. Площадь обкладок плоского конденсатора равна $A = 250$ см^2; расстояние между ними $d = 2{,}00$ мм. Конденсатор заряжается от батареи с напряжением $V_0 = 150$ В. Затем его отключают от батареи (заряд Q на обкладках при этом не меняется) и между обкладками вводят диэлектрическую пластину ($K = 3{,}50$) такой же площади A и толщиной $l = 1{,}00$ мм (рис. 25.8). Определите а) начальную емкость конденсатора с воздушным зазором; б) заряд на каждой обкладке до введения диэлектрика; в) заряд, индуцированный на каждой поверхности диэлектрической пластины; г) напряженность электрического поля между каждой обкладкой конденсатора и поверхностью диэлектрика; д) напряженность электрического поля в диэлектрике; е) разность потенциалов между обкладками после введения диэлектрика; ж) емкость конденсатора с диэлектриком.

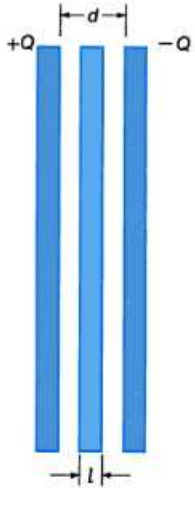


Рис. 25.8. К примеру 25.6.

Решение. а) До введения диэлектрика

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = (8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2) \times$$

$$\times \frac{(2{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2)}{(2{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{м})} = 111\ \text{пФ}.$$

б) Заряд каждой обкладки равен

$$Q = C_0 V_0 = (1{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{Ф})(150\ \text{В}) =$$

$$= 1{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

в) По формуле (25.11б)

$$Q_{инд} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (1{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{3{,}5}\right) = 1{,}19 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

г) В зазорах между обкладками и диэлектриком (рис. 25.7, *в*) напряженность электрического поля будет такая же, как в случае отсутствия диэлектрика, так как

заряд на обкладках не изменился. Мы могли бы воспользоваться теоремой Гаусса, как в примере 23.5, и получить $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$; или же заметим, что в отсутствие диэлектрика $E_0 = V_0/d = Q/C_0 d$ (так как $V_0 = Q/C_0$), или $E_0 = Q/\varepsilon_0 A$ (так как $C_0 = \varepsilon_0 A/d$), т.е. то же самое; таким образом,

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{1{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}}{(8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл/Н} \cdot \text{м}^2)(2{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2)} =$$

$$= 7{,}50 \cdot 10^4\ \text{В/м}.$$

д) Напряженность электрического поля в диэлектрике равна

$$E_d = \frac{E_0}{K} = \frac{7{,}50 \cdot 10^4\ \text{В/м}}{3{,}50} = 2{,}14 \cdot 10^4\ \text{В/м}.$$

е) Чтобы определить разность потенциалов после введения диэлектрика, воспользуемся формулой (24.4) и проинтегрируем вдоль силовых линий:

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(d - l) + E_d l,$$

или после упрощения

$$V = E_0\left(d - l + \frac{l}{K}\right) =$$

$$= (7{,}50 \cdot 10^4\ \text{В/м})(1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{м} +$$

$$+ 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{м}/3{,}50) = 96{,}4\ \text{В}.$$

ж) При наличии диэлектрика

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}}{96{,}4\ \text{В}} = 172\ \text{пФ}.$$

Заметим, что если бы диэлектрик заполнял все пространство между обкладками, то ответами на вопросы «е» и «ж» были бы соответственно 42,9 В и 387 пФ.

Пример 25.7. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью K заполняет пространство между обкладками плоского конденсатора. Площадь каждой обкладки равна A, расстояние между ними – d. Конденсатор заряжен до разности потенциалов V и затем отключен от батареи (так что заряд на обкладках не меняется). Затем диэлектрик медленно удаляют из конденсатора. Какую работу надо при этом совершить? Объясните, почему для этого требуется работа.

Решение. Энергия, запасенная конденсатором, равна [см. (25.5)]

$$U_1 = \frac{1}{2} C V^2,$$

где $C = K\varepsilon_0 A/d$. После того как диэлектрик удален, емкость уменьшится в K раз, а напряжение на пластинах увеличится в K раз. Следовательно,

$$U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{K}\right)\left(KV\right)^2 = K\left(\frac{1}{2} C V^2\right) = K U_1.$$

Таким образом, запасенная конденсатором энергия увеличится в K раз. Для увеличения энергии необходимо совершить работу по удалению диэлектрика, величина которой (без учета трения) равна

$$W = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} C V^2 (K - 1).$$

То, что для удаления диэлектрика нужно совершить работу, ясно из общих соображений: между индуцированным на диэлектрике зарядом и зарядом пластин (рис. 25.7, *в*) действует притяжение, против силы которого и совершается внешняя работа, когда диэлектрик удаляется из конденсатора.

*25.6. Теорема Гаусса для диэлектриков

Обсудим применение теоремы Гаусса при наличии диэлектрика. Рассмотрим плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком (рис. 25.9). Размеры обкладок (площадью A) будем считать большими по сравнению с расстоянием l между

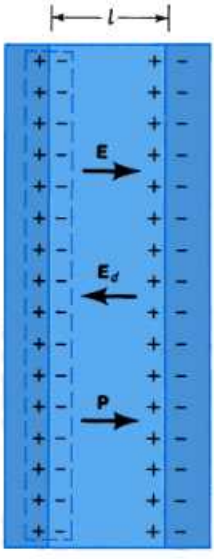


Рис. 25.9. Теорема Гаусса в диэлектрике.

ними, так что электрическое поле **E** однородно и перпендикулярно обкладкам. В качестве поверхности интегрирования выберем длинный прямоугольный «ящик» (изображен на рисунке штриховой линией), включающий небольшой участок диэлектрика. Поверхность интегрирования охватывает как свободный заряд Q на обкладке, так и индуцированный (связанный) заряд $Q_{инд}$ на диэлектрике, и, следовательно,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q - Q_{инд}}{\varepsilon_0}. \qquad (25.12)$$

Поскольку в силу (25.11б) $Q_{инд} = Q(1 - 1/K)$, то $Q - Q_{инд} = Q(1 - 1 + 1/K) = Q/K$ и

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{K\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon}. \qquad (25.13)$$

Хотя соотношение (25.13) получено в частном случае, оно справедливо всегда при наличии диэлектрика. Обратим внимание на то, что Q в этом выражении — только *свободный* заряд. Индуцированный связанный заряд не входит в формулу, так как он учитывается коэффициентом K (или ε).

Для поверхности интегрирования, показанной на рис. 25.9 (поскольку в проводнике напряженность электрического поля $\mathbf{E} = 0$), поток в направлении внутрь проводника отсутствует; отсутствует поток и через торцы «ящика», так как в этом случае вектор **E** параллелен поверхности; кроме того, торцы малы, и их вкладом в любом случае можно пренебречь. Поэтому весь поток сосредоточен через боковую поверхность внутри диэлектрика, и теорема Гаусса дает

$$E_d A = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q_{инд}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon},$$

где мы воспользовались формулами (25.12) и (25.13). Величина E_d соответствует полю внутри диэлектрика и определяется выражениями

$$E_d = \frac{Q - Q_{инд}}{\varepsilon_0 A}$$

или

$$E_d = \frac{Q}{K\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{\varepsilon A} = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Как из этих результатов, так и из общего выражения для теоремы Гаусса (25.13) видно, что отличие от случая вакуума состоит лишь в замене ε_0 на $K\varepsilon_0 = \varepsilon$.

*25.7. Поляризация и электрическое смещение (векторы P и D)

Прямоугольная диэлектрическая пластина между заряженными обкладками плоского конденсатора на рис. 25.9 обладает дипольным моментом

$$Q_{\text{инд}}\, l,$$

где l – толщина диэлектрика, а $Q_{\text{инд}}$ – заряд, наведенный на поверхности диэлектрика. Для характеристики диэлектрика можно ввести новую величину – *вектор поляризации* **P**, *дипольный момент единицы объема*. Для прямоугольной диэлектрической пластины площадью A и толщиной l

$$P = \frac{Q_{\text{инд}}\, l}{Al} = \frac{Q_{\text{инд}}}{A} = \sigma_{\text{инд}}.$$

Таким образом, величина вектора поляризации в данном случае равна поверхностной плотности наведенного на диэлектрике заряда[1)].

Вектор поляризации направлен от поверхности с отрицательным зарядом с одной стороны диэлектрика к поверхности с положительным зарядом на противоположной стороне (подобно вектору дипольного момента), как показано на рис. 25.9. Для изображенной на этом рисунке штриховой линией поверхности можно написать

$$\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{A} = PA = Q_{\text{инд}}, \tag{25.14}$$

поскольку поляризация равна $\mathbf{P} = 0$ в проводнике и параллельна торцам поверхности интегрирования. Формула (25.14) справедлива и в общем случае, и ее можно объединить с (25.12):

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{A},$$

или

$$\oint (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})\cdot d\mathbf{A} = Q. \tag{25.15}$$

Это еще один способ записи теоремы Гаусса при наличии диэлектрика [см. также (25.12) и (25.13)], представляющий собой общий результат. Теорему Гаусса можно сформулировать, введя вектор *электрического смещения* **D**, который определяется как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{25.16}$$

Тогда

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = Q. \tag{25.17}$$

Для диэлектрика, находящегося между пластинами плос-

[1)] В более сложных случаях величина σ равна составляющей **P**, перпендикулярной поверхности.

кого конденсатора (рис. 25.9), это соотношение дает

$$D = \frac{Q}{A} \quad \text{[плоский конденсатор]}, \tag{25.18}$$

где Q – свободный заряд.

Векторы **E**, **D** и **P** допускают наглядное толкование. Напряженность электрического поля **E** создается *всеми* зарядами, свободными и связанными, как это следует из (25.12). Поляризация **P**, как видно из формулы (25.14), связана только с индуцированным связанным зарядом. Электрическое смещение **D** обусловлено только свободным зарядом, как следует из (25.17) и (25.18).

И все же основной характеристикой электрического поля остается вектор напряженности электрического поля **E**. Векторы **P** и **D** служат полезными дополнительными характеристиками для более глубокого анализа, однако мы не будем часто пользоваться ими.

Заключение

Конденсатор – это устройство, аккумулирующее электрический заряд; он состоит из двух изолированных проводников (обкладок). Проводники обычно несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды, и отношение величины этого заряда к разности потенциалов между проводниками называется *емкостью* C: $Q = CV$. Емкость плоского конденсатора пропорциональна площади каждой из обкладок и обратно пропорциональна расстоянию между ними. Пространство между обкладками обычно заполнено веществом, не проводящим электричества (воздухом, бумагой, пластмассой); такие вещества называются *диэлектриками*. Емкость конденсатора пропорциональна характеристике диэлектрика, которая называется относительной диэлектрической проницаемостью K (и которая для воздуха практически равна 1).

Если два или более конденсаторов соединены *параллельно*, то их общая емкость C равна сумме емкостей отдельных конденсаторов. При *последовательном* соединении конденсаторов величина, обратная их общей емкости C, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов.

Энергия, накопленная заряженным конденсатором, равна $^1/_2 QV = {}^1/_2 CV^2 = {}^1/_2 Q^2/C$. Эту энергию можно рассматривать как энергию электрического поля, заключенного между обкладками конденсатора. *Плотность энергии* (энергия единицы объема) электрического поля **E** в вакууме равна $^1/_2 \varepsilon_0 E^2$, а в диэлектрике $^1/_2 K\varepsilon_0 E^2 = {}^1/_2 \varepsilon E^2$, где $\varepsilon = K\varepsilon_0$ называют абсолютной диэлектрической проницаемостью вещества.

Вопросы

1. Пусть два расположенных близко друг к другу проводника обладают одинаковым по величине отрицательным зарядом. Может ли между ними существовать разность потенциалов? Если да, то применимо ли здесь определение емкости $C = Q/V$?
2. Пусть расстояние между пластинами d плоского конденсатора не очень мало по сравнению с размерами пластин. Будет ли формула (25.2) занижать или завышать истинную емкость? Объясните.
3. Допустим, что одну из пластин плоского конденсатора сдвинули относительно другой так, что они по-прежнему параллельны, но площадь их перекрытия уменьшилась вдвое. Как изменится емкость?
4. Обкладку плоского конденсатора наклонили так, что расстояние с одной стороны увеличилось до $2d$. Как изменится емкость?
5. Подтвердите общими рассуждениями справедливость формулы для емкости цилиндрического конденсатора (пример 25.2). Возьмите за основу аргументы типа следующих за формулой (25.2).
6. Предложите простой метод определения ε_0 с помощью конденсатора.
7. Почему обкладки подключенного к батарее конденсатора приобретают одинаковый по величине заряд? Будет ли заряд одинаковым, если обкладки различаются размером или формой?
8. Большая медная пластина толщиной l помещена между обкладками плоского конденсатора, не касаясь их. Как это повлияет на емкость конденсатора?
9. Три одинаковых конденсатора подключают к батарее. В каком случае они аккумулируют больше энергии: при последовательном или при параллельном соединении?
10. Параллельные пластины изолированного конденсатора обладают зарядами Q противоположного знака. Надо ли прикладывать силу, чтобы развести пластины? Изменится ли при этом разность потенциалов? На что затрачивается работа при разведении пластин?
11. Как изменится аккумулированная конденсатором энергия, если а) удвоить напряжение на конденсаторе; б) удвоить заряд на каждой из пластин; в) удвоить расстояние между пластинами, при условии что конденсатор подключен к батарее?
12. Как зависит от температуры диэлектрическая проницаемость диэлектрика, состоящего из полярных молекул?
13. Обкладки плоского заряженного изолированного конденсатора расположены горизонтально. Если между пластинами чуть-чуть вдвинуть лист тонкого диэлектрика и затем отпустить его, как он будет двигаться?
14. Пусть в предыдущем вопросе конденсатор подключен к батарее. Что произойдет с диэлектриком в этом случае?
15. Диэлектрик удаляют из устройства между обкладками плоского конденсатора, подключенного к батарее. Как при этом изменяются емкость, заряд на обкладках, разность потенциалов, энергия конденсатора, напряженность электрического поля?
16. Как изменяется запасенная конденсатором энергия, если между обкладками помещают диэлектрик и при этом а) конденсатор изолирован, так что заряд Q остается неизменным; б) конденсатор остается подключенным к батарее и напряжение V не меняется?
17. Мы видели, что емкость C зависит от размеров, формы и расположения двух проводников – обкладок конденсатора, а также от значения диэлектрической проницаемости K. Как же тогда понимать утверждение о постоянстве C в формуле (25.1)?
18. Какое значение можно приписать диэлектрической проницаемости хорошего проводника? Объясните.

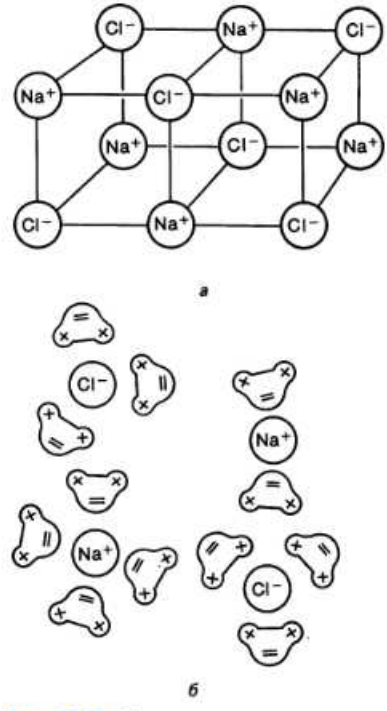


Рис. 25.10. Кристалл хлористого натрия (*а*); растворение хлористого натрия в воде (*б*).

19. *Растворяющая способность воды.* Очень высокая диэлектрическая проницаемость воды, $K = 80$ (см. табл. 25.1), делает ее хорошим растворителем многих веществ. Например, обычная поваренная соль (хлористый натрий) NaCl, в кристаллической решетке которой (рис. 25.10, *а*) ионы Na^+ и Cl^- удерживаются силами электрического притяжения, легко растворяется в воде. Почему электрическое поле, создаваемое каждым ионом, должно ослабляться в K раз? Иными словами, объясните, как можно распространить формулу (25.10) на поле точечного заряда в диэлектрике, и на основании этой простой модели объясните процесс растворения соли (рис. 25.10, *б*).

Задачи

Раздел 25.1

1. (I) Какой заряд отбирает от батареи с напряжением 12 В конденсатор емкостью 25 мкФ?
2. (I) У конденсатора емкостью 12 000 пФ имеется заряд $8{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл. Чему равно напряжение на конденсаторе?
3. (II) У конденсатора емкостью C_1 имеется заряд Q_0. К нему непосредственно подключают другой (незаряженный) конденсатор емкостью C_2. Как распределится заряд между конденсаторами? Каким будет напряжение на каждом конденсаторе?
4. (II) Конденсатор емкостью 2,5 мкФ заряжают до напряжения 35 В и отключают от батареи. Затем его подключают к другому конденсатору емкостью C_2; напряжение на первом конденсаторе падает при этом до 16 В. Чему равна емкость C_2?
5. (II) Чтобы перенести заряд 0,20 мКл с одной обкладки конденсатора емкостью 60 мкФ на другую, надо затратить энергию 16,0 Дж. Какой заряд имеется на каждой обкладке?
6. (II) Конденсатор емкостью 2,4 мкФ заряжают до напряжения 200 В, а конденсатор емкостью 1,10 мкФ – до напряжения 60 В. а) Конденсаторы соединяют соответственно положительно и отрицательно заряженными обкладками. Чему будут равны напряжение и заряд на каждом из них? б) Чему будут равны напряжение и заряд на каждом конденсаторе, если соединить их обкладками противоположного знака?

Раздел 25.2

7. (I) Необходимо изготовить конденсатор емкостью 2,0 Ф. Какой должна быть площадь обкладок с воздушным промежутком 4,5 мм?
8. (I) Пользуясь теоремой Гаусса, покажите, что $\mathbf{E} = 0$ внутри внутренней обкладки и за пределами внешней обкладки цилиндрического конденсатора (см. рис. 25.4 и пример 25.2).
9. (I) Определите электрическую емкость Земли, считая ее сферическим проводником.
10. (II) Между параллельными пластинами площадью каждая 210 см^2, разделенными воздушным промежутком 2,50 см, необходимо создать электрическое поле напряженностью $8{,}0 \cdot 10^6$ В/м. Какой заряд должна иметь каждая пластина?
11. (II) Покажите, что в предельном случае очень малого расстояния между обкладками цилиндрического конденсатора ($R_2 - R_1 \ll R_1$ на рис. 25.4) формула для его емкости, полученная в примере 25.2, сводится к формуле для емкости плоского конденсатора (25.2).
12. (II) Большой металлический лист толщиной l помещается между обкладками плоского конденсатора, изображенного на рис. 25.3, параллельно им. Лист не касается обкладок и выходит за их размеры. а) Выразите емкость такого конденсатора через A, d и l. б) Если $l = {}^2/_3\, d$, то во сколько раз изменится емкость конденсатора после введения металлического листа?
13. (II) *Сферический конденсатор* состоит из двух тонких концентрических сферических оболочек радиусом R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). а) Выведите формулу для емкости такого конденсатора. б) Покажите, что для $R_2 - R_1 \ll R_1$ полученная формула сводится к формуле для емкости плоского конденсатора.
14. (II) Напряженность электрического поля, при которой наступает электрический пробой сухого воздуха, составляет приблизительно $3{,}0 \cdot 10^6$ В/м. Какой заряд может накопить конденсатор с площадью каждой обкладки 8,5 см^2?

Раздел 25.3

15. (I) Шесть конденсаторов емкостью каждый 1,5 мкФ соединены параллельно. Чему равна эквивалентная емкость? Чему равна эквивалентная емкость последовательного соединения?
16. (I) В схеме установлен конденсатор емкостью 3,0 мкФ. Инженер решил, что емкость необходимо увеличить до 4,8 мкФ. Какую емкость должен иметь дополнительный конденсатор и как его следует подключить?
17. (I) Емкость одного из участков электронной схемы необходимо уменьшить с 3600 до 1000 пФ. Какую емкость надо подключить к схеме, чтобы добиться желаемого результата, ничего не удаляя из схемы? Как следует подключить дополнительный конденсатор?
18. (I) Три плоских конденсатора с обкладками

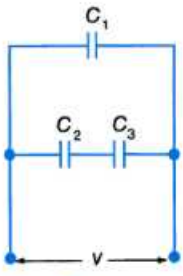


Рис. 25.11.

площадью соответственно A_1, A_2 и A_3 и промежутками d_1, d_2 и d_3 соединены параллельно. Покажите, пользуясь только формулой (25.2), справедливость выражения (25.3).

19. (II) а) Определите эквивалентную емкость цепи на рис. 25.11. б) Если $C_1 = C_2 = 2C_3 = 4{,}0$ мкФ, то какой заряд будет на каждом конденсаторе при $V = 50$ В?

20. (II) Три проводящие пластины площадью A каждая соединены, как показано на рис. 25.12. а) Как соединены образовавшиеся конденсаторы, последовательно или параллельно? б) Допустим, что среднюю пластину можно перемещать вверх и вниз (меняя значения d_1 и d_2) и тем самым менять емкость. Чему равны минимальное и максимальное значения результирующей емкости? в) Определите зависимость C от d_1, d_2 и A в предположении, что $d_1 + d_2$ намного меньше размеров пластин.

21. (II) Имеются три конденсатора емкостью 2000 пФ, 5000 пФ и 0,010 мкФ. Какие наибольшую и наименьшую емкости можно составить из них? Как следует соединить для этого конденсаторы?

22. (II) Конденсаторы емкостью 0,20 и 0,10 мкФ подключены последовательно к батарее с напряжением 9,0 В. Рассчитайте а) напряжение на каждом конденсаторе; б) заряд на каждом конденсаторе. в) Какими будут ответы, если конденсаторы соединены параллельно?

23. (II) Конденсаторы емкостью 3,0 и 4,0 мкФ соединены последовательно и включены параллельно третьему конденсатору – емкостью 2,0 мкФ. а) Чему равна общая емкость цепи? б) Рассчитайте напряжение на каждом конденсаторе, если к цепи приложено напряжение 50 В.

24. (II) Конденсатор переменной емкости в радиоприемнике представляет собой блок из шести пластин, соединенных между собой и чередующихся с шестью другими пластинами, также соединенными между собой. Пластины разделены воздушными зазорами; расстояние между двумя соседними пластинами везде одинаково и равно 1,0 мм. Один блок пластин может перемещаться относительно другого, так что площадь перекрытия пластин меняется от 1,0 до 4,0 см^2. а) Как соединены эти 11 конденсаторов: последовательно или параллельно? б) Определите диапазон изменения емкости.

25. (III) Левую пластину конденсатора, изображенного на рис. 25.3, отклоняют в верхней части влево так, что она составляет малый угол θ с вертикалью (и с другой пластиной); внизу же расстояние d остается прежним. Выведите формулу, выражающую емкость C через A, d и θ. Пластины считайте квадратными. (Подсказка: рассмотрите конденсатор как множество бесконечно малых конденсаторов, соединенных параллельно.)

26. (III) К цепи, составленной из пяти конденсаторов (рис. 25.13), приложено напряжение V. а) Чему равна эквивалентная емкость цепи? б) Вычислите эквивалентную емкость при $C_2 = C_4 = 3{,}0$ мкФ, $C_1 = C_3 = C_5 = 6{,}0$ мкФ.

Раздел 25.4

27. (I) Какая энергия запасена конденсатором емкостью 200 пФ, если к нему приложено напряжение 200 В?

28. (I) У поверхности Земли существует электрическое поле напряженностью приблизительно 150 В/м. Чему равна энергия этого поля в расчете на 1 м^3?

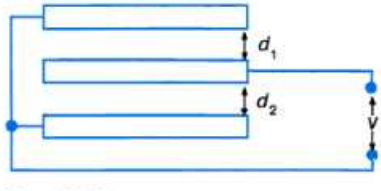


Рис. 25.12.

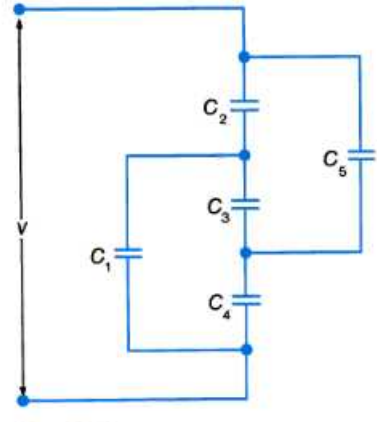


Рис. 25.13.

29. (I) Какая энергия запасена в электрическом поле между двумя квадратными пластинами со стороной 11,0 см, разделенными воздушным промежутком 2,0 мм? Пластины обладают равным по величине и противоположным по знаку зарядом 300 мкКл.

30. (II) Плоский конденсатор обладает постоянным зарядом Q. Расстояние между пластинами увеличивают вдвое. а) Во сколько раз изменится энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора? б) Какую работу необходимо совершить, чтобы удвоить расстояние между пластинами, если площадь каждой из них равна A?

31. (II) Пусть на рис. 25.11 $V = 100$ В и $C_1 = C_2 = C_3 = 1200$ пФ. Чему равна энергия, запасенная всеми конденсаторами?

32. (II) Какую энергию отбирают от батареи с напряжением 12 В при полной зарядке конденсаторы емкостью 0,10 и 0,20 мкФ, соединенные а) параллельно; б) последовательно? в) Какой заряд поступает на конденсаторы от батареи в каждом из этих случаев?

33. (II) а) Радиус внешней обкладки цилиндрического конденсатора (R_2) увеличен вдвое, заряд же остался неизменным. Во сколько раз изменится запасенная в конденсаторе энергия? Откуда берется дополнительная энергия? б) Повторите решение, предполагая, что напряжение на обкладках остается неизменным.

34. (II) Конденсатор емкостью 2,0 мкФ заряжен от батареи с напряжением 12 В и затем подключен к незаряженному конденсатору емкостью 5,0 мкФ. Определите полную энергию, запасенную конденсаторами а) до того, как конденсаторы были соединены между собой; б) после соединения конденсаторов. в) Чему равно изменение энергии? г) Сохраняется ли энергия? Объясните почему.

35. (II) Какую работу надо совершить, чтобы удалить металлический лист из зазора между пластинами конденсатора в задаче 12, если а) конденсатор подключен к батарее и напряжение остается неизменным; б) конденсатор отключен от батареи и заряд остается неизменным.

36. (II) а) Покажите, что каждая пластина плоского конденсатора действует на другую с силой

$$F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}.$$

Для этого рассчитайте dW/dx, где dW – работа, необходимая для разведения пластин на расстояние dx. б) Почему формула $F = QE$ даст неверный результат?

37. (II) Покажите, что электростатическая энергия, запасенная в электрическом поле уединенного сферического проводника с радиусом R и зарядом Q, равна

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}.$$

Вычислите энергию тремя способами: а) пользуясь формулой (25.6) для плотности энергии электрического поля (подсказка: рассмотрите сферические слои толщиной dr); б) используя формулу (25.5) и понятие емкости уединенной сферы (разд. 25.2); в) вычисляя работу, которую необходимо совершить для переноса заряда Q из бесконечности бесконечно малыми порциями dq.

Раздел 25.5

38. (I) *Электрической прочностью* (напряженностью пробоя) вещества называется максимальная напряженность электрического поля, которую выдерживает диэлектрик, пока не наступает электрический пробой и диэлектрик не начинает проводить ток. Электрическая прочность диэлектриков, используемых в конденсаторах, имеет обычно порядок 10^7 В/м. а) Во сколько раз электрическая прочность этих диэлектриков выше, чем у воздуха (см. пример 24.9)? б) Какой должна быть минимальная толщина диэлектрика, если конденсатор будет использоваться при напряжении 1000 В? в) 50 000 В?

39. (I) Чему равна емкость двух квадратных параллельных пластин со стороной 5,5 см, разделенных слоем парафина толщиной 1,8 мм?

40. (II) Конденсатор с воздушным зазором емкостью 4500 пФ подключен к батарее с напряжением 12 В. Какой заряд перейдет от батареи на конденсатор, если воздух заменить слюдой?

41. (II) Предположим, что конденсатор в примере 25.7 остается подключенным к батарее при удалении диэлектрика. Чему равна в этом случае работа по удалению диэлектрика?

42. (II) Какую энергию запасет конденсатор в задаче 29, если между обкладками поместить пластину слюды толщиной а) 2,0 мм (т. е. полностью заполнить промежуток между обкладками); б) 1,0 мм?

43. (II) Решите пример 25.6, считая, что батарея постоянно подключена к конденсатору при введении диэлектрика. Чему равен свободный заряд на обкладках после введения диэлектрика?

44. (II) Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя различными диэлектриками (рис 25.14). Выразите емкость конденсатора через K_1, K_2, площадь пластин A и расстояние между ними d. (Подсказка: нельзя ли рассматривать этот конденса-

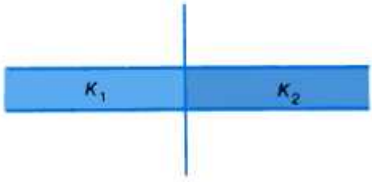


Рис. 25.14.

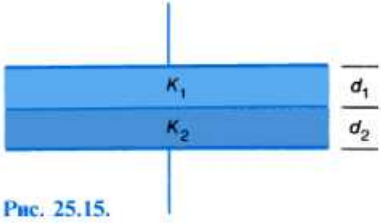


Рис. 25.15.

тор как два конденсатора, соединенных последовательно или параллельно?)

45. (II) Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя различными диэлектриками (рис. 25.15). Выразите емкость конденсатора через K_1, K_2, площадь пластин A и толщину диэлектриков $d_1 = d_2 = d/2$.

46. (II) Решите задачу 45, считая $d_1 \neq d_2$.

47. (II) Какой процент энергии, запасенной электрическим полем в примере 25.6, приходится на диэлектрик?

48. (II) Используя пример 25.6, выразите емкость плоского конденсатора через площадь обкладок A, расстояние между обкладками d, толщину диэлектрика l ($l < d$) и диэлектрическую проницаемость K.

* Раздел 25.6

***49.** (II) В цилиндрическом конденсаторе (рис. 25.4) диэлектрик ($K = 3{,}7$) полностью заполняет пространство между обкладками с радиусами 3,0 и 6,0 мм и длиной $L = 12{,}0$ см. Заряд каждой обкладки равен 1,60 мкКл. Определите а) поверхностную плотность заряда каждой обкладки; б) индуцированный заряд на каждой из поверхностей диэлектрика; в) максимальное и минимальное значения напряженности электрического поля в диэлектрике; г) разность потенциалов между обкладками.

***50.** (III) Решите задачу 49 для случая, когда диэлектрик не заполняет все пространство между обкладками, а представляет собой цилиндр с внутренним радиусом 3,0 мм и внешним радиусом 4,0 мм. Вычислите также максимальное и минимальное значения напряженности электрического поля в воздушном зазоре.

* Раздел 25.7

***51.** (II) Для конденсатора в примере 25.6 определите **E**, **D** и **P** а) внутри диэлектрика; б) в воздушном зазоре между диэлектриком и обкладками.

26 Электрический ток

До 1800 г. развитие электротехники основывалось главным образом на получении с помощью трения статического заряда. В предшествующее столетие были построены машины, позволяющие достигать таким способом довольно высоких потенциалов; одна из них показана на рис. 26.1. С помощью этих машин удавалось получать довольно сильные разряды, но практического значения они не имели.

Гораздо большее впечатление производили природные проявления электричества: молнии или огни Св. Эльма – свечение на концах рей и мачт кораблей во время бури. Однако электрическая природа этих явлений стала ясна только в XVIII в. К примеру, лишь в 1752 г. Франклин в своем знаменитом опыте с воздушным змеем продемонстрировал, что молния представляет собой электрический разряд – гигантскую электрическую искру.

Наконец, в 1800 г. произошло событие огромного практического значения. Алессандро Вольта (1745–1827) изобрел электрическую батарею и впервые получил с ее помощью устойчивый поток электрического заряда, т. е. постоянный электрический ток. Это открытие знаменовало начало новой эпохи, полностью преобразившей нашу цивилизацию: вся современная электротехника основана на использовании электрического тока.

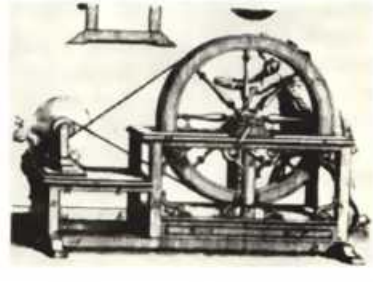


Рис. 26.1. Старинный электростатический генератор.

26.1. Электрическая батарея

Интересен путь, приведший к созданию первой электрической батареи. С этим важным открытием связан знаменитый научный спор между Вольтой и Луиджи Гальвани (1737–1798), в который были вовлечены и многие другие представители научного мира.

В 1780-х годах Гальвани, профессор Болонского университета (видимо, старейшего из существующих поныне), выполнил большую серию опытов, изучая сокращение мышц лягушки под действием электричества, вырабатываемого электрической машиной. В ходе этих опытов Гальвани к своему удивлению обнаружил, что сокращения мышц можно добиться и другими способами. На медном крючке он подвешивал лягушку за позвоночник к железной решетке балкона, и, когда лапка тоже касалась решетки, она сокращалась. Дальнейшие эксперименты подтвердили, что этот странный, но важный эффект наблюдается и с другими парами металлов.

В чем же причина этого необыкновенного явления? Гальвани считал, что источник электрических зарядов находится в самих мышцах или нервах лягушки, а металл служит лишь проводником заряда тела. В работе, опубликованной в 1791 г., он ввел понятие «животное электричество». Многие, в том числе и Гальвани, задавались вопросом: не открыл ли он ту самую «жизненную силу», которая давно занимала умы ученых?

Вольта, работавший в Павийском университете (200 км от Болоньи), поначалу скептически отнесся к результатам Гальвани. Однако, побуждаемый коллегами, он вскоре повторил опыты Гальвани и пошел еще дальше. Но Вольта сомневался в теории «животного электричества»: по его мнению, источник электричества не находился в организме животного, а возникал при *контакте между двумя металлами*. Вольта опубликовал свои предположения и вскоре имел уже много последователей, хотя немало ученых оставались по-прежнему на стороне Гальвани.

Талант теоретика сочетался у Вольты с искусством экспериментатора. Он вскоре понял, что для получения нужного результата цепь должна включать влажный проводник типа мышц лягушки или влажный контакт двух разнородных металлов. Понял он также, что сокращение лягушечьей лапки служит чувствительным прибором для обнаружения того, что он называл «электрическим напряжением» или «электродвижущей силой» (мы теперь называем это потенциалом),– намного более чувствительным, чем самые совершенные из разработанных им и другими учеными электрометров. И самое важное, Вольта рассудил, что решающий ответ Гальвани он сможет дать лишь в том случае, если ему удастся заменить лягушечью лапку иным, неорганическим детектором.

а *б*

Рис. 26.2. Две конструкции батарей Вольты: *а* – вольтов столб; *б* – цепочка чашек. *Z* обозначает цинк, *A* – серебро (от лат. argentum). Воспроизводится по оригинальной публикации Вольты. (Библиотека Бэнди, Норуолк, шт. Коннектикут.)

Другими словами, для доказательства того, что причиной сокращения лапки является именно контакт двух разнородных металлов, ему следовало бы подключить их к электрометру и зарегистрировать отклонение листочков, указывающее на наличие разности потенциалов. Это оказалось для Вольты сложной задачей, так как самые чувствительные его электрометры намного уступали лягушечьей лапке[1]. Но в конечном счете успешный эксперимент доказал справедливость теории Вольты.

Исследования Вольты показали, что одни сочетания металлов дают больший эффект, нежели другие, и на основании своих измерений Вольта расположил металлы в порядке их «эффективности». (Химики по сей день используют этот «электрохимический ряд».) Он обнаружил также, что вместо одного из металлов можно использовать уголь.

Затем Вольте удалось постичь то, что стало его главным вкладом в науку. Он проложил между серебряным и цинковым дисками кусочек бумаги или ткани, пропитанный раствором соли или разбавленной кислотой, а затем собрал из таких кружочков столбик, укладывая их один на другой, как показано на рис. 26.2. Такой «столб» (или «батарея») оказался источником гораздо большей разности потенциалов, чем одна пара кружочков. При сближении проводников, подключенных к концам столба, между ними проскакивала искра. Вольта сконструировал и построил первую электрическую батарею. На рис. 26.2 показана и другая конструкция, известная под названием «цепочка чашек». Свое замечательное открытие Вольта опубликовал в 1800 г.

Разность потенциалов, создаваемая вольтовым стол-

[1] Чувствительность лучшего электрометра Вольты составляла примерно 40 В на градус (угла расхождения листочков). Тем не менее, ему в конце концов удалось оценить разность потенциалов, возникающую при контакте разнородных металлов: для пары серебро – цинк он получил значение 0,7 В, что очень близко к современному значению 0,78 В.

бом, была все же слабой по сравнению с той, какую создавали лучшие электростатические машины того времени, хотя такой столб позволял получать довольно значительный заряд. (Электростатические машины создают высокий потенциал, но небольшой заряд.) Однако у вольтова столба было и огромное достоинство: он оказался способен к «самообновлению» и мог обеспечивать поток электрического заряда в течение довольно длительного времени. А вскоре были сконструированы и более мощные батареи.

В конце концов стало ясно, что в изобретенной Вольтой электрической батарее электричество возникает благодаря превращению химической энергии в электрическую. В наши дни выпускается множество электрических элементов и батарей различных типов – от батареек для карманного фонарика (которые называют также сухими элементами) до автомобильных аккумуляторных батарей. Простейшая батарея (гальванический элемент) состоит из двух так называемых *электродов* – стержней или пластин из разнородных металлов (одним из электродов может служить уголь). Электроды погружены в *электролит*, например разбавленную кислоту. В сухом элементе электролит представляет собой желеобразную массу. Так выглядит *элемент*, а несколько элементов, соединенных между собой, образуют электрическую батарею. Химические реакции, происходящие в большинстве элементов, довольно сложны; описание их деталей можно найти в учебниках химии. Здесь же мы рассмотрим работу самого простого элемента, интересуясь физической стороной дела.

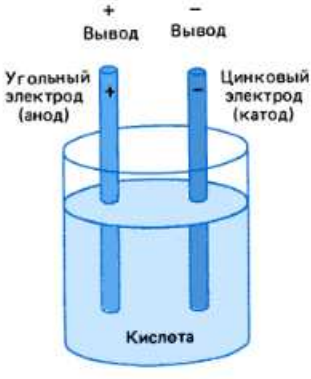


Рис. 26.3. Простейший гальванический элемент.

В простейшем гальваническом элементе (рис. 26.3) в качестве электролита используется разбавленная серная кислота. Одним из электродов служит уголь, другим – цинк. Часть электрода, не погруженная в электролит, служит *клеммой*; к ней подключаются проводники, соединяющие элемент и схемы. Кислота постепенно растворяет цинковый электрод. Атомы переходят в раствор в виде положительных ионов, оставляя по два электрона на электроде. Таким образом, цинковый электрод становится отрицательно заряженным. По мере того как цинк переходит в раствор, электролит приобретает положительный заряд. Вследствие этого, а также в результате других химических реакций электроны покидают угольный электрод, который при этом приобретает положительный заряд. Положительный электрод называют *анодом*, отрицательный – *катодом*. Поскольку у электродов противоположные по знаку заряды, между клеммами возникает разность потенциалов. В элементе с разомкнутыми клеммами растворяется лишь незначительное количество цинка; по мере того как цинковый электрод накапливает отрицательный заряд, образующиеся положительные ионы цинка притягиваются обратно к электро-

ду. Таким образом, между клеммами поддерживается определенная разность потенциалов, или напряжение. Если же заряд перемещается между клеммами (например, по проводнику или через электрическую лампу), то растворение цинка усилится. Угольный электрод также испытывает разрушение. Спустя некоторое время тот или другой электрод полностью израсходуется и элемент «садится».

Напряжение между клеммами батареи зависит от вещества, из которого изготовлены электроды, от их способности переходить в раствор или отдавать электроны. Разность потенциалов на клеммах батареи при разомкнутой внешней цепи называется **электродвижущей силой (ЭДС)**; электродвижущую силу обозначают $\mathscr{E}$ (не следует путать с напряженностью поля E). Обычно ЭДС гальванического элемента или аккумулятора составляет 1,0–2,0 В. Когда заряд поступает от батареи во внешнюю цепь, напряжение на клеммах оказывается ниже ЭДС из-за «внутреннего сопротивления» (мы обсудим это в разд. 27.2). При *последовательном соединении* двух или более элементов (когда плюсовую клемму одного элемента соединяют с минусовой клеммой следующего и т. д.) их ЭДС складывается. Так, ЭДС двух элементов для карманного фонарика, соединенных последовательно, равна 3,0 В, а шесть соединенных последовательно элементов в автомобильном аккумуляторе, каждый по 2,0 В, обеспечивают напряжение 12 В.

Любое устройство типа батареи, способное поддерживать определенную разность потенциалов и обеспечить поток электрического заряда во внешней цепи, называется *источником ЭДС*. Источниками ЭДС кроме элементов и батарей являются электрические генераторы, фотоэлементы, термопары и т. п. (о них мы еще поговорим позднее).

26.2. Электрический ток

Подсоединяя к клеммам батареи проводящий контур (например, провод), мы получаем электрическую *цепь* (рис. 26.4, *а*). На принципиальных схемах (рис. 26.4, *б*) батарея изображается символом $-|\!|\!|-$, причем длинная

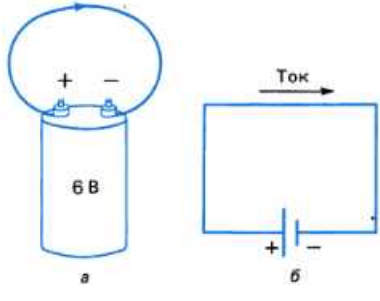


Рис. 26.4. *а* – простейшая электрическая цепь; *б* – схематическое представление той же цепи.

черточка соответствует положительной клемме, а короткая – отрицательной. По такой цепи заряд может перемещаться от одной клеммы батареи к другой; этот поток электрического заряда называется **электрическим током**.

Сила электрического тока в проводнике – это результирующее количество заряда, проходящее через данное сечение проводника в единицу времени. Таким образом, среднее значение силы электрического тока равно

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \tag{26.1}$$

где ΔQ – количество заряда, протекающее через поперечное сечение проводника за время Δt. Сила электрического тока измеряется в кулонах в секунду; эта единица носит название *ампер* (А) в честь французского физика Андре Ампера (1775–1836); 1 А = 1 Кл/с. Если сила тока не постоянна во времени, мгновенное значение можно определить как предел (26.1) при $\Delta t \to 0$:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \tag{26.2}$$

В этой главе нас будет интересовать главным образом постоянный ток.

Пример 26.1. Сила постоянного тока в проводе, подключенном к батарее, составляет 2,5 А. Спустя 4,0 мин ток прекращается, так как проводник размыкается. Какой заряд прошел по проводу?

Решение. Согласно (26.1), полный заряд, прошедший по проводу за 4,0 мин (240 с), равен

$$\Delta Q = I\Delta t$$
$$= (2{,}5 \text{ Кл/с})\,(240 \text{ с}) = 600 \text{ Кл}.$$

В гл. 22 уже говорилось, что проводники содержат много свободных электронов. Поэтому в проводнике, подключенном к клеммам батареи, как на рис. 26.4, в действительности перемещаются отрицательно заряженные электроны. В момент подключения проводника его свободные электроны притягиваются к положительной клемме батареи. В то же время электроны покидают отрицательную клемму батареи и поступают в проводник на другом конце. Появляется непрерывный поток электронов в проводнике, возникающий в тот момент, когда он подключается к *обеим* клеммам батареи. Но два века назад, когда только возникало соглашение о том, какие заряды считать положительными, а какие отрицательными, было сделано предположение, что по проводнику движутся положительные заряды. В действительности почти всегда движение положительного заряда в одном направлении оказывается в точности эквивалентным дви-

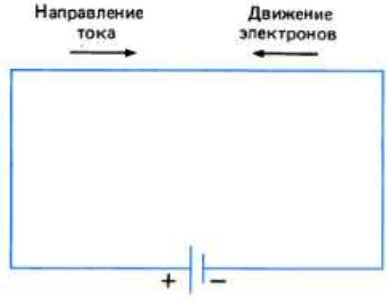


Рис. 26.5. Традиционно принятое направление тока от + к − эквивалентно току электронов от − к +.

жению отрицательного заряда в противоположном направлении (рис. 26.5) (см., однако, разд. 28.9). Сегодня мы по-прежнему придерживаемся этой исторической традиции, говоря о положительном направлении тока. Это соответствует также принятому определению электрического потенциала, основанному на использовании положительного пробного заряда. Под *направлением тока*, протекающего в цепи, мы, таким образом, понимаем то направление, в котором двигались бы положительные заряды. Когда же нас интересует направление движения электронов, мы будем специально оговаривать, что речь идет о потоке электронов. В жидкостях и газах способны перемещаться как отрицательные, так и положительные заряды (ионы). (Микроскопическая картина электрического тока обсуждается в разд. 26.5.)

26.3. Закон Ома. Электрическое сопротивление и резисторы

Электрический ток в цепи создается разностью потенциалов. Разность потенциалов можно получить, например, с помощью батареи. Немецкий физик Георг Симон Ом (1787–1854) экспериментально доказал, что сила электрического тока в металлическом проводнике прямо пропорциональна разности потенциалов на его концах:

$$I \sim V.$$

Это утверждение называют **законом Ома**. Если, например, подсоединить к батарее напряжением 6 В проводник, то через него потечет ток, сила которого будет в два раза больше, чем от батареи с напряжением 3 В.

Полезно сравнить электрический ток с потоком воды в реке или трубе. Если труба расположена почти горизонтально, скорость потока будет невелика. Но если один конец трубы окажется выше другого, скорость потока заметно увеличится. И чем больше разность уровней, тем больше скорость потока. В гл. 24 мы обратили внимание на аналогию между электрическим потенциалом и высотой скалы при рассмотрении электрического и гравитационного полей. Эта аналогия применима в данном случае к разности уровней потока. Подобно тому как уве-

личение перепада высот вызывает возрастание потока воды, чем больше разность потенциалов, или напряжение, тем больше сила электрического тока.

Сила тока в проводнике зависит не только от напряжения, но и от того сопротивления, которое проводник оказывает потоку электронов. Стенки трубы, берега реки и пороги создают сопротивление потоку воды. Точно так же и электроны тормозятся в результате взаимодействий с атомами проводника. Чем выше сопротивление, тем меньше сила тока при данном напряжении V. Таким образом, сопротивление определяется тем, что сила тока обратно пропорциональна ему. С учетом этого можно написать

$$I = \frac{V}{R}, \tag{26.3}$$

где R – **электрическое сопротивление** (или просто сопротивление) участка цепи, V – разность потенциалов на этом участке, а I – сила тока в цепи. Приведенные выражения часто записывают в виде $V = IR$ и называют законом Ома. Впрочем, это не закон, а скорее *определение сопротивления*. Обнаруженная Омом закономерность, строго говоря, состоит в утверждении, что сила тока в *металлическом проводнике* пропорциональна приложенному напряжению: $I \sim V$. Это утверждение несправедливо в общем случае, например, применительно к таким веществам, как полупроводники, электронные лампы, транзисторы и т. п. «Закон Ома» поэтому не относится к таким фундаментальным законам природы, как законы Ньютона, начала термодинамики или закон Кулона. Он лишь характеризует определенные материалы – металлические проводники. О материалах или схемах, для которых закон Ома не выполняется, говорят как о *неомических* или нелинейных. Определение электрического сопротивления

$$R = V/I$$

[формула (26.3)] применимо и к таким нелинейным случаям, но R будет не постоянным, а зависящим от приложенного напряжения. Закон Ома утверждает, что сопротивление R постоянно и не зависит от V для металлических проводников. Поскольку это утверждение не отражает фундаментальных свойств природы, его, вероятно, следовало бы называть не законом, а правилом или соотношением. Но выражение «закон Ома» настолько укоренилось, что мы не станем возражать против его употребления, а будем лишь помнить о его ограниченной применимости.

Единицей сопротивления служит *ом* (Ом); согласно (26.3), 1 Ом соответствует 1 В/А.

Пример 26.2. В этикетке на корпусе портативного магнитофона указано, что его следует подключать к источнику напряжения 6,0 В и что сила потребляемого тока составляет 300 мА. а) Чему равно полное сопротивление магнитофона? б) Как изменится сила потребляемого тока, если напряжение питания уменьшится до 5,0 В?

Решение. а) Согласно (26.3),

$$R = \frac{V}{I} = \frac{6{,}0\ \text{В}}{0{,}30\ \text{А}} = 20\ \text{Ом}.$$

б) Если сопротивление не меняется, сила потребляемого тока составит $I = V/R = 5{,}0\ \text{В}/20\ \text{Ом} = 0{,}25\ \text{А}$, или на 50 мА меньше, чем прежде. В действительности сопротивление зависит от температуры (разд. 26.4), и полученный результат следует рассматривать как приближенный.

Все электрические приборы от нагревателей и электрических ламп до стереофонических усилителей оказывают сопротивление протекающему через них току. Соединительные провода обладают, как правило, очень низким сопротивлением. Во многих схемах, в частности в электронных приборах, для управления силой тока используют *резисторы*, которые могут иметь электрическое сопротивление от долей ома до 10^6 Ом (МОм). На рис. 26.6 показаны некоторые типы резисторов (табл. 26.1). Обычно резисторы бывают двух основных типов: проволочные (представляющие собой катушки тонкой проволоки) и непроволочные (обычно изготовленные на основе углеродной пленки).

Рис. 26. 6. Сопротивление резистора указывается на корпусе цифрами или цветным кодом. Первые две полоски соответствуют двум значащим цифрам сопротивления, третья указывает множитель (число нулей), четвертая – допуск. Например, сопротивление резистора, имеющего красную, оранжевую, зеленую и серебряную полоски, равно 25 000 Ом (25 кОм) ± 10%.

На принципиальных схемах резисторы обозначаются символом [1)]. Проводники с пренебрежимо малым сопротивлением изображаются на схемах прямыми линиями.

Таблица 26.1. Цветная маркировка резисторов[1)]

Цвет	Цифра	Множитель	Допуск
Черный	0	1	
Коричневый	1	10^1	
Красный	2	10^2	
Оранжевый	3	10^3	
Желтый	4	10^4	
Зеленый	5	10^5	
Синий	6	10^6	
Фиолетовый	7	10^7	
Серый	8	10^8	
Белый	9	10^9	
Золотой		10^{-1}	5%
Серебряный		10^{-2}	10%
Без окраски			20%

[1)] В отечественной практике в настоящее время не используется.– *Прим. ред.*

[1)] В отечественной литературе резисторы принято обозначать символом символ оставлен специально для проволочных резисторов.– *Прим. перев.*

26.4. Удельное сопротивление и сверхпроводимость

На опыте установлено, что сопротивление R металлического проводника прямо пропорционально его длине L и обратно пропорционально площади его поперечного сечения A:

$$R = \rho \frac{L}{A}, \tag{26.4}$$

где коэффициент ρ называется *удельным сопротивлением* и служит характеристикой вещества, из которого изготовлен проводник. Это соответствует здравому смыслу: сопротивление толстого провода должно быть меньше, чем тонкого, поскольку в толстом проводе электроны могут перемещаться по большей площади. И можно ожидать роста сопротивления с увеличением длины проводника, так как увеличивается количество препятствий на пути потока электронов.

Типичные значения ρ для разных материалов приведены в первом столбце табл. 26.2. (Реальные значения зависят от чистоты вещества, термической обработки, температуры и других факторов.) Самым низким удельным сопротивлением обладает серебро, которое оказывается, таким образом, наилучшим проводником; однако оно дорого. Немногим уступает серебру медь; ясно, почему провода чаще всего изготовляют из меди. Удельное сопротивление алюминия выше, чем у меди, однако

Таблица 26.2. Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления (ТКС) (при 20 °С)

Вещество	Удельное сопротивление ρ, Ом·м	ТКС α, $^{\circ}C^{-1}$
Проводники		
Серебро	$1{,}59 \cdot 10^{-8}$	0,0061
Медь	$1{,}68 \cdot 10^{-8}$	0,0068
Алюминий	$2{,}65 \cdot 10^{-8}$	0,00429
Вольфрам	$5{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,0045
Железо	$9{,}71 \cdot 10^{-8}$	0,00651
Платина	$10{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,003927
Ртуть	$98 \cdot 10^{-8}$	0,0009
Нихром (сплав Ni, Fe, Cr)	$100 \cdot 10^{-8}$	0,0004
Полупроводники[1]		
Углерод (графит)	$(3-60) \cdot 10^{-5}$	−0,0005
Германий	$(1-500) \cdot 10^{-3}$	−0,05
Кремний	0,1–60	−0,07
Диэлектрики		
Стекло	$10^{9}-10^{12}$	
Резина твердая	$10^{13}-10^{15}$	

[1] Реальные значения сильно зависят от наличия даже малого количества примесей.

он имеет гораздо меньшую плотность, и в некоторых случаях ему отдают предпочтение (например, в линиях электропередач), поскольку сопротивление проводов из алюминия той же массы оказывается меньше, чем у медных.

Часто пользуются величиной, обратной удельному сопротивлению:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \tag{26.5}$$

называемой *удельной проводимостью*. Удельная проводимость измеряется в единицах $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$.

Пример 26.3. Вам надо подключить к стереоусилителю колонку, находящуюся на довольно большом расстоянии. Какой диаметр должен иметь медный провод длиной 20 м, чтобы его сопротивление не превышало 0,10 Ом?

Решение. Выразим A из (26.4) и воспользуемся табл. 26.2:

$$A = \rho \frac{L}{R} = \frac{(1{,}7\cdot 10^{-8}\ \text{Ом}\cdot\text{м})(20\ \text{м})}{(0{,}10\ \text{Ом})} = 3{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{м}^2.$$

Площадь A провода круглого сечения связана с его диаметро́м d формулой $A = \pi d^2/4$. Следовательно, диаметр провода должен быть не меньше $d = \sqrt{4A/\pi} = 2{,}1\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 2{,}1\ \text{мм}$.

Удельное сопротивление вещества зависит от температуры. Как правило, сопротивление металлов возрастает с температурой. Этому не следует удивляться: с повышением температуры атомы движутся быстрее, их расположение становится менее упорядоченным, и можно ожидать, что они будут сильнее мешать движению потока электронов. В узких диапазонах изменения температуры удельное сопротивление металла увеличивается с температурой практически линейно:

$$\rho_T = \rho_0(1 + \alpha[T - T_0]), \tag{26.6}$$

где ρ_T – удельное сопротивление при температуре T, ρ_0 – удельное сопротивление при стандартной температуре T_0, а α – *температурный коэффициент сопротивления* (ТКС). Значения α приведены в табл. 26.2. Заметим, что у полупроводников ТКС может быть отрицательным. Это очевидно, поскольку с ростом температуры увеличивается число свобо́дных электронов и они улучшают проводящие свойства вещества. Таким образом, сопротивление полупроводника с повышением температуры может уменьшаться (хотя и не всегда).

Пример 26.4. *Термометр сопротивления.* Зависимостью электрического сопротивления от температуры можно воспользоваться для точного измерения температуры. В термометрах сопротивления обычно применяют платину, так как она устойчива к коррозии и имеет высокую точку плавления. Пусть при 0 °C сопротивление платинового термометра составляет 164,2 Ом. После погружения тер-

мометра в сосуд с жидкостью его сопротивление становится равным 187,4 Ом. Чему равна температура жидкости?

Решение. Поскольку сопротивление R прямо пропорционально удельному сопротивлению ρ, объединим выражения (26.4) и (26.6) (положив $T_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$) и получим

$$R = R_0(1 + \alpha T).$$

Здесь $R_0 = \rho_0 L/A$ – сопротивление платиновой проволоки при 0 °C. Отсюда можно выразить T:

$$T = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = \frac{187{,}4\ \text{Ом} - 164{,}2\ \text{Ом}}{(3{,}927 \cdot 10^{-3}\,^\circ\mathrm{C}^{-1})(164{,}2\ \text{Ом})} = 35{,}9\,^\circ\mathrm{C}.$$

Во многих случаях для измерения температуры используют *термисторы* – оксидные или полупроводниковые резисторы, сопротивление которых однозначно связано с температурой. Термисторы могут иметь очень малые размеры и благодаря этому быстро реагировать на изменения температуры.

Значения α зависят от температуры, поэтому следует обращать внимание на диапазон температур, в пределах которого справедливо данное значение (например, по справочнику физических величин). Если диапазон изменения температуры окажется широким, то линейность будет нарушаться, и вместо (26.6) надо использовать выражение, содержащее члены, которые зависят от второй и третьей степеней температуры: $\rho_T = \rho_0(1 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3)$, где коэффициенты β и γ обычно очень малы (мы положили $T_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$), но при больших T вклад этих членов становится существенным.

При очень низких температурах удельное сопротивление некоторых металлов, а также сплавов и соединений падает в пределах точности современных измерений до нуля. Это свойство называют **сверхпроводимостью**; впервые его наблюдал нидерландский физик Гейке Камерлинг-Оннес (1853–1926) в 1911 г. при охлаждении ртути ниже 4,2 К. При этой температуре электрическое сопротивление ртути внезапно падало до нуля. Сверхпроводники переходят в сверхпроводящее состояние ниже *температуры перехода*, составляющей обычно несколько градусов Кельвина (чуть выше абсолютного нуля). Наблюдался электрический ток в сверхпроводящем кольце, который практически не ослабевал в отсутствие напряжения в течение нескольких лет.

В последние годы сверхпроводимость интенсивно исследуется с целью выяснить ее механизм и найти материалы, обладающие сверхпроводимостью при более высоких температурах, чтобы уменьшить стоимость и неудобства, обусловленные необходимостью охлаждения до очень низких температур[1]. Первую успешную теорию

[1] Сейчас обнаружены и интенсивно исследуются керамические материалы, обладающие сверхпроводимостью при температурах выше 100 К. Читатель легко может представить революционный характер этого открытия. – *Прим. перев.*

сверхпроводимости создали Бардин, Купер и Шриффер в 1957 г.

Сверхпроводники уже используются в больших магнитах, где магнитное поле создается электрическим током (см. гл. 28), что значительно снижает расход электроэнергии. Разумеется, для поддержания сверхпроводника при низкой температуре тоже затрачивается энергия[1].

26.5. Микроскопическая картина электропроводности. Плотность тока и скорость дрейфа носителей заряда

До сих пор в этой главе мы имели дело в основном с макроскопическим, так сказать, повседневным представлением об электрическом токе. Правда, мы знаем, что в металлических проводниках, согласно атомной теории, носителями электрического тока служат отрицательно заряженные электроны, а в растворах – положительные и отрицательные ионы. Рассмотрим теперь микроскопическую картину более подробно.

Если к концам проводника постоянного сечения приложена разность потенциалов, то вектор **E** будет параллелен боковой поверхности проводника (рис. 26.7). Существование внутри проводника электрического поля **E** не противоречит сделанному ранее выводу о том, что в электростатическом случае внутри проводника $\mathbf{E} = 0$: мы имеем дело теперь не с неподвижными зарядами. Если поле отлично от нуля, а свободные электроны могут перемещаться в проводнике, то под действием электрического поля они начнут двигаться. Если предположить, что все носители заряда неподвижны, то напряженность электрического поля **E** должна быть равна нулю (и мы возвращаемся к электростатике).

Определим новую микроскопическую величину: **плотность тока j**. Плотность тока определяется как *сила тока, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения* в данной точке пространства. Если плотность тока j в

[1] Сверхпроводники предполагается применять при создании обмоток для больших генераторов и электродвигателей, что позволит использовать очень большие токи. Разрабатываются также сверхпроводящие линии электропередач, в которых энергетические потери будут сведены к минимуму. Электростанции можно будет строить тогда вблизи источников топлива (каменного угля, газа и т. п.), а не вблизи крупных потребителей электроэнергии, и тем самым снизить расходы на транспортировку топлива. Сверхпроводники могут использоваться при создании скоростного наземного транспорта: сила отталкивания, возникающая в результате взаимодействия магнитного поля, создаваемого сверхпроводящими электромагнитами транспортного средства, с вихревыми токами (разд. 30.6), наводимыми в полотне дороги, обеспечивает возникновение воздушной подушки и движение над полотном практически без трения.

Рис. 26.7. Электрическое поле **E** в однородном проводнике с площадью поперечного сечения A, по которому течет ток I. Плотность тока $j = I/A$.

проводнике с площадью сечения A постоянна по его сечению, то

$$j = \frac{I}{A}, \quad \text{или} \quad I = jA. \tag{26.7}$$

Если же плотность тока меняется по сечению, то

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}, \tag{26.8}$$

где $d\mathbf{A}$ – элемент площади сечения, а I – сила тока через поверхность, по которой ведется интегрирование. Направление вектора плотности тока в любой точке совпадает с направлением, в котором будет двигаться помещенный в эту точку положительный пробный заряд. Другими словами, вектор **j** в любой точке совпадает, вообще говоря, по направлению с вектором **E** (рис. 26.7). (Инерционностью носителей заряда обычно можно пренебречь.) Плотность тока определена в каждой *точке* пространства. Сила тока I относится ко всему проводнику и поэтому является макроскопической величиной.

Направление вектора **j** соответствует потоку положительных зарядов (что согласуется с принятым направлением тока). В проводнике подвижные носители заряда – это отрицательно заряженные электроны, и они движутся в направлении, противоположном **j** или **E** (на рис. 26.7 – влево). Сила, действующая на электрон в проводнике со стороны электрического поля напряженностью **E**, равна $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, где $-e$ есть заряд электрона ($e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Однако электроны в среднем движутся без ускорения (если не считать короткого промежутка времени сразу после включения батареи) из-за столкновений с атомами проводника. Обусловленная этими столкновениями «тормозящая» сила уравновешивает электрическую силу, и электроны быстро достигают скорости установившегося движения, которую называют *средней скоростью дрейфа* $\mathbf{v}_d$ носителей заряда (подобно установившейся скорости падения легкого тела в воздухе). Эта скорость называется скоростью дрейфа, поскольку она значительно меньше средней скорости теплового движения электронов. Согласно классической теории проводимости[1)], свободные электроны в металле представляют собой идеальный газ; они движутся с очень большой скоростью во всех направлениях, и на фоне этого беспоря-

[1)] Классическая теория при всей своей наглядности не дает надежных количественных результатов; положение значительно улучшилось с появлением квантовой теории; см. замечание, следующее за примером 26.5.

дочного теплового движения происходит медленный «дрейф» в направлении электрического поля **E** (у отрицательно заряженных электронов – в противоположном направлении).

Силу тока в проводнике можно выразить через скорость дрейфа $\mathbf{v}_d$. За время t электроны проходят вдоль проводника расстояние $l = v_d t$. Пусть в единице объема имеется n электронов проводимости. Число электронов, пересекающих сечение A проводника за время t, составляет nAl. Заряд, проходящий через это сечение, равен

$$Q = -enAl = -enAv_d t,$$

где $-e$ есть заряд электрона. Следовательно, сила тока равна

$$I = \frac{Q}{t} = -nev_d A, \tag{26.9}$$

а плотность тока составляет

$$j = \frac{I}{A} = -nev_d. \tag{26.10}$$

В векторной форме последнее равенство можно записать в виде

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_d, \tag{26.11}$$

где знак минус означает, что направление (положительного) тока противоположно направлению скорости дрейфа электронов.

Формулу (26.11) можно обобщить на случай тока, обусловленного движением любых зарядов, например ионов в электролите. Если имеется несколько типов ионов (включая и свободные электроны) с плотностью n_i (число носителей в единице объема), зарядом q_i (для электронов $q_i = -e$) и скоростью дрейфа $\mathbf{v}_{di}$, то результирующая плотность тока равна

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_{di}, \tag{26.12}$$

а сила тока I, протекающего через сечение A, перпендикулярное **j**:

$$I = \sum_i n_i q_i v_{di} A.$$

Пример 26.5. По медному проводнику диаметром 3,20 мм течет ток силой 5,00 А. Определите а) плотность тока в проводнике; б) скорость дрейфа свободных электронов; в) среднеквадратичную скорость электронов в предположении, что они ведут себя подобно частицам идеального газа при 20 °С. Считайте, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон (остальные электроны связаны в атомах).

Решение. а) Площадь поперечного сечения проводника равна $A = \pi r^2 = (3{,}14)(1{,}60 \cdot 10^{-3}\ \text{м})^2 = 8{,}04 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2$.

Плотность тока равна

$$j = I/A = (5{,}00\ \text{А})/(8{,}04\cdot 10^{-6}\ \text{м}^2) =$$
$$= 6{,}22\cdot 10^5\ \text{А/м}^2.$$

б) Поскольку на каждый атом меди приходится один свободный электрон, число свободных электронов в единице объема n будет равно числу атомов Cu. Атомная масса меди 63,5 а. е. м., и, следовательно, 63,5 г меди содержат $6{,}02\cdot 10^{23}$ свободных электронов. Плотность меди $\rho = 8{,}89\cdot 10^3$ кг/м^3; число свободных электронов в единице объема равно

$$n = \left(\frac{6{,}02\cdot 10^{23}\ \text{электронов}}{63{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{кг}}\right)\times$$
$$\times\ (8{,}89\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3) = 8{,}43\cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}.$$

Наконец, согласно (26.10), скорость дрейфа электронов равна

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{6{,}22\cdot 10^5\ \text{А/м}^2}{(8{,}43\cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3})(1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{Кл})} =$$
$$= 4{,}61\cdot 10^{-5}\ \text{м/с},$$

или всего лишь около 0,05 мм/с.

в) Рассматривая свободные электроны как идеальный газ (довольно грубое приближение), найдем по формуле (18.5)

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3(1{,}38\cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К})(293\ \text{К})}{(9{,}11\cdot 10^{-31}\ \text{кг})}} =$$
$$= 1{,}15\cdot 10^5\ \text{м/с}.$$

Мы видим, что скорость дрейфа намного меньше среднеквадратичной скорости теплового движения электронов (примерно в 10^9 раз).

Полученный в п. «в» численный результат нельзя считать надежным. Количественные предсказания классической теории электронной проводимости, в которой свободные электроны уподобляются идеальному газу, сильно расходятся с опытными данными. Согласно квантовой теории, предсказания которой гораздо лучше согласуются с экспериментом, для свободных электронов *не справедлива* теорема о равном распределении энергии (разд. 20.4); поэтому расчеты по формуле $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{3kT/m}$ неверны. В действительности скорость свободных электронов оказывается примерно в 15 раз больше, т. е. около $1{,}6\cdot 10^6$ м/с для меди при 20 °C. Но здесь мы не будем вдаваться в подробности этой теории.

Равенство (26.3), $V = IR$, можно записать, введя микроскопические характеристики. Выразим сопротивление R через проводимость ρ:

$$R = \rho\frac{L}{A},$$

а I и V представим в виде

$$I = jA$$

и

$$V = EL;$$

последнее равенство следует из (24.4) при условии, что электрическое поле внутри проводника однородно; L – длина проводника (или его участка), а V – разность потенциалов на его концах. Тогда вместо $V = IR$ получим

$$EL = (jA)\left(\rho\frac{L}{A}\right) = j\rho L,$$

или

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E, \tag{26.13}$$

где $\sigma = 1/\rho$ – *удельная проводимость*. В случае металлического проводника ρ и σ не зависят от V, а значит, и от E. Итак, плотность тока $\mathbf{j}$ пропорциональна напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ внутри проводника (закон Ома в дифференциальной форме). Уравнение (26.13), которое можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E},$$

иногда рассматривается как определение проводимости σ и удельного сопротивления ρ.

Пример 26.6. Какова напряженность электрического поля внутри проводника в примере 26.5?

Решение. Согласно табл. 26.2, для меди $\rho = 1{,}68 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Зная, что $j = 6{,}22 \cdot 10^5$ А/м^2, получим $E = \rho j = (1{,}68 \cdot 10^{-8}$ Ом·м$)(6{,}22 \cdot 10^5$ А/м$^2) = 1{,}04 \cdot 10^{-2}$ В/м. Для сравнения вспомним, что напряженность электрического поля между пластинами конденсатора может быть намного больше: скажем, в примере 25.6 величина E составляет 10^5 В/м. Таким образом, на практике вызвать электрический ток в проводнике может довольно слабое электрическое поле.

26.6. Электрическая мощность

Электрическая энергия удобна тем, что легко превращается в другие виды энергии. Например, электродвигатели (гл. 28) превращают электрическую энергию в механическую работу.

В других приборах – электронагревателях, электроплитах, тостерах, фенах для сушки волос – электрическая энергия превращается в тепловую с помощью проволочного сопротивления, называемого нагревательным элементом. В обыкновенной электрической лампе небольшая нить накала нагревается так сильно, что начинает светиться; лишь несколько процентов энергии превращается в свет, остальная же (свыше 90%) переходит в тепло. Сопротивление нагревательных элементов в бытовых электроприборах и нитей накала электрических ламп составляет от нескольких единиц до нескольких сотен ом.

В таких приборах преобразование электрической энергии в свет и тепло происходит за счет того, что сила тока обычно бывает довольно большой и движущиеся электроны испытывают многочисленные столкновения с атомами проводника. При каждом таком столкновении часть кинетической энергии электрона передается атому, с которым он сталкивается. В результате кинетическая энергия атомов увеличивается и температура проволочного

элемента возрастает. Избыток тепловой (внутренней) энергии может за счет теплопроводности и конвекции передаваться воздуху в электронагревателе или кастрюле на плите, за счет теплового излучения поджаривать гренки в тостере или испускаться в виде света. Для определения мощности, преобразуемой электрическим прибором, воспользуемся известным фактом: при прохождении бесконечно малым зарядом dq разности потенциалов V изменение энергии составляет $dU = dqV$ [уравнение (24.2)]. Если оно происходит за время dt, то мощность P (т. е. скорость преобразования энергии) составит

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} V.$$

Заряд, протекающий в единицу времени, dq/dt, представляет собой силу тока I. Следовательно,

$$P = IV. \tag{26.14}$$

Это общее соотношение характеризует мгновенную мощность, преобразуемую любым устройством; здесь I – сила тока, протекающего через устройство, а V – разность потенциалов на нем. Это же выражение характеризует мощность, потребляемую от источника, например от батареи. В системе СИ электрическая мощность измеряется в тех же единицах, что и любая мощность, – в ваттах (Вт); 1 Вт = 1 Дж/с.

Мощность, выделяющуюся на резисторе R, можно записать двумя способами, объединив закон Ома ($V = IR$) с формулой (26.14) ($P = IV$):

$$P = I(IR) = I^2 R, \tag{26.15а}$$

$$P = \left(\frac{V}{R}\right) V = \frac{V^2}{R}. \tag{26.15б}$$

Выражения (26.15а) и (26.15б) применимы только к резисторам, в то время как (26.14) справедливо в общем случае.

Пример 26.7. Рассчитайте сопротивление 12-вольтовой автомобильной лампочки мощностью 40 Вт.

Решение. Выразим R из (26.15б) и подставим $P = 40$ Вт и $V = 12$ В:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(12\ \text{В})^2}{(40\ \text{Вт})} = 3{,}6\ \text{Ом}.$$

Таково сопротивление лампочки, горящей в полный накал; у холодной лампочки сопротивление намного меньше.

Рассчитываясь за электричество, мы оплачиваем не мощность, а энергию. Поскольку мощность представляет собой *скорость* преобразования энергии, полная энергия, израсходованная каким-либо устройством, равна просто произведению потребляемой мощности на время, в течение которого это устройство включено. Если мощность выражена в ваттах, а время – в секундах, то значение

энергии будет получено в джоулях (Дж); 1 Вт = 1 Дж/с. На практике энергию обычно измеряют в гораздо более крупных единицах – киловатт-часах (кВт · ч):

$$1\ \text{кВт} \cdot \text{ч} = (1000\ \text{Вт})(3600\ \text{с}) = 3{,}60 \cdot 10^6\ \text{Дж}.$$

Пример 26.8. Электрический нагреватель потребляет ток силой 15 А от сети напряжением 120 В. Какую мощность он потребляет и во что обойдется его эксплуатация за месяц (30 дней), если он ежедневно включается на 3 ч, а тариф за электроэнергию составляет 0,060 долл. за киловатт-час? (Для простоты ток можно считать постоянным.)

Решение. Мощность равна $P = IV = (15\ \text{А})(120\ \text{В}) = 1800\ \text{Вт} = 1{,}8\ \text{кВт}$. Оплата 90 ч работы нагревателя составит $(1{,}8\ \text{кВт})(90\ \text{ч})(0{,}060\ \text{долл.}) = 9{,}72\ \text{долл.}$

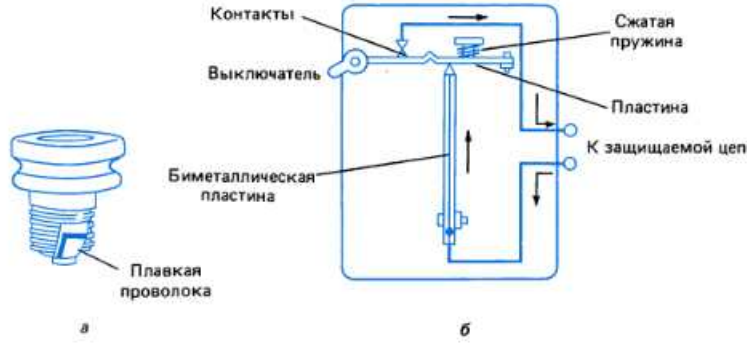


Рис. 26.8. *а* – плавкий предохранитель. Когда ток превышает допустимое значение, проволока плавится и цепь размыкается. После устранения неисправностей в цепи предохранитель следует заменить. *б* – автоматический предохранитель. Электрический ток проходит по биметаллической пластине. Если сила тока превышает допустимое значение, биметаллическая пластина при нагреве изгибается настолько, что ее конец доходит влево до желобка на подпружиненной контактной пластине, которая отходит от неподвижного контакта, размыкая цепь. При этом и выключатель снаружи предохранителя перебрасывается в другое положение. Когда биметаллическая пластина охладится, предохранитель может быть включен снова поворотом выключателя.

Провода, подводящие электрический ток к осветительным приборам и электроустановкам, обладают некоторым сопротивлением, обычно достаточно малым. Поэтому при большой силе тока провода нагреваются и в них выделяется тепловая энергия мощностью I^2R, где R – сопротивление проводов. Это опасно тем, что провода в стене здания могут нагреться столь сильно, что вызовут пожар. Чем толще провод, тем меньше его сопротивление [см. (26.4)] и тем бóльшую силу тока он может выдержать без значительного нагрева. Если сила тока превышает допустимое значение, то говорят о «перегрузке». Разумеется, электропроводку зданий следует проектировать таким образом, чтобы она была способна выдержать любую предполагаемую нагрузку. Для защиты от перегрузок электрическую сеть снабжают плавкими предохранителями («пробками») или автоматическими выключателями. Эти устройства (рис. 26.8) размыкают цепь, когда сила тока в ней превышает некоторое значение. Предохранитель, рассчитанный на 20 А, перегорит, а автомат отключится, если сила тока превысит 20 А. Если повторно перегорает предохранитель или срабатывает автомат, то могут быть две причины: либо в сеть включено слишком много потребителей электроэнергии, либо произошло короткое замыкание, т. е. из-за плохой изоляции два токонесущих провода соединились «накоротко». Сопротивление цепи в этом случае будет крайне малым, и ток резко

возрастает. Короткое замыкание следует немедленно устранить.

Квартирная электропроводка устроена таким образом, что каждый включенный в сеть прибор оказывается под напряжением 120 В («сетевое напряжение»). Если перегорает предохранитель или срабатывает автомат, прикиньте для начала, какой ток потребляют ваши электроприборы. Пусть, например, электрическая лампа потребляет $I = P/V = 100$ Вт/120 В = 0,8 А, электронагреватель 1800 Вт/120 В = 15,0 А, электроплита 1300 Вт/120 В = = 10,8 А, итого 26,6 А. Предохранитель, рассчитанный на 20 А, конечно, перегорит. Если же установлен предохранитель на 30 А, то причина, видимо, в коротком замыкании (которое чаще всего происходит в шнурах электроприборов).

В электронных схемах следует учитывать тепло, рассеиваемое на резисторах. Допустимую мощность рассеяния на резисторе (I^2R) можно примерно оценить по его габаритам; чаще всего используются резисторы, рассчитанные на мощность 0,25, 0,5 и 1 Вт; чем выше рассеиваемая мощность ($= I^2R$), тем больше габариты.

26.7. Переменный ток

Если электрическую цепь подключить к батарее, ток пойдет в одном направлении. Такой ток называют *постоянным* (рис. 26.9, *а*). Генераторы на электростанциях вырабатывают *переменный ток*: он меняет направление много раз в секунду и обычно является синусоидальным (рис. 26.9, *б*). Почти повсеместно в жилые дома и на предприятия поступает переменный ток.

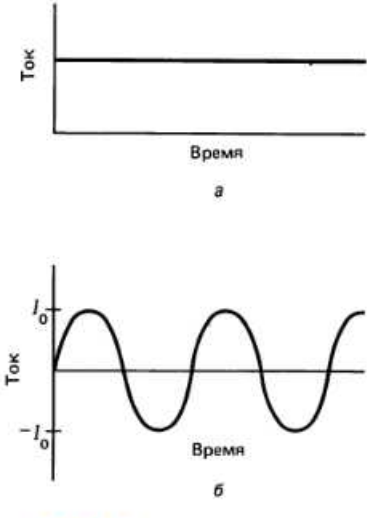


Рис. 26.9. *а* – постоянный ток; *б* – переменный ток.

Как мы увидим в гл. 30, электрический генератор создает синусоидальное напряжение. Соответственно синусоидальным оказывается и ток (рис. 26.9, *б*). Зависимость напряжения от времени можно записать в виде

$$V = V_0 \sin 2\pi ft .$$

Потенциал V периодически изменяется между $+V_0$ и $-V_0$; величина V_0 называется амплитудой напряжения (или *пиковым* напряжением). Частота f – число полных колебаний в секунду; на большей части территории США и Канады $f = 60$ Гц (колебаний в секунду); в других странах[1] «промышленная частота» 50 Гц.

Если к сопротивлению R приложена разность потенциалов V, то по закону Ома

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \sin 2\pi ft = I_0 \sin 2\pi ft . \qquad (26.16)$$

[1] Например, в СССР. – *Прим. перев.*

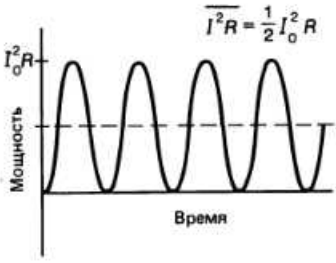


Рис. 26.10. Мощность, рассеиваемая на резисторе в цепи переменного тока.

Величина $I_0 = V_0/R$ называется *амплитудным* или *пиковым* значением силы тока. В «положительные» полупериоды ток идет в одном направлении, в «отрицательные» – в противоположном. Из рис. 26.9, *б* видно, что переменный ток половину времени имеет одно направление, а половину – противоположное, так что среднее значение силы тока равно нулю. Это не означает, однако, что мощность равна нулю и что резистор не выделяет тепло. Электроны в резисторе движутся то в одну сторону, то в другую, в результате чего выделяется тепло. Мгновенная мощность, рассеиваемая на резисторе R, равна

$$P = I^2R = I_0^2 R \sin^2 2\pi ft .$$

Поскольку в выражение входит квадрат силы тока, мощность всегда положительна (рис. 26.10). Значение $\sin^2 2\pi ft$ изменяется от 0 до 1; нетрудно показать (см. задачу 49), что его среднее значение равно $^1/_2$. Таким образом, *средняя мощность* $\bar{P}$ равна

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0^2 R .$$

Мощность можно также записать в виде $P = V^2/R = (V_0^2/R)\sin 2\pi ft$, и тогда средняя мощность равна

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R} .$$

Для определения средней мощности важно не просто среднее значение напряжения или силы тока (равное здесь нулю), а среднее значение *квадрата* напряжения и силы тока: $\overline{I^2} = {}^1/_2 I_0^2$ и $\overline{V^2} = {}^1/_2 V_0^2$. Извлекая из этих выражений квадратный корень, мы получим среднеквадратичное значение силы тока

$$I_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 = 0{,}707\, I_0 \qquad (26.17\text{а})$$

и напряжения

$$V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, V_0 . \qquad (26.17\text{б})$$

Среднеквадратичные значения напряжения V и силы тока I называют также эффективными (или действующими) значениями. Они удобны тем, что их можно непосредственно подставлять в формулы для вычисления средней мощности (26.14) и (26.15); например, $\bar{P} = {}^1/_2 I_0^2 R = I_{\text{ср.кв}}^2 R$. Другими словами, мощность переменного тока равна мощности постоянного тока с эффективными значениями напряжения и силы тока. Чаще всего поэтому переменный ток характеризуют *эффективными значениями* силы тока и напряжения. В США и Канаде, например, стандартное напряжение сети переменного тока равно

120 В ($V_{эфф}$), что соответствует амплитудному значению $V_0 = \sqrt{2}\, V_{эфф} = 170$ В.

В Европе эффективное напряжение равно 240 В, амплитудное – соответственно 340 В.[1)]

Пример 26.9. Вычислите сопротивление и амплитудное значение тока в фене для сушки волос мощностью 1 000 Вт, который включен в сеть с напряжением 120 В. Что произойдет, если этот фен включить в сеть с напряжением 240 В?

Решение. Эффективное значение силы тока равно

$$I_{эфф} = \frac{\bar{P}}{V_{эфф}} = \frac{1000\ \text{Вт}}{120\ \text{В}} = 8{,}33\ \text{А},$$

а $I_0 = \sqrt{2}\, I_{эфф} = 11{,}8$ А. Сопротивление фена равно

$$R = \frac{V_{эфф}}{I_{эфф}} = \frac{120\ \text{В}}{8{,}33\ \text{А}} = 14{,}4\ \text{Ом}.$$

Сопротивление можно рассчитать и используя пиковые значения: $R = V_0/I_0 = 170\ \text{В}/11{,}8\ \text{А} = 14{,}4$ Ом. Если включить фен в сеть 240 В, средняя мощность составит

$$\bar{P} = \frac{V_{эфф}^2}{R} = \frac{(240\ \text{В})^2}{(14{,}4\ \text{Ом})} = 4000\ \text{Вт}.$$

При этом, конечно, перегорит нагревательный элемент или обмотки двигателя.

В этом разделе приведены лишь элементарные сведения о переменном токе. Подробнее мы займемся цепями переменного тока в гл. 32. В гл. 27 речь будет идти только о постоянном токе.

Заключение

Электрическая батарея преобразует химическую энергию в электрическую и служит источником разности потенциалов, или *электродвижущей силы* (ЭДС). Простейшая батарея (гальванический элемент) состоит из двух электродов из разнородных металлов, помещенных в жидкий электролит.

Сила электрического тока I характеризует скорость перемещения электрического заряда и измеряется в амперах: 1 А = 1 Кл/с (количество заряда в кулонах, проходящее ежесекундно через данное сечение). За направление электрического тока обычно принимают направление перемещения положительных зарядов. В проводнике носителями тока в действительности служат отрицательные свободные электроны, и направление их движения противоположно условно принятому направлению тока. По условию положительный ток всегда течет от более высокого потенциала к более низкому.

Закон Ома утверждает, что сила тока в хорошем проводнике пропорциональна разности потенциалов на его концах; коэффициент пропорциональности называют

[1)] В СССР эффективное напряжение равно 220 В, амплитудное – 310 В. – *Прим. перев.*

сопротивлением R; $V = IR$. Единицей сопротивления служит ом (Ом); 1 Ом = 1 В/А.

Сопротивление R проводника обратно пропорционально площади его сечения A и прямо пропорционально длине проводника L, а также удельному сопротивлению ρ, характеризующему материал, из которого изготовлен проводник: $R = \rho L/A$. Удельное сопротивление металлов возрастает с температурой, а у полупроводников может убывать. Сверхпроводники – это материалы, электрическое сопротивление которых практически равно нулю.

Плотностью тока **j** называют силу тока, отнесенную к единичной площади сечения. С микроскопической точки зрения плотность тока связана с числом носителей заряда в единице объема n, величиной заряда носителя q и скоростью их дрейфа $\mathbf{v}_d$ соотношением $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}_d$. Напряженность электрического поля внутри проводника и плотность тока связаны соотношением $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, где $\sigma = 1/\rho$.

Скорость, с которой электрическая энергия преобразуется на сопротивлении R в другие виды энергии (свет, тепло), равна произведению силы тока на напряжение и измеряется в ваттах: мощность $P = IV$. Используя закон Ома, это равенство можно также записать в виде $P = I^2R = V^2/R$. Полная электрическая энергия, потребляемая любым устройством, равна произведению мощности на время включения этого устройства. В системе СИ энергия измеряется в джоулях, 1 Дж = 1 Вт·с; на практике используется более крупная единица – киловатт-час; (кВт·ч); 1 кВт·ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж.

Электрический ток может быть постоянным, т. е. идти непрерывно в одном направлении, и переменным, т. е. периодически менять свое направление с определенной частотой (в электросети обычно 60 Гц). Чаще всего сила переменного тока зависит от времени по синусоидальному закону: $I = I_0 \sin 2\pi ft$ (как и переменное напряжение). Эффективные (среднеквадратичные) значения силы синусоидального переменного тока и напряжения равны $I_{эфф} = I_0/\sqrt{2}$ и $V_{эфф} = V_0/\sqrt{2}$, где V_0 и I_0 представляют собой амплитудные (пиковые) значения. Выражения для мощности $P = IV = I^2R = V^2/R$ справедливы и для переменного тока, если использовать в них эффективные (среднеквадратичные) значения силы тока и напряжения.

Вопросы

1. Когда вы открываете водопроводный кран, обычно сразу же начинает течь вода. Почему вам не приходится ждать, пока вода дойдет от вентиля до отверстия крана? Не так ли обстоит дело, когда проводник подключает к клеммам батареи?
2. «Емкость» автомобильных аккумуляторов часто обозначают в ампер-часах (А·ч). Что означает эта характеристика?
3. Когда гальванический элемент включают в цепь, электроны движутся во внешней цепи от отрицательного полюса к положительному. Внутри же элемента электроны движутся к отрицательному электроду. Как это объяснить?
4. Расходуется ли электрический ток в резисторе?
5. Проведите аналогию между системой кровообращения и электрической цепью. Что играет роль «сердца» в электрической цепи и т. п.?
6. Придумайте схему, позволяющую независимо включать и выключать лампу с помощью двух выключателей в разных местах комнаты (см. рис. 26.11).
7. Могут ли медный и алюминиевый провода одной длины иметь одинаковое сопротивление? Объясните.
8. Стороны параллелепипеда из графита равны a, $2a$, $3a$. К каким противоположным граням следует подсоединить выводы, чтобы электрическое сопротивление было а) минимальным; б) максимальным)?
9. Продумайте и опишите опыт, позволяющий определить удельное сопротивление материала, из которого изготовлен большой параллелепипед.
10. Как мы видели в примере 26.5, скорость дрейфа электронов составляет обычно доли миллиметра в секунду. Иначе говоря, электронам может потребоваться несколько часов, чтобы пройти расстояние 1 м. Почему же лампа загорается сразу после включения?
11. Разность потенциалов на концах проводника длиной L и радиусом R равна V. Как изменится скорость дрейфа электронов, если удвоить а) длину L; б) радиус R; в) напряжение V?
12. Сравните скорость дрейфа и силу тока в двух проводниках одинаковой формы и размера с одинаковой плотностью атомов при условии, что на один атом одного проводника приходится вдвое больше свободных электронов, чем у другого.
13. Один из выводов автомобильного аккумулятора считается заземленным, хотя с землей он, конечно, не соединен. Что имеют в виду под «заземлением»?
14. Согласно формуле $P = V^2/R$, мощность, рассеиваемая резистором, должна уменьшаться с ростом сопротивления, а формула $P = I^2R$ подразумевает обратное. Нет ли здесь противоречия? Объясните.
15. Что происходит, когда перегорает электрическая лампа?
16. В какой из двух ламп, мощностью 100 Вт или 75 Вт, протекает ток большей силы?
17. Для передачи электроэнергии на большие расстояния используются очень высокие напряжения. Объясните, каким образом высокие напряжения позволяют уменьшить потери в линиях электропередач.
18. Почему опасно заменять предохранитель на 15 А, который то и дело перегорает, предохранителем на 25 А?
19. Электрическая лампа, питаемая переменным током очень низкой частоты (скажем, 10 Гц), заметно мерцает. Почему?
20. Франклин вполне мог бы назвать положительные заряды отрицательными, а отрицательные положительными, так что заряд электрона был бы положительным. Как это повлияло бы на различные результаты, обсуждавшиеся в этой главе?

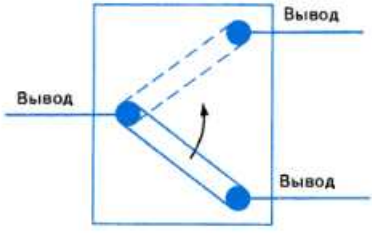


Рис. 26.11.

Задачи

Раздел 26.2

1. (I) На станции техобслуживания аккумулятор заряжают током силой 6,5 А в течение 5,0 ч. Какой заряд сообщают аккумулятору?
2. (I) По проводу течет ток силой 1,00 А. Сколько электронов проходит через сечение провода ежесекундно?
3. (I) Чему равна сила тока (в амперах), когда 1000 ионов Na^+ ($Q = +e$) проходят через клеточную мембрану за 4,0 мкс?

Раздел 26.3

4. (I) Какое напряжение падает на сопротивлении 25 Ом, если сила тока через него 1,2 А?
5. (I) Два одинаковых элемента напряжением

1,5 В соединены последовательно с лампой, сопротивление которой 10 Ом. Сколько электронов покидает каждый элемент ежеминутно?

6. (II) Птица сидит на проводе линии электропередачи, по которому течет ток силой 1800 А. Сопротивление провода составляет $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ Ом на погонный метр, а лапы птицы отстоят друг от друга на расстояние 2,5 см. Под каким напряжением находится птица?

7. (II) *Проводимость* G определяется как величина, обратная электрическому сопротивлению R: $G = 1/R$. Единицей проводимости служит обратный Ом ($Ом^{-1}$, мо) или сименс (См). Чему равна проводимость (в сименсах) тела, если при напряжении 12,0 В через него протекает ток силой 800 мА?

Раздел 26.4

8. (I) Чему равно сопротивление отрезка медного провода длиной 2,2 м и диаметром 1,8 мм?

9. (I) Провод длиной 20,0 м и диаметром 1,50 мм обладает сопротивлением 2,50 Ом. Каким будет сопротивление провода из того же материала длиной 35,0 м и диаметром 3,00 мм?

10. (I) Может ли медный провод диаметром 2,00 мм иметь такое же сопротивление, как вольфрамовый одинаковой с ним длины? Приведите численный расчет.

11. (II) Отрезок провода разрезали пополам и соединили куски параллельно. Как изменилось сопротивление?

12. (II) У лампы мощностью 100 Вт сопротивление нити накала в холодном состоянии равно 12 Ом, а во включенном (горячем) – 140 Ом. Оцените температуру раскаленной нити, считая температурный коэффициент сопротивления равным $\alpha = 0{,}0060\,°C^{-1}$.

13. (II) Ребра параллелепипеда из графита ориентированы по осям x, y и z и равны соответственно 1,0, 2,0 и 4,0 см. Определите сопротивление электрическому току, протекающему вдоль а) оси x; б) оси y; в) оси z. Удельное сопротивление равно $\rho = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$ Ом·м.

14. (II) Проводник длиной 12,0 м составлен из двух отрезков медного и алюминиевого проводов одинаковых длины и диаметра (3,0 мм). Каким должно быть напряжение на концах проводника, чтобы сила тока составила 6,0 А?

15. (II). а) Покажите, что для прямого проводника, расположенного вдоль оси x и имеющего площадь сечения A, скорость переноса заряда дается формулой

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma A \frac{dV}{dx},$$

где dV/dx – градиент потенциала, а σ – удельная проводимость. б) Проведите аналогию с теплопроводностью [см. разд. 19.7 и формулу (19.2)]. Существует ли связь между удельной проводимостью σ и теплопроводностью K?

16. (II) Полый цилиндрический резистор с внутренним радиусом R_1, внешним радиусом R_2 и длиной L изготовлен из материала с удельным сопротивлением ρ. а) Покажите, что для тока, текущего по радиусу наружу, сопротивление резистора равно

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

(Подсказка: рассмотрите цилиндрические слои и выполните интегрирование.) б) Определите R такого резистора из углерода, если $R_1 = 1{,}0$ мм, $R_2 = 1{,}8$ мм, $L = 1{,}0$ см. в) Определите R при тех же параметрах, если ток течет *вдоль* оси резистора.

17. (II) Провод с сопротивлением 1,00 Ом растянули по длине втрое. Чему теперь равно его сопротивление?

18. (II) В некоторых приложениях требуется, чтобы сопротивление не зависело от температуры. Предположим, что резистор 2,2 кОм состоит из последовательно соединенных углеродного и проволочного нихромового резисторов. Каким должно быть сопротивление каждого из них (при 0 °C), чтобы их общее сопротивление не зависело от температуры?

19. (II) Выведите формулу для полного электрического сопротивления току, протекающему наружу через сферическую оболочку с внутренним радиусом r_1, внешним радиусом r_2 и удельной проводимостью σ.

20. (III) Нить накала электрической лампы имеет сопротивление 12 Ом при 20 °C и 140 Ом в горячем состоянии (см. задачу 12). а) Рассчитайте температуру нити накала включенной лампы с учетом изменения длины и площади сечения нити вследствие теплого расширения (для вольфрама $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$). б) Какая доля изменения сопротивления в этом диапазоне температур обусловлена тепловым расширением и какая температурной зависимостью удельного сопротивления ρ? Воспользуйтесь формулой (26.6).

21. (III). Резистор с сопротивлением 38,0 Ом изготовлен из медного провода массой 11,2 г. Чему равны диаметр провода и его длина?

Раздел 26.5

22. (II) По медному проводу диаметром 0,40 мм течет слабый ток 3,0 мкА. Чему равны а) скорость дрейфа электронов; б) плотность тока; в) напряженность электрического поля внутри проводника?

23. (II) В растворе с концентрацией ионов Na^+ 5,00 моль/м^3 скорость их дрейфа составляет $5{,}00 \cdot 10^{-4}$ м/с, а скорость дрейфа ионов SO_4^{2-} равна $2{,}00 \cdot 10^{-4}$ м/с; плотность тока равна нулю. Какова концентрация ионов SO_4^{2-}?

24. (II) На большой высоте в атмосфере Земли ионы He^{2+} с концентрацией $3{,}5 \cdot 10^{12}$ м$^{-3}$ движутся к северу со скоростью $2{,}0 \cdot 10^6$ м/с, а ионы O_2^- с концентрацией $8{,}0 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$ движутся к югу со скоростью $8{,}5 \cdot 10^6$ м/с. Определите величину и направление плотности тока **j**.

25. (III) Рассматривая электроны в проводнике как идеальный газ и считая, что в промежутке между столкновениями с атомами проводника они движутся с ускорением $a = eE/m$, покажите, что удельное сопротивление ρ дается выражением

$$\rho = \frac{2mv}{ne^2 l_m},$$

где v – средняя скорость электронов (не скорость дрейфа!), а l_m – средняя длина свободного пробега электронов между столкновениями.

Раздел 26.6

26. (I) Какой ток течет в лампе мощностью 6,0 Вт, подключенной к источнику напряжения 12 В, на которое она рассчитана?

27. (I) Какую максимальную мощность потребляет транзисторный радиоприемник с напряжением питания 9,0 В, если максимальная потребляемая им сила тока равна 400 мА?

28. (I) Какое максимальное напряжение можно приложить к резистору сопротивлением 200 Ом, если его паспортная мощность рассеяния составляет $^1/_4$ Вт?

29. (I) Уходя спать, вы забыли выключить в кухне лампу мощностью 200 Вт, которая горела 8 ч. Во что это вам обойдется, если тариф за электроэнергию составляет 0,065 долл. за 1 кВт·ч?

30. (I) Какое количество энергии запасено в полностью заряженной аккумуляторной батарее напряжением 12 В и емкостью 50 А·ч?

31. (I) Во что обходится круглосуточно горящая в течение года лампочка мощностью 25 Вт в подъезде вашего дома при тарифе 0,08 долл. за 1 кВт·ч?

32. (II) Водитель забыл выключить фары автомобиля. Если мощность каждой из двух передних фар равна 40 Вт, а каждого из двух задних огней 6 Вт (всего 92 Вт), то на сколько времени хватит свежезаряженного 12-вольтового аккумулятора емкостью 45 А·ч? (Считайте, что на каждую лампу подается напряжение 12 В.)

33. (II) Металлический провод в нагревательном элементе электрокамина мощностью 1800 Вт (напряжение 120 В) имеет длину 6,8 м. Каков его диаметр?

34. (II) В доме используются электроприборы: нагреватель мощностью 3,5 кВт в течение 2,5 ч в сутки, 6 ламп по 100 Вт 5 ч в сутки, электроплита мощностью 3,3 кВт 1,2 ч в сутки и ряд других приборов, расходующих в среднем 1,6 кВт·ч в сутки. а) Каким будет месячный (30 дней) счет за электроэнергию при тарифе 0,070 долл. за 1 кВт·ч? б) Сколько угля (теплотворная способность 7000 ккал/кг) придется сжечь на тепловой электростанции, КПД которой равен 35%, чтобы обеспечивать этот дом электроэнергией в течение года?

35. (II) Чему равен КПД электродвигателя мощностью (на валу) 0,50 л.с., если он потребляет силу тока 4,4 А от сети 120 В?

36. (II) Электростанция снабжает электроэнергией завод по проводам с сопротивлением 3,2 Ом; потребляемая заводом мощность составляет 360 кВт. Насколько уменьшатся потери, если повысить напряжение в линии электропередач с 12 000 до 40 000 В?

37. (II) Электропроводка должна выполняться достаточно толстым проводом, чтобы он не нагревался и не создавал опасности пожара. Каким должен быть диаметр медного провода, если проводка рассчитана на максимальную силу тока 40 А и на погонный метр провода не должно выделяться более 1,8 Вт тепла?

38. (II) Фен для сушки волос потребляет мощность 1200 Вт и рассчитан на напряжение 117 В. Насколько уменьшится потребляемая мощность, если напряжение упадет до 105 В? (Изменением сопротивления пренебрегите.) Как изменится ответ при учете температурной зависимости сопротивления?

39. (II) Сила тока в обмотке электромагнита, подключенного к сети 240 В, равна 6,60 А. Каким должен быть расход воды охлаждения обмоток, если температура воды не должна повышаться более чем на 8,00 °С?

40. (II) Маленьким электрокипятильником можно вскипятить в автомобиле стакан воды для кофе. Какую силу тока потребляет кипятильник от аккумулятора с напряжением 12 В, если за 5 мин он нагревает 200 мл воды от 5 до 95 °С?

41. (II) Для обогрева комнаты объемом 36 м^3 используется электрический нагреватель. Воздух поступает с улицы при температуре 5 °С и полностью обновляется дважды в час. Потери тепла через стены составляют примерно 500 ккал/ч. Какую мощность должен иметь нагреватель, чтобы температура воздуха в комнате поддерживалась на уровне 20 °С? (Удельная теплоемкость воздуха равна примерно 0,17 ккал/кг·°С.)

42. (II) В электромобиле источником энергии служит аккумулятор. Предположим, что для питания маленького электромобиля массой 650 кг для доставки почты используется 10 аккумуляторов с напряжением каждый 12 В и емкостью 70 А·ч. Допустим, что электромобиль движется по ровной дороге со средней скоростью 30 км/ч; сила трения равна в среднем 200 Н. Будем считать КПД равным 100% и пренебрежем затратами энергии на ускорение до номинальной скорости. При торможении и остановке энергия не расходуется, так как электродвигатель работает вхолостую. а) Определите мощность электродвигателя в лошадиных силах. б) Сколько километров составит приближенно пробег между зарядками аккумуляторов?

Раздел 26.7

43. (I) Переменное напряжение с амплитудой 80 В приложено к резистору 60 Ом. Чему равны эффективная и амплитудная силы тока через резистор?

44. (I) Чему равно сопротивление включенной лампы мощностью 60 Вт, рассчитанной на (эффективное) напряжение 120 В переменного тока?

45. (I) Вычислите амплитудное значение силы тока через резистор 2,2 кОм, на который подано переменное напряжение 240 В.

46. (II) Амплитудное значение силы переменного тока, потребляемого устройством мощностью 600 Вт, равно 3,0 А. Чему равно эффективное значение напряжения на этом устройстве?

47. (II) Нагреватель с сопротивлением 10 Ом включен в сеть переменного тока напряжением 240 В. Чему равна средняя потребляемая мощность? Чему равны максимальная и минимальная мгновенные мощности?

48. (II) Пусть сила тока изменяется по закону $I = 2{,}5 \sin 120t$, где I выражается в амперах и t – в секундах. а) Чему равна частота? б) Чему равно эффективное значение силы тока? в) Если этот ток течет через резистор 50 Ом, то по какому закону изменяется во времени напряжение на резисторе?

49. (II) Покажите, что среднее за большое число периодов значение $\sin^2 2\pi ft$ равно $^1/_2$. (Подсказка: воспользуйтесь интегрированием.)

27 Приборы и цепи постоянного тока

В гл. 26 были рассмотрены основные принципы явления электрического тока. Теперь мы применим эти принципы к анализу цепей постоянного тока и разберемся в работе некоторых важных приборов[1].

На схемах источник напряжения батарея обозначается символом —|— , конденсатор —||— , резистор —/\/\/\— . Провода с сопротивлением, пренебрежимо малым по сравнению с сопротивлением остальных элементов схемы, изображаются просто линиями. В этой главе мы по большей части (за исключением разд. 27.5) будем рассматривать стационарные цепи. Другими словами, мы не будем интересоваться цепями в тот момент, когда в них происходят какие-либо изменения, например подключается или отключается батарея или резистор. Будут рассматриваться цепи, в которых сила тока приняла установившееся (стационарное) значение.

27.1. Последовательное и параллельное соединения резисторов

Если два или несколько резисторов соединяются друг за другом (рис. 27.1) так, что сила тока в них оказывается одной и той же, то говорят, что они соединены *последовательно*. Если же резисторы соединяются так, что ток от источника разветвляется (рис. 27.2), то такое соединение называется *параллельным*; в этом случае ко всем резисторам приложена одна и та же разность потенциалов. Посмотрим, чему равно общее сопротивление последова-

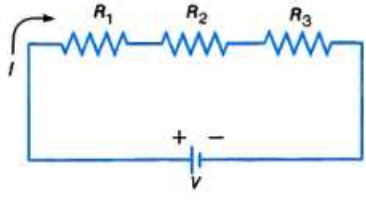


Рис. 27.1. Последовательное соединение резисторов $R = R_1 + R_2 + R_3$.

[1] Если цепь переменного тока содержит только источник ЭДС и резисторы, ее можно анализировать на основе выводов, полученных для цепей постоянного тока. Но в общем случае анализ цепей переменного тока, содержащих, скажем, конденсаторы, более сложен, и мы займемся ими в гл. 32.

тельного и параллельного соединений резисторов. Другими словами, найдем, каким резистором R можно заменить данную комбинацию, чтобы это не отразилось на остальной цепи. Резисторы могут быть типа показанных на рис. 26.6, но это могут быть и электрические лампочки или другие устройства, обладающие электрическим сопротивлением.

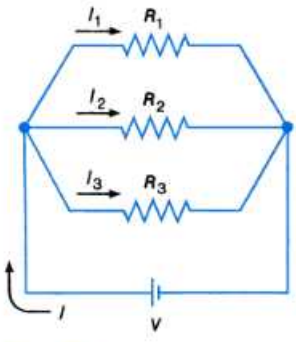


Рис. 27.2. Параллельное соединение резисторов $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$.

Рассмотрим сначала последовательное соединение резисторов (рис. 27.1). В этом случае через резисторы протекает ток I одинаковой силы (в противном случае в какой-то точке цепи накапливался бы заряд, но это не происходит в стационарном случае). Пусть V – напряжение на всех трех резисторах; будем считать, что сопротивлением остальной цепи можно пренебречь, и тогда V равно ЭДС батареи. Обозначим через V_1, V_2 и V_3 разности потенциалов (или, как говорят, падения напряжения) на каждом из резисторов R_1, R_2, R_3. Согласно закону Ома, $V_1 = IR_1$, $V_2 = IR_2$, $V_3 = IR_3$. В соответствии с законом сохранения энергии полное напряжение V равно сумме падений напряжения на каждом из резисторов, или

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 .$$

Для эквивалентного резистора R, через который течет тот же ток,

$$V = IR .$$

Приравняв эти два выражения для V, получим

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \qquad \text{[последовательное соединение]}. \tag{27.1}$$

Этого, собственно, и следовало ожидать. При последовательном соединении резисторов их общее сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных резисторов. Это утверждение справедливо для любого числа резисторов, а не только для трех. Ясно, что при подключении в цепь дополнительного сопротивления ток в цепи уменьшится. Если к 12-вольтовой батарее подключить 4-омный резистор, то сила тока составит 3 А. Но если ту же батарею подключить к последовательно соединенным трем резисторам по 4 Ом, их общее сопротивление составит 12 Ом и сила тока в цепи уменьшится до 1 А.

Иначе обстоит дело с параллельным соединением (рис. 27.2). Найдем сопротивление резистора R, эквивалентного трем резисторам, соединенным параллельно. В этом случае полный ток I от батареи, разветвляется на три ветви; пусть I_1, I_2, I_3 – силы токов, текущих соответственно через R_1, R_2, R_3. Вследствие сохранения заряда сила тока, втекающего в узел, должна быть равна силе тока, вытекающего из узла, т. е.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 .$$

К каждому резистору приложено полное напряжение ба-

тареи, так что

$$I_1 = \frac{V}{R_1}; \quad I_2 = \frac{V}{R_2}; \quad I_3 = \frac{V}{R_3}.$$

Для резистора R, эквивалентного R_1, R_2, R_3, соединенным параллельно,

$$I = \frac{V}{R}.$$

Объединив полученные равенства, находим

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3},$$

и, разделив обе части на V, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{[параллельное соединение]}. \quad (27.2)$$

Если, например, три резистора по 30 Ом соединены параллельно, то общее сопротивление цепи R равно

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30\ \text{Ом}} + \frac{1}{30\ \text{Ом}} + \frac{1}{30\ \text{Ом}} = \frac{1}{10\ \text{Ом}}$$

и $R = 10$ Ом. Таким образом, общее сопротивление оказывается *меньше* сопротивления каждого из резисторов в отдельности. Это легко понять: включая резистор параллельно имеющимся, мы создаем для тока дополнительный путь, и общее сопротивление цепи падает.

Пример 27.1. Какой силы ток создается батареей в цепи на рис. 27.3, *а*?

Решение. Найдем сначала эквивалентное сопротивление R_p соединенных параллельно резисторов 500 и 700 Ом:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{500\ \text{Ом}} + \frac{1}{700\ \text{Ом}} = 0{,}0020\ \text{Ом}^{-1} + 0{,}0014\ \text{Ом}^{-1} = 0{,}0034\ \text{Ом}^{-1}.$$

Чтобы найти R_p, следует взять значение, обратное полученному. (Распространенная ошибка состоит в том, что это забывают сделать. Напоминанием служит наименование «обратный ом», Ом^{-1}.) Итак,

$$R_p = \frac{1}{0{,}0034\ \text{Ом}^{-1}} = 290\ \text{Ом}.$$

Это сопротивление, эквивалентное двум параллельно соединенным резисторам, включено последовательно с резистором 400 Ом (эквивалентная схема показана на рис. 27.3, *б*). Чтобы найти общее сопротивление R_T, сложим сопротивления 400 и 290 Ом, так как они включены последовательно:

$$R_T = 400\ \text{Ом} + 290\ \text{Ом} = 690\ \text{Ом}.$$

Тогда полная сила тока, текущего от батареи, равна

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12{,}0\ \text{В}}{690\ \text{Ом}} = 17\ \text{мА}.$$

Пример 27.2. Какой силы ток течет через 500-омный резистор в схеме на рис. 27.3, *а*?

Решение. Для решения этой задачи надо найти напряжение на 500-омном резисторе; на схеме это соответствует напряжению между точками b и c, которое мы обозначим через V_{bc}. Зная V_{bc}, по закону Ома можно найти силу тока. Найдем вначале падение напряжения V_{ab} на 400-

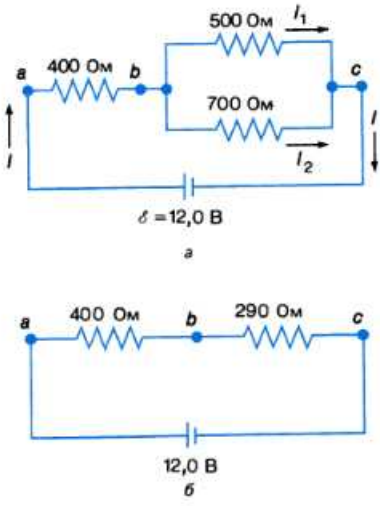


Рис. 27.3. *а* – схема к примерам 27.1 и 27.2; *б* – эквивалентная схема, на которой параллельно соединенные резисторы 500 и 700 Ом заменены одним резистором 290 Ом.

омном резисторе. Через этот резистор течет ток силой 17 мА, и по закону Ома ($V = IR$)

$$V_{ab} = (0{,}017\ \text{А})(400\ \text{Ом}) = 6{,}8\ \text{В}.$$

К схеме приложено напряжение $V_{ac} = 12$ В; следовательно, $V_{bc} = 12\ \text{В} - 6{,}8\ \text{В} = 5{,}2$ В, и по закону Ома сила тока I_1 через 500-омный резистор равна

$$I_1 = \frac{5{,}2\ \text{В}}{500\ \text{Ом}} = 10\ \text{мА}.$$

Это и есть ответ на поставленный вопрос. Но можно еще рассчитать силу тока I_2 через 700-омный резистор, напряжение на котором также равно 5,2 В:

$$I_2 = \frac{5{,}2\ \text{В}}{700\ \text{Ом}} = 7\ \text{мА}.$$

Обратите внимание на то, что в точке c силы тока I_1 и I_2 суммируются, создавая полную силу тока I: $10\ \text{мА} + 7\ \text{мА} = 17$ мА; таким образом, полная сила тока соответствует рассчитанной в примере 27.1.

27.2. ЭДС и напряжение на клеммах источника

Как уже говорилось в гл. 26, батареи, электрические генераторы и другие устройства, преобразующие различные виды энергии (химическую, механическую, световую и т. п.) в электрическую энергию, называют *источниками ЭДС (электродвижущей силы)*. (Термин «электродвижущая сила» неудачен: ни о какой силе, измеряемой в ньютонах, здесь нет и речи. Поэтому, чтобы избежать путаницы, мы будем пользоваться только сокращением ЭДС.) Вам, вероятно, приходилось встречаться с фактом падения напряжения на клеммах батареи ниже номинального значения ЭДС, когда к батарее подключают нагрузку, т. е. отбирают ток. Например, свет фар тускнеет, когда запускают двигатель: стартер берет от аккумулятора ток очень большой силы и в результате напряжение на клеммах аккумуляторной батареи падает. Химические реакции внутри аккумулятора не успевают пополнять заряд на электродах с такой скоростью, чтобы поддерживать номинальную ЭДС. Заряды перемещаются в электролите от одного электрода к другому, и их поток всегда встречает на своем пути сопротивление. Таким образом, источник сам по себе обладает некоторым сопротивлением, кото-

рое называют *внутренним сопротивлением* и обозначают обычно через r. Внутреннее сопротивление можно представить себе включенным последовательно с источником ЭДС (рис. 27.4); конечно, это сопротивление неотделимо от источника, поскольку оно присутствует в самом источнике. Точки a и b на схеме (рис. 27.4) соответствуют клеммам батареи, и то, что мы измеряем,– это **напряжение на клеммах источников** V_{ab}. Когда сила тока во внешней цепи отсутствует, напряжение на клеммах равно ЭДС, которая определяется химическими процессами, происходящими внутри батареи: $V_{ab} = \mathscr{E}$. Если же от батареи отбирается ток I, то напряжение на клеммах падает на величину Ir:

$$V_{ab} = \mathscr{E} - Ir\,.$$

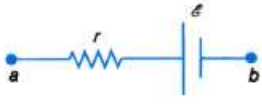


Рис. 27.4. Эквивалентная схема гальванического элемента или батареи.

Если, например, внутреннее сопротивление 12-вольтовой батареи составляет 0,1 Ом, то при силе тока 10 А напряжение на клеммах батареи составит 12 В – (10 А)(0,1 Ом) = = 11 В. Обычно внутреннее сопротивление невелико: у свежей батарейки для карманного фонарика оно составляет, вероятно, 0,05 Ом. Однако по мере старения батареи и высыхания электролита внутреннее сопротивление возрастает до нескольких ом. У автомобильного аккумулятора внутреннее сопротивление еще меньше [1].

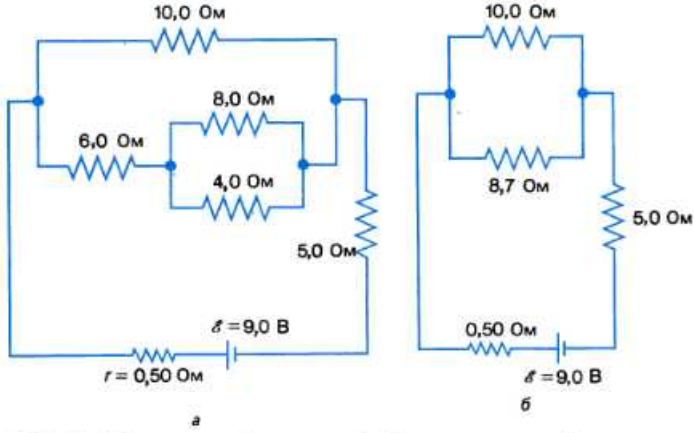


Рис. 27.5. К примеру 27.3; r – внутреннее сопротивление батареи.

Пример 27.3. Батарея с ЭДС 9,0 В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}50$ Ом подключена к цепи, показанной на рис. 27.5, *а*. а) Чему равна сила тока, потребляемого от батареи? б) Чему равно напряжение на клеммах батареи?

Решение. а) Сопротивление R_I, эквивалентное параллельно соединенным резисторам 4,0 и 8,0 Ом, находим по формуле

$$\frac{1}{R_I} = \frac{1}{8{,}0\ \text{Ом}} + \frac{1}{4{,}0\ \text{Ом}} = \frac{3}{8{,}0\ \text{Ом}},$$

[1] Когда аккумулятор заряжают, через него пропускают электрический ток (рис. 27.8, *б*), и тогда $V_{ab} = \mathscr{E} + Ir$. См., например, задачу 23 и рис. 27.21.

откуда $R_I = 2{,}7$ Ом. Это сопротивление включено последовательно с резистором 6,0 Ом, и общее сопротивление нижней ветви цепи равно 6,0 Ом + 2,7 Ом = = 8,7 Ом (рис. 27.5, *б*). Теперь найдем эквивалентное сопротивление R_{II} параллельно соединенных сопротивлений 10,0 и 8,7 Ом:

$$\frac{1}{R_{II}} = \frac{1}{10{,}0\ \text{Ом}} + \frac{1}{8{,}7\ \text{Ом}} = 0{,}21\ \text{Ом}^{-1}$$

и $R_{II} = 4{,}8$ Ом. Последовательно с ним включены резистор в 5,0 Ом и внутреннее сопротивление батареи 0,50 Ом, так что полное сопротивление цепи составляет $R = 4{,}8$ Ом + 5,0 Ом + 0,50 Ом = 10,3 Ом. Сила тока в цепи равна

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{9{,}0\ \text{В}}{10{,}3\ \text{Ом}} = 0{,}87\ \text{А}.$$

б). Напряжение на клеммах батареи равно $V_{ab} = \mathscr{E} - Ir = 9{,}0\ \text{В} - (0{,}87\ \text{А}) \times$ $\times (0{,}50\ \text{Ом}) = 8{,}6$ В.

27.3. Правила Кирхгофа

В последних нескольких примерах нам удавалось рассчитать силу тока в цепях, выделяя последовательные и параллельные комбинации резисторов и применяя к ним закон Ома. Подобный метод можно успешно применять во многих случаях. Иногда, однако, встречаются цепи, которые оказываются слишком сложными для такого анализа. Например, нам не удастся определить силу тока во всех участках цепи на рис. 27.6, как раньше, просто комбинируя сопротивления.

Для анализа сложных цепей пользуются правилами Кирхгофа. Немецкий физик Густав Кирхгоф (1824–1887) сформулировал их в середине прошлого века. Правил Кирхгофа всего два; в их основе лежат законы сохранения заряда и энергии. **Первое правило Кирхгофа (правило узлов)** отражает сохранение заряда, и мы по существу уже воспользовались им при выводе формулы для параллельного соединения резисторов. Оно утверждает, что для *любого узла цепи сумма токов, втекающих в узел, должна быть равна сумме токов, вытекающих из узла.* Например, для точки *a* на рис. 27.6 ток I_3 является втекающим, а токи I_1 и I_2 – вытекающими и, согласно правилу Кирхгофа, $I_3 = I_1 + I_2$. С этим мы уже сталкивались в конце решения примера 27.2: силы тока через резисторы 400 и 700 Ом составляли соответственно 10 и 7 мА; в точке *c* на рис. 27.3, *а* они складывались; ток, вытекающий из узла, был равен 17 мА.

Правило узлов Кирхгофа основано на законе сохране-

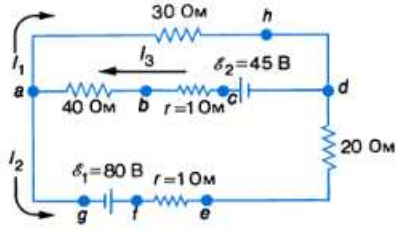
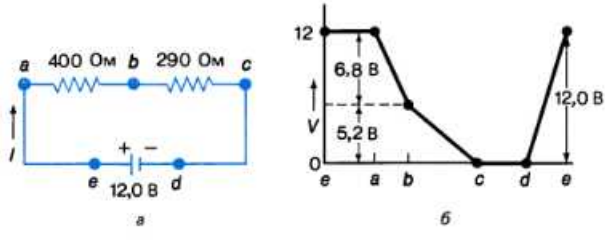


Рис. 27.6. Определение токов в цепи по правилам Кирхгофа.

ния электрического заряда. Весь входящий в узел заряд должен выходить из него: заряды не появляются и не исчезают. **Второе правило Кирхгофа (правило контуров)** отражает закон сохранения энергии. Оно гласит, что *алгебраическая сумма изменений напряжения вдоль любого замкнутого контура электрической цепи должна равняться нулю*. Чтобы пояснить это правило, проведем аналогию с тележкой, движущейся по рельсам в аттракционе «американские горы». В верхней точке (на старте) тележка обладает определенной потенциальной энергией. При въезде тележки на первую горку ее потенциальная энергия возрастает и достигает наверху локального максимума. При спуске с первой горки потенциальная энергия тележки уменьшается и внизу достигает локального минимума. Таким образом, пока тележка движется по горкам вверх и вниз, ее потенциальная энергия все время меняется. Но когда тележка в конце концов возвращается к месту старта, ее потенциальная энергия в точности равна начальной: сколько было спусков, столько и подъемов.

Подобные же рассуждения можно применить и к электрической цепи. Для примера рассмотрим простую цепь на рис. 27.7. (Мы намеренно взяли ту же самую цепь, что и на рис. 27.3, *б*, с которой мы уже имели дело.) Как было показано в примере 27.1, сила тока в этой цепи равна $I = (12{,}0\ \text{В})/(690\ \text{Ом}) = 0{,}017\ \text{А}$. (Обратите внимание: мы пренебрегли внутренним сопротивлением батареи.) Положительная клемма батареи (точка *e*) имеет более высокий потенциал, чем отрицательная (точка *d*); точку *e* можно уподобить вершине «американских гор». Проследим за силой тока, текущего по цепи, начиная с любой точки. Начнем с точки *e* и проследим за перемещением положительного пробного заряда вдоль всего замкнутого контура. При этом будем отмечать все изменения потенциала; когда заряд вернется в точку *e*, потенциал здесь будет таким же, как и вначале, так что полное изменение потенциала равно нулю. (Удобно изображать изменения потенциала графически, как это сделано на рис. 27.7, *б*; потенциал точки *d* условно принят за нулевой.) При движении положительного пробного заряда от точки *e* к точке *a* потенциал не изменяется: здесь нет ни источников ЭДС, ни резисторов. По пути из точки *a* в точку *b* заряд проходит через резистор 400 Ом, на котором происходит падение напряжения, равное $V = IR =$



а *б*

Рис. 27.7. Электрическая цепь (*а*) и диаграмма изменений потенциала в цепи (*б*).

$= (0{,}017\text{А})(400\ \text{Ом}) = 6{,}8$ В. Наш пробный заряд как бы «съезжает с горки» к отрицательной клемме батареи (см. график на рис. 27.7, *б*). Уменьшение напряжения между концами резистора ($= IR$) называют *падением напряжения*. Поскольку напряжение *падает*, его изменение войдет в сумму (второе правило Кирхгофа) со знаком минус:

$V_{ba} = -6{,}8$ В.

Далее, от b к c падение напряжения составит (0,017 А) × × (290 Ом) = 5,2 В, и

$V_{cb} = -5{,}2$ В.

При перемещении заряда от c к d напряжение не изменяется. А когда положительный пробный заряд переходит от отрицательного полюса батареи («низкий потенциал») d к положительному полюсу e, напряжение *увеличивается* на 12,0 В:

$V_{ed} = +12{,}0$ В.

Сумма всех изменений напряжения вдоль замкнутого контура на рис. 27.7 составляет, таким образом,

$-6{,}8\ \text{В} - 5{,}2\ \text{В} + 12{,}0\ \text{В} = 0$

в полном соответствии со вторым правилом Кирхгофа.

На примере уже знакомой нам цепи мы показали, как применяется правило контуров. Прежде чем воспользоваться правилами Кирхгофа для определения силы токов в более сложных цепях, отметим, что силы токов в каждой ветви цепи принято обозначать подстрочными индексами, как на рис. 27.6: I_1, I_2, I_3. Не требуется заранее знать, в каком направлении текут токи: направление обхода контура выбирается наугад; если окажется, что ток течет в противоположном направлении, то результат получится со знаком минус. Поясним в деталях использование правил Кирхгофа на следующем примере.

Пример 27.4. Рассчитаем силы тока I_1, I_2, I_3 в ветвях цепи, показанной на рис. 27.6.

Решение. Выберем направления токов, как показано на схеме. Поскольку принято считать, что ток течет от положительного полюса батареи к отрицательному, направления токов I_3 и I_2 вряд ли могут быть другими. О направлении тока I_1 сказать пока трудно, поэтому оно выбрано условно. У нас три неизвестных, и поэтому нужна система трех уравнений. Применим вначале правило узлов Кирхгофа к токам в точке a: ток I_3 втекает в узел, а токи I_2 и I_1 вытекают из него. Следовательно,

$$I_3 = I_1 + I_2. \qquad \text{(а)}$$

Аналогичное уравнение справедливо и для узла d. Применим теперь правило контуров к двум разным замкнутым контурам; пусть первым будет контур *ahdcba*. Между точками a и h происходит падение напряжения $V_{ha} = -(I_1)(30\ \text{Ом})$; между h и d напряжение не меняется, а между d и c возрастает на 45 В: $V_{cd} = +45$ В. Между c и a происходит падение напряжения на двух резисторах на величину $V_{ac} = -(I_3)(40\ \text{Ом} + 1\ \text{Ом})$. Итак, $V_{ha} + V_{cd} + V_{ac} = 0$, или

$$-30I_1 - 41I_3 + 45 = 0 \qquad \text{(б)}$$

(для краткости обозначения единиц опущены). В качестве второго контура возьмем «внешний» контур *ahdefga* (с таким же

успехом можно было взять контур *abcdefga*). Снова $V_{ha} = -(I_1)(30\ \text{Ом})$ и $V_{dh} = 0$. Но дальше, перемещая положительный пробный заряд от d к e, мы будем «взбираться на горку», т. е. двигаться против направления тока (во всяком случае, против *выбранного* нами направления, а именно это важно при пользовании правилом Кирхгофа). Поэтому $V_{ed} = I_2(20\ \text{Ом})$ входит в сумму с *плюсом*, как и $V_{fe} = I_2(1\ \text{Ом})$. Между f и g происходит падение потенциала на 80 В, так как мы движемся от положительного полюса батареи к отрицательному, от более высокого потенциала к более низкому; $V_{fg} = -80$ В. Наконец, $V_{ag} = 0$, и сумма всех изменений напряжения вдоль этого контура равна

$$-30I_1 + 21I_2 - 80 = 0. \qquad \text{(в)}$$

Теперь у нас имеются три уравнения – (а), (б), (в) – с тремя неизвестными. Из уравнения (в) находим

$$I_2 = \frac{80 + 30I_1}{21} = 3{,}8 + 1{,}4I_1, \qquad \text{(г)}$$

из уравнения (б) получаем

$$I_3 = \frac{45 - 30I_1}{41} = 1{,}1 - 0{,}73I_1. \qquad \text{(д)}$$

Подставляя (г) и (д) в уравнение (а), находим

$$I_1 = I_3 - I_2 = -2{,}7 - 2{,}1I_1,$$
$$3{,}1I_1 = -2{,}7,$$
$$I_1 = -0{,}87\ \text{А}.$$

Сила тока I_1 равна 0,87 А; знак минус означает, что действительное направление тока оказалось противоположным выбранному нами вначале и показанному стрелкой. Обратите внимание на то, что ответ автоматически получен в амперах, так как напряжения мы выражали в вольтах, а сопротивления – в омах. Из уравнения (г) находим

$$I_2 = 3{,}8 + 1{,}4I_1 = 2{,}6\ \text{А},$$

а из (д) получаем

$$I_3 = 1{,}1 - 0{,}73I_1 = 1{,}7\ \text{А}.$$

Этим решение завершается.

27.4. Последовательное и параллельное соединения источников ЭДС

При последовательном соединении двух или нескольких источников ЭДС общее напряжение равно алгебраической сумме их напряжений. Если, например, два элемента для карманного фонаря по 1,5 В соединены, как показано на рис. 27.8, *а*, то напряжение на лампе V_{ca} (представленной в виде резистора R) составит 3,0 В. (Строго говоря, следовало бы учесть еще внутреннее сопротивление элементов, но мы считаем его малым.) С другой стороны, когда батареи напряжением 20 и 12 В соединены, навстречу друг другу, как показано на рис. 27.8, *б*, их общее напряжение V_{ca} равно 8 В: при переносе пробного положительного заряда от a к b потенциал увеличится на 20 В, а далее, от b к c, понизится на 12 В, так что изменение напряжения от a к c равно 20 В – 12 В = 8 В. Можно подумать, что «встречное» включение батарей лишено смысла, и в большинстве случаев так оно и есть. Но именно так включаются зарядные устройства: на рис. 27.8, *б* батарея напряжением 12 В заряжается от 20-вольтового источника. Поскольку напряжение последнего выше, он подзаряжает 12-вольтовую батарею: электроны подводятся к отрицательному электроду и удаляются от положительного. Однако не всякие батареи поддаются подзарядке, так как не всегда

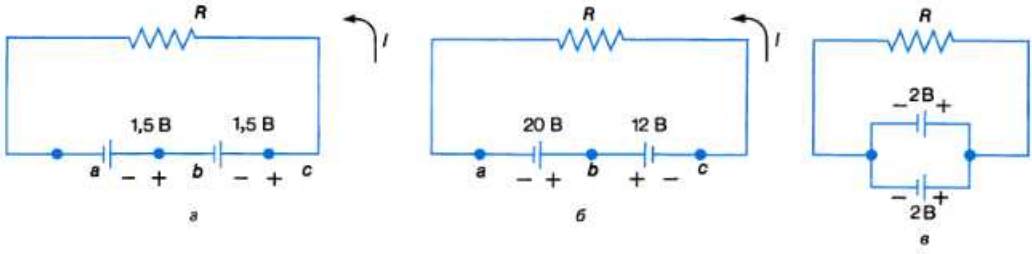


Рис. 27.8. Последовательное (*а, б*) и параллельное (*в*) соединения батарей.

химические реакции можно обратить. В таком случае в ситуации, изображенной на рис. 27.8, *б*, энергия будет тратиться впустую.

Источники ЭДС можно соединять и параллельно (рис. 27.8, *в*). Это делается не для повышения напряжения, а для того, чтобы обеспечить большую силу тока, т. е. для увеличения энергии. Каждая из параллельно включенных батарей обеспечивает лишь часть общей силы тока, и потери на внутреннем сопротивлении оказываются меньше, чем при использовании единственной батареи.

27.5. Цепи, содержащие резистор и конденсатор

Часто встречаются цепи, содержащие одновременно резисторы и конденсаторы. Простой пример приведен на рис. 27.9. Проанализируем такую *RC-цепочку*. Пусть вначале ключ S_2 разомкнут, так что правая часть схемы отсоединена. При замыкании ключа S_1 мы будем иметь дело с цепью, показанной на рис. 27.10, *а*. В такой цепи сразу начинает течь ток. Электроны движутся от отрицательной клеммы батареи через резистор R и будут накапливаться на верхней обкладке конденсатора. С нижней обкладки конденсатора электроны будут уходить к положительной клемме батареи, и обкладка зарядится положительно. По мере накопления заряда на конденсаторе сила тока в цепи будет уменьшаться, пока в конце концов напряжение на конденсаторе не станет равным ЭДС батареи; тогда ток в цепи прекратится. Таким образом, после замыкания ключа S_1 заряд Q на конденсаторе C будет постепенно возрастать (рис. 27.10, *б*) и достигнет максимального значения $C\mathscr{E}$ [формула (25.1), $Q = CV_{ba} = C\mathscr{E}$]. Кривую заряда конденсатора (т. е. зависимость Q от времени) можно установить, пользуясь законом сохранения энергии или правилом контуров Кирхгофа. ЭДС батареи равна сумме падений напряжения на резисторе (IR) и конденсаторе (Q/C):

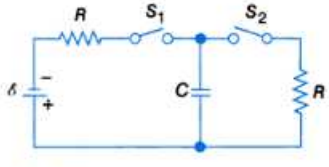


Рис. 27.9. *RC*-цепочки.

$$\mathscr{E} = IR + \frac{Q}{C}. \qquad (27.3)$$

Сопротивление R учитывает полное сопротивление цепи, включая внутреннее сопротивление батареи; I – сила тока

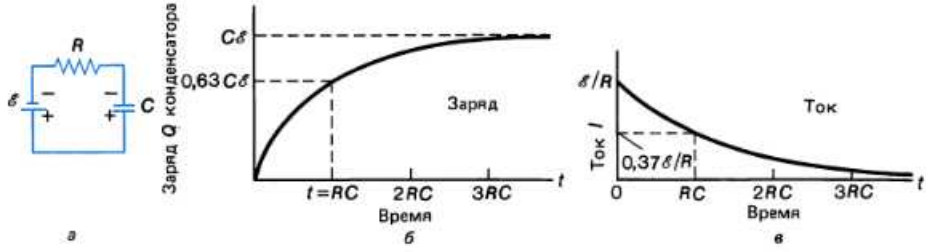


Рис. 27.10. *а* – схема зарядки конденсатора; графики изменения заряда (*б*) и тока (*в*) во времени для *RC*-цепочки.

в цепи в данный момент, а Q – заряд на конденсаторе в тот же момент времени. Величины $\mathscr{E}$, R и C постоянны, тогда как I и Q зависят от времени. Скорость, с которой заряд протекает через резистор ($I = dQ/dt$), равна скорости, с которой он накапливается на конденсаторе. Это позволяет нам написать

$$\mathscr{E} = R\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{C}Q.$$

Чтобы решить это уравнение, преобразуем его к виду

$$\frac{dQ}{Q - C\mathscr{E}} = -\frac{dt}{RC}$$

и проинтегрируем

$$\int \frac{dQ}{Q - C\mathscr{E}} = -\frac{1}{RC}\int dt,$$

$$\ln(Q - C\mathscr{E}) = -\frac{t}{RC} + K,$$

где K – постоянная интегрирования. Значение K можно найти из условия $Q = 0$ при $t = 0$, откуда

$$\ln(-C\mathscr{E}) = K.$$

Подставив это значение K, получим

$$\ln(Q - C\mathscr{E}) - \ln(-C\mathscr{E}) = -\frac{t}{RC},$$

или

$$\ln\left(1 - \frac{Q}{C\mathscr{E}}\right) = -\frac{t}{RC}.$$

Теперь избавимся от логарифма в левой части:

$$1 - \frac{Q}{C\mathscr{E}} = e^{-t/RC},$$

или

$$Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}). \qquad (27.4)$$

Полученное решение показывает, что заряд Q на конденсаторе возрастает от значения $Q = 0$ при $t = 0$ до максимального значения $Q = C\mathscr{E}$ в течение очень долгого време-

ни. Величина RC называется *постоянной времени* цепи (размерность RC равна Ом·Ф = (В/А)(Кл/В) = Кл/(Кл/с) = = с). Постоянная времени характеризует промежуток времени, за который заряд на конденсаторе достигает $(1 - e^{-1})$, или 63% своего максимального значения Q $[Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63\,C\mathscr{E}]$. Таким образом, величина RC характеризует скорость зарядки конденсатора. Любая цепь содержит сопротивление (хотя бы сопротивление соединительных проводов), поэтому подключенный к батарее конденсатор никогда не заряжается мгновенно.

Из (27.4) следует, что Q вообще никогда не достигает (вернее, достигает лишь через бесконечно большое время) своего максимального значения $Q = C\mathscr{E}$. Однако заряд достигает 86% максимального через время $2RC$, 95% через $3RC$, 98% через $4RC$ и т. д.; иначе говоря, значение Q довольно быстро оказывается сколь угодно близким к максимальному. Например, если $R = 20$ кОм и $C = 0{,}30$ мкФ, то постоянная времени равна $(2{,}0 \cdot 10^4$ Ом$) \times (3{,}0 \cdot 10^{-7}$ Ф$) = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ с, и заряд на конденсаторе превысит 98% максимального за время менее 1/40 с.

Силу тока I в цепи на рис. 27.10, *а* в произвольный момент времени t можно получить, продифференцировав (27.4):

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/RC}. \qquad (27.5)$$

Таким образом, при $t = 0$ сила тока равна $I = \mathscr{E}/R$, как если бы цепь содержала только резистор (в этот момент на конденсаторе еще не возникла разность потенциалов). Затем сила тока экспоненциально убывает во времени с постоянной времени RC (рис. 27.10, *в*). Постоянная времени характеризует время, за которое ток уменьшается до $1/e \approx 0{,}37$ своего начального значения.

Пример 27.6. В цепи на рис. 27.10, *а* емкость $C = 0{,}30$ мкФ, полное сопротивление $R = 20$ кОм, ЭДС батареи $\mathscr{E} = 12$ В. Определите а) постоянную времени; б) максимальный заряд, приобретаемый конденсаторами; в) время, через которое заряд достигает 99% максимального.

Решение. а) Постоянная времени равна $RC = (2{,}0 \cdot 10^4$ Ом$)(3{,}0 \cdot 10^{-7}$ Ф$) = 6{,}0 \times \times 10^{-3}$ с.

б) Максимальный заряд $Q = C\mathscr{E} = (3{,}0 \cdot 10^{-7}$ Ф$)(12$ В$) = 3{,}6$ мкКл.

в) Подставим $Q = 0{,}99\,C\mathscr{E}$ в (27.4):

$$0{,}99\,C\mathscr{E} = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}),$$

или

$$e^{-t/RC} = 1 - 0{,}99 = 0{,}01,$$

откуда

$$\frac{t}{RC} = -\ln(0{,}01) = 4{,}6$$

и

$$t = 4{,}6\,RC = 28 \cdot 10^{-3}\text{ с} = 28\text{ мс}$$

(т. е. менее 1/30 с).

Вернемся теперь к схеме на рис. 27.9. Предположим, что конденсатор заряжен до величины Q_0 и мы разомкнули ключ S_1 и замкнули S_2. Получается цепь, изображенная на рис. 27.11, *а*. Как только ключ S_2 замкнется, заряд

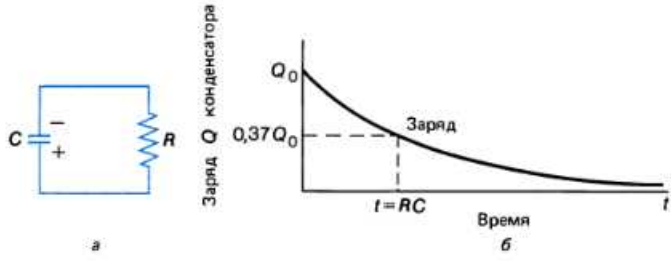


Рис. 27.11. *а* – схема разряда конденсатора; *б* – график изменения заряда во времени для *RC*-цепочки.

потечет через сопротивление R с одной обкладки конденсатора на другую, пока конденсатор полностью не разрядится. Закон сохранения энергии (или правило контуров Кирхгофа) можно применить и здесь, и формула (27.3) справедлива при $\mathscr{E} = 0$:

$$IR + \frac{Q}{C} = 0;$$

так как $I = dQ/dt$, то

$$\frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} = 0.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

и проинтегрируем:

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + K.$$

Постоянная интегрирования K находится из условия $Q = Q_0$ при $t = 0$, откуда $K = \ln Q_0$. Итак,

$$\ln Q - \ln Q_0 = \ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC},$$

или

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}. \qquad (27.6)$$

Мы видим, что заряд на конденсаторе убывает экспоненциально с постоянной времени RC (рис. 27.11, *б*). Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad (27.7)$$

также экспоненциально убывает во времени с той же постоянной времени RC.

*27.6. Амперметры и вольтметры

Амперметр служит для измерения силы тока, *вольтметр* – для измерения разности потенциалов (напряжения). Основной частью этих приборов является *гальванометр*, принцип действия которого основан на силе, с которой магнитное поле действует на виток провода, по которому течет ток. Это явление будет обсуждаться в гл. 28; пока же нам достаточно просто знать, что отклонение стрелки гальванометра пропорционально силе протекающего через него тока. Сила тока I_m, отвечающая отклонению стрелки гальванометра на всю шкалу, характеризует *чувствительность* прибора (рис. 27.12). Если, например, $I_m = 50$ мкА, то при силе тока через гальванометр 50 мкА стрелка отклонится до конца шкалы, а при силе тока 25 мкА – до середины шкалы; в отсутствие тока стрелка должна стоять на нуле (для установки на нуль в приборе обычно имеется регулировочный винт).

Многие измерительные приборы, с которыми мы сталкиваемся в повседневной практике, представляют собой гальванометры, включенные по схеме амперметров или вольтметров (индикаторы уровня записи в магнитофонах, а также некоторые приборы на щитке автомобиля).

Гальванометр можно непосредственно использовать для измерения слабых токов. Например, гальванометр со шкалой 50 мкА способен измерять токи силой от 1 мкА (меньшее значение тока будет трудно считывать со шкалы) до 50 мкА. Чтобы измерять более сильные токи, параллельно гальванометру включается резистор. Таким образом, амперметр (на схемах обозначается символом –Ⓐ–) состоит из гальванометра –Ⓖ– с параллельным, или *шунтирующим, резистором*. На рис. 27.13, *а* шунтирующее сопротивление (или просто шунт) обозначено R, а сопротивление подвижной катушки (рамки) гальванометра обозначено r. Значение R подбирается для достижения

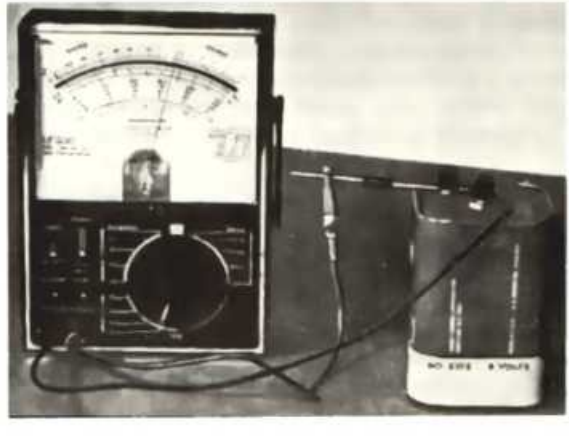


Рис. 27.12. Измерение тока в цепи с помощью многопредельного прибора (фирма «Лестер В. Бергман»).

при заданном токе отклонения стрелки гальванометра на всю шкалу.

Допустим, нам необходим амперметр со шкалой 1,0 А, а мы располагаем гальванометром с полным отклонением 50 мкА и собственным сопротивлением $r = 30$ Ом. Это значит, что, когда через амперметр проходит ток 1 А, сила тока через гальванометр I_G должна составлять в точности 50 мкА, чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу. Иначе говоря, при силе тока через прибор 1 А через шунт R должен течь ток силой $I_R = 0{,}999950$ А. Так как напряжение на шунте равно напряжению на гальванометре, то

$$I_R R = I_G r,$$

откуда

$$R = \frac{I_G r}{I_R} = \frac{(5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{А})(30\ \text{Ом})}{(0{,}999950\ \text{А})} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Ом},$$

или 0,0015 Ом. Таким образом, шунтирующий резистор должен иметь очень малое сопротивление, чтобы через него проходила бóльшая часть общего тока. Если сила тока I через амперметр будет равна 0,50 А, то через гальванометр пройдет 25 мкА, и стрелка отклонится на половину шкалы.

Вольтметр (обозначается символом •—Ⓥ—•) тоже содержит гальванометр и резистор (рис. 27.13, *б*). Но резистор R (добавочное сопротивление) включается последовательно с гальванометром; обычно добавочное сопротивление имеет большую величину. Пусть, например, имея тот же гальванометр с собственным сопротивлением $r = 30$ Ом и полным отклонением 50 мкА, мы хотим сделать вольтметр со шкалой от 0 до 15 В. Это означает, что, когда на клеммах нашего вольтметра будет разность потенциалов 15 В, через гальванометр должен идти ток силой 50 мкА, чтобы стрелка отклонилась до конца шкалы. Согласно закону Ома,

$$15\ \text{В} = (50\ \text{мкА})(r + R),$$

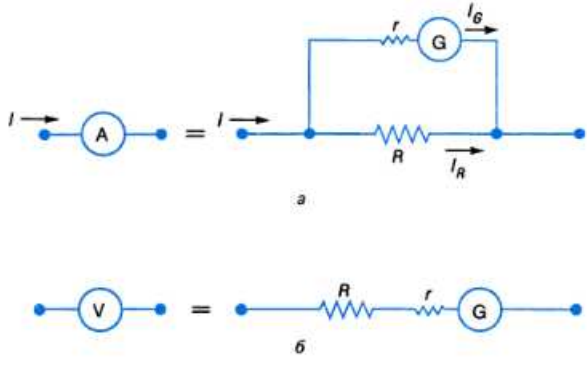


Рис. 27.13. Амперметр – гальванометр с параллельно подключенным небольшим сопротивлением (шунтом) R (*а*) и вольтметр – гальванометр с последовательно включенным большим добавочным сопротивлением R (*б*).

откуда

$$R = \frac{15\ \text{В}}{5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{А}} - r = 300\ \text{кОм}.$$

Обратите внимание на то, что сопротивление r настолько мало по сравнению с добавочным сопротивлением R, что им можно пренебречь. Шкала вольтметра также будет линейной: если измеряемое напряжение равно 6,0 В, то сила тока через вольтметр (и гальванометр) составит $6{,}0\ \text{В}/3{,}0 \cdot 10^5\ \text{Ом} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{А} = 20\ \text{мкА}$. Стрелка отклонится на две пятых шкалы, т. е. пропорционально измеряемому напряжению.

*27.7. Измерение тока и напряжения. Поправка на внутреннее сопротивление прибора

Пусть необходимо измерить силу тока I в цепи, изображенной на рис. 27.14, *а*, и напряжение V на резисторе R_1. Как подключить к цепи вольтметр и амперметр?

Амперметр, измеряющий силу тока в цепи, должен включаться в саму цепь последовательно с остальными элементами (рис. 27.14, *б*).

Вольтметр же подключается параллельно тому участку цепи, на котором измеряется падение напряжения. Вольтметр измеряет разность потенциалов между двумя точками и подсоединяется к этим точкам гибкими проводниками (как показано на рис. 27.14, *в* для измерения падения напряжения на резисторе R_1).

Вольтметры и амперметры нередко снабжаются наборами последовательно подключаемых резисторов или шунтов, что позволяет расширить диапазон измерений. *Мультиметры* могут измерять напряжение, ток и сопротивление; такие комбинированные приборы называют также ампервольтомметрами, авометрами, тестерами. Существуют также измерительные приборы с цифровой индикацией (цифровые вольтметры, цифровые мультиметры). Для измерения сопротивлений в приборе должна быть батарея с известным напряжением, которая соединяется с амперметром (гальванометром с шунтом); такой прибор называют *омметром* (см. задачу 51). Резистор, сопротивление которого требуется измерить, образует с

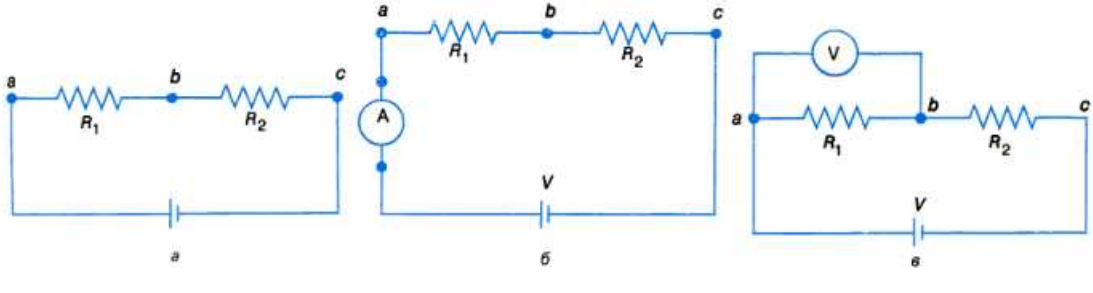


Рис. 27.14. Измерение тока и напряжения.

батареей и амперметром замкнутую цепь. В этом случае отклонение стрелки обратно пропорционально сопротивлению: чем меньше измеряемое сопротивление, тем больше отклонение стрелки и наоборот. Калибровка шкалы зависит от величины резистора, включенного в цепь последовательно. Поскольку при подключении омметра через измеряемое сопротивление течет ток, этот прибор не следует использовать для измерения сопротивления таких устройств, которые могут быть повреждены электрическим током.

Чувствительность прибора обычно указывается на его лицевой панели. У многопредельных приборов чувствительность часто выражается в омах на вольт и отражает входное сопротивление прибора в расчете на одновольтовую шкалу[1]. Если, например, указано значение 30 000 Ом/В, то на пределе измерения 10 В вольтметр обладает входным сопротивлением 300 000 Ом. (Полное отклонение гальванометра I_m, о котором мы упоминали выше, является величиной, обратной чувствительности, выраженной в омах на вольт (Ом/В); 1 Ом/В = 1 $А^{-1}$. Например, вольтметр с чувствительностью 30 000 Ом/В будет иметь предел измерения 1 В в том случае, когда к гальванометру подключено добавочное сопротивление 30 000 Ом. Полное отклонение гальванометра соответствует в таком случае силе тока 1,0 В/3,0 · 10^4 Ом = = 33 мкА.)

Входное сопротивление измерительного прибора может заметно влиять на результаты измерений, как показывает следующий пример.

Пример 27.5. Пусть на рис. 27.14, *а* $R_1 = R_2 = 15$ кОм. Напряжение батареи равно 8,0 В, а ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Вольтметр с чувствительностью 10 000 Ом/В установлен на предел измерения 5,0 В. Что покажет этот вольтметр, если подключить его к выводам R_1, и какова погрешность, обусловленная конечным входным сопротивлением прибора?

Решение. На шкале 5,0 В входное сопротивление вольтметра составит (5,0 В)(10 000 Ом/В) = 50 000 Ом. Входное сопротивление вольтметра (50 кОм) включается параллельно резистору $R_1 =$ = 15 кОм (рис. 27.14, *в*); их общее сопротивление R определяется из равенства $1/R = 1/(50\ \text{кОм}) + 1/(15\ \text{кОм}) = 13/(150$ кОм), откуда $R = 11{,}5$ кОм. Это сопротивление включено последовательно с $R_2 = 15$ кОм, и общее сопротивление цепи после подключения вольтметра составляет 26,5 кОм. Сила тока, текущего от батареи, равна $I = 8{,}0$ В/26,5 кОм = 0,30 мА, и падение напряжения на резисторе R_1 и на вольтметре составит $(3{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{А}) \times$ $\times (11{,}5 \cdot 10^3\ \text{Ом}) = 3{,}5$ В. [Падение напряжения на R_2 равно $(3{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{А})$ (15 × $\times 10^3$ Ом) = 4,5 В, и в сумме получается 8,0 В.] Если вольтметр точный, то он покажет 3,5 В. В схеме же без вольтметра $R_1 = R_2$ и напряжение на R_1 равно половине напряжения батареи, или 4,0 В. Получается, что конечное сопротивление вольтметра приводит к заниженным показаниям. В данном случае расхождение составляет 0,5 В, или свыше 10%.

[1] В отечественной литературе чувствительностью называют отношение перемещения указателя к вызвавшему его изменению измеряемой величины.– *Прим. перев.*

Этот пример показывает, насколько серьезно прибор может влиять на цепь и давать ошибочный результат. Если входное сопротивление вольтметра существенно превышает сопротивление цепи, то его влияние будет незначительным, и результатам измерения можно доверять, по крайней мере в пределах класса точности прибора, который для обычных измерительных приборов соответствует погрешности 3–4% предела измерения. Амперметр также может влиять на цепь, но его влияние тем меньше, чем ниже внутреннее сопротивление прибора. Как для вольтметра, так и для амперметра влияние прибора тем меньше, чем выше чувствительность используемого в нем гальванометра. Прибор с чувствительностью 50 000 Ом/В гораздо лучше, чем прибор с чувствительностью 1000 Ом/В.

Чувствительность электронных измерительных приборов на транзисторах составляет 10^6–10^7 Ом/В. Поэтому они очень слабо влияют на большинство цепей, и их показания почти всегда надежны. Входное сопротивление вольтметров с очень высокой чувствительностью (*электрометров*) может превышать 10^{14} Ом.

* 27.8. Потенциометр

Потенциометр – это устройство для точного измерения разности потенциалов. В нем используется «нулевой» метод измерения, описываемый ниже; особое достоинство метода заключается в том, что при измерении напряжения *не отбирается ток* в измерительную цепь. Это позволяет непосредственно измерять ЭДС (падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника отсутствует). Подобное измерение не влияет и на распределение токов в исследуемой цепи.

Упрощенная схема потенциометра приведена на рис. 27.15. Свежая батарея («батарея питания») включена последовательно с переменным резистором R_v ~~~ , с помощью которого подбирается подходящее напряжение между точками A и B. Благодаря разности потенциалов V между точками A и B через прецизионный резистор R' со скользящим контактом C течет постоянный ток. Резистор R' может представлять собой просто однородный провод (реохорд), по которому скользит контакт C, что позволяет изменять величину сопротивления между A и C[1]. Измеряемая ЭДС $\mathscr{E}_x$ включается, как показано на схеме;

[1] В качестве R' используют также набор прецизионных резисторов с выведенными на панель клеммами («магазин сопротивлений») плюс переменный резистор, что обеспечивает точные значения R в широком диапазоне.

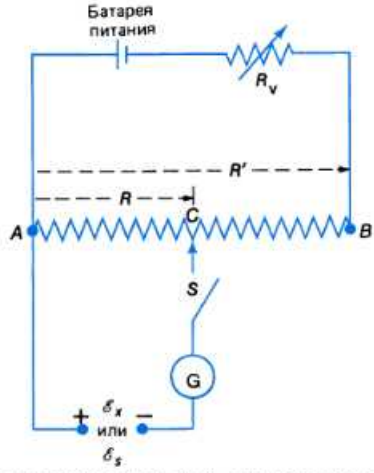


Рис. 27.15. Потенциометр.

контакт реохорда перемещают до тех пор, пока стрелка гальванометра не перестанет отклоняться при кратковременном замыкании ключа S. В этом положении контакта ток от источника неизвестной ЭДС равен нулю, и, значит, напряжение между точками A и C равно $\mathscr{E}_x$:

$$V_{AC} = \mathscr{E}_x.$$

Это равенство справедливо только при условии, что сила тока через гальванометр равна нулю, так как в противном случае наблюдалось бы падение напряжения на внутренних сопротивлениях гальванометра и источника неизвестной ЭДС. Сила тока I через R', конечно, не равна нулю, и если обозначить через R_x сопротивление между точками A и C реохорда R' в «нулевом» положении скользящего контакта, то

$$\mathscr{E}_x = IR_x.$$

Затем необходимо произвести еще одно измерение, подключив к прибору «стандартный элемент» – источник, ЭДС которого $\mathscr{E}_s$ известна с высокой точностью. (От стандартного элемента никогда нельзя брать ток, так как это со временем скажется на его ЭДС.) Контакт переводят в новое положение C', в котором гальванометр вновь не регистрирует тока; в этом положении

$$\mathscr{E}_s = IR_s$$

(где R_s – сопротивление между A и C'), поскольку через R' протекает ток той же самой силы I. Тогда

$$\frac{\mathscr{E}_x}{\mathscr{E}_s} = \frac{IR_x}{IR_s} = \frac{R_x}{R_s},$$

или

$$\mathscr{E}_x = \left(\frac{R_x}{R_s}\right)\mathscr{E}_s.$$

(Если R' представляет собой однородную проволоку, то отношение R_x/R_s равно отношению длин AC/AC'.)

Следует отметить, что потенциометром нередко называют и просто переменный резистор (переменное сопротивление).

* 27.9. Мост Уитстона

Мост Уитстона является, пожалуй, самой распространенной из так называемых *мостовых схем*, используемых для точного измерения сопротивлений (рис. 27.16). Сопротивления R_1, R_2, R_3 трех плеч моста известны с высокой точностью; по крайней мере одно из них (R_3 на схеме рис. 27.16) делается переменным; его значение обычно считывается по шкале. Измеряемое сопротивление R_x образует четвертое плечо моста. После подключения батареи через каждый резистор течет ток. Для измерения неизвестного сопротивления переменное сопротивление R_3 изменяют до тех пор, пока точки B и D не будут иметь одинаковый потенциал (при этом стрелка гальванометра не будет отклоняться при кратковременном замыкании ключа S). Мост, как говорят в этом случае, уравновешен (сбалансирован), $V_{AB} = V_{AD}$, или

$$I_3 R_3 = I_1 R_1$$

(I_1 – сила тока, текущего через R_1 и R_2 в уравновешенном мосте, I_3 – сила тока через R_3 и R_x). В уравновешенном мосте падение напряжения на R_x равно падению напряжения на R_2, т. е.

$$I_3 R_x = I_1 R_2 .$$

Разделив полученные равенства одно на другое, имеем

$$\frac{I_3 R_x}{I_3 R_3} = \frac{I_1 R_2}{I_1 R_1},$$

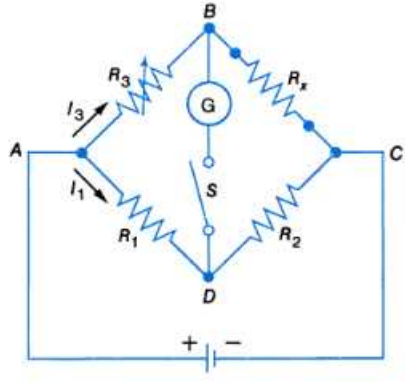


Рис. 27.16. Мост Уитстона.

или

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 .$$

По этой формуле нетрудно рассчитать R_x, зная с высокой точностью сопротивления остальных плеч моста. Обычно применяются гальванометры очень высокой чувствительности, и при подстройке R_3 ключ замыкают лишь на короткое время, чтобы проверить, идет ток через гальванометр или нет.

Мост Уитстона часто используется в тех случаях, когда требуется измерить сопротивление с высокой точностью, например в термометре сопротивления (пример 26.4).

* 27.10. Датчики и преобразователи. Термопары

Преобразователем называют устройство, преобразующее один вид энергии в другой. Примером может служить громкоговоритель: он преобразует электрическую энергию в звуковую (гл. 28); преобразователем является и микрофон, превращающий звук в электрические сигналы.

Преобразователи часто используются для различных измерений; измеряемая величина при этом преобразуется обычно в электрический сигнал. Уже упоминавшиеся ранее *термометры сопротивления* и *термисторы* можно рассматривать как преобразователи изменений температуры в изменения электрической характеристики сопротивления.

Рассмотрим еще несколько видов преобразователей, нашедших широкое применение. Позднее нам встретятся и другие преобразователи.

Измерительные преобразователи называют также *датчиками*. Действие *тензодатчика* (датчика механических деформаций) (рис. 27.17) основано на том, что растяжение проволоки пропорционально приложенной к ней силе (или механическому напряжению). Когда проволоку растягивают, ее сопротивление увеличивается, так как увеличивается ее длина и уменьшается площадь сечения [см. уравнение (26.4)]. Тонкая проволока в тензодатчике обычно наклеивается на эластичную подложку. Тензодатчик плотно прикрепляется к исследуемой конструкции, и его сопротивление прямо зависит от механических напряжений, возникающих в конструкции. Поскольку растяжение проволоки не должно превышать предела упругости, изменения ее длины невелики. Поэтому и изменения сопротивления тоже очень малы (порядка десятых долей процента), и для их измерений используется очень чувствительный мост Уитстона. Разумеется, перед использованием тензодатчики тщательно

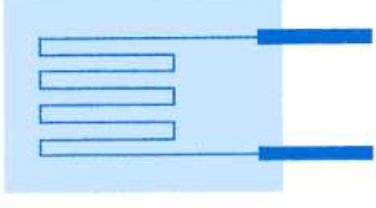


Рис. 27.17. Тензодатчик.

калибруются. Архитекторы и инженеры устанавливают тензодатчики на моделях различных сооружений и конструкций, чтобы исследовать механические напряжения в критических точках.

Проволочный тензодатчик может также быть прикреплен к гибкой мембране. При изменении давления на мембрану в проволоке возникают деформации; это позволяет измерять давление. Подобный преобразователь называют *датчиком давления*. Тензодатчик можно сделать очень маленьким (шириной всего 2–3 мм). Измеритель давления на базе крошечного тензодатчика встраивают в пилюлю и измеряют давление в желудке человека либо вводят в артерию или вену, чтобы измерять давление в кровеносных сосудах. В подобных случаях изменение температуры также влияет на сопротивление, и для компенсации в схему вводят точно такой же тензодатчик, который не подвергается механической деформации и реагирует только на изменение температуры.

Существуют датчики давления, основанные на *пьезоэлектрическом эффекте*. Некоторые кристаллы (например, кристаллы кварца) поляризуются (разд. 25.5 и 25.7) при механической деформации, и возникает ЭДС, пропорциональная приложенной силе. Пьезокристаллы используются в некоторых типах звукоснимателей электропроигрывателей: механическое перемещение иглы преобразуется ими в электрический сигнал (ЭДС).

Термопара преобразует в электрический сигнал разность температур. В отличие от термометра сопротивления (где от температуры зависит сопротивление датчика) в термопаре возникает ЭДС. Термопары относятся к самым распространенным датчикам температуры. Действие термопары основано на термоэлектрическом эффекте: если соединить концами два провода из разных металлов, например из железа и меди (рис. 27.18)[1], то,

Рис. 27.18. Термопара.

[1] Согласно теории, это обусловлено тем, что электроны в одном металле занимают более низкие энергетические состояния, чем в другом, и поэтому часть электронов переходит через спай: один из металлов оказывается положительно заряженным относительно другого и возникает *контактная разность потенциалов*. Если оба спая имеют одинаковую температуру, то и контактные разности потенциалов одинаковы; они взаимно компенсируются, и ток в термопаре не течет. Если же спаи имеют разную температуру, то энергетические состояния изменятся и контактные разности потенциалов окажутся различными. Возникнет результирующая ЭДС, и в термопаре потечет ток.

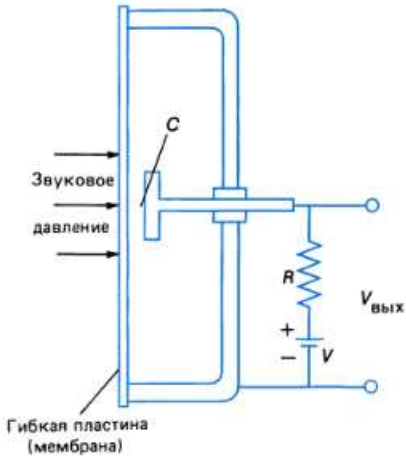


Рис. 27.19. Конденсаторный микрофон.

если места соединения проводников (спаи) находятся при разных температурах, возникает «термо-ЭДС». Величина термо-ЭДС зависит от разности температур. При использовании термопары в качестве термометра один («холодный») спай поддерживается при постоянной температуре (часто это температура тающего льда, 0 °C). Другой («измерительный», «горячий») спай термопары помещают туда, где необходимо измерить температуру. Возникающая термо-ЭДС измеряется с высокой точностью при помощи потенциометра. Важно, чтобы клеммы потенциометра были сделаны из одного и того же металла и находились при одинаковой температуре, чтобы они не стали источником дополнительной ЭДС. Спаи термопары часто подключают с помощью соединительных проводов, и эти места соединений тоже должны иметь одинаковую температуру.

В термопарах используются различные сочетания металлов; зависимость термо-ЭДС от температуры для разных металлов и различных температур холодного спая приводится в таблицах. Для небольших интервалов температур термо-ЭДС пропорциональна разности температур холодного и горячего спаев, однако в широком диапазоне температур линейность не обязательно имеет место, и следует обращаться к таблицам. Погрешности в измерениях могут также возникать из-за теплопроводности проводников термопары, что влияет на температуру измерительного спая.

Микрофон преобразует звуковые волны в электрический сигнал. Одна из конструкций микрофона (конденсаторный, или емкостный, микрофон) показана на рис. 27.19. Под действием звуковой волны мембрана микрофона, представляющая собой одну из обкладок конденсатора C, колеблется. Как говорилось в гл. 25, емкость конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между обкладками. Таким образом, под действием звуковой волны

изменяется емкость конденсатора, это в свою очередь приводит к изменению заряда Q на его обкладках ($Q = CV$), и возникает электрический ток, воспроизводящий изменения звуковой волны.

Заключение

При последовательном соединении резисторов их общее сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных резисторов. При параллельном соединении величина, обратная общему сопротивлению, равна сумме обратных сопротивлений каждого резистора. При параллельном соединении общее сопротивление меньше сопротивления любого из резисторов.

Батарею можно представить как источник ЭДС, включенный последовательно с внутренним сопротивлением батареи. ЭДС батареи – это разность потенциалов, обусловленная химическими процессами внутри батареи и равная напряжению на клеммах батареи, когда ток во внешней цепи равен нулю. Когда ток во внешней цепи не равен нулю, напряжение на клеммах батареи будет меньше ЭДС на величину, равную падению напряжения Ir на внутреннем сопротивлении батареи.

Правила Кирхгофа позволяют рассчитать силы тока и падения напряжения в сложных цепях. Первое правило Кирхгофа (правило узлов) вытекает из закона сохранения электрического заряда и утверждает, что сумма сил токов, втекающих в любой узел цепи, равна сумме сил токов, вытекающих из этого узла. Второе правило Кирхгофа (правило контуров) основано на законе сохранения энергии и гласит, что алгебраическая сумма изменений напряжения по любому замкнутому контуру (цепи) равна нулю.

Когда цепь, содержащая последовательно соединенные резистор R и конденсатор C, подключается к источнику постоянной ЭДС, напряжение на конденсаторе постепенно возрастает по экспоненциальному закону $(1 - e^{-t/RC})$, где постоянная времени RC равна времени, за которое напряжение на конденсаторе достигает 63% максимального значения. Разряд конденсатора через резистор характеризуется такой же постоянной времени: за время, равное RC, напряжение на конденсаторе падает до 37% первоначального значения. Заряд конденсатора, напряжение на конденсаторе и сила тока через резистор убывают по закону $e^{-t/RC}$.

Вопросы

1. Назовите достоинства и недостатки последовательного и параллельного соединений лампочек в елочной гирлянде.
2. Можно ли включить несколько 6-вольтовых лампочек в сеть напряжением 120 В так, чтобы они не перегорели? Каким образом?
3. Сравните и обсудите формулы для последовательного и параллельного соединений резисторов и конденсаторов (разд. 25.3).
4. Две электрические лампочки с сопротивлениями R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) соединены последовательно. Какая из них будет гореть ярче? А если соединить их параллельно?
5. Объясните различие между ЭДС и разностью потенциалов.
6. Может ли резистор обладать ЭДС?

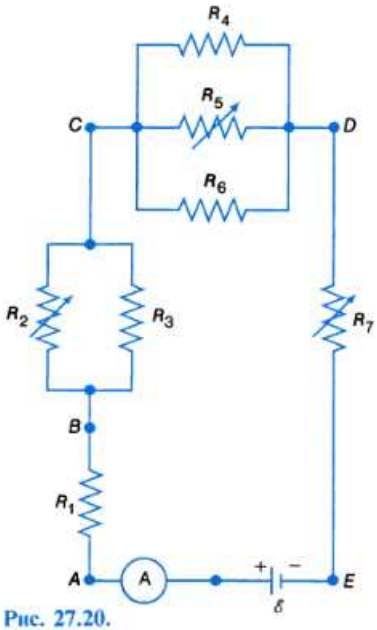


Рис. 27.20.

7. Внутреннее сопротивление гальванического элемента в действительности непостоянно. Почему?

8. Объясните, почему первое правило Кирхгофа (правило узлов) эквивалентно закону сохранения электрического заряда.

9. Объясните, почему второе правило Кирхгофа (правило контуров) является следствием закона сохранения энергии.

10. Как следует видоизменить правило узлов Кирхгофа, чтобы его можно было применять к точке, где может накапливаться заряд (например, одной обкладке конденсатора)?

11. На рис. 27.20 изображена цепь. Закончите следующие утверждения словами «увеличивается», «уменьшается», «не изменяется»:

а) если R_7 увеличивается, то разность потенциалов между A и E (считая, что сопротивления амперметра и источника равны нулю) ...;

б) если R_7 увеличивается, то разность потенциалов между A и E (считая, что амперметр и источник обладают сопротивлением) ...;

в) если R_7 увеличивается, то падение напряжения на R_4 ...;

г) если R_2 уменьшается, то сила тока через R_1 ...;

д) если R_2 уменьшается, то сила тока через R_6 ...;

е) если R_2 уменьшается, то сила тока через R_3 ...;

ж) если R_5 увеличивается, то падение напряжения на R_2 ...;

з) если R_5 увеличивается, то падение напряжения на R_4 ...;

и) если R_2, R_5 и R_7 увеличиваются, то $\mathcal{E}$ ... .

12. Для чего батареи соединяют последовательно? параллельно? Важно ли в каждом случае, чтобы батареи были практически идентичны?

13. Почему в формуле (27.7) стоит знак минус? Другими словами, почему ток разряда конденсатора считается отрицательным?

14. На рис. 27.21 источник напряжением 18 В заряжает 12-вольтовую батарею. Объясните, как это происходит.

15. Предложите метод измерения внутреннего сопротивления батареи.

16. Может ли напряжение на клеммах батареи превышать ее ЭДС? Объясните.

17. Зависит ли знак, с которым ЭДС батареи войдет в сумму при применении правила контуров Кирхгофа (например, на рис. 27.21), от направления тока через батарею?

*18. В чем основное различие между вольтметром и амперметром?

*19. Объясните, почему сопротивление идеального амперметра равно нулю, а идеального вольтметра – бесконечности.

*20. В чем преимущество потенциометра перед вольтметром? В чем преимущество вольтметра перед потенциометром?

*21. Объясните, почему «нулевой» метод измерения обеспечивает в принципе более высокую точность, чем измерение с отсчетом по шкале?

*22. Предположим, что батарея, питающая мост Уитстона, немного «села» и напряжение на ее клеммах уменьшилось. Повлияет ли это на результат измерения сопротивления?

Задачи

Если внутреннее сопротивление батареи не указано в условии, им следует пренебречь.

Раздел 27.1

1. (I) Пять ламп с сопротивлением по 30 Ом соединены последовательно. Чему равно их

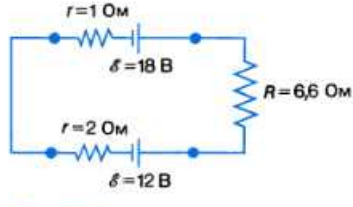


Рис. 27.21.

общее сопротивление? Чему равно их общее сопротивление при параллельном соединении?

2. (I) Имеются три резистора с сопротивлениями 600, 800 Ом и 1,2 кОм. Какое а) наибольшее и б) наименьшее сопротивление можно составить из них?

3. (I) Пусть имеется батарея на 6,0 В, а вам необходимо напряжение 2,1 В. Как можно соединить резисторы, чтобы получился «делитель напряжения», дающий на выходе 2,1 В при напряжении на входе 6,0 В?

4. (II) Три одинаковых резистора по 200 Ом можно соединить четырьмя способами, комбинируя параллельное и последовательное соединения. Нарисуйте схемы соединений и рассчитайте общее сопротивление во всех четырех случаях.

5. (II) Чему равно общее сопротивление цепи, подключенной к батарее на рис. 27.22? Сопротивление каждого резистора $R = 2{,}1$ кОм.

6. (II) Восемь ламп, соединенных последовательно, подключены к сети напряжением 120 В двумя проводами с общим сопротивлением 1,7 Ом. Чему равно сопротивление каждой лампы и какая доля общей мощности рассеивается в проводах, если через каждую лампу идет ток 120 мА?

7. (II) Елочная гирлянда на напряжение 120 В состоит из восьми лампочек по 8,0 Вт, соединенных последовательно. Чему равно сопротивление каждой лампочки?

8. (II) Пусть сопротивление человеческого тела составляет 900 Ом. а) Какой силы ток потечет через тело человека, случайно прикоснувшегося к клеммам источника напряжением 100 В? б) Какой силы ток потечет через тело человека, если, разветвляясь, ток частично уходит в землю через сопротивление 20 Ом? в) Какой силы ток потечет через тело человека в случае п. «б», если источник может отдавать ток не более 1,2 А?

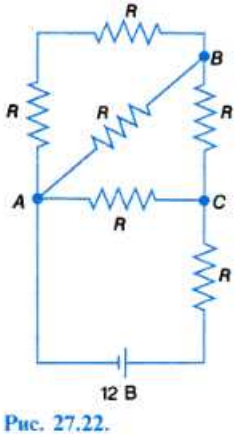


Рис. 27.22.

9. (II) Два резистора, включенные последовательно в сеть 120 В, рассеивают вчетверо меньшую мощность, чем при их параллельном соединении. Если сопротивление одного резистора $R = 1{,}8$ кОм, то чему равно сопротивление другого резистора?

10. (II) Лампа с тремя выводами при включении в сеть 120 В может иметь мощность 50, 100 и 150 Вт. Лампа имеет две спирали, которые включаются в сеть либо по отдельности, либо параллельно. Нарисуйте схему включения спиралей, отвечающую каждой из мощностей. Чему равно сопротивление каждой спирали?

11. (II) Лампа на 120 В, 75 Вт включена параллельно лампе на 120 В, 40 Вт. Чему равно их общее сопротивление?

12. (II) Предположим, что необходимо включить электрический прибор на расстоянии 200 м от розетки. Сопротивление единицы длины каждого из двух проводов, соединяющих прибор с розеткой, равно 0,0055 Ом/м. Если напряжение сети 120 В, а прибор потребляет ток силой 3,2 А, то чему равно падение напряжения в подводящих проводах и какое напряжение будет приложено к прибору?

13. (II) Резисторы 1,2 и 1,8 кОм соединены параллельно; последовательно с ними включен резистор 1,9 кОм. Какое наибольшее напряжение можно приложить к этой цепочке, если допустимая мощность рассеяния каждого резистора равна 0,5 Вт?

14. (II). Сколько одинаковых резисторов мощностью 0,5 Вт потребуется, чтобы составить эквивалентный резистор на 5 Вт с сопротивлением 1,2 кОм? Каким должно быть сопротивление каждого резистора и как их следует соединить?

15. (II) Рассчитайте силу тока через каждый резистор на рис. 27.22, если $R = 2{,}10$ кОм. Чему равна разность потенциалов между точками A и B?

Раздел 27.2

16. (I) Батарея с ЭДС 6,0 В и внутренним сопротивлением 0,50 Ом подключена к цепи с общим сопротивлением 11,6 Ом. Чему равно напряжение на клеммах батареи?

17. (I) Четыре элемента по 1,5 В подключены последовательно к устройству с сопротивлением 9,2 Ом. Внутреннее сопротивление каждого элемента 0,30 Ом. Какой силы ток потребляет устройство?

18. (I) Чему равно внутреннее сопротивление 12-вольтового автомобильного аккумулятора, если напряжение на его клеммах падает до 7,8 В при включении стартера, потребляющего ток силой 70 А?

19. (I) Гальванический элемент с ЭДС, равной 1,5 В, можно проверить, подключив его на короткое время к амперметру с малым внутренним сопротивлением. Исправный элемент должен обеспечивать силу тока не менее 30 А. Чему равно внутреннее сопротивление такого элемента?

20. (II) Внутреннее сопротивление ртутного элемента с ЭДС, равной 1,35 В, составляет 0,030 Ом, а внутреннее сопротивление сухого элемента с ЭДС, равной 1,5 В, составляет 0,35 Ом. Объясните, почему три ртутных элемента будут лучше работать в слуховом аппарате мощностью 2 Вт, рассчитанном на напряжение питания 4,0 В, чем три сухих элемента?

21. (II) Чему равна сила тока через резистор 8,0 Ом на рис. 27.5, *а*?

22. (II) Напряжение на клеммах батареи равно 50,0 В при силе тока во внешней цепи 5,5 А и 58,2 В при силе тока 1,8 А. Чему равны ЭДС и внутреннее сопротивление батареи?

Раздел 27.3

23. (I) Определите напряжение на клеммах каждой батареи на рис. 27.21.

24. (I) Чему равна разность потенциалов между точками *a* и *d* на рис. 27.6?

25. (II) Чему равно напряжение на клеммах каждой батареи на рис. 27.6?

26. (II) Определите силу тока через каждый из резисторов на рис. 27.23.

27. (II) Если резистор 30 Ом на рис. 27.23 замкнуть накоротко (сопротивление равно нулю), то какой будет сила тока через резистор 10 Ом?

28. (II) Определите силы тока I_1, I_2, I_3 на рис. 27.24. Внутреннее сопротивление каждой батареи $r = 1{,}0$ Ом. Чему равно напряжение на клеммах батареи с ЭДС 6,0 В?

29. (II) Чему равна сила тока I_1 на рис. 27.24, если замкнуть накоротко резистор 12,0 Ом (внутреннее сопротивление батарей $r = 1{,}0$ Ом)?

Раздел 27.5

30. (II) В стимуляторе сердца, задающем ритм сокращений 70 ударов в минуту, установлен конденсатор емкостью 9,0 мкф. Каким должно быть сопротивление в *RC*-цепочке, чтобы стимулятор давал импульс (при котором происходит разряд конденсатора), когда напряжение на конденсаторе достигает 25% максимального?

31. (II) Два резистора и два незаряженных конденсатора образуют цепь, показанную на рис. 27.25. К цепи прикладывают разность потенциалов 24 В. а) Чему равен потенциал точки *a*, когда ключ *S* разомкнут? (Потенциал отрицательного полюса источника примите за нуль.) б) Чему равен потенциал точки *b*, когда ключ разомкнут? в) Каков конечный потенциал точки *b* после замыкания ключа? г) Какой заряд протекает через ключ *S* после замыкания? д) Чему равна постоянная времени цепочки при разомкнутом ключе?

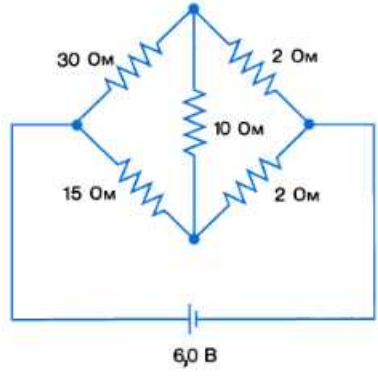


Рис. 27.23.

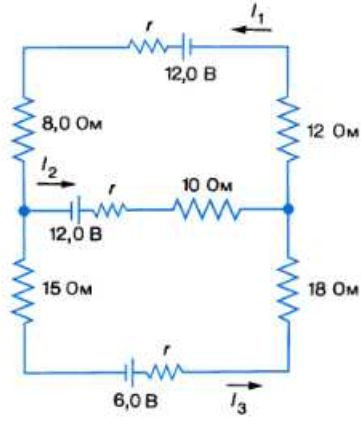


Рис. 27.24.

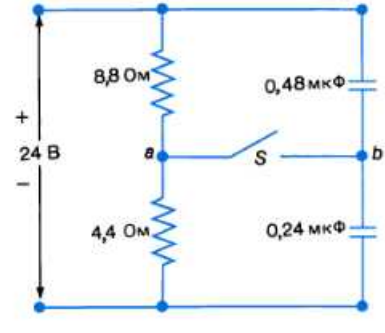


Рис. 27.25.

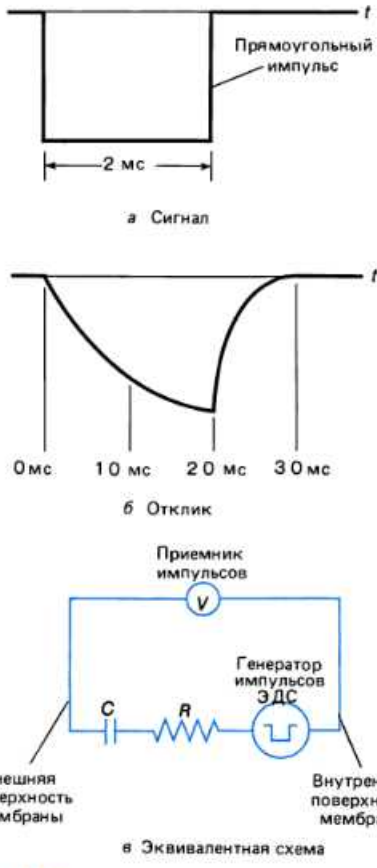


Рис. 27.26.

32. (II) Спустя какое время энергия конденсатора в последовательной RC-цепочке (рис. 27.10, *а*) достигнет половины своего максимального значения? Выразите ответ через постоянную времени $\tau = RC$.

33. (II) Два конденсатора по 6,0 мкФ, два резистора по 2,2 кОм и батарея с ЭДС 12,0 В соединены последовательно. Через какое время после подключения батареи сила тока упадет от начального значения до 1,20 мА?

34. (II) В опытах с нервными клетками и клетками мышечной ткани внутрь клетки вводят два близко расположенных электрода. Один электрод служит генератором прямоугольных импульсов, другой – приемником. Формы переданного и принятого сигналов показаны соответственно на рис. 27.26, *а* и *б*. Электрические свойства клетки в таком опыте могут быть представлены эквивалентной схемой (рис. 27.26, *в*), где C – емкость клеточной мембраны, R – сопротивление клеточной мембраны, электрод-генератор служит источником

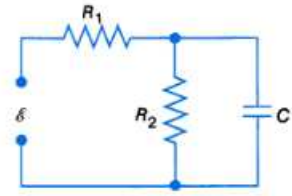


Рис. 27.27.

ЭДС, а приемный электрод – вольтметром. а) По форме регистрируемого сигнала оцените постоянную времени клетки. б) Чему равна емкость мембраны C, если ее площадь составляет примерно 10^{-7} м^2, толщина 10^{-8} м, а диэлектрическая проницаемость равна 3? в) Пользуясь результатами пп. «а» и «б», рассчитайте величину R.

35. (III) а) Определите постоянную времени заряда конденсатора в цепи на рис. 27.27. (Подсказка: воспользуйтесь правилами Кирхгофа.) б) Чему равен максимальный заряд на конденсаторе?

36. (III) а) Определите постоянную времени заряда конденсатора в цепи на рис. 27.28. (Подсказка: воспользуйтесь правилами Кирхгофа.) б) Чему равен максимальный заряд на конденсаторе?

37. (III) Пусть ключ на рис. 27.25 замкнут. Чему равна постоянная времени (или постоянные времени) зарядки конденсаторов?

* Раздел 27.6

***38.** (I) Чувствительность амперметра равна 5000 Ом/В. Какой силе тока соответствует полное отклонение примененного в нем гальванометра?

***39.** (I) Каково входное сопротивление вольтметра на шкале 50 В, если чувствительность прибора равна 30 000 Ом/В?

***40.** (II) Чувствительность гальванометра рав-

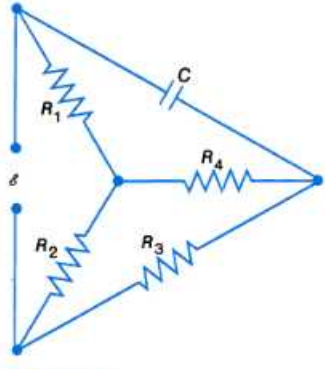


Рис. 27.28.

на 50 000 Ом/В, а внутреннее сопротивление 24 Ом. Как превратить его а) в амперметр со шкалой на 10 мА; б) в вольтметр со шкалой на 100 мВ?

*41. (II) Как сделать амперметр со шкалой 10 А из гальванометра, стрелка которого отклоняется до конца шкалы при силе тока 200 мкА и напряжении 10 мВ?

*42. (II) Имеется миллиамперметр со шкалой на 10 мА. Он состоит из гальванометра с сопротивлением 30 Ом, зашунтированного резистором 0,20 Ом. Как переделать его в вольтметр со шкалой на 10 В, не разбирая прибор? Какой будет чувствительность (в единицах Ом/В) вольтметра?

*43. (II) Внутреннее сопротивление гальванометра равно 30 Ом; сила тока, отвечающая полному отклонению, равна 60 мкА. Что нужно сделать, чтобы превратить его а) в амперметр для измерения токов силой до 15 А; б) в вольтметр со шкалой на 3000 В?

*Раздел 27.7

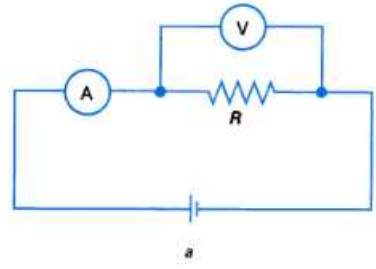
*44. (II) Батарея с ЭДС 45 В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением подключена к последовательно соединенным резисторам 37 и 22 кОм. Что покажет вольтметр с входным сопротивлением 100 кОм при измерении падения напряжения на каждом из резисторов? Какова в каждом случае погрешность (в процентах), обусловленная конечным входным сопротивлением вольтметра?

*45. (II) Амперметр с внутренним сопротивлением 90 Ом показывает 1,60 А при включении в цепь, содержащую батарею и два последовательно соединенных резистора 300 и 500 Ом. Какова сила тока в цепи в отсутствие амперметра?

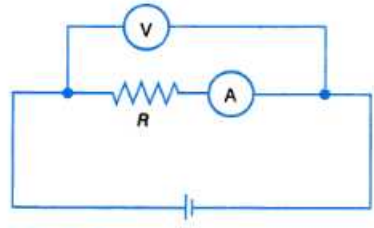
*46. (II) Батарея с $\mathcal{E} = 9{,}0$ В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}2$ Ом подключена к двум последовательно соединенным резисторам по 5,0 кОм. Цепь содержит также амперметр с внутренним сопротивлением 0,50 Ом, измеряющий силу тока в цепи, и вольтметр с внутренним сопротивлением 15 кОм, измеряющий падение напряжения на одном из резисторов. Каковы показания приборов?

*47. (II) Два резистора по 5,9 кОм соединены последовательно и подключены к батарее. Вольтметр с чувствительностью 1000 Ом/В показывает 2,0 В на шкале 3,0 В при включении параллельно любому из резисторов. Чему равна ЭДС батареи? (Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.)

*48. (II) Каким внутренним сопротивлением должен обладать вольтметр, чтобы вносимая им погрешность в примере 27.5 не превышала 3%?



а



б

Рис. 27.29.

49. (II) а) Чтобы измерить сопротивление R, можно воспользоваться амперметром и вольтметром, включенными, как показано на рис. 27.29, *а*. Значение R не будет в точности равно V/I, где V – показание вольтметра, а I – показание амперметра, так как часть тока идет через вольтметр. Покажите, что истинное значение R дается выражением

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{V} - \frac{1}{R_V},$$

где R_V – сопротивление вольтметра. Заметим, что $R \approx V/I$, если $R_V \gg R$. б) Вольтметр и амперметр можно также включить, как показано на рис. 27.29, *б*. Покажите, что в этом случае

$$R = \frac{V}{I} - R_A,$$

где V и I – показания вольтметра и амперметра, а R_A – сопротивление амперметра. Заметим, что $R \approx V/I$, если $R \gg R_A$.

50. (II). Падение напряжения на резисторе 120 кОм в цепи, содержащей добавочное сопротивление R_2, последовательно подключенное к батарее с напряжением V, измеряется вольтметром с чувствительностью 20 000 Ом/В. Показания вольтметра составляют 25 В на шкале 100 В и 23 В на шкале 30 В. Чему равно истинное падение напряжения в отсутствие вольтметра? Чему равно R_2?

*51. (II) Один из типов омметра представляет собой амперметр, соединенный с добавочным сопротивлением и батареей (рис. 27.30). Шкала омметра отличается от шкал амперметра и

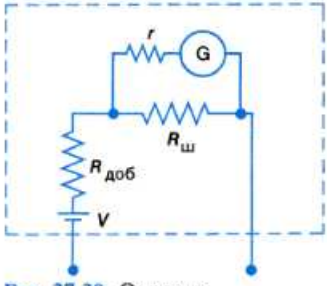


Рис. 27.30. Омметр.

вольтметра. Нуль сопротивления соответствует полному отклонению стрелки (так как в этом случае сила тока, отбираемого от батареи, максимальна); бесконечное сопротивление соответствует нулевому отклонению стрелки, так как ток через амперметр не течет. Пусть в омметре используется батарея с напряжением 9,0 В; внутреннее сопротивление гальванометра 30 Ом, а сила тока, отвечающая полному отклонению, равна 30 мкА. Каким должно быть сопротивление шунта $R_ш$ и добавочное сопротивление $R_{доб}$, чтобы стрелка омметра устанавливалась посередине шкалы при измерении сопротивления 30 кОм? [Примечание. В омметр вводится последовательно с прибором также регулируемое сопротивление для установки нуля (максимального отклонения стрелки). При измерениях «нуль» омметра следует достаточно часто проверять, соединяя накоротко его выводы, поскольку напряжение батареи может изменяться. Из-за непостоянства напряжения батареи подобные омметры не являются прецизионными приборами, но для приближенных измерений они довольно удобны.]

*52. (II) Батарея с ЭДС 9,0 В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}0$ Ом подключена к двум последовательно соединенным резисторам. Вольтметр с внутренним сопротивлением 10,0 кОм показывает при подключении параллельно каждому из резисторов падения напряжения соответственно 3,0 и 4,0 В. Чему равно сопротивление каждого резистора?

*Раздел 27.8

*53. (I) Потенциометр с реохордом длиной 100,0 см сбалансирован при подключении стандартного элемента с ЭДС 1,0182 В, когда его контакт установлен на отметке 40,2 см. При подключении неизвестной ЭДС потенциометр балансируется при установке контакта на отметке 11,9 см. Чему равна измеряемая ЭДС?

*54. (I) Гальванометр потенциометра имеет внутреннее сопротивление 40 Ом и способен регистрировать ток 0,015 мА. С какой минимальной неопределенностью можно измерить ЭДС?

*55. (II) Однородный реохорд потенциометра длиной 30,00 см имеет сопротивление 3,224 Ом. При подключении стандартного источника с ЭДС 1,0183 В потенциометр балансируется при положении контакта на отметке 22,40 см. При подключении неизвестной ЭДС баланс достигается, только когда резистор 9,050 Ом, который прежде был включен между рабочей батареей и точкой A на рис. 27.15, теперь включается слева последовательно с реохордом, а контакт реохорда устанавливается на отметке 14,16 см. Чему равна измеряемая ЭДС?

*56. (II) Потенциометр балансируется при подключении гальванического элемента путем установки контакта на отметке 48,0 см. Если параллельно клеммам элемента подключить резистор 5,0 Ом, то баланс наступает при установке контакта на отметке 44,0 см. Чему равно внутреннее сопротивление элемента?

*Раздел 27.9

*57. (I) На рис. 27.31 показан мост Уитстона с реохордом. Чему равно R_x, если гальванометр дает нулевой отсчет при $R_3 = 34{,}5$ Ом и $AC = 28{,}2$ см, $CB = 71{,}8$ см? Считайте провод реохорда однородным по длине.

*58. (II) В качестве измеряемого сопротивления в мост Уитстона включается отрезок платиновой проволоки диаметром 1,2 мм. Постоянные плечи моста имеют сопротивления 36,0 и 84,0 Ом. Мост балансируется, когда сопротивление третьего плеча R_3 равно 4,16 Ом. Какова длина платиновой проволоки?

*Раздел 27.10

*59. (I) Удельная термо-ЭДС термопары медь–константан составляет около 40 мкВ/°С. Чему

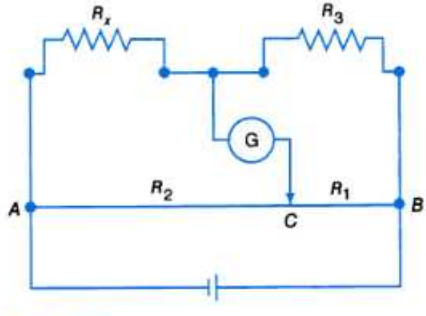


Рис. 27.31. Мост Уитстона с реохордом.

равна температура рабочего спая, если температура холодного спая поддерживается равной 25 °C, а измеренная ЭДС равна 1,72 мВ?

*60. (I) В области температур вблизи комнатной удельная термо-ЭДС термопары медь–железо составляет 14 мкВ/°C. С какой точностью можно измерять температуру термопарой с потенциометром, способным регистрировать изменение ЭДС на 0,50 мкВ?

*61. (II) ЭДС термопары можно представить в виде $\mathcal{E} = aT + bT^2$, где T–измеряемая температура (в градусах Цельсия), a и b–постоянные, и температура холодного спая равна 0 °C. При линейной зависимости постоянная b равна нулю (обычно она очень мала). а) Определите значения a и b, если $\mathcal{E} = 3{,}62$ мВ при $T = 80$ °C и $\mathcal{E} = 6{,}80$ мВ при $T = 170$ °C. б) Чему равна измеряемая температура, если $\mathcal{E} = 4{,}90$ мВ?

*62. (II) *Коэффициент сопротивления* K тензодатчика определяется как отношение относительного изменения сопротивления ($\Delta R/R$) к относительному изменению длины:

$$K = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L},$$

и при данной температуре он относительно постоянен. Другими словами, изменение сопротивления ΔR пропорционально растяжению провода ΔL. а) Покажите, что зависимость должна быть линейной при не слишком больших $\Delta L/L$. б) Тензодатчик с $K = 1{,}8$ прикреплен поперек небольшой мышцы шириной 4,5 мм. Тензодатчик включен в неизвестное плечо моста Уитстона. Когда мышца расслаблена, мост балансируется при $R_2/R_1 = 1{,}4800$ и $R_3 = 40{,}700$ Ом. При сокращении мышцы мост балансируется при $R_3 = 40{,}736$ Ом. Насколько увеличивается ширина мышцы?

28 Магнетизм

Сегодня нам совершенно ясно, что между магнетизмом и электричеством существует тесная связь, однако впервые ее обнаружили лишь в прошлом веке. История же магнетизма уходит корнями в глубокую древность, к античным цивилизациям Малой Азии. Именно на территории Малой Азии, в Магнезии, находили горную породу, образцы которой притягивали друг друга. По названию местности такие образцы и стали называть «магнитами».

28.1. Магниты и магнитные поля

Магнит притягивает скрепки, гвозди и другие железные предметы. Любой магнит в форме стержня или подковы имеет два торца, которые называют полюсами; именно в этом сильнее всего и проявляются его магнитные свойства. Если подвесить магнит на нитке, один полюс всегда будет указывать на север. Точно не известно, когда этот факт был впервые обнаружен, но китайские мореплаватели использовали его для целей навигации уже в XI в., а возможно, и раньше. Разумеется, на этом же принципе основан и компас. Стрелка компаса – это всего лишь магнит с точкой опоры в своем центре масс, так что он может свободно вращаться. Обращенный на север полюс свободно висящего магнита называют *северным полюсом* магнита (N). Противоположный полюс направлен на юг и называется *южным полюсом* (S).

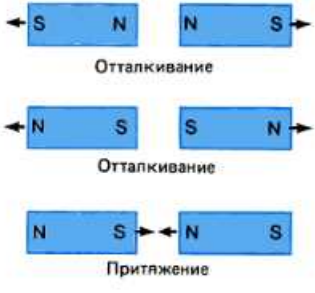


Рис. 28.1. Одноименные полюса магнитов отталкиваются, разноименные притягиваются.

Хорошо известно, что, если поднести два магнита друг к другу, между ними действует сила. Магниты либо притягивают друг друга, либо отталкиваются; их взаимодействие ощущается даже тогда, когда магниты не соприкасаются. Если к северному полюсу одного магнита поднести северный полюс другого, магниты будут отталкиваться; то же самое будет, если поднести магниты друг к другу южными полюсами. Но если к северному полюсу одного магнита поднести южный полюс другого, возникает притяжение (рис. 28.1). Это напоминает взаимодействие электрических зарядов: одноименные полюса отталкиваются, а разноименные притягиваются. Но не следует смешивать полюса магнитов и электрические заряды: это совсем разные вещи.

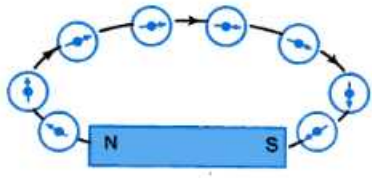


Рис. 28.2. Изображение силовой линии стержневого магнита с помощью магнитных стрелок.

Сильные магнитные свойства наблюдаются лишь у железа и некоторых других веществ, например кобальта, никеля, гадолиния. Эти вещества называют *ферромагнитными* (от латинского ferrum – железо). Все прочие вещества тоже обладают магнитными свойствами, но настолько слабыми, что их можно обнаружить лишь с помощью чувствительных приборов (подробнее об этом см. в гл. 29).

Мы уже видели, насколько полезной оказалась концепция электрического поля, окружающего электрический заряд. Аналогично представление о том, что вокруг магнита существует *магнитное поле*. Силу, с которой один магнит действует на другой, можно рассматривать как результат взаимодействия одного магнита с магнитным полем другого. И так же, как мы рисовали силовые линии электрического поля, можно изображать и силовые линии магнитного поля. Их проводят, как и в случае электрического поля, таким образом, чтобы 1) магнитное поле было направлено по касательной к силовой линии в любой точке и 2) число линий на единицу площади было пропорционально величине магнитного поля.

Направление магнитного поля в данной точке можно определить как направление, которое указывает северный полюс стрелки компаса, помещенной в эту точку. На рис. 28.2 показано, как с помощью стрелки компаса можно установить направление одной из силовых линий магнитного стержня, а на рис. 28.3 – силовые линии, построенные таким же способом для подковообразного магнита и магнитного стержня. Обратите внимание на то, что в соответствии с нашим определением силовые линии всегда направлены от северного полюса магнита к южному.

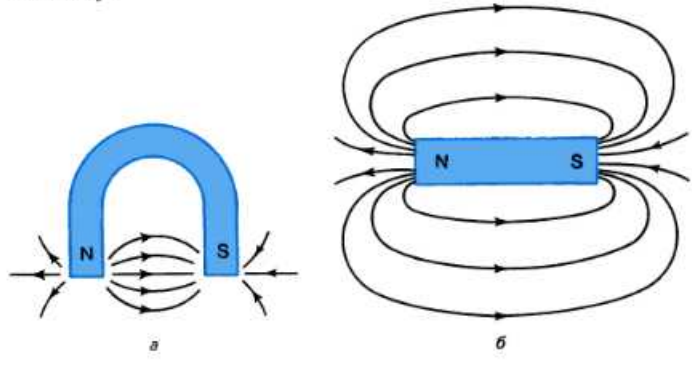


Рис. 28.3. Силовые линии подковообразного магнита (*а*) и магнитного стержня (*б*).

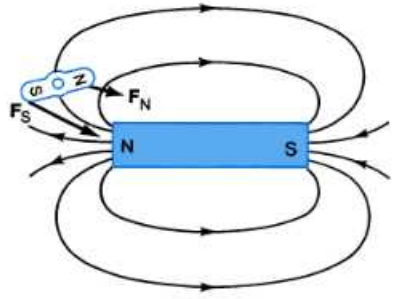


Рис. 28.4. В магнитном поле на стрелку компаса действует вращающий момент, стремящийся ориентировать ее параллельно силовым линиям магнитного поля. Момент равен нулю, когда стрелка параллельна направлению силовой линии в данной точке. (Показаны только силы притяжения; попытайтесь изобразить силы отталкивания и показать, что создаваемый ими момент действует аналогичным образом.)

Магнитное поле в любой точке можно определить как вектор **B**, направление которого устанавливается описанным выше способом. *Величину* **B** можно определить через вращающий момент, действующий на магнитную стрелку, когда она *не* ориентирована вдоль магнитной силовой линии (рис. 28.4). Чем больше момент, тем сильнее магнитное поле. Пока что мы можем пользоваться этим (не вполне строгим) определением; более точное определение будет дано в разд. 28.3. Вектор **B** часто предпочитают называть не просто «магнитным полем», а «плотностью магнитного потока» или *магнитной индукцией*.

Магнитное поле Земли показано на рис. 28.5. Поскольку по определению северный полюс магнитной стрелки указывает на север, соответствующий магнитный полюс Земли оказывается южным магнитным полюсом (ведь северный полюс одного магнита притягивается к южному полюсу другого). А магнитный полюс Земли вблизи южного географического полюса является северным полюсом Земли-магнита. Магнитные полюса Земли не совпадают с положением географических полюсов, находящихся на оси вращения Земли. Южный магнитный полюс, например, расположен на севере Канады, в

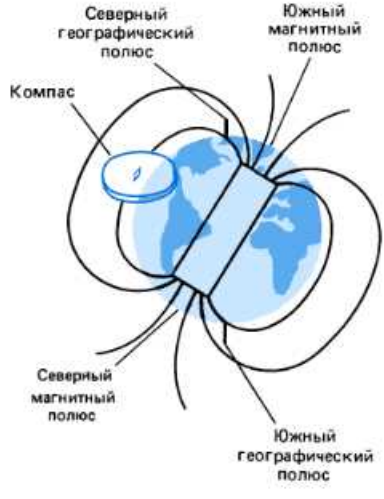


Рис. 28.5. Земля подобна огромному магниту, южный полюс которого находится вблизи северного географического полюса.

1500 км от северного географического полюса[1]. Это следует учитывать при пользовании магнитным компасом. Угол между направлением магнитной стрелки и истинным направлением на север называется магнитным склонением; на территории США магнитное склонение меняется в зависимости от места от 0 до примерно 25°[2].

28.2. Магнитное поле, создаваемое электрическим током

На протяжении XVIII в. многие естествоиспытатели делали попытки установить связь между электричеством и магнетизмом. Первым, кому это удалось, был Ханс Кристиан Эрстед (1777–1851). Эрстед был всегда убежден в единстве природы. Интуитивно он чувствовал необходимость существования связи между электрическими и магнитными явлениями. Но стационарные электрические заряды не взаимодействовали с магнитом. В 1820 г. Эрстед обнаружил, что магнитная стрелка, расположенная рядом с электрическим проводником, отклоняется, когда проводник подключают к батарее и по нему течет электрический ток.

Магнитная стрелка, как известно, отклоняется магнитным полем. Таким образом, Эрстед обнаружил, что *электрический ток создает магнитное поле*, и установил существование связи между электричеством и магнетизмом.

Вблизи прямолинейного проводника с током магнитная стрелка устанавливается по касательной к окружности, очерченной вокруг проводника (рис. 28.6). Иными словами, силовые линии магнитного поля проводника с током имеют вид окружностей, в центре которых на-

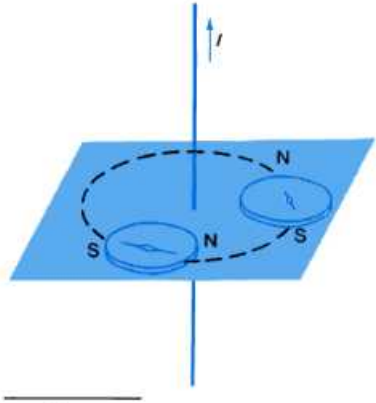


Рис. 28.6. Магнитная стрелка отклоняется вблизи проводника с током, что указывает на существование магнитного поля и позволяет определить направление силовых линий.

[1] Координаты южного магнитного полюса 71,2° с. ш. и 150,8° в. д.; северного – 70,5° ю. ш. и 96° з. д. – *Прим. перев.*

[2] Для Москвы магнитное склонение (восточное) составляет около 6,5°. – *Прим. перев.*

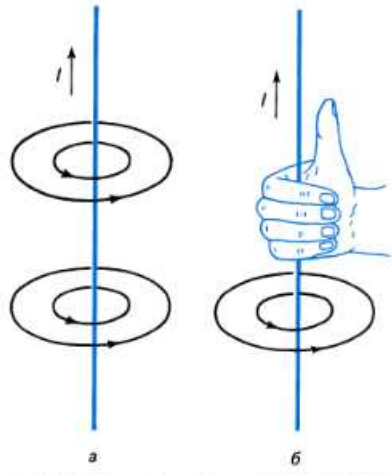


Рис. 28.7. *а* – силовые линии магнитного поля вокруг проводника с током; *б* – правило правой руки для определения направления силовых линий: если обхватить проводник правой рукой так, что большой палец указывает направление тока положительных зарядов, то остальные пальцы показывают направление силовых линий магнитного поля тока.

ходится проводник (рис. 28.7, *а*). Направление силовых линий указывается северным полюсом магнитной стрелки на рис. 28.6. Для определения направления силовых линий магнитного поля проводника с током служит *правило правой руки*: проводник мысленно обхватывается правой рукой так, чтобы большой палец указывал в направлении тока (положительных зарядов); тогда остальные пальцы окажутся загнуты в направлении силовых линий (рис. 28.7, *б*).

28.3. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Определение вектора магнитной индукции B

Как было показано в предыдущем разделе, со стороны проводника с током на магнит (например, на магнитную стрелку) действует сила. В соответствии с третьим законом Ньютона следовало бы ожидать и обратного: магнит тоже должен создавать силу, действующую на проводник с током. Этот эффект действительно существует и также был обнаружен Эрстедом.

Рассмотрим более внимательно силу, действующую на проводник с током. Поместим прямолинейный проводник между полюсами подковообразного магнита (рис. 28.8). Когда по проводнику пропускают ток, на него действует сила; сила эта, однако, *не* направлена к одному из полюсов магнита. Она направлена *под прямым углом к направлению магнитного поля*. Если изменить направление тока на противоположное, сила будет действовать в противоположную сторону. Опыт показывает, что сила, действующая на проводник с током, всегда перпендикулярна и проводнику, и вектору магнитной индукции **B**. В этом описании содержится неопределенность – на рис. 28.8, *а* сила может быть направлена либо вверх, либо

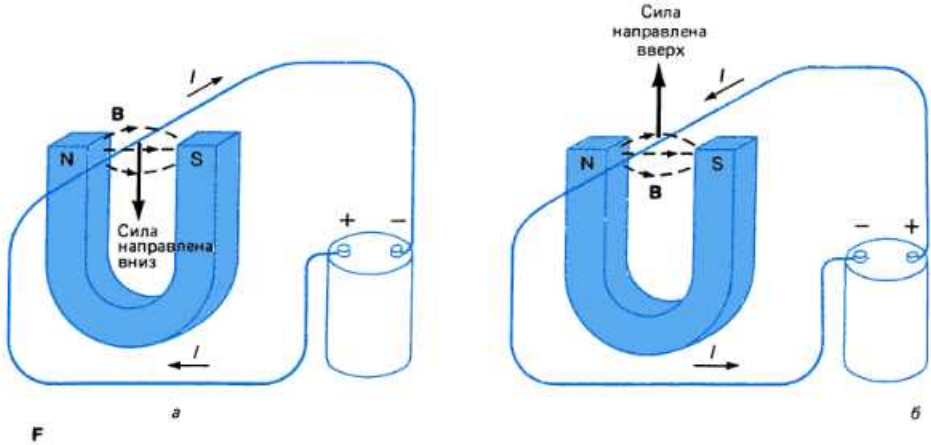


Рис. 28.8. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле с индукцией **B**.

вниз, оставаясь перпендикулярной и проводнику, и направлению магнитного поля. Запомнить направление силы помогает правило правой руки (рис. 28.8, *б*). Если, распрямив пальцы, расположить ладонь правой руки вдоль условного направления тока (т. е. тока положительных зарядов), а затем согнуть пальцы так, чтобы они совпали с направлением вектора магнитной индукции (если при этом придется повернуть кисть, то следите, чтобы выпрямленные пальцы всегда указывали направление тока), то отведенный вбок большой палец укажет направление силы, действующей на проводник с током.

Мы выяснили направление силы. А что можно сказать о ее величине? Экспериментально обнаружено, что величина силы прямо пропорциональна силе тока I в проводнике, длине l проводника в магнитном поле (которое предполагается однородным) и магнитной индукции B. Сила зависит также от угла θ между проводником и направлением магнитного поля. Когда проводник перпендикулярен силовым линиям магнитного поля, сила максимальна; когда проводник параллелен силовым линиям, сила обращается в нуль. В промежуточных положениях сила пропорциональна $\sin\theta$ (рис. 28.9). Таким образом,

$$F \sim IlB \sin\theta .$$

Мы говорили, что величину индукции магнитного поля можно определить через вращающий момент, действующий со стороны поля на магнитную стрелку (см. рис. 28.4). Но мы не дали строгого определения индукции поля. В действительности магнитная индукция B определяется приведенным выражением, в котором коэффициент пропорциональности равен 1:

$$F = IlB \sin\theta . \qquad (28.1)$$

Если проводник перпендикулярен направлению поля

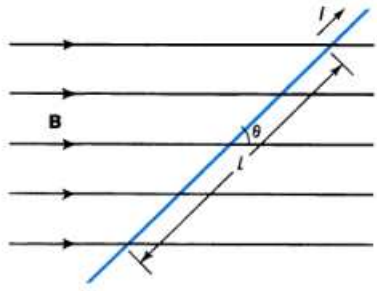


Рис. 28.9. Токонесущий проводник в магнитном поле с индукцией **B**.

($\theta = 90°$), то

$$F_{\text{макс}} = IlB \quad [\boldsymbol{l} \perp \mathbf{B}], \tag{28.2}$$

а если параллелен ($\theta = 0°$), то сила равна нулю.

Подведем итог сказанному. Вектор магнитной индукции **B** определяется следующим образом. Его направление совпадает с направлением прямолинейного проводника с током, когда действующая на проводник со стороны магнитного поля сила равна нулю [$\theta = 0$ в формуле (28.1)]. Абсолютная величина **B** определяется из формулы (28.2):

$$B = \frac{F_{\text{макс}}}{Il},$$

где $F_{\text{макс}}$ – максимальное значение силы, действующей на прямолинейный отрезок l проводника, по которому течет ток силой I ($F_{\text{макс}}$ соответствует $\theta = 90°$).

Связь между силой **F**, действующей на проводник, по которому течет ток силой I, и вектором магнитной индукции **B** может быть записана в векторной форме. Для этого достаточно вспомнить, что направление **F** определяется правилом правой руки (рис. 28.8, *б*), а величина – формулой (28.1), что соответствует данному ранее определению векторного произведения (разд. 10.1), т. е.

$$\mathbf{F} = I\boldsymbol{l} \times \mathbf{B}, \tag{28.3}$$

где $\boldsymbol{l}$ – вектор, равный по величине длине проводника и направленный вдоль проводника в сторону условного направления тока (т. е. тока положительных зарядов).

Эти рассуждения справедливы для случая однородного магнитного поля и прямолинейного проводника. Если же поле не однородно или проводник не везде составляет одинаковый угол с **B**, то (28.3) можно записать в дифференциальной форме:

$$d\mathbf{F} = Id\boldsymbol{l} \times \mathbf{B}, \tag{28.4}$$

где $d\mathbf{F}$ – сила, действующая на элемент проводника длиной $d\boldsymbol{l}$. Полная сила, действующая на проводник, определяется интегрированием.

В системе СИ единицей магнитной индукции B является *тесла* (Тл). Из формул (28.1)–(28.4) ясно, что 1 Тл = 1 Н/(А · м); эта единица раньше называлась также «вебер на квадратный метр» (1 Вб/м^2 = 1 Тл). Часто маг-

нитную индукцию выражают и в единицах системы СГС *гауссах* (Гс); 1 Гс $= 10^{-4}$ Тл, но при расчетах с использованием единиц СИ гауссы необходимо переводить в теслы. Чтобы дать представление о масштабах этих единиц, укажем, что магнитное поле Земли у ее поверхности соответствует магнитной индукции порядка 0,5 Гс, или $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ Тл. С другой стороны, мощные электромагниты способны создавать поля в 1–2 Тл, а сверхпроводящие электромагниты – свыше 10 Тл.

Пример 28.1. Прямоугольная проволочная рамка подвешена вертикально (рис. 28.10). Поле с магнитной индукцией **B** направлено горизонтально, перпендикулярно плоскости рамки. Символ ⊙, напоминающий наконечник стрелы, показывает, что вектор **B** направлен «из страницы» навстречу читателю; векторы, направленные «в страницу», мы обозначаем значком × – как оперение улетающей стрелы. Магнитное поле практически однородно вдоль нижнего горизонтального участка рамки *ab* (длина $l = 10{,}0$ см) в середине большого магнита, создающего поле. Магнит расположен симметрично, так что неоднородность **B** одинакова для обоих вертикальных участков рамки; верхний горизонтальный участок рамки находится в области, где поле отсутствует. Рамка подвешена к динамометру, который показывает направленную вниз силу $F = 3{,}48 \cdot 10^{-2}$ Н, когда по витку течет ток силой $I = 0{,}245$ А. Чему равна магнитная индукция B в центре магнита?

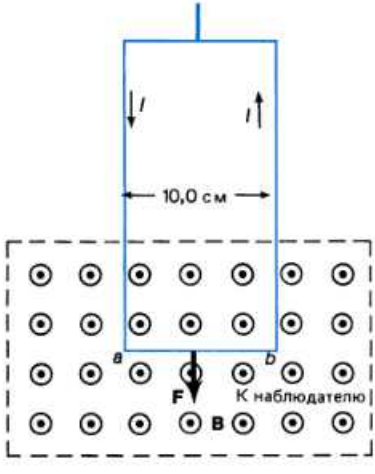


Рис. 28.10. Измерение индукции магнитного поля B (пример 28.1).

Решение. Силы, действующие со стороны магнитного поля на вертикальные участки рамки, равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, регистрируемая динамометром магнитная сила действует на горизонтальную часть *ab* длиной $l = 0{,}100$ м:

$$B = \frac{F}{Il} = \frac{3{,}48 \cdot 10^{-2}\ \text{Н}}{(0{,}245\ \text{А})\,(0{,}100\ \text{м})} = 1{,}42\ \text{Тл}.$$

Кстати говоря, описанный метод позволяет очень точно измерять магнитную индукцию.

Пример 28.2. Жесткий проводник, по которому течет ток силой I, состоит из полуокружности радиусом R и двух прямолинейных участков (рис. 28.11). Проводник расположен перпендикулярно однородному полю с магнитной индукцией **B**. Длина прямолинейных участков, на-

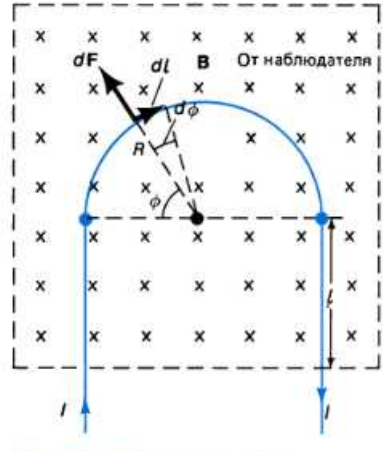


Рис. 28.11. К примеру 28.2.

ходящихся в магнитном поле, одинакова и равна I. Определите силу, действующую на проводник со стороны магнитного поля.

Решение. Силы, действующие на прямолинейные участки, одинаковы по величине ($= IlB$) и противоположны по направлению, так что они взаимно уравновешиваются. Поэтому результирующая сила, действующая на проводник, приходится на его дугообразную часть. Разобъем полуокружность на участки длиной $dl = Rd\phi$, как показано на рис. 28.11, и воспользуемся формулой (28.4):

$$dF = IBRd\phi,$$

где dF – сила, действующая на участок $dl = Rd\phi$, а угол между $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$ равен 90°, так что в векторном произведении $\sin\theta = 1$. В силу симметрии силы, действующие в горизонтальном направлении на симметричные участки полуокружности, взаимно уравновешиваются, и нас интересуют поэтому только вертикальные компоненты $dF\sin\phi$. Полная сила, действующая на проводник, будет равна

$$F = \int_0^{\pi} dF\sin\phi = IBR\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi =$$

$$= -IBR\cos\phi\Big|_0^{\pi} = 2IBR$$

и направлена вертикально вверх.

28.4. Движение электрического заряда в магнитном поле

Итак, на проводник, по которому протекает электрический ток, в магнитном поле действует сила. Поскольку ток в проводнике представляет собой движение электрических зарядов, то следует ожидать, что и на заряды, свободно движущиеся в магнитном поле (вне проводника), со стороны магнитного поля будет действовать сила. Так оно и происходит.

Исходя из уже известных нам фактов, можно рассчитать силу, действующую на движущийся электрический заряд. Если через данную точку за время t проходит n частиц с зарядом q каждая, то они создают ток силой $I = nq/t$. Пусть t – время, за которое заряд q проходит расстояние l в поле с магнитной индукцией $\mathbf{B}$; тогда $\mathbf{l} = \mathbf{v}t$, где $\mathbf{v}$ – скорость частицы. Согласно (28.3), сила, действующая на эти частицы, равна $\mathbf{F} = I\mathbf{l}\times\mathbf{B} = (nq/t)(\mathbf{v}t)\times\mathbf{B} = nq\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. А сила, действующая на *одну* из этих n частиц, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \qquad (28.5)$$

Этот результат подтверждается экспериментом. Величина этой силы равна

$$F = qvB\sin\theta. \qquad (28.6)$$

Мы получили выражение для силы, действующей на частицу с зарядом q, которая движется со скоростью $\mathbf{v}$ в поле с магнитной индукцией $\mathbf{B}$; угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ равен θ. Сила максимальна, когда частица движется перпендикулярно направлению $\mathbf{B}$ ($\theta = 90°$):

$$F = qvB \quad [\mathbf{v}\perp\mathbf{B}],$$

и *равна нулю*, когда частица движется *вдоль* силовых линий ($\theta = 0°$). *Направление* силы перпендикулярно век-

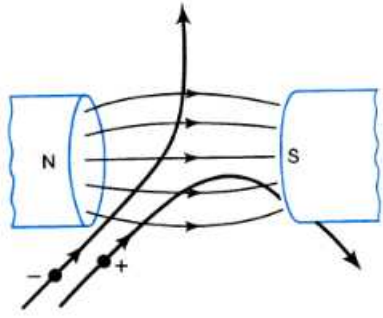


Рис. 28.12. Сила, действующая на движущиеся заряженные частицы в магнитном поле.

тору магнитной индукции **B** и скорости **v** частицы и определяется по правилу правой руки: ладонь правой руки располагается так, чтобы выпрямленные пальцы указывали направление движения частицы (**v**), а если их согнуть – направление **B**; тогда большой палец будет указывать направление силы. Это верно только для *положительно* заряженных частиц (на рис. 28.12 сила направлена вниз). Для отрицательно заряженных частиц направление силы будет противоположным (вверх на рис. 28.12).

Пример 28.3. Протон, движущийся вертикально вверх со скоростью $5{,}0 \cdot 10^6$ м/с в однородном магнитном поле, испытывает действие силы $8{,}0 \cdot 10^{-14}$ Н, направленной на запад. Когда протон движется горизонтально на север, сила равна нулю. Чему равны величина и направление вектора магнитной индукции в этой области?

Решение. Поскольку действующая на протон сила равна нулю, когда он движется на север, силовые линии поля располагаются в направлении север–юг. Правило правой руки подсказывает, что вектор **B** должен быть направлен на север, чтобы при движении протона вверх сила была направлена к западу (большой палец указывает на запад, если выпрямленные пальцы направлены вверх, а сгибаются на север). Согласно формуле (28.6), при $\theta = 90°$

$$B = \frac{F}{qv} =$$

$$= \frac{8{,}0 \cdot 10^{-14}\ \text{Н}}{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(5{,}0 \cdot 10^6\ \text{м/с})} = 0{,}10\ \text{Тл}.$$

Траектория заряженной частицы, движущейся в плоскости, перпендикулярной силовым линиям однородного магнитного поля, представляет собой окружность (или дугу окружности, если частица покидает поле). Это видно из рис. 28.13. Здесь магнитное поле направлено *за* чертеж (на что указывают крестики). Электрон в точке P движется вправо, и на него действует сила, направленная вниз. Соответственно электрон отклоняется вниз. Когда электрон попадает, скажем, в точку Q, сила остается перпендикулярной скорости и направлена, как показано на чертеже. Поскольку сила всегда перпендикулярна **v**, абсолютная величина скорости не изменяется, и частица движется по окружности. Действующая на частицу сила всегда направлена по радиусу к центру окружности. Обратите внимание на то, что электрон на рис. 28.13 дви-

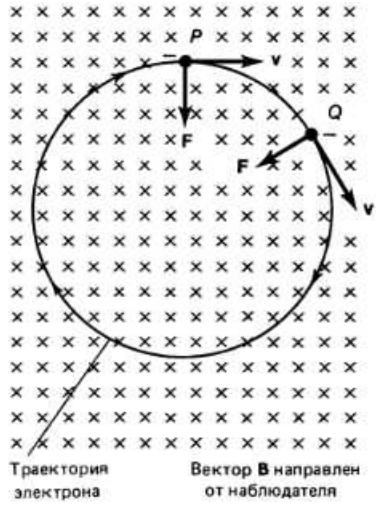


Рис. 28.13. В однородном магнитном поле заряженная частица (электрон) движется по криволинейной траектории.

жется по часовой стрелке. На положительно заряженную частицу сила действовала бы в противоположном направлении, и она двигалась бы против часовой стрелки.

Пример 28.4. Электрон движется со скоростью $2{,}0 \cdot 10^7$ м/с в плоскости, перпендикулярной полю с магнитной индукцией 0,10 Тл. Опишите его траекторию.

Решение. Радиус кривизны траектории находим из второго закона Ньютона $F = ma$ с учетом того, что ускорение частицы при движении по окружности равно $a = v^2/r$;

$$F = ma,$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Так как **F** перпендикулярна **v**, величина скорости не изменяется. Из полученного равенства видно, что если **B** = const, то и r = const, и траектория представляет собой окружность, о чем говорилось выше. Подставляя численные значения, находим

$$r = \frac{(9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг})(2{,}0 \cdot 10^7\ \text{м/с})}{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(0{,}10\ \text{Тл})} =$$

$$= 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{м},$$

или 1,1 мм.

Время T, за которое частица с зарядом q, движущаяся с постоянной скоростью v в однородном магнитном поле (**B** $\perp$ **v**), совершит один полный оборот, равно

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

где $2\pi r$ – длина круговой траектории. Из примера 28.4 $r = mv/qB$, и

$$T = \frac{2\pi m}{qB},$$

а частота обращения равна

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}. \qquad (28.7)$$

Эту частоту часто называют *циклотронной частотой* частицы, движущейся в магнитном поле, поскольку именно с такой частотой происходит круговое движение частиц в циклотроне (разд. 28.8). Обратите внимание на то, что f не зависит от скорости v: при заданном значении B, чем больше v, тем больше r ($r = mv/qB$), но частота не зависит от v и r.

Если частица с зарядом q движется со скоростью v в области, где присутствуют и электрическое поле **E**, и магнитное поле с индукцией **B**, то на нее действует сила

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (28.8)$$

[здесь мы воспользовались формулами (22.3) и (28.5)]. Это выражение определяет *силу Лоренца*. Убедитесь сами в том, что, когда **E** и **B** однородны и параллельны, заряженная частица будет двигаться по спирали.

28.5. Открытие электрона и его свойства

В современных представлениях об электричестве и магнетизме электрону отводится важнейшая роль. Однако первые предположения о его существовании относятся лишь к 90-м годам прошлого века. Рассказ об электроне вынесен в эту главу, поскольку магнитные поля сыграли ключевую роль в исследовании его свойств.

В конце прошлого века интенсивно изучался электрический разряд в разреженных газах. Один из разработанных для этого приборов (рис. 28.14) представлял собой стеклянную трубку с впаянными в нее электродами, откачанную до невысокого вакуума. Когда к электродам прикладывали высокое напряжение, пространство от катода до противоположного торца трубки казалось темным, но у противоположного торца трубки возникало свечение. Когда в трубку вводили одну или несколько перегородок с небольшим отверстием, свечение ограничивалось крошечным пятном в торце трубки. От катода к противоположному торцу трубки как будто шли какие-то лучи; эти лучи назвали *катодными лучами*.

Природа катодных лучей вызвала много споров. Некоторые ученые считали, что они подобны свету. Но тот факт, что светлое пятно можно смещать под действием электрического или магнитного поля, наводил на мысль, что катодные лучи представляют собой заряженные час-

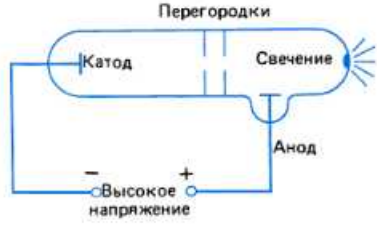


Рис. 28.14. Разрядная трубка. В некоторых конструкциях одна из перегородок одновременно служит анодом.

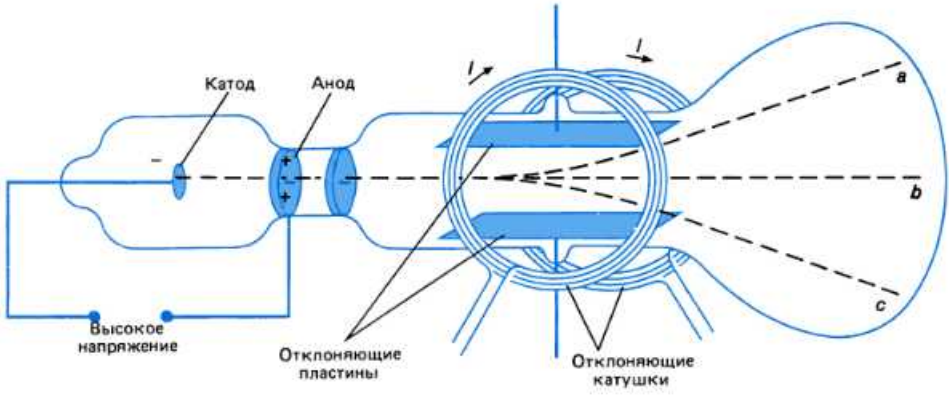


Рис. 28.15. Отклонение катодных лучей в электрическом и магнитном полях.

тицы; направление отклонения соответствовало отрицательному заряду частиц. Кроме того, если трубка заполнялась определенными разреженными газами, вдоль траектории катодных лучей возникало слабое свечение.

Первые оценки заряда e предполагаемых частиц в катодных лучах, а также отношения заряда к массе e/m были сделаны в 1897 г.; в том же году Дж. Дж. Томсон (1856–1940) осуществил непосредственное измерение величины e/m, пользуясь прибором, показанным на рис. 28.15. Катодные лучи ускорялись большой разностью потенциалов и проходили между парой параллельных пластин, встроенных в трубку; приложенное к пластинам напряжение создавало между ними электрическое поле. Магнитное поле создавалось парой катушек. Когда включалось только электрическое поле (скажем, верхняя пластина положительна), катодные лучи отклонялись вверх (траектория a). Когда включалось только магнитное поле (направленное за чертеж), катодные лучи отклонялись вниз (траектория c). Так должны были вести себя отрицательно заряженные частицы. Сила, действующая на частицу катодных лучей со стороны магнитного поля, равна

$$F = evB,$$

где e – заряд, а v – скорость частицы. В отсутствие электрического поля траектория катодных лучей искривляется, и, поскольку $F = ma$,

$$evB = \frac{mv^2}{r}$$

и

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{Br}.$$

Значения r и B можно измерить. Скорость v можно определить, включая кроме магнитного электрическое поле. Напряженность поля E подбирается такой, чтобы компенсировалось отклонение катодных лучей (траекто-

рия b на рис. 28.15). В этом случае сила, действующая на частицы со стороны электрического поля, $F = eE$, в точности компенсируется силой, действующей со стороны магнитного поля, $F = evB$. Таким образом, $eE = evB$, и

$$v = \frac{E}{B}.$$

Объединяя это равенство с предыдущим, получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{B^2 r}. \tag{28.9}$$

Все величины в правой части можно измерить, и это позволяет определить отношение e/m (но не e и m по отдельности). Принятое сегодня значение отношения e/m равно $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Частицы катодных лучей стали называть **электронами**.

Следует заметить, что «открытие» электрона, как и многие другие открытия в науке, совсем не столь очевидно, как скажем, открытия месторождений золота или нефти. Следует ли считать первооткрывателем того, кто первым заметил свечение в трубке? Или того, кто назвал его катодными лучами? Наверное, ни того, ни другого, поскольку ни один из них не обладал представлением об электроне, характерным для наших дней. Обычно открытие электрона считают заслугой Дж. Дж. Томсона и вовсе не потому, что он первым наблюдал свечение в трубке. Представления Томсона оказались близки к современным: он не только полагал, что катодные лучи представляют собой крошечные отрицательно заряженные частицы, и провел тщательные измерения их свойств, но и утверждал, что эти частицы представляют собой составную часть атомов, а не являются атомами или ионами, как считали многие. Наконец, он разработал электронную теорию строения вещества. Вот почему ему приписывают это открытие. Заметьте, что ни он, ни кто-либо другой никогда не наблюдали электрона в буквальном смысле. Это краткое отступление должно служить иллюстрацией того, что в науке факт открытия не всегда очевиден. И вообще, некоторые науковеды считают, что слово «открытие» не всегда уместно, как, например, и в этом случае.

Томсон полагал, что электрон – это не атом, а его составная часть. Вскоре тому было получено и убедительное доказательство: удалось измерить по отдельности заряд и массу частиц катодных лучей. Ученик Томсона Дж. С. Таунсенд осуществил первые довольно грубые прямые измерения e в 1897 г. Но лишь изящный *опыт* Роберта Милликена (1868–1953) *с масляными каплями* позволил установить точное значение заряда электрона, а также показал, что электрический заряд существует в виде дискретных порций. В опыте Милликена крошечные капли минерального масла, несущие электрический заряд,

Рис. 28.16. Опыт Милликена.

опускались под действием силы тяжести в пространстве между двумя параллельными горизонтальными пластинами (рис. 28.16). Напряженность электрического поля E между пластинами подбиралось такой, чтобы капля зависала в воздухе; сила тяжести mg, направленная вниз, компенсируется направленной вверх силой со стороны электрического поля. Тогда $qE = mg$ и заряд $q = mg/E$. Массу капли определяют, измеряя установившуюся скорость падения капли в воздухе в отсутствие поля с помощью формулы Стокса (разд. 13.7). (Капли слишком малы, чтобы их радиус можно было непосредственно измерить.) Одни капли оказывались заряженными положительно, другие – отрицательно; можно было предположить, что одни капли теряют электроны, другие – приобретают (по-видимому, в результате трения в распылителе). Кропотливые наблюдения Милликена и анализ полученных результатов предоставили убедительные доказательства того, что любой заряд является целым кратным некоторого минимального заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, который был приписан электрону. [По современным данным, как уже упоминалось в гл. 22, $e = (1{,}6021892 \pm \pm 0{,}0000046) \cdot 10^{-19}$ Кл, или округленно $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл.] Зная e и отношение e/m, можно определить и массу электрона: $(1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл$)/(1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг$) = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Это более чем в тысячу раз меньше массы самого легкого атома, что подтверждает представление об электроне как о составной части атома. По современным данным, масса электрона равна

$$m_e = (9{,}109534 \pm 0{,}000047) \cdot 10^{-31} \text{ кг},$$

или округленно

$$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$

* 28.6. Термоэлектронная эмиссия. Электронно-лучевая трубка

В ходе своих опытов, связанных с разработкой электрической лампы, Томас Эдисон (1847–1931) сделал в 1883 г. интересное открытие. В откачанный баллон электрической лампы помимо нити накала он ввел дополнительный

электрод. Когда на этот электрод подавался положительный потенциал относительно нити накала, во внешней цепи шел ток, если нить накала была разогрета и светилась (нить накала разогревалась током от отдельного источника). Если же на электрод подавался отрицательный потенциал, ток во внешней цепи отсутствовал. При холодной нити накала ток отсутствовал в любом случае. Это явление получило название *термоэлектронной эмиссии* (эффект Эдисона).

Эдисон не оценил всей важности своего открытия, приведшего в конце концов к созданию электронных вакуумных ламп. Объяснить это явление удалось лишь после того, как 10 лет спустя был открыт электрон.

В 1899 г. Дж. Дж. Томсон измерил e/m для носителей заряда в эффекте Эдисона; он получил то же значение, что и в случае катодных лучей в газоразрядной трубке при большой разности потенциалов (рис. 28.15). Это дало ему основание заключить, что в эффекте Эдисона нить накала испускает электроны – они как бы испаряются с раскаленной нити накала. Когда введенный в колбу электрод положителен, электроны притягиваются к нему, и идет ток; при подаче отрицательного потенциала электроны отталкиваются от электрода, и ток отсутствует.

«Испарение» электронов с горячей нити накала можно объяснить, рассматривая электроны подобно молекулам газа. Так можно поступать, если электроны перемещаются достаточно свободно; это согласуется с тем, что металлы являются хорошими проводниками. Однако электроны обычно не выходят за пределы проводника; существуют силы, препятствующие вылету электронов из металла. Действительно, если бы электроны срывались с поверхности проводника, поверхность приобретала бы положительный заряд, притягивающий электрон обратно. Чтобы покинуть металл, электрон должен обладать определенным минимумом кинетической энергии (КЭ) – точно так же, как молекулы в жидкости должны иметь определенную КЭ, чтобы «испариться» в газообразное состояние. Как говорилось в гл. 18, средняя кинетическая энергия $\overline{\text{КЭ}}$ молекул газа пропорциональна абсолютной температуре T. Свободные электроны в металле тоже можно рассматривать (правда, в очень грубом приближении) как «электронный газ». Некоторые электроны обладают кинетической энергией выше средней, некоторые – ниже средней. При комнатной температуре лишь немногие электроны обладают кинетической энергией, достаточной для выхода из металла. При высоких температурах $\overline{\text{КЭ}}$ возрастает, и металл покидает большее число электронов – это очень похоже на испарение жидкости, которое тем сильнее, чем выше температура. Таким образом, термоэлектронная эмиссия заметно проявляется только с ростом температуры. Теперь легко понять и результат Эдисона.

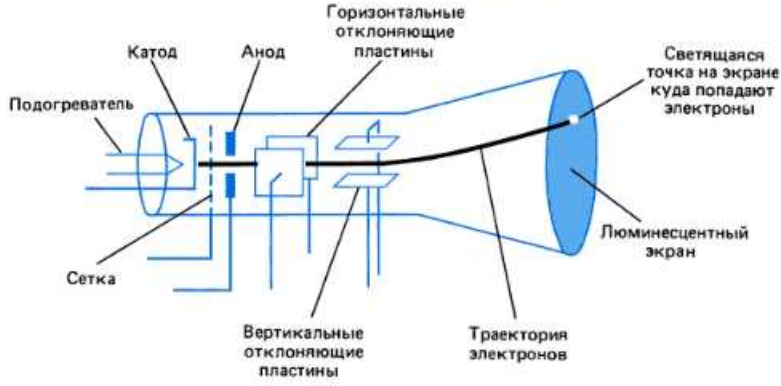


Рис. 28.17. Электронно-лучевая трубка. Вместо отклоняющих пластин нередко используются отклоняющие катушки.

Важным электронным прибором, действие которого основано на термоэлектронной эмиссии, является *электронно- лучевая трубка* (ЭЛТ). Она используется в телевизорах, осциллографах, дисплеях ЭВМ. Изображение в электронно-лучевой трубке создается «электронным лучом» внутри откачанной стеклянной колбы, который направляется на различные точки экрана. Устройство простой ЭЛТ показано на рис. 28.17. Электроны, испускаемые подогревным катодом, ускоряются высоким напряжением, приложенным между катодом и анодом (5000–50 000 В). Электроны испускаются «электронной пушкой» через небольшое отверстие в аноде. Экран ЭЛТ покрыт изнутри люминофором, который светится под действием электронов. В том месте, где электронный пучок попадает на экран, появляется маленькая светящаяся точка. Электронный пучок отклоняется парой горизонтальных и парой вертикальных пластин, к которым прикладывается разность потенциалов: электроны притягиваются положительной пластиной. Изменяя напряжение на отклоняющих пластинах, можно создать светящееся пятно в любой точке экрана.

В кинескопах телевизоров вместо отклоняющих пластин обычно используют магнитные отклоняющие катушки. Электронный пучок обегает экран, как показано на рис. 28.18. В горизонтальном направлении электронный «луч» развертывается пластинами или катушками горизонтального отклонения. Когда отклоняющее поле достигает максимума одной полярности, луч перемещается к краю экрана; когда поле уменьшается до нуля, луч попадает в центр; когда же поле достигает максимума другой полярности, луч перемещается к противоположному краю экрана. После того как луч пересекает экран в одном направлении, напряжение на отклоняющей системе скачком изменяется до первоначального значения, и электронный луч быстро возвращается назад. Одновременно катушки или пластины вертикального отклонения немного смещают электронный пучок вниз, и благодаря этому он вычерчивает на экране следующую строку. В США телевизионный стандарт соответствует разложению

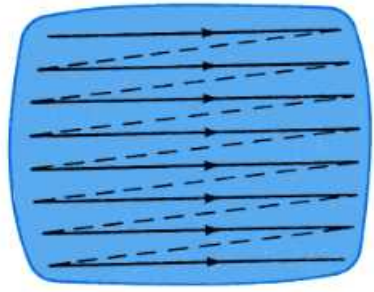


Рис. 28.18. Ход луча в телевизионной развертке.

изображения на 525 строк по вертикали (в некоторых европейских системах телевидения «частота строк» почти вдвое больше, и изображение имеет более высокую четкость)[1]. Развертка всех 525 строк занимает $^1/_{30}$ с; на практике применяется так называемая чересстрочная развертка, в которой вначале (за $^1/_{60}$ с) развертываются все нечетные строки кадра, а затем за такое же время – все четные. Мы же видим цельную картину благодаря инерционности свечения люминофора и зрительного восприятия, составляющей около $^1/_{20}$ с. Изображение состоит на экране из светящихся точек различной яркости. Яркость зависит от напряжения на «сетке» ЭЛТ (управляющем электроде, который действительно может представлять собой проволочную сетку, через которую свободно пролетают электроны). Чем выше отрицательный потенциал сетки, тем меньше электронов проходит через нее. Потенциалом сетки управляет телевизионный (видео) сигнал, который передает телевизионная станция и принимает телевизор. Телевизионный сигнал содержит также импульсы синхронизации видеосигнала с горизонтальным и вертикальным отклонением электронного луча (строчной и кадровой развертки).

Осциллограф – прибор для усиления, измерения и визуального наблюдения электрических сигналов; он незаменим при исследовании процессов, быстро протекающих во времени: сигнал развертывается на экране ЭЛТ. Обычно осциллограф работает в режиме непрерывной развертки: электронный пучок отклоняется с постоянной частотой пластинами горизонтального отклонения, а на пластины вертикального отклонения подается усиленный исследуемый сигнал. На экране, таким образом, отображается зависимость напряжения сигнала (по вертикали) от времени (по горизонтали).

---

[1] В СССР телевизионный стандарт предусматривает разложение изображения на 625 строк при 25 кадрах в секунду.– *Прим. перев.*

* 28.7. Масс-спектрометр

В начале нашего столетия был разработан ряд методов для определения массы атомов. Одним из наиболее точных приборов является *масс-спектрометр* (или масс-спектрограф) (рис. 28.19). Ионы исследуемого вещества образуются в источнике благодаря нагреву или электрическому разряду. Пройдя через щель S_1, ионы попадают в скрещенные электрическое и магнитное поля (как в приборе Томсона). Только ионы, имеющие скорость $v = E/B$, пройдут эту область без отклонений и смогут попасть в щель S_2. [Подобное устройство называется селектором скоростей; см. формулу (28.9) и пояснения перед ней.] В области за щелью S_2 существует только магнитное поле B', и ионы движутся по дуге окружности. Радиус кривизны их траектории можно измерить, поставив на пути ионов фотографическую пластинку (фотопленку), которая засвечивается в тех местах, куда попадают ионы. Так как $qvB' = mv^2/r$ и $v = E/B$, получаем

$$m = \frac{qB'r}{v} = \frac{qBB'r}{E}.$$

Все величины в правой части могут быть измерены, и таким образом определена масса m. Для ионов с одинаковым зарядом масса пропорциональна радиусу их траектории.

Таким методом были измерены массы многих атомов. При исследовании химически чистых веществ иногда обнаруживались две или несколько близких линий на фотопластинке. Неон, например, давал две линии, соответствующие радиусам кривизны для атомов с массами 20 и 22 а. е. м. Наличие примесей исключалось, и был сделан вывод, что существуют два вида атомов неона с различными массами. Различающиеся по массе атомы одного и того же химического вещества были названы *изотопами*. Вскоре выяснилось, что большинство элементов встречается в природе в виде смеси изотопов. Различие

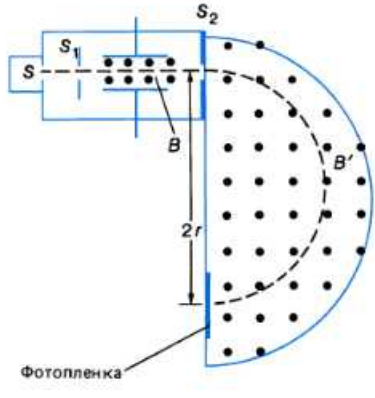


Рис. 28.19. Масс-спектрометр Бейнбриджа. Силовые линии B и B' направлены к читателю (и обозначены точками).

в массе, как мы увидим в гл. 42, обусловлено различием числа нейтронов.

Масс-спектрометры могут применяться для разделения не только различных химических элементов и их изотопов, но и молекул. Эти приборы используются в физических и химических, а также в биологических и биомедицинских исследованиях.

Пример 28.5. Обнаружено, что в исследуемом веществе атомы углерода с массой 12,0 а.е.м. смешаны с атомами неизвестного элемента. Радиус кривизны траектории углерода в масс-спектрометре равен 22,4 см, а для неизвестного элемента – 26,2 см. Какой элемент присутствует в образце? (Считайте, что ионы имеют одинаковый заряд.)

Решение. Поскольку масса пропорциональна радиусу кривизны траектории,

$$\frac{m_x}{m_c} = \frac{26{,}2 \text{ см}}{22{,}4 \text{ см}} = 1{,}17,$$

и $m_x = 1{,}17 \cdot 12{,}0$ а.е.м. $= 14{,}0$ а.е.м. Неизвестным элементом является, по-видимому, азот (см. приложение Г). Им, однако, может быть также изотоп углерода или кислорода. Это можно установить лишь с помощью дополнительного физического или химического анализа.

* 28.8. Циклотрон и синхротрон

Циклотрон был разработан в 1932 г. Э.О. Лоуренсом (1901–1958) в Калифорнийском университете в Беркли для ускорения заряженных элементарных частиц типа протонов и ионов. Использование ускоренных до высоких энергий частиц в качестве «снарядов» для изучения столкновений ядерных частиц позволило получить богатую информацию об атомных ядрах и элементарных частицах (гл. 43). Магнитное поле циклотрона заставляет частицы двигаться по траекториям, близким к круговым. Заряженные частицы движутся внутри двух D-образных полых металлических электродов (дуантов) (рис. 28.20). Всякий раз, когда частицы попадают в промежуток между дуантами, к электродам прикладывается ускоряющее напряжение. Происходит увеличение скорости частиц, а следовательно, и радиуса их траектории (см. пример

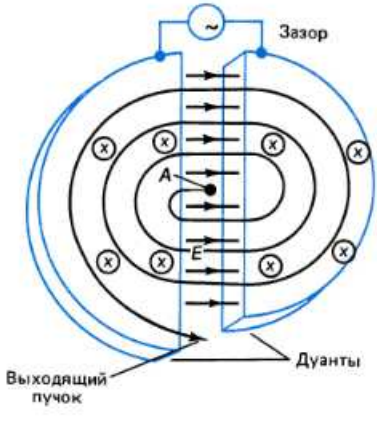


Рис. 28.20. Схема циклотрона. Магнитное поле, создаваемое большим электромагнитом, направлено от читателя. A – источник ионов. В зазоре показаны силовые линии электрического поля.

28.4, $r = mv/qB$). После большого числа оборотов протоны приобретают значительную кинетическую энергию и достигают периферии циклотрона. В конце концов они либо попадают на мишень, установленную внутри циклотрона, либо выводятся тщательно отъюстированным магнитом из циклотрона и направляются на внешнюю мишень.

Приложенное к дуантам ускоряющее напряжение должно быть переменным. Когда протоны движутся через промежуток вправо на рис. 28.20, правый дуант должен быть отрицательным, а левый – положительным. Спустя полпериода протоны будут пролетать промежуток влево, и левый дуант должен быть отрицательным, чтобы ускорить их. Частота приложенного напряжения должна быть равна частоте кругового движения протонов; это и есть циклотронная частота, введенная в разд. 28.4 [формула (28.7)].

Пример 28.6. В небольшом циклотроне с максимальным радиусом $R = 0{,}50$ м протоны ускоряются в магнитном поле 1,7 Тл. Рассчитайте а) требуемую частоту ускоряющего напряжения; б) кинетическую энергию протонов, покидающих циклотрон.

Решение. а) Согласно (28.7),

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(1{,}7\ \text{Тл})}{(6{,}28)(1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{кг})} =$$

$$= 2{,}6\cdot 10^{7}\ \text{Гц}.$$

б) Протоны, покидающие циклотрон, движутся по дуге радиусом $r = R = 0{,}50$ м. Поскольку $v = qBr/m$,

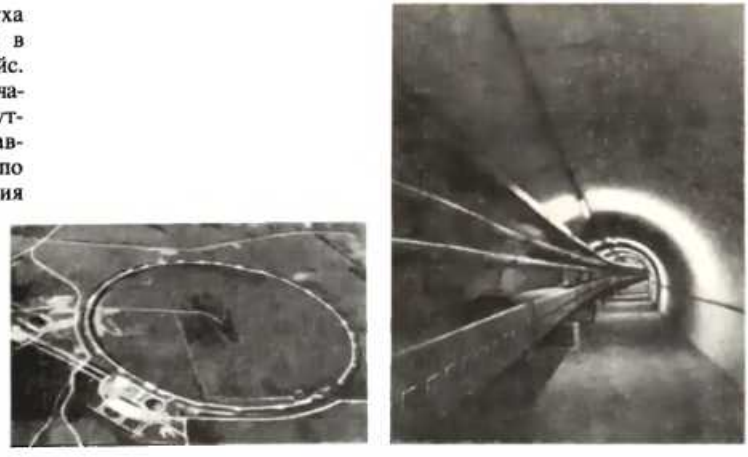
$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{q^2B^2R^2}{m^2} = \frac{q^2B^2R^2}{2m} =$$

$$= \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл})^2\,(1{,}7\ \text{Тл})^2\,(0{,}50\ \text{м})^2}{(2)\,(1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{кг})} =$$

$$= 5{,}5\cdot 10^{-12}\ \text{Дж},$$

или 34 МэВ. Интересно, что величина напряжения, приложенного к дуантам, не влияет на конечную энергию протонов, но, чем выше напряжение, тем за меньшее число оборотов будет достигнута конечная энергия.

Важное свойство циклотрона состоит в независимости частоты ускоряющего напряжения, определяемой равенством (28.7), от радиуса орбиты r. Другими словами, не надо изменять частоту по мере того, как ионы движутся, ускоряясь от источника по орбитам возрастающего радиуса. К сожалению, это справедливо лишь до тех пор, пока скорость частиц мала по сравнению со скоростью света. При бóльших скоростях масса частицы возрастает (как мы увидим в гл. 39) в соответствии с формулой теории относительности Эйнштейна: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, где m_0 – масса покоя. Это изменение массы становится заметным уже для протонов с энергией 34 МэВ в примере 28.6, когда кинетическая энергия составляет около 3% массы. Как следует из формулы (28.7), увеличение массы должно сопровождаться уменьшением частоты ускоряющего напряжения. Поэтому для достижения высоких энергий необходимы сложные электронные устройства, уменьшающие частоту ускоряющего напряжения, по мере того



а *б*

Рис. 28.21. *а* – вид с воздуха на кольцевой ускоритель в Батейвии, шт. Иллинойс. Диаметр кольца 2,0 км. *б* – участок кольца ускорителя внутри. Видны магниты, направляющие движение частиц по окружности. (С разрешения лаборатории Фермилаб.)

как скорость сгустка протонов нарастает и он выходит на орбиты со все возрастающим радиусом. Такой усовершенствованный циклотрон называется *синхроциклотроном* (или *фазотроном*).

Другой способ справиться с ростом массы по мере увеличения скорости основан на увеличении магнитной индукции B по мере ускорения частиц. Ускорители, основанные на этом принципе, называют *синхротронами*[1]; так действуют самые мощные гигантские ускорители. Синхротрон Национальной ускорительной лаборатории им. Э. Ферми (Фермилаб) в Батейвии, штат Иллинойс (США), имеет радиус 1,0 км (рис. 28.21), а ускоритель в ЦЕРНе (Европейском центре ядерных исследований в Женеве) – радиус 1,1 км. Протоны могут разгоняться этими ускорителями до энергии 500 ГэВ, а с установкой сверхпроводящих магнитов на ускорителе в Батейвии энергия протонов достигнет в недалеком будущем 1000 ГэВ. В подобных гигантских ускорителях обходятся, конечно, без магнитов, имеющих несколько километров в поперечнике, – используют небольшие магниты, которые образуют узкое кольцо и размещаются на одном и том же радиусе от центра окружности. Магниты разделены промежутками, в которых частицы ускоряются высоким напряжением. После «впрыскивания» (инжекции) частиц в ускоритель они должны двигаться по орбите постоянного радиуса. Поэтому частицы сначала значительно ускоряют в относительно небольшом ускорителе, а затем постепенно увеличивают магнитное поле по мере их дальнейшего ускорения в гигантском синхротроне. В гл. 43 мы обсудим многие из результатов, полученных на подобных установках в физике элементарных частиц.

[1] Точнее синхрофазотронами. Термин «синхротрон» относится строго говоря, к ускорителям, у которых частота ускоряющего напряжения остается постоянной. – *Прим. ред.*

* 28.9. Эффект Холла

Если проводник, по которому течет ток, жестко закреплен в магнитном поле, это поле оказывает на заряды, движущиеся в проводнике, силу, направленную перпендикулярно их движению. Если, например, электроны движутся в прямоугольном проводнике на рис. 28.22, *а* вправо, то направленное в плоскость чертежа магнитное поле будет создавать силу, направленную вниз. В результате электроны будут двигаться в основном не вблизи поверхности *R*, а около поверхности *S*. Вследствие этого между поверхностями проводника *R* и *S* возникнет разность потенциалов. Она будет увеличиваться до тех пор, пока обусловленное ею электрическое поле не уравновесит силу, действующую на движущиеся заряды со стороны магнитного поля. Это явление называется *эффектом Холла* по имени Э. Г. Холла (1855–1938), открывшего его в 1879 г. Возникающую разность потенциалов называют *ЭДС Холла*.

В большинстве случаев ток отрицательных зарядов вправо эквивалентен току положительных зарядов влево. Однако эффект Холла позволяет различить эти два случая. Как видно из рис. 28.22, *б*, движущиеся влево положительные заряды будут отклоняться вниз, так что нижняя поверхность приобретает положительный потенциал по отношению к верхней (на рис. 28.22, *а* – наоборот). Именно по полярности ЭДС Холла впервые удалось установить, что в большинстве проводников носители имеют отрицательный заряд. Однако эффект Холла показал, что у некоторых полупроводников ток обусловлен движением положительных зарядов (подробнее об этом см. в гл. 41).

Величина ЭДС Холла пропорциональна силе тока и магнитной индукции. Поэтому эффект Холла может быть использован для измерения магнитных полей. Вначале проводник (*датчик Холла*) калибруется в известных магнитных полях. Если поддерживать силу тока в нем посто-

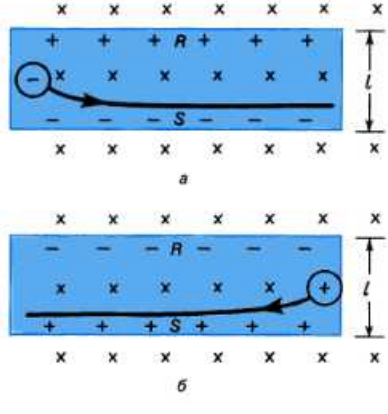


Рис. 28.22. Эффект Холла.

янной, то, измеряя ЭДС Холла, можно определять B. Датчики Холла очень удобны, они имеют малые размеры и обеспечивают высокую точность измерений.

* 28.10. Вращающий момент, действующий на виток с током. Магнитный дипольный момент

Если замкнутую проволочную петлю, по которой течет электрический ток, т. е. виток с током, поместить в магнитное поле (рис. 28.23), то со стороны магнитного поля на виток будет действовать вращающий момент. На этом явлении основан принцип действия ряда важных практических устройств: измерительных приборов, электродвигателей (в следующем разделе мы рассмотрим некоторые из них). Взаимодействие тока с магнитным полем играет важную роль в других областях, включая атомную физику.

Рассмотрим прямоугольный виток (рамку) (рис. 28.23) длиной a и шириной b. По рамке течет ток силой I; рамка расположена в горизонтальном однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции которого **B** составляет угол θ с нормалью к плоскости рамки. Она может свободно вращаться относительно вертикальной оси. Токоподводящие провода расположены очень близко друг к другу и скручены, так что действующими на них со стороны магнитного поля силами можно пренебречь (сила тока, втекающего в рамку, и сила тока, вытекающего из рамки, равны по величине и противоположны по направлению; оба тока текут очень близко друг от друга). Магнитные силы, действующие на горизонтальные участки рамки (длиной b), равны по величине и противоположны по направлению (направлены вверх и вниз по

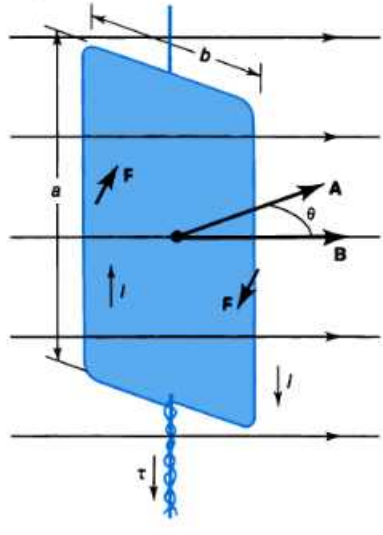


Рис. 28.23. К расчету вращающего момента, действующего на виток с током в магнитном поле с индукцией **B**.

вертикали); эти силы взаимно уравновешиваются и не создают ни результирующей силы, ни вращающего момента. Сила, действующая на каждый из вертикальных участков рамки длиной a, равна

$$F = IaB$$

[согласно (28.2)], поскольку эти участки перпендикулярны **B**; одна из сил направлена в плоскость чертежа, другая – из плоскости [по правилу правой руки; см. (28.3)], причем обе силы не лежат на одной прямой. Таким образом, эти силы создают вращающий момент. Плечо каждой из сил равно

$$\frac{b}{2}\sin\theta,$$

и результирующий вращающий момент

$$\tau = IaB\frac{b}{2}\sin\theta + IaB\frac{b}{2}\sin\theta = IAB\sin\theta,$$

где $A = ab$ – площадь рамки. Если рамка содержит N витков, то суммарный ток в каждом участке равен NI, и вращающий момент

$$\tau = NIAB\sin\theta. \qquad (28.10)$$

Эта формула, полученная здесь для прямоугольной рамки, справедлива для любой плоской катушки. В данном случае вращающий момент (согласно правилу правой руки, $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$) направлен вниз.

Произведение NIA называется *магнитным дипольным моментом* катушки с током и представляет собой вектор

$$\boldsymbol{\mu} = NI\mathbf{A}, \qquad (28.11)$$

где вектор **A** (и, следовательно, $\boldsymbol{\mu}$) направлен перпендикулярно плоскости катушки в соответствии с правилом правой руки (ладонь обхватывает катушку в направлении тока, и тогда большой палец указывает направление **A** и $\boldsymbol{\mu}$). Пользуясь этим определением $\boldsymbol{\mu}$, формулу (28.10) можно переписать в векторной форме:

$$\boldsymbol{\tau} = NI\mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

или

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \qquad (28.12)$$

что дает правильную величину и направление τ.

Формула (28.12) совпадает по виду с (22.8) для электрического диполя с дипольным моментом **p** в электрическом поле напряженностью **E**: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. Подобно тому как электрический диполь в электрическом поле обладает потенциальной энергией $U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, магнитный диполь также должен обладать потенциальной энергией в магнитном поле. Чтобы повернуть виток с током (рис. 28.23) в сторону увеличения θ, необходимо совер-

шить работу против магнитной силы. Следовательно, потенциальная энергия зависит от угла θ:

$$U = \int \tau d\theta = \int NIAB \sin\theta d\theta = -\mu B \cos\theta + C.$$

Если принять $U = 0$ при $\theta = \pi/2$, то постоянная интегрирования C обратится в нуль, и потенциальная энергия равна

$$U = -\mu B \cos\theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \qquad (28.13)$$

как и следовало предполагать. Магнитные стержни, стрелки компаса, а также витки (катушки) с током являются примерами магнитных диполей.

Пример 28.7. Определить магнитный дипольный момент электрона, движущегося по круговой орбите радиусом $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м вокруг протона (боровская модель атома водорода). (Примечание: это очень приближенная картина строения атома; в настоящее время ею уже не пользуются, но тем не менее она дает верный результат – см. гл. 40 и 41.)

Решение. Согласно второму закону Ньютона, $F = ma$, и поскольку электрон удерживается на круговой орбите кулоновской силой,

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}} = \sqrt{\frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})^2}{(9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг})(0{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{м})}} = 2{,}2 \cdot 10^6\ \text{м/с}.$$

Так как сила электрического тока – это количество заряда, проходящего через данную точку в единицу времени, движущийся по орбите электрон будет эквивалентен току

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r},$$

где $T = 2\pi r/v$ – время, за которое электрон совершает один оборот. Площадь орбиты электрона равна $A = \pi r^2$, и соответствующий магнитный дипольный момент

$$\mu = IA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)(\pi r^2) = \frac{evr}{2} = 9{,}3 \cdot 10^{-24}\ \text{А}\cdot\text{м}^2.$$

* 28.11. Приложения: гальванометры, электродвигатели, громкоговорители

Главной частью большинства измерительных приборов (амперметров, вольтметров, омметров) является *гальванометр*. Мы уже познакомились с конструкцией этих приборов (разд. 27.6); теперь же посмотрим, как работает их основной элемент – гальванометр. Как видно из рис. 28.24, в гальванометре имеется проволочная катушка, подвешенная в поле постоянного магнита. Когда по катушке (обычно прямоугольной формы) протекает ток, в магнитном поле возникает вращающий момент $\tau = NIAB \sin\theta$ [см. уравнение (28.10)]. Этому моменту противодействует пружинка, создающая вращающий мо-

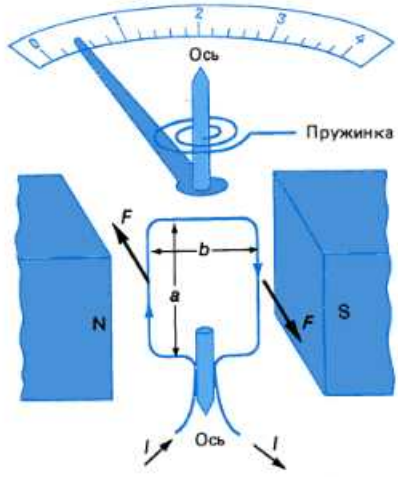


Рис. 28.24. Гальванометр.

мент τ_s, приблизительно пропорциональный углу ее закручивания ϕ (гл. 14). Иначе говоря,

$$\tau_s = k\phi,$$

где k – жесткость пружинки. Таким образом, катушка и прикрепленная к ней стрелка поворачиваются до тех пор, пока вращающий момент, создаваемый пружинкой, не уравновесит момент, создаваемый магнитными силами. Согласно (28.10), $k\phi = NIAB\sin\theta$, или

$$\phi = \frac{NIAB\sin\theta}{k}.$$

Мы видим, что угол отклонения стрелки ϕ прямо пропорционален силе тока I в катушке. Кроме того, однако, величина угла отклонения зависит и от угла θ, который катушка составляет с направлением магнитного поля. Для пользы дела надо, чтобы угол ϕ зависел только от I и не зависел от θ, но однородного магнитного поля B для этого недостаточно. Для решения этой проблемы полюсные наконечники магнита закругляют, а катушку гальванометра наматывают на цилиндрический железный сердечник (рис. 28.25). Силовые линии поля втягива-

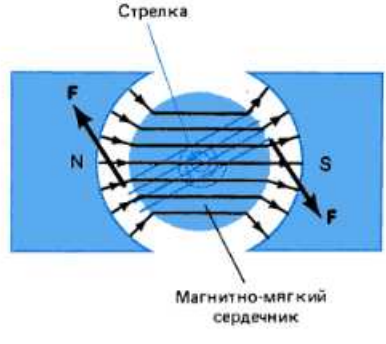


Рис. 28.25. Подвижная катушка гальванометра на железном сердечнике.

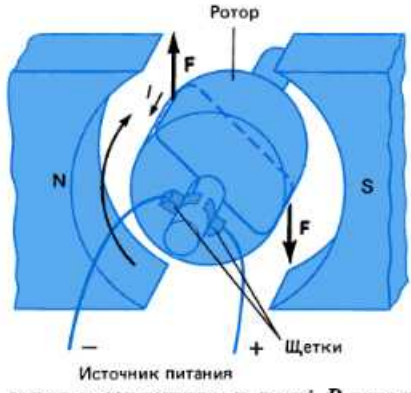


Рис. 28.26. Простой электродвигатель постоянного тока.

ются в сердечник, и поле́ B всегда направлено перпендикулярно торцу катушки. Поэтому сила всегда действует перпендикулярно торцу, и вращающий момент не зависит от угла отклонения стрелки. Угол отклонения ϕ, как и требовалось, будет пропорционален силе тока I.

Электродвигатель преобразует электрическую энергию в механическую (энергию вращательного движения). Электродвигатель постоянного тока основан на том же принципе действия, что и гальванометр, только катушка двигателя имеет бóльшие размеры и наматывается на цилиндрический сердечник – *ротор* двигателя (рис. 28.26). Электродвигатель имеет обычно несколько таких обмоток, но на рисунке показана только одна из них. Ротор закреплен на валу; у некоторых электродвигателей вместо постоянного магнита используется электромагнит. В отличие от гальванометра ротор двигателя должен все время вращаться в одном направлении. Это создает проблему, так как, когда катушка, которая на рис. 28.26 вращается по часовой стрелке, пройдет вертикальное положение, магнитные силы будут стремиться вернуть ее в это положение. Чтобы ротор продолжал непрерывно вращаться по часовой стрелке, необходимо изменить направление тока. В *двигателях постоянного тока* это переключение осуществляется с помощью *коллектора* и *щеток*. Как видно на рис. 28.27, щетки – это неподвижные

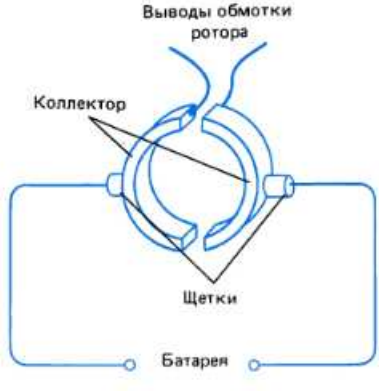


Рис. 28.27. Щетки и коллектор двигателя постоянного тока обеспечивают смену полярности напряжения на обмотке, и вращение происходит все время в одну сторону. Коллектор закреплен на валу ротора и вращается вместе с ним; щетки остаются неподвижными.

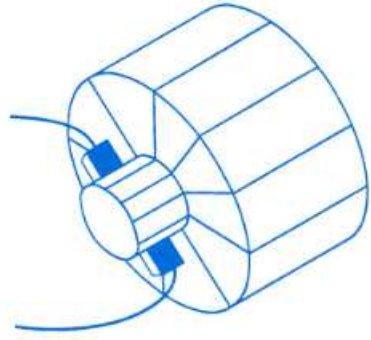


Рис. 28.28. Ротор электродвигателя с несколькими обмотками.

контакты, которые скользят по пластинам коллектора, укрепленным на валу двигателя. Через каждые полоборота коллектор переключается на другую щетку. В результате этого через полоборота изменяется направление тока в катушке, и ротор постоянно вращается в одну сторону. Большинство электродвигателей имеет несколько обмоток, размещенных в различных секциях ротора (рис. 28.28). Ток в каждой из обмоток протекает лишь на протяжении малой доли оборота, лишь когда ее ориентация относительно магнитного поля обеспечивает максимальный вращающий момент. Благодаря этому вращающий момент на валу двигателя распределен во времени более равномерно, чем при наличии только одной обмотки. Конструкции большинства используемых на практике электродвигателей несколько сложнее описанной выше, но основные принципы остаются теми же.

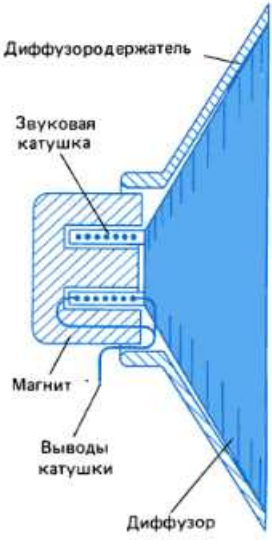


Рис. 28.29. Громкоговоритель.

Работа *громкоговорителя* тоже основана на взаимодействии токонесущего проводника с магнитом. Громкоговоритель подсоединяется на выходе радиоприемника или телевизора. Клеммы громкоговорителя внутренними проводами соединены с проволочной катушкой, прикрепленной к диффузору (рис. 28.29). Диффузор обычно изготовляется из жесткого картона и крепится с таким расчетом, чтобы имелась возможность его свободного перемещения. Соосно с катушкой крепится постоянный магнит. Когда в катушке протекает переменный ток звуковой частоты, на катушку и прикрепленный к ней диффузор действует сила, обусловленная взаимодействием с магнитным полем этого магнита. При изменении силы тока в катушке диффузор колеблется с частотой звукового сигнала, и в прилегающем к нему слое воздуха возникают сжатия и разрежения, т. е. появляются звуковые волны. Таким образом, громкоговоритель преобразует электрическую энергию в энергию звуковой волны, и частоты излучаемых им звуковых волн в точности воспроизводят входной электрический сигнал.

Заключение

Магнит имеет два полюса – северный и южный. Северным называется полюс, который при свободной подвеске магнита ориентируется на север. Разноименные полюса двух магнитов притягиваются, одноименные отталкиваются. Вокруг каждого магнита существует *магнитное поле*, и поэтому силу, с которой один магнит действует на другой, рассматривают как результат взаимодействия одного магнита с магнитным полем другого.

Магнитные поля создаются электрическим током. Например, силовые линии магнитного поля прямолинейного проводника с током имеют вид окружностей, в центре которых находится проводник; это поле воздействует на магнит, поднесенный к проводнику с током.

Магнитное поле действует на электрический ток. Сила, действующая на участок прямолинейного проводника длиной l, по которому течет ток силой I, равна $F = IlB\sin\theta$, где θ – угол между вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$ и проводником; сила направлена перпендикулярно проводнику и вектору магнитной индукции в соответствии с правилом правой руки. Приведенное соотношение служит определением магнитной индукции $\mathbf{B}$. Единицей магнитной индукции в системе СИ является тесла (Тл). В магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ на заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила $F = qvB\sin\theta$, где θ – угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$; в векторной записи $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Траектория частицы, движущейся перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля, представляет собой окружность. В общем случае, когда частица движется в области, где присутствуют и электрические, и магнитные поля,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

С помощью магнитных и электрических полей было измерено отношение заряда электрона к его массе e/m. Заряд электрона e был впервые определен Милликеном в опытах с масляными каплями, а затем из измерений e/m была найдена масса электрона.

Вопросы

1. Стрелка компаса не всегда устанавливается параллельно поверхности земли: один ее конец может быть наклонен вниз. Почему?
2. Как, по-вашему, могли образоваться природные магниты, которые находили в Магнезии?
3. Почему ненамагниченный кусок железа притягивается к любому полюсу магнита?
4. Пусть у вас имеются три железных стержня, два из которых намагничены, а третий нет. Как определить, какие стержни являются магнитами, не пользуясь никакими дополнительными предметами?
5. Два железных стержня притягивают друг друга, какими бы концами их ни сближали. Могут ли оба они быть магнитами?
6. Картина силовых линий магнитного стержня не отличается от картины электрического поля электрического диполя. Пользуясь этим, ответьте, как изменяется магнитное поле с расстоянием а) вблизи одного из полюсов очень длинного магнитного стержня; б) вдали от магнита как целого.
7. Изобразите силовые линии магнитного поля

горизонтального прямолинейного проводника, по которому ток течет влево.

8. Как направлены силовые линии магнитного поля прямолинейного проводника, по которому ток течет в направлении на вас?

9. Подковообразный магнит держат вертикально так, что его северный полюс находится слева, а южный – справа. По проводу, расположенному между полюсами магнита, течет ток в направлении от вас. В каком направлении действует на провод сила?

10. Заряженные частицы, приходящие на Землю из космоса (космические лучи), чаще достигают поверхности Земли вблизи полюсов, чем в более низких широтах. Почему? (См. рис. 28.5.)

11. Угол между какими векторами в формуле $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ всегда равен 90°? Угол между какими векторами может быть другим?

12. Приведенное в этой главе правило правой руки придется заменить «правилом левой руки», если подразумевать движение *отрицательно* заряженных частиц, например электронов в проводнике. Покажите, что во всех случаях, рассмотренных в этой главе, правилу правой руки будет соответствовать применительно к движению отрицательных зарядов аналогичное правило левой руки.

13. Можно ли привести в движение покоящийся электрон с помощью магнитного поля? С помощью электрического поля?

14. Заряженная частица движется в однородном магнитном поле по окружности. Опишите траекторию частицы после того, как в дополнение к магнитному полю включается электрическое поле, направленное в ту же сторону.

15. *Электромагнитный насос* основан на том, что на частицу в магнитном поле действует сила. Электромагнитные насосы применяются для перекачки жидких металлов (например, расплавленного натрия), а в последнее время их используют для прокачивания крови в аппаратах искусственного кровообращения. Схема такого насоса показана на рис. 28.30. Электрическое поле приложено перпендикулярно кровеносному сосуду и магнитному полю. Объясните, что приводит ионы в движение. Будет ли сила действовать на положительные и отрицательные ионы в одном направлении?

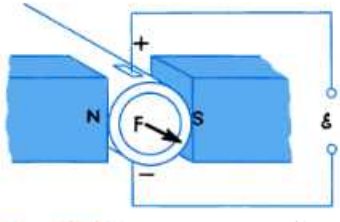


Рис. 28.30. Электромагнитный насос для прокачивания крови в сосуде.

16. Пучок электронов движется в направлении горизонтального проводника, по которому слева направо течет ток. В какую сторону отклонится пучок?

17. Какое поле или какие поля существуют в пространстве около движущегося электрического заряда?

18. Можно ли, вводя определение магнитной индукции, выбрать за направление вектора **B** направление силы, действующей на движущийся заряд? Объясните.

19. Заряженная частица движется в некоторой области пространства по прямой. Может ли в этой области существовать отличное от нуля магнитное поле? Если да, приведите два примера.

20. Если движущаяся заряженная частица в некоторой области пространства испытывает боковое отклонение, то можно ли с уверенностью утверждать, что в этой области $\mathbf{B} \neq 0$?

21. В некоторой области пространства существует однородное магнитное поле с индукцией **B**; за пределами этой области $B = 0$. Можно ли инжектировать электрон в поле так, чтобы он двигался в нем по замкнутой круговой траектории?

22. Как определить, отклоняются ли движущиеся электроны в определенной области пространства электрическим и магнитным полем (или и тем и другим)?

23. Если поднести магнит к экрану телевизора, изображение исказится. Почему? (С цветным телевизором этот опыт производить нельзя: кинескоп будет испорчен!)

***24.** Два иона имеют одинаковую массу, но один ионизован однократно, а другой двукратно. Как будут различаться их положения на фотопластинке в масс-спектрометре (рис. 28.19)?

***25.** Как изготовить компас, не используя железо или другой ферромагнитный материал?

***26.** Дуанты циклотрона – хороший проводник. Что можно сказать о действии на протоны внутри дуантов электрического поля, создаваемого переменным ускоряющим напряжением?

***27.** Чем ограничивается максимальная энергия протонов, достижимая в обычном циклотроне? Как преодолевается это ограничение в синхротроне?

***28.** Каким образом можно измерить дипольный момент магнитного стержня или стрелки?

***29.** В каком положении (если таковое существует) рамка с током, помещенная в однородное магнитное поле, будет находиться а) в устой-

чивом равновесии; б) в неустойчивом равновесии?

*30. Какие факторы определяют чувствительность гальванометра?

Задачи

Раздел 28.3

1. (I) Чему равна сила, действующая на 1 м прямолинейного проводника с током 10,5 А в магнитном поле с индукцией 1,70 Тл, расположенного а) перпендикулярно вектору **B**; б) под углом 45° к направлению **B**?

2. (I) Максимальное значение силы, действующей на проводник с током 12,0 А между полюсами магнита, равно 8,16 Н. Чему примерно равна магнитная индукция, если диаметр каждого из полюсов магнита 15 см?

3. (I) Вычислите силу, действующую со стороны магнитного поля Земли ($B = 5{,}0 \cdot 10^{-5}$ Тл) на проводник длиной 240 м с током 150 А, который натянут между двумя опорами и составляет 60° с направлением магнитного поля.

4. (II) Предположим, что прямолинейные проводники, подсоединенные к проводнику в виде полуокружности на рис. 28.11, отогнуты у основания полуокружности и расположены горизонтально. Чему равна сила, действующая на весь проводник, если в поле с магнитной индукцией **B** находятся кроме полуокружности прямолинейные участки длиной l каждый?

5. (II) Проволочный виток радиусом R, по которому течет ток I, помещен в магнитное поле, прямолинейные силовые линии которого как бы расходятся из точки, находящейся на оси витка на расстоянии d от его центра. (Иначе говоря, вектор **B** составляет угол θ с любой точкой витка; рис. 28.31, где $\operatorname{tg}\theta = R/d$.) Определите силу, действующую на виток.

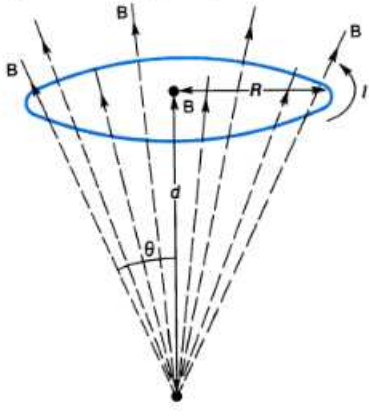


Рис. 28.31.

6. (II) На два жестких параллельных проводника, расположенных горизонтально на расстоянии l друг от друга, уложен, как на рельсы, перпендикулярно им легкий металлический стержень массой m. Эта система находится в однородном магнитном поле с индукцией **B**, направленном вертикально вверх. В момент $t = 0$ проводники-рельсы подключаются к источнику постоянного напряжения и через систему течет ток I. Определите скорость стержня как функцию времени, а) пренебрегая трением; б) считая коэффициент трения равным μ_k. в) В каком направлении (восточном или западном) движется стержень, если ток в нем течет на север?

7. (II) По криволинейному проводнику, соединяющему точки a и b, в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией **B**, течет ток I. Покажите, что сила, действующая со стороны магнитного поля на проводник, не зависит от его формы и равна силе, действующей на прямолинейный проводник, соединяющий точки a и b, по которому течет ток такой же силы I.

Раздел 28.4

8. (I) Определите величину и направление силы, действующей на электрон, движущийся горизонтально на восток со скоростью $8{,}7 \cdot 10^5$ м/с в магнитном поле с индукцией 0,75 Тл, направленном вертикально вверх.

9. (I) Опишите траекторию электрона, движущегося перпендикулярно направлению вектора магнитной индукции $|\mathbf{B}| = 0{,}012$ Тл со скоростью $8{,}1 \cdot 10^6$ м/с. Поле направлено на наблюдателя.

10. (I) Какая сила в магнитном поле Земли ($5{,}0 \cdot 10^{-5}$ Тл) действует на самолет, который приобрел электрический заряд 180 Кл и летит перпендикулярно силовым линиям магнитного поля со скоростью 280 м/с?

11. (I) Частица с зарядом q движется в однородном магнитном поле с индукцией **B** по окружности радиусом r. Покажите, что ее импульс есть $p = qBr$.

12. (II) Протон с кинетической энергией 50 МэВ попадает в магнитное поле 0,20 Тл. Чему равен радиус кривизны его траектории?

13. (II) Сила, действующая на электрон в магнитном поле, максимальна, когда он движется в западном направлении. Сила направлена вверх и равна $8{,}2 \cdot 10^{-13}$ Н при скорости электрона $3{,}9 \cdot 10^5$ м/с. Определите величину и направление вектора магнитной индукции **B**.

14. (II) Дважды ионизованный атом гелия с массой $6{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг ускоряется напряжением 2800 В. а) Чему равен радиус кривизны его траектории в однородном магнитном поле с

индукцией 0,240 Тл? б) За какое время будет совершаться полный оборот?

15. (II) Пуля массой 7,0 г движется со скоростью 300 м/с перпендикулярно магнитному полю Земли ($5{,}0\cdot10^{-5}$ Тл). Электрический заряд пули равен $3{,}5\cdot10^{-9}$ Кл. На какое расстояние отклонится пуля под действием магнитного поля Земли, пролетев 600 м?

16. (II) Пусть на экваторе индукция магнитного поля Земли равна $0{,}40\cdot10^{-4}$ Тл и вектор **B** направлен на север. С какой скоростью должен двигаться однократно ионизованный атом урана ($m = 238$ а.е.м., $q = e$), чтобы облететь вокруг Земли на высоте 5 км над экватором?

17. (II) На электрон, движущийся в магнитном поле $\mathbf{B} = 0{,}72\mathbf{k}$ Тл, действует сила $\mathbf{F} = (3{,}2\mathbf{i} - 2{,}7\mathbf{j})\cdot10^{-13}$ Н. Чему равна скорость электрона?

18. (II) Электрон со скоростью $3{,}0\cdot10^{7}$ м/с влетает в однородное магнитное поле с $B = 0{,}23$ Тл под углом 45° к направлению **B**. Определите радиус и шаг (расстояние между витками) спиральной траектории электрона.

19. (II) Выведенные из ускорителя протоны надо отклонить под прямым углом «отклоняющим магнитом», чтобы они не попали в защиту, находящуюся на их пути на расстоянии l от места вывода из ускорителя. Покажите, что магнитное поле отклоняющего магнита должно иметь индукцию $B \geqslant (2m\text{КЭ}/e^2l^2)^{1/2}$, где m – масса протона, а КЭ – его кинетическая энергия.

20. (II) Прямолинейный отрезок медного провода диаметром 2,0 мм «парит» горизонтально в воздухе, удерживаемый магнитным полем Земли ($B = 5{,}0\cdot10^{-5}$ Тл), вектор **B** индукции которого направлен горизонтально. Какой силы ток течет по проводу?

21. (III) *Эффект Зеемана.* В боровской модели атома водорода электрон удерживается на круговой орбите радиусом r около протона силой электростатического притяжения. Если атом поместить в слабое магнитное поле с индукцией **B**, то частота обращения электрона в плоскости, перпендикулярной **B**, изменится на величину

$$\Delta f = \pm\frac{eB}{4\pi m},$$

где e и m – соответственно заряд и масса электрона. а) Найдите этот результат, считая, что сила, обусловленная магнитным полем с индукцией **B**, много меньше силы электростатического притяжения. б) Что означает стоящий перед формулой знак $\pm$?

Раздел 28.5

22. (I) Чему равна скорость пучка электронов, который не испытывает отклонения в скрещенных электрическом ($8{,}8\cdot10^{3}$ В/м) и магнитном ($3{,}5\cdot10^{-3}$ Тл) полях? По окружности какого радиуса будут двигаться электроны, если снять электрическое поле?

23. (I) Протоны движутся по окружности радиусом 8,10 см в магнитном поле с индукцией 0,58 Тл. Какое электрическое поле надо наложить, чтобы протоны двигались по прямой? Как должен быть направлен вектор **E**?

24. (I) Чему равно отношение e/m для частицы, которая движется по окружности радиусом 8,0 мм в магнитном поле с индукцией 0,46 Тл, если ее траектория становится прямолинейной при перпендикулярном включении электрического поля напряженностью 200 В/м?

25. (II) Капелька масла массой $3{,}3\cdot10^{-15}$ кг висит неподвижно между двумя большими горизонтальными пластинами, находящимися на расстоянии 1,0 см друг от друга, при разности потенциалов между пластинами 340 В. Сколько избыточных электронов имеется на этой капле?

26. (III) В опытах Милликена массу масляной капли определяют, измеряя установившуюся скорость v_T свободного падения капли в воздухе в отсутствие электрического поля. При падении с установившейся скоростью «эффективный вес» капли равен силе трения, которая определяется по формуле Стокса (разд. 13.7) $F = 6\pi\eta r v_T$, где η – вязкость воздуха, а r – радиус капли. В вес капли $mg = {}^4/_3\pi r^2\rho g$ следует ввести поправку на подъемную силу в воздухе; для этого величину ρ заменяют на $(\rho - \rho_A)$, где ρ – плотность масла, а ρ_A – плотность воздуха. Покажите, что заряд капли равен

$$q = 18\pi\frac{d}{V}\sqrt{\frac{\eta^3 v_T^3}{2(\rho - \rho_A)g}},$$

где d – расстояние между пластинами (рис. 28.16), а V – напряжение, при котором капля зависает между пластинами. Все величины в правой части либо известны, либо могут быть измерены. Установившуюся скорость падения капли v_T определяют, измеряя время, за которое капля падает на определенное расстояние (каплю при этом наблюдают с помощью небольшой зрительной трубы).

* Раздел 28.6

*** 27.** (I) В приближении идеального газа рассчитайте среднеквадратичную скорость свободного электрона в металле при 300 и при 2500 К (обычная температура катода в электронной лампе).

*** 28.** (II) Чему примерно равно максимальное отклонение электронного пучка в центре экрана кинескопа под действием магнитного поля Земли с индукцией $5{,}0\cdot10^{-5}$ Тл? Экран нахо-

дится на расстоянии 20 см от электронной пушки, ускоряющей электроны напряжением а) 2,0 кВ; б) 30 кВ. Заметим, что в цветных телевизорах луч, чтобы попасть на люминофор нужного цвета, должен направляться на экран с точностью не хуже 1 мм. Поскольку влияние магнитного поля Земли в этом случае оказывается существенным, в кинескопах используются защитные экраны из мю-металла.

* 29. (II) В ЭЛТ электроны ускоряются напряжением 10,0 кВ. Экран имеет ширину 24 см и находится на расстоянии 25 см от отклоняющих пластин длиной 2,8 см. В каких пределах должна изменяться напряженность электрического поля между отклоняющими пластинами, чтобы электронный пучок отклонялся на весь экран?

* 30. (II) В электронно-лучевой трубке электроны ускоряются в горизонтальном направлении напряжением 25 кВ. Затем пучок проходит 3,5 см в однородном магнитном поле с индукцией B, в результате чего он отклоняется вверх и достигает верхней границы экрана (на 11 см выше его центра), который находится на расстоянии 22 см от отклоняющей системы. Оцените величину магнитной индукции B.

* Раздел 28.7

* 31. (I) В масс-спектрометре атомы германия имеют радиусы кривизны траектории 21,0; 21,6; 21,9; 22,2 и 22,8 см. Наибольший радиус соответствует изотопу с массой 76 а. е. м. Каковы атомные массы остальных изотопов?

* 32. (II) В масс-спектрометре на рис. 28.19 применяются электрическое поле напряженностью $2{,}18 \cdot 10^4$ В/м и магнитное поле с индукцией $B = B' = 0{,}57$ Тл. Источник содержит изотопы бора с массами 10 и 11 а. е. м. (1 а. е. м. = $= 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг). На каком расстоянии друг от друга расположатся на фотопластинке однократно ионизованные атомы этих изотопов?

* 33. (II) Масс-спектрометр используется для контроля загрязнений воздуха. Однако при разделении молекул с почти одинаковой массой, например CO (28,0106 а. е. м.) и N_2 (28,0134 а. е. м.), возникают затруднения. Какой радиус кривизны нужен, чтобы на пластинке эти молекулы отстояли друг от друга на 0,24 мм?

* 34. (II) В одном из масс-спектрометров ионы до входа в магнитное поле с индукцией B ускоряются разностью потенциалов V. Будем считать, что начальная скорость ионов (до ускорения) равна нулю. Покажите, что масса иона равна $m = qB^2R^2/2V$, где R – радиус кривизны траектории ионов в магнитном поле, а q – заряд иона.

* Раздел 28.8

35. (I) Чему равна индукция магнитного поля циклотрона, если протоны совершают в нем $2{,}1 \cdot 10^7$ оборотов в секунду?

* 36. (I) Какой должна быть частота ускоряющего напряжения на дуантах циклотрона из примера 28.6, если в нем ускоряются альфа-частицы?

* 37. (I) Какой максимальной кинетической энергии могут достичь альфа-частицы в циклотроне из примера 28.6? Чему будет равна их скорость?

* 38. (I) Амплитуда ускоряющего напряжения на дуантах циклотрона равна 60 кВ. Сколько оборотов должны совершить в нем протоны, чтобы приобрести кинетическую энергию 20 МэВ?

* 39. (II) Какую максимальную кинетическую энергию могут приобрести дейтроны ($^2_1$H) в циклотроне из примера 28.6? А ионы лития $^7_3Li^{3+}$? Какой должна быть частота ускоряющего напряжения в каждом случае?

* 40. (II) В синхротрон Фермилаба, находящийся в Батейвии, с радиусом 1,0 км инжектируются протоны, ускоренные до энергии 8,0 ГэВ. На каждом обороте протоны ускоряются разностью потенциалов 2,5 МВ. Сколько времени потребуется, чтобы сообщить протонам энергию 400 ГэВ? Какой путь пройдут за это время протоны? (При таких энергиях скорость протонов близка к скорости света $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с.)

Раздел 28.9

* 41. (II) а) Покажите, что ЭДС Холла дается формулой $\mathcal{E} = v_d Bl$, где v_d – скорость дрейфа носителей заряда в плоском проводнике шириной l (рис. 28.22). б) Выразите $\mathcal{E}$ через силу электрического тока в проводнике, пользуясь упрощенным микроскопическим представлением, данным в разд. 26.5. в) Определите плотность электронов n в проводнике, выразив ее через измеренные значения $\mathcal{E}$, B, l, силу тока I и площадь сечения проводника.

* 42. (II) Эффект Холла может быть использован для измерения скорости кровотока: кровь содержит ионы, создающие электрический ток. Соответствующий прибор напоминает электромагнитный насос (см. вопрос 15, рис. 28.30), только кровь течет в артерии сама по себе, и вместо источника внешнего напряжения к пластинам подключается потенциометр, измеряющий ЭДС Холла. а) Зависит ли ЭДС Холла от знака заряда ионов? б) Пользуясь решением предыдущей задачи, определите скорость кровотока в артерии диаметром 3,3 мм, если

магнитная индукция равна 0,070 Тл, а ЭДС Холла 0,10 мВ. (На практике в таких приборах используют не постоянные, а переменные магнитные поля.)

* Раздел 28.10

*43. (I) Виток с током диаметром 10,0 см помещен в однородное магнитное поле между полюсами большого магнита так, что плоскость витка параллельна силовым линиям. Когда в витке течет ток силой 8,10 А, на него действует вращающий момент 0,116 Н·м. Чему равна индукция магнитного поля B?

*44. (I) Какую работу надо совершить, чтобы повернуть рамку с током (рис. 28.23) в однородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ а) от $\theta = 0$ ($\boldsymbol{\mu} \| \mathbf{B}$) до $\theta = 180°$; б) от $\theta = 90°$ до $\theta = -90°$?

*45. (II) Покажите, что магнитный дипольный момент μ электрона, движущегося по орбите вокруг протона в атоме водорода, связан с орбитальным моментом электрона L соотношением

$$\mu = \frac{e}{2m} L.$$

*46. (II) Катушка диаметром 12,0 см, содержащая 8 витков провода, лежит плашмя на земле. Индукция магнитного поля Земли в этом месте равна $5{,}50 \cdot 10^{-5}$ Тл; вектор $\mathbf{B}$ направлен к Земле под углом 66,0°, вниз от направления на истинный север. В катушке по часовой стрелке протекает ток силой 6,10 А. а) Определите вращающий момент, действующий на катушку. б) Какая часть катушки будет подниматься вверх – северная, восточная, южная или западная?

*47. (III) Имеется квадратная рамка из алюминиевой проволоки со стороной 22,5 см. По ней должен протекать ток силой 12,0 А; при этом она будет вращаться в магнитном поле с индукцией 1,50 Тл. а) Каким должен быть минимальный диаметр проволоки, чтобы рамка не подверглась деформации растяжения или сдвига? Запас прочности примите равным 10 (табл. 11.2). б) Чему равно сопротивление одного витка такой проволоки?

*48. (II) Покажите, что вращающий момент, действующий на плоский виток любой конфигурации, дается выражением (28.10). [Подсказка: представьте виток произвольной формы в виде комбинации очень узких прямоугольных витков и воспользуйтесь методом, ранее примененным для вычисления изменений энтропии (рис. 21.11).]

*49. (III) Пусть непроводящий стержень длиной L обладает равномерно распределенным зарядом Q. Стержень вращается с угловой скоростью ω относительно перпендикулярной оси, проходящей через один из его концов. Покажите, что магнитный дипольный момент вращающегося стержня равен $^1/_6 Q\omega L^2$. (Подсказка: рассмотрите движение каждого бесконечно малого участка стержня.)

* Раздел 28.11

*50. (I) Стрелка гальванометра отклоняется на всю шкалу при силе тока 34,0 мкА. Какой будет сила тока полного отклонения этого гальванометра, если индукция магнитного поля уменьшится до 0,900 своего первоначального значения?

*51. (I) Какой будет сила тока полного отклонения гальванометра, если жесткость возвратной пружинки ослабнет с годами на 12%, а вначале эта сила тока составляла 45,0 мкА?

*52. (I) Во сколько раз уменьшится вращающий момент на валу двигателя, если силу тока в обмотке уменьшить на 20%?

29 Источники магнитного поля

В предыдущей главе мы рассматривали главным образом, как магнитное поле действует на электрические токи и движущиеся электрические заряды (т. е. создаваемые им силы и вращающие моменты). Мы видели, однако, что магнитное поле создают не только магниты, но и электрический ток (великое открытие Эрстеда). Именно этой стороне магнетизма – созданию магнитных полей – посвящена настоящая глава.

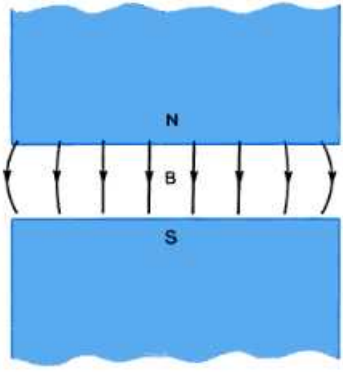


Рис. 29.1. Индукция магнитного поля между полюсами большого магнита почти однородна (за исключением области по краям полюсов).

Простейший вид магнитных полей – это однородное поле, т. е. поле, которое не изменяется от точки к точке. Создать идеально однородное поле на большой площади довольно трудно. Однако магнитное поле между плоскими полюсными наконечниками магнита будет почти однородным, если площадь полюсов велика по сравнению с расстоянием между ними (рис. 29.1). Только по краям поле слегка «выдавливается», и его однородность нарушается. Параллельные, равномерно расположенные на чертеже силовые линии показывают, что в точках, не слишком близких к краям, поле однородно.

Чаще приходится сталкиваться с неоднородными магнитными полями, и тогда необходимо знать, как магнитное поле изменяется от точки к точке. Мы покажем, как в некоторых простых случаях можно вычислить магнитную индукцию, и обсудим некоторые общие соотношения между магнитными полями и их источниками.

29.1. Магнитное поле прямолинейного проводника

В предыдущей главе (рис. 28.7) мы уже видели, что силовые линии магнитного поля, создаваемого электрическим током в длинном прямолинейном проводнике, имеют вид концентрических окружностей с центром на проводнике. Можно было ожидать, что магнитная индукция в данной точке будет тем больше, чем больше сила тока в проводнике, и что она должна ослабевать по мере удаления от проводника. Так оно и есть. Тщательные измерения показали, что индукция магнитного поля B в окрестности проводника прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и обратно пропорциональна расстоянию r до

проводника:

$$B \sim \frac{I}{r}.$$

Эта зависимость справедлива при условии, что расстояние r по перпендикуляру до проводника намного меньше расстояния до его концов.

Коэффициент пропорциональности записывается в виде $\mu_0/2\pi$[1)], и тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{[в окрестности длинного прямолинейного проводника]}. \qquad (29.1)$$

Константа μ_0 называется *магнитной постоянной* (магнитной проницаемостью вакуума) и равна

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Тл} \cdot \text{м/А}.$$

[Не следует путать μ_0 с $\boldsymbol{\mu}$ – магнитным дипольным моментом (разд. 28.10): они никак не связаны между собой.]

Пример 29.1. По вертикальному проводнику в стене здания течет вверх постоянный ток силой 25 А. Чему равна индукция магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии 10 см к северу от этого проводника?

Решение. По формуле (29.1)

$$B = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Тл} \cdot \text{м/А})(25\ \text{А})}{(2\pi)(0{,}10\ \text{м})} =$$

$$= 5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл},$$

или 0,50 Гс. По правилу правой руки (рис. 28.7, *б*) вектор **B** направлен в этой точке на запад. Так как поле тока примерно равно по величине магнитному полю Земли, стрелка компаса в этой точке будет указывать не на север, а на северо-запад.

29.2. Закон Ампера

Формула (29.1) устанавливает связь между силой тока в длинном прямолинейном проводнике и создаваемым им магнитным полем. Она справедлива только для длинного прямолинейного проводника. Возникает вопрос: не существует ли общего соотношения между током в проводнике произвольной конфигурации и создаваемым им магнитным полем? Такое соотношение вывел французский физик Андре Мари Ампер (1775–1836) вскоре после открытия Эрстеда. Рассмотрим произвольный замкнутый контур, охватывающий проводник с током (рис. 29.2), и разобьем его на малые участки длиной Δl. Вычислим произведение длины каждого участка Δl на компоненту

[1)] Коэффициент пропорциональности записывается в таком виде, чтобы закон Ампера (см. следующий раздел) имел простую и изящную форму.

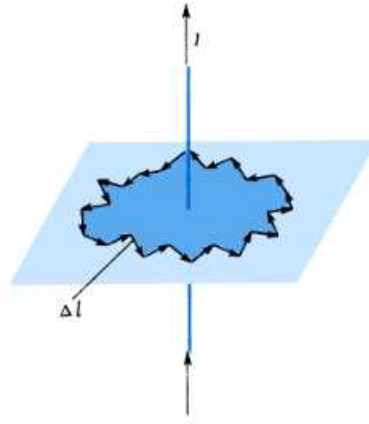


Рис. 29.2. Произвольный замкнутый контур, охватывающий проводник с током (к закону Ампера). Контур разбивается на элементы равной длины Δl.

вектора **B**, параллельную этому участку (обозначим ее $B_\parallel$). Сумма таких произведений по всему контуру равна, как установил Ампер, произведению μ_0 на результирующую силу тока I, пересекающего охваченную контуром поверхность:

$$\sum B_\parallel \Delta l = \mu_0 I.$$

Разбиение контура на малые участки осуществляется так, чтобы компонента $B_\parallel$ была постоянной в пределах каждого элемента Δl. Суммирование ведется по *замкнутому контуру*, I – это результирующая сила тока, протекающего через поверхность, ограниченную замкнутым контуром. В пределе $\Delta l \to 0$ сумма превращается в интеграл

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I, \qquad (29.2)$$

где $d\boldsymbol{l}$ бесконечно малый (векторный) элемент длины; скалярное произведение автоматически учитывает только параллельную компоненту вектора **B**. Формула (29.2) является выражением фундаментального закона электромагнетизма – **закона Ампера**. Интеграл в (29.2) берется по замкнутому контуру, охватывающему ток I.

Чтобы лучше понять смысл закона Ампера, применим его к простому случаю, уже рассмотренному выше (который, кстати, вдохновил Ампера на это открытие). Найдем **B** в точке A на расстоянии r от длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток I (рис. 29.3). Мы уже знаем, что силовые линии магнитного поля в этом случае имеют вид окружностей, в центре которых находится проводник. Поэтому, применяя формулу (29.2), мы выберем в качестве контура интегрирования окружность радиусом r (можно выбирать замкнутый контур по своему желанию, и мы выбираем самый удобный). Этот выбор оправдан тем, что в любой точке контура вектор **B** направлен по касательной к окружности. Таким образом, для любого малого элемента контура (рис. 29.3) вектор **B** параллелен ему, и, следо-

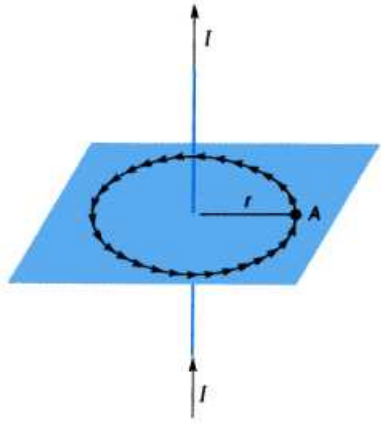


Рис. 29.3. Круговая траектория радиусом r.

вательно,

$$\mu_0 I = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B(2\pi r).$$

Выражая отсюда B, получим формулу (29.1) для индукции магнитного поля длинного прямолинейного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Так в приведенном простом примере закон Ампера дает нужный результат. Многочисленные эксперименты подтверждают и общую справедливость закона Ампера. Однако, как и в случае теоремы Гаусса для электрического поля, практическое применение закона Ампера для вычисления магнитных полей ограничивается главным образом простыми ситуациями. Его главная ценность состоит в том, что этот закон устанавливает математически простую и изящную связь между магнитным полем и током. Поэтому закон Ампера относят к фундаментальным законам электричества и магнетизма; он выполняется во всех случаях, когда токи и поля постоянны и не изменяются во времени и нет магнитных материалов.

Теперь ясно, почему коэффициент пропорциональности в (29.1) записан в виде $\mu_0/2\pi$: благодаря этому в (29.2) входит только μ_0 [а не, скажем, $2\pi k$, как в случае, если бы мы обозначили в (29.1) коэффициент пропорциональности через k], и фундаментальный закон Ампера записывается в более простом виде.

Следует отметить, что индукция **B** в законе Ампера может быть обусловлена не только силой тока I. Закон Ампера, как и теорема Гаусса для электрического поля, справедлив в общем случае. Индукция магнитного поля **B** характеризует поле в каждой точке пространства вдоль замкнутого контура, обусловленное всеми источниками магнитного поля, включая и силу тока I, охватываемого

контуром. Например, магнитная индукция **B** двух параллельных проводников с током (рис. 29.4) будет (векторной) суммой полей, создаваемых каждым из токов, и картина силовых линий выглядит, как показано на рисунке. Если в качестве контура интегрирования в (29.2)

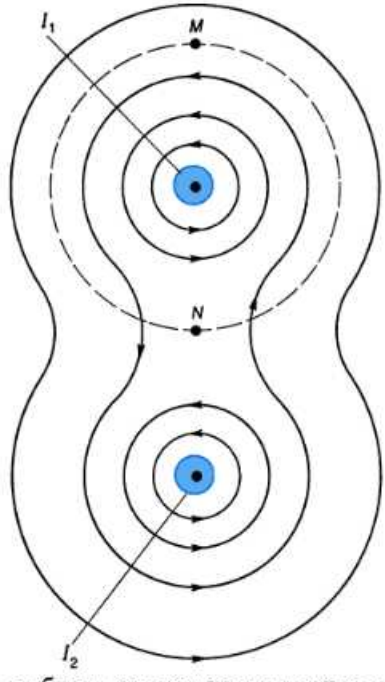


Рис. 29.4. Силовые линии магнитного поля вокруг двух параллельных проводников с током, по которым текут токи I_1 и I_2 (здесь $I_1 = I_2$; токи направлены к читателю).

выбрать окружность с центром на одном из проводников и радиусом меньше, чем расстояние между проводниками (штриховая линия на рис. 29.4), то в правую часть (29.2) войдет только сила тока I_1, охваченного контуром; в левой же части величина **B** должна представлять собой полную индукцию магнитного поля, обусловленную в каждой точке обоими токами. Этот пример затрагивает еще один момент: оказывается, что $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ по контуру, обозначенному на рис. 29.4, не зависит от наличия или отсутствия второго проводника с током: в любом случае он равен $\mu_0 I_1$. Как это может быть? Дело в том, что поля, создаваемые проводниками, в точках между ними (например, в точке N) взаимно компенсируются ($\mathbf{B} = 0$ в точке посредине между проводниками, если $I_1 = I_2$); тогда как в точках с «внешней» стороны от каждого из проводников (например, в точке M) значения индукции складываются. Когда мы берем интеграл $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l}$, эти эффекты компенсируют друг друга, и $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$ независимо от наличия или отсутствия второго проводника с током. Интеграл $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ в любом случае будет иметь одно и то же значение, хотя индукция **B** в каждой точке контура в этих двух случаях будет различной.

Пример 29.2. По длинному прямолинейному цилиндрическому проводнику радиусом R течет ток силой I с постоянной плотностью внутри проводника. Определите индукцию магнитного поля а) снаружи проводника ($r > R$); б) внутри проводника ($r < R$) (рис. 29.5, *а*). (Считайте, что расстояние r от центра проводника мало по сравнению с расстоянием до его концов.)

Решение. а) В силу симметрии – поскольку проводник представляет собой длинный прямой цилиндр – индукция магнитного поля должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра проводника[1]. Можно предположить также, что вектор **B** направлен по касательной к окружности, проведенной вокруг проводника (рис. 28.7). Поэтому в качестве контура интегрирования выберем окружность, описанную вокруг проводника концентрично с ним ($r > R$). Тогда

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(2\pi r) = \mu_0 I,$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad [r < R],$$

что совпадает с результатом, полученным ранее для тонкого проводника.

б) Внутри проводника ($r < R$) вновь выберем контур в виде концентрической окружности; вектор **B** направлен по касательной к окружности, и величина индукции магнитного поля в силу симметрии должна быть одинаковой во всех точках контура. Охваченный контуром ток меньше полного тока I во столько же раз, во сколько площадь контура меньше площади сечения проводника: $\pi r^2 / \pi R^2$. Тогда, согласно закону Ампера,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(2\pi r) = \mu_0 I \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \right),$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad [r < R].$$

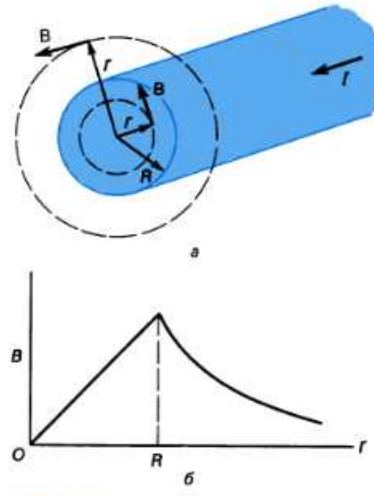


Рис. 29.5. Индукция магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника с током (к примеру 29.2).

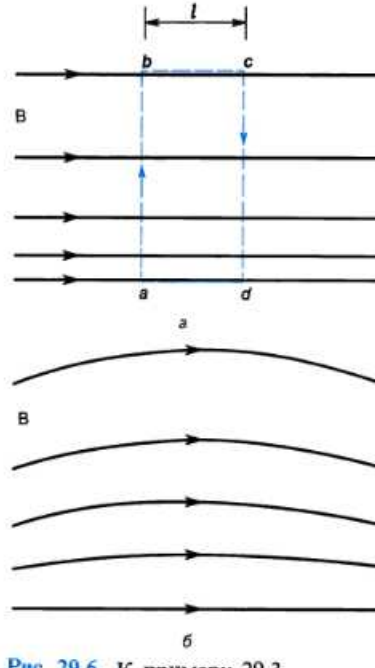


Рис. 29.6. К примеру 29.3.

[1] Нет причин, по которым какие-либо точки из всей совокупности точек, находящихся на одинаковом расстоянии от проводника, были бы выделены; все они физически эквивалентны, и поэтому во всех этих точках индукция B должна иметь одно и то же значение.

Индукция магнитного поля равна нулю в центре проводника и линейно возрастает с увеличением расстояния до центра, пока $r \leqslant R$; при $r \geqslant R$ величина B убывает как $1/r$ (рис. 29.5, *б*). Заметим, что эти результаты справедливы для точек, близких к проводнику по сравнению с расстоянием до его концов. Чтобы по проводнику протекал ток, проводник надо соединить с источником (например, батареей), и магнитные поля вокруг соединительных проводов будут, если только они не удалены на большое расстояние, нарушать предполагаемую симметрию.

Пример 29.3. Докажите, пользуясь законом Ампера, что неоднородное магнитное поле не может иметь одно и то же направление во всем пространстве, как изображено на рис. 29.6, *а*.

Решение. Силовые линии в нижней части рисунка расположены теснее, чем в верхней; это указывает, что индукция магнитного поля внизу больше, чем вверху. Применим закон Ампера к прямоугольному контуру *abcd* (штриховые линии на рис. 29.6, *а*). Так как внутри контура тока нет,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 .$$

Интеграл вдоль участков *ab* и *cd* равен нулю, так как здесь $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$. Таким образом,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{bc} l - B_{ad} l = (B_{bc} - B_{ad}) l ,$$

а это выражение не равно нулю, поскольку индукция B_{bc} вдоль *bc* меньше, чем индукция B_{ad} вдоль *ad*. Мы пришли к противоречию: интеграл $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, который должен быть равен нулю (поскольку $I = 0$), оказывается отличным от нуля. Тем самым доказано, что существование неоднородного магнитного поля, имеющего всюду одно и то же направление, противоречит закону Ампера. У неоднородного поля направление вектора **B** должно изменяться, как на рис. 29.6, *б* (докажите это самостоятельно). Такой вид имеют силовые линии между полюсами постоянного магнита вблизи его краев (см. рис. 29.1).

29.3. Магнитное поле соленоида и тора

Соленоидом называется длинная катушка с большим числом витков в обмотке. Соленоиды находят множество применений; мы увидим, что магнитное поле соленоида напоминает поле магнитного стержня. Индукция магнитного поля внутри соленоида может быть весьма большой, так как поле внутри соленоида возникает в результате суммирования полей, создаваемых каждым витком катушки. На рис. 29.7, *а* показана картина силовых линий для случая соленоида, намотанного с большим шагом (большим расстоянием между витками). В непосредственной близости к проводнику силовые линии представляют собой окружности, как и в случае прямолинейного проводника (на расстояниях, малых по сравнению с радиусом намотки). В промежутках между соседними витками поля взаимно компенсируются. В центре соленоида магнитные поля складываются и возникает почти однородное поле. У длинного соленоида с плотной намоткой поле внутри практически однородно и вектор **B** направлен вдоль оси соленоида по всему сечению, как на рис. 29.7, *б*. Индукция магнитного поля снаружи соленоида очень мала по сравнению с индукцией поля внутри (за исключением области вблизи концов соленоида): это ясно хотя бы из того, что те же самые силовые линии, тесно сжатые

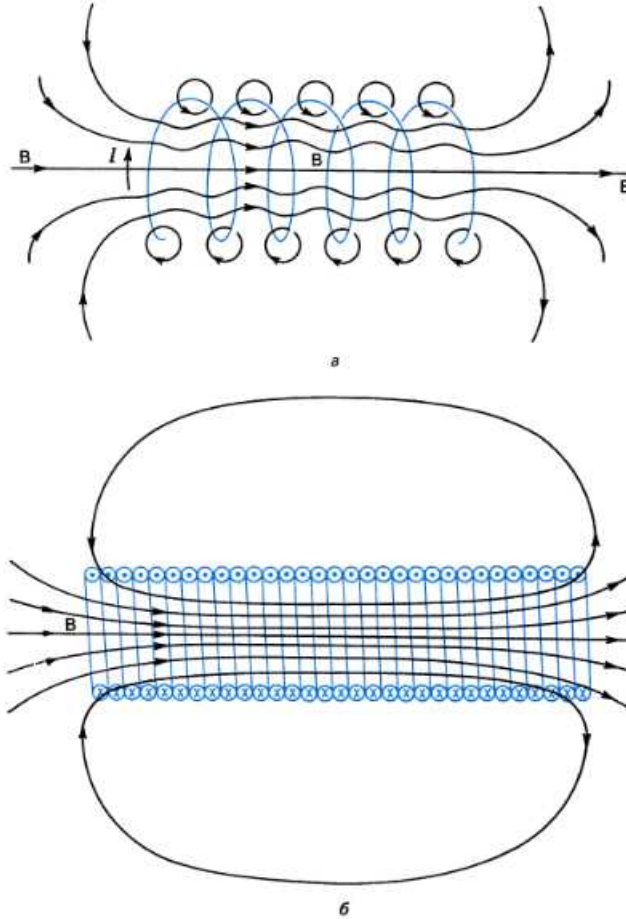


Рис. 29.7. Магнитное поле соленоида: *а* – с большим шагом намотки; *б* – с плотной намоткой.

внутри соленоида, распределены снаружи по обширному пространству.

Применим закон Ампера для расчета индукции магнитного поля длинного (в идеале – бесконечно длинного) соленоида с плотной намоткой. В качестве контура интегрирования возьмем контур *abcd*, проведенный вдали от концов соленоида (рис. 29.8). Выделим вклады в интеграл от каждой из сторон прямоугольника *ab*, *bc*, *cd*, *da*:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{B} + d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B} + d\mathbf{l}.$$

Индукция магнитного поля вне соленоида настолько мала, что ее вкладом можно пренебречь: поэтому первый член равен нулю. Далее направление вектора **B** перпендикулярно отрезкам *bc* и *da* внутри соленоида, а снаружи и между витками индукция почти равна нулю. Соответствующие члены тоже пренебрежимо малы. Таким образом, в интеграле по замкнутому контуру остается толь-

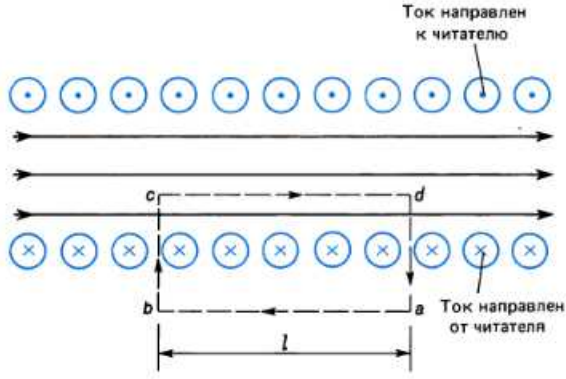


Рис. 29.8. Магнитное поле внутри длинного соленоида однозначно. Штриховыми линиями показан контур, выбранный для применения закона Ампера.

ко вклад

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_c^d \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = Bl,$$

где B – индукция магнитного поля внутри соленоида, а l – длина отрезка cd. Определим теперь силу тока, охваченного контуром. Если в обмотке соленоида течет ток I, то внутри контура интегрирования $abcd$ заключен ток NI, где N – число витков внутри контура. Согласно закону Ампера,

$$Bl = \mu_0 NI$$

или

$$B = \mu_0 nI \quad \text{[внутри соленоида]}, \tag{29.3}$$

где $n = N/l$ – *число витков на единицу длины соленоида.* Такую величину имеет индукция магнитного поля внутри соленоида. Заметим, что B зависит только от числа витков на единицу длины (плотности намотки соленоида) и силы тока I и не зависит от выбора точки внутри соленоида – поле однородно. Строго говоря, это верно только для бесконечно длинного соленоида, но и в реальных соленоидах для точек, не слишком близких к одному из концов, полученное выражение дает хорошее приближение.

Пример 29.4. По обмотке соленоида, содержащей 400 витков, течет ток 2,0 А. Длина соленоида 10 см. Определить индукцию магнитного поля внутри соленоида недалеко от его центра.

Решение. Плотность намотки соленоида равна $n = 400/10$ см $= 4{,}0\cdot 10^3$ м$^{-1}$. Тогда

$$B = \mu_0 nI = (12{,}57\cdot 10^{-7}\ \text{Тл}\cdot\text{м/А})(4{,}0\cdot 10^3\ \text{м}^{-1})\times (2{,}0\ \text{А}) = 1{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{Тл}.$$

Обратите внимание на то, что поле снаружи соленоида (рис. 29.7) очень напоминает поле магнитного стержня (рис. 28.4). И действительно, соленоид ведет себя подобно магниту: один его конец является северным полюсом, другой – южным; положение полюсов зависит от направ-

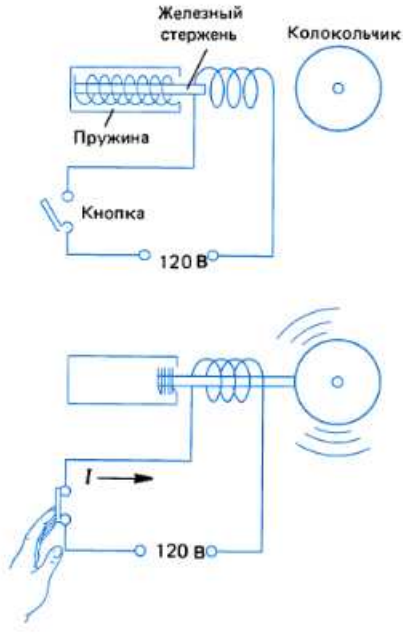


Рис. 29.9. Использование соленоида в дверном звонке.

ления тока в обмотке. Магнитные силовые линии выходят из северного полюса магнита; на рис. 29.7 северные полюса соленоидов находятся справа.

В технике широко используют соленоид, в который частично вводят железный сердечник. Часто эту систему и называют соленоидом. Простейшим примером его применения служит дверной звонок (электрический звонок; рис. 29.9). При нажатии кнопки цепь замыкается, катушка становится магнитом и, как любой магнит, притягивает железный сердечник. Сердечник втягивается в катушку и ударяет по колокольчику. Более мощный соленоид используется в автомобильном стартере: поворачивая ключ зажигания, вы включаете не только стартер, но и соленоид, который вводит стартер в зацепление с маховиком. Соленоиды используются и во многих других устройствах, например в магнитофонах. Они удобны тем, что позволяют быстро и точно перемещать рычаги, переключатели и т. п.

Пример 29.5. *Тор.* Пользуясь законом Ампера, определите магнитную индукцию а) внутри и б) снаружи тора, который представляет собой соленоид, свернутый в кольцо (рис. 29.10, *а*).

Решение. а) Силовые линии магнитного поля представляют собой окружности, проходящие внутри тора. (Можно представить себе, что, превращая соленоид в тор, мы сгибаем и силовые линии поля.) В качестве контура интегрирования возьмем одну из силовых линий радиусом r внутри тора (штриховая линия, обозначенная «траектория 1» на рис. 29.10, *а*). Наш выбор обусловлен симметрией задачи: величина индукции B должна быть постоянной вдоль выбранного контура (хотя и не обязательно постоянна по сечению тора); согласно закону Ампера:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

получаем

$$B(2\pi r) = \mu_0 NI,$$

где N – общее число витков, а I – сила тока в витке (сила тока в обмотке). Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

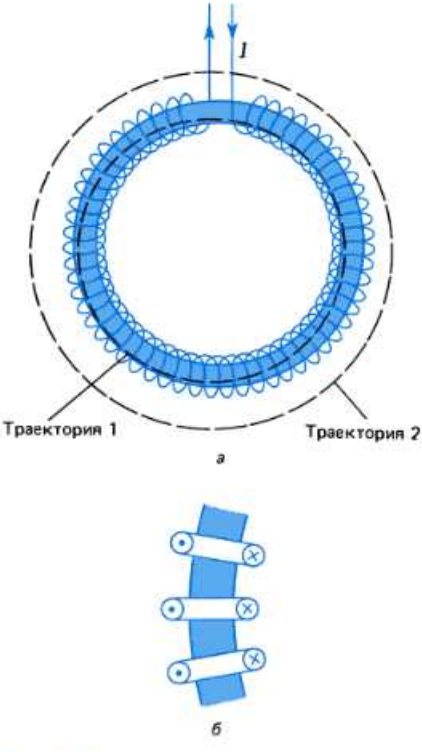


Рис. 29.10. *а* – тор; *б* – участок тора, на котором показаны направления тока в трех витках: слева – к читателю; справа – от читателя.

Магнитное поле внутри тороида неоднородно: индукция магнитного поля B максимальна на внутреннем радиусе, где величина r минимальна, и минимальна на внешнем радиусе тора. Если, однако, взять тор большого радиуса и тонкий, так что различие между внутренним и внешним радиусами мало по сравнению с самим радиусом, то поле тора будет достаточно однородным. В этом случае формула для магнитной индукции B внутри тора совпадает с формулой для соленоида $B = \mu_0 nI$, где $n = N/2\pi r$ – число витков на единицу длины.

б) Для вычисления магнитной индукции снаружи тороида выберем контур интегрирования в виде окружности, концентричной с тором («траектория 2» на рис. 29.10, *а*). Этот контур охватывает N токов I, идущих в одном направлении, и N токов I, идущих в противоположном направлении (на рис. 29.10, *б* хорошо видны направления токов в витке с внешней и внутренней сторон тора). Таким образом, суммарная сила тока внутри траектории 2 равна нулю. При идеально плотной намотке тора все точки траектории 2 находятся от тора на одном расстоянии и эквивалентны, поэтому индукция B должна быть одинакова во всех точках контура. Следовательно, по закону Ампера

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I,$$

$$B \cdot 2\pi r = 0$$

и

$$B = 0.$$

Итак, снаружи тора с идеально плотной намоткой поле отсутствует: все поле сосредоточено внутри тора.

29.4. Сила, действующая между двумя параллельными проводниками. Определение единиц силы тока и заряда

Вас, возможно, удивило, что постоянная μ_0 в точности равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл·м/А. Когда ампер определялся по-старому, экспериментально измеренное значение μ_0 было очень близко к нынешнему; теперь же магнитную постоянную *по определению* считают в точности равной $4\pi \times$

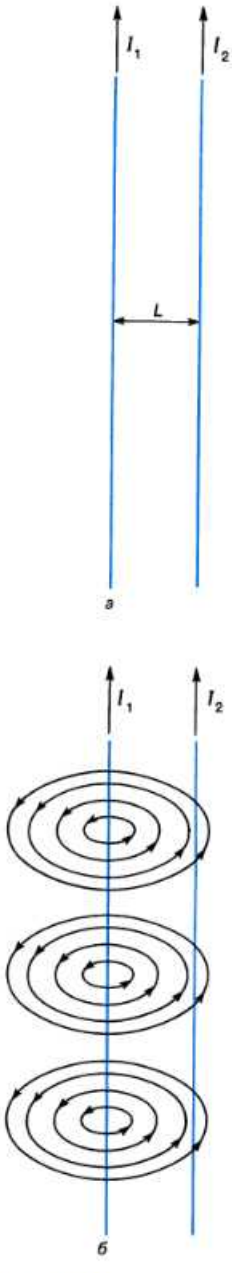


Рис. 29.11. *а* – по двум параллельным проводникам текут токи I_1 и I_2; *б* – магнитные силовые линии тока I_1.

$\times 10^{-7}$ Тл·м/А. Разумеется, этого нельзя было бы сделать, если бы ампер определялся независимо. Но дело в том, что единица силы тока ампер сейчас определяется через создаваемое им магнитное поле с использованием введенного значения μ_0.

Познакомимся более подробно с определением единицы силы тока. Рассмотрим два длинных параллельных проводника на расстоянии L друг от друга (рис. 29.11, *а*). По проводникам текут токи I_1 и I_2. Каждый из токов создает магнитное поле, действующее на другой ток; между проводниками, как первым отметил Ампер, действует сила. Индукция магнитного поля B_1, создаваемого током I_1, определяется формулой (29.1); там, где проходит второй проводник, индукция магнитного поля равна

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{L}.$$

На рис. 29.11, *б* показано поле, создаваемое *только* током I_1 (силовые линии поля обоих токов показаны на рис. 29.4). Согласно (28.2), сила F/l, действующая на единицу длины второго проводника, по которому течет ток I_2, равна

$$\frac{F}{l} = I_2 B_1.$$

Заметим, что сила, действующая на I_2, обусловлена только полем, создаваемым током I_1. Ток I_2 также создает поле, но это поле не взаимодействует с создающим его током. Подставляя сюда выражение для B_1, получаем

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{L}. \qquad (29.4)$$

Воспользовавшись правилом правой руки (рис. 28.7, *б*), можно определить направление силовых линий вокруг первого проводника (рис. 29.11, *б*). Применяя теперь правило правой руки (рис. 28.8) или формулу (28.3), найдем, что сила, действующая на I_2, направлена влево по чертежу на рис. 29.11, *б*. Таким образом, со стороны I_1 на I_2 действует сила притяжения, если направления токов совпадают. Если же ток I_2 течет в другую сторону, то, согласно правилу правой руки, сила будет действовать в противоположном направлении, т. е. со стороны I_1 на I_2 будет действовать сила отталкивания.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что магнитное поле тока I_2 создает равную по величине и противоположную по направлению силу, действующую на I_1. Этого, естественно, и следовало ожидать согласно третьему закону Ньютона.

Формула (29.4) лежит в основе определения единицы силы тока. Если $I_1 = I_2 = 1$ А, а проводники находятся на

расстоянии точно 1 м друг от друга, то

$$\frac{F}{l} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Тл}\cdot\text{м/А})}{(2\pi)} \frac{(1\ \text{А})(1\ \text{А})}{(1\ \text{м})} = 2 \cdot 10^{-7}\ \text{Н/м}.$$

Итак, *один ампер равен силе постоянного тока, который, протекая по двум длинным прямолинейным параллельным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, создает на участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную* $2 \cdot 10^{-7}$ *Н.*

Это – точное определение единицы силы электрического тока. Единица заряда *кулон* определяется *точно* как одна ампер-секунда: 1 Кл = 1 А·с. Значение же k или ε_0 в законе Кулона (разд. 22.5) находится экспериментально.

Может показаться, что это довольно сложный способ определения физических величин. Но за этим стоит стремление дать единицам *операционное определение*, т. е. такое определение, при котором единица может быть воспроизведена посредством определенной последовательности операций. Например, единицу заряда кулон можно было бы определить через силу взаимодействия двух равных зарядов, предварительно постулировав значение ε_0 или k в формулах (22.1) или (22.2). Однако экспериментально измерить силу взаимодействия двух зарядов крайне сложно. Во-первых, трудно получить точно отмеренное количество заряда; кроме того, заряд имеет тенденцию стекать с заряженных объектов в воздух. Напротив, ток в проводнике можно регулировать очень плавно и точно, введя в цепь переменное сопротивление. Поэтому силу, действующую между двумя проводниками с током, гораздо легче измерить с высокой точностью. Вот почему первичной единицей стал ампер, а кулон определяют через силу тока. В Национальном бюро стандартов США в эталоне силы электрического тока (так называемые ампер-весы или токовые весы) точно измеряется взаимодействие не прямолинейных проводников, а круглых катушек – это и удобнее, и точнее.

Напряженности электрического поля и индукции магнитного поля также даны операционные определения: напряженность электрического поля определяется по формуле (22.3) через силу, действующую на заряд, а индукция магнитного поля – в соответствии с формулой (28.2) через силу, действующую на единицу длины проводника с током.

Пример 29.6. В электрическом шнуре длиной 2,0 м два проводника находятся на расстоянии 3,0 мм друг от друга и по ним течет ток силой 8,0 А. Определите силу, действующую между проводниками.

Решение. По формуле (29.4)

$$F = \frac{(2{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{Тл}\cdot\text{м/А})(8{,}0\ \text{А})(8{,}0\ \text{А})(2{,}0\ \text{м})}{(3{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м})} =$$

$$= 8{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Так как токи направлены противоположно, возникающая между ними сила стремится раздвинуть провода.

29.5. Закон Био – Савара

Использование закона Ампера для определения индукции магнитного поля **B**, отвечающего заданному распределению электрических токов, ограничено случаями, когда степень симметрии задачи достаточно высока и интеграл $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ легко вычисляется. Сложность применения, разумеется, не дискредитирует закон Ампера и не умаляет его фундаментального значения. Ситуация здесь схожа с электростатикой, где теорема Гаусса (хотя и относится к фундаментальным законам) оказывается ограниченно применимой из-за того, что часто приводит к слишком сложным вычислениям напряженности электрического поля **E**; поэтому приходится прибегать к суммированию вкладов бесконечно малых элементов заряда dq путем использования закона Кулона: $dE = (1/4\pi\varepsilon_0)(dq/r^2)$. Для случаев, когда система токов не обладает высокой степенью симметрии, было бы полезно иметь и в теории магнитизма эквивалент такого дифференциального представления, аналогичного закону Кулона. Такой закон вскоре после открытия Эрстедом в 1820 г. магнитного действия тока сформулировали Жан-Батист Био (1774–1862) и Феликс Савар (1791–1841).

Согласно Био и Савару, ток I, текущий по произвольному пути, можно разбить на бесконечно малые элементы тока (рис. 29.12). Если $d\boldsymbol{l}$ – бесконечно малый векторный элемент проводника, по которому течет ток, то индукция магнитного поля $d\mathbf{B}$, обусловленная этим элементом тока в произвольной точке P пространства, дается выражением

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{29.5}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента $d\boldsymbol{l}$ в точку P, а $\hat{\mathbf{r}}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$ ($\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$) (рис. 29.12). Величина $d\mathbf{B}$ равна

$$dB = \frac{\mu_0 dl \sin\theta}{4\pi r^2}, \tag{29.6}$$

где θ – угол между $d\boldsymbol{l}$ и $\mathbf{r}$ (рис. 29.12). Полная индукция магнитного поля в точке P может быть найдена сумми-

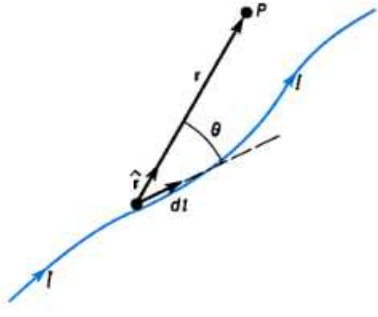


Рис. 29.12. Закон Био – Савара: в точке P элемент тока $Id\boldsymbol{l}$ создает магнитное поле с индукцией $d\mathbf{B} = (\mu_0 I/4\pi)(d\boldsymbol{l} \times \hat{\mathbf{r}}/r^2)$.

рованием (интегрированием) по всем элементам тока: $\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$.

Закон Био – Савара (29.5) является магнитным аналогом закона Кулона в дифференциальной форме; он даже, подобно закону Кулона, содержит обратно пропорциональную зависимость от квадрата расстояния.

Важное отличие закона Био – Савара от закона Ампера состоит в следующем: вектор индукции магнитного поля в подынтегральном выражении $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$ в законе Ампера не обязательно обусловлен только тем током I, который охватывает контур интегрирования. В законе же Био – Савара индукция магнитного поля $d\mathbf{B}$ в формуле (29.5) целиком обусловлена элементом тока $Id\boldsymbol{l}$. Чтобы найти полную индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$ в данной точке, необходимо учитывать все токи.

Закон Био – Савара (как и закон Кулона) не относят к фундаментальным законам, таким как закон Ампера и теорема Гаусса. Но он очень удобен для определения индукции магнитного поля, создаваемого заданными токами. Предсказания закона Био – Савара относительно $\mathbf{B}$ неизменно подтверждались экспериментально, и его справедливость не вызывает сомнений.

Пример 29.7. Покажите, что закон Био – Савара дает для индукции магнитного поля длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток I, тот же результат, что и формула (29.1): $B = \mu_0 I/2\pi r$.

Решение. Рассчитаем индукцию магнитного поля в точке P на рис. 29.13, находящейся на расстоянии x по перпендикуляру от бесконечно длинного проводника. Ток течет вверх, поэтому вектор индукции поля $d\mathbf{B}$, создаваемого любым элементом тока, направлен в плоскость чертежа [см. формулу (29.5)]. Таким образом, векторы индукции $d\mathbf{B}$ всех элементов тока имеют в точке P одно и то же направление, совпадающее с ранее полученным результатом (см., например, рис. 28.7). Величина вектора индукции $\mathbf{B}$ равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{dy \sin\theta}{r^2},$$

где $dy = dl$ и $r^2 = x^2 + y^2$. Обратите внимание на то, что интегрирование ведется по y (по длине провода), а величина x считается постоянной. В подынтегральном выражении имеются две переменные, y и θ, но они не независимы: $y = -x/\mathrm{tg}\,\theta$, откуда

$$dy = -x\,\mathrm{cosec}^2\,\theta d\theta = -x d\theta/\sin^2\theta =$$
$$= -x d\theta/(x/r)^2 = r^2 d\theta/x.$$

Интеграл принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{x}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\cos\theta\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

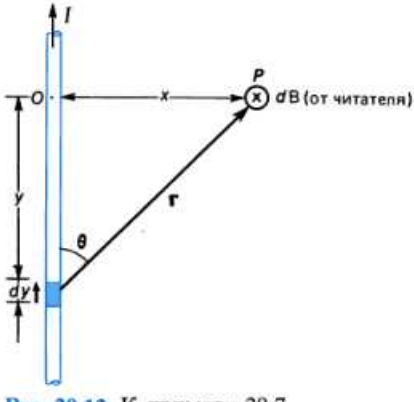


Рис. 29.13. К примеру 29.7.

Мы пришли к формуле (29.1) для магнитного поля длинного проводника, где расстояние обозначено через x.

Пример 29.8. Определить индукцию **B** в точках на оси круглого витка радиусом R, по которому течет ток I (рис. 29.14).

Решение. Вектор индукции магнитного поля $d\mathbf{B}$ в точке P, создаваемого элементом тока Idl в верхней части витка, имеет показанное на чертеже направление и величину

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2},$$

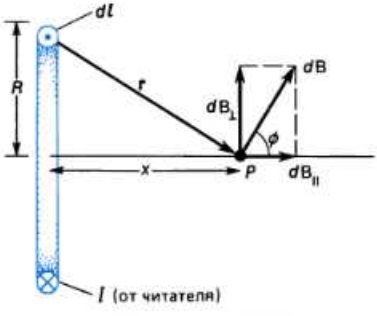


Рис. 29.14. К примеру 29.8.

так как $\theta = 90°$. Вектор $d\mathbf{B}$ можно разложить на компоненты $dB_\parallel$ и $dB_\perp$, соответственно параллельную и перпендикулярную оси витка. При суммировании по всем элементам тока перпендикулярные компоненты взаимно сократятся. Поэтому вектор полной индукции магнитного поля **B** будет направлен вдоль оси, а величина его равна

$$B = \int dB\cos\phi = \int dB\frac{R}{r} = \int dB\frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}},$$

где x – расстояние от точки P до центра витка и $r^2 = R^2 + x^2$. Подставим сюда dB из предыдущего равенства и проинтегрируем вдоль витка:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\int dl =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

поскольку $\int dl = 2\pi R$ – длина окружности витка.

В разд. 28.10 уже говорилось, что виток с током, подобный только что рассмотренному (рис. 29.14), представляет собой *магнитный диполь* с дипольным моментом

$$\mu = NIA,$$

где A – площадь витка, а N – число витков провода, в каждом из которых течет ток I. Магнитный диполь, помещенный во внешнее магнитное поле, подобно электрическому диполю в электрическом поле, обладает потенциальной энергией, и на него действует вращающий момент (см. гл. 28). В примере 29.8 мы познакомились еще с одним свойством магнитного диполя: *создаваемое* диполем магнитное поле имеет на оси диполя индукцию

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Это равенство можно записать через магнитный дипольный момент $\mu = IA = I\pi R^2$ (для одного витка $N = 1$):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{[магнитный диполь]}. \qquad (29.7а)$$

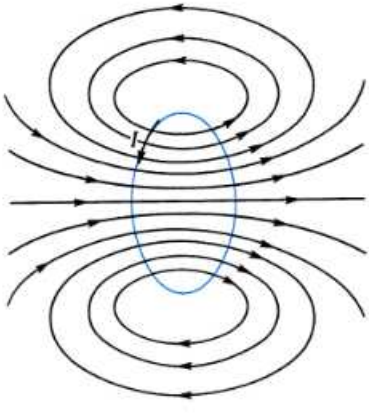


Рис. 29.15. Магнитное поле кольцевого витка с током.

(Будьте внимательны: дипольный момент μ не следует путать с магнитной постоянной μ_0.) На больших рас-

стояниях от витка $x \gg R$ выражение (29.7а) упрощается до

$$B \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{x^3} \quad [\text{магнитный диполь, } x \gg R]. \qquad (29.7б)$$

Индукция магнитного поля на оси магнитного диполя убывает как $1/x^3$, подобно напряженности поля электрического диполя. При $x \gg R$ зависимость $\sim 1/x^3$ справедлива и для точек, не лежащих на оси, но с другим коэффициентом. С помощью закона Био–Савара индукцию магнитного поля витка с током можно определить в любой точке, и результат хорошо согласуется с экспериментом. Картина силовых линий индукции магнитного поля витка с током показана на рис. 29.15.

29.6. Ферромагнетизм

Как уже говорилось в разд. 28.1, железо и некоторые другие материалы, проявляющие сильные магнитные свойства, называют *ферромагнитными веществами* (*ферромагнетиками*). Познакомимся более обстоятельно с природой ферромагнетизма.

Магнитный стержень с двумя разноименными полюсами напоминает электрический диполь, образованный зарядами противоположного знака. Магнитный стержень иногда называют магнитным диполем: у него два полюса, находящихся на определенном расстоянии друг от друга, а магнитные силовые линии такого магнита имеют такой же вид, как и силовые линии электрического диполя: сравните рис. 22.21, *а* и 28.3, *б*. Однако важное различие состоит в следующем: положительный и отрицательный электрические заряды можно легко разделить. А вот получить изолированный магнитный полюс оказывается гораздо труднее. Если магнитный стержень разрезать пополам, то вместо двух изолированных полюсов – северного и южного – мы получим два новых магнита (рис. 29.16). Повторяя эту операцию, мы всякий раз будем получать магниты, у каждого из которых есть северный и южный полюса. Физики испробовали много способов получить изолированный магнитный полюс – магнитный монополь, и исследования в этой области активно ведутся в наши дни, так как некоторые теории предсказывают, что магнитный монополь должен существовать. Однако убе-

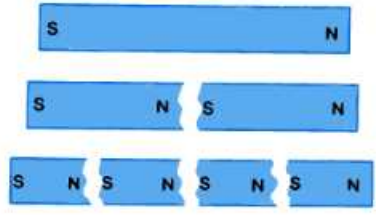
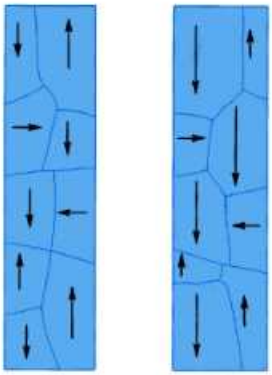


Рис. 29.16. Если разрезать магнит пополам, то получатся не северный и южный полюс по отдельности, а два магнита, каждый со своими северным и южным полюсами.

дительных экспериментальных доказательств существования магнитного монополя пока нет.

Более детальные исследования структуры показывают, что магнит состоит из крошечных областей, называемых *доменами*, размером порядка 0,1–0,01 мм. Каждый домен – это маленький магнит, имеющий северный и южный полюса. В ненамагниченном куске железа домены имеют беспорядочную ориентацию (рис. 29.17, *а*). Магнитные моменты доменов взаимно компенсируются, и такой кусок железа не обнаруживает магнитных свойств. В магните домены имеют преобладающую ориентацию, как показано на рис. 29.17, *б* (в данном случае вниз). Кусок железа можно намагнитить, поместив его в сильное магнитное поле (например, можно намагнитить иголку, проведя по ней одним из полюсов сильного магнита). Тщательные исследования показали, что домены способны слегка поворачиваться, ориентируясь по внешнему магнитному полю; чаще же изменяются границы доменов, и домены, ориентация которых соответствовала внешнему магнитному полю, увеличивают свои размеры за счет доменов с другой ориентацией. (Это можно заметить, сравнив рис. 29.17, *а* и *б*.) Нетрудно понять теперь, почему магнит способен притягивать ненамагниченные железные предметы – скрепки, заколки и т. п. В поле магнита домены ненамагниченного предмета перестраиваются, и предмет сам на время становится магнитом, северный полюс которого обращен к южному полюсу поднесенного к нему постоянного магнита, и наоборот. Аналогично продолговатые железные опилки в магнитном поле располагаются подобно стрелкам компаса и позволяют увидеть картину силовых линий (рис. 29.18).



а *б*

Рис. 29.17. *а* – домены в ненамагниченном железе ориентированы случайным образом; *б* – в магните домены имеют одну преобладающую ориентацию (конец стрелки соответствует северному полюсу домена, а длина стрелки пропорциональна величине магнитного момента данного домена).

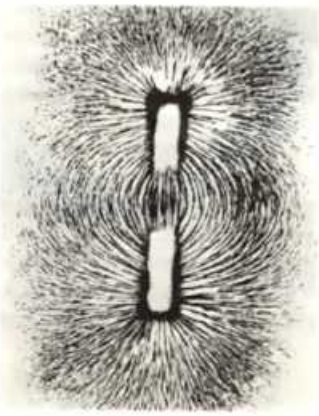


Рис. 29.18. Железные опилки позволяют видеть картину силовых линий магнита.

Магнит из железа может долгое время сохранять намагниченность, и поэтому его называют «постоянным магнитом». Если, однако, магнит уронить на пол или ударить по нему молотком, домены вернутся в неупорядоченное состояние и магнит может полностью или частично утратить свой магнетизм. Утрату магнетизма может также вызвать и нагрев: при повышении температуры усиливается беспорядочное тепловое движение атомов и ориентация доменов становится случайной. Выше определенной температуры, называемой *температурой Кюри (точкой Кюри)*, магнит вообще изготовить нельзя (для железа точка Кюри равна 1043 К)[1].

Магнитный стержень считается эквивалентным магнитному диполю не только из-за того, что его поле сходно с полем электрического диполя, но и потому, что его поле весьма напоминает поле витка с током, который

[1] Железо, никель, кобальт, гадолиний и некоторые сплавы ферромагнитны при комнатной температуре; ряд других элементов и сплавов имеют низкие точки Кюри и становятся ферромагнетиками лишь при низких температурах.

мы также назвали магнитным диполем (см. разд. 28.10 и конец разд. 29.5). Итак, магнитный стержень, виток с током и короткий соленоид (разд. 29.3) – все можно рассматривать как магнитные диполи. На больших расстояниях индукция магнитного поля, создаваемая любым из таких диполей, убывает как $1/r^3$.

Поразительное сходство конфигураций полей магнитного стержня (рис. 28.3, *б*) и витка с током (рис. 29.15) наводит на мысль, что магнитное поле тока может иметь отношение к ферромагнетизму – такую гипотезу впервые высказал в XIX в. Ампер. Согласно современным представлениям, атомы, из которых состоит любое вещество, можно упрощенно представлять состоящими из центрального ядра, вокруг которого по орбитам движутся электроны. Так как электроны заряжены, то, двигаясь по орбите, они представляют собой электрический ток, который создает магнитное поле. В отсутствие внешнего поля электронные орбиты различных атомов разупорядочены и магнитные поля, обусловленные движением отдельных электронов, взаимно компенсируют друг друга. Однако электроны обладают еще собственным магнитным полем: у них имеется собственный, или спиновый, «магнитный момент»[1]. Считают, что ферромагнетизм обусловлен магнитным полем, создаваемым спиновым магнитным моментом электронов. В большинстве веществ магнитные поля, создаваемые спиновым магнитным моментом, взаимно компенсируются в силу их беспорядочной ориентации. Однако в железе и в других ферромагнетиках в результате сложного механизма коллективного взаимодействия (так называемого механизма обменного взаимодействия) спиновые магнитные моменты электронов в домене приобретают одинаковую ориентацию. Слабые магнитные поля отдельных электронов складываются в магнитное поле домена. А когда домены упорядочиваются, возникает сильный магнит.

В настоящее время можно предположить, что *все* магнитные поля создаются электрическим током. Это объясняет, почему оказалось так трудно найти отдельный магнитный полюс. У нас нет способа «расщепить» ток, с тем чтобы получить изолированный магнитный полюс. Разумеется, если поиски магнитного монополя увенчаются успехом, то придется пересмотреть существующие

---

[1] Термин «спин» возник в то время, когда считалось, что собственный магнитный момент электрона обусловлен его вращением вокруг собственной оси, аналогичным движению по орбите вокруг ядра, что порождает дополнительное магнитное поле. Сегодня представление о вращающемся электроне устарело (гл. 41).

представления о том, что все магнитные поля[1] создаются только электрическим током.

29.7. Гистерезис

Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида или тора прямо пропорциональна силе тока в катушке [формула (29.3)]. Если в катушку поместить сердечник из железа или другого ферромагнитного материала, то индукция магнитного поля может возрасти в сотни и даже тысячи раз. Это произойдет из-за того, что под действием внешнего магнитного поля домены в ферромагнетике выстроятся, и результирующая индукция магнитного поля будет суммой индукции, обусловленной током в катушке, и индукции магнитного поля железного сердечника. Полную магнитную индукцию удобно записать в виде суммы двух членов:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M, \tag{29.8}$$

где $\mathbf{B}_0$ – индукция, обусловленная только током в катушке («внешнее поле»): она совпадает со значением индукции в отсутствие ферромагнитного материала. Вектор $\mathbf{B}_M$ описывает дополнительное поле, создаваемое ферромагнитными материалами; часто $\mathbf{B}_M \gg \mathbf{B}_0$. Количественное изучение связи векторов $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_M$ и $\mathbf{B}$ обычно проводится на тороидальной катушке с железным сердечником (рис. 29.19), так как в этом случае силовые линии индукции $\mathbf{B}$ проходят, по существу, целиком внутри тороидального сердечника без воздушных зазоров, осложняющих анализ (как, скажем, в случае соленоида). Для удобства будем считать, что радиус тора велик, а тор тонкий, так что индукция внутри него в отсутствие сердечника равна

$$B = \mu_0 nI,$$

как было показано в примере 29.5, где I – сила тока в катушке, а n – плотность намотки (число витков на единицу длины). При наличии сердечника отношение полной индукции магнитного поля к индукции внешнего маг-

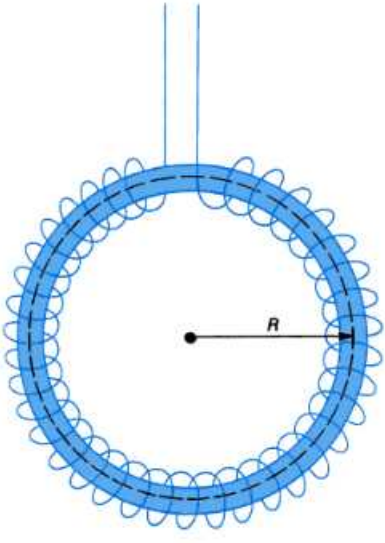


Рис. 29.19. Тор с ферромагнитным сердечником.

[1] Один из методов обнаружения магнитных монополей весьма оригинален. В нем используется контур из сверхпроводника, охватывающий площадь 10^2–10^3 см^2. Если монополь пересекает эту площадку, в контуре возникает индуцированный ток, величина которого не зависит ни от скорости монополя, ни от его траектории. Детектор не чувствителен к обычным электрическим зарядам и магнитным диполям. В одном из опытов за 8000 ч был зарегистрирован случай резкого изменения тока, приписанный прохождению через детектор магнитного монополя.– *Прим. перев.*

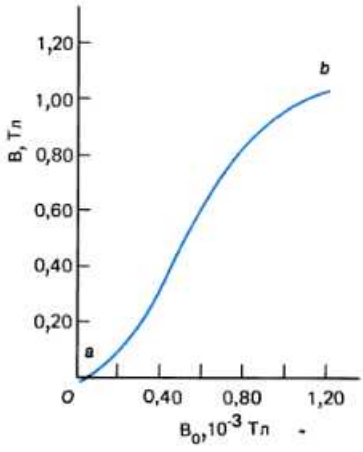


Рис. 29.20. Зависимость магнитной индукции B внутри тора от магнитной индукции внешнего поля B_0.

нитного поля B_0 равно

$$K_m = \frac{B}{B_0}, \tag{29.9}$$

где K_m называется *относительной магнитной проницаемостью* вещества. Вводят также величину *магнитной проницаемости*

$$\mu = K_m \mu_0 \tag{29.10}$$

(не следует путать с магнитным дипольным моментом). Полная индукция магнитного поля внутри тора может быть представлена тогда в виде

$$B = \mu_0 K_m n I = \mu n I \qquad \text{[тонкий тор большого радиуса]}. \tag{29.11}$$

Для неферромагнитных материалов величины μ и K_m постоянны, если индукция поля B_0 не слишком велика, и μ мало отличается от μ_0, а значение K_m близко к единице (разд. 29.8). Для ферромагнитных материалов $K_m \gg 1$, и μ может быть много больше, чем μ_0. Кроме того, μ и K_m уже не будут постоянными: их значения зависят от индукции внешнего магнитного поля B_0, как показывает следующий опыт.

Пусть железный сердечник тороидальной катушки вначале ненамагничен, и ток в катушке отсутствует. Начнем постепенно увеличивать силу тока I. Индукция внешнего поля B_0 будет нарастать пропорционально силе тока I. Полная индукция B также возрастает, но не линейно, а в соответствии с кривой, показанной на рис. 29.20. (Обратите внимание на то, что масштабы по осям различаются в 1000 раз: $B \gg B_0$.) Вначале (точка a) домены неупорядочены. По мере возрастания B_0 домены упорядочи-

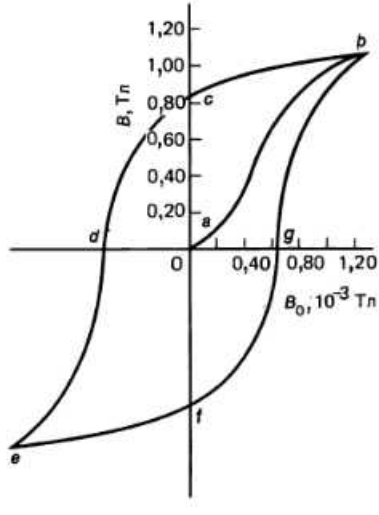


Рис. 29.21. Петля гистерезиса.

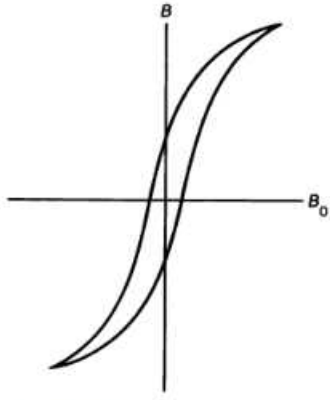


Рис. 29.22. Петля гистерезиса для магнитно-мягкого железа.

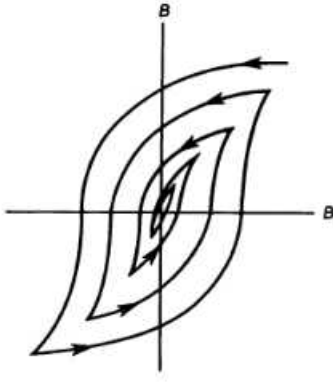


Рис. 29.23. Изменение петель гистерезиса при размагничивании образца.

ваются все больше и больше, и в точке b практически все домены выстроены по полю. Сердечник, как говорят, достигает *насыщения*. Точка b на графике соответствует примерно 70% полного насыщения; затем индукция продолжает расти, но крайне медленно – чтобы добиться 98%-ного насыщения, нужно увеличить индукцию внешнего поля еще примерно в 1000 раз по сравнению с B_0 в точке b; последние домены выстраиваются с большим трудом. Будем теперь уменьшать B_0, уменьшая силу тока в обмотке. Когда ток уменьшится до нуля (точка c на рис. 29.21), домены не полностью разупорядочены, и сердечник сохранит *постоянный магнетизм*. Если изменить направление тока в обмотке, то к точке d достаточное количество доменов будет переориентировано, так что $B = 0$. При дальнейшем увеличении тока сердечник в конце концов достигнет насыщения в противоположном направлении (точка e). Если теперь вновь уменьшить ток до нуля, а затем увеличить в противоположном направлении, то полная индукция будет меняться в соответствии с кривой $efgb$, пока не достигнет насыщения в точке b.

Обратите внимание на то, что в этом цикле кривые индукции не проходят через начало координат (точка a). Это явление, состоящее в зависимости пути от направления, называется *гистерезисом*, а кривая $bcdefgb$ – *петлей гистерезиса*. В подобном цикле большое количество энергии переходит в тепло (из-за трения при переориентации доменов); можно показать, что потери энергии пропорциональны площади петли гистерезиса[1)].

В точках c и f железный сердечник намагничен, хотя ток через обмотку отсутствует; эти точки соответствуют постоянному магниту. От постоянного магнита требуется, чтобы величина ac (или af) была как можно больше; такие материалы, как говорят, обладают большой остаточной намагниченностью и называются «магнитно-жесткими»[2)]. С другой стороны, у «магнитно-мягких» материалов петля гистерезиса имеет вид, показанный на рис. 29.22; из таких материалов изготовляют *электромагниты* (которые представляют собой соленоид с железным сердечником или тор с воздушным зазором и предназначены для получения очень сильных магнитных полей), поскольку в этом случае легче получить нулевую

[1)] Аналогичная петля гистерезиса получается и в случае соленоида с железным сердечником, только масштабы по осям B и B_0 различались бы не в 1000 раз, как для тора, а в 10–100 раз.

[2)] Внешнее поле, при котором остаточная намагниченность обращается в нуль (отрезки ad или ag), называется *коэрцитивной силой*. Чем больше коэрцитивная сила, тем большее обратное поле требуется для размагничивания, тем труднее размагнитить магнит.– *Прим. перев.*

индукцию и меньше потери энергии на перемагничивание. «Мягкость» или «жесткость» железа зависит от компонент сплава, его термической обработки и других факторов.

Может возникнуть вопрос, как размагнитить предмет, т. е. сделать его ненамагниченным. Для этого надо, периодически изменяя направление намагничивающего тока, постепенно уменьшать его силу. Такой процесс описывается кривой, показанной на рис. 29.23. Если ваши часы намагнитились, их можно размагнитить, поместив внутрь катушки с переменным током, а затем медленно выводя часы из катушки.

*29.8. Парамагнетизм и диамагнетизм

Все вещества обладают определенными магнитными свойствами. Неферромагнитные материалы делятся на два основных класса: *парамагнетики*, у которых относительная магнитная проницаемость K_m [см. (29.9)] чуть больше единицы, и *диамагнетики*, у которых $K_m \lesssim 1$.

Различие между диамагнетиками и парамагнетиками можно объяснить на молекулярном уровне наличием или отсутствием у молекул вещества постоянного магнитного дипольного момента. Парамагнитными оказываются вещества, молекулы (или ионы) которых обладают постоянным магнитным дипольным моментом[1]. В отсутствие внешнего поля молекулы ориентированы произвольно, и магнитные эффекты отсутствуют. Если же вещество помещено во внешнее магнитное поле (например, в соленоид), это поле создает вращающий момент, который действует на магнитные диполи (разд. 28.10), и ориентирует их по полю; полная индукция магнитного поля (т. е. сумма индукции внешнего поля и поля упорядоченных магнитных диполей) несколько превысит B_0. Однако тепловое движение молекул нарушает упорядоченность. Удобной характеристикой служит вектор *намагниченности* $\mathbf{M}$, определяемый как магнитный дипольный момент единицы объема вещества:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu}/V,$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – магнитный дипольный момент образца, а V – его объем. Экспериментально обнаружено, что намагниченность M прямо пропорциональна индукции внешнего магнитного поля (индукции поля, упорядочивающего диполи) и обратно пропорциональна абсолютной температуре T (характеризующей тепловое движение, кото-

[1] Существуют и другие типы парамагнетиков, иной природы, такие как металлы, у которых значителен вклад свободных электронов.

рое делает ориентацию диполей случайной). Эта зависимость называется *законом Кюри* по имени Пьера Кюри (1859–1906), который первым описал ее:

$$M = C\frac{B}{T},$$

где C – постоянная Кюри. Закон Кюри перестает выполняться при очень больших значениях B/T (т. е. при очень больших B или очень малых T); с увеличением B (или уменьшением T) намагниченность M приближается к некоторому постоянному значению $M_{\text{макс}}$. Этого и следовало бы ожидать, так как $M_{\text{макс}}$ соответствует полному упорядочению всех постоянных магнитных диполей в веществе. Впрочем, даже в чрезвычайно сильных полях ($B_0 \approx 2{,}0$ Тл) отклонения от закона Кюри наблюдаются обычно лишь при очень низких температурах – порядка нескольких кельвин.

Как упоминалось в разд. 29.6, ферромагнитные вещества теряют ферромагнитные свойства выше некоторой температуры, называемой точкой Кюри (для железа 1043 К); выше точки Кюри они обычно становятся парамагнетиками.

Диамагнитные материалы (с $K_m \lesssim 1$) построены из молекул, не обладающих постоянным магнитным дипольным моментом. Под действием внешнего магнитного поля в этих веществах возникают магнитные диполи, однако наведенный магнитный дипольный момент оказывается направленным противоположно внешнему полю. Поэтому поле в веществе оказывается несколько слабее внешнего поля. (В грубой модели строения вещества, в которой электроны вращаются по орбитам вокруг ядер, наложение внешнего поля приводит к увеличению орбитальной скорости электронов, вращающихся в одном направлении, и уменьшению скорости электронов, вращающихся в противоположном направлении; в результате возникает дипольный магнитный момент, противоположный по направлению внешнему полю.) Диамагнетизм присущ всем веществам, но у парамагнетиков и ферромагнетиков он маскируется гораздо более сильными парамагнитными и ферромагнитными эффектами.

*29.9. Вектор намагниченности M и обобщение закона Ампера

Вектор намагниченности **M**, определенный в разд. 29.8 как *магнитный дипольный момент единицы объема вещества*, удобен для характеристики магнитных свойств любых материалов (диа-, пара- и ферромагнетиков). В присутствии магнитных материалов магнитное поле можно характеризовать вектором **M** точно так же, как напряженность электрического поля характеризовалась вектором поляризации **P** (разд. 25.7).

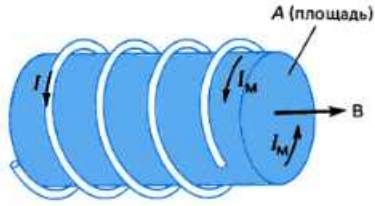


Рис. 29.24. Ток намагниченности I_M в магнетике, помещенном внутрь катушки (участок тора), по которой течет ток I.

Рассмотрим тор, как в разд. 29.7, с сердечником из какого-либо вещества (не обязательно ферромагнетика). Полная индукция магнитного поля **B** дается выражением (29.8):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M,$$

где $\mathbf{B}_0$ – индукция магнитного поля, обусловленного током в обмотке, а $\mathbf{B}_M$ – индукция поля, обусловленного наличием магнитного вещества (величина B_M обычно мала по сравнению с B_0 для диа- и парамагнетиков и значительно превышает B_0 для ферромагнетиков). Мы знаем, что

$$B_0 = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I,$$

где N – полное число витков обмотки длиной l. Можно считать, что индукция магнитного поля $\mathbf{B}_M$, создаваемого веществом, обусловлена токами, которые текут внутри атомов вещества. Результирующий эффект, создаваемый всеми этими атомными токами, эквивалентен действию тока I_M («тока намагничивания»), текущему по внешней поверхности вещества (рис. 29.24), по аналогии с индуцированными электрическими зарядами на поверхности диэлектрика в электрическом поле (рис. 25.7). В действительности, конечно, «ток намагничивания» I_M фиктивный; его нельзя измерить. И, чтобы отличить его от истинного тока проводимости, мы будем называть последний «реальным током». Аналогично выражению для B_0 можно написать

$$B_M = \mu_0 \frac{N_M I_M}{l},$$

где N_M/l – эффективное число витков на единицу длины (или $N_M I_M/l$ – эффективная сила тока намагничивания на единицу длины). С другой стороны, магнитный дипольный момент равен $N_M I_M A$ [уравнение (28.11)], где A – площадь сечения сердечника (рис. 29.24). Следовательно, магнитный дипольный момент единицы объема равен

$$M = \frac{N_M I_M A}{V} = \frac{N_M I_M A}{Al} = \frac{N_M I_M}{l},$$

где $V = Al$ – объем, обтекаемый полным эффективным током намагничивания $N_M I_M$. Объединяя два последних

равенства, выразим $\mathbf{B}_M$ через $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{B}_M = \mu_0 \mathbf{M},$$

и тогда полная индукция магнитного поля равна

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M}. \tag{29.12}$$

Закон Ампера можно обобщить на случай магнитных веществ. Для этого в правую часть следует включить силу тока намагничивания I_M:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 (I + I_M), \tag{29.13}$$

где I – суммарная сила реальных токов и I_M – эквивалентный ток намагничивания, охваченные контуром интегрирования. С учетом (29.12) закон Ампера принимает вид

$$\oint (\mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M}) \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 (I + I_M).$$

В отсутствие вещества $\oint \mathbf{B}_0 \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$ (вспомним, что через $\mathbf{B}_0$ мы обозначили индукцию $\mathbf{B}$ в отсутствие вещества), и из последнего равенства следует полезное соотношение между $\mathbf{M}$ и током намагничивания

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{l} = I_M \tag{29.14}$$

(это соотношение может служить определением I_M). Пользуясь вновь выражением $\oint \mathbf{B}_0 \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$ вместе с (29.12), получим (разделив все на μ_0)

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0} \right) \cdot d\boldsymbol{l} = I. \tag{29.15}$$

Этот частный результат справедлив и в общем случае. Обычно его записывают с помощью новой величины – вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, который определяют как

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0}, \tag{29.16а}$$

или

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}. \tag{29.16б}$$

Из (29.12) следует, что

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}. \tag{29.17}$$

Если использовать вектор $\mathbf{H}$, то равенство (29.15) принимает вид

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I. \tag{29.18}$$

Вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ следует отличать от **вектора магнитной индукции** $\mathbf{B}$. Равенство (29.18) выражает тот факт, что интеграл от $\mathbf{H}$ по любому замкнутому контуру равен суммарной силе реального (только!) тока, охваченного контуром, независимо от присутствия магнитных веществ. Таким образом, вектор $\mathbf{H}$ аналогичен вектору $\mathbf{D}$ в электростатике, который обусловлен только свободными зарядами. Векторы $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$

и **B** являются аналогами векторов **P**, **D** и **E** в электростатике.

Вектор **H** обычно ассоциируют только со свободными токами, вектор **M** – только с «токами намагничивания», а вектор **B** – со всеми токами. [Под этим мы подразумеваем вид интегралов по контуру в (29.13), (29.14) и (29.18).] Это не значит, что вектор **H** обусловлен только реальными токами. Например, для любой точки в вакууме при отсутствии магнитных материалов $B = \mu_0 H$. Это справедливо и для зазора между полюсами постоянного магнита, и коль скоро здесь $B \neq 0$, то и $H \neq 0$, хотя нет никаких реальных токов. Из уравнения (29.18) легко видеть, что внутри самого магнита вектор **H** направлен противоположно вектору **B**.

Векторы **H**, **M** и **B** вводятся для более детального описания магнитных явлений; мы упомянули здесь их, чтобы познакомить вас с этими понятиями. Вряд ли можно ожидать, что это знакомство дает вам практический навык обращения с этими векторами, и в дальнейшем они нам не понадобятся. Для полноты упомянем еще *магнитную восприимчивость* χ_m, которая определяется как

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

и характеризует отношение намагниченности к напряженности магнитного поля. У пара- и диамагнетиков величина χ_m постоянна при не слишком больших B; у ферромагнетиков она не постоянна. Из (29.16), (29.17), (29.9) и (29.10) следует, что

$$\chi_m = K_m - 1$$

и

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 .$$

В вакууме $K_m = 1$, $\chi_m = 0$ и $\mu = \mu_0$.

Заключение

Закон Ампера утверждает, что интеграл по замкнутому контуру от индукции магнитного поля **B** равен произведению μ_0 на полную силу тока, охватываемого контуром: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$.

Индукция магнитного поля B на расстоянии r от длинного прямолинейного проводника прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и обратно пропорциональна r. Силовые линии индукции магнитного поля в этом случае представляют собой концентрические окружности с центром на проводнике. Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида с плотной намоткой равна $B = \mu_0 nI$, где n – число витков на единицу длины, а I – сила тока в обмотке.

Определение единицы силы тока (ампер) основано на силе, с которой один длинный проводник с током дей-

ствует на параллельный проводник, находящийся на расстоянии l; через силу тока определяется единица заряда – кулон.

Закон Био – Савара позволяет определить индукцию магнитного поля по заданному распределению токов. Он утверждает, что

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

где $d\mathbf{B}$ – вклад элемента тока $Id\mathbf{l}$ на бесконечно малом участке проводника $d\mathbf{l}$ в полную индукцию магнитного поля в точке P, а $\hat{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор, направленный от $d\mathbf{l}$ к P, и $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Вектор полной индукции магнитного поля находится интегрированием всех $d\mathbf{B}$.

Из железа и некоторых других веществ можно изготовить сильные постоянные магниты. Такие вещества называются *ферромагнетиками*. Ферромагнитные вещества состоят из крошечных областей – *доменов*, которые в постоянном магните имеют преобладающую ориентацию, а в ненамагниченном образце ориентированы случайным образом. Ферромагнетик намагничивается в создаваемом током внешнем магнитном поле B_0 (например, внутри соленоида или тора). Однако при выключении тока материал сохраняет остаточную намагниченность, и при увеличении тока, текущего в обратном направлении (и при последующем обращении тока), полная индукция B не следует за изменением индукции B_0, обусловленной током. График зависимости B от B_0 представляет собой *петлю гистерезиса*, а зависимость полной индукции от пути изменения индукции внешнего поля называется *гистерезисом*.

Вопросы

1. Магнитное поле тока в электропроводке квартиры может отклонять стрелку компаса. Обсудите зависимость этого эффекта от силы тока, от того, является ли ток постоянным или переменным, от расстояния до проводов.
2. В чем сходство и различие между магнитным полем, создаваемым электрическим током в длинном прямолинейном проводнике, и электрическим полем линейного распределения покоящихся зарядов (разд. 22.7).
3. Покажите, что поле, силовые линии которого изображены на рис. 29.6, *б*, не противоречит закону Ампера. Могут ли силовые линии искривляться не вниз, а вверх?
4. Сравните закон Ампера и теорему Гаусса.
5. а) Запишите закон Ампера для контура, охватывающего оба проводника на рис. 29.4. б) Проделайте то же самое для случая, когда ток I_2 течет в противоположном направлении ($I_2 = -I_1$).
6. Можно ли интеграл в законе Ампера вычислять по поверхности?
7. Пусть цилиндрический проводник на рис. 29.5 – полость в виде концентрического цилиндра, т. е. имеет вид трубы. Что можно сказать об индукции **B** внутри полости?
8. Как изменится величина индукции B внутри длинного соленоида, если а) удвоить диаметр витков; б) удвоить расстояние между витками; в) удвоить длину соленоида и одновременно число витков?
9. Кроме соленоидов, в технике часто используются *реле*. Реле представляет собой электромагнит (соленоид с неподвижным железным сердечником), который при включении притягивает пластинку из мягкого железа на шарнире (якорь). Придумайте реле, которое можно было бы использовать а) в качестве дверного звонка; б) для замыкания и размыкания

электрической цепи. В последнем случае реле может переключать большие токи, в то время как через главный переключатель большие токи не текут. В автомобиле, например, многие электрические устройства включаются с помощью реле, чтобы большие токи не проходили через переключатели на щитке.

10. Два длинных проводника, по которым течет одинаковый ток I, пересекаются, не соприкасаясь, под прямым углом. Опишите магнитные силы, с которыми один проводник действует на другой.

11. По горизонтальному проводнику течет большой ток. Ниже подвешен второй проводник, по которому ток течет в том же направлении. Может ли ток в первом проводнике удерживать нижний проводник во взвешенном состоянии? При каких условиях нижний проводник будет в равновесии? При каких условиях равновесие будет устойчивым?

12. Горизонтальный проводник с током может свободно передвигаться и находиться во взвешенном состоянии непосредственно над другим, параллельным проводником с током. а) Как направлен ток в нижнем проводнике? б) Может ли верхний проводник находиться в устойчивом равновесии благодаря магнитным силам со стороны нижнего? Объясните.

13. Пользуясь законом Био–Савара, убедитесь, что вектор индукции магнитного поля **B**, создаваемого витком с током (рис. 29.15), в точках, не лежащих на его оси, имеет указанное направление.

14. Будет ли индукция **B** одинаковой во всех точках плоскости витка с током на рис. 29.15?

15. Почему перекручивание подводящих проводов в электрических устройствах ослабляет магнитные дефекты в этих проводах?

16. Сравните закон Био–Савара и закон Кулона: что между ними общего и в чем разница?

17. Нейтрон, не имея электрического заряда, тем не менее обладает магнитным моментом. Как это объяснить?

18. Как можно было бы измерить магнитный дипольный момент Земли?

19. а) Применяя правило правой руки (рис. 28.7), найдите направление вектора индукции **B** в центре витка с током на рис. 29.15. б) Придумайте правило правой руки, позволяющее найти направление **B** в центре витка с током, если пальцы указывают направление тока I.

20. Прокомментируйте следующее утверждение: «Поскольку магнитные монополи, по-видимому, не существуют, простейшим источником магнитного поля является магнитный диполь».

21. Как можно было бы определить или измерить величину магнитной индукции полюса (магнитного эквивалента электрического заряда) а) для магнитного стержня; б) для витка с током?

22. Тяжелый магнит притягивает к себе тяжелый кусок железа, который первоначально покоился, а перед ударом о магнит успевает приобрести значительную кинетическую энергию. а) Откуда берется эта кинетическая энергия? б) В результате удара о магнит часть доменов магнита разупорядочивается. Опишите превращения энергии.

23. Магнит притягивает любые металлические предметы или только железные (проверьте это на опыте)? Почему?

24. Ненамагниченный железный гвоздь не притягивает железную скрепку. Однако если один конец гвоздя приставить к магниту, то другой конец *будет* притягивать скрепку. Объясните.

25. Железный сердечник внутри соленоида позволяет значительно увеличить индукцию **B**. Однако без сердечников удается получить более сильные поля.

*26. Нарисуйте кривую намагничивания а) парамагнетика; б) диамагнетика и сравните их с кривой для ферромагнетика (рис. 29.21).

*27. Можно ли все вещества считать а) диамагнетиками; б) парамагнетиками; в) ферромагнетиками?

*28. Всегда ли направления векторов **B** и **H** совпадают? Если нет, приведите пример.

*29. Всегда ли величина χ_m положительна? Если нет, то при каком условии она отрицательна?

*30. Может ли **H** обращаться в нуль, когда $\mathbf{B} = 0$? Если может, приведите пример.

*31. Рассмотрите а) точку внутри постоянного магнита (магнитного стержня); б) точку снаружи этого магнита вблизи его полюса. Какая из величин **B**, **H** и **M** обращается в нуль в одной из этих точек? Объясните.

Задачи

Раздел 29.1

1. (I) Какой может быть максимальная сила тока в проводнике, если магнитное поле на расстоянии 30 см от проводника не должно превышать 10^{-3} Тл?

2. (I) Чему равна индукция магнитного поля на расстоянии 11,0 см от длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток 2,8 А?

3. (II) Чему равно ускорение (в единицах g) модели самолета массой 280 г с зарядом 8,0 Кл, летящей со скоростью 1,5 м/с на рас-

стоянии 15 см от почти параллельного его траектории провода, по которому течет ток 20 А?

4. (II) По каждому из двух тонких длинных параллельных проводников, находящихся на расстоянии 11,2 см друг от друга, в одном и том же направлении течет ток 25 А. Определите индукцию магнитного поля в точке, отстоящей на 12,0 см от одного провода и на 7,0 см от другого.

5. (II) Компас располагают горизонтально на расстоянии 15 см к югу от прямолинейного вертикального проводника, по которому вниз течет ток 30 А. В каком направлении показывает стрелка компаса, если горизонтальная компонента индукции магнитного поля Земли в этом месте равна $0{,}45 \cdot 10^{-4}$ Тл, а магнитное склонение 0°?

6. (II) Молния ударяет в железный флагшток высотой 7,0 м и диаметром 9,8 см, причем электроны движутся вверх по флагштоку. Если разность потенциалов между вершиной и основанием флагштока равна 20 кВ, какие величину и направление имеет индукция магнитного поля на расстоянии 50 см к северу от флагштока?

7. (II) Определите индукцию магнитного поля посредине между двумя длинными параллельными проводниками на расстоянии 10 см один от другого, выразив ее через силу тока I в одном из проводников, если по другому проводнику течет ток 10 А а) в том же направлении; б) в противоположном направлении.

8. (II) Местность имеет восточное магнитное склонение, равное 15°. Когда компас помещают на расстоянии 12 см к востоку (истинному) от вертикального проводника внутри здания, стрелка показывает восточное склонение, равное 60°. Каковы величина и направление силы тока в проводнике? Индукция магнитного поля Земли в этой местности равна $0{,}50 \cdot 10^{-4}$ Тл и направлена горизонтально.

9. (II) По двум длинным параллельным проводникам, расположенным на расстоянии d один от другого, течет в одном направлении одинаковый ток I. Выразите зависимость **B** от x, где x – расстояние вдоль перпендикуляра между проводниками. Один из проводников находится при $x = 0$, другой – при $x = d$.

10. Решите задачу 9, если сила тока в первом проводнике (при $x = 0$) вдвое больше, чем во втором, и ток в нем течет в противоположную сторону.

11. (II) Электрон движется со скоростью $4{,}50 \cdot 10^6$ м/с под углом 45° к прямолинейному проводнику, по которому течет ток 15,0 А. Чему равна максимальная сила, действующая на электрон, если он движется на расстоянии 12,0 см от проводника?

12. (II) По всему сечению очень длинной проводящей полоски шириной l и пренебрежимо малой толщиной, лежащей в горизонтальной плоскости, течет ток I. а) Покажите, что в точках на расстоянии y точно над серединой полоски индукция магнитного поля равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi l} \operatorname{arctg} \frac{l}{2y}$$

(полоска считается бесконечно длинной). (Подсказка: разбейте полоску на тонкие проводники и проинтегрируйте по ним.) б) К какому значению приближается B при $y \gg l$? Правдоподобен ли этот результат? Объясните.

13. (III) Электрон движется в одной плоскости с длинным прямолинейным токонесущим проводником. На расстоянии 50 см от проводника электрон движется в сторону проводника со скоростью $3{,}4 \cdot 10^6$ м/с под углом 45° к проводнику. Все время оставаясь в одной плоскости с проводником, электрон сворачивает в сторону, не дойдя до проводника 1,0 см. Определите а) силу тока в проводнике; б) скорость электрона в точке максимального сближения с проводником.

Раздел 29.2

14. (I) Пользуясь законом Ампера, покажите, что однородное магнитное поле (например, между полюсами магнита на рис. 29.1) не может скачкообразно уменьшиться до нуля за пределами магнита.

15. (II) а) Пользуясь формулой (29.1) и векторными свойствами **B**, покажите, что силовые линии индукции магнитного поля двух длинных параллельных проводников, по которым текут токи $I_2 = I_2$, имеют вид, показанный на рис. 29.4. б) Нарисуйте эквипотенциальные линии двух покоящихся положительных электрических зарядов. в) Сходны ли эти картины? Насколько они идентичны? Почему?

16. (II) Коаксиальный кабель состоит из сплошного внутреннего проводника радиусом r_1 и концентричной полой цилиндрической оболочки с внутренним радиусом r_2 и внешним r_3. По проводникам текут равные и противоположно направленные токи I, равномерно распределенные по сечениям проводников. Определите индукцию магнитного поля на расстоянии r от оси при а) $r < r_1$; б) $r_1 < r < r_2$; в) $r_2 < r < r_3$; г) $r > r_3$.

17. (II) По очень большому плоскому проводнику толщиной t течет однородный ток с по-

стоянной плотностью **j**. Определите индукцию магнитного поля **B** (величину и направление) на расстоянии y над плоскостью, считая длину и ширину проводника бесконечно большими.

18. (III) По двум длинным параллельным прямолинейным проводникам текут токи соответственно I_1 и I_2 (рис. 29.4). Покажите, не пользуясь законом Ампера, что для кругового контура с центром на одном из проводников и радиусом $r < l$, где l – расстояние между проводниками,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_1$$

в соответствии с законом Ампера.

Раздел 29.3

19. (I) Индукция магнитного поля в центре соленоида длиной 32 см и диаметром 1,2 см должна составлять 0,20 Тл. Сколько витков должна иметь обмотка, если сила тока в ней не может превышать 3,7 А?

20. (II) Из 1,0 кг меди требуется изготовить соленоид с максимальной индукцией магнитного поля. Каким следует сделать провод: длинным и тонким, коротким и толстым или каким-то еще? Примите в расчет длину соленоида, его диаметр и другие параметры.

Раздел 29.4

21. (I) Чему равны величина и направление силы, действующей между двумя параллельными проводниками, на расстоянии 30 см друг от друга, если длина каждого проводника 80 м и по ним в одном направлении течет ток 65 А?

22. (I) Вертикальный прямолинейный проводник, по которому течет ток 5,0 А, притягивает параллельный проводник, находящийся на расстоянии 8,0 см, с силой $6{,}0 \cdot 10^{-4}$ Н/м.

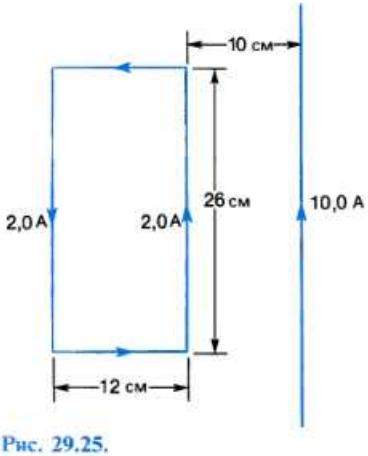


Рис. 29.25.

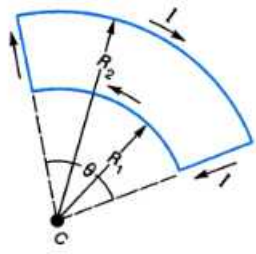


Рис. 29.26.

Каковы направление и сила тока во втором проводнике?

23. (II) Три длинных параллельных проводника находятся попарно на расстоянии 12,0 см друг от друга (если смотреть вдоль проводников, то они проходят через вершины равностороннего треугольника). Сила тока в каждом проводнике равна 3,0 А, но в проводнике A ток направлен противоположно токам в проводниках B и C. Определите силу, действующую на 1 м длины каждого проводника со стороны двух других.

24. (II) Прямоугольная рамка, по которой течет ток 2,0 А, лежит в одной плоскости с очень длинным прямолинейным проводником с током 10,0 А (рис. 29.25). Определите а) результирующую силу; б) результирующий вращающий момент, действующие на рамку со стороны прямолинейного проводника.

25. (II) По длинному горизонтальному проводнику течет ток 78 А. Второй, медный проводник диаметром 3,5 мм удерживается магнитными силами параллельно первому на расстоянии 18 см под ним. а) Каковы сила и направление тока во втором проводнике? б) Находится ли второй проводник в устойчивом равновесии? в) Ответьте на вопросы «а» и «б», если второй проводник удерживается магнитным полем на расстоянии 20 см над ним.

Раздел 29.5

26. (I) Магнитное поле Земли представляет собой, в сущности, поле магнитного диполя. Индукция магнитного поля у поверхности Земли равна приблизительно $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ Тл. Чему равна индукция магнитного поля на высоте 13 000 км от поверхности над северным полюсом?

27. (II) Проволочная рамка имеет форму, показанную на рис. 29.26: две концентрические дуги соединены радиальными отрезками с точкой C. Выразите индукцию **B** в точке C через R_1, R_2, θ и силу тока I.

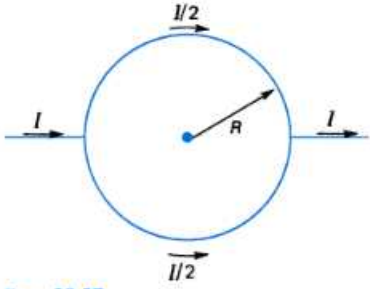


Рис. 29.27.

28. (II) Пользуясь законом Био–Савара, покажите, что индукция магнитного поля **B** уединенного точечного заряда q, движущегося со скоростью **v**, равна в точке P

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

где **r** – радиус-вектор точки P относительно заряда q.

29. (II) Пользуясь результатом примера 29.8 для индукции поля на оси отдельного витка с током, найдите индукцию поля внутри очень длинного соленоида [формула (29.3)].

30. (II) Тонкое проводящее кольцо радиусом R прикреплено в диаметрально противоположных точках к прямолинейным проводникам (рис. 29.27). Ток I, подводимый к кольцу, разветвляется, как показано на рисунке. Чему равна индукция **B** в центре кольца?

31. (II) Виток радиусом 1,0 см помещен в центре витка радиусом 15,0 см так, что плоскости витков взаимно перпендикулярны. Сила тока в каждом витке составляет 3,0 А. Оцените вращающий момент, действующий на малый виток со стороны большого витка. Какие упрощающие предположения вы сделали?

32. (II) По квадратной рамке со стороной l течет ток I. Покажите, что индукция магнитного поля в центре квадрата равна

$$B = 2\sqrt{2}\,\mu_0 I/\pi l.$$

(Подсказка: определите индукцию **B**, создаваемую каждой из сторон квадрата.)

33. (II) Увеличится или уменьшится индукция B в центре рамки, если квадрат в задаче 32 превратить в окружность?

34. (II) По круглой диэлектрической пластине радиусом R равномерно распределен электрический заряд Q. Пластина приводится во вращение с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через центр. Определите а) магнитный дипольный момент, б) индукцию магнитного поля вдоль оси на расстоянии x от центра. в) Применимо ли здесь равенство (29.7б) при $x \gg R$?

35. (II) а) Покажите, что индукция магнитного поля B в центре круглой катушки равна

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R},$$

где I – сила тока в катушке, N – число витков, а R – радиус катушки. б) Пусть электромагнит представляет собой катушку диаметром 2,0 м, намотанную медным проводом квадратного сечения со стороной 2,0 мм. Источник питания дает напряжение 50 В при максимальной мощности 1,0 кВт. Сколько витков должна иметь катушка, чтобы отбирать от источника предельную мощность? в) Чему при этом будет равна индукция магнитного поля в центре катушки? г) Если увеличить число витков, но питать электромагнит от того же источника, то увеличится ли индукция магнитного поля? Объясните.

36. (II) Соленоид длиной L и радиусом R содержит N плотно намотанных витков. Определите индукцию магнитного поля на оси соленоида у одного из его концов. (Подсказка: воспользуйтесь результатом примера 29.8 и проведите суммирование или интегрирование.)

37. (II) *Катушки Гельмгольца* – это две большие катушки, содержащие по N витков каждая; в катушках течет одинаковый ток I, и они расположены одна от другой на расстоянии, равном радиусу катушки R. а) Определите индукцию B вдоль линии, соединяющей центры катушек. Пусть $x = 0$ в центре одной катушки и $x = R$ в центре другой. б) Постройте график $B(x)$ для $0 < x < R$. в) Определите B на середине расстояния между катушками ($x = R/2$), если $R = 20{,}0$ см, $I = 35$ А и в каждой катушке $N = 350$ витков. г) Покажите, что поле на середине расстояния между катушками особенно однородно, а именно если s – расстояние между катушками, то в точке $x = R/2$ при $s = R$ $dB/dx = 0$ и $d^2B/dx^2 = 0$.

38. (III) По прямоугольной рамке со сторонами a и b течет ток I. Вычислите индукцию магнитного поля $B(x, y)$ внутри рамки, используя прямоугольную систему координат (x, y) с началом в центре рамки и осью x, параллельной стороне b.

39. (III) По квадратной рамке со стороной l течет ток I. а) Определите индукцию магнитного поля B вдоль линии, перпендикулярной плоскости рамки и проходящей через ее центр. Выразите зависимость B от x – расстояния вдоль этой линии от центра квадрата. б) Будет ли такая рамка при $x \gg l$ подобна диполю? Если да, то чему равен ее дипольный момент?

Раздел 29.6

40. (II) Магнитный дипольный момент атома железа равен примерно $1{,}8 \cdot 10^{-23}\ \text{А} \cdot \text{м}^2$. а) Определите магнитный дипольный момент железного стержня длиной 12 см, шириной 1,2 см и толщиной 1,2 см при полном магнитном насыщении. б) Какой вращающий момент будет действовать на этот стержень в магнитном поле с индукцией 1,2 Тл, направленной перпендикулярно ему?

Раздел 29.7

41. (I) При намагничивании образца отожженного железа получены следующие значения индукции B и B_0:

B_0, 10^{-4} Тл	0	0,13	0,25	0,50	0,63	0,78	1,0	1,3
B, Тл	0	0,0042	0,010	0,028	0,043	0,095	0,45	0,67

B_0, 10^{-4} Тл	1,9	2,5	6,3	13,0	130	1300	10 000
B, Тл	1,01	1,18	1,44	1,58	1,72	2,26	3,15

Определите K_m и μ для каждой пары значений и постройте графики их зависимости от B_0.

42. (II) Соленоид с железным сердечником длиной 30 см и диаметром 1,8 см содержит 500 витков. При силе тока в обмотке 48 А индукция магнитного поля равна 2,2 Тл. Чему равно значение магнитной проницаемости μ сердечника в столь сильном поле?

* Раздел 29.9

***43.** (II) Чему равна намагниченность железного стержня в задаче 40?

***44.** (II) Для каждого значения B_0 из задачи 41 определите M и χ_m.

***45.** (II) а) Нарисуйте силовые линии индукции магнитного поля **B** вне и внутри стержня постоянного магнита. б) Изобразите силовые линии напряженности **H** магнитного поля вне и внутри магнита. в) Вне магнита направления **H** и **B** одинаковы, а внутри противоположны. Почему?

***46.** (II) В предыдущей задаче, поскольку $I = 0$, всегда должно выполняться соотношение $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Объясните, как оно может выполняться для контура, который а) целиком расположен вне магнита; б) целиком расположен внутри магнита; в) проходит по оси магнита и замыкается вне его.

30 Электромагнитная индукция и закон Фарадея

В гл. 28 мы обсудили две стороны связи между электрическими и магнитными явлениями: 1) электрический ток создает магнитное поле и 2) со стороны магнитного поля на электрический ток или на движущийся электрический заряд действует сила. Эти открытия были сделаны в 1820–1821 годах. Затем ученые задались вопросом: если электрический ток создает магнитное поле, то не может ли магнитное поле создавать электрический ток? Десять лет спустя американец Джозеф Генри (1797–1878) и англичанин Майкл Фарадей (1791–1867) независимо друг от друга обнаружили этот эффект. Следует сказать, что Генри сделал открытие раньше Фарадея, но Фарадей первым опубликовал свои результаты и провел более детальные исследования. В настоящей главе мы обсудим это явление и ряд его приложений, которые произвели революцию в жизни человечества.

30.1. ЭДС индукции

Пытаясь создать с помощью магнитного поля электрический ток, Фарадей пользовался установкой, показанной на рис. 30.1. Проволочная катушка X соединялась с батареей; ток в катушке X создавал магнитное поле, которое усиливалось железным сердечником. Фарадей рассчитывал, что при использовании достаточно мощной батареи постоянный ток в катушке X создаст достаточно сильное магнитное поле, чтобы возбудить электрический ток в катушке Y. Катушка Y подключалась к гальванометру, способному обнаружить слабый ток. Опыты с постоянным током не дали результатов; долгожданный эффект был наконец обнаружен лишь тогда, когда Фа-

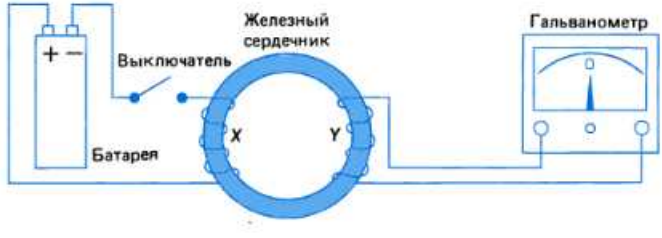


Рис. 30.1. Схема опыта Фарадея.

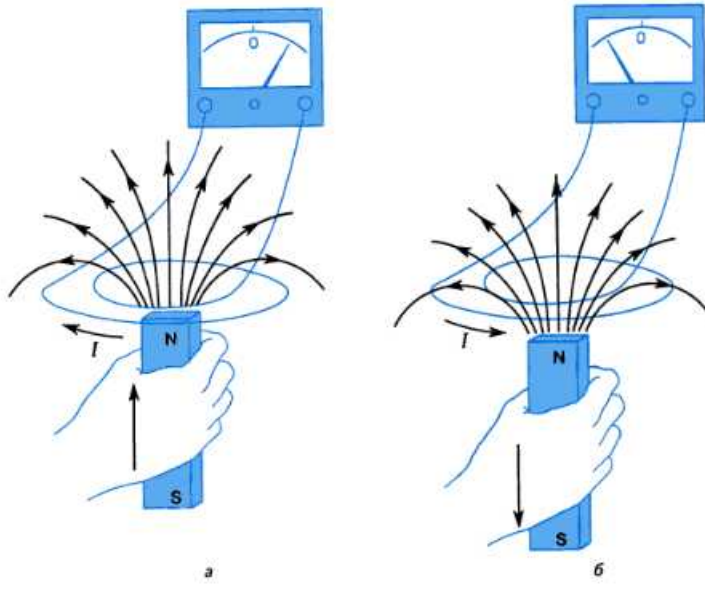


Рис. 30.2. *а* – при вдвигании магнита в катушку в цепи течет индукционный ток; *б* – при выдвигании магнита ток течет в противоположном направлении. (Нуль гальванометра расположен в середине шкалы, и в зависимости от направления тока стрелка отклоняется вправо или влево.)

радей заметил, что стрелка гальванометра в цепи катушки *Y* сильно отклоняется в момент замыкания ключа в цепи катушки *X*. Когда же ключ размыкал цепь, стрелку отбрасывало в противоположную сторону. Оказалось, что *постоянный* ток в катушке *X* *не возбуждает* тока в катушке *Y*: ток в катушке *Y* появлялся лишь тогда, когда в катушке *X* ток включался или прерывался.

Фарадей пришел к выводу, что, хотя стационарное (постоянное) магнитное поле тока не создает, при изменении магнитного поля электрический ток *возбуждается*! Когда магнитное поле, пронизывающее катушку *Y*, изменяется, в цепи течет ток, как если бы в ней находился источник ЭДС. Поэтому говорят, что *изменение магнитного поля приводит к появлению ЭДС индукции*; возникающий в цепи ток называется *индукционным током*.

Фарадей продолжал экспериментировать с **электромагнитной индукцией**, как называют это явление. На рис. 30.2 показано, например, что при быстром введении магнита в проволочный виток в нем возбуждается электрический ток. Когда магнит быстро выводят из витка, ток течет в обратном направлении. Более того, если магнит неподвижен и виток приближать к нему или удалять от него, то индуцируется ЭДС и в витке течет ток. Чтобы возбудить ЭДС, необходимо движение магнита или изменение положения витка; при этом неважно, что́ движется: виток или магнит.

30.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца

Фарадей количественно исследовал факторы, влияющие на величину ЭДС индукции. Прежде всего он обнаружил, что ЭДС зависит от времени: чем быстрее меняется магнитное поле, тем выше ЭДС индукции. Однако ЭДС индукции не просто пропорциональна скорости изменения индукции магнитного поля **B**. Скорее, имеет место пропорциональность скорости изменения **магнитного потока** Φ_B, который определяется аналогично потоку напряженности электрического поля (разд. 23.1) как

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}; \qquad (30.1)$$

интеграл здесь берется по любой поверхности. Единицей магнитного потока служит вебер (Вб); 1 Вб = 1 Тл·м^2. (Прежняя единица СИ индукции магнитного поля определялась как Вб/м^2.) Поскольку индукция магнитного поля B равна магнитному потоку через единицу площади Φ_B/A, ее нередко называют **плотностью магнитного потока**.

Используя понятие магнитного потока, результаты опытов Фарадея можно записать математически, а именно: ЭДС индукции в контуре равна скорости изменения магнитного потока через контур:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (30.2а)$$

Значение ЭДС индукции $\mathscr{E}$ получается в вольтах, если скорость изменения магнитного потока $d\Phi_B/dt$ выражена в веберах в секунду (Вб/с); 1 Вб/с = 1 Тл·м^2/с. Это утверждение называется **законом электромагнитной индукции Фарадея** и представляет собой один из фундаментальных законов электромагнетизма. Если в контуре имеется N витков с плотной намоткой, то индуцированные в каждом витке ЭДС будут складываться, и формула (30.2а) принимает вид

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (30.2б)$$

Знак минус в формулах (30.2а) и (30.2б) напоминает нам о направлении, в котором действует ЭДС индукции, т. е. о ее полярности. Согласно экспериментальным данным, *ЭДС индукции возбуждает в контуре ток, индукция магнитного поля которого всегда противодействует первоначальному изменению магнитного потока.* Это так называемое **правило Ленца**. Применим это правило к случаю, изображенному на рис. 30.2,– относительному движению витка и магнита. Изменяющийся магнитный поток индуцирует ЭДС, которая возбуждает в витке ток, а этот ток создает собственное магнитное поле. На рис. 30.2, *а* изображен случай, когда расстояние между

витком и магнитом *уменьшается*; следовательно, индукция магнитного поля, а стало быть, и магнитный поток через виток *увеличиваются*. Силовые линии магнита направлены вверх. Чтобы противодействовать увеличению такого поля, поле индукционного тока должно быть направлено *вниз*. Таким образом, согласно правилу Ленца, направление тока должно быть таким, как показано на рисунке (воспользуйтесь правилом правой руки). На рис. 30.2, *б* поток *уменьшается* и поэтому индукционный ток создает поле, направленное *вверх*, «пытаясь» противодействовать этому изменению. Направление индукционного тока должно быть таким, как показано на рисунке.

Посмотрим, что происходило бы, если бы правило Ленца не выполнялось, а все было наоборот. Индукционный ток в этой ситуации создавал бы магнитный поток, направление которого совпадало бы с исходным изменением; возрастающее изменение потока привело бы к еще большему увеличению индукционного тока, что сопровождалось бы еще бóльшим изменением потока. В результате ток продолжал бы нарастать до бесконечности, выделяя мощность ($= I^2 R$) даже после прекращения первоначального изменения. Это означало бы нарушение закона сохранения энергии. Подобной разновидности вечного двигателя не существует. Таким образом, правило Ленца, сформулированное ранее (а не в противоположном смысле) совместимо с законом сохранения энергии.

Важно отметить, что ЭДС индукции возникает всякий раз, когда происходит изменение магнитного потока. Поскольку магнитный поток равен $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int B \cos\theta dA$, закон Фарадея можно записать в виде

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\int B\cos\theta dA.$$

Отсюда следует, что ЭДС может быть индуцирована двумя способами: за счет 1) изменения индукции магнитного поля B или 2) изменения площади контура A или

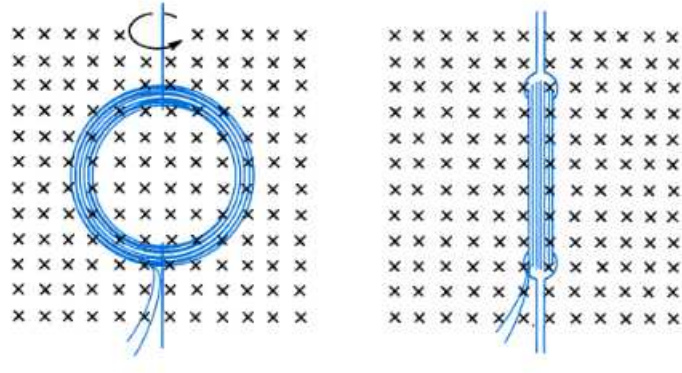


Рис. 30.3. При вращении плоской катушки в магнитном поле в ней возбуждается ЭДС (силовые линии поля направлены в плоскость рисунка).

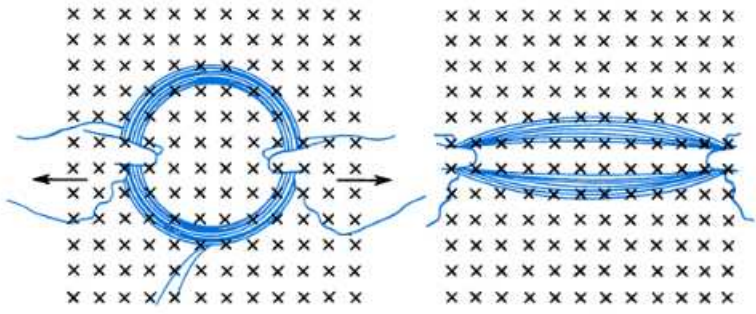


Рис. 30.4. В магнитном поле ток в катушке возбуждается при изменении площади катушки. Как здесь, так и на рис. 30.3 поток через катушку уменьшается (силовые линии поля направлены в плоскость рисунка).

его ориентации θ относительно магнитного поля. Первый случай иллюстрируется на рис. 30.1 и 30.2. Иллюстрациями второго служат рис. 30.3, 30.4 и следующий пример.

Пример 30.1. Квадратная катушка со стороной 5,0 см содержит 100 витков провода и расположена перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией 0,60 Тл. Катушку быстро с постоянной скоростью выводят из поля (перемещая перпендикулярно **B**) в область, где индукция магнитного поля B резко падает до нуля. (Вначале одна сторона катушки находится на границе поля.) Катушка полностью выводится из поля за 0,10 с. Какая энергия выделяется в катушке, если ее сопротивление равно 100 Ом?

Решение. Площадь катушки равна $A = (0{,}050\ \text{м})^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2$. Начальный поток через катушку равен $\Phi_B = BA = (0{,}60\ \text{Тл}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2) = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Вб. Через 0,10 с поток становится равным нулю. Скорость изменения потока постоянна в течение 0,10 с, пока катушка выводится из поля; поэтому ЭДС, наведенная за этот период, равна

$$\mathscr{E} = -(100)\frac{(0 - 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Вб})}{(0{,}10\ \text{с})} = 1{,}5\ \text{В}.$$

Ток равен $I = \mathscr{E}/R = 1{,}5\ \text{В}/100\ \text{Ом} = 15\ \text{мА}$. Энергия, выделяющаяся в катушке, равна $I^2 Rt = (1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{А})^2 \times (100\ \text{Ом})\ (0{,}10\ \text{с}) = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ Дж. В силу закона сохранения эта энергия равна работе по выведению катушки из поля.

30.3. ЭДС, наводимая в движущемся проводнике

Еще один способ возбужения ЭДС индукции показан на рис. 30.5; он поможет прояснить природу наведенной ЭДС. Пусть однородное магнитное поле с индукцией **B** перпендикулярно площадке, ограниченной неподвижным U-образным проводником и лежащим на нем подвижным стержнем. Когда стережнь скользит по проводнику со скоростью v, он проходит за время dt расстояние $dx = vdt$. Площадь контура увеличивается за время dt на $dA = lvdt$. Согласно закону Фарадея, в контуре наводится ЭДС индукции $\mathscr{E}$, величина которой равна

$$\mathscr{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdA}{dt} = \frac{Blvdt}{dt} = Blv. \qquad (30.3)$$

Это соотношение справедливо при условии, что B, l и v взаимно перпендикулярны. (Если они не перпендикуляр-

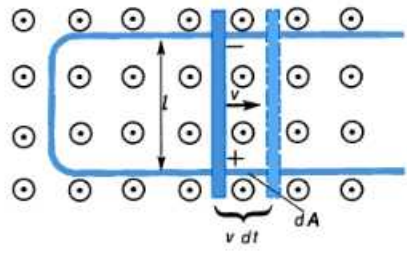


Рис. 30.5. Проводящий стержень перемещают вправо по U-образному проводнику в однородном магнитном поле с индукцией **B** (силовые линии направлены к читателю).

ны, то учитываются лишь их взаимно перпендикулярные компоненты.)

То же самое соотношение можно получить, не пользуясь законом Фарадея. В гл. 28 было показано, что на заряженную частицу, движущуюся со скоростью **v** в магнитном поле с индукцией **B**, действует сила $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Когда стержень на рис. 30.5 движется вправо со скоростью v, его электроны также движутся вправо с той же скоростью. Поскольку $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, на каждый электрон действует сила $F = qvB$, направленная на рисунке вверх[1]. Если бы стержень не находился в контакте с U-образным проводником, электроны скапливались бы на верхнем конце стержня, а нижний конец оказался бы заряженным положительно. Если стержень скользит по проводнику, то в контуре (от плюса к минусу) по часовой стрелке течет ток. Для расчета ЭДС определим работу W по перемещению заряда q с одного конца стержня на другой: $W =$ сила $\times$ расстояние $= (qvB)(l)$. ЭДС равна работе по перемещению единичного заряда: $\mathscr{E} = qvBl/q = Blv$, что совпадает с полученным выше выражением[2].

Пример 30.2. Самолет летит со скоростью 1000 км/ч в области, где индукция магнитного поля Земли направлена почти вертикально и равна $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ Тл. Чему равна разность потенциалов, индуцированная между концами крыльев, если расстояние между ними 70 м?

Решение. Поскольку $v = 1000$ км/ч $=$ $= 280$ м/с, то $\mathscr{E} = Blv = (5{,}0 \cdot 10^{-5}$ Тл$) \times$ $\times$ (70 м)(280 м/с) $= 1{,}0$ В. Нет повода для беспокойства.

---

[1] При протекании тока электроны движутся со скоростью дрейфа $\mathbf{v}_d$, направленной на рис. 30.5 вверх. Обусловленная этой составляющей скорости сила $\mathbf{F}_d = q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ действует на электроны и направлена влево; поэтому она не дает вклада в ЭДС индукции.

[2] Эти рассуждения, в основном совпадающие с приведенным выше объяснением возникновения эффекта Холла, относятся к данному случаю возникновения ЭДС индукции, но не объясняют явления в общем случае.

30.4. Изменяющийся магнитный поток создает электрическое поле

Согласно микроскопическому представлению об электрическом токе (гл. 26), внутри токонесущего проводника существует электрическое поле, под действием которого электроны приобретают скорость дрейфа $\mathbf{v}_d$. Когда проводник движется в магнитном поле (рис. 30.5), в контуре возникает индукционный ток, а это означает, что в проводнике имеется электрическое поле. Внутри движущегося стержня на рис. 30.5 эффективная напряженность электрического поля E равна силе, приходящейся на единицу заряда: $E = F/q$. Так как $F = qvB$,

$$E = \frac{qvB}{q} = vB. \tag{30.4а}$$

Это выражение можно обобщить на случай, когда направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ не перпендикулярны. Согласно (28.5), сила, действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, равна $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Следовательно,

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{30.4б}$$

В случае, когда ЭДС возникает не в результате движения проводника, а благодаря изменению магнитного потока (как, например, на рис. 30.2), в контуре также возникает индукционный ток. Это означает, что в проводнике имеется электрическое поле. Таким образом, мы приходим к важному выводу: *изменение магнитного потока ведет к возникновению электрического поля*. Это относится не только к проводникам: электрическое поле возникает в любой точке пространства, где происходит изменение магнитного потока.

Это утверждение можно облечь в математическую форму, обобщив соотношение между напряженностью электрического поля и разностью потенциалов между точками a и b: $V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l}$ [формула (24.4)], где $d\boldsymbol{l}$ – элемент длины вдоль пути интегрирования. Наведенная в контуре ЭДС $\mathscr{E}$ равна работе электрического поля по перемещению единичного заряда, или интегралу от $\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l}$ по замкнутому контуру. Следовательно,

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l}, \tag{30.5}$$

или с учетом закона Фарадея (30.2а)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{30.6}$$

Последнее равенство связывает изменение магнитного потока с создаваемым им электрическим полем. Интеграл в левой части берется по замкнутому контуру, который охватывает площадку с изменяющимся магнитным потоком Φ_B. Формула (30.6) дает более изящное представ-

ление закона Фарадея. Она справедлива не только для проводника, но и для любой области пространства. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

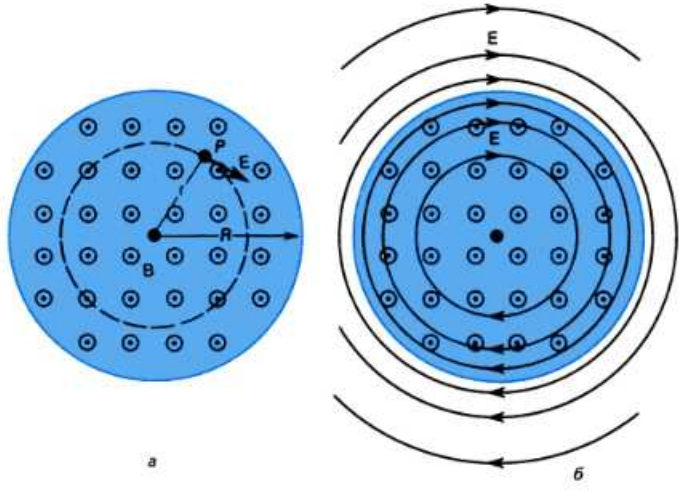


Рис. 30.6. К примеру 30.3.

Пример 30.3. Магнитное поле между полюсными наконечниками электромагнита имеет индукцию **B** и однородно в любой момент времени в пределах круга радиусом R (рис. 30.6, *а*). Сила тока в обмотке электромагнита возрастает во времени, так что индукция **B** в каждой точке изменяется с постоянной скоростью $d\mathbf{B}/dt$. За пределами круга ($r > R$) индукция $\mathbf{B} = 0$ в любой момент времени. Определите напряженность электрического поля **E** в произвольной точке P на расстоянии r от центра круга.

Решение. Изменяющийся магнитный поток в круге радиусом r (штриховая окружность на рис. 30.6, *а*) будет наводить в таком контуре ЭДС. Так как все точки штрихового контура физически эквивалентны, электрическое поле должно обладать такой же симметрией. Таким образом, вектор **E** должен быть направлен перпендикулярно **B** по касательной к окружности радиусом r и иметь одинаковую величину во всех точках окружности. Поэтому в качестве контура интегрирования мы выберем именно эту окружность и получим

$$E(2\pi r) = -(\pi r^2)\frac{dB}{dt} \quad [r > R],$$

поскольку $\Phi_B = BA = B(\pi r^2)$ в любой момент времени. Отсюда найдем E:

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \quad [r < R].$$

Это выражение справедливо внутри круга (т. е. при $r \leqslant R$), за пределами которого $\mathbf{B} = 0$. Если теперь рассмотреть точку P при $r > R$, то поток внутри круга радиусом r будет равен $\Phi_B = B\pi R^2$. Следовательно,

$$E(2\pi r) = \pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad [r > R]$$

и

$$E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \quad [r > R].$$

Таким образом, напряженность электрического поля линейно возрастает от нуля в центре до величины $B = (dB/dt)(R/2)$ на границе круга, а затем линейно убывает с увеличением расстояния от центра круга. Силовые линии поля представляют собой окружности (рис. 30.6, *б*).

Рассмотренный пример иллюстрирует важное различие между электрическими полями, создаваемыми изменяющимся магнитным полем и покоящимися электрическими зарядами (электростатическими полями). В электростатике силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах (гл. 22–25). Силовые линии электрического поля, возникающего в результате изменения магнитного поля, оказываются непрерывными; они образуют замкнутые петли. Это различие оказывается даже более глубоким и важным. В электростатике разность потенциалов между двумя точками равна

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Если взять интеграл по замкнутому контуру (т. е. случай, когда точки a и b совпадают), то $V_{ab} = 0$. Следовательно, интеграл от $\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l}$ по замкнутому контуру равен нулю:

$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ [электростатическое поле].

Это, разумеется, следует из того факта, что электростатические силы (в законе Кулона) консервативны и позволяют ввести потенциальную энергию. Равенство $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ утверждает, что работа по перемещению единичного заряда по любому замкнутому контуру обращается в нуль или что работа по перемещению заряда между двумя произвольными точками не зависит от пути (разд. 7.1). Таким свойством обладают только консервативные силы. Напротив, в нестатическом случае, когда электрическое поле создается изменяющимся магнитным полем, интеграл по замкнутому контуру *отличен* от нуля и, согласно (30.6),

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Мы приходим, таким образом, к выводу, что сила, обусловленная изменяющимся магнитным полем, *неконсервативна*. Поэтому в нестатическом случае нельзя ввести потенциальную энергию. Таким образом, хотя статические электрические поля *консервативны*, электрические поля, создаваемые изменяющимся магнитным полем, *неконсервативны*.

30.5. Электрогенератор

Вероятно, наиболее важным практическим результатом открытия Фарадея является создание *электрогенератора* (*динамомашины*). Генератор преобразует механическую энергию в электрическую; его действие противоположно действию электродвигателя. Устройство генератора пере-

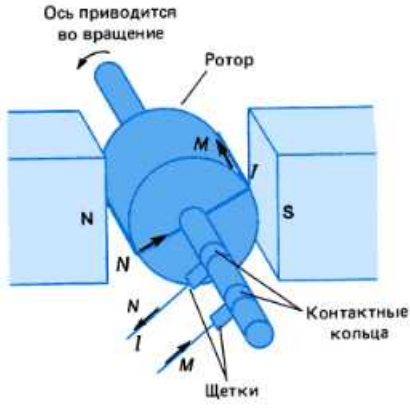


Рис. 30.7. Генератор переменного тока.

менного тока упрощенно изображено на рис. 30.7; в генераторе имеется несколько проволочных обмоток на роторе (на рисунке показана только одна), способных вращаться в магнитном поле. Ось генератора приводится во вращение механическим способом, и во вращающейся обмотке возникает ЭДС индукции. Таким образом генератор *производит* электрический ток. По правилу правой руки ($\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) можно определить, что ток на рис. 30.7 в проводнике N направлен «к нам»; щетка N соответствует положительному полюсу генератора. (Щетки постоянно прижаты к контактным кольцам.) Через полоборота проводник N окажется на месте проводника M, и ток через щетку N будет направлен «от нас». Таким образом, такой генератор вырабатывает переменный ток. Разберемся в этом более подробно.

На рис. 30.8 показан виток, вращающийся по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B. Согласно закону Фарадея, величина ЭДС индукции равна

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt}[BA\cos\theta],$$

где A – площадь витка, а θ – угол между **B** и **A**. Так как

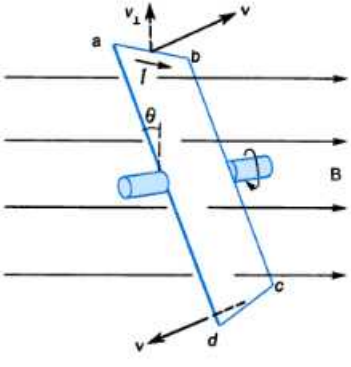


Рис. 30.8. ЭДС индуцируется в участках контура *ab* и *cd*, компонента скорости которых в перпендикулярном к **B** направлении равна $v\sin\theta$.

$\omega = d\theta/dt$, то $\theta = \theta_0 + \omega t$. Выберем $\theta_0 = 0$; тогда

$$\mathscr{E} = BA\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = BA\,\omega\sin\omega t.$$

Если вращающаяся катушка содержит N витков, то

$$\mathscr{E} = NBA\,\omega\sin\omega t = \mathscr{E}_0\sin\omega t. \qquad (30.7)$$

Таким образом, на выходе генератора ЭДС изменяется во времени по синусоидальному закону с амплитудой $\mathscr{E}_0 = NBA\,\omega$. Принцип действия генератора переменного тока основан на вращении катушки в магнитном поле.

В США генераторы производят более 99% всей потребляемой электроэнергии. Частота промышленного переменного тока в США и Канаде $f = \omega/2\pi$ равна 60 Гц; в некоторых странах[1] частота составляет 50 Гц. На гидроэлектростанциях ротор монтируется на массивной оси генератора, которая сочленяется с турбиной – современным вариантом водяного колеса. Турбину вращает вода, падающая с высоты плотины. Однако бóльшая часть электроэнергии в США в настоящее время вырабатывается тепловыми электростанциями, где турбины приводятся во вращение паром высокого давления, для получения которого сжигается природное топливо (уголь, нефть, природный газ). Таким образом, основным средством производства энергии сегодня остается тепловая машина (гл. 21), соединенная с электрогенератором.

Пример 30.4. Ротор генератора переменного тока с частотой 60 Гц вращается в магнитном поле с индукцией 0,15 Тл. Сколько витков должно быть в обмотке площадью $2{,}0\cdot10^{-2}$ м^2, чтобы амплитуда напряжения составляла $\mathscr{E}_0 = 170$ В?

Решение. Согласно (30.7), максимум ЭДС равен $\mathscr{E}_0 = NAB\omega$. Так как $\omega = 2\pi f = (6{,}28)(60\ \text{с}^{-1}) = 377\ \text{с}^{-1}$, получаем

$$N = \frac{\mathscr{E}_0}{AB\omega} = \frac{(170\ \text{В})}{(2{,}0\cdot10^{-2}\ \text{м}^2)(0{,}15\ \text{Тл})(377\ \text{с}^{-1})} =$$

$= 150$ витков.

Генератор постоянного тока устроен почти так же, как и генератор переменного тока, но вместо колец токосъемников в нем используется разрезной коллектор (рис. 30.9, *а*), как и в электродвигателе постоянного тока. Такой генератор вырабатывает напряжение, форма которого показана на рисунке и которое можно сгладить, подсоединив параллельно выходу генератора конденсатор. Чаще используют генераторы с большим числом обмоток (рис. 30.9, *б*), вырабатывающие более постоянное выходное напряжение.

Прежде генераторы постоянного тока использовались в автомобилях; теперь их почти полностью вытеснили *генераторы переменного тока* (рис. 30.10). С помощью

[1] В том числе и в СССР.– *Прим. перев.*

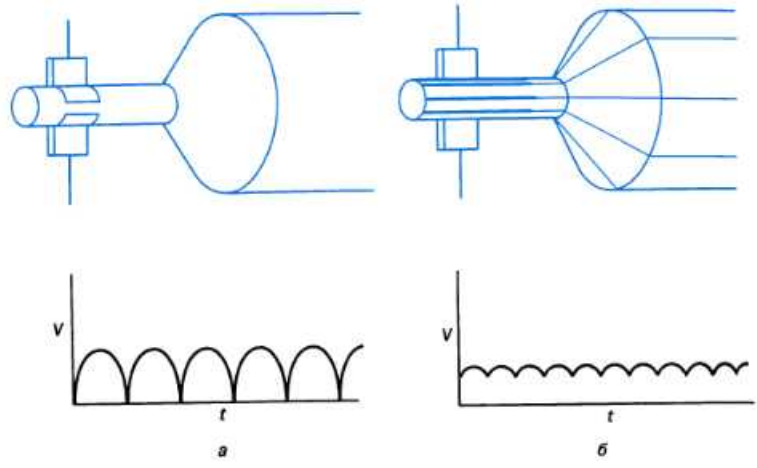


Рис. 30.9. Генератор постоянного тока; *а* – с одной парой коллекторных пластин; *б* – с несколькими парами коллекторных пластин.

диодов переменный ток преобразуется в постоянный ток для зарядки аккумулятора (гл. 41). У большинства автомобильных генераторов переменного тока в отличие от описанных выше генераторов используются вращающееся магнитное поле и стационарный якорь. Щетки прижимаются к кольцам токосъемников вместо разрезного коллектора и находятся во входной цепи вместо выходной; благодаря этому большой выходной ток снимается не с разрезного коллектора, создающего искрение и подверженного износу, а с жесткого проводника. У автомобиля число оборотов генератора можно повысить, чтобы аккумулятор заряжался даже на холостом ходу двигателя и при этом щетки в генераторе не будут искрить при движении на большой скорости.

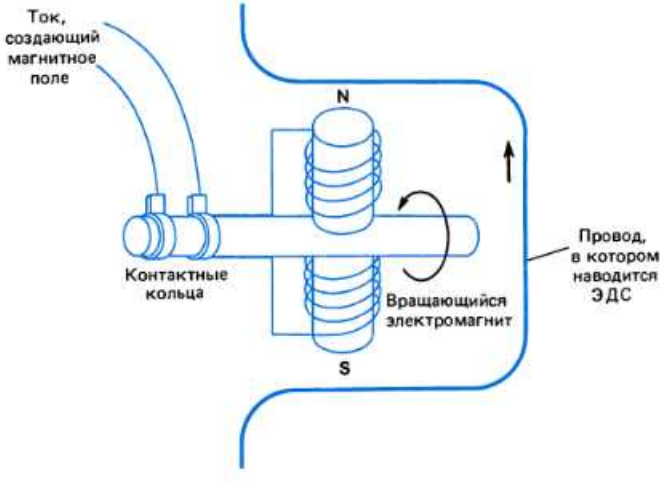


Рис. 30.10. Генератор переменного тока. Ток к якорю подводится через кольцевые токосъемники со щетками; при этом искрение меньше, чем в случае пластинчатого коллектора (рис. 30.9,*б*), и лучше качество контакта. Иногда вместо электромагнита используется постоянный магнит.

30.6. Противо-ЭДС и противодействующий момент. Вихревые токи

Когда через электродвигатель течет электрический ток, ротор двигателя вращается и совершает механическую работу. Из того, что говорилось о работе двигателя в разд. 28.11, можно заключить, что ротор будет ускоряться до бесконечности, поскольку на него все время действует вращающий момент. Однако при вращении ротора магнитный поток через обмотку меняется и возбуждает в ней ЭДС. Эта ЭДС индукции по правилу Ленца противодействует вращению ротора и называется *противо-ЭДС*. Чем выше скорость вращения двигателя, тем больше противо-ЭДС. Обычно двигатель что-либо вращает, но если нагрузки на валу двигателя нет, то он будет ускоряться, пока величина противо-ЭДС не станет равна напряжению питания. В обычном случае, когда вал двигателя нагружен, скорость вращения ограничивается также нагрузкой на валу. В этом случае противо-ЭДС будет меньше напряжения питания. Чем больше нагрузка, тем медленнее вращается ротор и тем меньше значение противо-ЭДС.

Пример 30.5. Сопротивление обмотки ротора двигателя постоянного тока равно 5,0 Ом. Двигатель подключен к источнику с напряжением 120 В, и, когда двигатель развивает полные обороты при нормальной нагрузке, противо-ЭДС равна 108 В. Рассчитайте а) силу тока в двигателе в момент пуска (пусковой ток); б) силу тока в двигателе при полных оборотах.

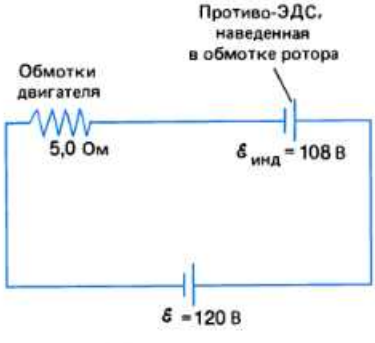


Рис. 30.11. Эквивалентная схема электродвигателя с учетом противо-ЭДС.

Решение. а) В момент пуска ротор двигателя не вращается (или вращается очень медленно) и противо-ЭДС равна нулю. Тогда по закону Ома через двигатель течет ток

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120\ \text{В}}{5{,}0\ \text{Ом}} = 24\ \text{А}.$$

б) При вращении на полных оборотах полярность противо-ЭДС противоположна напряжению питания; противо-ЭДС можно представить источником питания на эквивалентной схеме на рис. 30.11. Применяя закон Ома (или правило Кирхгофа), получаем

$$120\ \text{В} - 108\ \text{В} = I(5{,}0\ \text{Ом}),$$

и

$$I = 12\ \text{В}/5{,}0\ \text{Ом} = 2{,}4\ \text{А}.$$

Этот пример показывает, что при пуске двигателя через него может течь очень большой ток. Вот почему лампочки в доме мигают, когда включается холодильник или другой мощный потребитель энергии. Из-за большого пускового тока напряжение в розетках падает (электропроводка в доме имеет конечное сопротивление, и при больших токах падение напряжения в проводах становится заметным). Если двигатель

перегружен и вращается с малой скоростью, противо-ЭДС в обмотке уменьшается из-за падения скорости вращения. Ток через двигатель может оказаться настолько большим, что двигатель «сгорит».

В случае генератора ситуация противоположна. Здесь, как мы видели, механическое вращение якоря возбуждает в обмотках выходную ЭДС. Если генератор не подключен к внешней цепи, то на клеммах имеется ЭДС, но ток при этом не течет. Якорь в этом случае вращается легко. Но если к генератору подключена нагрузка, потребляющая ток, то в обмотке якоря будет течь ток; на обмотку с током, вращающуюся в магнитном поле, действует вращающий момент (как на ротор электродвигателя), который тормозит вращение якоря (убедитесь в этом сами, применив правило правой руки к рис. 30.7). Этот момент называется *противодействующим* (реакцией якоря): чем больше нагрузка, т. е. чем большую силу тока отбирает обмотка, тем больше противодействующий момент. Следовательно, чтобы поддерживать обороты генератора, необходимо прилагать к его валу внешний вращающий момент. Это, конечно, согласуется с законом сохранения энергии. Чтобы поднять производство электроэнергии генератором, необходимо увеличить поступающую на него механическую энергию.

Индукционные токи не всегда текут строго определенными путями – в проводниках. Рассмотрим, например, вращающийся металлический диск (рис. 30.12, *а*). Магнитное поле существует на небольшом участке диска, выделенном на рисунке, и направлено за чертеж. Там, где имеется магнитное поле, в диске наводится ЭДС, поскольку диск вращается (и вместе с диском движутся электроны). Электрический ток (положительных зарядов) направлен вверх на рис. 30.12, *б*, а вне поля – вниз. Подобные токи называются *вихревыми токами*; они возникают в любом проводнике, который движется в магнитном поле или через который меняется магнитный поток. Магнитное поле на рис. 30.12 взаимодействует с индукционными вихревыми токами и создает силу, которая (согласно правилу правой руки) тормозит вращение. Этот эффект можно использовать для плавного торможения, например, скоростного транспорта. Для торможения включается электромагнит, в поле которого оказываются либо колеса, либо, скажем, стальной рельс, по которому происходит движение. Вихревые токи можно использовать для демпфирования (гашения) колебаний системы. Общеизвестным примером служит гальванометр, в котором вихревые токи позволяют избежать перегрузки и успокоить колебания (магнитный демпфер). Но вихревые токи могут создавать и проблемы. Например, вихревые токи, наводимые в роторах электродвигателей и генераторов, приводят к выделению тепла ($P = I\mathcal{E}$) и потерям энергии. Для уменьшения вихревых токов роторы делают *наборными*

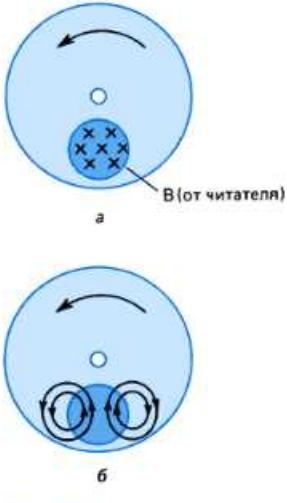


Рис. 30.12. Возбуждение вихревых токов во вращающемся диске.

(пластинчатыми) – их набирают из большого числа тонких листов железа, хорошо изолированных друг от друга. Это увеличивает сопротивление для вихревых токов, которые ограничены тонкими слоями проводящего материала; благодаря этому полная длина пути вихревых токов оказывается ограниченной толщиной пластины, что увеличивает полное сопротивление этим токам, а, следовательно, токи ослабевают и потери энергии уменьшаются.

30.7. Трансформаторы. Передача электроэнергии на расстояние

Трансформатор – это устройство для повышения или понижения переменного напряжения. Он состоит из двух обмоток, одна из которых называется *первичной*, а другая – *вторичной*. Обмотки трансформатора могут быть намотаны параллельно или расположены на общем сердечнике из мягкого железа; обычно он изготовляется наборным для уменьшения потерь на вихревые токи (рис. 30.13). В любом случае принцип действия трансформатора основан на том, что магнитный поток, создаваемый током в первичной обмотке, должен проходить через вторичную обмотку. При конструировании трансформаторов стараются добиться того, чтобы весь (или почти весь) магнитный поток, создаваемый первичной обмоткой, проходил через вторичную обмотку. В дальнейшем мы будем полагать, что это действительно так. Будем также считать потери на сопротивлении обмоток и потери на гистерезис в сердечнике пренебрежимо малыми. Эти предположения вполне оправданны, так как в современных трансформаторах потери обычно не превышают 1%.

Когда на первичную обмотку подается переменное напряжение, возникающий в результате этого переменный магнитный поток возбуждает во вторичной обмотке переменное напряжение той же частоты. Однако напряжение

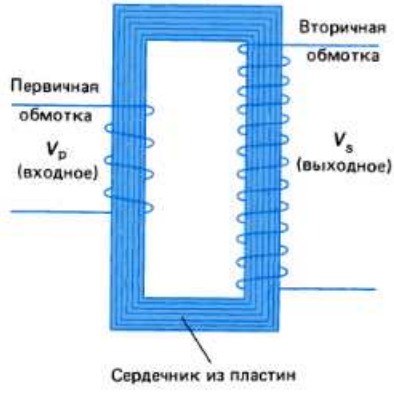


Рис. 30.13. Повышающий трансформатор ($N_p = 4$, $N_s = 12$).

на обмотках будет различным в зависимости от числа витков в каждой из них. Согласно закону Фарадея, ЭДС индукции на вторичной обмотке равна

$$V_s = N_s \frac{d\Phi_B}{dt},$$

где N_s – число витков вторичной обмотки, а $d\Phi_B/dt$ – скорость изменения магнитного потока. Напряжение V_p, подаваемое на первичную обмотку, также связано со скоростью изменения магнитного потока[1]:

$$V_p = N_p \frac{d\Phi_B}{dt},$$

где N_p – число витков первичной обмотки. Разделив эти выражения одно на другое, получим

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}. \tag{30.8}$$

Это – *уравнение трансформатора*, показывающее, как напряжение на вторичной обмотке связано с напряжением на первичной обмотке; оба напряжения, V_s и V_p (рис. 30.8), могут быть либо пиковыми, либо эффективными значениями напряжения.

Если $N_s > N_p$, трансформатор называется *повышающим*: напряжение на вторичной обмотке выше, чем на первичной. Например, если во вторичной обмотке вдвое больше витков, чем в первичной, то выходное напряжение трансформатора вдвое превысит входное. Если $N_s < N_p$, то трансформатор *понижающий*.

Хотя с помощью трансформатора можно повысить (или понизить) напряжение, мы не можем рассчитывать получить что-то из ничего. Из закона сохранения энергии следует, что выходная мощность трансформатора не может превышать его входную мощность. Грамотно сконструированный трансформатор может иметь КПД более 99%: столь низки потери энергии в нем. Таким образом, выходная мощность трансформатора практически равна входной, и, поскольку мощность $P = VI$, имеем

$$V_p I_p = V_s I_s,$$

или

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}. \tag{30.9}$$

---

[1] Это следует из того, что изменяющийся магнитный поток создает в первичной обмотке противо-ЭДС, равную подаваемому напряжению V_p, если сопротивлением обмотки можно пренебречь (правило Кирхгофа).

Пример 30.6. Трансформатор для питания транзисторного радиоприемника понижает напряжение переменного тока со 120 до 9 В (в блок питания входит также выпрямитель, преобразующий 9-вольтовый переменный ток в постоянный; см. гл. 41). Во вторичной обмотке 30 витков; потребляемая сила тока составляет 400 мА. Рассчитайте а) число витков в первичной обмотке; б) силу тока в первичной обмотке; в) мощность трансформатора.

Решение. а) Трансформатор понижающий, и по формуле (30.8)

$$N_p = N_s \frac{V_p}{V_s} = (30)(120\text{ В})/(9{,}0) = 400 \text{ витков.}$$

б) По формуле (30.9)

$$I_p = I_s \frac{N_s}{N_p} = (0{,}40\text{ А})(30/400) = 0{,}030\text{ А.}$$

в) Мощность трансформатора равна

$$P = I_s V_s = (9{,}0\text{ В})(0{,}40\text{ А}) = 3{,}6\text{ Вт,}$$

что, если считать КПД трансформатора равным 100%, совпадает с мощностью в первичной обмотке $P = (120\text{ В})(0{,}030\text{ А}) = 3{,}6$ Вт.

Следует помнить, что трансформатор может работать только на переменном токе. Постоянный ток в первичной обмотке не будет создавать переменный магнитный поток и возбуждать ЭДС индукции во вторичной обмотке. Однако если постоянное напряжение подается на первичную обмотку через выключатель, то в моменты замыкания и размыкания цепи во вторичной обмотке будет возникать индукционный ток. Например, если напряжение постоянного тока включается и выключается, как показано на рис. 30.14, *а*, то напряжение на вторичной обмотке будет иметь вид, изображенный на рис. 30.14, *б*. Обратите внимание на то, что, когда напряжение на первичной обмотке постоянно, на вторичной обмотке оно падает до нуля.

Трансформаторы играют важную роль в передаче энергии на расстояние. Электростанции часто располагаются далеко от промышленных городов, гидроэлектростанции строятся на больших реках, для атомных электростанций требуется большое количество охлаждающей воды, тепловые электростанции тоже часто строят вдали от городов из-за отсутствия свободной земли и с целью

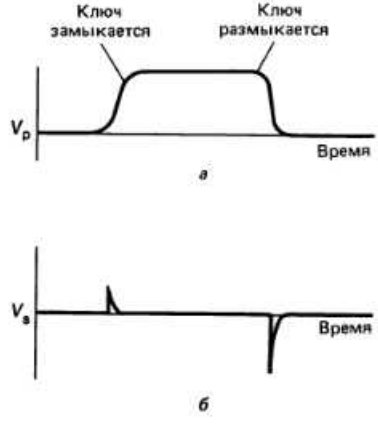


Рис. 30.14. При включении и выключении тока через первичную обмотку трансформатора (*а*) во вторичной обмотке возбуждаются импульсы ЭДС (*б*). (Масштабы по оси V на графиках *а* и *б* могут быть неодинаковыми.)

уменьшить загрязнение воздуха. В любом случае электроэнергию часто приходится передавать на большие расстояния, и в линиях электропередачи всегда неизбежны потери энергии. Потери можно уменьшить, если использовать в линиях электропередачи высокое напряжение.

Пример 30.7. Поселок потребляет электрическую мощность в среднем 120 кВт от электростанции, расположенной в 10 км. Полное сопротивление линии электропередачи равно 0,40 Ом. Определите потери мощности при напряжении на линии а) 240 В; б) 24 000 В.

Решение. а) Если передавать мощность 120 кВт при напряжении 240 В, то сила тока в линии составит

$$I = \frac{1{,}2 \cdot 10^5\ \text{Вт}}{2{,}4 \cdot 10^2\ \text{В}} = 500\ \text{А}.$$

Потери мощности в линии P_L достигнут

$$P_L \sim I^2 R = (500\ \text{А})^2 (0{,}40\ \text{Ом}) = 100\ \text{кВт}.$$

Свыше 80% общей мощности будет теряться в линии и выделяться в виде тепла!

б) При $V = 24\,000$ В

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1{,}2 \cdot 10^5\ \text{Вт}}{2{,}4 \cdot 10^4\ \text{В}} = 5{,}0\ \text{А}.$$

Потери мощности составляют

$$P_L \sim I^2 R = (5{,}0\ \text{А})^2 (0{,}40\ \text{Ом}) = 10\ \text{Вт},$$

что меньше 1%.

Ясно, что чем выше напряжение, тем меньше сила тока и тем меньшая доля мощности теряется в линии электропередачи. Именно по этой причине при передаче электроэнергии на большие расстояния обычно используют очень высокие напряжения, достигающие 700 кВ.

Генераторы электростанций не вырабатывают столь высокие напряжения; сетевое напряжение в домах и на заводах также намного ниже. С этой точки зрения большим достоинством переменного тока является то, что с помощью трансформаторов напряжение легко понижается и повышается, чем и объясняется почти повсеместное применение в электроснабжении именно переменного тока. Напряжение, вырабатываемое генераторами электростанций, перед подачей в линию электропередачи повышается. В городе напряжение в несколько этапов понижается на электрических трансформаторных подстанциях. В кабельной городской сети напряжение обычно составляет 2400 В, а в дома подается напряжение, пониженное трансформатором до 120 или 240 В.

В последнее время, однако, все большее распространение получают линии электропередачи на постоянном токе. Хотя преобразование постоянного напряжения сложнее и дороже, постоянный ток обладает рядом преимуществ по сравнению с переменным. Вот некоторые из них. Переменный ток создает переменные магнитные поля, которые индуцируют токи в близлежащих проводах; это приводит к потерям мощности. В линиях постоянного тока такие потери отсутствуют. Постоянный ток можно передавать при более высоком напряжении: у постоянного тока эффективное напряжение равно пиковому, и не следует опасаться электрического пробоя изоляторов или воздуха при пиковом напряжении.

*30.8. Электромагнитные микрофоны и звукосниматели

На электромагнитной индукции основано действие многих типов микрофонов. Устройство одного из микрофонов сходно с устройством громкоговорителя (разд. 28.11). Небольшая катушка, соединенная с мембраной микрофона, размещается около постоянного магнита. Когда мембрана колеблется под действием звуковых волн, катушка перемещается в поле магнита; частота ЭДС индукции соответствует частоте падающей звуковой волны (электродинамический микрофон). В «ленточном» микрофоне тонкая металлическая лента висит между полюсами постоянного магнита. Под действием звука лента колеблется, и наводимая в ней ЭДС индукции пропорциональна ее скорости.

В электромагнитном звукоснимателе, находящемся в тонарме проигрывателя, игла, которая движется по канавке грампластинки, соединяется с крошечным магнитом. Магнит находится внутри катушки, и при перемещении магнита в катушке наводится ЭДС. Эта небольшая ЭДС, частота которой соответствует частоте, записанной в звуковой канавке, усиливается электронной схемой, прежде чем попасть на вход громкоговорителя. Высококачественные звукосниматели обычно относятся к электромагнитному типу. В звукоснимателях другого типа используется пьезоэлектрический эффект (разд. 27.10).

Микрофоны и звукосниматели представляют собой два примера преобразователей. Еще одним преобразователем является магнитная головка в магнитофоне. Сигнал записывается на ленте в виде участков с различной намагниченностью. При протягивании ленты мимо головки в катушке наводится небольшая ЭДС индукции, обусловленная изменяющимся магнитным полем протягиваемой ленты. Затем сигнал усиливается и подается на громкоговоритель.

Заключение

Если магнитный поток через контур изменяется во времени, в контуре наводится ЭДС; величина ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ через контур:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Этот результат называется *законом электромагнитной индукции Фарадея*. ЭДС индукции создает ток, магнитное поле которого противодействует изменению магнитного потока (*правило Ленца*). Из закона Фарадея следует также, что на концах прямолинейного проводника длиной l, движущегося перпендикулярно магнитному полю с индукцией B, возникает ЭДС индукции, равная Blv, и что

изменяющееся магнитное поле создает электрическое поле. В последнем случае справедливо общее соотношение

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

где интеграл в левой части берется по замкнутому контуру, который охватывает изменяющийся магнитный поток Φ_B.

Электрический генератор преобразует механическую энергию в электрическую. Его действие основано на явлении электромагнитной индукции: катушка приводится во вращение механическим путем в однородном магнитном поле, и меняющийся магнитный поток через катушку возбуждает синусоидальную ЭДС, поступающую на выход генератора.

Трансформатор используется для преобразования переменного напряжения и состоит из первичной и вторичной обмоток. Переменный магнитный поток, создаваемый переменным напряжением на первичной обмотке, индуцирует ЭДС на вторичной обмотке. У трансформатора с КПД 100% отношение выходного и входного напряжений равно отношению числа витков во вторичной и первичной обмотках: $V_s/V_p = N_s/N_p$. Токи во вторичной и первичной обмотках находятся в обратном отношении: $I_s/I_p = N_p/N_s$.

Вопросы

1. Какие преимущества давало бы в опытах Фарадея (рис. 30.1) использование катушек с большим числом витков?
2. Обсудите детально различие между магнитным потоком и индукцией магнитного поля.
3. Держа в руке замкнутое проволочное кольцо, вы резко вводите южный полюс магнита в его центр. Возбуждается ли в кольце электрический ток? Будет ли возбуждаться ток, если магнит держать неподвижно внутри кольца? Возбуждается ли ток при выведении магнита из кольца? Давая утвердительный ответ, укажите и направление тока в кольце.
4. Можно ли отличить индуцированный ток в проводнике от тока, создаваемого каким-либо другим источником, например батареей? Отличается ли ЭДС индукции от ЭДС батареи?
5. Представьте, что прямо перед вами один за другим расположены два проволочных витка (не соединенные между собой), так что вы смотрите вдоль линии, соединяющей их центры. В какой-то момент к первому витку подключается батарея и по нему в направлении по часовой стрелке течет ток (положительных зарядов). Возникнет ли ток во втором витке? Если да, то в какой момент он возникнет? Когда он прекратится? В каком направлении будет течь ток во втором витке?
6. Действует ли между двумя витками из вопроса 5 сила? Если да, то в каком направлении?
7. Батарею, подключенную к первому витку из вопроса 5, отсоединяют. Индуцируется ли при этом ток во втором витке? Если да, то когда он возникает и когда прекращается? В каком направлении он течет?
8. Соленоид на рис. 30.15 отводят от витка в указанном направлении. Как направлен индукционный ток в ближайшем к вам участке витка?
9. Область, которую хотят изолировать от магнитных полей, окружают тонким экраном из металла с высокой электропроводностью. а) Будет ли этот экран служить защитой от быстропеременных внешних магнитных полей? Объясните ответ. б) Защитит ли этот экран от

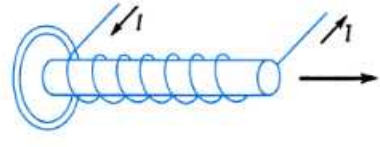


Рис. 30.15.

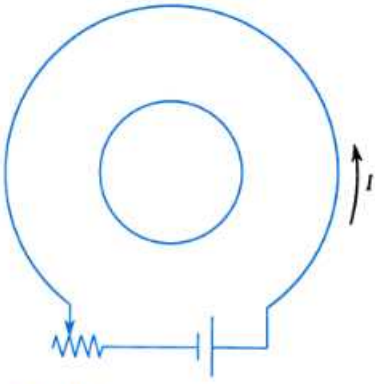


Рис. 30.16.

статического магнитного поля? в) Что если экран будет сверхпроводящим (с $\rho = 0$)?

10. Если сопротивления резистора на рис. 30.16 постепенно увеличивать, то как будет направлен индукционный ток в малом витке, расположенном внутри большого?

11. Покажите, пользуясь законом Ленца, что наводимая в движущемся стержне на рис. 30.5 ЭДС положительна внизу и отрицательна вверху, так что ток (положительных зарядов) в контуре слева от стержня течет по часовой стрелке.

12. В каком направлении потечет ток в контуре на рис. 30.5, если стержень будет двигаться влево так, что площадь контура при этом уменьшается?

13. Прямоугольную рамку на рис. 30.17 двигают влево, выводя ее из магнитного поля, которое направлено от читателя. В каком направлении по рамке течет ток?

14. Нужна ли сила, чтобы перемещать проводящий стержень на рис. 30.5 с постоянной скоростью? Объясните.

15. Автомобильный генератор дает напряжение 12 В, если ротор вращается со скоростью 600 об/мин. Каким будет напряжение на выходе генератора, если ротор вращается со скоростью 2000 об/мин при условии, что больше ничего не меняется?

16. В первых моделях автомобилей стартерный электродвигатель использовался одновременно и в качестве генератора для подзарядки аккумуляторов при движении автомобиля. Объясните, почему это возможно?

Рис. 30.17.

17. Объясните подробно, почему свет в квартире мигает, когда включается двигатель холодильника. (Подсказка: рассмотрите «напряжение на клеммах».)

18. Когда включается холодильник, свет в старых домах кратковременно меркнет. Если же включить электрокамин, то лампочки будут светиться не в полный накал все время, пока включен электрокамин. Объясните разницу.

19. Объясните смысл следующего утверждения: «Электродвигатель работает одновременно как двигатель и генератор». Можно ли сказать то же самое об электрогенераторе?

20. Пользуясь рис. 30.7 и правилом правой руки, покажите, что противодействующий момент в генераторе действительно *противодействует* вращению.

21. Будет ли электромагнитный тормоз действовать на колесо из меди или алюминия (рис. 30.12) или колесо обязательно должно быть ферромагнитным?

22. Предлагалось использовать вихревые токи для сортировки отходов перед их переработкой. Отходы вначале измельчаются, и железо удаляется с помощью электромагнита. Затем измельченный мусор пускают по наклонной плоскости вниз так, что он проходит над постоянными магнитами. Каким образом это помогает отделить цветные металлы (алюминий, медь, свинец, бронзу) от неметаллов?

23. Чтобы вывести алюминиевый лист из пространства между полюсами сильного магнита, необходимо приложить значительное усилие, несмотря на то что алюминий не ферромагнитен и не касается полюсов магнита. Почему?

24. Закрепленный на оси металлический стержень с прорезями (рис. 30.18) падает в магнитном поле гораздо быстрее, чем такой же стержень без прорезей. Почему?

25. Магнитный стержень падает в вертикальной металлической трубе с установившейся скоростью, даже если в трубе вакуум и сопротивление воздуха отсутствует. Почему?

26. Металлический стержень, закрепленный одним концом, может свободно колебаться в отсутствие магнитного поля, но в магнитном поле его колебания быстро затухают. Почему?

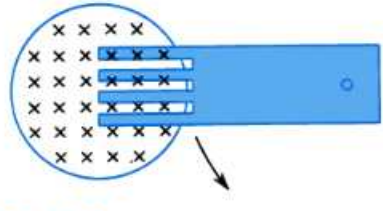


Рис. 30.18.

(Этот метод *магнитного демпфирования* колебаний, «магнитный демпфер», используется на практике в ряде устройств.)

27. Закрытый трансформатор имеет четыре клеммы. Как определить отношение числа витков в двух обмотках, не разбирая трансформатора? Как узнать, какие клеммы принадлежат одной обмотке?

28. Потери электроэнергии были бы меньше, если бы напряжение в квартирной электропроводке составляло, скажем, 600 или 1200 В. Почему этого не делают?

*29. Электродинамический микрофон устроен почти так же, как громкоговоритель. Можно ли использовать громкоговоритель в качестве микрофона? Иначе говоря, можно ли говорить в громкоговоритель, как в микрофон, а электрический сигнал с выхода подать на усилитель? Объясните. В свете вашего ответа объясните, какие конструктивные отличия существуют между микрофоном и громкоговорителем.

Задачи

Раздел 30.2

1. (I) Виток диаметром 10 см расположен перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией 0,35 Тл. Виток выводят из поля за 0,12 с. Чему равна средняя ЭДС индукции?

2. (I) Индукция магнитного поля, перпендикулярного витку диаметром 22 см, изменяется от $-0{,}40$ до $+0{,}55$ Тл за 80 мс, причем плюс означает, что поле направлено от наблюдателя, а минус – к наблюдателю. а) Рассчитайте ЭДС индукции. б) В каком направлении течет индукционный ток?

3. (I) Магнитный поток через катушку, содержащую два витка, изменяется от $-8{,}6$ до $+4{,}7$ Вб за 0,74 с. Чему равна наведенная ЭДС?

4. (II) Квадратный виток со стороной 21,0 см поворачивается на 360° в магнитном поле с индукцией B за 45 мс. Чему равно среднее значение B, если ЭДС индукции в среднем составляет 180 мВ?

5. (II) Сопротивление витка диаметром 20 см равно 8,5 Ом. За 100 мс виток выводится из магнитного поля с индукцией **B** 0,40 Тл, перпендикулярного плоскости витка. Вычислите количество энергии, выделяющейся в витке.

6. (II) Индукция магнитного поля, перпендикулярного витку диаметром 12,0 см из медной проволоки диаметром 1,25 мм, уменьшается с постоянной скоростью от 0,350 Тл до нуля. Какое количество заряда проходит при этом по витку?

7. (II). Магнитный поток через катушку из 35 витков изменяется по закону $(3{,}6t - 0{,}71t^3) \times 10^{-2}$ Тл·м^2, где t – время в секундах. а) Выразите временну́ю зависимость ЭДС индукции $\mathcal{E}$. б) Чему равна ЭДС $\mathcal{E}$ при $t = 1{,}0$ с и $t = 5{,}0$ с?

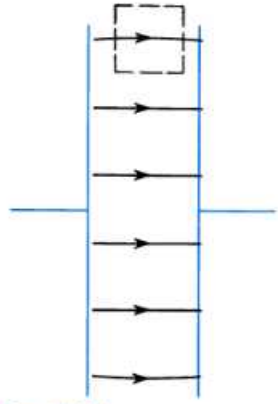


Рис. 30.19.

8. (II) Пользуясь законом Фарадея в виде (30.6), покажите, что статическое электрическое поле между параллельными обкладками конденсатора не может резко спадать до нуля у краев пластин, а должно «провисать» наружу. Используйте контур интегрирования, показанный штриховыми линиями на рис. 30.19.

9. (II) Катушка диаметром 25,0 см состоит из 20 витков медной проволоки круглого сечения диаметром 2,0 мм. Однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости катушки, изменяется со скоростью $6{,}55 \cdot 10^{-3}$ Тл/с. Определите а) силу тока в катушке; б) выделяемую в катушке мощность.

10. (II) Проволочный виток помещен внутрь длинного соленоида так, что его плоскость перпендикулярна оси соленоида. Площадь витка равна A_1, площадь внутреннего сечения соленоида с n витками на единице длины равна A_2. В обмотке соленоида течет ток $I = I_0 \cos \omega t$. Чему равна ЭДС индукции в витке?

11. (II) Площадь эластичного витка уменьшается с постоянной скоростью $dA/dt = -6{,}50 \cdot 10^{-2}$ м^2/с. Виток находится в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}42$ Тл, перпендикулярном плоскости витка. При $t = 0$ площадь витка равна $A = 0{,}285$ м^2. Определите ЭДС индукции в моменты $t = 0$ и $t = 2{,}00$ с.

12. (II) Пусть радиус витка из предыдущей задачи увеличивается с постоянной скоростью $dr/dt = 46{,}0$ см/с. Определите ЭДС индукции в витке в моменты $t = 0$ и $t = 2{,}00$ с.

13. (II) *Пробная катушка для измерения индукции* B представляет собой небольшую катушку площадью A, содержащую N витков. Катушка соединена с *баллистическим гальвано-*

метром – прибором, который измеряет заряд Q, проходящий через него за короткий промежуток времени. Пробная катушка помещается в измеряемое магнитное поле перпендикулярно ему, а затем быстро переворачивается на 180°. Покажите, что полный заряд Q, обусловленный индукционным током за время переворачивания катушки, пропорционален индукции магнитного поля B; покажите также, что

$$B = \frac{QR}{2NA},$$

где R – полное сопротивление цепи, включая сопротивление катушки и баллистического гальванометра, измеряющего полный заряд Q.

Раздел 30.3

14. (I) Стержень на рис. 30.5 имеет длину 22,0 см и движется со скоростью 35,0 см/с. Вычислите ЭДС индукции, наводимую в нем магнитным полем с индукцией 1,15 Тл.

15. (I) Стержень на рис. 30.5 имеет длину 34,0 см, движется со скоростью 2,3 м/с и обладает пренебрежимо малым сопротивлением. Индукция магнитного поля равна 0,25 Тл, а сопротивление U-образного проводника составляет 25,0 Ом. Рассчитайте а) ЭДС индукции; б) силу тока в U-образном проводнике.

16. (II) Выведите зависимость силы тока I в U-образном проводнике на рис. 30.5 от времени, если удельное сопротивление U-образного проводника равно ρ, а сопротивлением стержня можно пренебречь. Стержень имеет длину l и начинает движение в момент $t = 0$ от левого края U-образного проводника с постоянной скоростью v в магнитном поле с индукцией **B**. Площадь сечения стержня и U-образного проводника постоянна и равна A.

17. (II) а) Покажите, что мощность $P = Fv$, необходимая для перемещения проводящего стержня на рис. 30.5 вправо, равна $B^2l^2v^2/R$, где R – полное сопротивление контура. б) Покажите, что эта мощность равна мощности, выделяющейся на сопротивлении контура I^2R.

18. (II) Тонкий металлический стержень длиной L вращается с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения перпендикулярна стержню и параллельна магнитному полю с индукцией **B**. Определите ЭДС, наводимую между концами стержня.

19. (II) Круглый металлический диск радиусом R вращается с угловой скоростью ω относительно перпендикулярной оси, проходящей через его центр. Диск вращается в однородном магнитном поле, направленном параллельно оси вращения. Определите ЭДС, наводимую между центром диска и его периферией.

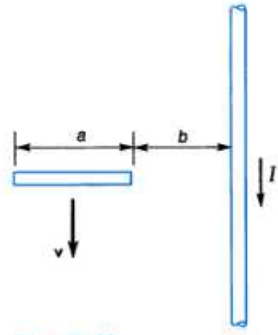


Рис. 30.20.

20. (II) Короткий отрезок провода длиной a перемещается со скоростью **v** вдоль длинного проводника, по которому течет ток I (рис. 30.20). Ближний конец отрезка находится на расстоянии b от длинного проводника. Считая, что длина вертикального проводника намного больше суммы $a + b$, определите ЭДС, наводимую между концами движущегося отрезка, если а) направление скорости **v** совпадает с направлением тока I; б) направление скорости **v** противоположно направлению тока I.

21. (II) Проводящий стержень скользит без трения по двум длинным параллельным рельсам в магнитном поле с индукцией **B**, перпендикулярном рельсам и стержню (рис. 30.21). а) Если рельсы горизонтальны, будет ли стержень двигаться с постоянной скоростью в присутствии магнитного поля? б) В момент $t = 0$, когда стержень движется со скоростью $v = v_0$, рельсы соединяют перемычкой (между точками a и b). Определите зависимость скорости стержня от времени, если сопротивление стержня равно R, а сопротивление рельсов пренебрежимо мало. Объясните ход решения.

22. (III) Проводящий стержень с массой m и электрическим сопротивлением R может скользить без трения по двум параллельным рельсам с нулевым электрическим сопротивлением, находящимся на расстоянии l один от другого в однородном магнитном поле с индукцией **B**,

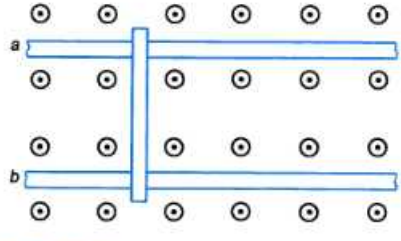


Рис. 30.21.

перпендикулярном рельсам и стержню (рис. 30.21). В момент $t = 0$, когда стержень покоится, к точкам a и b подключают источник ЭДС. Определите зависимость скорости стержня от времени, если а) источник создает в цепи постоянную силу тока I; б) источник создает между точками a и b постоянную ЭДС $\mathscr{E}_0$. в) Будет ли стержень в каждом из этих случаев двигаться с установившейся скоростью? Если да, то чему равна эта скорость?

Раздел 30.4

23. (I) Определите напряженность электрического поля внутри стержня в задаче 14.

24. (II) Каковы величина и направление напряженности электрического поля в каждой точке вращающегося диска в задаче 19?

25. (II) Квадратная проволочная катушка расположена симметрично в области магнитного поля (рис. 30.6) так, что ее центр совпадает с центром поля (рис. 30.22). Если в любой момент времени индукция поля B изменяется со скоростью dB/dt, покажите, что а) компонента напряженности электрического поля $E_\parallel$, параллельная стороне катушки, всюду одинакова. б) Определите силу тока в катушке, если ее сопротивление равно R. в) Чему равна ЭДС индукции между точками a и b, если сторона квадрата равна l?

26. (II) Рассмотрим два маленьких круглых витка, один из которых помещен в центре магнитного поля на рис. 30.6, *б*, а другой – ближе к краю, но не выходя за пределы поля. Покажите, что ЭДС индукции в обоих витках одинакова, несмотря на то что у края напряженность поля E больше.

27. (II) *Бетатрон* – ускоритель электронов до высоких энергий – представляет собой вакуумную камеру в форме бублика, находящуюся в магнитном поле (рис. 30.23). В камеру инжектируются электроны. Электромагнит создает поле, которое, во-первых, удерживает электроны на круговой орбите, а во-вторых, ускоряет их за счет изменения индукции поля B. а) Объясните, каким образом ускоряются электроны (рис. 30.6). б) В каком направлении движутся электроны на рис. 30.23, если смотреть сверху? в) Для ускорения электронов индукция магнитного поля B должна увеличиваться или уменьшаться? г) Электромагнит питается переменным током с частотой 60 Гц. Покажите, что электроны могут ускоряться лишь на протяжении 1/4 периода (1/240 с). (За это время они совершают сотни тысяч оборотов и приобретают очень высокую энергию.)

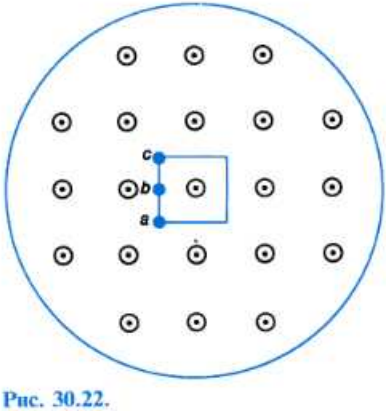


Рис. 30.22.

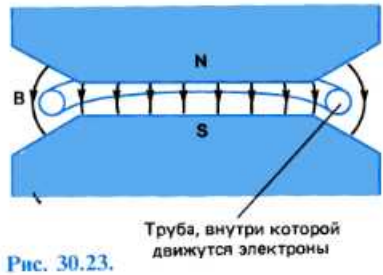


Рис. 30.23.

28. (III) Покажите, что электроны в бетатроне (задача 27, рис. 30.23) ускоряясь, движутся по орбите постоянного радиуса, если в любой момент времени индукция магнитного поля B_0 на орбите электронов равна половине среднего значения индукции $B_{ср}$ внутри орбиты: $B_0 = 1/2\,B_{ср}$. (Именно поэтому полюсам электромагнита придается сложная форма, как показано на рис. 30.23.)

29. (III) Выведите формулу зависимости от времени результирующей напряженности электрического поля в движущемся стержне (задача 22) для каждого из случаев «а» и «б».

Раздел 30.5

30. (I) Определите пиковое напряжение на выходе простого генератора, якорь которого имеет одну квадратную обмотку со стороной 8,50 см, содержащую 75 витков и вращающуюся с частотой 60 Гц в магнитном поле с индукцией 0,123 Тл.

31. (I) Покажите, что эффективное (среднеквадратичное) напряжение на выходе генератора переменного тока равно $V_{эфф} = NAB\omega/\sqrt{2}$.

32. (I) Квадратная катушка якоря генератора со стороной 12,0 см, содержащая 100 витков, вращается со скоростью 60 об/с в однородном магнитном поле. Чему равна индукция магнитного поля, если эффективное напряжение на генераторе равно 120 В?

33. (I) Простой генератор имеет квадратную обмотку со стороной 8,0 см, содержащую 100 витков. С какой скоростью должен вращаться якорь генератора в магнитном поле с индукцией 0,350 Тл, чтобы амплитуда напряжения на нем составляла 12,0 В?

Раздел 30.6

34. (I) Сопротивление обмотки электродвигателя равно 2,50 Ом. Чему равна противо-ЭДС, если двигатель вращается с номинальной скоростью при напряжении питания 120 В и потребляет силу тока 4,00 А?
35. (I) При вращении двигателя со скоростью 1200 об/мин противо-ЭДС равна 80 В. Чему будет равна противо-ЭДС, если скорость вращения увеличится до 1800 об/мин, а индукция магнитного поля не изменится?
36. (II) Какую силу тока будет потреблять двигатель в примере 30.5, если число оборотов под нагрузкой уменьшится вдвое?
37. (II) Магнитное поле в двигателе постоянного стока с параллельным возбуждением создается обмотками статора, включенными параллельно обмоткам ротора. Пусть сопротивление обмоток статора равно 46,0 Ом, а обмоток ротора – 4,50 Ом. Противо-ЭДС при вращении с номинальной скоростью составляет 105 В, когда двигатель подключен к источнику с напряжением 115 В. а) Нарисуйте эквивалентные схемы в момент пуска и для случая вращения с номинальной скоростью. б) Чему равна сила тока, потребляемая всеми обмотками двигателя в момент пуска? в) Какую силу тока потребляет двигатель, вращающийся с номинальной скоростью?
38. (II) Небольшой электромобиль, двигаясь со скоростью 30 км/ч, преодолевает силу трения 200 Н. Электродвигатель питается от десяти последовательно соединенных 12-вольтовых батарей и напрямую соединен с колесами диаметром 45 см. Обмотка ротора, содержащая 200 витков, имеет форму прямоугольника 12,0 × 15,0 см и вращается в магнитном поле с индукцией 0,385 Тл. а) Какую силу тока потребляет двигатель, создавая необходимый для движения момент? б) Чему равна противо-ЭДС? в) Какая мощность выделяется в обмотке ротора? г) Какая доля мощности затрачивается на движение электромобиля?
39. (II) «Магнитный тормоз» на рис. 30.12 действует на круглый металлический диск с удельным сопротивлением ρ, радиусом R и толщиной d. Магнитное поле с индукцией **B**, перпендикулярное диску, пронизывает небольшой участок площади диска A, центр которого расположен на расстоянии l от оси вращения. Получите приближенное выражение для тормозящего момента, когда диск вращается с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через его центр.

Раздел 30.7

40. (I) В первичной обмотке трансформатора 185 витков, во вторичной 65 витков. Какой это трансформатор? Во сколько раз он изменяет напряжение, если его КПД равен 100%?
41. (I) Трансформатор повышает напряжение от 80 до 180 В. Каково отношение сил токов во вторичной и первичной обмотках? (КПД считать равным 100%.)
42. (I) Для питания неоновых трубок световой рекламы требуется напряжение 12 кВ. Каким должно быть отношение числа витков во вторичной и первичной обмотках трансформатора для питания трубок от сети напряжением 120 В? Чему будет равно напряжение на трансформаторе, если включить его в сеть наоборот?
43. (I) В первичной обмотке трансформатора 1800 витков, во вторичной 120 витков. Напряжение на первичной обмотке равно 120 В; сила тока во вторичной обмотке 8,0 А. Чему равны сила тока в первичной обмотке и напряжение на вторичной обмотке?
44. (II) В трансформаторе мощностью 280 Вт выходное напряжение равно 6,0 В, а сила тока в первичной обмотке 20 А. а) Какой это трансформатор: понижающий или повышающий? б) Во сколько раз изменяется напряжение?
45. (II) Каждый из двух проводов линии электропередачи имеет сопротивление 0,46 Ом. Сила тока в линии длиной 18 км равна 580 А. К линии подводится напряжение 18 кВ. Определите а) напряжение в конце линии; б) подводимую мощность; в) потери мощности в линии; г) мощность нагрузки.
46. (II) Покажите, что потери мощности в линии электропередачи P_L равны $P_L = (P_T)^2 R_L / V^2$, где P_T – мощность нагрузки, V – напряжение, подводимое к линии, R_L – сопротивление проводов.
47. (II) По двум проводам сопротивлением 0,055 Ом каждый передается электрическая мощность 80 кВт. Каких потерь мощности в линии удастся избежать, если не подавать в линию напряжение 120 В, а сначала повысить его до 1200 В и в конце линии понизить снова до 120 В с помощью трансформаторов, КПД каждого из которых 99%?
48. (II) Рассчитайте линию для передачи 350 МВт электроэнергии на расстояние 600 км, чтобы потери не превышали 2%. Провода изготовлены из алюминия; напряжение в линии 600 кВ.

31 Индуктивность, энергия магнитного поля и электромагнитные колебания

В предыдущей главе обсуждалось, как изменение магнитного потока через контур возбуждает в нем ЭДС. Ранее мы также видели, что электрический ток создает магнитное поле. Основываясь на этих выводах, можно было бы предположить, что изменение тока в одном контуре должно возбуждать ЭДС (и индуцировать ток) в расположенном поблизости другом контуре и даже возбуждать ЭДС в само́м первом контуре. Один из соответствующих примеров (трансформатор) рассматривался в предыдущей главе; сейчас мы рассмотрим это явление на основе более общих представлений об индуктивности и взаимной индуктивности контуров. Понятие индуктивности послужит затем отправной точкой для изучения энергии магнитного поля. Завершает главу анализ цепей, содержащих индуктивность, а также активное сопротивление и (или) емкость.

31.1. Взаимная индуктивность

Если две катушки расположены поблизости друг от друга (рис. 31.1), то изменение тока в одной из них приведет к появлению ЭДС индукции в другой. Согласно закону Фарадея, ЭДС индукции $\mathscr{E}_2$ в катушке *2* пропорциональна скорости изменения пронизывающего магнитного потока. Этот поток создается током I_1, текущим в катушке 1, и часто бывает удобно выражать ЭДС в катушке 2 через ток в катушке 1.

Пусть Φ_{21} – магнитный поток, пронизывающий каждый виток катушки 2 и обусловленный током в катушке 1. Величина $N_2\Phi_{21}$ называется потокосцеплением катушки 2, содержащей N_2 витков плотной намотки. Если взаимное расположение двух катушек в пространстве фиксировано, величина $N_2\Phi_{21}$ будет пропорциональна силе тока I_1 в катушке 1; коэффициент пропорциональности называется **взаимной индуктивностью** M_{21} (коэффициентом взаимной индукции) катушек 1 и 2:

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}. \qquad (31.1)$$

Согласно закону Фарадея, ЭДС $\mathscr{E}_2$, возбуждаемая в

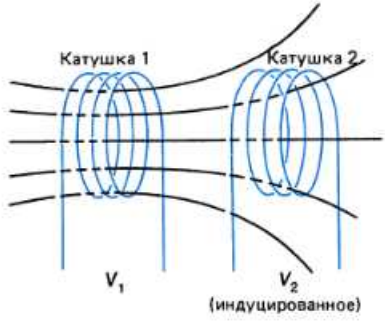


Рис. 31.1. Изменяющийся ток через одну катушку возбуждает ток в другой катушке.

катушке 2 изменяющимся током в катушке 1, равна

$$\mathscr{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}. \tag{31.2}$$

Объединяя (31.1) и (31.2), получим выражение

$$\mathscr{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

связывающее ток в катушке 1 с обусловленной этим током ЭДС индукции в катушке 2. Взаимная индуктивность M_{21} катушки 2 по отношению к катушке 1 зависит от размеров, формы, числа витков и взаимного расположения двух катушек, а также от материала сердечника – железа или другого ферромагнетика. Например, чем ближе катушки на рис. 31.1 друг к другу, тем больше силовых линий пройдет через катушку 2 и тем больше будет коэффициент взаимной индукции M_{21}. Для некоторых конфигураций взаимную индуктивность можно рассчитать теоретически (пример 31.1), но чаще ее определяют экспериментально.

Рассмотрим теперь обратный случай, когда изменяющийся ток в катушке 2 возбуждает ЭДС в катушке 1. Тогда

$$\mathscr{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}, \tag{31.3}$$

где M_{12} – коэффициент взаимной индукции катушки 1 по отношению к катушке 2. Можно показать, хотя здесь мы этого делать не будем, что $M_{12} = M_{21}$; следовательно, индексы излишни, и можно просто написать

$$M = M_{12} = M_{21} \tag{31.4}$$

и

$$\mathscr{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}, \tag{31.5а}$$

$$\mathscr{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}. \tag{31.5б}$$

В системе СИ единицей взаимной индуктивности служит генри (Гн); 1 Гн = 1 В·с/А = 1 Ом·с.

Пример 31.1. Длинный тонкий соленоид длиной l с площадью поперечного сечения A содержит N_1 витков плотной намотки. Поверх него также изолированным проводом плотно намотана катушка с N_2 витками (рис. 31.2). Вычислите взаимную индуктивность, считая, что весь магнитный поток соленоида (катушки 1) проходит через катушку 2.

Решение. Индукция магнитного поля внутри соленоида, согласно (29.3), равна

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 .$$

Магнитный поток через катушку 2 равен

$$\Phi_{21} = BA = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 A,$$

поскольку через катушку 2 проходит весь магнитный поток соленоида. Следовательно, взаимная индуктивность равна

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}.$$

Обратите внимание на то, что мы вычисляли M_{21}; если бы мы взялись за вычисление M_{12}, это оказалось бы сложным делом. Но $M_{12} = M_{21} = M$, поэтому для вычисления взаимной индуктивности M можно всегда выбирать наиболее простой путь.

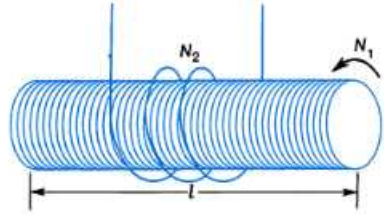


Рис. 31.2. К примеру 31.1.

Трансформатор служит примером взаимной индуктивности, в котором связь двух катушек максимальна и магнитный поток почти полностью пронизывает обе катушки. Индуктивная связь находит и другие применения. Например, некоторые типы сердечных стимуляторов (приборов, задающих ритм сокращений сердечной мышцы для поддержания нормального кровообращения у людей с заболеваниями сердца) питаются извне. Энергия из внешней катушки (расположенной на теле пациента) передается благодаря взаимной индуктивности катушке стимулятора, вшитого в области сердца. Таким образом, для замены источников питания нет нужды всякий раз прибегать к хирургическому вмешательству.

Иногда, однако, из-за индуктивной связи возникают проблемы. Переменный ток в любой цепи способен возбуждать ЭДС в другой части той же цепи или в другой цепи, даже если проводники по форме отличаются от катушки. Конечно, в отсутствие катушек с большим числом витков и ферромагнитных сердечников взаимная индуктивность M обычно невелика. Однако при слабых сигналах часто возникают проблемы, обусловленные индуктивными наводками; для их устранения обычно применяют экранированные кабели, внутренний проводник в которых окружен заземленным цилиндрическим металлическим экраном.

31.2. Индуктивность

Понятие индуктивности можно применить и к изолированной катушке с N витками. Когда сила тока в катушке (или соленоиде) меняется, меняется и магнитный поток внутри катушки, возбуждающий в ней ЭДС индукции. Эта ЭДС противодействует изменению магнитного потока (правило Ленца). Это очень похоже на возникновение противо-ЭДС в электродвигателе. Если, например, ток в катушке увеличивается, то возрастающий магнитный поток индуцирует в катушке ЭДС, под действием которой возникает ток, противоположный первоначальному току и стремящийся затормозить его рост. Если же ток в катушке уменьшается, то убывающий магнитный поток возбуждает ЭДС индукции, которая создает ток, направленный аналогично исходному, в результате чего в катушке поддерживается первоначальная сила тока.

Поскольку магнитный поток Φ, пронизывающий N витков катушки, пропорционален силе тока I в катушке, **индуктивность** катушки (или **коэффициент самоиндукции** L по аналогии со взаимной индуктивностью) можно определить как

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \tag{31.6}$$

Тогда, согласно закону Фарадея, ЭДС индукции $\mathscr{E}$ в катушке с индуктивностью L равна

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{31.7}$$

Как и взаимная индуктивность, индуктивность измеряется в генри. Значение L зависит от геометрии проводников и наличия ферромагнитного материала. В принципе индуктивность можно определить для любой цепи или ее части.

Любая цепь переменного тока содержит индуктивность, но обычно эта индуктивность мала, если только в цепи нет катушки с большим числом витков. Катушка, обладающая заметной индуктивностью, называется **катушкой индуктивности** или *дроссельной катушкой* (дросселем); на схемах она обозначается символом . В некоторых цепях индуктивность играет полезную роль, но иногда ее стремятся сделать как можно меньше. Например, прецизионные резисторы обычно наматываются из проволоки и поэтому обладают не только электрическим сопротивлением, но и индуктивностью; чтобы сделать индуктивность минимальной, проволоку наматывают в обе стороны, так что результирующий магнитный поток оказывается слабым. Подобная намотка называется безындукционной.

Если катушка индуктивности обладает пренебрежимо

малым сопротивлением, сила тока через нее зависит только от индуктивности (иначе говоря, от ЭДС самоиндукции). Если к катушке приложено переменное напряжение, оно будет в точности скомпенсировано ЭДС самоиндукции [см. (31.7)]. Таким образом, чем больше индуктивность, тем меньше скорость изменения тока, а следовательно, и сама сила тока. Индуктивность в цепи переменного тока ведет себя подобно электрическому сопротивлению, оказывая сопротивление переменному току; это свойство индуктивности характеризуют индуктивным (реактивным) сопротивлением, или *импедансом*. Более подробно понятие импеданса будет обсуждаться в гл. 32; мы увидим, что импеданс зависит не только от L, но и от частоты. Здесь же приведем только один пример, характеризующий его роль. Сопротивление первичной обмотки трансформатора обычно невелико, порой менее 1 Ом. Если бы ток в обмотке ограничивался только активным сопротивлением, то при подаче на обмотку напряжения в ней протекал бы огромный ток (и, действительно, подав на обмотку трансформатора постоянное напряжение, можно сжечь ее). Сила тока в обмотке трансформатора ограничивается до разумных значений именно благодаря импедансу обмотки, т. е. ее индуктивному сопротивлению переменному току (или благодаря ЭДС самоиндукции).

Пример 31.2. а) Выведите формулу для индуктивности L соленоида (длинной катушки) с N витками длиной l и площадью поперечного сечения A. б) Вычислите L при $N = 100$, $l = 5{,}0$ см, $A = 0{,}30$ см^2 для соленоида без сердечника. в) Вычислите L при тех же параметрах для соленоида с железным сердечником с магнитной проницаемостью $\mu = 4000\mu_0$.

Решение. а) Согласно (29.3), индукция магнитного поля внутри соленоида равна $B = \mu_0 nI$, где $n = N/l$. Поток равен $\Phi = BA = \mu_0 NIA/l$, и тогда

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}.$$

б) Поскольку $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл·м/А, подставляя численные значения, получаем

$$L = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Тл}\cdot\text{м/А})(100)^2 (3{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2)}{(5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{м})^2} =$$

$$= 7{,}5\ \text{мкГн}.$$

в) Теперь вместо μ_0 следует подставить $\mu = 4000\mu_0$, поэтому индуктивность L будет в 4000 раз больше: $L = 0{,}030$ Гн $=$ $= 30$ мГн.

Пример 31.3. Определите индуктивность единицы длины коаксиального кабеля с внутренним проводником радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 (рис. 31.3). Проводники считаем тонкими, так что магнитным полем в них можно пренебречь. Силы тока в проводниках I одинаковы и направлены в противоположные стороны.

Решение. Согласно закону Ампера (см. также пример 29.2),

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Силовые линии магнитной индукции $\mathbf{B}$ представляют собой окружности с центром на внутреннем проводнике (одна из линий показана штриховой кривой на рис. 31.3, *а*); индукция магнитного поля на расстоянии r от центра равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где I – сила тока во внутреннем провод-

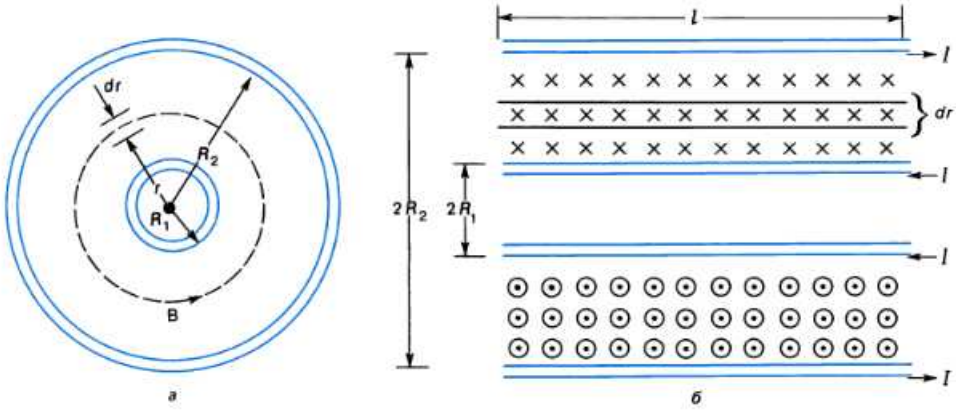


Рис. 31.3. К примеру 31.3. Поперечное (*а*) и продольное (*б*) сечения коаксиального кабеля.

нике. Магнитный поток через прямоугольник длиной l и шириной dr (вдоль отрезка кабеля; рис. 31.3, *б*) равен

$$d\Phi = Bl\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\,dr.$$

Полный поток вдоль отрезка кабеля длиной l составит

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Поскольку ток I течет в одну сторону во внутреннем проводнике и такой же силы ток I течет в противоположную сторону во внешнем проводнике, мы имеем дело с одним витком, т. е. $N = 1$. Индуктивность отрезка кабеля длиной l равна

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

а индуктивность единицы длины составляет

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

31.3. Энергия магнитного поля

Когда в катушке с индуктивностью L течет ток I, меняющийся со скоростью dI/dt, к катушке подводится электрическая мощность

$$P = I\mathcal{E} = LI\frac{dI}{dt}$$

[здесь мы воспользовались формулой (31.7)]. Рассчитаем работу по увеличению силы тока в катушке от нуля до некоторого значения I. С учетом предыдущего равенства работа dW, совершаемая за время dt, равна

$$dW = Pdt = LI\,dI,$$

а полная работа, необходимая для увеличения силы тока от нуля до I, составляет

$$W = \int dW = \int_0^I LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2.$$

Эта работа равна энергии U, запасенной катушкой индуктивности, в которой течет ток I (будем считать, что $U = 0$ при $I = 0$):

$$U = \frac{1}{2}LI^2. \tag{31.8}$$

Полученное выражение можно сравнить с выражением для энергии конденсатора C при разности потенциалов на его обкладках V:

$$U = \frac{1}{2}CV^2.$$

(разд. 25.4).

Точно так же, как энергию заряженного конденсатора можно рассматривать как энергию электрического поля между его обкладками, энергию, запасенную в катушке индуктивности, можно представлять как энергию ее магнитного поля. Чтобы выразить энергию через индукцию магнитного поля, воспользуемся результатом примера 31.2, согласно которому индуктивность соленоида равна $L = \mu_0 N^2 A/l$. Нам известно, что индукция магнитного поля внутри соленоида связана с силой тока в его обмотке соотношением $B = \mu_0 NI/l$. Следовательно,

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{l}\left(\frac{Bl}{\mu_0 N}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}Al.$$

Эта энергия заключена внутри катушки в объеме Al. Тогда энергия единицы объема, или *плотность энергии*, равна

$$u = \text{плотность энергии} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}. \tag{31.9}$$

Формула (31.9), полученная нами для частного случая (магнитное поле внутри соленоида), справедлива в любой области пространства, где существует магнитное поле. В присутствии ферромагнитного материала величина μ_0 заменяется на μ. Полученное равенство аналогично выражению для плотности энергии электрического поля (25.6): $u = (^1/_2)\varepsilon_0 E^2$.

Пример 31.4. а) Какая энергия запасена на единице длины коаксиального кабеля с проводниками радиусами R_1 и R_2 (рис. 31.3), когда по ним течет ток I? Где плотность энергии максимальна?

Решение. а) Согласно результату примера 31.3,

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{U}{l} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

б) Так как $B = \mu_0 I/2\pi r$, индукция магнитного поля максимальна у поверхности внутреннего проводника; поэтому здесь же максимальна и плотность энергии $u = B^2/2\mu_0$.

31.4. *RL*-цепочка

Любая катушка индуктивности обладает электрическим сопротивлением. Поэтому реальную катушку можно представить в виде последовательно соединенных индуктивности L и резистора R (рис. 31.4, *а*), причем величина сопротивления R может включать и сопротивление отдельного резистора, соединенного последовательно с катушкой. Что же происходит, когда последовательно с такой *RL*-цепочкой включается источник постоянного напряжения V? В момент замыкания ключа, соединяющего цепь с батареей, в цепи начинает течь ток, и в катушке возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая увеличению тока. Однако по мере возрастания силы тока падение напряжения на резисторе увеличивается, а на индуктивности уменьшается и ее сопротивление току (импеданс) падает. Таким образом, ток в цепи постепенно нарастает, как показано на рис. 31.4, *б*, и приближается к максимальному (стационарному) значению $I_{макс} = V/R$, при котором все напряжение батареи падает на резисторе.

Процесс нарастания тока в цепи можно описать математически, применив к цепи на рис. 31.4, *а* правило Кирхгофа. Источниками ЭДС в цепи являются батарея (V) и ЭДС самоиндукции катушки $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$. Сумма этих ЭДС равна падению напряжения на резисторе:

$$V - L\frac{dI}{dt} = IR,$$

где I – мгновенное значение силы тока в цепи. Перепишем это равенство в виде

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V. \qquad (31.10)$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение,

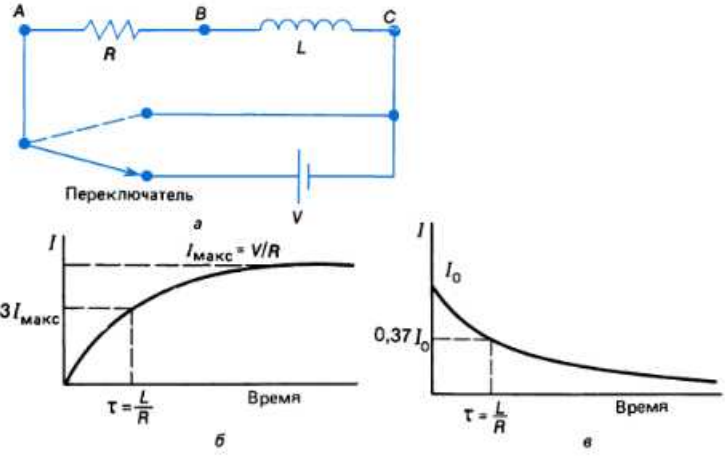


Рис. 31.4. *а* – *RC*-цепочка; *б* – нарастание тока после подсоединения батареи; *в* – уменьшение тока после выведения батареи из цепи.

которое можно проинтегрировать точно так же, как это было сделано в разд. 27.5 для *RC*-цепочки:

$$\int_{I=0}^{I} \frac{dI}{V - IR} = \int_{0}^{t} \frac{dt}{L},$$

откуда

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{V - IR}{V}\right) = \frac{t}{L},$$

или

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \tag{31.11}$$

где

$$\tau = L/R \tag{31.12}$$

называется *постоянной времени* *RL*-цепочки. Значение $\tau = L/R$ соответствует времени, за которое сила тока достигает $(1 - 1/e)I_{\text{макс}} = 0{,}63I_{\text{макс}}$, или 63% своего максимального значения $I_{\text{макс}} = V/R$. Зависимость (31.11) изображена на рис. 31.4, *б*. (Сравните полученный здесь результат с результатом для *RC*-цепочки; разд. 27.5.)

Если перебросить переключатель на рис. 31.4, *а* в положение, когда батарея выключается из цепочки (точки *A* и *C* соединяются напрямую) в тот момент, когда сила тока цепи достигнет I_0, то дифференциальное уравнение (31.10) примет вид

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0,$$

так как $V = 0$. Это уравнение легко интегрируется:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_{0}^{t} \frac{R}{L}dt,$$

где $I = I_0$ при $t = 0$, а I – значение тока в момент t. Взяв интегралы, получим

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t,$$

или

$$I = I_0 e^{-t/\tau},$$

где опять $\tau = L/R$ – постоянная времени. Таким образом, ток экспоненциально убывает до нуля (рис. 31.4, *в*)

Из проведенного анализа следует, что при включении или выключении, например, электромагнита, всегда существует какое-то запаздывание. Кроме того, *RL*-цепочка обладает свойствами, сходными со свойствами *RC*-цепоч-

ки (разд. 27.5), однако постоянная времени оказывается *обратно* пропорциональной R.

Пример 31.5. В момент $t = 0$ батарею напряжением 12,0 В подключают последовательно с сопротивлением 30 Ом и индуктивностью 220 мГн. а) Чему равна постоянная времени? б) За какое время сила тока достигнет половины максимального значения? Чему в этот момент будет равна в) мощность, потребляемая от батареи, и г) скорость накопления энергии магнитным полем катушки?

Решение. а) Согласно (31.12), $\tau = L/R = (0{,}22\ \text{Гн})/(30\ \text{Ом}) = 7{,}3\ \text{мс}$.

б) Максимальная сила тока $I_{\text{макс}} = V/R$. Подставляя в (31.11) $I = {}^1\!/_2 I_{\text{макс}} = V/2R$, получаем

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{1}{2},$$

или

$$t = \tau \ln 2 = (7{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{с}) \cdot 0{,}69 = 5{,}0\ \text{мс}.$$

в) В этот момент сила тока равна $I = I_{\text{макс}}/2 = V/(2R) = 12{,}0\ \text{В}/60\ \text{Ом} = 200\ \text{мА}$, и мощность, отбираемая от батареи, равна $P = IV = (0{,}20\ \text{А})(12\ \text{В}) = 2{,}4\ \text{Вт}$.

г) Согласно (31.8), энергия, накопленная катушкой индуктивности в произвольный момент времени, равна

$$U = \frac{1}{2} LI^2,$$

где I – сила тока в катушке в данный момент. *Скорость* накопления энергии равна

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}.$$

Чтобы найти dI/dt, надо продифференцировать (31.11):

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{V}{R}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} =$$

$$= (0{,}22\ \text{Гн})(0{,}20\ \text{А})\frac{12{,}0\ \text{В}}{30\ \text{Ом}}\frac{1}{7{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{с}}e^{-\ln 2} =$$

$$= 1{,}2\ \text{Вт}.$$

Получается, что только часть мощности, отбираемой от батареи, поступает в катушку индуктивности. На что идет остальная мощность?

31.5. LC-контур и электромагнитные колебания

Любая электрическая цепь помимо источника ЭДС может содержать три основных элемента: сопротивление, емкость и индуктивность. (В цепи могут находиться, конечно, и более сложные элементы, например диоды или транзисторы.) Выше были рассмотрены RC- и RL-цепочки. Исследуем теперь цепь, содержащую только емкость C и индуктивность L, – так называемый LC-контур (рис. 31.5). (Мы рассмотрим идеальный случай, когда катушка не обладает электрическим сопротивлением; аналогичный контур с учетом сопротивления будет проанализирован в следующем разделе.)

Пусть вначале конденсатор C на рис. 31.5 заряжен, так что на одной из его обкладок имеется заряд $+Q_0$, а на другой – заряд $-Q_0$. В момент $t = 0$ выключатель замыкается и конденсатор начинает разряжаться; по мере разряда конденсатора ток I в катушке индуктивности нарастает. В каждый момент времени разность потен-

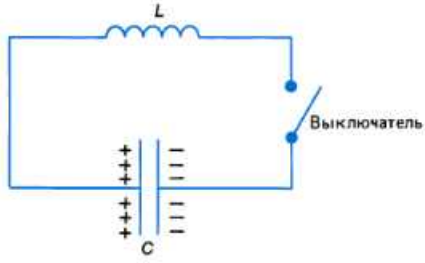


Рис. 31.5. *LC*-цепочка.

циалов на обкладках конденсатора $V = Q/C$ (где Q – заряд конденсатора в данный момент) равна разности потенциалов на катушке, т. е. равна ЭДС самоиндукции $-L(dI/dt)$. Когда конденсатор полностью разрядится ($Q = 0$), сила тока I в катушке достигнет максимального значения и перестанет изменяться ($-LdI/dt = Q/C = 0$). Индукция магнитного поля катушки в этот момент также максимальна. Затем сила тока начинает уменьшаться, а заряд будет накапливаться на противоположных пластинах конденсатора. Когда сила тока уменьшится до нуля, заряд конденсатора достигнет максимального значения Q_0, но обкладка, прежде заряженная положительно, теперь будет заряжена отрицательно. (Чуть дальше это будет показано математически.) Затем конденсатор вновь начинает разряжаться, причем ток в цепи потечет в противоположном направлении. Так процесс перетекания заряда с одной обкладки конденсатора на другую через катушку индуктивности повторяется снова и снова. Говорят, что в *LC*-контуре происходят *электромагнитные колебания*. Этот процесс связан не только с колебаниями величины заряда, но и с перекачкой энергии. Вначале энергия сосредоточена в электрическом поле конденсатора; когда заряд конденсатора Q уменьшится до нуля, а сила тока в катушке максимальна, вся энергия будет сосредоточена в магнитном поле катушки. Таким образом, колебания сопровождаются перекачкой энергии из электрического поля в магнитное и обратно.

Попытаемся математически описать колебания в *LC*-контуре. В любой момент времени разность потенциалов на обкладках конденсатора равна ЭДС самоиндукции:

$$\frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dt},$$

где Q – заряд одной из пластин конденсатора в данный момент, а I – сила тока в катушке в этот же момент. Сила тока I обусловлена только перетеканием заряда конденсатора с одной обкладки на другую; поэтому $I = dQ/dt$. Тогда приведенное выше равенство можно переписать в виде

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0. \qquad (31.13)$$

Это дифференциальное уравнение нам уже знакомо: оно имеет тот же вид, что и в случае простого гармонического движения [формула (14.3 б)]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

где x-смещение от положения равновесия массы m, закрепленной на конце пружины с жесткостью k. В случае электромагнитных колебаний в качестве переменной в уравнение входит не координата x, а заряд Q. В разд. 14.2 было показано, что решение уравнения простого гармонического осциллятора имеет вид $x = A\cos(\omega t + \phi)$, где A – амплитуда, ω – угловая частота колебаний ($\omega = 2\pi f$), а ϕ – начальная фаза. Поскольку эти два дифференциальных уравнения абсолютно идентичны, если отвлечься от названия переменных и констант, очевидно, что решение для Q в (31.13) также будет синусоидальным:

$$Q = Q_0\cos(\omega t + \phi). \qquad (31.14)$$

Мы уже знаем, что в случае простого гармонического осциллятора $\omega = \sqrt{k/m}$ [см. (14.4)]; поскольку k/m – это коэффициент при x в (14.3б), а коэффициентом при Q в (31.13) является $1/LC$, следует ожидать, что в случае колебаний LC-контура

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \qquad (31.15)$$

где f – частота (в герцах). Чтобы убедиться в этом, подставим решение (31.14) в (31.13) с учетом того, что $d^2Q/dt^2 = -\omega^2 Q_0\cos(\omega t + \phi)$:

$$-\omega^2 Q_0\cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{LC}Q_0\cos(\omega t + \phi) = 0,$$

или

$$\left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right)\cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Последнее равенство выполняется для любых t, только если $-\omega^2 + 1/LC = 0$, откуда и следует (31.15).

Формула (31.14) подтверждает, что заряд конденсатора в LC-контуре изменяется (осциллирует) по синусоидальному закону. В рассмотренном случае $Q = Q_0$ при $t = 0$, поэтому начальная фаза $\phi = 0$.

Сила тока в катушке равна

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0\sin(\omega t + \phi), \qquad (31.16)$$

т. е. также изменяется по синусоидальному закону. Максимальное значение силы тока $I_{\text{макс}} = \omega Q_0 = Q_0/\sqrt{LC}$. Графики изменения заряда и силы тока в соответствии с

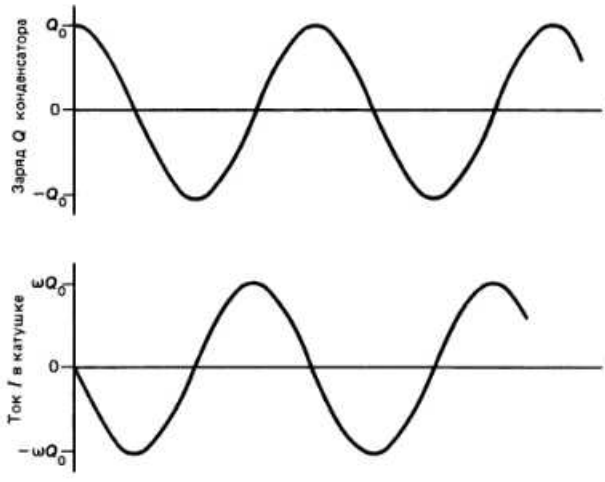


Рис. 31.6. Графики изменения заряда Q и силы тока I в LC-цепочке. Период $T = 1/f = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$.

формулами (31.15) и (31.16) представлены на рис. 31.6; обратите внимание на то, что они подтверждают наши качественные рассуждения, приведенные в начале этого раздела.

Рассмотрим теперь колебания в LC-контуре с точки зрения энергии. Энергия, запасенная электрическим полем конденсатора в произвольный момент времени t, равна [см. (25.5)]

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi);$$

в этот же момент энергия магнитного поля катушки составляет

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2}\sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q_0^2}{2C}\sin^2(\omega t + \phi)$$

[здесь мы воспользовались формулой (31.15)]. Если считать $\phi = 0$, то в моменты $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$ и т. д. (где $T = 1/f = 2\pi/\omega$ есть период колебаний) вся энергия сосредоточена в электрическом поле конденсатора: $U_E = Q_0^2/2C$, $U_B = 0$. В моменты же $t = T/2$, $t = 3T/2$, $t = 5T/2$ и т. д. вся энергия накапливается магнитным полем катушки, $U_E = 0$, $U_B = Q_0^2/2C$.

Полная энергия в любой момент времени равна

$$U = U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C}[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{Q_0^2}{2C}.$$

Следовательно, полная энергия остается постоянной, т. е. энергия сохраняется.

Пример 31.6. Конденсатор емкостью 1200 пФ заряжен от батареи до напряжения 500 В. В момент $t = 0$ его отсоединяют от батареи и подключают к катушке с индуктивностью 75 мГн. Определите а) начальный заряд конденсатора; б) макси-

мальную силу тока в контуре; в) частоту f и период колебаний T; г) полную энергию колебаний.

Решение.

а) $Q_0 = CV = (1{,}2 \cdot 10^9\ \Phi)(500\ \text{В}) = 6{,}0 \times 10^{-7}$ Кл; б) согласно (31.16), $I_{\text{макс}} = \omega Q_0 = Q_0/\sqrt{LC} = (6{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{Кл})/\sqrt{(1{,}2 \cdot 10^{-9}\ \Phi)(0{,}075\ \text{Гн})} = 63$ мА; в) $f = \omega/2\pi = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 17$ кГц; $T = 1/f = 6{,}0 \cdot 10^{-5}$ с; г) $U = Q_0^2/2C = (6{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{Кл})^2/[2(1{,}2 \cdot 10^{-9}\ \Phi)] = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

31.6. Колебательный контур с сопротивлением (*RCL*-контур)

Рассмотренный в предыдущем разделе колебательный контур идеализирован. Любая реальная цепь всегда обладает активным сопротивлением R; поэтому мы перейдем к изучению *RCL*-контура (рис. 31.7).

Пусть вновь конденсатору сообщают начальный заряд Q_0 и в момент $t = 0$ замыкается выключатель. Так как цепь содержит сопротивление, следует ожидать, что часть энергии будет превращаться в тепло, и колебания не будут незатухающими, как в *LC*-контуре. Применяя правило Кирхгофа к этой цепи, получаем

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0.$$

Это уравнение совпадает с полученным нами в разд. 31.5 с дополнительным падением напряжения на резисторе IR. Так как $I = dQ/dt$,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0. \qquad (31.17)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной Q имеет такой же вид, как и уравнение (14.16) гармонического осциллятора с затуханием:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Следовательно, колебания *RCL*-контура можно анализировать по аналогии с результатами разд. 14.7 для затухающих гармонических колебаний. В системе либо могут происходить затухающие колебания (рис. 31.8, *а*; докритическое затухание), либо поведение системы может быть критическим (рис. 31.8, *б*) или сверхкритическим (рис. 31.8, *в*) – все зависит от соотношения между R, L и C. Сравнивая уравнение (31.17) с уравнением затухающих гармонических колебаний, приведенным выше, мы видим, что между входящими в них константами можно установить следующее соответствие:

L играет роль m,
R играет роль b,
$1/C$ играет роль k.

Согласно разд. 14.7, в системе происходят затухающие

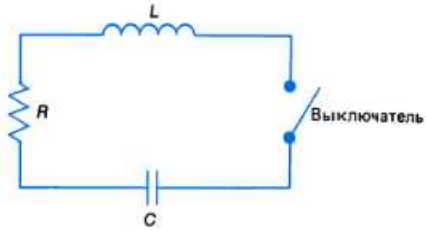


Рис. 31.7. *RCL*-контур.

колебания, если

$b^2 < 4mk$ (докритическое затухание).

Аналогично в случае электромагнитных колебаний затухание будет докритическим, если

$$R^2 < \frac{4L}{C}.$$

Если величина R мала по сравнению с $\sqrt{4L/C}$, то угловая частота ω' равна

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{31.18}$$

[ср. с (14.21)], а заряд Q изменяется во времени по закону

$$Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \phi), \tag{31.19}$$

где ϕ – начальная фаза [ср. с (14.20)].

Колебательные контуры играют важную роль во многих электронных устройствах: в радиоприемниках и телевизорах с их помощью настраиваются на нужную станцию, в магнитофонах имеется генератор с колебательным контуром для создания переменного «тока подмагничивания» при записи и т. п. Поскольку реальный колебательный контур всегда обладает сопротивлением, генератор колебаний, как правило, нуждается в периодической подкачке энергии, чтобы восполнить потери энергии, выделяющейся на сопротивлении контура в виде тепла.

Пример 31.7. В момент $t = 0$ замыкается цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки с индуктивностью $L = 40$ мГн, резистора $R = 3{,}0$ Ом и заряженного конденсатора $C = 4{,}8$ мкФ.

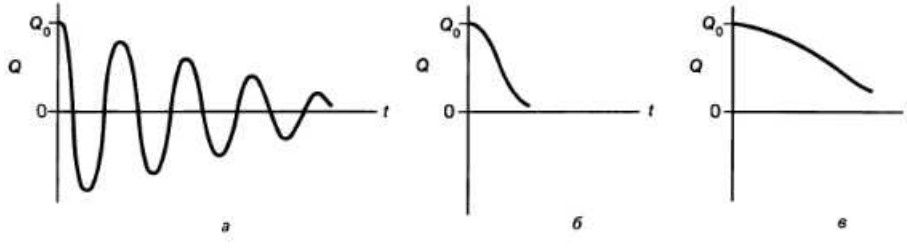


Рис. 31.8. Изменение заряда Q во времени в *RCL*-контуре при докритическом (*а*), критическом (*б*) и сверхкритическом (*в*) затухании.

а) Покажите, что в этом контуре будут происходить колебания. б) Определите частоту колебаний. в) За какое время начальная амплитуда колебаний заряда уменьшится наполовину? г) Чему равно амплитудное значение силы тока? д) При каком значении R колебания в контуре не возникают?

Решение. а) Затухание будет докритическим, если $R^2 < 4L/C$. Это условие выполнено: $R^2 = 9{,}0$ Ом^2 меньше $4L/C = 4(0{,}040\ \text{Гн})/(4{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{Ф}) = 3{,}3 \cdot 10^4$ Ом^2, поэтому в контуре будут возбуждаться колебания. б) Так как величина R мала по сравнению с L/C, можно воспользоваться формулой (31.18):

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{Гц}.$$

в) Согласно (31.19), амплитуда уменьшится вдвое, когда

$$e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{1}{2},$$

или

$$t = \frac{2L}{R}\ln 2 = 18\ \text{мс}.$$

г) Чтобы найти I, продифференцируем (31.19):

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left(-\frac{R}{2L}\cos\omega' t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\omega' t\right)$$

(так как $\omega' \approx \sqrt{1/LC}$). Поскольку R много меньше $\sqrt{4L/C}$ (см. п. «а»), членом с $\cos\omega' t$ можно пренебречь, и тогда

$$I \approx -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega' t.$$

Начальная амплитуда силы тока равна $Q_0/\sqrt{LC}$; численное значение найти невозможно, так как мы не знаем Q_0. д) Чтобы затухание было критическим или сверхкритическим, должно быть

$$R^2 \geqslant 4L/C = 3{,}3 \cdot 10^4\ \text{Ом}^2,$$

откуда R должно быть больше 180 Ом.

Заключение

Изменение тока в катушке будет возбуждать ЭДС индукции в расположенной поблизости другой катушке. *Взаимная индуктивность* (коэффициент взаимной индукции) M определяется как коэффициент пропорциональности между ЭДС индукции $\mathscr{E}_2$ во второй катушке и скоростью изменения силы тока в первой: $\mathscr{E}_2 = -M dI_1/dt$. В изолированной катушке изменяющийся ток возбуждает ЭДС самоиндукции (противо-ЭДС); катушка обладает индуктивностью (*коэффициентом самоиндукции*) L: $\mathscr{E} = -L dI/dt$. ЭДС самоиндукции катушки индуктивности проявляется в виде реактивного сопротивления (*импеданса*) переменному току.

Энергия, накопленная катушкой индуктивности L, когда в ней течет ток I, составляет $^1/_2 LI^2$. Эта энергия сосредоточена в магнитном поле катушки индуктивности. Плотность энергии любого магнитного поля с индукцией B равна $^1/_2(B^2/\mu)$, где μ – магнитная проницаемость данной области пространства.

При последовательном соединении индуктивности L и сопротивления R с источником ЭДС сила тока в цепи возрастает по экспоненциальному закону $1 - e^{-t/\tau}$, где $\tau = L/R$ – постоянная времени, и приближается к максимальному значению $I = V/R$. Если батарею внезапно отключить от цепи, оставив цепь замкнутой, сила тока будет

уменьшаться по экспоненциальному закону $e^{-t/\tau}$ с той же постоянной времени τ.

Сила тока в LC-контуре (или заряд на конденсаторе) изменяется по синусоидальному закону, неопределенно долго совершая простые гармонические колебания. Сила тока в RCL-контуре (или заряд на конденсаторе), в котором конденсатор в начальный момент был заряжен, либо совершает затухающие колебания, либо испытывает критическое и сверхкритическое затухание.

Вопросы

1. Для передачи слабого сигнала на расстояние используют экранированный кабель, в котором токонесущая жила закрыта изоляцией, а затем цилиндрическим проводником. Для чего необходим этот экран?
2. Почему два провода, по которым течет переменный ток, стараются располагать близко друг к другу?
3. Первичная обмотка трансформатора в телефонной линии имеет сопротивление 0,10 Ом; к ней приложено напряжение переменного тока 2400 В. Можете ли вы оценить силу тока в первичной обмотке? Будет ли это 24000 А? Объясните.
4. Трансформатор, рассчитанный на включение в сеть переменного тока напряжением 120 В, часто сгорает, если на него подают постоянное напряжение 120 В. Почему? (Подсказка: активное сопротивление первичной обмотки обычно очень мало.)
5. Как следует расположить две круглые плоские катушки, чтобы их взаимная индуктивность была а) максимальна; б) минимальна (не разнося их на большое расстояние)?
6. Если бы две катушки на рис. 31.1 были соединены электрически, обладали бы они взаимной индуктивностью?
7. Представьте себе, что вторая катушка с N_2 витками на рис. 31.2 сдвинута к одному из концов соленоида. Как это повлияет на взаимную индуктивность?
8. Если у соленоида имеется железный сердечник, будет ли его индуктивность L постоянной? Объясните ответ. Что вы можете сказать о взаимной индуктивности обмоток трансформатора с железным сердечником?
9. Для создания однородных магнитного и электрического полей используются соответственно длинный тонкий соленоид и конденсатор с пластинами большой площади и узким зазором. Постарайтесь найти как можно больше аналогий и различий в этих устройствах.
10. Подразумевает ли взаимная индуктивность наличие самоиндукции? Объясните.
11. Где индуктивность единицы длины соленоида больше: в середине или у торцов?
12. Какую форму следует придать отрезку провода заданной длины, чтобы его индуктивность была максимальной? Минимальной?
13. Если направление тока в батарее совпадает с ее ЭДС, энергия батареи уменьшается; если же направление тока противоположно ЭДС, то энергия батареи увеличивается (батарея заряжается). Справедливо ли это для катушки индуктивности?
14. Где плотность энергии максимальна: у торцов соленоида или в его середине?
15. Два соленоида обладают одинаковыми длиной и площадью поперечного (круглого) сечения. Обмотки обоих соленоидов плотно намотаны, но у одного более толстым проводом, чем у другого. У какого из соленоидов будет больше индуктивность? постоянная времени?
16. Влияет ли ЭДС батареи на рис. 31.4, *а* на время, за которое сила тока в LR-цепочке достигает а) заданной доли максимального значения; б) заданного значения?
17. В цепи с большой постоянной времени течет стационарный ток. При размыкании цепи могут возникнуть представляющие иногда опасность большая искра или электрическая дуга. Объясните.
18. Два круглых витка (не связанных электрически) расположены один за другим, и вы смотрите вдоль линии, соединяющей их центры. К ближнему витку подключается батарея, и ток в нем течет против часовой стрелки. а) В каком направлении потечет индукционный ток в дальнем витке? б) Как долго он длится? в) Как изменится длительность индукционного тока, если удвоить диаметр провода? Витков?
19. В момент, когда батарея подключается к RL-цепочке на рис. 31.4, *а*, ЭДС на катушке индуктивности максимальна, хотя сила тока в ней равна нулю. Объясните.
20. Объясните возникновение в соленоиде с замкнутыми между собой концами обмотки колебаний, как в LC-контуре. Откуда берется емкость?

21. За счет чего поддерживаются колебания в *LC*-контуре после полного разряда конденсатора?

22. Всегда ли в *RCL*-контуре (рис. 31.7) сила тока через катушку индуктивности равна силе тока через резистор?

23. Может ли катушка индуктивности вообще не иметь активного сопротивления? Может ли катушка индуктивности не иметь емкости? Может ли конденсатор не обладать индуктивностью? Может ли резистор не обладать индуктивностью?

24. Обсудите физическую причину, по которой L ведет себя подобно m, R подобно b, $1/C$ подобно k, на основе аналогии колебаний в *RCL*-контуре и гармонического движения с затуханием.

25. Катушка индуктивности, конденсатор и (небольшое) сопротивление соединены *параллельно*. В момент $t = 0$ сила тока I в цепи равна нулю, а заряд конденсатора равен Q_0. Как будет изменяться заряд Q во времени?

Задачи

Раздел 31.1

1. (I) Пусть диаметр второй катушки в примере 31.1 (рис. 31.2) вдвое больше диаметра соленоида, но катушка соосна с соленоидом. Чему равна взаимная индуктивность? (Соленоид считайте очень длинным.)

2. (II) Катушка длиной 44 см содержит 500 витков, намотанных на железный сердечник (среднее значение $\mu = 2000\mu_0$), на котором имеется и вторая катушка с 200 витками. Радиус каждой катушки 2,0 см. Сила тока в первой катушке равномерно убывает от 4,0 А до нуля за 80 мс. Определите а) ЭДС индукции во второй катушке; б) взаимную индуктивность M.

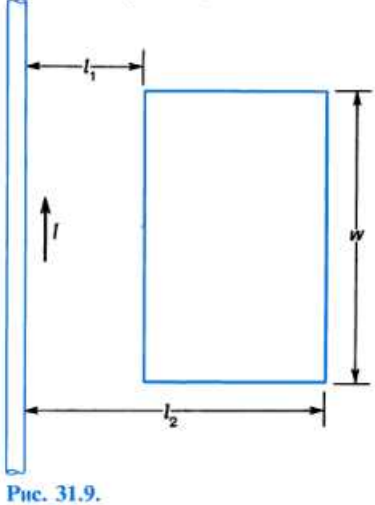


Рис. 31.9.

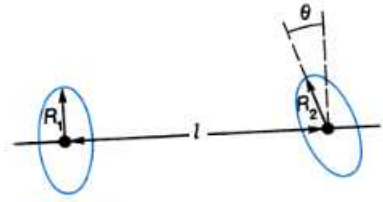


Рис. 31.10.

3. (II) Небольшая тонкая катушка, содержащая N_2 витков площадью A_2, помещена внутрь длинного соленоида вблизи его центра. Длина соленоида L, площадь сечения A_1, число витков N_1. Выразите взаимную индуктивность как функцию угла θ между плоскостью малой катушки и осью соленоида.

4. (II) Длинный прямоугольный проводник и небольшая прямоугольная рамка лежат в одной плоскости (рис. 31.9). Выразите их взаимную индуктивность через l_1, l_2 и w, считая проводник очень длинным по сравнению с l_2 и w и остальные части цепи удаленными на большое расстояние по сравнению с l_2 и w.

5. (II) Определите взаимную индуктивность единицы длины двух длинных соленоидов, вложенных друг в друга, если их радиусы равны r_1 и r_2 ($r_2 < r_1$), а число витков на единицу длины равно n_1 и n_2.

6. (II) Определите взаимную индуктивность M двух небольших катушек с радиусами R_1 и R_2, находящихся друг от друга на расстоянии l, большом по сравнению с R_1 и R_2 (рис. 31.10). Выразите зависимость M от угла между плоскостями катушек θ. Линия, соединяющая центры катушек, перпендикулярна плоскости катушки 1. Что если это предположение не выполняется?

Раздел 31.2

7. (I) Чему равна ЭДС индукции, если в катушке с индуктивностью 130 мГн сила тока равномерно возрастает от 20,0 до 28,0 мА за 140 мс?

8. (I) Чему равна индуктивность L катушки диаметром 5,7 см и длиной 1,2 м, содержащей 20 000 витков?

9. (I) Чему равна индуктивность катушки, ЭДС самоиндукции которой равна 6,50 В, при изменении силы тока от $-12,0$ до 23,0 мА за 11,0 мс?

10. (I) Чему равна индуктивность коаксиального кабеля длиной 30 м, внутренний и внешний проводники которого имеют радиусы соответственно 2,0 и 4,0 мм?

11. (I) На катушке с индуктивностью 0,320 Гн возбуждается ЭДС самоиндукции 35 В при увеличении силы тока за 2,0 мс от 0 до I_0. Чему равно значение I_0?

12. (II) Сколько витков у катушки длиной 8,0 см и диаметром 2,2 см, если ее индуктивность составляет 0,25 мГн? Сколько витков должно быть у катушки с такой же индуктивностью при наличии железного сердечника ($\mu = 10^3\,\mu_0$)?

13. (II) Радиус внешнего проводника коаксиального кабеля равен 3,0 мм. Каким должен быть радиус внутреннего проводника, чтобы индуктивность кабеля не превышала 40 нГн на 1 м?

14. (II) а) Покажите, что если в двух контурах (например, в двух катушках на рис. 31.1) текут токи I_1 и I_2, то пронизывающие их магнитные потоки будут равны $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$ и $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$. б) Выведите формулу для ЭДС индукции каждой катушки, выразив ее через скорость изменения силы тока в катушках.

15. (II) Провод, которым была плотно обмотана обмотка соленоида, используют в плотной обмотке другого соленоида вдвое меньшего диаметра. Во сколько раз различаются индуктивности этих соленоидов?

16. (II) Катушка обладает электрическим сопротивлением 2,50 Ом и индуктивностью 0,418 Гн. Чему равна разность потенциалов на ее клеммах, если сила тока в данный момент составляет 8,00 А и возрастает со скоростью 4,50 А/с?

17. (II) а) Покажите, что индуктивность L тороидальной катушки (рис. 29.10) радиусом R, содержащей N витков радиусом r, равна

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R},$$

если $R \gg r$. Поле внутри тора однородно (верно ли это на самом деле?). Согласуется ли полученный результат с формулой для индуктивности соленоида? Должно ли существовать это согласие? б) Рассчитайте индуктивность L большого тора, если диаметр витков равен 2,0 см, а диаметр всего кольца 50 см. Поле внутри тора однородно. Обмотка содержит 300 витков.

18. (II) а) Если пренебречь взаимной индуктивностью, чему равна индуктивность двух катушек, соединенных последовательно? б) Параллельно? в) Как влияет на результат взаимная индукция (взаимное расположение двух катушек)?

19. (II) Покажите, что индуктивность тора с прямоугольным сечением (рис. 31.11) дается формулой

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где N – полное число витков, а R_1, R_2 и h показаны на чертеже. (Подсказка: пользуясь законом Ампера, определите индукцию B как функцию r внутри тора, а затем проинтегрируйте.)

20. (II) Два параллельных прямолинейных тонких провода диаметром r каждый находятся на расстоянии l друг от друга и подают ток в схему, находящуюся на некотором удалении. Пренебрегая полем внутри каждого проводника, покажите, что индуктивность единицы их длины равна $(\mu_0/\pi)\ln[(l-r)/r]$.

21. (II) Разность потенциалов на клеммах катушки равна 15,5 В, когда сила тока в катушке составляет 360 мА и изменяется со скоростью 240 мА/с. Спустя некоторое время разность потенциалов составляет 6,2 В, а сила тока равна 300 мА и уменьшается со скоростью 180 мА/с. Определите индуктивность и активное сопротивление катушки.

22. (III). По длинному прямолинейному проводу течет ток I, равномерно распределенный по сечению проводника A. а) Определите индуктивность единицы длины, обусловленную только полем внутри проводника. б) Сможете ли вы рассчитать индуктивность, обусловленную полем вне проводника? Если да, то сделайте это. Обсудите полученный ответ.

23. (III) а) Покажите, что полная индуктивность двух катушек, соединенных последовательно и помещенных близко друг к другу, равна

$$L = L_1 + L_2 \pm M,$$

где L_1 и L_2 – индуктивности катушек, а M – коэффициент взаимной индукции. Объясните смысл знака $\pm$. б) Как можно уменьшить M до нуля или почти до нуля? в) Определите полную индуктивность двух катушек, соединенных параллельно, пренебрегая взаимной индуктивностью. Как изменится ответ, если взаимной индуктивностью пренебречь нельзя?

Раздел 31.3

24. (I) Индукция магнитного поля соленоида (без сердечника) длиной 10 см и диаметром 2,0 см равна 0,50 Тл. Оцените приблизительно энергию магнитного поля соленоида.

25. (I) Какая энергия запасена в катушке с индуктивностью 400 мГн в момент, когда сила тока в ней составляет 2,0 А?

26. (I) Считая среднюю индукцию магнитного поля Земли равной $0{,}50 \cdot 10^{-4}$ Тл, определите энергию магнитного поля, заключенного в шаровом слое от 0 до 10 км над поверхностью Земли.

27. (I) Сильные магнитные и электрические поля, достижимые в лабораторных условиях,

обычно составляют 2,0 Тл и $1{,}0 \cdot 10^4$ В/м. а) Определите плотность энергии таких полей и сравните полученные значения. б) При какой напряженности электрического поля плотность энергии будет такой же, как у магнитного поля с индукцией 2,0 Тл?

28. (I) В плоской электромагнитной волне (гл. 33) электрическое и магнитное поля связаны соотношением $E = cB$, где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость света. В каком соотношении находятся энергии электрического и магнитного полей в такой волне?

29. (II) Чему равна плотность энергии в центре витка радиусом 8,0 см, по которому течет ток 30 А?

30. (II) Рассчитайте плотности энергии электрического и магнитного полей у поверхности медного проводника диаметром 3,0 мм, по которому течет ток 15 А.

31. (II) Определите плотность энергии внутри тора на рис. 31.11 как функцию r ($R_1 < r < R_2$), а затем интегрированием по объему найдите полную энергию магнитного поля внутри тороидальной катушки с N витками, в которых течет ток I.

32. (II) Определите полную энергию магнитного поля в пространстве между внешним и внутренним проводниками, приходящуюся на единицу длины коаксиального кабеля [воспользуйтесь формулой (31.9) и проинтегрируйте по объему]. Сравните полученный ответ с результатом примера 31.4.

Раздел 31.4

33. (I) Выразите через постоянную времени LR-цепочки на рис. 31.4, *а* время, после которого напряжение на резисторе упадет до 1,0% своего первоначального значения.

34. (I) Через какое время (выраженное в постоянных времени) сила тока на рис. 31.4, *б* достигнет а) 10%; б) 1,0%; в) 0,1% максимального значения?

35. (II) Куда кроме катушки поступает в примере 31.5 мощность от батареи? Подтвердите расчетом, что энергия сохраняется.

36. (II) Определите dI/dt при $t = 0$ (в момент подключения батареи) в цепи на рис. 31.4, *а* и покажите, что если сила тока будет продолжать нарастать с такой же скоростью, то она достигнет максимального значения за время, равное одной постоянной времени.

37. (II) Ток в RL-цепочке возрастает от нуля до половины максимального значения за 1,56 мс. Определите а) постоянную времени цепочки; б) сопротивление R, если $L = 310$ Гн.

38. (II) Два соленоида с плотной намоткой имеют одинаковые длину и площадь круглого

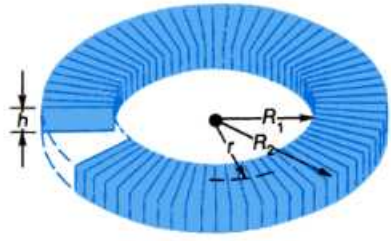


Рис. 31.11. Тор прямоугольного сечения, по катушке которого, содержащей N витков, течет ток I.

поперечного сечения. Соленоид 1 намотан вдвое более тонким проводом, чем соленоид 2. а) Чему равно отношение их индуктивностей? б) Чему равно отношение их постоянных времени (если в цепи нет других сопротивлений)?

39. (II) а) Определите энергию, накопленную катушкой L, как функцию времени для RL-цепочки, изображенной на рис. 31.4, *а*. б) За какое время (выраженное через постоянную времени) энергия магнитного поля достигнет 99% максимального значения?

40. (II) Определите в цепи на рис. 31.12 силу тока через каждый из резисторов (I_1, I_2, I_3) а) в момент замыкания ключа; б) спустя большое время после замыкания ключа; в) в момент размыкания ключа после длительного замыкания; г) спустя длительное время после размыкания ключа.

Раздел 31.5

41. (I) Переменный конденсатор настройки радиоприемника с амплитудной модуляцией имеет емкость 1500 пФ, когда приемник настроен на станцию, работающую на частоте 550 кГц. а) Какой должна быть емкость для настройки контура на станцию, работающую на частоте

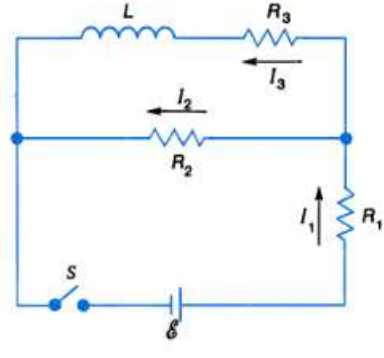


Рис. 31.12.

1600 кГц? б) Чему равна индуктивность (по предположению постоянная) контура?

42. (I) а) Выразите заряд Q конденсатора LC-контура как функцию времени, если $Q = 0$, $I = I_0$ при $t = 0$. б) Как на практике обеспечить такие начальные условия?

43. (I) Пользуясь определениями фарада и генри, покажите, что $1/\sqrt{LC}$ имеет размерность $с^{-1}$.

44. (II) Конденсатор емкостью 660 пФ заряжен до напряжения 100 В и быстро переключен на катушку с индуктивностью 75 мГн. Определите а) частоту колебаний; б) амплитуду силы тока; в) максимальную энергию магнитного поля.

45. (II) В LC-контуре $Q = Q_0$, $I = 0$ при $t = 0$. а) Через какую долю периода T, считая от $t = 0$, энергия впервые распределится поровну между катушкой и конденсатором? б) Каким в этот момент будет заряд конденсатора?

Раздел 31.6

46. (II) Через какое время полная энергия колебаний в RCL-контуре уменьшится до половины начального значения? (См. рис. 31.7; считайте, что $R \ll \sqrt{4L/C}$.)

47. (II) Какое сопротивление надо ввести в LC-контур ($L = 200$ мГн, $C = 1200$ пФ), чтобы изменить частоту колебаний на 0,10%? Увеличится или уменьшится частота колебаний?

48. (II) В RCL-контуре за один период колебаний в тепло переходит 3,5% энергии. Чему равна величина R, если $L = 80$ мГн и $C = 1{,}00$ мкФ?

49. (II) а) Выведите временну́ю зависимость энергии $U = U_E + U_B$, запасенной электрическим и магнитным полями, для RCL-контура с докритическим затуханием. Выразите энергию через начальный заряд Q_0 на конденсаторе. б) Покажите, как величина dU/dt связана с мощностью, выделяющейся в резисторе (I^2R).

50. (II) а) Продифференцировав (31.17), получите дифференциальное уравнение для силы тока I в RCL-контуре (рис. 31.7). б) Получите общее решение для I, если цепь замыкается в момент $t = 0$, когда заряд конденсатора равен Q_0. Считайте $R \ll \sqrt{4L/C}$. в) Сравните полученный результат с п. «г» примера 31.7 и обратите внимание на имеющиеся различия. г) Какие осложнения возникнут, если R будет намного меньше $\sqrt{4L/C}$; например, если $R \approx \sqrt{L/C}$?

51. (II) Пользуясь формулой (31.19) с $\phi = 0$, покажите, что сила тока I в RCL-контуре с малым затуханием изменяется по закону

$$I \approx -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega' t + \delta), \text{ где}$$

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{R}{2L\omega'}.$$

52. (II) Покажите, что начальная фаза ϕ в формуле (31.19) равна

$$\phi = \operatorname{arcctg}\left(\frac{4L}{R^2C}\right)^{1/2},$$

если $I = 0$ при $t = 0$ в схеме на рис. 31.7; считайте $R^2 \ll 4L/C$.

53. (III) Покажите, что тепловые потери энергии в RCL-контуре со слабым затуханием ($R^2 \ll 4L/C$) за один период колебаний равны приблизительно

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{2\pi R}{L\omega} = \frac{2\pi}{Q}.$$

Параметр $Q = L\omega/R$ называется *добротностью* (показателем добротности, *качеством*) контура и характеризует затухание: чем выше Q, тем слабее затухание и тем меньшая подкачка энергии требуется для поддержания колебаний.

54. (III) К RCL-цепочке на рис. 31.7 подключена батарея с напряжением V. В момент $t = 0$ ключ замыкается. Считая затухание сверхкритическим ($R^2 \gg 4L/C$), определите зависимость силы тока от времени и постройте график. Сравните полученный результат с результатом для RC-цепочки ($L = 0$). Реальные RC-цепи всегда обладают индуктивностью, поэтому результат этой задачи больше соответствует действительности, чем результат для безындукционной RC-цепочки.

* Задачи с использованием программируемого калькулятора[1)]

***55.** (III) Для цепи, описанной в примере 31.7, проведите численное интегрирование для силы тока I ($= dQ/dt$) и заряда на конденсаторе Q и постройте графики от $t = 0$ до $t = 3{,}0$ мс. Пусть $Q = 3{,}50 \cdot 10^{-4}$ Кл при $t = 0$. Добейтесь точности 2% или лучше.[1)]

***56.** (III) а) При каком значении R затухание в цепи на рис. 31.7 будет критическим? б) Для найденного значения R вновь решите задачу 55 (см. примечание). в) Решите задачу 55 для вдвое меньшего значения R.

***57.** (III) Пусть конденсатор в цепи из примера 31.7 вначале не заряжен, и в момент $t = 0$ в цепь последовательно включается батарея с напряжением 12,0 В. С помощью численного интегрирования постройте график временно́й зависимости силы тока I от $t = 0$ до $t = 5{,}0$ мс.

[1)] См. разд. 2.10 и задачи 64 и 67 в гл. 14.

32 Цепи переменного тока

В разд. 27.5, 31.4–31.6 мы уже рассматривали цепи, содержащие резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности в различных сочетаниях, но лишь при таких условиях, когда их подключали к источнику ЭДС постоянного тока или когда источники ЭДС вообще отсутствовали (как, например, при разряде конденсатора на резистор или в случае колебаний в *LC*- и *RCL*-контурах). В этой главе мы рассмотрим подключение таких цепей к источнику переменной ЭДС. Важность *цепей переменного тока* объясняется в первую очередь тем, что большое число генераторов переменного тока (см. разд. 30.5), вырабатывающих синусоидальное напряжение, производят основную часть всей электроэнергии в мире. Кроме того, любое изменяющееся во времени напряжение может быть представлено в виде суммы синусов и косинусов с различными частотами (разложение в ряд Фурье). Таким образом, важную роль играет поведение резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности в цепях синусоидального переменного тока.

32.1. Введение: цепи переменного тока

Коротко о переменном токе уже говорилось в разд. 26.7; мы видели, что для токов и напряжений, изменяющихся по синусоидальному закону, их эффективное (среднеквадратичное) значение связано с амплитудой соотношением

$$V_{\text{эфф}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Источник переменной ЭДС, обозначаемый на схемах символом —⊖—, вырабатывает синусоидальную ЭДС с частотой f:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t = \mathscr{E}_0 \sin 2\pi f t, \qquad (32.1)$$

где $\mathscr{E}_0$ – пиковое (амплитудное) значение ЭДС. Естественно предположить, что сила тока в цепи также будет синусоидальной и с той же частотой (разд. 14.8). Далее

мы покажем, что это действительно так; однако сила тока может не совпадать по фазе с ЭДС, т.е.

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi). \tag{32.2}$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы выразить пиковое значение силы тока I_0 и фазу ϕ через параметры цепи $\mathscr{E}_0$, f, R, L, C.

Рассмотрим вначале, как ведут себя в цепи переменного тока резистор, конденсатор и катушка индуктивности, подключенные к источнику переменной ЭДС, изменяющейся согласно (32.1).

32.2. Резистор в цепи переменного тока

Если к источнику переменной ЭДС подключен только резистор R ($L = C = 0$), сила тока через резистор, согласно закону Ома, будет изменяться в соответствии с изменением ЭДС:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}_0}{R} \sin \omega t, \tag{32.3а}$$

где V – напряжение на резисторе в данный момент и $V = \mathscr{E}$ согласно правилу Кирхгофа ($V_0 = \mathscr{E}_0$ – пиковое значение напряжения). Соответствующий график приведен на рис. 32.1, *б*, где напряжение показано сплошной линией, а сила тока – штриховой. Сила тока и напряжение изменяются в *фазе*, так что в (32.2) $\phi = 0$. Амплитудное значение силы тока равно

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{\mathscr{E}_0}{R}. \tag{32.3б}$$

Электрическая энергия переходит в резисторе в тепло (разд. 26.7), так что средняя тепловая мощность равна

$$\overline{P} = \overline{IV} = I_{эфф}^2 R = \frac{V_{эфф}^2}{R}.$$

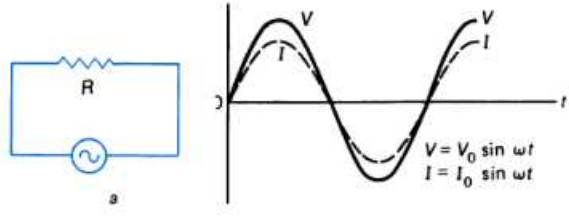


Рис. 32.1. Резистор в цепи переменного тока. Ток и напряжение на резисторе изменяются в фазе.

32.3. Конденсатор в цепи переменного тока

Когда конденсатор C непосредственно подключается к батарее, его обкладки быстро приобретают одинаковый по величине и противоположный по знаку заряд, но постоянный ток не течет через конденсатор[1]. Если же конденсатор подключен к источнику переменной ЭДС (рис. 32.2, *а*; в рассматриваемой цепи $R = L = 0$), то через конденсатор непрерывно течет переменный ток. Это может происходить, поскольку при включении напряжения переменного тока происходит перетекание заряда, так что одна обкладка заряжается отрицательно, а другая – положительно. Однако не успевает конденсатор полностью зарядиться, как полярность напряжения изменяется, и заряды начинают двигаться в противоположном направлении. Поэтому переменный ток в цепи течет непрерывно, пока к конденсатору приложено переменное напряжение.

Рассмотрим этот процесс более детально. Согласно правилу Кирхгофа, ЭДС источника в любой момент равна напряжению на обкладках конденсатора $V = Q/C$, где Q – заряд конденсатора в этот момент, т. е.

$$V = \frac{Q}{C} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t .$$

Заряд Q на обкладках изменяется в фазе с напряжением. Но что же можно сказать о силе тока в цепи? В любой момент $I = dQ/dt$ и

$$I = \frac{dQ}{dt} = \omega C \mathscr{E}_0 \cos \omega t . \qquad (32.4а)$$

Пользуясь тригонометрическим тождеством $\cos \theta = \sin(\theta + 90°)$, можно написать

$$I = I_0 \sin(\omega t + 90°), \qquad (32.4б)$$

где

$$I_0 = \omega C \mathscr{E}_0 \qquad (32.4в)$$

есть амплитудное значение силы тока, а фазовый угол

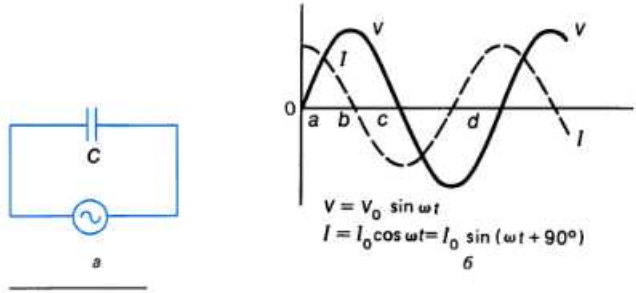


Рис. 32.2. Конденсатор в цепи переменного тока. Ток опережает напряжение на четверть периода, или на 90°. [Если принять $I = I_0 \sin \omega t$, как будет сделано в разд. 32.5, то $V = V_0 \sin(\omega t - 90°)$.]

[1] Если только конденсатор не обладает «утечкой». В противном случае постоянный ток утечки течет через конденсатор.

$\phi = 90°$. Графики силы тока I и напряжения $V(= \mathscr{E}_0 \sin \omega t)$ на конденсаторе показаны на рис. 32.2, *б*; из графика, так же как из формулы (32.4а) или (32.4б), видно, что сила тока и напряжение *не совпадают* по фазе: *сила тока опережает напряжение на 90°*, или на $\pi/2$ радиан. Другими словами, сила тока достигает максимального значения на четверть периода раньше, чем напряжение. Можно также сказать, что напряжение отстает от силы тока по фазе на 90°.

Причину расхождения по фазе между силой тока и напряжением можно интуитивно понять следующим образом. В точке *a* на рис. 32.2, *б*, когда напряжение начинает расти, заряд на обкладках конденсатора равен нулю, поэтому заряд беспрепятственно течет к обкладкам и сила тока велика. Когда напряжение приближается к максимальному значению V_0, заряд, уже накопившийся на обкладках конденсатора, препятствует дальнейшему притоку заряда и сила тока в цепи падает до нуля (точка *b*). Далее, когда напряжение V падает, накопившийся на обкладках заряд начинает уходить с пластин и сила тока возрастает (штриховая кривая), но уже в противоположном направлении; она достигает максимального отрицательного значения, когда напряжение достигает точки *c*. Таким образом, сила тока изменяется в соответствии со штриховой кривой на рис. 32.2, *б*, опережая напряжение на 90°. Вследствие того что напряжение и сила тока расходятся по фазе на 90°, потребляемая от источника мощность в среднем равна нулю и не происходит превращения энергии в другие формы. Действительно, от точки *a* до точки *b* напряжение на рис. 32.2, *б* возрастает от нуля до максимального значения; в это же время сила тока убывает от максимального значения до нуля. Среднее значение мощности VI на этом участке положительно. От точки *b* до точки *c* напряжение V положительно, а ток I отрицателен. Поэтому произведение VI отрицательно; оно в точности компенсирует положительный вклад первой четверти периода. Аналогичные соображения можно распространить и на остальную часть периода. Таким образом, средняя мощность за один полный цикл или за много циклов равна нулю. Энергия источника переходит в энергию электрического поля конденсатора, где и запасается, а затем поле уменьшается и энергия возвращается обратно источнику; потерь энергии в этом процессе не происходит. Для резистора же (рис. 32.1, *б*) сила тока всегда совпадает по фазе с напряжением и произведение VI не принимает отрицательных значений. Энергия отбирается от источника, но никогда не возвращается обратно: на резисторе электрическая энергия не запасается, а превращается в тепловую.

Конденсатор в цепи переменного тока, подобно резистору, затрудняет перетекание заряда, так как на его обкладках накапливается заряд. Для резистора R пиковые

значения тока и напряжения связаны между собой законом Ома:

$$V_0 = I_0 R.$$

Аналогичное соотношение можно записать и для конденсатора:

$$V_0 = I_0 X_C, \tag{32.5а}$$

где с учетом (32.4в)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \tag{32.5б}$$

Величина X_C называется *реактивным емкостным сопротивлением* и измеряется в омах. Формула (32.5а) устанавливает связь между пиковыми значениями силы тока I и напряжения V; она справедлива и для эффективных значений: $V_{эфф} = I_{эфф} X_C$. Однако ее *нельзя* рассматривать как связь между мгновенными значениями силы тока и напряжения, как в случае закона Ома, так как напряжение и сила тока расходятся по фазе и их пиковые значения достигаются не одновременно.

Зависимость емкостного сопротивления от емкости конденсатора и от частоты [формула (32.5б)] с физической точки зрения естественна: чем больше емкость C, тем больший заряд может накопиться на конденсаторе и тем меньше его противодействие перемещению заряда в цепи. Чем выше частота, тем короче время накопления заряда на обкладках и тем меньшее количество заряда, препятствующего его перемещению, успевает накопиться. Поэтому величина X_C обратно пропорциональна емкости и частоте ω. Заметим, что при $f = \omega/2\pi = 0$, т. е. в случае источника постоянного тока X_C обращается в бесконечность, как и следовало ожидать: конденсатор не проводит постоянный ток.

Пример 32.1. Чему равны пиковое и эффективное (среднеквадратичное) значения силы тока в цепи на рис. 32.2, *а*, если $C = 1{,}0$ мкФ и $V_{эфф} = 120$ В при а) $f = 60$ Гц; б) $f = 6{,}0 \cdot 10^5$ Гц?

Решение. а) $V_0 = \sqrt{2}\, V_{эфф} = 170$ В; тогда

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{(6{,}28)(60\ \text{с}^{-1})(1{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{Ф})} = 2{,}7\ \text{кОм}.$$

Следовательно,

$$I_0 = \frac{V_0}{X_C} = \frac{170\ \text{В}}{2{,}7 \cdot 10^3\ \text{Ом}} = 63\ \text{мА};$$

$$I_{эфф} = \frac{V_{эфф}}{X_C} = \frac{120\ \text{В}}{2{,}7 \cdot 10^3\ \text{Ом}} = 44\ \text{мА}.$$

б) При $f = 6{,}0 \cdot 10^5$ Гц получим $X_C = 0{,}27$ Ом, и тогда $I_0 = 630$ А, $I_{эфф} = 440$ А. Зависимость реактивного сопротивления от частоты f оказывается чрезвычайно существенной!

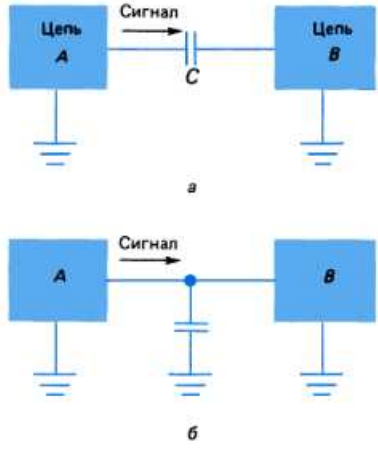


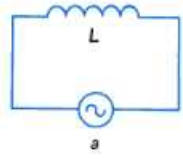
Рис. 32.3. Распространенные способы включения конденсатора.

О некоторых применениях конденсаторов уже рассказывалось; приведем здесь еще два примера. На рис. 32.3, *а* иллюстрируется так называемая емкостная связь между двумя цепями *A* и *B*. Назначение конденсатора состоит в том, чтобы препятствовать передаче постоянного напряжения из цепи *A* в цепь *B*, но в то же время обеспечить более или менее беспрепятственное прохождение переменной составляющей сигнала. Если емкость *C* достаточно велика, переменная составляющая не будет значительно ослабляться. На рис. 32.3, *б* конденсатор также пропускает переменную составляющую и не пропускает постоянную. При таком включении цепи *A* и *B* связаны по постоянному току, переменная же составляющая уходит в землю через конденсатор, представляющий для нее небольшое сопротивление. Таким образом, на рис. 32.3, *б* конденсатор служит фильтром, ослабляющим переменную составляющую напряжения. Такое включение используют, когда необходимо сгладить изменения постоянного напряжения: любое резкое изменение напряжения не проходит из цепи *A* в цепь *B*. В электронных схемах подобное включение конденсаторов применяется очень часто.

32.4. Индуктивность в цепи переменного тока

На схеме рис. 32.4, *а* катушка с индуктивностью L подключена к источнику переменной ЭДС; емкостью катушки и ее сопротивлением мы пренебрегаем. ЭДС источника будет равна противо-ЭДС (ЭДС самоиндукции), возбуждаемой в катушке переменным током в соответствии с формулой (31.7). Следовательно,

$$\mathscr{E} - L\frac{dI}{dt} = 0,$$



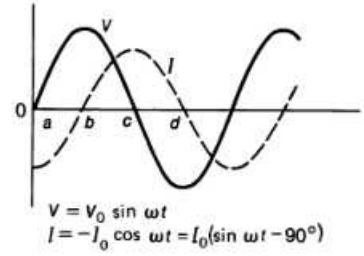


Рис. 32.4. Катушка индуктивности в цепи переменного тока. Ток отстает от напряжения на четверть периода, или на 90°. [Если принять $I = I_0 \sin \omega t$, как будет сделано в разд. 32.5, то $V = V_0 \sin(\omega t + 90°)$.]

или

$$L\frac{dI}{dt} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t .$$

Чтобы найти силу тока, выразим из последнего равенства dI:

$$dI = \frac{\mathscr{E}_0}{L} \sin \omega t dt$$

и проинтегрируем:

$$I = -\frac{\mathscr{E}_0}{\omega L} \cos \omega t . \qquad (32.6а)$$

Поскольку $\cos \theta = -\sin(\theta - 90°)$, полученное выражение можно переписать в виде

$$I = I_0 \sin(\omega t - 90°), \qquad (32.6б)$$

где

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega L}. \qquad (32.6в)$$

Таким образом, пиковое значение силы тока равно $I_0 = \mathscr{E}_0/\omega L$, а фазовый угол $\phi = -90°$. Графики напряжения и силы тока представлены на рис. 32.4, *б*. Видно, что сила тока отстает по фазе от напряжения на 90° (или, что то же самое, напряжение опережает по фазе силу тока на 90°).

Попробуем разобраться в физических причинах расхождения по фазе силы тока и напряжения. Так как напряжение на катушке равно

$$V = L\frac{dI}{dt},$$

сила тока растет быстрее всего в тот момент, когда напряжение максимально, т. е. $V = V_0$. Быстрее всего сила тока уменьшается, когда $V = -V_0$. Эти два момента соответствуют точкам b и d на графике зависимости напряжения от времени (рис. 32.4, *б*). Из того же равенства следует, что точки a и c, где $V = 0$, $dI/dt = 0$, и сила тока не меняется,–это точки максимальной и минимальной силы тока I.

Поскольку сила тока и напряжение сдвинуты относительно друг друга по фазе на 90°, средняя мощность, рассеиваемая катушкой, равна нулю, как и в случае конденсатора. Энергия от источника поступает в катушку, где запасается ее магнитным полем, а когда поле убывает, энергия возвращается источнику.

Таким образом, в среднем только резистор потребляет энергию источника тока и рассеивает ее.

Как и в случае конденсатора, можно написать соотношение между пиковыми значениями силы тока и напряжения на катушке:

$$V_0 = I_0 X_L. \qquad (32.7а)$$

Величина X_L называется *реактивным индуктивным сопротивлением*; с учетом (32.6в)

$$X_L = \omega L. \qquad (32.7б)$$

Реактивное индуктивное сопротивление также измеряется в омах. Выражение (32.7а) устанавливает связь между пиковыми или эффективными значениями V и I ($V_{эфф} = I_{эфф} X_L$), но оно не выполняется для мгновенных значений силы тока и напряжения, поскольку V и I не совпадают по фазе.

С точки зрения физики можно понять, почему величина X_L пропорциональна L и ω. Из соотношения $V = -LdI/dt$ следует, что, чем больше L, тем меньше изменение силы тока dI за время dt, а следовательно, и сила тока I в любой момент будет меньше при данной частоте. Следовательно, $X_L \sim L$. Чем выше частота, тем быстрее изменяется магнитный поток в катушке. Поскольку ЭДС индукции в этом случае остается равной приложенной ЭДС источника, сила тока должна быть меньше. Поэтому, чем выше частота, тем больше реактивное сопротивление, т.е. $X_L \sim \omega L$. Это согласуется и с тем, что при нулевой частоте (постоянный ток) ЭДС самоиндукции не возникает, и реактивное сопротивление равно нулю.

Любопытно заметить, что у катушки индуктивности реактивное сопротивление возрастает с повышением частоты, а у конденсатора падает.

Пример 32.2. Катушка обладает сопротивлением $R = 1{,}00$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}300$ Гн. Определите силу тока в катушке, если к ней приложено напряжение а) 120 В постоянного тока; б) 120 В (эффективное значение) переменного тока с частотой 60 Гц.

Решение. а) Реактивное индуктивное сопротивление равно нулю (так как частота равна нулю), поэтому по закону Ома

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120\ \text{В}}{1{,}00\ \text{Ом}} = 120\ \text{А}.$$

б) Реактивное индуктивное сопротивление равно

$$X_L = 2\pi fL = (6{,}28)(60{,}0\ \text{с}^{-1})(0{,}300\ \text{Гн}) =$$

$$= 113\ \text{Ом}.$$

По сравнению с этой величиной активным сопротивлением можно пренебречь, и

$$I_{эфф} = \frac{V_{эфф}}{X_L} = \frac{120\ \text{В}}{113\ \text{Ом}} = 1{,}06\ \text{А}.$$

[Могло возникнуть искушение заключить, что полный импеданс равен 113 Ом + 1 Ом = 114 Ом. Это означало бы, что примерно 1% напряжения, или около 1 В, падает на активном сопротивлении; на индуктивность же приходится 119 В. Хотя на резисторе действительно падает около 1 В (эффективное значение), остальное в этом утверждении *несправедливо* из-за сдвига фазы между силой тока и напряжением на индуктивности. Об этом речь пойдет в следующем разделе.]

32.5. Переменный ток в *RCL*-цепочке

Рассмотрим теперь цепь, содержащую последовательно соединенные все три элемента: резистор R, катушку индуктивности L и конденсатор C (рис. 32.5). Полученные результаты будут справедливы и в случае цепи, содержащей два из указанных элементов, если положить при необходимости $R = 0$, $L = 0$ или $C = \infty$. Пусть V_R, V_L и V_C – падения напряжения на соответствующих элементах цепи в *данный момент* времени; V_{R0}, V_{L0} или V_{C0} – *пиковые* значения напряжений на резисторе, катушке и конденсаторе. Фазовые соотношения между силой тока и напряжением на каждом из элементов будут такими же, как для каждого элемента в отдельности: V_R совпадает по фазе с током, V_L опережает ток на 90°, V_C отстает от тока на 90°. И в любой момент ЭДС источника $\mathscr{E}$ (или V) равна сумме напряжений на отдельных элементах:

$$\mathscr{E} = V = V_R + V_L + V_C. \qquad (32.8)$$

Однако поскольку эти напряжения расходятся по фазе, среднеквадратичные (эффективные) значения (которые обычно измеряет вольтметр переменного тока) не будут в сумме равны эффективному напряжению источника. Аналогично сумма пиковых значений $V_{R0} + V_{L0} + V_{C0}$ *не будет* равна пиковому напряжению источника $\mathscr{E}_0$.

Рассмотрим работу цепочки более подробно. Нас интересует импеданс (полное сопротивление) цепи в целом, а также разность фаз между напряжением источника и током в цепи и эффективное значение силы тока. Будем считать, что мгновенное значение силы тока одинаково во всех точках цепи [это допущение оправданно, если частота не слишком высока и соответствующая длина волны (c/f, где c – скорость света) намного больше геометрических размеров цепи].

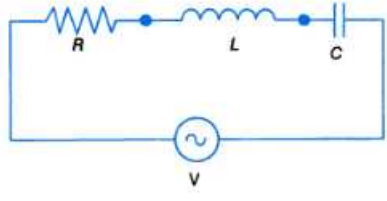


Рис. 32.5. Последовательный *RCL*-контур.

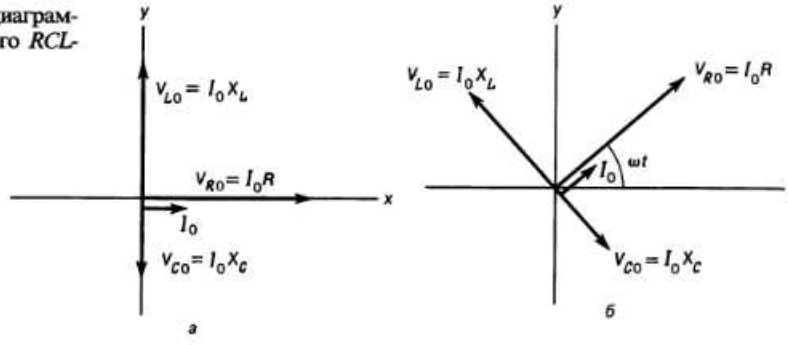


Рис. 32.6. Векторная диаграмма для последовательного *RCL*-контура.

Можно было бы переписать (32.8) в виде дифференциального уравнения [подставляя $V_C = Q/C$, $V_R = IR = (dQ/dt)R$, $V_L = LdI/dt = Ld^2Q/dt^2$)] и решить его. Но мы воспользуемся более простым и физически более наглядным методом *векторных диаграмм*. Каждое напряжение представляется в виде вектора (стрелки) в прямоугольной системе координат xy; *длина вектора характеризует величину пикового напряжения на соответствующем элементе цепи*:

$$V_{R0} = I_0 R, \quad V_{L0} = I_0 X_L, \quad V_{C0} = I_0 X_C.$$

Угол между вектором и осью x равен сдвигу фазы напряжения относительно тока. Для удобства начальную фазу тока положим равной нулю:

$$I = I_0 \sin \omega t.$$

Обратите внимание на то, что ранее в этой главе мы записывали ЭДС в виде $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$ и определяли силу тока I для каждого элемента цепи. Но сейчас, при анализе последовательной *RCL*-цепочки, удобнее выбрать вид силы тока, поскольку мгновенная сила тока в любой момент одинакова во всех точках цепи. Таким образом, мы приняли $I = I_0 \sin \omega t$ и затем определим V для этого значения. (Подобный выбор, естественно, не отражается на физической стороне дела.) Итак, при $t = 0$ сила тока $I = 0$, и вектор, представляющий I_0, расположен вдоль оси x и направлен в сторону положительных значений x (рис. 32.6, *а*). Напряжение на резисторе всегда совпадает по фазе с током, и вектор V_{R0} также будет направлен вдоль оси x в положительном направлении (при $t = 0$). Поскольку напряжение на катушке V_L опережает ток по фазе на 90°, вектор V_{L0} при $t = 0$ расположен в положительном направлении оси y; V_C отстает по фазе от тока на 90°, и вектор V_{C0} направлен вдоль оси y в сторону отрицательных значений y (рис. 32.6, *а*). Представим теперь, что вся диаграмма вращается с угловой скоростью ω; тогда спустя время t каждая стрелка повернется на угол ωt (рис. 32.6, *б*). *Проекция каждого вектора на ось y будет характеризовать падение напряжения на каждом элемен-*

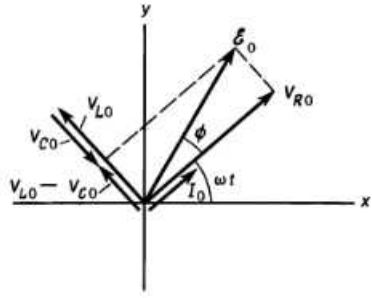


Рис. 32.7. Векторная диаграмма для последовательного *RCL*-контура; $\mathscr{E}_0$ – результирующий вектор ЭДС.

те цепи в момент времени t. Например, проекция V_{R0} на ось y равна $V_{R0} \sin \omega t = I_0 R \sin \omega t = IR$, проекции V_{L0} и V_{C0} соответственно равны $V_{L0} \cos \omega t = V_{L0} \sin (\omega t + 90°)$ и $-V_{C0} \cos \omega t = V_{C0} \sin (\omega t - 90°)$, что согласуется с полученными ранее результатами[1]. Сохранение разности фаз 90° между векторами обеспечивает правильность фазовых соотношений. Хотя это обстоятельство убеждает в действенности метода векторных диаграмм, нас в действительности интересует вопрос, каким образом складывать напряжения.

Сумма проекций трех векторов на ось y равна проекции их суммы. Но сумма проекций в любой момент равна мгновенному падению напряжения на всей цепи, которое совпадает с ЭДС источника $\mathscr{E}$. Поэтому векторная сумма трех векторов равна пиковому значению ЭДС источника $\mathscr{E}_0$. На рис. 32.7 видно, что вектор $\mathscr{E}_0$ составляет угол ϕ с V_{R0} и I_0. Вектор $\mathscr{E}_0$ вращается вместе с другими векторами, и мгновенное значение ЭДС $\mathscr{E}$ (проекция $\mathscr{E}_0$ на ось y) равно

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin (\omega t + \phi) .$$

Мы видим, что напряжение источника сдвинуто по фазе относительно силы тока в цепи на угол ϕ[2].

Проведенный анализ позволяет сделать ряд полезных выводов. Во-первых, можно определить полный **импеданс** Z цепи с помощью соотношений

$$\mathscr{E}_{эфф} = I_{эфф} Z \quad \text{или} \quad \mathscr{E}_0 = I_0 Z . \tag{32.9}$$

---

[1] Заметим, что выражения (32.3а), (32.4б), (32.6б) описывают силу тока при условии, что ЭДС источника имеет нулевую начальную фазу: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$. Если бы вместо этого мы приняли начальную фазу силы тока равной нулю, $I = I_0 \sin \omega t$, как сделано в этом разделе, то напряжения на резисторе, катушке и конденсаторе давались бы выражениями $V_R = IR = I_0 R \sin \omega t$; $V_L = L(dI/dt) = \omega L I_0 \cos \omega t = I_0 X_L \sin (\omega t + 90°)$; $V_C = Q/C = (1/C) \times \int I dt = -(I_0/\omega C) \cos \omega t = I_0 X_C \sin (\omega t - 90°)$. Именно эти результаты получены выше с помощью векторной диаграммы.

[2] Для проверки можно положить $R = C = 0$; тогда $\phi = 90°$ и $\mathscr{E}_0$ опережает ток на 90°, как и должно быть в случае одной лишь индуктивности. Если цепь содержит только конденсатор ($R = L = 0$), то $\phi = -90°$ и $\mathscr{E}_0$ отстает от тока на 90°, как и должно быть в случае одной лишь емкости.

Из рис. 32.7 следует, что

$$\mathscr{E}_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} = \sqrt{I_0^2 R^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2} = \\ = I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

и с учетом (32.9)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \tag{32.10а}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{32.10б}$$

Последними равенствами определяется полный импеданс цепи. Из рис. 32.7 можно найти и сдвиг фаз ϕ:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{V_{L0} - V_{C0}}{V_{R0}} = \frac{I_0 (X_L - X_C)}{I_0 R} = \frac{X_L - X_C}{R}, \tag{32.11а}$$

или

$$\cos\phi = \frac{V_{R0}}{\mathscr{E}_0} = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{Z}. \tag{32.11б}$$

Обратите внимание на то, что на рис. 32.7 $X_L > X_C$, и ток в цепи отстает по фазе от напряжения источника на угол ϕ; если бы $X_C > X_L$, то значение ϕ в (32.11) оказалось бы меньше нуля, и это означало бы, что ток опережает по фазе напряжение источника.

Наконец, определим выделяющуюся в цепи мощность. Ранее мы уже видели, что мощность рассеивается только на активном сопротивлении; на реактивном сопротивлении катушки или конденсатора мощность не рассеивается. Следовательно (см. также разд. 26.7), средняя мощность $\bar{P} = I_{эфф}^2 R$. Но, согласно (32.11б), $R = Z\cos\phi$, откуда

$$\bar{P} = I_{эфф}^2 Z \cos\phi = I_{эфф} \mathscr{E}_{эфф} \cos\phi. \tag{32.12}$$

Множитель $\cos\phi$ называется *коэффициентом мощности* цепи. Для чисто активного сопротивления $\cos\phi = 1$ и $\bar{P} = I_{эфф}\mathscr{E}_{эфф}$. Для чисто реактивного сопротивления (емкостного или индуктивного) $\cos\phi = 0$ и рассеиваемая мощность равна нулю.

Выводы этого анализа подлежат экспериментальной проверке и полностью подтверждаются экспериментом.

В начале настоящего раздела мы произвольно выбрали начальную фазу тока равной нулю, так что $I = I_0 \sin\omega t$. С точки зрения физики важна не начальная фаза, а разность фаз между током и напряжением. Если выбрать вместо этого

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin\omega t,$$

как в разд. 32.1–32.4, то сила тока будет описываться выражением

$$I = I_0 \sin(\omega t - \phi),$$

где ϕ и I_0 имеют те же значения, что и согласно формулам (32.9)–(32.11).

Пример 32.3. Пусть в схеме на рис. 32.5 $R = 25$ Ом, $L = 30$ мГн и $C = 12$ мкФ; цепь подключена к источнику переменного напряжения 90 В (эффективное значение) с частотой 500 Гц. Рассчитайте а) силу тока в цепи; б) показания вольтметра на каждом из элементов цепи (эффективное значение падения напряжения); в) сдвиг фаз ϕ; г) мощность, рассеиваемую в цепи.

Решение. а) Найдем вначале по отдельности индуктивное и емкостное сопротивления при частоте 500 $с^{-1}$:

$$X_L = 2\pi fL = 94 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = 27 \text{ Ом}.$$

Полный импеданс равен

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(250 \text{ Ом})^2 + (94 \text{ Ом} - 27 \text{ Ом})^2} = 72 \text{ Ом}.$$

Согласно (32.9),

$$I_{эфф} = \frac{\mathscr{E}_{эфф}}{Z} = \frac{90 \text{ В}}{72 \text{ Ом}} = 1{,}25 \text{ А}.$$

б) Эффективные значения падения напряжения на каждом из элементов равны

$$(V_R)_{эфф} = I_{эфф}R = (1{,}25 \text{ А})(25 \text{ Ом}) = 31 \text{ В};$$

$$(V_L)_{эфф} = I_{эфф}X_L = 117 \text{ В};$$

$$(V_C)_{эфф} = I_{эфф}X_C = 34 \text{ В}.$$

Отметим, что сумма эффективных значений *не равна* эффективному напряжению источника (90 В); более того, падение напряжения на индуктивности *превышает* напряжение источника. Это обусловлено тем, что падения напряжений на элементах сдвинуты относительно друг друга по фазе. При этом, конечно, мгновенные значения напряжения в любой момент времени суммируются; так может происходить, поскольку в любой момент одно напряжение может оказаться отрицательным и компенсировать другое, большое положительное напряжение. Эффективные значения напряжения по определению всегда положительны. в) $\cos\phi = R/Z = 25 \text{ Ом}/72 \text{ Ом} = 0{,}35$, откуда $\phi = 70°$. г) $P = I_{эфф}V_{эфф}\cos\phi = (1{,}25 \text{ А})(90 \text{ В})(0{,}35) = 39 \text{ Вт}$.

32.6. Резонанс в цепях переменного тока

Эффективное значение силы тока в RCL-цепочке равно [см. (32.9) и (32.10б)]

$$I_{эфф} = \frac{\mathscr{E}_{эфф}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_{эфф}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (32.13)$$

Поскольку реактивное сопротивление индуктивностей и емкостей зависит от частоты f, сила тока в RCL-цепочке будет зависеть от частоты питающего напряжения. Из формулы (32.13) следует, что сила тока в цепи максимальна при частоте, отвечающей

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Выражая отсюда ω, получаем решение ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad (32.14)$$

Когда $\omega = \omega_0$, в цепи наблюдается *резонанс*. На этой частоте $X_C = X_L$, поэтому импеданс соответствует чисто

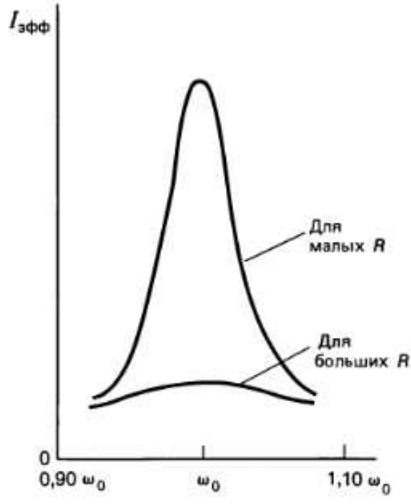


Рис. 32.8. Зависимость тока в RCL-контуре от частоты при двух значениях сопротивления R. Резонанс наблюдается на частоте $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

активному сопротивлению и $\cos\phi = 1$. Зависимость $I_{эфф}$ от ω показана на рис. 32.8 для фиксированных значений $\mathscr{E}_0$, L и C и двух разных значений R. Чем меньше R, тем выше и острее резонанс. Если величина R мала по сравнению с X_L и X_C, мы приходим к LC-контуру, который рассматривался в разд. 31.5.

Резонанс в электрической цепи аналогичен механическому резонансу (гл. 14). Поступающая в систему энергия в резонансе максимальна, будь то электрический резонанс, колебания груза на пружине или раскачивание ребенка на качелях (разд. 14.8). В случае резонанса в электрической цепи это следует из равенства (32.12): при резонансе, $\cos\phi = 1$, значение $I_{эфф}$ максимально. При постоянном значении $\mathscr{E}_{эфф}$ максимальна и мощность в резонансе. График зависимости мощности от частоты имеет максимум аналогично силе тока на рис. 32.8.

На электрическом резонансе основано много схем. В радиоприемниках и телевизорах резонансный контур используется для настройки на станцию. В контур поступают сигналы, содержащие широкий набор частот, однако сила тока в контуре становится значительной только при частотах, близких к его резонансной частоте или совпадающих с ней. Для настройки на разные станции либо емкость, либо индуктивность контура делают переменными.

* 32.7. Согласование импедансов

Обычно электрические цепи соединяют между собой. Например, телевизионная антенна подключается к телевизору, магнитофонная приставка подключается к усилителю, усилитель соединяется с динамиком; электроды для

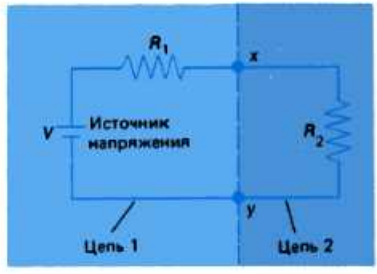


Рис. 32.9. Выход цепи 1 соединен с входом цепи 2.

снятия электрокардиограммы или электроэнцефалограммы подключаются к усилителю или самописцу. Во многих случаях важно передать из одной цепи в другую как можно большую мощность с минимальными потерями. Это достигается согласованием выходного импеданса одной цепи с входным импедансом другой.

Покажем, что это действительно так, на простом примере цепей, содержащих только активные сопротивления. На рис. 32.9 источник в цепи 1 может представлять собой блок питания, выход усилителя, сигнал от антенны, лабораторный датчик, электроды, подключенные к телу пациента. R_1 представляет собой сопротивление этой цепи, включая внутреннее сопротивление источника; R_1 называется выходным сопротивлением (выходным импедансом) цепи 1. Выход цепи 1 (клеммы x и y) соединен с входом цепи 2. Цепь 2 может быть очень сложной, но для любой цепи можно определить эквивалентное сопротивление. Оно представлено на схеме резистором R_2, характеризующим входной импеданс.

Мощность, вводимая в цепь 2, равна $P = I^2R_2$, где $I = V/(R_1 + R_2)$. Таким образом,

$$P = I^2R_2 = \frac{V^2R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Разделив числитель и знаменатель в правой части на R_1, получим

$$P = \frac{V^2}{R_1}\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2}.$$

Вопрос заключается в следующем: если сопротивление источника R_1, то каким должно быть сопротивление R_2, чтобы обеспечить поступление в цепь 2 максимальной мощности? Для ответа продифференцируем P по R_2 и приравняем производную нулю:

$$0 = \frac{dP}{dR_2} = \frac{V^2}{R_1^2}\frac{(1 - R_2/R_1)}{(1 + R_2/R_1)^3}.$$

Это выражение может обращаться в нуль только при

условии $1 - R_2/R_1 = 0$, или

$R_2 = R_1$.

Таким образом, передаваемая мощность будет максимальной, когда *выходной импеданс* одной цепи *равен входному импедансу* второй. Это и есть *согласование импедансов*.

В цепи переменного тока, содержащей емкости и индуктивности, необходимо учитывать фазы, и поэтому анализ усложняется. Однако вывод остается прежним: чтобы обеспечить максимальную передачу мощности из одной цепи в другую, необходимо согласовать импедансы ($Z_2 = Z_1$). Кроме того, следует принимать во внимание возможность значительного искажения сигнала. Например, подключение второй цепи может создать в первой резонанс или, наоборот, вывести ее из резонанса.

Отсутствие надлежащего согласования импедансов может лишить результаты измерений всякого смысла. При конструировании аппаратуры эти требования обычно учитываются. Однако бывали случаи, когда исследователи, соединив различные блоки без согласования импедансов, делали при этом «открытия». После провозглашения подобного «открытия» оказывалось, что наблюдаемые эффекты возникали из-за рассогласования импедансов и вовсе не связаны с предполагаемыми новыми явлениями.

В некоторых случаях для преобразования импедансов используют трансформаторы, которые обеспечивают их согласование с другими цепями. Если Z_s – импеданс вторичной обмотки, а Z_p – импеданс первичной обмотки, то $V_s = I_s Z_s$ и $V_p = I_p Z_p$ (где V и I – пиковые или эффективные значения) и

$$\frac{Z_p}{Z_s} = \frac{V_p I_s}{V_s I_p} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2$$

[см. формулы (30.8) и (30.9)]. Таким образом, с помощью трансформатора можно изменять входной или выходной импеданс устройства. Такие согласующие трансформаторы (выходные трансформаторы) используются в некоторых низкочастотных усилителях; вторичная обмотка выходного трансформатора нередко имеет несколько выводов, соответствующих импедансам 4, 8, 16 Ом, что позволяет подключить к нему динамик любого типа.

На вход некоторых приборов (например, осциллографа) подают лишь напряжение сигнала, мощность же сигнала может быть очень малой. В этом случае нет проблемы передачи максимальной мощности, и входной импеданс таких приборов может быть высоким. При высоком входном сопротивлении прибор отбирает очень малую силу тока и не вносит искажений в исследуемую цепь. Это часто бывает важно с точки зрения проведения эксперимента.

*32.8. Поражение электрическим током. Токи утечки

Удар электрическим током может быть опасен для здоровья и даже для жизни. Тяжесть поражения зависит от силы тока, продолжительности его действия и от того, по какому пути ток протекает в теле человека. Особенно чувствительны к действию тока сердце и мозг, так как возможно нарушение их деятельности.

Большинство людей ощущают электроток при силе тока около 1 мА. Сила тока в несколько миллиампер вызывает болевые ощущения, но редко бывает опасна для здорового человека. Однако сила тока выше 10 мА вызывает резкое сокращение мышц, и человек может оказаться не в силах освободиться от источника тока (например, неисправного прибора или проводов). В этом случае может произойти остановка дыхания; сделанное своевременно искусственное дыхание может вернуть человека к жизни. Если ток свыше 70 мА проходит в области сердца, сердечная мышца начинает беспорядочно сокращаться и нарушается нормальное кровообращение. Это явление называется фибрилляцией сердца; вовремя не прекращенная фибрилляция приводит к смерти. Как ни странно, при значительно большей силе тока (порядка 1 А) поражения могут быть не столь серьезными и смертельный исход менее вероятен[1)].

Сила тока зависит от электрического сопротивления тела. Внутренние ткани обладают очень низким сопротивлением, так как внутриклеточная жидкость содержит ионы и хорошо проводит электрический ток. Однако сухая кожа имеет высокое сопротивление. При сухой коже сопротивление тела составляет от 10^4 до 10^6 Ом; влажная кожа может уменьшить сопротивление до 10^3 Ом и ниже. При хорошем контакте с землей через тело человека, прикоснувшегося мокрой рукой к проводу, находящемуся под напряжением 120 В, может пройти ток силой

$$I = \frac{120\ \text{В}}{1000\ \text{Ом}} = 120\ \text{мА}.$$

Как уже говорилось, такая сила тока может оказаться смертельной.

По отношению к переменному току человеческое тело можно рассматривать как параллельно соединенные резистор и конденсатор. Постоянный ток идет только через «резистор», и, если активное сопротивление тела велико, ток будет небольшим. Переменный же ток идет и через активное, и через емкостное сопротивления; поскольку они параллельны, полный импеданс меньше чисто активного сопротивления и сила тока при данном $V_{\text{эфф}}$ будет больше, чем в случае постоянного тока. Сопро-

[1)] По-видимому, при поражении сильным током происходит полная остановка сердца; после прекращения действия тока нормальная деятельность сердца возобновляется. Начавшуюся же фибрилляцию очень трудно остановить.

тивление человеческого тела переменному току с частотой 60 Гц может быть вдвое меньше, чем постоянному току. Поэтому переменный ток более опасен.

Опасность представляют и *токи утечки* – токи, текущие по неожиданным путям. Обычно они возникают из-за емкостных и индуктивных связей. Например, электрический провод внутри настольной лампы образует конденсатор, второй обкладкой которого является металлический корпус лампы. Заряды, движущиеся в одном проводнике, притягивают или отталкивают заряды другого. По правилам техники безопасности сила тока утечки не должна превышать 1 мА; обычно такая сила тока безопасна. Однако даже такой ток утечки может оказаться роковым, например для клинического больного, в сердце которого вживлены электроды, соединенные через аппаратуру с землей. В этом случае ток может пройти через сердце, не разветвляясь по телу. Если при контакте через кожу рук (когда через сердце течет очень слабый ток) фибрилляция сердца (быстрое нерегулярное сокращение мышц) может наступить при токе выше 70 мА, то были случаи, когда при непосредственном контакте с сердцем фибрилляция начиналась при ничтожном токе в 0,02 мА. Таким образом, из-за токов утечки для пациента с вживленными электродами даже простое прикосновение к электрической лампе может оказаться опасным.

Заключение

Емкость и индуктивность в цепях переменного тока обладают реактивным сопротивлением (*импедансом*) X, аналогичным активному сопротивлению. Реактивное сопротивление емкости и индуктивности определяется по аналогии с R в законе Ома как коэффициент пропорциональности между напряжением и силой тока (эффективными или пиковыми значениями): для конденсатора $V_0 = I_0 X_C$, для катушки индуктивности $V_0 = I_0 X_L$. Емкостное реактивное сопротивление конденсатора уменьшается с повышением частоты: $X_C = 1/\omega C$; индуктивное сопротивление катушки увеличивается с повышением частоты: $X_L = \omega L$. В то время как сила тока через резистор всегда совпадает по фазе с напряжением, ток через катушку индуктивности отстает по фазе на 90° от напряжения, а ток через конденсатор опережает напряжение по фазе на 90°.

В последовательной RCL-цепочке полный импеданс Z определяется из соотношения, аналогичного закону Ома: $\mathscr{E}_0 = I_0 Z$ или $\mathscr{E}_{эфф} = I_{эфф} Z$; $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$. Сдвиг фазы между током и напряжением ϕ в цепи переменного тока дается соотношением $\cos\phi = R/Z$. Мощность в такой цепочке рассеивается только на резисторе: $\bar{P} = I^2_{эфф} R = I^2_{эфф} Z \cos\phi$.

Резонанс в последовательном RCL-контуре происхо-

дит на частоте $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. Эффективное значение силы тока в цепи максимально, когда частота приложенного напряжения равна резонансной частоте ω_0. Чем меньше сопротивление R, тем выше и острее резонанс.

Вопросы

1. При каких условиях импеданс RCL-цепочки минимален?
2. Почему можно предполагать, что частота тока в RCL-цепочке равна частоте приложенной ЭДС?
3. Почему на диаграмме напряжений в цепи переменного тока напряжения изображаются векторами, хотя известно, что разность потенциалов не является векторной величиной?
4. Если в RCL-цепочке $X_L > X_C$, то ее называют «преимущественно индуктивной»; если $X_C > X_L$, то ее называют «преимущественно емкостной». Чем объяснить подобную терминологию? В частности, говорят ли что-нибудь эти названия об относительной величине емкости и индуктивности на данной частоте?
5. Переходят ли результаты, полученные в разд. 32.5, к ожидаемому пределу, когда ω приближается к нулю? Что представляет собой этот предел?
6. Представьте себе, что генератор переменного тока нагружен на RCL-цепочку. Откуда поступает энергия? Во что она превращается? Как влияют значения R, L и C на энергию, поступающую от генератора?
7. Обсудите применимость обоих правил Кирхгофа (разд. 27.3) к цепям переменного тока, содержащим несколько контуров.
8. Может ли мгновенная выходная мощность генератора переменного тока, нагруженного на RCL-цепочку, принимать отрицательные значения? Объясните.
9. Можно ли, зная коэффициент мощности $\cos\phi$, определить, опережает по фазе ток в RCL-цепочке напряжение источника или отстает от него?
10. Если бы $\cos\phi$ оказался меньше нуля, то, согласно (32.12), $\bar{P} < 0$. Может ли так быть? Может ли $\cos\phi$ принимать отрицательные значения? Объясните.
11. Зависит ли коэффициент мощности $\cos\phi$ от частоты? Зависит ли от частоты мощность, рассеиваемая в RCL-цепочке?
12. Соответствует ли угол ϕ сдвигу фаз между а) $\mathscr{E}_0$ и I_0; б) $\mathscr{E}$ и I; в) $\mathscr{E}_{эфф}$ и $I_{эфф}$? Выберите правильный ответ.
13. Какой смысл имеет знак ϕ (плюс или минус)? Выбирается ли он по соглашению или фиксируется правилами?
14. Опишите вкратце, как частота питающего напряжения влияет на величину а) чисто активного сопротивления; б) чисто емкостного сопротивления; в) чисто индуктивного сопротивления; г) импеданса RCL-цепочки вблизи резонанса (при малом R); д) импеданса RCL-цепочки вдали от резонанса (при малом R).
15. Что происходит в RCL-контуре, если $R \to 0$ на частоте а) резонанса; б) вблизи резонанса; в) вдали от резонанса. Происходит ли в каждом случае рассеяние энергии? Обсудите превращения энергии в каждом из случаев.
16. Можно ли, зная $\cos\phi$, сделать вывод о том, наблюдается в цепи резонанс или нет?
17. Резонансный LC-контур часто называют *колебательным контуром*. Что колеблется в этом контуре?
18. То, что происходит в RCL-контуре при резонансе, очень напоминает затухающие гармонические колебания. Однако резонансная угловая частота тока $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ [см. (32.13)] совпадает с резонансной частотой контура без затухания ($R = 0$, разд. 31.5), в то время как резонансная частота для механических колебаний с затуханием отличается от резонансной частоты без затухания. Нет ли здесь противоречия? Объясните. (Подсказка: установите, какая величина в каждом из этих случаев совершает колебания.)

Задачи

Разделы 32.1 – 32.4

1. (I) На какой частоте реактивное сопротивление катушки с индуктивностью 20,0 мГн равно 880 Ом?
2. (I) На какой частоте реактивное сопротивление конденсатора емкостью 14,0 мкФ равно 28,2 кОм?
3. (I) Постройте график зависимости импеданса конденсатора емкостью 1,6 мкФ от частоты в пределах от 10 до 1000 Гц.
4. (I) Постройте график зависимости импеданса катушки с индуктивностью 2,0 мГн от частоты в пределах от 100 до 10 000 Гц.
5. (I) Найдите импеданс и эффективное значение силы тока в катушке с индуктивностью 16,0 мГн, подключенной к источнику переменного напряжения 400 В (эфф.) с частотой 33,3 кГц. Сопротивлением можно пренебречь.
6. (II) Покажите, что если сила тока $I =$

$= I_0 \sin \omega t$, то напряжение а) на конденсаторе описывается выражением $V_C = -V_{C0} \cos \omega t = V_{C0} \sin(\omega t - 90°)$; б) на катушке индуктивность $V_L = V_{L0} \cos \omega t = V_{L0} \sin(\omega t + 90°)$, где $V_{C0} = I_0/\omega C$ и $V_{L0} = I_0 \omega L$.

7. (II) а) Чему равен импеданс конденсатора емкостью 0,025 мкФ с хорошей изоляцией, который подключен к источнику напряжения 2,1 кВ (эфф.) с частотой 200 Гц? б) Чему равны пиковое значение силы тока и частота?

8. (II) Чему равна индуктивность L первичной обмотки трансформатора, если при включении ее в сеть 110 В, 60 Гц сила тока в этой обмотке составляет 2,2 А? (Во вторичной обмотке тока нет.)

9. (II) В последовательной LR-цепочке ($R = 160$ Ом, $L = 0{,}85$ мГн) течет ток $I = 3{,}1 \cos 377t$ (где I выражается в амперах, t – в секундах). Какая мощность в среднем рассеивается в контуре?

10. (II) Конденсатор включен параллельно нагрузке (как на рис. 32.3, *б*), чтобы отфильтровать паразитные высокочастотные наводки, но в то же время не ослабить ток промышленной частоты 60 Гц. Пусть цепь B на рис. 32.3, *б* представляет собой заземленный резистор $R = 200$ Ом и конденсатор $C = 2{,}3$ мкФ. Какой процент тока будет течь через конденсатор на землю на частоте а) 60 Гц; б) 60 000 Гц?

11. (II) Пусть цепь B на рис. 32.3, *а* представляет собой резистор $R = 200$ Ом и конденсатор $C = 2{,}0$ мкФ. Будет ли конденсатор препятствовать току с частотой 60 Гц и в то же время пропускать высокочастотный ток с частотой 60 000 Гц? Чтобы проверить это, вычислите падение напряжения на R при напряжении сигнала 30 мВ на частоте а) 60 Гц; б) 60 000 Гц.

Раздел 32.5

12. (I) Резистор 2,1 кОм и конденсатор 2,8 мкФ подключены последовательно к источнику переменного напряжения. Вычислите импеданс цепи а) на частоте 60 Гц; б) на частоте 60 000 Гц.

13. (I) Резистор 4,0 кОм и катушка индуктивности 6,1 мГн подключены последовательно к источнику переменного напряжения. Рассчитайте импеданс цепи а) на частоте 60 Гц; б) на частоте 30 000 Гц.

14. (I) Ток силой 70 мА от сети 120 В, 60 Гц, протекающий через тело человека в течение 1 с, может оказаться смертельным. Каким должен быть импеданс человеческого тела, чтобы сила тока достигла этой величины?

15. (I) Постройте векторную диаграмму, аналогичную приведенной на рис. 32.7, для случая $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$.

16. (II) а) Чему равно эффективное значение силы тока в RC-цепочке ($R = 4{,}7$ кОм, $C = 0{,}20$ мкФ), включенной в сеть 120 В, 60 Гц? б) Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? в) Какая мощность рассеивается в цепочке? г) Чему равны эффективные значения падения напряжения на R и C?

17. (II) а) Чему равно эффективное значение силы тока в последовательной LR-цепочке ($R = 65{,}0$ Ом, $L = 50{,}0$ мГн), включенной в сеть 120 В, 60 Гц? б) Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? в) Какая мощность рассеивается в цепочке? г) Чему равны эффективные значения падения напряжения на L и R?

18. (II) К RCL-цепочке ($L = 12{,}0$ мГн, $R = 2{,}0$ кОм, $C = 0{,}30$ мкФ) приложено напряжение $V = 8{,}1 \sin 754t$ (V измеряется в вольтах, t – в секундах). а) Определите импеданс и сдвиг фаз. б) Какая мощность рассеивается в цепочке? в) Чему равны эффективные значения силы тока и напряжения на каждом элементе цепи?

19. (II) Электрическая цепь содержит два элемента, причем неизвестно, что это – резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Когда цепь подключают к цепи 120 В, 60 Гц, сила тока в ней составляет 8,1 А и опережает по фазе напряжение на 13°. Какие элементы входят в цепь и каковы их номиналы?

20. (II) Катушка индуктивности 35 мГн с активным сопротивлением 2,0 Ом соединена последовательно с конденсатором 20 мкФ и источником напряжения 45 В, 60 Гц. Определите а) эффективное значение силы тока; б) сдвиг фаз; в) мощность, рассеиваемую в этой цепи.

21. (II) Катушка с индуктивностью 23 мГн и сопротивлением 0,80 Ом подключена к конденсатору C и источнику напряжения с частотой 360 Гц. Какую емкость должен иметь конденсатор C, чтобы напряжение и сила тока совпадали по фазе?

22. (II) Чему равно сопротивление катушки, если ее импеданс составляет 225 Ом, а реактивное сопротивление 20 Ом?

23. (II) Покажите, что если $I = I_0 \cos \omega t$, то для RCL-цепочки на рис. 32.5 $V_R = I_0 R \cos \omega t$, $V_L = I_0 \omega L \cos(\omega t + \pi/2)$ и $V_C = (I_0/\omega C) \cos(\omega t - \pi/2)$, где $\omega = 2\pi f$.

24. (II) Пусть для RCL-цепочки на рис. 32.5 $I = I_0 \sin \omega t$ и $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin(\omega t + \phi)$. Используя формулу для мощности $P = I\mathscr{E}$, покажите, пользуясь этими выражениями, что средняя мощность $\bar{P} = {}^1/_2 \mathscr{E}_0 I_0 \cos \phi$, подтвердив тем самым выражение (32.12).

25. (II) Если $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$, то чему равно среднее значение $\mathscr{E}$ а) за половину периода; б) за

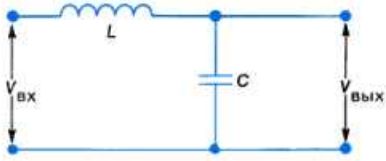


Рис. 32.10.

целый период? Как эти величины соотносятся с эффективным значением $\mathscr{E}_{эфф}$?

26. (II) При подключении катушки индуктивности к батарее с напряжением 45 В через катушку течет ток 2,8 А. При ее подключении к источнику переменного напряжения 120 В, 60 Гц сила тока через катушку равна 4,6 А (эффективное значение). Определите индуктивность и активное сопротивление катушки.

27. (II) а) Перепишите (32.8) в виде дифференциального уравнения с зарядом Q в качестве переменной, полагая $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$. б) Покажите, что этому уравнению удовлетворяет решение вида $Q = Q_0 \sin(\omega t + \phi)$. в) Выразите Q_0 и ϕ через $\mathscr{E}_0$, L, R, C и ω. г) Продифференцируйте уравнение, полученное в п. «а», и выведите уравнение для силы тока I. д) Проверьте подстановкой решение в виде $I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ и выразите I_0 и ϕ через параметры, указанные в п. «в».

28. (III) *Фильтр.* На рис. 32.10 показана схема простого фильтра, предназначенного для того, чтобы с минимальным ослаблением передавать постоянное напряжение и в то же время по возможности убрать переменную составляющую (например, наводки с частотой 60 Гц, способные создавать «фон переменного тока» в стереоаппаратуре). Пусть $V_{вх} = V_1 + V_2$, где V_1 – постоянное напряжение, а $V_2 = V_{20} \sin \omega t$; сопротивлением цепи можно пренебречь. а) Определите силу тока через конденсатор, его амплитуду и фазу (считайте $R = 0$ и $X_L > X_C$). б) Покажите, что переменная составляющая $V_{2вых}$ выходного напряжения равна Q/C, где Q – заряд на конденсаторе в данный момент времени; определите амплитуду и фазу $V_{2вых}$. в) Покажите, что ослабление переменной составляющей максимально, если $X_C \ll X_L$, и вычислите отношение амплитуды переменной составляющей напряжения на выходе и на входе. г) Сравните постоянные напряжения на выходе и на входе.

29. (II) Покажите, что при замене индуктивности L в фильтре на рис. 32.10 на большое сопротивление R переменная составляющая будет по-прежнему сильно ослабляться, а постоянная составляющая сохраняться при условии, что напряжение постоянной составляющей на входе велико, а сила тока (и мощность) мала.

30. (III) Резистор R, конденсатор C и катушка индуктивности L подключены параллельно к источнику переменного напряжения $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$ (рис. 32.11). Определите зависимость от времени силы тока (включая амплитуду и фазу) а) через резистор; б) через катушку индуктивности; в) через конденсатор. г) Определите амплитуду и фазу полной силы тока, отбираемой от источника. д) Определите полный импеданс цепи $Z = \mathscr{E}_0/I_0$. е) Чему равен коэффициент мощности?

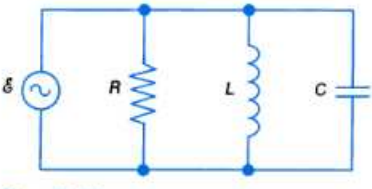


Рис. 32.11.

Раздел 32.6

31. (I) Конденсатор емкостью 1200 пФ соединен с катушкой, имеющей индуктивность 16,0 мкГн и сопротивление 2,00 Ом. Чему равна резонансная частота контура?

32. (I) Чему равна резонансная частота RCL-контура в примере 32.3? Какую среднюю мощность отбирает контур от источника на этой частоте?

33. (II) В RCL-контуре $L = 2{,}15$ мГн и $R = 120$ Ом. а) Какой должна быть емкость C, чтобы резонансная частота составила 33,0 кГц? б) Чему равна максимальная сила тока при резонансе, если пиковое значение приложенного напряжения составляет 136 В? в) На каких частотах сила тока в контуре составляет половину максимальной?

34. (II) Чему равно пиковое значение силы тока в предыдущей задаче, если емкость конденсатора выбрана такой, что резонансная частота контура вдвое превышает частоту приложенного напряжения 33,0 кГц?

35. (II) а) Покажите, что колебания заряда Q на конденсаторе в RCL-контуре происходят с амплитудой

$$Q_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{(\omega R)^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}}.$$

б) При какой угловой частоте ω' амплитуда Q_0 максимальна? в) Сравните полученные результаты со случаем затухающих гармонических колебаний (см. также вопрос 18).

36. (II) Покажите, что ширина острого резонанса, определяемая разностью частот, на

которых $I = {}^1/_2 I_0$, дается выражением $\Delta\omega \approx \sqrt{3}R/L$.

37. (II) а) Выразите среднюю мощность P, рассеиваемую в RCL-контуре, через L, R, C, ω и $\mathscr{E}_0$. б) На какой частоте рассеиваемая мощность максимальна? в) Получите приближенное выражение для ширины $\Delta\omega$ резонанса средней мощности, если $\Delta\omega$ определяется как разность угловых частот, на которых средняя мощность $\bar{P}$ равна половине максимального значения. Считайте резонанс острым.

38. (II) *Добротность* Q резонансного контура определяется как отношение напряжения на конденсаторе (или на катушке индуктивности) к напряжению на резисторе при резонансе. Чем выше значение Q, тем острее резонанс. а) Покажите, что $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$. б) Какими должны быть значения L и R, чтобы $Q = 1000$ на резонансной частоте $f_0 = 2{,}0$ МГц, если $C = 0{,}018$ мкФ? в) Чему равна добротность Q контура в примере 32.3?

39. (II) Резонансная частота контура, содержащего конденсатор емкостью 120 пФ, должна быть равна 18,0 МГц. Катушку индуктивности предполагается изготовить из изолированного провода длиной 12 м и диаметром 1,1 мм в виде соленоида с плотной намоткой без сердечника. Сколько витков должна иметь катушка?

Раздел 32.7

*40. (I) Выходной импеданс усилителя ЭКГ равен 18 000 Ом. К усилителю с помощью трансформатора необходимо подключить громкоговоритель с сопротивлением 8,0 Ом. Каким должно быть отношение числа витков в первичной и вторичной обмотках трансформатора?

*41. (I) Усилитель низкой частоты имеет клеммы для подключения нагрузки 4, 8 и 16 Ом. К каким клеммам следует подключать параллельно два громкоговорителя по 8 Ом?

Раздел 32.8

*42. (II) Известны случаи, когда сила тока 0,02 мА вызывала фибрилляцию сердца у пациента с вживленными электродами. а) При какой емкости по отношению к проводнику, находящемуся под напряжением 120 В, 60 Гц, ток утечки достигает указанной величины? б) Какую площадь должны иметь проводники, находящиеся на расстоянии 2 мм один от другого, чтобы образованный ими конденсатор имел такую емкость? Реальна ли подобная ситуация?

Задачи с использованием программируемого калькулятора[1)]

*43. (III) Последовательная RCL-цепочка ($L = 110$ мГн, $R = 150$ Ом, $C = 200$ мкФ) подключена к источнику переменного напряжения 150 В (эффективное значение) регулируемой частоты. Покажите, что эта цепочка описывается дифференциальным уравнением вида

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d\mathscr{E}}{dt}.$$

Составьте программу для интегрирования этого уравнения и построения графика I при напряжении источника $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$. Определите резонансную частоту ω_0 для данной цепи, положите $\omega = \omega_0/2$ и постройте зависимость $I(t)$ на протяжении примерно десяти периодов, начиная от $t = 0$; при $t = 0$ $I = 0$ и $dI/dt = 0$. Обратите внимание на «переходные процессы», предшествующие установлению стационарной картины колебаний тока. Объясните наблюдаемые явления.

*44. (III) Решите задачу 43 при $\omega = \omega_0$. Если вы уже решили задачу 43, сравните полученные результаты.

*45. (III). Решите задачу 43 при $\omega = 2\omega_0$. Если вы уже решили задачу 43, сравните полученные результаты.

[1)] См. разд. 2.10.

33 Уравнения Максвелла и электромагнитные волны

В XIX в. кульминацией развития электромагнитной теории стало предсказание и экспериментальное подтверждение способности электромагнитных полей распространяться в пространстве. Это достижение открыло возможности создания принципиально новых средств связи: вначале беспроволочного телеграфа, а затем радио и телевидения. Теория привела также к важному заключению о том, что свет представляет собой электромагнитную волну.

Существование электромагнитных волн теоретически предсказал шотландский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879), сумевший объединить в рамках блестящей теории описание всех явлений электричества и магнетизма.

В начале XIX в. Эрстед, Ампер и другие физики, развивая электромагнитную теорию, не пользовались концепциями электрического и магнитного полей. Представление о поле было введено несколько позднее Фарадеем. Однако эта концепция не находила широкого признания до тех пор, пока Максвелл не показал, что все электрические и магнитные явления могут быть описаны всего четырьмя уравнениями, содержащими электрическое и магнитное поля. Эти *уравнения Максвелла* так же фундаментальны, как и законы Ньютона; они позволяют описать все электромагнитные явления. Прежде чем перейти к обсуждению уравнений Максвелла и электромагнитных волн, мы должны изложить важную новую гипотезу, выдвинутую Максвеллом, и рассмотреть теорему Гаусса для магнитного поля. Этим вопросам посвящены первые два раздела.

33.1. Ток смещения. Возникновение магнитного поля при изменении электрического поля

Эрстед обнаружил, что электрический ток создает магнитное поле; математически этот факт выражается законом Ампера (29.2):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I .$$

Согласно гипотезе Максвелла, существует и другая причина возникновения магнитного поля. Коль скоро в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея (гл. 30) изменение магнитного поля приводит к появле-

Рис. 33.1. Применение закона Ампера к двум различным поверхностям, натянутым на один и тот же замкнутый контур.

нию электрического поля, то должно быть справедливо и обратное: *изменение электрического поля должно сопровождаться возникновением магнитного поля*. Подчеркнем, что для Максвелла это было именно *гипотезой*, основанной на представлении о симметрии законов природы. Максвелл понимал, что эффект в большинстве случаев настолько мал, что будет трудно подтвердить его экспериментально.

Для обоснования своей гипотезы Максвелл использовал косвенное доказательство. Ход его рассуждений был приблизительно таков. Согласно закону Ампера, если разбить любой замкнутый контур на короткие отрезки $d\boldsymbol{l}$, умножить длину каждого отрезка на величину параллельной компоненты индукции $\mathbf{B}$ на этом отрезке и просуммировать (проинтегрировать) полученные произведения по всему контуру, то сумма (интеграл) будет равна произведению μ_0 на силу тока I, который пронизывает поверхность, ограниченную контуром интегрирования. Применяя закон Ампера для вычисления индукции магнитного поля прямолинейного проводника с током, мы считали, что ток пронизывает круг, ограниченный контуром в виде окружности. На рис. 33.1 этому случаю соответствует плоская «поверхность 1». Но с таким же успехом можно было бы рассматривать и «мешок», опирающийся на контур интегрирования («поверхность 2»), поскольку эту поверхность пронизывает такой же ток I. Иначе говоря, любую поверхность, опирающуюся на контур интегрирования, пронизывает один и тот же ток. Значит, сила тока, входящего в объем, ограниченный поверхностями 1 и 2, равна силе тока, выходящего из этого объема. Это утверждение, по существу, эквивалентно правилу Кирхгофа: оно гласит, что скорость втекания заряда в замкнутый объем равна скорости вытекания заряда из этого объема.

Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию (рис. 33.2, *а*), в которой происходит разряд конденсатора. Для поверхности 1 закон Ампера выполняется, но для поверхности 2 он несправедлив, так как через поверхность 2 ток не протекает ($I = 0$). Вокруг проводника существует магнитное поле, и левая часть в законе Ампера не равна нулю, правая же часть обращается в нуль (в случае

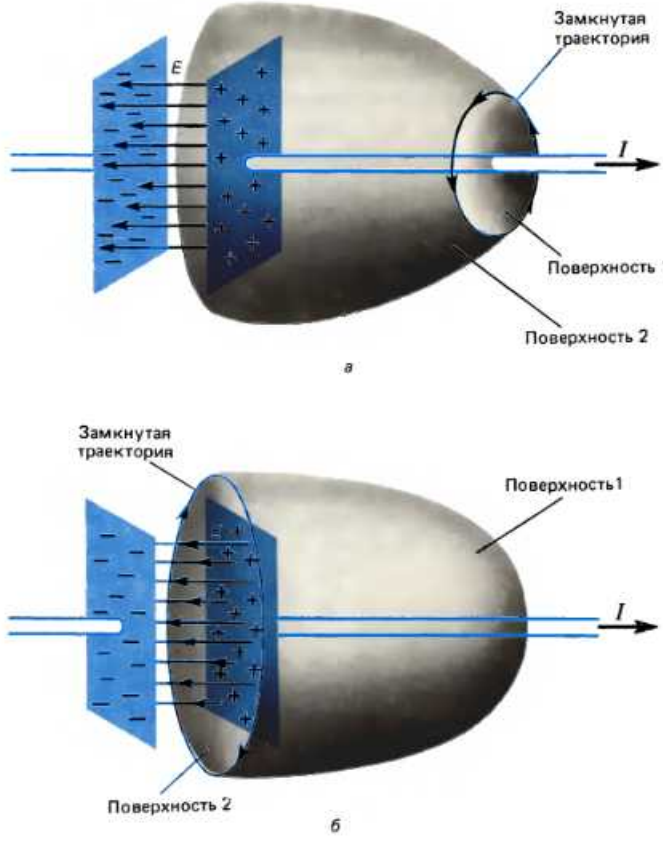


Рис. 33.2. Конденсатор разряжается. Через поверхность 2 ток проводимости на обоих рисунках отсутствует. В выражение для закона Ампера необходимо ввести дополнительный член.

поверхности 2), так как сила тока равна $I = 0$. Аналогично обстоит дело и с замкнутым контуром на рис. 33.2, *б*, окружающим область электрического поля между пластинами конденсатора: поверхность 1 (но не поверхность 2) пронизывает ток и вдоль замкнутого конутра существует магнитное поле. Однако оно существует лишь при условии, что заряд перетекает к пластине или от пластины; в этом случае электрическое поле между пластинами изменяется во времени. Максвелл разрешил проблему, связанную с отсутствием тока через поверхность 2, предположив, что изменяющееся электрическое поле между обкладками конденсатора *эквивалентно* электрическому току, который он назвал **током смещения** I_D (сегодня этот термин звучит довольно туманно). Обычный же ток называют **током проводимости** I. Закон Ампера теперь можно записать в виде

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_D). \qquad (33.1)$$

Этот закон выполняется и для поверхности 2 на рис. 33.2, *а*

и *б*, где ток смещения I_D соответствует изменяющемуся электрическому полю[1].

Силу тока смещения I_D можно выразить через изменяющееся электрическое поле между пластинами конденсатора на рис. 33.2. Заряд Q на конденсаторе емкостью C равен $Q = CV$, где V – разность потенциалов между обкладками. Вспомним также, что $V = Ed$, где d – (небольшое) расстояние между обкладками, а E – напряженность электрического поля между ними, и мы пренебрегаем краевыми эффектами поля. Емкость плоского конденсатора равна $C = \varepsilon_0 A/d$, где A – площадь каждой пластины (гл. 25). С учетом этого получаем

$$Q = CV = \varepsilon_0 \frac{A}{d} Ed = \varepsilon_0 AE.$$

Мы видим, что если заряд на обкладке изменяется со скоростью dQ/dt, то и напряженность поля изменяется пропорционально. Продифференцировав последнее равенство, имеем

$$\frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt},$$

где dQ/dt – скорость, с которой заряд накапливается на обкладке конденсатора или покидает обкладку; иначе говоря, это ток, втекающий в конденсатор или вытекающий из него. Этот ток, втекающий в конденсатор, равен току смещения I_D между обкладками:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}, \tag{33.2}$$

или

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

где $\Phi_E = EA$ – *поток напряженности электрического поля*. Закон Ампера принимает вид

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{33.3}$$

В этой форме он включает гипотезу Максвелла о том, что магнитное поле создается не только обычным электрическим током, но и изменяющимся электрическим полем (изменяющимся потоком напряженности электрического

[1] Заметим, что эта интерпретация изменяющегося электрического поля как тока смещения хорошо соответствует рассмотренной в гл. 32 картине прохождения переменного тока через конденсатор. Она позволяет также применять правило Кирхгофа к обкладке конденсатора: к обкладке течет ток проводимости, но с обкладки тока проводимости нет. Вместо этого с пластины «течет» ток смещения.

поля). Хотя формула (33.3) получена нами для частного случая, она справедлива и в общем случае, хотя обычно, как уже говорилось, ток смещения (которому отвечает второй член в правой части) очень мал[1].

Пример 33.1. Площадь круглых пластин конденсатора емкостью 30 пФ с воздушным зазором равна $A = 100$ см^2. Конденсатор заряжается от батареи с напряжением 70 В через резистор 2,0 Ом. В момент подключения батареи электрическое поле между пластинами изменяется наиболее быстро. Рассчитайте для этого момента: а) силу тока смещения между обкладками конденсатора; б) скорость изменения электрического поля между пластинами. в) Вычислите индукцию магнитного поля, обусловленную изменяющимся электрическим полем. Поле **E** в пространстве между пластинами считайте однородным в любой момент времени и равным нулю за пределами конденсатора.

Решение. а) Как показано в разд. 27.5, заряд конденсатора в *RC*-цепочке происходит по закону

$$Q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}),$$

где $\mathscr{E}$ – ЭДС батареи. Чтобы найти ток при $t = 0$, продифференцируем это равенство и подставим численные значения $\mathscr{E} = 70$ В, $C = 30$ пФ, $R = 2{,}0$ Ом:

$$\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{C\mathscr{E}}{RC}e^{-t/RC}\right|_{t=0} = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{70\text{ В}}{2{,}0\text{ Ом}} = 35\text{ А}.$$

Скорость изменения заряда в конденсаторе равна силе тока, который течет в этот момент в цепи. Такую же величину имеет и сила тока смещения, $I_D = 35$ А.

б) По формуле (33.2)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_D}{\varepsilon_0 A} =$$

$$= \frac{35\text{ А}}{(8{,}85\cdot 10^{-12}\text{ Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)(1{,}0\cdot 10^{-2}\text{ м}^2)} =$$

$$= 4{,}0\cdot 10^{14}\text{ В/м}\cdot\text{с}.$$

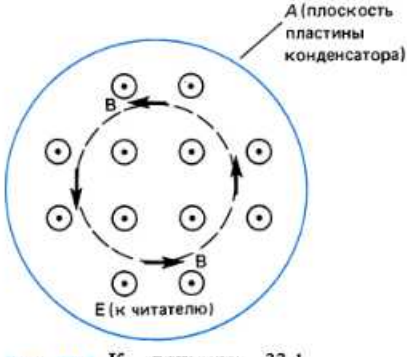


Рис. 33.3. К примеру 33.1. Вектор **E** направлен к читателю; силовые линии индукции магнитного поля **B** – окружности (одна из них показана штриховой линией).

в) Будем считать без доказательства, что силовые линии индукции **B** перпендикулярны **E** и в силу симметрии представляют собой окружности (рис. 33.3); с такой симметрией мы уже сталкивались в обратной ситуации, когда электрическое поле создавалось изменяющимся магнитным полем (разд. 30.4; см. рис. 30.6). Применим закон Ампера в форме (33.3) к области между обкладками, где сила тока проводимости $I = 0$:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}.$$

В качестве контура интегрирования возьмем окружность радиусом r, совпадающую с силовой линией индукции магнит-

[1] В действительности в правой части существует и третий член, который описывает магнитное поле, создаваемое магнитными материалами (сила тока намагничивания I_M; разд. 29.9). Для его учета μ_0 надо заменить на μ. Нас, однако, интересует главным образом ситуация, когда магнитные материалы отсутствуют. При наличии диэлектрика величина ε_0 заменяется на $\varepsilon = K\varepsilon_0$ (разд. 25.5).

ного поля. При $r \leqslant R$ (где R – радиус пластины)

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi r^2 E) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt},$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt} \qquad [r \leqslant R].$$

За пределами конденсатора $\mathbf{E} = 0\,(r > R)$, и

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi R^2 E) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt},$$

или

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \qquad (r \geqslant R).$$

Значение B максимально при $r = R$ и равно

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R}{2} \frac{dE}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2}(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Тл} \cdot \text{м/А}) \times$$

$$\times (8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2)(5{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{м}) \times$$

$$\times (4{,}0 \cdot 10^{14}\ \text{В/м} \cdot \text{с}) = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{Тл},$$

поскольку $R = \sqrt{A/\pi} = 5{,}6$ см. Это очень слабое поле, и продолжительность его существования очень мала (постоянная времени $RC = 6{,}0 \cdot 10^{-11}$ с), поэтому измерить его крайне трудно.

33.2. Теорема Гаусса для магнитного поля

Чтобы перейти наконец к уравнениям Максвелла, нам осталось только сформулировать теорему Гаусса для магнитного поля. Как уже говорилось в гл. 30, при индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ *магнитный поток* Φ_B через поверхность определяется как

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A},$$

где поверхность, по которой берется интеграл, может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Интеграл по замкнутой поверхности, т. е. поверхности, ограничивающей какой-либо объем, записывается в виде

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

В случае электрического поля (разд. 23.2) поток напряженности Φ_E через замкнутую поверхность равен полному заряду Q, заключенному внутри поверхности, деленному на ε_0 [формула (23.4)]:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Это утверждение называют *теоремой Гаусса для электрического поля*.

Аналогичное соотношение может быть записано и для магнитного поля. Однако, как уже говорилось выше, несмотря на интенсивные поиски, изолированные магнитные заряды (магнитные монополи) до сих пор с уверенностью не обнаружены. Поэтому *теорема Гаусса для магнитного поля* записывается в виде

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \qquad (33.4)$$

Это равенство отражает тот факт, что из замкнутого объема выходит столько же силовых линий индукции

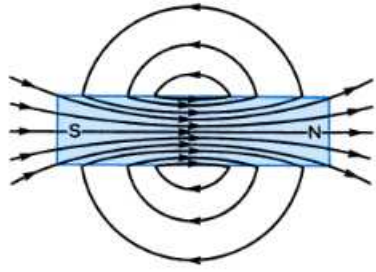


Рис. 33.4. Силовые линии индукции магнитного поля магнитного стержня.

магнитного поля, сколько входит в него. Действительно, если магнитных зарядов не существует, то не существует и «источников» и «стоков», на которых могли бы начинаться или заканчиваться силовые линии, подобно тому как силовые линии напряженности электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Силовые линии индукции магнитного поля должны быть непрерывными; у магнитного стрежня, например, индукция магнитного поля **B** существует как снаружи, так и внутри него, и силовые линии индукции магнитного поля **B** образуют замкнутые контуры (рис. 33.4).

33.3. Уравнения Максвелла

Теперь мы полностью готовы к тому, чтобы выписать все четыре уравнения Максвелла: все они уже знакомы нам по последним 12 главам. В отсутствие диэлектриков и магнетиков **уравнения Максвелла** имеют вид

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{33.5а}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \tag{33.5б}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Phi_B}{dt}, \tag{33.5в}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{33.5г}$$

Первые два уравнения Максвелла – это просто теорема Гаусса соответственно для электрического [гл. 23, формула (23.4)] и магнитного [разд. 33.2, формула (33.4)] полей. Третье – закон электромагнитной индукции Фарадея [гл. 30, формула (30.6)], и четвертое – закон Ампера, обобщенный Максвеллом (разд. 33.1).

Уравнения Максвелла имеют следующий смысл: 1) обобщенный закон Кулона, связывающий электрическое поле с его источниками, электрическими зарядами; 2) математическое выражение факта отсутствия изолированных магнитных зарядов: силовые линии магнитного поля непрерывны (замкнуты) в отличие от силовых линий электрического поля, которые начинаются или заканчиваются на электрических зарядах; 3) изменение магнит-

ного поля порождает электрическое поле; 4) магнитное поле создается электрическим током или изменяющимся электрическим полем.

Уравнения Максвелла выражают основные законы электромагнетизма. Они столь же фундаментальны, как и три закона движения и закон всемирного тяготения Ньютона в механике. В некотором смысле уравнения Максвелла даже более фундаментальны, так как в отличие от законов Ньютона они справедливы и в релятивистском случае (гл. 39). Уравнения Максвелла, в которых сведены воедино все законы электромагнетизма, являются одним из величайших триумфов человеческой мысли.

В предыдущих главах мы видели, что электрическое и магнитное поля можно рассматривать по отдельности, если они не изменяются во времени. Если же поля изменяются во времени, то по отдельности их рассматривать уже нельзя: изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле, а изменение электрического поля приводит к возникновению магнитного поля. Важным следствием этого оказывается возникновение электромагнитных волн.

33.4. Генерация электромагнитных волн

Согласно Максвеллу, изменяющееся электрическое поле порождает в пустом пространстве магнитное поле. На этом основании Максвелл пришел к следующему заключению. Если изменяющееся магнитное поле приводит к появлению электрического поля, то электрическое поле также будет изменяться. Это изменение электрического поля приведет в свою очередь к появлению изменяющегося магнитного поля и т. д. Анализируя свои уравнения, Максвелл обнаружил, что конечным итогом подобной связи изменяющихся полей будет появление волны, которая содержит электрическое и магнитное поля и способна распространяться в пустом пространстве! Попытаемся качественно разобраться в том, как возникает

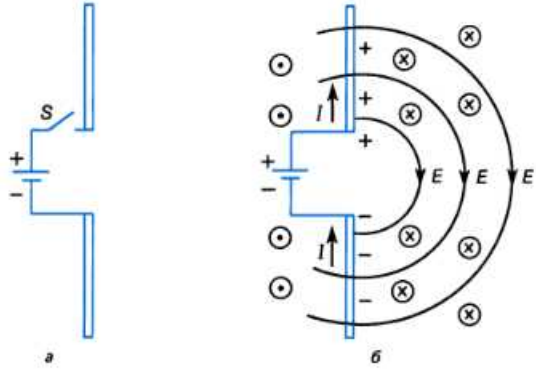


Рис. 33.5. Поля, создаваемые зарядами, движущимися в проводниках. Поле **E** и индукция магнитного поля **B** распространяются в пространстве с конечной скоростью.

подобная **электромагнитная волна** (количественный анализ будет проведен в следующем разделе).

Рассмотрим «антенну» из двух проводящих стержней (рис. 33.5, *а*). Допустим, что стержни через ключ соединены с клеммами батареи. При замыкании ключа верхний стержень быстро приобретает положительный заряд, а нижний – отрицательный. Силовые линии электрического поля показаны на рис. 33.5, *б*. Пока заряды перемещаются к стержням, в антенне течет электрический ток I (стрелка указывает направление тока положительных зарядов). Электрический ток создает магнитное поле; силовые линии индукции магнитного поля представляют собой окружности, охватывающие стержни антенны; на рисунке вектор индукции **B** направлен к плоскости страницы справа от стержней (⊗) и от плоскости страницы слева (⊙). Насколько далеко эти поля распространяются в пространстве? В статическом случае они уходили бы в бесконечность. Однако при замыкании ключа эти поля быстро возникают вблизи стержней, но для того, чтобы достичь удаленных точек, потребуется время: и электрическое, и магнитное поля обладают энергией, а энергия не может переноситься с бесконечно большой скоростью.

Этот пример служит иллюстрацией того, что электрическому и магнитному полям, чтобы достигнуть уда-

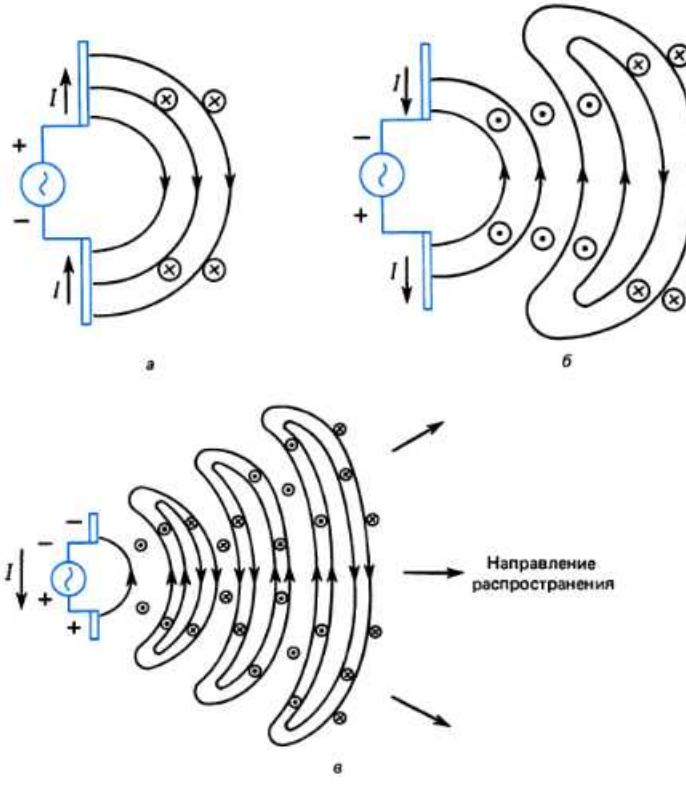


Рис. 33.6. Последовательные картины электрического и магнитного полей, распространяющихся от вибратора, соединенного с источником переменного тока.

ленных точек, требуется время. Представим себе теперь более интересную ситуацию. Предположим, что антенна подключена к генератору переменного тока (рис. 33.6). (В этом случае она называется электрическим дипольным вибратором: в любой момент времени в антенне существует разделение положительных и отрицательных зарядов, и ее дипольный момент осциллирует.) На рис. 33.6, *а* антенна только что подключена к генератору; на стержнях стал накапливаться заряд, и картины полей выглядят, как на рис. 33.5. Знаки + и − соответствуют полярности зарядов на стержнях. Стрелки указывают направление тока. Электрическое поле изображено силовыми линиями в плоскости рисунка, а магнитное поле, согласно правилу правой руки, направлено к плоскости страницы (⊗) или от нее (⊙). На рис. 33.6, *б* ЭДС генератора проходит через максимум и начинает убывать; ток в антенне течет в противоположном направлении, и его магнитное поле направлено в противоположную сторону. Однако существовавшие до этого поля внезапно не исчезают: они распространяются в пространстве. Поскольку направление вновь возникших полей противоположно прежнему, силовые линии полей «замыкаются» и образуют замкнутые контуры. Спустя некоторое время эта картина силовых линий принимает вид, показанный на рис. 33.6, *в* (обратите внимание на изменение масштаба). Силовые линии полей продолжают распространяться от вибратора. Магнитные силовые линии также замкнуты, но на рисунке этого не видно, так как они расположены перпендикулярно плоскости рисунка.

Поля продолжают распространяться в пространстве, удаляясь от антенны. (Они распространяются во все стороны, а не только вправо, как показано на рис. 33.6.) Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля максимальны в направлениях, перпендикулярных направлению колебаний заряда в вибраторе; вдоль направления колебаний заряда – над и под антенной – поля обращаются в нуль.

Из рис. 33.6 можно сделать несколько выводов. Во-первых, *в любой точке векторы* **E** и **B** *взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения.* Во-вторых, поля изменяют свое направление в пространстве: в одних точках вектор **B** направлен к плоскости страницы, в других – от нее; аналогично ведет себя и вектор **E**. Напряженность электрического поля (и индукция магнитного поля) изменяется от максимума в одном направлении до нуля и возрастает до максимума в другом направлении. Электрическое и магнитное поля находятся в фазе, т. е. они достигают максимума и обращаются в нуль в одних и тех же точках.

Если ЭДС генератора изменяется по синусоидальному закону, то и напряженность электрического поля, и индукция магнитного поля будут изменяться по синусои-

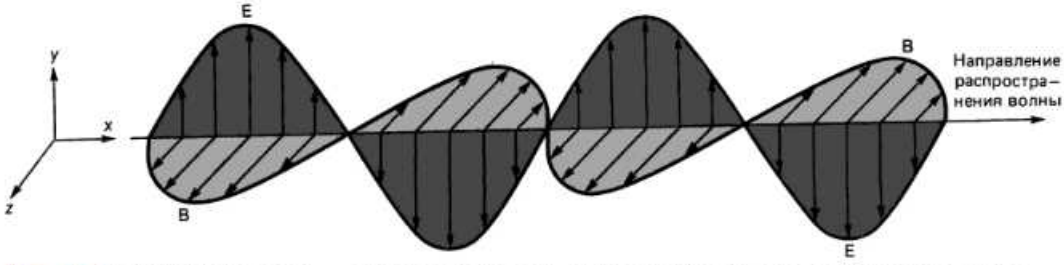


Рис. 33.7. Пространственное распределение напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в электромагнитной волне. Векторы **E** и **B** лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Вся картина перемещается в направлении, перпендикулярном **E** и **B**.

дальному закону. Строго говоря, это справедливо в точках, достаточно удаленных от источника; вблизи антенны (в так называемом ближнем поле) картина полей оказывается довольно сложной. Нас интересуют поля на достаточном удалении от антенны (поля излучения); именно этой ситуации и соответствует картина, изображенная на рис. 33.6, *в*. Здесь, правда, невозможно усмотреть синусоидальный характер изменения удаленных полей или полей излучения, так как изображены только силовые линии. На рис. 33.7 показано изменение *напряженности* электрического поля и *индукции* магнитного поля в пространстве в фиксированный момент времени; видно, что векторы **E** и **B** перпендикулярны друг другу и направлению распространения.

Электромагнитные волны представляют собой *поперечные* волны (гл. 15) и аналогичны другим типам волн. Однако в электромагнитной волне происходят колебания *полей*, а не вещества, так в случае волн на воде или в натянутом шнуре.

Таким образом, электромагнитные волны генерируются колеблющимися, т. е. движущимися с ускорением, электрическими зарядами. Справедливо и общее утверждение: движущийся с ускорением *электрический заряд испускает электромагнитные волны*.

33.5. Электромагнитные волны и уравнения Максвелла. Скорость распространения электромагнитных волн

Покажем теперь, каким образом существование электромагнитных волн следует из уравнений Максвелла. В этом выводе поражает предсказание не только существования электромагнитных волн, но и той скорости, с которой они должны распространяться.

Рассмотрим область пустого пространства, *свободную от электрических зарядов и токов проводимости*; в такой области вдали от источника волновой фронт (силовые линии на рис. 33.6, *в*) можно считать плоским на достаточно обширной площади. Такие волны называют *плоскими*: в любой момент времени электрическое и магнитное поля однородны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Пусть в выбранной сис-

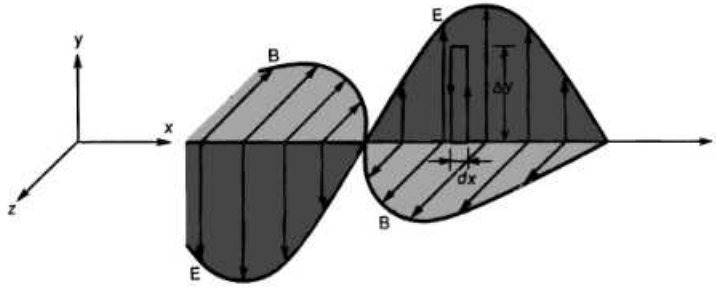


Рис. 33.8. Применение закона Фарадея к малому прямоугольному контуру в плоскости электрических колебаний $(\Delta y)(dx)$.

теме координат плоская волна распространяется вдоль оси x со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, вектор $\mathbf{E}$ направлен по оси y, а вектор $\mathbf{B}$ – по оси z (рис. 33.7).

Бегущую синусоидальную волну с длиной λ и частотой f, как показано в гл. 15, можно представить в виде

$$E = E_y = E_0 \sin(kx - \omega t),$$
$$B = B_z = B_0 \sin(kx - \omega t), \tag{33.6}$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = 2\pi f,\ f\lambda = \frac{\omega}{k} = v \tag{33.7}$$

и v – скорость распространения волны. Хотя волну для наглядности можно представлять синусоидальной, в дальнейшем это предположение нам почти не понадобится.

Рассмотрим небольшой прямоугольник в плоскости колебаний электрического вектора $\mathbf{E}$ (рис. 33.8). Пусть этот прямоугольник имеет конечную высоту Δy и очень малую ширину dx. Применим к нему закон электромагнитной индукции Фарадея [третье уравнение Максвелла (33.5 *в*)] [1]:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Посмотрим вначале, что представляет собой интеграл по

[1] Чтобы убедиться в том, что направления **E**, **B** и **v** соответствуют показанным на рисунке, следует применить правило Ленца к прямоугольному контуру. Изменяющийся магнитный поток через этот контур, согласно закону Фарадея, порождает электрическое поле. В рассматриваемой ситуации поток B сквозь контур уменьшается (волна движется вправо), и направление электрического поля, противодействующего этому изменению, соответствует большему значению E в правой части контура и меньшему значению E слева (тогда воображаемый ток был бы направлен против часовой стрелки и его магнитное поле противодействовало бы уменьшению Φ_B; конечно, никакого тока здесь нет). Таким образом, **E**, **B** и **v** имеют именно такие направления; **v** совпадает по направлению с векторным произведением $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

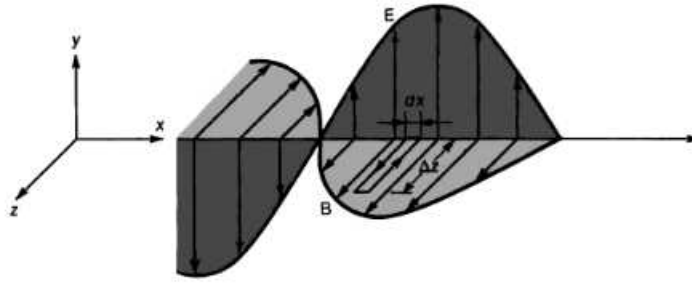


Рис. 33.9. Применение четвертого уравнения Максвелла к малому прямоугольнику в плоскости $(\Delta z)(dx)$.

замкнутому контуру. Вдоль коротких сторон прямоугольника (длиной dx) вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен к $d\boldsymbol{l}$, поэтому $\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$. Далее, если E – напряженность электрического поля вдоль левой стороны прямоугольника, то вдоль правой стороны напряженность будет несколько больше: $E+dE$. Итак, если обойти контур против часовой стрелки, то

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = (E+dE)\,\Delta y - \mathbf{E}\Delta y = dE\Delta y\,.$$

Скорость изменения магнитного потока через прямоугольник равна

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt}dx\Delta f,$$

поскольку площадь контура $(dx)(\Delta y)$ не изменяется. Возвращаясь к закону Фарадея, получаем

$$dE\Delta y = -\frac{dB}{dt}dx\Delta y\,,$$

или

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}.$$

Заметим, что E и B являются функциями координаты x и времени t, поэтому следует использовать частные производные:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{33.8}$$

где $\partial E/\partial x$ обозначает производную E по x при фиксированном t, а $\partial B/\partial t$ – производную B по t при фиксированном x.

В дополнение к (33.8) можно получить и другое важное соотношение между E и B. Для этого рассмотрим малый прямоугольник в плоскости колебаний вектора индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ длиной Δz и шириной dx (рис. 33.9) и применим к нему четвертое уравнение Максвелла (обобщенный закон Ампера):

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_B}{dt}$$

(где мы положили $I=0$, поскольку токи проводимости отсутствуют). Вдоль коротких сторон $\mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{l}=0$, так как вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен $d\boldsymbol{l}$. Пусть B – индукция магнитного поля вдоль левой стороны прямоугольника длиной Δz; тогда вдоль правой стороны индукция магнитного поля равна $B+dB$. Вновь проинтегрируем против часовой стрелки и получим

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{l} = B\Delta z - (B+dB)\Delta z = -dB\Delta z\,.$$

Обратимся теперь к правой части четвертого уравнения Максвелла:

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}dx\Delta z\,.$$

Приравнивая полученные выражения, имеем

$$-dB\Delta z = \mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}dx\Delta z\,,$$

или

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}, \tag{33.9}$$

где мы сразу воспользовались записью в частных производных.

С помощью уравнений (33.8) и (33.9) можно получить соотношение между величинами E и B и скоростью v. Сейчас нам пригодится предположение о синусоидальном изменении $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в представлении (33.6). Взяв соответствующие производные от (33.6) и подставив их в (33.8), находим

$$kE_0\cos(kx-\omega t) = \omega B_0\cos(kx-\omega t),$$

или

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = v\,,$$

поскольку $v=\omega/k$ [см. (33.7) или (15.12)]. А так как E и B изменяются в фазе друг с другом, они связаны соотношением

$$\frac{E}{B} = v \tag{33.10}$$

в любой точке пространства, где v – скорость волны. Подставляя производные от (33.6) в (33.9), получаем

$$kB_0\cos(kx-\omega t) = \mu_0\varepsilon_0\omega E_0\cos(kx-\omega t),$$

или

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega}{k} = \mu_0\varepsilon_0 v\,.$$

Но, согласно (33.10), $B_0/E_0 = 1/v$, так что

$$\mu_0\varepsilon_0 v = \frac{1}{v}$$

или

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \tag{33.11}$$

Таким образом, скорость распространения электромагнитной волны в вакууме постоянна и не зависит от длины волны или частоты.

Этот важный результат можно получить и не пользуясь предположением о синусоидальности волны с помощью формул (33.8) и (33.9). Возьмем производную по t от (33.9):

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

и производную по x от (33.8):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x}.$$

В оба полученные соотношения входит $\partial^2 B/\partial t \partial x$, поэтому можно написать

$$\frac{\partial^2 E}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \tag{33.12а}$$

Взяв другие производные от (33.8) и (33.9), получим аналогичное соотношение для B:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}. \tag{33.12б}$$

Уравнения (33.12а и 33.12б) совпадают по виду с *волновым уравнением* для плоской волны, распространяющейся в направлении x:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(разд. 15.4). Скорость электромагнитной волны дается соотношением

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

в согласии с (23.11). Мы видим, что из уравнений Максвелла естественным образом следует тот факт, что E и B подчиняются уравнению для волны, распространяющейся со скоростью $v = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Именно на этом основании Максвелл предсказал существование электромагнитных волн.

Оценим из (33.11) скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{(8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2)(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Тл} \cdot \text{м/А})} =$$
$$= 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Это замечательный результат. Он в точности совпадает с измеренным значением скорости света.

33.6. Свет как электромагнитная волна. Шкала электромагнитных волн

Расчет, проведенный в конце предыдущего раздела, привел нас к результату, полученному в свое время и Максвеллом: скорость распространения электромагнитных волн равна $3{,}00 \cdot 10^8$ м/с и совпадает с экспериментально измеренной скоростью света.

Лет за шестьдесят до Максвелла было показано, что свет ведет себя подобно волне (мы обсудим это в гл. 36). Но никто не мог сказать, что это за волна, т. е. что колеблется в этой волне. Основываясь на своих вычислениях скорости распространения электромагнитных волн, Максвелл утверждал, что свет представляет собой электромагнитную волну. Эта точка зрения вскоре получила признание и других ученых, однако полностью она утвердилась лишь после того, как электромагнитные волны были зарегистрированы на опыте. Впервые электромагнитные волны удалось генерировать и наблюдать в лаборатории Генриху Герцу (1857–1894) в 1887 г., через восемь лет после смерти Максвелла. Герц использовал прибор с искровым промежутком (вибратор Герца), в котором на короткое время возникали колебания заряда; при этом генерировались электромагнитные волны с частотой порядка 10^9 Гц. Он зарегистрировал эти волны на некотором расстоянии от вибратора с помощью проволочного витка, в котором переменное магнитное поле падающей электромагнитной волны возбуждало ЭДС индукции. Позднее было показано, что эти волны распространяются со скоростью света $3{,}00 \cdot 10^8$ м/с и обладают всеми свойствами света, т. е. отражаются, преломляются и интерферируют. Единственное отличие от света состояло в том, что они были невидимы. Опыты Герца явились убедительным подтверждением теории Максвелла.

Длины волн видимого света были измерены в первом десятилетии прошлого века – задолго до того, как возникло предположение, что свет представляет собой электромагнитную волну. Свету соответствовал диапазон длин волн от $4{,}0 \cdot 10^{-7}$ до $7{,}5 \cdot 10^{-7}$ м, или от 400 до 750 нм. Соответствующие частоты можно найти из формул (15.1) или (33.7):

$$f\lambda = c.$$

Здесь через c обозначена скорость света, $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с; f и λ – соответственно частота и длина волны. Скорость света является универсальной постоянной, характеризующей распространение электромагнитных волн в пустом пространстве; поэтому ее обозначают специальным символом c. Из приведенного равенства нетрудно найти, что частоты видимого света лежат в интервале от $4{,}0 \cdot 10^{14}$ до $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц.

Однако видимый свет представляет собой лишь одну из разновидностей электромагнитного излучения. Как уже говорилось, в опытах Герца генерировались электромагнитные волны гораздо бóлее низкой частоты – порядка 10^9 Гц. Такие волны относят к *радиоволнам*: в наши дни именно с их помощью передаются радио- и телевизионные сигналы. Электромагнитные волны, или электромагнитное излучение, генерируются и регистрируются в широком диапазоне частот. Отдельные участки спектра электромагнитного излучения имеют свои названия, приведенные на рис. 33.10. Этот рисунок дает представление о **шкале электромагнитных волн**.

Радиоволны и микроволны генерируются с помощью электронных устройств (рис. 33.6); волны с более высокими частотами при помощи электроники получить крайне трудно. Эти и другие типы электромагнитного излучения испускаются в ряде естественных процессов, таких как излучение атомов, молекул, атомных ядер (об этом подробнее говорится в дальнейшем). В общем случае электромагнитные волны испускаются в результате ускорения электронов или других заряженных частиц, например при колебании электронов в антенне (рис. 33.6). Рентгеновское излучение испускается при резком торможении электронов, движущихся с большой скоростью, при попадании на металлическую мишень (гл. 41). Даже видимый свет от обычной лампы накаливания обусловлен ускорением электронов в раскаленной нити. Далее мы встретимся с различными типами электромагнитных волн. Здесь же упомянем, что инфракрасное (ИК) излучение, которому в спектре электромагнитного излучения соответствует участок сразу за длинноволновой границей видимого света, является основным переносчиком тепла от Солнца. Солнце излучает не только видимый свет, но также и значи-

Рис. 33.10. Спектр электромагнитного излучения.

тельное количество инфракрасного (ИК) и ультрафиолетового (УФ) излучения. Молекулы, входящие в состав кожного покрова человека, «резонируют» на инфракрасных частотах; поэтому именно инфракрасное излучение преимущественно поглощается и тем самым согревает нас.

Пример 33.2. Рассчитайте длину волны электромагнитного излучения с частотой а) 60 Гц и б) 1240 кГц.

Решение. а) По формуле $c = \lambda f$ имеем

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{60 \text{ с}^{-1}} = 5{,}0 \cdot 10^6 \text{ м},$$

или 5000 км. Одна длина волны покрывает Соединенные Штаты от побережья до побережья!

б) $$\lambda = \frac{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{1{,}24 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}} = 240 \text{ м}.$$

33.7. Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга

Электромагнитные волны несут с собой в пространстве энергию. Эта энергия заключена в распространяющихся электрическом и магнитном полях. В гл. 25 [формула (25.6)] было показано, что плотность энергии электрического поля E равна $u_E = {}^1/_2\varepsilon_0 E^2$, где u_E – энергия единицы объема электрического поля (Дж/м^3). Аналогично плотность энергии магнитного поля [формула (31.9)] равна $u_B = {}^1/_2 B^2/\mu_0$. Таким образом, полная плотность энергии в той области пространства, где находится электромагнитная волна, равна

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}. \tag{33.13}$$

В этом равенстве E – напряженность электрического поля, а B – индукция магнитного поля волны в произвольный момент времени в данной точке пространства. Поскольку $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 1/c$ и $B = E/c$ [формулы (33.10) и (33.11)], можно выразить полную плотность энергии только через напряженность электрического поля:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\mu_0 E^2}{\mu_0},$$

$$u = \varepsilon_0 E^2, \tag{33.14а}$$

или только через индукцию магнитного поля:

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 c^2 B^2 = \varepsilon_0 B^2/\varepsilon_0\mu_0,$$

$$u = \frac{B^2}{\mu_0}, \tag{33.14б}$$

или через их произведение:

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 EcB = \varepsilon_0 EB/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0},$$

$$u = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}EB. \tag{33.14в}$$

Заметим, что полная плотность энергии складывается из двух равных по величине вкладов, соответствующих плотностям энергии электрического и магнитного полей. Формулы (33.14) характеризуют плотность энергии в любой момент времени в любой точке пространства.

Определим энергию, переносимую волной в единицу времени через единичную площадку (плотность потока энергии электромагнитного излучения). Эту векторную величину обычно называют *вектором Пойнтинга*[1] S [по имени английского физика Джона Пойнтинга (1852–1914), близкого друга и коллеги Дж. Дж. Томсона] и измеряют в ваттах на квадратный метр (Вт/м^2). Направление вектора S совпадает с направлением переноса энергии, т. е. с направлением распространения электромагнитной волны. Пусть волна проходит через площадку A, перпендикулярную оси x, как показано на рис. 33.11. За время dt волна сместится вправо на расстояние $dx = cdt$, где c – скорость волны. Энергия, прошедшая за время dt через площадку A, заключена в объеме $dV = Adx = Acdt$. Плотность энергии равна $u = \varepsilon_0 E^2$, где E – напряженность электрического по́ля в этом объеме в данный момент времени. Полная энергия dU, заключенная в объеме dV, равна произведению плотности энергии u на объем dV: $dU = udV = (\varepsilon_0 E^2)(Acdt)$. Следовательно, плотность потока энергии, проходящего через площадку A за время dt, равна

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 cE^2. \qquad (33.15)$$

Поскольку $E = cB$ и $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, это равенство можно записать в виде

$$S = \varepsilon_0 cE^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}.$$

Вектор $\mathbf{S}$ совпадает по направлению со скоростью $\mathbf{v}$ которая перпендикулярна $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, и поэтому для вектора

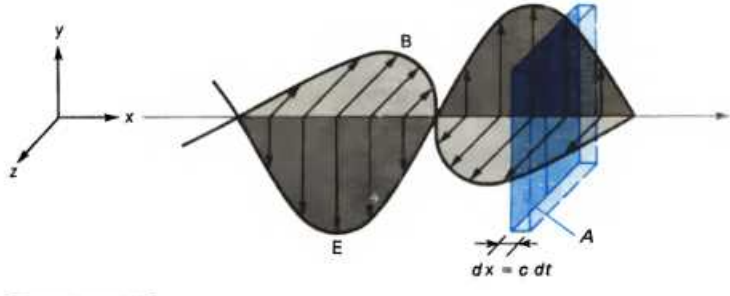


Рис. 33.11. Перенос энергии электромагнитной волной через площадку A.

[1] В отечественной литературе вектор S часто называют вектором Умова – Пойнтинга, отмечая этим вклад Николая Алексеевича Умова (1846–1915), который ввел в 1874 г. понятия скорости и направления движения энергии, потока плотности энергии. – *Прим. перев.*

Пойнтинга можно написать

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \tag{33.16}$$

Формула (33.15) дает *мгновенное* значение плотности потока энергии электромагнитной волны. Часто бывает необходимо знать *среднее* значение за длительный промежуток времени. Если E и B изменяются по синусоидальному закону, то среднеквадратичное значение, как и для синусоидальных токов и напряжений, равно $\overline{E^2} = E_0^2/2$, где E_0 – *амплитудное* (максимальное) значение напряженности E. Поэтому среднее значение вектора Пойнтинга равно

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2}\frac{c}{\mu_0}B_0^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}, \tag{33.17}$$

где B_0 – амплитудное значение индукции магнитного поля.

Пример 33.3. Плотность потока солнечного излучения, падающего на границу земной атмосферы, равна $1350\ \text{Вт/м}^2$. Определите амплитудные значения E и B, считая, что весь поток создается единственной электромагнитной волной.

Решение. По формуле (33.17) $\overline{S} = 1350\ \text{Дж/с}\cdot\text{м}^2 = \varepsilon_0 c E_0^2/2$, откуда

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\overline{S}}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(1350\ \text{Дж/с}\cdot\text{м}^2)}{(8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)(3{,}0\cdot 10^8\ \text{м/с})}} = 1{,}01\cdot 10^3\ \text{В/м}.$$

По формуле (33.10)

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1{,}01\cdot 10^3\ \text{В/м}}{3{,}0\cdot 10^8\ \text{м/с}} = 3{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{Тл}.$$

Как видно из этого примера, численное значение B очень мало по сравнению с значением E; это различие обусловлено лишь выбором соответствующих единиц и способом их определения. Как мы уже видели, энергия электромагнитной волны поровну распределена между электрическим и магнитным полями.

* 33.8. Уравнения Максвелла и электромагнитные волны в материальной среде

В присутствии диэлектриков и (или) магнетиков уравнения Максвелла должны быть несколько видоизменены. Примем для простоты, что среда однородна и изотропна (т. е. обладает одинаковыми свойствами по всем направлениям), а относительная диэлектрическая проницаемость K и относительная магнитная проницаемость K_m представляют собой константы. Тогда в уравнениях Максвел-

ла (33.5) ε_0 следует заменить на $\varepsilon = K\varepsilon_0$, а μ_0 – на $\mu = K_m\mu_0$; заряд Q в (33.5а) должен обозначать только свободные заряды (гл. 25 и 29).

Скорость распространения электромагнитной волны в этом случае равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}}, \tag{33.18}$$

где c – скорость света в пустом пространстве. Поскольку для большинства диэлектриков $K_m \approx 1$, а K всегда больше единицы, скорость света в среде всегда меньше, чем в вакууме.

В идеальном проводнике ($\rho = 0$) электрическое поле не может существовать (наличие электрического поля привело бы к возникновению бесконечно большого тока). Поэтому электромагнитная волна не может проникнуть в идеальный проводник и испытывает полное отражение. Действительно, отполированные металлические поверхности хорошо отражают электромагнитные волны и не прозрачны для электромагнитного излучения. В реальный проводник электромагнитные волны проникают на небольшую глубину ($\rho \neq 0$), и возникающие при этом электрические токи приводят к поглощению части энергии волны.

* 33.9. Передающие линии

Рассмотрим длинную передающую линию, например пару параллельных проводников или коаксиальный кабель, к одному из концов которой подключен источник ЭДС. Другой конец может быть соединен с электрическим или электронным прибором либо с антенной. Пусть в момент $t = 0$ проводники передающей линии соединяются с клеммами источника постоянной ЭДС V_0. Проводники не смогут мгновенно приобрести заряд по всей длине. Сила тока и напряжение тоже не могут мгновенно приобрести установившееся значение по всей длине линии. В действительности граница между заряженной и незаряженной частями проводника, как показано на рис. 33.12, *а*, перемещается от источника с конечной скоростью v. Если проводники находятся в вакууме (или воздухе) и обладают нулевым сопротивлением, эта скорость равна скорости света в пустом пространстве c. Аналогичным образом напряжение между двумя проводниками в зависимости от расстояния x имеет вид «ступеньки» (рис. 33.12, *б*), которая перемещается вдоль линии со скоростью c. Процесс представляет собой распространение «импульса» вдоль передающей линии. Если заменить источник постоянной ЭДС источником *синусоидальной* ЭДС с частотой f, то по передающей линии будет распространяться синусоидаль-

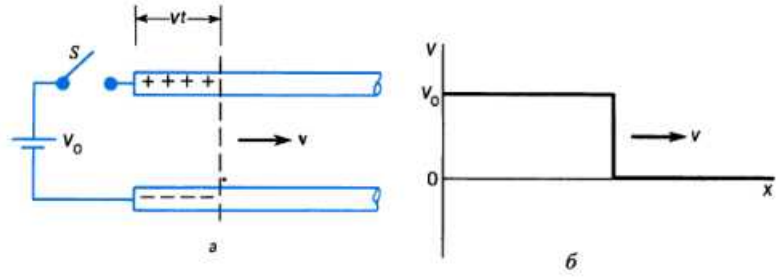


Рис. 33.12. *а* – заряд движется со скоростью v (в вакууме при нулевом электрическом сопротивлении $v = c$) вдоль передающей линии после подключения к источнику постоянной ЭДС V_0. Штриховой линией показан «волновой фронт»; *б* – график разности потенциалов между проводниками в момент t.

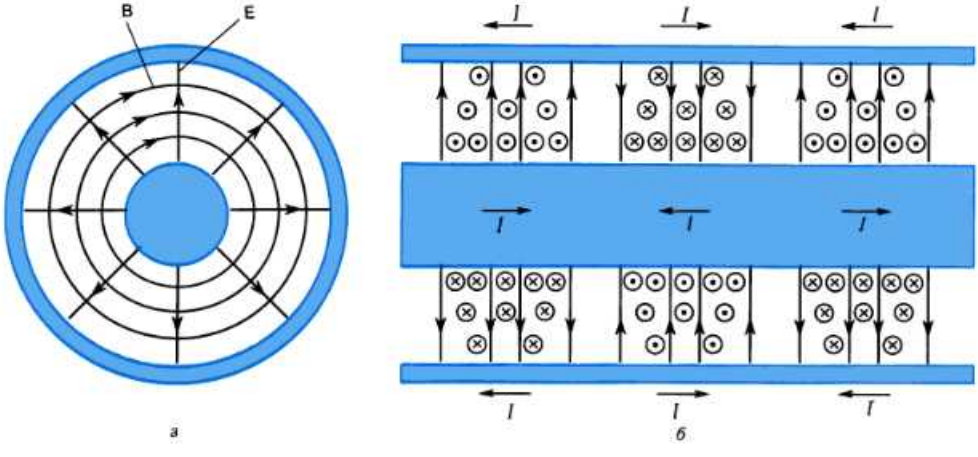
ная волна с длиной

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

если проводники имеют нулевое сопротивление и находятся в вакууме. Пространство между проводниками в коаксиальном кабеле заполнено диэлекриком с относительной диэлектрической проницаемостью K, поэтому в соответствии с (33.18) скорость распространения волны уменьшается в K раз. В случае линии переменного тока с частотой 60 Гц длина волны $\lambda = (3{,}0 \cdot 10^8 \text{ м/с})/(60 \text{ с}^{-1}) = 5000$ км, так что синусоидальное распределение напряжения в линии удастся заметить разве что на длине трансконтинентальной линии электропередач. На более высоких частотах, таких как радиочастоты, синусоидальная картина проявляется на значительно более коротких расстояниях.

Рис. 33.13. Поперечное (*а*) и продольное (*б*) сечения коаксиального кабеля. Силовые линии электрического поля направлены радиально, силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности. Стрелками показано направление тока в проводниках.

На рис. 33.13 показано распределение электрического и магнитного полей по коаксиальному кабелю, проводники которого имеют нулевое сопротивление и находятся в вакууме. В действительности картина полей может быть гораздо более сложной; на рисунке изображена простейшая ситуация. Силовые линии электромагнитного поля направлены вдоль радиуса, а силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности.



Подобные системы анализируются либо методом эквивалентных схем, либо с точки зрения бегущей волны; и в том и в другом случае анализ оказывается очень сложным. Заметим только, что кабель как электрическая цепь обладает индуктивностью и емкостью; заряд и ток распространяются в кабеле со скоростью c (направления токов в проводниках показаны на рисунке стрелками с буквой I). С волновой точки зрения электрическое и магнитное поля распространяются подобно плоской волне со скоростью c в ограниченном пространстве между проводниками. Когда волна достигает конца передающей линии, где к линии подключена какая-либо схема или электронный прибор, волна частично отражается, если только линия не нагружена на чисто активное сопротивление определенной величины. Значение сопротивления, при котором отражения волны не происходит, называется *волновым сопротивлением* линии; на практике используются кабели с различным волновым сопротивлением. Типичное волновое сопротивление коаксиального кабеля составляет 50 Ом[1)].

Для передачи сверхвысокочастотных электромагнитных волн (микроволн) используют *волноводы*. Волновод представляет собой полый металлический проводник (обычно прямоугольного сечения). Анализ распространения волны в волноводе чрезвычайно сложен; даже в вакууме скорость волны в волноводе не равна скорости света c.

* 33.10. Дифференциальная форма уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла могут быть записаны и в другой форме, которая часто оказывается более удобной, чем уравнения (33.5). Обычно этот вопрос рассматривается в курсах теоретической физики: мы включили его лишь для полноты изложения.

Сформулируем вначале без доказательства две теоремы векторного анализа. Первая из них – это *теорема Гаусса*, или *теорема источника*, которая связывает интеграл по поверхности от произвольной векторной функции $\mathbf{F}$ с интегралом от дивергенции этой функции по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности:

$$\oint_{\text{Поверхность } A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\text{Объем } V} \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Оператор ∇ (набла) – это *градиент*, который в декартовых

[1)] Волновое сопротивление двухпроводной линии равно $Z = \sqrt{L/C}$, где C и L – емкость и индуктивность единицы длины линии. – *Прим. перев.*

координатах определяется как

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Величина

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией* вектора **F**.

Вторая теорема – это *теорема Стокса*, которая связывает интеграл по замкнутому контуру с интегралом по поверхности, опирающейся на этот контур:

$$\oint_{\text{Контур}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{Поверхность } A} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

Векторное произведение $\nabla \times \mathbf{F}$ называется *вихрем* (*ротором*) **F** (о векторном произведении см. разд. 10.1).

Пользуясь этими теоремами, мы можем получить уравнения Максвелла в пустом пространстве в дифференциальной форме. Применим теорему Гаусса к левой части уравнения (33.5а) (закону Гаусса):

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int \nabla \cdot \mathbf{E} dV.$$

Заряд Q можно выразить через интеграл по объему от плотности заряда ρ: $Q = \int \rho dV$. Тогда

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV.$$

Правая и левая части этого равенства представляют собой интегралы по одному и тому же объему; чтобы равенство выполнялось для объема *любых* размеров и формы, подынтегральные выражения должны быть равны между собой:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (33.19а)$$

Это дифференциальная форма теоремы Гаусса для электрического поля. Проведя аналогичные действия со вторым уравнением Максвелла $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$, получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad (33.19б)$$

Теперь применим теорему Стокса к левой части третьего уравнения Максвелла:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Так как магнитный поток $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$, получим

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathrm{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathrm{A}$$

(где $\partial/\partial t$ – частная производная, поскольку B может зависеть также от координаты). В обеих частях теперь стоят

интегралы по одной и той же поверхности; чтобы равенство выполнялось для любой поверхности, даже самой малой, необходимо

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (33.19в)$$

Это третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме. Наконец, применим теорему Стокса к последнему уравнению Максвелла:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Учитывая, что $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, получаем

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Силу тока проводимости I можно выразить с помощью (26.8) через плотность тока $\mathbf{j}$:

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A},$$

и четвертое уравнение Максвелла принимает вид

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Чтобы это равенство выполнялось для любой поверхности A независимо от ее размеров и формы, подынтегральные выражения должны быть равны между собой:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \qquad (33.19г)$$

Итак, уравнения (33.19) представляют собой уравнения Максвелла в дифференциальной форме в пустом пространстве. Обе формы уравнений Максвелла приведены в табл. 33.1.

Таблица 33.1. Уравнения Максвелла в пустом пространстве

Интегральная форма	Дифференциальная форма
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{dt}$
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Заключение

Джеймс Клерк Максвелл создал изящную теорию, в которой все явления электричества и магнетизма описываются четырьмя уравнениями – *уравнениями Максвел-*

ла. Он основывался на уже известных фактах, дополнив их гипотезой о том, что изменяющееся электрическое поле приводит к возникновению магнитного поля. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \oint \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0, \quad \oint \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Первые два уравнения представляют собой теорему Гаусса для электрического и магнитного полей; третье – закон электромагнитной индукции Фарадея, четвертое – дополненный Максвеллом закон Ампера.

Теория Максвелла предсказала испускание поперечных *электромагнитных волн* при ускоренном движении электрических зарядов; электромагнитные волны распространяются в пространстве со скоростью света c. Направления колебаний электрического и магнитного полей в электромагнитной волне перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

После экспериментального обнаружения электромагнитных волн в конце XIX в. представление о том, что свет является электромагнитной волной (хотя и с гораздо более высокой частотой, чем волны, с которыми проводились опыты в лаборатории), получило всеобщее признание. *Спектр (шкала) электромагнитного излучения* охватывает очень широкий диапазон длин волн – радиоволны, микроволны, видимый свет, рентгеновское и гамма-излучение; все они распространяются в пространстве со скоростью $c = 3{,}00\cdot 10^8$ м/с.

Энергия, переносимая электромагнитной волной, характеризуется вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = (1/\mu_0)(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$, который определяет плотность потока энергии электромагнитной волны (энергию, переносимую через единицу площади за единицу времени), где E и B – мгновенные значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в пустом пространстве.

Вопросы

1. Как направлен ток смещения на рис. 33.2 (конденсатор разряжается)?
2. Представьте, что вы смотрите вдоль вектора напряженности электрического поля **E** в момент, когда напряженность возрастает. Как направлены силовые линии индукции магнитного поля: по часовой стрелке или против? А если вектор **E** направлен к вам и величина E убывает?
3. Почему магнитное поле, обусловленное током смещения в конденсаторе, обнаружить гораздо труднее, чем магнитное поле, обусловленное током проводимости?
4. Имеются ли достаточные основания называть член $\mu_0\varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ в (33.3) «током»?
5. Напряженность электрического поля в электромагнитной волне, распространяющейся на север, колеблется в направлении восток – запад. Укажите направление колебаний индукции магнитного поля этой волны.
6. Является ли звук электромагнитной волной? Если нет, то что это за волна?
7. Может ли электромагнитная волна распространяться в абсолютном вакууме? А звуковая волна?

8. В чем сходство и различие между светом и звуком?
9. Что имеет бóльшую длину волны: сигналы радио- и телевизионных станций или видимый свет?
10. Частоты радиовещания на УКВ намного выше, чем частоты средневолновых станций. На основании того, что говорилось в гл. 15 о дифракции, объясните, почему приему средневолновых станций меньше мешают препятствия в виде холмов или зданий на пути распространения радиоволн.
11. Каким участкам электромагнитного спектра соответствуют электромагнитные волны с длиной волны 10^3 км? 1 км? 1 м? 1 см? 1 мм? 1 мкм?
12. Какой вывод можно сделать из формулы (32.2) относительно разности фаз между током на электростанции и током у потребителя на расстоянии 200 км?
13. Может ли различие в длине проводов, соединяющих звуковые колонки со стереоусилителем, привести к запаздыванию звука, излучаемого одной из колонок? Объясните.
14. Загорается ли люстра одновременно с поворотом выключателя? Объясните.
*15. Укажите на рис. 33.13, *б* знак заряда на каждом из проводников в момент, изображенный на рисунке.
*16. Покажите направление тока проводимости в различных точках каждого проводника на рис. 33.12. Ответ поясните.

Задачи

Раздел 33.1

(I) Рассчитайте силу тока смещения I_D между квадратными пластинами конденсатора со стороной 1,0 см, если напряженность электрического поля изменяется со скоростью $3{,}0 \cdot 10^6$ В/м·с.
2. (I) В некоторый момент сила тока в проводах, соединенных с пластинами плоского конденсатора, составила 2,8 А. С какой скоростью изменяется напряженность электрического поля в конденсаторе с пластинами в форме квадрата со стороной 1,00 см?
3. (II) Покажите, что сила тока смещения в плоском конденсаторе может быть записана в виде $I_D = CdV/dt$, где V – мгновенное значение напряжения на обкладках.
4. (II) Скорость накопления заряда на круглых обкладках плоского конденсатора емкостью 12,0 пФ составляет 12,0 мКл/с. Чему равна индукция магнитного поля на расстоянии 15,0 см по радиусу от центра конденсатора, если радиус обкладок равен 0,600 см?
5. (II) а) Покажите, что индукция магнитного поля вне обкладок конденсатора в примере 33.1 имеет величину

$$B = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi r},$$

где I_D – сила тока смещения. б) Объясните, почему эта формула совпадает с выражением для индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с током. в) Сравните значения индукции магнитного поля между обкладками конденсатора с ее значением вблизи проводника (радиусом 2 мм), по которому к конденсатору подводится ток. Почему эти значения столь различны?
6. (II) Круглые пластины радиусом $R = 3{,}5$ см воздушного конденсатора находятся на расстоянии $d = 2{,}0$ мм друг от друга. Конденсатор подключен к источнику переменной ЭДС с частотой 60 Гц, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$. Амплитуда силы тока смещения равна 35 мкА. Определите а) амплитуду силы тока проводимости I; б) величину $\mathscr{E}_0$; в) максимальное значение $d\Phi_E/dt$ между пластинами. Искривлением силовых линий у краев пластин можно пренебречь.

Раздел 33.3

7. (II) Если бы существовали магнитные монополи, то какие из уравнений Максвелла пришлось бы изменить и каким был бы их новый вид? (Обозначьте магнитный заряд монополя через Q_m по аналогии с электрическим зарядом Q.)

Разделы 33.5 и 33.6

8. (I) В электромагнитной волне, распространяющейся на запад, плоскость колебаний индукции магнитного поля B вертикальна. Частота колебаний индукции магнитного поля равна 180 кГц, а среднеквадратичное значение индукции составляет $8{,}65 \cdot 10^{-9}$ Тл. В каком направлении колеблется электрическое поле? Чему равны частота колебаний и среднеквадратичное значение напряженности электрического поля?
9. (I) Радиостанция с частотной модуляцией вещает на частоте 90,5 МГц. Чему равна соответствующая длина волны? б) Средневолновая станция принимается, когда стрелка на шкале радиоприемника стоит против цифры 1550. Чему равна длина волны, на которой работает эта станция?
10. (II) Выведите волновое уравнение (33.12б) для индукции магнитного поля B.
11. (II) Электрическое поле в плоской электромагнитной волне изменяется по закону $E_x = E_0 \cos(kz + \omega t)$, $E_y = E_z = 0$. Определите а) величину и направление **B**; б) направление распространения волны.

Раздел 33.7

12. (I) Амплитуда напряженности электрического поля **E** в электромагнитной волне равна 38 мВ/м. Чему равно среднеквадратичное значение плотности потока энергии, переносимой этой волной?

13. (I) Среднеквадратичное значение индукции магнитного поля в электромагнитной волне равно $2{,}50 \cdot 10^{-9}$ Тл. Какую энергию переносит эта волна ежесекундно через 1 м^2?

14. (I) Какая энергия переносится за 1 ч через площадку 1,0 см^2 электромагнитной волной, в которой среднеквадратичное значение напряженности электрического поля **E** равно 25 В/м?

15. (I) Чему равна объемная плотность энергии солнечного излучения в расчете на 1 м^3 вблизи поверхности Земли?

16. (II) Луч лазера мощностью 5,0 мВт имеет диаметр 2,0 мм. Чему равны среднеквадратичные значения E и B в луче лазера?

17. (II) Оцените среднюю мощность излучения Солнца, пользуясь тем фактом, что плотность потока энергии, приходящей к Земле на границе атмосферы, равна 1350 Вт/м^2.

18. (II) Точечный источник испускает равномерно по всем направлениям световую энергию со средней мощностью P_0 на фиксированной частоте f. Покажите, что амплитудное значение напряженности электрического поля в этой волне равно

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi r^2}}.$$

19. (II) Чему равны E_0 и B_0 волны на расстоянии 10 м от источника света мощностью 100 Вт? Считайте, что лампа излучает свет равномерно по всем направлениям на единственной частоте.

20. (II) Вертикальная антенна радиостанции мощностью 35 кВт излучает по всем направлениям электромагнитную волну. а) Чему равна интенсивность сигнала (в единицах Вт/м^2) на расстоянии 20,0 км от передающей антенны? б) Чему равно среднеквадратичное значение напряженности электрического поля **E** в этой точке, когда станция работает на полную мощность? в) Чему равна ЭДС, возбуждаемая в вертикальной автомобильной антенне длиной 1,0 м? г) Какова должна быть мощность станции, чтобы ее сигнал имел такую интенсивность на удалении 100 км? (Эта мощность превышает разрешенную в США мощность радиопередающих станций.)

21. (II) УКВ-антенна длиной 1,80 м ориентирована параллельно электрическому вектору **E** электромагнитной волны. Какой должна быть напряженность электрического поля **E**, чтобы возбудить в антенне ЭДС 1,0 мВ (среднеквадратичное значение)? Какова плотность потока энергии электромагнитной волны?

22. (II) Чему равно среднеквадратичное значение ЭДС, возбуждаемой в антенне, которая представляет собой катушку диаметром 0,50 см, содержащую 600 витков, если электромагнитная волна имеет частоту 940 кГц и плотность потока энергии в области антенны равна $2{,}0 \cdot 10^{-4}$ Вт/м^2?

23. (II) а) Покажите, что при заряде конденсатора вектор Пойнтинга **S** направлен к его центру (имеется в виду плоский конденсатор с круглыми пластинами, как в примере 33.1). б) Проинтегрируйте **S** по цилиндрической поверхности, ограничивающей воздушный зазор конденсатора, и покажите, что приток энергии к конденсатору равен скорости, с которой увеличивается энергия электростатического поля внутри конденсатора [см. (25.6)]. Искривлением силовых линий на краях обкладок можно пренебречь.

24. (II) По цилиндрическому проводнику радиусом r, имеющему проводимость σ, течет постоянный ток I, однородно распределенный по сечению проводника. а) Определите **E** внутри проводника. б) Определите **B** снаружи проводника. в) Определите вектор Пойнтинга **S** на поверхности проводника и покажите, что он направлен внутрь проводника нормально к поверхности. г) Проинтегрируйте **S** по поверхности проводника и покажите, что мощность электромагнитной энергии, поступающей в проводник через его боковую поверхность, равна электрической мощности I^2R, рассеиваемой внутри проводника. (Таким образом, поступающую в проводник энергию можно рассматривать скорее как электромагнитную энергию, входящую через его боковую поверхность, чем как электрическую энергию, входящую с его концов.)

* Раздел 33.9

25. (I) До кого скорее доходит звук голоса певца: до зрителя на балконе, удаленном на 50 м от сцены, или до радиослушателя на расстоянии 3000 км, приложившего ухо к приемнику? Насколько скорее? Считайте, что микрофон находится на расстоянии нескольких сантиметров от певца; температура воздуха в зале 20 °C.

***26.** (II) Изобразите картину силовых линий электрического и магнитного полей вокруг двухпроводной передающей линии (рис. 33.12, *а*).

***27.** (II) Покажите в нескольких точках направление тока смещения на рис. 33.13, *б* в указанный на рисунке момент.

28. (II) а) Применив закон Ампера на рис. 33.13 к замкнутому контуру, концентричному с проводниками кабеля и проходящему между ними, покажите, что указанные на рисунке направления токов согласуются с картиной магнитного поля. б) Найдите зависимость B от силы тока и от расстояния до середины кабеля.

*29. (II) К концу длинной передающей линии, лишенной сопротивления, приложена ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin 2\pi f t$, где $\mathscr{E}_0 = 20$ В и $f = 5{,}0 \cdot 10^7$ Гц. Определите, по какому закону зависит разность потенциалов V между проводниками линии а) от времени в точке на расстоянии $x = 2{,}0$ м от источника; б) от координаты x в момент $t = 2{,}0$ с.

30. (III) Внутренний проводник коаксиального кабеля на рис. 33.13 имеет радиус R_1, а внешний R_2. К одному концу кабеля подключена батарея с ЭДС V_0, другой конец нагружен на резистор R. Определите в области между проводниками ($R_1 < r < R_2$) а) $\mathbf{E}$; б) $\mathbf{B}$; в) $\mathbf{S}$. г) Проинтегрируйте $\mathbf{S}$ и покажите, что энергия переносится в пустом пространстве (между R_1 и R_2), а соответствующая мощность равна V^2/R. Удивителен ли этот результат?

34 Отражение и преломление света

Способность видеть чрезвычайно важна, ибо зрение позволяет нам получать значительную часть информации о внешнем мире. Как мы видим? Что представляет собой нечто называемое нами *светом*, которое, попадая в наш глаз, вызывает зрительные ощущения? Что же такое свет? Каким образом с его помощью нам удается видеть тот необычайно широкий диапазон явлений, которые мы наблюдаем? На протяжении нескольких следующих глав именно свет будет предметом нашего рассмотрения.

Любой объект становится видимым одним из двух способов: 1) он сам может быть источником света, как, например, электрическая лампа, свеча или звезда, и мы видим свет, непосредственно испускаемый этим источником; 2) чаще же видимый предмет отражает падающий на него свет (источником света в этом случае может быть солнце, лампа или что-нибудь еще). Понять, каким образом тела *испускают* свет, удалось лишь в 20-е годы нашего века; об этом речь пойдет в гл. 40. Но представление о том, каким образом свет *отражается* от предметов, возникло гораздо раньше, и мы обсудим его в разд. 34.3.

34.1. Световые лучи

Огромное количество данных свидетельствует о том, что свет при самых различных обстоятельствах распространяется прямолинейно. Предметы, освещаемые точечными источниками света, например солнцем, отбрасывают четко очерченные тени. Карманный фонарик дает узкий пучок света. Фактически о положении окружающих нас предметов в пространстве мы судим, подразумевая, что свет от объекта попадает в наш глаз по прямолинейным траекториям. Наша ориентация во внешнем мире целиком основана на предположении о прямолинейном распространении света.

Это разумное допущение привело к представлению о **световых лучах**. Прямолинейные траектории распространения света и получили название **световых лучей.** В действительности луч – это идеализация: имеется в виду бесконечно узкий пучок света. Если мы видим предмет, то

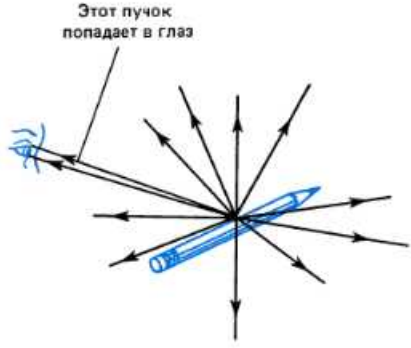


Рис. 34.1. Каждая точка объекта испускает световые лучи. Здесь изображен узкий пучок лучей, выходящих из одной точки и попадающих в глаз наблюдателя.

это означает, что нам в глаз попадает свет от каждой точки предмета. Хотя световые лучи выходят из каждой точки по всем направлениям, лишь узкий пучок этих лучей попадает в глаз наблюдателя (рис. 34.1). Если наблюдатель сдвинет голову чуть в сторону, то в его глаз от каждой точки предмета будет попадать уже другой пучок лучей.

Из гл. 33 мы узнали, что свет можно рассматривать как электромагнитную волну. Хотя представления о световых лучах не затрагивают его электромагнитной природы (волновой природой света мы займемся, начиная с гл. 36), на его основе удалось весьма успешно объяснить многие свойства света, такие как отражение, преломление и формирование изображений зеркалами и линзами. Поскольку при этом рассматриваются прямолинейные лучи, падающие под различными углами, соответствующий раздел физики получил название *геометрической оптики*[1)].

34.2. Скорость света и показатель преломления

Галилей пытался измерить скорость света по времени прохождения светом известного расстояния между вершинами двух холмов. На вершине одного из холмов Галилей поставил своего ассистента, на вершине другого встал сам. Ассистенту было наказано снять крышку со своего фонаря в тот момент, когда он увидит вспышку света фонаря Галилея. Галилей измерил промежуток времени между вспышкой своего фонаря и моментом, когда он увидел вспышку света фонаря ассистента. Этот промежу-

[1)] В геометрической оптике мы в основном пренебрегаем волновыми свойствами света. Это означает, что если свет падает на предмет или отверстие, то их размеры должны быть большими по сравнению с длиной волны света (так что такими волновыми явлениями, как интерференция и дифракция, о которых говорилось в гл. 15, можно пренебречь), и мы не рассматриваем, что происходит со светом на краях предметов (см., однако, гл. 36 и 37).

ток оказался столь коротким, что Галилей счел его характеризующим только быстроту реакции человека и заключил, что скорость света должна быть беспредельно велика.

Скорость света имеет конечную величину. Первым это успешно продемонстрировал датский астроном Оле Рёмер (1644–1710). Рёмер заметил, что тщательно измеренный период обращения одного из спутников («лун») Юпитера (Ио, средний период обращения 42,5 ч) несколько меняется в зависимости от относительного движения Земли и Юпитера. Когда Земля удалялась от Юпитера, период Ио слегка увеличивался, когда Земля приближалась к Юпитеру, период слегка уменьшался. Рёмер приписал эту вариацию периода дополнительному времени, которое требовалось свету, чтобы преодолеть возросшее расстояние, когда Земля удалялась от Юпитера, или выигрышу во времени, когда Земля приближалась к Юпитеру и свет преодолевал меньшее расстояние. Рёмер заключил, что скорость света хотя и очень велика, но конечна.

После Рёмера скорость света неоднократно измеряли различными способами. Наиболее важные результаты были получены в США Альбертом Майкельсоном (1852–1931). В серии прецизионных экспериментов, выполненных с 1880-х по 1920-е годы, Майкельсон использовал установку с вращающимся восьмигранным зеркалом, схема которой представлена на рис. 34.2. Свет от источника направлялся на одну из граней зеркала. Отраженный свет проходил путь до расположенного на большом расстоянии неподвижного зеркала и обратно, как показано на рис. 34.2. При правильно подобранной скорости вращения восьмигранного зеркала пучок света, возвращающийся от неподвижного зеркала, после отражения от грани попадает в зрительную трубу, в которую смотрит наблюдатель. При любой другой скорости вращения пучок отклоняется в сторону и наблюдатель его не видит. Зная скорость вращения зеркала и расстояние до неподвижного

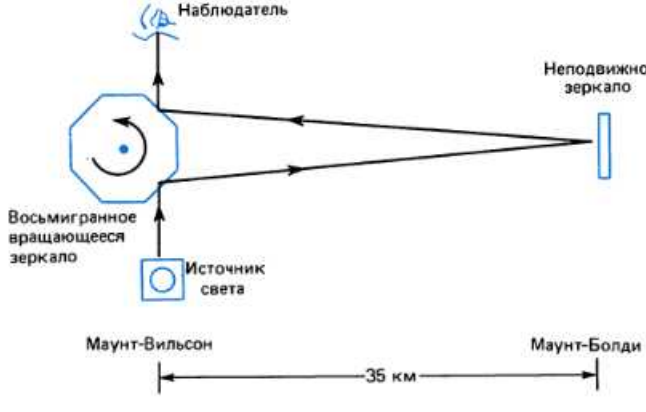


Рис. 34.2 Установка Майкельсона для измерения скорости света (масштаб не выдержан).

зеркала, можно вычислить скорость света. В 20-е годы нашего века Майкельсон установил вращающееся зеркало на вершине Маунт-Вильсон в Южной Калифорнии, а стационарное зеркало – на Маунт-Болди (Маунт-Сан-Антонио) на расстоянии 35 км. Позднее Майкельсон измерял скорость света в вакууме, используя длинные, хорошо откачанные трубки.

Принятое в настоящее время значение скорости света c в вакууме составляет

$$c = (2{,}99792458 \pm 0{,}00000001) \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Обычно мы округляем это значение до

$$3{,}00 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

если не требуется особая точность. В воздухе скорость света лишь немного меньше. В других прозрачных средах, таких как стекло и вода, скорость света всегда меньше, чем в вакууме. Например, в воде свет распространяется со скоростью около $^3/_4 c$. Отношение скорости света в вакууме к скорости v в данной среде называется *показателем преломления* n этой среды:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{34.1}$$

Показатели преломления для различных сред представлены в табл. 34.1[1].

Таблица 34.1. Показатели преломления

Среда	$n = c/v$
Воздух (при нормальных условиях)	1,0003
Вода	1,33
Этиловый спирт	1,36
Стекло	
Плавленый кварц	1,46
Крон	1,52
Легкий флинт	1,58
Люцит или плексиглас	1,51
Хлорид натрия	1,53
Алмаз	2,42

(Как мы увидим в дальнейшем, показатель преломления n несколько меняется в зависимости от длины волны света – постоянное значение он сохраняет только в вакууме. Поэтому приведенные в табл. 34.1 данные соответствуют желтому свету с длиной волны $\lambda = 589$ нм.)

[1] Из соотношения (33.18) видно, что $n = \sqrt{KK_m}$, где K – диэлектрическая проницаемость среды, а K_m – ее магнитная проницаемость.

Например, так как для алмаза $n = 2{,}42$, свет распространяется в алмазе со скоростью

$v = c/n = (3{,}00 \cdot 10^8 \text{ м/с})/2{,}42 = 1{,}24 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$

34.3. Отражение света. Изображение в плоском зеркале

Падая на поверхность какого-нибудь предмета, свет частично отражается. Остальная часть либо поглощается предметом (и превращается в тепло), либо (если предмет прозрачен, как стекло или вода) проходит сквозь предмет. От блестящего предмета (например, от посеребренного зеркала) может отражаться более 95% падающего света.

Если узкий пучок света падает на плоскую поверхность, то *углом падения* θ_i называется угол, который падающий луч образует с нормалью к поверхности, а *углом отражения* θ_r – угол, который образует с этой нормалью отраженный луч. Для плоских поверхностей падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности, и

угол падения равен углу отражения.

Это **закон отражения** (рис. 34.3). Он был известен еще древним грекам, и вы можете проверить его сами, посветив в затемненной комнате лучом света от фонарика на зеркало.

Падая на шероховатую поверхность (даже если шероховатости микроскопически малы, как на поверхности этой страницы), свет отражается и в различных направлениях (рис. 34.4). Это – так называемое *диффузное отражение*. Закон отражения выполняется и в этом случае, но на каждом маленьком участке поверхности. Из-за диффузного отражения во всех направлениях обычный предмет можно наблюдать под разными углами. Стоит сдвинуть голову в сторону, как из каждой точки предмета в глаз будет попадать другой пучок отраженных лучей (рис. 34.5, *а*). Но если узкий пучок света падает на зеркало, то вы увидите его только в том случае, если глаз занимает положение, для которого выполняется закон отражения

Рис. 34.3. Закон отражения.

Рис. 34.4. Диффузное отражение от шероховатой поверхности.

(рис. 34.5, *б*). Этим и объясняются необычные свойства зеркал. (Используя аналогичные аргументы, Галилей показал, что поверхность Луны должна быть шероховатой, а не зеркально гладкой, как полагали некоторые[1].)

Глядя в зеркало прямо перед собой, вы видите как бы своего двойника и различные предметы, которые находятся вокруг и позади вас. При этом вам кажется, что и ваш двойник, и эти предметы находятся перед вами, за зеркалом, хотя их там, разумеется, нет. То, что вы видите в зеркале, – это **изображения** предметов.

Из рис. 34.6 видно, как формируется изображение плоским зеркалом. Показаны лучи, исходящие из двух различных точек объекта. Из каждой точки объекта лучи расходятся по многим направлениям, но на рис. 34.6 изображены только узкие пучки лучей, попадающих в глаз из двух различных точек объекта. Кажется, что попадающие в глаз расходящиеся лучи исходят из точек, расположенных за зеркалом[2]. Точка, из которой, как нам кажется, исходит каждый пучок, и есть точка изображения. Каждой точке объекта соответствует точка изображения. Сосредоточим наше внимание на двух лучах, выходящих из точки A объекта и попадающих в точки B и B' зеркала. Углы ADB и CDB прямые. Эти углы равны по закону отражения. Следовательно, треугольники ABD и CDB конгруэнтны, и $AD = CD$. Таким образом, *расстояние до изображения* d_i (расстояние от зеркала до изображения; рис. 46.6) равно *расстоянию до объекта* d_0. Из геометрии мы заключаем также, что высота изображения равна высоте объекта.

Рис. 34.5. Пучок света от электрического фонарика падает на белую бумагу (*а*) и на зеркальце (*б*). В первом случае белый отраженный свет вследствие диффузного отражения виден из различных точек. Во втором случае отраженный свет виден только при определенном положении глаза ($\theta_r = \theta_i$).

---

[1] *Галилей Г.* Диалог о двух главных системах мира – птолемеевой и коперниковой. День первый. – В кн.: Галилей Г. Избранные труды в двух томах. Т. 1. – М.: Наука, 1964.

[2] Наш глаз и мозг воспринимают все лучи, попадающие в глаз, как прямолинейные.

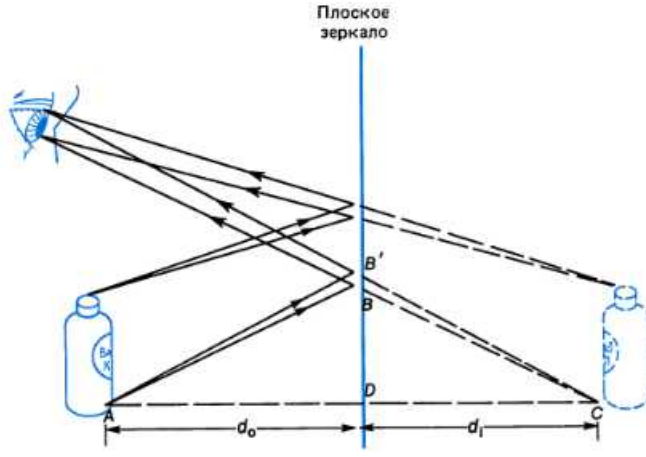


Рис. 34.6. Образование мнимого изображения при отражении в плоском зеркале.

В действительности световые лучи не проходят сквозь зеркало. Нам только *кажется*, будто свет исходит от изображения, поскольку наш мозг воспринимает попадающий нам в глаза свет как свет от источника, находящегося перед нами. Так как лучи в действительности не сходятся в изображении, поместив лист белой бумаги или фотопленку в то место, где находится изображение, мы не получим никакого изображения. Поэтому такое изображение называется *мнимым*. Его следует отличать от *действительного изображения*, через которое свет проходит и которое можно получить, поместив там, где оно находится, лист бумаги или фотопленку. Как мы увидим в дальнейшем, действительные изображения можно формировать с помощью линз и кривых зеркал.

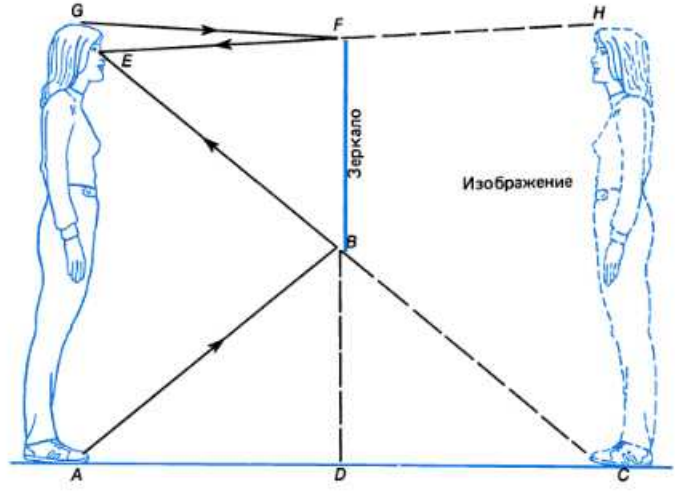


Рис. 34.7. Разглядывая себя в зеркало (пример 34.1).

Пример 34.1. Женщина ростом 1,60 м стоит перед плоским вертикальным зеркалом. Какой должна быть минимальная высота зеркала и на какой высоте над

полом должен находиться его нижний край для того, чтобы женщина могла видеть себя с головы до ног? (Условимся, что глаза женщины находятся на 10 см ниже ее макушки.)

Решение. Ситуация схематически изображена на рис. 34.7. Рассмотрим сначала луч, идущий из точки A. После участка AB он, отразившись от зеркала, переходит в луч BE и попадает в глаз E. Так как свет, идущий от пальцев ног (точка A), попадает в глаз E после отражения в точке B, нет необходимости в зеркале ниже этой точки. Так как угол отражения равен углу падения, высота BD составляет половину высоты AE. Но $AE = 1{,}60\text{ м} - 0{,}10\text{ м} = 1{,}50\text{ м}$, поэтому $BD = 0{,}75$ м. Аналогично, если женщина должна видеть свою макушку, то верхний край зеркала должен доходить только до точки F, которая на 5 см ниже макушки (половина расстояния $GE = 10$ см). Следовательно, $DF = 1{,}55$ м, и зеркало должно иметь высоту всего лишь $1{,}55\text{ м} - 0{,}75\text{ м} = 80$ м. Нижний край зеркала должен находиться на 0,75 м над полом. В общем случае высота зеркала должна быть вдвое меньше роста человека, желающего разглядеть себя с головы до ног. Как этот результат зависит от расстояния до зеркала?

34.4. Изображения в сферических зеркалах

Отражающие поверхности необязательно должны быть плоскими. *Изогнутые* зеркала чаще всего бывают *сферическими*, т. е. имеют форму сферического сегмента. Сферическое зеркало называется *выпуклым*, если отражение происходит от внешней поверхности сферического сегмента, т. е. если центр зеркала находится к наблюдателю ближе, чем края зеркала. Сферическое зеркало называется *вогнутым*, если отражающей поверхностью служит внутренняя сторона сферического сегмента, т. е. если центр зеркала находится от наблюдателя дальше краев.

Чтобы понять, как в сферических зеркалах возникает изображение, рассмотрим сначала объект, расположенный на большом расстоянии от вогнутого зеркала. В этом случае лучи из каждой точки объекта падают на зеркало почти параллельно (рис. 34.8). *В случае бесконечно удаленного объекта* (хорошим приближением к которому могут служить Солнце и звезды) *лучи были бы строго параллельны*. Рассмотрим параллельные лучи, падающие на вогнутое зеркало (рис. 34.9). Для каждого из этих лучей в точке падения на зеркало выполняется закон отражения. Нетрудно видеть, что не все отраженные лучи сойдутся в одной точке. А для того, чтобы изображение было четким, лучи должны сходиться в одной точке. Следовательно, сферическое зеркало не создает такого четкого изображения, как плоское зеркало. Но если размеры

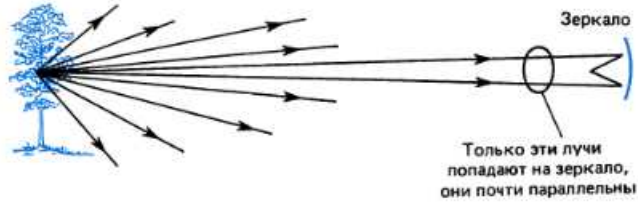


Рис. 34.8. Если расстояние до объекта велико по сравнению с размерами зеркала, то лучи почти параллельны.

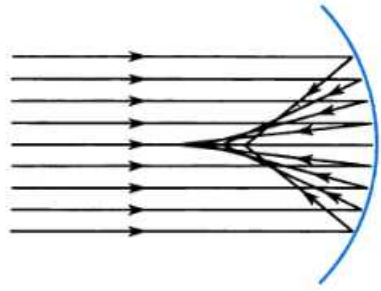


Рис. 34.9. Параллельные лучи, падающие на вогнутое сферическое зеркало, не собираются в одной точке.

сферического зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, так что лучи отражаются от него под малым углом, то они пересекутся почти в одной точке, или *фокусе* (рис. 34.10). В случае, изображенном на этом рисунке, лучи параллельны *главной оси*, которая определяется как прямая, перпендикулярная центру сферического зеркала (CA на рис. 34.10). Точка F, в которой сходятся лучи, параллельные главной оси, называется **фокальной точкой**, или фокусом зеркала. Расстояние между точкой F и центром зеркала A (длина отрезка FA) называется **фокусным расстоянием** f зеркала. Фокальную точку можно определить и как *точечное изображение объекта, расположенного бесконечно далеко на главной оси*. Например, изображение Солнца будет находиться в точке F.

Покажем теперь, что если размеры отражающей поверхности зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, то лучи действительно будут сходиться в общей точке F, и вычислим фокусное расстояние f. Рассмотрим луч, падающий на зеркало в точке B (рис. 34.10). Точка C – центр кривизны зеркала (центр сферы, сегментом которой является зеркало). Длина отрезка CB (показанного штриховой линией) равна радиусу кривизны r, и CB – нормаль к поверхности зеркала в точке B. По законам отражения и геометрии три угла, обозначенные θ, равны. Треугольник CBF равнобедренный, так как два его внутренних угла равны. Следовательно, $CF = BF$. По предположению размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, поэтому углы малы и длина

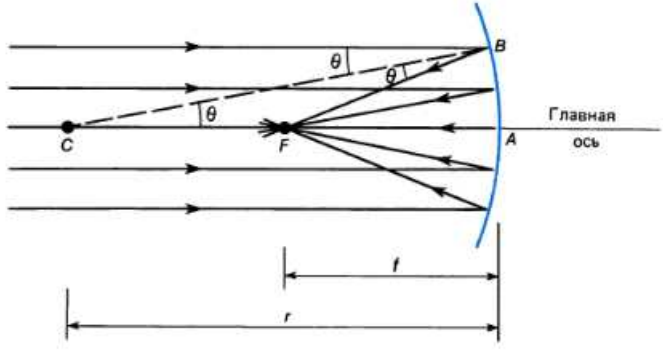


Рис. 34.10. Лучи, параллельные главной оси сферического зеркала, собираются в точке F, называемой фокусом, или фокальной точкой, если размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны r.

отрезка FB мало отличается от длины отрезка FA. В этом приближении $FA = FC$. Но $FA = f$, где f – фокусное расстояние, и $CA = 2FA = r$. Следовательно, фокусное расстояние равно половине радиуса кривизны:

$$f = \frac{r}{2}. \tag{34.2}$$

Наше рассуждение основано только на предположении о малой величине угла θ и поэтому применимо к остальным лучам. Следовательно, в приближении, когда размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, все отраженные лучи проходят через одну и ту же точку F.

Поскольку утверждение о том, что все лучи проходят через точку F, выполняется лишь приближенно, то чем больше размеры зеркала, тем хуже приближение (рис. 34.9) и тем более расплывчатым оказывается изображение. Этот «дефект» сферических зеркал называется *сферической аберрацией*. Подробнее мы остановимся на нем в гл. 35 применительно к линзам. С другой стороны, *параболическое* зеркало собирает отраженные лучи строго в фокусе. Однако параболические зеркала сложны в изготовлении, а потому стоят дороже, и для большинства целей обычно используются сферические зеркала. Мы будем рассматривать только сферические зеркала и предполагать, что их размеры малы по сравнению с радиусом кривизны, так что изображение оказывается четким и выполняется соотношение (34.2).

Как мы видели, изображение бесконечно удаленного объекта находится в фокальной точке вогнутого сферического зеркала, для которого $f = r/2$. А где будет изображение объекта, находящегося не на бесконечно большом расстоянии от зеркала? Рассмотрим сначала случай, когда объект расположен в точке O между точками F и C (рис. 34.11). Определим, где находится изображение заданной точки O' объекта. Для этого проведем несколько лучей так, чтобы угол падения на зеркало был равен углу отражения. Такое построение довольно трудоемко, но задача упрощается, если мы рассмотрим три очень простых луча. На рис. 34.11 они обозначены цифрами *1*, *2*, и *3*. Луч *1* проведен параллельно оси. Следовательно, после отражения он должен проходить через точку F (как на рис. 34.10). Луч *2* проведен через точку F. Следовательно, после отражения он должен идти параллельно оси. Луч *3* проведен через центр кривизны C, т. е. вдоль радиуса сферической поверхности. Поэтому луч *3* перпендикулярен зеркалу и после отражения возвращается к первоначальному направлению. Точка, в которой эти три луча пересекаются, есть точка I' изображения. Все остальные лучи из той же точки объекта также пройдут через ту же точку изображения. В этом мы можем убедиться с помощью рис. 34.12 и одновременно получить формулу, позволяющую определить положение изображения задан-

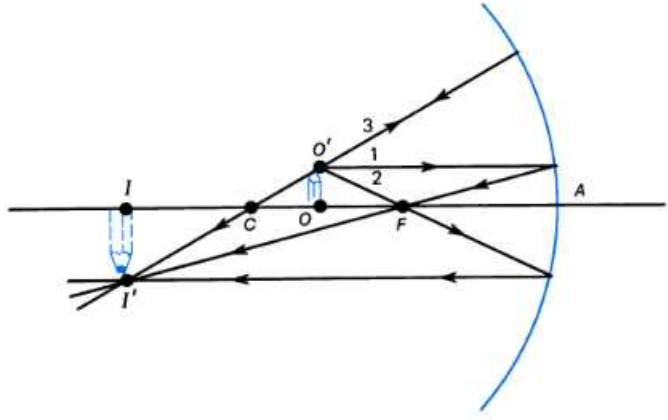


Рис. 34.11. Лучи от объекта, находящегося в точке Q, образуют изображение в точке I.

ного объекта. На рис. 34.12 произвольный луч OP выходит из точки O объекта (мы выбрали эту точку на главной оси только из соображений удобства) и проходит через точку I – изображение точки O. Так как $\gamma + \phi = 180°$ и сумма внутренних углов треугольника также равна 180°, справедливо соотношение

$$\gamma = \alpha + 2\theta.$$

Соотношение

$$\beta = \alpha + \theta$$

выводится аналогично. Исключая из этих соотношений угол θ, получаем

$$\alpha + \gamma = 2\beta.$$

Пусть s – длина дуги PA. Тогда если углы α, γ и β малы, то последнее соотношение (в радианной мере) с хорошей точностью можно аппроксимировать соотношением

$$\frac{s}{d_0} + \frac{s}{d_i} = \frac{2s}{r},$$

где d_0 – *расстояние до объекта* (расстояние от объекта до зеркала), d_i – *расстояние до изображения*, r – радиус кри-

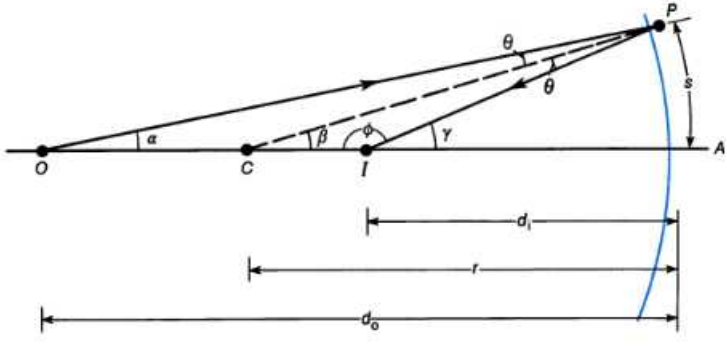


Рис. 34.12. Построение точки изображения I. К выводу уравнения зеркала.

визны зеркала. Разделив обе части равенства на s и воспользовавшись соотношением (34.2) для фокусного расстояния, получим

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}. \tag{34.3}$$

Это так называемое *уравнение зеркала*. Из формулы (34.3) следует, что d_i зависит только от d_0 и f, а не от угла α, образуемого данным лучом OP с осью. Это означает, что все лучи, выходящие из точки O, собираются в одной и той же точке I, так как размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, в силу чего все углы, образуемые лучами с осью, малы. Для зеркал бóльших размеров приближение малых углов утрачивает силу и изображение размывается, как показано на рис. 34.9. Мы вывели уравнение (34.3) для точки O на главной оси, но оно выполняется и для точек, расположенных на достаточно малом расстоянии выше или ниже оси, в силу симметрии сферического зеркала. Следовательно, изображения всех точек также расположатся поблизости и образуют полное изображение объекта (на рис. 34.11 оно показано штриховыми линиями). Поскольку свет проходит через это изображение, оно является *действительным*. Сравните его с мнимым изображением в плоском зеркале.

Из уравнения (34.3) видно, что расстояние до изображения d_i одинаково у всех лучей, исходящих из одной точки объекта. Это уравнение важно еще и потому, что позволяет определить положение изображения, если известны положение объекта и фокусное расстояние (или радиус кривизны). Таким образом, положение изображения мы можем определить двумя способами: провести лучи *1, 2, 3* (в действительности требуется провести только два луча, а третий служит для проверки), как на рис. 34.11, или воспользоваться уравнением (34.3). Разумеется, второй, аналитический способ избавляет нас от необходимости строить точный чертеж, но почти всегда бывает полезно набросать хотя бы грубый эскиз, чтобы убедиться в правильности ответа, полученного аналитическим путем.

Увеличением зеркала m называется отношение высоты изображения h_i к высоте объекта h_o. На рис. 34.13 луч $O'AI'$ отражается по закону «угол падения равен углу отражения», поэтому из подобных треугольников мы находим, что увеличение равно

$$m=\frac{h_i'}{h_o}=-\frac{d_i}{d_o}. \tag{34.4}$$

Знак минус введен в соответствии с принятыми соглашениями [чтобы не войти в противоречие, необходимо тщательно следить за знаками всех величин в уравнении (34.4)]. Эти соглашения сводятся к следующему: если

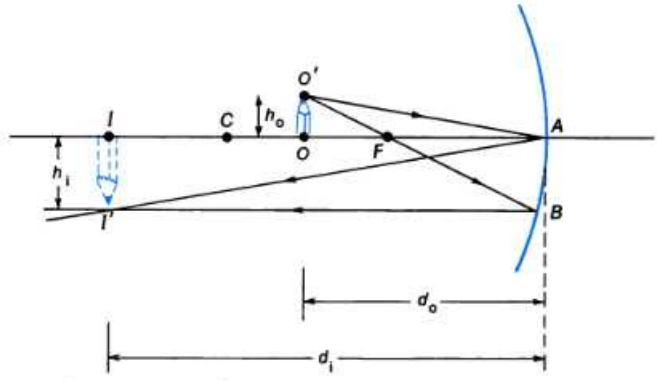


Рис. 34.13. Схема, поясняющая вывод поперечного увеличения сферического зеркала.

высоту объекта h_o считать положительной, то высота изображения h_i положительна в том случае, когда изображение прямое, и отрицательна, когда оно перевернутое; d_i и d_o положительны, если изображение и объект находятся по одну сторону от зеркала (как на рис. 34.13); когда либо изображение, либо объект находится за зеркалом, то соответствующее расстояние отрицательно (как на рис. 34.14, пример 34.3). Таким образом, увеличение (34.4) положительно для прямого изображения и отрицательно для перевернутого.

Пример 34.2. Объект высотой 1,50 см помещен на расстоянии 20,0 см от вогнутого зеркала с радиусом кривизны 30,0 см. Определите: а) где находится изображение и б) его величину.

Решение. а) Фокусное расстояние зеркала равно $f = r/2 = 15{,}0$ см. Так как $d_o = 20{,}0$ см, из уравнения (34.3) получаем

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{15{,}0\text{ см}} - \frac{1}{20{,}0\text{ см}} = 0{,}0167\text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, $d_i = 1/0{,}0167\text{ см}^{-1} = 60{,}0$ см, т. е. изображение находится на расстоянии 60,0 см от зеркала по ту же сторону от него, что и объект. б) Из уравнения (34.4) находим увеличение: $m = -60{,}0\text{ см}/20{,}0\text{ см} = -3{,}00$. Следовательно, изображение имеет высоту $(-3{,}00)\ (1{,}5\text{ см}) = -4{,}5$ см и является перевернутым.

Пример 34.3. Объект высотой 1,00 см помещен на расстоянии 10,0 см перед вогнутым зеркалом с радиусом кривизны 30,0 см. а) Начертив ход лучей, определите, где находится изображение. б) Определите положение изображения и увеличение зеркала (аналитически).

Решение. а) Так как $f = 15{,}0$ см, объект находится между зеркалом и фокальной точкой. Проведем три луча, о которых говорилось выше (рис. 34.11). Наше по-

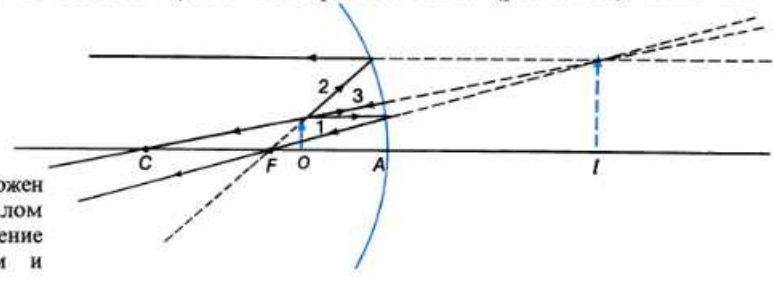


Рис. 34.14. Объект расположен между фокусом F и зеркалом (пример 34.3). Изображение находится за зеркалом и является *мнимым*.

строение показано на рис. 34.14. Отражаясь от зеркала, лучи расходятся и поэтому нигде не пересекаются. Наблюдателю кажется, что они исходят из точки позади зеркала. Таким образом, изображение находится позади зеркала и оказывается *мнимым* (почему?). б) Величину d_i найдем из уравнения (34.3), подставив в него $d_o = 10{,}0$ см:

$$\frac{1}{d_i} \sim \frac{1}{15{,}0\text{ см}} - \frac{1}{10{,}0\text{ см}} = \frac{2-3}{30{,}0\text{ см}} = -\frac{1}{30{,}0\text{ см}}.$$

Следовательно, $d_i = -30{,}0$ см. Знак минус означает, что изображение находится за зеркалом. Увеличение равно $m = -(-30{,}0\text{ см})/(10{,}0\text{ см}) = +3{,}00$. Таким образом, изображение в три раза больше объекта, а знак плюс означает, что изображение прямое.

Приведенные примеры показывают, что сферическое зеркало может увеличивать изображение, т. е. создавать изображение, превосходящее по размерам объект. (Существует древняя легенда о том, будто Юлий Цезарь следил за британским войском, установив на побережье близ Гуля кривое зеркало. Есть ли основания верить такой легенде?)

Полезно сравнить рис. 34.11 и 34.14. Нетрудно видеть, что если объект расположен к зеркалу ближе фокальной точки, как на рис. 34.14, то изображение будет мнимым, прямым и увеличенным. Именно так мы и пользуемся зеркалом для бритья или косметики: приближаем лицо к зеркалу до тех пор, пока оно не окажется ближе фокальной точки, и видим свое прямое изображение. Если же объект оказывается *за* фокальной точкой, как на рис. 34.11, то изображение будет действительным и перевернутым. Будет ли увеличение больше или меньше единицы, в данном случае зависит от положения объекта относительно точки C – центра кривизны зеркала.

Анализ, проведенный нами для случая *вогнутых* зеркал, применим и к *выпуклым* зеркалам. Даже уравнение зеркала (34.3) остается в силе для выпуклых зеркал, хотя входящие в него величины необходимо тщательно определить. На рис. 34.15, *а*, изображены параллельные лучи, падающие на выпуклое зеркало. Сферическая аберрация возникает и в этом случае, но мы предполагаем, что размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны. Отраженные лучи расходятся, но наблюдателю кажется, что они исходят из точки F позади зеркала. Это – *фокальная точка*, или *фокус*, выпуклого сферического зеркала, и расстояние от этой точки до центра зеркала называется *фокусным расстоянием* f зеркала. Нетрудно показать, что и для выпуклого сферического зеркала $f = r/2$. Мы видим, что в выпуклом зеркале возникает мнимое изображение бесконечно удаленного объекта. Независимо от того, где находится объект с отражающей

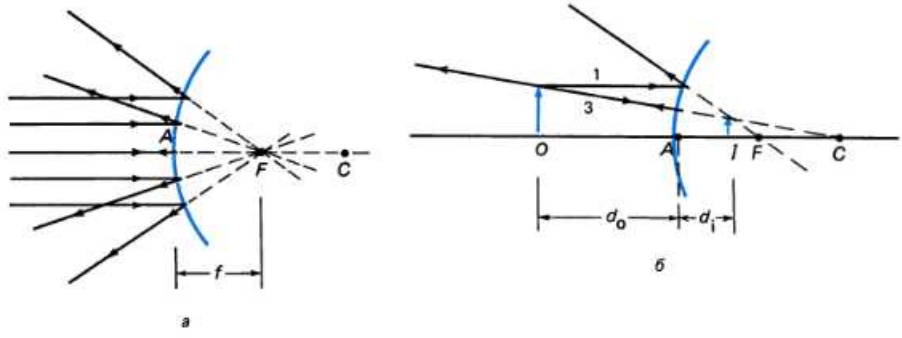


Рис. 34.15. Выпуклое зеркало: *а* – фокус находится в точке *F* за зеркалом; *б* – изображение *I* объекта, находящегося в точке *O*, мнимое, прямое и уменьшенное.

стороны зеркала, его изображение будет мнимым и прямым, как показано на рис. 34.15, *б*. Чтобы построить изображение, проведем лучи *1* и *3* по тем же правилам, что и в случае вогнутого зеркала.

Уравнение зеркала (34.3) справедливо и для выпуклых зеркал, но фокусное расстояние f, как и радиус кривизны, следует считать отрицательным. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю (см. задачу 19), равно как и доказательство справедливости формулы (34.4) для выпуклых зеркал (задача 17).

Пример 34.4. Выпуклое зеркало заднего обзора в автомашине имеет радиус кривизны 40,0 см. Определите положение изображения и увеличение, если объект расположен на расстоянии 10,0 м от зеркала.

Решение. При $r = -40{,}0$ см и $f = -20{,}0$ см из уравнения зеркала получаем

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = -\frac{1}{0{,}200\ \text{м}} - \frac{1}{10{,}0\ \text{м}} = -\frac{51{,}0}{10{,}0\ \text{м}}.$$

Таким образом, $d_i = -0{,}196$ м, или $d_i = 19{,}6$ см (за зеркалом). Увеличение равно $m = -d_i/d_o = -(-0{,}196\ \text{м})/(10{,}0\ \text{м}) = 0{,}0196 = 1/51$. Таким образом, изображение прямое и уменьшенное в 51 раз.

Правила (*соглашения о знаках*) применения уравнения (34.3) и формулы (34.4) в случае вогнутых и выпуклых зеркал сводятся к следующему. *Если объект, изображение или фокальная точка находятся с отражающей стороны зеркала* (на всех наших рисунках слева), *то расстояние до объекта, расстояние до изображения и фокусное расстояние следует считать положительными. Если же объект, изображение или фокальная точка окажутся за зеркалом* (справа на наших рисунках), *то соответствующие рас-*

стояния следует считать отрицательными[1]. *Высота объекта* h_o *и изображения* h_i *считаются положительными или отрицательными в зависимости от того, находятся объект и изображение соответственно выше или ниже главной оси.* Производя вычисления, необходимо следить за соблюдением этих соглашений о знаках.

34.5. Преломление. Закон Снелля

Когда свет переходит из одной среды в другую, на границе раздела происходит отражение части падающего на нее света. Остальная часть света проникает в новую среду. Если свет падает под углом к поверхности раздела, отличным от прямого, то на границе световой луч изменяет свое направление. Это называется **преломлением** света. На рис. 34.16, *а* показан луч, переходящий из воздуха в воду. Угол θ_1 называется *углом падения*, а θ_2 – *углом преломления*. Обратите внимание на то, что в воде луч приближается к нормали. Так происходит всякий раз, когда луч попадает в среду, где скорость света меньше. Если же свет распространяется из одной среды в другую, где скорость света больше, то он отклоняется от нормали. На рис. 34.16, *б* это показано на примере луча, переходящего из воды в воздух.

Преломлением обусловлен целый ряд широко известных оптических иллюзий. Например, наблюдателю на

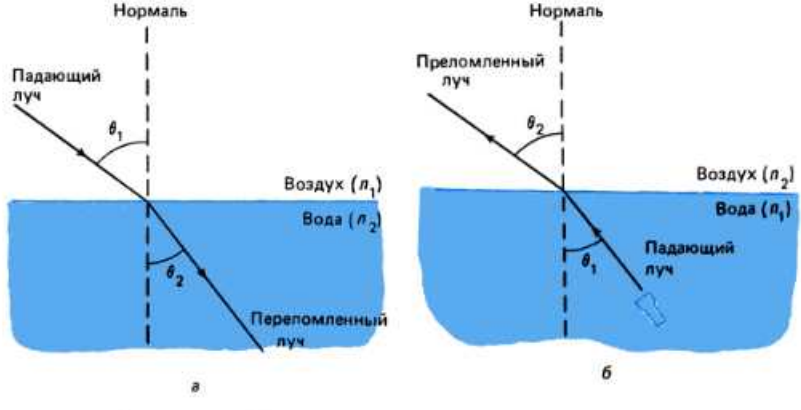
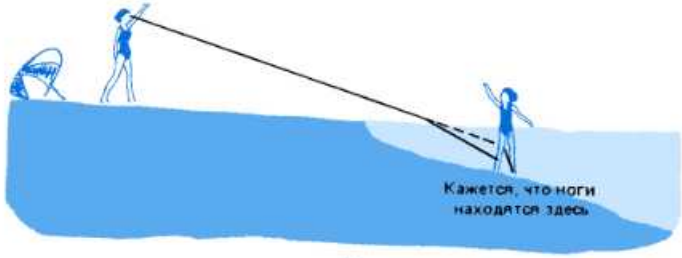


Рис. 34.16. Преломление света.

[1] В приведенных выше примерах мы рассмотрели случаи, когда d_i и f отрицательны. Расстояние d_o до любого материального объекта, разумеется, всегда положительно. Но если зеркало используется в сочетании с линзой или другим зеркалом, то изображение, формируемое первым зеркалом или линзой, становится объектом для второго зеркала. Такой «объект» может оказаться позади второго зеркала, и в этом случае величина d_o отрицательна. Эти правила соответствуют тому, что фокусное расстояние вогнутого зеркала следует считать положительным, а фокусное расстояние выпуклого зеркала – отрицательным.

а



б

Рис. 34.17. Из-за преломления света ноги человека, стоящего в воде, кажутся короче.

берегу, кажется, что у человека, зашедшего в воду по пояс, ноги стали короче (рис. 34.17, *а*). Как показано на рис. 34.17, *б*, лучи от ног стоящего в воде преломляются на поверхности. Глаз же (и мозг) наблюдателя воспринимают лучи как прямолинейные, и поэтому ступни ног кажутся расположенными выше, чем в действительности. По той же причине на частично погруженной в воду палке появляется кажущийся излом в том месте, где она входит в воду.

Угол преломления зависит от скорости света в обеих средах и от угла падения света. Аналитическое соотношение между углами θ_1 и θ_2 было установлено экспериментально около 1621 г. Виллебрордом Снеллем (1580–1626). Ныне это соотношение известно как **закон Снелля** и записывается в виде

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \qquad (34.5)$$

где θ_1 – угол падения, θ_2 – угол преломления, n_1 и n_2 – показатели преломления сред (рис. 34.16). Закон Снелля[1] является основным **законом преломления**.

Из закона Снелля ясно, что если $n_2 > n_1$, то $\theta_2 < \theta_1$. Иначе говоря, если свет попадает в среду с бóльшим показателем преломления n (где скорость света меньше), то луч приближается к нормали. Если же $n_2 < n_1$, то $\theta_2 > \theta_1$ и луч отклоняется от нормали на больший угол. Оба этих случая изображены на рис. 34.16.

Пример 34.5. Свет падает на плоскую стеклянную пластинку под углом 60° (рис. 34.18). Показатель преломления стекла 1,50. а) Чему равен угол преломления θ_a для стекла? б) Под каким углом θ_b луч выходит из пластинки?

Решение. а) Предположим, что свет

[1] Снелль в действительности не знал, что показатель преломления зависит от скорости света в среде. Только позднее было обнаружено, что показатель преломления можно записать в виде отношения скорости света в вакууме к скорости света в данной среде [формула (34.1)]. Закон Снелля можно получить на основании волновой теории света (гл. 35). Фактически именно так он и был получен в разд. 15.7: соотношение (15.17) представляет собой не что иное, как комбинацию соотношений (34.5) и (34.1).

падает на стеклянную пластинку из воздуха; тогда $n_1 = 1{,}00$ и $n_2 = 1{,}50$. Из закона Снелля (34.5) находим

$$\sin\theta_a = \frac{1{,}00}{1{,}50}\sin 60° = 0{,}577,$$

откуда $\theta_a = 35{,}2°$. б) Так как поверхности пластинки параллельны, а угол падения в данном случае совпадает с θ_a, то $\sin\theta_a = 0{,}577$. На этот раз $n_1 = 1{,}50$ и $n_2 = 1{,}00$. Следовательно, угол $\theta_b\,(=\theta_2)$ может быть найден из закона Снелля:

$$\sin\theta_b = \frac{1{,}50}{1{,}00}\sin\theta_a = 0{,}866,$$

откуда $\theta_b = 60{,}0°$. Таким образом, при прохождении через плоскопараллельную стеклянную пластинку направление луча не меняется. Это справедливо для любого угла падения. Луч лишь смещается в сторону. В этом можно убедиться, посмотрев на предмет сквозь кусок стекла (вблизи его края), а затем, чуть сдвинув голову, посмотреть на тот же предмет прямо.

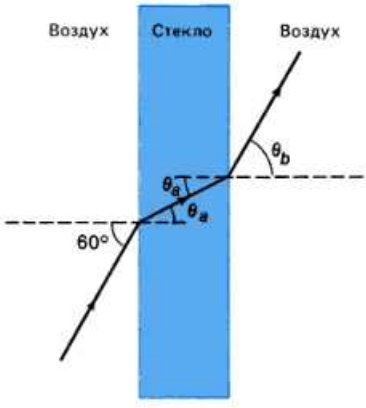


Рис. 34.18. Прохождение света через стеклянную пластинку (пример 34.5).

34.6. Полное внутреннее отражение. Волоконная оптика

Когда свет переходит из одной среды в другую, с меньшим показателем преломления (например, из воды в воздух), он отклоняется от нормали, подобно лучу *A* на рис. 34.19. При определенном угле падения угол преломления достигает 90°, и преломленный луч скользит по поверхности, как луч *B* на рис. 34.19. Угол падения, при котором это происходит, называется *критическим углом* θ_c. Из закона Снелля критический угол определяется по формуле

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}\sin 90° = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (34.6)$$

При угле падения меньше θ_c преломленный луч существу-

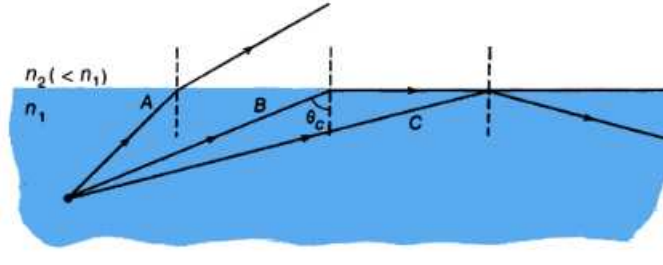


Рис. 34.19. Так как $n_2 < n_1$, световые лучи претерпевают полное внутреннее отражение при $\theta > \theta_c$ (луч *C*). При $\theta < \theta_c$ (луч *A*) отражается только часть световых лучей (не показанная на рисунке), а остальная часть преломляется.

ет, хотя, как уже упоминалось, часть света отражается на границе. Если же угол падения превышает критический угол θ_c, то, согласно закону Снелля, $\sin\theta_2$ должен превышать единицу. Но синус любого угла не может быть больше единицы; поэтому если угол падения оказывается больше критического, то преломленный луч отсутствует и *весь свет отражается* (луч *C* на рис. 34.19). Это явление получило название **полного внутреннего отражения**. Обратите внимание на то, что полное внутреннее отражение происходит только в случае, когда свет падает на границу между оптически более плотной средой и оптически менее плотной средой, т. е. при переходе в среду с меньшим показателем преломления.

Пример 34.6. Опишите, что видит ныряльщик из-под воды сквозь идеально гладкую поверхность озера или плавательного бассейна.

Решение. Для границы воздух – вода критический угол составляет

$$\sin\theta_c = \frac{1{,}00}{1{,}33} = 0{,}750,$$

т. е. $\theta_c = 49°$. Следовательно, ныряльщик увидит внешний мир в пределах круга, граница которого образует с вертикалью угол 49°. При бóльших углах (т. е. за пределами этого круга) ныряльщик увидит отражение берега, стен и дна бассейна или озера.

Во многих оптических приборах, например в биноклях, полное внутреннее отражение используется при отражении света в призмах. Преимущество состоит в том, что при этом отражается почти 100% света, тогда как даже лучшие зеркала отражают менее 100%, т. е. изображение получается более ярким. Для стекла с $n = 1{,}50$ критический угол равен $\theta_c = 41{,}8°$. Следовательно, в 45-градусных призмах свет будет испытывать полное внутреннее отражение, как это происходит в призматическом бинокле на рис. 34.20.

На полном внутреннем отражении основана вся *волоконная оптика*. Диаметр тонких стеклянных или пластиковых волокон может быть доведен до нескольких микрометров. Пучок таких тонких волокон называется *световодом*, так как свет может передаваться по нему почти без

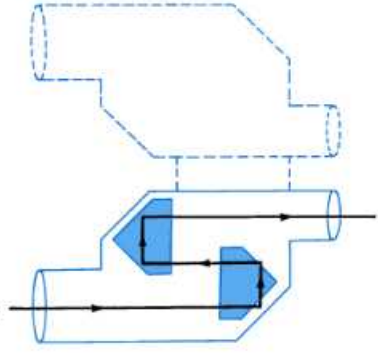


Рис. 34.20. Отражение света призмами в бинокле.

Рис. 34.21. Полное отражение света от внутренней поверхности стеклянного или прозрачного пластикового волокна.

потерь. Рис. 34.21 демонстрирует, как распространяется свет по тонкому волокну, испытывая только скользящие отражения от стенок, т. е. претерпевая полное внутреннее отражение. Даже если световоду придать сложную форму, критический угол обычно не превышается, и свет будет передан от одного торца световода до другого практически без ослабления. Этот эффект используется в декоративных светильниках и при подсветке струй в фонтанах. Световоды можно использовать для освещения труднодоступных мест, например внутренних органов человека. Они находят применение для передачи сигналов в телефонной и других видах связи. Сигнал представляет собой модулированный световой пучок (т. е. пучок переменной интенсивности) и передается с меньшими потерями, чем при передаче электрического сигнала по медным проводам. Одно из остроумных применений волоконной оптики, в частности в медицине, – это передача четких изображений (рис. 34.22). Вводя через пищевод больного световод, врач получает возможность визуально обследовать стенки желудка. По одним волокнам посылается свет для освещения желудка, по другим идет отраженный свет. На противоположном торце световода наблюдатель видит серию светлых и темных пятен (как на телевизионном экране), т. е. картину у противоположного торца световода[1]. Волокна должны быть оптически изолированы друг от друга. Обычно на них наносится вещество с меньшим показателем преломления. Волокна должны быть строго параллельны, иначе изображение не получится четким. Чем больше волокон в световоде и чем они тоньше, тем лучше разрешаются детали изображения. Такой «эндоскоп» полезен при обследовании желудка или других труднодоступных мест при подготовке больного к операции или поиске травм и повреждений без хирургического вмешательства.

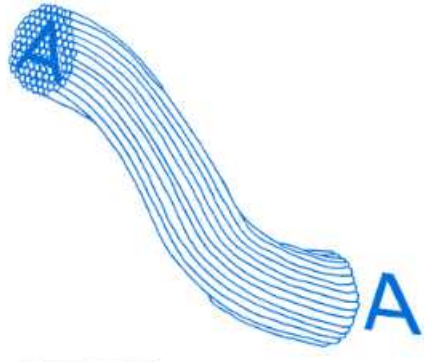


Рис. 34.22. Оптоволоконное изображение.

[1] На каждом из торцов световода имеются линзы. На торце, обращенном к объекту, линза превращает исходящие из него лучи в параллельный пучок. На торце, обращенном к наблюдателю, имеется зрительная труба, позволяющая рассмотреть изображение.

Заключение

Свет распространяется по прямолинейным траекториям, называемым *лучами*, со скоростью v, которая зависит от показателя преломления n среды: $v = c/n$, где c – скорость света в вакууме.

При отражении света от плоской поверхности угол отражения равен углу падения. Этот *закон отражения* объясняет, почему в зеркалах возникают *изображения*. При отражении в плоском зеркале возникает мнимое прямое изображение, которое имеет такие же размеры, как и объект, и расположено позади зеркала на расстоянии, совпадающем с расстоянием объекта от зеркала.

Сферические зеркала, как вогнутые, так и выпуклые, могут создавать и действительные, и мнимые изображения. *Фокальная точка*, или фокус, сферического зеркала представляет собой точечное изображение бесконечно удаленного объекта (падающие лучи параллельны) на главной оси. Расстояние от фокальной точки до центра зеркала называется *фокусным расстоянием* f и равно половине радиуса кривизны r зеркала ($f = r/2$). Расстояние до объекта d_o связано с расстоянием до изображения d_i и фокусным расстоянием f *уравнением зеркала*: $1/d_o + 1/d_i = 1/f$. Отношение высоты изображения к высоте объекта называется линейным (поперечным) увеличением и равно $m = h_i/h_o = -d_i/d_o$.

При переходе света из одной прозрачной среды в другую происходит преломление световых лучей. *Закон преломления (закон Снелля)* утверждает, что $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, где n_1 и θ_1 – соответственно показатель преломления и угол, образуемый с нормалью к поверхности падающим лучом, n_2 и θ_2 – аналогичные величины для преломленного луча.

При падении на границу со средой с бóльшим показателем преломления луч претерпевает *полное внутреннее отражение*, если угол падения θ_1 таков, что, согласно закону Снелля, $\sin\theta_2 > 1$ (θ_2 – угол преломления). Это происходит, если θ_1 превышает критический угол θ_c, задаваемый соотношением $\sin\theta_c = n_2/n_1$.

Вопросы

1. Поясните, почему Луна должна иметь шероховатую, а не зеркально гладкую поверхность.
2. Глядя на себя в высокое плоское зеркало, вы видите одну и ту же часть своей фигуры независимо от того, как близко вы стоите от зеркала (попробуйте убедиться в этом). Начертив ход лучей, объясните, почему так происходит.
3. Объясните, почему отражение Луны на поверхности моря, покрытого рябью, кажется удлиненным.
4. Если бы идеально плоское зеркало отражало 100% падающего на него света, можно ли было бы увидеть поверхность такого зеркала?
5. Объясните, почему плоское зеркало меняет местами правое и левое, но не переставляет верх и низ.
6. По преданию Архимед сжег весь римский флот в гавани Сиракуз, сфокусировав солнечные лучи огромным сферическим зеркалом. Насколько обоснованна такая легенда?
7. Построив чертеж, докажите, что увеличение вогнутого зеркала меньше единицы, если объект расположен от зеркала дальше центра кривизны C, и больше единицы, если объект находится ближе C.
8. Обязательно ли действительное изображение в вогнутом зеркале будет перевернутым?

9. Глядя в вогнутое зеркало, вы не сможете увидеть свое перевернутое изображение до тех пор, пока не окажетесь за центром кривизны C зеркала. Однако перевернутое изображение других объектов, расположенных между точками C и F, можно видеть (рис. 34.11). Объясните. (Подсказка: действительное изображение можно наблюдать только в том случае, когда глаз находится за изображением, с тем чтобы оно могло образоваться.)
10. Используя те же правила, по которым на рис. 34.11 были проведены три луча, проведите луч *2* на рис. 34.15, *б*.
11. Чему равно фокусное расстояние плоского зеркала?
12. Выполняется ли для плоского зеркала уравнение зеркала (34.3)? Объясните.
13. Чему равно увеличение плоского зеркала?
14. Как можно было бы определить скорость света в твердом прямоугольном прозрачном объекте?
15. Широкий пучок параллельных лучей света, входя под углом в воду, расширяется. Объясните.
16. Объясните, почему в жаркую погоду на шоссе на некотором расстоянии иногда возникает мираж перевернутых машин. (Подсказка: рассмотрите, как изменяется с температурой показатель преломления воздуха.)
17. Чему равен угол преломления при нормальном падении луча на границу двух сред?
18. Какой кажется глубина с бортика плавательного бассейна или с берега озера – больше или меньше истинной? Объясните. Как кажущаяся глубина зависит от угла зрения? (Начертите ход лучей.)
19. Начертите ход лучей и объясните, почему палка, частично погруженная в воду, кажется изломанной в том месте, где она входит в воду.
20. Что позволяет «увидеть» круглую каплю воды на столе, если вода прозрачна и бесцветна?
21. Может ли луч света в воздухе испытать полное внутреннее отражение, падая на гладкую поверхность воды под прямым углом?
22. Если вы смотрите из-под воды в бассейне на предмет, находящийся в воздухе, то будут ли размеры предмета казаться такими же, как и в случае, когда вы смотрите не на него, находясь в воздухе? Объясните.

Задачи

Раздел 34.2

1. (I) Чему равна скорость света: а) в этиловом спирте; б) в люците?
2. (I) Скорость света во льду равна $2{,}29 \cdot 10^8$ м/с. Чему равен показатель преломления льда?
3. (I) Нить обычной электрической лампы накаливания испускает цуги световых волн продолжительностью около 10^{-8} с. Чему равна протяженность такого цуга в пространстве?
4. (I) Сколько времени затрачивает испускаемый Солнцем свет на пути к Земле, если расстояние равно $1{,}49 \cdot 10^8$ км?
5. (I) Ближайшая к нам звезда (отличная от Солнца) находится на расстоянии 4,2 светового года, т. е. свет от этой звезды доходит до нас через 4,2 года. Чему равно это расстояние в метрах?
6. (II) а) Если требуется измерить скорость света в вакууме с такой же точностью, как и лучшее из значений, приведенное в разд. 34.2, то такую погрешность может иметь показатель преломления, если измерение скорости света в действительности производится в воздухе? б) Если для воздуха $n = 1{,}00030 \pm 0{,}000010$, то к какой погрешности в величине c это приведет?
7. (II) С какой минимальной угловой скоростью должно вращаться восьмигранное зеркало в установке Майкельсона (см. рис. 34.2), с тем чтобы в глаз наблюдателя попадал свет от соседних граней зеркала?

Раздел 34.3

8. (I) Предположим, что вы хотите сфотографировать себя в зеркале с расстояния 2,2 м. Какое расстояние следует установить на объективе фотоаппарата?
9. (II) Пусть два плоских зеркала образуют прямой угол, как на рис. 34.23. Взглянув в это двойное зеркало, вы увидите себя таким, каким вас видят другие, вместо обращенного изображения в обычном зеркале. Начертите ход лучей и объясните принцип действия двойного зеркала.
10. (II) Человек, глаза которого находятся на

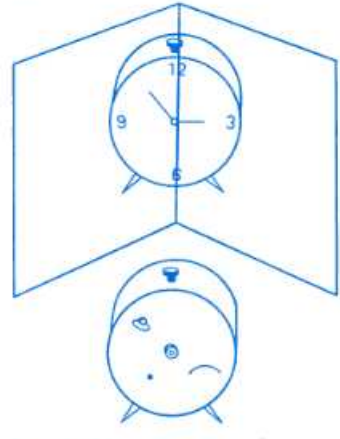


Рис. 34.23. К задаче 34.9.

высоте 1,48 м над полом, стоит на расстоянии 2,40 м перед плоским вертикальным зеркалом, нижний край которого проходит на высоте 40 см над полом. На каком расстоянии от основания стены, на которой висит зеркало, находится ближайшая точка, которую видно в зеркало?

11. (II) Предположим, что вы находитесь на расстоянии 60 см от плоского зеркала. Какова площадь участка зеркала, в котором отражаются лучи, идущие от кончика вашего носа и попадающие в глаз, если диаметр зрачка равен 5,5 мм?

12. (II) Докажите, что если два плоских зеркала составляют угол ϕ, то в результате последовательного отражения от этих зеркал луч отклонится на угол 2ϕ независимо от угла падения. Предполагается, что $\phi < 90°$ и происходят только два отражения – по одному от каждого зеркала.

13. (III) Предположим, что к двум зеркалам на рис. 34.23 снизу приставлено третье зеркало; плоскость каждого из зеркал перпендикулярна плоскости двух остальных зеркал. а) Докажите, что любой луч, падающий на подсобный отражатель, троекратно отразившись, будет распространяться в первоначальном направлении. б) Что происходит, когда луч отражается только дважды?

Раздел 34.4

14. (I) Чему равен радиус вогнутой отражающей поверхности, которая фокусирует пучок параллельных лучей в точку на расстоянии 18,9 см перед собой?

15. (I) На каком расстоянии от выпуклого зеркала (радиусом 24,0 см) должен находиться объект, чтобы его изображение оказалось бесконечно удаленным?

16. (I) Вы пытаетесь разглядеть себя в посеребренном шаре диаметром 56,0 см, находясь от него на расстоянии 2,30 м. Где будет ваше изображение? Каким будет оно – действительным или мнимым? Сможете ли вы отчетливо увидеть себя?

17. (II) Начертив ход лучей, докажите, что увеличение m выпуклого зеркала, как и вогнутого зеркала, равно $m = -d_i/d_o$. (Подсказка: рассмотрите луч, идущий от верхней точки объекта и отражающийся в центре зеркала.)

18. (II) Зубному врачу требуется маленькое зеркало, которое на расстоянии 2,10 см от зуба давало бы прямое 5,5-кратное увеличение. Какое зеркало следует для этого взять, с каким радиусом кривизны?

19. (II) Покажите, что уравнение зеркала (34.3) остается в силе и для выпуклого зеркала, если фокусное расстояние f считать отрицательным.

20. (II) Пользуясь уравнением зеркала, докажите, что увеличение вогнутого зеркала меньше единицы, если объект расположен от зеркала дальше центра кривизны C ($d_o > r$), и больше единицы, если объект расположен ближе центра кривизны C ($d_o < r$).

21. (II) Объект высотой 2,40 см находится на расстоянии 22,0 см от сферического зеркала, в котором возникает мнимое изображение высотой 3,20 см. а) Что это за зеркало? б) Где находится изображение? в) Чему равен радиус кривизны зеркала?

22. (II) Увеличение объекта, находящегося на расстоянии 4,0 м от выпуклого зеркала, составляет 0,35. Чему равно фокусное расстояние этого зеркала?

23. (II) а) Плоское зеркало можно рассматривать как предельный случай сферического. В каком смысле следует понимать этот предел? б) Выведите уравнение, связывающее в этом предельном случае расстояние до изображения с расстоянием до объекта. в) Определите в том же пределе увеличение плоского зеркала. Согласуются ли ответы, полученные вами в пп. «б» и «в», с тем, что говорилось о плоских зеркалах в разд. 34.3?

24. (II) Чему равен радиус вогнутого зеркала, обеспечивающего 1,6-кратное увеличение лица на расстоянии 30 см от него?

25. (II) Человек ростом 1,58 м, находясь на расстоянии 4,50 м от выпуклого зеркала, замечает, что его изображение вдвое меньше, чем при отражении в плоском зеркале на том же расстоянии. Чему равен радиус кривизны выпуклого зеркала? (Предположите, что $\sin\theta \approx \theta$.)

26. (III) Короткий тонкий объект (типа короткого куска провода) длиной l расположен вдоль главной оси сферического зеркала. Докажите, что длина его изображения равна $l' = m^2 l$, т. е. *«продольное» увеличение* равно $-m^2$, где m – увеличение согласно формуле (34.4). Почему перед m^2 стоит знак минус?

Раздел 34.5

27. (I) Ныряльщик светит фонарем под водой вверх под углом 23,0° к нормали. Под каким углом свет выходит из воды?

28. (I) Под водой солнечные лучи образуют с нормалью угол 50°. Под каким углом к горизонту стоит солнце?

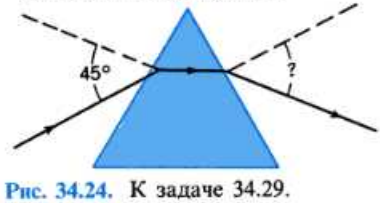


Рис. 34.24. К задаче 34.29.

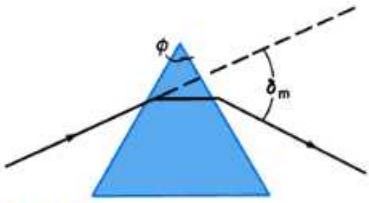


Рис. 34.25. К задаче 34.41.

29. (II) Свет падает на равностороннюю треугольную призму из крона под углом 45,0° к одной из граней (рис. 34.24). Вычислите угол, под которым свет выходит из противоположной грани. Показатель преломления крона $n = 1{,}56$.

30. (II) Яркий источник света находится под поверхностью воды в плавательном бассейне на глубине 2,50 м на расстоянии 1,45 м от бортика бассейна. Под каким углом свет выходит из воды у этого бортика? Предполагается, что бассейн залит водой до краев.

31. (II) Докажите в общем случае, что при падении пучка света на однородную пластину прозрачного вещества, как это изображено на рис. 34.18, направление пучка за пластиной параллельно направлению падающего пучка независимо от угла падения θ и толщины пластины.

32. (II) Аквариум с плоскими стенками из стекла с показателем преломления 1,58 заполнен водой. Пучок света падает снаружи на стенку аквариума под углом 43,7° к нормали. Под каким углом свет падает в стекло, а затем в воду? Что было бы, если бы свет попадал непосредственно в воду?

33. (II) При прохождении света через призму угол между преломленным и падающим лучами называется углом отклонения δ (рис. 34.25). Этот угол минимален, когда луч проходит через призму симметрично, т.е. в случае призмы, имеющей в сечении форму равнобедренного треугольника, луч проходит параллельно ее основанию. Докажите, что минимальный угол отклонения δ_m связан с показателем преломления призмы n соотношением

$$n = \frac{\sin[(\phi + \delta_m)/2]}{\sin(\phi/2)},$$

где ϕ – угол при вершине призмы.

34. (II) Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку (рис. 34.18). Докажите, что если угол падения θ мал, то смещение луча составляет $d = t\theta(n-1)/n$, где t – толщина стеклянной пластинки (угол θ измеряется в радианах).

35. (III) *Принцип Ферма* утверждает, что «свет распространяется из одной точки в другую по пути, на прохождение которого затрачивается наименьшее время по сравнению с другими близкими путями». Выведите из принципа Ферма: а) закон отражения ($\theta_i = \theta_r$); б) закон преломления (закон Снелля). (Подсказка: выберите две подходящие точки, такие, чтобы свет по пути из одной из них в другую претерпевал отражение или преломление; изобразите ход лучей между выбранными точками; напишите выражение для времени, которое будет затрачено светом при прохождении произвольного пути; продифференцируйте полученное выражение по времени.)

Раздел 34.6

36. (I) Критический угол для поверхности раздела жидкость – воздух равен 57°. Чему равен показатель преломления жидкости?

37. (II) Свет от источника, находящегося на глубине 6,0 см ниже поверхности жидкости, падает на эту поверхность на расстоянии 4,0 см от точки, находящейся непосредственно над источником. Что можно сказать о показателе преломления жидкости, если в данном случае имеет место полное внутреннее отражение?

38. (II) Торцы цилиндрического стеклянного стержня ($n = 1{,}54$) перпендикулярны его боковой поверхности. Докажите, что луч света, входящий в торец под любым углом, претерпевает на боковой поверхности стержня полное внутреннее отражение. Предполагается, что стержень находится в воздухе. Что было бы, если бы стержень находился в воде?

39. (II) Предположим, что луч падает на левую грань призмы на рис. 34.24 под углом 45°. Что можно сказать о показателе преломления призмы, если угол при ее вершине равен $\phi = 75°$?

40. (II) а) Каким должен быть минимальный показатель преломления стеклянной или пластмассовой призмы бинокля (рис. 34.20), чтобы полное внутреннее отражение происходило при 45°? б) Будет ли бинокль работать, если его призмы погрузить в воду? Предполагается, что $n = 1{,}50$. в) Каким должен быть минимальный показатель преломления n, если призмы погружены в воду?

41. (II) Угол при вершине призмы $\phi = 70°$ (рис. 34.25). При каком минимальном угле падения луч будет выходить из противоположной грани ($n = 1{,}58$)?

35 Линзы и оптические приборы

Законы отражения и в особенности преломления света лежат в основе принципа действия многих оптических приборов. В этой главе, опираясь на геометрическую оптику, с которой мы познакомились в предыдущей главе, рассмотрим действие линз и ряда других оптических приборов – от лупы до телескопов, микроскопов и человеческого глаза.

35.1. Преломление на сферической поверхности

Прежде чем приступить в следующем разделе к изучению линз, рассмотрим, как происходит преломление лучей на сферической поверхности прозрачной среды, такой, например, как одна из поверхностей линзы. Для общности предположим, что объект находится в среде с показателем преломления n_1 и лучи, исходящие из каждой его точки, могут попадать в среду с показателем преломления n_2. Пусть R – радиус кривизны сферической границы этих сред и C – центр сферы (рис. 35.1). Докажем, что все лучи, выходящие из точки O объекта, фокусируются в одной точке I изображения, если при этом ограничиться лучами, составляющими малый угол с осью и друг с другом (такие лучи называются **параксиальными**). Для этого рассмотрим отдельный луч, выходящий из точки O (рис. 35.2). По закону Снелля [соотношение (34.5)]

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

Мы предполагаем, что углы θ_1, θ_2, α, β и γ малы, поэтому $\sin\theta \approx \theta$ (в радианах), и закон Снелля можно приближенно записать в виде

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2.$$

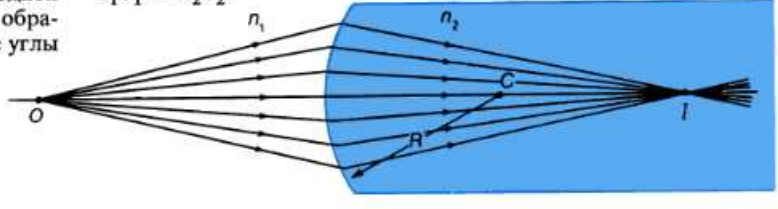


Рис. 35.1. Лучи из точки O на объекте сферическая граница между двумя прозрачными средами собирает в одной точке I, если эти лучи образуют достаточно малые углы с осью ($n_2 > n_1$).

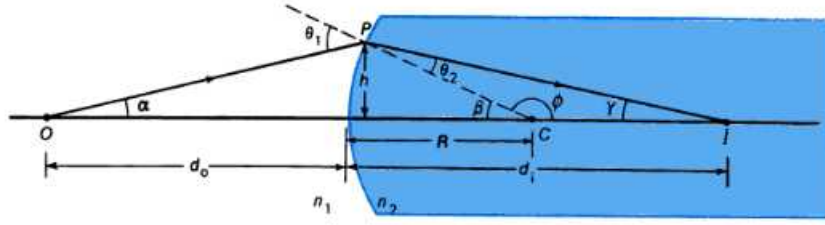


Рис. 35.2. Пояснительный чертеж к доказательству того, что все параксиальные лучи из точки O собираются в одной и той же точке I ($n_2 > n_1$).

Кроме того, $\beta + \phi = 180°$ и $\theta_2 + \gamma + \phi = 180°$; поэтому

$$\beta = \gamma + \theta_2.$$

Аналогично в треугольнике OPC

$$\theta_1 = \alpha + \beta.$$

Используя эти три соотношения, получаем

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta.$$

Так как мы рассматриваем только случай малых углов, можно записать приближенные равенства

$$\alpha = \frac{h}{d_0}, \quad \beta = \frac{h}{R}, \quad \gamma = \frac{h}{d_i},$$

где d_0 – расстояние до объекта, d_i – расстояние до изображения, h – высота (рис. 35.2). Подставляя эти соотношения в предыдущее равенство, получим после деления на h

$$\frac{n_1}{d_0} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \tag{35.1}$$

Мы видим, что при заданном расстоянии до объекта d_0 расстояние до изображения d_i не зависит от угла, образуемого лучом с осью. Следовательно, все параксиальные лучи сходятся в одной и той же точке I. Разумеется, это верно только для лучей, составляющих малый угол с осью и друг с другом. Приближение малых углов эквивалентно предположению о том, что размеры преломляющей поверхности малы по сравнению с ее радиусом кривизны, так что преломляются только параксиальные лучи. Если это предположение неверно, то лучи не будут собираться в одной точке – возникает сферическая аберрация, как это происходило в случае зеркала (рис. 34.9), и изображение окажется размытым. (Подробнее мы рассмотрим сферическую аберрацию в разд. 35.7.)

При выводе уравнения (35.1) мы пользовались чертежом, изображенным на рис. 35.2, на котором лучи падают на выпуклую часть сферической поверхности. Но это уравнение справедливо и для вогнутой поверхности, в чем нетрудно убедиться, взглянув на рис. 35.3, если ввести следующие соглашения:

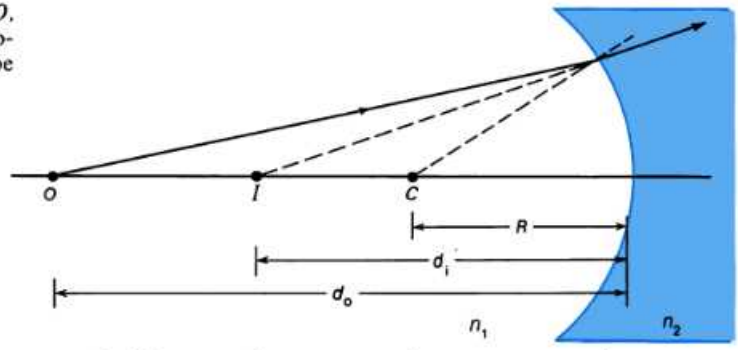


Рис. 35.3. Лучи из точки O, преломляясь на вогнутой поверхности, образуют мнимое изображение ($n_2 > n_1$).

1. У выпуклой поверхности (центр кривизны C и источник света находятся по разные стороны от поверхности) радиус кривизны R положителен. У вогнутой поверхности (центр кривизны C и источник света находятся по одну сторону от поверхности) радиус кривизны R отрицателен.
2. Для расстояния до изображения d_i справедливо аналогичное соглашение: оно положительно, если источник света и изображение находятся по разные стороны от преломляющей поверхности, и отрицательно, если источник света и изображение находятся по одну сторону от поверхности.
3. Расстояние до объекта положительно, если с той же стороны падает свет (это нормальный случай, однако при наличии нескольких преломляющих поверхностей ситуация может оказаться иной), и отрицательно в противном случае.

Для случая, изображенного на рис. 35.3 (вогнутая преломляющая поверхность), R и d_i следует подставлять в уравнение (35.1) со знаком минус. Заметим, что изображение в этом случае будет мнимым.

Пример 35.1. Человек смотрит вертикально вниз на озеро глубиной 4,0 м. Какой ему покажется глубина озера?

Решение. Ход лучей изображен на рис. 35.4. Точка O находится на дне озера. Из-за расхождения лучей они кажутся исходящими из точки I (изображения). Расстояние до объекта $d_0 = 4{,}0$ м; для плоской поверхности радиус кривизны равен $R = \infty$. Подставляя в уравнение (35.1), получаем

$$\frac{1{,}33}{4{,}0\text{ м}} + \frac{1{,}00}{d_i} = \frac{(1{,}00 - 1{,}33)}{\infty} = 0,$$

откуда $d_i = -(4{,}0\text{ м})/(1{,}33) = -3{,}0$ м. Таким образом, кажущаяся глубина озера составляет лишь три четверти его истинной глубины. (При углах падения, отличных от прямого, результат будет иным.) Знак минус означает, что точечное изображение I и точка O находятся по одну сторону преломляющей поверхности и что изображение мнимое.

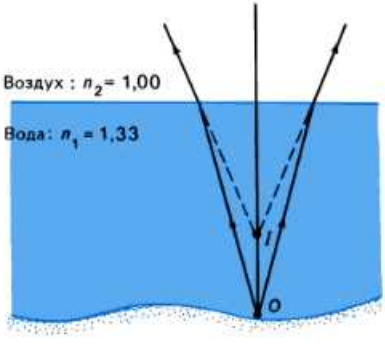


Рис. 35.4. К примеру 35.1.

35.2. Тонкие линзы

Тонкая линза служит наиболее важным и простым оптическим устройством. Создание оптических приборов с использованием линз началось в XVI и XVII вв., хотя упоминания об очках встречаются в рукописях XIII в. Тонкие линзы обычно бывают круглыми, и каждая из поверхностей представляет собой сегмент сферы. (Хотя существуют также линзы и с цилиндрическими поверхностями, мы сосредоточим внимание на сферических линзах.) Ограничивающая линзу поверхность может быть вогнутой, выпуклой или плоской (рис. 35.5). Значение линз обусловлено тем, что они позволяют получать изображения объектов, и их действие можно проанализировать на основе результатов предыдущего раздела, применяя их к ограничивающим линзу поверхностям. Прежде чем приступить к такому рассмотрению, остановимся на некоторых общих свойствах линз.

Рассмотрим лучи, параллельные оси двояковыпуклой линзы, поперечное сечение которой изображено на рис. 35.6,*а*. Пусть линза изготовлена из стекла или прозрачной пластмассы, и поэтому ее показатель преломления превышает показатель преломления воздуха. По закону Снелля на обеих поверхностях линзы каждый луч преломляется в направлении оси (нормали к поверхностям линзы показаны для верхнего луча штриховыми линиями). Если на тонкую линзу падают лучи, параллельные главной оси, то они соберутся в точке, называемой *фокальной точкой*, или *фокусом F*. Для линзы, ограниченной сферическими поверхностями, такое утверждение не вполне справедливо, однако оно почти верно (т.е. параллельные лучи фокусируются в очень малой области, почти точке), если диаметр линзы мал по сравнению с радиусами кривизны поверхностей линзы. Такому условию удовлетворяют **тонкие линзы**, т.е. линзы, толщина которых значительно меньше их диаметра. Мы будем рассматривать только тонкие линзы.

Поскольку лучи от удаленного объекта, по существу, параллельны (рис. 34.8), можем утверждать, что *фокальная точка служит точечным изображением находящегося на главной оси бесконечно удаленного объекта*. Расстояние от фокальной точки до центра линзы называется *фокусным*

Рис. 35.5 Типы линз: *а* – собирающие линзы; *б* – рассеивающие линзы.

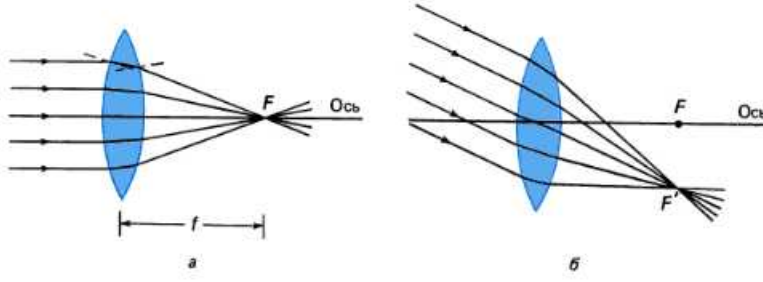


Рис. 35.6. Параллельные лучи сходятся в главном фокусе собирающей линзы.

расстоянием f. Так как линза по предположению тонкая, величину *f*, не внося погрешности, можно измерять от центра или края любой из поверхностей линзы. Линзу можно перевернуть, с тем чтобы свет падал на нее с противоположной стороны. Фокусное расстояние, как мы вскоре убедимся, одинаково с обеих сторон, даже если различна кривизна ограничивающих линзу поверхностей. Если параллельные лучи падают на линзу под некоторым углом (рис. 35.6, *б*), то они фокусируются в точке *F'*. Плоскость, в которой расположены все такие точки типа *F* и *F'*, называется *фокальной плоскостью* линзы.

Любые линзы, более толстые в центре, чем по краям, будут сводить параллельные лучи в точку. Такие линзы называются *собирающими* (рис. 35.5, *а*). Линзы, которые в центре тоньше, чем по краям (рис. 35.5, *б*), называются *рассеивающими*: после прохождения через них параллельные лучи расходятся (рис. 35.7). *Фокальной точкой*, или *фокусом*, *F* рассеивающей линзы называется точка, из которой, как кажется, исходит после преломления параллельный пучок падающих лучей (рис. 35.7). Расстояние от точки *F* до линзы называется фокусным расстоянием (как в случае собирающей линзы). Изображение данного объекта линзой можно построить, начертив лучи, исходящие из каждой точки объекта. В действительности нам понадобятся только три специально выбранных луча, изображенных на рис. 35.8. Эти три луча, исходящие из одной точки объекта, проведены в предположении, что толщина линзы бесконечно мала (этим объясняется изображение резкого излома луча внутри линзы). Луч *1* проведен параллельно оси. Следовательно, преломившись в линзе, он пройдет через фокальную точку *F* за линзой. Луч *2* проведен через фокальную точку *F'*, расположенную по ту

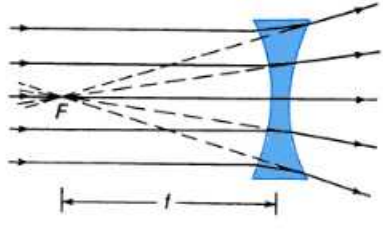


Рис. 35.7. Рассеивающая линза.

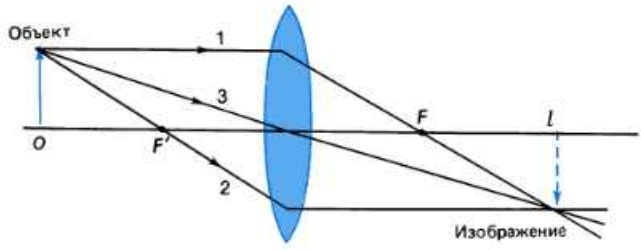


Рис. 35.8. Построение изображения I с помощью лучей (собирающая линза).

же сторону от линзы, что и объект. Луч *3* проведен прямо через центр линзы, где обе поверхности, по существу, параллельны, поэтому этот луч выйдет из линзы под первоначальным углом. Согласно рис. 34.5, луч должен бы немного сместиться в сторону, но, так как мы считаем линзу тонкой, луч *3* изображен без смещения. В действительности для нахождения изображения достаточно провести любые два из этих трех лучей (на месте пересечения и находится изображение). Третий луч может служить для проверки правильности построения.

Таким способом мы можем найти изображение одной точки объекта (верхнего конца стрелки на рис. 35.8). Изображения всех остальных точек объекта можно найти аналогично. Все вместе они образуют изображение объекта. Поскольку в рассматриваемом случае лучи проходят через изображение, оно будет *действительным*.

С помощью тех же трех лучей можно определить, где находится изображение, создаваемое рассеивающей линзой (рис. 35.9). Обратите внимание на то, что луч *1*, параллельный оси, не проходит через фокальную точку F за линзой. Он как бы выходит из фокальной точки F' перед линзой (штриховая линия). Луч *2*, направленный в точку F, в результате преломления линзой оказывается параллельным оси. Все три преломленных луча, как кажется, исходят из точки слева от линзы. Это – изображение I. Так как лучи не проходят через эту точку, изображение оказывается *мнимым*.

Выведем теперь уравнение, которое связывает расстояние до изображения с расстоянием до объекта и свойствами тонкой линзы. Рассмотрим линзу на рис. 35.10, толщина которой в центре равна t. Лучи из точки O объекта проходят через линзу и фокусируются в точке I изображения. Будем считать лучи параксиальными, хотя

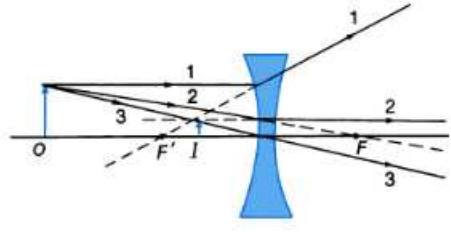


Рис. 35.9. Построение изображения I с помощью лучей (рассеивающая линза).

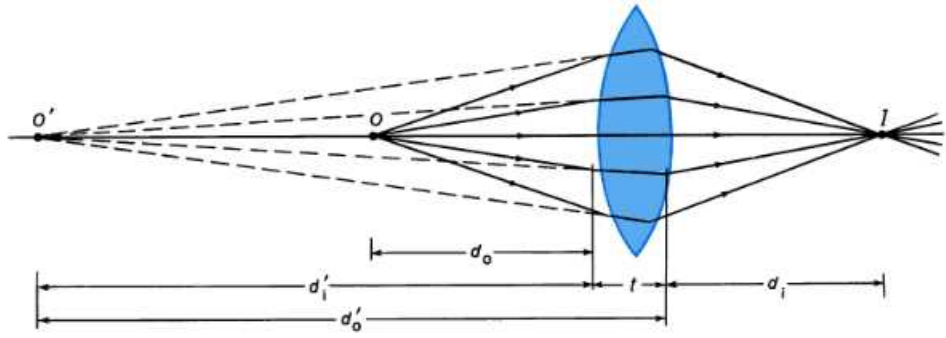


Рис. 35.10. К выводу уравнения линзы.

для наглядности углы, изображенные на чертеже, не малы. Для передней поверхности линзы уравнение (35.1) приобретает вид

$$\frac{1}{d_o}+\frac{n}{d_i'}=\frac{n-1}{R_1},$$

где R_1 – радиус кривизны этой поверхности, $n_1 = 1$ для воздуха и $n_2 = n$ для линзы. Расстояния d_o и d_i' (расстояние до изображения, создаваемого передней поверхностью) измеряются от передней поверхности линзы. Для случая, изображенного на рис. 35.10, величина d_i' отрицательна (мнимое изображение находится в точке O'). Применим теперь уравнение (35.1) ко второй поверхности. Лучи падают на вторую поверхность, как если бы они исходили из точки O'. Расстояние от объекта до второй поверхности равно $d_o' = -d_i' + t$; знак минус необходим, поскольку $d_i' < 0$. Таким образом уравнение (35.1) приобретает вид

$$\frac{n}{-d_i'+t}+\frac{1}{d_i}=\frac{1-n}{R_2},$$

где R_2 – радиус кривизны второй поверхности (отрицательный для случая, изображенного на рис. 35.10). Предположим, что толщина t линзы мала по сравнению с d_o, d_i, d_i' и R, и положим $t = 0$. Тогда, исключив d_i' из приведенных выше уравнений, получим

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). \qquad (35.2)$$

Это соотношение и требовалось получить. Оно связывает расстояние до объекта d_o с расстоянием до изображения d_i (расстоянием до окончательного изображения, создаваемого линзой) и с параметрами линзы – радиусами кривизны R_1 и R_2 соответственно передней и задней поверхностей линзы и ее показателем преломления n. Разумеется, соотношение (35.2) выполняется только для параксиальных лучей и для очень тонких линз. Обратите внимание на то, что d_i не зависит от величины углов, образуемых лучами с осью и между собой; именно поэ-

тому все параксикальные лучи собираются в точку F. Для непараксиальных лучей и более толстых линз изображение может оказаться нерезким (о чем подробнее будет рассказано в дальнейшем).

Если объект удален на бесконечность ($d_o = \infty$), то расстояние до изображения совпадает с фокусным расстоянием: $d_i = f$. Уравнение (35.2) при этом принимает вид

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{35.3}$$

Оно известно под названием **уравнения шлифовщика линз**, так как связывает фокусное расстояние любой линзы с ее показателем преломления и радиусами кривизны ее поверхностей. Обратите внимание на то, что (как уже говорилось в разд. 35.1) радиус кривизны считается положительным, если свет падает на выпуклую поверхность, и отрицательным, если свет падает на вогнутую поверхность. Обратите внимание на то, что, если линзу перевернуть так, что свет будет падать на нее с противоположной стороны, радиусы R_1 и R_2 в уравнении (35.3) поменяются ролями, но фокусное расстояние f остается прежним. Следовательно, фокальная точка F по обе стороны расположена в одном и том же месте, как это утверждалось прежде.

Пример 35.2. У плоско-вогнутой линзы из люцита одна поверхность плоская, а радиус кривизны другой равен $R = 18{,}4$ см. Чему равно фокусное расстояние такой линзы?

Решение. Из табл. 34.1 находим для люцита $n = 1{,}51$. Плоская поверхность имеет бесконечно большой радиус кривизны. Если обозначить его R_1, то $1/R_1 = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{f} = (1{,}51 - 1{,}00)\left(-\frac{1}{18{,}4\text{ см}}\right),$$

откуда $f = (-18{,}4\text{ см})/(0{,}51) = -36{,}0$ см, т. е. линза будет рассеивающей.

Комбинируя уравнения (35.3) и (35.2), получаем

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}. \tag{35.4}$$

Это – так называемое **уравнение линзы**. Если фокусное расстояние линзы известно, то оно позволяет легко вычислить расстояние до изображения при любом расстоянии до объекта. Уравнение линзы – одно из наиболее широко используемых уравнений геометрической оптики.

Геометрические построения часто оказываются полезными, и мы воспользуемся ими сейчас для иллюстрации правильности вывода уравнений линзы и увеличения линзы. Рассмотрим два луча, изображенных на рис. 35.11, *а* для собирающей линзы (которая предполагается очень тонкой); h_o и h_i – высота соответственно объекта и изображения, d_o и d_i – расстояния от линзы соответственно до

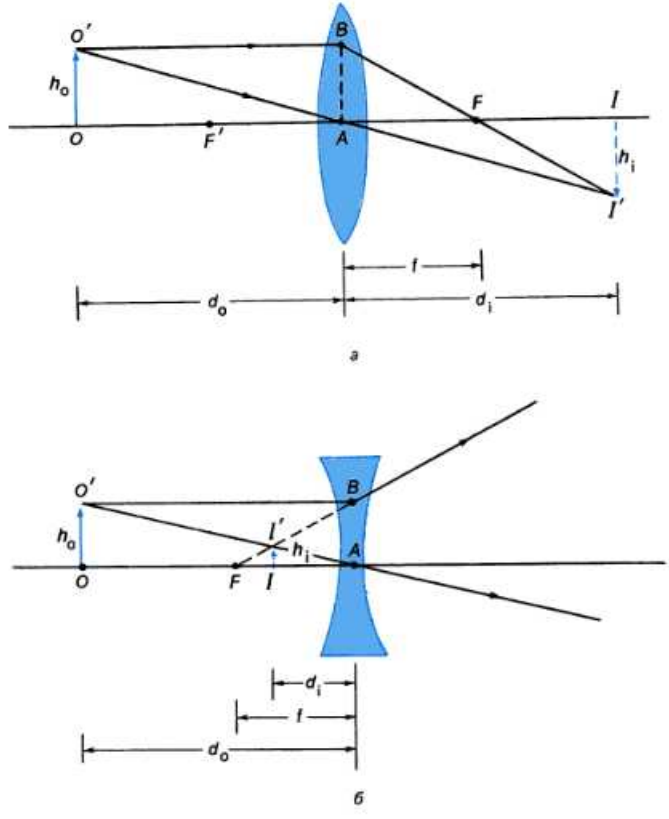


Рис. 35.11. К выводу уравнения линзы для собирающей (*а*) и рассеивающей (*б*) линз.

объекта и изображения. Треугольники FII' и FBA подобны, поэтому

$$\frac{-h_i}{h_o} = \frac{d_i - f}{f},$$

так как $AB = h_o$, а знак минус перед h_i соответствует соглашению; мы считаем величину h_i (или h_o) отрицательной, если точка I' (или O') расположена ниже оси (в случае, изображенном на рис. 35.11, *а*, h_i – величина положительная). Треугольники OAO' и IAI' подобны, поэтому

$$\frac{-h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}.$$

Левые части двух последних равенств одинаковы. Поэтому, приравняв их правые части, поделив на d_i и переставив члены, мы получим уравнение линзы

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}.$$

С помощью построения, изображенного на рис. 35.11, *б*, можно вывести уравнение рассеивающей линзы. Треу-

гольники IAI' и OAO' подобны. Треугольники IFI' и AFB также подобны. Следовательно [в силу соглашения о знаках, принятого в разд. 35.1 (рис. 35.11, *б*), $d_i < 0$, поэтому $-d_i$ – величина положительная],

$$\frac{h_i}{h_o} = \frac{-d_i}{d_o}, \quad \frac{h_i}{h_o} = \frac{f-(-d_i)}{f}.$$

Приравнивая правые части и проведя упрощение, получим

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{f}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (35.4), если учесть, что фокусное расстояние f рассеивающей линзы – величина отрицательная. Таким образом, уравнение (35.4) справедливо как для собирающих, так и для рассеивающих линз, где бы ни располагались объект и изображение, если придерживаться соглашений, соответствующих приведенным в разд. 35.1, и первоначальным условиям, в которых получены уравнения (35.2) – (35.4).

1. Фокусное расстояние положительно для собирающих линз и отрицательно для рассеивающих линз. Радиус кривизны считается положительным, если свет падает на выпуклую поверхность, и отрицательным, если свет падает на вогнутую поверхность.

2. Расстояние до объекта положительно, если свет падает на линзу со стороны объекта (это обычный случай; при использовании комбинации линз ситуация может оказаться иной), и отрицательно в противном случае.

3. Расстояние до изображения положительно, если свет падает на противоположную сторону линзы; если свет падает на линзу с той же стороны, где находится изображение, то величина d_i отрицательна. То же самое можно сказать иначе: расстояние до изображения положительно в случае действительного изображения и отрицательно в случае мнимого изображения.

4. Высота объекта h_o и высота изображения h_i положительны, если соответствующие точки расположены выше оси, и отрицательны для точек, расположенных ниже оси.

Линейным (поперечным) *увеличением* m или просто увеличением линзы называется отношение высоты изображения к высоте объекта: $m = h_i/h_o$. Из рис. 35.11 и принятых соглашений следует, что

$$m = \frac{h_i}{h_0} = -\frac{d_i}{d_0}. \tag{35.5}$$

В случае прямого изображения увеличение m положительно, в случае перевернутого отрицательно.

Пример 35.3. Где находится и какие размеры имеет изображение гигантского насекомого величиной 22,4 см, находящегося на расстоянии 1,50 м от линзы объектива с фокусным расстоянием + 50,0 мм?

Решение. Поскольку линза объектива

собирающая с $f = +5{,}00$ см, то, согласно (35.4), получаем

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{5{,}00\text{ см}} - \frac{1}{150\text{ см}} = \frac{30{,}0 - 1{,}00}{150\text{ см}},$$

откуда $d_i = 150$ см$/29{,}0 = 5{,}17$ см, или 51,7 мм, за линзой. Увеличение равно $m = -d_i/d_o = -5{,}17$ см$/150$ см $= -0{,}0345$, поэтому $h_i = (-0{,}0345)(22{,}4\text{ см}) = -0{,}773$ см. Таким образом, размер изображения равен 7,73 см, и оно перевернуто, как на рис. 35.11, *а*. Обратите внимание на то, что изображение находится на 1,7 мм дальше от линзы, чем изображение бесконечно удаленного объекта. Это пример того, что при наводке на резкость, чем ближе объект к камере, тем дальше должна быть линза от пленки.

Пример 35.4. Объект находится на расстоянии 10 см от линзы объектива с фокусным расстоянием 15 см. Определите, где находится и какие размеры имеет изображение объекта а) аналитически и б) построив ход лучей.

Решение. а) Так как $f = 15$ см и $d_o = 10$ см,

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{15\text{ см}} - \frac{1}{10\text{ см}} = -\frac{1}{30\text{ см}},$$

откуда $d_i = -30$ см. Поскольку величина d_i отрицательна, изображение должно быть мнимым и располагаться по ту же сторону линзы, что и объект. Увеличение $m = -(-30\text{ см})/(10\text{ см}) = 3{,}0$, т. е. изображение в три раза превышает размер объекта и оказывается прямым. б) Ход лучей показан на рис. 35.12 и подтверждает результат, полученный в примере «а».

Пример 35.5. Где следует расположить относительно рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 25 см небольшой предмет, чтобы на расстоянии 20 см перед линзой возникло его мнимое изображение?

Решение. Так как $f = -25$ см и $d_i = -20$ см, то

$$\frac{1}{d_o} = -\frac{1}{25\text{ см}} + \frac{1}{20\text{ см}} = \frac{1}{100\text{ см}}.$$

Таким образом, объект следует поместить на расстоянии 100 см перед линзой. Ход лучей в основном совпадает с приведенным на рис. 35.11, *б*.

Пример 35.6. Для измерения фокусного расстояния рассеивающей линзы вплотную к ней приставлена собирающая линза, как показано на рис. 35.13. Эта комбинация линз фокусирует солнечные лучи на расстоянии 28,5 см за линзами. Чему равно фокусное расстояние f_D рассеивающей линзы, если фокусное расстояние f_C собирающей линзы составляет 16,0 см?

Решение. Пусть $f_T = 28{,}5$ см – фокусное расстояние комбинации линз. При отсутствии рассеивающей линзы собирающая линза собрала бы свет в своей фокальной точке, т. е. на расстоянии $f_C = 16{,}0$ см за линзой (на рис. 35.13 эти лучи показаны штриховыми линиями). После приставления линз друг к другу (обе линзы предполагаются тонкими, а зазор между ними пренебрежимо мал) изображение, создаваемое первой линзой, будет представлять собой *объект* относительно второй (рассеивающей) линзы. Так как он расположен справа от рассеивающей линзы, расстояние d_o в этом случае будет отрицательным. Следовательно, для рассеивающей линзы объект будет мнимым и располагаться при $d_o = -16{,}0$ см. Его изображение создается линзой на расстоянии

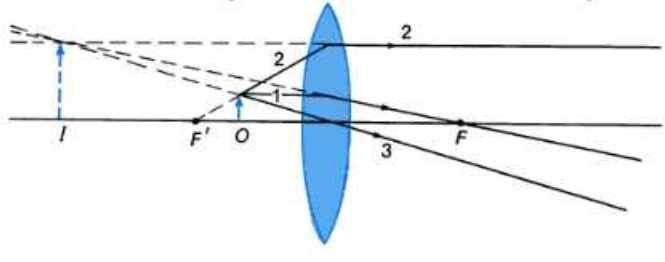


Рис. 35.12. Объект расположен ближе главного фокуса собирающей линзы – изображение мнимое (пример 35.4).

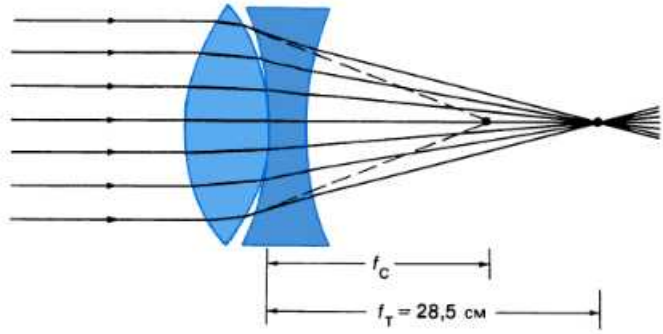


Рис. 35.13. К определению фокусного расстояния рассеивающей линзы (пример 35.6).

нии $d_i = 28{,}5$ см (которое задано). Таким образом,

$$\frac{1}{f_D} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{16{,}0\text{ см}} + \frac{1}{28{,}5\text{ см}} = -0{,}0274\text{ см}^{-1},$$

откуда $f_D = -1/(0{,}0274\text{ см}^{-1}) = -36{,}5$ см.

Обратите внимание на то, что фокусное расстояние собирающей линзы должно быть меньше фокусного расстояния рассеивающей линзы, иначе метод не будет работать.

Этот пример служит первой иллюстрацией того, как подходить к расчету комбинации линз. В общем случае, когда свет проходит через несколько линз, изображение, создаваемое одной линзой, становится объектом для следующей линзы. Результирующее увеличение равно произведению увеличений каждой из линз. В этой главе мы познакомимся еще с несколькими примерами подобных расчетов.

Пример 35.7. Выпуклый мениск (рис. 35.5, *а*) изготовлен из стекла с показателем преломления $n = 1{,}50$. Радиус кривизны выпуклой поверхности равен 22,4 см, а радиус кривизны вогнутой поверхности равен 46,2 см. а) Чему равно фокусное расстояние? б) Где будет находиться изображение объекта, расположенного на расстоянии 2,00 м от линзы?

Решение. а) $R_1 = 22{,}4$ м, $R_2 = 46{,}2$ см. Оба радиуса кривизны положительны, так как в обоих случаях свет падает на выпуклые поверхности (предполагается, что свет падает слева). Тогда

$$\frac{1}{f} = (1{,}50 - 1{,}00)\left(\frac{1}{22{,}4\text{ см}} - \frac{1}{46{,}2\text{ см}}\right) = 0{,}0114\text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, $f = 89$ см и мениск представляет собой собирающую линзу. Заметим, что, если мениск перевернуть, мы получили бы тот же результат (в этом случае $R_1 = -46{,}2$ см и $R_2 = -22{,}4$ см). б) Из уравнения линзы получаем

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_o} = \frac{1}{0{,}89\text{ м}} - \frac{1}{2{,}00\text{ м}} = 0{,}62\text{ м}^{-1},$$

откуда $d_i = 1{,}60$ м.

Термины *выпуклый* и *вогнутый* могут привести к путанице: так называемая двояковыпуклая линза, например на рис. 35.5, *а*, имеет снаружи две выпуклые поверхности. Отсюда и ее название. Но при выборе знака радиуса кривизны вторую поверхность следует считать вогнутой относительно направления падающего на нее света.

35.3. Лупа

В этом и ряде последующих разделов мы рассмотрим оптические устройства, используемые для получения увеличенных изображений объектов. Начнем с *лупы* (или *увеличительного стекла*), представляющей собой простую собирательную линзу.

Как удастся увеличить предмет и насколько детально мы сможем его рассмотреть, зависит от угла, под которым он виден. Например, монета в 1 пенни с расстояния 30 см кажется вдвое больше, чем с расстояния 60 см, так как в первом случае она видна под вдвое большим углом (рис. 35.14). Чтобы лучше разглядеть детали объекта, мы подносим его ближе к глазам, так что он будет виден под бóльшим углом. Но наши глаза способны аккомодироваться лишь до определенного предела. Минимальное расстояние, на котором глаз может обеспечить четкую фокусировку, называется *расстоянием наилучшего зрения*. Оно не одинаково у разных людей (разд. 35.6), но в среднем составляет около 25 см, и в дальнейшем мы будем считать эту величину стандартным, или «нормальным», расстоянием наилучшего зрения. Максимальное расстояние, на котором глаз может обеспечить отчетливую фокусировку, называется *пределом зрения* и отвечает случаю полного расслабления мышц глаза. Для нормального глаза предел зрения очень велик, и мы будем считать его бесконечным.

Лупа позволяет приблизить предмет к глазу и предмет оказывается виден под бóльшим углом. На рис. 35.15, *а* предмет находится в фокальной точке или где-то поблизости. Собирающая линза создает в этом случае мнимое изображение, которое должно находиться от глаза на расстоянии не менее 25 см, чтобы глаз мог сфокусироваться на нем. Если мышцы глаза расслаблены, то изображение окажется бесконечно удаленным, и в этом случае объект находится точно в фокусе. (Подобную наводку на резкость вы производите, передвигая лупу и фокусируя ее на объекте.)

Сравнивая рис. 35.15, *а* с *б*, на котором тот же самый предмет рассматривается невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения, мы обнаруживаем, что при использовании лупы объект виден под гораздо большим углом. *Угловым увеличением*, а часто просто *увеличением* M линзы называется отношение углов, под которым предмет виден при использовании линзы и под которым

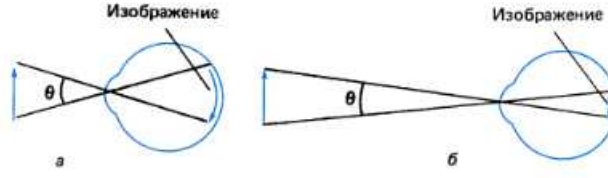


Рис. 35.14. Если один и тот же объект рассматривать вблизи и издалека, то в первом случае его изображение на сетчатой оболочке глаза крупнее, поэтому объект кажется больше и наблюдатель может разглядеть больше деталей. Угол θ, под которым виден объект, в случае *а* больше, чем в случае *б*.

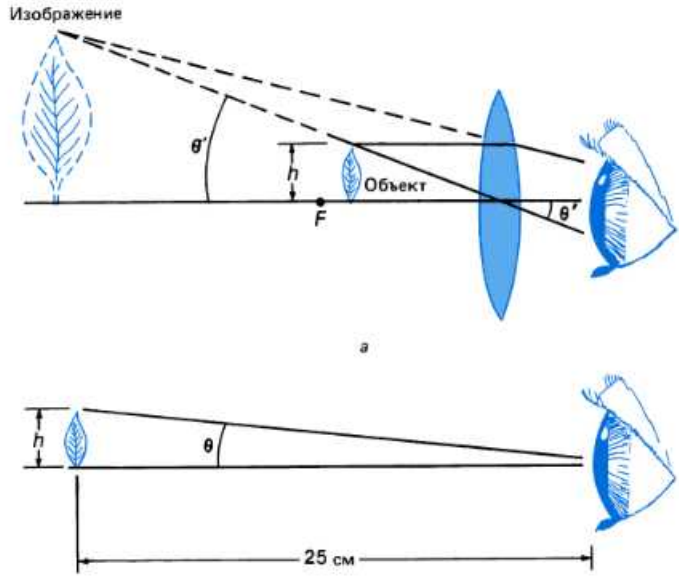


Рис. 35.15. Лист дерева, рассматриваемый через лупу (*а*) и невооруженным глазом (*б*) на расстоянии наилучшего зрения.

он виден невооруженным глазом (т.е. без линзы) с расстояния 25 см:

$$M = \frac{\theta'}{\theta};$$

углы θ и θ' показаны на рис. 35.15. Полученное соотношение можно выразить через фокусное расстояние f линзы. Предположим сначала, что на рис. 35.15, *а* изображение находится на расстоянии наилучшего зрения N глаза: $d_i = -N$, т.е. $N = 25$ см для нормального глаза. Тогда расстояние до объекта d_o определяется соотношением

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} + \frac{1}{N},$$

или $d_o = Nf/(f + N)$. (Из последней формулы видно, что $d_o < f$, как показано на рис. 35.15, *а*, поскольку отношение $N/(f + N)$ должно быть меньше единицы.) Пусть h – высота объекта – настолько мала, что углы θ и θ' приближенно равны соответственно их синусам и тангенсам. Тогда $\theta' = h/d_o = (f + N)h/(Nf)$ и $\theta = h/N$, поэтому

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{(f + N)h}{Nf}\left(\frac{N}{h}\right),$$

или

$$M = 1 + \frac{N}{f}\left[\begin{array}{l}\text{глаз сфокусирован в точку на}\\ \text{расстоянии наилучшего зрения } N =\\ = 25 \text{ см для нормального глаза}\end{array}\right]. \quad (35.6а)$$

Если мы пользуемся лупой и мышцы глаза расслаблены, то изображение оказывается бесконечно удаленным, а объект расположен точно в фокусе. В этом случае $\theta' = h/f$, и

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \left(\frac{h}{f}\right)\left(\frac{N}{h}\right) = \frac{N}{f} \quad \left[\begin{array}{l}\text{глаз сфокусирован на бес-}\\ \text{конечность, } N = 25 \text{ см для}\\ \text{нормального глаза}\end{array}\right]. \tag{35.6б}$$

Ясно, что несколько большего увеличения удается достичь, когда глаз фокусируется в точку на расстоянии наилучшего зрения, чем когда мышцы глаза расслаблены. Чем короче фокусное расстояние линзы, тем больше увеличение.

Пример 35.8. Человек с нормальным зрением пользуется в качестве лупы линзой с фокусным расстоянием 8 см. Вычислите а) максимальное увеличение и б) увеличение в случае, когда мышцы глаз расслаблены.

Решение. а) Максимальное увеличение достигается, когда глаз сфокусирован в точку на расстоянии наилучшего зрения:

$$M = 1 + \frac{N}{f} = 1 + \frac{25}{8} \approx 4\times \quad \text{[т. е. 4-кратное увеличение]}.$$

Когда глаз сфокусирован на бесконечность, $M = 25$ см/8 см $\approx 3\times$ (т. е. 3-кратное увеличение).

35.4. Телескопы

Телескоп применяется для увеличения объектов, находящихся на очень большом удалении. В большинстве случаев объект можно считать расположенным на бесконечности.

Хотя Галилей не был изобретателем телескопа[1)], именно благодаря ему телескоп стал важным и полезным прибором. Галилей первым использовал телескоп для изучения небесных тел, что привело к ряду поразительных открытий. Среди прочего Галилей открыл спутники Юпитера, фазы Венеры, солнечные пятна, структуру лунной поверхности и установил, что Млечный Путь состоит из огромного числа звезд.

[1)] Свой первый телескоп Галилей построил, прослышав о существовании такого инструмента в Голландии. Телескоп Галилея давал только трех- или четырехкратное увеличение, но вскоре Галилей построил телескоп, дававший 30-кратное увеличение. Первый голландский телескоп, по-видимому, датируется 1604 г. Есть указания, что он мог быть скопирован с телескопа итальянской работы 1590 г. Кеплер (гл. 5) дал описание телескопов Кеплера и Галилея (т. е. телескопов с двумя линзами) в рамках геометрической оптики (1611 г.). Первый из этих телескопов назван в честь Кеплера потому, что тот первым описал инструмент, хотя и не построил его.

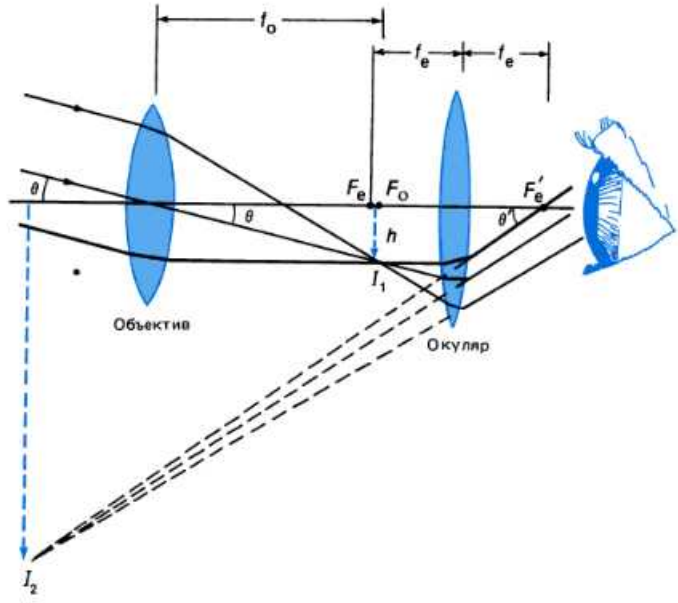


Рис. 35.16. Астрономический телескоп-рефрактор.

Существует несколько типов астрономических телескопов. Обычный телескоп-*рефрактор*, или линзовый телескоп, иногда называемый также кеплеровским, имеет две собирающие линзы, расположенные на противоположных концах длинной трубы (рис. 35.16). Линза, обращенная к объекту, называется *объективом;* она создает действительное изображение I_1 объекта в своей фокальной точке F_o (или вблизи нее, если объект оказывается не бесконечно удаленным). Хотя изображение I_1 меньше самого объекта, оно расположено очень близко ко второй линзе, называемой *окуляром* и действующей как лупа. Это означает, что окуляр увеличивает создаваемое объективом изображение, в результате чего возникает второе, сильно увеличенное изображение I_2, которое будет мнимым. Если мышцы глаза наблюдателя расслаблены, то окуляр юстируется так, чтобы изображение I_2 оказалось на бесконечности. В этом случае действительное изображение I_1 находится в фокальной точке F_e окуляра, и в случае бесконечно удаленного объекта расстояние между линзами равно $f_o + f_e$.

Чтобы определить полное увеличение кеплеровского телескопа, заметим, что угол, под которым объект виден невооруженным глазом, совпадает с углом θ, под которым объект виден из объектива телескопа. Из рис. 35.16 ясно, что $\theta \approx h/f_o$, где h – высота изображения I_1 (предполагается, что угол θ мал, и поэтому $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$). Обратите внимание на то, что луч, проведенный на рис. 35.16 самой жирной линией, до попадания в окуляр параллелен оси и, следовательно, проходит через фокальную точку F'_e. Таким образом, $\theta' \approx h/f_e$, и полное увеличение кеплеровского

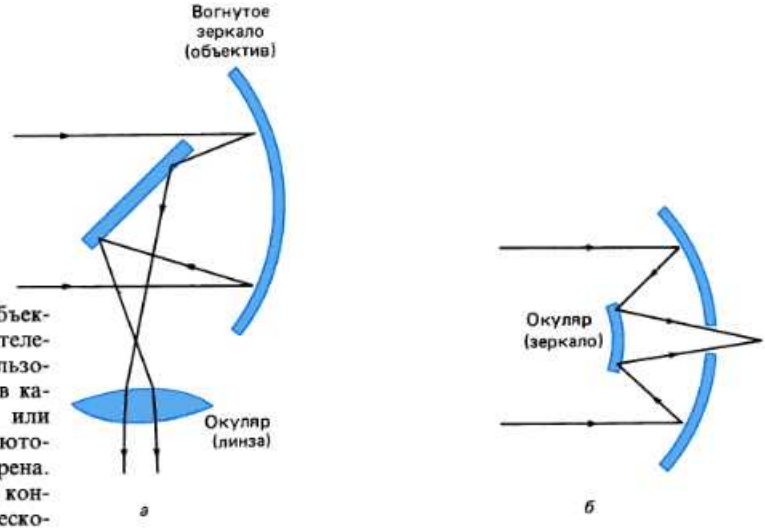


Рис. 35.17. В качестве объектива астрономического телескопа может быть использовано вогнутое зеркало, в качестве окуляра – линза или зеркало. *а* – телескоп Ньютона; *б* – телескоп Кассегрена. Существуют и другие конструктивные схемы телескопов.

телескопа равно

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f_o}{f_e}. \qquad (35.7)$$

Знак минус указывает на то, что изображение перевернуто. Чтобы получить большее увеличение, в качестве объектива следует выбирать более длиннофокусную линзу, а в качестве окуляра – более короткофокусную линзу.

Для получения с помощью астрономического телескопа ярких изображений удаленных звезд объектив должен быть большим, чтобы пропускать как можно больше света. Изготавливать и шлифовать большие линзы очень трудно. Поэтому самые большие телескопы представляют собой *рефлекторы*, у которых в качестве объектива используется сферическое зеркало (рис. 35.17). У зеркала полируется только одна сторона, и оно может опираться всей своей поверхностью. (Большие линзы закрепляются по краям и могут проседать под собственной тяжестью[1].) Обычно линза или зеркало, служащие окуляром (рис. 35.17), могут удаляться, и это позволяет фиксировать создаваемое объективом действительное изображение на пленку.

Зрительная труба в отличие от своего астрономического аналога – телескопа – должна давать прямое изображение. На рис. 35.18 изображены две конструктивные схемы зрительных труб. На рис. 35.18, *а* показана схема зрительной трубы (телескопа) Галилея. Именно с помощью такой трубы Галилей совершил свои выдающиеся

[1] Еще одно преимущество зеркал состоит в том, что они свободны от хроматической аберрации, так как свет не проходит сквозь них. Придав зеркалам форму параболоида, можно скомпенсировать и сферическую аберрацию (разд. 35.7). Телескоп-рефлектор впервые был предложен Ньютоном.

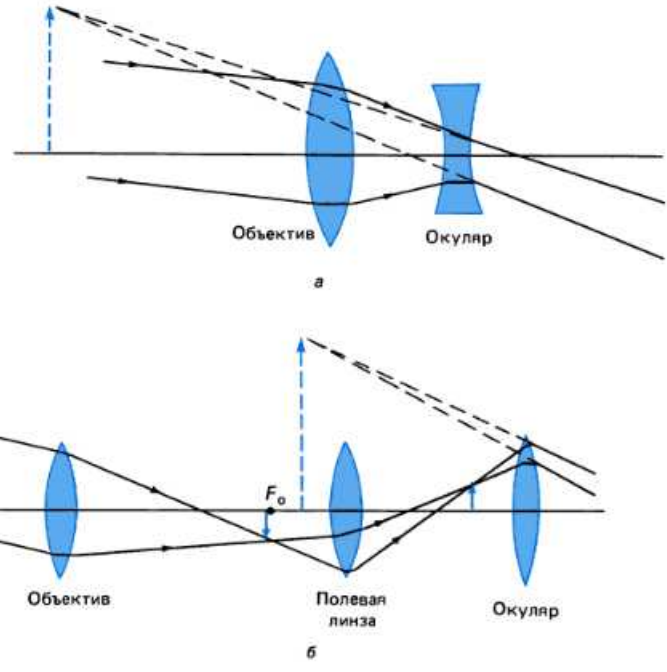


Рис. 35.18. Зрительные трубы, дающие прямое изображение: *а* – галилеева труба; *б* – подзорная труба, или труба с полевой линзой.

астрономические открытия. В качестве окуляра в галилеевой трубе используется рассеивающая линза, которая располагается на пути сходящихся лучей до того, как они достигнут фокуса объектива. С помощью окуляра образуется мнимое прямое изображение. Такая конструкция широко используется в театральных биноклях. Галилеева труба имеет небольшую длину, но ее поле зрения оказывается довольно узким. Конструкцию, изображенную на рис. 35.18, *б*, часто называют *подзорной трубой*; в ней используется третья (полевая) линза, предназначенная для получения прямого изображения. Подзорная труба должна быть довольно длинной. Наиболее удобная из существующих конструкций – *призматический бинокль* – показана на рис. 34.20. Объективом и окуляром служат собирающие линзы. В призмах свет претерпевает полное внутреннее отражение, что позволяет сократить размеры устройства. Кроме того, они создают прямое изображение: одна призма переворачивает отражение в вертикальной плоскости, другая – в горизонтальной.

Пример 35.9. Фокусное расстояние объектива галилеева телескопа равно 28 см, а фокусное расстояние окуляра равно – 8,0 см. Каково увеличение телескопа?

Решение.

$$M = -f_o/f_e = -(28{,}0\text{ см})/(-8{,}0\text{ см}) = 3{,}5\times.$$

35.5. Микроскоп

Подобно телескопу, микроскоп имеет и объектив, и окуляр (рис. 35.19). Однако принципиальная схема микроскопа отличается от схемы телескопа, так как микроскоп предназначен для наблюдения очень близких объектов, т.е. расстояние до объекта в микроскопе очень мало. Объект расположен непосредственно перед фокальной точкой объектива, как показано на рис. 35.19. Создаваемое объективом действительное изображение I_1 находится очень далеко от линзы и сильно увеличено. В свою очередь это изображение увеличивается окуляром и превращается в очень большое мнимое изображение I_2, наблюдаемое глазом.

Полное увеличение микроскопа равно произведению увеличений объектива и окуляра. Изображение I_1, создаваемое объективом, в M_o раз больше самого объекта. Из рис. 35.19 и формулы (35.5) для увеличения простой линзы получаем

$$M_o = \frac{d_i}{d_o} = \frac{l - f_e}{d_o},$$

где l – расстояние между линзами (равное длине тубуса); знак минус в формуле (35.5) опущен, так как он говорит лишь о том, что изображение перевернуто. Окуляр действует как простая лупа. Если предположить, что мышцы глаза расслаблены, то увеличение окуляра M_e равно [из

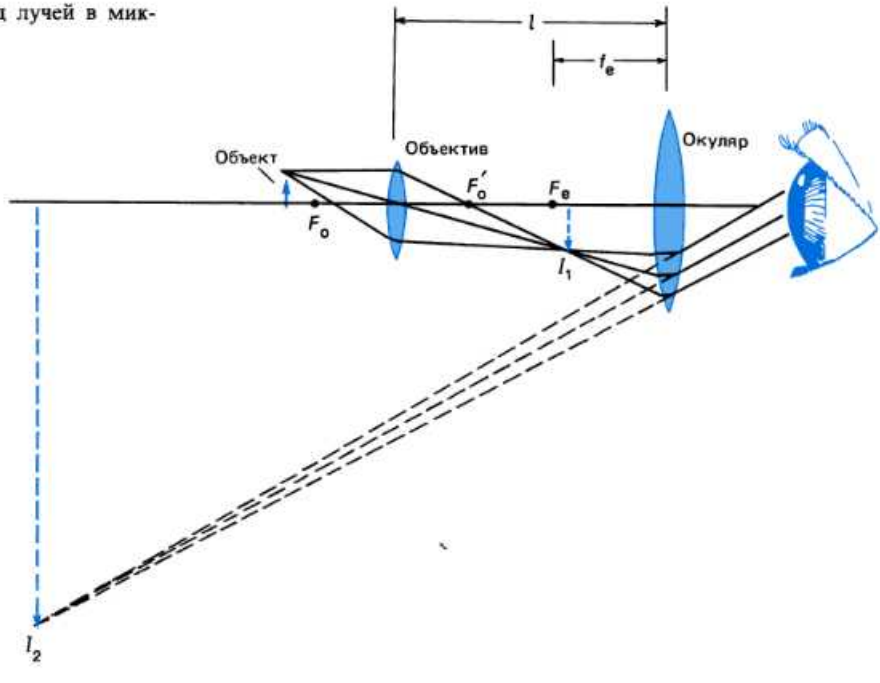


Рис. 35.19. Ход лучей в микроскопе.

уравнения (35.6б)]

$$M_e = \frac{N}{f_e},$$

где N – расстояние наилучшего зрения (для нормального глаза $N = 25$ см). Так как окуляр увеличивает создаваемое объективом изображение, общее увеличение M равно

$$M = M_e M_o = \left(\frac{N}{f_e}\right)\left(\frac{l - f_e}{d_o}\right) \approx \tag{35.8а}$$

$$\approx \frac{Nl}{f_e f_o}. \tag{35.8б}$$

Формула (35.8б) обеспечивает достаточно высокую точность, если f_e и f_o малы по сравнению с l, так что $l - f_e \approx l$ и $d_o \approx f_o$ (рис. 35.19). Это хорошее приближение при больших увеличениях, так как последние достижимы при очень малых f_e и f_o [входящих в знаменатель формулы (35.8б)]. (Для изготовления линз с очень коротким фокусным расстоянием, пригодных в качестве объектива, приходится использовать составные линзы из нескольких элементов, чтобы избежать значительных аберраций, о которых пойдет речь в разд. 35.7.)

Пример 35.10. Микроскоп состоит из 10-кратного окуляра и 50-кратного объектива, расположенных на расстоянии 18,0 см друг от друга. Определите а) общее увеличение, б) фокусное расстояние каждой из линз и в) расположение объекта, когда окончательное изображение находится в фокусе и мышцы глаза расслаблены. Предполагается, что глаз обладает нормальным зрением с $N = 25$ см.

Решение. а) Общее увеличение равно $10 \times 50 = 500\times$. б) Фокусное расстояние окуляра равно $f_e = N/M_e = 25$ см$/10 = 2{,}5$ см. в) Прежде чем находить f_o, проще определить d_o из приведенной выше формулы для M_o. Разрешая соотношение (35.8а) относительно d_o, получаем $d_o = (l - f_e)/M_o = 15{,}5$ см$/50 = 0{,}31$ см. Далее из уравнения линзы получаем

$$\frac{1}{f_o} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{0{,}31\text{ см}} + \frac{1}{15{,}5\text{ см}} = \frac{51}{15{,}5\text{ см}},$$

откуда $f_o = 0{,}30$ см. в) Итак, мы вычислили расстояние $d_o = 0{,}31$ см, которое чрезвычайно близко к f_o.

*35.6. Человеческий глаз. Корригирующие линзы

Человеческий глаз (рис. 35.20) представляет собой замкнутый объем, в который свет попадает через линзу. У глаза имеется диафрагма, называемая *радужной оболочкой* (окрашенная часть глаза), которая автоматически регулирует количество попадающего в глаз света. Отверстие в радужной оболочке, через которое проходит свет (*зрачок*), кажется черным потому, что изнутри отражается очень мало света. *Сетчатая оболочка*, играющая роль светочувствительной пленки (как в фото- и кинокамере), выстилает заднюю поверхность глаза. Она состоит из сложного

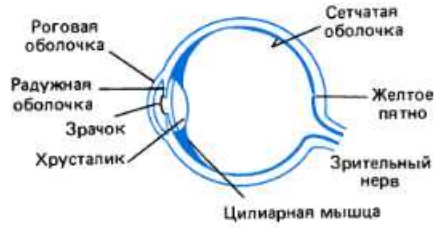


Рис. 35.20. Строение человеческого глаза.

сплетения нервных волокон и рецепторов, известных под названиями «колбочки» и «палочки», которые преобразуют световую энергию в электрические сигналы, распространяющиеся по нервным волокнам. Построение изображения, согласно сигналам, поступающим от всех этих крохотных рецепторов, происходит главным образом в головном мозге, хотя частично анализ, по всей видимости, происходит в сложной сети нервных волокон в самой сетчатой оболочке. В центре сетчатой оболочки имеется небольшая (диаметром около 0,25 мм) область, которая называется *желтым пятном*. Желтое пятно состоит из упакованных очень плотно колбочек, и в нем достигается особая острота зрения и наиболее тонко различаются цвета.

Линза глаза (*хрусталик*) слабо преломляет световые лучи. Преломление в основном происходит на передней поверхности *роговицы (роговой оболочки)*, которая служит также предохранительным покрытием. Хрусталик обеспечивает тонкую фокусировку глаза на различные расстояния. Эта фокусировка достигается сокращением *цилиарных мышц* (рис. 35.20), в результате которого происходит изменение кривизны хрусталика и, следовательно, его фокусного расстояния. При фокусировке на далекий объект мышцы расслабляются, и хрусталик становится тонким (рис. 35.21, *а*). При фокусировке на близкий объект цилиарные мышцы напрягаются, вызывая утолщение хрусталика в центре (рис. 35.21, *б*), и, следовательно, фокусное расстояние сокращается. Подобная юстировка называется *аккомодацией* глаза. Мы уже упоминали о том, что расстояние до ближайшей точки, на которую глаз может четко фокусироваться, называется *расстоянием наилучшего зрения*. Для молодых людей оно обычно составляет 25 см, хотя у детей глаза могут фокусировать-

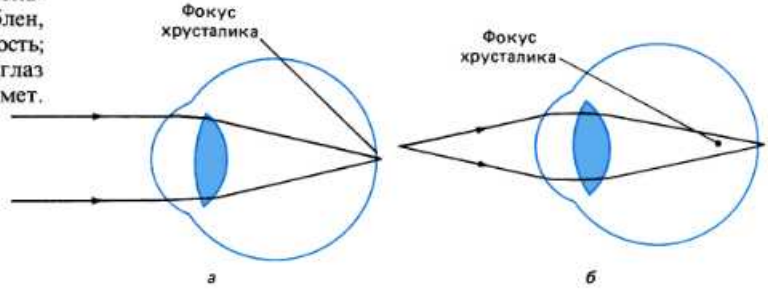


Рис. 35.21. Аккомодация глаза: *а* – хрусталик расслаблен, глаз наведен на бесконечность; *б* – хрусталик утолщен, глаз наведен на близкий предмет.

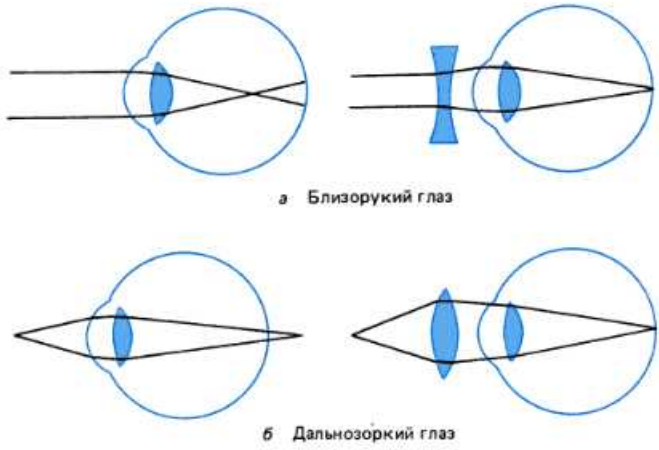


Рис. 35.22. *а* – близорукий глаз не может видеть резко далекие объекты (коррекция зрения достигается с помощью рассеивающей линзы); *б* – дальнозоркий глаз не может видеть резко близкие объекты (коррекция зрения достигается с помощью собирающей линзы).

ся и на предметах, находящихся на расстоянии всего лишь 10 см. С возрастом способность к аккомодации снижается, и расстояние наилучшего зрения возрастает. Для данного человека *пределом зрения* принято называть наибольшее расстояние, на котором он может отчетливо видеть объект. Иногда говорят о *нормальном глазе* (своего рода среднем по некоторой популяции). По определению это глаз, для которого расстояние наилучшего зрения равно 25 см, а предел зрения бесконечен. Два наиболее распространенных дефекта зрения – это близорукость и дальнозоркость. *Близорукостью*, или *миопией*, страдает глаз, который может фокусироваться только на близкие объекты; предел зрения не простирается до бесконечности, а соответствует меньшему расстоянию, поэтому далекие объекты при близорукости видны расплывчато. Обычно близорукость обусловлена продолговатым глазным яблоком, но иногда ее причиной бывает чрезмерная кривизна роговицы. И в том и в другом случае изображения далеких предметов фокусируются перед сетчаткой. Используя рассеивающую линзу, которая заставляет параллельные лучи расходиться, можно сфокусировать изображение на сетчатке (рис. 35.22, *а*) и тем самым исправить дефект. *Дальнозоркостью*, или *гиперопией*, страдает глаз, который не может фокусироваться на близких объектах. Хотя удаленные предметы дальнозоркий глаз обычно видит отчетливо, расстояние наилучшего зрения для него несколько превышает «нормальное» (25 см), и это затрудняет чтение. Указанный дефект возникает при слишком коротком глазном яблоке и (реже) при недостаточной кривизне роговицы. Для коррекции дальнозоркости применяют собирающие линзы (рис. 35.22, *б*). С гиперопией сходна *пресбиопия*, которая состоит в потере глазом способности к аккомодации с возрастом и в увеличении расстояния наилучшего зрения. И этот дефект зрения корригируется собирающими линзами. *Астигматизм* обыч-

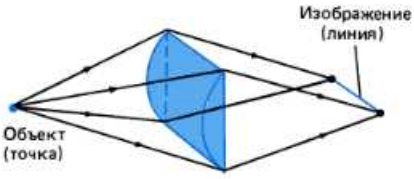


Рис. 35.23. Цилиндрическая линза образует линейное изображение точечного объекта, поскольку действует как собирающая линза только в одной плоскости.

но связан с несферичностью роговицы или хрусталика, вследствие чего изображение точечного объекта имеет вид короткой линии. В сферическую роговицу как бы вложен цилиндрический участок. Как показано на рис. 35.23, цилиндрическая линза превращает точку в отрезок прямой, параллельный оси линзы. Страдающий астигматизмом глаз собирает лучи, например, в вертикальной плоскости на меньшем расстоянии, чем в горизонтальной. Астигматизм исправляют с помощью корригирующей цилиндрической линзы. Линзы, исправляющие близорукость или дальнозоркость зрения в сочетании с астигматизмом, шлифуют в виде комбинации сферических и цилиндрических поверхностей, поэтому радиус кривизны корригирующей линзы в различных плоскостях различен.

Оптометристы и офтальмологи характеризуют линзу не фокусным расстоянием, а величиной, обратной фокусному расстоянию. Она называется *оптической силой линзы* P:

$$P = \frac{1}{f}.$$

Единицей оптической силы линзы служит диоптрия (дптр), которая равна обратному метру: 1 дптр = 1 м$^{-1}$. Например, линза с фокусным расстоянием 20 см имеет оптическую силу $P = 1/0{,}20$ м $= 5{,}0$ дптр. Оптическая сила собирающей линзы положительная, а рассеивающей линзы отрицательная (так как фокусное расстояние f рассеивающей линзы отрицательное; см. соглашение 1 в разд. 35.2).

Пример 35.11. У дальнозоркого человека расстояние наилучшего зрения равно 100 см. Какую оптическую силу должны иметь его линзы, чтобы он мог читать газету с расстояния 25 см? Для простоты будем считать, что линзы очков располагаются вплотную к глазам.

Решение. Мы хотим, чтобы при расстоянии объекта до линзы 25 см его изображение оказалось на расстоянии 100 см *по ту же сторону* от линзы, т. е. чтобы оно было мнимым (рис. 35.24). Таким образом, $d_o = 25$ см, $d_i = -100$ см и

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{25\text{ см}} + \frac{1}{-100\text{ см}} = \frac{1}{33\text{ см}},$$

откуда $f = 33$ см $= 0{,}33$ м. Оптическая сила линзы $P = 1/f = +3{,}0$ дптр. Знак плюс указывает на то, что линза должна быть собирающей.

Пример 35.12. Пусть близорукости отвечает расстояние наилучшего зрения 12 см и предел зрения 17 см. Какую оптическую силу должны иметь очки, чтобы человек мог отчетливо видеть далекие предметы, и каким будет в этом случае расстояние наилучшего зрения? Предполагается, что линзы очков находятся на расстоянии 2,0 см от глаза.

Решение. Изображение удаленных предметов ($d_o = \infty$) должно находиться на рас-

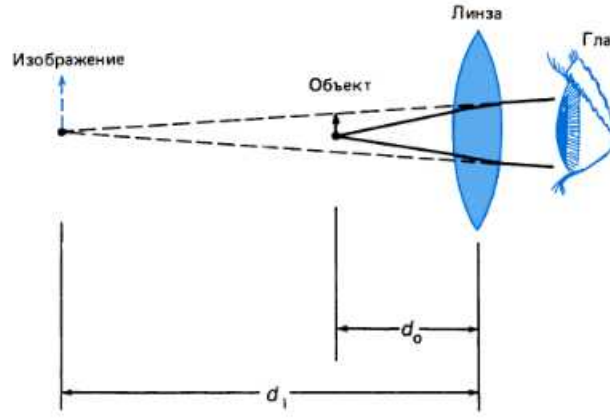


Рис. 35.24. Линза лупы (пример 35.11).

стоянии 17 см от глаза или 15 см перед линзой ($d_i = -15$ см):

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{15\text{ см}} + \frac{1}{\infty} = -\frac{1}{15\text{ см}};$$

отсюда $f = -15$ см $= -0{,}15$ м, или $P = 1/f = -6{,}7$ дптр. Знак минус указывает на то, что линза должна быть рассеивающей. Расстоянию наилучшего зрения должно соответствовать изображение, находящееся на расстоянии 12 см от глаза или на расстоянии 10 см от линзы. Поэтому $d_i = -0{,}10$ м и

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{0{,}15\text{ м}} + \frac{1}{0{,}10\text{ м}} = \frac{1}{0{,}30\text{ м}};$$

отсюда $d_o = 30$ см. Следовательно, когда близорукий человек наденет очки, его расстояние наилучшего зрения (до линзы) станет равным 30 см.

В последнем примере для коррекции зрения можно было бы использовать контактные линзы. Поскольку они помещаются непосредственно на роговицу, то в этом случае не нужно вычитать 2,0 см, и поэтому для удаленных объектов $d_i = -17$ см и $P = 1/f = -5{,}9$ дптр. Таким образом, при коррекции одного и того же дефекта зрения с помощью контактной линзы или очков их фокусные расстояния оказываются несколько разными из-за различия в расположении линзы относительно глаза.

*35.7. Аберрации линз

В разд. 35.1 и 35.2 мы изложили теорию образования изображения тонкой линзой. Например, было установлено, что все лучи, выходящие из одной точки объекта, собираются линзой в одной точке, служащей ее изображением. Этот и другие аналогичные результаты были основаны на приближениях, таких, как предположение о том, что все лучи составляют малые углы относительно друг друга и поэтому $\sin\theta \approx \theta$. Именно из-за использования подобных приближений следует ожидать отклонений от простой теории. Они действительно наблюдаются и известны под названием *аберраций линзы*. Существуют аберрации нескольких типов. Мы кратко рассмотрим каждую из них в отдельности, но все аберрации могут присутствовать и одновременно.

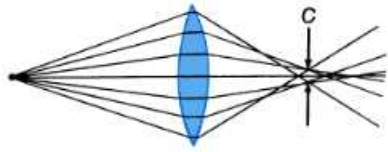
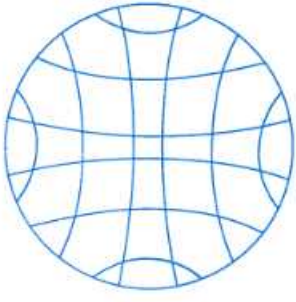


Рис. 35.25. Сферическая аберрация (преувеличена). Круг наименьшего искажения образуется в точке *C*.

Начнем с точечного объекта, расположенного на оси линзы. Лучи, падающие на край линзы, соберутся в другой точке, нежели лучи, проходящие через центр линзы. Это явление называется *сферической аберрацией* и в преувеличенном виде иллюстрируется на рис. 35.25. Следовательно, изображение, например на фотопленке, будет не точечным, а небольшим круглым пятном света. Если пленку поместить в точку *C*, как показано на рис. 35.25, то размеры пятна окажутся наименьшими. В этом случае светлое пятно называют *кругом наименьшего искажения*. Сферическая аберрация возникает всегда при использовании сферических поверхностей. Ее можно исправить, применяя линзы с несферическими поверхностями, но шлифовка таких линз обходится очень дорого. Сферическую аберрацию можно уменьшить до минимума и при использовании сферических поверхностей, делая их кривизну такой, чтобы на каждой поверхности линзы преломление было одинаковым, но такие линзы можно сконструировать только в расчете на вполне определенное расстояние до объекта. Обычно сферическую аберрацию исправляют (сильно уменьшают), используя комбинацию из нескольких линз.

а



б

Рис. 35.26. Дисторсия. Линзы могут давать изображение квадратной решетки из взаимно перпендикулярных прямых с бочкообразной (*а*) и подушкообразной (*б*) дисторсией.

Для точек объекта, не лежащих на оси линзы, возникают дополнительные аберрации. Лучи, падающие на различные участки линзы, вызывают размытие точечного изображения, которое уже не будет круглым. Не останавливаясь на деталях, просто упомянем, что существует два эффекта: *кома* (форма изображения напоминает комету, а не круг) и *внеосевой астигматизм*[1]. Кроме того, точки изображения для объектов, расположенных на одинаковом расстоянии от линзы, но вне ее оси, собираются не на плоскости, а на искривленной поверхности, т. е. фокальная поверхность оказывается неплоской. Этого следовало ожидать, так как точки на плоской поверхности, например на пленке в фото- или кинокамере, не эквидистантны относительно линзы. Такая аберрация известна под названием *кривизны поля* и порождает очевидную проблему при конструировании камер и других устройств, в которых пленка располагается на плоской поверхности. В человеческом глазе кривизна поля компенсируется кривизной

[1] Хотя этот эффект сходен со случаем астигматизма глаза (разд. 35.6), он обусловлен другой причиной. Человеческому глазу внеосевой астигматизм не причиняет особых неприятностей, так как наибольшая острота зрения достигается на желтом пятне, расположенном на оси хрусталика.

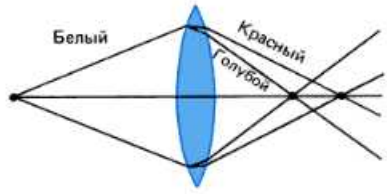


Рис. 35.27. Хроматическая аберрация. Свет различных цветов собирается в разных точках.

сетчатой оболочки. Другая аберрация, известная под названием *дисторсии*, обусловлена различием увеличения на разных расстояниях от оси линзы. Изображение прямолинейного объекта, расположенного не на оси линзы, может оказаться искривленным. Например, квадратная сетка может подвергаться *подушкообразной* или *бочкообразной дисторсии* (рис. 35.26). Последний деффект присущ особо широкоугольным линзам.

Все перечисленные выше аберрации происходят в монохроматическом свете и поэтому называются *монохроматическими аберрациями*. Если же свет не монохроматический, то возникает еще и *хроматическая аберрация*. Эта аберрация обусловлена дисперсией – зависимостью показателя преломления от длины волны (разд. 36.5). Например, синий свет преломляется стеклом сильнее, чем красный; поэтому если на линзу падает белый свет, то различные цвета будут фокусироваться в разных точках (рис. 35.27) и на изображении появятся окрашенные полосы. Хроматическую аберрацию можно исключить для любых двух цветов (и сильно уменьшить для всех остальных цветов), используя две линзы, изготовленные из материалов с различными показателями преломления и различной дисперсией. Обычно склеивают собирающую линзу и рассеивающую (рис. 35.28). Такая комбинация линз называется *ахроматическим дублетом* (или хроматически скорректированной линзой).

Полностью скомпенсировать все аберрации невозможно. Комбинируя две или большее число линз, можно уменьшить аберрации. Высококачественные линзы в камерах, микроскопах и других оптических приборах обычно представляют собой *сложные линзы*, состоящие из большого числа простых линз (называемых *элементами*). Типичная высококачественная линза в фото- или кинокамере содержит от шести до восьми (и более) элементов.

Для простоты мы будем изображать линзы на схемах так, как если бы они были простыми, но следует помнить, что линзы высокого качества – это сложные линзы.

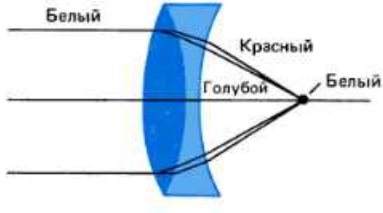


Рис. 35.28. Ахроматический дублет.

Заключение

Преломление света в линзах позволяет получать действительное или мнимое изображение. *Фокальная точка* (фокус) F линзы представляет собой точечное изображение бесконечно удаленного предмета (случай параллельно падающих лучей). Расстояние от фокальной точки до линзы называется *фокусным расстоянием* f линзы. *Уравнение шлифовщика линз* связывает фокусное расстояние линзы с показателем преломления и радиусами кривизны линзы: $1/f = (n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$. Положение и величину создаваемого линзой изображения можно определить, построив ход лучей. Связь расстояния до изображения d_i, расстояния до объекта d_o и фокусного расстояния дается *уравнением линзы*

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}.$$

Отношение высоты изображения к высоте объекта, равное поперечному (или просто) увеличению, определяется по формуле $m = (h_i/h_o) = -(d_i/d_o)$.

При использовании различных уравнений геометрической оптики важно помнить соглашение относительно знаков входящих в уравнение величин.

Простая *лупа* представляет собой собирающую линзу, которая создает мнимое изображение объекта, находящегося в фокальной точке (или в ее окрестности). Угловое увеличение для случая нормального глаза с расслабленными мышцами равно $M = N/f$, где f – фокусное расстояние линзы, N – расстояние наилучшего зрения (25 см для «нормального» глаза).

Астрономический телескоп состоит из объектива (линзы или зеркала) и окуляра, который увеличивает создаваемое объективом действительное изображение. Увеличение равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра; изображение в телескопе перевернутое. Зрительная труба снабжена дополнительными линзами, призмами или рассеивающей линзой в качестве окуляра, поэтому окончательное изображение будет прямым.

В *микроскопе* в качестве объектива и окуляра также используются две линзы и окончательное изображение перевернутое. Полное увеличение определяется как произведение увеличений двух линз и приблизительно равно $(N/f_e)/(l/f_o)$, где l – расстояние между линзами, N – расстояние наилучшего зрения (обычно $N = 25$ см), f_o и f_e – фокусные расстояния объектива и окуляра.

Вопросы

1. Где следует расположить пленку, если камера предназначена для получения четкого изображения очень далеких объектов?
2. Может ли рассеивающая линза при каких-либо условиях создавать действительное изображение? Объясните.
3. Почему фокусное расстояние собирающей линзы должно быть короче, чем у рассеива-

ющей, если мы хотим с помощью собирающей линзы определить фокусное расстояние рассеивающей линзы, как в примере 35.6?

4. Чем толще двояковыпуклая линза в центре по сравнению с краями, тем короче фокусное расстояние линзы при заданном ее диаметре. Объясните.

5. Линза изготовлена из материала с показателем преломления $n = 1{,}30$. В воздухе она действует как собирающая линза. Будет ли она собирающей, если ее поместить в воду? Поясните ответ построением хода лучей.

6. Сравните уравнение зеркала (34.3) с уравнением линзы (35.4). Отметьте сходство и различие. Сравните также соглашения о знаках величин, входящих в оба уравнения.

7. Докажите, что действительное изображение, создаваемое тонкой линзой, всегда перевернутое, в то время как мнимое изображение всегда прямое, если объект реальный.

8. Световые лучи обратимы. Совместимо ли это с уравнением линзы?

9. Можно ли спроецировать действительные изображения на экран? А мнимые изображения? Можно ли сфотографировать эти изображения? Не торопитесь с ответом!

10. Несимметричная (например, плоско-выпуклая) линза создает изображение близкого предмета. Изменится ли положение изображения, если линзу перевернуть?

11. Тонкую собирающую линзу приблизили к объекту. Изменится ли при этом а) положение и б) величина изображения? Если изменится, то как?

12. Опишите все условия, при которых собирающая линза создает а) изображение, превышающее объект; б) мнимое изображение; в) прямое изображение; г) увеличение $+1$ и -1.

13. Опишите все условия, при которых рассеивающая линза создает а) изображение, превышающее объект; б) мнимое изображение; в) прямое изображение; г) увеличение $+1$ и -1.

14. Зависит ли фокусное расстояние линзы от окружающей ее среды? А фокусное расстояние сферического зеркала? Объясните.

15. Подводная линза представляет собой заполненный воздухом тонкостенный контейнер. Какой должна быть форма контейнера, чтобы линза была а) собирающей; б) рассеивающей? Поясните ответ построением хода лучей.

16. При каких условиях изображенная на рис. 35.5, *а* двояковыпуклая линза будет рассеивающей?

17. Дополните диаграмму хода лучей на рис. 35.18, *а*, указав, где находятся промежуточное изображение и фокальные точки.

18. Почему при наводке на более близкий объект линзу камеры приходится удалять от пленки на большее расстояние?

19. В камере-обскуре вместо линзы используется маленькое отверстие. Построив ход лучей, покажите, как, пользуясь камерой-обскурой, можно получать достаточно четкие изображения. Рассмотрите, в частности, два точечных объекта, отстоящие друг от друга на 2,0 см и находящиеся на расстоянии 1,0 м от камеры-обскуры с диаметром входного отверстия 1 мм. Докажите, что на пленке на расстоянии 5 см за отверстием каждый объект создает небольшое, легко разрешимое пятно.

*20. Почему бифокальные очки требуются главным образом пожилым, а не молодым людям?

*21. Объясните, почему пловцы с хорошим зрением видят под водой далекие объекты размытыми. Построив ход лучей, покажите, почему очки или маски решают эту проблему.

*22. Будет ли близорукий человек, носящий коррегирующие линзы, отчетливо видеть с ними под водой? Свой ответ (утвердительный или отрицательный) поясните, построив ход лучей.

*23. Человеческий глаз во многом напоминает камеру, однако если затвор открыт и камера движется, то изображение размывается, а вот если вам случится двинуть головой, не закрывая при этом глаз, то вы все равно будете видеть все вполне отчетливо. Объясните.

*24. В качестве стекол в очках для чтения используются собирающие линзы. Простая лупа – тоже собирающая линза. Можно ли на этом основании считать, что очковые стекла – это лупы? Обсудите сходство и различия между собирающими линзами, используемыми в качестве очковых стекол и луп.

*25. Какое изображение образуется на сетчатой оболочке человеческого глаза: прямое или перевернутое? Что следует из этого для нашего восприятия объектов?

*26. В недорогих микроскопах для детей изображения обычно бывают окрашены по краям. Почему?

*27. Сферическая аберрация тонкой линзы сводится до минимума, если лучи одинаково преломляются на обеих поверхностях. Если для получения действительного изображения удаленного объекта используется плоско-выпуклая линза, то какой поверхностью она должна быть обращена к объекту? Постройте ход лучей, чтобы пояснить свой ответ.

*28. Какие из аберраций, присущих простым линзам, отсутствуют (или сильно ослаблены) у человеческого глаза?

*29. Объясните, почему хроматическая аберрация наблюдается у тонких линз, но отсутствует у зеркал?

Задачи

Раздел 35.1

1. (II) а) Пусть радиус кривизны поверхности на рис. 35.1 равен $R = 32$ см. Если $n_1 = 1{,}00$ и $n_2 = 1{,}50$, то где будет изображение удаленного объекта? б) Можно ли назвать это место фокальной точкой поверхности? Если да, то существует ли у поверхности вторая фокальная точка (как у линзы)? Если существует, то где она расположена? в) Где находится изображение объекта, расположенного на расстоянии 1,12 м от поверхности?

2. (II) Какой кажется глубина озера наблюдателю в примере 35.1, если он смотрит под углом 45°?

3. (II) Плоскопараллельная стеклянная пластина ($n = 1{,}56$) толщиной 20 см лежит на поверхности воды в бассейне глубиной 20 см. а) На какой глубине от верхней поверхности пластины наблюдатель увидит дно бассейна, глядя сверху вниз по вертикали? б) А если наблюдатель смотрит под углом 45°?

4. (III) Докажите справедливость уравнения (35.1) для выпуклых и вогнутых сферических поверхностей и для различных расположений объектов и изображений, если придерживаться соглашений, принятых в разд. 35.1. Докажите это, построив ход лучей для всех возможных случаев по аналогии с рис. 35.2. Рассмотрите случаи $n_2 > n_1$ и $n_2 < n_1$.

Раздел 35.2

5. (I) Изображение объекта, находящегося на расстоянии 32,0 см перед линзой, расположено на расстоянии 43,0 см за линзой. Какого типа эта линза и чему равно ее фокусное расстояние? Является изображение действительным или мнимым?

6. (I) Изображение объекта, находящегося на расстоянии 34,0 см перед линзой, расположено на расстоянии 11,0 см перед этой линзой (т. е. по ту же сторону линзы, что и объект). Какого типа эта линза и чему равно ее фокусное расстояние? Является изображение действительным или мнимым?

7. (I) Поверхности двояковыпуклой линзы имеют один и тот же радиус кривизны 28,0 см. Чему равен показатель преломления линзы, если ее фокусное расстояние равно 26,2 см?

8. (I) Плоско-выпуклая линза должна иметь фокусное расстояние 18,0 см. Каким должен быть радиус кривизны выпуклой поверхности линзы из плавленого кварца?

9. (I) Каковы размеры изображения Солнца на пленке, если фокусное расстояние объектива камеры равно 50 мм? Диаметр Солнца $1{,}4 \times 10^6$ км, расстояние до Солнца $1{,}5 \cdot 10^8$ км.

10. (II) Собирающая линза с фокусным расстоянием 22,0 см расположена на расстоянии 15,0 см от рассеивающей линзы. На рассеивающую линзу падает параллельный пучок света. После собирающей линзы пучок вновь оказывается параллельным. Чему равно фокусное расстояние рассеивающей линзы?

11. а) Насекомое размером 1,50 см находится на расстоянии 1,3 м от линзы с фокусным расстоянием + 135 мм. Где будет изображение? Каковы его размеры (высота)? Какого оно типа? б) Повторите решение задачи для случая рассеивающей линзы с фокусным расстоянием − 135 мм.

12. (II) Докажите аналитически, что рассеивающая линза не может создавать действительное изображение реального объекта. Можете ли вы описать ситуацию, в которой с помощью рассеивающей линзы удастся получить действительное изображение?

13. (II) Линза с показателем преломления n погружена в среду с показателем преломления n' ($n' \neq 1$). Выведите для этого случая уравнения, эквивалентные (35.2)–(35.5).

14. (II) На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием 21,5 см должен находиться объект, если его изображение должно иметь увеличение 3,00 и быть а) мнимым; б) действительным. Решите ту же задачу для рассеивающей линзы с тем же фокусным расстоянием.

15. (II) Слайд шириной 35 мм (в действительности слайд имеет стандартные размеры 24 × × 36 мм) надо спроецировать на экран размером 1,20 × 1,80 м, установленный на расстоянии 45,0 м от проектора. Каким должно быть фокусное расстояние линзы объектива проектора, чтобы изображение покрывало весь экран?

16. (II) Докажите, аналитически, что изображение, создаваемое собирающей линзой, будет действительным и перевернутым, если объект находится за фокальной точкой ($d_o > f$), и мнимым и прямым, если объект находится ближе фокальной точки ($d_o < f$). Опишите изображение в том случае, когда объектом служит мнимое изображение (создаваемое другой линзой) и $-d_o > f$, а также в случае $0 < -d_o < f$.

17. (II) Рассеивающая линза приставлена вплотную к собирающей линзе с фокусным расстоянием f_C, как на рис. 35.13. Докажите, что если f_T – фокусное расстояние комбинации линз, то фокусное расстояние f_D рассеивающей линзы дается формулой

$$\frac{1}{f_D} = \frac{1}{f_T} - \frac{1}{f_C}.$$

18. (II) а) Докажите, что если две линзы с фокусными расстояниями f_1 и f_2 приставлены

вплотную друг к другу, то фокусное расстояние f_T их комбинации дается формулой $f_T = f_1 f_2 / (f_1 + f_2)$. б) Обобщите формулу на случай трех находящихся в контакте линз.

19. (II) На каком расстоянии друг от друга находятся объект и его изображение, создаваемое собирающей линзой с фокусным расстоянием 65 см, если изображение в 3,0 раза превышает объект и является действительным?

20. (II) Двояковыпуклая линза (рис. 35.5, *а*) из крона имеет радиусы кривизны 21,5 и 17,2 см. Где находится изображение и каково увеличение объекта, если он находится от линзы на расстоянии а) 135 см; б) 46,5 см?

21. (II) Докажите, что уравнение линзы можно представить в *ньютоновской форме*:

$$xx' = f^2,$$

где x – расстояние от объекта до фокальной точки с передней стороны линзы, x' – расстояние от изображения до фокальной точки с другой стороны линзы.

22. (II) Рассеивающую линзу с $f = -32{,}5$ см поместили на расстоянии 11,0 см за собирающей линзой с $f = 14{,}5$ см. Где будет изображение бесконечно удаленного объекта?

23. (II) Две собирающие линзы с фокусным расстоянием 32,0 см помещены на расстоянии 21,5 см друг от друга. Объект расположен на расстоянии 55,0 см перед одной из линз. Где будет находиться окончательное изображение, создаваемое второй линзой? Чему равно полное увеличение?

24. (II) Яркий объект находится по одну сторону от собирающей линзы с фокусным расстоянием f, а белый экран для просмотра изображения – по другую сторону. Расстояние $d_T = d_i + d_o$ между объектом и экраном остается неизменным, а линзу можно передвигать. Докажите, что а) при $d_T > 4f$ четкое изображение на экране получается при *двух* положениях линзы; б) при $d_T < 4f$ нельзя получить четкое изображение, где бы ни находилась линза. в) Определите расстояние между двумя изображениями в п. «а» и отношение размеров этих изображений.

Раздел 35.3

25. (I) Лупа с 3-кратным увеличением для нормального глаза фокусируется на изображение вблизи расстояния наилучшего зрения. а) Чему равно фокусное расстояние лупы? б) Каким будет фокусное расстояние лупы с 3-кратным увеличением в случае глаза с расслабленными мышцами?

26. (I) Линза с фокусным расстоянием 6,0 см используется в качестве простой лупы. Где должен находиться объект для получения максимального увеличения в случае нормального глаза?

27. (II) У ребенка расстояние наилучшего зрения составляет около 10 см. Какое максимальное увеличение может получить этот ребенок, используя лупу с фокусным расстоянием 8,8 см? Сравните это увеличение с тем, которое достижимо в случае нормального глаза.

28. (II) Наблюдатель рассматривает объект шириной 2,50 мм сквозь линзу с фокусным расстоянием 8,50 см. Нормальный глаз видит изображение на расстоянии своего наилучшего зрения. Вычислите а) угловое увеличение; б) ширину изображения; в) расстояние от линзы до объекта.

29. (II) Небольшое насекомое находится на расстоянии 3,80 см перед линзой с фокусным расстоянием +4,00 см. Вычислите а) где находится изображение; б) его угловое увеличение.

30. (II) Лупа дает 3,3-кратное увеличение для нормального глаза, когда мышцы расслаблены. Каким будет увеличение для глаза с расслабленными мышцами, если расстояние наилучшего зрения для него равно а) 40 см; б) 15 см?

Раздел 35.4

31. (I) Каково увеличение астрономического телескопа, если фокусное расстояние объектива равно 50 см, а фокусное расстояние окуляра 3,1 см? Чему равна полная длина телескопа, настроенного на глаз с расслабленными мышцами?

32. (I) Астрономический телескоп состоит из объектива с фокусным расстоянием 80 см и окуляра с оптической силой +46 дптр. Чему равно полное увеличение такого прибора?

33. (I) Чему равна оптическая сила астрономического телескопа-рефлектора, если радиус кривизны его зеркала составляет 4,80 м, а фокусное расстояние окуляра равно 2,6 см?

34. (II) Заблудившийся в горах адвокат пытается изготовить самодельную зрительную трубу из стекол своих очков для чтения. Оптическая сила стекол равна +1,5 и +6,0 дптр. а) Какое максимальное увеличение может давать эта самодельная зрительная труба? б) Какую из линз следует выбрать в качестве окуляра?

35. (II) Галилеев телескоп, настроенный для глаза с расслабленными мышцами, имеет длину 33 см. Какое увеличение он дает, если фокусное расстояние объектива равно 36 см?

36. (II) 50-кратный астрономический телескоп настроен для глаза с расслабленными мышцами; при этом расстояние между объективом и окуляром равно 84 см. Чему равно фокусное расстояние каждой линзы?

37. (II) Фокусное расстояние объектива 6-кратного бинокля равно 24 см. Чему равно увеличение, если бинокль наведен на объект, находящийся на расстоянии 4,0 м? [6-кратное увеличение относится к удаленным объектам; уравнение (35.7) выполняется только для удаленных, а не для близких объектов.]

Раздел 35.5

38. (I) Линза объектива 900-кратного микроскопа имеет фокусное расстояние 0,40 см. Чему равно фокусное расстояние его окуляра, если длина тубуса составляет 16,8 см? Предполагается, что глаз нормальный и окончательное изображение находится на бесконечности.

39. (II) Фокусное расстояние окуляра микроскопа равно 2,50 см, а у объектива $f = 0{,}800$ см. Объект находится на расстоянии 0,850 см от объектива. Вычислите а) расстояние между линзами, когда микроскоп настроен для глаза с расслабленными мышцами; б) полное увеличение.

40. (II) Микроскоп имеет 15-кратный окуляр и 40-кратный объектив, расстояние между которыми составляет 17,5 см. Вычислите а) полное увеличение; б) фокусное расстояние каждой из линз. в) Определите, где должен находиться объект, чтобы нормальный глаз с расслабленными мышцами видел его сфокусированным.

41. (II) Фокусное расстояние окуляра микроскопа равно 2,0 см, а объектива 1,0 см. Вычислите а) где находится объект, если расстояние между линзами равно 18,0 см; б) полное увеличение для нормального глаза с расслабленными мышцами.

42. (II) Решите задачу 41 в предположении, что конечное изображение находится на расстоянии 25 см от окуляра (т. е. на расстоянии наилучшего зрения).

Раздел 35.6

*43. (I) Какую оптическую силу должны иметь очки для чтения, чтобы их владелец с расстоянием наилучшего зрения 120 см мог читать на расстоянии 25 см? Расстояние от линз до глаз предполагается равным 2,0 см.

*44. (I) Левый глаз человека коррегируется линзой $-6{,}5$ дптр. а) Близорук этот человек или дальнозорок? б) Чему равен предел зрения этого человека без очков?

*45. (I) Левый глаз человека может отчетливо различать объекты только в пределах от 18 до 36 см. а) Какой оптической силы контактная линза необходима этому человеку, чтобы он мог отчетливо видеть удаленные предметы? б) Каким при этом будет у него расстояние наилучшего зрения?

*46. (II) Пятидесятилетний человек пользуется при чтении газеты с расстояния наилучшего зрения линзами $+2{,}5$ дптр. Через десять лет он обнаруживает, что может читать в тех же очках газету, только держа ее на расстоянии 45 см. Какие очки нужны ему теперь?

*47. (II) Женщина отчетливо видит правым глазом объекты на расстоянии от 35 до 210 см. Какой рецепт на бифокальные очки следует ей выписать, чтобы она могла отчетливо видеть далекие предметы (сквозь верхнюю часть стекол) и читать книгу с расстояния 25 см (сквозь нижнюю часть стекол)? Предполагается, что линзы находятся от глаз на расстоянии 2,0 см.

*48. (II) Линзу $-3{,}0$ дптр держат на расстоянии 20 см от муравья размером 1,0 мм. Где находится изображение, какого оно типа и каков его размер?

*49. (II) Стеклянная линза ($n = 1{,}55$) в воздухе имеет оптическую силу $+3{,}0$ дптр. Чему равна оптическая сила этой линзы, если ее погрузить в воду?

*50. (II) Докажите, что если две линзы с оптической силой P_1 и P_2 привести в контакт, то оптическая сила этой комбинации линз будет равна $P = P_1 + P_2$. б) Оптометрист установил, что пациент отчетливо видит, если использовать комбинацию из трех соприкасающихся линз с фокусными расстояниями 60, -20 и 100 см. Какой оптической силы линзы следует выписать этому пациенту?

*51. (II) Одна из линз в очках близорукого человека имеет фокусное расстояние $-22{,}0$ см и находится на расстоянии 1,6 см от глаза. Каким должно быть фокусное расстояние контактной линзы у этого глаза, если человек решил заменить очки контактными линзами?

*52. Яблоко нормального глаза имеет в длину 2,00 см. Насколько длинее глазное яблоко близорукого человека из примера 35.11?

36 Волновая природа света. Интерференция

В том, что свет несет энергию, убеждался каждый, кто хотя бы раз с помощью лупы фокусировал солнечные лучи на листе бумаги и прожигал в нем дырочку. Но как распространяется свет и в какой форме он переносит энергию? При рассмотрении волновых процессов в гл. 15 мы отмечали, что энергия может переноситься двумя основными способами – с помощью частиц или волн. В первом случае носителями энергии служат материальные тела или частицы, например брошенный бейсбольный мяч или поток воды. Во втором случае, например, волны на поверхности воды или звуковые волны могут переносить энергию на большие расстояния, хотя при этом не происходили перемещения массы на такие же расстояния. В этой связи, говоря о природе света, законно спросить: распространяется ли свет от источника в виде потока отдельных частиц или же в виде волн, исходящих от источника? Как показывает история, вопрос этот оказался трудным. Дело в том, что свет не обнаруживает очевидным образом своей корпускулярной природы, равно как и не демонстрирует существования крохотных световых волн, которые распространялись бы подобно волнам на воде. До 30-х годов XIX в. данные, казалось, свидетельствовали в пользу то одной концепции, то другой, пока большинство физиков не приняло волновой теории. К концу XIX в. было установлено, что свет представляет собой *электромагнитную волну* (гл. 33). Хотя XX век внес свои поправки и изменения (гл. 40), волновая теория света оказалась чрезвычайно успешной. Мы обсудим доказательства, на которые опирается волновая теория света, и познакомимся с тем, как эта теория объясняет широкий круг явлений.

36.1. Волны или частицы? Принцип Гюйгенса и дифракция

Современник Ньютона голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629–1695) предложил волновую теорию света, обладавшую многими достоинствами. Физики и поныне находят положение волнового фронта в последующие моменты времени по его положению в данный момент методом, некогда разработанным Гюйгенсом. Он извес-

Рис. 36.1. Принцип Гюйгенса позволяет определить новое положение волнового фронта CD, если прежнее положение AB известно.

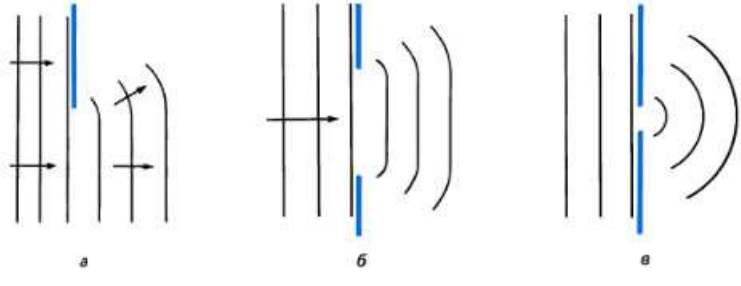
тен как **принцип Гюйгенса** и может быть сформулирован следующим образом: *каждую точку волнового фронта можно рассматривать как источник элементарных волн, распространяющихся в первоначальном направлении со скоростью волны; новое положение волнового фронта совпадает с огибающей элементарных волн.*

В качестве простого примера применения принципа Гюйгенса рассмотрим волновой фронт AB на рис. 36.1, распространяющийся от источника S. Условимся считать, что среда *изотропна*, т. е. скорость v волн одинакова по всем направлениям. Чтобы найти положение волнового фронта спустя короткий промежуток времени t после того, как он занимал положение AB, проведем окружности радиусом $r = vt$. Центры этих окружностей лежат на исходном волновом фронте AB, а сами окружности представляют собой элементарные волны Гюйгенса. Огибающая этих элементарных волн – линия CD – определяет новое положение волнового фронта.

Принцип Гюйгенса особенно полезен при рассмотрении случаев, когда волны встречают на своем пути какое-нибудь препятствие и волновой фронт частично прерывается. Согласно принципу Гюйгенса, волны должны огибать препятствие, как это показано на рис. 36.2. Именно так ведут себя волны на поверхности воды, в чем мы убедились в гл. 15 (рис. 15.23 и 15.24). Огибание волнами препятствий и проникновение в «область тени» получило название **дифракции**. Так как дифракция имеет место для волн, а не для частиц, это явление служит одним из подтверждений волновой природы света.

Дифрагирует ли свет? В середине XVII в. монах ордена

Рис. 36.2. Принцип Гюйгенса дает согласие с дифракцией на краю препятствия (*а*), большом отверстии (*б*) и малом отверстии (*в*), характерный размер которого по порядку величины сравним с длиной световой волны.



иезуитов Франческо Гримальди (1618–1663) обратил внимание на то, что, когда солнечный свет проникает в затемненную комнату через небольшое отверстие в ставне, «зайчик» на противоположной стене оказывается больше, чем следует из геометрической оптики. Гримальди заметил также, что края изображения размыты и окружены цветными полосами. Он приписал это явление дифракции света. Ньютон, отстаивавший корпускулярную теорию света, был осведомлен о результате Гримальди. Он полагал, что наблюдавшийся Гримальди эффект был обусловлен взаимодействием корпускул («маленьких тел») с краями отверстия. Если бы свет представлял собой волну, утверждал Ньютон, то световые волны должны были бы отклоняться от первоначального направления сильнее, чем это наблюдалось. Аргументы Ньютона казались вполне разумными. Но, как было показано в гл. 15, дифракция оказывается значительной только при условии, что размеры препятствия или отверстия сравнимы с длиной волны (рис. 15.24). Ньютон не догадывался, что длины волн видимого света чрезвычайно малы и поэтому дифракционные эффекты крайне слабы. (Именно поэтому столь успешно применяется в геометрической оптике представление о лучах: обычно размеры препятствий и отверстий значительно превышают длину волны света, и поэтому дифракция оказывается сравнительно слабой.)

36.2. Принцип Гюйгенса и закон преломления

Законы отражения и преломления во времена Ньютона были хорошо известны. Закон отражения не позволял отдать предпочтение одной теории (корпускулярной или волновой) перед другой. Если волны отражаются от поверхности, то угол падения должен быть равен углу отражения (рис. 15.15); но то же справедливо и применительно к частицам или корпускулам: вспомните хотя бы теннисный мяч, ударяющийся без подкрутки о плоскую поверхность.

Иное дело – закон преломления. Рассмотрим случай, когда свет, входя в среду, отклоняется в направлении нормали (например, при переходе из воздуха в воду). Как видно из рис. 36.3, этот эффект можно воспроизвести с помощью принципа Гюйгенса, если предположить, что скорость света во второй среде меньше, т. е. что за время t точка B на волновом фронте AB смещается на расстояние $v_1 t$ и достигает точки D. С другой стороны, точка A смещается на расстояние $v_2 t$ и достигает точки C. Применив принцип Гюйгенса к точкам A и B, мы получим элементарные волны в точках C и D. Волновой фронт образует касательную к этим волнам, поэтому новый волновой фронт проходит по линии CD. Следовательно,

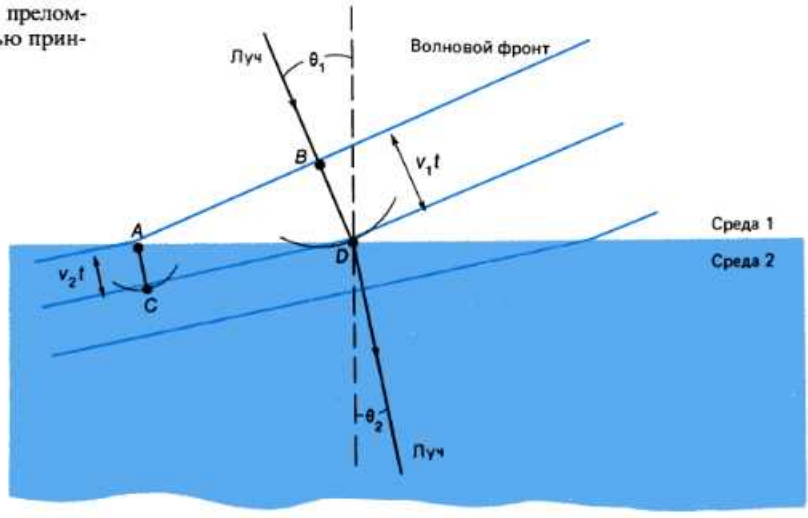


Рис. 36.3. Объяснение преломления света с помощью принципа Гюйгенса.

лучи (перпендикулярные волновым фронтам) отклоняются в направлении нормали, если $v_2 < v_1$, как показано на рис. 36.3[1]. Корпускулярная теория Ньютона предсказывала противоположный результат. Ньютон считал, что если траектория корпускул света при попадании в новую среду изменяет направление, то это происходит потому, что среда оказывает на корпускулы на границе некоторое воздействие. Предполагалось, что сила действует перпендикулярно границе и поэтому сказывается только на нормальной составляющей скорости корпускулы. Когда свет входит в среду, такую, как вода, где он отклоняется в направлении нормали, сила должна ускорять корпускулы таким образом, чтобы возрастала нормальная составляющая их скорости, так как только в этом случае угол преломления будет меньше угла падения. Следовательно, в теории Ньютона скорость света должна быть больше во второй среде ($v_2 > v_1$). Таким образом, волновая теория предсказывает, что скорость света, например, в воде меньше, чем в воздухе, тогда как корпускулярная теория Ньютона утверждает обратное. Эксперимент, в котором была действительно измерена скорость света в воде и тем самым подтверждено предсказание волновой теории, был проделан лишь в 1850 г. (французским физиком Жаном Фуко); к тому времени волновая теория, как мы увидим в следующем разделе, была полностью принята.

Нетрудно показать, что закон преломления Снелля следует непосредственно из принципа Гюйгенса, если скорость света v в любой среде связана со скоростью света c в вакууме и показателем преломления n соотношением (34.1): $v = c/n$. Из построения Гюйгенса на

[1] По существу, те же соображения мы использовали при обсуждении рис. 15.19.

рис. 36.3 видно, что угол ADC равен θ_2, а угол BAD равен θ_1. Поскольку два треугольника имеют общую сторону AD, то

$$\sin\theta_1 = \frac{v_1 t}{AD}, \quad \sin\theta_2 = \frac{v_2 t}{AD}.$$

Разделив одно соотношение на другое, получим

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

или, так как $v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$,

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

а это и есть закон преломления Снелля. (Аналогично можно вывести из принципа Гюйгенса и закон отражения, но мы оставляем этот вывод в качестве задачи 1 в конце главы).

Когда световая волна переходит из одной среды в другую, ее частота остается прежней, а длина волны изменяется. Это видно из рис. 36.3, где по предположению каждая линия, изображающая волновой фронт, соответствует гребню (пику) волны. Следовательно,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2 t}{v_1 t} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Если среда 1 – вакуум (или воздух), то $n_1 = 1$, $v_1 = c$, и, обозначив λ_1 просто λ, получим, что длина волны в среде с показателем преломления n $(= n_2)$ равна

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}. \tag{36.1}$$

Этот результат согласуется с постоянством частоты f, так как $c = f\lambda$. Комбинируя последнее соотношение с соотношением $v = f\lambda_n$ в среде, где $v = c/n$, получаем $\lambda_n = v/f = c/nf = f\lambda/nf = \lambda/n$.

36.3. Интерференция. Опыт Юнга: интерференция от двух щелей

В 1801 г. англичанин Томас Юнг (1773–1829) получил убедительное подтверждение волновой природы света и даже сумел измерить длину световой волны. Схема знаменитого опыта Юнга интерференции от двух щелей изображена на рис. 36.4. Свет от источника (Юнг использовал Солнце) проходит через щель S и затем падает на второй экран, в котором на близком расстоянии друг от друга прорезаны две щели – S_1 и S_2. Если свет состоит из частиц, то на экране, расположенном позади щелей, можно ожидать две яркие линии, как на рис. 36.4, *б*. Но Юнг наблюдал целую серию ярких линий, как показано

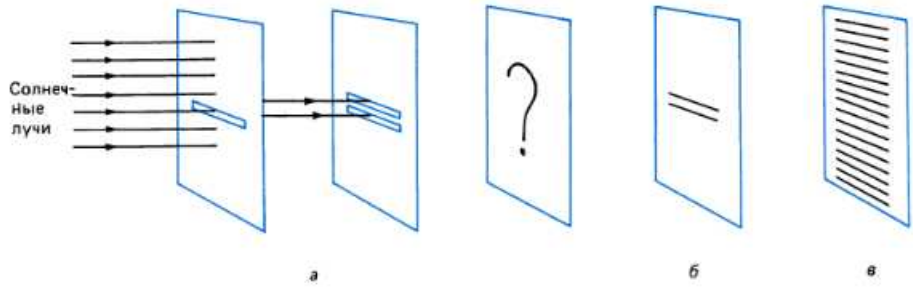


Рис. 36.4. *а* – опыт Юнга с двумя щелями; *б* – если свет – поток корпускул, то на экране, поставленном за щелями, можно было бы ожидать появления двух светлых линий; *в* – Юнг наблюдал много линий.

на рис. 36.4, *в*, и объяснил эту картину как результат интерференции волн. Чтобы понять ход рассуждений Юнга, представим себе плоские волны света с определенной частотой (такой свет называется *монохроматическим*), падающие на две щели, как показано на рис. 36.5. Вследствие дифракции волны после прохождения двух узких щелей распространяются, как это изображено на рисунке. Точно такую же интерференционную картину можно наблюдать, бросив в озеро два камня (рис. 15.21) или изучая акустическое поле двух громкоговорителей (рис. 16.4).

Чтобы понять, каким образом возникает интерференционная картина на экране, воспользуемся рис. 36.6. На нем изображены волны длиной λ, проходящие через щели S_1 и S_2 на расстоянии d одна от другой. За щелями волны распространяются по всем направлениям, но на рисунке изображены только волны под тремя различными углами θ. На рис. 36.6, *а* показаны волны, попадающие в центр экрана ($\theta = 0$). От каждой из двух щелей волны проходят одинаковое расстояние и достигают экрана в одной фазе. И в этом случае происходит усиливающая интерференция и в центре экрана появляется светлое пятно. Усиливающая интерференция возникает всякий раз, когда разность хода двух лучей равна одной длине волны (или любому целому числу длин волн), как показано на рис. 36.6, *б*. Но если один из лучей проходит дополнительно еще половину длины волны (т. е. разность хода равна $^1/_2\lambda$, $^3/_2\lambda$, $^5/_2\lambda$ и т. д.), то обе волны попадут на экран в противофазе

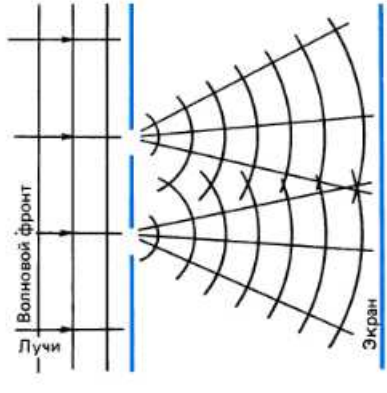


Рис. 36.5. Если свет – волна, то, проходя через одну из двух щелей, он интерферирует со светом, проходящим через другую щель.

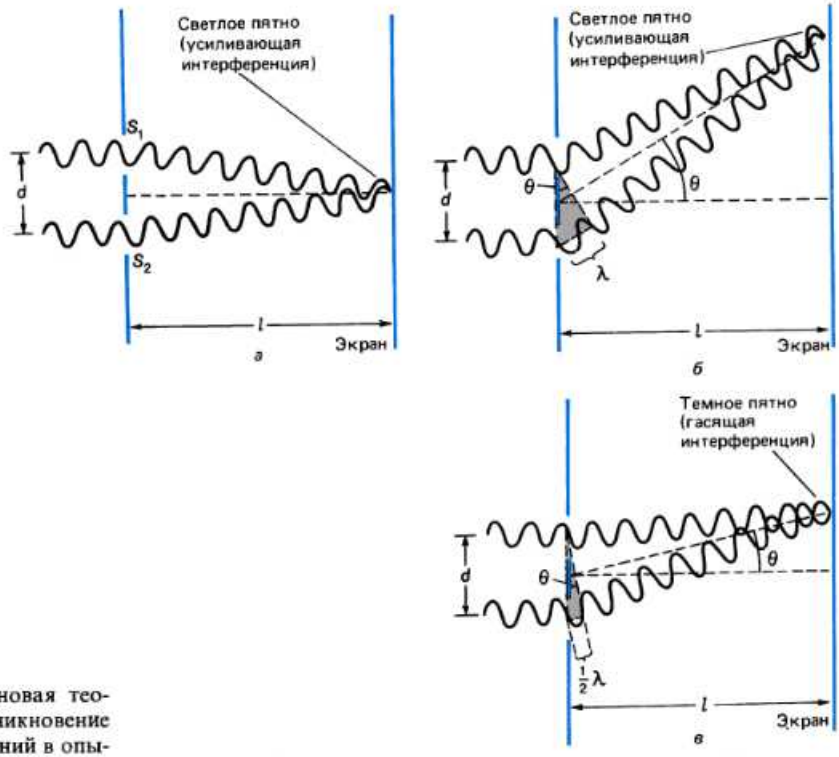


Рис. 36.6. Как волновая теория объясняет возникновение и расположение линий в опыте с двумя щелями.

(рис. 36.6, *в*). В этом случае происходит ослабляющая (гасящая) интерференция и экран оказывается темным. Так образуется серия светлых и темных полос (или *линий*).

Определим теперь точное положение светлых линий. Прежде всего заметим, что на рис. 36.6 масштаб несколько нарушен. В действительности расстояние d между щелями очень мало по сравнению с расстоянием l до экрана. Поэтому лучи от каждой щели, по существу, параллельны, и θ – угол, образуемый ими с горизонталью. Из затемненного треугольника на рис. 36.6, *б* видно, что дополнительное расстояние, проходимое нижним лучом, равно $d \sin \theta$. Усиливающая интерференция наблюдается на экране, если величина $d \sin \theta$ равна целому числу длин волн:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \left[\begin{matrix}\text{усиливающая} \\ \text{интерференция}\end{matrix}\right]. \quad (36.2а)$$

Значение m называется *порядком* интерференционной полосы. *Ослабляющая (гасящая) интерференция* наблюдается в том случае, когда разность хода $d \sin \theta$ равна $^1/_2$, $^3/_2$, ... и т. д. длин волн:

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \left[\begin{matrix}\text{ослабляющая} \\ \text{интерференция}\end{matrix}\right]. \quad (36.2б)$$

На рис. 36.7 показана интерференционная картина от двух щелей (интерференционные полосы зафиксированы на пленке, помещенной на экране).

Рис. 36.7. Интерференционные полосы в опыте с двумя щелями, обнаруженные на фотопленке, помещенной на экране. Стрелкой указана нулевая полоса. (Из книги: *Sears F. W., Zemansky M. W., Young H. D.* College Physics 4th ed.–Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1974, Figure 42-3. Печатается с разрешения.)

Пример 36.1. Две щели находятся на расстоянии 0,100 мм друг от друга и отстоят на 1,20 м от экрана. От удаленного источника на щели падает свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. На каком примерно расстоянии друг от друга расположены светлые полосы на экране?

Решение. Так как $d = 0{,}100$ мм $= 1{,}00 \cdot 10^{-4}$ м и $l = 1{,}20$ м, полоса первого порядка ($m = 1$) наблюдается при угле θ_1, задаваемом соотношением

$$\sin\theta_1 = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(1)(500 \cdot 10^{-9}\text{ м})}{1{,}00 \cdot 10^{-4}\text{ м}} = 5{,}00 \cdot 10^{-3}.$$

Это очень маленький угол, поэтому можно положить $\sin\theta = \theta$. Расстояние x_1, на котором полоса первого порядка находится от центра экрана, определяется соотношением $x_1/l = \theta_1$, поэтому

$$x_1 = l\theta_1 = (1{,}20\text{ м})(5{,}00 \cdot 10^{-3}) = 6{,}00\text{ мм}.$$

Вторая полоса ($m = 2$) находится на расстоянии

$$x_2 = l\theta_2 = l\frac{2\lambda}{d} = 12{,}0\text{ мм}$$

от центра и т. д. Таким образом, светлые полосы отстоят друг от друга примерно на 6,00 мм.

Из соотношения (36.2) видно, что положение всех полос, за исключением полосы нулевого порядка, зависит от длины волны. Следовательно, когда на две щели падает белый свет, то центральная полоса на экране будет белой, но полосы первого (и более высокого) порядка напоминают крошечные радуги. Угол θ будет наименьшим для фиолетового света и наибольшим для красного света. Измеряя положение интерференционных полос, Юнг сумел впервые определить длину волны видимого света [с помощью соотношения (36.2)]. Это позволило ему показать, что физически цвета различаются длиной волны.

Пример 36.2. Белый свет проходит через две щели, отстоящие друг от друга на расстояние 0,50 мм. Интерференционная картина наблюдается на экране, который находится на расстоянии 2,5 м. Полоса первого порядка напоминает радугу, фиолетовую с одного края и красную с другого. Фиолетовый цвет находится примерно в 2,0 мм, а красный – в 3,5 мм от середины центральной белой полосы. Оцените длины волн фиолетового и красного цветов.

Решение. Воспользуемся соотношением (36.2а) при $m = 1$ и $\sin\theta \approx 0$. Так как для фиолетового света $x = 2{,}0$ мм,

$$\lambda = \frac{d\theta}{m} = \frac{d}{m}\frac{x}{l} = \frac{(5{,}0 \cdot 10^{-4}\text{ м})(2{,}0 \cdot 10^{-3}\text{ м})}{2{,}5\text{ м}} = 4{,}0 \cdot 10^{-7}\text{ м},$$

или 400 нм. Для красного света $x = 3{,}5$ мм, поэтому $\lambda \approx 700$ нм.

36.4. Когерентность

Две щели на рис. 36.6 действуют подобно источникам излучения. Такие источники называются **когерентными**, поскольку сдвиг фаз между испускаемыми ими волнами остается неизменным. Интерференционная картина наблюдается только для когерентных источников. Если заменить две щели двумя маленькими лампами (или освещать каждую щель своей лампой), то интерференционной картины не будет: свет одной лампы имеет случайный сдвиг по фазе относительно света другой лампы, и экран будет более или менее равномерно освещен. Два таких источника называются **некогерентными**. Когерентность – тема сложная, и мы лишь кратко коснемся ее. Два пучка света не обязательно должны совпадать по фазе, чтобы возникала интерференционная картина. Например, предположим, что перед нижней щелью на рис. 36.6 поместили стеклянную пластинку такой толщины, что пучок света, пройдя через нижнюю щель, отстает от пучка света, проходящего через верхнюю щель, на половину длины волны. Сдвиг фаз между верхним и нижним пучками будет постоянно равен 180°, тем не менее на экране будет наблюдаться интерференционная картина. (Не можете ли вы угадать, как она выглядит? Подсказка: центральное пятно будет не светлым, а темным.) Два пучка могут быть когерентными и в том случае, когда они в фазе и когда между ними существует фазовый сдвиг – важно **лишь**, чтобы сдвиг по фазе был *постоянным* во времени.

Когерентные источники волн на воде или звуковых волн гораздо легче получить, чем когерентные источники света: когерентными источниками будут два динамика, издающие звук одной и той же чистой частоты. Две антенны, соединенные с одним и тем же LC-генератором, будут когерентными источниками низкочастотных электромагнитных волн. Но LC-генераторов высокочастотных волн в области видимого света (10^{15} Гц) не существует, так как L и C невозможно сделать достаточно малыми. В качестве источников видимого света нам приходится использовать колебания (или ускорение) электрических зарядов в атомах. Например, атомы в нити лампы накаливания возбуждаются нагревом и отдают избыток энергии в виде «цугов» световых волн, каждый из которых длится лишь около 10^{-8} с. Видимый нами свет представляет собой сумму огромного числа таких волновых цугов со случайными сдвигами фаз. Поэтому две лампы накаливания представляют собой некогерентные источники света, и интерференция не происходит. Если в качестве источника света взять одну лампу, то опыт с интерференцией на двух щелях даст положительный результат при условии, что обе щели освещаются одной и той же частью нити, т. е. каждый цуг сферических волн проходит в равной мере через обе щели, так что пучки света,

проходящие через обе щели, имеют, в сущности, одинаковую амплитуду и постоянный сдвиг по фазе. Если же свет, проходящий через щели, испущен различными частями нити, то когерентность отсутствует, так как цуги волн от различных частей нити (т.е. испускаемые различными атомами, которые в данном случае служат микроскопическими источниками света) имеют случайный сдвиг по фазе. Интерференционная картина размывается: две щели оказываются не вполне когерентными источниками.

Так как любой макроскопический источник состоит из множества микроскопических источников (атомов), мы можем говорить о когерентности отдельного источника. Лампа накаливания – не очень когерентный источник света, поскольку между светом, испускаемым различными частями ее нити, отсутствует постоянный сдвиг фаз. Подлинно когерентный источник света – *лазер* – был разработан только в 50-х годах XX в. Каким образом в лазере возникает узкий пучок когерентного излучения, а также некоторые из приложений лазера, мы рассмотрим в гл. 41. При освещении двойной щели лазерным светом вследствие его когерентности интерференционная картина получается очень четкой.

Когерентность – понятие относительное: идеально когерентный пучок соответствовал бы идеальной синусоидальной световой волне (т.е. волне одной частоты), которая существует бесконечно долго. Полной некогерентности отвечает набор волн, сдвиг фаз между которыми хаотически меняется во времени. В качестве меры «относительной когерентности» можно принять четкость интерференционной картины от двух щелей.

Когерентность существенно зависит от интервала частот, присутствующих в волне. Рассмотрим, например, два динамика, издающих звук на одной и той же частоте. Сдвиг по фазе между волнами будет зависеть от положения слушателя (см. пример 16.8), но, где бы тот ни находился, этот сдвиг останется постоянным по времени, и поэтому звуковые волны будут когерентны. Если же частоты слегка различны, то сдвиг фаз медленно изменяется (будут слышны биения), и звуковые волны окажутся некогерентными. Предположим теперь, что динамики издают один и тот же звук, содержащий многие частоты, которые изменяются во времени (например, звучит музыка). Если вы находитесь точно посредине между динамиками, то обе звуковые волны достигают вас в фазе. Но при любом другом положении волны должны проходить неодинаковые пути, и различные их составляющие будут интерферировать. Следовательно, сдвиг фаз между двумя волнами будет непрестанно меняться, и волны окажутся некогерентными относительно друг друга.

36.5. Видимый спектр и дисперсия

Волновая теория позволяет успешно описать два наиболее важных свойства света: его интенсивность (яркость) и цвет. *Интенсивность* света определяется квадратом амплитуды волны, как и для любой другой волны [см. разд. 15.3 или формулы (33.15) и (33.17)]. *Цвет* зависит от длины волны или частоты света. Видимый свет (тот, который воспринимает наш глаз) соответствует диапазону длин волн от 400 до 750 нм[1]. Это *видимая область спектра* (или *оптический диапазон*). Она включает различные цвета – от фиолетового до красного (рис. 36.8). Свет с длинами волн короче 400 нм называется ультрафиолетовым (УФ), а с длинами волн больше 750 нм – инфракрасным (ИК)[2]. Хотя человеческий глаз не воспринимает УФ- и ИК-излучение, некоторые типы фотопленок обладают чувствительностью к УФ и ИК.

Известно, что призма разлагает белый цвет на все цвета радуги. Происходит это из-за того, что показатель преломления зависит от длины волны. Характер такой зависимости для некоторых сред показан на рис. 36.9. Белый свет представляет собой смесь всех длин волн видимого диапазона. Падая на призму (рис. 36.10), волны различной длины преломляются на различные углы. Так как показатель преломления больше для более коротких волн, фиолетовый свет преломляется сильнее, а красный – слабее, что и показано на рисунке. Подобное разложение белого света в полный спектр называют *дисперсией*.

Ярким примером дисперсии (например, на капельках воды) служит радуга. Ее можно наблюдать, глядя на водопад, если солнце находится у вас за спиной. На рис. 36.11 показано, как красные и фиолетовые лучи преломляются сферическими капельками воды и отражаются от их внутренней поверхности. Красные лучи преломляются меньше и попадают в глаз наблюдателя от капелек, находящихся на большей высоте. Именно поэтому верхняя полоса радуги всегда оказывается красного цвета.

В основе великолепной игры бриллиантов (ограненных и отшлифованных алмазов) лежит совместный эффект дисперсии и полного внутреннего отражения. Так как

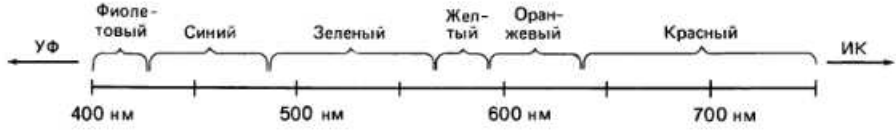


Рис. 36.8. Спектр видимой области спектра (показаны диапазоны длин волн, соответствующие различным цветам).

[1] Иногда длины волн света измеряют в ангстремах (Å): $1\ Å = 1 \cdot 10^{-10}$ м. В этих единицах видимый свет занимает диапазон от 4000 до 7500 Å.

[2] Полный спектр электромагнитных волн изображен на рис. 33.10.

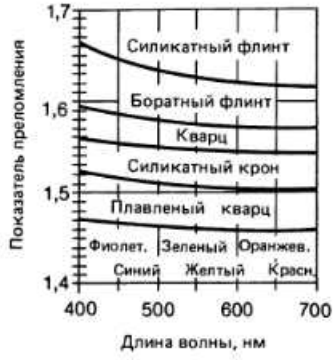


Рис. 36.9. Показатель преломления как функция длины волны.

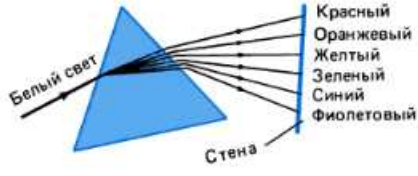


Рис. 36.10. Белый свет разлагается призмой в видимый спектр.

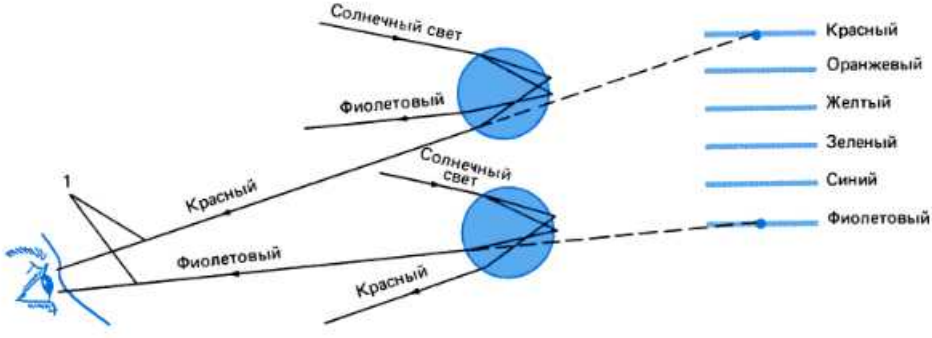


Рис. 36.11. Образование радуги. 1 – эти два луча видит наблюдатель (не в масштабе).

алмазы имеют необычайно высокий показатель преломления (около 2,4), критический угол полного внутреннего отражения составляет у них всего лишь 25°. Поэтому падающий свет успевает многократно отразиться от внутренних граней, прежде чем приобретет угол падения меньше 25° и выйдет наружу. В процессе многочисленных отражений свет проходит внутри бриллианта достаточно большой путь для разделения цветов, что позволяет увидеть яркий блеск и переливы всех цветов.

36.6. Распределение интенсивности в интерференционной картине от двух щелей

В разд. 36.3 было показано, что интерференционная картина, создаваемая когерентным светом, падающим на две щели – S_1 и S_2 (рис. 36.6 и 36.7), имеет вид чередующихся светлых и темных полос. Если две монохроматические

волны с длиной λ попадают на щели в фазе, то максимумы (середины ярких полос) возникают под углами θ, удовлетворяющими соотношению

$$d \sin \theta = m\lambda,$$

а минимумы (середины темных полос) – под углами θ, удовлетворяющими соотношению

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

где m – целое число ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Определим распределение интенсивности света в интерференционной картине (т. е. при всех углах θ). Для простоты предположим, что если закрыть любую из щелей, то свет дифрагирует на другой щели, равномерно освещая значительную часть экрана. Интенсивность I света в любой точке пропорциональна квадрату амплитуды световой волны (разд. 15.3). Поскольку свет – электромагнитная волна, то интенсивность I пропорциональна квадрату электрического поля E или магнитного поля B (разд. 33.7). Но величины E и B пропорциональны, поэтому несущественно, какую из них выбрать. Обычно выбирают E и записывают: $I \sim E^2$. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в любой точке P (рис. 36.12) представляет собой сумму напряженностей электрического поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ волн, прошедших через каждую из двух щелей. Так как векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, по существу, параллельны, величина напряженности электрического поля под углом θ (т. е. в точке P) равна

$$E_\theta = E_1 + E_2 .$$

Слагаемые E_1 и E_2 синусоидально изменяются во времени с частотой $f = c/\lambda$, но различаются по фазе, которая зависит от расстояния, проходимого волной от щели. Таким образом, мы можем записать величину напряженности электрического поля в точке P для света, приходящего от каждой из двух щелей:

$$E_1 = E_{10} \sin 2\pi f t, \qquad (36.3)$$

$$E_2 = E_{20} \sin (2\pi f t + \delta),$$

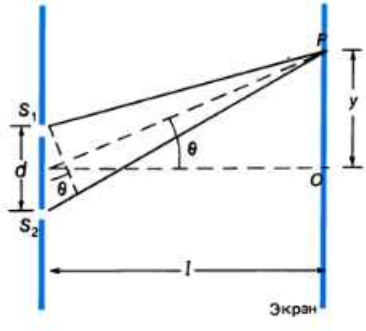


Рис. 36.12. Определение интенсивности в интерференции от двух щелей.

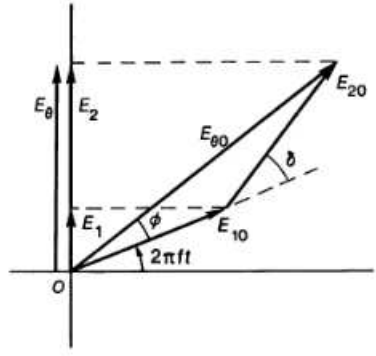


Рис. 36.13. Фазовая диаграмма для интерференционной картины от двух щелей.

где E_{10} и E_{20} – амплитуды, а δ – разность фаз. Величина δ зависит от угла θ. Определим характер этой зависимости. В центре экрана (в точке O) $\delta = 0$. Если разность хода от точки P до S_1 и S_2 равна $d \sin \theta = \lambda/2$, то обе волны придут в точку P в противофазе, и $\delta = \pi$ (или 180°). Если же $d \sin \theta = \lambda$, то обе волны различаются по фазе на $\delta = 2\pi$. В общем случае разность фаз δ связана с углом θ соотношением

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d \sin \theta}{\lambda},$$

или

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta. \qquad (36.4)$$

Чтобы определить $E_\theta = E_1 + E_2$, нам необходимо сложить скаляры E_1 и E_2, которые являются синусоидальными функциями времени с разностью фаз δ. Один из способов вычисления суммы E_1 и E_1 состоит в построении *фазовой диаграммы*. (В гл. 32 мы уже прибегали к этому способу.) Как видно из рис. 36.13, сначала надо построить вектор длиной E_{10}, изображающий амплитуду поля E_1 [см. соотношение (36.3)], и вектор E_{20}, образующий заданный угол δ с E_{10} и изображающий амплитуду поля E_2. При вращении диаграммы с частотой f относительно начала координат проекции E_{10} и E_{20} на вертикальную ось описывают зависимость E_1 и E_2 от времени [см. соотношение (36.3)]. Пусть $E_{\theta 0}$ – «векторная сумма» E_{10} и E_{20}[1]. В действительности $E_{\theta 0}$ – амплитуда суммы $E_\theta = E_1 + E_2$, и проекция $E_{\theta 0}$ на вертикальную ось равна E_θ. Если щели освещены одинаково, то $E_{10} = E_{20} = E_0$. Из чертежа (рис. 36.13) видно, что угол ϕ равен $\delta/2$, и поэтому

[1] Следует подчеркнуть, что мы производим сложение не реальных векторов напряженностей электрического поля, а вспомогательных «фазовых векторов» для получения амплитуды с учетом разности фаз обеих волн.

$$E_\theta = E_{\theta 0} \sin\left(2\pi f t + \frac{\delta}{2}\right). \tag{36.5а}$$

Кроме того, видно также, что

$$E_{\theta 0} = 2E_0 \cos\phi = 2E_0 \cos\frac{\delta}{2}, \tag{36.5б}$$

и разность фаз δ определяется соотношением (36.4).

В действительности нас интересует не E_θ как функция времени, поскольку частота видимого света (от 10^{14} до 10^{15} Гц) слишком велика, а средняя интенсивность, пропорциональная квадрату амплитуды $E_{\theta 0}^2$. Отбросим слово «средняя». Пусть I_θ ($I_\theta \sim E_\theta^2$) – интенсивность в произвольной точке P экрана под углом θ к горизонтали, а I_0 – интенсивность в точке O (центр экрана), где $\theta = \delta = 0$ [$I_0 \sim (E_{10} + E_{20})^2 = (2E_0)^2$]. Тогда отношение I_θ/I_0 равно отношению квадратов амплитуд электрического поля в этих точках:

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{E_{\theta 0}^2}{(2E_0)^2} = \cos^2\frac{\delta}{2}$$

[мы воспользовались формулой (36.5б)]. Таким образом, интенсивность I_θ в любой точке связана с максимальной интенсивностью I_0 в центре экрана соотношением

$$I_\theta = I_0 = \cos^2\frac{\delta}{2}, \tag{36.6}$$

где разность фаз δ определяется формулой (36.4). Именно это соотношение и требовалось найти. Из соотношения (36.6) видно, что максимумы появляются там, где $\cos\delta/2 = \pm 1$, т. е. при $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$; из формулы (36.4) мы заключаем, что δ принимает эти значения при

$$d\sin\theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Минимумы возникают там, где $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, что соответствует

$$d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Эти результаты совпадают с полученными в разд. 36.3. Но теперь мы не только знаем положения максимумов и минимумов, но и можем по формуле (36.6) определить интенсивность во всех точках.

Если расстояние l от щелей до экрана велико по сравнению с расстоянием d между щелями ($l \gg d$) и мы имеем дело только с точками P, отстоящими от центра O на расстояние y, малое по сравнению с l ($y \ll l$), то (рис. 36.12)

$$\sin\theta = \frac{y}{l}.$$

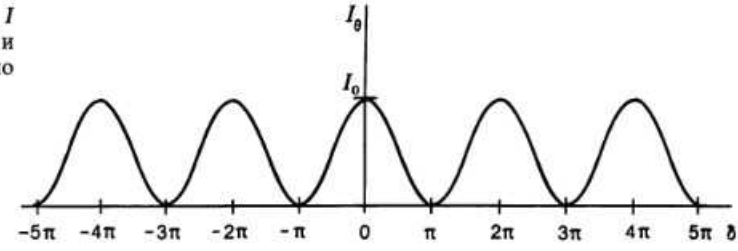


Рис. 36.14. Интенсивность I как функция разности фаз δ и положения на экране y (по предположению $y \ll l$).

Отсюда следует, что

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{l}y,$$

и соотношение (36.6) принимает вид

$$I = I_0\left[\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda l}y\right)\right]^2 \quad [y \ll l,\ d \ll l]. \tag{36.7}$$

Зависимость интенсивности I от разности фаз δ представлена на рис. 36.14. В приближении (36.7) можно считать, что по горизонтальной оси отложено также и y – расстояние от центра экрана.

Распределение интенсивности, описываемое формулами (36.6) и (36.7) и показанное на рис. 36.14, представляет собой серию максимумов одинаковой высоты. Оно основано на предположении, что каждая щель (одна) может равномерно освещать весь экран. Такое допущение никогда не выполняется, в чем мы убедимся при рассмотрении дифракции в следующей главе. Будет показано, что центральный максимум самый высокий, а каждый последующий максимум (по обе стороны) убывает по величине.

36.7. Интенсивность при когерентном и некогерентном источниках

Рассмотрим кратко, каким будет распределение интенсивности, если щели заменить двумя *некогерентными* источниками света одинаковой интенсивности ($E_{10} = E_{20} = E_0$). Предположим вновь, что каждый источник в отдельности равномерно освещает экран. Разность фаз δ (двух волн в произвольной точке P) изменяется хаотически; поэтому в соотношении (36.6) нам необходимо взять среднее по времени от $\cos^2\delta/2$, которое равно $^1/_2$. Соответственно интенсивность $I_{\text{неког}}$ от двух некогерентных источников будет равна

$$I_{\text{неког}} = \frac{1}{2}I_{\text{ког}},$$

где $I_{\text{ког}}$ – интенсивность от двух когерентных источников в

центральном максимуме [$I_{\text{ког}}$ совпадает с I_0 в формуле (36.6)]. Этот результат, подтверждаемый экспериментом, может быть получен и другим способом. Когда источники когерентны, мы находим интенсивность, суммируя амплитуды испускаемых ими волн и возводя полученную сумму в квадрат:

$$I_{\text{ког}} \sim (E_{10} + E_{20})^2,$$

как это делалось в предыдущем разделе. Но когда два источника некогерентны, интенсивность одной волны никак не связана с интенсивностью другой волны; обе интенсивности суммируются:

$$I_{\text{неког}} \sim E_{10}^2 + E_{20}^2,$$

т. е. сначала возводим в квадрат амплитуды волн, а уже *затем* складываем их. При $E_{10} = E_{20} = E_0$ два выписанных выше соотношения принимают вид

$$I_{\text{ког}} \sim (2E_0)^2 = 4E_0^2,$$
$$I_{\text{неког}} \sim E_0^2 + E_0^2 = 2E_0^2,$$

откуда

$$I_{\text{неког}} = \frac{1}{2} I_{\text{ког}},$$

что соответствует полученному выше результату.

Следует подчеркнуть, что полная энергия, падающая на экран, будет одной и той же как при когерентности, так и при некогерентности источников (в предположении, что источники имеют одну и ту же интенсивность). Различие состоит в том, что в случае некогерентных источников энергия распределяется равномерно с интенсивностью $^1/_2 I_0$, в то время как в случае когерентных источников она концентрируется в максимумах, но ее средняя интенсивность равна $^1/_2 I_0$, так как среднее от $\cos^2 \delta/2$ в соотношении (36.6) по большому числу пиков равно 1/2. Таким образом, не возникает никакого противоречия с законом сохранения энергии.

36.8. Интерференция в тонких пленках

Интерференция света порождает многочисленные явления, наблюдаемые нами в повседневной жизни, например радужные переливы мыльных пузырей или тонких пленок нефти на воде. В этих и во многих других случаях окраска возникает в результате усиливающей интерференции света, отраженного двумя поверхностями тонкой пленки. Чтобы понять, как это происходит, рассмотрим тонкую пленку нефти на воде (рис. 36.15). Часть падающего света (от солнца или уличного фонаря) отражается в точке A от верхней поверхности, а часть света проходит внутрь пленки и отражается в точке B от ее нижней поверхности.

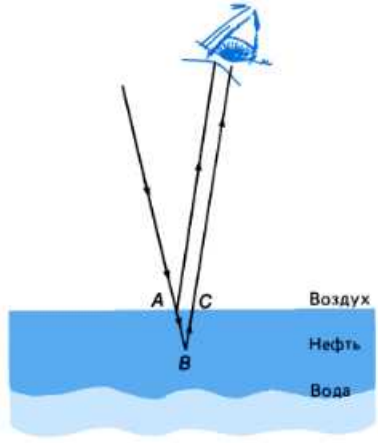


Рис. 36.15. Свет отражается от верхней и нижней поверхностей тонкой пленки нефти, лежащей на воде.

Свет, отраженный от нижней поверхности, проходит дополнительное расстояние *ABC*. Если расстояние *ABC* равно длине волны или целому числу длин волн, то обе волны (когерентные, так как они возникают в одной точке источника), интерферируя, усилят друг друга, и мы увидим свет[1]. Если же путь *ABC* равен $^1/_2\lambda$, $^3/_2\lambda$ и т. д., то обе волны окажутся в противофазе и, интерферируя, погасят друг друга. Под длиной волны λ здесь следует иметь в виду длину волны в пленке нефти [см. формулу (36.1)].

Если на такую пленку падает белый свет, путь *ABC* будет равен λ (или $m\lambda$, где m – целое число) при данном угле зрения только для определенной длины волны. Соответствующая окраска будет очень яркой. Для света, падающего под иным углом, путь *ABC* будет короче или длиннее, и усиливающая интерференция происходит для другого цвета. Таким образом, при наличии протяженного (неточечного) источника белого света мы увидим яркие разноцветные полосы, расположенные друг за другом. Неоднородность пленки по толщине также изменяет путь *ABC* и, следовательно, влияет на окраску наиболее ярко отраженного света.

Если искривленная стеклянная поверхность соприкасается с плоской стеклянной поверхностью (рис. 36.16, *а*), то при освещении сверху монохроматическим светом можно наблюдать серию концентрических кругов. Они называются *кольцами Ньютона*[2] и возникают вследствие интерференции света, отраженного верхней и нижней гра-

---

[1] Мы уже кратко упоминали о том, что это верно, если показатель преломления нефти меньше, чем показатель преломления воды.

[2] Хотя Ньютон дал подробное описание этих колец, их впервые наблюдал и описал его современник Роберт Гук. Ньютон не осознал важности этого явления как подтверждения правильности волновой теории света.

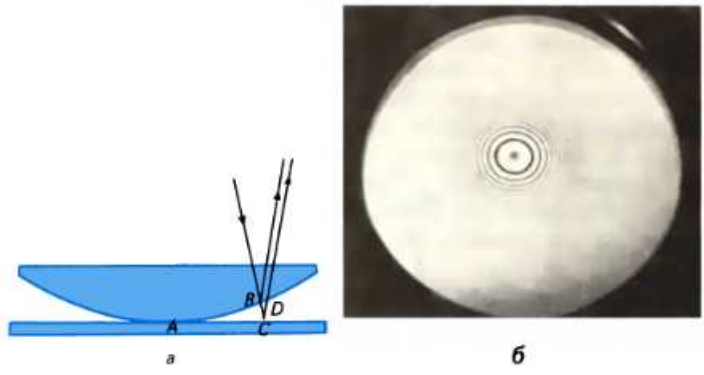
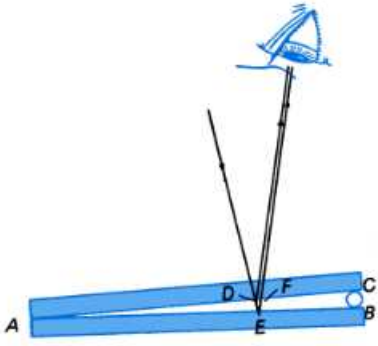


Рис. 36.16. Кольца Ньютона. (Круглые пятна в различных местах фотографии возникли из-за муарового рисунка при печати. Фотография воспроизводится с разрешения компании Bausch and Lomb, Inc.)

ницами *воздушного зазора* между стеклами. Поскольку толщина этого зазора (эквивалентного тонкой пленке) растет по мере удаления от центральной точки касания к краям, дополнительный путь нижнего луча (*BCD*) также увеличивается. Там, где он последовательно равен 0, $^1/_2\lambda$, $^3/_2\lambda$, 2λ и т. д., происходит соответственно ослабляющая и усиливающая интерференция, и мы наблюдаем серию светлых и темных кругов (рис. 36.16, *б*).

Заметим, что точка соприкосновения двух стекол (точка *A* на рис. 36.16, *а*) оказывается темной (рис. 36.16, *б*). Так как разность хода в этой точке равна нулю, можно было бы ожидать, что лучи, отражающиеся от верхней и нижней границ воздушного зазора, находятся в фазе, и точка соприкосновения будет светлой. Но в действительности она оказывается темной, и это свидетельствует о том, что лучи находятся в противофазе. Так может происходить только вследствие того, что одна из волн при отражении изменяет свою фазу на 180°. Как показывают опыт с кольцами Ньютона и другие эксперименты, *при отражении света от среды с бóльшим показателем преломления его фаза изменяется на 180°*. При отражении света от среды с меньшим показателем преломления его фаза не изменяется. (Это следует из уравнений Максвелла; аналогией служит волна, бегущая вдоль веревки, связанной из двух кусков различной толщины и плотности: если второй кусок веревки тяжелее первого, волна, отражаясь от границы их раздела, обращается, как на рис. 15.16; если же второй кусок легче первого, то изменения фазы волны не происходит.) Таким образом, свет, отражающийся от искривленной поверхности, ограничивающей воздушный зазор сверху (рис. 36.16, *а*), не изменяет своей фазы. На нижней поверхности, где свет падает из воздуха на стекло, при его отражении фаза изменяется на 180°. В результате разность фаз двух лучей, отражающихся в точке касания *A* стекол (где толщина воздушного зазора близка к нулю), равна 180°, или $^1/_2\lambda$, т. е. лучи оказываются в противофазе, и возникает темное пятно. Следующие темные кольца воз-

никают при условии, что разность хода BCD на рис. 36.16, *а* равна целому числу длин волн. Светлые кольца возникают там, где разность хода равна $^1/_2\lambda$, $^3/_2\lambda$ и т. д., так как изменение фазы на одной из поверхностей означает дополнительную разность хода $^1/_2\lambda$.



а

б

в

Рис. 36.17. *а* – световые лучи, отражаясь от верхней и нижней поверхностей тонкого воздушного клина, интерферируют и образуют светлые и темные полосы: *б* – интерференционная картина, наблюдаемая в случае оптически плоских стеклянных пластин (воспроизводится с разрешения The Van Keuren Co); *в* – интерференционная картина, наблюдаемая в случае неплоских пластин (воспроизводится с разрешения фирмы Bausch and Lomb, Inc.).

Пример 36.3. Очень тонкий провод диаметром $7{,}35 \cdot 10^{-3}$ мм помещен между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинами (рис. 36.17, *а*). Свет с длиной волны в воздухе 600 нм падает (и наблюдается) перпендикулярно пластинам. Наблюдатель видит серию светлых и темных полос (рис. 36.17, *б*). Сколько светлых и темных полос видит наблюдатель в данном случае? Какой будет полоса рядом с проводом – светлой или темной?

Решение. Тонкой пленкой в данном случае служит воздушный клин между двумя стеклянными пластинами. Из-за изменения фазы при отражении от нижней поверхности темные полосы соответствуют разности хода 0, λ, 2λ, 3λ и т. д. Так как световые лучи перпендикулярны пластинам, разность хода равна $2t$, где t – толщина воздушного зазора в данной точке. Следовательно, темные полосы наблюдаются там, где

$$2t = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Светлые полосы наблюдаются там, где $2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, m – целое число. В том

месте, где находится провод, $t = 7{,}35 \cdot 10^{-6}$ м. В этой точке разность хода составляет $2 \cdot (7{,}35 \cdot 10^{-6}\ \text{м}) / (6{,}00 \times 10^{-7}\ \text{м}) = 24{,}5$ длины волн. Так как это – полуцелое число, примыкающая к проводу полоса будет светлой. Всего вдоль пластин уложится 25 темных полос, соответствующих разности хода 0λ, 1λ, 2λ, 3λ, ..., 24λ, включая одну «полосу» в точке касания A ($m = 0$). Между ними расположатся 24 светлые полосы плюс одна полоса у провода, т. е. всего 25 светлых полос. Светлые и темные полосы будут ровными только при идеальной гладкости стеклянных пластин. В противном случае полосы искривятся (рис. 36.17, *в*). Это очень чувствительный метод проверки на гладкость поверхности.

Если клин между двумя стеклянными пластинами из примера 36.3 заполнить каким-нибудь прозрачным веществом, отличным от воздуха (например, водой), то картина сместится. Происходит это вследствие изменения длины волны света. В среде с показателем преломления n длина волны равна $\lambda_n = \lambda/n$, где λ – длина волны в вакууме. Если тонкий клин из примера 36.3 заполнен водой, то $\lambda_n = 600\ \text{нм}/1{,}33 = 450\ \text{нм}$, и вместо 25 темных линий их будет 33.

Если на тонкий клин, изображенный на рис. 36.16, *а* или 36.17, *а*, падает белый, а не монохроматический свет, то наблюдается серия окрашенных полос. Окраска обусловлена тем, что при отражении света усиливающая интерференция отраженного света для различных длин волн происходит в различных участках клина. Различие в толщине отчасти объясняет и радужные переливы при отражении света от мыльного пузыря или тонкой пленки нефти на поверхности лужи или озера. Длина волны, отвечающая самой яркой окраске, как мы уже знаем, зависит от угла зрения.

Пример 36.4. Мыльный пузырь кажется зеленым ($\lambda = 540$ нм) в точке, ближайшей к наблюдателю. Какова его минимальная толщина? Предположим, что $n = 1{,}35$.

Решение. От ближайшей к наблюдателю точки сферической поверхности свет отражается перпендикулярно. Следовательно, разность хода равна $2t$, где t – толщина мыльной пленки. При отражении света от наружной поверхности пузыря фаза изменяется на 180°. При отражении света от внутренней поверхности пузыря изменения фазы не происходит. Следовательно, зеленый свет отвечает минимальной разности хода $^1/_2\lambda$. Таким образом, $2t = \lambda/2n$, откуда $t = 540\ \text{нм}/(4 \cdot 1{,}35) = 100\ \text{нм}$.

Важным применением интерференции в тонких пленках служит создание неотражающей «просветленной» оптики, в частности линз, путем покрытия такими пленками. Стекло отражает около 4% падающего на него света. Высококачественные камеры, микроскопы и прочие оптические устройства могут содержать от 6 до 10 линз. Отражение всех их поверхностей может существенно уменьшить интенсивность света, а многократные отражения приводят к возникновению «вуали», ухудшающей качество изображения. Нанесение на поверхность линз очень тонкого покрытия позволяет значительно умень-

шить влияние этих факторов. Коэффициент отражения света на границе зависит от разности показателей преломления двух сред. В идеальном случае покрытие должно иметь показатель преломления, равный среднему геометрическому между показателями преломления воздуха и стекла; тогда коэффициент отражения на каждой поверхности будет примерно одинаковым, и при определенной длине волны, зависящей от толщины покрытия, произойдет почти полная ослабляющая интерференция. При близких длинах волн интерференция будет по крайней мере частично ослабляющей, но ясно, что с помощью однослойного покрытия нельзя устранить отражения при всех длинах волн. Тем не менее даже однослойное покрытие позволяет уменьшить коэффициент отражения падающего света от 4 до 1%. Нередко покрытие выбирается с таким расчетом, чтобы исключить центральную часть спектра (вблизи 550 нм). Края спектра – красный и фиолетовый – будут ослабляться меньше. Поскольку смесь фиолетового и красного дает пурпурный цвет, линзы с просветляющим покрытием отливают пурпуром. Линзы с двумя и тремя слоями покрытий будут еще слабее отражать свет в более широком диапазоне длин волн.

Пример 36.5. Чему равна толщина оптического покрытия из MgF_2 ($n = 1{,}38$), предназначенного для гашения света в окрестности длин волн 550 нм при нормальном падении на стекло с $n = 1{,}50$?

Решение. При отражении света от передней и от задней поверхностей покрытия происходит сдвиг по фазе на 180°. Следовательно, для того чтобы при нормальном падении возникла ослабляющая интерференция, на толщине покрытия должно укладываться полуцелое число длин волн, т. е. $2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, где m – целое число. Обычно выбирают минимальную толщину ($m = 0$), так как при этом ослабляющая интерференция возникает в самом широком диапазоне углов. При $m = 0$ получаем $t = \lambda_n/4 = \lambda/4n = (550\text{ нм})/(4 \cdot 1{,}38) = 99{,}6$ нм.

*36.9. Интерферометр Майкельсона

На интерференции в тонкой пленке основан принцип действия *интерферометра Майкельсона* (рис. 36.18)[1]. Он был изобретен американским физиком Альбертом А. Майкельсоном (разд. 34.2). Монохроматический свет от отдельной точки протяженного источника падает на полупрозрачное (посеребренное) зеркало M_s (которое *расщепляет пучок*). Половина интенсивности пучка направляется к неподвижному зеркалу M_2 и отражается обратно. Другая половина отражается от зеркала M_s, падает на подвижное зеркало M_1 (которое перемещается винтом с тонкой резьбой) и отражается от него. Отраженный пучок

[1] Существуют интерферометры и других типов, но интерферометр Майкельсона наиболее известен.

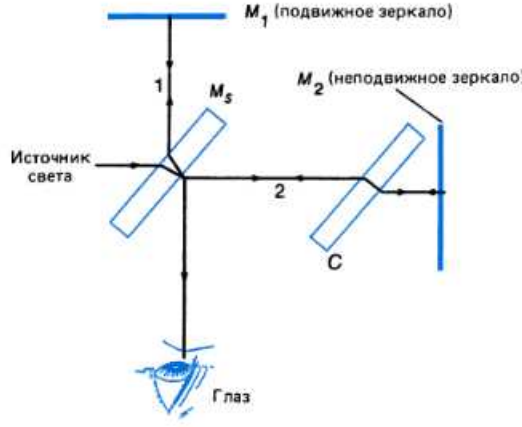


Рис. 36.18. Интерферометр Майкельсона.

1 проходит через M_s и попадает в глаз наблюдателя. Часть пучка *2* отражается от зеркала M_s и также попадает в глаз наблюдателя. Обычно на пути пучка *2* помещают компенсатор C в виде пластины из прозрачного стекла (его изготавливают из той же пластины, что и зеркало M_s), чтобы оба пучка проходили с точностью до долей длины волны слой стекла одинаковой толщины. Если оба пути одинаковы, то будет происходить усиливающая интерференция, и наблюдатель увидит свет. Если подвижное зеркало отодвинуть на расстояние $\lambda/4$, то пучок *1* будет проходить дополнительное расстояние, равное $\lambda/2$ (так как расстояние $\lambda/4$ ему придется пройти туда и обратно), будет происходить ослабляющая интерференция и наблюдатель обнаружит темноту. Если зеркало M_1 продолжать двигать дальше, вновь появится свет (когда разность хода пучков станет равной длине волны λ), затем снова будет темнота и т. д.

Глаз наблюдателя видит изображение зеркала M_2 вблизи подвижного зеркала M_1, поэтому в действительности между изображением зеркала M_2 и зеркалом M_1 существует тонкий слой воздуха («тонкая пленка»). Если зеркало M_1 слегка наклонить, то воздушный зазор принимает форму клина, как на рис. 36.17, и наблюдатель увидит серию светлых и темных полос. Если теперь изменять положение зеркала M_1, то светлые и темные полосы будут перемещаться влево или вправо. Когда разность хода составит большое число длин волн, наблюдатель при строго параллельных зеркалах M_1 и M_2 уже не увидит почти равномерной освещенности или затемнения. Из-за неодинаковой разности хода при различных углах зрения наблюдатель увидит картину, состоящую из колец, напоминающих кольца Ньютона (см. 36.16, *б*). При перемещении зеркала M_1 будет казаться, что темные и светлые кольца возникают (или исчезают) в центре картины.

Интерферометр Майкельсона позволяет проводить очень точные измерения длин волн. При перемещении

зеркала M_1 всего лишь на $^1/_4\lambda$ происходит явственный переход от освещенности к затемнению. Для $\lambda = 400$ нм это соответствует точности в 100 нм, или 10^{-4} мм! Еще большей точности можно достичь, наблюдая перемещения полос в случае непараллельных зеркал. Подсчитывая число полос или их долей, можно достичь необычайной точности в измерении длин.

Майкельсон понимал, что его интерферометр можно использовать для выражения эталона длины (стандартного метра) через число длин волн какой-нибудь линии спектра. В 1960 г. в качестве стандарта была выбрана определенная оранжево-красная линия в спектре криптона-86 (атомов криптона с атомной массой 86). Тщательно повторенные измерения длины старого эталона метра (т.е. расстояния между двумя делениями на платино-иридиевом стержне, хранящемся в Париже), позволили установить, что 1 м равен 1 650 763, 73 длины волн этого света. Эта величина и принята ныне за *определение метра*. В 1983 г. был принят новый эталон метра, выраженный через скорость света (разд. 1.4).

* 36.10. Сила света

Хотя *интенсивность* света (как и любой электромагнитной волны) характеризуется величиной вектора Пойнтинга и измеряется в ваттах на квадратный метр, полная выходная мощность источника может измеряться в ваттах (соответствующая величина называется *потоком излучения*), но ни интенсивность света, ни мощность источника не позволяют адекватно характеризовать зрительное ощущение яркости света. Дело в том, что нас интересует только видимая область спектра, в то время как названные выше величины учитывают все длины волн. Кроме того, необходимо иметь в виду различную чувствительность глаза к разным длинам волн: человеческий глаз наиболее чувствителен к центральной (желтой) части спектра (550 нм), поэтому желтый источник кажется нам ярче красного или синего источника такой же мощности.

Все эти факторы учтены в величине, получившей название *световой поток* F и измеряемой в люменах (лм); 1 лм экспериментально определяется как яркость поверхности платины площадью 1/60 см^2 при температуре плавления (1770 °C). Это эквивалентно мощности света с длиной волны 550 нм при 1/621 Вт.

Так как световой поток от источника может оказаться неоднородным, вводится *сила света* I_l, т.е. световой поток, приходящийся на единицу телесного угла – стерадиан (ср). Сила света измеряется в канделах (кд); 1 кд = 1 лм/ср.

Освещенностью E называется световой поток, падающий на единичную площадку: $E = F/A$. Освещенность

измеряется в люменах на квадратный метр (лм/м^2) и позволяет судить об интенсивности светового потока, падающего на поверхность.

Мы не будем подробнее вдаваться в этот круг вопросов. О них было упомянуто лишь для полноты, так как *сила света*, измеряемая в системе СИ в канделах (кд), является одной из семи основных величин этой системы. (См. разд. 1.5 и табл. 1.2.) С шестью остальными величинами (и единицами их измерения) мы уже встречались: длина (м), время (с), масса (кг), электрический ток (А), температура (К) и количество вещества (моль).

Пример 36.6. Яркость одного из типов 100-ваттной лампы оценивается в 1700 лм. Определите а) силу света и б) освещенность на расстоянии 2,0 м. Предполагается равномерность светового потока по всем направлениям.

Решение. а) Полная сфера соответствует 4π ср. Следовательно, $I_i = 1700$ лм/4π ср $= 135$ кд. Сила света от расстояния не зависит. б) На расстоянии $d = 2{,}0$ м от источника световой поток, приходящийся на единичную площадку, равен

$$E = F/4\pi d^2 = 1700 \text{ лм}/(4\pi)(2{,}0 \text{ м})^2 = 34 \text{ лм/м}^2.$$

Освещенность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Заключение

Явления интерференции и дифракции света служат серьезными аргументами в пользу волновой теории света. Эта теория позволяет также объяснить преломление света и более медленное распространение света в прозрачных твердых телах и жидкостях, чем в воздухе. Длина волны света в среде с показателем преломления n равна $\lambda_n = \lambda/n$, где λ – длина волны в вакууме; частота света остается в среде неизменной.

Интерференция света была убедительно доказана в опыте Юнга с двумя щелями. Наблюдавшиеся светлые полосы волновая теория объяснила усиливающей интерференцией пучков, прошедших через две щели, при разности хода, равной целому числу длин волн. Темные полосы между светлыми возникали в результате ослабляющей интерференции при разности хода, равной $^1/_2\lambda$, $^3/_2\lambda$ и т. д. Углы θ, при которых происходит усиливающая интерференция, определяются соотношением $\sin\theta = m\lambda/d$, где λ – длина волны света, d – расстояние между щелями m – целое число (0, 1, 2, ...). Гасящая интерференция происходит при углах θ, определяемых соотношением $\sin\theta = (m + 1/2)\lambda/d$. Интенсивность света I_θ в любой точке интерференционной картины может быть вычислена с помощью фазовой диаграммы, которая предсказывает, что $I_\theta = I_0 \cos^2 \delta/2$, где I_0 – интенсивность при $\theta = 0$, а фазовый угол δ определяется по формуле $\delta = 2\pi d \sin\theta/\lambda$.

Два источника света идеально *когерентны*, если испускаемые ими волны синусоидальны, имеют одинаковую

частоту и постоянную во времени разность фаз. Если разность фаз световых волн, испускаемых двумя источниками, хаотически меняется во времени (как, например, в случае двух ламп накаливания), то такие источники *некогерентны*.

Цвет определяется длиной световой волны. Видимая область спектра простирается от 400 нм (фиолетовый цвет) примерно до 750 нм (красный цвет). Стеклянные призмы (и другие прозрачные тела) могут разлагать белый цвет на составные части, так как показатель преломления зависит от длины волны (явление, известное под названием *дисперсия*).

Свет, отраженный от передней и задней поверхностей тонкой пленки прозрачного материала, может интерферировать. Интерференция в тонких пленках находит много практических приложений, например при просветлении линз и в кольцах Ньютона.

Вопросы

1. Применим ли принцип Гюйгенса к звуковым волнам? К волнам на поверхности воды?
2. Какие явления свидетельствуют о том, что свет переносит энергию?
3. Почему свет иногда описывают как лучи, иногда как волны?
4. Мы слышим звуки, доносящиеся из-за угла, но не видим того, что происходит за углом, хотя и звук, и свет – волны. Объясните, в чем их различие.
5. Можно ли определить длину световой волны, измеряя отражение или преломление света?
6. Почему интерференция от двух щелей служит более убедительным подтверждением волновой теории света, чем дифракция?
7. Предположим, что белый свет падает на две щели (рис. 36.6), одна из которых закрыта красным фильтром (700 нм), а другая – голубым (450 нм). Опишите, какая интерференционная картина возникнет на экране.
8. На каком основании мы считаем, что частота света не меняется при переходе из одной среды в другую?
9. Сравните эксперимент по интерференции от двух щелей для звуковых и световых волн. В чем сходство и в чем различия?
10. Каким должна быть разность хода двух лучей, чтобы их интерференция была ослабляющей?
11. Как изменилась бы интерференционная картина в опыте Френеля с двумя щелями, если всю экспериментальную установку погрузить в воду?
12. Как можно было бы создать «биения» световых волн – явления, хорошо известные в случае звуковых волн? Как можно было бы обнаружить такие «биения»?
13. Для чего на рис. 36.4. предназначен первый экран с одной щелью? Что произойдет, если эта щель будет не очень узкой? Что произойдет, если источником света вместо Солнца будет лазер?
14. Почему не возникает интерференционной картины от двух фар удаленной автомашины?
15. Объясните, почему, проходя через плоское оконное стекло, белый свет не разлагается на составные цвета, как при прохождении призмы?
16. Насколько различаются фокусные расстояния собирающей и рассеивающей линз для красного и для фиолетового света?
17. Опираясь на сведения, почерпнутые из разд. 36.6, проведите четкое различие между углами θ, ϕ и δ.
18. Почему интерференционные полосы хорошо различимы только в *тонких* пленках, например в мыльных пузырях, и не наблюдаются, например, в случае толстого куска стекла?
19. Почему по мере удаления от центра кольца Ньютона (рис. 36.16) располагаются все более тесно?
20. Некоторые просветленные линзы в отраженном свете отливают зеленым. Отражение каких длин волн должно полностью гаситься таким покрытием?
21. Капля нефти на поверхности пруда кажется наиболее яркой у краев, где ее толщина гораздо меньше длины волны видимого света. Что можно сказать о показателе преломления нефти?

22. Опишите, каким образом интерферометр Майкельсона можно было бы использовать для измерения показателя преломления воздуха.

Задачи

Раздел 36.2

1. (II) Используя принцип Гюйгенса, выведите закон отражения волн, т.е. покажите, что угол падения в случае плоской поверхности равен углу отражения.

Раздел 36.3

2. (I) Падая на две щели, расположенные на расстоянии 0,026 мм друг от друга, монохроматический свет образует полосу четвертого порядка под углом 6,4°. Чему равна длина волны света?
3. (I) Свет с длиной волны 680 нм падает на две щели и создает интерференционную картину, в которой полоса четвертого порядка находится на расстоянии 28 мм от центральной полосы. Экран отстоит от щелей на расстоянии 1,0 м. Чему равно расстояние между щелями?
4. (II) Телевизионные волны и радиоволны могут отражаться от соседних гор или самолетов, и отраженные сигналы могут интерферировать с прямым сигналом от станции. а) Определите, какая интерференция,– ослабляющая или усиливающая,– произойдет, когда приемника достигнут прямые сигналы телевизионной станции, работающей на частоте 75 МГц, и сигналы, отраженные от самолета, пролетающего на высоте 118 м над приемником. (Предполагается, что при отражении не возникает сдвига фаз.) б) Какой будет интерференция, если самолет снизится на 22 м?
5. (II) Видимый свет с самой короткой длиной волны падает на две щели, находящиеся на расстоянии $2{,}80 \cdot 10^{-2}$ мм друг от друга. Щели и экран, отстоящий от них на расстояние 18,5 см, погружены в воду. Определите расстояние между интерференционными полосами на экране.
6. (II) Свет с длинами волн 520 и 660 нм проходит через две щели, расстояние между которыми 0,50 мм. На какое расстояние смещены относительно друг друга интерференционные полосы второго порядка для этих двух длин волн на экране, расположенном на расстоянии 1,5 м?
7. (II) Предположим, что перед нижней щелью на рис. 36.6 помещен тонкий кусок стекла и поэтому падающие на щели волны оказываются в противофазе. Опишите подробно возникающую на экране интерференционную картину.
8. (II) Заряженная частица, например протон, двигаясь в прозрачной среде со скоростью v_p, превышающей скорость света ($v = c/n$) в этой среде, испускает электромагнитное излучение (свет), известное под названием *черенковского излучения*. Это излучение эквивалентно ударной волне (разд. 16.8) и сосредоточено под определенным углом, зависящим от v_p и v. Определите этот угол для протона, движущегося со скоростью $2{,}21 \cdot 10^8$ м/с в пластике с показателем преломления 1,52.
9. (II) Одна из двух щелей, освещаемых светом с длиной волны 510 нм, закрыта очень тонким листом пластика ($n = 1{,}60$). В центре экрана вместо максимума света – темная полоса. Чему равна (минимальная) толщина пластика?
10. (II) Свет с длиной волны λ падает под углом θ_i к нормали на экран с двумя щелями, расстояние между которыми равно d. Определите угол θ_m, под которым расположен максимум m-го порядка.

Раздел 36.4

11. (I) Оцените величины индуктивности L и емкости C, необходимые для генерации частот видимого света. Разумны ли такие величины?

Раздел 36.5

12. (I) На сколько (примерно) процентов скорость красного света (700 нм) превышает в силикатном флинте скорость фиолетового света (400 нм)? (См. рис. 36.9.)
13. (II) Пучок света с длинами волн 500,0 и 712,0 нм падает на кусок стекла под углом 35,00°. Показатель преломления стекла для этих длин волн соответственно равен 1,4810 и 1,4742. Чему равен угол между двумя преломленными лучами?
14. (II) Параллельный пучок света с длинами волн $\lambda_1 = 400$ нм и $\lambda_2 = 650$ нм падает на кусок силикатного флинта под углом 56,0°. Вычислите угол между лучами двух цветов внутри флинта (рис. 36.9).
15. (II) Двояковыпуклая линза с радиусами кривизны 18,0 см изготовлена из крона. Найдите расстояние между фокальными точками для фиолетового (400 нм) и красного (700 нм) света.

Раздел 36.6

16. (I) Во сколько раз изменится интенсивность в центре экрана на рис. 36.12, если одну щель закрыть?

17. (II) Докажите, что полная угловая ширина на половине высоты центрального пика в интерференционной картине от двух щелей определяется выражением

$$\Delta\theta = \lambda/2d,$$

если $\lambda \ll d$.

18. (II) Выведите соотношение (36.5б) аналитически, не пользуясь фазовой диаграммой.

19. (II) Предположим, что одна из щелей в опыте с интерференцией от двух щелей шире другой и поэтому интенсивность проходящего через нее света вдвое больше. Определите зависимость I интерференционной картины от положения на экране (θ) для случая когерентного света.

20. (III) а) Рассмотрим три находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга когерентных источника света одинаковой интенсивности (например, к двум щелям на рис. 36.12 добавим третью щель). Пользуясь фазовой диаграммой, найдите зависимость интенсивности от разности фаз δ [формула (36.4)]. б) Определите положения максимумов и минимумов.

21. (III) Постройте фазовую диаграмму для случая четырех параллельных щелей, находящихся на одном и том же расстоянии d друг от друга. Предполагая когерентность света, определите зависимость интенсивности от положения на экране и положения максимумов и минимумов.

Раздел 36.8

22. (I) Мыльный пузырь имеет толщину 120 нм. Какой цвет увидит наблюдатель в центре, если мыльный пузырь осветить белым светом? Предполагается, что для мыльной пленки $n = 1{,}34$.

23. (I) Какой должна быть минимальная толщина воздушного слоя между двумя плоскими стеклянными пластинами, чтобы стекло при нормальном падении света с длиной волны 640 нм казалось темным? светлым?

24. (II) Стеклянная линза отливает зеленовато-желтым светом (максимум интенсивности приходится на длину волны $\lambda = 570$ нм) при отражении от нее белого света. Какова минимальная толщина оптического покрытия ($n = 1{,}25$) и такой линзы и почему?

25. (II) Предположим, что вы рассматриваете свет, *прошедший* сквозь тонкую пленку на плоском куске стекла. По аналогии с рис. 36.15 начертите ход лучей и опишите условия возникновения максимумов и минимумов. Рассмотрите все возможные значения показателя преломления. Обсудите относительные размеры минимумов по сравнению с размерами максимумов и с нулем.

26. (II) *Зеркало Ллойда* служит одним из экспериментальных способов получения интерференционной картины от двух щелей с единственным когерентным источником света. Как видно из рис. 36.19, свет, отражающийся от плоского зеркала, кажется выходящим из мнимого изображения щели. Опишите подробно интерференционную картину на экране.

27. (II) При нормальном падении света с длиной волны 450 нм на плоско-выпуклую линзу, находящуюся на плоской стеклянной поверхности (рис. 36.16), наблюдатель видит 33 светлых и 33 темных колец Ньютона. Насколько линза толще в центре, чем по краям?

28. (II) Тонкая металлическая фольга разделяет с одной стороны две оптически плоские стеклянные пластины, как на рис. 36.17. При нормальном падении света с длиной волны 450 нм наблюдатель видит 52 темные полосы. Какова толщина фольги?

29. (II) Когда прибор для наблюдения колец Ньютона (рис. 36.16) погрузили в жидкость, диаметр восьмого темного кольца уменьшился от 2,92 до 2,48 см. Чему равен показатель преломления жидкости?

30. (II) Монохроматический свет падает по нормали на тонкий лист пластмассовой пленки. Доля отраженного света минимальна только при $\lambda = 470$ нм и $\lambda = 650$ нм. Чему равна толщина пленки ($n = 1{,}60$)?

31. (II) Тонкая пленка спирта ($n = 1{,}36$) покрывает плоскую стеклянную пластину ($n = 1{,}58$). При нормальном падении монохроматическо-

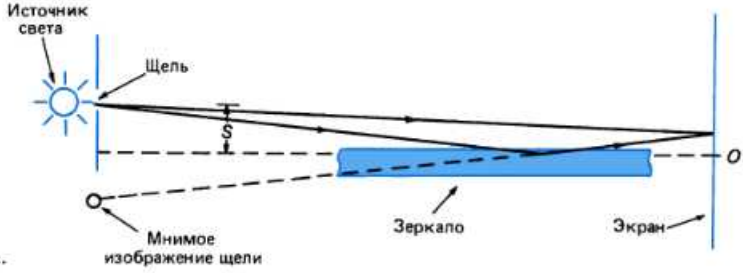


Рис. 36.19. Зеркало Ллойда.

го света доля отраженного света минимальна при $\lambda = 520$ нм и максимальна при $\lambda = 640$ нм. Чему равна толщина пленки?

32. (II) Покажите, что радиус r m-го кольца Ньютона при наблюдении по нормали сверху (рис. 36.16, *б*) определяется выражением $r = \sqrt{m\lambda R}$, где R – радиус кривизны поверхности стекла, а λ – длина волны используемого света. Предполагается, что толщина воздушного зазора всюду намного меньше радиуса кривизны R и что $r \ll R$.

33. (II) Используя формулу предыдущей задачи, покажите, что расстояние между соседними темными кольцами Ньютона для m-го кольца равно

$$\Delta r \approx \sqrt{\lambda R/4m}$$

в предположении, что $m \gg 1$.

34. (II) Плоско-выпуклая линза из люцита диаметром 3,4 см помещена на плоский кусок стекла (рис. 36.16). При падении света с длиной волны 580 нм по нормали наблюдатель видит 88 светлых колец, причем последнее кольцо находится на самом краю линзы. Чему равны радиус кривизны выпуклой поверхности линзы и фокусное расстояние линзы?

35. (II) Однослойное оптическое покрытие снижает до нуля отражение света $\lambda = 550$ нм. Во сколько раз снижает отражение то же покрытие при $\lambda = 450$ нм и $\lambda = 700$ нм по сравнению со случаем, когда покрытие отсутствует?

* Раздел 36.9

* 36. (II) Чему равна длина волны света, падающего на интерферометр, если при перемещении подвижного зеркала на 0,356 мм наблюдатель насчитывает 850 полос?

* 37. (II) Микрометр связан с подвижным зеркалом интерферометра. Когда микрометр опирается на тонкую металлическую фольгу по сравнению с микрометром без фольги происходит перемещение на 328 колец. Чему равна толщина фольги? Длина волны света 586 нм.

* 38. (II) Один из лучей интерферометра проходит через небольшой стеклянный контейнер шириной 1,40 см. При заполнении контейнера через отсчетную линию прибора проходит 225 темных полос. Длина волны света равна 546 нм. Вычислите показатель преломления газа в предположении, что интерферометр находится в вакууме.

* 39. (III) Предположим, что зеркала в интерферометре Майкельсона строго параллельны и длины путей до зеркал M_1 и M_2 одинаковы, так что наблюдатель видит свет в центре поля зрения. Выведите формулу для зависимости интенсивности в центре поля зрения от x – смещения подвижного зеркала относительно начального положения.

* 40. (III) Желтые D-линии натрия имеют длины волн 589,0 и 589,6 нм. Замечено, что если этот свет используется в интерферометре Майкельсона, то интерференционные полосы по мере перемещения подвижного зеркала M_1 периодически появляются и исчезают. Почему так происходит? Насколько перемещается зеркало между двумя исчезновениями интерференционных полос?

* Раздел 36.10

* 41. (I) Освещенность Земли прямым солнечным светом составляет около 10^5 лм/м^2. Оцените силу света и световой поток Солнца.

* 42. (II) *Светоотдачей* лампы называется отношение светового потока к расходуемой мощности. а) Чему равна светоотдача лампы на 100 Вт и 1700 лм? б) Сколько люминесцентных ламп на 40 Вт и 60 лм/Вт потребуется для того, чтобы создать освещенность 250 лм/м^2 на полу цеха площадью 25 м × 30 м? Лампы подвешены на высоте 10 м над полом. Предположим, что пола достигает половина светового потока.

37 Дифракция

Опыт Юнга с интерференцией от двух щелей обеспечил прочную основу волновой теории света. Однако общее признание волновая теория получила лишь благодаря детальному изучению дифракции более чем через десятилетие.

Мы уже бегло упоминали о дифракции при изучении волн на поверхности воды (разд. 15.9) и в связи с обсуждением волновой природы света (разд. 36.1). Напомним, что под дифракцией понимают огибание волнами препятствий. Рассмотрим теперь дифракцию более подробно.

Определенный период в истории волновой теории света неразрывно связан с именем Огюстена Френеля (1788–1827). В 1819 г. он представил Парижской Академии наук волновую теорию света, которая предсказывала и объясняла явления интерференции и дифракции. Почти сразу же Симон Пуассон (1781–1840) обратил внимание на одно следствие теории Френеля, противоречащее интуитивным представлениям: согласно волновой теории Френеля, если свет от точечного источника падает на непрозрачный диск, то в результате дифракции на краях диска в центре тени должно возникать светлое пятно вследствие усиливающей интерференции (рис. 37.1). Такое предсказание казалось весьма неправдоподобным. Но когда предложенный Пуассоном эксперимент осуществил Франсуа Араго, в самом центре тени он обнаружил светлое пятно! Это послужило убедительным доказательством справедливости волновой теории.

На рис. 37.2, а представлена тень от монеты, освещаемой (почти) точечным источником (в данном случае лазером). В центре наблюдается светлое пятно. Обратите внимание на то, что за пределами тени наблюдаются светлые и темные полосы. Они напоминают интерферен-

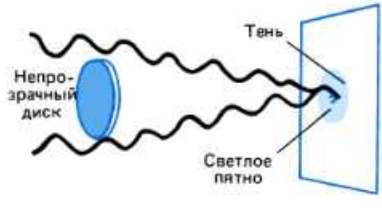
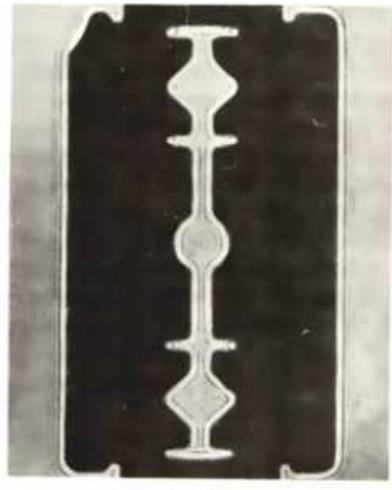


Рис. 37.1. Если свет – волна, то в центре тени, отбрасываемой напрозрачным диском, освещенным точечным источником монохроматического света, должно появиться светлое пятно.

а



б

в

Рис. 37.2. Дифракция на мелкой монете (*а*) (из работы: *Rinard P. M.*, Am. J. Phys., 1976, *v.* 44, p. 70; воспроизводится с разрешения); на лезвии бритвы (*б*) (из книги: *Sears F. M.* Optics.– Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1949, Figure 9-8; воспроизводится с разрешения); на одной щели, освещенной почти точечным источником монохроматического света (*в*) (из книги: *Cagnet M., Françon M., Thrierr J. C.* Atlas of Optical Phenomena.– Berlin: Springer-Verlag, 1962).

ционные полосы при интерференции от двух щелей. Но в действительности эти полосы возникают при интерференции волн, которые дифрагируют на различных участках диска; вся картина носит название *дифракционной*. Подобная картина возникает при освещении точечным источником любого объекта с резкими краями, как показано на рис. 37.2, б и в. Мы не всегда замечаем дифракционные картины, так как в большинстве случаев источники, с которыми приходится иметь дело в повседневной жизни, оказываются не точечными и свет от различных участков таких источников смазывает картину.

37.1 Дифракция на одной щели

Чтобы понять, как возникает дифракционная картина, проанализируем важный случай прохождения монохроматического света через узкую щель. Предположим, что параллельные лучи (или плоские волны) света падают на щель шириной D (рис. 37.3). Если экран расположен бесконечно далеко от щели или за щелью находится линза, направляющая на экран пучок параллельных лучей, то наблюдается *дифракция Фраунгофера*. Если экран расположен вблизи щели, а линзы для фокусировки лучей не используются, то имеет место *дифракция Френеля*. Анализ ее весьма сложен, и мы ограничимся рассмотрением только случая дифракции Фраунгофера. Из изучения волн на поверхности воды и принципа Гюйгенса известно, что волны, пройдя через узкую щель, распространяются по всем направлениям. Нас будет интересовать, как интерферируют между собой волны, проходящие через различные участки щели.

Так как экран по предположению находится очень далеко, то лучи, направленные в любую из его точек, по существу, параллельны. Рассмотрим сначала свет, падающий по нормали к плоскости щели (рис. 37.3, *а*). Все лучи находятся в фазе, поэтому в центре экрана возникает светлое пятно. Рассмотрим теперь лучи, идущие под углом θ (рис. 37.3, *б*), таким, что луч из верхнего края щели проходит ровно на одну длину волны больше луча от нижнего края щели. Луч из центра щели проходит путь, который на половину длины волны больше пути луча от нижнего края щели. Эти лучи оказываются в противофазе и, интерферируя, гасят друг друга. Аналогичным образом луч из точки щели, расположенной чуть выше нижнего края щели, гасит луч из точки, расположенной на таком же расстоянии над центром щели. Таким образом, каждый луч из нижней половины щели гасит соответствующий луч, проходящий через ее верхнюю половину. Интерферируя попарно, все лучи гасят друг друга; поэтому на экране под данным углом света не

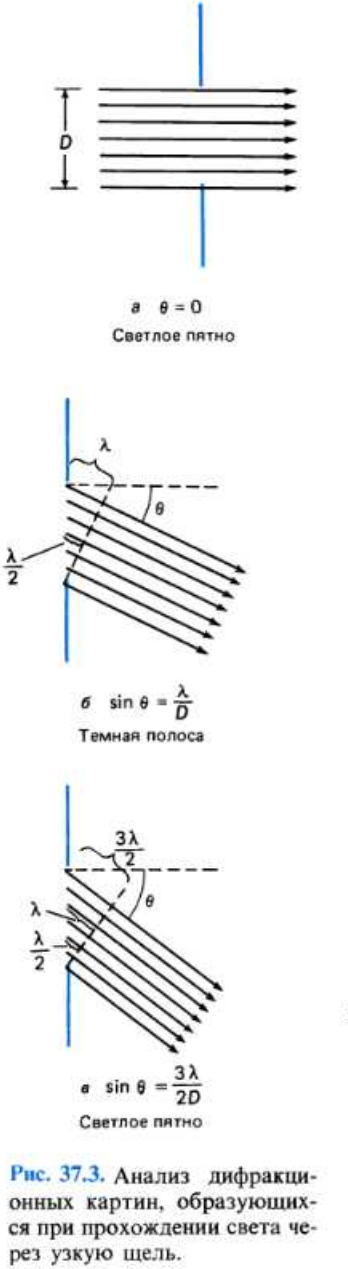


Рис. 37.3. Анализ дифракционных картин, образующихся при прохождении света через узкую щель.

будет. Угол θ, при котором происходит гасящая интерференция, как видно из рис. 37.3, *б*, удовлетворяет соотношению $\lambda = D \sin\theta$, откуда

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D} \quad \text{[первый минимум]}. \tag{37.1}$$

Интенсивность света максимальна при $\theta = 0°$ и убывает до минимума (с интенсивностью, равной нулю) при угле θ, задаваемом соотношением (37.1).

Рассмотрим теперь больший угол θ, такой, что луч из верхнего края щели проходит путь, на $(^3/_2)\lambda$ превышающий путь луча из нижнего края щели (рис. 37.3, *в*). В этом случае лучи из нижней трети щели, попарно интерферируя, гасят лучи из средней трети, так как в каждой паре лучи оказываются в противофазе. Но свет из верхней трети щели все же достигнет экрана, и под данным углом θ на экране возникнет светлое пятно, но не столь яркое, как центральное пятно, соответствующее $\theta = 0°$. При еще большем угле θ, таком, что луч из верхнего края щели проходит путь, на 2λ превышающий путь луча из нижнего края щели (рис. 37.3, *г*), лучи из нижней четверти щели будут гасить лучи из второй снизу четверти, так как разность хода между ними составит λ/2. В свою очередь лучи из четверти, расположенной непосредственно над центром щели, интерферируют с лучами из ее верхней четверти и гасят их. Следовательно, под выбранным углом в распределении интенсивности на дифракционной картине опять наблюдается минимум с нулевой интенсивностью. График зависимости интенсивности света от угла показан на рис. 37.4. Он хорошо соответствует снимку, представленному на рис. 37.2, *в*. Обратите внимание на то, что минимумы (с нулевой интенсивностью) возникают при

$$D \sin\theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{37.2}$$

за исключением $m = 0$, которому отвечает наибольший из максимумов. Между минимумами расположены меньшие (по сравнению с $m = 0$) максимумы.

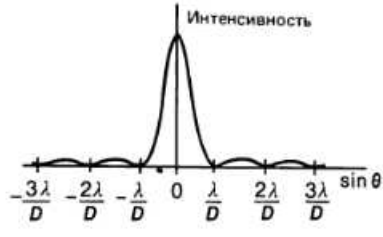


Рис. 37.4. Распределение интенсивности света на экране при дифракции на одной щели как функция от $\sin\theta$.

Пример 37.1. Свет с длиной волны 750 нм проходит через щель шириной $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ мм. Какова ширина центрального максимума а) в градусах и б) в сантиметрах на экране, находящемся на расстоянии 20 см от щели?

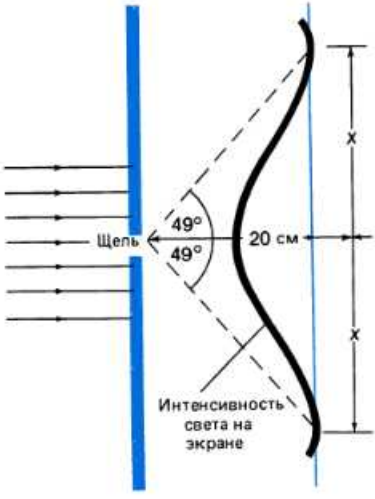


Рис. 37.5. К примеру 37.1.

Решение. а) Первый минимум расположен при

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}}{1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}} = 0{,}75,$$

т.е. при $\theta = 49°$. Это угол между центральным максимумом и первым минимумом (рис. 37.5). Угол, под которым виден весь центральный максимум – от первого минимума сверху на рисунке до первого минимума снизу – вдвое больше найденного угла, т.е. составляет 98°. б) Ширина центрального максимума равна $2x$, где $\operatorname{tg}\theta = x/20$ см; поэтому $2x = 2(20\ \text{см})(\operatorname{tg} 49°) = 46$ см. Таким образом, освещена значительная часть экрана. Освещенность, как правило, будет не очень яркой, так как количество света, проходящего через столь узкую щель, невелико и распределяется по большой площади.

Из соотношения (37.1) видно, что, чем меньше апертура D, тем сильнее центральный дифракционный максимум. Такой вывод согласуется с уже известными свойствами волн из гл. 15.

37.2. Распределение интенсивности в дифракционной картине от одной щели

Мы определили положения минимумов в дифракционной картине, возникающей при прохождении света через одну щель [формула (37.2)]. Рассмотрим распределение амплитуды и интенсивности в любой точке дифракционной картины с помощью метода фазовых диаграмм, о котором уже шла речь в разд. 36.6.

Разделим щель (которую будем считать вертикальной) на N очень узких (вертикальных) полос шириной Δy (рис. 37.6). Каждая полоса испускает свет в направлении экрана, расположенного справа. И на этот раз мы рассмотрим дифракцию Фраунгофера; поэтому лучи, направленные в любую точку удаленного экрана, параллельны и образуют с горизонталью угол θ, как показано на рис. 37.6. Пусть ширина полос Δy гораздо меньше длины волны λ монохроматического света, падающего на щель, так что лучи, исходящие из одной полосы, имеют одну и ту же фазу. Все полосы одинаковы по ширине, и если щель

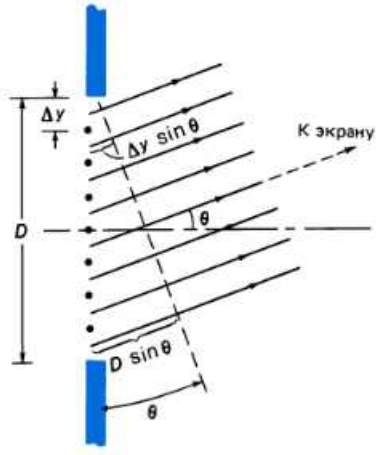


Рис. 37.6. Щель шириной D разделена на N полос шириной Δy.

освещена равномерно, то амплитуды волн ΔE_0, испускаемых узкими полосами, можно считать одинаковыми (при условии, что угол θ не слишком велик). Разность фаз, отвечающая соседним полосам, равна [разд. 36.6, формула (36.4)]

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta y \sin\theta, \tag{37.3}$$

так как разность хода составляет $\Delta y \sin\theta$.

Полная амплитуда на экране, отвечающая произвольному углу θ,. равна сумме волн, из всех полос; все элементарные волны имеют одинаковую амплитуду ΔE_0, но различаются по фазе. Чтобы получить полную амплитуду, можно воспользоваться фазовой диаграммой, как мы делали в разд. 36.6 (рис. 36.13). Фазовые диаграммы для различных углов θ представлены на рис. 37.7. В центре экрана ($\theta = 0$) волны из каждой полосы оказываются в фазе [$\Delta\beta = 0$, см. соотношение (37.3)]; поэтому стрелки, соответствующие амплитудам ΔE_0, выстраиваются в прямую линию (рис. 37.7, *а*). Полная амплитуда света в центре экрана в этом случае равна $E_0 = N\Delta E_0$. На рис. 37.7, *б* показано, как при небольших углах θ (недалеко от центра экрана) из элементарных волн с амплитудами ΔE_0 возникает волна с полной амплитудой E_0. В этом случае каждая элементарная волна отличается по фазе от соседней на $\Delta\beta$. Разность фаз волн из верхнего и нижнего краев щели равна

$$\beta = N\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}N\Delta y \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta, \tag{37.4}$$

где $D = N\Delta y$ – полная ширина щели. Хотя «дуга» на рис. 37.7, *б* имеет длину $N\Delta E_0$, т. е. равна E_0, амплитуда полной волны E_θ представляет собой *векторную* сумму амплитуд элементарных волн и поэтому равна длине хорды, как показано на рисунке. Ясно, что $E_\theta < E_0$.

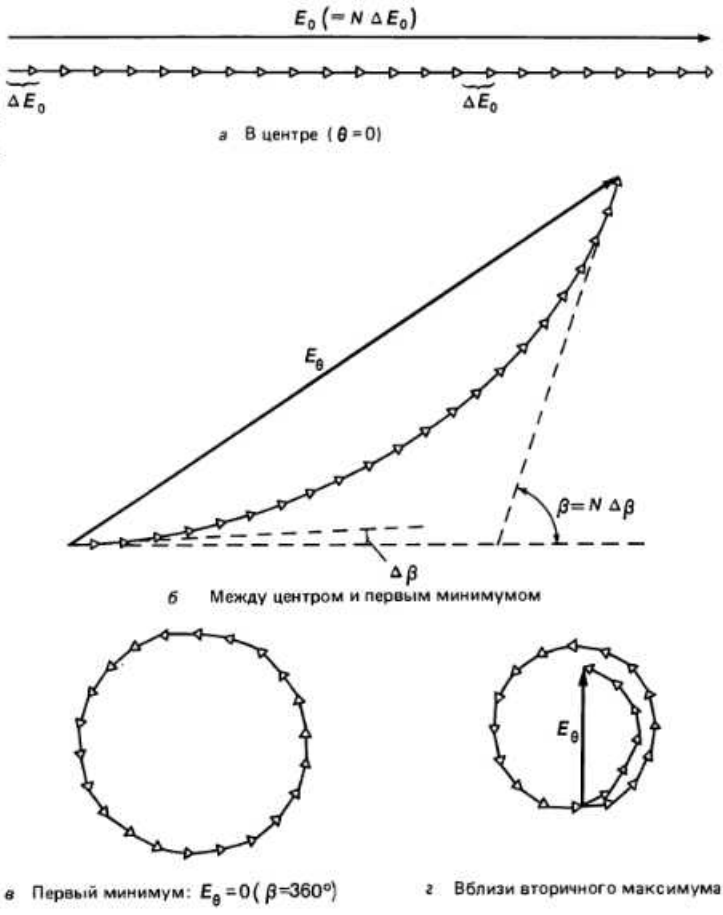


Рис. 37.7. Фазовая диаграмма для дифракции на одной щели, задающая полную амплитуду E_θ при различных углах θ.

а В центре ($\theta = 0$)

б Между центром и первым минимумом

в Первый минимум: $E_\theta = 0$ ($\beta = 360°$)

г Вблизи вторичного максимума

Если угол θ продолжает расти, то мы рано или поздно приходим к случаю, изображенному на рис. 37.7, *в*, когда цепочка стрелок замыкается. В этом случае векторная сумма обращается в нуль; следовательно, для этого угла $E_\theta = 0$, что соответствует первому минимуму. Так как в данном случае разность фаз $\beta = N\Delta\beta$ равна 360°, или 2π, из соотношения (37.3) получаем

$$2\pi = N\Delta\beta = N\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta y \sin\theta\right),$$

или, если ввести ширину щели $D = N\Delta y$,

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D}.$$

Таким образом, первый минимум ($E_\theta = 0$) возникает там, где $\sin\theta = \lambda/D$, что совпадает с результатом, полученным в предыдущем разделе [соотношение (37.1)].

При еще больших углах θ цепочка стрелок закручивается на угол, превышающий 360°. На рис. 37.7, *г* пока-

зан случай, близкий к вторичному максимуму, следующему за первым минимумом, когда $\beta = N\Delta\beta \approx 360° + 180° = 540°$, или 3π. (Обратите внимание на то, что, хотя разность фаз $\beta \approx 540°$, угол θ может быть очень мал в зависимости от значений D и λ.) При $\beta = 4\pi$ стрелки совершат два полных оборота и вновь возникнет минимум ($\sin\theta = 2\lambda/D$) [в соотношении (37.2) он соответствует $m = 2$]. При еще больших углах θ возникают новые максимумы и минимумы. Но так как полная длина спирали остается постоянной и равной $N\Delta E_0 (= E_0)$, каждый последующий максимум после очередного витка спирали оказывается меньше предыдущего.

Чтобы получить количественное выражение для амплитуды (и интенсивности) в любой точке экрана (т. е. при любом угле θ), рассмотрим предел при $N \to \infty$, т. е. когда ширина Δy полосы становится бесконечно малой dy. В этом случае ломаные на рис. 37.7 превращаются в гладкие кривые, одна из которых показана на рис. 37.8. При любом угле θ полная амплитуда волны E_θ равна длине хорды, а длина дуги по-прежнему равна E_0. Если r – радиус кривизны дуги, то

$$\frac{E_\theta}{2} = r\sin\frac{\beta}{2}.$$

Используя для угла $\beta/2$ радианную меру, получаем

$$\frac{E_0}{2} = r\frac{\beta}{2}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$E_\theta = E_0\frac{\sin\beta/2}{\beta/2}. \tag{37.5}$$

Угол β представляет собой разность фаз волн, идущих из верхнего и нижнего краев щели. Так как разность хода между ними равна $D\sin\theta$ [см. рис. 37.6 и формулу (37.4)], мы получаем

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta. \tag{37.6}$$

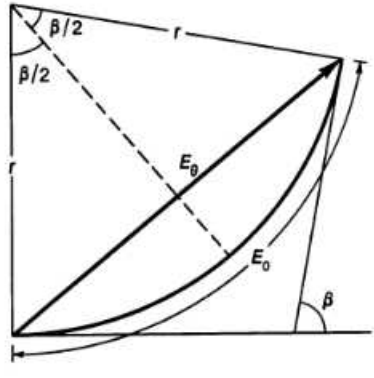


Рис. 37.8. Определение амплитуды E_θ как функции угла θ при дифракции на одной щели.

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды волны; поэтому интенсивность I_θ под углом θ, согласно соотношению (37.5), равна

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin \beta/2}{\beta/2}\right)^2, \tag{37.7}$$

где $I_0 (\sim E_0^2)$ – интенсивность при $\theta = 0$ (центральный максимум). Из формул (37.7) и (37.6) (хотя иногда удобнее рассматривать их по отдельности) получаем

$$I_\theta = I_0\left[\frac{\sin (\pi D \sin \theta/\lambda)}{\pi D \sin \theta/\lambda}\right]^2. \tag{37.8}$$

Заметим, что минимумы ($I_\theta = 0$) возникают там, где $\sin (\pi D \sin \theta/\lambda) = 0$, т. е. там, где $\pi D \sin \theta/\lambda$ принимает значения π, 2π, 3π и т. д., или

$$D \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Это условие совпадает с полученными ранее. Обратите внимание на то, что m не должно обращаться в нуль, так как при $\beta/2 = \pi D \sin (\theta/\lambda) = 0$ и числитель, и знаменатель в формуле (37.7) [или (37.8)] обратятся в нуль. Интенсивность в этом случае можно вычислить с помощью предельного перехода при $\theta \to 0$ (или $\beta \to 0$). При очень малых углах $\sin \beta/2 \approx \beta/2$, поэтому $(\sin \beta/2)/(\beta/2) \to 1$ и $I_\theta = I_0$, где I_0 – максимум интенсивности в центре дифракционной картины.

Пример 37.2. Определите приближенно интенсивность вторичных максимумов ($m = 1, 2, \ldots$).

Решение. Вторичные максимумы расположены примерно посредине между соседними минимумами там, где

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \approx \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

[Истинные положения максимумов не совсем совпадают с указанными точками. Их можно найти, продифференцировав соотношение (37.7) (см. задачу 7).] Следовательно,

$$I_\theta = \frac{I_0}{(m + {}^1/_2)^2 \pi^2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

При $m = 1$, 2 и 3 получаем

$$I_\theta = \frac{I_0}{22{,}2} = 0{,}045\, I_0 \quad [m = 1],$$

$$I_\theta = \frac{I_0}{61{,}7} = 0{,}016\, I_0 \quad [m = 2],$$

$$I_\theta = \frac{I_0}{121} = 0{,}0083\, I_0 \quad [m = 3].$$

В первом после центрального максимуме сосредоточено только 1/22 (или 4,5%) интенсивности центрального дифракционного максимума; последующие максимумы еще слабее. Это поведение воспроизводится на рис. 37.4. На рис. 37.2, *в* убывание вторичных максимумов не столь четко выражено, так как снимок переэкспонирован, чтобы выявить эти максимумы.

Аналогичная дифракционная картина (правда, с интерференционными кругами вместо полос) возникает при дифракции на круглом отверстии. Она имеет большое практическое значение, так как линзы, по существу, представляют собой пропускающие свет круглые отверстия. Дифракцию на круглом отверстии мы обсудим в разд. 37.4 и покажем, каким образом дифракция ограничивает разрешающую способность (четкость изображения).

37.3. Дифракция в опыте с интерференцией от двух щелей

Анализируя в разд. 36.6 опыт Юнга с интерференцией от двух щелей, мы предполагали равномерную освещенность центральной части экрана. Это эквивалентно предположению о том, что щели являются бесконечно узкими, в результате чего центральный дифракционный пик размывается на весь экран. Разумеется, этого никогда не бывает с реальными щелями и дифракция ослабляет интенсивность вторичных интерференционных максимумов (светлых полос) так, что они не имеют одинаковой высоты, как изображено на рис. 36.14.

Вычислим теперь распределение интенсивности для интерференционной картины в опыте Юнга с учетом дифракции. Предположим, что обе щели имеют одинаковую ширину D и центры их находятся на расстоянии d друг от друга. Так как расстояние до экрана велико по сравнению с d (по предположению мы рассматриваем дифракцию Фраунгофера), дифракционные картины от каждой щели в отдельности, по существу, совпадают. Следовательно, амплитуда волны, падающей на экран под углом θ, уже не будет равна

$$E_{\theta 0} = 2E_0 \cos \delta/2,$$

как это следовало бы из формулы (36.5б), а с учетом дифракции (см. соотношение 37.5) дается выражением

$$E_{\theta 0} = 2E_0 \left(\frac{\sin [\beta/2]}{[\beta/2]} \right) \cos \frac{\delta}{2}.$$

(В этой главе мы имели дело только с амплитудой вектора напряженности электрического поля E и писали поэтому просто E_θ вместо $E_{\theta 0}$, как это делалось в гл. 36.)

Следовательно, интенсивность определяется выражением

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin[\beta/2]}{[\beta/2]}\right)^2\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2, \tag{37.9}$$

где [согласно (37.6) и (36.4)]

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda}D\sin\theta, \quad \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta.$$

Первый из членов в скобках в формуле (37.9) иногда называют дифракционным множителем, а второй – интерференционным множителем. На рис. 37.9, *а* и *б* приведены графики, соответствующие случаю, когда $d = 6D$ и $D = 10\lambda$ (график на рис. 37.9, *б* совпадает с графиком на рис. 36.14 с точностью до множителя I_0). На рис. 37.9, *в* изображено произведение соответственно дифракционного и интерференционного множителей и коэффициента I_0 в зависимости от угла θ (или положения на экране, когда угол θ не слишком велик) согласно соотношению (37.9). Штриховая линия на рис. 37.9, *в* показывает, что дифрак-

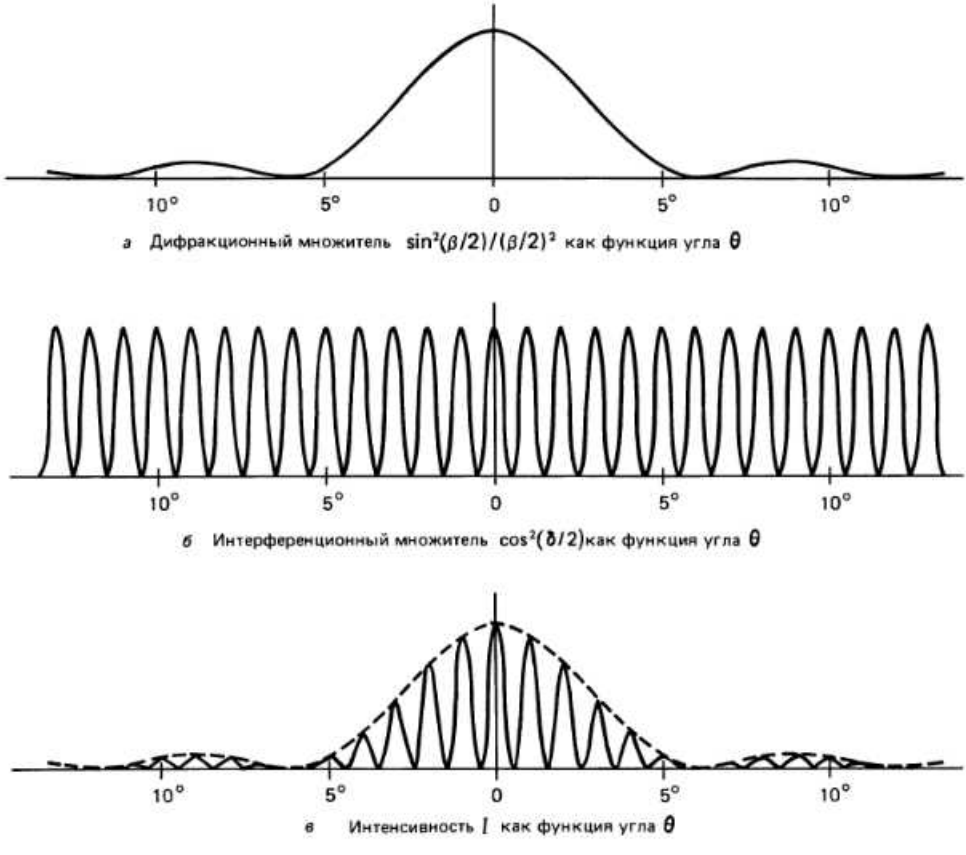


Рис. 37.9. Дифракционный множитель (*а*); интерференционный множитель (*б*) и результирующая интенсивность I (в) как функции угла θ при $d = 6D = 60\lambda$.

а Дифракционный множитель $\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2$ как функция угла θ

б Интерференционный множитель $\cos^2(\delta/2)$ как функция угла θ

в Интенсивность I как функция угла θ

ционный множитель ведет себя подобно огибающей интерференционных пиков. На рис. 36.7 заметно убывание интенсивности интерференционных полос по мере удаления от центра. Более отчетливо это видно на рис. 37.10 для случая с меньшим отношением d/D.

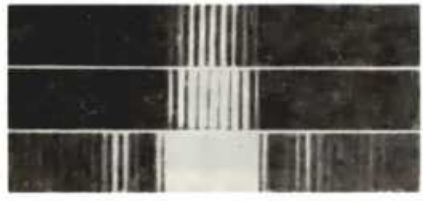


Рис. 37.10. Фотографии интерференционной картины при интерференции от двух щелей, обнаруживающие дифракционные эффекты; $d = 6D$ (из книги: *Jenkins F. A., White H. E.* Fundamental of Optics. 4th ed. McGraw-Hill, Inc; воспроизводится с разрешения издательства McGraw-Hill Book Co).

Пример 37.3. Объясните, почему центральный дифракционный пик на рис. 37.9 содержит 11 интерференционных полос.

Решение. Первый минимум на дифракционной картине отвечает условию

$$\sin\theta = \lambda/D.$$

Так как $d = 6D$, получаем

$$d\sin\theta = 6D(\lambda/D) = 6\lambda.$$

Из соотношения 36.2, *а* видно, что интерференционные максимумы отвечают $d\sin\theta = m\lambda$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ или любое другое целое число. Таким образом, дифракционный минимум отвечает интерференционной полосе с $m = 6$ и соответствующий пик не возникает. Следовательно, центральный дифракционный пик включает центральный интерференционный максимум ($m = 0$) и по пять пиков ($m = 1, 2, \ldots, 5$) с каждой стороны, т. е. всего 11 пиков. Так как пик 6-го порядка не возникает, иногда говорят о «недостающем порядке».

Из последнего примера видно, что число интерференционных полос, умещающихся в центральном дифракционном пике, зависит только от отношения d/D и не зависит от длины волны λ. Расстояние между дифракционными максимумами (угловое или линейное на экране) зависит от λ. В рассмотренном случае $D = 10\lambda$ и первый дифракционный минимум соответствует $\sin\theta = \lambda/D = 0{,}10$, т. е. расположен под углом θ около 6°.

Интерференция и дифракция обусловлены одним и тем же явлением – суперпозицией когерентных волн с различными фазами. Таким образом, различие между интерференционной и дифракционной картинами обусловлено не столько различием их физической природы, сколько традициями и удобством описания (так, в этом разделе мы анализировали по отдельности картины, возникающие на экране в опыте Юнга: сначала как интерференционную, а затем как дифракционную). Обычно мы говорим о дифракции, когда речь заходит об анализе суперпозиции множества бесконечно малых и обычно смежных источников (как, например, при разбиении источника на бесконечно малые части). Под интерференцией принято понимать суперпозицию волн от конечного (и обычно небольшого) числа когерентных источников.

37.4. Ограничения разрешающей способности. Критерий Рэлея

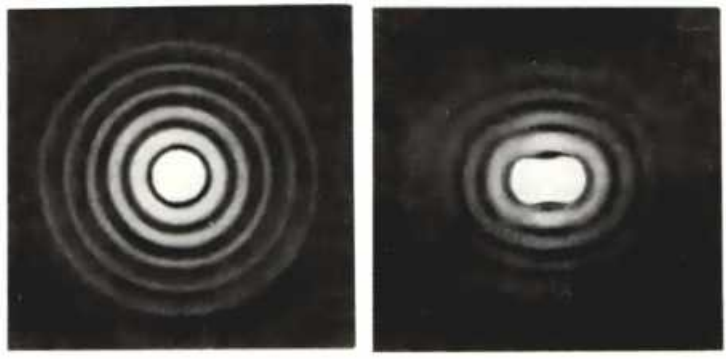
Способность линзы создавать раздельные изображения двух близких друг к другу точечных объектов называется *разрешающей способностью* или **разрешающей силой** линзы. Чем ближе находятся друг к другу два изображения, оставаясь различимыми (т. е. не сливаясь в одно пятно), тем выше разрешающая способность линзы. Разрешающая способность объектива фотоаппарата часто характеризуется числом различимых линий на 1 мм[1]. Это число определяется по фотографии на мелкозернистой пленке шаблона с параллельными линиями. Минимальное расстояние между различимыми линиями на снимке, сделанном с помощью данного объектива, определяет его разрешающую способность.

Существует два главных фактора, ограничивающих разрешающую способность линзы. Первый из них – *аберрации линзы*. Как мы уже знаем, вследствие сферических и других аберраций изображением точечного объекта будет не точка, а крохотное пятнышко. Тщательно подбирая комбинации линз, можно существенно уменьшить аберрации, но полностью исключить их невозможно. Второй фактор, ограничивающий разрешающую способность,– это *дифракция*, которую нельзя исправить, так как она является естественным следствием волновой природы света. Рассмотрим этот фактор более подробно.

В разд. 37.1 мы видели, что свет распространяется в виде волн; поэтому свет от точечного источника, проходя сквозь щель, отклоняется и образует дифракционную картину (рис. 37.2 и 37.4). Линза из-за наличия у нее краев действует подобно щели. При создании линзой изображения точечного объекта в действительности возникает дифракционная картина. Таким образом, изображение оказывается размытым, даже если аберрации отсутствуют.

В дальнейшем мы будем предполагать, что линза не имеет аберраций. Это позволит нам сосредоточить внимание на дифракционных эффектах и выяснить, в какой мере они ограничивают разрешающую способность линзы. На рис. 37.4 мы видели, что дифракционная картина при прохождении света через прямоугольную щель имеет центральный максимум, в котором сосредоточена бóльшая часть света. В этом главном пике интенсивность спадает по обе стороны от центра до минимума, находящегося под углом $\theta \approx \sin\theta = \lambda/D$ [соотношение (37.1)], где D – диаметр щели, λ – длина волны света, а угол θ по предположению мал. За первым минимумом наблюдается ряд менее интенсивных интерференционных полос. Для

[1] Разрешающую способность определяют и в центре, и на краю поля зрения, где она обычно меньше из-за внеосевых аберраций.



а *б*

Рис. 37.11. Фотографии изображений (сильно увеличенные), полученных с помощью линзы: *а* – одного точечного источника; *б* – двух точечных источников, на пределе разрешения (из книги: *Cagnet M., Françon M., Thrierr J. C.* Atlas of Optical Phenomena.– Berlin: Springer-Verlag, 1962).

линзы или любого круглого отверстия изображение точечного объекта представляет собой центральный пик в виде *круглого* пятна (называемый также *дифракционным пятном* или *кружком*), окруженный слабыми кольцами (рис. 37.11, *а*). Угловая полуширина центрального максимума определяется выражением

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D}.$$

От аналогичной формулы для щели [формула (37.1)] оно отличается множителем 1,22. Появление его связано с тем, что ширина круглого отверстия не постоянна (как у прямоугольной щели), а изменяется от размера диаметра D до нуля. Как показывает тщательный анализ, «средняя» ширина составляет $D/1{,}22$; поэтому вместо формулы (37.1) мы и получили выражение $\theta = 1{,}22\lambda/D$. Распределение интенсивности на дифракционной картине от круглого отверстия показано на рис. 37.12. Видно, что любое изображение представляет собой сложную дифракционную картину. В большинстве случаев нас интересует только центральное пятно, так как окружающие его концентрические кольца значительно уступают ему по яркости.

Когда два точечных объекта находятся очень близко друг от друга, дифракционные картины их изображений перекрываются, как показано на рис. 37.11, *б*. Если объекты сблизятся еще больше, то наступает момент, когда уже нельзя сказать, видите ли вы два перекрывающихся изображения или единственное изображение. О том, когда

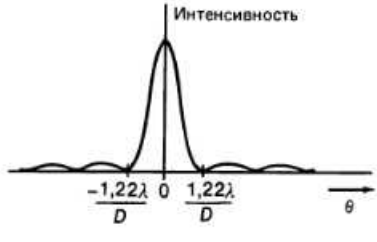


Рис. 37.12. Распределение интенсивности света поперек дифракционной картины при дифракции на круглом отверстии.

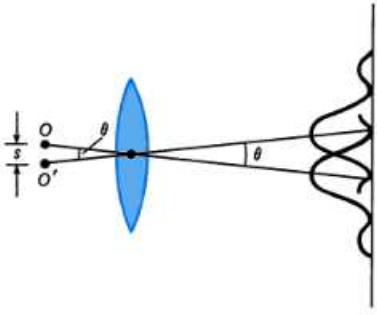


Рис. 37.13. Критерий Рэлея: два изображения разрешимы, если центр дифракционного пика любого из объектов совпадает с первым минимумом дифракционной картины другого объекта. Два точечных объекта O и O' видны из центра линзы под углом θ. Для каждого объекта проведен только один луч, чтобы указать центр его дифракционной картины.

это происходит, различные наблюдатели могут судить по-разному. Однако существует общепринятый критерий, предложенный лордом Рэлеем (1849–1919). **Критерий Рэлея** устанавливает, что *два изображения находятся на пороге разрешения, когда центр дифракционного диска одного из них совпадает с первым минимумом на дифракционной картине другого*. Подобное расположение изображений показано на рис. 37.13. Так как первый минимум наблюдается под углом $\theta = 1{,}22\lambda/D$ относительно центрального максимума, из рис. 37.13 следует, что два объекта можно считать различимыми, если угловое расстояние между ними равно этому углу θ:

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D}. \qquad (37.10)$$

Такой предел, обусловленный дифракцией, налагает на разрешающую способность линзы волновая природа света.

37.5. Разрешающая способность телескопов и микроскопов

На первый взгляд может показаться, что, выбирая соответствующие фокусные расстояния, можно сконструировать микроскопы и телескопы с любым увеличением. В действительности это не так вследствие дифракции. Увеличение свыше некоего предела означает простое увеличение дифракционной картины. Непонимание этого может оказаться причиной ошибочных выводов, ибо, полагая, будто мы видим детали объекта, мы в действительности видим лишь детали дифракционной картины. Чтобы установить предельное разрешение, воспользуемся критерием Рэлея [формула (37.10)]:

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D},$$

который одинаково применим к микроскопу и к телеско-

пу, если под D понимать диаметр объектива. Для телескопа разрешение определяется углом $\theta = 1{,}22\lambda/D$[1].

Для микроскопа обычно указывается истинное расстояние s между двумя точками, которые только-только удается разрешить (рис. 37.13). Так как объекты обычно находятся вблизи фокальной точки объектива, $\theta = s/f$, или $s = f\theta$. Комбинируя это соотношение с формулой (37.10), получаем следующее выражение для *разрешающей способности*, или *разрешающей силы* (РС):

$$\text{РС} = s = f\theta = \frac{1{,}22\lambda f}{D}. \tag{37.11}$$

Расстояние s называется разрешающей способностью линзы, поскольку это – минимальное расстояние между двумя точками, при котором их еще удается разделить. Соотношение (37.11) можно выразить и через *аксептанс*, угол α между осью объектива и крайними лучами, исходящими из объекта и попадающими в объектив (рис. 37.14). Вывод формулы[2] мы оставляем в качестве упражнения (задача 20 в конце главы), а сейчас приведем лишь конечный результат:

$$\text{РС} = s = \frac{1{,}22\lambda}{2\sin\alpha} = \frac{0{,}61\lambda}{\sin\alpha}. \tag{37.12а}$$

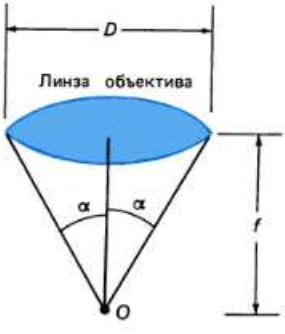


Рис. 37.14. Линза объектива микроскопа; α – угол между осью конического светового пучка, выходящего из точки объекта, и его крайними лучами; 2α – угловая апертура.

Разрешающую способность можно увеличить, поместив каплю масла между объектом и передней поверхностью объектива, которая обеспечивает их оптический контакт. Такого рода объективы называются *иммерсионными*. В масле длина световой волны уменьшается до величины λ/n, где n – показатель преломления масла, и разрешающая способность равна

$$\text{РС} = \frac{0{,}61\lambda}{n\sin\alpha}. \tag{37.12б}$$

Обычно у масла $n \approx 1{,}50$, хотя показатель преломления отдельных сортов масла доходит до 1,8. Иммерсия позволяет повысить разрешающую способность на 50% и более.

---

[1] Разрешающая способность телескопов с объективами большого диаметра ограничена обычно не дифракцией, а другими явлениями, например турбулентностью атмосферы. С другой стороны, разрешающую способность высококачественного микроскопа обычно ограничивает дифракция, поскольку объективы микроскопов представляют собой сложные комбинации линз, составленные из большого числа элементов малого диаметра (чтобы обеспечить малое фокусное расстояние f).

[2] Этот вывод особенно прост для случая малого угла α, так как при этом $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha = D/2f$ (рис. 37.14), или $f/D = 1/(2\sin\theta)$. Следовательно, $s = 1{,}22\lambda f/D = 1{,}22\lambda/(2\sin\alpha)$. Вывод этой формулы в общем случае составляет содержание задачи 20 в конце главы.

Величина $n \sin \alpha$ называется *числовой апертурой* (ЧА) линзы:

$$\text{ЧА} = n \sin \alpha.$$

Обычно числовую апертуру указывают на оправе объектива вместе с увеличением. Чем больше значение ЧА, тем выше разрешающая способность.

Пример 37.4. Чему равен теоретический предел углового расстояния между двумя звездами, разрешимыми с помощью 200-дюймового телескопа Паломарской обсерватории? Предполагается, что звезды испускают белый свет со средней длиной волны 550 нм.

Решение. Так как $D = 200$ дюймов $= 5{,}1$ м, из формулы (37.10) мы получаем, что $\theta = 1{,}22\lambda/D = 1{,}22\,(5{,}50 \cdot 10^{-7}\ \text{м})/5{,}1\ \text{м} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}$ рад, или $0{,}75 \cdot 10^{-5}$ град. Этот предел обусловлен дифракцией. В действительности разрешение оказывается еще ниже из-за аберраций и, что более важно, турбулентности атмосферы. Объективы большого диаметра строят не с целью получения более высокой разрешающей способности, а ввиду того, что они улавливают большее количество света, и это позволяет наблюдать менее яркие объекты.

Пример 37.5. Определите ЧА и РС лучших иммерсионных микроскопов при условии, что показатель преломления масла равен $n = 1{,}8$ и $\sin \alpha \approx 0{,}90$. Предполагается, что $\lambda = 550$ нм.

Решение. $\text{ЧА} = n \sin \alpha = 1{,}6$. $\text{РС} = 0{,}61\lambda/\text{ЧА} = (0{,}61)\,(5{,}50 \cdot 10^{-7}\ \text{м})/(1{,}6) \approx 2 \cdot 10^{-7}\ \text{м} = 200$ нм. Это наивысшая разрешающая способность, достижимая с помощью оптического микроскопа.

Дифракция ограничивает размеры деталей, которые можно разглядеть на любом объекте. Обратимся к формуле (37.11). Заметим, что фокусное расстояние не может быть меньше примерно радиуса линзы, причем это нижний предел, достичь который весьма трудно – см. уравнение шлифовщика линз (35.3). В лучшем случае, как следует из соотношения (37.11)[1], при $f \approx D/2$ получаем

$$\text{РС} \approx \frac{\lambda}{2}. \tag{37.13}$$

Таким образом, с точностью до множителя 2 справедливо следующее утверждение:

Невозможно разрешить детали объекта, размеры которых меньше длины волны используемого света.

Это – важное и полезное эмпирическое правило.

Современные сложные линзы конструируются столь совершенными, что их реальная разрешающая способность нередко в пределе определяется дифракцией, т. е. длиной волны применяемого света. Для разрешения более мелких деталей необходимо использовать более короткие

[1] К этому же результату можно прийти, исходя из соотношения (37.12а), так как $\sin \alpha$ не превосходит единицы и обычно принимает значения от 0,6 до 0,9. С иммерсией, как видно из формулы (37.12б), в лучшем случае $\text{РС} \approx \lambda/3$, что соответствует результату, приведенному в примере 37.5.

световые волны. Применение УФ-излучения может увеличить разрешающую способность иногда почти вдвое. Однако еще более важным оказалось открытие в начале XX в. волновых свойств электронов (гл. 40). Электроны могут иметь очень малые длины волн, что используется в электронном микроскопе (разд. 40.6), который благодаря этому способен давать увеличение, от 100 до 1000 раз превосходящее увеличение оптического микроскопа. Для рентгеновского излучения также характерны очень малые длины волны, и оно часто используется для более детального исследования объектов специальными методами (разд. 37.11).

37.6. Разрешающая способность человеческого глаза и полезное увеличение

Разрешающую способность человеческого глаза ограничивают несколько факторов примерно одного порядка величины. Наибольшей разрешающей способностью обладает желтое пятно, в котором расстояние между колбочками минимально – около 3 мкм (= 3000 нм). Диаметр зрачка изменяется в пределах примерно от 0,1 до 0,8 см, поэтому для длины волны $\lambda = 550$ нм (отвечающей наибольшей чувствительности глаза) дифракционный предел составляет примерно от $\theta \approx 1{,}22\lambda/D \approx 8 \cdot 10^{-5}$ до $6 \cdot 10^{-4}$ рад. Так как размеры глазного яблока в глубину составляют около 2 см, это соответствует разрешающей способности в лучшем случае $s \approx (8 \cdot 10^{-5}\ \text{рад})(2 \times \times 10^{-2}\ \text{м}) \approx 2$ мкм, а в худшем случае (при узком зрачке) около 15 мкм. Сферическая и хроматическая аберрации также ограничивают разрешающую способность на уровне 10 мкм. В результате человеческий глаз способен разрешать объекты с угловым расстоянием между ними не меньше $5 \cdot 10^{-4}$ рад. Это соответствует объектам, отстоящим друг от друга на 1 см при условии, что их рассматривают с расстояния около 20 м. Среднее расстояние наилучшего зрения человеческого глаза составляет примерно 25 см. На таком расстоянии глаз может различать объекты, отстоящие друг от друга на (25 см)$(5 \times \times 10^{-4}$ рад$) \approx 10^{-4}$ м. Так как лучшие оптические микроскопы не способны разрешать объекты на расстоянии менее 200 нм друг от друга (см. пример 37.5), то полезное увеличение ограничено величиной примерно

$$\frac{10^{-4}\ \text{м}}{200 \times 10^{-9}\ \text{м}} = 500 \times .$$

На практике для того, чтобы избежать излишнего напряжения глаз, часто используют увеличения около 1000 ×. Еще большие увеличения позволили бы лишь увидеть дифракционную картину, возникающую в объективе микроскопа.

37.7. Система с большим числом щелей – дифракционная решетка

В разд. 37.1 – 37.3 мы рассмотрели дифракционную картину, возникающую при прохождении света через одну или две щели. Обратимся теперь к чрезвычайно полезному устройству – *дифракционной решетке*, состоящей из большого числа параллельных щелей, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Дифракционные решетки часто изготавливают, нанося на стекло очень тонкие линии алмазным резцом. Промежутки между штрихами служат щелями. Дешевые дифракционные решетки изготавливают, делая фотографические копии с решетки-оригинала. Фотовоспроизведение с уменьшением позволяет изготовить решетки с очень малым периодом. В настоящее время широко используются решетки, содержащие 10 000 штрихов на 1 см. Они находят применение при очень точных измерениях длин волн (разд. 37.8). Дифракционные решетки со щелями в непрозрачном экране называются *прозрачными решетками*. Кроме того, существуют *отражательные решетки*. Их изготавливают, нанося тонкие штрихи на металлическую или стеклянную поверхность; дифракционную картину образует отраженный свет. Действие таких решеток, по существу, мало чем отличается от действия прозрачных решеток, и мы ограничимся рассмотрением только последних.

Анализ принципа действия дифракционной решетки во многом напоминает анализ интерференции в опыте Юнга на двух щелях. Предположим, что на решетку падают параллельные лучи света (рис. 37.15). Будем считать щели достаточно узкими, так что продифрагировавший на каждой щели свет распределен в очень широком диапазоне углов и на удаленном экране за решеткой может интерферировать со светом от всех других щелей. Лучи, не испытывающие в щелях отклонения ($\theta = 0$), создают в результате усиливающей интерференции светлое пятно в центре. Под углом θ, при котором лучи от соседних щелей обладают разностью хода $\Delta l = m\lambda$ (m – целое число),

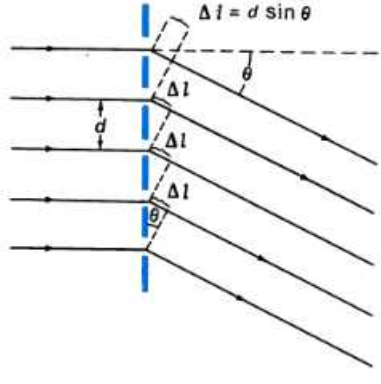


Рис. 37.15. Дифракционная решетка.

опять имеет место усиливающая интерференция. Если d – расстояние между щелями (период решетки), то

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d},\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \text{[главные максимумы]}, \quad (37.14)$$

служит условием максимума интенсивности. Аналогичное соотношение справедливо и в случае двух щелей, и m также называется *порядком* дифракционного максимума.

Между дифракционными картинами от двух и от большого числа щелей существует важное различие: у дифракционной решетки максимумы оказываются гораздо *более резкими* и *узкими*. Объяснить это можно следующим образом. Предположим, что угол θ несколько превышает угол, отвечающий максимуму. В случае двух щелей соответствующие волны лишь слегка разойдутся по фазе, и между ними почти целиком сохранится усиливающая интерференция. Поэтому в картине, возникающей при дифракции на двух щелях, максимумы имеют бóльшую ширину (рис. 36.14). В случае дифракционной решетки разность фаз волн, исходящих из двух соседних щелей, также незначительна. Но волна из одной щели может оказаться в противофазе с волной из другой щели, отстоящей от нее на несколько сотен периодов решетки, и их взаимная интерференция погасит весь (или почти весь) свет. Пусть, например, угол θ отличается от угла, соответствующего максимуму первого порядка, причем разность хода равна не точно длине волны λ, а $1{,}001\lambda$. Тогда волна, исходящая из одной щели, будет сдвинута по фазе относительно волны, испущенной следующей за ней 500 щелью на $1{,}5000\lambda$, или точно на $1^1/_2$ длины волны, и благодаря интерференции эти волны погасят друг друга. Гасящая интерференция происходит и между волнами из пары щелей, сдвинутых на одну щель относительно рассмотренной нами пары. Иначе говоря, свет первой щели гасит свет из щели 501, свет второй щели гасит свет из щели 502 и т. д. Таким образом, даже при крайне малом угле[1], соответствующем разности хода $0{,}001\lambda$, происходит сильная гасящая интерференция, и поэтому максимум

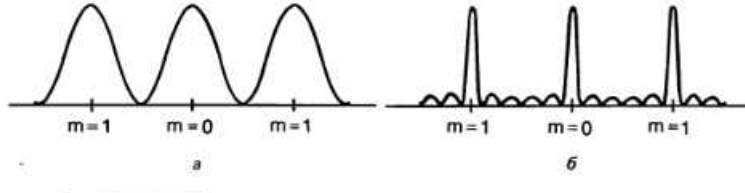


Рис. 37.16. Интенсивность как функция угла зрения θ (или положения на экране) для двух щелей (*а*) и шести щелей (*б*). У дифракционных решеток число щелей очень велико (порядка 10^4) и пики еще более узкие.

[1] В зависимости от числа щелей при таком угле гашение (ослабление) может оказаться либо полным, либо неполным. В последнем случае между главными максимумами (рис. 37.16, *б*) наблюдаются малые пики, обычно столь слабые, что они едва заметны. Подробнее мы обсудим эти вопросы в разд. 37.9.

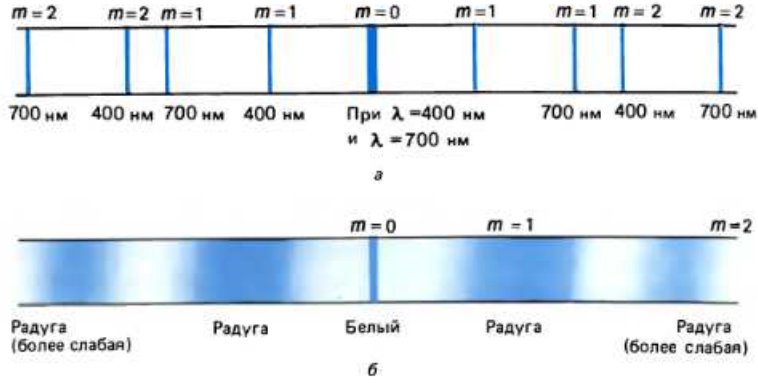


Рис. 37.17. Спектры, полученные на дифракционных решетках: *а* – две длины волны (400 и 700 нм); *б* – белый свет. Максимумы второго порядка обычно менее интенсивны, чем максимумы первого порядка. Если расстояние между штрихами достаточно мало, то максимумы второго порядка могут отсутствовать. (Максимумы более высоких порядков не показаны.)

должен быть очень узким. Чем больше штрихов у дифракционной решетки, тем резче пики (рис. 37.16). Так как дифракционная решетка позволяет получить более четкие (и яркие) линии, чем две щели, она оказывается гораздо более точным прибором для измерения длин волн.

Предположим, что свет, падающий на дифракционную решетку, не монохроматичен, а содержит две или несколько различных частот. Тогда во всех порядках, кроме $m = 0$, для каждой длины волны максимум будет возникать под своим углом (рис. 37.17, *а*). Если на дифракционную решетку падает белый свет, то центральный максимум ($m = 0$) будет представлять собой резкую белую полосу, но во всех остальных порядках будет наблюдаться отчетливое радужное цветовое размытие по некоторому диапазону углов (рис. 37.17, *б*). Вследствие разложения света дифракционной решеткой на составляющие с различными длинами волн эта картина называется *спектром*.

Пример 37.6. Вычислите углы, соответствующие дифракционным максимумам первого и второго порядков для света с длинами волн 400 и 700 нм, если дифракционная решетка содержит 10000 штрихов на 1 см.

Решение. Так как решетка содержит 10^4 штрих/см $= 10^6$ штрих/м, расстояние между штрихами (период решетки) равно $d = 1/10^6$ м$^{-1} = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ м. Максимумы первого порядка ($m = 1$) наблюдаются под углами

$$\sin\theta_{400} = \frac{m\lambda}{d} = \frac{1(4{,}0 \cdot 10^{-7}\text{ м})}{1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ м}} = 0{,}400,$$

$$\sin\theta_{700} = 0{,}700,$$

т. е. при $\theta_{400} = 23{,}6^0$ и $\theta_{700} = 44{,}0^0$. Максимумы второго порядка наблюдаются под углами

$$\sin\theta_{400} = \frac{2(4{,}0 \cdot 10^{-7}\text{ м})}{1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ м}} = 0{,}800,$$

$$\sin\theta_{700} = 1{,}40,$$

т. е. $\theta_{400} = 53{,}0^0$, а максимума второго порядка при $\lambda = 700$ нм не существует, так как $\sin\theta$ не может быть больше единицы. Максимумы более высокого порядка также не возникают.

Пример 37.7. Белый свет с длинами волн от 400 до 750 нм падает на дифракционную решетку с 4000 штрих/см. Покажите, что фиолетовый максимум в спектре третьего порядка перекрывается с красным в спектре второго порядка.

Решение. Период решетки равен $d = 1/(4000\ \text{см}^{-1}) = 2{,}50 \cdot 10^{-6}$ м. Фиолетовый максимум в спектре третьего порядка наблюдается под углом θ, определяемым соотношением

$$\sin\theta = \frac{(3)(4{,}00 \cdot 10^{-7}\ \text{м})}{(2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \text{м})} = 0{,}480.$$

Красный максимум в спектре второго порядка наблюдается под углом

$$\sin\theta = \frac{(2)(7{,}50 \cdot 10^{-7}\ \text{м})}{(2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \text{м})} = 0{,}600,$$

т. е. под бóльшим углом.

Дифракционная решетка служит важным элементом спектроскопа – прибора для точного измерения длин волн. О нем речь пойдет в разд. 37.8.

37.8. Спектроскоп и спектроскопия

Спектроскоп (рис. 37.18) – прибор для точного измерения длин волн с помощью дифракционной решетки (разд. 37.7) или призмы, которые разлагают свет на компоненты с различными длинами волн. Свет от источника через узкую щель S попадает в коллиматор. Щель находится в фокальной точке линзы L, поэтому на решетку падают параллельные лучи. Подвижная зрительная труба позволяет фокусировать лучи. Наблюдатель ничего не увидит до тех пор, пока труба не окажется под углом θ, отвечающим дифракционному максимуму (обычно используются максимумы первого порядка) для той длины волны, которую испускает источник. Угол θ может быть измерен с очень высокой точностью[1], что позволяет с высокой точностью определить и длину волны линии по формуле (37.14):

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d},$$

где m – целое число, означающее порядок максимума, d – период решетки (расстояние между двумя соседними штрихами). [Линия с определенной длиной волны, кото-

Рис. 37.18. Спектроскоп.

[1] Угол θ при данной длине волны обычно измеряют по обе стороны относительно оси, так как решетку не всегда удается установить строго перпендикулярно падающим лучам; из двух измерений берется среднее.

рую вы наблюдаете в спектроскопе, в действительности представляет собой изображение щели S. Чем у́же щель, тем у́же (но при этом и слабее) линия и тем точнее можно измерить длину волны. Если диапазон световых длин волн оказывается непрерывным, то в спектроскопе будет виден сплошной спектр.]

В некоторых спектроскопах применяются отражательные дифракционные решетки или призмы. Из-за дисперсии (разд. 36.5) свет с различными длинами волн отклоняется призмой на разные углы. Недостатком призмы является то, что при ее использовании получаются менее резкие линии и не удается разрешать близкие линии. К преимуществам призмы следует отнести более высокую интенсивность отклоненного света (и, следовательно, возможность использования неярких источников), чем у обычной дифракционной решетки, так как в случае решетки бóльшая часть света сосредоточена непосредственно в центральном максимуме. Однако отражательные решетки удается теперь изготовлять путем нанесения на поверхность профилированных желобков. У таких решеток значительная часть света отражается под нужным углом и создает интенсивный максимум первого порядка.

Если спектр источника не наблюдается визуально, а фиксируется (например, на пленке), то соответствующий прибор называется не *спектроскопом*, а *спектрометром*, хотя оба термина иногда используются как синонимы. Приборы, которые позволяют также измерять интенсивность света с данной длиной волны, называются *спектрофотометрами*.

Одно из важных применений спектральных приборов – идентификация атомов или молекул. При нагревании газа или пропускании через него сильного электрического тока каждый газ испускает характерный **линейчатый спектр.** Иначе говоря, испускается свет со строго определенными длинами волн, различными у разных химических элементов и соединений[1]. На рис. 37.19 (цветная вклейка) показаны линейчатые спектры некоторых элементов, находящихся в газообразном состоянии. Линейчатые спектры наблюдаются только у газов, находящихся при высоких температурах и низких давлениях. Свет, испускаемый раскаленными твердыми телами, например нитью лампы накаливания, и даже плотными газообразными объектами типа Солнца, имеет *непрерывный* (сплошной) *спектр* с широким диапазоном длин волн.

Как видно из рис. 37.19, солнечный «непрерывный спектр» содержит ряд *темных* линий (приведены только

---

[1] Причина испускания атомами и молекулами линейчатых спектров долгое время оставалась загадочной. Ее решение сыграло основную роль в развитии современной квантовой механики (гл. 40).

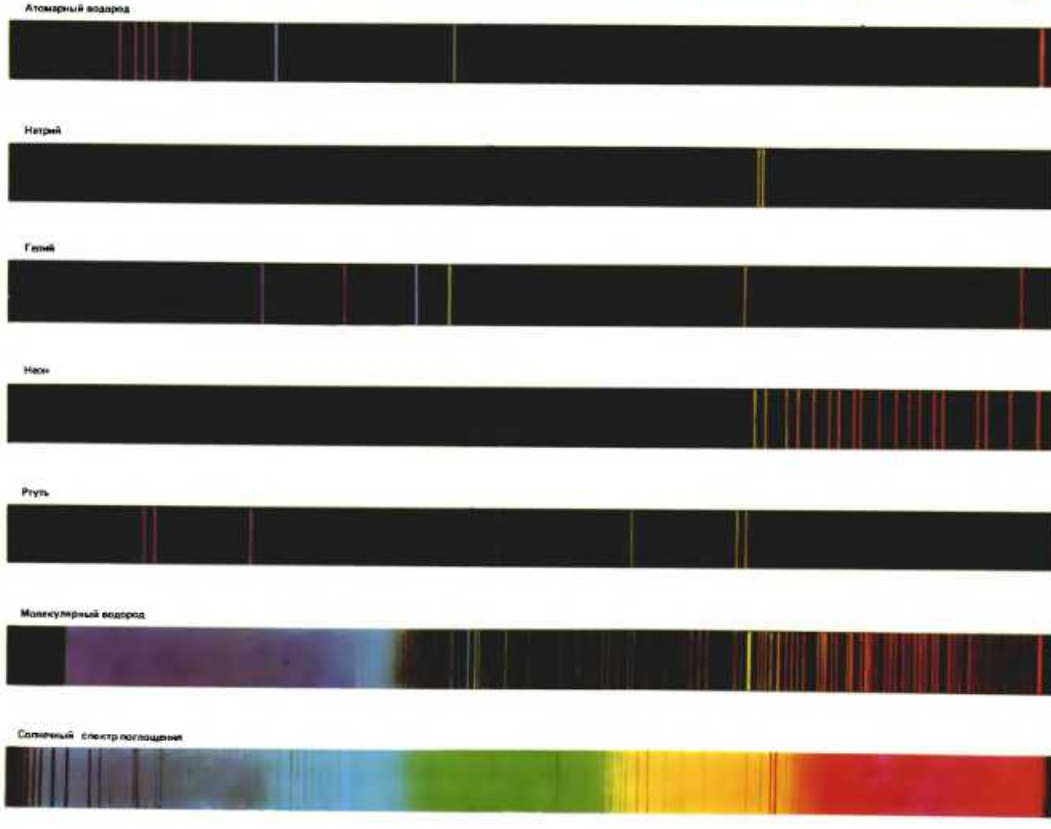


Рис. 37.19. Линейчатые спектры некоторых элементов и солнечный спектр с линиями поглощения (воспроизводится с разрешения фирмы Bausch and Lomb, Inc.).

наиболее заметные линии), называемых *линиями поглощения*. Атомы и молекулы поглощают и излучают свет с одной и той же длиной волны. Линии поглощения в спектре Солнца возникают из-за поглощения света атомами и молекулами в более холодных внешних слоях «атмосферы» Солнца, а также атомами и молекулами в атмосфере Земли. Тщательный анализ тысяч таких линий поглощения в солнечном спектре обнаружил, что в «атмосфере» Солнца представлены примерно две трети всех химических элементов. Существование элементов в атмосферах других планет, в межзвездном пространстве и звездах также удалось обнаружить благодаря спектроскопии.

Спектроскопия оказывается действенным средством обнаружения определенных молекул в лабораторных образцах в тех случаях, когда химический анализ затруднен. Например, биологическая молекула ДНК и другие типы белков поглощают свет в определенных областях спектра (особенно в ультрафиолетовой области). Исследуемый

материал (часто в растворе) помещают в монохроматический пучок света, длину волны которого экспериментатор подбирает с помощью призмы или дифракционной решетки. Сравнение интенсивностей поглощения исследуемого объекта и стандартного раствора без образца позволяет судить не только о наличии молекул определенного типа, но и об их концентрации.

Испускание и поглощение света происходят и за пределами видимой части спектра – в ультрафиолетовой и инфракрасной областях. Так как стекло поглощает УФ- и ИК-излучение, вместо линз используются отражательные дифракционные решетки и зеркала. Для регистрации света применяются специальные пленки или фотоэлементы.

* 37.9. Фазовые диаграммы в случае большого числа щелей. Ширина пика

Воспользуемся теперь фазовыми диаграммами для построения системы максимумов в дифракционной картине от решетки с большим числом щелей; выведем формулу для ширины пика и посмотрим, откуда возникают слабые вторичные максимумы между главными максимумами (рис. 37.16, *б*). Прежде всего необходимо заметить, что распределения интенсивности для двух и шести щелей на рис. 37.16 изображены для случая очень узких щелей, когда дифракция не сказывается на высоте пиков. В случае реальных дифракционных решеток это условие обычно не выполняется. Ширина щели D часто оказывается намного меньше расстояния между щелями d, и поэтому дифракция ограничивает интенсивность максимумов, в силу чего центральный максимум ($m = 0$) оказывается ярче побочных. Мы не станем более подробно задерживаться на этом эффекте в распределении интенсивности. Заметим лишь, что если один из дифракционных минимумов совпадает с интерференционным максимумом того или иного порядка, то этот максимум не наблюдается. (Например, если $d = 2D$, то интерференционные максимумы всех четных порядков $m = 2,4,...$ отсутствуют. Можете ли вы объяснить, почему? Подсказка: см. пример 37.3.)

Рис. 37.20. Фазовая диаграмма для двух щелей: *а* – в центральном максимуме; *б* – в минимуме.

На рис. 37.20 и 37.21 изображены фазовые диаграммы соответственно для случая двух и шести щелей. Каждая короткая стрелка изображает амплитуду волны от одной щели, а векторная (или фазовая) сумма дает полную амплитуду для данного угла наблюдения θ. На рис. 37.20, *а* и 37.21, *а* представлены фазовые диаграммы, отвечающие $\theta = 0$, т. е. центру картины, где расположен центральный максимум ($m = 0$). На рис. 37.20, *б* и 37.21, *б* изображено условие возникновения соседнего минимума: стрелки впервые замыкаются и их векторная сумма обращается в нуль, как и амплитуда E_θ. В случае двух щелей это происходит, когда амплитуды оказываются в про-

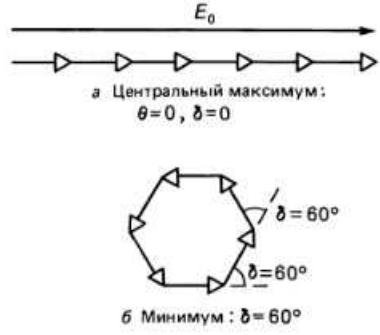


Рис. 37.21. Фазовая диаграмма для шести щелей: *а* – в центральном максимуме; *б* – в минимуме.

тивофазе, т. е. когда разность фаз между ними составляет 180°. В случае шести щелей это происходит, когда каждая стрелка образует угол 60° с соседней. В случае двух щелей минимум соответствует разности фаз между щелями $2\pi/2$ (в радианах), в случае шести щелей – разности фаз δ, равной $2\pi/6$. В общем случае N щелей минимум соответствует разности фаз между соседними щелями:

$$\delta = \frac{2\pi}{N}. \tag{37.15}$$

Что это означает в пересчете на угол θ? Прежде всего заметим, что разность фаз δ связана с углом θ соотношением

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d\sin\theta}{\lambda}, \text{ или } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta \tag{37.16}$$

[см. соотношение (36.4)]. Обозначим через $\Delta\theta_0$ угол, под которым наблюдается минимум, следующий за пиком при $\theta = 0°$. Он соответствует разности хода между соседними щелями (рис. 37.15) $\Delta l = d\sin\Delta\theta_0$; поэтому

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{d\sin\Delta\theta_0}{\lambda}.$$

Подставляя выражение (37.15) для δ, получаем

$$\sin\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{36.17а}$$

Так как величина $\Delta\theta_0$ обычно мала (число щелей N в дифракционной решетке обычно очень велико), то $\sin\Delta\theta_0 \approx \approx \Delta\theta_0$, и в пределе малых углов справедлива формула

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{37.17б}$$

Из последних двух соотношений ясно, что, чем больше N, тем у́же центральный пик. [При $N = 2$ мы получаем $\sin\Delta\theta_0 = \lambda/2d$, что совпадает с формулой (36.2б), выведенной ранее для случая двух щелей, при $m = 0$.]

Рис. 37.22. Фазовая диаграмма для вторичного пика.

Любая из формул (37.17) демонстрирует, почему с увеличением N пики становятся более узкими. Происхождение слабых вторичных максимумов между главными пиками (рис. 37.16, *б*) можно объяснить с помощью фазовой диаграммы на рис. 37.22. По сути дела, это – обобщение рис. 37.21, *б* (где $\Delta\delta = 60°$), но с фазой $\Delta\delta$, возросшей почти до 90°, где E_θ – относительный максимум. Заметим, что E_θ гораздо меньше, чем E_0 (рис. 37.21, *а*), поэтому интенсивность вторичного максимума гораздо меньше интенсивности главного. При дальнейшем увеличении $\Delta\delta$ (и θ) величина E_θ вновь убывает до нуля («двойной оборот»), затем достигает еще одного небольшого максимума и т. д. В конце концов диаграмма снова развертывается, а при $\Delta\delta = 360°$ все амплитуды выстраиваются вдоль прямой (как на рис. 37.21, *а*), что соответствует следующему главному максимуму [$m = 1$ в формуле (37.14)].

Соотношение (37.17, *б*) задает полуширину центрального ($m = 0$) пика. Чтобы определить полуширину пиков более высокого порядка ($\Delta\theta_m$ для пика порядка m), продифференцируем соотношение (37.16). Это позволит связать приращение $\Delta\delta$ фазы δ с приращением $\Delta\theta$ угла θ:

$$\Delta\delta \approx \frac{d\delta}{d\theta}\Delta\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta\Delta\theta.$$

Если $\Delta\theta_m$ – полуширина пика порядка m ($m = 1, 2,...$), т. е. угол между максимумом пика и ближайшим к нему минимумом (с любой стороны), то, как следует из формулы (37.15), $\Delta\delta = 2\pi/N$. Подставляя полученное выражение в соотношение для $\Delta\delta$, получаем

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m}, \qquad (37.18)$$

где θ_m – угловое положение m-го пика, задаваемое соотношением (37.14). Приведенный вывод справедлив только при малых $\Delta\delta\,(= 2\pi/N)$. Для реальных решеток N порядка 10^4 и более, поэтому условие малости $\Delta\delta$ выполняется.

37.10. Разрешающая способность дифракционной решетки

Важным свойством любой дифракционной решетки, используемой в спектроскопе, является ее способность различать две очень близкие длины волны.

Определим *угловую дисперсию* дифракционной решетки как скорость изменения угла заданного порядка дифракции с длиной волны: $d\theta/d\lambda$. Угол θ дифракции света с длиной волны λ на решетке с периодом d удовлетворяет соотношению (37.14):

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d},$$

где m – порядок. Дифференцируя соотношение (37.14), получаем

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{m}{d} d\lambda,$$

поэтому угловая дисперсия определяется по формуле

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}. \tag{37.19}$$

Если две монохроматические волны с длинами волн λ_1 и λ_2 должны разрешаться спектроскопом, то угол $\Delta\theta$ между ними (в данном порядке m) должен (по критерию Рэлея) быть не меньше ширины их дифракционных пиков. По формуле (37.18) угловая полуширина $\Delta\theta$ пика (угол между вершиной пика и ближайшим к ней минимумом с любой стороны) равна

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{N d\cos\theta},$$

где N – полное число штрихов дифракционной решетки (индекс m мы опустили). Следовательно, минимальное различие длин волн, которые могут быть разрешены ($\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$), определяется по формуле

$$\Delta\lambda \approx \frac{d\lambda}{d\theta}\Delta\theta = \left(\frac{d\cos\theta}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{N d\cos\theta}\right)$$

[мы воспользовались соотношением (37.19) и положили $\lambda_1 \approx \lambda_2 = \lambda$]. Полученное выражение можно упростить:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N m}. \tag{37.20}$$

Таким образом, *разрешающая способность* R дифракционной решетки определяется выражением

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \tag{37.21}$$

которое с учетом соотношения (37.20) преобразуется к виду

$$R = Nm. \tag{37.22}$$

Чем больше R, тем более близкие длины волн можно разрешить с помощью решетки. При заданной разрешающей способности R минимальное различие $\Delta\lambda$ длин волн, близких к λ, как следует из двух предыдущих выражений, составляет

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R}.$$

Пример 37.8. Желтый свет натрия (которому отвечают длины волн $\lambda_1 = 589{,}00$ нм и $\lambda_2 = 589{,}59$ нм), падает на дифракционную решетку, имеющую 7500 штрих/см. Определить а) максимальный порядок для желтого света натрия; б) угловую дисперсию дифракционной решетки; в) ширину решетки, необходимую для разрешения двух линий натрия; г) разрешающую способность дифракционной решетки в этом случае; д) угловую ширину каждой из линий натрия.

Решение. а) Так как $d = 1$ см/7500 $= 1{,}33 \cdot 10^{-6}$ м, максимальный порядок m для $\lambda = 589$ нм может быть вычислен по формуле (37.14) при условии

$$m = \frac{d}{\lambda}\sin\theta \leqslant \frac{1{,}33 \cdot 10^{-6}\ \text{м}}{5{,}89 \cdot 10^{-7}\ \text{м}} = 2{,}25.$$

Таким образом, максимальный порядок $m = 2$.

б) По формуле (37.19) угловая дисперсия определяется выражением

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}.$$

Линия натрия во втором порядке наблюдается при $\sin\theta = 2\lambda/d = 2(589 \times 10^{-9}\ \text{м})/(1{,}33 \cdot 10^{-6}\ \text{м}) = 0{,}886$, поэтому $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = 0{,}464$ и

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2}{(1{,}33 \cdot 10^{-6}\ \text{м})(0{,}464)} = 3{,}24 \times 10^{-3}\ \text{рад/нм},$$

или 0,186 град/нм.

в) Необходима разрешающая способность

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\ \text{нм}}{0{,}59\ \text{нм}} = 1000.$$

Чтобы достичь ее, полное число штрихов N должно быть равно [по формуле (37.22)]

$$N = \frac{R}{m} = \frac{1000}{2} = 500.$$

Решетка должна быть шириной всего 500/7500 см$^{-1}$ = 0,0667 см. Типичные дифракционные решетки имеют ширину несколько сантиметров и поэтому легко разрешают желтые линии натрия.

г) Разрешающая способность решетки при $N = 500$, $m = 2$ равна 1000. Дифракционная решетка шириной 3,0 см содержала бы 22 500 штрихов, и ее разрешающая способность была бы равна 45 000.

д) Для решетки с числом штрихов не менее 500 угловая ширина линии при $m = 2$ [по формуле (37.18)] составляет

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{N d\cos\theta} = \frac{589 \cdot 10^{-9}\ \text{м}}{(500)(1{,}33 \cdot 10^{-6}\ \text{м})(0{,}464)} = 0{,}0019\ \text{рад},$$

или 0,11°.

* 37.11. Рентгеновские лучи и дифракция рентгеновского излучения

В 1895 г. В. К. Рентген (1845–1923) открыл, что, когда электроны, ускоренные высоким напряжением в вакуумной трубке, соударяются с поверхностью стекла (или металла), возникает свечение находящихся на некотором расстоянии флуоресцирующих минералов, а фотопленка оказывается засвеченной. Рентген приписал эти эффекты действию нового типа излучения (отличного от катодных лучей). Их стали называть X-лучами (x – традиционное алгебраическое обозначение неизвестной величины). Вскоре Рентген обнаружил, что открытые им лучи через одни

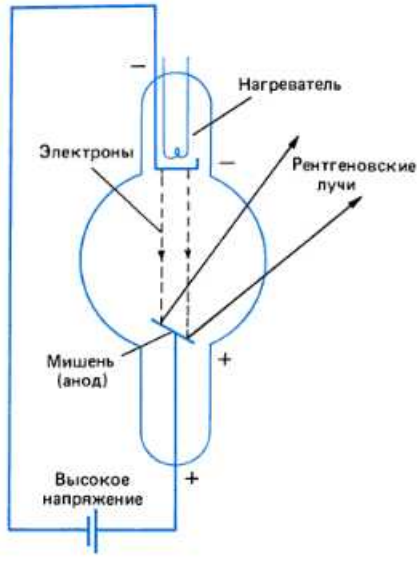


Рис. 37.23. Рентгеновская трубка. Электроны, испускаемые нагретой проволочкой в вакуумной трубке, ускоряются высоким напряжением. При соударении электронов с поверхностью анода (мишени) испускается рентгеновское излучение.

материалы проникают лучше, чем через другие, а спустя еще несколько недель он получил первую рентгенограмму (сделав снимок руки своей жены в рентгеновских лучах). В настоящее время для получения рентгеновского излучения используются трубки (рис. 37.23), сходные с использованной Рентгеном, с напряжением от 30 до 150 кВ.

Исследования природы рентгеновских лучей показали, что это – не заряженные частицы (типа электронов), поскольку рентгеновские лучи не отклонялись электрическим и магнитным полями. Было высказано предположение о том, что рентгеновское излучение может быть одной из разновидностей невидимого света. Но с помощью обычных дифракционных решеток не удавалось наблюдать дифракцию или интерференцию рентгеновских лучей. Разумеется, если длины волн рентгеновского излучения гораздо меньше характерного периода дифракционной решетки 10^{-6} м ($= 10^3$ нм), то ожидать эффекта и не следовало. Около 1912 г. Макс фон Лауэ (1879–1960) высказал предположение о том, что если атомы в кристалле расположены регулярно (рис. 17.1, *а*) (многие физики разделяли такую теорию кристаллического строения вещества, хотя она еще не была полностью подтверждена экспериментально), то кристаллы могли бы служить своего рода дифракционной решеткой для очень коротких волн с длиной волны порядка межатомного расстояния, составляющего примерно 10^{-10} м ($= 10^{-1}$ нм). Проведенные вскоре эксперименты показали, что рентгеновские лучи, рассеянные на кристалле, действительно создают дифракционную картину с характерными максимумами и минимумами (рис. 37.24). Так «одним махом» были экспериментально продемонстрированы и волновая природа

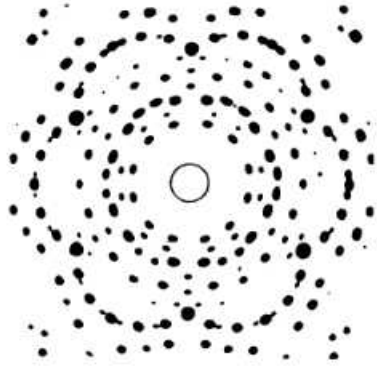


Рис. 37.24. Дифракционная картина, возникающая при рассеянии рентгеновских лучей на кристалле берилла (воспроизводится с разрешения фирмы Eastman Kodak).

рентгеновского излучения, и регулярное расположение атомов в кристаллах. В настоящее время достоверно установлено, что рентгеновские лучи представляют собой электромагнитное излучение с длинами волн в диапазоне примерно от 10^{-2} до 10 нм (именно этот диапазон длин волн испускается рентгеновской трубкой).

В разд. 37.4 и 37.5 было показано, что при микроскопическом исследовании объекта использование света с меньшей длиной волны позволяет достичь более высокого разрешения. Поскольку длины волн рентгеновского излучения значительно короче, чем у видимого света, это излучение в принципе позволяет достичь существенно более высокого разрешения. Но, по-видимому, не существует материалов, которые можно было бы использовать в качестве линз для очень коротковолнового рентгеновского излучения. Поэтому при исследовании микромира атомов и молекул эффективным, но и сложным оказался метод *дифракции рентгеновских лучей* (или *рентгеноструктурного анализа кристаллов*). В простых кристаллах, таких, как NaCl, атомы образуют правильную кубическую решетку (рис. 37.25) с периодом d. Предположим, что на такой кристалл под углом θ к поверхности падает пучок рентгеновских лучей и что два луча, изображенные на рис. 37.25, отражаются двумя атомными плоскостями. Если путь луча *I* оказывается ровно на целое число длин волн больше пути луча *II*, то происходит усиливающая интерференция. Разность хода между лучами *I* и *II* равна

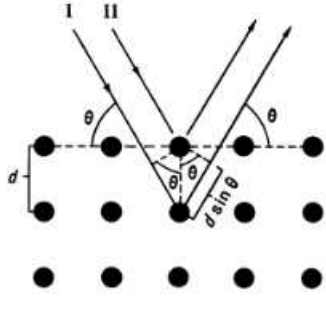


Рис. 37.25. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле.

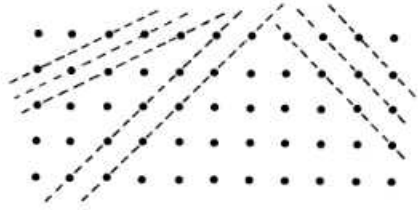


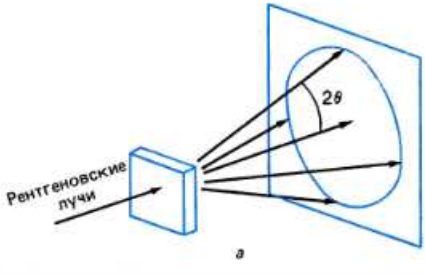
Рис. 37.26. В кристалле существует много плоскостей, на которых могут дифрагировать рентгеновские лучи.

$2d \sin \theta$. Следовательно, усиливающая интерференция наблюдается при

$$m\lambda = 2d \sin \theta, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{37.23}$$

где m – любое целое число. (Обратите внимание на то, что угол θ отсчитывается *не от нормали к поверхности*.) Это – так называемое *условие Брэгга*, названное в честь У. Л. Брэгга (1890–1971), который вывел его и вместе со своим отцом У. Г. Брэггом (1862–1942) разработал теорию и экспериментальные методы дифракции рентгеновских лучей на кристаллах в 1912–1913 гг. Если известна длина волны рентгеновского излучения и измерен угол θ, отвечающий усиливающей интерференции, то можно определить межатомное расстояние d. На этом и основан рентгеноструктурный анализ в кристаллографии.

В действительности рентгеновские дифракционные картины чрезвычайно сложны. Прежде всего кристалл представляет собой трехмерный объект, и рентгеновские лучи могут дифрагировать на различных плоскостях под разными углами в кристалле (рис. 37.26). Хотя анализ рентгеновских дифракционных картин является трудной задачей, тем не менее он позволяет получить обширные данные о строении любого вещества в кристаллической



а

б

Рис. 37.27. *а* – дифракция рентгеновских лучей на поликристаллическом веществе приводит к образованию серии круговых колец; *б* – дифракционная картина, полученная при дифракции рентгеновских лучей на поликристаллическом ацетоацетате натрия (снимок публикуется с разрешения фирмы Lester V. Bergman and Assoc., Inc.).

форме. Если вещество представляет собой не единый кристалл, а смесь большого числа крохотных кристалликов, как в металле или порошке, то вместо серии пятен (рис. 37.24) возникает серия колец (рис. 37.27). Каждое кольцо соответствует дифракционному максимуму определенного порядка m [соотношение (37.23)], возникающему при дифракции на наборе параллельных плоскостей.

Заключение

Дифракцией мы называем свойство света, подобно другим видам волн, огибать встречающиеся на его пути препятствия и размываться при прохождении через узкие щели. Отклоненные лучи, прошедшие различные пути, интерферируют между собой и создают дифракционную картину. Проходя через очень узкую щель шириной D, свет создает дифракционную картину с ярким центральным максимумом полушириной θ, определяемой соотношением $\sin\theta = \lambda/D$, и более слабыми линиями по обе стороны от центрального максимума. Минимумы в дифракционной картине удовлетворяют условию $D\sin\theta = m\lambda$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, за исключением $m = 0$ ($m = 0$ соответствует главному максимуму).

Интенсивность света в любом месте дифракционной картины от одной щели можно вычислить с помощью фазовых диаграмм. Этот же способ позволяет определить интенсивность и при дифракции на двух щелях. Дифракционная картина в этом случае представляет собой серию максимумов, обусловленных интерференцией света от двух щелей, промодулированных «огибающей», которая обусловлена дифракцией на каждой щели.

Волновая природа света ограничивает резкость изображений или разрешающую способность. Вследствие дифракции нельзя различить детали, характерный размер которых меньше длины волны испускаемого излучения.

Дифракционная решетка содержит большое число параллельных щелей или штрихов, отстоящих друг от друга на расстояние d (период решетки). Максимумы усиливающей интерференции наблюдаются под углами θ, для которых $\sin\theta = m\lambda/d$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. В случае дифракционной решетки эти пики гораздо ярче и резче, чем в простом приборе с двумя щелями. Ширина пика обратно пропорциональна полному числу штрихов решетки.

Дифракционная решетка (или призма) используется в *спектроскопе* для разделения цветов или для наблюдения *линейчатых спектров*, так как при заданном порядке m угол θ зависит от λ. Тщательно измеряя угол θ, с помощью спектроскопа можно с высокой точностью определить длину волны.

Вопросы

1. И радиоволны, и свет представляют собой электромагнитные волны. Почему можно слушать радио за возвышенностью, даже если передающая антенна находится за пределами прямой видимости?
2. Держа руку вблизи глаза, сфокусируйте зрение через узкую щель между двумя пальцами на далеком источнике света. (Добейтесь максимальной четкости.) Опишите картину, которую вы увидите. Какая это дифракция – Френеля или Фраунгофера?
3. Высота прямоугольной щели вдвое больше ее ширины. В какой плоскости размытие света произойдет на более широкий угол – в горизонтальной или в вертикальной? Опишите дифракционную картину.
4. Объясните, почему дифракционную картину от протяженного источника света наблюдать труднее, чем от точечного источника. Сравните также монохроматический источник с источником белого света.
5. Как сказывается в случае дифракции Фраунгофера на одной щели увеличение а) ширины щели; б) длины волны?
6. Опишите дифракционную картину, возникающую при освещении белым светом одной щели шириной а) 50 нм; б) 50000 нм.
7. Что произойдет с дифракционной картиной на одной щели, если всю установку поместить вместо воздуха а) в воду; б) в вакуум?
8. Обсудите, в чем сходство и различие между дифракцией Френеля и Фраунгофера на одной щели. Совпадают ли основные принципы? В чем могут различаться дифракционные картины?
9. Используя соотношение (37.6), укажите четко различие между углами θ и β.
10. Почему при дифракции Фраунгофера на одной щели первый побочный максимум наблюдается под углом θ, не точно удовлетворяющим соотношению $\sin\theta = {}^3/_2\,\lambda/D$?
11. На рис. 37.9 показана интерференционная картина от двух щелей для случая $d > D$. Возможен ли обратный случай: $d < D$?
12. Как скажется в эксперименте с двумя щелями при учете как дифракции, так и интерференции увеличение а) длины волны; б) расстояния между щелями; в) ширины щели?
13. Обсудите сходство и различие между интерференцией и дифракцией.
14. Ограничивает ли дифракция изображения, создаваемые а) сферическими зеркалами; б) плоскими зеркалами?
15. Сказываются ли дифракционные эффекты на качестве мнимых изображений? А действительных?
16. В чем состоят преимущества (укажите по крайней мере два из них) использования в астрономических телескопах больших отражательных зеркал?
17. Почему оптический микроскоп не позволяет наблюдать молекулы и клетки?
18. Атомы имеют диаметр порядка 10^{-8} см. Можно ли, используя видимый свет, визуально наблюдать атом? Объясните, почему можно или нельзя.
19. Какой цвет обеспечивает наилучшую разрешающую способность оптического микроскопа?
20. При использовании монохроматического света влияет ли его цвет на разрешающую способность микроскопа? Объясните.
21. Можно ли дифракционную решетку называть интерференционной решеткой? Аргументируйте ответ.
22. В чем преимущество для дифракционной решетки а) большого числа щелей; б) малого периода решетки?
23. Свет с длинами волн от 400 до 700 нм падает нормально на дифракционную решетку. В каких порядках (если таковые существуют) может произойти перекрытие максимумов и минимумов? Зависит ли ответ от ширины щели?
24. Чем различаются интерференционные картины от двух щелей на расстоянии 10^{-4} см друг от друга и дифракционной решетки, имеющей 10^4 штрих/см?
25. Белый свет падает а) на дифракционную решетку и б) на призму. В каждом случае на стене ниже направления падающего луча появляется радуга. Какого цвета верхний край радуги в каждом из этих случаев?
26. Объясните, почему при освещении дифракционной решетки монохроматическим светом между главными пиками возникают слабые вторичные пики. Почему вторичные пики такие слабые?
27. Почему в спектроскопии предпочтительнее использовать дифракционную решетку, а не призму?
28. Из формулы (37.22) следует, что разрешающая способность дифракционной решетки тем выше, чем больше порядок m. Вместе с тем, согласно формуле (37.18), ширина пика тем больше, чем больше порядок. Нет ли здесь противоречия? Объясните.

Задачи

Раздел 37.1

1. (I) Свет с длиной волны 680 нм падает на щель шириной 0,0245 мм. Чему равна угловая

ширина центрального дифракционного пика?
2. (I) Монохроматический свет с длиной волны 589 нм падает на щель. Чему равна ширина щели, если угол между первыми светлыми полосами по обе стороны от центрального пика равен 33,0°?
3. (I) Чему равна при данной длине волны λ максимальная ширина щели, при которой не будет дифракционных минимумов?
4. (II) Чему равна ширина центрального дифракционного пика на экране, расположенном на расстоянии 5,50 м за щелью шириной 0,101 мм, освещаемой светом с длиной волны 400 нм?
5. (II) Опишите дифракционную картину (дифракция Фраунгофера) при падении параллельного пучка света на щель шириной D под углом 30° к нормали.

Раздел 37.2

6. (II) Если ширину щели удвоить, то интенсивность проходящего через нее света удвоится. а) Покажите, что интенсивность в центре экрана возрастает в 4 раза. б) Объясните, почему это не противоречит закону сохранения энергии.
7. (III) а) Объясните, почему вторичные максимумы в дифракционной картине при дифракции Фраунгофера на одной щели располагаются не точно под углами $\beta/2 = (m + {}^1/_2)\pi$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. б) Продифференцировав соотношение (37.7), покажите, что вторичные максимумы расположены там, где угол $\beta/2$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg}(\beta/2) \approx \beta/2$. в) Постройте тщательно и точно график функции $y = \beta/2$ и $y = \operatorname{tg}(\beta/2)$. По точкам их пересечения определите значения β, соответствующие двум первым вторичным максимумам. Сколько процентов составляет различие с формулой $\beta/2 = (m + {}^1/_2)\pi$?
8. (III) Определите приближенно угловую полуширину максимума (отвечающему $I = {}^1/_2 I_0$) центрального дифракционного пика для дифракции Фраунгофера на одной щели. (Подсказка: воспользуйтесь графическим методом или методом проб и ошибок, так как задача не имеет аналитического решения.) Для определенности предположим, что $\lambda = 550$ нм и $D = 2{,}00 \cdot 10^{-3}$ мм.

Раздел 37.3

9. (II) Рассчитайте установку с двумя щелями так, чтобы центральный дифракционный пик содержал ровно 15 полос.
10. (II) Что можно сказать о ширине щели и расстоянии между щелями, если центральный пик в дифракционной картине от двух щелей содержит ровно восемь полос?
11. (II) Предположим, что в установке с двумя щелями $d = D$. Если эти две щели превращаются в одну шириной $2D$, докажите, что формула (37.9) при этом переходит в правильное выражение для дифракции от одной щели.
12. (II) Две щели шириной 0,010 мм находятся на расстоянии 0,030 мм (измеряемом между центрами щелей). Определите а) расстояние между интерференционными полосами для света с длиной волны 550 нм на экране, расположенном на расстоянии 1,0 м; б) расстояние между двумя дифракционными минимумами с каждой стороны от центрального максимума огибающей.
13. (II) Сколько интерференционных полос содержится в центральном дифракционном пике картины, возникающей при дифракции от двух щелей, если а) $d = 2{,}00D$; б) $d = 12{,}0D$; в) $d = 4{,}50D$; г) $d = 7{,}20D$?
14. (III) Постройте фазовые диаграммы (как на рис. 37.7) для двух щелей с учетом интерференции и дифракции. Начертите диаграмму для каждой из нескольких характерных точек (рис. 37.9, *в*), таких, как, центр, первый минимум, следующий максимум и точка, в которой $\sin\theta = \lambda/D$.

Разделы 37.4–37.6

15. (I) Чему равен угловой аксептанс α, т.е. угол между осью объектива и крайними лучами светового пучка из точки объекта, попадающими в объектив иммерсионного микроскопа, и какова его разрешающая сила, если $n = 1{,}60$ и ЧА = 1,35? Для освещения используется источник с $\lambda = \lambda\,500$ нм.
16. (I) Чему равен обусловленный дифракцией предел углового разрешения 100-дюймового телескопа обсерватории Маунт-Вильсон ($\lambda = 500$ нм)?
17. В объектив иммерсионного микроскопа (масло с $n = 1{,}60$) попадает свет от точки объекта в пределах углового аксептанса 60°. а) Чему равна числовая апертура? б) Чему приближенно равна разрешающая способность микроскопа при $\lambda = 550$ нм?
18. (II) Две звезды, находящиеся на расстоянии 10 световых лет от Земли, едва разрешимы с помощью 100-дюймового (диаметр зеркала) телескопа. Оцените расстояние между этими двумя звездами. Предполагается, что $\lambda = 550$ нм.
19. (II) На теле некоторого морского организма имеется узор из пятнышек, среднее расстояние между которыми составляет 0,40 мкм. а) Если особь такого организма рассматривать в свете с длиной волны 550 нм, то какой должна быть минимальная числовая апертура, чтобы разрешить точки на теле особи? б) При

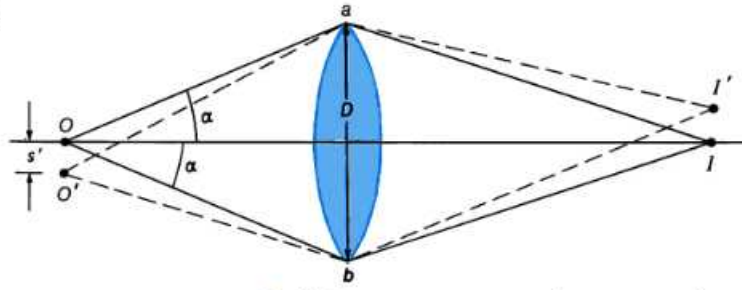


Рис. 37.28. К задаче 37.28.

каком минимальном увеличении можно разглядеть эти точки?

20. (II) а) Может ли нормальный человеческий глаз видеть раздельными две фары грузовика, разнесенные на 1,8 м, с расстояния 10 км? При ответе учитывайте только дифракцию. Предполагается, что диаметр зрачка равен 5,0 мм, длина световой волны 500 нм. б) На каком наибольшем расстоянии фары могут быть разрешены?

21. Предположим, вы хотите сконструировать телескоп, способный разрешить детали лунной поверхности размером около 10 км. Луна находится от Земли на расстоянии 384 000 км. У вас имеется линза для объектива диаметром 10 см с фокусным расстоянием 2,0 м. Каким следует выбрать фокусное расстояние окуляра, если ваш глаз с расстояния 25 см может разрешать объекты, отстоящие друг от друга на расстояние 0,10 мм? Каков предел разрешающей способности телескопа, обусловленный диаметром линзы объектива (т. е. дифракцией)? Предполагается, что $\lambda = 500$ нм.

22. На рис. 38.28 изображены два точечных объекта O и O', находящиеся на таком расстоянии s' друг от друга, что их изображения I и I' едва разрешимы (точка O находится на оси линзы). Пользуясь рис. 37.28, выведите соотношение (37.12а). (Подсказка: прежде всего покажите, что световые волны, попавшие в результате дифракции из точки O' в точку I, создают в I нулевую интенсивность и, следовательно, разность хода между $O'aI$ и $O'bI$ должна составлять $1{,}22\lambda$. Затем с помощью чертежа покажите, что путь $O'a$ на $s \sin\alpha$ длиннее, чем Oa или Ob, и что путь $O'b$ настолько же короче, чем Oa или Ob.) Угол α не предполагается малым, поскольку расстояние до изображения во много раз превосходит расстояние до объекта ($aI \gg Oa$), $aI' \approx aI$.

Разделы 37.7 и 37.8

23. (I) Под каким углом возникает максимум третьего порядка в случае света с длиной волны 840 нм, падающего на дифракционную решетку с расстоянием между щелями $2{,}35 \cdot 10^{-3}$ см?

24. (I) Сколько штрихов на 1 см имеет дифракционная решетка, если при освещении ее светом с длиной волны 650 нм максимум третьего порядка наблюдается под углом 12,0°?

25. (I) Дифракционная решетка имеет 5000 штрих/см. Спектры какого порядка можно наблюдать при освещении ее белым светом?

26. (I) На крыльях у жука имеется серия параллельных линий. При отражении нормально падающего света с длиной волны 560 нм крылья кажутся яркими под углом 46°. Каково расстояние между линиями на крыльях жука?

27. (I) Свет от источника падает нормально на дифракционную решетку, имеющую 10 000 штрих/см; линии первого порядка наблюдаются под углами 29,8; 37,7; 39,6; 48,9°. Каковы соответствующие длины волн?

28. (II) Белый свет с длинами волн от 400 до 700 нм падает нормально на дифракционную решетку, имеющую 8000 штрих/см. Чему равна ширина спектра первого порядка на экране, находящемся на расстоянии 2,20 м от решетки?

29. (II) Сколько штрихов на 1 см должна иметь дифракционная решетка, если спектр второго порядка отсутствует в видимой области?

30. (II) Покажите, что создаваемые дифракционной решеткой спектры второго и третьего порядков в случае белого света всегда перекрываются.

31. (II) Две спектральные линии измерены спектроскопом с дифракционной решеткой, содержащей 10 000 штрих/см, под углами $+26°38'$, $+41°02'$ и $-26°18'$, $-40°27'$ по обе стороны от центрального максимума. Какие длины волн соответствуют этим линиям?

32. (II) Предположим, что измеренные в задаче 31 углы получены в условиях, когда спектрометр (но не источник света) был погружен в воду. Каким длинам волн соответствовали бы тогда эти спектральные линии?

33. (II) Если дифракционная решетка освещается желтой линией натрия ($\lambda = 589$ нм), пик первого порядка на экране, отстоящем на расстояние 42,0 см от решетки, отстоит на 2,48 см от центрального пика. Другой источник создает

линию на расстоянии 3,84 см от центрального пика. Какова его длина волны?

34. (II) Свет, падающий нормально на дифракционную решетку с 10 000 штрих/см, создает в спектре первого порядка три линии под углами 31,2; 36,4; 47,5°. Какие длины волн соответствуют этим линиям?

35. (II) Монохроматический свет падает на прозрачную дифракционную решетку под углом φ к нормали. Покажите, что в этом случае соотношение (37.14) для дифракционных максимумов следует заменить соотношением

$$d(\sin\varphi \pm \sin\theta) = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Объясните знак $\pm$.

* Раздел 37.9

*36. (II) Недостающие порядки возникают у дифракционной решетки, когда дифракционный минимум совпадает с интерференционным максимумом. Пусть D – ширина каждой щели, d – расстояние между соседними щелями. а) Покажите, что если $d = 2D$, то все четные порядки ($m = 2, 4, 6, \ldots$) будут отсутствовать. б) Покажите, что недостающие порядки возникают всякий раз, когда

$$\frac{d}{D} = \frac{m_1}{m_2},$$

где m_1 и m_2 – целые числа. в) Рассмотрите предельный случай $d \doteq D$, когда расстояние между щелями становится пренебрежимо малым.

*37. (II) Пусть свет с длиной волны 500 нм падает нормально на дифракционную решетку, у которой $d = 3{,}00D = 1200$ нм. а) Сколько порядков (главных максимумов) наблюдается? б) Решетка имеет ширину 1,50 см. Чему равна полная угловая ширина каждого главного максимума?

*38. (II) Можно показать, что у любой дифракционной решетки положения центрального максимума вторичных пиков по обе стороны от него (вплоть до середины расстояния до второго главного пика) совпадают с дифракционной картиной от одной щели, ширина которой равна полной ширине дифракционной решетки. Докажите это с помощью фазовых диаграмм.

*39. (III) а) Выведите выражение для распределения интенсивности в интерференционной картине от трех щелей, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга. Распределение интенсивности выразите через $\delta = 2\pi d \sin\theta/\lambda$, где d – расстояние между соседними щелями, и предположите, что $D \approx \lambda$. б) Покажите, что между главными пиками существует только один вторичный максимум.

* Раздел 37.10

*40. (II) Сколько штрихов на 1 см должна содержать дифракционная решетка шириной 4,0 см, если она позволяет разрешить в первом порядке длины волны 4187,23 и 4187,41 нм?

*41. (II) Дифракционная решетка с 5500 штрих/см имеет ширину 3,6 см. На решетку падает свет с длиной волны 624 нм. Насколько могут различаться две длины волны, если их надо разрешить в любом порядке? В каком порядке достигается наилучшее разрешение?

*42. (II) Дифракционная решетка шириной 2,4 см содержит 16 000 штрихов. Определите а) ее угловую дисперсию в первом и во втором порядках; б) ее разрешающую способность в первом и во втором порядках; в) минимальное различие в длинах волн ($\Delta\lambda$), разрешимых при $\lambda = 410$ нм.

*43. (II) Покажите, что при заданных длине волны и дифракционном угле разрешающая способность дифракционной решетки зависит от полной ширины всех щелей Nd, где N – число щелей шириной по d.

*44. (II) Выведите формулу для минимальной разности частот Δf, разрешаемых дифракционной решеткой при падении на нее света с близкими частотами $f_1 \approx f_2 = f$.

* Раздел 37.11

*45. (II) Рентгеновское излучение с длиной волны 0,128 нм падает на кристалл, атомы которого расположены в плоскостях на расстоянии 0,300 нм друг от друга. Под каким углом следует направить рентгеновские лучи на кристалл, чтобы наблюдать первый дифракционный максимум?

*46. (II) Брэгговская дифракция первого порядка на кристалле с расстоянием между атомами 0,24 нм наблюдается под углом 16,2°. а) Под каким углом наблюдается второй порядок? б) Чему равна длина волны рентгеновского излучения?

*47. (II) Можно ли определить длину волны λ рентгеновского излучения и постоянную решетки d, измерив рентгеновские дифракционные пики трех первых порядков ($m = 1, 2, 3$)? Обоснуйте ответ.

38 Поляризация

В гл. 36 и 37 мы занимались изучением двух явлений, обусловленных волновой природой света,– интерференции и дифракции. В этой главе мы рассмотрим еще одно важное и полезное свойство света, которое состоит в том, что свет может быть *поляризован*. Существование поляризации также можно объяснить, предположив, что свет представляет собой волну, или, точнее, поперечную волну.

38.1. Плоскость поляризации

Понять поляризацию света нам поможет более простое явление – поляризация волны, бегущей по веревке. Веревку можно заставить колебаться в вертикальной плоскости (рис. 38.1, *а*) или в горизонтальной плоскости (рис. 38.1, *б*). И в том и в другом случае волна оказывается *плоскополяризованной* (или линейно-поляризованной), т. е. все колебания происходят в одной плоскости.

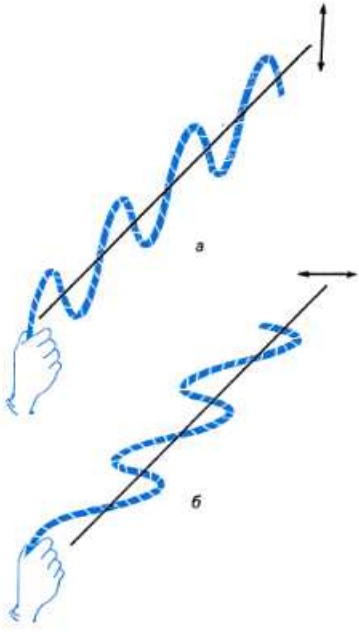


Рис. 38.1. Поперечные волны на веревке, поляризованные в вертикальной плоскости (*а*) и в горизонтальной плоскости (*б*).

Если на пути волны поставить какое-нибудь препятствие с вертикальной щелью (рис. 38.2), то вертикально поляризованная волна пройдет через него, а горизонтально поляризованная волна препятствие не преодолеет. Если бы щель в препятствии была горизонтальной, то оно оказалось бы непреодолимым для вертикально поляризованных волн. Если на пути таких волн поставить оба препятствия, то через них не сможет пройти ни одна из поляризованных волн. Заметим, что поляризация может существовать *только* у *поперечных* волн, но не у продольных. В продольных волнах колебания совершаются только вдоль направления их распространения, и никакой ориентацией щели нельзя эти волны погасить.

О возможности поляризации света стало известно только в XIX в. Но еще современники Ньютона знали явление, связанное с поляризацией света: при преломлении света в некоторых кристаллах, например в исландском шпате, возникают два преломленных луча. Такие кристаллы получили название *двоякопреломляющих* (разд. 38.4). Некоторые другие кристаллы, например турмалин, в зависимости от их ориентации не пропускают тот или иной из преломленных лучей. В настоящее время известно, что лучи в двоякопреломляющем кристалле плоско

Рис. 38.2. Вертикально поляризованные волны проходят через вертикальную щель (*а*), а горизонтально поляризованные волны не проходят (*б*).

поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях и что турмалин действует подобно «щели», которая пропускает только луч с подходящей поляризацией. Но лишь после работ Юнга и Френеля, выполненных в начале XIX в., в этом явлении увидели доказательство того, что свет представляет собой поперечную волну. Спустя полвека развитая Максвеллом электромагнитная (ЭМ) теория света оказалась в полном соответствии с таким объяснением поляризации, так как ЭМ-волна является поперечной. Если ЭМ-волна плоско поляризована, то в качестве направления ее поляризации принято выбирать направление вектора напряженности электрического поля (рис. 33.7).

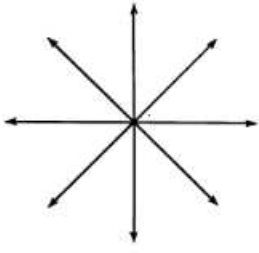


Рис. 38.3. Колебания вектора электрического поля в неполяризованном свете.

Свет не обязательно поляризован. Он может быть и *неполяризованным*. Это означает, что колебания источника происходят одновременно во многих плоскостях (рис. 38.3). Обычная лампа накаливания испускает, как и Солнце, неполяризованный свет.

Плоскополяризованный свет можно получить из неполяризованного с помощью некоторых кристаллов, например турмалина. В наши дни можно также воспользоваться *поляроидной* пленкой. (Поляроиды были изобретены в 1929 г. Эдвином Лэндом.) Эта пленка состоит из имеющих сложное строение длинных молекул с выстроенными параллельными осями. Такой поляроид действует как набор параллельных щелей, почти беспрепятственно (без потерь) пропуская свет одной поляризации (соответствующее направление называется *осью* поляроида) и почти полностью поглощая свет, поляризованный в пер-

Рис. 38.4. Вертикальный поляроид пропускает только вертикальную составляющую падающей на него волны.

пендикулярной плоскости[1]. Если пучок плоскополяризованного света падает на поляроид, ось которого образует угол θ с направлением поляризации, то после поляроида он будет поляризован в плоскости, параллельной оси поляроида, и иметь амплитуду, ослабленную в $\cos\theta$ раз (рис. 38.4). Таким образом, через поляроид проходит только компонента поляризации (вектора напряженности электрического поля **E**), параллельная его оси. Так как интенсивность света пропорциональна квадрату его амплитуды, интенсивность плоскополяризованного пучка, прошедшего через поляризатор, определяется выражением

$$I = I_0 \cos^2\theta, \tag{38.1}$$

где θ – угол между осью поляризатора и плоскостью поляризации падающей волны, I_0 – интенсивность падающего света[2].

Поляроид можно использовать в качестве *поляризатора* для получения плоскополяризованного света из неполяризованного, так как поляроид пропускает только компоненту волны с поляризацией, параллельной его оси. Поляроид можно также использовать в качестве *анализатора*, когда требуется установить, 1) поляризован ли свет и 2) в какой плоскости он поляризован. Поляроид-анализатор пропускает одно и то же количество света независимо от ориентации своей оси, если свет не поляризован; чтобы убедиться в этом, попробуйте вращать одно из стекол поляроидных солнцезащитных очков, глядя сквозь него на обычную лампу накаливания. Но если свет поляризован, то при вращении поляроида интенсивность пропускаемого света максимальна, когда плоскость поляризации параллельна оси поляроида, и минимальна, когда она перпендикулярна оси поляроида. Если, вращая поляроид, посмотреть на небо преимущественно под прямыми углами к направлению на Солнце, то вы увидите, что дневной свет поляризован. (Прямой солнечный свет не поляризован, но мы настоятельно не рекомендуем смот-

---

[1] Как это происходит, можно объяснить, рассматривая структуру молекул. Если напряженность электрического поля **E** колеблется вдоль осей длинных молекул, то электроны будут перемещаться вдоль молекул, совершая тем самым работу и перенося энергию. Следовательно, если вектор **E** параллелен «щелям», то волна будет поглощаться. Если напряженность электрического поля **E** колеблется перпендикулярно осям длинных молекул (т. е. перпендикулярно «щелям»), то поле **E** не будет совершать работу и поглощение отсутствует. Следовательно, рис. 38.2. не применим к колебаниям напряженности электрического поля в ЭМ-волне (хотя вполне отвечает случаю магнитного поля с индукцией **B**). Под осью поляроида понимают направление, в котором отсутствует поглощение электрического поля **E**; следовательно, ось поляроида перпендикулярна длинным молекулам и «щелям» между ними.

[2] Формулу (38.1) часто называют законом Малюса в честь Этьена Малюса, современника Френеля.

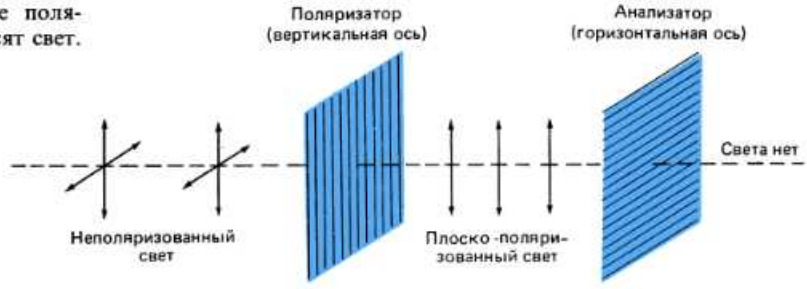


Рис. 38.5. Скрещенные поляроиды полностью гасят свет.

реть на Солнце даже сквозь поляризатор, чтобы не испортить зрение.) Если при определенной ориентации интенсивность прошедшего сквозь поляроид-анализатор света падает до нуля, то такой свет полностью плоско поляризован. Если интенсивность света снижается просто до минимума, то такой свет *частично поляризован*.

Неполяризованный свет – это свет со случайными направлениями поляризации (вектора напряженности электрического поля). Каждую из этих поляризаций можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие. Таким образом, неполяризованный свет можно рассматривать как смесь двух плоскополяризованных пучков света равной амплитуды со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации. Если два поляроида *скрещены*, т. е. их оси расположены под прямым углом, то неполяризованный свет не проходит сквозь них (либо почти не проходит, поскольку реальные поляроиды несовершенны). Как показано на рис. 38.5, неполяризованный свет после прохождения через первый поляроид (поляризатор) становится плоскополяризованным. Второй поляроид (анализатор) не пропускает эту компоненту, так как его ось перпендикулярна оси первого поляризатора. Вы можете убедиться в этом сами с помощью поляроидных солнезащитных очков. Таким образом, благодаря своей способности поляризовать падающий свет поляроидные солнцезащитные очки на 50% ослабляют неполяризованный свет. В действительности они поглощают еще больше света из-за окраски.

Пример 38.1. Неполяризованный свет проходит через два поляроида. Ось одного из них вертикальна, а ось другого образует с вертикалью угол 60°. Каковы поляризация и интенсивность прошедшего света?

Решение. Первый поляроид исключает половину света, поэтому после него интенсивность света уменьшается наполовину: $I_1 = {}^1/_2 I_0$. Свет, падающий на второй поляризатор, поляризован в вертикальной плоскости, поэтому после второго поляроида интенсивность света понижается [см. соотношение (38.1)] до

$$I_2 = I_1 (\cos 60°)^2 = \frac{1}{4} I_1 .$$

Следовательно, $I_2 = {}^1/_8 I_0$, т. е. интенсивность прошедшего света составляет одну восьмую от интенсивности падающего света, а плоскость его поляризации образует с вертикалью угол 60°.

38.2. Поляризация при отражении

Получить поляризованный свет из неполяризованного можно еще одним способом – отражением. Когда свет падает на неметаллическую поверхность под любым углом, кроме прямого, отраженный луч оказывается плоскополяризованным преимущественно параллельно отражающей поверхности (рис. 38.6). Иначе говоря, компонента с поляризацией в плоскости, перпендикулярной отражающей поверхности, почти полностью проходит или поглощается. В этом можно убедиться, поворачивая поляроидные очки, когда вы смотрите в них на поверхность озера или дороги. Поскольку большинство поверхностей под открытым небом горизонтальны, ось поляроидных очков направляют по вертикали, с тем чтобы погасить самую интенсивную компоненту света и тем самым ослабить отблески. Это хорошо знают рыбаки, использующие поляроидные очки, чтобы избавиться от бликов на поверхности озера или реки и тем самым лучше видеть, что происходит под водой.

Степень поляризации отраженного пучка зависит от угла: при нормальном падении свет полностью не поляризован, а при падении под углом, который называется *углом полной поляризации* θ_p, отраженный свет поляризован на 100%[1]. Угол полной поляризации связан с показателями преломления сред по обе стороны границы их раздела соотношением

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (38.2a)$$

где n_1 – показатель преломления среды, в которой распро-

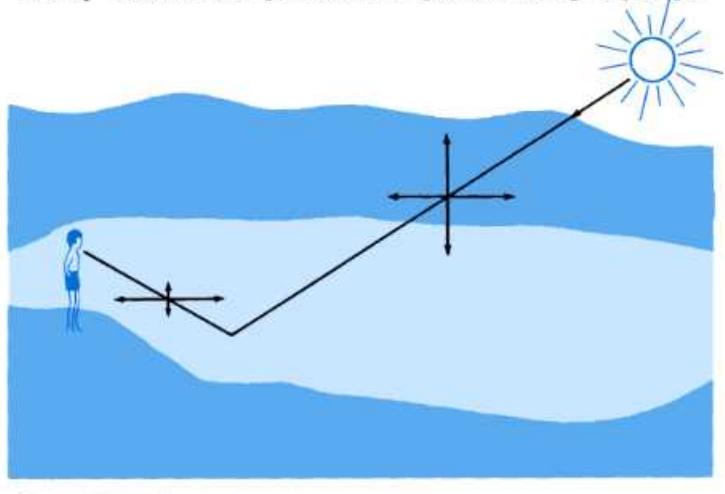


Рис. 38.6. Свет, отраженный от неметаллической поверхности (например, от гладкой поверхности воды в этом озере), частично поляризован параллельно поверхности.

[1] При таком угле падения одна компонента целиком проходит в прозрачную среду полностью, а другая – частично, поэтому прошедший свет *не имеет* 100%-ной поляризации.

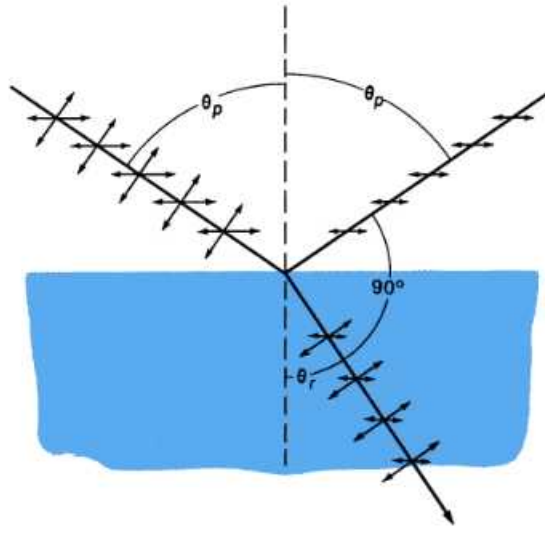


Рис. 38.7. Свет, отраженный под углом θ_p, плоско поляризован параллельно поверхности, и $\theta_p + \theta_r = 90°$, где θ_r – угол преломления.

страняется луч, а n_2 – показатель преломления среды, лежащей по другую сторону отражающей границы. Если свет распространяется в воздухе, то $n_1 = 1$, и

$$\operatorname{tg}\theta_p = n. \qquad (38.2б)$$

Угол полной поляризации называют также *углом Брюстера*, а соотношение (38.2) – *законом Брюстера* в честь шотландского физика Дэвида Брюстера (1781–1868), открывшего его экспериментально в 1812 г. Формулы (38.2) могут быть получены на основе электромагнитной теории света. Интересно отметить, что при падении под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи образуют угол 90°, т.е. $\theta_p + \theta_r = 90°$ (рис. 38.7). В этом можно убедиться, подставив соотношение (38.2а) ($n_2 = n_1 \operatorname{tg}\theta_p = n_1 \sin\theta_p/\cos\theta_p$) в выражение для закона Снелля $n_1 \sin\theta_p = n_2 \sin\theta_r$ и получив равенство $\cos\theta_p = \sin\theta_r$, которое справедливо только для $\theta_p = 90° - \theta_r$.

Пример 38.2. а) При каком угле падения солнечный свет отражается от поверхности озера плоскополяризованным? б) Чему равен угол преломления?

Решение. а) Воспользуемся соотношением (38.2б) при $n = 1{,}33$; тогда $\operatorname{tg}\theta_p = 1{,}33$ и $\theta_p = 53{,}1°$. б) $\theta_r = 90{,}0° - \theta_p = 36{,}9°$.

38.3. Оптическая активность

Было обнаружено, что при прохождении плоскополяризованного света через кристаллы и растворы плоскость поляризации поворачивается на некоторый угол. Например, на рис. 38.8 свет проходит через поляризатор, а затем через сахарный раствор. Поляроид-анализатор за кюветой с раствором не целиком гасит свет, когда его ось образует с осью поляризатора угол 90°. Однако если

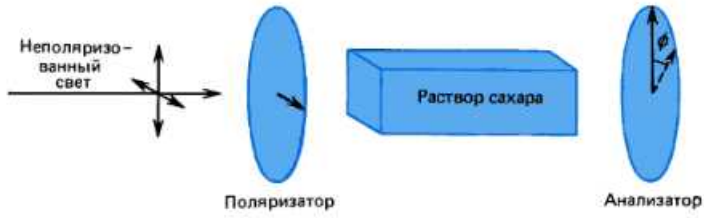


Рис. 38.8. Сахарный раствор поворачивает плоскость поляризации падающего света: после прохождения кюветы свет поляризован не горизонтально, а под углом ϕ к горизонтали, поэтому анализатор, повернутый под углом ϕ к вертикали, гасит свет.

анализатор повернуть на угол ϕ, то он перестает пропускать свет. Это свидетельствует о том, что вещество в кювете поворачивает плоскость поляризации света на угол ϕ. Такие вещества называются *оптически активными*. Оптическая активность обусловлена асимметрией молекул, которые могут иметь форму спиралей, как, например, молекулы некоторых белков. Вещества, поворачивающие плоскость поляризации вправо по ходу луча (как на рис. 38.8), называются *правовращающими*. Вещества, поворачивающие плоскость поляризации влево по ходу луча, называются *левовращающими*. Обычный сахар, декстроза, или D-глюкоза, принадлежит к числу правовращающих веществ. Большинство аминокислот и белков – левовращающие вещества.

Угол вращения ϕ зависит от длины пути l (м) света в веществе и от концентрации c (кг/м^3), если речь идет о растворе. Для разбавленных растворов эта зависимость линейна, и угол ϕ (рад) определяется выражением

$$\phi = \alpha l c .$$

Постоянная α характеризует свойства вещества и называется *удельным вращением (постоянной вращения)* или *удельной оптической активностью* (α зависит от температуры и длины волны используемого света).

Так как угол вращения ϕ пропорционален концентрации, оптическая активность служит стандартным методом измерения концентраций растворов таких веществ, как сахар. Оптическая активность полезна также при определении пространственной структуры больших молекул (например, белков) или ее изменений в различных условиях.

Стекло и пластмасса приобретают оптическую активность в деформированном состоянии. Вращение плоскости поляризации максимально в местах с максимальным напряжением. Модели костей или деталей машин, выполненные из прозрачной пластмассы и помещенные между скрещенными поляроидами, можно использовать для визуального наблюдения точек наибольшего напряжения. Такой метод называется поляризационно-оптическим анализом напряжений.

*38.4. Оптическая анизотропия: двойное лучепреломление и дихроизм

Во многих прозрачных средах скорость света одинакова по всем направлениям. Такие среды называются *изотропными*. Но в некоторых кристаллах и растворах скорость света в различных направлениях неодинакова. Такие среды называются *анизотропными*. О них также говорят как о *двоякопреломляющих*, так как при этом наблюдается необычное явление.

В двоякопреломляющих кристаллах, таких, как кальцит, существует выделенное направление, называемое *оптической осью* кристалла (подчеркнем, что речь идет не об отдельной линии, а о направлении в кристалле). Если обычный свет входит в кристалл вдоль оптической оси, то ничего аномального при этом не происходит. Но если неполяризованный свет падает под углом к оптической оси, как на рис. 38.9, то наблюдается необычное явление: в кристалле возникают два преломленных луча. На рис. 38.9 луч падает по нормали к поверхности и оптическая ось находится в плоскости рисунка. Один преломленный луч, называемый *обыкновенным лучом* (*о*), проходит сквозь кристалл обычным образом. Другой луч, называемый *необыкновенным лучом* (*е*), преломляется, отклоняясь на некоторый угол.

Нетрудно видеть, что закон Снелля для луча *е* не выполняется, однако он справедлив для луча *о*.

Лучи *е* и *о* плоскополяризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. На рис. 38.9 точки на луче *о* указывают на то, что колебания в этом случае происходят в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Поляризация луча *е* указана стрелками.

Явление двойного лучепреломления можно объяснить, приняв следующее допущение: скорость света зависит от ориентации вектора поляризации относительно оптической оси кристалла. Как видно из рис. 38.9, луч *о* поляризован перпендикулярно оптической оси, поэтому его скорость одинакова по всем направлениям, коль скоро поляризация остается перпендикулярной оптической оси. С другой стороны, у луча *е* имеются компоненты поляризации как параллельные, так и перпендикулярные оптиче-

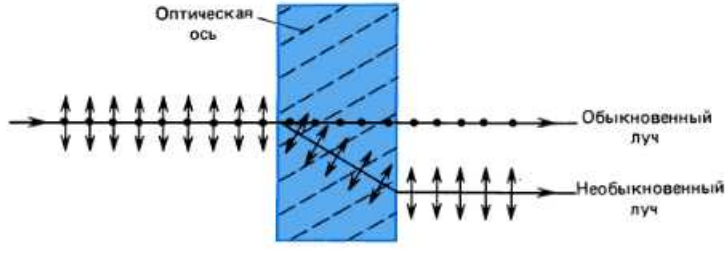


Рис. 38.9. Неполяризованный свет, падающий нормально на двоякопреломляющий кристалл (например, на кристалл исландского шпата), разделяется на два преломленных пучка. Штриховыми линиями показано направление оптической оси.

ской оси, и поэтому его скорость распространения неодинакова в различных направлениях: луч *e* распространяется со скоростью луча *o*, если его вектор поляризации перпендикулярен оптической оси. В других случаях скорость распространения луча *e* будет больше (у некоторых кристаллов меньше), чем скорость распространения луча *o*, и достигает максимума (минимума) при поляризации, параллельной оптической оси. (В дальнейшем мы будем предполагать, что скорость распространения луча *e* в кристалле больше, чем луча *o*.) Следовательно, показатель преломления n_o обыкновенного луча одинаков по всем направлениям, тогда как показатель преломления n_e необыкновенного луча зависит от угла. Обычно приводят значение n_e для луча *e*, распространяющегося перпендикулярно оптической оси с направлением поляризации, параллельным оптической оси. Эти главные значения показателей преломления n_o и n_e приведены в табл. 38.1 для нескольких кристаллов.

Таблица 38.1. Главные значения показателей преломления для некоторых двоякопреломляющих кристаллов ($\lambda = 589$ нм)

Кристалл	n_o	n_e
Лед	1,309	1,313
Кварц	1,544	1,553
Кальцит	1,658	1,486
Доломит	1,681	1,500

Для объяснения двойного лучепреломления используем эти предположения и принцип Гюйгенса. Рассмотрим обыкновенную волну, изображенную на рис. 38.10, *а*. Центры двух элементарных волн Гюйгенса показаны на волновом фронте в момент входа в кристалл. Так как эти элементарные волны распространяются с одинаковой скоростью по всем направлениям, они остаются сферическими внутри кристалла и распространяются в прямом направлении. В случае луча *e* (рис. 38.10, *б*) волновой фронт элементарных волн Гюйгенса имеет форму эллипсоида, так как скорость распространения этого луча зависит от направления. Луч *1* элементарной волны поляризован перпендикулярно оптической оси и поэтому распространяется с такой же скоростью, как и луч *o*. Лучи *2*, *3* и *4* распространяются быстрее обыкновенного луча, причем скорость распространения луча *4* максимальна. (Так обстоит дело в случае кальцита. В таких кристаллах, как лед или кварц, лучи *2*, *3* и *4* распространялись бы медленнее,

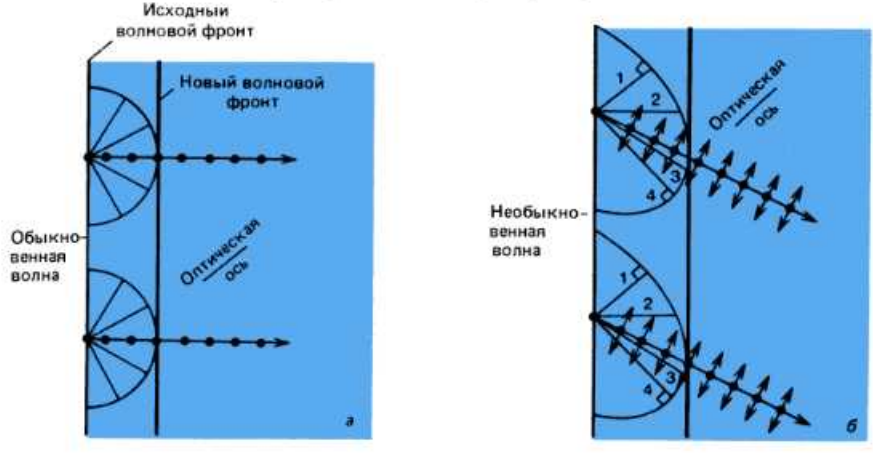


Рис. 38.10. Объяснение двойного лучепреломления на основе принципа Гюйгенса.

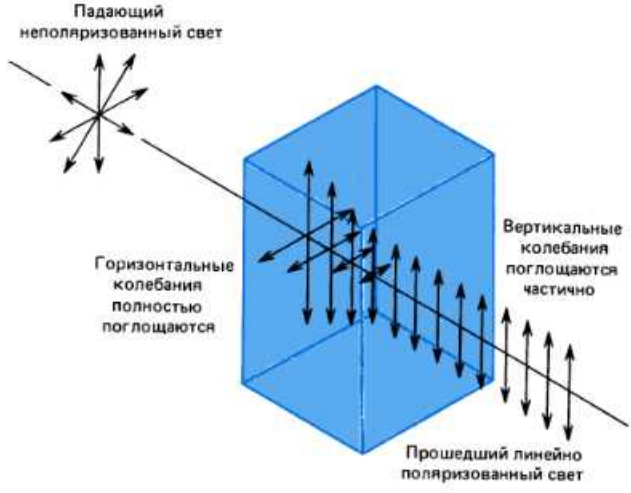


Рис. 38.11. Дихроичный кристалл поглощает одну поляризованную составляющую сильнее, чем другую. Если кристалл достаточно толстый, то прошедший свет плоско поляризован.

чем луч *o*; см. табл. 38.1.) Поэтому волновой фронт (огибающая элементарных волн Гюйгенса) оказывается смещенным в сторону. В соответствующем направлении и будет распространяться луч *e*.

Некоторые двоякопреломляющие кристаллы, например турмалин, поглощают одну из поляризованных компонент сильнее, чем другую (рис. 38.11). О таких кристаллах принято говорить, что они обладают *дихроизмом*. Если толщина дихроичного кристалла достаточно велика, то одна из компонент неполяризованного света полностью поглотится и прошедший через кристалл свет окажется плоскополяризованным. Именно на явлении дихроизма основано действие поляроидных пленок.

*38.5. Круговая и эллиптическая поляризация

Предположим, что пучок плоско-поляризованного света падает на двоякопреломляющий кристалл (например, на кристалл кальцита), оптическая ось которого параллельна грани кристалла и образует угол 45° с плоскостью поляризации света (рис. 38.12). Вектор напряженности электрического поля **E** падающей волны можно разложить на две составляющие – параллельную и перпендикулярную оптической оси, которые будут соответствовать волнам *e* и *o*. Эти волны имеют одинаковые амплитуды и распространяются в кристалле по одному направлению. (Обратите внимание на то, что волна *e* не преломляется, как на рис. 38.9, поскольку колебания в ней происходят параллельно оптической оси.) Однако волны *o* и *e* распространяются с различными скоростями (так как направлены перпендикулярно оптической оси) и выходят из кристалла с различными фазами. Если разность фаз равна 90°, то кристалл называется *четвертьволновой пластинкой* (по-

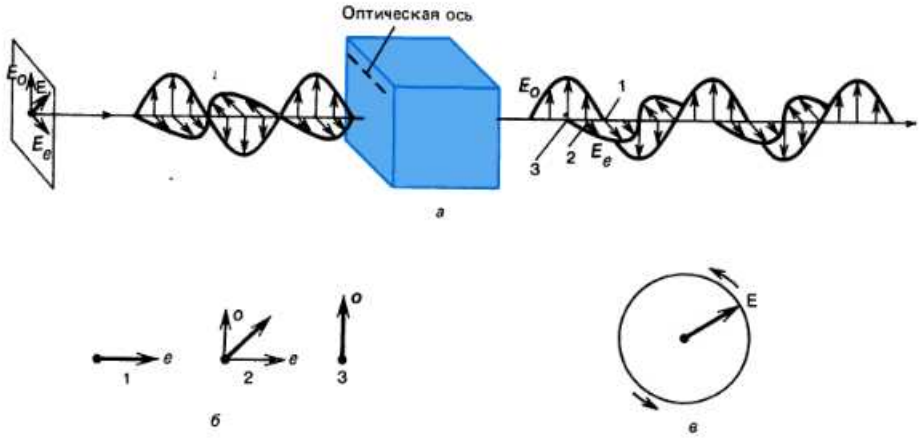


Рис. 38.12. *а* - волна, поляризованная под углом 45° к оптической оси, падает на двоякопреломляющую четвертьволновую пластинку нормально к поверхности и к оптической оси. Обыкновенная волна E_o после прохождения пластинки отстает на четверть длины волны от необыкновенной волны E_e. Вектор поляризации прошедшей волны **E** вращается во времени, в чем можно убедиться, рассматривая его составляющие в точках *1*, *2* и *3*; *б* – те же компоненты, если на них смотреть в направлении распространения волны; *в* – свет циркулярно поляризован.

скольку одна волна будет сдвинута относительно другой на четверть длины волны). Это случай изображен на рис. 38.12. Интересно отметить, что вектор поляризации (полная напряженность электрического поля **E**, равная суммарной напряженности электрических полей двух волн) вращается по окружности постоянного радиуса, как показано на рис. 38.12, *б* и *в*. Такой свет называется поляризованным по кругу, или *циркулярно поляризованным*.

Пример 38.3. Какую толщину должна иметь четвертьволновая пластинка из кальцита для света с длиной волны 589 нм?

Решение. Согласно табл. 38.1, $n_e = 1{,}486$ и $n_o = 1{,}658$. Число длин волн необыкновенного луча, укладывающихся на толщине t кристалла, равно

$$N_e = \frac{t}{\lambda_e} = \frac{tn_e}{\lambda},$$

где λ – длина волны в воздухе и $\lambda_e = \lambda/n_e$ – длина волны в кристалле. В случае обыкновенного луча число длин волн N_o, укладывающихся на толщине кристалла, равно

$$N_o = \frac{tn_o}{\lambda}.$$

Так как мы хотим, чтобы разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами составляла четверть длины волны, положим $N_o - N_e = 1/4$, или

$$\frac{1}{4} = N_o - N_e = \frac{t}{\lambda}(n_o - n_e).$$

Разрешив это соотношение относительно t и подставив численные значения входящих в него величин, получим

$$t = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = \frac{589 \text{ нм}}{4(1{,}658 - 1{,}486)} = 856 \text{ нм}.$$

Если двоякопреломляющий кристалл приводит к сдвигу фаз 180° (*полуволновая пластинка*), то, как показывает чертеж, аналогичный приведенному на рис. 38.12, выходящая волна будет плоско поляризована. Действительно, если толщина кристалла такова, что разность фаз равна 0, π, 2π или любому целому, кратному π, то выходящая волна плоско поляризована. Если же разность фаз равна $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ и т. д., то свет циркулярно поляризован. При других разностях фаз выходящий свет имеет *эллиптическую поляризацию*. Это означает, что вектор напряженности (вектор поляризации) вращается, как показано на рис. 38.12, *в*, но длина его (амплитуда **E**) изменяется так, что конец вектора описывает эллипс.

До сих пор мы предполагали, что в падающей волне вектор **E** образует угол 45° с оптической осью. Но если вектор поляризации падающего луча образует с оптической осью угол, отличный от 45° (а также от 0 и 90°), то свет, выходящий из четвертьволновой пластинки (разность фаз 90°), будет эллиптически поляризованным. В этом нетрудно убедиться, так как амплитуды компонент *e* и *o* неодинаковы.

*38.6. Рассеяние света в атмосфере

Почему Солнце на закате красное, небо в ясный день голубое, а дневной свет (по крайней мере частично) поляризован? Все эти явления можно объяснить *рассеянием* света на молекулах атмосферы. На рис. 38.13 мы видим солнечный свет, падающий на молекулу земной атмосферы. Электрическое поле ЭМ-волны приводит в движение электрические заряды внутри молекулы, и молекула частично поглощает падающее на нее излучение.

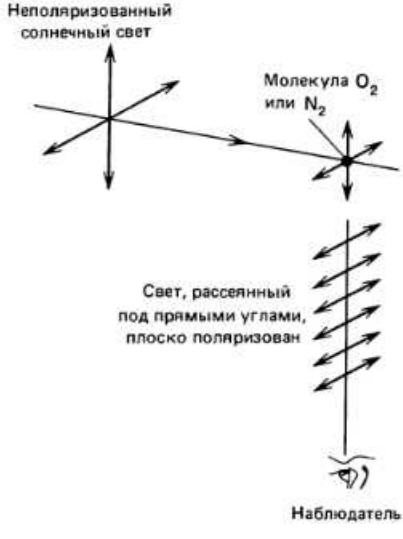


Рис. 38.13. Неполяризованный солнечный свет рассеивается молекулами воздуха.

Поглощенное излучение быстро высвечивается, так как заряды внутри молекулы совершают колебания. Как было показано в разд. 33.4, колебание электрических зарядов порождает ЭМ-волны, электрическое поле которых лежит в плоскости колебаний электрических зарядов. Интенсивность излучения максимальна в направлении, перпендикулярном направлению колебаний, и уменьшается до нуля в направлении колебаний (рис. 33.6). На рис. 38.13 представлено разложение движения зарядов на две составляющие. Под прямым углом к направлению падения солнечного света наблюдатель будет видеть плоскополяризованный свет, так как вдоль направления колебаний другой составляющей свет не испускается. (В этом можно убедиться и иначе, заметив, что при наблюдении в направлении колебаний сами колебания, а следовательно, и возбуждаемые ими волны не видны.) При наблюдении под другими углами присутствуют обе составляющие, причем одна из них оказывается более интенсивной, поэтому свет частично поляризован. Так процесс рассеяния света молекулами атмосферы позволяет объяснить поляризацию дневного света. [Рассеяние позволяет также объяснить полную поляризацию, возникающую при отражении (рис. 38.7). При падении под углом Брюстера, как мы знаем, угол, образованный отраженным и преломленным лучами, будет прямым. Если представить себе, что молекулы среды колеблются в направлении, перпендикулярном преломленному лучу, то легко видеть, что под углом 90° к этому направлению (т. е. у преломленного луча) будет только одна компонента поляризации (рис. 38.7), как и при рассеянии (рис. 38.13).]

Рассеяние света земной атмосферой зависит от длины световой волны λ. Частицы, размеры которых гораздо меньше длины волны света (например, молекулы газов, входящих в состав воздуха), слабее рассеивают длинные волны и сильнее – короткие. С увеличением длины волны рассеяние ослабевает пропорционально $1/\lambda^4$. Следовательно, красный и оранжевый свет рассеивается гораздо слабее, чем голубой и фиолетовый, и поэтому небо выглядит голубым. На закате солнечные лучи проходят максимальный слой атмосферы. Значительная часть голубого излучения рассеивается. Свет, достигающий поверхности Земли и отражающийся от облаков и атмосферной дымки, лишается голубой составляющей и поэтому кажется красноватым.

Пропорциональность рассеяния $1/\lambda^4$ имеет место только в случае, когда рассеивающие объекты оказываются меньше длины световой волны. Это условие выполняется для молекул кислорода и азота, имеющих размеры около 0,2 нм. Но облака содержат капельки воды и кристаллы льда, размеры которых значительно превышают λ. Такие частицы рассеивают свет почти равномерно на всех частотах, поэтому облака кажутся белыми (или серыми в тени).

Заключение

В *неполяризованном свете* колебания вектора напряженности электрического поля происходят в любых направлениях. Если вектор напряженности электрического поля колеблется только в одной плоскости, то свет называется *плоскополяризованным* (или линейно-поляризованным). Свет может быть также частично поляризован. Если неполяризованный свет падает на поляроид или двоякопреломляющий кристалл, то выходящий световой пучок будет плоскополяризован. Существование поляризации светового пучка можно установить экспериментально: если свет направить на поляроид, то при вращении поляроида интенсивность света за ним должна изменяться. Поляроид может использоваться и как поляризатор, и как анализатор. При отражении свет поляризуется либо частично, либо полностью. Если свет, распространяющийся в воздухе, отражается от среды с показателем преломления n, то он будет полностью поляризован, когда угол падения θ_p удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg}\theta_p = n$. Существование поляризации света свидетельствует о том, что свет представляет собой поперечные волны.

Вопросы

1. Какой вывод о природе света можно сделать на основании поляризации?
2. Чем поляризатор отличается от анализатора?
3. Как определить, обладают ли стекла солнцезащитных очков поляризующим действием?
4. Солнечный свет не проходит через два поляроида, если их оси скрещены под прямыми углами. Что произойдет, если между этими поляроидами поместить третий, ось которого образует с осями двух других поляроидов угол 45°?
5. Для какого из веществ, приведенных в табл. 38.1, скорость необыкновенного луча оказывается меньше, когда он поляризован параллельно оптической оси, чем в случае поляризации, перпендикулярной оптической оси?
6. Какой цвет имело бы небо, если бы у Земли не было атмосферы?
7. Останется солнечный свет белым или приобретает окраску, если земная атмосфера окажется в 50 раз плотнее?
*8. Всегда ли в двоякопреломляющей среде необыкновенный луч e распространяется со скоростью c/n_e?
*9. Если из материалов, перечисленных в табл. 38.1, изготовить четвертьволновые пластинки, то из каких материалов получились бы самая толстая и самая тонкая пластинки?
*10. Как определить направление оптической оси у четвертьволновой пластинки?
*11. Как определить, не обладает ли пучок света циркулярной поляризацией?
*12. Может ли быть циркулярно-поляризованной звуковая волна? А плоско-поляризованной? Что можно сказать о пучке СВЧ?

Задачи

Раздел 38.1

1. (I) Два поляризатора ориентированы под углом 45° относительно друг друга. На них падает неполяризованный свет. Какая доля интенсивности света пройдет через оба поляризатора?
2. (I) Два поляроида ориентированы так, что пропускают максимум света. На какой угол следует повернуть один из них, чтобы интенсивность прошедшего света уменьшилась наполовину?
3. (II) Под каким углом следует расположить оси двух поляроидов, чтобы интенсивность падающего неполяризованного света уменьшилась до а) $^1/_3$; б) $^1/_{10}$?
4. (II) Неполяризованный свет проходит через пять расположенных последовательно поляроидов. Ось каждого поляроида (начиная со второго) образует угол 45° с осью предыдущего. Какова интенсивность прошедшего света?
5. (II) Два поляризатора ориентированы под углом 34,0° относительно друг друга. Свет, поляризованный под углом 17,0° относительно

каждого поляризатора, проходит через оба поляризатора. Насколько ослабляется интенсивность света?

6. (II) Докажите, что если два источника света одинаковой интенсивности испускают плоскополяризованный свет, причем их плоскости поляризации взаимно перпендикулярны, то они не смогут создать интерференционную картину даже при условии, что разность фаз постоянно равна нулю.

7. (II) Неполяризованный свет падает на два поляроида, оси которых расположены под прямыми углами. а) Какая часть интенсивности падающего света проходит через них? б) Какая часть света пройдет, если между этими двумя поляроидами поместить третий, ось которого образует с осями других поляроидов угол 45°? в) Что произойдет, если третий поляроид поместить перед первыми двумя?

8. (II) Имеется пучок плоскополяризованного света и «идеальные» поляризаторы. Как повернуть плоскость поляризации света на 90°, утратив при этом лишь 10% интенсивности?

9. (II) Выраженная в процентах поляризация P частично поляризованного света по определению равна

$$P = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}} 100,$$

где $I_{\text{макс}}$ и $I_{\text{мин}}$ – максимальная и минимальная интенсивности света, прошедшего через поляризатор. Такой свет можно рассматривать как суперпозицию двух плоскополяризованных пучков неодинаковой интенсивности $I_{\text{макс}}$ и $I_{\text{мин}}$ с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации. Докажите, что свет, прошедший через поляризатор с направлением оси, образующим угол ϕ с направлением, которому отвечает $I_{\text{макс}}$, имеет интенсивность

$$\frac{1 + p\cos 2\phi}{1 + p} I_{\text{макс}},$$

где $p = P/100$ – «доля поляризации».

Раздел 38.2

10. (I) Чему равен угол Брюстера для границы воздух – стекло ($n = 1{,}56$)?

11. (I) Чему равен угол Брюстера для стекла ($n = 1{,}56$), погруженного в воду?

12. (I) Под каким углом над горизонтом стоит Солнце, когда свет, отражающийся от гладкой поверхности озера, поляризован особенно сильно?

13. (II) Чему равен угол Брюстера при отражении от поверхности воды снизу (из-под воды)? Сравните этот угол с углом полного внутреннего отражения и с углом Брюстера при отражении от поверхности воды сверху.

*Раздел 38.5

***14.** (II) Двоякопреломляющий биологический образец толщиной $1{,}65 \cdot 10^{-3}$ см имеет показатели преломления 1,322 и 1,331 для света с длиной волны 580 нм. Какая разность фаз между необыкновенным и обыкновенным лучами возникает после прохождения через этот образец?

***15.** (II) Узкий пучок неполяризованного света падает под углом 44,5° к грани плоского кристалла кварца толщиной 2,00 см. Оптическая ось параллельна грани и перпендикулярна лучу. а) Вычислите расстояние между обыкновенным и необыкновенным лучами на выходе из кристалла. (Закон Снелля выполняется для обоих лучей, так как лучи распространяются в плоскости, перпендикулярной оптической оси.) б) Как будут поляризованы оба луча после выхода из кристалла?

*Раздел 38.5

***16.** (I) Какова минимальная толщина четвертьволновой пластинки кварца для света с длиной волны 660 нм?

***17.** (II) Пучок циркулярнополяризованного света интенсивности I падает на поляроид. Охарактеризуйте природу выходящего света и вычислите его интенсивность.

***18.** (II) Опишите поляризацию прошедшего света, если свет, падающий на полуволновую пластинку, а) неполяризован; б) плоскополяризован; в) циркулярнополяризован. Ответы обоснуйте.

***19.** (II) Плоскополяризованный свет с длиной волны 650 нм падает по нормали на одну грань тонкого плоского кристалла кальцита. Какова минимальная толщина такого кристалла, если по выходе из другой грани свет остался плоскополяризованным? Оптическая ось параллельна граням кристалла.

***20.** (II) Покажите, что плоскополяризованный пучок света можно представить как сумму двух циркулярнополяризованных компонент.

***21.** (II) Покажите с помощью диаграммы, что если в изображенной на рис. 38.12, *а* экспериментальной установке разность фаз прошедших волн составляет четное кратное π (т. е. равна 0, 2π, 4π и т. д.), то плоскость поляризации прошедшего света совпадает с плоскостью поляризации падающего света. Если разность фаз равна нечетному числу π (т. е. π, 3π, 5π и т. д.), то плоскость поляризации прошедшего света будет перпендикулярна плоскости поляризации падающего света.

***22.** (III) а) Покажите с помощью диаграммы, что если разность фаз прошедших через кристалл волн на рис. 38.12, *а* не равна целому

кратному $\pi/2$, то свет будет эллиптически-поляризован. б) Какой угол образует главная ось с направлением поляризации падающего света?

*23. (III) Предположим, что вектор поляризации падающей волны на рис. 38.12, *a* образует с оптической осью угол, отличный от 45° (например, угол 60°). Как будет поляризован свет, прошедший через а) четвертьволновую пластинку; б) полуволновую пластинку?

39 Специальная теория относительности

К концу XIX в. в физике насчитывалось немало выдающихся достижений. Теории, развитые в течение трех предшествовавших столетий, позволили весьма успешно объяснить широкий круг явлений природы. Ньютоновская механика прекрасно объяснила движение предметов на Земле и небесных тел. Она заложила основы успешного развития гидродинамики, теории волнового движения и акустики. Кинетическая теория привела к объяснению свойств газов и других сред. Электромагнитная теория Максвелла не только свела воедино и объяснила электрические и магнитные явления, но и предсказала существование электромагнитных волн, которые во всем вели себя подобно свету; так возникло представление об электромагнитной природе света. Казалось, что внешний мир, по крайней мере в том виде, как он представлялся физикам, получил вполне удовлетворительное объяснение. Лишь немногие из проблем оставались нерешенными, но, по всеобщему мнению, недолго оставалось ждать того момента, когда и они получат свое решение на основе уже известных принципов.

Но в действительности события развивались не столь просто. Проблемы, о которых мы только что упоминали, удалось решить лишь в начале 20-х годов XX в. благодаря созданию двух новых революционных теорий, существенно изменивших все наши представления о природе: теории относительности и квантовой теории.

Физику в том виде, в каком она была известна к концу XIX в. (а до сих пор в книге речь шла именно об этой физике), принято называть классической физикой. Новая физика, возникшая в результате великой научной революции на рубеже XIX в., получила название современной физики. В этой главе мы изложим специальную теорию относительности, начала которой были заложены Альбертом Эйнштейном в 1905 г. В последующих главах мы познакомимся с не менее значительной квантовой теорией, а затем изложим основы ядерной физики и физики элементарных частиц.

39.1. Относительность Галилея – Ньютона

Специальная теория относительности Эйнштейна занимается изучением того, какими мы видим события, в особенности как выглядят объекты и события в различных системах отсчета[1]. Разумеется, этот вопрос обсуждали еще Галилей и Ньютон, и сначала мы познакомимся с более ранними представлениями.

Нам придется иметь дело главным образом с так называемыми **инерциальными системами отсчета**. Как уже говорилось в разд. 4.5, под инерциальной системой отсчета принято понимать такую систему отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона – закон инерции. По первому закону Ньютона, если на тело со стороны других тел не действует результирующая сила, то оно либо остается в состоянии покоя, либо продолжает двигаться равномерно и прямолинейно. Вращающиеся или ускоряемые любым другим способом системы отсчета являются неинерциальными системами, и мы не будем их здесь рассматривать[2]. Землю, поскольку она вращается, нельзя считать вполне инерциальной системой отсчета, но для большинства наших целей связанную с Землей систему отсчета в достаточно хорошем приближении можно принять за инерциальную.

Система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, также инерциальна.

И Галилей, и Ньютон глубоко сознавали то, что мы сегодня называем *принципом относительности*, согласно которому *основные законы физики должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*. В справедливости принципа относительности нас убеждает повседневный опыт; например, в равномерно (с постоянной скоростью) движущемся поезде или самолете тела движутся так же, как на земле. (Мы предполагаем, что нет ни вибрации, ни качки, поскольку они делают нашу систему отсчета неинерциальной.) В вагоне поезда или на борту самолета вы ходите, пьете бульон из чашки, играете в пинг-понг или роняете на пол карандаш, и при этом все тела движутся так же, как на земле. Предположим, что вы находитесь в автомашине, мчащейся с постоянной скоростью. Подняв над головой монету, вы выпускаете ее из рук. Как она будет падать? Монета упадет отвесно вниз и ударится об пол в точке, расположенной на одной верти-

---

[1] Системой отсчета называется система координатных осей, жестко связанная с каким-нибудь телом (или группой тел), например с Землей, поездом, Луной и т. п. (разд. 2.2).

[2] На вращающейся платформе (например, на карусели) тело начинает двигаться к ее периферии, даже если на него не действует сила. Следовательно, вращающаяся платформа – неинерциальная система отсчета.

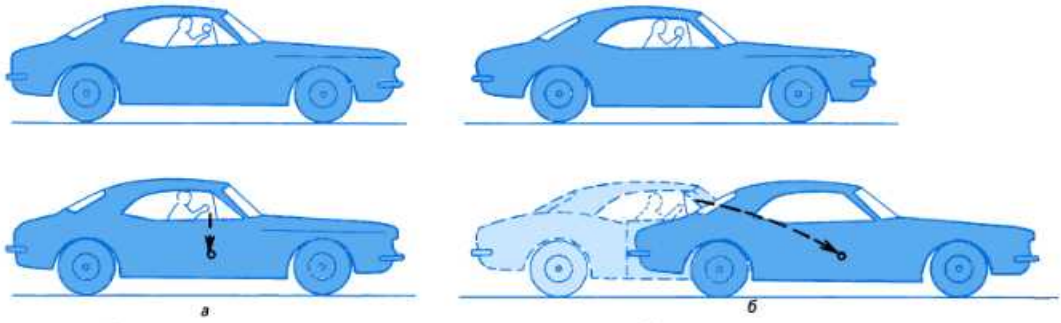


Рис. 39.1. Человек, сидящий в машине, роняет монету. В системе отсчета, связанной с машиной, монета падает по вертикали (*а*). В системе отсчета, связанной с землей, монета описывает параболу (*б*). Вверху машина изображена в тот момент, когда сидящий в ней человек выпускает монету; внизу – через некоторое время.

кали с той точкой, где вы ее выпустили из рук (рис. 39.1, *а*). (Если вы выпустите монету из руки, вытянутой из окна автомашины, то ничего подобного не произойдет, так как встречный поток воздуха отбросит монету назад.) Именно так – отвесно вниз – падают предметы на земле, и наш эксперимент в движущейся автомашине протекает в соответствии с принципом относительности.

При разборе этого опыта следует обратить внимание на то, что с точки зрения наблюдателя, стоящего на земле, предмет, выпущенный из рук в автомашине, движется по кривой (рис. 39.1, *б*). Реальная траектория предмета оказывается, таким образом, различной в разных системах отсчета. Это отнюдь не нарушает принципа относительности, поскольку он утверждает, что *законы* физики остаются неизменными во всех инерциальных системах отсчета. Закон всемирного тяготения и законы движения Ньютона справедливы в обеих системах отсчета. Различие между рис. 39.1, *а* и *б* состоит в том, что в системе отсчета, связанной с землей, у монеты имеется начальная скорость, равная скорости автомашины. Законы физики предсказывают, что, подобно любому брошенному телу, монета опишет параболическую траекторию. В системе отсчета, связанной с автомашиной, начальная скорость равна нулю, и законы физики предсказывают, что монета будет падать отвесно вниз. Таким образом, законы в обеих системах отсчета остаются одними и теми же, хотя траектории монеты различны[1)].

Относительность Галилея – Ньютона исходит из некоторых не поддающихся проверке допущений, которые опираются на наш повседневный опыт. Предполагается,

[1)] Аналогичный опыт описал и предсказал его исход (совпадающий с описанным нами) Галилей в своем сочинении «Диалог о двух главных системах мира – птолемеевой и коперниковой». В примере Галилея речь шла о моряке, уронившем нож с верхушки мачты на парусном судне. Если судно движется с постоянной скоростью, то где нож воткнется в палубу (вращением Земли Галилей пренебрег)?

что длина тел одинакова в любой системе отсчета и что время в различных системах отсчета течет одинаково. В классической механике пространство и время считаются *абсолютными*: результаты пространственных и временны́х измерений не изменяются при переходе из одной системы отсчета в другую. Предполагается, что масса тела, а также все силы остаются неизменными при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Разумеется, положение тела и его скорость в разных системах отсчета различны. Например, пассажир может идти по салону автобуса к месту водителя со скоростью 5 км/ч. Но если автобус движется со скоростью 40 км/ч относительно земли, то скорость человека относительно земли составит 45 км/ч. Согласно классической механике, ускорение тела одинаково в любой инерциальной системе отсчета. Так происходит потому, что скорость и время изменяются одинаково. Например, пассажир автобуса может ускорить свое движение от 0 до 5 км/ч за 1,0 с. Тогда в системе отсчета, связанной с автобусом, ускорение пассажира равно $a = 5$ (км/ч)/с. Относительно земли его ускорение составит (45 км/ч–40 км/ч)/(1,0 с) = 5(км/ч)/с, т. е. ту же самую величину.

Поскольку при переходе из одной инерциальной системы в другую величины F, m и a не изменяются, остается неизменным и второй закон Ньютона: $F = ma$. Тем самым второй закон Ньютона удовлетворяет принципу относительности. Нетрудно показать, что и другие законы механики удовлетворяют принципу относительности.

Из того, что законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, следует важный вывод: ни одна инерциальная система отсчета ничем не выделена по сравнению с любой другой инерциальной системой. Именно в этом смысле мы говорим, что *все инерциальные системы координат эквивалентны* с точки зрения описания механических явлений. Ни одна инерциальная система отсчета ничем не лучше любой другой инерциальной системы отсчета. Система отсчета, связанная с автомашиной или самолетом, которые движутся равномерно и прямолинейно, ничем не уступает системе отсчета, связанной с землей. Если вы мчитесь без толчков и качки в автомашине или самолете, то можно с равным основанием утверждать, что вы покоитесь, а земля движется, т. е. обратное. Не существует эксперимента, с помощью которого можно было бы установить, какая система отсчета «действительно» покоится и какая движется. Следовательно, не существует способа выделить систему отсчета, которая находилась бы в состоянии абсолютного покоя.

Во второй половине XIX в. ситуация несколько изменилась. Развивая последовательно и чрезвычайно успешно свою теорию электромагнетизма (гл. 33), Максвелл показал, что свет можно рассматривать как электромагнитную волну. Уравнения Максвелла позволили предсказать,

что скорость света c равна $3{,}00 \cdot 10^8$ м/с, и это предсказание совпадает с измеренным значением в пределах ошибки эксперимента. При этом возникает вопрос: в какой системе отсчета скорость света имеет значение, предсказанное теорией Максвелла? Предполагалось, что в разных системах отсчета скорость света различна. Например, если бы наблюдатель на борту космического корабля приближался к какому-нибудь источнику света со скоростью $1{,}0 \cdot 10^8$ м/с, то следовало бы ожидать, что, измеряя скорость доходящего до него света, такой наблюдатель получил бы величину $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с + $1{,}0 \cdot 10^8$ м/с = $4{,}0 \times$ $\times 10^8$ м/с. Но в уравнениях Максвелла не предусмотрено никаких оговорок насчет относительной скорости. Теория Максвелла просто предсказывала, что скорость света равна $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. Это, по-видимому, предполагало, что должна существовать выделенная система отсчета, в которой скорость света c имела бы такое значение.

В гл. 15 и 16 было показано, что волны распространяются по поверхности воды, вдоль веревок и струн, а звуковые волны распространяются в воздухе и других средах. Так как физики XIX в. рассматривали материальный мир с точки зрения законов механики, для них было естественным предположение, что и свет также распространяется в какой-то *среде*. Они назвали эту прозрачную среду *эфиром* и предположили, что она заполняет все пространство[1]. Тем самым физики XIX в. предполагали, что предсказываемое уравнениями Максвелла значение скорости света достигается в системе отсчета, связанной с эфиром.

Однако оказалось, что уравнения Максвелла (гл. 33) *не удовлетворяют* принципу относительности. Они не одинаковы в различных инерциальных системах отсчета. Наиболее простой вид уравнения Максвелла принимали в системе отсчета, в которой $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с, т. е. в системе отсчета, покоящейся относительно эфира. В любой другой системе отсчета в уравнения Максвелла было необходимо вводить добавочные члены, которые учитывали бы относительную скорость. Таким образом, хотя большинство законов физики удовлетворяло принципу относительности, законы электричества и магнетизма (электромагнетизма или электродинамики) принципу относительности заведомо не удовлетворяли. Казалось, что уравнения Максвелла позволяют выделить одну систему отсчета и отдать

---

[1] Воздух не мог быть средой, в которой распространяются световые волны, так как почти весь путь от Солнца к Земле свет проходит в безвоздушном пространстве. Именно поэтому и было постулировано существование иной среды – эфира. Эфир был не только прозрачен. Поскольку обнаружить его оказалось трудно, предполагалось, что эфир имеет нулевую плотность. Свойства эфира были, таким образом, аналогичны свойствам флогистона – гипотетической субстанции, с которой некогда связывали тепло. Впоследствии теория флогистона была отвергнута.

ей предпочтение перед другими, а именно ту, которую можно было считать абсолютно покоящейся системой отсчета.

Физики принялись определять скорость Земли относительно этой абсолютной системы отсчета. Была задумана и осуществлена серия остроумных экспериментов. Самое прямое измерение скорости Земли относительно эфира было проведено А. А. Майкельсоном и Э. В. Морли. Детали этого эксперимента мы обсудим в следующем разделе. Кратко суть его сводилась к измерению скорости света в различных направлениях. Майкельсон и Морли ожидали обнаружить различие в скорости света в зависимости от ориентации их экспериментальной установки относительно эфира. Подобно тому как лодка имеет различную скорость относительно земли в зависимости от того, движется ли она вверх по течению, вниз по течению или поперек течения, так и свет по замыслу Майкельсона и Морли должен был бы распространяться с различной скоростью в зависимости от скорости «обтекания» эфиром Земли.

Как ни странно, но никакого различия в скорости света им обнаружить не удалось. Отрицательный результат эксперимента Майкельсона и Морли был неожиданным и непонятным. В течение нескольких лет было предложено несколько объяснений, но одни приводили к противоречиям, а другие так и не стали общепринятыми.

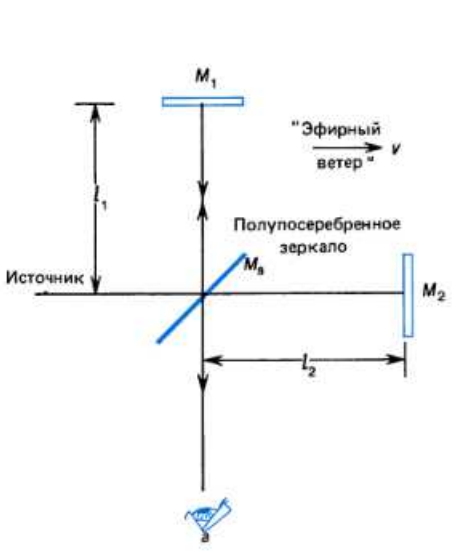
И только в 1905 г. Альберт Эйнштейн предложил радикально новую теорию, позволившую легко решить многие проблемы. Как мы вскоре увидим, теория Эйнштейна полностью изменила наши представления о пространстве и времени.

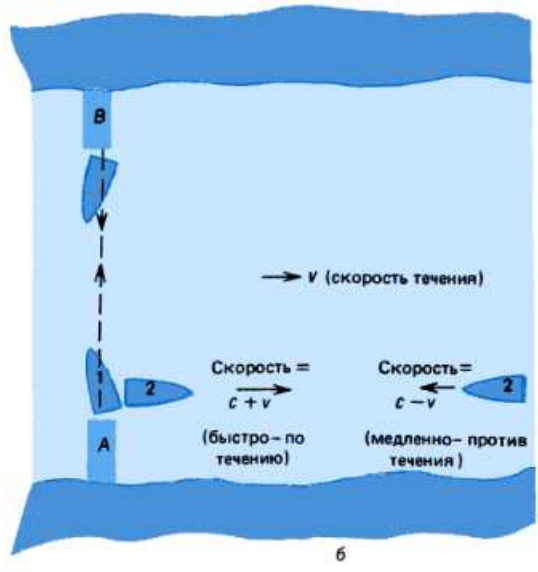
*39.2. Эксперимент Майкельсона – Морли[1)]

Эксперимент Майкельсона – Морли был задуман и осуществлен для измерения скорости *эфира* (среды, в которой по предположению распространялся свет) относительно Земли. Экспериментаторы надеялись найти абсолютную систему отсчета, которую можно было бы считать покоящейся.

Одна из возможностей, которую рассматривали физики в XIX в., состояла в том, что эфир неподвижен относительно Солнца, ибо даже Ньютон принимал Солнце за центр Вселенной. Если бы такая гипотеза была верна (что отнюдь не гарантировалось), скорость Земли в ее движении по орбите вокруг Солнца ($\sim 3 \cdot 10^4$ м/с) приводила бы к поправке порядка 10^{-4} к скорости света ($3{,}0 \cdot 10^8$ м/с). Прямое измерение скорости света с такой

[1)] Материал этого раздела существенно опирается на материал разд. 36.9.





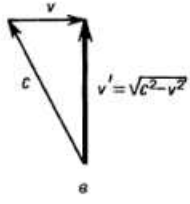


Рис. 39.2. Эксперимент Майкельсона – Морли. *а* – интерферометр Майкельсона; *б* – аналогия с лодкой: лодка *1* плывет от берега к берегу поперек течения, лодка *2* плывет туда по течению и обратно против течения; *в* – вычисление скорости лодки (светового луча), плывущей перпендикулярно течению (распространяющегося перпендикулярно «эфирному ветру»).

точностью было невозможно. Но А. А. Майкельсон сначала один, а позднее с Э. В. Морли сумел при помощи своего интерферометра (разд. 36.9) измерить с нужной точностью различие в скорости света в различных направлениях. Схема знаменитого эксперимента Майкельсона – Морли изображена на рис. 39.2, *а*. Для большей наглядности предполагается, что «эфирный ветер» дует вправо со скоростью v. (Иначе говоря, предполагается, что Земля движется относительно эфира влево со скоростью v.)

Будет ли в центре интерференционной картины (разд. 36.9) наблюдаться усиливающая или ослабляющая интерференция, зависит от сдвига фаз между двумя пучками света, прошедшими различные пути. Разобраться в происходящем нам поможет аналогия с лодкой, плывущей по течению, против течения и поперек течения реки, несущей свои воды со скоростью v относительно берега (рис. 39.2, *б*). В стоячей воде лодка может развивать скорость c (c в данном случае – не скорость света).

Начнем с пучка 2 (рис. 39.2, *а*), идущего параллельно «эфирному ветру». Мы полагаем, что путь от M_s до M_2 свет проходит со скоростью $c + v$, как лодка, плывущая по течению (рис. 39.2, *б*), к скорости которой в стоячей воде прибавляется скорость течения. Так как пучок света проходит путь l_2, на путь от M_s до M_2 он затрачивает

время $t = l_2/(c + v)$. На обратном пути – от M_2 до M_s – пучок света идет против «эфирного ветра» (как лодка, плывущая против течения), поэтому его скорость относительно эфира равна $c - v$ и на обратный путь он затрачивает время $t = l_2/(c - v)$. Следовательно, на весь путь туда (из M_s в M_2) и обратно (из M_2 в M_s) пучок 2 затрачивает время

$$t_2 = \frac{l_2}{c + v} + \frac{l_2}{c - v} = \frac{2l_2}{c(1 - v^2/c^2)}.$$

Рассмотрим теперь пучок 1, идущий поперек «эфирного ветра». Аналогия с лодкой (рис. 39.2, *б*) в этом случае особенно полезна. Лодка должна пересечь реку напрямик от причала A к причалу B. Если лодка, отойдя от причала A, возьмет курс на причал B, то ее снесет течением. Чтобы достичь причала B, лодка должна держать курс на какую-то точку, расположенную вверх по течению от причала B, т. е. под некоторым углом к прямой AB. Точное значение угла зависит от скоростей c и v, но само по себе не представляет сейчас для нас особого интереса. На рис. 39.2, *в* показано, как вычислить скорость v' лодки относительно земли, когда лодка движется поперек течения. Так как скорости c, v и v' образуют прямоугольный треугольник, по теореме Пифагора $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$. Такую же скорость лодка развивает и на обратном пути. Применив те же рассуждения к световому пучку на рис. 39.2, *а* получим, что он распространяется со скоростью $\sqrt{c^2 - v^2}$ по пути из M_s в M_1 и обратно. Всего световой пучок 1 проходит расстояние $2l_1$ и покрывает его за время $2l_1/\sqrt{c^2 - v^2}$, или

$$t_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Если $l_1 = l_2 = l$, то световой пучок 1 отстанет от светового пучка 2 по времени на

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2l}{c}\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Если $v = 0$, то $\Delta t = 0$, и два пучка возвращаются в фазе, так как первоначально они были в фазе. Но при $v \neq 0$ также и $\Delta t \neq 0$ и между пучками возникает разность фаз. Если бы удалось измерить эту разность фаз при $v = 0$, то тем самым можно было бы определить и скорость v. Но Землю остановить невозможно, и, кроме того, нельзя независимо предполагать, что $l_1 = l_2$.

Майкельсону и Морли принадлежит идея использовать для обнаружения разности фаз (в предположении, что $v \neq 0$) поворот интерферометра на 90°, который повлек бы за собой изменение интерференционной картины, создаваемой двумя световыми пучками. В повернутом положении пучок 1 двигался бы параллельно «эфирному

ветру», а пучок 2 – перпендикулярно ему. Пучки как бы поменялись ролями, и в повернутом положении времена, затрачиваемые пучками на покрытие расстояния туда и обратно, были бы соответственно равны

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c(1 - v^2/c^2)}, \qquad t'_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(штрих относится к повернутому интерферометру). Запаздывание одного пучка по сравнению с другим в исходном (неповернутом) положении интерферометра равно

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2l_2}{c(1 - v^2/c^2)} - \frac{2l_1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

а после поворота на 90°

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_1}{c(1 - v^2/c^2)}.$$

Поворот интерферометра приводит к сдвигу интерференционных полос на величину, определяемую разностью этих интервалов времени:

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{2}{c}(l_1 + l_2)\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Полученное выражение допускает существенное упрощение, если $v/c \ll 1$. Используя биномиальное разложение:

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

получаем

$$\Delta t - \Delta t' \approx \frac{2}{c}(l_1 + l_2)\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \approx (l_1 + l_2)\frac{v^2}{c^3}.$$

Выберем $v = 3{,}0 \cdot 10^4$ м/с (скорость Земли при движении по орбите вокруг Солнца). В экспериментах Майкельсона и Морли плечи l_1 и l_2 достигали около 11 м. Задержка по времени одного пучка относительно другого составляла примерно (22 м)$(3{,}0 \cdot 10^4$ м/с$)^2/(3{,}0 \cdot 10^8$ м/с$)^3 \approx 7{,}0 \cdot 10^{-16}$ с. Для видимого света с длиной волны, например, $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м частота равна $f = c/\lambda = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с)/$(5{,}5 \times 10^{-7}$ м$) = 5{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц, т. е. гребни волн проходят через данную точку каждые $1/(5{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц$) = 1{,}8 \cdot 10^{-15}$ с. Следовательно, при разности времен между пучками $7 \cdot 10^{-16}$ с Майкельсон и Морли должны были наблюдать сдвиг интерференционной картины на $(7 \cdot 10^{-16}$ с$)/(1{,}8 \times 10^{-15}$ с$) \approx 0{,}4$ полосы. Заметить такой сдвиг им было бы совсем нетрудно, так как их интерферометр позволял наблюдать сдвиг интерференционной картины на 0,01 полосы.

Однако Майкельсон и Морли *не обнаружили выходящего за пределы ошибки эксперимента сдвига интерференци-*

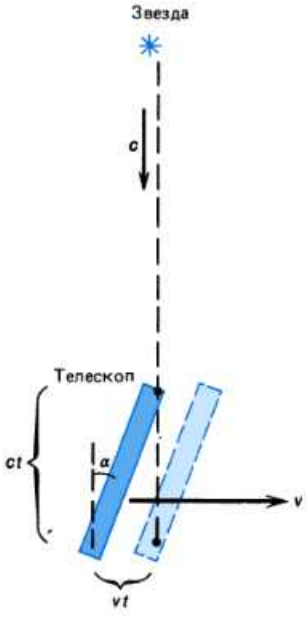


Рис. 39.3. Аберрация света звезды. Если телескоп движется вместе с Землей со скоростью v относительно эфира, то наводка телескопа сбивается чуть в сторону от звезды, в результате чего свет от звезды, падающий на входное отверстие телескопа, достигает противоположного конца трубы (так как труба телескопа движется вправо со скоростью v), тогда как в исходном положении свет от звезды «упирался» в стенку трубы. Звезда, стоявшая прямо перед телескопом, будет видна под углом $\alpha = v/c$ к вертикали и, так как Земля вращается, наблюдателю будет казаться, что звезда движется по круговой орбите.

онных полос. Они устанавливали свой интерферометр под различными углами к предполагаемому «эфирному ветру», проводили наблюдения днем и ночью, чтобы добиться различной ориентации относительно Солнца, в различное время года. Но ни разу сдвиг интерференционных полос обнаружен не был.

Отрицательный результат эксперимента Майкельсона – Морли стал одной из величайших загадок физики конца XIX в. Все попытки объяснить его оказались безуспешными. Высказывалось предположение о том, что эфир покоится не относительно Солнца или звезд, а относительно Земли: в этом случае скорость v была бы равна нулю и сдвиг интерференционных полос не наблюдался. Но такая гипотеза означала бы некую выделенность Земли; только относительно Земли скорость света была бы равна c, как предсказывали уравнения Максвелла. Принятие такой гипотезы означало бы возрождение древнего представления, отвергнутого со времен Коперника, о том, что Земля является центром Вселенной. Другая гипотеза состояла в том, что эфир увлекается Землей и другими телами и поэтому скорость эфира на поверхности Земли равна нулю. Но эксперименты на воздушных шарах, поднимавшихся на большую высоту, где движение эфира должно было бы быть ощутимо, также дали нулевой результат. Кроме того, обе гипотезы противоречили наблюдениям «аберрации звездного света». При наблюдении в течение года кажется, что звезды описывают небольшие эллипсы. Это явление можно объяснить, если Земля движется относительно эфира, предположив, что телескоп следует наводить не прямо на наблюдаемую звезду, а под некоторым углом (рис. 39.3). Если бы эфир покоился относительно Земли, то телескоп можно было бы наводить прямо на звезду и «угол аберрации» отсутствовал бы. Но угол аберрации существует. Следовательно, эфир не может покоиться относительно Земли.

Другую теорию для объяснения отрицательного результата эксперимента Майкельсона – Морли выдвинули (в 90-х годах XIX в.) независимо Дж. Ф. Фицджеральд и Г. А. Лоренц. Оба автора утверждали, что любой отрезок (в том числе и плечо интерферометра) в направлении движения через эфир сокращается в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз. По Лоренцу причиной такого сокращения могло быть влияние эфира на силы взаимодействия между молекулами вещества, имевшие по предположению электрическую природу. Теория Фицджеральда – Лоренца оказалась достаточно удачной, но впоследствии уступила место более универсальной теории, предложенной Альбертом Эйнштейном в 1905 г., – специальной теории относительности.

39.3. Постулаты специальной теории относительности

Проблемы, существовавшие на рубеже XIX и XX вв. в теории электромагнетизма и ньютоновской механики, были блестяще разрешены предложенной Эйнштейном в 1905 г. специальной теорией относительности. Было бы неверно думать, что Эйнштейн создал свою теорию непосредственно под впечатлением отрицательного результата эксперимента Майкельсона – Морли. Эйнштейн изучал теоретическую работу Лоренца и восхищался ею. Толчком к созданию специальной теории относительности послужили размышления Эйнштейна над некоторыми проблемами электромагнитной теории и теории света. Например, Эйнштейн задал себе вопрос: «Что я увидел бы, сидя верхом на световом луче?» Ответ состоял в том, что вместо бегущей электромагнитной волны он увидел бы стационарные электрические и магнитные поля, амплитуды которых изменялись бы в пространстве, но оставались бы неизменными во времени. Эйнштейн понимал, что такие поля невозможно обнаружить, и, кроме того, они были несовместимы с электромагнитной теорией Максвелла[1]. Следовательно, заключил Эйнштейн, неверно думать, что скорость света относительно какого-то наблюдателя может оказаться равной нулю, т. е. электромагнитную волну нельзя остановить. Это утверждение стало вторым постулатом теории относительности Эйнштейна.

Эйнштейн пришел к выводу, что обнаруженные им в электромагнитной теории противоречия обусловлены предположением о существовании абсолютного пространства. В знаменитой работе 1905 г. Эйнштейн предложил полностью отказаться от представления об эфире и от сопутствующего предположения о существовании абсолютно покоящейся системы отсчета. Эти предложения Эйнштейн сформулировал в виде двух постулатов. Первый постулат был обобщением принципа относительности Ньютона не только на законы механики, но и на законы остальной физики, включая электричество и магнетизм.

Первый постулат (принцип относительности). **Законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.**

Второй постулат согласуется с первым.

---

[1] В разд. 33.5 было показано, что изменяющиеся по синусоидальному закону электрические и магнитные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла только в том случае, если они распространяются со скоростью $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Статические синусоидальные поля (стоячие, или распространяющиеся с нулевой скоростью), а также поля, распространяющиеся с любой скоростью, отличной от c, не могут быть решениями уравнений Максвелла.

Второй постулат (постоянство скорости света). **Свет распространяется в пустом пространстве с вполне определенной скоростью *c*, не зависящей от скорости источника или наблюдателя.**

Эти два постулата образуют основу **специальной теории относительности Эйнштейна**. «Специальной» (или частной) теорию стали называть, чтобы отличить ее от созданной Эйнштейном впоследствии *общей теории относительности*, занимающейся рассмотрением неинерциальных (ускоренных) систем отсчета. В специальной теории относительности, которой посвящена эта глава, рассматриваются только инерциальные системы отсчета.

Второй постулат, по-видимому, наиболее труден для восприятия, так как он противоречит некоторым общепринятым представлениям. Прежде всего, свет должен распространяться в пустом пространстве. Отказаться от эфира не так трудно, поскольку его все равно невозможно обнаружить. Но второй постулат утверждает, что скорость света в вакууме всегда одна и та же ($3{,}00 \cdot 10^8$ м/с) независимо от скорости источника или наблюдателя. Следовательно, наблюдатель, движущийся к источнику или от источника света, получит в результате измерений такую же скорость света, как и наблюдатель, покоящийся относительно источника. Это противоречит нашему повседневному опыту, ибо при приближении наблюдателя к источнику скорость его движения должна была бы, по нашим представлениям, прибавляться к скорости света, а при удалении – вычитаться из нее. Возникающая проблема отчасти обусловлена тем, что в повседневном опыте нам никогда не приходится измерять скорости, близкие к скорости света. Поэтому не следует ожидать, что наш повседневный опыт окажется полезным при рассмотрении столь больших скоростей. С другой стороны, эксперимент Майкельсона – Морли полностью совместим со вторым постулатом[1)].

Красота предложенной Эйнштейном теории очевидна. Отвергая идею абсолютной системы отсчета, физика обретала возможность объединить электромагнитную теорию Максвелла с механикой. Скорость света, предсказанная на основе уравнений Максвелла, *есть* скорость света в вакууме в *любой* системе отсчета.

Специальная теория относительности Эйнштейна потребовала отказа от представлений о пространстве и времени, основанных на здравом смысле, и в последующих разделах мы рассмотрим некоторые необычные, но

[1)] Эксперимент Майкельсона – Морли можно рассматривать и как подтверждение первого постулата, поскольку по замыслу его авторов он предназначался для измерения скорости Земли относительно некоторой абсолютной системы отсчета. Из отрицательного результата эксперимента Майкельсона – Морли следует, что никакой выделенной системы отсчета не существует.

интересные следствия теории Эйнштейна. Наша аргументация в большинстве случаев будет очень простой. Мы будем пользоваться тем же приемом, к которому охотно прибегал сам Эйнштейн: мысленно представлять себе некоторую экспериментальную ситуацию, анализ которой не требует особых математических ухищрений. Такой подход позволит нам извлечь многие следствия из специальной теории относительности, не прибегая к сложным вычислениям. Эйнштейн называл такой прием «мысленным экспериментом». К более основательному знакомству с математическим аппаратом теории относительности мы приступим, начиная с разд. 39.8.

39.4. Одновременность

Одно из важных следствий специальной теории относительности состоит в том, что время перестает быть абсолютной величиной. Никто не сомневается в том, что время течет в одну сторону и необратимо. Но, как мы увидим в этом и в следующем разделах, промежуток времени между двумя событиями и даже одновременность двух событий зависят от системы отсчета наблюдателя.

Мы говорим, что два события происходит одновременно, если они происходят в один и тот же момент времени. Но как узнать, что два события происходят в одно и то же время? Если события происходят в одной и той же точке пространства (например, если вам на голову падают два яблока), то установить их одновременность легко. Но если два события происходят в точках, находящихся на большом расстоянии друг от друга, то установить их одновременность труднее, так как необходимо учитывать время, которое потребуется свету, чтобы достичь нас. Так как свет распространяется с конечной скоростью, наблюдатель должен провести вычисления, чтобы установить, когда события произошли в действительности. Например, если два события наблюдатель *видел* одновременно, но одно из них происходило в точке, отстоящей от наблюдателя дальше, чем точка, в которой произошло второе событие, то первое событие произошло раньше, и эти два события не одновременны.

Чтобы избежать вычислений, воспользуемся простым мысленным экспериментом. Предположим, что наблюдатель (обозначим его O) находится посредине между точками A и B, в которых происходят два события (рис. 39.4). Ими могут быть, например, молнии, ударяющие в точки A и B, или события любого другого типа. Если события быстротечны, как вспышки молний, то из точек A и B распространяются короткие световые импульсы, которые и достигают наблюдателя O. Наш наблюдатель O «видит» события только тогда, когда до него доходят свето-

Рис. 39.4. Как только молния ударяет в точки A и B, импульсы света начинают распространяться из этих точек к точке O, но O «увидит» молнию, лишь когда свет достигнет ее (наблюдателя, находящегося в точке O).

вые импульсы. Если два импульса доходят до O одновременно, то O воспринимает события как происходящее одновременно. Он исходит из того, что оба световых импульса распространяются с одинаковой скоростью, а так как расстояние OA равно расстоянию OB, свету, чтобы дойти из A в O, требуется столько же времени, сколько он идет из B в O. Таким образом наблюдатель O с полным основанием заключает, что события в точках A и B произошли одновременно. С другой стороны, если наблюдатель O видит свет от какого-то события раньше, чем от другого события, то он заключает, что первое событие произошло раньше другого.

Вопрос, который мы хотим выяснить, в действительности сводится к следующему: если два события одновременны с точки зрения наблюдателя в одной системе отсчета, то будут ли они одновременны с точки зрения наблюдателя, движущегося относительно первого? Пусть O_1 и O_2 – два наблюдателя; с первым связана система отсчета 1, со вторым – система отсчета 2, и пусть одна система отсчета движется относительно другой со скоростью v. Эти две системы отсчета можно представить себе в виде двух железнодорожных вагонов (рис. 39.5). Наблюдатель O_2 утверждает, что наблюдатель O_1 движется вправо со скоростью v (рис. 39.5, *а*). Наблюдатель O_1 утверждает, что наблюдатель O_2 движется влево со скоростью v (рис. 39.5, *б*). Согласно принципу относительности, оба утверждения правомерны. (Разумеется, третье-

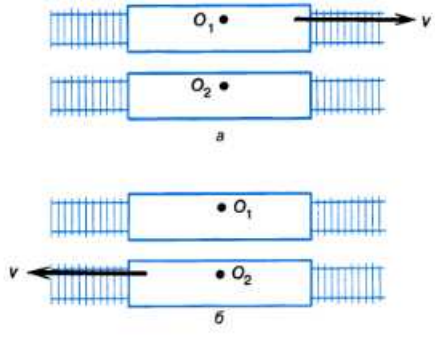


Рис. 39.5. Наблюдатели O_1 и O_2, находящиеся в разных поездах (двух различных системах отсчета), движутся с относительной скоростью v. Наблюдатель O_2 утверждает, что O_1 движется вправо (*а*); наблюдатель O_1 утверждает, что O_2 движется влево (*б*). Обе точки зрения вполне «законны»: все зависит от того, в какой системе отсчета производится наблюдение.

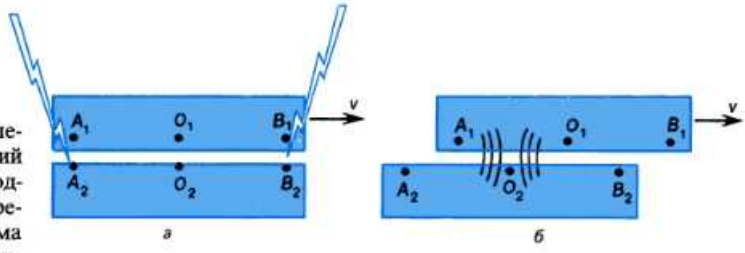


Рис. 39.6. Мысленный эксперимент, демонстрирующий относительность понятия «одновременность». С точки зрения наблюдателя O_1 система отсчета наблюдателя O_2 движется вправо. *а* – одна молния ударяет в две системы отсчета в точки A_1 и A_2, а вторая – в точки B_1 и B_2. С точки зрения наблюдателя O_2 обе молнии ударяют одновременно. *б* – на мгновение позже свет от двух событий достигает в одно и тоже время (одновременно) наблюдателя O_2. Но в системе отсчета наблюдателя O_1 свет из точки B_1 уже достиг наблюдателя O_1, а свет из точки A_1 еще не дошел до него. Таким образом, в системе отсчета наблюдателя O_1 событие в точке B_1 должно предшествовать событию в точке A_1. Время не абсолютно!

го наблюдателя, который сказал бы нам, кто «в действительности» движется, не существует.)

Предположим теперь, что происходят какие-то два события, которые видят оба наблюдателя. Пусть это будут вспышки молний, и пусть молнии оставляют метки на обоих поездах в том месте, где они ударили в вагоны: в точках A_1 и B_1 на вагоне наблюдателя O_1 и в точках A_2 и B_1 на вагоне наблюдателя O_2 (рис. 39.6). Для простоты будем считать, что наблюдатель O_1 находится точно посредине между точками A_1 и B_1, а наблюдатель O_2 – точно посредине между точками A_2 и B_2. Мы сами должны поместить себя в одну из систем отсчета. Предположим, что мы в системе отсчета наблюдателя O_2. Тогда мы увидим, что наблюдатель O_1 движется вправо со скоростью v. Пусть два события происходят *одновременно* в системе отсчета наблюдателя O_2 в тот самый момент, когда O_1 и O_2 находятся друг против друга (рис. 39.6, *а*). Немного спустя (рис. 39.6, *б*) свет из A_2 и B_2 одновременно достигнет наблюдателя O_2. Так как наблюдатель O_2 знает (или устанавливает на основе произведенных измерений), что расстояния O_2A_2 и O_2B_2 равны, он заключает, что эти два события произошли одновременно.

А что видит наблюдатель O_1? В нашей системе отсчета (наблюдателя O_2) мы видим, что все то время, которое свет идет из A_1 и B_1 в O_1, наблюдатель O_1 движется вправо. Согласно рис. 39.6, *б*, свет из точки B_1 уже пройдет наблюдателя O_1, тогда как свет из точки A_1 еще не достигнет наблюдателя O_1. Следовательно, наблюдатель O_1 увидит свет из точки B_1 раньше, чем из точки A_1. Но система отсчета наблюдателя O_1 эквивалентна системе отсчета наблюдателя O_2. Относительно наблюдателя O_1 свет распространяется с такой же скоростью, как и относительно наблюдателя O_2, и из точки A_1 к O_1 идет с такой же скоростью, как из точки B_1 к O_1. Так как расстояние O_1A_1 равно расстоянию O_1B_1, наблюдатель O_1 должен сделать вывод, что событие в точке B_1 произошло раньше, чем событие в точке A_1.

Таким образом, *два события, одновременные с точки зрения одного наблюдателя, не обязательно должны быть одновременными с точки зрения второго наблюдателя.*

Трудно удержаться от искушения и не спросить: «Кто

из наблюдателей прав, O_1 или O_2?» Согласно специальной теории относительности, правы *оба*. Не существует «наилучшей» системы отсчета, которой мы могли бы отдать предпочтение, чтобы определить, кто из наблюдателей прав. Обе системы отсчета одинаково хороши. Единственный вывод, который мы можем сделать, состоит в том, что одновременность – понятие не абсолютное, а относительное. В повседневной жизни нам не приходится сталкиваться с относительностью понятия одновременности, так как она заметна, лишь когда относительная скорость двух систем отсчета очень велика (близка к скорости света c) или соответствующие расстояния очень велики.

В силу принципа относительности наши рассуждения в мысленном эксперименте на рис. 39.6 справедливы и для системы отсчета наблюдателя O_1. В этой системе отсчета наблюдатель O_1 покоится, и событие B_1 он увидит раньше, чем событие A_1. Но, начертив схему, эквивалентную рис. 39.6, наблюдатель O_1 поймет, что наблюдатель O_2, движущийся влево со скоростью v, воспримет события A_1 и B_1 как одновременные. Подробный разбор мы предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения (вопрос 8).

39.5. Замедление времени и парадокс близнецов

То, что два события, одновременные с точки зрения одного наблюдателя, не будут таковыми с точки зрения другого, наводит на мысль, что и само время не абсолютно. Может ли время в одной системе отсчета течь иначе, чем в другой системе отсчета? Оказывается, может: именно это и предсказывает специальная теория относительности Эйнштейна, как видно из следующего мысленного эксперимента.

На рис. 39.7 изображен космический корабль, с огромной скоростью пролетающий мимо Земли. То, что видит наблюдатель, находящийся на борту космического корабля, показано на рис. 39.7, *а*, а то, что видит наблюдатель, находящийся на Земле, изображено на рис. 39.7, *б*. У обоих наблюдателей имеются точные часы. Наблюдатель, находящийся на борту космического корабля, производит вспышку света и измеряет время, за которое свет пересекает космический корабль и, отразившись от зеркала, возвращается назад. Свет проходит расстояние $2D$ со скоростью c, поэтому весь путь туда и обратно он проделывает за время

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}.$$

Наблюдатель на Земле (рис. 39.7, *б*) следит за тем, что происходит на борту космического корабля. Но для земного наблюдателя космический корабль движется, поэто-

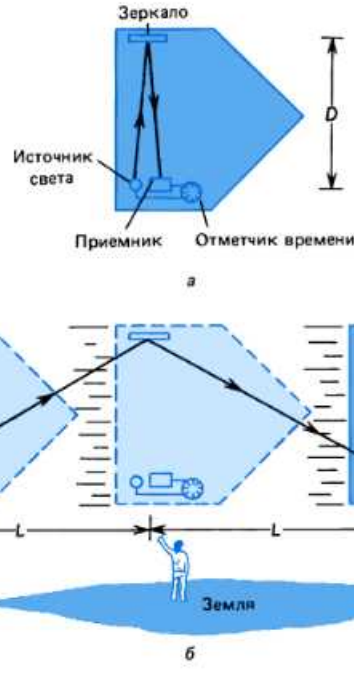


Рис. 39.7. Замедление времени можно продемонстрировать с помощью мысленного эксперимента: время, за которое свет проделывает путь туда и обратно, для наблюдателя на космическом корабле (*а*) меньше, чем для земного наблюдателя (*б*).

му свет пересекает корабль наискосок, отражается от зеркала и возвращается к приемнику. Хотя свет относительно земного наблюдателя распространяется с такой же скоростью (второй постулат), он проходит более длинный путь. Следовательно, время, измеренное наблюдателем на Земле, будет больше, чем время, измеренное наблюдателем на борту космического корабля. Интервал времени Δt, измеренный земным наблюдателем, может быть вычислен следующим образом. За время Δt космический корабль пролетает расстояние $2L = v\Delta t$, где v – скорость космического корабля (рис. 39.7, *б*). По диагонали свет проходит расстояние $2\sqrt{D^2 + L^2}$, откуда

$$c = \frac{2\sqrt{D^2 + L^2}}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{D^2 + v^2(\Delta t)^2/4}}{\Delta t}.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат и разрешая относительно Δt, получаем

$$c^2 = \frac{4D^2}{(\Delta t)^2} + v^2,$$

$$\Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Но $2D/c = \Delta t_0$, поэтому

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (39.1)$$

Так как величина $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ всегда меньше единицы, мы видим, что $\Delta t > \Delta t_0$, т. е. промежуток времени между двумя событиями (испусканием света и приемом светового сигнала) для земного наблюдателя *больше*, чем для движущегося относительно него. Это – общий результат специальной теории относительности, известный под названием **замедления времени**. Попросту говоря, эффект замедления времени означает, что *движущиеся часы* (по измерениям земного наблюдателя) *идут медленнее*. Не следует думать, однако, что движущиеся часы идут неверно. Наоборот, мы предполагаем, что часы вполне исправны. Как показывают измерения, время в любой движущейся системе отсчета течет медленнее, чем в вашей собственной системе отсчета. Этот замечательный результат – неизбежное следствие двух постулатов теории относительности.

Возможно, что представление о замедлении времени несколько сложно для восприятия, так как оно нарушает наши представления, основанные на здравом смысле. Из формулы (39.1) видно, что эффект замедления времени пренебрежимо мал, за исключением тех случаев, когда скорость v достаточно близка к c. Скорости, с которыми нам приходится сталкиваться в повседневной жизни, гораздо меньше c, поэтому не удивительно, что мы не наблюдаем замедление времени как реальный эффект. Для проверки замедления времени были поставлены специальные эксперименты, подтвердившие предсказание Эйнштейна. Например, в 1971 г. сверхточные атомные часы совершили кругосветный полет на борту реактивного самолета. Так как скорость реактивного самолета (10^3 км/ч) гораздо меньше c, погрешность хода часов должна была составлять несколько наносекунд (10^{-9} с) для того, чтобы можно было обнаружить эффект замедления времени. Часы обладали требуемой точностью, и с точностью до ошибки эксперимента формула (39.1) была подтверждена. Несколькими десятилетиями раньше эффект замедления времени был подтвержден наблюдениями «элементарных частиц» (гл. 43). Эти частицы обладают очень малыми массами (как правило, от 10^{-30} до 10^{-27} кг), и поэтому их сравнительно легко ускорить до скоростей, близких к скорости света c. Многие элементарные частицы нестабильны и спустя короткий промежуток времени распадаются на другие частицы. Примером таких частиц может служить мюон, среднее время жизни которого в состоянии покоя равно 2,2 мкс. Тщательные эксперименты показали, что, когда мюон летит со скоростью, близкой к скорости света, его время жизни увеличивается точно так, как предсказывает формула замедления времени.

Пример 39.1. Чему равно, согласно лабораторным измерениям, среднее время жизни мюона, движущегося со скоростью 0,60 $c = 1{,}8 \cdot 10^8$ м/с в лабораторной системе отсчета? Среднее время жизни мюона в состоянии покоя равно $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с.

Решение. Если бы наблюдатель двигался вместе с мюоном (мюон покоился бы относительно наблюдателя), то среднее время жизни мюона составило бы $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с. Для наблюдателя в лаборатории мюон живет дольше из-за замедления времени: из формулы (39.1) получаем при $v = 0{,}60\ c$

$$t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{с}}{\sqrt{1 - 0{,}36c^2/c^2}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{с}}{\sqrt{0{,}64}} = 2{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{с}.$$

Относительно использования формулы (39.1) и смысла величин Δt и Δt_0 необходимо сделать замечание. Формула (39.1) верна только при условии, если Δt_0 – интервал времени между событиями в такой системе отсчета, где оба эти события происходят *в одной и той же точке пространства* (как на рис. 39.7, *а*). Интервал времени Δt_0 часто называют **собственным временем**. В этом случае величина Δt в формуле (39.1) означает интервал времени между двумя событиями, измеренный в системе отсчета, которая движется со скоростью v относительно первой системы отсчета. В примере 39.1 интервал Δt_0 (но не Δt) был выбран равным $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с потому, что только в системе отсчета, относительно которой мюон покоится, два события (рождение и распад мюона) происходят в одной и той же точке пространства.

Замедление времени породило множество интересных спекуляций относительно космических путешествий. По старым представлениям о времени простому смертному не удалось бы долететь до звезды, находящейся от Земли на расстоянии 100 световых лет (1 световой год – расстояние, на которое распространяется свет за 1 год = $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с $\cdot 3{,}15 \cdot 10^7$ с = $9{,}5 \cdot 10^{15}$ м). Даже если бы космический корабль мог развивать скорость, близкую к скорости света, то и тогда путешествие до далекой звезды заняло бы более 100 лет. Но замедление времени позволяет утверждать, что для астронавта такое путешествие длилось бы более короткое время. На космическом корабле, мчащемся со скоростью $v = 0{,}999c$, подобное путешествие заняло бы примерно $\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} = (100\ \text{лет}) \times \sqrt{1 - (0{,}999)^2} = 4{,}5$ года. Такая продолжительность не выходит за рамки человеческих возможностей. Разумеется, хотя замедление времени делает дальние космические путешествия реальными, огромные практические проблемы достижения околосветовых скоростей едва ли будут преодолены в обозримом будущем.

Заметим, что в приведенном нами примере на Земле успевает пройти 100 лет, тогда как для астронавта на борту космического корабля проходит только 4,5 года. Может быть все объясняется тем, что часы астронавта

сильно отстают? Нет, все процессы, в том числе и жизнедеятельность организма астронавта, с точки зрения земного наблюдателя, протекают медленнее. Что же касается самого астронавта, то для него время течет обычным темпом. В полете к далекой звезде астронавт провел бы 4,5 года, в течение которых темп его жизни не отличался бы от привычного: он нормально спал бы, принимал пищу, читал и т. д. А люди на Земле успели бы прожить 100 лет, заполненные обычной деятельностью.

Вскоре после того, как Эйнштейн разработал специальную теорию относительности, был обнаружен кажущийся парадокс, получивший название «парадокс близнецов». Суть его состоит в следующем. Предположим, что один из двух близнецов, достигших 20-летнего возраста, отправился в полет к далекой звезде и обратно на космическом корабле, развивающем околосветовую скорость, а другой близнец остался на Земле. С точки зрения оставшегося на Земле близнеца, близнец-астронавт стареет медленнее: если для оставшегося на Земле близнеца пройдет 20 лет, то для его близнеца-астронавта (в зависимости от скорости космического корабля) может пройти всего лишь 1 год. Следовательно, по возвращении астронавта на Землю ему исполнится 21 год, тогда как оставшемуся на Земле близнецу «стукнет» 40 лет.

Такова точка зрения близнеца, оставшегося на Земле. А как с точки зрения близнеца-астронавта? Поскольку «все относительно», то все инерциальные системы отсчета одинаково хороши. Разве близнец-астронавт не может повторить все рассуждения оставшегося на Земле близнеца? Разве близнец-астронавт не может утверждать, что, поскольку Земля удаляется от него с огромной скоростью, время течет на Земле медленнее и оставшийся на Земле близнец стареет не столь быстро, как он сам? Это прямо противоположно утверждениям оставшегося на Земле близнеца. Оба близнеца не могут быть правы одновременно, так как после возвращения космического корабля на Землю возможны прямое сравнение возраста близнецов и сверка часов.

В действительности так называемый «парадокс близнецов» не является парадоксом. Дело в том, что все следствия специальной теории относительности, в частности замедление времени, применимы только к наблюдателям, находящимся в инерциальных системах отсчета. Землю можно (по крайней мере в достаточно хорошем приближении) считать инерциальной системой отсчета, тогда как космический корабль не является инерциальной системой отсчета. Космический корабль ускоряется в начале и в конце своего полета и (что гораздо важнее) в какой-то далекой точке должен повернуть назад. В течение этих трех периодов ускоренного движения предсказания астронавта, основанные на специальной теории относительности, не имеют силы. Близнец, оставшийся на

Земле, находится в инерциальной системе отсчета и поэтому может делать правильные предсказания. Таким образом, никакого парадокса нет. Утверждения близнеца-астронавта, о которых говорилось выше, лишены основания. Что же касается близнеца, оставшегося на Земле, то его предсказания правильны; в частности, его утверждение, что астронавт возвратится более молодым, чем он сам, соответствует действительности[1].

39.6. Сокращение длины

Не только временны́е интервалы различны в разных системах отсчета. Пространственные интервалы (длины и расстояния), как следует из специальной теории относительности, также неодинаковы в различных системах отсчета. Продемонстрируем это с помощью мысленного эксперимента.

Наблюдатель на Земле следит за космическим кораблем, летящим со скоростью v с Земли, скажем, на Нептун (рис. 39.8, *а*). Расстояние между планетами по измерению земного наблюдателя равно L_0. Время, затрачиваемое на перелет, по измерениям с Земли равно $\Delta t = L_0/v$. На рис. 39.8, *б* показано, какими представляются события с точки зрения наблюдателя, находящегося на борту космического корабля. В системе отсчета этого наблюдателя космический корбаль покоится, а Земля и Нептун движутся со скоростью v. (Мы предполагаем, что скорость v гораздо больше относительной скорости Нептуна и Земли, поэтому последней можно пренебречь.) Но время между отлетом с Земли и прибытием на Нептун для наблюдателя, находящегося на борту космического корабля, за счет замедления времени меньше, чем для наблюдателя на Земле. По формуле (39.1) продолжитель-

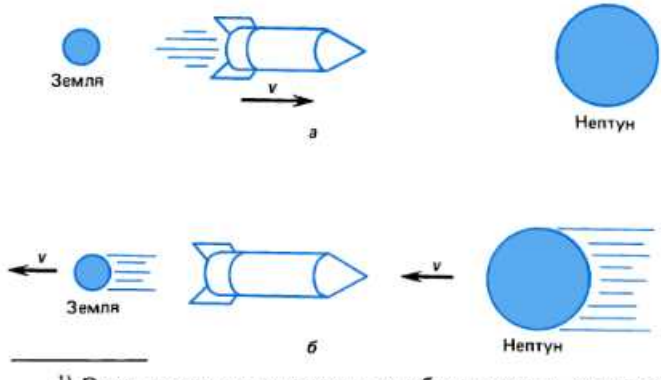


Рис. 39.8. *а* – в системе отсчета, связанной с Землей, космический корабль с огромной скоростью летит с Земли к Нептуну; *б* – с точки зрения наблюдателя, находящегося на борту космического корабля, движутся с огромной скоростью v Земля и Нептун. Обратите внимание на то, что каждая из планет не кажется сжатой в направлении движения, так как при большой скорости мы видим ее заднюю сторону (см. рис. 39.9) и планета продолжает казаться нам круглой.

[1] Этот вывод подтверждает и общая теория относительности, занимающаяся изучением ускоренно движущихся систем отсчета.

ность космического полета с точки зрения наблюдателя на борту космического корабля равна $\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Так как наблюдатель на борту космического корабля при измерении получает ту же скорость, но меньший интервал времени между двумя событиями (отлетом с Земли и прибытием на Нептун), по его измерениям расстояние от Земли до Нептуна также должно быть меньше, чем у наблюдателя на Земле. Если L – расстояние между Землей и Нептуном, с точки зрения наблюдателя на борту космического корабля, то $L = v\Delta t_0$. Мы уже знаем, что $\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и $\Delta t = L_0/v$; поэтому $L = v\Delta t_0 = v\Delta t \times \sqrt{1 - v^2c^2} = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$, т. е.

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (39.2)$$

Это – общий результат специальной теории относительности, применимый как к линейным размерам тел, так и к расстояниям. Не прибегая к формулам, его можно сформулировать следующим образом: *длина тела короче, когда тело движется, чем когда оно покоится*. Этот эффект называется **сокращением длины**. Длина L_0 в формуле (39.2) называется **собственной длиной**. Это длина тела (или расстояние между двумя точками), измеренная наблюдателем, покоящимся относительно тела. Формула (39.2) дает длину, которая будет измерена при движении тела со скоростью v относительно наблюдателя. Важно отметить, что сокращение длины происходит *только в направлении движения*. Например, движущийся космический корабль на рис. 39.8, *а* сокращается в длину, но высота его остается такой же, как в состоянии покоя.

В повседневной жизни сокращение длины, так же как и замедление времени, незаметно, поскольку множитель $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в формуле (39.2) существенно отличается от единицы, только когда скорость v очень велика.

Пример 39.2. Космический корабль пролетает мимо Земли со скоростью $v = 0{,}80c$. Опишите, как изменяется длина метрового стержня, медленно поворачиваемого из вертикального положения в горизонтальное членом экипажа космического корабля, с точки зрения а) другого члена экипажа космического корабля и б) наблюдателя на Земле.

Решение. а) Метровый стержень имеет длину 1,0 м при всех ориентациях, так как относительно наблюдателя на борту космического корабля стержень покоится. б) Длина метрового стержня изменяется от 1,0 м в вертикальном положении до $L = (1{,}0\text{ м})\cdot\sqrt{1 - (0{,}80)^2} = 0{,}60$ м в горизонтальном положении (совпадающем с направлением движения).

Формула (39.2) показывает, какую длину тела мы получим в результате *измерения*, если тело движется мимо нас со скоростью v. Другое дело, как *выглядит* такое тело. Предположим, например, что вы движетесь справа налево мимо высокого здания со скоростью

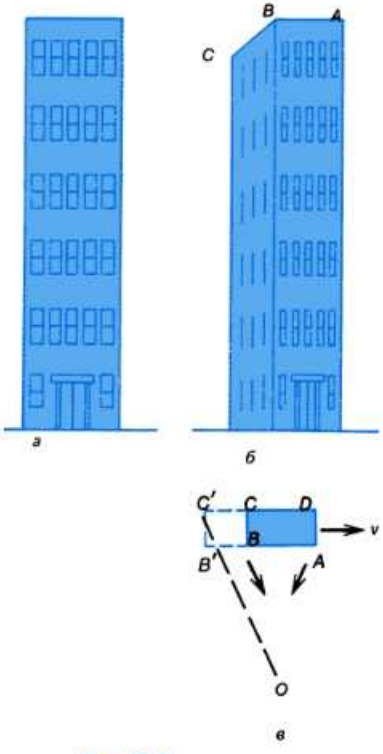


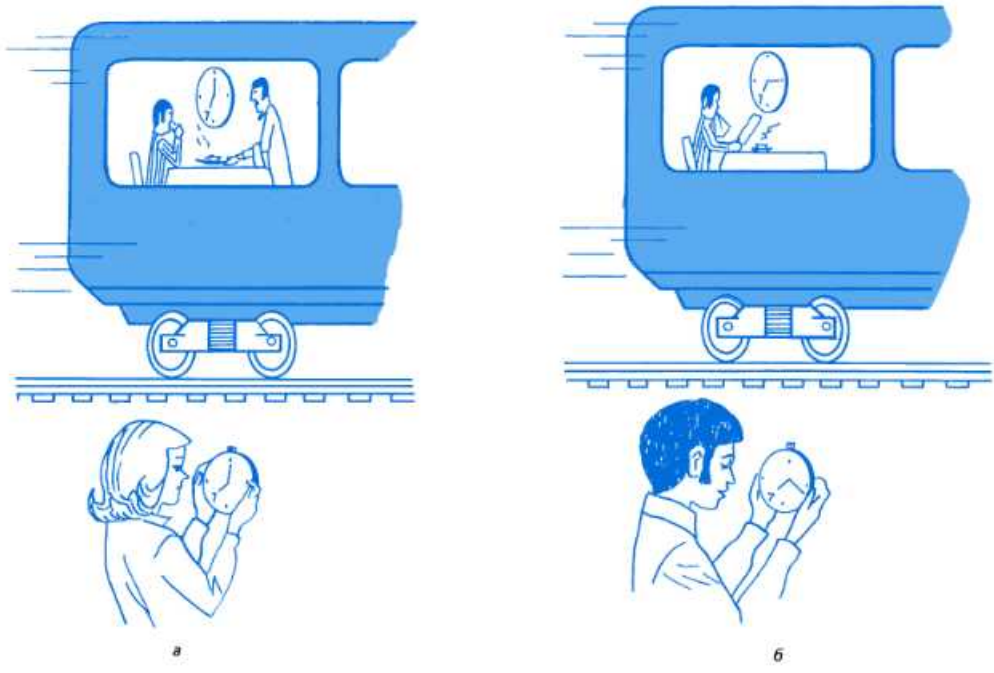
Рис. 39.9. Здание, наблюдаемое в состоянии покоя (*а*) и при движении с большой скоростью (*б*). Схема *в* поясняет, почему видна боковая сторона здания (подробности см. в тексте).

$v = 0{,}85c$. Это эквивалентно тому, что здание проносится мимо вас слева направо со скоростью v. Здание будет казаться более узким (но столь же высоким), но, даже находясь перед его фасадом, вы увидите и его боковую сторону. Это показано на рис. 39.9, *б* (на рис. 39.9, *а* показано то же здание, каким вы увидели бы его с фасада, стоя перед ним). То, что вы видите боковую сторону здания, не является в действительности релятивистским эффектом, а обусловлено конечной скоростью света. Чтобы понять, почему так происходит, обратимся к рис. 39.9, *в*, на котором изображен вид на здание сверху. В момент, который запечатлен на рисунке, наблюдатель O находится перед фасадом здания. Свет из точек A и B достигает наблюдателя O одновременно. Если бы здание покоилось относительно наблюдателя, то свет из точки C никогда бы не достиг O. Но здание, двигаясь мимо наблюдателя с очень высокой скоростью, перестает закрывать то, что «находится сзади», и свет из точки C доходит до наблюдателя O. В момент, изображенный на рис. 39.9, *в*, свет, отвечающий более раннему положению точки C (точка C'), может достичь O, так как здание успеет переместиться. Чтобы достичь наблюдателя O одновременно со светом из точек A и B, свет из точки C должен быть испущен раньше, так как он проходит большее расстояние. Поэтому до наблюдателя O одновременно со светом из точек A и B доходит свет из точки C'. Именно поэтому наблюдатель может обозревать фасад и боковую сторону здания одновременно даже в тот момент, когда он находился против фасада[1]. Как показывают аналогичные рассуждения, шарообразные тела сохраняют круглые очертания даже при очень высоких скоростях. Именно поэтому планеты на рис. 39.8, *б* изображены круглыми, а не сжатыми.

39.7. Четырехмерное пространство-время

Предположим, что в поезде, мчащемся с очень большой скоростью, например $0{,}65c$, едет пассажир (рис. 39.10). По часам на стене вагона-ресторана пассажир приступает к

[1] Было бы неверно думать, будто здание на рис. 39.9, *б* выглядит повернутым. Это не так, поскольку если бы здание выглядело повернутым, то ребро A казалось бы короче ребра B. В действительности же, если наблюдатель находится прямо перед фасадом здания, то оба ребра A и B наблюдатель увидит одинаковой длины (или, точнее, одинаковой «высоты»). Здание кажется наблюдателю несколько сжатым по фасаду, но зато, как мы уже говорили, наблюдателю видна его боковая сторона.



а *б*

Рис. 39.10. По точным часам в салоне мчащегося поезда пассажир приступает к обеду в 7.00 (*а*) и заканчивает обед в 7.15 (*б*). В начале обеда наблюдатели на земле установили свои часы по часам в салоне поезда. По измерениям этих наблюдателей обед в вагоне-ресторане продолжался 20 мин.

обеду в 7.00 и заканчивает его в 7.15. Эти два события (начало и конец обеда) в поезде происходят в одной и той же точке. Поэтому собственное время между этими двумя событиями равно 15 мин. С точки зрения наблюдателей на земле обед пассажира длится 20 мин [в полном соответствии с формулой (39.1)]. Предположим, что официант подал пассажиру блюдо на тарелке диаметром 20 см. Для наблюдателей на земле размер блюда в направлении движения поезда вследствие сокращения длины равен только 15 см. Таким образом, с точки зрения наблюдателей на земле порция была бы меньше, а обед длился бы дольше.

В некотором смысле два отмеченных нами эффекта (замедление времени и сокращение длины) уравновешивают друг друга. С точки зрения наблюдателей на земле порции сокращаются в размерах, но зато время трапезы увеличивается. Пространство, или длина, как бы компенсирует время.

Аналогичные соображения привели к понятию *четырехмерного пространства-времени*: три размерности «занимает» пространство, а четвертая размерность отведена времени. Пространство и время тесно взаимосвязаны. Подобно тому как, сжимая воздушный шар, мы увеличиваем его в одном измерении и сокращаем в другом, при взгляде на тела и события из различных систем отсчета пространство частично замещается временем, а время – пространством.

Хотя идея четырехмерного мира может показаться странной, она отражает лишь то, что любое тело или событие характеризуется четырьмя величинами, из которых три указывают, где в пространстве, а четвертая – когда во времени находится тело или происходит событие. Четырехмерное пространство-время обладает одним действительно необычным свойством: пространство и время в нем могут перемешиваться, т. е. при переходе из одной системы отсчета в другую пространство и время как бы отчасти взаимозаменяемы.

Для большинства из нас восприятие идеи пространства-времени сопряжено с определенными трудностями. Интуитивно мы, подобно физикам до появления теории относительности, воспринимаем пространство и время как совершенно различные понятия. И тем не менее даже в наших мысленных экспериментах мы обнаружили, что пространство и время не совсем изолированы друг от друга. Трудность, с которой мы сталкиваемся, воспринимая идею пространства-времени, вызывает в памяти ситуацию, сложившуюся в физике во времена Галилея и Ньютона. До Галилея вертикальное направление, в котором свободно падают тела, считалось отличным от двух горизонтальных измерений. Галилей показал, что вертикальное измерение отличается только тем, что совпадает с направлением, в котором действует сила тяжести. Во всем остальном все три измерения эквивалентны, и ныне их эквивалентность общепризнана. Теперь же нам необходимо воспринять еще одно измерение, которое мы прежде отличали от трех других измерений. Мы отнюдь не утверждаем, будто пространство ничем не отличается от времени. Теория относительности продемонстрировала невозможность определения пространственных координат тела или события независимо от временно́й координаты и наоборот.

39.8. Преобразования Галилея и Лоренца

Рассмотрим теперь подробно те математические соотношения, которые связывают величины в одной инерциальной системе отсчета с эквивалентными величинами в другой инерциальной системе отсчета. В частности, мы увидим, как *преобразуются* (т. е. изменяются) при переходе из одной системы отсчета в другую положения и скорости.

Начнем с классической, или галилеевой, точки зрения. Рассмотрим две системы отсчета – S и S', каждая из которых характеризуется своими осями координат (рис. 39.11). Пусть оси x и y (ось z не показана на рисунке) соответствуют системе отсчета S, а оси x', y' – системе отсчета S'. Оси x' и x совпадают, и мы предполагаем, что система отсчета S' движется вправо (в положительном

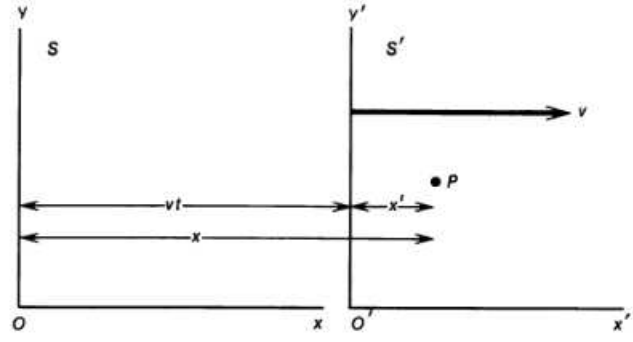


Рис. 39.11. Инерциальная система отсчета S' движется вправо со скоростью v относительно системы отсчета S.

направлении оси x) со скоростью v относительно системы отсчета S. Для простоты условимся считать, что при $t = 0$ начала систем отсчета O и O' совпадают.

Рассмотрим событие, происходящее в некоторой точке P (рис. 39.11) с координатами x', y', z' в системе отсчета S' в момент времени t'. Каковы координаты точки P в системе отсчета S? Так как системы отсчета S и S' первоначально полностью совпадают, по прошествии времени t система отсчета S' сдвинется на расстояние vt'. Следовательно, в момент времени t' получим $x = x' + vt'$. Координаты y и z при движении вдоль оси x не изменяются, поэтому $y = y'$, $z = z'$. Наконец, так как время в физике Галилея–Ньютона считается абсолютным, показания часов в обеих системах отсчета совпадают: $t = t'$. Резюмируя, получаем следующие **формулы преобразований Галилея**:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt', \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \qquad (39.3)$$

Эти формулы позволяют определить координаты любого события в системе отсчета S, если известны его координаты в системе S'. Коль скоро известны координаты события в системе отсчета S, его координаты в системе отсчета S' могут быть найдены по формулам

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Эти четыре формулы задают обратное преобразование и без труда получаются из формул (39.3). Заметим, что для перехода от прямого преобразования Галилея к обратному достаточно лишь поменять местами координаты со штрихами и без штрихов и заменить v на $-v$. Такая замена вполне понятна, так как система отсчета S движется влево относительно S' (в отрицательном направлении оси x) со скоростью v.

Предположим теперь, что точка P на рис. 39.11 – это движущаяся частица. Пусть u'_x, u'_y, u'_z – компоненты векто-

ра ее скорости в системе отсчета S'. (Мы обозначаем скорость частицы буквой u, чтобы отличать ее от относительной скорости v двух систем отсчета.) По определению $u'_x = dx'/dt'$, $u'_y = dy'/dt'$, $u'_z = dz'/dt'$. Скорость точки P в системе отсчета S имеет компоненты u_x, u_y, u_z. Их связь с компонентами скорости в системе отсчета S' можно найти, продифференцировав соотношения (39.3). Для u_x получаем

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + vt')}{dt'} = u'_x + v,$$

так как скорость v по предположению постоянна. Для других компонент $u'_y = y_y$ и $u'_z = u_z$; поэтому

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v, \\ u_y &= u'_y, \\ u_z &= u'_z. \end{aligned} \tag{39.4}$$

Это *галилеевы формулы преобразования скоростей*. Мы видим, что y- и z-компоненты скорости одинаковы в системах отсчета S и S', а x-компоненты отличаются на v: $u_x = u'_x + v$. Именно таким соотношением мы пользовались раньше при рассмотрении относительной скорости.

Формулы преобразований Галилея (39.3) и (39.4) справедливы только при скоростях, значительно меньших скорости света c. Нетрудно видеть, например, что первая из формул (39.4) утрачивает смысл, когда скорость становится равной скорости света: согласно этой формуле, свет, распространяющийся в системе отсчета S' со скоростью $u'_x = c$, в системе отсчета S будет иметь скорость $c + v$, тогда как теория относительности требует, чтобы и в системе отсчета S свет распространялся со скоростью c. Ясно, что для релятивистских скоростей нужны новые преобразования.

Их нетрудно вывести с помощью рис. 39.11. Предположим, что требуемые преобразования линейны и имеют вид

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z',$$

т. е. изменим первую из формул (39.3), умножив ее правую часть на постоянную γ, которую следует определить. Мы предполагаем, что формулы для координат y и z остаются неизменными, так как в направлении осей y и z сокращения длины не происходит. Формулу преобразования t мы заранее не предполагаем, а просто выведем ее. Обратные преобразования должны иметь такой же вид с точностью до замены v на $-v$. (Этого требует принцип относительности, так как система отсчета S', движущаяся вправо относительно системы отсчета S, эквивалентна системе отсчета S, движущейся влево относительно S'.) Следовательно,

$$x' = \gamma(x - vt).$$

Если световой импульс испущен в момент времени $t = t' = 0$ из общего начала систем отсчета S и S', то за время t он пройдет вдоль оси x расстояние $x = ct$ или $x' = ct'$. Поэтому из приведенных выше формул для x и x' получаем

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t',$$
$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t.$$

Подставляя t' из второго равенства в первое, мы приходим к $ct = \gamma(c + v)\gamma(c - v)(t/c) = \gamma^2(c^2 - v^2)t/c$. Сокращая обе части на t и разрешая относительно γ, находим

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Определив множитель γ, мы должны лишь найти соотношение между t и t'. Для этого объединим $x' = \gamma(x - vt)$ и $x = \gamma(x' + vt')$:

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(\gamma[x' + vt'] - vt).$$

Решая относительно t, приходим к соотношению между t и t': $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$. Выпишем теперь все новые формулы:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x' + vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t' + vx'/c^2). \end{aligned} \tag{39.5}$$

Это **формулы преобразований Лоренца**. Впервые они (в несколько иной форме) были предложены Лоренцем в 1904 г. для объяснения отрицательного результата эксперимента Майкельсона – Морли и для придания уравнениям Максвелла одинакового вида во всех инерциальных системах отсчета. Год спустя Эйнштейн вывел их независимо на основе своей теории относительности. Подчеркнем, что изменилась (по сравнению с преобразованием Галилея) не только формула преобразований координаты x, но и формула преобразований времени t. Из последней формулы непосредственно видно, как переплетены пространственная и временна́я координаты.

Пример 39.3. Выведите формулу сокращения длины (39.2) из преобразований Лоренца.

Решение. Пусть тело длиной L_0 покоится на оси x в системе отсчета S. Если x_1 и x_2 – координаты концов тела, то $x_2 - x_1 = L_0$. Координаты x'_1 и x'_2 концов тела в системе отсчета S' для любого t' могут быть найдены с помощью преобразования Лоренца. Длина тела, измеренная в системе отсчета S', равна $L = x'_2 - x'_1$. Наблюдатель в системе отсчета S' установит длину L', измерив координаты x'_2 и x'_1 одновременно, т. е. при $t'_2 = t'_1$. Таким образом, из первой формулы (39.5)

мы получаем

$$L_0 = x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \times$$

$$\times (x'_2 + vt'_2 - x'_1 - vt'_1).$$

Так как $t'_2 = t'_1$, то

$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x'_2 - x'_1) = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

или

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

что совпадает с формулой (39.2).

Пример 39.4. Выведите из формул преобразования Лоренца формулу замедления времени.

Решение. По измерениям в системе отсчета S' интервал времени Δt_0 между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке пространства ($x'_2 = x'_1$), равен $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$. Так как $x'_2 = x'_1$, то, согласно последней формуле (39.5), интервал времени Δt между событиями, измеренный в системе отсчета S, равен

$$\Delta t = t_2 - t_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2} - t'_1 - \frac{vx'_1}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t'_2 - t'_1) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

что совпадает с формулой (39.1). Заметим, что в качестве системы отсчета S' выбрана система, в которой два события происходят в одной и той же точке, т. е. $x'_1 = x'_2$, и поэтому члены vx'_2/c^2 и $-vx'_1/c^2$ взаимно уничтожаются.

Релятивистские формулы преобразования скоростей мы получим, продифференцировав соотношения (39.5) по времени. Например, полагая $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и используя правило дифференцирования сложной функции, мы приходим к соотношению

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[\gamma(x' + vt')] = \frac{d}{dt'}[\gamma(x' + vt')]\frac{dt'}{dt} =$$

$$= \gamma\left[\frac{dx'}{dt'} + v\right]\frac{dt'}{dt}.$$

Но $dx'/dt' = u'_x$ и $dt'/dt = 1/(dt/dt') = 1/[\gamma(1 + vu'_x/c^2)]$ [мы продифференцировали по времени последнее из соотношений (39.5)]. В результате

$$u_x = [\gamma(u'_x + v)]/[\gamma(1 + vu'_x/c^2)] = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}.$$

Остальные формулы выводятся аналогично. Приведем окончательные результаты:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \tag{39.6а}$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \tag{39.6б}$$

$$u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \tag{39.6в}$$

Подробнее о формулах преобразования скоростей (39.6) мы расскажем в следующем разделе. Подчеркнем, что, хотя относительная скорость $\mathbf{v}$ направлена вдоль оси x,

скорость v и x-компонента скорости частицы входят в формулы преобразования всех компонент ее скорости. В случае преобразования Галилея [формулы (39.4)] компоненты скорости частицы, перпендикулярные относительной скорости, сохранялись.

Рис. 39.12. Ракета *2* запущена с ракеты *1* со скоростью $u' = 0{,}60c$. Чему равна скорость *2* относительно Земли?

Пример 39.5. Вычислите скорость ракеты *2* на рис. 39.12 относительно Земли.

Решение. Ракета *2* движется относительно ракеты *1* со скоростью $u' = 0{,}60c$. Ракета *1* летит со скоростью $v = 0{,}60c$ относительно Земли. Обе скорости лежат на одной прямой, которую мы выберем за ось x (и x'). Нам нужна только первая из формул (39.6). Скорость ракеты *2* относительно Земли равна

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2} = \frac{0{,}60c + 0{,}60c}{1 + \dfrac{(0{,}60c)(0{,}60c)}{c^2}} =$$

$$= \frac{1{,}20c}{1{,}36} = 0{,}88c.$$

(Преобразование Галилея дало бы $u = 1{,}20c$.)

Обратите внимание на то, что при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, формулы (39.6) переходят в классические формулы (преобразования Галилея).

39.9. Релятивистская масса и релятивистский импульс

Длина, интервал времени и масса – три основные механические величины. Две первые из них, как мы уже знаем, относительны: их значения зависят от того, в какой системе отсчета они измерены. Можно ожидать, что и масса окажется относительной величиной. И действительно, Эйнштейн показал, что *с увеличением скорости масса тела возрастает*:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (39.7)$$

В релятивистской формуле зависимости массы от скорости (39.7) величина m_0 называется **массой покоя** тела, т. е. массой, измеренной в системе отсчета, относительно которой тело покоится; m – масса тела, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью v.

Релятивистское увеличение массы бесчисленное мно-

жество раз проверялось в опытах с элементарными частицами (такими, как мюоны), и было подтверждено увеличение массы с ростом скорости в соответствии с формулой (39.7).

Воспользуемся мысленным экспериментом и покажем, что формула (39.7) следует из специальной теории относительности и закона сохранения импульса. Предположим, что импульс частицы определяется соотношением

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

которое совпадает с классическим выражением для импульса, за исключением того, что масса m тела может зависеть от его скорости v [это обстоятельство отражается в записи: $m(v)$]. Как будет показано, такое предположение необходимо, если закон сохранения импульса справедлив в релятивистской области.

Рассмотрим в мысленном эксперименте упругое соударение двух *идентичных* шаров. Если два таких шара движутся с одинаковой скоростью v, то их массы $m(v)$ одинаковы и могут отличаться от массы покоя m_0, одинаковой у обоих шаров. Если шары движутся с разными скоростями, то их массы могут быть различны.

Соударение двух шаров в мысленном эксперименте происходит следующим образом. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета A и B, которые движутся со скоростью v относительно друг друга. В системе отсчета A шар (назовем его шар A) движется со скоростью u вдоль оси y_A, перпендикулярной v. В системе отсчета B второй шар (шар B) движется со скоростью u и в отрицательном направлении оси y_B. Оба шара начали двигаться в нужный момент времени, выбранный с таким расчетом, чтобы они столкнулись. Соударение шаров мы предполагаем упругим и считаем, что после соударения каждый шар движется с той же скоростью u, но в обратном направлении вдоль оси y в своей системе отсчета. На рис. 39.13, *а* столкновение шаров изображено с точки зрения наблюдателя в системе отсчета A. На рис. 39.13, *б* то же столкновение изображено таким, каким его видит наблюдатель в системе отсчета B. В системе отсчета A шар A имеет скорость $+u$, направленную вдоль оси y, до соударения и скорость $-u$, направленную вдоль оси y, после соударения. В системе отсчета B шар A имеет и до, и после соударения x-компоненту скорости, равную v, и y-компоненту [см. формулу (39.6б) с $u'_x = 0$], равную

$$u\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

То же можно сказать и относительно шара B при условии, что все скорости обращены. Все компоненты скорости изображены на рис. 39.13. Предположим теперь, что $u \ll v$. Тогда масса шара A в системе отсчета B зависит только от скорости v [т. е. $m(v)$], а масса шара B в системе отсчета A есть $m(v)$. Воспользуемся законом сохранения импульса (мы надеемся, что он останется в силе и

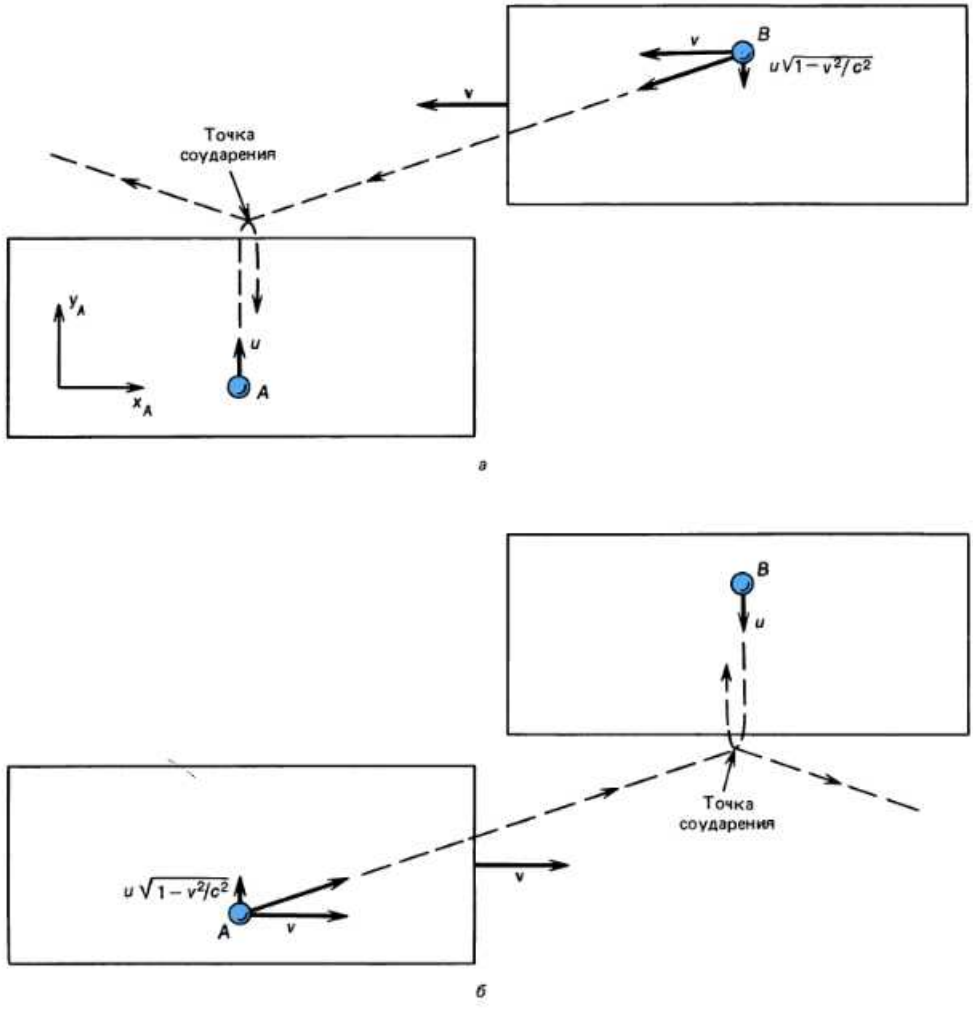


Рис. 39.13. К выводу формулы массы. Соударение, наблюдаемое из системы отсчета A (*а*) и из системы отсчета B (*б*).

в специальной теории относительности, хотя понятие импульса необходимо переопределить), т. е. предположим, что полный импульс до соударения равен полному импульсу после соударения. Применим закон сохранения импульса к y-компоненте импульса в системе отсчета A (рис. 39.12, *а*):

$$m(u)\,u - m(v)\,u\sqrt{1 - v^2/c^2} = -\,m(u)\,u + m(v)\,u\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Разрешив относительно $m(v)$, получим

$$m(v) = \frac{m(u)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Если скорость u мала и стремится к нулю (это соответствует скользящему соударению, когда один из шаров, по существу, покоится, а другой движется со скоростью v), то $m(u)$ переходит в массу покоя m_0 и полученное соотно-

шение приобретает вид

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Хотя $m(v)$ относится к частице A, а m_0 – к частице B, масса покоя m_0 одинакова у обеих частиц. Следовательно, последнее соотношение справедливо для шара A. [Формула (39.13б) позволяет вывести такое же соотношение и для шара B.] Это и есть формула (39.7), которую требовалось получить.

Введем релятивистский импульс

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{39.8}$$

Как было показано выше, в этом случае закон сохранения импульса будет справедлив и в релятивистской области. Второй закон Ньютона, если его записать в наиболее общем виде:

$$F = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \tag{39.9}$$

также выполняется в релятивистской области. Поскольку масса частицы не постоянна, второй закон Ньютона в виде $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ в релятивистской области не справедлив.

39.10. Предельная скорость

Основной результат специальной теории относительности состоит в том, что скорость любого тела не может быть равна скорости света или превышать ее. То, что скорость света представляет собой естественный предел скоростей во Вселенной, можно усмотреть в любом из соотношений (39.1), (39.2), (39.7) или из формулы сложения скоростей. Но проще всего существование предельной скорости можно усмотреть в релятивистской зависимости массы от скорости: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. По мере ускорения тела до больших скоростей его масса становится все больше и больше. Если бы скорость v достигла скорости света c, то знаменатель оказался бы равен нулю и масса m обратилась бы в бесконечность. Следовательно, для разгона тела до $v = c$ потребовалась бы бесконечно большая энергия, что невозможно.

Если бы скорость v превышала c, то множитель $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ стал бы квадратным корнем из отрицательного числа, т.е. мнимым числом, поэтому длины, временны́е интервалы и масса перестали бы быть вещественными. На этом основании мы заключаем, что скорость обычных тел не может быть больше или равна скорости света. Однако в конце 60-х годов XX в. было отмечено, что формулы специальной теории относительности Эйн-

штейна не исключают возможности существования тел, скорость которых *всегда* больше скорости света c. Если такие частицы существуют (их назвали тахионами, что означает «быстрые»), то их масса покоя m_0 была бы мнимой, а масса m как отношение двух мнимых чисел при $v > c$ была бы вещественной. Для таких гипотетических частиц скорость света c была бы *нижним* пределом их скорости. Несмотря на интенсивные поиски тахионов, до сих пор их обнаружить не удалось. Скорость света пока остается предельной скоростью во Вселенной.

39.11. $E = mc^2$. Масса и энергия

Если на тело с массой покоя m_0 действует постоянная результирующая сила, то скорость тела возрастает. Действуя на тело на определенном пути, сила совершает над телом работу, и его энергия увеличивается. Но скорость тела не может возрастать неограниченно, так как существует предельная скорость c. С другой стороны, с увеличением скорости тела происходит увеличение его массы. Следовательно, производимая над телом работа приводит к увеличению не только его скорости, но и *массы* тела. Обычно работа, производимая над телом, увеличивает его энергию. Этот аспект теории относительности привел к идее о том, что масса есть форма энергии, – решающему моменту специальной теории относительности Эйнштейна.

Чтобы найти математически связь массы и энергии, предположим, что закон сохранения энергии справедлив в специальной теории относительности, и рассмотрим движение вдоль оси x. Работа, затраченная на ускорение частиц от нулевой скорости до скорости v, равна

$$W = \int_i^f F dx = \int_i^f \frac{dp}{dt} dx = \int_i^f \frac{dp}{dt} v dt = \int_i^f v dp,$$

где i – начальное ($v = 0$) состояние, а f – конечное ($v = v$) состояние. Так как $d(pv) = pdv + vdp$, мы можем записать выражение справа под знаком интеграла в виде

$$vdp = d(pv) - pdv.$$

Тогда

$$W = \int_i^f d(pv) - \int_i^f pdv.$$

Так как интегрирование – это операция, обратная дифференцированию, первый член в правой части легко вычисляется:

$$\int_i^f d(pv) = pv\Big|_i^f = mv^2\Big|_0^v = mv^2,$$

где m – функция от v. Следовательно,

$$W = mv^2 - \int_0^v mv\,dv = mv^2 - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dv.$$

Второй член в правой части также легко интегрируется, поскольку

$$\frac{d}{dv}\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right) = -(v/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2};$$

получаем

$$W = mv^2 + \left(m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)\Big|_0^v = mv^2 + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0 c^2 = mv^2 + mc^2\left(1 - v^2/c^2\right) - m_0 c^2.$$

[Мы воспользовались формулой (39.7).] Так как $mc^2(1 - v^2/c^2) = mc^2 - mv^2$, получаем окончательно, что

$$W = mc^2 - m_0 c^2.$$

По закону сохранения энергии работа, совершенная над частицей, равна ее кинетической энергии (КЭ) в конечном состоянии, так как в начальном состоянии частица покоилась:

$$\text{КЭ} = mc^2 - m_0 c^2, \tag{39.10}$$

где m – масса частицы, движущейся со скоростью v, m_0 – масса покоя частицы. Ясно, что при высоких скоростях КЭ $\neq {}^1/_2 mv^2$; нельзя также, подставив $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в классическое выражение , получить при этом правильный результат: КЭ $\neq {}^1/_2 m_0 v^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Правильным является выражение (39.10).

Формула (39.10) требует некоторых пояснений. Прежде всего, что означает второй член в правой части $m_0 c^2$? Исходя из представления о массе как о форме энергии, Эйнштейн назвал $m_0 c^2$ *энергией покоя* (или собственной энергией) тела. Перенеся член $m_0 c$ в другую часть равенства, мы можем записать соотношение (39.10) в виде $mc^2 = m_0 c^2 + \text{КЭ}$. Назовем величину mc^2 *полной энергией* E частицы (мы предполагаем, что частица не обладает потенциальной энергией). Нетрудно видеть, что полная энергия равна энергии покоя плюс кинетическая энергия:

$$E = mc^2 = m_0 c + \text{КЭ}. \tag{39.11}$$

Так мы приходим к знаменитой формуле Эйнштейна $E = mc^2$.

Если частица покоится, то ее полная энергия равна $E_0 = m_0 c^2$, поэтому величину $m_0 c^2$ мы и называем энергией покоя. Эта формула устанавливает математическую связь понятий энергии и массы. Чтобы идея о существовании подобной связи имела смысл с практической точки зрения, масса должна превращаться в энергию и наоборот. Это означает, что если масса представляет собой одну из форм энергии, то она должна быть способна

превращаться в другие формы энергии, как это и происходит с ними. Эйнштейн высказал предположение о возможности таких превращений массы в различные формы энергии. Его гипотеза бесчисленное количество раз подтверждалась на опыте и лежит в основе многих важных процессов.

Взаимное превращение массы и энергии проще всего обнаруживается в ядерной физике и физике элементарных частиц. Например, на опыте наблюдался распад нейтрального пиона π^0 (π^0-мезон) с массой покоя $2{,}4 \cdot 10^{-28}$ кг на два фотона, т. е. превращение π^0 целиком в чисто электромагнитное излучение. В таком процессе π^0 полностью исчезает. Количество образующейся в результате распада электромагнитной энергии, как показали измерения, в точности соответствует формуле Эйнштейна $E = m_0c^2$. В лаборатории наблюдается и обратный процесс превращения электромагнитного излучения при определенных условиях в такие «материальные» частицы, как, например, электроны. В больших масштабах энергия, вырабатываемая на атомных электростанциях, обусловлена уменьшением массы уранового топлива в процессе, известном под названием «деление ядер урана» (гл. 42). Даже получаемая нами от Солнца лучистая энергия может служить примером, основанным на формуле $E = mc^2$: масса Солнца постоянно убывает по мере того, как Солнце излучает в окружающее пространство.

Пример 39.6. π^0-мезон ($m_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-28}$ кг) движется со скоростью $v = 0{,}80\ c = 2{,}4 \cdot 10^8$ м/с. Чему равна его кинетическая энергия? Полученный ответ сравните с вычислениями по классической механике.

Решение. Масса π^0-мезона при $v = 0{,}80\ c$ равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-28}\ \text{кг}}{\sqrt{1 - (0{,}80)^2}} = 4{,}0 \cdot 10^{-28}\ \text{кг}.$$

Следовательно, его кинетическая энергия равна

$$\text{КЭ} = (m - m_0)c^2 = (4{,}0 \cdot 10^{-28}\ \text{кг} - 2{,}4 \times 10^{-28}\ \text{кг})(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{м/с})^2 = 1{,}4 \times 10^{-11}\ \text{Дж}.$$

Обратите внимание на то, что величина mc^2 измеряется в единицах кг·м^2/с^2, т. е. в джоулях. Вычисления по классической механике дали бы неверный результат: $\text{КЭ} = {}^1/_2 m_0 v^2 = {}^1/_2 (2{,}4 \cdot 10^{-28}\ \text{кг})(2{,}4 \times 10^8\ \text{м/с})^2 = 6{,}9 \cdot 10^{-12}$ Дж.

Пример 39.7. Сколько энергии выделяется при распаде π^0-мезона из предыдущего примера и его превращении в электромагнитное излучение?

Решение. Энергия покоя π^0-мезона равна $E_0 = m_0c^2 = (2{,}4 \cdot 10^{-28}\ \text{кг})(3{,}0 \times 10^8\ \text{м/с})^2 = 2{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж. Столько энергии выделилось бы, если бы π^0-мезон претерпел распад в состоянии покоя. Если же π^0-мезон обладает КЭ $= 1{,}4 \cdot 10^{-11}$ Дж, то выделяющаяся при его распаде полная энергия равна $3{,}6 \cdot 10^{-11}$ Дж.

Пример. 39.8. Энергия, выделяющаяся или поглощающаяся в ядерных реакциях или распадах, определяется разностью масс исходных частиц и продуктов реакции. Например, при радиоактивном распаде (разд. 42.4) атома урана ($m = 232{,}03714$ а. е. м.) образуется атом тория ($m = 228{,}02873$ а. е. м.) и атом гелия ($m = 4{,}00260$ а. е. м.) (массы атомов приведены в атомных единицах массы, см. разд. 4.3: 1 а. е. м. $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг). Вы-

числите энергию, выделяющуюся при этом распаде.

Решение. Начальная масса равна 232,03714 а. е. м., а масса ядер после распада равна 228,02873 а. е. м. + 4,00260 а. е. м. = = 232,03133 а. е. м. Следовательно, масса уменьшилась на 0,00581 а. е. м. Эта масса, равная (0,00581 а. е. м.) $(1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг) = $= 9{,}64 \times 10^{-30}$ кг, превращается в энергию. Согласно формуле $E = mc^2$, эта энергия составляет

$$E = (9{,}64 \cdot 10^{-30} \text{ кг})\,(3{,}0 \cdot 10^{8} \text{ м/с})^2 = 8{,}68 \times$$
$$\times 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Так как 1 МэВ $= 1{,}60 \cdot 10^{-13}$ Дж, при распаде выделяется энергия 5,4 МэВ.

Выражение (39.10) для кинетической энергии можно с помощью соотношения (39.7) записать как функцию скорости v тела:

$$\text{КЭ} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \tag{39.12}$$

При малых скоростях $v \ll c$ квадратный корень в правой части равенства (39.12) можно разложить в ряд по биному $(1 + x)^n = 1 + nx + n(n-1)\,x^2/2! + \ldots$. В результате получим

$$\text{КЭ} \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots - 1\right) \approx \frac{1}{2}m_0v^2,$$

где многоточие в скобках соответствует малым членам разложения, которыми мы пренебрегли в предположении $v \ll c$. Таким образом, при малых скоростях релятивистское выражение для кинетической энергии переходит в классическое: КЭ $= {}^1/_2 m_0v^2$. Разумеется, так и должно быть. Теория относительности не была бы столь значительной, если бы не давала точных предсказаний как при высоких, так и при низких скоростях. При обычных скоростях остальные формулы специальной теории относительности переходят в свои классические аналоги: релятивистские эффекты сокращения длины, замедления времени и увеличения массы при $v \ll c$ исчезают, так как $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$.

Нетрудно также вывести полезное соотношение между полной энергией E частицы и ее импульсом p. Так как $E = mc^2$ и $p = mv$, где $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, получаем

$$E^2 = m^2c^4 = m^2c^2\,(c^2 + v^2 - v^2) =$$
$$= m^2c^2v^2 + m^2c^2\,(c^2 - v^2) =$$
$$= p^2c^2 + \frac{m_0^2c^4\,(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2},$$

или

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4. \tag{39.13}$$

Таким образом, полную энергию можно выразить через импульс p или кинетическую энергию [формула (39.11)].

39.12. Значение специальной теории относительности

Для проверки предсказаний специальной теории относительности было проведено очень много экспериментов. В пределах ошибок эксперимента никаких противоречий с теорией не было обнаружено, и подавляющее большинство ученых убеждено, что теория относительности обеспечивает описание природы.

При скоростях, существенно меньших скорости света, релятивистские формулы переходят в классические, о чем мы уже говорили. На это, конечно, надеялись и этого упорно добивались все физики, поскольку ньютоновская механика хорошо описывает явления, когда тела движутся со скоростями $v \ll c$. Требование, согласно которому более общая теория (например, специальная теория относительности) должна приводить к тем же результатам, что и более ограниченная теория (например, классическая механика, делающая точные предсказания при $v \ll c$), называется **принципом соответствия**. Две теории должны соответствовать друг другу там, где их области применимости перекрываются. Таким образом, специальная теория относительности не противоречит классической механике. Она скорее представляет собой более общую теорию, частным случаем которой следует считать классическую механику.

Значение специальной теории относительности отнюдь не исчерпывается тем, что она позволяет получать более точные результаты, особенно при очень высоких скоростях. Гораздо важнее, что специальная теория относительности изменила наше мировоззрение. Понятия «пространство» и «время», некогда считавшиеся абсолютными и обособленными, оказались относительными и взаимосвязанными. Наши представления о массе и энергии также существенно изменились: и масса, и энергия способны к взаимному превращению. Влияние теории относительности распространилось далеко за пределы физики. Специальная теория относительности отразилась на развитии других наук и наложила свой отпечаток на искусство и литературу. Эта теория стала элементом общей культуры.

С практической точки зрения в повседневной жизни нам не часто предоставляется возможность воспользоваться математическим аппаратом специальной теории относительности. Например, при $v = 0{,}1\ c$ множитель $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ во многих релятивистских формулах составляет 0,995. Это означает, что даже при скоростях $0{,}1\ c = 3 \cdot 10^7$ м/с множитель $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в релятивистских формулах вносит численную поправку, величина которой меньше 1%. Следовательно, при скоростях, меньших $0{,}1\ c$, или в тех случаях, когда не происходит взаимных превращений массы и энергии, нет необходимости прибегать к более сложным релятивистским формулам, и можно обойтись простыми классическими формулами.

Заключение

Инерциальной системой отсчета называется система отсчета, в которой выполняется перый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета могут двигаться относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Системы отсчета, движущиеся с ускорением, неинерциальны.

Специальная теория относительности Эйнштейна опирается на два принципа: *принцип относительности*, утверждающий, что законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, и принцип *постоянства скорости света*, утверждающий, что скорость света в пустом пространстве одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Из специальной теории относительности, в частности, следует, что два события, одновременные в одной системе отсчета, могут оказаться неодновременными в другой системе отсчета. К другим релятивистским эффектам относятся *замедление времени* (часы, движущиеся относительно наблюдателя, по его измерениям замедляют свой ход), *сокращение длины* (длина тела, движущегося относительно наблюдателя, меньше длины того же тела в покое), *увеличение массы* (с увеличением скорости масса тела возрастает). Кроме того, сложение скоростей в специальной теории относительности происходит не так, как в классической механике. Все релятивистские эффекты становятся существенными только при очень больших скоростях, близких к скорости света, которую можно считать предельной скоростью во Вселенной.

Преобразования Лоренца устанавливают связь между пространственными и временны́ми координатами событий в одной инерциальной системе отсчета и пространственными и временны́ми координатами тех же событий в другой инерциальной системе отсчета.

Специальная теория относительности изменила наши представления о пространстве и времени, массе и энергии. По современным представлениям пространство и время тесно связаны между собой, время играет роль четвертого измерения, дополнительного к трем пространственным измерениям. Масса и энергия взаимопревращаемы. Соотношение

$$E = mc^2$$

показывает, какую энергию E необходимо израсходовать, чтобы создать массу m, и, наоборот, какая энергия E заключена в массе m. Закон сохранения энергии должен быть обобщен так, чтобы включать массу как форму энергии. Полная энергия E и импульс p частицы связаны между собой соотношением $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$.

Вопросы

1. Приведите несколько примеров неинерциальных систем отсчета.
2. Женщина стоит на краю движущейся железнодорожной платформы. Она подбрасывает (как ей кажется) вертикально вверх тяжелый мяч. Приземлится мяч на платформу или позади нее? (Сопротивлением воздуха пренебречь.)
3. Согласно принципу относительности, человек, сидящий в автомобиле, который едет равномерно и прямолинейно, имеет право утверждать, что его автомобиль покоится, а движется дорога под ним, с не меньшим основанием, чем человек, стоящий на обочине, утверждает, что движется автомобиль, а дорога покоится. Согласны ли вы с этим или что-то мешает вам принять подобную точку зрения? Проанализируйте причины вашей реакции.
4. Действительно ли Земля движется вокруг Солнца? Можно ли с тем же основанием утверждать, что Солнце движется вокруг Земли? Рассмотрите эту проблему с точки зрения принципа относительности (утверждающего, что не существует «выделенной» системы отсчета).
5. Представьте себе, что вы находитесь на борту космического корабля, летящего от некоторой звезды со скоростью 0.5 c. С какой скоростью вам надо будет обгонять свет от этой звезды.
6. Два события происходят в одном и том же месте и в одно и то же время с точки зрения одного наблюдателя. Будут ли эти события одновременными с точки зрения другого наблюдателя, движущегося относительно первого.
7. а) Объясните, почему два события одновременны с точки зрения каждого из двух наблюдателей, движущихся относительно друг друга, только в том случае, если в системе отсчета каждого наблюдателя эти события происходят в одной точке. б) При каких других условиях два события будут одновременными с точки зрения каждого наблюдателя?
8. Проанализируйте мысленный эксперимент в разд. 39.4 с точки зрения наблюдателя O_1 (сделайте чертеж, аналогичный изображенному на рис. 39.6).
9. Эффект замедления времени проявляется в том, что «движущиеся часы отстают». В действительности этот эффект не имеет ничего общего с движением, влияющим на работу часового механизма. Чем тогда обусловлен этот эффект?
10. Означает ли замедление времени, что время действительно течет медленнее в движущихся системах отсчета, или нам это только *кажется*?
11. Иногда приходится слышать, что поездки в метро преждевременно старят людей. Предположим, что в будущем люди смогут построить метро, поезда которого помчатся со скоростью, очень близкой к скорости света. Как это кажется, по-вашему, на старении пассажиров?
12. Молодо выглядящая женщина-астронавт только что вернулась из продолжительного космического полета. Она бросается к седовласому старцу и в завязавшемся разговоре называет его своим сыном. Как это может быть?
13. Вы улетаете с Земли со скоростью 0,5 c. Заметите ли вы какие-нибудь изменения в своем пульсе? Изменятся ли масса вашего тела, рост или объем талии? Что скажут по поводу этого наблюдатели с Земли, следящие за вами в свои телескопы?
14. Предсказания специальной теории относительности кажутся противоречащими некоторым нашим повседневным представлениям о мире и поэтому воспринимаются иногда как абсурдные. Проанализируйте подробно некоторые из таких предсказаний и попробуйте установить, приводят ли они к какому-нибудь противоречию, поддающемуся проверке.
15. Как изменилась бы наша жизнь, если бы скорость света составляла всего 25 м/с?
16. Увеличивается ли масса и происходят ли замедление времени и сокращение длины при обычных скоростях, например 90 км/ч?
17. Предположим, что скорость света стала бесконечно большой. Что произошло при этом с предсказаниями специальной теории относительности по поводу замедления времени, сокращения длины и увеличения массы?
18. Объясните, как из формул, описывающих сокращение длины и замедление времени, следует, что c – предельная скорость во Вселенной.
19. К телу массой m в течение бесконечного периода времени приложена постоянная сила. Как изменяются со временем скорость и масса тела?
20. Раскаленный добела железный прут охлажден до комнатной температуры. Изменилась ли его масса?
21. Противоречит ли формула Эйнштейна $E = mc^2$ закону сохранения энергии? Объясните.
22. Применима ли формула $E = mc^2$ к частицам, движущимся со скоростью света? Применима ли эта формула только к таким частицам?
23. Электрон вынужден двигаться со скоростью меньше скорости света c. Устанавливает ли это условие верхний предел для импульса электрона? Если да, то каков этот верхний предел?

24. Если масса представляет собой один из видов энергии, то означает ли это, что масса сжатой пружины больше массы свободной пружины?
25. Правильно ли говорить, что «материя не создается и не уничтожается»? Как следовало бы сформулировать это утверждение?
26. Нейтрино – это элементарная частица с нулевой массой покоя, которая движется со скоростью света. Можно ли поймать пролетающие мимо нейтрино?

Задачи

Разделы 39.5 и 39.6

1. (I) Пучок элементарных частиц движется со скоростью $2{,}85 \cdot 10^8$ м/с. Среднее время жизни частиц при этой скорости равно $2{,}50 \cdot 10^{-8}$ с. Чему равно время жизни этих частиц в состоянии покоя?
2. (I) Чему равна скорость пучка пионов, если их среднее время жизни равно $3{,}5 \cdot 10^{-8}$ с? Среднее время жизни пиона в состоянии покоя равно $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с.
3. (I) Космический корабль пролетает мимо вас со скоростью 0,80 c. По вашим измерениям его длина равна 90 м. Чему равна длина космического корабля в состоянии покоя?
4. (I) Вы сидите в своем спортивном автомобиле, когда мимо вас со скоростью 0,18 c проносится другой спортивный автомобиль той же марки и той же модели. Его водитель утверждает, что длина его машины равна 6,00 м, а длина вашей по его измерениям составляет 6,15 м. Какова длина вашей и его машин по вашим измерениям?
5. (I) Предположим, что вы решили отправиться в космический полет к звезде, удаленной от Земли на расстояние 65 световых лет. С какой скоростью необходимо лететь, чтобы это расстояние сократилось до 20 световых лет?
6. (II) Расстояние до звезды составляет 36 световых лет. Сколько времени займет перелет с Земли до этой звезды космического корабля, развивающего скорость 0,98 c, по измерениям наблюдателей а) на Земле; б) на борту космического корабля? в) Какое расстояние пролетит космический корабль по измерениям наблюдателя, находящегося на его борту? г) С какой скоростью летит космический корабль по вычислениям членов его экипажа на основе измерений пп. «б» и «в»?
7. (II) Ваша хорошая знакомая проносится мимо вас в своем скоростном спортивном автомобиле со скоростью 0,760 c. По вашим измерениям машина имеет в длину 5,80 м и в высоту 1,45 м. а) Чему равны длина и высота машины в состоянии покоя? б) Сколько секунд, как вам кажется, прошло по часам на руке вашей знакомой, если ваши часы отсчитали 20,0 с? в) С какой скоростью вы, по мнению вашей знакомой, пронеслись мимо нее? г) Сколько секунд прошло по вашим часам за то время, пока часы вашей знакомой отсчитали 20,0 с?
8. (II) Ближайшая к Земле звезда Альфа Центавра находится на расстоянии 4,0 световых лет. а) С какой постоянной скоростью должен лететь стартовавший с Земли космический корабль, если необходимо достичь этой звезды за 3,0 года по часам путешественников, находящихся на борту космического корабля? б) Какой покажется длительность полета наблюдателю на Земле?
9. (II) С какой скоростью должен лететь пион, чтобы пролететь до распада 20 м? Среднее время жизни пиона в покое $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с.

Раздел 39.8

10. (I) Предположим, что начала систем отсчета S и S' (рис. 39.11) совпадают при $t = t' = 0$ и что система отсчета движется со скоростью $v = 30$ м/с относительно системы отсчета S. В системе отсчета S' в точке с координатами $x' = 25$ м, $y' = 20$ м, $z' = 0$ м покоится человек. Вычислите его координаты в системе отсчета $S(x, y, z)$ при а) $t = 2{,}5$ с; б) $t = 10{,}0$ с. Воспользуйтесь для этого преобразованием Галилея.
11. (I) Решите задачу 10 с помощью преобразований Лоренца при относительной скорости $v = 1{,}50 \cdot 10^8$ м/с и а) $t = 2{,}5$ мкс; б) $t = 10{,}0$ мкс.
12. (I) Астронавт на борту космического корабля, летящего со скоростью 0,50 c (относительно Земли) наблюдает метеор, обгоняющий корабль и движущийся относительно него со скоростью 0,50 c. С какой скоростью метеор движется относительно Земли?
13. (II) Два космических корабля стартуют с Земли в противоположных направлениях, каждый со скоростью 0,50 c относительно Земли. а) Чему равна скорость первого космического корабля относительно второго? б) Чему равна скорость второго космического корабля относительно первого?
14. (II) Космический корабль стартует с Земли со скоростью 0,68 c. Второй космический корабль стартует с первого со скоростью 0,86 c (относительно первого космического корабля). Вычислите скорость второго космического корабля относительно Земли, если он стартует а) в направлении движения первого (находящегося в полете) космического корабля; б) в

направлении, противоположном скорости первого космического корабля (т.е. назад к Земле).

15. (II) Предположим, что человек в задаче 10 движется со скоростью, компоненты которой равны $u_x = u_y = 25{,}0$ м/с. Чему равна его скорость в системе отсчета S? (Укажите величину и направление скорости.)

16. (II) Предположим, что астронавт в задаче 11 (находясь на борту космического корабля) движется со скоростью, компоненты которой $u'_x = u'_y = 2{,}3 \cdot 10^8$ м/с. Чему равна (по величине и направлению) его скорость относительно системы отсчета S?

17. (II) С космического корабля, удаляющегося от Земли со скоростью $0{,}66c$, под прямым углом к направлению полета (с точки зрения наблюдателя, находящегося на борту корабля) запущен беспилотный модуль со скоростью $0{,}82c$. Чему равна скорость модуля и под каким углом к направлению движения первого космического корабля он летит с точки зрения наблюдателя на Земле?

18. (II) Частица движется в плоскости xy системы отсчета S (рис. 39.11) под углом θ к оси x. Покажите, что в системе отсчета S' она движется под углом θ' к оси x', определяемым из соотношения $\operatorname{tg}\theta' = (\sin\theta)\sqrt{1 - v^2/c^2}/(\cos\theta - v/u)$.

19. (II) Стержень длиной L_0 покоится относительно системы отсчета S и расположен под углом θ к оси x. В системе отсчета S', движущейся вправо со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ относительно системы отсчета S, определите а) длину L стержня; б) угол θ', который он образует с осью x'.

20. (II) На Диком Западе шериф из окна поезда, идущего со скоростью 50 м/с, наблюдает дуэль между двумя поселенцами, стоящими на земле в 50 м друг от друга вдоль прямой, параллельной железной дороге. Приборы, которые имеются под рукой шерифа, показывают, что в его системе отсчета оба дуэлянта выстрелили одновременно. а) Кого из дуэлянтов шериф должен арестовать за то, что тот выстрелил первым: того (обозначим его A), мимо которого поезд проехал сначала, или того (обозначим его B), мимо которого поезд проехал потом? б) Насколько тот, кто стрелял первым, опередил того, кто выстрелил вторым? в) Кого первым настигла пуля противника?

Раздел 39.9

21. (I) Чему равна масса протона, движущегося со скоростью $v = 0{,}75c$?

22. (I) При какой скорости масса тела становится вдвое больше его массы покоя?

23. (II) При какой скорости масса тела на 1% превышает его массу покоя?

24. (II) Вторая космическая скорость для Земли равна 40000 км/ч. На сколько процентов увеличивается масса космического корабля (масса покоя $3{,}8 \cdot 10^5$ кг), летящего с такой скоростью?

25. (II) а) Чему равна скорость электрона, если его масса в 10000 раз превосходит его массу покоя? Такие скорости достигнуты в Стэнфордском линейном ускорителе (SLAC). б) Электроны в ускорителе SLAC летят в трубе длиной 3,0 км. Какова длина этой трубы в системе отсчета электронов?

26. (II) Выведите формулу, показывающую, как зависит плотность тела от его скорости v.

Раздел 39.11

27. (I) Какую энергию можно извлечь при полном превращении 1,0 мг массы в энергию? Какую массу удалось бы поднять на высоту 100 м за счет только этой энергии?

28. (I) Чему равна кинетическая энергия электрона, масса которого в 5,0 раз больше его массы покоя?

29. (I) Для химической реакции требуется подвести энергию $2{,}56 \cdot 10^4$ Дж. Насколько масса продуктов такой реакции больше массы исходных веществ?

30. (I) Вычислите энергию покоя электрона в джоулях и в мегаэлектрон-вольтах, МэВ (1 МэВ $= 1{,}60 \cdot 10^{-13}$ Дж).

31. (II) Предположим, что космический корабль с массой покоя 20000 кг ускорен до $0{,}25c$. а) Какова его кинетическая энергия? На сколько процентов вы ошибаетесь, если воспользуетесь для вычисления кинетической энергии классической формулой?

32. (II) Вычислите массу протона ($m_0 = 1{,}67 \times 10^{-27}$ кг), кинетическая энергия которого составляет половину полной энергии. Какова скорость такого протона?

33. (II) Вычислите кинетическую энергию и импульс протона ($m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг), летящего со скоростью $8{,}3 \cdot 10^7$ м/с. На сколько процентов вы ошибетесь, если воспользуетесь классическими формулами?

34. (II) Чему равны скорость и импульс протона ($m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг), кинетическая энергия которого составляет половину его энергии покоя?

35. (II) Электрон ($m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг) под действием консервативной силой ускоряется из состояния покоя до скорости v. При этом его потенциальная энергия убывает на $4{,}20 \cdot 10^{-14}$ Дж. Определите скорость v электрона.

36. (II) Сколько граммов массы пришлось бы полностью израсходовать, чтобы лампа мощностью 100 Вт могла гореть в течение 1 года?

37. (I) Сколько энергии потребовалось бы для того, чтобы расщепить ядро гелия на составные части: два протона и два нейтрона? Массы покоя протона (включая электрон), нейтрона и гелия

равны соответственно 1,00783, 1,00867 и 4,00260 а.е.м. (Величина, которую требуется определить, называется *полной энергией связи* ядра $^4_2$He.)

38. (II) Начертите график зависимости кинетической энергии от импульса для частицы с а) ненулевой и б) нулевой массой покоя.

39. (II) Определите, насколько изменится масса сферического проводника радиусом $R = 1{,}0$ м, если ему сообщить заряд $Q = +85$ мкКл. Как изменится масса из-за а) потери электронов; б) увеличения энергии ($E = mc$)?

***40.** (II) Какая индукция магнитного поля должна быть на орбите радиусом 1,0 км, по которой движутся протоны с энергией 400 ГэВ в синхротроне Фермилаба? Воспользуйтесь релятивистской формулой для массы. Масса покоя протона равна 0,938 ГэВ/c^2 (разд. 28.8).

***41.** (II) Покажите, что энергия частицы с зарядом e в синхротроне (разд. 28.8) в релятивистском пределе ($v \approx c$) определяется по формуле E(эВ) $= Brc$, где B – индукция магнитного поля, r – радиус орбиты (в единицах СИ).

42. (II) Покажите, что кинетическая энергия (КЭ) частицы с массой покоя m_0 связана с ее импульсом соотношением $p = \sqrt{(\text{КЭ})^2 + (\text{КЭ})(m_0c^2)}/c$.

43. (II) π-мезон с массой покоя m_π распадается в покое на μ-мезон (мюон) с массой покоя m_μ и нейтрино с нулевой массой покоя. Покажите, что кинетическая энергия мюона равна $\text{КЭ}_\mu = (m_\pi - m_\mu)^2c^2/2m_\pi$.

44. (III) а) В системе отсчета S частица имеет импульс $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i}$, направленный вдоль оси x. Покажите, что в системе отсчета S', движущейся относительно S со скоростью v, как показано на рис. 39.11, компоненты импульса частицы соответственно равны

$$p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$p'_y = p_y,$$

$$p'_z = p_z,$$

$$E' = \frac{E - p_xv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

(В действительности эти формулы преобразования справедливы при любом направлении импульса $\mathbf{p}$.) б) Покажите, что при преобразованиях Лоренца величина p_x, p_y, p_z, E/c преобразуются так же, как x, y, z, ct.

40 Возникновение квантовой теории. Модели атома

Вторым аспектом научной революции, потрясшей мир физики в начале XX в. (первым была специальная теория относительности Эйнштейна), стала квантовая теория. В отличие от специальной теории относительности, основные положения которой были разработаны в течение одного года одним человеком, создание революционной квантовой теории растянулось почти на три десятилетия, и в развитие новой теории внесли свой вклад многие ученые. Рождение квантовой теории датируется 1900 г., когда Планк сформулировал гипотезу квантов, а своего наивысшего расцвета она достигла в середине 20-х годов с появлением квантовой механики Шредингера и Гейзенберга, которая исключительно успешно объяснила строение вещества.

40.1. Гипотеза квантов Планка

Одним из экспериментальных фактов, не получивших объяснения к концу XIX в., был спектр излучения нагретых тел. В гл. 19 мы видели, что все тела испускают излучение, полная интенсивность которого пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры ($\sim T^4$). При нормальных температурах мы не замечаем теплового электромагнитного излучения из-за его слабой интенсивности. С повышением температуры инфракрасное излучение становится достаточно сильным, и, приблизившись к нагретому телу, мы ощущаем тепло. При еще более высоких температурах (порядка 1000 К) тела начинают светиться (вспомните хотя бы раскаленные докрасна спирали электрической печи или тостера). При температурах свыше 2000 К тела испускают желтый или беловатый свет (например, раскаленное добела железо или нить в лампе накаливания). По мере возрастания температуры максимум интенсивности испускаемого телами электромагнитного излучения смещается ко все более высоким частотам.

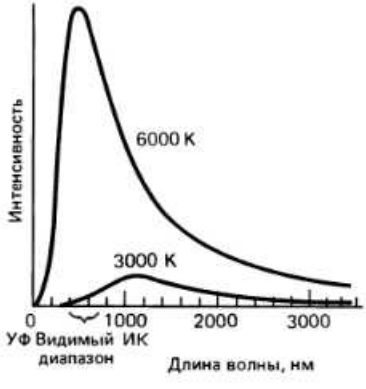


Рис. 40.1. Спектры частот, испускаемые черным телом при двух различных температурах.

На рис. 40.1 изображен спектр излучения, испускаемого нагретым плотным телом, для случая *абсолютно черного тела*. Такое тело поглощает все подающее на него излучение, а излучение, испускаемое черным телом (**излучение черного тела**), особенно легко поддается анализу. Нетрудно видеть, что его спектр содержит непрерывный диапазон

Рис. 40.2. Сравнение теорий Вина и Рэлея – Джинса с теорией Планка, давшей хорошее согласие с экспериментом.

частот. Такой непрерывный спектр испускают нагретые твердые тела или жидкости и даже плотные газы. На кривой 6000 К (рис. 40.1), соответствующей температуре Солнца (не вполне черного тела), максимум интенсивности приходится на видимую часть спектра. При более низких температурах интенсивность излучения значительно ослабевает и максимум спектра сдвигается в сторону более длинных волн; поэтому голубой край в спектре видимого света (и УФ) оказывается сравнительно слабым. Установлено, что длина волны λ_p, соответствующая максимуму спектра, связана с абсолютной температурой T соотношением

$$\lambda_p T = 2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К},$$

которое известно как *закон смещения Вина*; для температуры Солнца оно дает $\lambda_p = (2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К})/(6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{К}) = 500$ нм, что соответствует видимой части спектра (рис. 40.1).

Основная проблема, с которой физики столкнулись в 90-х годах XIX в., состояла в объяснении спектра излучения черного тела. Электромагнитная теория Максвелла предсказывала, что колеблющиеся электрические заряды должны испускать электромагнитные волны, и излучение нагретого тела могло быть обусловлено колебаниями электрических зарядов в молекулах вещества, из которого построено тело. Это объясняло причину появления излучения, но не позволяло правильно предсказать спектр испускаемого излучения. Вином (1896 г.) и Рэлеем (1900 г.) на основе классических представлений были построены две теоретические кривые. Теория теплового излучения Рэлея была впоследствии несколько переработана Джинсом и стала называться теорией Рэлея – Джинса. По мере накопления экспериментальных данных стало ясно, что ни кривая Вина, ни кривая Рэлея – Джинса не согласуются с экспериментом: кривая Вина хорошо описывала распределение интенсивности в области коротких волн, но отклонялась от эксперимента в области более длинных волн; обратное наблюдалось при сравнении теории Рэлея – Джинса с экспериментом (рис. 40.2).

Перелом наступил в конце 1900 г., когда Макс Планк (1858–1947) предложил эмпирическую формулу, прекрасно описывавшую экспериментальные данные. Затем он стал обдумывать теоретические предпосылки своей формулы и месяца через два пришел к заключению, что мог бы вывести формулу на основе нового, весьма радикального предположения (в то время еще не полностью осознанного), согласно которому энергия распределена среди молекулярных осцилляторов не непрерывно, а очень малыми дискретными порциями, связанными с частотой колебаний соотношением

$$E_{\text{мн}} = hf.$$

Величина h – постоянная, известная ныне под названием *постоянной Планка*. Она была впервые вычислена Планком, пытавшимся описать экспериментальные данные с помощью

своей формулы [1] для распределения интенсивности в спектре излучения черного тела. Современное значение постоянной Планка равно

$h = (6{,}62176 \pm 0{,}000036) \cdot 10^{-34}$ Дж·с,
или (в большинстве расчетов)

$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Гипотеза Планка предполагала, что энергия молекулярных колебаний может быть только целым, кратным hf:

$$E = nhf, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{40.1}$$

Эту гипотезу часто называют *гипотезой квантов Планка* («квант» означает «определенное количество», «порция»), но, когда Планк впервые выдвинул ее, она не привлекла к себе особого внимания. Современникам поначалу казалось, что Планк рассматривает свою гипотезу скорее как математический прием, позволяющий получить «правильный ответ», и не усматривает в ней открытие, сравнимое по своему значению с открытием Ньютона. Сам Планк не оставлял попыток найти классическое объяснение введенной им постоянной h. Признание важности и принципиальной новизны совершенного Планком шага пришло несколько позднее – около 1905 г., когда другие физики, в частности Эйнштейн, ввели понятие «поле».

В современной трактовке гипотеза квантов (40.1) утверждает, что энергия E колебаний атома или молекулы может быть равна hf, $2hf$, $3hf$ и т. д., но не существует колебаний с энергией в промежутке между двумя последовательными целыми, кратными hf. Это означает, что энергия не непрерывна, как полагали на протяжении столетий, а *квантуется*, т. е. существует лишь в строго определенных дискретных порциях. Наименьшая порция энергии hf называется *квантом энергии*. Гипотезу квантов можно сформулировать и как утверждение о том, что на атомно-молекулярном уровне колебания происходят не с любыми амплитудами. Допустимые значения амплитуды связаны с частотой колебаний f.

40.2. Фотонная (корпускулярная) теория света и фотоэлектрический эффект

В том же 1905 г., когда была впервые опубликована специальная теория относительности, Эйнштейн выдвинул смелую идею, обобщавшую гипотезу квантов, и положил ее в основу новой теории света. Гипотеза Планка утверждала, что колебательная энергия атомов излучающего тела квантована, т. е. $E = nhf$. Эйнштейн развил

[1] Формула Планка для распределения интенсивности в спектре излучения черного тела имеет вид

$$\text{Интенсивность} = f(\lambda, T) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

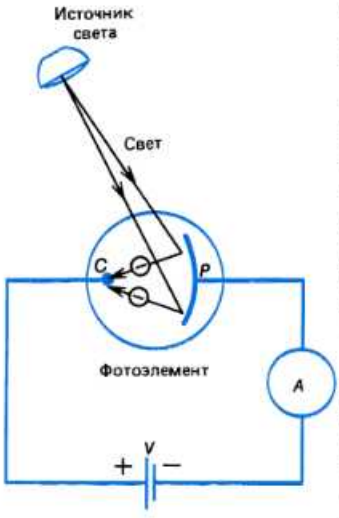


Рис. 40.3. Фотоэлектрический эффект.

идею Планка, предположив, что если энергия атомных осцилляторов квантована, то для сохранения энергии свет должен испускаться атомами порциями, или квантами, с энергией

$$E = hf, \tag{40.2}$$

где h – также постоянная Планка. Так как любой свет испускается источником, гипотеза Эйнштейна означала, что *свет распространяется в виде крохотных частиц*, или **фотонов**, как их стали называть, а не волн. Подобная гипотеза также означала радикальный отход от классических представлений. Эйнштейн предложил и простой способ проверки квантовой теории света: количественные измерения фотоэлектрического эффекта.

Под **фотоэлектрическим эффектом** (или фотоэффектом) понимают испускание электронов с поверхности металла при действии на нее света. (Фотоэффект присущ и другим материалам, но особенно легко наблюдается у металлов.) Прибор для наблюдения фотоэффекта изображен на рис. 40.3. Металлическая пластина P и небольшой электрод C, помещенные в откачанную до глубокого вакуума стеклянную трубку, образуют *фотоэлемент*. Электроды соединены с амперметром A и источником ЭДС, как показано на рисунке. Когда фотоэлемент находится в темноте, стрелка амперметра стоит на нуле. Но когда на пластинку падает свет достаточно высокой частоты, амперметр показывает, что в цепи течет ток. Объяснить, каким образом замыкается цепь, мы можем, предположив, что электроны в трубке движутся от пластинки к «коллектору» C, как показано на рис. 40.3.

Испускание электронов с поверхности металла под действием падающего на нее излучения соответствует представлению о свете как об электромагнитной волне, так как электрическое поле электромагнитной волны воздействует на электроны в металле и вырывает некоторые из них. Но Эйнштейн обратил внимание на то, что предсказываемые волновой теорией и фотонной (корпускулярной) теорией света детали фотоэффекта существенно расходятся. Например, прибор на рис. 40.3 позволяет среди прочего измерять максимальную кинетическую энергию ($КЭ_{макс}$) испущенных электронов. Это можно сделать, меняя напряжение источника и переключая клеммы так, чтобы электрод C был отрицательным, а электрод P – положительным. Испускаемые электродом P электроны будут отталкиваться отрицательным электродом, но если обратная разность потенциалов достаточно мала, то наиболее быстрые электроны все же достигнут электрод C и в цепи будет течь ток. При повышении обратной разности потенциалов рано или поздно наступит момент, когда ток прекратится: у электронов не хватит энергии, чтобы достичь электрод C. Соответствующий потенциал V_0 называется запирающим. Измеряя его, мы можем

определить $КЭ_{макс}$:

$$КЭ_{макс} = eV_0.$$

Какой из теорий света – волновой или фотонной (корпускулярной) – следует отдать предпочтение? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим некоторые детали фотоэффекта. Начнем с волновой теории и будем предполагать, что пластина освещается монохроматическим светом. Световая волна характеризуется двумя важными параметрами: интенсивностью и частотой (или длиной волны). Волновая теория света предсказывает, что при изменении этих характеристик происходят следующие явления.

1. При увеличении интенсивности света число выбитых электронов и их максимальная кинетическая энергия должны возрастать, так как более высокая интенсивность света означает бóльшую амплитуду электрического поля, а более сильное электрическое поле вырывает электроны с большей скоростью.

2. Частота света не должна влиять на кинетическую энергию выбитых электронов. $КЭ_{макс}$ зависит только от интенсивности падающего света.

Совершенно иное предсказывает фотонная (корпускулярная) теория. Прежде всего заметим, что в монохроматическом пучке все фотоны имеют одинаковую энергию (равную hf). Увеличение интенсивности светового пучка означает увеличение числа фотонов в пучке, но не сказывается на их энергии, если частота остается неизменной. Согласно теории Эйнштейна, электрон выбивается с поверхности металла при соударении с ним отдельного фотона. При этом вся энергия фотона передается электрону, а фотон перестает существовать. Так как электроны удерживаются в металле силами притяжения, для выбивания электрона с поверхности металла требуется минимальная энергия W_0 (которая называется *работой выхода* и составляет для большинства металлов величину порядка нескольких электрон-вольт). Если частота f падающего света мала, то энергия hf меньше W_0 и энергии фотона недостаточно для того, чтобы выбить электрон с поверхности металла. Если же $hf > W_0$, то электроны вылетают с поверхности металла, причем энергия в таком процессе сохраняется, т. е. энергия (фотона) hf равна кинетической энергии вылетевшего электрона плюс W – работа по выбиванию электрона из металла:

$$hf = КЭ + W. \qquad (40.3а)$$

Для наиболее слабо связанных электронов величина W совпадает с W_0 и КЭ переходит в $КЭ_{макс}$:

$$hf = КЭ_{макс} + W_0. \qquad (40.3б)$$

Многим электронам для вылета из металла необходимо сообщить энергию, превышающую W_0. Кинетическая энергия таких электронов будет меньше $КЭ_{макс}$.

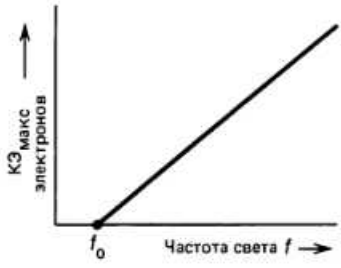


Рис. 40.4. Фотоэлектрический эффект: максимальная кинетическая энергия испускаемых электронов линейно возрастает с увеличением частоты падающего света. При $f < f_0$ испускания электронов не происходит.

На основе этих соображений фотонная (корпускулярная) теория света предсказывает следующее.

1. Увеличение интенсивности света означает увеличение числа налетающих фотонов, которые выбивают с поверхности металла больше электронов. Но так как энергия каждого фотона одна и та же, максимальная кинетическая энергия электрона не изменяется.

2. При увеличении частоты падающего света максимальная кинетическая энергия электронов возрастает линейно по формуле (40.3б), т. е.

$$КЭ_{макс} = hf - W_0 .$$

График этой зависимости представлен на рис. 40.4.

3. Если частота f меньше граничной частоты f_0, при которой $hf_0 = W_0$, то выбивания электронов с поверхности металла не происходит.

Эти предсказания фотонной (корпускулярной) теории сильно отличаются от предсказаний волновой теории. В 1913–1914 гг. тщательные опыты по изучению фотоэффекта были проведены Р. А. Милликеном. Полученные им результаты оказались в полном согласии с фотонной теорией света, предложенной А. Эйнштейном.

Серия других экспериментов, выполненных в начале 20-х годов XX в, также подтвердила фотонную теорию. В одном из этих экспериментов (1923 г.) был обнаружен **эффект Комптона**, названный так в честь его открывателя А. Г. Комптона (1892–1962). Комптон занимался изучением рассеяния коротковолнового света (в действительности рентгеновского излучения) различными веществами и обнаружил, что частота рассеянного света меньше частоты падающего света. Уменьшение частоты указывало на потерю энергии. Комптон показал, что обнаруженный им эффект можно объяснить на основе фотонной теории света, т. е. соударениями налетающих фотонов с электронами вещества (рис. 40.5). Применив к столкновениям фотонов и электронов законы сохранения энергии и импульса, Комптон установил, что энергии рассеянных фотонов, предсказываемые фотонной теорией, полностью согласуются с экспериментальными данными (см. задачу 18). Таким образом, оказалось, что фотонная (корпускулярная) теория света покоится на прочном экспериментальном основании.

Рис. 40.5. Эффект Комптона.

Пример 40.1. Вычислите энергию фотона голубого света ($\lambda = 450$ нм).

Решение. Так как $f = c/\lambda$, получаем

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})(3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})}{(4{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м})} =$$

$$= 4{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{Дж},$$

или $(4{,}4 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж})/(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж/эВ}) = 2{,}7$ эВ.

Пример 40.2. Чему равны максимальная кинетическая энергия и скорость электрона, выбитого с поверхности натрия (работа выхода $W_0 = 2{,}28$ эВ) светом с длиной волны а) 410 нм; б) 550 нм?

Решение. а) Если $\lambda = 410$ нм, то $hf = hc/\lambda = 4{,}85 \cdot 10^{-19}$ Дж, или 3,03 эВ. Из соотношения (40.3б) находим, что $КЭ_{макс} = 3{,}03$ эВ $- 2{,}28$ эВ $= 0{,}75$ эВ, или $1{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Так как $КЭ = \frac{1}{2}mv^2$, где $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, получаем

$$v = \sqrt{2КЭ/m} = 5{,}1 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Обратите внимание на то, что при вычислении v мы воспользовались нерелятивистским выражением для кинетической энергии. Если бы скорость v оказалась больше, чем $0{,}1c$, то погрешность наших вычислений превысила бы 1% (или около того) и нам пришлось бы вычислить скорость заново, используя релятивистскую формулу (39.12) для кинетической энергии.

б) Если $\lambda = 550$ нм, то $hf = 3{,}60 \times 10^{-19}$ Дж $= 2{,}25$ эВ. Так как энергия такого фотона меньше работы выхода, электроны с поверхности металла, на которую падает свет с $\lambda = 550$ нм, не вылетают.

Пример 40.3. Принято считать, что при *фотосинтезе* (процессе превращения углекислого газа CO_2 в углеводороды под действием энергии солнечного света в некоторых растительных пигментах, например в хлорофилле) на превращение одной молекулы CO_2 в углеводород и O_2 требуется около 9 фотонов. Предположим, что длина волны падающего на растение света равна $\lambda = 670$ нм (хлорофилл сильнее всего поглощает в диапазоне длин волн от 650 до 700 нм). Каков КПД фотосинтеза? Обратная химическая реакция характеризуется энерговыделением 4,9 эВ на одну молекулу CO_2.

Решение. Суммарная энергия девяти фотонов (с энергией $hf = hc/\lambda$ каждый) равна $(9)(6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с$)(3{,}0 \cdot 10^8$ м/с$)/(6{,}7 \cdot 10^{-7}$ м$) = 2{,}7 \cdot 10^{-18}$ Дж, или 17 эВ. Следовательно, КПД фотосинтеза составляет (4,9 эВ/17 эВ) = 29%.

40.3. Фотоны и рождение пар

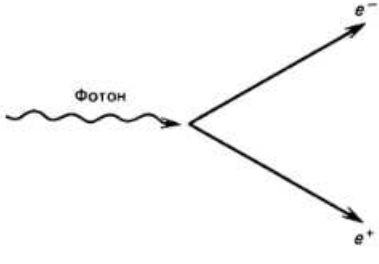


Рис. 40.6. Рождение пары: фотон аннигилирует, порождая электрон и позитрон.

Фотон – подлинно релятивистская частица; он всегда движется со скоростью света. Следовательно, массу, энергию и импульс фотона мы должны вычислять по формулам специальной теории относительности. Масса m любой частицы определяется выражением $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Так как у фотона $v = c$, знаменатель правой части обращается в нуль. Следовательно, либо масса покоя m_0 фотона также равна нулю, либо его энергия $E = mc^2$ бесконечна. Разумеется, фотон никогда не бывает в состоянии покоя. Импульс фотона может быть вычислен по формуле (39.13) с $m_0 = 0$:

$$p = \frac{E}{c}.$$

Так как $E = hf$, импульс фотона связан с его длиной волны соотношением

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (40.4)$$

Фотон обладает энергией, которая может превращаться в массу. Чаще всего это происходит при рождении позитрона и электрона (рис. 40.6). (Позитрон имеет такую же массу, как и электрон, но отличается от электрона

противоположным по знаку зарядом: $+e$[1].) Такой процесс называется **рождением** (электрон-позитронной) **пары** и сопровождается исчезновением фотона. Рождение пары – пример того, как масса покоя возникает из энергии в полном соответствии с формулой Эйнштейна $E = mc^2$. Обратите внимание на то, что фотон не может образовать только один электрон, так как при этом нарушился бы закон сохранения электрического заряда.

Пример 40.4. Чему равны минимальная энергия и длина волны фотона, способного рождать электрон-позитронную пару?

Решение. Так как $E = mc^2$, энергия фотона равна $E = 2(9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг})(3{,}0 \times \times 10^8\ \text{м/с})^2 = 1{,}64 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж}$, или 1,02 МэВ. Фотон с меньшей энергией не может образовать электрон-позитронную пару. Так как $E = hf = hc/\lambda$, длина волны фотона с энергией 1,02 МэВ равна

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{м/с})}{(1{,}64 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж})} = 1{,}2 \cdot 10^{-12}\ \text{м},$$

т. е. 0,0012 нм. Это очень короткая длина волны. В спектре электромагнитного излучения такие фотоны соответствуют области гамма-излучения (или очень жесткого рентгеновского излучения).

Рождение электрон-позитронной пары не может происходить в пустом пространстве, так как энергия и импульс в этом случае не сохранялись бы одновременно. В примере 40.4 сохраняется энергия, но электрон-позитронная пара не имеет импульса, т. е. не уносит начальный импульс фотона. Можно показать, что при любой энергии в этом процессе должно принимать участие дополнительное массивное тело, например атомное ядро, уносящее определенный импульс.

40.4. Корпускулярно-волновой дуализм. Принцип дополнительности

Фотоэффект, эффект Комптона и другие эксперименты (см., например, в разд. 41.8 о рентгеновском излучении) составили прочную экспериментальную основу фотонной (или корпускулярной) теории света. Но как быть с классическими опытами Юнга и других исследователей (гл. 36 и 37) по интерференции и дифракции, доказавшими, что волновая теория света также имеет прочную экспериментальную основу?

Перед нами дилемма: одни эксперименты свидетельствуют о том, что свет ведет себя как волна, другие – что свет ведет себя как поток частиц. На первый взгляд кажется, что волновая и корпускулярная (фотонная) тео-

[1] Позитроны недолго существуют, так как при столкновении позитрона и электрона обе частицы аннигилируют с образованием двух или более фотонов. Процесс аннигиляции пары является одним из примеров, подтверждающих формулу Эйнштейна $E = mc^2$.

рии света несовместимы, но обе теории подтверждаются экспериментом. В конце концов физики пришли к заключению, что двойственную природу света следует принять как непреложный факт. Именно эту двойственную природу света имеют в виду, когда говорят о **корпускулярно-волновом дуализме**. Ясно, что свет оказался более сложным явлением, чем просто волна или поток частиц.

Для выхода из этой ситуации великий датский физик Нильс Бор (1885–1962) выдвинул свой знаменитый **принцип дополнительности**. Этот принцип утверждает, что для объяснения данного эксперимента следует использовать либо волновые, либо корпускулярные представления о природе света, но не те и другие одновременно. Однако для полного понимания природы света необходимо учитывать как волновые, так и корпускулярные свойства света. Оба эти аспекта свойств света взаимно дополняют друг друга.

Наглядно представить корпускулярно-волновой дуализм невозможно. Мы не в силах вообразить сочетание волновых свойств с корпускулярными. Следует осознать, что волновой и корпускулярный аспекты поведения света – это различные стороны его природы, проявляющиеся в экспериментах.

Отчасти трудности восприятия дуализма обусловлены особенностями нашего мышления. Наши зрительные образы (или модели[1)]) основаны на том, что мы видим в повседневной жизни. Мы применяем к свету понятия волны и частицы, поскольку опыт подсказывает нам, что в окружающем мире энергию переносят либо волны, либо частицы. Мы не можем непосредственно узреть, что представляет собой свет – волну или частицу, и полагаемся на косвенные эксперименты. Для трактовки этих экспериментов мы используем либо представление о волнах, либо представление о частицах. Но и то и другое – это абстракции нашего разума. Когда мы пытаемся постичь, что же такое свет «на самом деле», речь идет, в сущности, о наглядных представлениях. Между тем не существует причин, по которым природа света должна следовать одной из этих моделей (или зрительных образов), заимствованных из макроскопического мира. «Истинная» природа света (если подобное выражение имеет смысл) не поддается наглядной интерпретации. В лучшем случае мы лишь сознаем, что наше знание ограничено косвенными экспериментами и что свет на повседневном языке и в рамках обычных представлений обнаруживает свойства и волны, и частицы.

[1)] В гл. 1 мы упоминали о том, что модель представляет собой своего рода аналогию или мысленный образ, в котором нечто обычное используется для описания определенного круга явлений на более глубоком уровне, чем тот, который доступен непосредственному восприятию.

Следует подчеркнуть, что формула Эйнштейна $E = hf$ сама по себе связывает корпускулярные и волновые свойства света: энергия в E в левой части равенства относится к частице, а частота f в правой части – к соответствующей волне.

40.5. Волновая природа материи

В 1923 г. Луи де Бройль (1892–1987) расширил наше представление о корпускулярно-волновом дуализме. Глубоко осознавая существующую в природе симметрию, он высказал гипотезу о том, что поскольку свет ведет себя в одних случаях как волна, в других – как частица, то и объекты природы, которые мы считаем частицами (электроны и другие материальные тела), могли бы обладать волновыми свойствами. Де Бройль предположил, что длина волны, отвечающая материальной частице, связана с ее импульсом так же, как в случае фотона[1)], т.е. соотношением (40.4): $p = h/\lambda$. Иначе говоря, длина волны λ, отвечающая частице с массой m, которая движется со скоростью v, определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \tag{40.5}$$

Величину λ иногда называют *дебройлевской длиной волны* частицы.

Пример 40.5. Вычислите дебройлевскую длину волны мяча массой 0,20 кг, летящего со скоростью 15 м/с.

Решение. $\lambda = h/mv = (6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})/(0{,}20\ \text{кг})(15\ \text{м/с}) = 2{,}2 \cdot 10^{-34}\ \text{м}$.

Это чрезвычайно малая длина волны. Даже при крайне низких скоростях, скажем 10^{-4} м/с, дебройлевская длина волны составляла бы примерно 10^{-29} м. Дебройлевская длина волны обычного тела слишком мала, чтобы ее можно было обнаружить и измерить. Дело в том, что типичные волновые свойства – интерференция и дифракция – проявляются только тогда, когда размеры предметов или щелей сравнимы по своей величине с длиной волны. Но нам неизвестны предметы или щели, на которых могли бы дифрагировать волны с длиной волны 10^{-30} м, поэтому волновые свойства обычных тел обнаружить не удается.

Другое дело, если речь идет о крошечных элементарных частицах типа электронов. Так как масса m входит

[1)] Де Бройль выбрал именно такую зависимость (а не формулу, скажем, $E = hf$, которая несовместима с $p = h/\lambda$ для частицы, обладающей массой покоя), поскольку она позволяла ему привести аргументы в пользу модели атома Бора. Подробнее об этом см. в разд. 40.10.

в знаменатель формулы (40.5), определяющей дебройлевскую длину волны, очень малой массе соответствует большая длина волны.

Пример 40.6. Определите дебройлевскую длину волны электрона, ускоренного разностью потенциалов 100 В.

Решение. Предположим, что скорость электрона намного меньше скорости света c, и мы можем воспользоваться нерелятивистской механикой. (Если бы это предположение было неверно, то нам пришлось бы повторить все вычисления по релятивистским формулам.) Приращение кинетической энергии равно уменьшению потенциальной энергии, поэтому

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \text{ и}$$

$$v = \sqrt{2eV/m} =$$

$$= \sqrt{(2)(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(100\ \text{В})/(9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг})} =$$

$$= 5{,}9\cdot 10^{6}\ \text{м/с},$$

откуда

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{(6{,}6\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с})}{(9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг})(5{,}9\cdot 10^{6}\ \text{м/с})} =$$

$$= 1{,}2\cdot 10^{-10}\ \text{м},$$

или 0,12 нм.

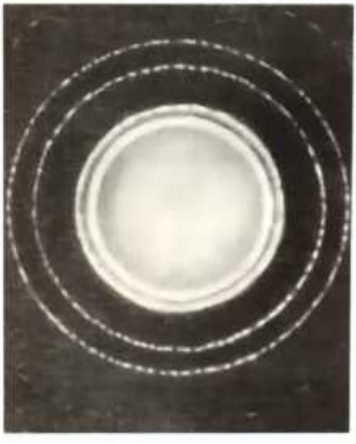


Рис. 40.7. Дифракционная картина, запечатленная на фотопленке при рассеянии электронов на алюминиевой фольге (воспроизводится с разрешения Education Development Center, Newton, Mass., 02160).

Из приведенного примера видно, что электронам могут соответствовать длины волн порядка 10^{-10} м. Хотя это очень короткие волны, их можно обнаружить экспериментально: межатомные расстояния в кристалле того же порядка величины (10^{-10} м), и регулярно расположенные атомы кристалла можно использовать в качестве дифракционной решетки, как в случае рентгеновского излучения (разд. 37.11). Решающий эксперимент был выполнен К. Дж. Дэвиссоном и Л. Х. Джермером. Исследуя рассеяние электронов от поверхности металлического кристалла, в начале 1927 г. они обнаружили в распределении рассеянных электронов регулярные пики. Когда эти пики были интерпретированы на основе дифракционной картины, оказалось, что длина волны дифрагирующего электрона совпадает с предсказанной де Бройлем [формула (40.5)]. В том же году Дж. П. Томсон (сын Дж. Дж. Томсона), используя другую схему эксперимента, также обнаружил дифракцию электронов (рис. 40.7). Как показали более поздние эксперименты, протоны, нейтроны и другие частицы также обладают волновыми свойствами.

Таким образом, корпускулярно-волновой дуализм относится не только к свету, но и к материальным телам. На них распространяется и принцип дополнительности. Иначе говоря, свойства материи, в том числе и электрона, включают и корпускулярный, и волновой аспекты. Следует, однако, еще раз подчеркнуть, что корпускулярно-волновой дуализм невозможно представить наглядно.

Можно было бы спросить: «Что же такое электрон?» В первых экспериментах Дж. Дж. Томсона (разд. 28.5) наблюдалось свечение в трубке, смещавшееся при наложении магнитного поля. Наиболее простое объяснение результатов этого и других экспериментов было основано на допущении о существовании крошечных, отрицательно

заряженных частиц, которые мы называем теперь электронами. Однако никто непосредственно не наблюдал электрон. Рисунки, на которых электроны изображаются маленькими шариками с отрицательным зарядом,– просто удобные картинки (имеющие мало общего с действительностью). И опять нам остается лишь положиться на экспериментальные данные, из которых одни лучше соответствуют корпускулярной модели, а другие – волновой. Но и эти модели не более чем картинки, к которым мы прибегаем, чтобы перенести представления макроскопического мира на микромир атома. Нет никаких оснований ожидать, что эти модели отражают сущность электрона. Таким образом, мы используем волновое и корпускулярное представления (в зависимости от того, какое из них лучше описывает интересующую нас ситуацию), чтобы иметь способ описания происходящего. Не следует думать, будто электрон представляет собой волну или частицу. Можно было бы сказать, что электрон – это совокупность его свойств, которые могут быть измерены на опыте. Именно это имел в виду Бертран Расселл, когда назвал электрон «логической конструкцией»[1)].

*40.6. Электронные микроскопы

Представление о том, что электрон обладает волновыми свойствами, легло в основу разработки *электронного микроскопа*, позволяющего достичь гораздо больших увеличений, чем оптический микроскоп. На рис. 40.8 и 40.9 представлены принципиальные схемы электронных микроскопов двух типов: *просвечивающего электронного микроскопа*, дающего двумерное изображение, и разработанного позднее *растрового (сканирующего) электронного микроскопа*, дающего трехмерное изображение. В электронных микроскопах обоих типов объективом и окуляром служат магнитные линзы – магнитные поля, создаваемые током в обмотках катушек. Фотографии, полученные с помощью просвечивающего и сканирующего электронных микроскопов, представлены на рис. 40.10.

Электронам, ускоренным разностью потенциалов до энергий порядка 10^5 эВ, соответствуют длины волн примерно 0,004 нм. Такой порядок имеет и максимальная

[1)] В действительности на протяжении нескольких десятилетий после создания основ квантовой механики, с которыми читатель познакомится в дальнейшем, велись яростные споры о смысле дуализма. Одни «противники» квантовой механики видели в нем проявление «ограниченности» человеческого познания, другие – лишь выражение идеалистических воззрений на устройство мира. При этом не обошлось, конечно, без наклейки «клеймящих ярлыков». – *Прим. ред.*

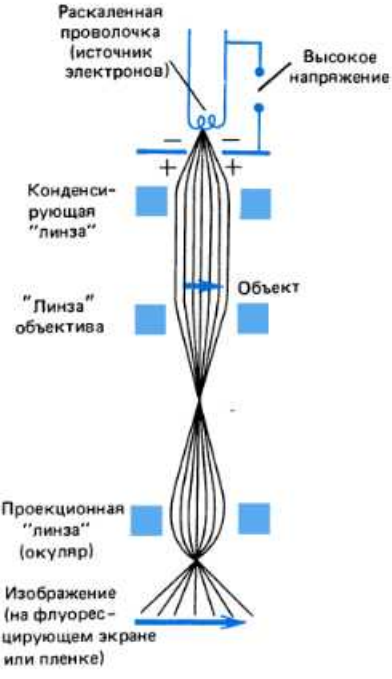


Рис. 40.8. Просвечивающий электронный микроскоп. Квадратами обозначены сечения катушек, служащих магнитными линзами: они искривляют траектории электронов и фокусируют их на объекте.

разрешающая способность при этих длинах волн (разд. 37.4 и 37.5), но на практике аберрации магнитных линз ограничивают разрешающую способность просвечивающих электронных микроскопов величинами 0,2–0,5 нм. Но и такое разрешение примерно в 10^3 раз выше достижимого с помощью оптических микроскопов и соответствует полезному увеличению около $10^6\times$. Такие увеличения

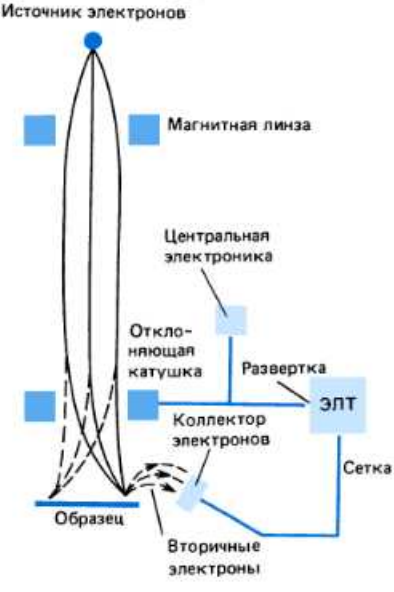
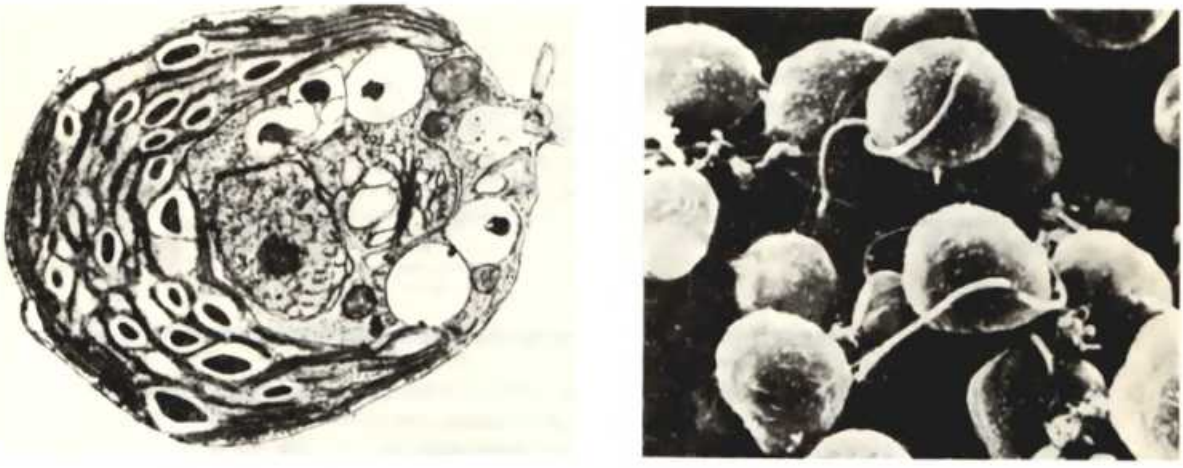


Рис. 40.9. Растровый электронный микроскоп. Магнитные отклоняющие катушки позволяют перемещать электронный луч по образцу. Вторичные электроны, возникающие при бомбардировке образца первичными электронами, попадают в коллектор и, модулируя интенсивность луча в электронно-лучевой трубке (ЭЛТ), формируют изображение.



а *б*

Рис. 40.10. Микрофотография зеленой водоросли Tetraspora sp., выполненная с помощью просвечивающего (*а*) и растрового (*б*) электронных микроскопов (воспроизводится с разрешения Дж. Д. Пикетт-Хипса).

трудно достижимы. Обычно просвечивающие электронные микроскопы обеспечивают увеличение от $10^4\times$ до $10^5\times$. Максимальная разрешающая способность сканирующего электронного микроскопа несколько ниже, в лучшем случае 5–10 нм.

40.7. Первые модели атома

Рис. 40.11. Модель атома Дж. Дж. Томсона («сливовый пудинг»).

Представление об атомном строении вещества к началу XX в. принималось большинством ученых. После открытия электрона в 90-х годах XIX в. физики стали представлять себе атом как наделенный внутренней структурой и рассматривать электроны в качестве составного элемента этой структуры. В оставшейся части этой главы и в следующей главе мы проследим за эволюцией современных представлений о строении атома и развитием неразрывно связанной с ними квантовой теории[1)].

В 90-х годах XIX в. широкое распространение получила модель атома в виде однородной, положительно заряжённой сферы, в которую, как сливы в пудинге, вкраплены отрицательно заряженные электроны (рис. 40.11). Вскоре после своего открытия электрона в 1897 г. Дж. Дж. Томсон высказал соображения, по ко-

[1)] Некоторые читатели могут сказать: «Сообщите нам факты, которые считаются твердо установленными, и не забивайте наши головы историческими экскурсами и устаревшими теориями». Такой прагматический подход не только игнорирует творческий аспект науки и создает превратное представление о ее развитии, но и не позволяет понять многого: невозможно усвоить современные представления о строении атома и квантовую теорию, не проанализировав понятий, которые привели к ним.

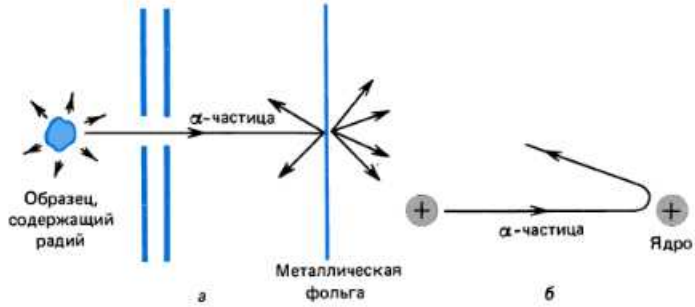


Рис. 40.12. *а* – схема экспериментальной установки в опыте Резерфорда: испускаемые радием α-частицы ударяются о металлическую фольгу и некоторые частицы при этом отражаются; *б* – отражение α-частицы интерпретируется как отталкивание от тяжелого положительно заряженного ядра.

торым эта модель должна была содержать движущиеся электроны.

Примерно в 1911 г. Эрнест Резерфорд (1871–1937) с сотрудниками выполнил эксперименты, результаты которых противоречили модели Дж. Дж. Томсона. В этих экспериментах пучок положительно заряженных альфа-частиц направлялся на тонкую металлическую (золотую) фольгу (рис. 40.12, *а*). (Открытые незадолго до того α-частицы испускаются некоторыми радиоактивными веществами. Вскоре было обнаружено, что α-частицы представляют собой ионизованные атомы гелия; гл. 42.) Исходя из модели Томсона, следовало ожидать, что альфа-частицы не будут отклоняться на большие углы, так как электроны гораздо легче альфа-частиц и последние не встречают массивного скопления положительных зарядов, которое могло бы сильно отталкивать их. Полученные Резерфордом экспериментальные результаты противоречили этим предсказаниям. Большинство α-частиц свободно проходило сквозь фольгу, как если бы та представляла собой в основном пустое пространство. Что же касается α-частиц, отклонившихся от первоначального направления движения, то небольшое количество рассеивалось на очень большие углы – иногда почти на 180°. Такое, по мнению Резерфорда, могло происходить только в том случае, если положительно заряженные α-частицы испытали отталкивание массивного положительного заряда, сосредоточенного в очень малой области пространства (рис. 40.12, *б*). Резерфорд предположил, что атом состоит из крохотного, но массивного, положительно заряженного ядра (в котором сосредоточено 99,9% массы атома), окруженного на некотором расстоянии электронами. Электроны должны были обращаться вокруг ядра (подобно планетам вокруг Солнца), так как если бы они покоились, то упали бы на ядро под действием электрического притяжения (рис. 40.13). По оценкам Резерфорда, размеры ядра должны быть порядка 10^{-15}–10^{-14} м. Из кинетической теории и особенно из проведенного Эйнштейном анализа броуновского движения (разд. 17.1) размеры атома оценивались величиной порядка 10^{-10} м. Это означало, что электроны должны находиться от ядра на расстоянии

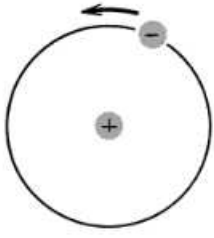


Рис. 40.13. Модель атома Резерфорда: электроны обращаются вокруг крохотного, положительно заряженного ядра (масштаб не выдержан). Значительную часть атома занимает пустое пространство.

примерно от 10 000 до 100 000 поперечников ядра, т. е. основную часть атома составляет пустое пространство.

Планетарная модель атома Резерфорда явилась значительным шагом на пути к современным представлениям о строении атома. Однако она не была совершенной моделью, и некоторые принципиальные проблемы, как мы увидим из дальнейшего, оставались нерешенными.

40.8. Атомные спектры – ключ к строению атома

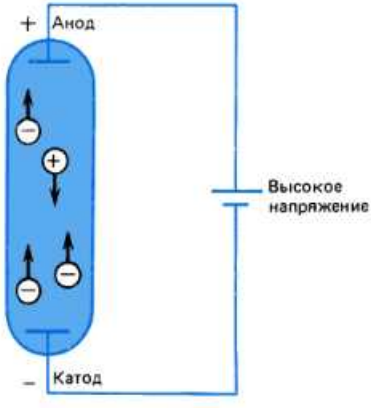


Рис. 40.14. Газоразрядная трубка.

В начале этой главы мы уже говорили о том, что нагретые твердые тела (а также жидкости и плотные газы) испускают свечение с непрерывным спектром. Предполагается, что это излучение обусловлено колебаниями атомов и молекул, которые зависят в основном от взаимодействия каждого атома или молекулы со своими соседями.

Разреженные газы также можно возбудить, с тем чтобы они испускали свет. Этого можно достичь, сильно нагрев их или приложив к газоразрядной трубке с газом под низким давлением (рис. 40.14) высокое напряжение. Излучение возбужденных газов наблюдалось еще в начале XIX в., и было обнаружено, что спектр излучения разреженных газов является не непрерывным, а *дискретным*. Так как возбужденные газы испускают свет только определенных длин волн, в спектроскопе или спектрометре наблюдается не непрерывный, а *линейчатый спектр*. Линейчатые спектры некоторых химических элементов в видимой области спектра представлены на рис. 37.19 (цветная вклейка). Каждое вещество обладает своим, характерным только для него *спектром испускания*, который служит своего рода «отпечатком пальцев», позволяющим идентифицировать газ. Как мы уже знаем (гл. 37), если излучение с непрерывным спектром проходит через газ, то в спектре появятся темные линии, соответствующие светлым линиям в линейчатом спектре испускания данного газа. Такой спектр (с темными линиями) называется *спектром поглощения*. Было установлено, что газы поглощают свет на тех же частотах, на которых они излучают. С помощью пленки, чувствительной к ультрафиолетовому и инфракрасному излучениям, было обнаружено, что газы испускают и поглощают дискретные частоты не только в видимой области, но и за ее пределами.

Для нас особенно важно, что линейчатые спектры испускаются (или поглощаются) газами при не очень высокой плотности. В таких разреженных газах атомы находятся в среднем на больших расстояниях друг от друга, поэтому свет должны испускать или поглощать

Рис. 40.15. Бальмеровская серия линий в спектре водорода.

изолированные атомы, а не атомы, взаимодействующие между собой, как это имеет место в твердых телах, жидкостях или плотных газах. Следовательно, линейчатые спектры служат своего рода ключом к строению атома: любая теория строения атома должна объяснить, почему атомы испускают излучение только с определенными дискретными длинами волн, и предсказать частоты, на которых происходит излучение.

Водород представляет собой простейший атом: вокруг ядра обращается только один электрон. У водорода самый простой спектр. В спектрах большинства атомов трудно заметить какую-нибудь закономерность. Расстояния между линиями в спектре водорода уменьшаются в соответствии с простым законом (рис. 40.15). В 1885 г. Дж. Дж. Бальмер (1825–1898) показал, что четыре видимые линии в спектре водорода (соответствующие, согласно измерениям, длинам волн 656, 486, 434 и 410 нм) следуют формуле

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 3, 4, \ldots, \tag{40.6}$$

где для первых четырех линий n принимает значение 3, 4, 5 и 6, R – *постоянная Ридберга*[1] ($R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$). Впоследствии было обнаружено, что спектральные линии **серии Бальмера продолжаются в УФ-области и заканчиваются при** $\lambda = 365$ нм, как показано на рис. 40.15. Формула Бальмера (40.6) остается в силе и для спектральных линий, соответствующих бóльшим целочисленным значениям n. Вблизи $\lambda = 365$ нм линии сгущаются настолько, что их трудно различать, но предел серии Бальмера при $\lambda = 365$ нм соответствует $n = \infty$ (т. е. $1/n^2 = 0$ в формуле).

Выполненные несколько позднее исследования спектра водорода показали, что в УФ- и ИК-областях имеются другие серии линий, аналогичные по своей структуре серии Бальмера, но с другими длинами волн. Оказалось, что каждая из этих серий может быть описана формулой, напоминающей формулу (40.6), в которой вместо $(1/2)^2$ стоит $(1/1)^2$, $(1/3)^2$, $(1/4)^2$ и т. д. Например, так называемая *серия Лаймана* содержит линии с длинами волн от 91 до 122 нм, которые описываются формулой

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

В *серии Пашена* длины волн соответствуют формуле

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 4, 5, \ldots$$

Сама по себе модель Резерфорда оказалась не в

[1] В честь И. Р. Ридберга, обобщившего формулу Бальмера на другие химические элементы.

состоянии объяснить линейчатые спектры атомов. Были и другие трудности. В модели Резерфорда электроны должны обращаться вокруг атомного ядра, и, так как их орбиты криволинейны, электроны двигаются с ускорением. Следовательно, как и любые ускоренно движущиеся электрические заряды (гл. 33), электроны в модели Резерфорда должны излучать свет. А так как полная энергия сохраняется, энергия электрона должна уменьшаться, чтобы компенсировать излучение. Следовательно, электроны должны падать по спирали на ядро. Но по мере падения на ядро частота обращения электронов (и испускаемого ими излучения) должна возрастать. Резюмируя, можно сказать, что модель Резерфорда столкнулась с двумя основными трудностями: 1) из нее следовало, что испускаемый атомами свет должен иметь непрерывный спектр, тогда как наблюдаемые спектры были линейчатыми; 2) из нее следовало, что атомы нестабильны (электроны быстро падают по спирали на атомное ядро), между тем как атомы, как правило, стабильны, поскольку стабильна окружающая нас материя.

Было ясно, что модель Резерфорда не в состоянии объяснить строение атома. Ее требовалось видоизменить, и необходимое усовершенствование внес Нильс Бор, выдвинувший важную дополнительную идею – гипотезу квантов.

40.9. Модель Бора

В 1912 г. Бор несколько месяцев работал в лаборатории Резерфорда. Он пришел к убеждению, что планетарная модель атома Резерфорда в основном верна. В то же время интуиция подсказывала ему, что для избавления от трудностей в планетарную модель атома необходимо каким-то образом включить делавшую тогда первые шаги квантовую теорию. Работы Планка и Эйнштейна показали, что в нагретых твердых телах энергия колеблющихся электрических зарядов изменяется дискретными порциями при переходе из одного дискретного состояния в другое с испусканием кванта излучения. Возможно, рассуждал Бор, что электроны в атомах также не могут терять энергию непрерывно, а должны совершать при этом квантовые переходы. Работая над своей теорией, Бор в следующем году постулировал, что электроны движутся вокруг ядра по круговым орбитам, среди которых разрешенными являются только определенные орбиты. Бор постулировал также, что электрон на каждой орбите обладает определенной энергией и движется по орбите, *не излучая энергии* (хотя этот постулат Бора противоречил классической электродинамике). Допустимые, или разрешенные, орбиты Бор назвал поэтому ста-

ционарными состояниями. Он предположил, что испускание света происходит, когда электрон переходит из одного стационарного состояния в другое с меньшей энергией. При каждом переходе испускается один световой фотон, энергия которого (в силу закона сохранения энергии) определяется соотношением

$$hf = E_u - E_l, \tag{40.7}$$

где E_u – энергия верхнего состояния, а E_l – энергия нижнего состояния.

Затем Бор поставил перед собой задачу определить энергии, соответствующие электронным орбитам, так как спектр испускаемого излучения можно было затем вычислить по формуле (40.7). Познакомившись в начале 1913 г. с формулой Бальмера, Бор понял, что у него в руках ключ к решению проблемы, который он искал. Бор быстро установил, что его теория согласуется с формулой Бальмера, если момент импульса (угловой момент) электрона L равен целому, кратному $h/2\pi$, т.е. $n \cdot h/2\pi$. Из гл. 10 мы знаем, что момент импульса частицы с массой m, движущейся по окружности радиусом r со скоростью v, равен $L = mvr$; поэтому *условие квантования* Бора имеет вид

$$L = mvr_n = n\frac{h}{2\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{40.8}$$

Здесь n – целое положительное число, r_n – радиус n-й разрешенной орбиты. Эти орбиты нумерованы числами 1, 2, 3, ... в зависимости от значения n, которое называется **квантовым числом** орбиты.

Соотношение (40.8) не имело под собой прочной теоретической основы. Бору необходимо было какое-то «условие квантования». Он попробовал воспользоваться условием $E = hf$ (где E – энергия электрона на орбите), но не получил согласия с экспериментом. Единственным аргументом для выбора соотношения (40.8) в качестве условия квантования было то, что это соотношение позволяло достичь согласия с наблюдаемыми спектрами. Рассмотрим теперь условие квантования Бора.

На электрон, движущийся по круговой орбите радиусом r_n, действует центростремительное ускорение v^2/r_n, создаваемое в соответствии с законом Кулона силой притяжения между отрицательно заряженным электроном и положительно заряженным ядром:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)(e)}{r^2}$$

(рис. 40.16). Заряд электрона равен $q_1 = -e$, заряд ядра $q_2 = +Ze$, где Z – число положительных элементарных

зарядов[1] (протонов). Для атома водорода $Z = +1$.

По второму закону Ньютона $F = ma$. Подставляя $a = v^2/r_n$ и вместо F силу из закона Кулона, получаем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n^2} = \frac{mv^2}{r_n}.$$

Разрешив это равенство относительно r_n и подставив скорость v из условия квантования (40.8) ($v = nh/2\pi mr_n$), мы приходим к следующему соотношению для r_n:

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2} = \frac{Ze^2 4\pi^2 mr_n^2}{4\pi\varepsilon_0 n^2 h^2}.$$

Разрешив его относительно r_n (радиус n-й орбиты входит в обе части равенства), получаем

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi m Z e^2}. \qquad (40.9)$$

Это соотношение задает радиусы разрешенных орбит в боровской модели атома водорода. Ближайшей к ядру орбите соответствует $n = 1$, и для атома водорода ($Z = 1$) радиус первой орбиты равен

$$r_1 = \frac{(1)^2 (6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с})^2 (8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)}{(3{,}14)(9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{кг})(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})^2},$$

или

$$r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}\ \text{м}. \qquad (40.10)$$

Этот наименьший радиус r_1 иногда называют **боровским радиусом**. Из соотношения (40.9) видно, что радиусы более далеких от ядра орбит[2] возрастают как n^2:

$r_2 = 4r_1 = 2{,}11 \cdot 10^{-10}$ м,

$r_3 = 9r_1 = 4{,}74 \cdot 10^{-10}$ м

и т. д. Первые четыре орбиты изображены на рис. 40.17.

Как показывают приводимые ниже вычисления, на каждой из допустимых орбит электрон обладает вполне определенной энергией. Полная энергия равна сумме ки-

---

[1] Мы включили Z в свой вывод, чтобы иметь возможность рассматривать не только водород, но и другие одноэлектронные (водородоподобные) атомы, например ионы He^+ ($Z = 2$) и Li^{2+} ($Z = 3$). Гелий в нейтральном состоянии имеет два электрона. Если одного электрона недостает, то ион He^+ состоит из одного электрона, обращающегося вокруг ядра с зарядом $+2e$. Аналогичным образом дважды ионизованный ион лития Li^{2+} имеет лишь один электрон, и при этом $Z = 3$.

[2] Не следует, однако, думать, что подобные точно определенные орбиты действительно существуют. Модель Бора – всего лишь модель, а не реальность. Как будет показано в гл. 41, от представления об электронах, обращающихся вокруг ядра по классическим орбитам, вскоре пришлось отказаться. Ныне, говоря об электронах, подразумевают «облако», по которому электроны распределены (гл. 41).

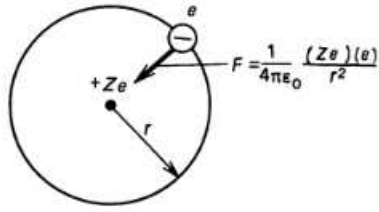


Рис. 40.16. Электрическая сила (закон Кулона) удерживает отрицательно заряженные электроны на орбите вокруг положительно заряженного ядра.

нетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия электрона определяется выражением $U = qV = -eV$, где V–потенциал точечного заряда $+Ze$, $V = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q/r) = (1/4\pi\varepsilon_0)(Ze/r)$ [см. формулу (24.5)],

$$U = -eV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Ze^2}{r}\right).$$

Полная энергия E_n электрона на n-й орбите радиусом r_n равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n}.$$

Подставляя в правую часть v из соотношения (40.8) и r_n из соотношения (40.9), получаем

$$E_n = -\left(\frac{Z^2e^4m}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{40.11}$$

Для водорода ($Z = 1$) низший энергетический уровень соответствует $n = 1$. При подстановке в формулу (40.11) численных значений находим величину E_1:

$$E_1 = -2{,}17 \cdot 10^{-18}\ \text{Дж} = 13{,}6\ \text{эВ}$$

(джоули мы перевели в электрон-вольты, как это принято в атомной физике; $1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж). Так как n^2 входит в знаменатель формулы (40.11), энергии более высоких орбит соответственно равны

$$E_n = -\frac{13{,}6\ \text{эВ}}{n^2}.$$

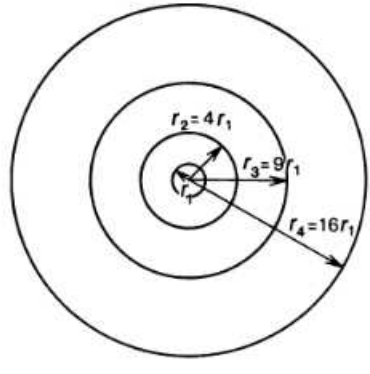


Рис. 40.17. Возможные орбиты в модели атома водорода, предложенной Бором: $r_1 = 0{,}527 \cdot 10^{-10}$ м.

Например,

$$E_2 = -\frac{13{,}6\ \text{эВ}}{4} = -3{,}40\ \text{эВ},$$

$$E_3 = -\frac{13{,}6\ \text{эВ}}{9} = -1{,}51\ \text{эВ}.$$

Из соотношения (40.11) видно, что в боровской модели квантуются не только радиусы орбит, но и энергии. Заметим, что, хотя энергия удаленных орбит меньше по абсолютной величине, все энергии отрицательны. Поэтому энергия $-3{,}4$ эВ больше энергии $-13{,}6$ эВ. Следовательно, ближайшая к ядру орбита (r_1) имеет самую низкую энергию. Отрицательность энергии объясняется выбором нуля при отсчете потенциальной энергии: потенциальная энергия двух точечных зарядов $U = (1/4\pi\varepsilon_0)(q_1 q_2/r)$ считается равной нулю, если расстояние между ними бесконечно. Электрон, не имеющий кинетической энергии и не связанный с атомом, обладает энергией $E = 0$, что соответствует $n = \infty$. Электронам, связанным в атоме, отвечает $E < 0$. Чтобы вырвать электрон из атома, требуется затратить энергию, называемую **энергией связи** или **энергией ионизации**. Следовательно, если у свободного электрона $E = 0$, то энергия электрона, связанного в атоме, должна быть отрицательна: $E < 0$. Энергия ионизации водорода, согласно измерениям, равна 13,6 эВ. Она соответствует вырыванию электрона из низшего состояния $E_1 = -13{,}6$ эВ при переходе в состояния с $E = 0$, когда электрон свободен.

Различные разрешенные значения энергии обычно изображаются на схеме энергетических уровней[1)] в виде горизонтальных линий. Для водорода такая схема уровней показана на рис. 40.18. Квантовое число n, нумерующее радиусы орбит, вместе с тем нумерует и уровни энергии. Низший *энергетический уровень* (или *состояние*) имеет энергию E_1 и называется **основным состоянием**. Более высокие состояния (с E_2, E_3, ...) называются **возбужденными состояниями**. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода может находиться на любом из разрешенных уровней. Но он никогда не может оказаться между этими уровнями, например при энергии $-9{,}0$ эВ. При комнатной температуре почти все атомы водорода находятся в основном состоянии. При более высоких температурах или в электрическом разряде, где происходит множество столкновений между свободными электронами и атомами, многие электроны переходят в возбужденные состояния. Электрон в возбужденном со-

---

[1)] Обратите внимание на то, что выше уровня $E = 0$ электрон может иметь любую энергию: там он свободен. Именно поэтому на схеме уровней энергии (рис. 40.18) выше $E = 0$ показан непрерывный спектр состояний.

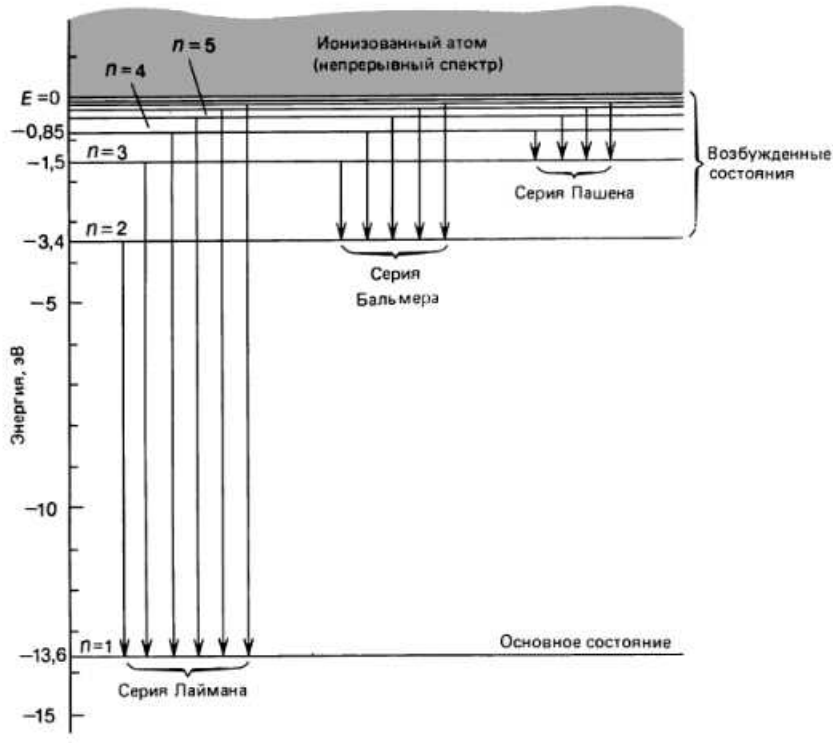


Рис. 40.18. Схема уровней энергии в атоме водорода, объясняющая происхождение спектральных линий в сериях Лаймана, Бальмера и Пашена.

стоянии может перейти в более низкое состояние, испуская при этом фотон. Этими переходами в рамках боровской модели и обусловлены спектры испускания возбужденных газов. Вертикальными стрелками на рис. 40.18 указаны переходы, соответствующие различным наблюдаемым спектральным линиям. Например, переход электрона с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$ соответствует линии 656 нм серии Бальмера, а переход с уровня $n = 4$ на уровень $n = 2$ – линии 486 нм (рис. 40.15). Соотношение (40.7) вместе с соотношением (40.11) позволяет предсказать длины волн всех спектральных линий. Так как $hf = hc/\lambda$, получаем

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{hf}{hc} = \frac{1}{hc}(E_n - E_{n'}),$$

или

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{(n)^2}\right), \qquad (40.12)$$

где квантовое число n относится к верхнему, а n' – к нижнему состоянию. Эта теоретическая формула имеет такой же вид, как и эмпирическая формула Бальмера (40.6) с $n' = 2$. Таким образом, серия Бальмера соответствует в боровской модели переходам электронов на второй энергетический уровень. Аналогично $n' = 1$ со-

ответствует серии Лаймана, а $n' = 3$ – серии Пашена (рис. 40.18). Постоянная $(Z^2 e^4 m / 8\varepsilon_0^2 h^3 c)$ в формуле (40.12), вычисленная при $Z = 1$, совпадает с экспериментально измеренным значением постоянной Ридберга $R = 1{,}0974 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$.

Выдающийся успех теории Бора заключается в том, что она давала модель, позволявшую объяснить, почему атомы испускают линейчатые спектры, и точно предсказать для атома водорода длины волн испускаемого излучения. Теория Бора позволяла объяснить и спектры поглощения: столкновение фотона (с надлежащей длиной волны) с атомом приводит к переходу электрона с одного энергетического уровня на другой, более высокий. Закон сохранения энергии требует, чтобы фотон обладал энергией, равной разности энергий уровней. Этим объясняется, почему непрерывный спектр, проходя через газ, давал темные линии (поглощения) на тех же самых частотах, что и линии испускания.

Теория Бора гарантировала также стабильность атомов, вводя ее своего рода декретом: основное состояние является низшим состоянием электрона и не существует более низкого энергетического уровня, на который электрон мог бы перейти из основного состояния с испусканием излучения. Наконец, теория Бора, как было показано выше, точно предсказывает энергию ионизации водорода 13,6 эВ.

Пример 40.7. С помощью схемы энергетических уровней (рис. 40.18) определите длину волны первой лаймановской линии, соответствующей переходу из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$.

Решение. В этом случае $hf = E_2 - E_1 = 13{,}6\ \text{эВ} - 3{,}4\ \text{эВ} = 10{,}2\ \text{эВ} = 1{,}63 \cdot 10^{-18}$ Дж. Так как $\lambda = c/f$, получаем

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})\,(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{м/с})}{1{,}63 \cdot 10^{-18}\ \text{Дж}} = 1{,}22 \cdot 10^{-7}\ \text{м},$$

или 122 нм (УФ).

Пример 40.8. Определите в боровской модели длину волны света, испускаемого атомом водорода при переходе с энергетического уровня $n = 6$ на энергетический уровень $n = 2$.

Решение. Воспользуемся формулой (40.12) или эквивалентной формулой (40.6) с $R = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$:

$$\frac{1}{\lambda} = (1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1})\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = 2{,}44 \cdot 10^6\ \text{м}^{-1},$$

откуда $\lambda = 4{,}10 \cdot 10^{-7}$ м, или 410 нм. Это четвертая линия в серии Бальмера (рис. 40.15) (фиолетового цвета).

Пример 40.9. С помощью боровской модели определите энергию ионизации иона He^+ с одним электроном. Вычислите также минимальную длину волны фотона, при которой происходит ионизация.

Решение. Требуется определить энергию, необходимую для перевода электрона из основного в свободное состояние с $E = 0$. Энергия основного состояния He^+ вычисляется по формуле (40.11) при $n = 1$ и $Z = 2$. Так как все величины в формуле (40.11), за исключением атомного номера Z, равного 2, а не 1, имеют такие же значения, как для атома во-

дорода, мы заключаем, что энергия E_1 у He^+ в $Z^2 = 2^2 = 4$ раза больше, чем у водорода, т. е.

$$E_1 = 4(-13{,}6\ \text{эВ}) = -54{,}4\ \text{эВ}.$$

Следовательно, чтобы ионизовать ион He^+, необходима энергия 54,4 эВ (эта оценка согласуется с экспериментом). Энергия фотона с минимальной длиной волны, при которой происходит ионизация, равна $hf = 54{,}4$ эВ, а минимальная длина волны $\lambda = c/f = hc/hf = (6{,}63 \times \times 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с})(3{,}00\cdot 10^8\ \text{м/с})/(54{,}4\ \text{эВ}) \times \times (1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{Дж/эВ}) = 22{,}8$ нм. Ион He^+ может быть ионизован и в том случае, если он поглотит фотон с большей энергией (с длиной волны короче 22,8 нм); ставший при этом свободным электрон будет иметь некоторую кинетическую энергию.

В последнем примере энергия E_1 у иона He^+ в четыре раза ниже, чем у атома водорода. Схема энергетических уровней иона He^+ выглядит так же, как в случае атома водорода (рис. 40.18), с тем лишь различием, что численные значения энергии каждого уровня оказываются в четыре раза больше. Следует подчеркнуть, что речь идет о *ионе* He^+. Нормальный (нейтральный) атом гелия имеет два электрона, и его спектр сильно отличается от спектра атома водорода.

Необходимо особо отметить, что Бор принял ряд существенных допущений, противоречащих классическим представлениям. Так, он предположил, что электроны на разрешенных орбитах не излучают, хотя и движутся ускоренно, и ввел допущение о квантовании момента импульса. Кроме того, Бор ничего не мог сказать о том, как движется электрон при переходе с одного энергетического уровня на другой. Вместе с тем не было никаких оснований ожидать, что в микромире атомных электронов все обстоит так же, как в мире обычных макроскопических тел. Тем не менее Бор был убежден, что там, где квантовая теория имеет дело с макроскопическим миром, ее предсказания должны совпадать с результатами классической теории. В этом суть *принципа соответствия*, о котором мы уже упоминали, когда речь шла о специальной теории относительности (разд. 39.12). Принцип соответствия справедлив в случае теории атома водорода, предложенной Бором. Размеры орбит и значения энергии сильно различаются при $n = 1$ и $n = 2$. Но при $n = = 100\,000\,000$ и $n = 100\,000\,001$ орбиты едва различимы и по размерам, и по энергиям (рис. 40.18). Квантовые переходы между далекими от ядра орбитами с приближающимися к макроскопическим размерами едва заметны. Размеры таких орбит меняются практически непрерывно, т. е. аналогичны тем, с которыми мы имеем дело в макромире.

40.10. Гипотеза де Бройля

Теория Бора по своей природе была в основном теорией, созданной специально для объяснения данной проблемы (*ad hoc*): допущения, из которых она исходила, были

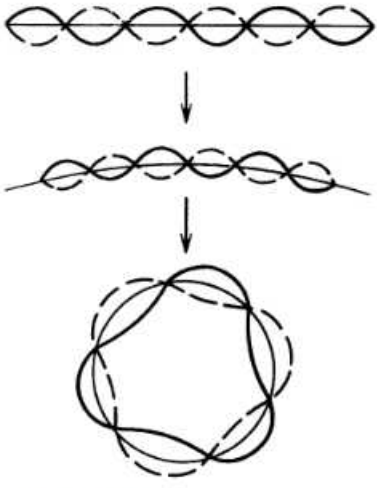


Рис. 40.19. Обычная стоячая волна в сравнении с круговой стоячей волной.

сделаны с расчетом, чтобы ее предсказания соответствовали эксперименту. Спустя 10 лет после появления теории Бора ее обоснование было найдено де Бройлем.

В разд. 40.5 мы упоминали о том, что в 1923 г. Луи де Бройль высказал гипотезу о волновой природе материальных частиц, таких, как электроны, и что спустя несколько лет его гипотеза была подтверждена экспериментально.

Один из исходных аргументов де Бройля в пользу волновой природы электронов состоял в том, что его предположение давало объяснение боровской теории атома водорода.

Согласно де Бройлю, частице с массой m, движущейся со скоростью v, соответствует длина волны λ, определяемая по формуле (40.5):

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Каждому электрону в атоме, считал де Бройль, в действительности соответствует стоячая волна. В гл. 15 мы видели, что если ущипнуть струну скрипки или гитары, то в ней возбудится большое число волн самой различной длины. Но лишь сравнительно немногие из них не будут затухать – это волны с узлами на концах. Они представляют собой *резонансные* гармоники, или моды колебаний, струны. Все остальные волны, отражаясь от концов, интерферируют друг с другом, и их амплитуды быстро затухают. Так как электроны в теории Бора движутся по круговым орбитам, де Бройль высказал предположение, что электронам соответствуют *круговые* стоячие волны, которые «замыкаются» на себя (рис. 40.19). Если длина волны такова, что не позволяет волне «замкнуться» (рис. 40.20), то на круговой орбите происходит ослабляющая интерференция, и волна быстро затухает. Следовательно, не затухают только волны, у которых на круговой орбите укладывается целое число длин волн (рис. 40.21). Длина круговой боровской орбиты радиусом r_n равна $2\pi r_n$, поэтому

$$2\pi r_n = n\lambda, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Подставляя $\lambda = h/mv$, получаем

$$2\pi r_n = \frac{nh}{mv},$$

или

$$mvr_n = \frac{nh}{2\pi}.$$

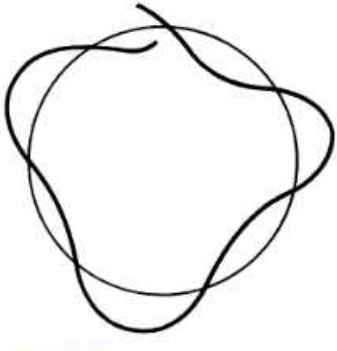


Рис. 40.20. Если волна не замыкается (и, следовательно, интерферирует сама с собой), то она быстро затухает.

Последнее соотношение представляет собой не что иное, как *условие квантования* (40.8), введенное Бором *ad hoc*. Именно на этом условии основан вывод о дискретных орбитах и уровнях энергии. Тем самым гипотеза де

Рис. 40.21. Стоячие круговые волны при двух, трех и пяти длинах волн на окружности; n – число длин волн, укладывающихся на окружности, есть вместе с тем квантовое число.

Бройля позволяет объяснить квантование орбит и состояний в боровской модели: и то и другое обусловлено волновой природой электронов и существованием только резонансных стоячих волн. Отсюда следует, что *корпускулярно-волновой дуализм* заложен в самой структуре атома.

Не следует думать, однако, что круговые стоячие волны на рис. 40.21 – это траектории, которым следуют электроны. В боровской модели атома водорода электрон, рассматриваемый как частица, движется по круговой орбите. С другой стороны, круговая волна соответствует *амплитуде* электронной волны, и на рис. 40.21 показано, каким образом амплитуда волны распределена вдоль круговой орбиты частицы.

Теория Бора дала хорошее согласие с экспериментом для водорода и одноэлектронных ионов. Для многоэлектронных атомов она оказалась не столь успешной. Эту и другие проблемы теории Бора мы обсудим в следующей главе, где будет показано, как радикально новая теория – квантовая механика – позволила наконец решить проблему строения атома и привела к совершенно другой картине атома: представление об электронах, движущихся по строго определенным орбитам, уступило место представлению об электронных «облаках». Эта новая (ныне общепризнанная) теория – квантовая механика – позволила совершенно иначе взглянуть на фундаментальные механизмы, лежащие в основе физических процессов.

Заключение

Начало квантовой теории было положено *гипотезой квантов*, которая утверждает, что молекулярные колебания квантуются, т. е. их энергия E может быть только целым, кратным hf, где h – постоянная Планка, f – собственная частота колебаний: $E = nhf$ (n – целое число). Эта гипотеза позволила объяснить распределение интенсивности в спектре излучения черного тела при высоких температурах.

Эйнштейн предложил считать, что при определенных условиях свет испускается и поглощается квантами (частицами), получившими название *фотонов*, причем энергия каждого фотона равна

$$E = hf.$$

Эйнштейну принадлежит идея экспериментальной проверки фотонной (корпускулярной) теории света на фотоэффекте. Фотонная теория утверждает, что каждый фотон, обладая достаточной энергией, может выбить из вещества электрон. Максимальная энергия вылетающего электрона линейно зависит от частоты падающего света. Фотонная теория света подтверждается также эффектом Комптона и *рождением электрон-позитронных пар.*

Под корпускулярно-волновым дуализмом мы понимаем, что свет и вещество (например, электроны) обладают как волновыми, так и корпускулярными свойствами. Длина волны, соответствующая материальному телу, есть

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad \text{где } mv - \text{импульс тела.}$$

Принцип дополнительности утверждает, что полное понимание природы света и материи требует учета как волновых, так и корпускулярных свойств.

К числу первых моделей атома относятся модифицированная модель сливового пудинга Томсона и планетарная (ядерная) модель Резерфорда. Созданная для объяснения обратного рассеяния α-частиц в тонких металлических фольгах модель Резерфорда исходит из предположения о том, что атом состоит из массивного, положительно заряженного ядра, окруженного (на относительно больших расстояниях) электронами.

Для объяснения линейчатых спектров атомов, а также стабильности атомов Бор предложил теорию, которая постулировала, что 1) электроны в атоме могут двигаться только по определенным орбитам с квантованным моментом импульса (вследствие этого разрешены только дискретные значения радиуса и энергии); 2) электрон в *стационарном состоянии* не излучает; 3) при переходе в более низкое состояние электрон испускает фотон, энергия которого равна разности энергий начального и конечного состояний; 4) момент импульса L электронов в атоме квантуется согласно правилу $L = nh/2\pi$, где n – целое число, называемое *квантовым числом*. Состояние атома водорода с $n = 1$ называется *основным состоянием* (его энергия $E_1 = -13{,}6$ эВ); более высокие значения n соответствуют *возбужденным состояниям* (их энергии $E_n = -13{,}6/n^2$ эВ). Атомы возбуждаются и переходят в эти состояния с более высокой энергией (по сравнению с основным) в результате столкновений с другими атомами или электронами, а также при поглощении фотона с надлежащей частотой.

Гипотеза де Бройля о том, что электрону и другим частицам соответствует длина волны $\lambda = h/mv$, позволила объяснить квантование боровских орбит на основе корпускулярно-волнового дуализма: разрешенные орбиты соответствуют стоячим волнам, длина волны которых укладывается на круговой орбите целое число раз.

Вопросы

1. Что можно сказать об относительной температуре желтоватых, красноватых и голубоватых звезд?
2. Если все тела излучают энергию, то почему мы не видим их в темноте?
3. Испускает ли нить лампы накаливания при температуре 2500 К такой же белый свет, как Солнце при температуре 6000 К? Объясните.
4. Хорошим приближением к абсолютно черному телу может служить небольшое отверстие в замкнутой полости. Объясните. (Подсказка: примером такой модели черного тела служит зрачок глаза.)
5. Покажите, что постоянная Планка измеряется в тех же единицах, что и момент импульса.
6. Почему ювелиры предпочитают рассматривать бриллианты при дневном, а не при искусственном освещении?
7. «Ортохроматическая» фотопленка не чувствительна к красному свету. Объясните, на чем это основано с точки зрения фотонной теории света.
8. При замене одного металла другим пороговая длина волны фотоэффекта возрастает. Что можно сказать о работе выхода этих двух металлов?
9. УФ-излучение вызывает ожоги кожи, тогда как видимый свет ожогов не вызывает. Объясните.
10. Объясните, почему существование граничной частоты фотоэффекта свидетельствует в большей мере в пользу корпускулярной, чем волновой теории света.
11. Рассмотрим точечный источник света. Как изменяется освещенность с расстоянием от источника с точки зрения а) волновой и б) корпускулярной (фотонной) теории света? Можно ли, опираясь на закон изменения освещенности, сделать выбор между волновой и корпускулярной теориями света?
12. Рентгеновский фотон (квант рентгеновского излучения) рассеивается на электроне. Изменяется ли при этом его длина волны? Если изменяется, то как: возрастает или убывает?
13. Объясните, каким образом цепь с фотоэлементом, изображенную на рис. 40.3, можно использовать в качестве а) сигнализации; б) детектора дыма; в) фотоэкспонометра; г) спектрофотометра (разд. 37.8); д) прибора для звукозаписи на пленку.
14. Почему мы говорим, что свет обладает волновыми свойствами? Почему мы говорим, что свет обладает корпускулярными свойствами?
15. Почему мы говорим, что электроны обладают волновыми свойствами? Почему мы говорим, что электроны обладают корпускулярными свойствами?
16. Чем фотон отличается от электрона? Перечислите подробно все различия.
17. Электрон и протон движутся с одинаковой скоростью. Какой из этих частиц соответствует меньшая длина волны?
18. Может ли дебройлевская длина волны какой-нибудь частицы быть больше размеров самой частицы? А меньше? Существует ли прямая взаимосвязь между размерами частицы и ее дебройлевской длиной волны?
19. Какой должна быть постоянная Планка h, чтобы квантовые эффекты стали наблюдаемыми в макроскопическом мире?
20. Что удерживает электроны и не позволяет им разлететься в планетарной модели атома Резерфорда?
21. Какие среды испускают линейчатый спектр: а) газы; б) жидкости; в) твердые тела? Какие испускают непрерывный спектр?
22. Почему не испускает света кислород O_2 в окружающем нас воздухе?
23. Как узнать, есть ли кислород на Солнце?
24. Когда свет с широким диапазоном длин волн проходит через газообразный водород при комнатной температуре, то наблюдаются ли линии поглощения только серии Лаймана? Почему не наблюдаются линии поглощения других серий?
25. Объясните, почему сгущающиеся энергетические уровни у верхнего края на рис. 40.18 соответствуют сгущающимся спектральным линиям в левой части рис. 40.15.
26. Укажите различия между моделью атома Резерфорда и теорией Бора.
27. Будут ли два электрона в атоме гелия в среднем ближе к ядру или дальше от ядра, чем электрон в атоме водорода? Почему?
28. Почему в спектре водорода так много линий, если у атома водорода всего лишь один электрон?
29. Почему в спектре водорода линии серии Бальмера наблюдались и были проанализированы раньше, чем линии серий Лаймана или Пашена?
30. Объясните на основе закона сохранения импульса, почему фотоны, испускаемые ато-

мом водорода, имеют чуть меньшую энергию, чем предсказывает формула (40.7)?

31. Верно ли, что потенциальная энергия электрона в атоме водорода отрицательна и по абсолютной величине больше кинетической энергии, как утверждает теория Бора? Что в действительности это означает?

Задачи

Раздел 40.1

1. (I) Молекула хлористого водорода HCl колеблется с собственной частотой $8{,}1 \cdot 10^{13}$ Гц. Чему равна разность разрешенных значений энергии колебаний (в джоулях или электронвольтах)?

2. (I) а) При какой температуре максимум распределения интенсивности в спектре черного тела приходится на длину волны 1,0 нм? б) На какую длину волны приходится максимум распределения интенсивности в спектре черного тела при температуре 800 К?

3. (II) Детские качели имеют собственную частоту 0,40 Гц. а) Чему равна разность разрешенных значений энергии (в джоулях)? б) Чему равно квантовое число n качелей массой 20 кг (суммарная масса качелей и ребенка), если они в наивысшей точке поднимаются на 30 см над наинизшей точкой? в) Каково относительное изменение в энергии при переходе с уровня с квантовым числом n на уровень с квантовым числом $n + 1$? Заметно ли в этом случае квантование?

4. (III) Формула Планка для интенсивности излучения имеет вид

$$f(\lambda, T) = \frac{8\pi hc\,\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

где $f(\lambda, T)$ – энергия, излучаемая в 1 с с единичной площадки в единичном интервале длин волн в окрестности длины волны λ при абсолютной температуре T. (По существу, график этой зависимости изображен на рис. 40.1 и 40.2.) а) Докажите, что закон смещения Вина следует из формулы Планка. б) Определите значение постоянной Планка h по экспериментальному значению $\lambda_p T$, приведенному в тексте. в) Интегрируя формулу Планка по всем длинам волн, выведите закон Стефана – Больцмана [пропорциональность излучаемой мощности четвертой степени абсолютной температуры; см. формулу (19.3)], т. е. покажите, что $\int f(\lambda, T)\,d\lambda \sim T^4$.

Раздел 40.2

5. (I) Чему равна энергия фотона с длиной волны а) 400 нм, б) 700 нм и в) фотонов, генерируемых радиостанцией с частотной модуляцией на частоте 100 МГц?

6. (I) Чему равна наибольшая длина волны света, способного выбить электроны из металла с работой выхода 2,3 эВ?

7. (I) Работа выхода для бария равна 2,48 эВ. Чему равна максимальная кинетическая энергия электронов, если на металл падает свет с длиной волны 480 нм? Чему равна скорость электронов?

8. (I) Когда УФ-свет с длиной волны 280 нм падает на поверхность металла, максимальная кинетическая энергия испускаемых электронов равна 0,85 эВ. Чему равна работа выхода металла?

9. (II) Покажите, что энергия E (в электронвольтах) фотона с длиной волны λ (в метрах) может быть вычислена по формуле $E = 1{,}24 \cdot 10^{-6}/\lambda$.

10. (II) Интенсивность солнечного света, достигающего поверхности Земли, составляет 1300 Вт/м^2. Скольким фотонам на 1 см^2/с соответствует эта величина? При вычислениях примите среднюю длину волны равной 550 нм.

11. (II) Пороговая длина волны для испускания электронов с данной поверхности равна 380 нм. Чему будет равна максимальная кинетическая энергия испущенных с поверхности электронов, если длина волны падающего света изменится и станет равной а) 480 нм; б) 280 нм?

12. (II) Фотопленка особого типа обладает чувствительностью только к свету с длиной волны короче 640 нм. Какая энергия (ккал/моль) необходима для инициирования химической реакции в этой пленке?

13. (II) Электрическая лампа мощностью 100 Вт испускает 3,0% потребляемой энергии в форме видимого света (средняя длина волны 550 нм) равномерно по всем направлениям. Сколько фотонов видимого света попадает за 1 с в зрачок наблюдателя (диаметр зрачка 4,0 мм), находящегося на расстоянии 10 км от лампы?

14. (II) При падении света с длиной волны 230 нм на металл ток в цепи с фотоэлементом (рис. 40.3) падает до нуля при обратном напряжении 1,64 В. Чему равна работа выхода металла?

15. (II) В рентгеновской трубке (см. рис. 37.23 и описание принципа ее действия в разд. 37.11) между нитью (катодом) и мишенью приложено высокое напряжение V. Ускоренный этим напряжением электрон ударяется о мишень и тормозится (положительно заряженными ядрами), испуская при торможении один или несколько рентгеновских фотонов. а) Покажите,

что самая короткая длина волны фотона определяется соотношением

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV}.$$

б) Чему равна самая короткая длина волны рентгеновского излучения, испускаемого при соударении ускоренных электронов с экраном телевизионного кинескопа, работающего при напряжении 30 кВ?

16. (II) а) Покажите, что если два электрода в фотоэлементе (рис. 40.3) изготовлены из одного и того же материала, то максимальная кинетическая энергия электронов связана с запирающим напряжением V_0 соотношением

$$\text{КЭ}_{\text{макс}} = eV_0.$$

б) Покажите, что если два электрода фотоэлемента изготовлены из различных материалов, то

$$\text{КЭ}_{\text{макс}} = eV_0 - (W_{0e} - W_{0c}),$$

где W_{0e} – работа выхода эмиттерного электрода (P на рис. 40.3), W_{0c} – работа выхода коллекторного электрода (C на рис. 40.3).

17. (III) В эффекте Комптона фотон с длиной волны 0,100 нм претерпевает лобовое столкновение со свободным электроном и отбрасывает его назад (в направлении своего движения). Рассеянный фотон движется в обратном (относительно падающего фотона) направлении. С помощью закона сохранения энергии определите а) кинетическую энергию электрона; б) длину волны рассеянного фотона. Предполагается, что кинетическую энергию электрона можно вычислять по нерелятивистской формуле.

18. (III) С помощью закона сохранения энергии и импульса покажите, что в *эффекте Комптона* (рис. 40.5) длина волны λ' рассеянного фотона определяется выражением

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi),$$

где ϕ – угол между направлениями движения рассеянного фотона и налетающего фотона с длиной волны λ, m_0 – масса покоя электрона. При вычислениях используйте релятивистские формулы. Обратите внимание на то, что разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависит от длины волны.

Раздел 40.3

19. (I) Чему равна полная кинетическая энергия электрон-позитронной пары, образованной фотоном с энергией 3,6 МэВ?

20. (II) Чему равны импульс и эффективная масса рентгеновского фотона с длиной волны 0,10 нм?

21. (II) Чему равна минимальная энергия фотона, необходимая для рождения пары $\mu^+ - \mu^-$? Масса каждого мюона в 207 раз больше массы электрона. Чему равна длина волны такого фотона?

22. (II) Фотон образует электрон-позитронную пару. Кинетическая энергия каждой частицы равна 435 кэВ. Чему равны энергия и длина волны фотона?

Раздел 40.5

23. (I) Чему равна длина волны нейтрона ($m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг), движущегося со скоростью $2{,}5 \cdot 10^4$ м/с?

24. (II) Покажите, что если электрон и позитрон обладают одинаковой кинетической энергией, то длина волны протона короче, чем электрона.

25. (II) Вычислите отношение кинетической энергии электрона к кинетической энергии протона с одинаковой длиной волны. Предполагается, что скорости гораздо меньше скорости света.

26. (II) Пучок электронов с энергией 65 эВ рассеивается на кристалле, как при дифракции рентгеновского излучения. Максимум первого порядка наблюдается под углом $\theta = 45°$. Чему равно расстояние между плоскостями кристалла, на котором происходит дифракция электронов? (См. разд. 37.11.)

27. (II) Чему равна длина волны протона с кинетической энергией 1,0 ГэВ?

28. (II) Покажите, что длина волны частицы с массой m_0 и кинетической энергией КЭ определяется релятивистской формулой $\lambda = hc/\sqrt{(\text{КЭ})^2 + 2m_0c^2(\text{КЭ})}$.

29. (II) Чему равны кинетическая энергия и длина волны «теплового» нейтрона (находящегося в тепловом равновесии с средой при комнатной температуре; см. гл. 18)?

30. (III) Докажите, что для частицы с массой покоя m_0 (если $\lambda = h/mv$) не может выполняться соотношение $E = hf$, где E: а) кинетическая энергия, б) кинетическая энергия плюс энергия массы покоя, а $v = f\lambda$ – скорость частицы.

* Раздел 40.6

* 31. (II) Чему равен теоретический предел разрешающей способности электронного микроскопа, в котором электроны ускоряются напряжением 50 кВ? (При вычислениях используйте релятивистские формулы.)

* 32. (II) Электроны в электронном микроскопе

ускоряются напряжением 2200 В. Какая числовая апертура необходима для того, чтобы достичь разрешения 4,0 нм?

Раздел 40.7

33. (II) В одном из экспериментов Резерфорда α-частицы (с массой $6{,}68 \cdot 10^{-27}$ кг) имели кинетическую энергию 4,8 МэВ. На какое расстояние они могли приблизиться к ядру атома золота (с зарядом $+79e$)? Отдачей ядра можно пренебречь.

Раздел 40.9

34. (I) При какой максимальной кинетической энергии соударение электрона и атома водорода в основном состоянии будет заведомо упругим?

35. (I) а) Определите длину волны второй бальмеровской линии (переход из $n = 4$ в $n = 2$) по данным, приведенным на рис. 40.18. Определите также длину волны б) первой лаймановской линии; в) четвертой бальмеровской линии.

36. (I) Вычислите энергию ионизации дважды ионизованного лития Li^{2+} ($Z = 3$).

37. (I) Чему равна максимальная длина волны света, при которой возможна ионизация атома водорода в основном состоянии?

38. (I) Почти все атомы газообразного водорода при низких температурах находятся в основном состоянии. При какой минимальной частоте фотона будет происходить фотоэффект?

39. (II) Начертите схему энергетических уровней иона He^+ (рис. 40.18).

40. (II) Начертите схему энергетических уровней дважды ионизованного лития Li^{2+}.

41. (II) Насколько (в долях исходной массы) уменьшается масса атома водорода H при переходе из состояния с $n = 2$ в основное состояние с $n = 1$?

42. (II) Чему равны потенциальная и кинетическая энергии электрона в основном состоянии атома водорода?

43. (II) Возбужденный атом водорода в принципе мог бы иметь радиус 1,0 мм. Какое квантовое число n соответствует боровской орбите таких размеров? Какой была бы ее энергия?

44. (II) Вычислите отношение гравитационной и электрической сил, действующих на электрон в атоме водорода? Можно ли считать гравитационную силу пренебрежимо малой?

45. (II) Обосновано ли использование нерелятивистских формул в атоме Бора? Для проверки вычислите скорость электрона v (в долях c) в основном состоянии атома водорода.

46. (II) Предположим, что электрон связан с протоном, как в атоме водорода, но не электрической, а гравитационной силой. Какими в этом случае были бы радиус и энергия первой боровской орбиты?

47. (II) Электроны, ускоренные разностью потенциалов 12,3 В, проходят через атомарный водород при комнатной температуре. Оцените длины волн испускаемого света.

48. (II) Мезоатомы представляют собой атомы, в которых один из электронов замещен μ-мезоном (мюоном) с массой, в 207 раз большей массы электрона. Вычислите с помощью теории Бора энергию фотона, испускаемого μ-мезоном при переходе из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$ в μ-мезоатоме свинца $^{208}_{82}Pb$ (масса ядра в 208 раз больше массы протона, а заряд равен $^{+}82e$).

49. (II) *Принцип соответствия.* Покажите, что при больших n разность радиусов Δr двух соседних орбит (с квантовыми числами n и $n - 1$) удовлетворяет соотношению

$$\Delta r = r_n - r_{n-1} \approx \frac{2r_n}{n},$$

поэтому $\Delta r / r_n \to 0$ при $n \to \infty$, как того и требует принцип соответствия. Обратите внимание на то, что принцип соответствия можно проверить либо при больших n ($n \to \infty$), либо при $h \to 0$. Эквивалентны ли эти предельные переходы?

50. (III) а) Покажите, что если электрон переходит с уровня n на уровень $n - 1$ при очень больших значениях n, то частота испускаемого света равна

$$f = \frac{v}{2\pi r_n}.$$

б) Покажите, что именно эту частоту предсказывает классическая теория для электрона, обращающегося по круговой орбите радиусом r_n со скоростью v. в) Объясните, почему это отвечает принципу соответствия.

Раздел 40.10

51. (III) Предположим, что частица с массой m заключена в одномерный ящик шириной L. Согласно квантовой теории, соответствующая частице волна (с $\lambda = h/mv$) представляет собой стоячую волну с узлами на «стенках» ящика. а) Начертите, как выглядят разрешенные моды колебаний (гармоники). б) Покажите, что кинетическая энергия частицы принимает квантованные значения: КЭ $= n^2h^2/8mL^2$, где n – целое число. в) Вычислите энергию основного состояния ($n = 1$) электрона в ящике шириной $0{,}50 \cdot 10^{-10}$ м. г) Чему равна энергия основного состояния бейсбольного мяча ($m = 140$ г) в ящике шириной 0,50 м? д) Энергия основного состояния электрона в ящике равна 10 эВ. Чему равна ширина ящика?

41 Квантовая механика атомов и молекул

Боровская модель атома позволила нам составить первое (хотя и довольно грубое) представление о строении атома. Она объяснила, почему атомы испускают и поглощают свет с дискретными длинами волн, и решила проблему стабильности атомов. Вычисленные в рамках боровской модели длины волн линейчатого спектра и энергии ионизации атома водорода и одноэлектронных ионов оказались в превосходном согласии с экспериментом. Но теория Бора имела и существенные ограничения. На ее основе нельзя было предсказать линейчатые спектры более сложных атомов – даже нейтрального атома гелия всего лишь с двумя электронами. Теория Бора не смогла объяснить, почему линии испускания при более детальном изучении оказались состоящими из двух или большего числа очень близких линий (так называемая *тонкая структура*). Теория Бора не смогла также объяснить, почему одни спектральные линии ярче других. Не получили объяснения и межатомные связи в молекулах, твердых телах и жидкостях.

Теория Бора не была вполне удовлетворительной и с чисто теоретической точки зрения, поскольку представляла собой странную смесь классических и квантовых представлений. Она не обеспечила решения и проблемы корпускулярно-волнового дуализма.

Мы упоминаем об этих недостатках теории Бора отнюдь не для того, чтобы умалить ее значение, ибо теория Бора была и остается знаменательной вехой в истории науки. Перечень недостатков теории Бора необходим лишь для того, чтобы пояснить, почему в начале 20-х годов многие физики стали все более отчетливо сознавать необходимость новой, более последовательной теории. И она не заставила себя ждать. Менее чем через два года после того, как де Бройль выдвинул гипотезу о волнах материи, Эрвин Шредингер (1887–1961) и Вернер Гейзенберг (1901–1976) независимо разработали новую, более общую теорию. Избранные ими подходы были совершенно различны, но, как выяснилось вскоре, оказались полностью совместимыми.

41.1. Квантовая механика – новая теория

Новая теория, получившая название **квантовой механики**, воссоздала из корпускулярно-волнового дуализма единую последовательную теорию. Как теория квантовая механика имела необычайный успех. Она блестяще, до мельчайших деталей решила проблему спектров сложных атомов; она объяснила относительную яркость спектральных линий и образование молекул из атомов; она представляет собой несравненно более общую теорию, которая охватила всю совокупность квантовых явлений от излучения черного тела до структуры атомов и молекул. Квантовая механика объяснила широкий круг явлений природы, ее предсказания позволили создать много новых устройств, нашедших практическое применение. Квантовая теория оказалась столь успешной, что почти все физики ныне считают ее фундаментальной теорией, лежащей в основе физических процессов.

Квантовая механика занимается в основном изучением микромира атомов и света; но и в окружающем нас макромире мы воспринимаем свет и считаем, что все окружающие нас предметы состоят из атомов. Поэтому из новой теории должны следовать и старые, хорошо проверенные результаты классической физики, т. е. квантовая механика при ее применении к макроскопическим явлениям должна приводить к старым классическим законам. Это означает, что квантовая механика должна полностью удовлетворять *принципу соответствия* (о котором мы упоминали в разд. 40.9). Это отнюдь не означает, будто мы отбрасываем классические теории, такие, например, как законы Ньютона. В повседневной жизни применять законы Ньютона несравненно проще, и они обеспечивают достаточно точные результаты. Но когда нам приходится иметь дело с большими скоростями, приближающимися к скорости света, мы вынуждены обратиться к специальной теории относительности, а когда нам приходится иметь дело с микромиром атома, мы используем квантовую механику.

Не вдаваясь в детали разработанного математического аппарата квантовой механики, мы обсудим ее основные идеи и рассмотрим, как они объясняют строение атома и находят другие приложения, используя волновые и корпускулярные свойства материи.

41.2. Волновая функция и ее интерпретация. Интерференция от двух щелей

Важнейшими характеристиками любой волны являются длина волны, частота и амплитуда. В случае электромагнитной волны от длины волны зависит, будет ли свет

видимым, и если да, то какого он цвета. Как мы уже знаем, длина волны (или частота) характеризует энергию соответствующего фотона ($E = hf$). Амплитуда электромагнитной волны определяет напряженность электрического (или индукцию магнитного) поля в данной точке и связана с интенсивностью волны (яркостью света).

Для материальных частиц, таких, как электроны, квантовая механика устанавливает связь между длиной волны и импульсом согласно формуле де Бройля $\lambda = h/mv$. А что можно сказать об амплитуде волн материи? В квантовой механике амплитуду, скажем, электронной волны называют **волновой функцией** и обозначают греческой буквой «пси»: Ψ. Таким образом, Ψ задает амплитуду нового типа поля, которое можно было бы назвать полем или волной материи[1)], как функцию времени и положения.

Одна из основных задач квантовой механики заключается в вычислении волновой функции Ψ для той или иной ситуации (например, для электрона в атоме). Выдающимся вкладом Шредингера в развитие квантовой механики явилось предложенное им уравнение, позволяющее вычислять волновую функцию. *Волновое уравнение Шредингера* (так оно теперь называется) по праву считается основным уравнением при описании нерелятивистских материальных частиц[2)]. Так как наше изложение квантовой механики будет по необходимости кратким (этому предмету посвящена не одна книга), мы не будем обсуждать общий вид уравнения Шредингера и способы его решения. Воспользуемся лишь уже «готовыми» решениями уравнения Шредингера и рассмотрим смысл волновой функции Ψ. В одной из интерпретаций функция Ψ – это просто заданная в любой точке пространства и в любой момент времени амплитуда «волны материи», подобно тому как **E** (вектор напряженности электрического поля) – это амплитуда электромагнитной волны. Однако возможна и другая интерпретация, основанная на корпускулярно-волновом дуализме. Чтобы пояснить ее, воспользуемся аналогией со светом.

[1)] Приведенные рассуждения автора несколько архаичны; современная точка зрения относительно интерпретации волновой функции в квантовой механике была сформулирована немецким физиком Максом Борном еще в 1926 г., когда он выпустил работу, в которой дал статистическую интерпретацию Ψ; см. ниже. – *Прим. ред.*

[2)] Уравнение Шредингера лишь несколько отличается от обычного волнового уравнения (15.16) и в одномерном случае может быть записано в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t},$$

где $U(x)$ – потенциальная энергия «частицы» с массой m, описываемой волновой функцией $\Psi(x,t)$, которая зависит от пространственной координаты x и времени t, $\hbar = h/2\pi$ и $i = \sqrt{-1}$.

В гл. 15 было показано, что интенсивность I любой волны пропорциональна квадрату ее амплитуды. Как мы видели в гл. 33, это справедливо и для световых волн, т. е.

$$I \sim E^2,$$

где E – напряженность электрического поля. С точки зрения *корпускулярной* теории интенсивность светового пучка пропорциональна числу фотонов N, проходящих через единичную площадку в единицу времени. Таким образом,

$$I \sim E^2 \sim N.$$

Обратив это соотношение, получим

$$N \sim E^2,$$

т. е. число фотонов (например, падающих на страницу этой книги) пропорционально квадрату напряженности электрического поля.

Если световой пучок очень слаб, то число фотонов в нем невелико. Используя очень слабый свет, можно воспроизвести фотографическое изображение, на котором будет видно действие каждого отдельного фотона. Если мы имеем дело с единственным фотоном, то соотношение $N \sim E^2$ можно интерпретировать несколько иначе. В любой точке квадрат напряженности электрического поля E^2 характеризует *вероятность* того, что фотон находится в данном месте. В точках, где значение E^2 велико, фотон находится с большой вероятностью. Там, где E^2 имеет малую величину, вероятность обнаружить фотон невелика.

Аналогичную интерпретацию можно использовать и в случае волн материи. Волновая функция Ψ может меняться по величине в пространстве и во времени. Если Ψ описывает ансамбль, состоящий из большого числа электронов, то величина Ψ^2 в любой точке пропорциональна числу электронов, которые будут обнаружены в этой точке. Но если число электронов мало, то очень точных предсказаний сделать нельзя и Ψ^2 приобретает вероятностный характер. Если зависящая от времени и точки пространства волновая функция Ψ описывает отдельный электрон (скажем, в атоме), то Ψ^2 интерпретируется следующим образом: *Ψ^2 в заданной точке пространства и в данный момент времени определяет вероятность найти электрон в этой точке пространства и в выбранный момент времени.*

Чтобы лучше это понять, обратимся к знакомому нам эксперименту с двумя щелями и рассмотрим его в случае света и электронов.

Предположим, что ширина каждой из щелей и расстояние между ними по порядку величины сравнимы с длиной падающей на них волны, будь то световая волна или электронная (рис. 41.1). Что произойдет, когда на щели падает световая волна, нам хорошо известно, так как перед нами схема эксперимента Юнга: на экране

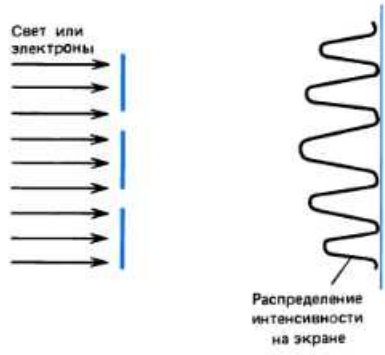


Рис. 41.1. Параллельный пучок света или электронов падает на две щели, размеры которых сравнимы с длиной волны. Наблюдается интерференционная картина.

позади щелей образуется интерференционная картина. Если вместо света взять электроны с длиной волны, сравнимой с размерами щелей, то они также создадут интерференционную картину. (Напомним в этой связи эксперимент Дэвиссона – Джермера; рис. 40.7.) В случае света интерференционную картину можно наблюдать непосредственно глазом или зафиксировать на пленке. В случае электронов можно воспользоваться флюоресцирующим экраном (который светится в том месте, где на него попадает электрон).

Если теперь ослабить поток электронов (или фотонов) настолько, чтобы они проходили через щели не группами, а поодиночке, то при каждом соударении частицы с экраном мы увидим вспышку. Сначала вспышки будут казаться распределенными случайно. И действительно, нельзя предсказать, в какую точку экрана попадет отдельный электрон. Но если проводить эксперимент достаточно долго и отмечать точки, в которых электроны попадают на экран, то вскоре начнет вырисовываться картина – та самая интерференционная картина, которую предсказывает волновая теория. И хотя мы не можем предсказать, в какую точку экрана попадет данный электрон, ничто не мешает нам рассчитать вероятности. (Сказанное в полной мере относится и к фотонам.) Вероятность, о которой идет речь, как уже упоминалось, пропорциональна Ψ^2. Там, где волновая функция Ψ обращается в нуль, находится минимум интерференционной картины. Там, где волновая функция Ψ максимальна, наблюдается максимум интерференционной картины.

Поскольку интерференционная картина наблюдается и в том случае, когда электроны (или фотоны) проходят через щель поодиночке, ясно, что интерференционная картина не является результатом взаимодействия электронов друг с другом. Все происходит так, как если бы электрон проходил через обе щели одновременно! Такое действительно возможно, если вспомнить, что электрон – не вполне обычная частица. Электрон в такой же мере волна, как и частица, а волна, разумеется, может пройти через две щели одновременно. А что произойдет, если мы

закроем одну щель и будем знать, что электрон заведомо прошел через другую щель, а затем, спустя некоторое время, закроем вторую щель и откроем первую так, что электрон сможет проходить только через нее? Оказывается, что в этих случаях интерференционная картина на экране не возникает. Мы увидим на экране просто два светлых пятна за каждой из щелей. Это подтверждает нашу догадку о том, что, когда обе щели открыты, каждый электрон проходит одновременно через обе щели, как если бы он был волной. И при этом каждый электрон образует на экране крохотное светящееся пятнышко, как если бы он был частицей.

Кратко суть всего сказанного сводится к следующему. Если мы трактуем электроны (и другие частицы вещества) как волны, то Ψ описывает амплитуду соответствующей материальной волны. Если мы трактуем электроны как частицы, то Ψ следует интерпретировать на основе *вероятности*. Квадрат волновой функции Ψ^2 характеризует вероятность обнаружить данный электрон в данной точке. Предсказать или хотя бы точно проследить за траекторией отдельного электрона в пространстве и времени мы не можем.

41.3. Принцип неопределенности Гейзенберга

Всякий раз, когда проводится измерение, его результаты всегда содержат некоторую неопределенность или погрешность. Например, мы не можем абсолютно точно измерить длину стола. Даже если линейка будет иметь миллиметровые деления, измерение будет содержать погрешность примерно $^1/_2$ мм. Более точные приборы позволяют производить более точные измерения, но независимо от того, насколько совершенен измерительный прибор, результат измерения непременно содержит некоторую неопределенность. Можно ожидать, что по мере совершенствования измерительных приборов погрешность измерений удастся сделать сколь угодно малой.

Однако, согласно квантовой механике, в действительности существует предел, ограничивающий точность определенных измерений. Этот предел не зависит от степени совершенства измерительного прибора, а присущ самой природе вещей. Он обусловлен двумя факторами: корпускулярно-волновым дуализмом и неизбежным взаимодействием наблюдаемого объекта с регистрирующим прибором. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Невозможно произвести измерение, не внося в измеряемый объект какое-нибудь возмущение, хотя бы слабое. Допустим, вы хотите отыскать в совершенно темной комнате шарик для игры в настольный теннис. Вы бродите по комнате, пытаясь наощупь определить, где находится шарик, и в тот момент, когда вы прикасаетесь к

нему, он отскакивает. Когда приходится измерять положение какого-нибудь объекта, будь то шарик для игры в настольный теннис или электрон, мы непременно должны чем-нибудь прикоснуться к нему, что даст нам информацию о его положении. Если вы хотите обнаружить в темной комнате закатившийся куда-то шарик для настольного тенниса, то вы можете попытаться нащупать его рукой или палкой. Вы можете также включить свет и обнаружить шарик по отраженному им свету. Пытаясь нащупать шарик рукой или палкой, вы обнаружите шарик в тот момент, когда дотронетесь до него. Но стоит вам дотронуться до шарика, как он неизбежно отпрыгнет, поскольку вы передадите ему импульс; поэтому положение шарика в *будущем* окажется неизвестным. Все сказанное остается в силе (хотя и в меньшей степени) и в том случае, когда вы пытаетесь обнаружить шарик для игры в настольный теннис, подсвечивая себе фонариком: чтобы шарик стал «виден», на нем должен рассеяться по крайней мере один фотон, и отраженный фотон должен попасть в ваш глаз или в другой детектор. Когда фотон сталкивается с обычным макроскопическим объектом, он не вносит значительных изменений ни в состояние движения, ни в положение этого объекта. Но при столкновении с микроскопически малым объектом, таким как электрон, фотон передает ему значительную часть своего импульса и тем самым сильно и непредсказуемо влияет на движение и положение объекта. Следовательно, сам акт измерения положения объекта в один момент времени вносит неопределенность в наше знание о его положении в будущем.

Посмотрим теперь, когда вступает в игру корпускулярно-волновой дуализм. Проведем мысленный эксперимент, в котором попытаемся измерить положение какого-нибудь объекта (например, электрона) с помощью фотонов, хотя аналогичные рассуждения справедливы и при использовании электронного микроскопа. Как было показано в гл. 37, точность наблюдения любого объекта не превышает длины волны используемого излучения. Если необходимо точно измерить положение тела, надо выбирать короткие волны. Но малая длина волны соответствует большой частоте и, следовательно, большой энергии (так как $E = hf$), а чем больше энергия фотонов, тем больший импульс они могут передать при соударении объекту. Если взять фотоны с большей длиной волны и соответственно с меньшей энергией, то при столкновении с ними движение объекта будет испытывать меньшее возмущение, но и положение объекта мы сможем измерить менее точно. Таким образом, самый акт наблюдения вносит существенную неопределенность либо в *положение*, либо в *импульс* электрона. В этом и заключается принцип неопределенности, впервые сформулированный Гейзенбергом в 1927 г.

Можно приближенно оценить величину этого эффекта. Освещая объект излучением с длиной волны λ, мы можем измерить его положение с точностью, не превышающей λ. Иначе говоря, неопределенность Δx в измерении координаты (положения) объекта приближенно равна

$$\Delta x \approx \lambda .$$

Предположим, что мы можем обнаружить объект с помощью отдельного фотона. Этот фотон обладает импульсом $p = h/\lambda$ и при соударении с объектом передает ему часть своего импульса или весь импульс. Следовательно, после соударения с фотоном неопределенность в импульсе объекта будет равна

$$\Delta p \approx h/\lambda ,$$

так как мы не знаем заранее, какую часть импульса передаст фотон. Произведение этих неопределенностей координаты и импульса составляет

$$\Delta x \, \Delta p \approx h .$$

Разумеется, в зависимости от прибора и числа фотонов, необходимых для обнаружения объекта, неопределенности в положении и импульсе объекта могут оказаться и больше. Проведя более тщательный анализ[1)], Гейзенберг обнаружил, что в лучшем случае неопределенности Δx и Δp удовлетворяют неравенству

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \frac{h}{2\pi} . \tag{41.1}$$

Это – математическая формулировка **принципа неопределенности Гейзенберга**. Он утверждает, что нельзя измерить одновременно с абсолютной точностью положение и импульс объекта. Чем точнее мы пытаемся определить положение объекта, т. е. чем меньше Δx, тем больше будет неопределенность в импульсе Δp. Если же мы попытаемся точно измерить импульс, то большой окажется неопределенность в положении объекта. Принцип неопределенности отнюдь не запрещает точно измерить что-нибудь одно: либо положение, либо импульс. Например, в принципе можно точно измерить положение объекта. Но при этом его импульс будет совершенно не известен. Следовательно, хотя положение объекта в какой-то момент времени нам точно известно, мы вообще ничего не знаем о том, где он будет находиться в следующий момент времени.

Один из вариантов принципа неопределенности связывает энергию и время. Мы рассмотрим его следующим образом. Неопределенность в положении регистрируемо-

---

[1)] На языке статистики и теории вероятностей неопределенности Δx и Δp соответствуют *среднеквадратичным отклонениям* (или *дисперсиям*) измерений координаты x и импульса p.

го объекта составляет $\Delta x \approx \lambda$. Фотон (или электрон), с помощью которого происходит регистрация, движется со скоростью v (для фотона $v = c$) и проходит отрезок, равный неопределенности в положении, за время $\Delta x/v \approx \approx \lambda/v$. Следовательно, неопределенность в моменте времени, когда объект находится в заданном положении, составляет

$$\Delta t \approx \frac{\lambda}{v}.$$

Так как фотон может передать объекту либо часть своей энергии ($= hf = hv/\lambda$), либо всю энергию, неопределенность в энергии объекта в результате равна

$$\Delta E \approx \frac{hv}{\lambda}.$$

Произведение этих двух неопределенностей составляет

$$\Delta E \Delta t \approx h.$$

Более тщательные вычисления Гейзенберга привели к неравенству

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}. \tag{41.2}$$

Эта форма принципа неопределенности эквивалентна утверждению, что энергия объекта может быть неопределенной или даже не сохраняться на величину ΔE в течение интервала времени $\Delta t \approx h/(2\pi\Delta E)$.

Мы говорили о положении и скорости электрона так, как если бы электрон был частицей. Но электрон – не просто частица: принцип неопределенности как раз обусловлен тем, что электрон (и вообще любая частица вещества) не является частицей в буквальном смысле слова. Принцип неопределенности в действительности утверждает, что если мы будем настаивать на том, что электрон представляет собой частицу, то это упрощенное представление обнаружит определенные ограничения, а именно положение и скорость не могут быть одновременно точно измерены, а неопределенность (несохранение) энергии составит ΔE на протяжении интервала времени $\Delta t \approx h/(2\pi\Delta E)$.

Так как постоянная Планка h очень мала, неопределенности, фигурирующие в принципе неопределенности Гейзенберга, в макроскопических масштабах оказываются пренебрежимо малыми. Но в мире атомов эти неопределенности существенны. Поскольку все окружающие нас предметы состоят из атомов, содержащих ядра и электроны, принцип неопределенности играет важную роль для понимания природы. Принцип неопределенности выражает, по-видимому, наиболее отчетливо вероятностную природу квантовой механики и поэтому часто оказывается предметом философских дискуссий.

41.4. Философский подход; вероятностное описание или детерминизм?

В классической ньютоновской физике мир строго детерминирован (разд. 5.7). Одна из основных идей этой физики заключается в том, что, коль скоро положение и скорость тела в некоторый момент времени известны, его положение в последующие моменты может быть предсказано абсолютно точно, если заданы все действующие на тело силы. Например, если бросать несколько раз камень с одной и той же скоростью и под одним и тем же углом, то он всякий раз будет описывать одну и ту же траекторию при условии, что действующие на камень силы не меняются. Если эти силы (сила тяжести и сопротивление воздуха, если оно существует) известны, то траекторию камня и ее положение в пространстве можно точно предсказать. Из таких механистических представлений следует, что будущее Вселенной, представляющей собой совокупность тел, полностью определено.

Квантовая механика радикально изменила подобное представление классического детерминизма о реальном мире. При анализе опыта по дифракции электронов на двух щелях (разд. 41.2) мы обнаружили, что не все электроны с одинаковыми начальными характеристиками попадут в одну и ту же точку экрана; согласно квантовой механике, электроны с определенной вероятностью попадают в различные точки. Это коренным образом отличается от классических представлений, согласно которым траекторию частицы можно точно предсказать по ее начальному положению, скорости и действующим на частицу силам. Квантовая же механика утверждает, что положение и скорость тела одновременно не могут быть даже точно известны. Это обстоятельство составляет содержание принципа неопределенности и является следствием того, что основные «кирпичи» мироздания (например, электроны) нельзя считать обычными частицами, поскольку они обладают также и волновыми свойствами. Квантовая механика позволяет нам вычислять только вероятности, например, того, что электрон (как частица) будет зарегистрирован в той или иной точке пространства. В этом смысле квантовая механика делает лишь приближенные предсказания. Она подразумевает, что природе присуща непредсказуемость.

Так как вещество состоит из атомов, то даже поведение обычных тел макроскопических размеров не строго детерминировано, а подчиняется законам случая и вероятности. Например, существует отличная от нуля (хотя и очень малая) вероятность того, что брошенный вами камень вместо того, чтобы описать выпуклую вверх параболу, как подобает свободно брошенному телу, неожиданно взовьется вверх. Квантовая механика предсказывает, что с очень большой вероятностью обычные

макроскопические тела будут вести себя в соответствии с законами классической механики; но эти предсказания носят вероятностный характер и не являются абсолютно достоверными. Макроскопические тела с подавляющей вероятностью ведут себя согласно законам классической механики потому, что состоят из большого числа атомов и молекул: если в статистике число частиц очень велико, то отклонение от среднего будет пренебрежимо малым. Именно средняя конфигурация огромного числа молекул с большой вероятностью следует законам классической физики и тем самым создает видимость «детерминизма». Отклонения от классических законов заметны, когда число молекул мало. Таким образом, можно сказать, что, хотя в квантовой механике отсутствует строгий детерминизм, она содержит статистические законы, основанные на вероятности осуществления того или иного события.

Следует подчеркнуть, что между вероятностью в квантовой механике и вероятностью, которой пользовались в XIX в. при формулировке термодинамики и молекулярно-кинетической теории газов (гл. 18 и 21), имеется различие. В термодинамике введение вероятности было обусловлено слишком большим числом молекул, что не позволяло проследить за поведением каждой молекулы. Тем не менее предполагалось, что движения и столкновения молекул происходят по законам Ньютона. В квантовой механике вероятность носит совсем иной характер: она *внутренне присуща* природе, а не вызвана затруднениями вычисления тех или иных характеристик.

Хотя некоторые ученые не отказались от детерминизма во взглядах на природу и не считали квантовую механику законченной теорией (одним из них был Эйнштейн), тем не менее подавляющее большинство физиков признали квантовую механику с ее вероятностным подходом к описанию природы. Этот подход, изложенный выше и ставший ныне общепризнанным, получил название *копенгагенской интерпретации* квантовой механики в честь города, где жил и работал Нильс Бор, так как вероятностная трактовка квантовой механики возникла в основном благодаря дискуссиям Бора с другими выдающимися физиками.

Так как электроны - не просто частицы, нельзя представлять себе, что они имеют определенные траектории в пространстве и времени. Это означает, что пространственно-временно́е описание частиц вещества не вполне корректно. Столь глубокий и далеко идущий вывод стал предметом оживленной дискуссии в среде философов. Самым значительным и влиятельным авторитетом квантовой механики был Нильс Бор. Он считал, что пространственно-временно́е описание реальных атомов и электронов невозможно; однако сами эксперименты с атомами или электронами должны описываться в терми-

нах пространства и времени, а также других понятий, заимствованных из обычной практики, таких, как волна и частица. Однако такое *описание* экспериментов не должно вводить нас в заблуждение, будто сами атомы и электроны действительно существуют в пространстве и времени в виде частиц. Крайне важно различие между нашей интерпретацией экспериментов и тем, что «в действительности» происходит в природе.

41.5. Квантовомеханическая картина строения атома

В начале этой главы мы обсуждали ограниченность боровской теории строения атома. Рассмотрим теперь квантовомеханическую теорию атомов, гораздо более полную, чем старая теория Бора. Она сохраняет некоторые аспекты старой теории. Например, электроны могут находиться в атоме только в дискретных состояниях с определенной энергией; при переходе электрона из одного состояния в другое испускается (или поглощается) фотон. Но квантовая механика – не просто обобщение теории Бора. Она представляет собой гораздо более глубокую теорию и рисует совершенно иную картину строения атома. Согласно квантовой механике, не существует вполне определенных круговых орбит электронов, как в теории Бора. В силу волновой природы электрон «размазан» в пространстве, подобно «облаку» отрицательного заряда. Размеры и форму электронного облака в заданном состоянии атома можно вычислить. Для основного состояния атома водорода решение уравнения Шредингера (разд. 41.2) дает

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi r_1^3}}\, e^{-r/r_1},$$

где $\psi(r)$ – волновая функция[1] как функция положения, зависящая только от расстояния r до центра и не зависящая от углов θ и ϕ. (Постоянная r_1 случайно совпадает с радиусом первой боровской орбиты.) Следовательно, электронное облако в основном состоянии водорода сферически-симметрично, как показано на рис. 41.2. Электронное облако грубо характеризует «размеры» атома, но, поскольку облако может не иметь четко выраженной границы, атомы также не имеют ни точной границы, ни строго определенного размера. Как мы увидим ниже, не все электронные облака сферически-симметричны. Обратите внимание на то, что, хотя функция $\psi(r)$ при больших

[1] Строчной греческой буквой ψ мы обозначили волновую функцию как функцию только положения. Если имеется зависимость от времени, то, как и прежде, волновую функцию будем обозначать прописной греческой буквой $\Psi(\mathbf{r}, t)$.

Рис. 41.2. Электронное облако, или распределение вероятности, для основного состояния атома водорода. Облако плотнее всего (что свидетельствует о наибольшей вероятности) на расстоянии $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м от ядра. Именно это значение модель Бора предсказывает для радиуса первой орбиты. Но в отличие от модели Бора квантовая механика утверждает, что электрон в любой момент времени может находиться и ближе к ядру, и дальше от ядра.

r, как следует из приведенного выше выражения, сильно убывает, она не обращается в нуль на конечных расстояниях. Поэтому квантовая механика утверждает, что основная часть атома не представляет собой пустое пространство. Так как $\psi \to 0$ только при $r \to \infty$, мы заключаем, что и во Вселенной не существует в подлинном смысле пустого пространства.

Электронное облако можно интерпретировать как с корпускулярной, так и с волновой точек зрения. Напомним, что под частицей мы понимаем нечто локализованное в пространстве: в любой момент времени частица занимает вполне определенное положение в пространстве. Волна же размыта в пространстве. Следовательно, размытое в пространстве электронное облако, как на рис. 41.2, является результатом волновой природы электронов. Электронное облако можно также интерпретировать как *распределение вероятностей* для данной частицы. Если измерить положение электрона (как частицы) 500 раз, то большинство результатов измерений соответствовало бы точкам, в которых вероятность велика (более темная область на рис. 41.2), хотя электрон случайно может оказаться и там, где вероятность мала. Мы не можем предсказать траектории, по которой будет двигаться электрон. Как было показано в разд. 41.3, после измерения его положения точно предсказать, где будет электрон находиться в последующие моменты времени, невозможно. Мы можем лишь вычислить вероятность обнаружить электрон в различных точках. Ясно, что подобная ситуация в корне отличается от классической ньютоновской физики. Как отмечал впоследствии Бор, при испускании атомом светового фотона, бессмысленно даже спрашивать как электрон переходит из одного состояния в другое.

41.6. Квантовая механика атома водорода. Квантовые числа

Рассмотрим теперь более подробно, что дает квантовая механика в случае атома водорода. Многое из того, о чем пойдет речь в этом разделе, справедливо и в случае более сложных атомов, которым посвящен следующий раздел.

Для атома водорода квантовая механика предсказывает точно те же энергетические уровни (рис. 40.18), что и теория Бора, т. е.

$$E_n = -\frac{13{,}6\ \text{эВ}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где n – целое число. В упрощенной теории Бора существовало только одно квантовое число n. В квантовой механике, чтобы задать каждое состояние атома, необходимы четыре различных квантовых числа.

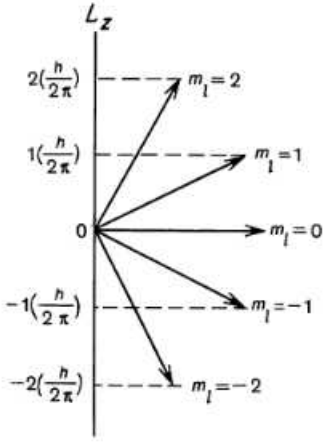


Рис. 41.3. Квантование направления углового момента при $l = 2$.

Квантовое число n из теории Бора сохраняется и в квантовой механике под названием **главное квантовое число**. Оно может принимать любое целочисленное значение от 1 до ∞. Как было показано выше, от n зависит полная энергия состояния атома водорода.

Орбитальное квантовое число l связано с моментом импульса электрона. Оно может принимать целочисленные значения от 0 до $n - 1$. В основном состоянии с $n = 1$ орбитальное квантовое число l может быть только равно нулю, но, например, при $n = 3$ оно может принимать значения 0, 1 и 2. Величина момента импульса L связана с квантовым числом l соотношением

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}.$$

В атоме водорода полная энергия не зависит от значения l[1], а зависит только от n. Но в атомах с двумя и бóльшим числом электронов энергия, как будет показано в следующем разделе, зависит от l так же, как и от n.

Магнитное квантовое число m_l характеризует ориентацию момента импульса и может принимать целочисленные значения от $-l$ до $+l$. Например, если $l = 2$, то m_l может быть равно -2, -1, 0, $+1$ или $+2$. Так как момент импульса – вектор, не удивительно, что он квантуется по величине и по направлению. При $l = 2$ возможны пять различных ориентаций, условно изображенных на рис. 41.3. В квантовой механике ориентацию момента импульса обычно задают, указывая его компоненту вдоль оси z. Эта компонента L_z связана с m_l соотношением

$$L_z = m_l \frac{h}{2\pi}.$$

[1] Это не совсем так ввиду существования в атоме очень слабых взаимодействий; см. ниже обсуждение *тонкой структуры*.

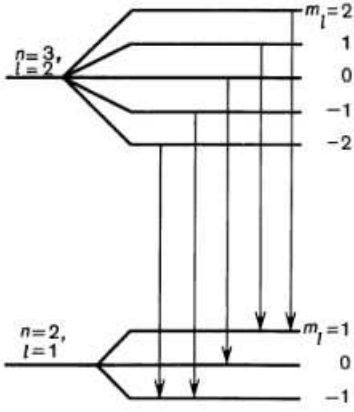


Рис. 41.4. Во внешнем магнитном поле уровень энергии $n = 3$, $l = 2$ расщепляется на пять отдельных уровней, соответствующих пяти значениям m_l (2, 1, 0, −1, −2). Уровень $n = 2$, $l = 1$ расщепляется на три уровня ($m_l = 1$, 0, −1). Между уровнями могут происходить переходы (не все из которых показаны) с испусканием фотонов, соответствующих нескольким частотам, незначительно различающимся между собой.

Название магнитного квантового числа m_l заимствовано не из теории (которая устанавливает его связь с L_z), а из эксперимента: было обнаружено, что при газовом разряде спектральные линии расщепляются в магнитном поле на несколько линий, расположенных близко друг к другу. (Это расщепление называют эффектом Зеемана). Отсюда следует, что энергетические уровни расщепляются (рис. 41.4), т. е. энергия состояния при наличии внешнего магнитного поля зависит не только от n, но и от m_l. Отсюда и название – «магнитное квантовое число». [Зависимость энергии от ориентации **L** можно понять, воспользовавшись полуклассическим представлением движущегося электрона как электрического тока, который взаимодействует с магнитным полем (гл. 28).]

Наконец, существует **спиновое квантовое число** m_s, которое принимает только два значения $m_s = +{}^1/_2$ и $m_s = -{}^1/_2$. Существование этого квантового числа в отличие от квантовых чисел n, l и m_l не следовало из первоначального варианта теории Шредингера. Позднее П. А. М. Дирак модифицировал теорию Шредингера, показав, что спиновое квантовое число является релятивистским эффектом. Указание о необходимости введения m_s впервые было получено из эксперимента. Тщательное исследование спектральных линий водорода показало, что каждая линия в действительности состоит из двух (или большего числа) близких линий. Это явление получило название **тонкой структуры**. Сначала было высказано предположение о том, что тонкое расщепление энергетических уровней может быть вызвано моментом импульса, связанным со спином электрона; электрон, обращаясь вокруг атомного ядра, одновременно вращается вокруг собственной оси подобно тому, как Земля, двигаясь вокруг Солнца, одновременно вращается вокруг своей оси. Взаимодействие слабого тока, создаваемого вращающимся электроном, с магнитным полем, обусловленным движением заряда по орбите вокруг ядра, и вызывает наблюдаемое тонкое расщепление энергетических уровней. (Таким образом, существует слабая зависимость энергии от m_l и m_s.) Представление об электроне, вращающемся вокруг своей оси, ныне полностью отброшено. Мы не можем представлять электрон как локализованный объект, тем более вращающийся вокруг своей оси. Важно лишь, что электрон может находиться в двух различных состояниях, отвечающих присущей ему характеристике, которую мы (возможно, не совсем удачно) называем «спином». Эти два возможных значения спинового квантового числа m_s ($+{}^1/_2$ и $-{}^1/_2$) часто характеризуют как «спин вверх» и «спин вниз», имея в виду два возможных направления спинового момента импульса.

Допустимые значения всех четырех квантовых чисел электрона в атоме водорода представлены в табл. 41.1.

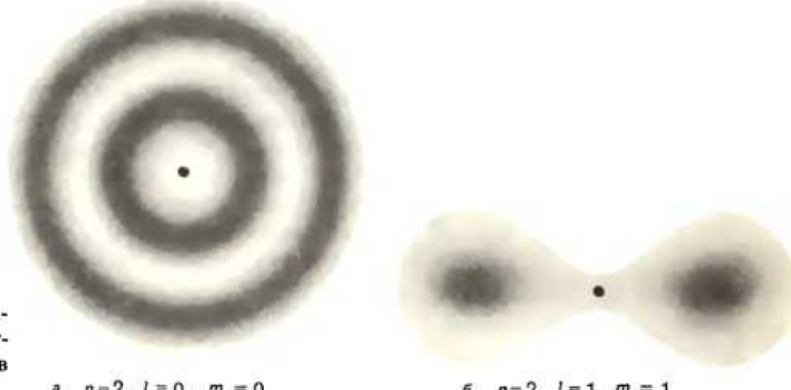
Таблица 41.1. Квантовые числа электрона

Название	Обозначение	Разрешенные значения
Главное	n	1, 2, 3, ... , ∞
Орбитальное	l	При заданном n величина l может принимать значения 0, 1, 2, ..., $n-1$
Магнитное	m_l	При заданных n и l величина m_l может принимать значения l, $l-1$, ..., 0, ..., $-l$
Спиновое	m_s	Для любого набора n, l и m_l величина m_s может принимать значения $+{}^1/_2$ или $-{}^1/_2$

Пример 41.1. Сколько различных состояний может иметь электрон с главным квантовым числом $n = 3$?

Решение. При $n = 3$ орбитальное квантовое число l может принимать значения 2, 1, 0. При $l = 2$ магнитное квантовое число может принимать значения 2, 1, 0, -1, -2, что дает 5 различных состояний; в каждом из них спиновое квантовое число m_s может быть либо $+{}^1/_2$, либо $-{}^1/_2$, поэтому при $l = 2$ электрон может находиться в $2 \cdot 5 = 10$ различных состояниях. При $l = 1$ магнитное число m_l может принимать значения 1, 0, -1, а так как спин m_s может быть равен $+{}^1/_2$ или $-{}^1/_2$, мы получаем еще 6 разрешенных состояний. Наконец, при $l = 0$, магнитное квантовое число m_l может быть равно только 0, поэтому существуют только 2 разрешенных состояния, соответствующих $m_s = +{}^1/_2$ и $m_s = -{}^1/_2$. Таким образом, общее число состояний равно $10 + 6 + 2 = 18$.

Хотя энергетические уровни в атоме слабо зависят от l и m_l, эти квантовые числа влияют на функцию распределения (вероятностей) электрона в пространстве. При $n = 1$ (основное состояние) l и m_l могут принимать только нулевые значения. Функция распределения для этого случая изображена на рис. 41.2. При $n = 2$ квантовое число l может быть равно 0 или 1. Функция распределения для случая $n = 2$, $l = 0$ изображена на рис. 41.5, *а*. Видно, что она отличается от распределения в основном состоянии, хотя и сохраняет сферическую симметрию. При $n = 2$,



а $n=2,\ l=0,\ m_l=0$ *б* $n=2,\ l=1,\ m_l=1$

Рис. 41.5. Электронное облако (или распределение вероятности) для состояний $n = 2$ в атоме водорода.

$l = 1$ распределение перестает быть сферически-симметричным и по форме напоминает гантель (рис. 41.5, *б*). Это распределение соответствует какому-то одному значению m_l, например $m_l = 1$. При $m_l = 0$ и $m_l = -1$ распределения будут также иметь вид гантелей, но симметричных относительно других осей.

Хотя функцию распределения электрона в пространстве можно вычислить для различных состояний, измерить ее экспериментально довольно трудно. Бóльшую часть экспериментальной информации о строении атома получают в результате тщательного изучения спектров испускания в различных условиях.

41.7. Сложные атомы. Принцип запрета Паули

Мы так подробно остановились на рассмотрении атома водорода потому, что он проще всего поддается анализу. В данном разделе мы кратко обсудим строение более сложных атомов с двумя и бóльшим числом электронов. Энергетические уровни таких атомов можно определить экспериментально по спектрам испускания. Число электронов в нейтральном атоме называется *атомным номером* Z. Число Z равно также положительному заряду (числу протонов) ядра и определяет свойства атома.

Хотя для описания сложных атомов делались попытки модифицировать теорию Бора, развитие квантовой механики после 1925 г. оказалось значительно более успешным. Однако математический аппарат при этом существенно усложнился, так как в многоэлектронных атомах каждый электрон не только притягивается ядром, но и отталкивается другими электронами.

Простейший подход был основан на предположении, что каждый электрон в атоме находится в состоянии, которое характеризуется квантовыми числами n, l, m_l и m_s. Но для объяснения возможных конфигураций электронов в атоме оказался необходимым новый принцип. Такой принцип был введен Вольфгангом Паули (1900–1958) и получил название **принцип запрета Паули**. Этот принцип гласит:

> **Два электрона не могут находиться в атоме в одном и том же квантовом состоянии.**

Иначе говоря, два электрона не могут иметь одинакового набора квантовых чисел n, l, m_l и m_s. Принцип запрета Паули[1)] составляет основу понимания не только структуры сложных атомов, но и природы молекул, химической связи и ряда других явлений.

[1)] Принцип запрета Паули применим ко всем частицам с полуцелым спином ($^1/_2$, $^3/_2$ и т. д.), т. е. к электронам, протонам, нейтронам, но не имеет отношения к частицам с целочисленным спином (0, 1, 2 и т. д.), т. е. фотонам и π-мезонам.

Таблица 41. 2
Гелий, Z = 2

n	l	m_l	m_s
1	0	0	$^1/_2$
1	0	0	$-^1/_2$

Литий, Z = 3

n	l	m_l	m_s
1	0	0	$^1/_2$
1	0	0	$-^1/_2$
2	0	0	$^1/_2$

Натрий, Z = 11

n	l	m_l	m_s
1	0	0	$^1/_2$
1	0	0	$-^1/_2$
2	0	0	$^1/_2$
2	0	0	$-^1/_2$
2	1	1	$^1/_2$
2	1	1	$-^1/_2$
2	1	0	$^1/_2$
2	1	0	$-^1/_2$
2	1	−1	$^1/_2$
2	1	−1	$-^1/_2$
3	0	0	$^1/_2$

Рассмотрим теперь строение некоторых простых атомов в основном состоянии. Следующий за атомом водорода атом гелия имеет два электрона. Оба электрона могут иметь главное квантовое число $n = 1$, так как спин одного из них может быть направлен вверх ($m_s = +^1/_2$), а другого – вниз ($m_s = -^1/_2$), и принцип Паули не будет нарушен. Разумеется, так как $n = 1$, квантовые числа l и m_l должны быть равны нулю (табл. 41.1). Следовательно, в основном состоянии атома гелия электроны имеют квантовые числа, приведенные в табл. 41.2.

У лития три электрона, два из которых могут находиться в состоянии с $n = 1$. Но у третьего электрона главное квантовое число n не может быть равно 1, так как в этом случае нарушился бы принцип Паули. Следовательно, третий электрон должен иметь $n = 2$.

Так как уровень с $n = 2$, $l = 0$ имеет более низкую энергию, чем уровень $n = 2$, $l = 1$, квантовые числа электронов в основном состоянии будут такими, как показано в табл. 41.2. Разумеется, квантовые числа третьего электрона могли быть и другими, например 3, 1, −1, $^1/_2$, но атом лития в этом случае оказался бы в возбужденном состоянии с более высокой энергией. Поэтому он спустя короткое время перешел бы в основное состояние с испусканием фотона. При комнатной температуре, если нет подвода энергии (как в случае разрядной трубки), большинство атомов находится в основном состоянии.

Аналогично можно продолжить перечисление квантовых чисел каждого электрона в основном состоянии все более сложных атомов. Результат для натрия с 11 электронами представлен в табл. 41.2.

Электронные конфигурации всех атомов *в периодической системе элементов* показаны в табл. 41.3. В каждой клетке указаны атомный номер Z, символ химического элемента и атомная масса (в а. е. м. – атомных единицах массы). Наконец, в левом нижнем углу приведена электронная конфигурация для основного состояния атома. Последняя требует некоторых пояснений. Об электронах с одинаковым значением n говорят, что они принадлежат одной *оболочке*. Электроны с $n = 1$ принадлежат первой оболочке (называемой K-оболочкой), электроны с $n = 2$ – второй оболочке (L-оболочке) и т. д. Об электронах с одинаковым значением l говорят, что они принадлежат одной *подоболочке*. Часто для обозначения l цифры заменяют буквами:

l	0	1	2	3	4	...
Буквенное обозначение	s	p	d	f	g	...

Таким образом, электроны с $l = 0$ образуют s-подоболочку, с $l = 1$ – p-подоболочку, с $l = 2$ – d-подоболочку; начиная с $l = 3$, обозначающие подоболочки буквы следуют в алфавитном порядке: f, g, h, i и т. д. [Первые буквы s, p, d

Таблица 41.3. Периодическая система химических элементов[1)]

Группа I	Группа II	Переходные элементы										Группа III	Группа IV	Группа V	Группа VI	Группа VII	Группа VIII
H 1 1,0079 $1s^1$																	**He** 2 4,0026 $1s^2$
Li 3 6,94 $2s^1$	**Be** 4 9,01218 $2s^2$											**B** 5 10,81 $2p^1$	**C** 6 12,011 $2p^2$	**N** 7 14,0067 $2p^3$	**O** 8 15,9994 $2p^4$	**F** 9 18,9984 $2p^5$	**Ne** 10 20,17 $2p^6$
Na 11 22,9898 $3s^1$	**Mg** 12 24,305 $3s^2$											**Al** 13 26,9815 $3p^1$	**Si** 14 28,0855 $3p^2$	**P** 15 30,9738 $3p^3$	**S** 16 32,06 $3p^4$	**Cl** 17 35,453 $3p^5$	**Ar** 18 39,948 $3p^6$
K 19 39,0983 $4s^1$	**Ca** 20 40,08 $4s^2$	**Sc** 21 44,9559 $3d^14s^2$	**Ti** 22 47,90 $3d^24s^2$	**V** 23 50,9415 $3d^34s^2$	**Cr** 24 51,996 $3d^54s^1$	**Mn** 25 54,9380 $3d^54s^2$	**Fe** 26 55,847 $3d^64s^2$	**Co** 27 58,9332 $3d^74s^2$	**Ni** 28 58,71 $3d^84s^2$	**Cu** 29 63,546 $3d^{10}4s^1$	**Zn** 30 65,38 $3d^{10}4s^2$	**Ga** 31 69,735 $4p^1$	**Ge** 32 72,59 $4p^2$	**As** 33 74,9216 $4p^3$	**Se** 34 78,96 $4p^4$	**Br** 35 79,904 $4p^5$	**Kr** 36 83,80 $4p^6$
Rb 37 85,467 $5s^1$	**Sr** 38 87,62 $5s^2$	**Y** 39 88,9059 $4d^15s^2$	**Zr** 40 91,22 $4d^25s^2$	**Nb** 41 92,9064 $4d^45s^1$	**Mo** 42 95,94 $4d^55s^1$	**Tc** 43 98,9062 $4d^55s^2$	**Ru** 44 101,07 $4d^75s^1$	**Rh** 45 102,906 $4d^85s^1$	**Pd** 46 106,4 $4d^{10}5s^0$	**Ag** 47 107,868 $4d^{10}5s^1$	**Cd** 48 112,41 $4d^{10}5s^2$	**In** 49 114,82 $5p^1$	**Sn** 50 118,69 $5p^2$	**Sb** 51 121,75 $5p^3$	**Te** 52 127,60 $5p^4$	**I** 53 126,90 $5p^5$	**Xe** 54 131,30 $5p^6$
Cs 55 132,905 $6s^1$	**Ba** 56 137,33 $6s^2$	57–71[1]	**Hf** 72 178,49 $5d^26s^2$	**Ta** 73 180,947 $5d^36s^2$	**W** 74 183,85 $5d^46s^2$	**Re** 75 186,207 $5d^56s^2$	**Os** 76 190,2 $5d^66s^2$	**Ir** 77 192,22 $5d^76s^2$	**Pt** 78 195,09 $5d^96s^1$	**Au** 79 196,966 $5d^{10}6s^1$	**Hg** 80 200,59 $5d^{10}6s^2$	**Tl** 81 204,37 $6p^1$	**Pb** 82 207,2 $6p^2$	**Bi** 83 208,980 $6p^3$	**Po** 84 (209) $6p^4$	**At** 85 (210) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 226,025 $7s^2$	89–103[1]	**Rf** 104 (261) $6d^27s^2$	**Ha** 105 (260) $6d^37s^2$	106 (263)	107 (262)	108 (265)	109 (266)									

Лантаноиды	**La** 57 139,906 $5d^16s^2$	**Ce** 58 140,12 $5d^14f^16s^2$	**Pr** 59 140,908 $4f^36s^2$	**Nd** 60 144,24 $4f^46s^2$	**Pm** 61 (145) $4f^56s^2$	**Sm** 62 150,4 $4f^66s^2$	**Eu** 63 151,96 $4f^76s^2$	**Gd** 64 157,25 $5d^14f^76s^2$	**Tb** 65 158,925 $5d^14f^96s^2$	**Dy** 66 162,50 $4f^{10}6s^2$	**Ho** 67 164,930 $4f^{11}6s^2$	**Er** 68 167,26 $4f^{12}6s^2$	**Tm** 69 168,934 $4f^{13}6s^2$	**Yb** 70 173,04 $4f^{14}6s^2$	**Lu** 71 174,967 $5d^14f^{14}6s^2$
Актиноиды	**Ac** 89 (227) $6d^17s^2$	**Th** 90 232,038 $6d^27s^2$	**Pa** 91 231,036 $5f^26d^17s^2$	**U** 92 238,029 $5f^36d^17s^2$	**Np** 93 237,048 $5f^46d^17s^2$	**Pu** 94 (244) $5f^66d^07s^2$	**Am** 95 (243) $5f^76d^07s^2$	**Cm** 96 (247) $5f^76d^17s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^86d^17s^2$	**Cf** 98 (251) $5f^{10}6d^{0?}7s^2$	**Es** 99 (254) $5f^{11}6d^{0?}7s^2$	**Fm** 100 (257) $5f^{12}6d^{0?}7s^2$	**Md** 101 (258) $5f^{13}6d^{0?}7s^2$	**No** 102 (259) $6d^{0?}7s^2$	**Lr** 103 (260) $6d^17s^2$

Символ — **Cl** 17 — Атомный номер
Атомная масса [2)] — 35.453 — Электронная конфигурация
$3p^5$ — Электронная конфигурация

1) Атомные массы усреднены по распространенности изотопов.

2) Для многих нестабильных элементов в скобках указано массовое число наиболее стабильного изотопа.

первоначально означали аббревиатуры английских слов «sharp» (резкая), «principle» (главная), «diffuse» (размытая), которые характеризовали особенности линий в экспериментально наблюдаемых спектрах.] Принцип запрета Паули ограничивает число электронов в каждой оболочке и подоболочке. Например, у атома натрия оболочки с $n = 1$ и $n = 2$ полностью заполнены (как и их подоболочки), и одиннадцатый электрон заполняет оболочку с $n = 3$.

Так как энергетические уровни почти полностью определяются значениями n и l, электронная конфигурация обычно задается указанием n и буквенным обозначением l, а число электронов в каждой подоболочке указывают в виде верхнего индекса. При такой записи электронная конфигурация основного состояния натрия выглядит следующим образом: $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^1$. В периодической системе элементов Д. И. Менделеева (табл. 41.3) использована упрощенная запись: приведены только конфигурации внешних электронов и других незаполненных оболочек. Атомы химических элементов в периодической системе расположены в порядке возрастания масс. Существующая периодичность химических свойств подробно рассматривается в учебниках химии.

*41.8. Рентгеновское излучение и атомный номер

Линейчатые спектры атомов в видимой области, ИК- и УФ-областях спектра электромагнитного излучения обязаны своим происхождением главным образом переходам между состояниями электронов во внешних оболочках. Значительная часть заряда ядра экранируется для этих электронов отрицательным зарядом электронов на внутренних оболочках. Но самые внутренние электроны на оболочке с $n = 1$ «ощущают» полный заряд ядра. Так как энергия данного уровня пропорциональна Z^2 [см. формулу (40.11)], можно ожидать, что длины волн, испускаемых атомом с $Z = 50$, примерно в $50^2 = 2500$ раз короче длин волн в лаймановской серии атома водорода (около 100 нм), т. е. составляют от 10^{-2} до 10^{-1} нм. Такие длины волн лежат в рентгеновской области спектра.

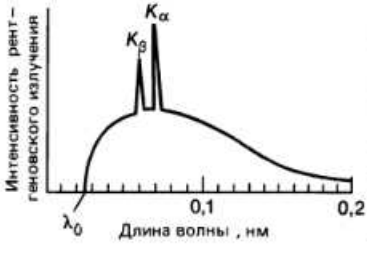


Рис. 41.6. Спектр рентгеновского излучения, испускаемого молибденовой мишенью (анодом) трубки, работающей при напряжении 50 кВ.

Как было показано в разд. 37.11, рентгеновское излучение возникает при соударении электронов, ускоренных высоким напряжением, с металлической мишенью внутри рентгеновской трубки. Спектр излучения рентгеновской трубки содержит две компоненты: сплошной спектр, обрывающийся при длине волны λ_0, которая зависит только от приложенного к трубке напряжения, и максимумы, налагающихся на сплошной спектр. Типичный рентгеновский спектр показан на рис. 41.6. При повышении приложенного к трубке напряжения сплошной спектр и его граничная длина волны λ_0 смещаются влево. Максимумы (обозначенные на рис. 41.6 символами K_α и K_β)

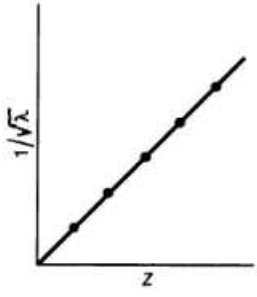


Рис. 41.7. Зависимость $1/\sqrt{\lambda}$ от Z для рентгеновских линий K_α.

при изменении напряжения остаются на месте, но их положение различно у мишеней из разных материалов. Это говорит о том, что соответствующие максимумам длины волны характеризуют используемый материал. Их можно объяснить тем, что приложенное к рентгеновской трубке высокое напряжение разгоняет электроны до высоких энергий, и при соударении с атомами мишени налетающие электроны могут выбить один из сильно связанных внутренних электронов. *Характеристическое рентгеновское излучение* (максимумы в спектре на рис. 41.6) представляет собой фотоны, которые испускаются при переходе электрона из более высокого состояния в вакантное более низкое состояние.

Измерение спектров характеристического рентгеновского излучения позволило определить положение энергетических уровней, соответствующих внутренним оболочкам атома. Эти спектры обеспечили также определение атомного номера Z многих атомов, поскольку (как мы видели) длина волны наиболее жесткого (коротковолнового) рентгеновского излучения пропорциональна Z^2. При переходе электрона, например, с уровня с $n = 2$ на уровень с $n = 1$ длина волны обратно пропорциональна $(Z - 1)^2$, так как ядро экранируется оставшимся электроном на уровне $1s$. В 1914 г. Г. Мозли обнаружил, что график зависимости $\sqrt{1/\lambda}$ от Z представляет собой прямую (рис. 41.7). Атомные номера Z некоторых элементов были определены с помощью «графика Мозли». Работа Мозли обеспечила понятию атомного номера Z прочную экспериментальную основу.

Пример 41.2. Оцените длину волны, отвечающую переходу атома молибдена ($Z = 42$) из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$.

Решение. Воспользуемся формулой Бора (40.12), заменив в ней Z^2 на $(Z - 1)^2$. [Еще проще воспользоваться результатом примера 40.7 для перехода атома водорода ($Z = 1$) из состояния $n = 2$ в состояние $n = 1$. Так как $\lambda \sim 1/(Z - 1)^2$, получаем

$$\lambda = (1{,}22 \cdot 10^{-7}\ \text{м})/41^2 = 0{,}073\ \text{нм}.$$

Вычисленная нами величина мало отличается от экспериментального значения 0,071 нм (рис. 41.6).

Бегло проанализируем теперь на основе фотонной теории света сплошную часть спектра рентгеновского излучения (рис. 41.6). Попадая на мишень, электроны сталкиваются с атомами вещества мишени и теряют бóльшую часть своей энергии в виде тепла (около 99%; поэтому рентгеновские трубки приходится охлаждать, обычно водой). Однако электроны могут терять энергию, излучая фотон. Как видно из рис. 41.8, электрон может затормозиться положительным ядром атома; но движущийся с ускорением заряд излучает (гл. 33). Испускаемое в этом случае излучение называют *тормозным*. Так как энергия сохраняется, энергия испускаемого фотона hf должна быть равна потери кинетической энергии элект-

рона $\Delta КЭ = КЭ - КЭ'$, т. е.

$$hf = \Delta КЭ.$$

При столкновении электрон может потерять либо часть своей кинетической энергии, либо всю кинетическую энергию. Сплошной (непрерывный) спектр рентгеновского излучения (рис. 41.6) объясняется тормозным излучением, при котором электроны теряют различное количество энергии. Наиболее жесткое рентгеновское излучение (с наименьшей длиной волны и соответственно наибольшей частотой) отвечает случаю, когда электрон передает всю кинетическую энергию одному фотону в одном соударении. Так как начальная кинетическая энергия электрона равна энергии, сообщенной ему ускоряющим напряжением V, то $КЭ = eV$; в том случае, когда электрон полностью тормозится в результате единственного соударения, мы имеем

$$hf_0 = eV,$$

или

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV}, \qquad (41.3)$$

где $\lambda_0 = c/f_0$ – граничная длина волны (рис. 41.6). Формула (41.3) для λ_0 точно воспроизводит экспериментальные данные. Это еще одно подтверждение того, что рентгеновское излучение представляет собой разновидность света[1)], и подтверждение справедливости фотонной теории света.

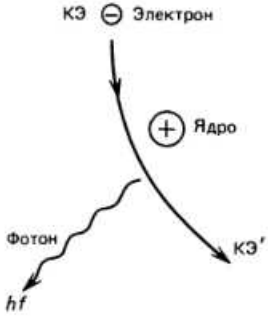


Рис. 41.8. Фотон тормозного излучения, испускаемый электроном, движение которого замедляется (тормозится) положительно заряженным ядром.

Пример 41.3. Чему равна граничная длина волны рентгеновского фотона, испускаемого рентгеновской трубкой с ускоряющим напряжением 50 кВ?

Решение. По формуле (41.3)

$$\lambda_0 = \frac{(6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})(3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})}{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(5{,}0 \cdot 10^{4}\ \text{В})} =$$

$$= 2{,}5 \cdot 10^{-11}\ \text{м},$$

или 0,025 нм. Как видно из рис. 41.6, эта длина волны хорошо согласуется с экспериментом.

*41.9. Лазеры и голография

Лазером называется прибор, генерирующий очень узкий пучок монохроматического когерентного света высокой интенсивности. Излучение лазера представляет собой почти идеальную плоскую волну. Обычный источник излучает свет во всех направлениях, так что интенсив-

[1)] Если бы рентгеновское излучение представляло собой не фотоны, а нейтральные частицы с массой покоя m_0, формула (41.3) была бы неверна.

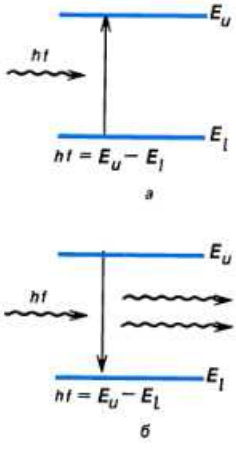


Рис. 41.9. *а* – поглощение фотона; *б* – вынужденное излучение.

ность его излучения быстро убывает с расстоянием, и свет некогерентен. Некогерентность света (случайное различие по фазе различных частей пучка) обусловлена тем, что возбужденные атомы испускают свет независимо друг от друга, и каждый фотон можно рассматривать как короткий цуг волн – обычно длиной около 30 см и длительностью порядка 10^{-8} с. Между этими цугами нет определенных фазовых соотношений (разд. 36.4).

Принцип действия лазера основан на квантовом эффекте. Как мы знаем, фотон может поглощаться атомом, когда (и только когда) его энергия hf совпадает с разностью энергий между заполненным энергетическим уровнем атома и свободным возбужденным уровнем (рис. 41.9, *а*). Иначе говоря, необходимо выполнение условия своего рода резонанса. Если атом уже находится в возбужденном состоянии, то он может самопроизвольно перейти в более низкое состояние с испусканием фотона. Фотон, обладающий нужной энергией, при столкновении с возбужденным атомом стимулирует переход атома в более низкое состояние (рис. 41.9, *б*). Излучение, сопровождающее такой переход, называется **вынужденным**. Нетрудно видеть, что при вынужденном излучении не только сохраняется падающий фотон, но и в результате перехода атома в более низкое энергетическое состояние возникает второй фотон с такой же частотой. Оба фотона оказываются *в фазе* относительно друг друга. Именно так возникает в лазере когерентное излучение. Само название «лазер» произошло из аббревиатуры английского названия прибора Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation – усиление света вынужденным излучением.

Обычно бóльшая часть атомов находится в низшем состоянии, и поэтому падающие фотоны в основном поглощаются. Чтобы получить когерентное излучение в результате вынужденного испускания, необходимо удовлетворить двум условиям. Во-первых, атомы должны находиться в более высоком, возбужденном состоянии, т. е. необходима *инверсная населенность*, при которой число атомов в более высоком состоянии превышает число атомов в более низком состоянии, так что *испускание* фотонов преобладает над поглощением. Во-вторых, более высокое состояние должно быть *метастабильным*, т. е. электроны в нем должны находиться дольше, чем обычно, и переход в более низкое состояние происходит благодаря вынужденному, а не спонтанному излучению. Коротко обсудим, каким образом выполняются эти два

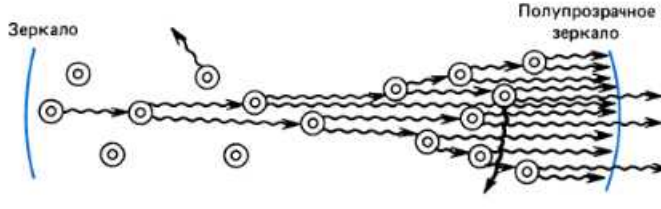


Рис. 41.10. Схема лазера: возбужденные атомы испускают вынужденное излучение.

условия в различных лазерах. Пока предположим, что атомы находятся в более высоком состоянии. Схема лазера изображена на рис. 41.10: активная среда лазера заключена в длинной узкой трубке, на концах которой расположены два зеркала. Одно из зеркал полупрозрачное (пропускает около 1–2% падающего излучения). Некоторые из возбужденных атомов довольно скоро переходят в более низкое состояние. Один из таких атомов изображен на рис. 41.10 слева. Если излученный им фотон испытывает столкновение с другим возбужденным атомом, то он стимулирует этот атом испустить еще один фотон той же частоты и в фазе с падающим фотоном. Оба фотона в дальнейшем сталкиваются с другими возбужденными атомами, стимулируя дальнейшее вынужденное излучение. Процесс продолжается, и число фотонов лавинно нарастает. При попадании фотонов на зеркала на концах трубки большинство их отражается, и, двигаясь в обратном направлении, они продолжают стимулировать испускание атомами новых фотонов. Небольшая доля фотонов, летящих то в одну, то в другую сторону между зеркалами, выходит через полупрозрачное зеркало на одном из концов трубки. Именно эти фотоны и образуют узкий когерентный пучок излучения лазера.

Часть фотонов испускается внутри трубки не параллельно ее оси. Такие фотоны покидают прибор через боковую поверхность трубки и не дают вклада в основной пучок. Таким образом, лазерный пучок может быть очень узким. В хорошо сконструированном лазере угловой разброс пучка ограничен только дифракцией и поэтому составляет порядка λ/D [см. формулу (37.1)], где D – диаметр торцевого зеркала; дифракционный разброс может быть исключительно мал. Световая энергия не рассеивается в пространстве, как в случае обычных источников света, а сосредоточена в узком пучке.

Существует несколько способов возбуждения атомов для создания в лазере необходимой инверсной населенности. В рубиновом лазере используется рубиновый стержень, представляющий собой Al_2O_3, в котором небольшая часть атомов алюминия (Al) замещена атомами хрома (Cr). Атомы хрома и участвуют в генерации лазерного излучения. Эти атомы возбуждаются сильными вспышками света с длиной волны 550 нм, соответствую-

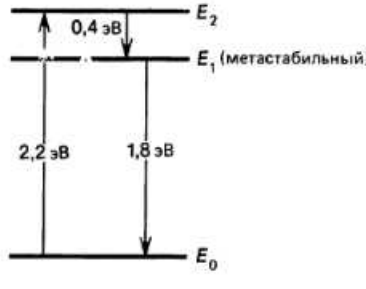


Рис. 41.11. Уровни энергии атомов хрома в кристалле рубидия. Фотоны с энергией 2,2 эВ создают «накачку», вынуждая атомы переходить с уровня E_0 на уровень E_2, откуда возбужденные атомы переходят на метастабильный уровень E_1. Усиление света обусловлено вынужденным испусканием фотонов при переходе с уровня E_1 на основной уровень E_0.

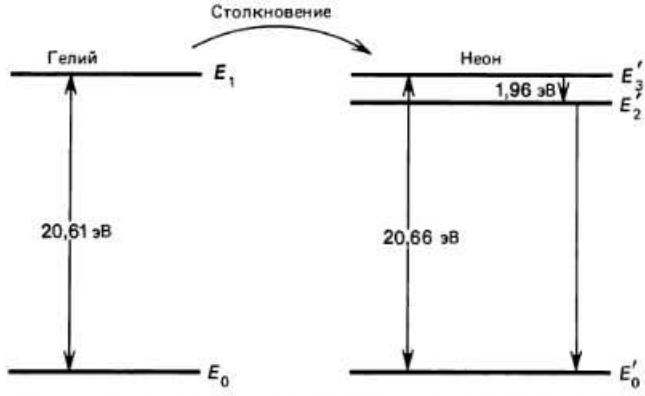


Рис. 41.12. Уровни энергии атомов He и Ne. Атом He возбуждаемый в электрическом разряде, переходит в состояние E_1. При столкновении эта энергия передается уровню E'_3 атома Ne. Уровень E'_3 метастабильный, и, испуская вынужденное излучение, атом переходит из него на уровень E'_2.

щей энергии фотона 2,2 эВ. Как видно из рис. 41.11, при возбуждении атомы переходят из состояния E_0 в состояние E_2. Этот процесс называется *оптической накачкой*. Из состояния E_2 атомы либо быстро возвращаются в состояние E_0, либо переходят в промежуточное метастабильное состояние E_1 с временем жизни около $3 \cdot 10^{-3}$ с (по сравнению с 10^{-8} с для обычных уровней). При мощной накачке в состоянии E_1 может оказаться больше атомов, чем в состоянии E_0. Тем самым создается инверсная населенность уровней, необходимая для генерации лазерного излучения. Как только несколько атомов перейдут из состояния E_1 в состояние E_0, они стимулируют вынужденное излучение других атомов, и начинается лазерная генерация. Рубиновый лазер генерирует пучок фотонов с энергией 1,8 эВ и длиной волны 694,3 нм («рубиново-красный» свет).

В гелий-неоновом (He–Ne) лазере используется газовая смесь из 15% гелия и 85% неона. Такая смесь представляет собой активную среду благодаря удачному сочетанию свойств обоих газов. В He–Ne-лазере атомы возбуждаются приложенным к трубке высоким напряжением, которое вызывает электрический разряд в газе. В процессе разряда часть атомов гелия возбуждается и переходит в метастабильное состояние E_1 (рис. 41.12) с энергией 20,61 эВ. У атомов неона имеется возбужденное состояние с почти такой же энергией над основным состоянием 20,66 эВ. Атомы гелия вместо быстрого перехода в основное состояние за счет спонтанного излучения часто передают при столкновениях избыток своей энергии атомам неона. В результате такого столкновения атом гелия переходит в основное состояние, а атом неона возбуждается и переходит в состояние E'_3 (штрих относится к состояниям неона). Небольшое различие энергий (0,05 эВ) восполняется кинетической энергией движущихся атомов. В результате метастабильное состояние E'_3 атома неона оказывается более населенным, чем состояние E'_2, и возникает инверсная населенность, необходимая для лазерной генерации.

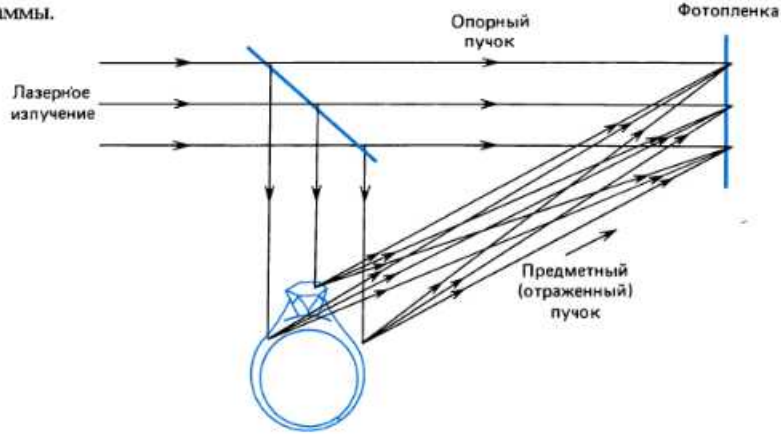


Рис. 41.13. Запись голограммы.

Существуют лазеры на $p-n$-переходах, в которых реализуются переходы между дном зоны проводимости и потолком валентной зоны (разд. 41.11).

Одно из многочисленных интересных приложений лазерного излучения – создание трехмерных изображений, известных под названием *голограмм*. В обычной фотографии светочувствительная пленка просто регистрирует интенсивность света, приходящего в каждую точку. Если рассматривать фотографию или слайд, свет, отражаясь или проходя сквозь пленку, создает двумерное изображение. В голографии изображение формируется без использования линз благодаря интерференции света. При записи лазерной голограммы на пленке лазерный пучок с помощью полупосеребренного зеркала делится на две части (рис. 41.13). Одна часть пучка направляется непосредственно на пленку, а другая – на фотографируемый объект и, отражаясь от него, попадает на пленку. Свет, отраженный каждой точкой объекта, попадает на всю пленку, и интерференция двух пучков позволяет зарегистрировать в каждой точке пленки как интенсивность, так и относи-

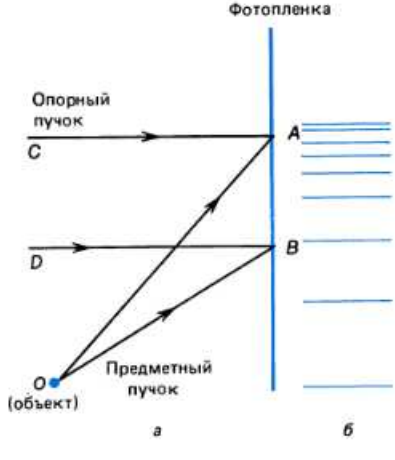


Рис. 41.14. Свет из точки объекта O интерферирует со светом опорного пучка (лучи CA и DB).

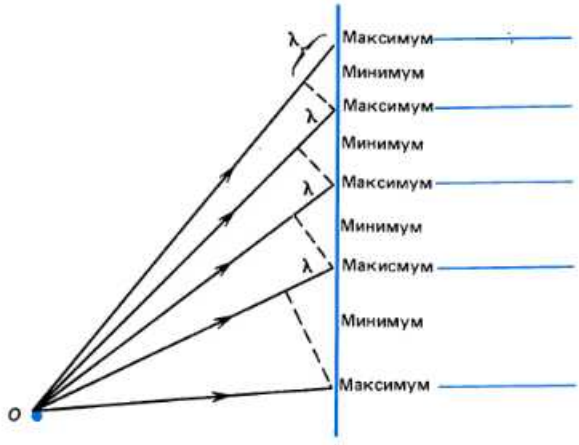


Рис. 41.15. Каждый из лучей, выходящих из точки O, на одну длину волны короче предыдущего (ближайшего сверху). Если верхний луч совпадает по фазе с опорным пучком (не показанным на схеме), имеющим одну и ту же фазу во всех точках на экране, то все лучи, изображенные на схеме, порождают усиливающую интерференцию. Из рисунка видно, что расстояния между светлыми полосами увеличиваются сверху вниз.

тельную фазу света. Если проявленную пленку вновь поместить в лазерный пучок, то возникнет трехмерное изображение объекта. Такое изображение можно разглядывать с разных сторон, как если бы это был сам объект. Но если попытаться прикоснуться к изображению рукой, вы обнаружите лишь пустоту.

Детали формирования голографического изображения достаточно сложны. Но основное представление можно получить, рассмотрев отдельную точку объекта. На рис. 41.14,*а* лучи OA и OB отражаются одной точкой объекта. Лучи CA и DB идут непосредственно от источника света и интерферируют с лучами OA и OB в точках A и B пленки. В результате на пленке возникают интерференционные полосы, как показано на рис. 41.14,*б*. Расстояния между полосами уменьшается снизу вверх. Почему так происходит, видно из рис. 41.15. Таким образом, голограмма точечного объекта имеет вид, изображенный на рис. 41.14,*б*. Пленка в этом случае напоминает дифракционную решетку с переменным шагом. Следовательно, если через проявленную пленку проходит когерентное лазерное излучение, то из-за переменного шага

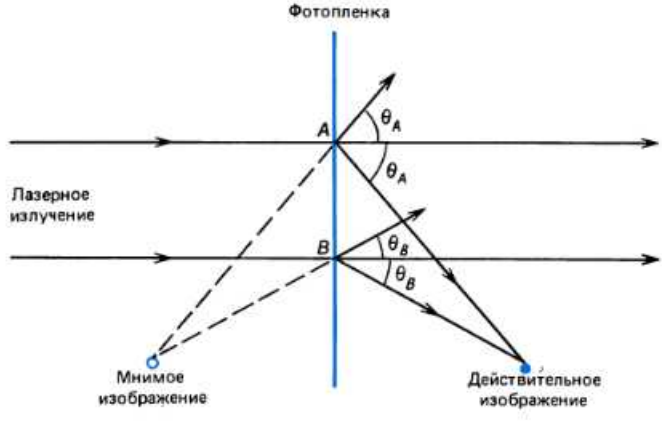


Рис. 41.16. Лазерное излучение падает на фотопленку, которая действует как дифракционная решетка с переменным периодом. Изображены только выходящие лучи, соответствующие первым дифракционным максимумам.Так как период решетки в точке B больше, чем в точке A, угол θ_A больше угла $\theta_B (\sin\theta = \lambda/D)$, и поэтому формируются действительное и мнимое изображения точки.

решетки максимумы первого порядка дифракционной картины будут наблюдаться под несколько разными углами [см. соотношение (37.1): $\sin\theta = \lambda/D$; там, где расстояние между щелями D больше, угол θ оказывается меньше]. Следовательно, в первом порядке будет казаться, что дифрагирующие вверх лучи расходятся из одной точки (рис. 41.16). Это – мнимое изображение исходного объекта, которое можно наблюдать невооруженным глазом. Лучи, дифрагирующие в первом порядке *вниз*, сходятся, образуя действительное изображение, которое можно наблюдать и фотографировать. (Обратите внимание на то, что прямые, недифрагирующие лучи не представляют интереса.) Разумеется, реальные предметы состоят из множества точек, поэтому их голограмма представляет собой сложную интерференционную картину, которая при освещении ее лазерным излучением воспроизводит изображение предмета. Каждая точка изображения занимает в трехмерном пространстве правильное положение относительно других точек, и изображение точно воспроизводит оригинал, причем его можно, как и оригинал, рассматривать под разными углами. Можно изготовить голограммы, позволяющие наблюдателю обойти вокруг изображения и рассмотреть его со всех сторон.

*41.10. Молекулярные спектры

В этом и следующем разделах мы обсудим некоторые крупные достижения квантовой теории в объяснении явлений, связанных с образованием систем с большим числом атомов. Мы вынуждены ограничиться лишь кратким обзором.

При образовании молекулы энергетические уровни внешних электронов атомов изменяются, так как в молекуле они взаимодействуют друг с другом. Кроме того, иногда возникают дополнительные уровни, так как атомы могут колебаться относительно друг друга, а молекула – вращаться как целое. Энергетические уровни колебательного и вращательного движений квантованы. Однако расстояние между ними очень мало, особенно в случае

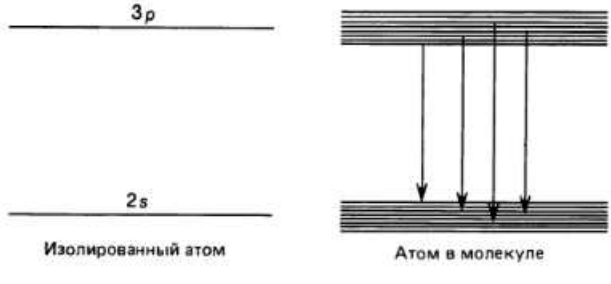


Рис. 41.17. Отдельные уровни энергии изолированного атома в молекулах, твердых телах и жидкостях расщепляются и превращаются в полосы близких уровней.

вращательных уровней (характерное расстояние между уровнями составляет 10^{-3} эВ). Таким образом, каждый атомный уровень превращается в ряд близких уровней, соответствующих колебательным и вращательным движениям (рис. 41.17). В результате переходов между этими близкими уровнями возникает множество очень близких спектральных линий. В действительности линии не всегда удается отличить друг от друга, и такие спектры называются *полосатыми*. Каждый тип молекул обладает характерным спектром, который можно использовать для идентификации молекул и определения их структуры.

Если вещество находится в твердом (или жидком) состоянии, внешние электроны его атомов или молекул перекрываются. Их энергетические уровни изменяются и вследствие взаимодействия размываются, образуя *энергетические зоны*, как на рис. 41.17. Так как число атомов в твердом теле и жидкости очень велико, энергетические уровни в таких зонах расположены чрезвычайно плотно. Они заполняют зону фактически непрерывно, вследствие чего спектр сильно нагретых твердых тел, например раскаленного докрасна железа или нити лампы накаливания, кажется непрерывным. Энергетические зоны в полупроводниках играют важную роль с точки зрения работы транзисторов и диодов, о чем пойдет речь в следующем разделе.

*41.11. Полупроводники

Квантовая механика оказалась действенным инструментом изучения структуры твердых тел. Ныне эту бурно развивающуюся область физики принято называть *физикой твердого тела* (или *физикой конденсированного состояния*, которое включает не только твердое тело, но и жидкость). Мы бегло рассмотрим лишь один из разделов физики твердого тела – физику полупроводников – и некоторые ее приложения в современной электронике. Познакомимся прежде всего со свойствами широко используемых полупроводников – германия и кремния.

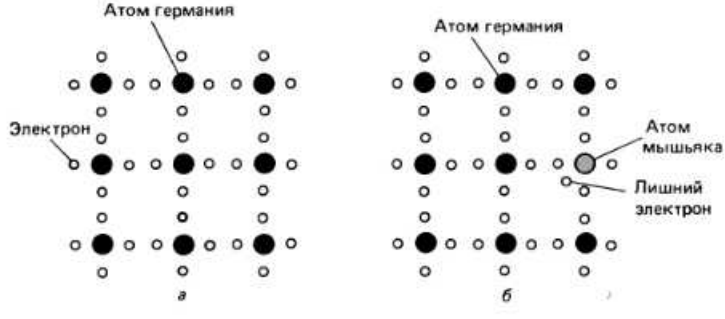


Рис. 41.18. Кристалл германия. *а* – четыре (внешних) электрона окружают каждый атом германия. *б* – кристалл германия с примесью атомов мышьяка: лишний электрон «не влезает» в кристаллическую решетку и свободно перемещается. Это – полупроводник *n*-типа.

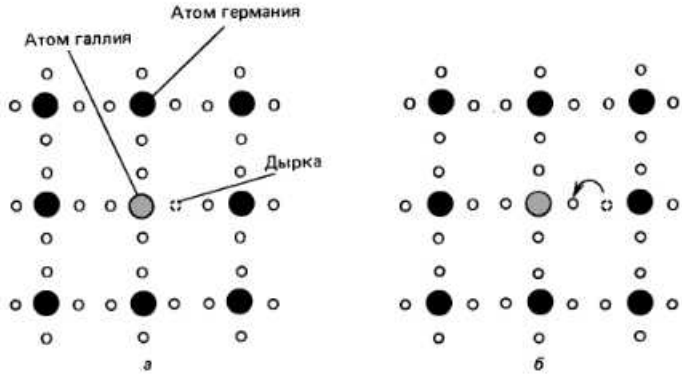


Рис. 41.19. Проводник *p*-типа – германий с примесью галлия. У галлия имеются только три внешних электрона, поэтому в структуре существует свободное место, или *дырка* (*а*). Электроны из атомов германия могут перескакивать в дырку и занимать ее. В результате дырка перемещается (на рисунке – вправо) (*б*).

У атомов кремния или германия имеется по четыре электрона во внешней оболочке, взаимодействие между которыми удерживает атомы в узлах правильной кристаллической решетки (рис. 41.18,*а*). Германий и кремний приобретают свойства, позволяющие использовать их в электронике, только при введении в кристаллическую структуру небольшой примеси (примерно одной миллионной, т. е. 10^{-6}). Введение примеси называется легированием полупроводника. В зависимости от характера примеси полупроводники могут быть двух типов. Если атомы вещества примеси имеют пять внешних электронов (как, например, мышьяк), то возникает ситуация, изображенная на рис. 41.18,*б*. Только четыре внешних электрона мышьяка «вписываются» в кристаллическую структуру. Пятый электрон оказывается «лишним» и может перемещаться сравнительно свободно, почти как электроны в проводнике. Из-за того что число этих избыточных электронов невелико, легированный полупроводник становится слабо проводящим. Кристалл германия, легированный мышьяком, называется *полупроводником n-типа*, так как носителями электрического тока служат отрицательно заряженные электроны (*n* – начальная буква слова negative, т. е. отрицательный).

В *полупроводнике p-типа* присутствует небольшая примесь вещества с тремя внешними электронами (например, галлия). Как показано на рис. 41.19,*а*, в кристаллической решетке около атома галлия (поскольку у него только три внешних электрона) возникает «дырка». Электроны близлежащих атомов германия могут перейти в дырку и заполнить ее. Но при этом «дырка» образуется на том месте, где они до этого находились (рис. 41.19,*б*). Так как атомов германия во много раз больше, чем атомов галлия, дырка почти всегда находится около атома германия. Поскольку для того, чтобы атом германия был нейтральным, у него должны быть четыре электрона во внешней оболочке; присутствие дырки означает результирующий положительный заряд. Когда электрон в процессе движения заполняет дырку, положительный заряд

перемещается туда, где до этого находился электрон. Новую дырку может заполнить другой электрон, и дырка таким образом переместится и займет новое положение и т. д. Такой полупроводник называется *полупроводником p-типа*, так как носителями электрического тока служат положительно заряженные дырки (p – начальная буква слова positive, т. е. положительный).

Поведение полупроводников находит свое объяснение в рамках так называемой *зонной теории* твердого тела, основанной на квантовой механике. Как мы уже знаем, электроны в отдельном атоме могут занимать только вполне определенные энергетические уровни. Наинизший энергетический уровень соответствует основному состоянию, а более высокие уровни – возбужденным состояниям. В твердом теле разрешенные энергетические уровни вследствие взаимодействия атомов размываются, превращаясь в широкие полосы, или зоны, как уже говорилось в предыдущем разделе. Внешние электроны могут оказаться в одной из двух зон[1]: либо в нижней, *валентной зоне*, соответствующей основному состоянию, либо в верхней *зоне проводимости*. Электроны не могут иметь энергии в «запрещенной» щели между этими двумя зонами. Обычно электроны находятся в валентной зоне, где они довольно сильно связаны с отдельными атомами. У хорошего диэлектрика валентная зона заполнена, зона проводимости, по существу, пуста, а щель между зонами достигает значительной ширины. Свободных состояний, которые могли бы занять электроны, нет, если только электроны не обладают достаточно большой энергией (полученной, например, в результате столкновения с другим электроном), чтобы перейти в более высокую зону проводимости. Оказавшись в зоне проводимости, электрон перестает быть связанным с определенным атомом и может свободно перемещаться по решетке. Если щель между валентной зоной и зоной проводимости велика, то вещество будет представлять собой хороший диэлектрик, так как лишь у немногих электронов достаточно энергии для перехода в зону проводимости (рис. 41.20, *а*). С дру-

Рис. 41.20. Энергетические зоны в твердых телах. Показаны (в идеализированном виде) только зоны для внешних электронов. Зоны для других электронов соответствуют меньшей энергии.

[1] Обычно все состояния в зонах с меньшей энергией заняты.

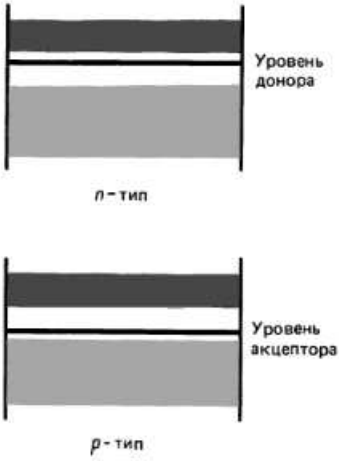


Рис. 41.21. Примесные уровни в легированных полупроводниках.

гой стороны, в хорошем проводнике щели между валентной зоной и зоной проводимости не существует (рис. 41.20,*б*): обе зоны могут перекрываться или зона может просто оказаться незаполненной и электроны будут свободно переходить в другие состояния; таким образом, они могут свободно перемещаться и представляют собой носители электрического тока. В чистых полупроводниках (или проводниках с *собственной*, *беспримесной проводимостью*), например в углероде, германии или кремнии, энергетическая щель между валентной зоной и зоной проводимости невелика (рис. 41.20,*в*). Небольшая доля электронов может обладать достаточной энергией, чтобы преодолеть щель, так что чистые полупроводники обнаруживают очень слабую проводимость. (При комнатной температуре средняя кинетическая энергия электронов равна $kT \approx {}^1/_{40}$ эВ.) С повышением температуры число электронов с энергией, достаточной для преодоления щели между зонами, возрастает. Этот эффект нередко преобладает над уменьшением средней длины свободного пробега из-за увеличения хаоса с повышением температуры, так что сопротивление полупроводников может падать с температурой (табл. 26.1).

В легированных полупроводниках примеси создают дополнительные энергетические состояния между зонами, как показано на рис. 41.21. В полупроводнике *n*-типа примесный энергетический уровень лежит чуть ниже дна зоны проводимости. Электроны на этом уровне могут легко приобрести дополнительную энергию для перехода в зону проводимости. Так как этот уровень поставляет электроны в зону проводимости, он называется *донорным*. В полупроводниках *p*-типа примесный энергетический уровень расположен чуть выше потолка валентной зоны. Он называется *акцепторным*, так как электроны из валентной зоны легко могут переходить на него. В результате образуется положительно заряженная дырка. При заполнении дырки другими электронами она перемещается.

Полупроводниковые диоды и транзисторы служат важными компонентами современных электронных устройств. Достигнутый ныне уровень миниатюризации позволяет разместить на одном *чипе* размером около 1 см тысячи диодов, транзисторов, резисторов и т. д. Рассмотрим вкратце, как действуют диоды и транзисторы.

Если полупроводник *n*-типа соединить с полупроводником *p*-типа, то получится *диод* с *p–n-переходом*. Каждый из полупроводников в отдельности электрически нейтрален. Но в результате соединения небольшое количество электронов вблизи контакта перейдет за счет диффузии из полупроводника *n*-типа в полупроводник *p*-типа и заполнит там некоторое число дырок. В результате полупроводник *n*-типа приобретет положительный заряд, а полупроводник *p*-типа – отрицательный. Возникнет раз-

Рис. 41.22. Схема, показывающая принцип действия полупроводникового диода. Ток течет, когда приложено прямое смещающее напряжение (*а*). Если приложено обратное смещающее напряжение, то ток не течет (*б*).

ность потенциалов, положительная со стороны полупроводника *n*-типа по отношению к полупроводнику *p*-типа, которая воспрепятствует дальнейшей диффузии электронов.

Если диод подключить положительным полюсом батареи к полупроводнику *p*-типа, а отрицательным – к полупроводнику *n*-типа, как на рис. 41.22, *а*, то напряжение будет противоположно внутренней разности потенциалов. В этом случае *диод* будет иметь *прямое смещение*. Если напряжение достаточно велико (около 0,3 В для германия и 0,6 В для кремния при комнатной температуре), то возникает ток. Положительные дырки в полупроводнике *p*-типа отталкиваются положительным полюсом батареи, а электроны в полупроводнике *n*-типа отталкиваются отрицательным полюсом батареи. Дырки и электроны встречаются в месте контакта полупроводников, электроны пересекают границу, разделяющую полупроводники, и заполняют дырки. Между тем положительный полюс батареи постоянно «отсасывает» электроны от полупроводника *p*-типа, образуя новые дырки, а отрицательный полюс подпитывает электронами полупроводник *n*-типа. В результате через диод течет сильный ток.

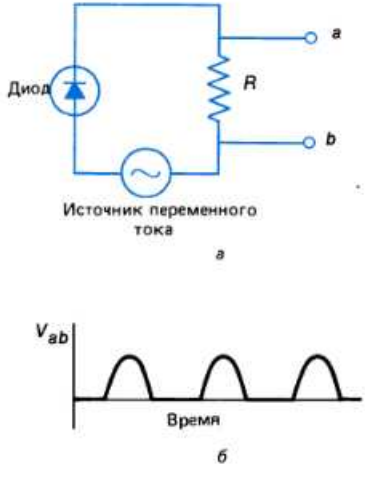


Рис. 41.23. *а* – простая выпрямительная цепь, использующая полупроводниковый диод; *б* – выходное напряжение на сопротивлении *R* как функция времени.

В *диоде с обратным смещением* (рис. 41.22, *б*) дырки в полупроводнике *p*-типа притягиваются отрицательным полюсом батареи, а электроны в полупроводнике *n*-типа – положительным полюсом батареи. Носители тока не встречаются в месте контакта, и в идеальном случае ток отсутствует.

Так как диод с *p*–*n*-переходом пропускает ток только в одном направлении, он может служить *выпрямителем*, преобразующим переменный ток в постоянный. Простая схема выпрямителя показана на рис. 41.23, *а*. Стрелка в условном обозначении диода указывает направление, в котором диод проводит ток (положительным выбрано обычное направление тока). Источник переменного тока подает на диод то положительное, то отрицательное напряжение. Ток через диод протекает только в течение половины периода, и поэтому через сопротивление *R* ток течет тоже только полпериода. Следовательно, напряжение V_{ab} на сопротивлении *R* в зависимости от времени имеет форму, изображенную на рис. 41.23, *б*. Подобный *однополупериодный выпрямитель* дает не вполне постоян-

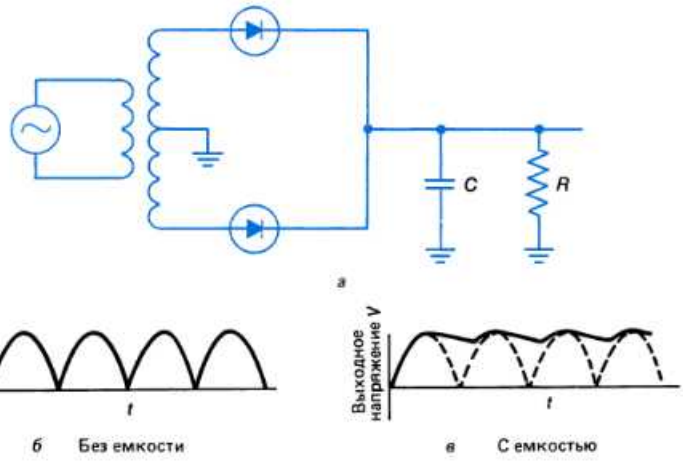


Рис. 41.24. *а* – двухполупериодная выпрямительная цепь; *б* – выходное напряжение без емкости *C*; *в* – выходное напряжение с емкостью в цепи.

ный ток, а лишь ток постоянного направления. Более широкое применение имеет *двухполупериодный выпрямитель* на двух (иногда на четырех) диодах (рис. 41.24,*а*). В каждый момент либо один, либо другой диод проводит ток, текущий направо; поэтому зависимость от времени выходного напряжения на сопротивлении нагрузки *R* имеет вид, изображенный на рис. 41.24,*б*. В действительности такой вид напряжение *V* имеет, когда в цепи нет емкости *C*. Как известно, емкость накапливает заряд и тем самым помогает сглаживать колебания напряжения (рис. 41.24,*в*).

Выпрямительные схемы играют важную роль, потому что большинство линий электропередач работает на переменном токе, а большинство электронных устройств требует постоянного напряжения. Поэтому диоды используются почти во всех электронных приборах, в том числе в радиоприемниках и телевизорах.

Простой *транзистор* представляет собой своеобразный сандвич из полупроводникового кристалла одного типа, расположенного между двумя кристаллами противоположного типа. Существуют как *pnp*-, так и *npn*-транзисторы, схематически изображенные на рис. 41.25,*а*. Полупроводники, входящие в состав транзистора, называются коллектором, базой и эмиттером. Условные обозначения *npn*- и *pnp*-транзисторов приведены на рис. 41.25,*б*. Стрелка всегда обозначает эмиттер, а ее направление совпадает с направлением тока, условно принимаемым за положительное, в нормальном режиме работы.

Работа транзистора происходит следующим образом. Рассмотрим *npn*-транзистор, включенный в цепь, как показано на рис. 41.26. Напряжение V_{CE} между коллектором и эмиттером поддерживается батареей $\mathscr{E}_C$. Напряжение, приложенное к базе, называется *напряжением смещения базы* V_{BE}. Если оно положительно, то электроны эмиттера

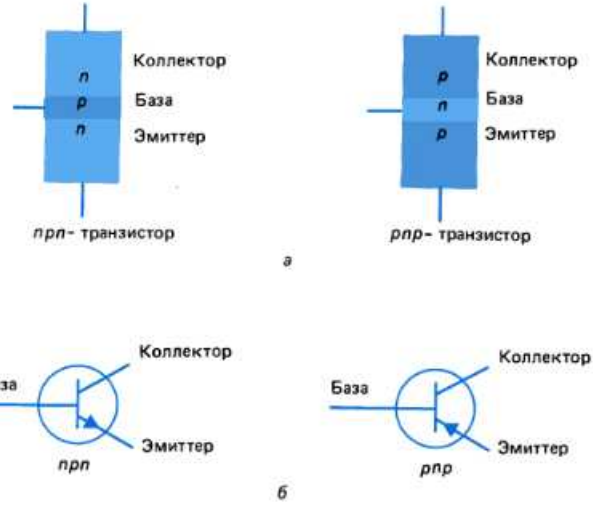


Рис. 41.25. *а* – схема *npn*- и *pnp*-транзисторов; *б* – условные обозначения *npn*- и *pnp*-транзисторов.

притягиваются к базе. Так как толщина базы очень мала (около 1 мкм), большинство электронов свободно проходит на коллектор, который находится под положительным напряжением. Между коллектором и эмиттером протекает большой ток I_C, тогда как ток базы I_B оказывается гораздо более слабым. Небольшие изменения напряжения на базе, обусловленные входным сигналом, вызывают сильные изменения тока в цепи коллектора I_C и, следовательно, большие изменения в падении напряжения на выходном сопротивлении R_C. Таким образом, транзистор позволяет усиливать слабые сигналы. Транзисторы служат основными элементами современных электронных усилителей всех типов.

Аналогичным образом работает и *pnp*-транзистор, где вместо электронов происходит перемещение дырок. В нормальном режиме напряжение на коллекторе, как и напряжение на базе, отрицательно.

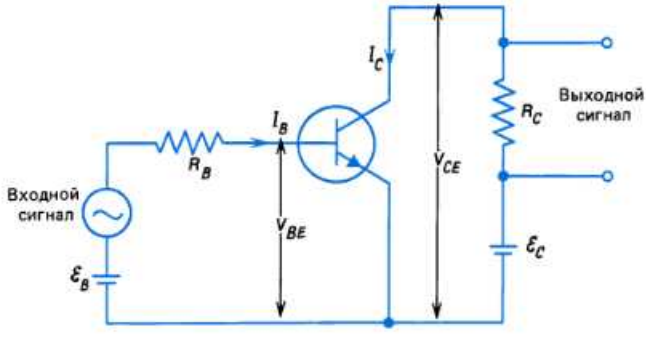


Рис. 41.26. *npn*-транзистор, используемый в качестве усилителя.

Заключение

В 1925 г. Шредингер и Гейзенберг независимо разработали новую теорию, получившую название *квантовой механики*, которая ныне считается основной теорией явлений микромира. По своей природе это статистическая теория в противоположность детерминизму классической физики. Согласно квантовомеханическим представлениям, электроны в атоме не имеют вполне определенных орбит, а образуют своего рода «облако». Это электронное облако можно интерпретировать как электронную волну, размытую в пространстве, или как распределение вероятности для электрона как частицы.

К числу наиболее важных особенностей квантовой механики принадлежит *принцип неопределенности* Гейзенберга. Он является следствием корпускулярно-волнового дуализма и неизбежного взаимодействия наблюдателя с наблюдаемым предметом. В одной из формулировок принцип неопределенности утверждает, что положение x и импульс p частицы не могут быть точно измерены одновременно: произведение неопределенностей $\Delta x\,\Delta p$ не может быть меньше $h/(2\pi)$:

$$\Delta x\,\Delta p \geqslant \frac{h}{2\pi}.$$

Другая формулировка этого принципа утверждает, что неопределенность в энергии ΔE (или несохранение энергии) в течение интервала времени Δt удовлетворяет неравенству

$$\Delta E\,\Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}.$$

Согласно квантовой механике, состояние электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами: n, l, m_l и m_s. Главное квантовое число n может принимать любые целочисленные значения (1, 2, 3, ...) и соответствует квантовому числу в старой теории Бора. Орбитальное квантовое число l может принимать целочисленные значения от 0 до $n-1$. Магнитное квантовое число m_l может принимать целочисленные значения от $-l$ до $+l$, и спиновое квантовое число m_s может быть либо $+{}^1/_2$, либо $-{}^1/_2$. Энергетические уровни атома водорода зависят от n, а у атомов других элементов могут зависеть от n и l. Во внешнем магнитном поле спектральные линии расщепляются (эффект Зеемана), что свидетельствует о зависимости энергии от магнитного квантового числа m_l. Точные измерения спектральных линий обнаруживают расщепление каждой спектральной линии на несколько близких линий, даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Эта тонкая структура спектральных линий обусловлена очень слабой зависимостью энергии от m_l и m_s.

Распределение электронов по уровням в многоэлектронных атомах подчиняется *принципу запрета Паули*, согласно которому в одном и том же квантовом состоя-

нии не могут находиться два электрона, т. е. два электрона не могут иметь одинаковые наборы квантовых чисел n, l, m_l и m_s. Электроны группируются в оболочки (с одинаковым n) и подоболочки (с одинаковым l). Оболочечная структура атомов приводит к периодичности свойств химических элементов.

Вопросы

1. Сравните волну материи ψ а) с волной на струне; б) с электромагнитной волной. Отметьте сходство и различие.
2. Объясните, в чем теория атома Бора несовместима с квантовой механикой. В частности, обратите внимание на принцип неопределенности.
3. Объясните, почему, чем массивнее тело, тем легче предсказать его положение.
4. Используя принцип неопределенности, объясните, почему бейсбольный мяч имеет точно определенные положение и скорость, а положение и скорость электрона нельзя одновременно точно измерить.
5. Не возникает ли некой аналогии с принципом неопределенности при опросе общественного мнения: не воздействуем ли мы на общественное мнение, производя опрос?
6. Холодный термометр помещен в чашку с горячим бульоном. Будут ли показания термометра совпадать с температурой бульона до измерения?
7. Предположим, что постоянная Планка значительно больше своего истинного значения. Как отразилось бы это на нашей повседневной жизни?
8. В чем ньютоновская механика противоречит квантовой механике?
9. Чем отличается строение атома по Бору от строения атома согласно квантовой механике?
10. Желтая линия ($\lambda = 589$ нм) в спектре натрия в действительности представляет собой две очень близкие линии. Такое расщепление обычно объясняют «внутренним» эффектом Зеемана. В чем он состоит? (Подсказка: перейдите в систему отсчета электрона.)
11. Какая из следующих электронных конфигураций запрещена: а) $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^3$; б) $1s^2\,2s^2\,2p^4\,3s^2\,4p^2$; в) $1s^2\,2s^2\,2p^8\,3s^1$?
12. Выпишите полностью электронную конфигурацию атома урана.
*13. Сравните спонтанное и вынужденное излучение.
*14. Чем лазерное излучение отличается от обычного света? Что между ними общего?
*15. Объясните, почему луч лазера мощностью 0,0005 Вт, сфотографированный на некотором расстоянии, кажется гораздо ярче света уличной лампы мощностью 1000 Вт?
*16. Кремниевый полупроводник легирован фосфором. Будут ли примесные атомы донорами или акцепторами? Какого типа получится полупроводник?
*17. Объясните, каким образом транзистор можно использовать в качестве электронного ключа.
*18. Опишите, каким образом *pnp*-транзистор можно использовать в качестве усилителя.

Задачи

Раздел 41.3

1. (I) Скорость протона составляет $(8{,}880 \pm \pm 0{,}012)\cdot 10^5$ м/с. С какой максимальной точностью можно измерить его положение?
2. (I) Электрон находится на возбужденном уровне атома в течение 10^{-8} с. Чему равна минимальная неопределенность (в электронвольтах) в энергии уровня? Чему равна эта неопределенность (в процентах) для первого возбужденного уровня атома водорода?
3. (I) Положение электрона можно измерить с точностью $1{,}6\cdot 10^{-8}$. С какой точностью можно определить его скорость?
4. (II) Оцените минимальную энергию нейтрона в типичном ядре радиусом 10^{-15} м.
5. (II) Пуля массой 12 г вылетает из ружейного ствола со скоростью 450 м/с. а) Какая длина волны соответствует пуле? б) Положение пули известно с точностью до 0,55 см (радиус ствола). Чему равна минимальная определенность ее скорости? в) Как далеко могла бы уклониться от центра мишени пуля при стрельбе с дистанции 300 м, если бы точность попадания определялась принципом неопределенности? (Неразумность такого предположения вряд ли нуждается в комментариях.)
6. (II) Электрон и бейсбольный мяч массой 150 г движутся со скоростью 220 м/с, измеренной с точностью 0,065%. Вычислите неопределенность в положении мяча и электрона и сравните полученные результаты.

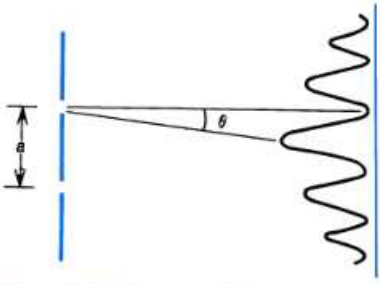


Рис. 41.27. К задаче 41.10.

7. (II) Пользуясь принципом неопределенности, покажите, что если бы электрон находился в ядре ($r \approx 10^{-15}$ м), то неопределенность в его энергии достигала бы сотен мегаэлектронвольт. (Так как электроны с такими энергиями не наблюдались, мы заключаем, что электронов в ядре нет.)

8. (II) Принцип неопределенности можно записать для угловых величин следующим образом:

$$\Delta L \Delta\phi \geqslant \frac{h}{2\pi},$$

где L – момент импульса вдоль данной оси, а ϕ – угловое положение в плоскости, перпендикулярной этой оси. а) Приведите соображения в обоснование этого соотношения. б) Электроны в атомах имеют точно определенные квантованные значения момента импульса без всякой неопределенности. Что можно в этой связи сказать о неопределенности углового положения и о концепции электронной орбиты?

9. (II) Пользуясь принципом неопределенности, оцените неопределенность положения электрона в основном состоянии атома водорода. [Подсказка: импульс электрона вычислите на основе боровской модели (разд. 40.9).] Полученный результат сравните с боровским радиусом.

10. (II) Предположим, что в эксперименте с двумя щелями, проводимом с электронами (или фотонами), мы используем индикаторы, для того чтобы определить, через какую щель проходит каждый электрон (разд. 41.2). Эти индикаторы определяют координату y электрона с точностью $a/2$, где a – расстояние между щелями. Пользуясь соотношением неопределенности, покажите, что интерференционная картина исчезнет. [Подсказка: покажите прежде всего, что угол θ между максимумами и минимумами интерференционной картины характеризуется $\lambda/2a$ (рис. 41.27).]

11. (II) С какой точностью можно измерить положение электрона с энергией 1,50 кэВ, если энергия известна с точностью 1%?

12. (III) Карандаш длиной 20 см поставлен на острие. В классической физике это положение (неустойчивого) равновесия, и карандаш, если он установлен строго вертикально, может простоять на острие неограниченно долго. Квантовомеханический анализ показывает, что карандаш должен упасть. а) На чем основано квантовомеханическое предсказание? б) Оцените (с точностью до множителя 2), спустя какое время карандаш упадет на стол, если он был сначала установлен по возможности точно.

Разделы 41.6 и 41.7

13. (I) Сколько разных состояний у электрона с главным квантовым числом $n = 5$?

14. (I) Перечислите квантовые числа каждого электрона в основном состоянии атома магния ($Z = 12$).

15. (I) Сколько электронов может находиться в подоболочке с $n = 6$, $l = 3$?

16. (I) Какие значения могут принимать m_l и m_s при $n = 4$, $l = 3$?

17. (I) Перечислите все квантовые числа каждого электрона в основном состоянии атома углерода ($Z = 6$).

18. (I) Вычислите величину момента импульса электрона в состоянии атома водорода с $n = 3$, $l = 2$.

19. (II) С помощью формулы Бора для радиуса электронной орбиты оцените среднее расстояние до ядра электрона, находящегося на ближайшей к ядру ($n = 1$) орбите атома урана ($Z = 92$). Какая энергия необходима для удаления из атома этого электрона с самой внутренней орбиты?

20. (II) С помощью теории Бора оцените энергию связи третьего электрона атома лития ($Z = 3$). Экспериментально измеренное значение равно 5,36 эВ.

21. (II) Энергия ионизации (связи) внешнего электрона атома бора равна 8,26 эВ. а) Определите «эффективный заряд ядра» $Z_{эфф}$ для этого электрона. (Подсказка: воспользуйтесь боровской моделью.) б) Оцените средний радиус его орбиты.

22. (II) Покажите, что максимальное число электронов на подоболочке с орбитальным квантовым числом l равно $2(2l + 1)$.

Раздел 41.8

*23. (I) Какова минимальная длина волны рентгеновского излучения, испускаемого электронами, бомбардирующими экран телевизионного кинескопа с рабочим напряжением 30 кВ? Чему равна максимальная длина волны?

*24. (II) Используя данные из примера 41.2,

оцените длину волны рентгеновского излучения, возникающего при переходе атома титана ($Z = 22$) из состояний с $n = 2$ в состояние с $n = 1$.

*25. (II) Оцените длину волны излучения, возникающего при переходе атома железа ($Z = 26$) из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$.

*26 (II) С помощью теории Бора оцените длину волны, отвечающую переходу атома молибдена из состояния с $n = 3$ в состояние с $n = 1$. Экспериментально измеренная длина волны $\lambda = 0{,}063$ нм. Почему нельзя ожидать идеального согласия?

*27. (II) Рентгеновская трубка работает при напряжении 100 кВ (сила тока 20 мА). Почти вся энергия электронов превращается в тепловую. Удельная теплоемкость металлической мишени массой 78 г равна 0,11 ккал/(кг·К). Как будет подниматься ежеминутно температура мишени, если водяное охлаждение отсутствует?

Раздел 41.9

*28. (II) Для сварки отслоившейся сетчатки используется лазер, генерирующий световые импульсы с длиной волны 640 нм, продолжительностью 25 мс, средней энергией 0,50 Вт в импульсе. Сколько энергии может выделяться в импульсе и сколько фотонов в нем?

*29. (II) Оцените угловое расхождение лазерного пучка из-за дифракции, если он выходит через зеркало диаметром 5,0 мм. Длина волны излучения $\lambda = 694$ нм. Чему равен диаметр пучка на искусственном спутнике Земли, находящемся на высоте 1000 км над Землей?

42 Ядерная физика

В начале XX в. благодаря опытам Резерфорда возникло представление о том, что в центре атома находится крохотное по своим размерам, но массивное ядро. Одновременно с созданием квантовой теории и попытками объяснить строение атома и его электронной оболочки начались исследования и атомного ядра. В этой главе мы дадим краткий обзор *ядерной* физики.

42.1. Структура ядра

У физиков начала XX в. существовала важная проблема: обладает ли атомное ядро структурой и какой эта структура могла бы быть? Оказалось, что ядро достаточно сложно, и в его структуре остается много неясного и по сей день. Тем не менее в начале 30-х годов была разработана модель атомного ядра, которая по-прежнему находит широкое применение. Согласно этой модели, ядро состоит из частиц двух типов – протонов и нейтронов. (Не следует забывать о том, что эти «частицы» обладают волновыми свойствами, но для большей наглядности мы будем говорить о протонах и нейтронах просто как о частицах.) **Протон** представляет собой ядро простейшего атома – водорода. Он имеет положительный заряд ($+e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл) и массу

$$m_p = (1{,}6726485 \pm 0{,}0000086) \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

или округленно

$$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Нейтрон, существование которого было установлено только в 1932 г. англичанином Джеймсом Чедвиком (1891–1974), электрически нейтрален ($q = 0$), чем и объясняется его название. Масса нейтрона почти совпадает с массой протона:

$$m_n = (1{,}674954 \pm 0{,}000009) \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

или округленно

$$m_n = 1{,}6750 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Нейтроны и протоны, представляющие собой два составных элемента атомного ядра, объединяют общим наименованием **нуклонов**.

Ядро атома водорода состоит из одного протона, тогда как ядра атомов других химических элементов содержат и нейтроны, и протоны. Различные типы ядер часто называют **нуклидами**. Число протонов в ядре (или в нуклиде) называется **атомным номером** и обозначается буквой Z. Общее число нуклонов, т. е. нейтронов и протонов, обозначается буквой A и называется **массовым числом**. Такое название это число получило потому, что произведение A на массу отдельного нуклона очень близко к массе ядра. У нуклида с 7 протонами и 8 нейтронами $Z = 7$ и $A = 15$. *Число нейтронов* в ядре $N = A - Z$.

Чтобы характеризовать данный нуклид, необходимо указать только A и Z. Обычно химические элементы принято обозначать символом

$$^{A}_{Z}X,$$

где X – символ химического элемента (табл. 41.3), A – массовое число, Z – атомный номер. Например, $^{15}_{7}\mathrm{N}$ означает ядро атома азота, содержащее 7 протонов и 8 нейтронов, т. е. всего 15 нуклонов. У нейтрального атома число электронов, обращающихся вокруг ядра, равно атомному номеру Z (так как заряд электрона по величине равен заряду протона, но противоположен по знаку). Основные свойства атома определяются числом электронов. Следовательно, Z характеризует атом данного химического элемента: углерода, кислорода, золота или какого-нибудь другого элемента. Указывать наряду с символом химического элемента его атомный номер Z, как это сделано выше, излишне. Если это ядро азота, то ясно, что $Z = 7$. Поэтому индекс Z иногда опускают и вместо $^{15}_{7}\mathrm{N}$ записывают просто $^{15}\mathrm{N}$ (читается: «азот пятнадцать»). Однако довольно часто для удобства индекс Z указывают.

В ядрах одного химического элемента (например, углерода) число нейтронов может быть различным, а число протонов всегда одно и то же. Например, в ядрах углерода число протонов всегда равно 6, а число нейтронов может быть равно 5, 6, 7, 8, 9 или 10. Ядра, содержащие одинаковое число протонов, но различное число нейтронов, называются **изотопами**. Например, $^{11}_{6}\mathrm{C}$, $^{12}_{6}\mathrm{C}$, $^{13}_{6}\mathrm{C}$, $^{14}_{6}\mathrm{C}$, $^{15}_{6}\mathrm{C}$ и $^{16}_{6}\mathrm{C}$ – изотопы углерода. Разумеется, распространенность изотопов одного и того же элемента неодинакова. Например, 98,9% встречающегося в природных условиях (на Земле) углерода приходятся на изотоп $^{12}_{6}\mathrm{C}$ и только примерно 1,1% – на изотоп $^{13}_{6}\mathrm{C}$. Приведенные данные (в процентах) называются **распространенностью** соответствующего изотопа в природе[1]. Многие изотопы не встречаются в природе, но могут быть получены в

[1] Приведенные в периодической системе (табл. 41.3) массы элементов получены усреднением масс изотопов по их распространенности в природе.

лаборатории с помощью ядерных реакций (о которых мы расскажем позднее). Более того, все трансурановые элементы (с $Z > 92$) не встречаются в природе и могут быть получены только искусственно.

Приближенно размеры ядер были впервые определены Резерфордом в опытах по рассеянию заряженных частиц. Разумеется, мы не можем говорить о точных размерах ядра из-за корпускулярно-волнового дуализма: пространственные размеры ядра будут несколько размыты. Тем не менее грубо «размеры» ядра поддаются измерению, и наиболее точные из последних измерений были проведены путем рассеяния быстрых электронов на ядрах. Оказалось, что ядра имеют примерно сферическую форму, причем радиус возрастает в зависимости от A приближенно согласно формуле:

$$r \approx (1{,}2 \cdot 10^{-15}\ \text{м})\, A^{1/3} \tag{42.1}$$

Так как объем сферы равен $V = {}^4/_3\pi r^3$, мы заключаем, что объем ядра пропорционален числу нуклонов: $V \sim A$. Такую зависимость следовало ожидать, если бы нуклоны были похожи на твердые бильярдные шары: удваивая число шаров, вы тем самым удваиваете объем. Следовательно, все ядра имеют примерно одинаковую плотность.

Один из способов определения масс ядер основан на измерении с помощью масс-спектрометра радиуса кривизны быстро движущихся ядер в магнитном поле (разд. 28.7). Мы уже упоминали о том, что с помощью именно этого прибора было установлено существование различных изотопов одного и того же элемента. Массы ядер принято измерять в *унифицированных атомных единицах массы* (а. е. м.). В этой шкале масса нейтрального атома ${}^{12}_{6}\text{C}$ принята за 12,000000 а. е. м. Соответственно измеренная масса нейтрона составляет 1,008665 а. е. м., протона – 1,007276 а. е. м., а нейтрального атома водорода ${}^{1}_{1}\text{H}$ (протон плюс электрон) – 1,007825 а. е. м. Массы многих нуклидов приведены в приложении Г. (Следует подчеркнуть, что в таблицах приведены, как обычно, массы *нейтральных атомов*, а не голых ядер.)

Массы часто выражают в единицах энергии электронвольт. Использование единиц энергии возможно из-за того, что масса и энергия взаимосвязаны и точная связь между ними описывается формулой Эйнштейна $E = mc^2$ (гл. 39). Так как масса нейтрального атома водорода ${}^{1}_{1}\text{H}$ равна $1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг, или 1,007825 а. е. м., справедливо равенство 1,0000 а.е.м. $= (1{,}0000/1{,}007825) \cdot (1{,}6736 \times \times 10^{-27}\ \text{кг}) = 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг. Эта масса эквивалентна энергии $E = mc^2 = (1{,}6606 \cdot 10^{-27}\ \text{кг})\,(2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})^2 / (1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж/эВ}) = 931{,}5$ МэВ. Точные современные значения равны

$$1\ \text{а. е. м.} = (1{,}6605655 \pm 0{,}0000086) \cdot 10^{-27}\ \text{кг} = (931{,}5016 \pm \pm 0{,}0026)\ \text{МэВ}/c^2;$$

Таблица 42.1. Массы покоя в килограммах, атомных единицах массы и МэВ/c^2

Частица	Масса		
	кг	а. е. м.	МэВ/c^2
Электрон	$9{,}1095 \cdot 10^{-31}$	0,00054858	0,51100
Протон	$1{,}67265 \cdot 10^{-27}$	1,007276	938,28
Атом $^1_1$H	$1{,}67356 \cdot 10^{-27}$	1,007825	938,79
Нейтрон	$1{,}67500 \cdot 10^{-27}$	1,008665	939,57

их можно округлить до

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931{,}5 \text{ МэВ}/c^2 .$$

Массы покоя некоторых частиц приведены в табл. 42.1.

42.2. Энергия связи и ядерные силы

Общая масса ядра, как показывает следующий пример, всегда меньше суммы масс составляющих его протонов и нейтронов.

Пример 42.1. Сравните массу ядра $^4_2$He с массой составляющих его нуклонов.

Решение. Масса нейтрального атома $^4_2$He, как видно из приложения Г, равна 4,002603 а. е. м. Суммарная масса двух нейтронов и двух протонов (включая массу двух электронов) равна

$$2m_n = 2{,}017330 \text{ а. е. м.}$$
$$2m(^1_1\text{H}) = 2{,}015650 \text{ а. е. м.}$$
$$4{,}032980 \text{ а. е. м.}$$

(Нам почти всегда приходится иметь дело с массами нейтральных атомов, т. е. ядер с Z электронами, так как на опыте измеряются массы нейтральных атомов. Следовательно, при сравнении масс ядер необходимо учитывать массы электронов. Именно поэтому мы используем в нашем примере массу нейтрального атома $^1_1$H, а не массу одного протона.)

Мы видим, что измеренная масса $^4_2$He на величину 4,032980 а. е. м. − 4,002603 а. е. м. = 0,030377 а. е. м. меньше суммарной массы нуклонов, входящих в состав ядра $^4_2$He. Как это может быть? На что пошла часть массы?

В действительности она превратилась в энергию (излучения, кинетическую энергию и т. п.). Разность масс (или энергий) для $^4_2$He равна (0,030377 а. е. м.)(931,5 МэВ/а. е. м.) = 28,30 МэВ. Эта разность называется **полной энергией связи** ядра. Она показывает, какую энергию необходимо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его протоны и нейтроны. Если бы масса ядра $^4_2$He была в точности равна массе двух нейтронов и двух протонов, то ядро распадалось бы самопроизвольно без сообщения ему дополнительной энергии. Для обеспечения стабильности ядра его масса *должна* быть меньше массы составляющих его нуклонов. Заметим, что энергия связи не содержится в

самом ядре – это энергия, которой недостает ядру по сравнению с суммарной массой составляющих его нуклонов.

Энергию связи ядра уместно сравнить с энергией связи электронов в атоме. В гл. 40 мы видели, что энергия связи электрона, например, в атоме водорода равна 13,6 эВ. Масса атома водорода $^1_1\mathrm{H}$ меньше суммарной массы одного протона и одного электрона на 13,6 эВ. По сравнению с полной массой атома водорода (938 МэВ) это – очень малая величина (примерно 10^{-8}), и для практических целей разностью масс можно пренебречь. Энергии связи ядер примерно в 10^6 раз больше энергий связи атомов и поэтому оказываются гораздо более важными.

Удельной энергией связи (или **средней энергией связи на нуклон**) по определению называют полную энергию связи ядра, деленную на число нуклонов в ядре A. Для $^4_2\mathrm{He}$ эта величина составляет 28,3 МэВ/4 = 7,1 МэВ. На рис. 42.1 показана зависимость средней энергии связи на нуклон от A для стабильных ядер. С увеличением A кривая сначала возрастает и выходит на насыщение (примерно 8 МэВ на нуклон) при $A \approx 15$. При $A > 60$ кривая медленно спадает. Это означает, что более тяжелые ядра оказываются менее прочными, нежели ядра элементов в середине периодической системы. (Как мы видим, это обстоятельство обеспечивает высвобождение ядерной энергии в процессах деления и синтеза ядер.)

Ядра атомов можно анализировать не только с точки зрения энергии, но и с точки зрения тех сил, которые удерживают нуклоны в ядре. Протоны и нейтроны не могли бы самопроизвольно образовать ядро, так как все протоны положительно заряжены и поэтому между ними существует отталкивание. Возникает вопрос: почему ядро не разлетается на части, несмотря на силы отталкивания между протонами, стремящиеся развалить его? Так как стабильные ядра *существуют*, ясно, что должна действо-

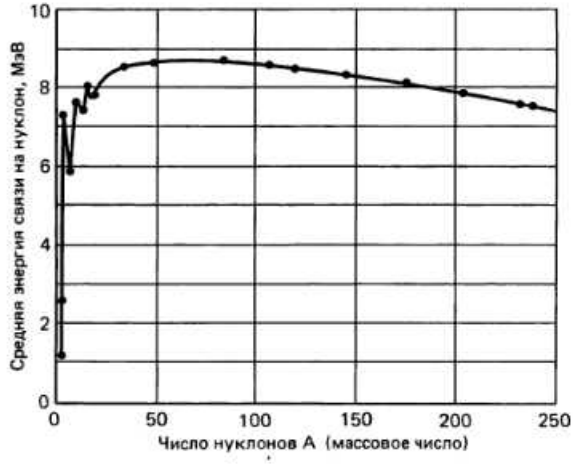


Рис. 42.1. Средняя энергия связи на нуклон как функция массового числа A для стабильных ядер.

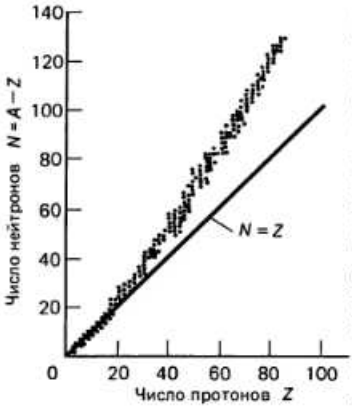


Рис. 42.2. Число нейтронов как функция числа протонов в стабильных ядрах (обозначены точками).

вать какая-то другая сила. Так как эта новая сила превосходит кулоновскую (которая в свою очередь превосходит гравитационное взаимодействие), она получила название **сильного (ядерного) взаимодействия**. Сильное (ядерное) взаимодействие – это притяжение, действующее между всеми нуклонами (в равной степени как протонами, так и нейтронами). Таким образом, протоны благодаря ядерным силам притягивают друг друга и в то же время благодаря кулоновскому взаимодействию отталкивают друг друга. Нейтроны не имеют электрического заряда и поэтому лишь притягивают другие нейтроны или протоны благодаря сильному взаимодействию (ядерным силам).

Сильное взаимодействие оказалось более сложным, чем гравитационное и электромагнитное взаимодействия. Точное математическое описание его пока неизвестно. Тем не менее затрачено немало усилий, чтобы понять природу этого взаимодействия. Одной из важных особенностей сильного взаимодействия является его *короткодействие*: сильное взаимодействие проявляется только на очень малых расстояниях. Сильное взаимодействие двух нуклонов оказывается очень большим, если расстояние между нуклонами меньше 10^{-15} м, но спадает практически до нуля, если расстояние между нуклонами превышает 10^{-15} м. Электромагнитные и гравитационные силы действуют на больших расстояниях и называются поэтому *дальнодействующими*. Сильное взаимодействие обладает и другими особенностями. Например, если нуклид содержит слишком много или слишком мало нейтронов по сравнению с числом протонов, то сильное взаимодействие ослабевает: при нарушении баланса между протонами и нейтронами нуклиды становятся нестабильными. Как показано на рис. 42.2, стабильные ядра обнаруживают тенденцию к выравниванию числа протонов и нейтронов ($N = Z$) вплоть до $A \approx 30$ или $A \approx 40$. За этой областью стабильные ядра содержат больше нейтронов, чем протонов. Этот факт отражает рост кулоновского отталкивания с увеличением атомного номера Z. Поэтому для поддержания стабильности ядер требуется большее число нейтронов, у которых имеется лишь ядерное притяжение. При очень больших Z избыток нейтронов уже не в состоянии скомпенсировать сильно возросшее кулоновское отталкивание и при $Z > 82$ стабильных нуклидов не существует.

Под стабильным ядром мы понимаем ядро, которое существует сколь угодно долго. Что же тогда такое нестабильное ядро? Это ядро, которое превращается в другое ядро в результате радиоактивного распада. Прежде чем перейти к рассмотрению радиоактивности, необходимо упомянуть о существовании еще одного типа ядерных сил, существенно уступающих по своей величине сильному взаимодействию. Они получили название **слабого взаимодействия**. Это взаимодействие проявляется в

существовании определенных типов радиоактивного распада. Два вида ядерных сил – сильное и слабое взаимодействия – вместе с гравитационным и электромагнитным взаимодействиями образуют четыре известных фундаментальных взаимодействия в природе (подробнее см. гл. 43).

42.3. Радиоактивность

Историю ядерной физики принято отсчитывать с 1896 г. В этом году Анри Беккерель (1852–1908) сделал важное открытие: занимаясь исследованием фосфоресценции, он обнаружил, что один из минералов (это был образец, содержащий уран) обладает способностью засвечивать фотопластинку, даже если та завернута в светонепроницаемую бумагу. Было ясно, что минерал испускает какое-то новое излучение, причем самопроизвольно в отличие от рентгеновского излучения. Новое явление получило название **радиоактивности**.

Вскоре после открытия Беккереля Мария Кюри (1867–1934) и ее муж Пьер Кюри (1856–1906) выделили два ранее неизвестных химических элемента, обладавших высокой радиоактивностью. Эти элементы получили названия полоний и радий. Вскоре затем были открыты и другие радиоактивные элементы. Во всех случаях на радиоактивность не влияли самые интенсивные физические и химические воздействия, в том числе сильный нагрев или охлаждение, обработка сильнодействующими химическими реагентами. Вскоре стало ясно, что источником радиоактивности являются недра атома – атомное ядро. Стало ясно также, что радиоактивность возникает в результате *распада* нестабильного ядра. Ядерные силы вызывают нестабильность некоторых изотопов, и они распадаются с испусканием того или иного излучения.

Многие нестабильные изотопы встречаются в природе. Их радиоактивность называется *естественной радиоактивностью*. Другие нестабильные изотопы могут быть созданы в лабораторных условиях как продукты ядерных реакций (разд. 42.11). Такие изотопы называются *искусственными*, а их радиоактивность – *искусственной радиоактивностью*.

Около 1898 г. Резерфорд и другие исследователи изучали природу излучений, возникающих при радиоактивном распаде. Они обнаружили, что по проникающей способности излучение можно разделить на три различных вида. Излучение одного вида едва проникало сквозь лист бумаги. Излучение второго вида проходило сквозь алюминиевую пластинку толщиной до 3 мм. Излучение третьего вида было особенно проникающим: оно проходило сквозь слой свинца толщиной в несколько сантиметров и могло быть обнаружено с помощью детектора. Эти три вида излучения были названы первыми тремя буква-

Рис. 42.3. В магнитном поле (направленном от читателя перпендикулярно плоскости рисунка) α- и β-лучи изгибаются в противоположные стороны; γ-лучи в магнитном поле не изгибаются.

ми греческого алфавита соответственно: альфа (α)-, бета (β)- и гамма (γ)-излучением (лучами).

Оказалось, что все три вида излучений имеют различный электрический заряд и, следовательно, по-разному отклоняются магнитным полем (рис. 42.3): α-лучи заряжены положительно, β-лучи заряжены отрицательно, а γ-лучи нейтральны. Было обнаружено, что радиоактивные излучения всех трех видов представляют собой уже известные частицы. Гамма-лучи представляют собой фотоны очень высокой энергии, значительно превышающей энергию фотонов рентгеновского излучения. Бета-лучи состоят из электронов, идентичных электронам на орбитах вокруг ядра (хотя электроны β-лучей испускаются ядром). Альфа-лучи (или α-частицы) – это ядра атомов гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, т. е. каждая α-частица состоит из двух протонов и двух нейтронов, связанных вместе.

Рассмотрим теперь эти виды радиоактивного распада более подробно.

42.4. Альфа-распад

Ядро, образующееся в результате испускания исходным ядром α-частицы (ядра ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$), должно отличаться от исходного, так как оно теряет два протона и два нейтрона. Например, известно, что радий-226 (${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$) является источником α-частиц. При распаде он превращается в ядро с $Z = 88 - 2 = 86$ и $A = 226 - 4 = 222$. Ядро с $Z = 86$ – это радон (Rn) (табл. 41.3). Следовательно, при α-распаде радий превращается в радон:

$${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Ясно, что при α-распаде всегда образуется новый химический элемент: *дочернее* ядро (в нашем примере ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$) отличается от *материнского* ядра (в нашем примере ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$). Превращение одного элемента в другой иногда называют **трансмутацией**.

Альфа-распад обусловлен тем, что сильное взаимодействие не в состоянии обеспечить стабильность очень тяжелых ядер. Вследствие короткодействия сильное взаимодействие связывает только соседние нуклоны, в то время как электростатическое отталкивание действует в объеме всего ядра. У очень тяжелых ядер (т. е. при больших Z) кулоновское отталкивание сильно возрастает и действует между всеми протонами, тогда как сильное ядерное взаимодействие проявляется лишь между соседними нуклонами; оно не может противостоять кулоновскому отталкиванию и удержать нуклоны в ядре.

Нестабильность ядра можно характеризовать энергией связи: энергия связи радиоактивного ядра слишком мала, чтобы ядро было стабильным. Иначе говоря, масса материнского ядра оказывается больше суммарной массы дочернего ядра и α-частицы. Разность масс выделяется в виде кинетической энергии, уносимой в основном α-частицей. Если бы масса материнского ядра была меньше суммарной массы дочернего ядра и α-частицы, то α-распад не происходил бы, так как при этом нарушался бы закон сохранения энергии.

Пример 42.2. Вычислите кинетическую энергию α-частицы, испускаемой при превращении ядра урана $^{232}_{92}\mathrm{U}$ (с массой 232,03714 а. е. м.) в ядро тория $^{238}_{90}\mathrm{Th}$ (с массой 228,02873 а. е. м.).

Решение. Так как масса α-частицы (ядра гелия $^{4}_{2}\mathrm{He}$) равна 4,002603 а. е. м., полная масса продуктов распада равна 228,02873 а. е. м. + 4,002603 а. е. м. = = 232,03133 а. е. м. Уменьшение массы при распаде ядра $^{232}_{92}\mathrm{U}$ составляет 232,03714 а. е. м. − 232,03133 а. е. м. = 0,00581 а. е. м. Эта масса переходит в кинетическую энергию. Так как 1 а. е. м. = 931,5 МэВ, при распаде высвобождается энергия (0,00581 а. е. м.) (931,5 МэВ) ≈ 5,4 МэВ. (С помощью закона сохранения импульса можно показать, что кинетическая энергия α-частицы равна примерно 5,3 МэВ. Следовательно, дочернее ядро, испытывающее при вылете α-частицы отдачу в противоположном направлении, обладает кинетической энергией около 0,1 МэВ.)

Вас может заинтересовать, почему ядра испускают именно комбинацию четырех нуклонов, называемую α-частицей. Почему, например, ядро не испускает просто четыре нуклона или даже один нуклон? Ответ заключается в том, что α-частица сильно связана и ее масса значительно меньше массы четырех отдельных нуклонов. Как было показано в примере 42.1, два протона и два нейтрона в отдельности имеют общую массу 4,03298 а. е. м. Ядро тория $^{228}_{90}\mathrm{Th}$ и четыре нуклона имеют общую массу 232,06171 а. е. м., что превышает массу материнского ядра. Такой распад невозможен, так как он нарушал бы закон сохранения энергии. По соображениям сохранения энергии испускание одного нуклона также почти всегда невозможно.

42.5. Бета-распад

Превращение элементов происходит и при β-распаде ядра, т. е. испускании электрона или β-частицы. Например, β-распад ядра $^{14}_{6}\mathrm{C}$ происходит следующим образом:

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}e.$$

(Символом $^{0}_{-1}e$ здесь обозначен электрон, так как его заряд соответствует $Z = -1$, а поскольку он не является нуклоном и имеет очень малую массу, мы считаем $A = 0$.) При испускании электрона ядро не теряет нуклонов, и полное число нуклонов A в дочернем ядре такое же, как в материнском. Но поскольку был испущен электрон, электрический заряд дочернего ядра отличается от заряда материнского ядра. В нашем примере у материнского ядра $Z = +6$. При β-распаде оно теряет заряд -1, поэтому (согласно закону сохранения заряда) заряд дочернего ядра должен быть на единицу больше материнского, т. е. равен $+7$. Следовательно, у дочернего ядра $Z = 7$, что соответствует ядру атома азота.

Необходимо подчеркнуть, что испускаемый при β-распаде электрон не имеет отношения к орбитальным электронам. Он рождается *внутри самого ядра*: один из нейтронов превращается в протон и при этом (для сохранения заряда) испускает электрон. Свободные нейтроны действительно распадаются подобным образом: $n \rightarrow p + e^{-}$. Чтобы подчеркнуть ядерное происхождение электронов, испускаемых при β-распаде, их часто называют не электронами, а β-частицами. Тем не менее β-частицы ничем не отличаются от орбитальных электронов.

Пример 42.3. Какая энергия выделяется при β-распаде ядра углерода $^{14}_{6}\mathrm{C}$ и его превращении в ядро азота $^{14}_{7}\mathrm{N}$? Необходимые данные возьмите из приложения Г.

Решение. В приложении Г приведены массы нейтральных атомов, поэтому необходимо учитывать число электронов в атоме. У материнского атома шесть орбитальных электронов, поэтому атом нейтрален и имеет массу 14,003242 а. е. м. Дочерний атом в этом распаде $^{14}_{7}\mathrm{N}$ не будет нейтральным, так как у него те же шесть орбитальных электронов, а ядро имеет заряд $+7e$. Но суммарная масса дочернего атома с шестью электронами и испущенного электрона (общее число электронов равно семи) равна массе нейтрального атома азота. Таким образом, масса продуктов распада составляет

(масса ядра $^{14}_{7}\mathrm{N}$ + 6 электронов) + (масса 1 электрона) = масса нейтрального атома $^{14}_{7}\mathrm{N}$ (с 7 электронами) = = 14,003074 а. е. м.

Следовательно, масса до распада равна 14,003242 а. е. м., а после распада 14,003074 а. е. м., поэтому разность масс составляет 0,000168 а. е. м., что соответствует энергии 0,156 МэВ, или 156 кэВ.

Как видно из примера, электрон должен обладать кинетической энергией 156 кэВ. (Дочернее ядро, поскольку его масса во много раз больше массы электрона, при отдаче движется очень медленно и приобретает очень небольшую кинетическую энергию.) В действительности,

тщательные измерения показали, что лишь небольшое число β-частиц обладает кинетической энергией, близкой к этому вычисленному значению; подавляющее большинство испущенных электронов имеет несколько меньшую энергию. Было установлено, что энергия испускаемого электрона может принимать любые значения от нуля до вычисленного выше максимального значения. Это происходит во всех β-распадах. Все выглядело так, как если бы нарушался закон сохранения энергии! Как показали тщательно проведенные эксперименты, импульс и момент импульса также не сохраняются при β-распаде. Физиков встревожила перспектива отказа от законов сохранения, которые так хорошо зарекомендовали себя во всех предыдущих случаях. В 1930 г. Вольфганг Паули предложил выход из создавшегося положения: он высказал гипотезу о том, что при β-распаде помимо электрона испускается еще одна частица, которую очень трудно обнаружить. Гипотетическая частица могла уносить энергию, импульс и момент импульса, что обеспечивало выполнение законов сохранения. Новая частица была названа **нейтрино** (т. е. маленькая нейтральная) выдающимся итальянским физиком Энрико Ферми (1901–1954), разработавшим в 1934 г. детальную теорию β-распада. (Именно в этой теории Ферми постулировал существование четвертого фундаментального взаимодействия, которое получило название «слабое взаимодействие».) Нейтрино имело нулевой заряд и, по-видимому, нулевую массу покоя, хотя по последним данным не исключено, что масса покоя мала, но отлична от нуля. Если масса покоя нейтрино равна нулю, то эта частица очень напоминает по своим свойствам фотон: она нейтральна и движется со скоростью света (или почти со скоростью света, если масса покоя нейтрино отлична от нуля), но обнаружить нейтрино гораздо труднее. В 1956 г. с помощью сложных экспериментов существование нейтрино было подтверждено; но к тому времени у большинства физиков это не вызывало сомнения.

Нейтрино принято обозначать греческой буквой «ню» (ν). С учетом нейтрино β-распад ядра углерода ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ запишется в виде

$$ {}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}. $$

Черта над символом нейтрино означает, что речь идет об «антинейтрино». (Подробнее об античастицах мы расскажем позднее; почему среди продуктов β-распада фигурирует не нейтрино, а антинейтрино, сейчас не важно – это обсуждается в гл. 43.)

Многие изотопы распадаются с испусканием электрона. Все они обладают избытком нейтронов по сравнению с числом протонов. На графике, представленном на рис. 42.2, эти изотопы расположены над стабильными изотопами. А что можно сказать о нестабильных изотопах с дефицитом нейтронов по сравнению с числом

протонов, которые на рис. 42.2 расположены ниже стабильных изотопов? Эти изотопы в свою очередь претерпевают распад с испусканием не электрона, а **позитрона**. Позитрон (обозначаемый e^+- или β^+-частица) имеет такую же массу, как и электрон, но положительный заряд равен $+1e$. Так как по всем свойствам, кроме заряда, позитрон тождествен электрону, он называется *античастицей* электрона[1]. Примером β^+-распада может служить распад ядра неона $^{19}_{10}$Ne:

$$^{19}_{10}\text{Ne} \rightarrow {}^{19}_{9}\text{F} + {}^{0}_{1}e + \nu,$$

где $^{0}_{1}e$ обозначает позитрон (e^+). (Обратите внимание на то, что при β^+-распаде испускается нейтрино, тогда как при β^--распаде – антинейтрино. Таким образом, вместе с нейтрино испускается антиэлектрон (или позитрон), а вместе с антинейтрино – электрон. Подробнее об античастицах см. гл. 43.)

Наряду с испусканием β^-- и β^+-частиц существует и третий процесс того же типа. Он называется *захватом электрона* и состоит в поглощении ядром одного из орбитальных электронов. Например, ядро бериллия $^{7}_{4}$Be при захвате электрона превращается в ядро лития $^{7}_{3}$Li:

$$^{7}_{4}\text{Be} + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{7}_{3}\text{Li} + \nu.$$

Обычно захват электрона происходит с самой внутренней K-оболочки, отсюда и название процесса «K-захват». При K-захвате исчезает один электрон, в ядре один протон превращается в нейтрон и испускается нейтрино. Экспериментально K-захват регистрируется косвенным путем – по рентгеновскому излучению соответствующей длины волны (которое возникает при заполнении электронами вакантного в результате K-захвата состояния).

В β-распаде решающую роль играет слабое взаимодействие. Уникальная особенность нейтрино заключается в том, что оно взаимодействует с веществом только благодаря слабому взаимодействию, что существенно затрудняет его регистрацию.

42.6. Гамма-распад

Гамма-излучение представляет собой фотоны очень высокой энергии. Распад ядра с испусканием γ-излучения во многом напоминает испускание фотонов возбужденными атомами. Подобно атому, ядро может находиться в возбужденном состоянии. При переходе в состояние с более низкой энергией, или основное состояние, ядро испускает фотон. Разрешенные энергетические уровни яд-

[1] Подробнее об античастицах см. гл. 43. Кратко античастицу можно определить как частицу, имеющую такую же массу, как и частица, но противоположный ей заряд.

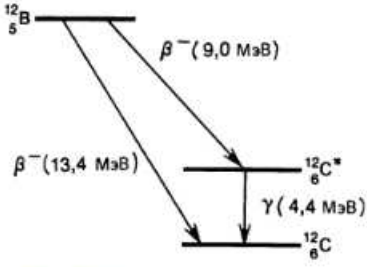


Рис. 42.4. Схема уровней энергии, показывающая, что ядро $^{12}_{5}B$ при β-распаде может переходить в основное состояние ядра $^{12}_{6}C$ (при этом выделяется полная энергия 13,4 МэВ) или в возбужденное состояние (отмеченное знаком *) ядра $^{12}_{6}C$ с последующим распадом в его основное состояние с испусканием γ-лучей с энергией 4,4 МэВ.

ра разнесены по энергии значительно сильнее, чем энергетические уровни атома: расстояние между соседними уровнями в ядре имеет порядок 10^3 или 10^6 эВ по сравнению с несколькими электрон-вольт в случае энергетических уровней атома. Следовательно, энергии испускаемых фотонов могут изменяться от нескольких килоэлектрон-вольт до нескольких мегаэлектрон-вольт. Отвечающее данному распаду γ-излучение имеет всегда одну и ту же энергию. Так как γ-излучение не несет заряда, при γ-распаде не происходит превращения одного химического элемента в другой.

Каким образом атомное ядро переходит в возбужденное состояние? Это может произойти в результате неупругого столкновения с другой частицей. Дочернее ядро, возникающее в результате радиоактивного распада, довольно часто образуется в возбужденном состоянии. Типичный пример показан на схеме уровней энергии, изображенной на рис. 42.4. Ядро бора $^{12}_{5}B$ в результате β-распада может перейти либо непосредственно в основное состояние ядра $^{12}_{6}C$, либо в возбужденное состояние ядра $^{12}_{6}C$ с последующим переходом в основное состояние с испусканием γ-излучения с энергией 4,4 МэВ[1)].

Иногда ядро в течение некоторого промежутка времени остается в возбужденном состоянии, прежде чем испускает γ-излучение (как на рис. 42.4). В этом случае говорят, что ядро находится в *метастабильном состоянии*, а само ядро называется *изомером*.

42.7. Сохранение числа нуклонов и другие законы сохранения

При радиоактивном распаде всех трех видов выполняются классические законы сохранения. Энергия, импульс, момент импульса и электрический заряд сохраняются, т. е. эти величины после распада остаются такими же, как до распада. Установлен и еще один закон сохранения. Это **закон сохранения числа нуклонов**. Согласно этому закону, полное число нуклонов (A) остается неизменным при любом радиоактивном распаде, хотя нуклоны одного вида могут превращаться в нуклоны другого вида (протоны – в нейтроны или наоборот). Закон сохранения числа нуклонов выполняется при радиоактивном распаде всех трех видов. Общие схемы α-, β- и γ-распада приведены в табл. 42.2.

[1)] Возбужденное ядро иногда переходит в основное состояние в результате другого процесса, называемого *внутренней конверсией*. В таком процессе возбужденное ядро взаимодействует с одним из орбитальных электронов и выбивает его из атома с кинетической энергией, которую имело бы γ-излучение при переходе ядра из возбужденного состояния в основное.

Таблица 42.2. Три вида радиоактивного распада[1)]

α-распад
$N(A,Z) \rightarrow N(A-4,\ Z-2) + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
β-распад
β^-: $N(A,Z) \rightarrow N(A,Z+1) + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$
β^+: $N(A,Z) \rightarrow N(A,Z-1) + {}^{0}_{1}e + \nu$
Захват электрона: $N(A,Z) + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \rightarrow N(A,Z-1) + \nu$
γ-распад
$N^*(A,Z) \rightarrow N(A,Z) + \gamma$

[1)] $N(A,Z)$ означает ядро с атомным номером Z и массовым числом A; * означает возбужденное состояние ядра.

42.8. Скорость распада и период полураспада

Макроскопический образец любого радиоактивного изотопа содержит огромное число радиоактивных ядер. Эти ядра распадаются не одновременно, а на протяжении некоторого времени. Процесс распада является случайным процессом: мы не можем точно предсказать, когда произойдет распад данного ядра. Но мы можем, используя теорию вероятностей, приближенно предсказать, сколько ядер образца распадется за данный промежуток времени.

Число распадов ΔN, происходящих за очень короткий промежуток времени Δt, пропорционально Δt и полному числу радиоактивных ядер N:

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t . \qquad (42.2)$$

Коэффициент пропорциональности λ в этом уравнении называется **постоянной распада**. Эта постоянная различна у разных изотопов. Чем больше λ, тем выше скорость распада и активность изотопа. Величина ΔN в уравнении (42.2) равна числу распадов, происходящих за короткий промежуток времени Δt; мы обозначили эту величину ΔN, так как каждый распад соответствует уменьшению числа имеющихся в наличии ядер N на единицу. Иначе говоря, радиоактивный распад – «однократный» процесс (рис. 42.5): после распада материнского ядра и его превращения в дочернее ядро повторный распад невозможен. Знак минус в соотношении (42.2) указывает на то, что N уменьшается.

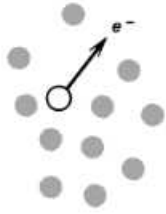
Если в соотношении (42.2) перейти к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, то величина ΔN будет мала по сравнению с N, и мы можем записать уравнение в дифференциальной форме

$$dN = -\lambda N dt . \qquad (42.3)$$

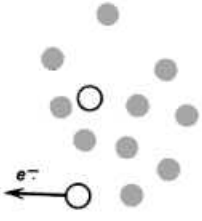
Преобразовав это уравнение к виду

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt ,$$

а



б



в

атом $^{14}_{6}$C (материнское ядро)

атом $^{14}_{7}$N (дочернее ядро)

Рис. 42.5. Радиоактивные ядра распадаются по одному. Число материнских ядер в образце постоянно убывает. Испуская электрон, ядро $^{14}_{6}$C превращается в ядро $^{14}_{7}$N.

мы сможем найти N как функцию времени t. Для этого проинтегрируем уравнение от $t = 0$ до $t = t$:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int_{0}^{t} \lambda dt,$$

где N_0 – число материнских ядер при $t = 0$, а N – число ядер, оставшихся к моменту времени t. Интегрируя, получаем

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t,$$

или

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{42.4}$$

Соотношение (42.4) называется **законом радиоактивного распада**. Оно показывает, что число радиоактивных ядер в данном образце экспоненциально убывает со временем. На рис. 42.6, *а* эта зависимость изображена для ядер $^{14}_{6}$C с постоянной распада $\lambda = 3{,}8 \cdot 10^{-12}$ с$^{-1}$.

Скорость распада, или число распадов в секунду, в чистом образце равна

$$\frac{dN}{dt}.$$

Эта величина называется также *активностью* данного образца. Из соотношений (42.3) и (42.4) следует, что

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

При $t = 0$ активность равна

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 = -\lambda N_0,$$

поэтому

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 e^{-\lambda t}. \tag{42.5}$$

Таким образом, активность также экспоненциально убывает со временем с той же скоростью, что и число радиоактивных ядер N (рис. 42.6, *б*).

Скорость распада любого изотопа часто характеризуют не постоянной распада λ, а его периодом полураспада. **Периодом полураспада** изотопа называется промежуток времени, за который распадается половина исходного количества изотопа в данном образце. Например, период полураспада изотопа $^{14}_{6}$C составляет примерно 5730 лет. Если в какой-то момент времени кусок окаменевшего дерева содержит $1{,}00 \cdot 10^{22}$ ядер $^{14}_{6}$C, то через 5700 лет он будет содержать только $0{,}50 \cdot 10^{22}$ ядер. Еще через 5700 лет в том же куске дерева останется только $0{,}25 \cdot 10^{22}$ ядер и т. д. Это убывание числа ядер показано на рис. 42.6, *а*. Так как скорость распада dN/dt пропорциональна N, то

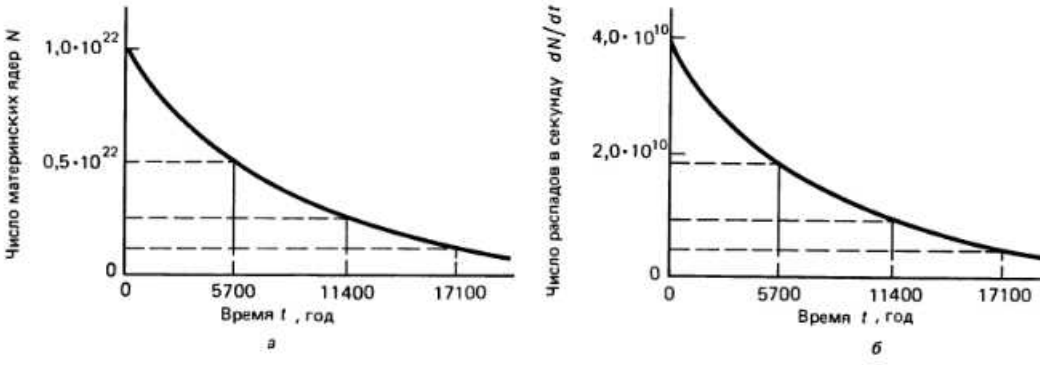


Рис. 42.6. *а* – число материнских ядер N в выбранном образце $^{14}_{6}C$ убывает экспоненциально; *б* – число распадов в секунду также убывает экспоненциально. Период полураспада для $^{14}_{6}C$ составляет около 5700 лет. Это означает, что каждые 5700 лет число материнских ядер N и скорость распада dN/dt убывают наполовину.

dN/dt также убывает вдвое на протяжении каждого периода полураспада (рис. 42.6, *б*).

Периоды полураспада известных радиоактивных изотопов изменяются в диапазоне от 10^{-22} до 10^{28} с (около 10^{21} лет). Периоды полураспада многих изотопов приведены в приложении Г. Нетрудно видеть, что период полураспада (который мы обозначим $T_{1/2}$) обратно пропорционален постоянной распада. Чем больше период полураспада изотопа, тем медленнее распадается данный изотоп и тем меньше λ. Точная зависимость может быть получена из соотношения (42.4), если положить $N = N_0/2$ при $t = T_{1/2}$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \qquad (42.6)$$

Пример 42.4. Период полураспада изотопа $^{14}_{6}C$ составляет 5730 лет. В какой-то момент времени образец содержит $1{,}0 \times 10^{22}$ ядер углерода-14. Чему равна активность образца?

Решение. Вычислим прежде всего постоянную распада λ. Из формулы (42.6) получаем

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{(5730 \text{ лет})(3{,}15 \cdot 10^7 \text{ с/год})} = 3{,}84 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1},$$

так как продолжительность года составляет $(60)(60)(24)(365) = 3{,}15 \cdot 10^7$ с. По формуле (42.3) активность, или скорость распада (знак минус мы опускаем), равна

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N = (3{,}84 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1})(1{,}0 \cdot 10^{22}) = 3{,}8 \cdot 10^{10} \text{ расп./с}.$$

Обратите внимание на то, что график на рис. 42.6, *б* начинается с этого значения, соответствующего начальному значению $N = 1{,}0 \cdot 10^{22}$ ядер на рис. 42.6, *а*.

Пример 42.5. В лаборатории имеется 1,49 мкг чистого $^{13}_{7}N$ с периодом полураспада 10,0 мин. а) Сколько ядер $^{13}_{7}N$ содержалось первоначально в образце? б) Чему равна начальная активность? в) Чему равна активность через 1,00 ч? г) Через какое время (примерно) активность упадет менее чем до одного распада в секунду?

Решение. а) Так как атомная масса изотопа $^{13}_{7}N$ равна 13, то 13 г его содержат $6{,}02 \cdot 10^{23}$ ядер (число Авогадро). Масса лабораторного образца составляет всего лишь $1{,}49 \cdot 10^{-6}$ г, поэтому число ядер азота-13 в нем определяется пропор-

щией

$$\frac{N}{6{,}02\cdot 10^{23}} = \frac{1{,}49\cdot 10^{-6}\ \text{г}}{13{,}0\ \text{г}},$$

т. е. $N = 6{,}90\cdot 10^{16}$ ядер.

б) Из формулы (42.6) получаем $\lambda = (0{,}693)/(600\ \text{с}) = 1{,}16\cdot 10^{-3}\ \text{с}^{-1}$. Следовательно, при $t = 0$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 = \lambda N = 8{,}00\cdot 10^{13}\ \text{расп./с}.$$

в) Через 1,00 ч = 3600 с активность понизится до

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 e^{-\lambda t} =$$

$$= (8{,}00\cdot 10^{13}\ \text{с}^{-1})\, e^{-(1{,}16\cdot 10^{-3}\ \text{с}^{-1})(3600\ \text{с})} =$$

$$= 1{,}23\cdot 10^{12}\ \text{с}^{-1}.$$

Тот же результат можно получить иначе: так как 1,00 ч соответствует шести периодам полураспада (6 · 10,0 мин), активность понизится до $(^1/_2)(^1/_2)(^1/_2)(^1/_2)\times$ $\times (^1/_2)(^1/_2) = (^1/_2)^6 = 1/64$ ее начального значения, или $(800\cdot 10^{13}\ \text{с}^{-1})/64 = 1{,}25\times$ $\times 10^{12}\ \text{с}^{-1}$. [Расхождение между результатами возникает из-за ошибок округления (мы удерживаем только три значащие цифры).]

г) Определим время t, по истечении которого

$$\frac{dN}{dt} = 1{,}00\ \text{с}^{-1}.$$

Из соотношения (42.5) имеем

$$e^{-\lambda t} = \frac{1{,}00\ \text{с}^{-1}}{8{,}00\cdot 10^{13}\ \text{с}^{-1}} = 1{,}25\cdot 10^{-14}.$$

Следовательно,

$$t = -\frac{\ln(1{,}25\cdot 10^{-14})}{\lambda} = 2{,}76\cdot 10^{4}\ \text{с},$$

или 7,66 ч.

42.9. Стабильность и туннельный эффект

Мы видели, что радиоактивный распад происходит только в том случае, когда масса материнского ядра больше суммы масс дочернего ядра и всех испускаемых частиц. Так как системы стремятся перейти в состояние с меньшей внутренней или потенциальной энергией (шарик скатывается вниз, положительный заряд движется к отрицательному), вас может удивить, почему нестабильное ядро сразу не распадается. Иначе говоря, почему $^{238}_{92}\text{U}$ ($T_{1/2} = 4{,}5\cdot 10^9$ лет) и другие изотопы имеют столь большие периоды полураспада?

Ответ на этот вопрос имеет отношение к квантовой механике и природе ядерных сил. Проанализировать ситуацию поможет график потенциальной энергии (рис. 42.7). Рассмотрим распад: $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$. Кривая изображает потенциальную энергию (с учетом массы покоя). Проще всего считать, что α-частица самостоятельно существует внутри ядра $^{238}_{92}\text{U}$. Тогда кривую, изображенную на рис. 42.7, можно интерпретировать как энергию α-частицы внутри ядра урана (точка A) и вне его (точка C). Чтобы попасть из точки A в точку C, α-частица должна преодолеть барьер. В классической физике для этого α-частица должна приобрести дополнительную энергию, равную высоте барьера над точкой A.

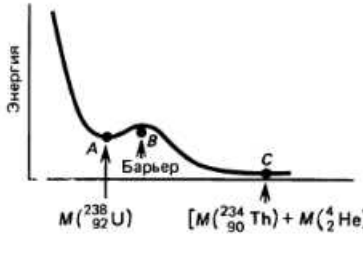


Рис. 42.7. Потенциальный барьер для распада $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$.

Согласно квантовой механике, ядра могут самопроизвольно распадаться без подвода дополнительной энергии

за счет проникновения сквозь барьер. Этот процесс получил название **туннельного эффекта**. С точки зрения классической физики туннельный переход невозможен, так как для α-частицы в точке B происходило бы (внутри барьера) нарушение закона сохранения энергии. Однако согласно принципу неопределенности нарушение закона сохранения энергии на величину ΔE возможно на протяжении промежутка времени Δt, удовлетворяющего соотношению

$$(\Delta E)(\Delta t) \approx h/2\pi .$$

Таким образом, квантовая механика допускает кратковременное нарушение закона сохранения энергии, однако продолжительность этих промежутков времени может оказаться достаточной для проникновения α-частицы сквозь барьер. Чем барьер выше и шире, тем меньше у α-частицы времени для вылета из ядра и тем меньше вероятность такого процесса. Поэтому от высоты и ширины потенциального барьера зависят скорость распада и период полураспада изотопа.

* 42.10. Радиоактивное датирование

Радиоактивность имеет много интересных применений. К их числу относится метод *радиоактивного датирования*, позволяющий определять возраст древних материалов.

Возраст любого предмета, изготовленного из некогда живой ткани, например из дерева, можно определить по естественной радиоактивности изотопа углерода ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Все растения поглощают из воздуха двуокись углерода CO_2, ассимилируют углерод и выделяют кислород. Большинство атомов углерода – это изотоп ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, а небольшая доля (около $1{,}3 \cdot 10^{-12}$) – радиоактивный изотоп ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Отношение числа атомов ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ к числу атомов ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ в атмосфере на протяжении многих тысячелетий остается примерно постоянным, несмотря на то что изотоп ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ распадается с периодом полураспада около 5700 лет. Баланс изотопов углерода поддерживается нейтронами космических лучей, проникающих на Землю из космического пространства. При столкновении с ядрами азота эти нейтроны вызывают превращение $n + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + p$. Нейтрон сталкивается с ядром азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ и поглощается им; в результате испускается протон и образуется ядро ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Непрерывное образование изотопа ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ в атмосфере в основном компенсирует его убыль за счет радиоактивного распада. Пока растение или дерево живет, оно постоянно восстанавливает углерод из двуокиси углерода и использует его в новых тканях и для замены старых. Животные поедают растения и поэтому также постоянно получают свежие порции углерода для своих тканей. Организмы не отли-

чают изотоп $^{14}_{6}C$ от изотопа $^{12}_{6}C$[1]), а так как отношение содержания изотопов $^{14}_{6}C$ к $^{12}_{6}C$ в атмосфере остается примерно постоянным, их относительное содержание в живом организме также примерно постоянно. После того как организм погибает, он перестает поглощать и утилизировать двуокись углерода, а так как изотоп $^{14}_{6}C$ распадается, отношение содержания изотопов $^{14}_{6}C$ к $^{12}_{6}C$ в мертвом организме со временем убывает. Период полураспада изотопа $^{16}_{6}C$ составляет примерно 5700 лет, поэтому отношение $^{14}_{6}C/^{12}_{6}C$ убывает вдвое каждые 5700 лет. Если отношение $^{14}_{6}C/^{12}_{6}C$ для древнего деревянного орудия составляет половину значения этого отношения в живом дереве, то орудие могло быть изготовлено из дерева, срубленного примерно 5700 лет назад. В действительности при датировании с помощью радиоуглеродного метода необходимо вводить поправки, учитывающие, что отношение $^{14}_{6}C/^{12}_{6}C$ в атмосфере не остается строго постоянным. Определение этого отношения для различных исторических периодов было проведено путем сравнения ожидаемых значений с истинными для предметов, возраст которых точно известен (например, для деревьев, возраст которых устанавливается по годичным кольцам).

Радиоуглеродное датирование пригодно лишь для установления возраста предметов «не старше» 40 000 лет. Количество изотопа $^{14}_{6}C$ в более старых предметах обычно слишком мало и не поддается точному измерению. Для датирования более старых предметов можно использовать радиоактивные изотопы с бóльшим периодом полураспада. Например, изотоп урана $^{238}_{92}U$ с периодом полураспада $4{,}5 \cdot 10^{9}$ лет полезен для датирования возраста пород по геологической шкале.

42.11. Ядерные реакции и превращение элементов

При α- или β-распаде дочернее ядро принадлежит химическому элементу, отличному от материнского. Превращение одного химического элемента в другой, называемое *трансмутацией*, происходит и в результате ядерных реакций. Мы говорим, что происходит **ядерная реакция**, если данное ядро сталкивается с другим ядром или какой-нибудь частицей (например, γ-квантом или нейтроном) и в результате между ними происходит взаимодействие. Первое сообщение о наблюдении ядерной реакции принадлежит Эрнесту Резерфорду. В 1919 г. он наблюдал, что при прохождении α-частиц через газообразный азот некоторые частицы поглощались с испусканием протонов.

[1]) Организмы функционируют почти исключительно благодаря химическим реакциям, в которых участвуют только атомные электроны; лишние нейтроны в ядре изотопа практически не оказывают никакого эффекта.

Резерфорд пришел к выводу, что ядра азота превращаются в ядра кислорода в результате реакции

$$^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \to {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H},$$

где $^4_2$He – α-частица, $^1_1$H – протон. С тех пор наблюдалось множество ядерных реакций как в природе, так и в лабораторных условиях.

Уравнения ядерных реакций иногда записывают в сокращенном виде; например, реакцию $^1_0n + {}^{14}_7\text{N} \to {}^{14}_6\text{C} + {}^1_1\text{H}$ записывают в виде $^{14}_7\text{N}(n, p)^{14}_6\text{C}$. Символы химических элементов слева и справа от скобок указывают соответственно исходное и конечное ядра. Символы внутри скобок (n – нейтрон, p – протон) указывают налетающую или падающую (первый символ) и испускаемую (второй символ) частицы.

В любой ядерной реакции электрический заряд и число нуклонов сохраняются. Как показывает следующий пример, эти законы сохранения нередко оказываются весьма полезными.

Пример 42.6. В результате столкновения нейтрона с ядром $^{16}_8$O наблюдается испускание дейтерия. (*Дейтерием* называется изотоп водорода, содержащий один протон и один нейтрон, $^2_1$H.) Какое ядро возникает в результате реакции?

Решение. Столкновение приводит к реакции $^1_0n + {}^{16}_8\text{O} \to ? + {}^2_1\text{H}$. Общее число нуклонов первоначально равно $16 + 1 = 17$, полный заряд $8 + 0 = 8$. Число нуклонов и заряд в правой части уравнения реакции должны иметь такие же значения. Следовательно, у образовавшегося в результате реакции ядра $Z = 7$, $A = 15$. По периодической системе элементов находим, что $Z = 7$ соответствует азоту. Таким образом, в результате реакции образовалось ядро азота $^{15}_7$N. Эту реакцию можно записать в виде $^{16}_8\text{O}(n, d)^{15}_7\text{N}$, где d означает дейтерий $^2_1$H.

Энергия и импульс сохраняются в ядерных реакциях. Это обстоятельство полезно иметь в виду при решении вопроса о том, возможна ли данная ядерная реакция. Например, если суммарная масса продуктов реакции меньше суммарной массы исходных частиц, то реакция сопровождается выделением энергии – в виде кинетической энергии испускаемых частиц. Если же суммарная масса продуктов реакции больше суммарной массы исходных частиц, то реакция требует подвода энергии. Такая реакция происходит только при условии, что налетающая частица обладает достаточно большой кинетической энергией. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 42.7. Может ли произойти реакция $^{13}_6\text{C}(p, n)^{13}_7\text{N}$ при бомбардировке ядра $^{13}_6$C протонами с энергией 2,0 МэВ?

Решение. Найдем массы ядер в приложении Г. Суммарные массы до и после реакции равны:

До реакции	После реакции
$m(^{13}_6\text{C}) = 13{,}003355$	$m(^{13}_7\text{N}) = 13{,}005739$
$m(^1_1\text{H}) = 1{,}007825$	$m(^1_0n) = 1{,}008665$
14,011180	14,014404

(Нам пришлось воспользоваться массой атома $^{1}_{1}H$, а не голого протона, так как массы атомов $^{13}_{6}C$ и $^{13}_{7}N$ включают в себя массы электронов, а число электронов в правой и левой частях уравнения реакции должно быть одинаковым, так как в ходе ядерной реакции электроны не рождаются и не уничтожаются.) Масса продуктов превышает массу исходных частиц на 0,003224 а.е.м. · 931,5 МэВ/а.е.м. = 3,00 МэВ. Следовательно, чтобы вызвать эту реакцию, необходима энергия; протоны с энергией 2,0 МэВ не могут инициировать такую реакцию. Следовательно, реакция не произойдет. Кинетическая энергия протонов должна быть несколько больше 3,00 МэВ, чтобы реакция имела место: 3,00 МэВ достаточно для сохранения энергии, но протон с такой энергией привел бы к образованию ядра $^{13}_{7}N$ и нейтрона $^{1}_{0}n$ с нулевой кинетической энергией и, следовательно, нулевым импульсом. Так как импульс налетающего протона не равен нулю, нарушился бы закон сохранения импульса. Более сложные вычисления показывают, что для сохранения энергии и импульса минимальная энергия протона (называемая *пороговой энергией*) должна составлять в данном случае 3,23 МэВ. См. задачу 40.

Изучение искусственного превращения элементов испытало резкий подъем в 30-х годах нашего века, когда Энрико Ферми показал, что нейтроны наиболее эффективны для инициирования ядерных реакций, и в частности получения новых элементов. Так как нейтроны не имеют электрического заряда, они не отталкиваются положительными ядрами, как протоны или α-частицы (которым приходится преодолевать так называемый кулоновский барьер). Следовательно, вероятность того, что нейтрон попадет в ядро и вызовет ядерную реакцию, гораздо выше, чем для заряженных частиц[1], особенно при низких энергиях. С 1934 по 1936 г. Ферми со своими сотрудниками в Риме получили много ранее неизвестных изотопов, бомбардируя различные элементы нейтронами. Ферми понял, что при бомбардировке нейтронами самого тяжелого из известных элементов – урана можно получить новые элементы с атомными номерами, большими, чем у урана. После нескольких лет упорной работы появились указания на то, что получены два новых элемента: нептуний ($Z = 93$) и плутоний ($Z = 94$). Окончательное подтверждение возможности получения этих «трансурановых» элементов было получено спустя несколько лет в Калифорнийском университете в Беркли. Соответствующие ядерные реакции приведены на рис. 42.8.

$n + {}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{92}U$

Захват нейтрона ядром $^{238}_{92}U$

${}^{239}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{93}Np + e^- + \bar{\nu}$

β-распад ядра $^{239}_{92}U$ в ядро $^{239}_{93}Np$

${}^{239}_{93}Np \rightarrow {}^{239}_{94}Pu + e^- + \bar{\nu}$

Образование плутония-239 в результате β-распада ядра $^{239}_{93}Np$

Рис. 42.8. Нептуний и плутоний образуются в серии реакций после бомбардировки $^{238}_{92}U$ нейтронами.

Вскоре обнаружилось, что при облучении урана Ферми в действительности наблюдал еще более необычный процесс, которому суждено было сыграть исключительно важную роль в судьбах всего мира.

42.12. Деление ядер

В 1938 г. немецкие ученые Отто Ган и Фриц Штрассман сделали удивительное открытие. Вслед за работами Ферми они обнаружили, что при бомбардировке урана нейтронами иногда возникают ядра, примерно вдвое более

[1] Мы имеем в виду положительно заряженные частицы. Электроны редко вызывают ядерные реакции, так как они не участвуют в сильном взаимодействии.

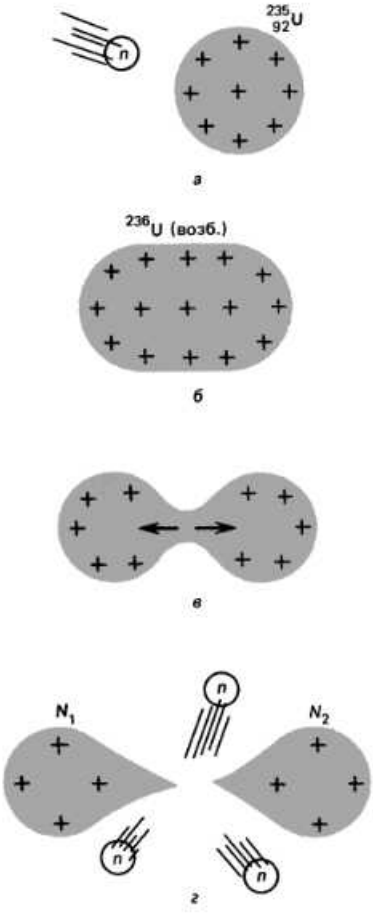


Рис. 42.9. Деление ядра $^{235}_{92}$U после захвата нейтрона.

легкие, чем исходное ядро урана. Эмигранты из нацистской Германии, работавшие в Скандинавии,– Лиза Мейтнер и Отто Фриш, быстро поняли, что́ происходило в этих экспериментах: ядро урана, поглотив нейтрон, распадалось на две примерно равные части. Такое превращение выглядело весьма необычным, так как все известные ядерные реакции сопровождались вылетом из ядра лишь небольших осколков (например, n, p или α).

Новое явление было названо **делением ядра** из-за сходства с делением клетки в биологии. Оказалось, что изотоп $^{235}_{92}$U делится легче, чем более распространенный изотоп $^{238}_{92}$U. Процесс деления можно наглядно изобразить, представив ядро урана в виде капли жидкости. Согласно этой **капельной модели** ядра, нейтрон при поглощении ядром $^{235}_{92}$U передает ему дополнительную внутреннюю энергию (подобно нагреву капли воды) (рис. 42.9, *а*). Образуется **промежуточное состояние**, или **составное ядро** $^{236}_{92}$U (напомним, что исходное ядро $^{235}_{92}$U поглотило один нейтрон). Избыточная энергия этого ядра (которое находится в возбужденном состоянии) приводит к более интенсивному движению отдельных нуклонов, в результате чего ядро приобретает удлиненную форму (рис. 42.9, *б*). Когда ядро принимает форму, изображенную на рис. 42.9, *в*, короткодействующее ядерное взаимодействие нуклонов ослабевает из-за возросшего расстояния между ними, а электростатическое отталкивание ослабевает лишь незначительно и становится доминирующим; в результате ядро расщепляется надвое. Образовавшиеся в результате этого процесса ядра N_1 и N_2 называют *осколками деления* (рис. 42.9, *г*). Деление ядра сопровождается испусканием (обычно двух или трех) нейтронов. Реакцию деления можно записать в виде

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{236}_{92}\mathrm{U} \to \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 + \text{нейтроны}. \qquad (42.7)$$

Промежуточное ядро $^{236}_{92}$U существует менее 10^{-12} с, поэтому процесс деления протекает очень быстро. Масса каждого из осколков деления составляет примерно половину массы ядра урана, хотя массы осколков редко бывают одинаковыми. Типичной является реакция деления

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3{}^{1}_{0}n, \qquad (42.8)$$

хотя существует и немало других реакций.

В результате реакции деления высвобождается огромное количество энергии, так как масса ядра $^{235}_{92}$U значительно больше суммарной массы осколков деления. В этом нетрудно убедиться, если взглянуть на кривую удельной энергии связи (рис. 42.1): для урана удельная энергия связи (средняя энергия связи на один нуклон) составляет примерно 7,6 МэВ/нуклон, а у осколков деления с почти вдвое меньшей массой (в средней части графика $A \approx 100$) удельная энергия связи составляет примерно 8,5 МэВ/нуклон. Так как осколки деления связаны

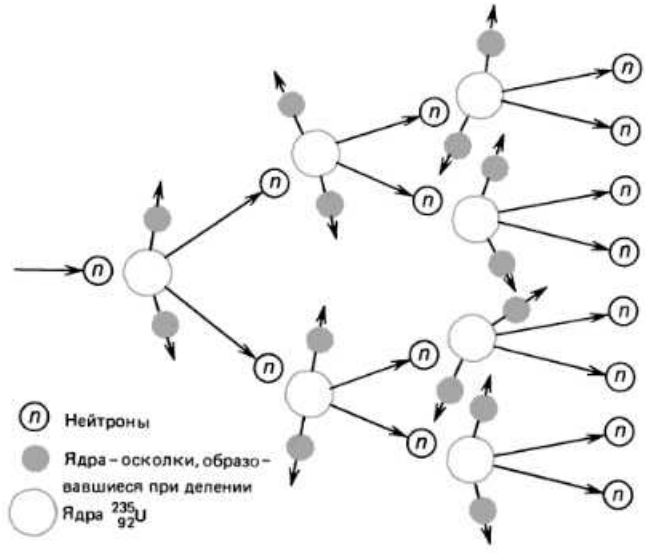


Рис. 42.10. Цепная реакция.

более прочно, они имеют меньшую массу. Разность масс (или энергий) между исходным ядром урана и осколками деления составляет примерно $8{,}5 - 7{,}6 = 0{,}9$ МэВ на нуклон. Так как в каждом процессе деления участвует 236 нуклонов, выделяющаяся при делении ядра урана энергия равна

0,9 МэВ/нуклон (236 нуклонов) $\approx$ 200 МэВ.

В ядерном масштабе это – огромное количество энергии. С практической точки зрения выделяющаяся в одном акте деления энергия ничтожно мала. Но если одновременно делится большое число ядер урана, то в макроскопических масштабах будет выделяться огромная энергия. Ряд физиков, включая и Ферми, поняли, что нейтроны, испускаемые в каждом акте деления, можно использовать для осуществления **цепной реакции**: один нейтрон первоначально вызывает деление одного ядра урана; два или три образовавшихся нейтрона вызовут дополнительные акты деления и т. д., так что процесс лавинообразно нарастает, как условно показано на рис. 42.10. Если бы удалось практически осуществить *самоподдерживающуюся цепную реакцию*, то можно было бы получать огромное количество энергии, выделяющейся в процессе деления. Ферми и его сотрудники в Чикагском университете доказали возможность такой реакции, построив в 1942 г. первый **ядерный реактор**.

При создании любого ядерного реактора приходится решать ряд проблем. Прежде всего вероятность поглощения нейтрона ядром $^{235}_{92}U$ велика только для медленных нейтронов; нейтроны, испускаемые при делении и необходимые для поддержания цепной реакции, – это быстрые нейтроны. Для их замедления необходим материал, ко-

Рис. 42.11. Если масса урана превышает критическую (как в случае *б*), то становится возможной самоподдерживающаяся цепная реакция. Если масса урана меньше критической (как в случае *а*), то большинство нейтронов вылетает из образца до того, как происходят дополнительные деления, и цепная реакция затухает.

торый называется **замедлителем**. У наиболее эффективного замедлителя масса атомов должна как можно меньше отличаться от массы нейтронов, с тем чтобы потери энергии при столкновении были максимальными. (См. гл. 8, в частности пример 8.10.) Следовательно, наилучший замедлитель должен содержать атомы ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$. К сожалению, водород ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ поглощает нейтроны, однако *дейтерий* ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ поглощает нейтроны гораздо слабее и поэтому служит идеальным замедлителем. И водород ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, и дейтерий ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ могут использоваться в реакторе в виде воды. Если в молекуле воды атомы водорода замещены атомами дейтерия, то такая вода называется *тяжелой*. Другим широко используемым замедлителем служит *графит*, состоящий из атомов углерода ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$.

Вторая проблема состоит в том, что возникающие при делении нейтроны могут поглощаться другими ядрами и вызывать иные ядерные реакции, а не дальнейшее деление. В реакторе на «легкой» воде нейтроны поглощаются ядрами ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ наряду с ядрами ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, которые в результате реакции $n + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{239}_{92}\mathrm{U} + \gamma$ превращаются в ядра ${}^{239}_{92}\mathrm{U}$. Природный уран содержит 99,3% изотопа ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ и только 0,7% делящегося изотопа ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Чтобы повысить вероятность деления ядер ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, природный уран **обогащают**[1] с целью повысить процентное содержание изотопа ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Для этого применяют диффузию или центрифугирование.

Третья проблема состоит в том, что часть нейтронов вылетает из активной зоны реактора, не успев вызвать дальнейшее деление (рис. 42.11). Поэтому для того, чтобы происходила самоподдерживающаяся цепная реакция, масса ядерного горючего должна быть достаточно большой. Минимальная масса урана, необходимая для возникновения самоподдерживающейся цепной реакции, называется **критической массой**. Величина критической массы зависит от замедлителя, вида горючего (вместо ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ может использоваться[2] ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$), степени его обогащения. Характерные значения составляют несколько килограммов (т. е. не граммы и не тысячи килограммов).

Для самоподдерживающейся цепной реакции в среднем по крайней мере один нейтрон, возникающий в каждом акте деления, должен вызвать деление одного ядра на следующем этапе. Среднее число нейтронов в каждом акте деления, вызывающих деление других ядер, называется *коэффициентом размножения нейтронов* f. Для самоподдерживающейся цепной реакции должно вы-

---

[1] Необходимость в обогащении урана обычно отпадает в случае реакторов на тяжелой воде.

[2] ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ также делится, но только быстрыми нейтронами (${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ более стабилен, чем ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$). Для инициирования самоподдерживающейся цепной реакции вероятность поглощения быстрого нейтрона с последующим делением слишком мала.

полняться неравенство $f \geqslant 1$. При $f < 1$ реактор называется *подкритическим*, при $f > 1$ – *надкритическим*. В реакторах имеются подвижные *управляющие стержни* (обычно из кадмия), назначение которых состоит в том, чтобы поглощать нейтроны и поддерживать реактор в едва «критическом» состоянии с $f = 1$[1]. Схема типичного энергетического ядерного реактора изображена на рис. 42.12. Энергия деления выделяется в виде тепла, которое используется для получения пара, вращающего турбину, которая соединена с электрогенератором.

Разница между ядерным реактором и атомной бомбой заключается в скорости высвобождения энергии: в реакторе коэффициент размножения нейтронов поддерживается близким к единице, тогда как в атомной бомбе этот коэффициент несколько превышает единицу, отчего цепная реакция развивается очень быстро и происходит взрыв. Чтобы произвести взрыв, достаточно сблизить две подкритические массы и образовать в момент детонации надкритическую массу. При взрыве ядерной бомбы не только выделяется огромное количество энергии, но и возникает интенсивная радиация, наносящая сильные поражения. Источниками ее являются осколки деления, у которых, как и у материнских ядер урана и плутония,

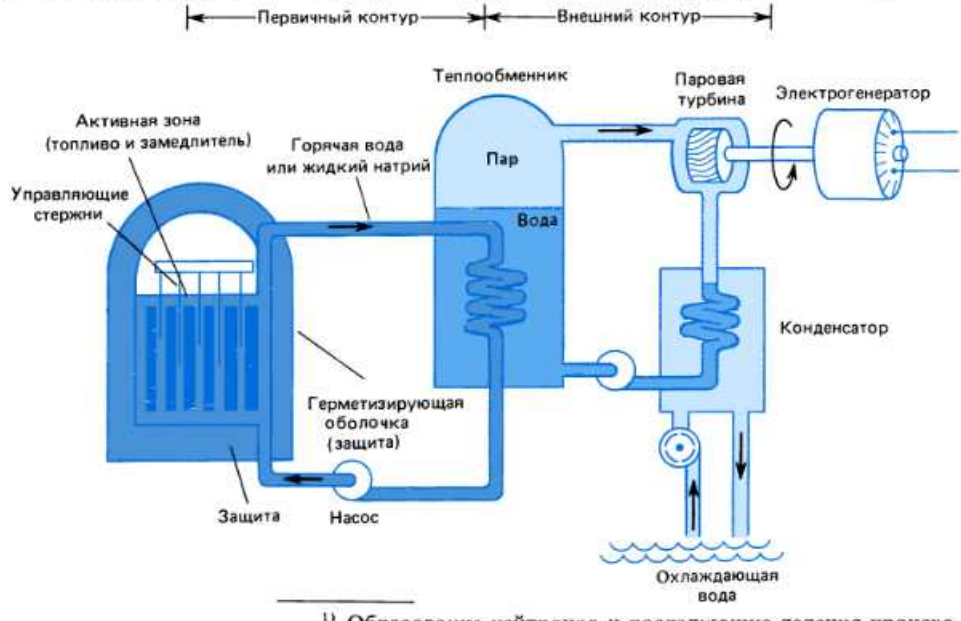


Рис. 42.12. Ядерный реактор. Тепло, выделяющееся в результате процесса деления в тепловыделяющих стержнях, отводится горячей водой или жидким натрием и используется для образования пара в теплообменнике. Пар вращает турбину, вырабатывающую электроэнергию, а затем охлаждается в конденсаторе.

[1] Образование нейтронов и последующие деления происходят так быстро, что манипулировать управляющими стержнями для поддержания $f = 1$ было бы невозможно, если бы не одно счастливое обстоятельство. Дело в том, что небольшой процент высвобождающихся нейтронов «запаздывает». Эти нейтроны образуются при распаде богатых нейтронами осколков деления (или их дочерних ядер) с временами жизни порядка секунд, что обеспечивает достаточное время для поддержания $f = 1$.

примерно на 50% больше нейтронов, чем протонов. Ядра с атомными номерами, характерными для осколков деления (Z от 30 до 60), стабильны, только когда числа протонов и нейтронов в них примерно равны (рис. 42.2). Поэтому осколки деления с большим избытком нейтронов чрезвычайно нестабильны и распадаются. При ядерных взрывах в атмосфере радиоактивные загрязнения носят характер *радиоактивных выпадений*. Такие же осколки деления образуются и в энергетическом ядерном реакторе. От этих радиоактивных отходов затем приходится избавляться.

42.13. Ядерный синтез

Масса любого стабильного ядра меньше суммы масс составляющих его протонов и нейтронов. Например, масса изотопа гелия $^4_2$He меньше суммы масс двух протонов и двух нейтронов. Следовательно, если два протона и два нейтрона привести в соприкосновение, чтобы образовалось ядро гелия, то это сопровождалось бы уменьшением массы. Уменьшение массы проявляется в выделении огромного количества энергии. Образование ядер в процессе слияния отдельных протонов и нейтронов или легких ядер называется **ядерным синтезом**. При взгляде на рис. 42.1 становится ясно, что легкие ядра могут сливаться в более сложное ядро с выделением энергии: такой процесс возможен потому, что удельная энергия связи (средняя энергия связи на один нуклон) у легких ядер меньше, чем у промежуточных ядер (с A от 50 до 100). Согласно современным представлениям, все химические элементы в природе первоначально образовались в ходе ядерного синтеза. Ныне ядерный синтез происходит в недрах звезд, в том числе и нашего Солнца. Именно этот процесс и служит источником испускаемого ими мощного светового излучения.

Пример 42.8. Одна из простейших реакций ядерного синтеза – образование дейтерия $^2_1$H из нейтрона и протона: $^1_1\text{H} + {}^1_0n \rightarrow {}^2_1\text{H} + \gamma$. Какая энергия выделяется в этой реакции?

Решение. Из приложения Г находим, что суммарная масса покоя исходных частиц равна 1,007825 а.е.м. + + 1,008665 а.е.м. = 2,016490 а.е.м. Масса продуктов реакции равна массе дейтерия $^2_1$H, т.е. 2,014102 а.е.м. Следовательно, при синтезе дейтерия выделяется энергия (0,002388 а.е.м.) (931,5 МэВ/а.е.м.) = = 2,22 МэВ. Ее уносят ядро дейтерия H и γ-квант.

Возможность использования энергии ядерного синтеза и создания термоядерного реактора весьма заманчива, но до сих пор проблема построения термоядерного реактора до конца не решена. Наиболее вероятно осуществление термоядерного реактора на следующих реакциях синтеза с участием изотопов водорода $^2_1$H (дейтерий) и $^3_1$H (тритий)

(в скобках указано энерговыделение):

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \quad (4{,}03\ \text{МэВ}), \tag{42.9а}$$

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n \quad (3{,}27\ \text{МэВ}), \tag{42.9б}$$

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n \quad (17{,}59\ \text{МэВ}), \tag{42.9в}$$

$$^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2{}^{1}_{0}n \quad (11{,}33\ \text{МэВ}). \tag{42.9г}$$

Энергия, выделяющаяся в реакции ядерного синтеза в расчете на данную массу горючего, больше, чем при делении ядра. Кроме того, при ядерном синтезе не столь остра проблема захоронения радиоактивных отходов. В качестве горючего термоядерного реактора можно использовать дейтерий, в изобилии встречающийся в воде океанов (распространенность $^{2}_{1}\mathrm{H}$ составляет 0,015%, или около 1 г дейтерия на 60 л воды).

К сожалению, на пути создания надежно действующего термоядерного реактора все еще стоят значительные трудности. Они обусловлены тем, что все ядра имеют положительный заряд и поэтому отталкивают друг друга. Если их сблизить настолько, чтобы в игру вступило сильное взаимодействие, то оно может обеспечить дальнейшее сближение ядер, и тогда произойдет ядерный синтез. Чтобы ядра могли сблизиться, они должны обладать очень высокими скоростями. Так как большие скорости соответствуют высокой температуре, для осуществления ядерного синтеза необходимы очень высокие температуры. Именно поэтому реакторы, в которых происходит ядерный синтез, называют *термоядерными установками*. Температура Солнца и других звезд очень высока, порядка многих миллионов кельвинов; поэтому ядра движутся достаточно быстро для того, чтобы мог произойти ядерный синтез, а высвобождающаяся энергия поддерживает высокую температуру и тем самым создает условия для непрерывного продолжения ядерного синтеза. Солнце и звезды представляют собой самоподдерживающиеся термоядерные реакторы, но в земных условиях достичь столь высоких температур в управляемой термоядерной установке весьма сложно.

После второй мировой войны стало ясно, что при взрыве атомной бомбы развиваются температуры около 10^{8} К. Возникла идея использовать атомную бомбу в качестве запала бомбы другого типа, основанной на использовании гигантской энергии ядерного синтеза,– термоядерной, или водородной, бомбы. Получить неуправляемое выделение колоссальных количеств энергии при взрыве водородной бомбы оказалось достаточно просто. Однако осуществить медленный управляемый отвод энергии, высвобождающейся при ядерном синтезе, оказалось весьма сложной проблемой. Необходимых для ядерного синтеза высоких температур можно достичь накачкой энергии, например, с помощью мощных лазеров. Реальная трудность состоит в необходимости удер-

жать ядра достаточно долго для того, чтобы успело произойти достаточное количество реакций и выделилась достаточная энергия. При температурах, необходимых для ядерного синтеза (около 10^8 К), атомы ионизованы. Возникающая при этом среда состоит из ядер и электронов и называется **плазмой**. Обычные материалы испаряются при температуре в лучшем случае несколько тысяч кельвинов и, следовательно, не пригодны для удержания высокотемпературной плазмы. Один из методов заключается в удержании плазмы магнитным полем. К сожалению, во всех испробованных конфигурациях магнитных ловушек возникают «щели» и утечка заряженных частиц происходит до того, как ядерный синтез успевает произойти в требуемых масштабах. С помощью одной из многообещающих конфигураций магнитного поля (тороидальной), известной под названием «токамак»[1], удалось существенно увеличить время удержания плазмы. Чтобы за время удержания произошло большое число взаимодействий, плазма должна быть достаточно плотной. Как показал в 1957 г. Дж. Д. Лоусон, выход энергии в термоядерном реакторе превзойдет энергетические затраты, если произведение плотности ионов n на время удержания τ будет удовлетворять неравенству

$$n\tau \gtrsim 3 \cdot 10^{14} \text{ с/см}^3.$$

Это неравенство известно как *критерий Лоусона*. В последние годы физикам удалось вплотную подойти к нему, но нужная величина $n\tau$ все еще не достигнута.

Альтернативный метод состоит в использовании твердых гранул горючего, быстро разогреваемых интенсивным лазерным или электронным пучком. Метод *инерционного удержания* весьма перспективен, но осуществить управляемую термоядерную реакцию пока не удалось.

* 42.14. Измерение излучения – дозиметрия

Прохождение заряженных частиц (например, α- и β-частиц), а также γ- и рентгеновского излучений через вещество, в том числе через ткани человеческого тела, приводит к ионизации атомов и молекул и может вызвать значительные поражения. Излучения применяются для лечения некоторых заболеваний, в частности рака. Поэтому важно уметь определять количество, или *дозу*, излучения, проходящего через то или иное вещество. Этим и занимается *дозиметрия*. Рассмотрим наиболее важные способы измерения доз.

Мощность (интенсивность) источника излучения в заданный момент времени характеризуют его активностью, или числом распадов в секунду. Используется специаль-

[1] Сокр. от «ТОроидальная КАмера с МАгнитными Катушками».– *Прим. ред.*

ная единица активности – *кюри* (Ки), определяемая следующим образом[1]:

$1\ \text{Ки} = 3{,}70 \cdot 10^{10}$ расп./с .

Поставщики *радиоизотопов* (радиоактивных изотопов) указывают активность на определенную дату. Об этом не следует забывать, так как со временем активность снижается, особенно если речь идет о короткоживущих изотопах.

Пример 42.9. Пусть препарат $^{32}_{15}\text{P}$ активностью 0,016 мкКи введен в среду, содержащую культуру бактерий. Через 1 ч клетки промывают, и детектор с эффективностью 70% (т. е. регистрирующий 70% β-излучения) регистрирует от всех клеток 720 отсчетов в минуту. Какой процент первоначально введенного изотопа $^{32}_{15}\text{P}$ оказался усвоен клетками?

Решение. Полное число распадов в секунду первоначально составляло $(0{,}016 \cdot 10^{-6})(3{,}7 \cdot 10^{10}) = 590$. Можно было бы ожидать, что счетчик зарегистрирует 70% этой величины, т. е. 410 расп./с. Поскольку он показал 720/60 = 12 расп./с, 12/410 = 0,029, или 2,9%, препарата усвоено клетками.

Самой первой единицей дозы был *рентген* (Р); он определялся по ионизации, производимой излучением. В настоящее время 1 Р определяют как дозу рентгеновского или γ-излучения, при которой в 1 кг воздуха поглощается энергия $0{,}878 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Более удобной, чем рентген, единицей дозы, применимой к излучению любого типа, служит *рад*; 1 *рад – это доза излучения, при которой 1 кг облучаемого вещества поглощает энергию* $1{,}00 \cdot 10^{-2}$ *Дж*[2]. (Для рентгеновского и γ-излучений эта доза очень близка к рентгену.) Выраженная в радах доза излучения зависит не только от интенсивности излучения (числа частиц в секунду) и энергии частиц, но и от типа материала, поглощающего излучение. Например, так как кости плотнее мягких тканей и сильнее поглощают применяемое излучение, то при облучении тела одним пучком в костях поглощается большая доза (в радах), чем в мягких тканях.

Рад – физическая единица дозы. Это энергия, поглощаемая в 1 г вещества. Однако рад является не очень удобной единицей для характеристики биологической опасности излучения. Это объясняется тем, что одинаковые дозы излучений различного типа вызывают разные поражения тканей. Например, 1 рад α-излучения причиняет в 10–20 раз больше повреждений, чем 1 рад β- или γ-излучения. Повышенная опасность α-излучения обусловлена в основном тем, что α-частицы (как и другие тяжелые частицы, например протоны и нейтроны) из-за

[1] В системе СИ единицей активности служит беккерель (Бк): $1\ \text{Бк} = 1/\text{с} = (1/3{,}7) \cdot 10^{-10}$ Ки. – *Прим. ред.*

[2] В системе СИ предусмотрена единица поглощенной дозы грэй (Гр): 1 Гр = 1 Дж/кг.

Таблица 42.3. ОБЭ различных излучений

Тип излучения	Коэффициент качества
Рентгеновское и γ-излучения	~1
β-излучение (электроны)	~1
Быстрые протоны	1
Медленные нейтроны	~3
Быстрые нейтроны	<10
α-частицы и тяжелые ионы	<20

большей массы движутся гораздо медленнее, чем β-частицы или γ-кванты с той же энергией. Поэтому производимая ими ионизация оказывается более сильной и причиняет в большей степени непоправимый ущерб. *Относительная биологическая эффективность* (ОБЭ), или *коэффициент качества* (K), данного типа излучения определяется как доза в радах рентгеновского или γ-излучения, производящего тот же биологический эффект, что и 1 рад данного излучения. Значения ОБЭ нескольких типов излучения приведены табл. 42.3. Это приближенные значения, так как они зависят от энергии частиц и от рассматриваемого типа повреждений.

Произведение дозы в радах на ОБЭ излучения дает единицу, известную под названием «рэм» (или бэр – биологический эквивалент рада):

$$1 \text{ рэм} = 1 \text{ рад} \cdot \text{ОБЭ}.$$

По определению 1 рэм излучения любого типа вызывает примерно одинаковый биологический эффект. Например, 50 рэм быстрых нейтронов вызывает такие же повреждения, как и 50 рэм γ-излучения. Но при этом 50 рэм быстрых нейтронов соответствует дозе только 5 рад, а 50 рэм γ-излучения – дозе 50 рад.

Мы постоянно подвергаемся слабому облучению естественных источников: космических лучей, естественной радиоактивности горных пород и почвы и попадающих в пищу естественно радиоактивных изотопов, например $^{40}_{19}$K. Естественный радиоактивный фон составляет в среднем около 0,13 рэм в год на человека. В среднем человек получает на медицинских рентгеновских установках около 0,07 рэм в год. В США существует рекомендуемый федеральным правительством допустимый верхний предел облучения, составляющий в среднем около 0,5 рэм на человека (имеются в виду только естественные источники излучения). Однако считается, что даже малые дозы излучения повышают вероятность раковых заболеваний и генетических эффектов, поэтому дозы излучения стремятся по возможности свести к минимуму.

Люди, работающие с излучением (в больницах, на атомных электростанциях, в лабораториях), довольно часто получают дозу, значительно превышающую 0,5 рэм/год. Верхний предел профессионального облучения установлен более высоким и составляет 5 рэм/год при облучении всего тела (преимущественно потому, что эти люди сознательно идут на риск).

Пример 42.10. Какую дозу при полном облучении тела получает больной весом 70 кг при облучении его кобальтовым источником ($^{60}_{27}$Co) активностью 1000 Ки, если на него попадает 2% γ-излучения? Изотоп $^{60}_{27}$Co испускает γ-кванты с энергиями 1,33 и 1,17 МэВ (те и другие в равных количествах). Примерно 50% γ-излучения взаимодействует с тканями тела и выделяет в них всю энергию. (Остальное излучение проходит, не вызывая биологического эффекта.)

Решение. Средняя энергия γ-квантов составляет 1,25 МэВ, поэтому полная

энергия, проходящая сквозь тело, равна (1000 Ки) $(3{,}7 \cdot 10^{10}$ расп./Ки·с)(1,25 МэВ) × × 0,020 = $9{,}3 \cdot 10^{11}$ МэВ/с. (Множитель 0,020 соответствует тому, что до тела больного доходит лишь 2,0% испускаемого источником излучения.) Тело поглощает лишь половину энергии, поэтому полученная больным доза составляет $^1/_2 (9{,}3 \cdot 10^{11}$ МэВ/с)$(1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж/МэВ) = $= 7{,}4 \cdot 10^{-2}$ Дж/с. Так как 1 рад = 10^{-2} Дж/кг, общая доза в расчете на полное облучение тела составляет $(7{,}4 \cdot 10^{-2}$ Дж/с)/$(10^{-2}$ Дж/кг · рад) (70 кг) = 0,11 рад/с.

Заключение

Ядерная физика занимается изучением атомных ядер. Ядра состоят из протонов и нейтронов, называемых общим термином *нуклоны*. Полное число нуклонов A в ядре называется *массовым числом*. Число протонов Z называется *атомным номером*. Число нейтронов равно $A - Z$. Изотопы – это ядра с одинаковым Z, но различным числом нейтронов. Изотоп химического элемента X с заданными Z и A принято обозначать $^A_Z X$. Радиус ядра пропорционален $A^{1/3}$, что свидетельствует о примерно одинаковой плотности всех ядер. Массы ядер принято измерять в атомных единицах массы (а.е.м.), выбранных таким образом, что масса изотопа углерода $^{12}_6$C в точности равна 12,000 а.е.м., или в их энергетическом эквиваленте (поскольку $E = mc^2$): 1 а.е.м. = 931,5 МэВ/c^2.

Масса ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов. Разность этих масс (умноженная на c^2) равна *полной энергии связи ядра*. Эта величина характеризует энергию, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его нуклоны. *Удельная энергия связи* (энергия связи, приходящаяся на один нуклон) составляет в среднем около 8 МэВ и минимальна для очень легких и очень тяжелых ядер.

Нестабильные ядра претерпевают *радиоактивный* α-, β- или γ-распад; при испускании α- или β-частиц они превращаются в ядра других элементов; α-частица представляет собой ядро $^4_2$He; β-частица – электрон или позитрон; γ-квант – это фотон высокой энергии. При β-распаде испускается также *нейтрино*.

Нуклоны в ядре удерживаются *сильным (ядерным) взаимодействием*, обладающим малым радиусом действия (короткодействующие силы). *Слабое взаимодействие* проявляется в β-распаде. Сильное, слабое, а также гравитационное и электромагнитное взаимодействия образуют четыре известных фундаментальных взаимодействия.

Радиоактивный распад происходит по закону случая. Число распадов ΔN за время Δt пропорционально числу N имеющихся материнских ядер: $\Delta N = -\lambda N \Delta t$; коэффициент пропорциональности λ называется постоянной распада и служит характеристикой данного ядра. *Период полураспада* $T_{1/2}$ – это время, в течение которого распадается половина ядер радиоактивного образца. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$T_{1/2} = \ln 2/\lambda$. Во всех распадах сохраняются электрический заряд, импульс, момент импульса, энергия-масса и число нуклонов. Радиоактивный распад происходит только при условии, если суммарная масса продуктов распада меньше массы материнского ядра. Уменьшение массы компенсируется кинетической энергией продуктов распада.

Ядерная реакция происходит при столкновении двух ядер (частиц) и приводит к образованию двух или большего числа новых ядер (частиц). В результате ядерных реакций, как и при радиоактивном распаде, происходит превращение одних элементов в другие.

При *делении* тяжелое ядро, например ядро урана, расщепляется на два ядра средних размеров. Изотоп $^{235}_{92}U$ делится медленными нейтронами, в то время как некоторые ядра делятся только быстрыми нейтронами. При делении выделяется много энергии, так как удельная энергия связи у тяжелого ядра меньше, чем у средних ядер, а масса тяжелого ядра больше суммарной массы продуктов деления. Деление ядра сопровождается испусканием нейтронов, что делает возможной *цепную реакцию*. *Критической массой* называется минимальная масса горючего, необходимая для поддержания цепной реакции. В *ядерном реакторе* для замедления испущенных нейтронов необходим замедлитель.

Ядерный синтез, при котором из самых легких ядер образуются более тяжелые ядра, также сопровождается выделением энергии. Построить термоядерный реактор, который давал бы энергию в промышленных целях, пока не удалось из-за трудностей удержания термоядерного горючего в течение достаточно большого промежутка времени при высокой температуре.

Вопросы

1. Откуда мы знаем о существовании сильного (ядерного) взаимодействия?
2. Что общего у различных изотопов одного и того же химического элемента? Чем они различаются?
3. Какие элементы обозначены здесь символами X: а) $^{232}_{92}X$; б) $^{18}_{7}X$; в) $^{1}_{1}X$; г) $^{82}_{38}X$; д) $^{247}_{97}X$?
4. Сколько протонов и сколько нейтронов в ядре каждого из изотопов, перечисленных в вопросе 3?
5. Почему массы атомов многих элементов (табл. 41.3) отличаются от целых чисел?
6. Какие экспериментальные данные свидетельствуют о том, что радиоактивность – ядерный процесс?
7. Изотоп $^{64}_{29}Cu$ необычен тем, что может претерпевать β^--, β^+- и γ-распад. Какие нуклиды образуются в результате каждого из распадов?
8. Сколько нейтронов содержит дочернее ядро распада $^{238}_{92}U$?
9. Укажите как можно больше различий между α-, β- и γ-излучениями.
10. Какой химический элемент образуется при радиоактивном распаде а) $^{24}_{11}Na$ (β^-); б) $^{22}_{11}Na$ (β^+); в) $^{210}_{84}Po$ (α)?
11. Какой химический элемент образуется при радиоактивном распаде а) $^{32}_{15}P$ (β^-); б) $^{35}_{16}S$ (β^-); в) $^{211}_{83}Bi$ (α)?
12. Впишите недостающую частицу или ядро:
а) $^{45}_{20}Ca \rightarrow ? + e^- + \bar{\nu}$;
б) $^{58}_{29}Cu \rightarrow ? + \gamma$;
в) $^{46}_{24}Cr \rightarrow ^{46}_{23}V + ?$;
г) $^{234}_{94}Pu \rightarrow ? + \alpha$;
д) $^{239}_{93}Np \rightarrow ^{239}_{92}U + ?$.
13. Сразу после распада ядра $^{238}_{92}U$ на $^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$ у дочернего ядра тория оказывается 92 электрона. Нормально торий имеет 90 электронов. Что, по-вашему, происходит с двумя лишними электронами?

14. Где на графике, изображенном на рис. 42.2, располагаются изотопы, претерпевающие захват электрона, – выше или ниже кривой стабильности?

15. Почему многие искусственные радиоактивные изотопы редко встречаются в природе?

16. Опишите, чем отличается кривая потенциальной энергии α-частицы в ядре, претерпевающем α-распад, от кривой для стабильного ядра.

17. Впишите недостающие частицы или ядра: а) $^{137}_{56}\mathrm{Ba}\ (n, \gamma)?$; б) $^{137}_{56}\mathrm{Ba}\ (n, ?)\ ^{137}_{55}\mathrm{Cs}$; в) $^{2}_{1}\mathrm{H}\ (d, ?)\ ^{4}_{2}\mathrm{He}$; г) $^{197}_{79}\mathrm{Au}\ (\alpha, d)?$.

18. Изотоп $^{32}_{15}\mathrm{P}$ образуется в результате (n, p)-реакции. Каким должно быть ядро-мишень?

19. При бомбардировке ядра $^{22}_{11}\mathrm{Na}$ дейтронами $^{2}_{1}\mathrm{H}$ испускается α-частица. Какой нуклид при этом образуется?

20. Будут ли осколки деления β^+- или β^--излучателями?

21. При делении ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$ в среднем образуется 2,5 нейтрона, при делении ядра $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ – 2,7 нейтрона. Если из ядер $^{235}_{92}\mathrm{U}$ и $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ изготовить чистые образцы, какой из них будет иметь меньшую критическую массу?

22. Если бы при делении урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ испускалось в среднем 1,5 нейтрона, была бы возможна цепная реакция? Что оказалось бы иным?

23. Обсудите сравнительные достоинства и недостатки, в том числе загрязнение окружающей среды и безопасность различных способов получения энергии: сжигание ископаемого горючего, деление ядра и ядерный синтез.

24. Для чего в схеме ядерного реактора на рис. 42.12 предусмотрен вторичный контур, т. е. почему вода, нагреваемая в ядерном реакторе, не используется непосредственно для вращения турбины?

25. Энергия деления ядер проявляется в форме тепловой энергии чего?

26. Почему вероятность взрыва пористого блока урана выше, если блок находится в водной, а не в воздушной среде?

27. Применима ли формула Эйнштейна а) к делению ядер; б) к ядерному синтезу; в) к ядерным реакциям?

28. Источником световой энергии, излучаемой Солнцем и звездами, служит ядерный синтез. Какие условия в недрах звезд делают возможным протекание термоядерного синтеза?

Задачи

Раздел 42.1

1. (I) Чему равна энергия покоя α-частицы в единицах МэВ/c?

2. (I) π-мезон имеет массу 139 МэВ/c^2. Чему она равна в атомных единицах массы?

3. (I) а) Чему (приближенно) равен радиус ядра $^{64}_{29}\mathrm{Cu}$? б) Чему (приближенно) равно значение A у ядра радиусом $3{,}6 \cdot 10^{-15}$ м?

4. (II) Какой энергией должна обладать α-частица, чтобы подойти вплотную к поверхности ядра $^{238}_{92}\mathrm{U}$?

5. (II) а) Определите плотность ядерной материи в единицах кг/м^3. б) Чему был бы равен радиус Земли, если бы наша планета со своей реальной массой имела плотность ядерной материи? в) Чему был бы равен радиус ядра $^{238}_{92}\mathrm{U}$, если бы оно имело плотность Земли?

6. (II) У какого стабильного ядра радиус (примерно) равен половине радиуса урана?

Раздел 42.2

7. (I) Оцените полную энергию связи ядра $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$.

8. (I) Пользуясь рис. 42.1, оцените полную энергию связи ядра а) $^{238}_{92}\mathrm{U}$; б) $^{107}_{47}\mathrm{Ag}$.

9. (I) Пользуясь данными, приведенными в приложении Г, вычислите энергию связи ядра $^{2}_{1}\mathrm{H}$.

10. (I) Вычислите полную и удельную энергию связи $^{6}_{3}\mathrm{Li}$. Воспользуйтесь приложением Г.

11. (II) Вычислите энергию связи нейтрона в ядре $^{12}_{6}\mathrm{C}$.

12. (II) а) Покажите, что ядро $^{8}_{4}\mathrm{Be}$ (с массой 8,005308 а. е. м.) нестабильно и распадается на две α-частицы. б) Стабильно ли ядро $^{12}_{6}\mathrm{C}$ относительно распада на три α-частицы? Ответ обоснуйте.

Разделы 42.3–42.7

13. (I) Возбужденное ядро $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ испускает γ-квант с энергией 1,33 МэВ и переходит в основное состояние. Чему равна масса возбужденного атома кобальта?

14. (II) Покажите, что распад $^{11}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{10}_{5}\mathrm{B} + p$ невозможен, так как в этом случае нарушался бы закон сохранения энергии.

15. (II) Ядро $^{232}_{92}\mathrm{U}$ испускает α-частицу с кинетической энергией 5,32 МэВ. Что представляет собой конечное ядро и чему (приблизительно) равна масса (в а. е. м.) конечного атома?

16. (II) При превращении $^{23}_{10}\mathrm{Ne}$ (с массой 22,9945 а. е. м.) в результате распада в $^{23}_{11}\mathrm{Na}$ (с массой 22,9898 а. е. м.) чему равна энергия испущенного электрона? Чему равна его минимальная энергия? Чему равна в каждом случае энергия нейтрино?

17. (II) Нуклид $^{32}_{15}\mathrm{P}$ распадается, испуская электрон с максимальной кинетической энергией 1,71 МэВ. а) Укажите дочернее ядро. б) Вычислите массу дочернего атома (в а. е. м.).

18. (II) Изотоп $^{218}_{84}\mathrm{Po}$ (с массой 218,008969 а. е. м.) может распадаться с испусканием либо

α-, либо β-частицы. Какая энергия выделяется в каждом из этих случаев?

19. (II) Какая энергия выделяется при электронном захвате

$^{7}_{4}\mathrm{Be} + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu$?

20. (II) При β^--распаде нуклида $^{191}_{76}\mathrm{Os}$ вылет электрона с энергией 0,14 МэВ сопровождается испусканием γ-квантов с энергиями 0,042 и 0,129 МэВ. а) Какое дочернее ядро образуется в результате распада? б) Начертите схему энергетических уровней, показав на ней основные состояния материнского и дочернего ядер и возбужденные состояния дочернего ядра. В каких из дочерних состояний происходит β-распад нуклида $^{191}_{76}\mathrm{Os}$?

21. (II) а) Покажите, что при β^+-распаде ядра выделяется полная энергия $(M_P - M_D - 2m_e)c^2$, где M_P и M_D – массы материнского и дочернего атомов (нейтральных), m_e – масса электрона или позитрона. б) Определите максимальную кинетическую энергию β^+-частиц, вылетающих при распаде $^{11}_{6}\mathrm{C}$ в $^{11}_{5}\mathrm{B}$. Какова максимальная энергия нейтрино? Какова его минимальная энергия?

22 (III) Покажите, что при α-распаде, например, ядра $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ дочернее ядро уносит $1/(1 + A_D/4)$ общей энергии, где A_D – массовое число дочернего ядра. (Подсказка: воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии.) Какая доля энергии (в процентах) уносится при таком распаде α-частицей?

Разделы 42.8–*42.10

23. (I) а) Чему равна постоянная распада ядра $^{238}_{92}\mathrm{U}$, если его период полураспада равен $4{,}5 \cdot 10^9$ лет? б) Постоянная распада данного ядра равна $6{,}2 \cdot 10^{-5}$ c^{-1}. Каков его период полураспада?

24. (I) Какая доля образца $^{68}_{32}\mathrm{Ge}$ с периодом полураспада около 9 месяцев сохранится через 4,5 года?

25. (II) В результате цепочки распадов нуклид $^{235}_{92}\mathrm{U}$ превращается в нуклид $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$. Сколько α- и β^--частиц испускается в этой цепочке?

26. (II) Период полураспада ядра $^{124}_{55}\mathrm{Cs}$ равен 30,8 с. а) Сколько ядер содержалось первоначально в образце $^{124}_{55}\mathrm{Cs}$, если его масса равна 6,2 мкг? б) Сколько ядер останется через 1,2 мин? б) Какова к этому времени будет активность образца? в) За какое время его активность упадет до величины менее 1 расп./с?

27. (II) Активность образца $^{35}_{16}\mathrm{S}$ равна $8{,}8 \cdot 10^6$ расп./с. Чему в этот момент равна масса образца?

28. (II) Счетчик Гейгера регистрирует активность радиоактивного нуклида на уровне 2880 расп./мин, а через 1,6 ч – 820 расп./мин. Чему равен период полураспада этого нуклида?

29. (II) Изотоп водорода $^{3}_{1}\mathrm{H}$ (*тритий*) имеет период полураспада 12,33 года. Его можно использовать для датирования предметов, возраст которых не превышает 100 лет. Тритий образуется в верхних слоях атмосферы под действием космических лучей и переносится на Землю с дождем. Определите возраст бутылки вина, если активность трития в нем составляет $^{1}/_{10}$ активности в молодом вине.

30. (II) Изотоп рубидия $^{87}_{37}\mathrm{Rb}$ (β-излучатель с периодом полураспада $4{,}9 \cdot 10^{10}$ лет) используется для определения возраста пород и ископаемых. В породах, содержащих останки древних животных, относительное содержание $^{87}_{38}\mathrm{Sr}/^{87}_{37}\mathrm{Rb}$ составляет 0,018. Вычислите возраст ископаемых в предположении, что при формировании горных пород изотопа $^{87}_{38}\mathrm{Sr}$ не было.

31. (II) При $t = 0$ чистый образец радиоактивного изотопа содержит N_0 ядер с постоянной распада λ. Как зависит от времени число N_D дочерних ядер? Предполагается, что $N_D = 0$ при $t = 0$.

32. (II) а) Покажите, что *среднее время жизни* радиоактивного нуклида, определяемое как

$$\tau = \frac{\int_0^\infty N(t)\, t\, dt}{\int_0^\infty N(t)\, dt},$$

удовлетворяет соотношению $\tau = 1/\lambda$. б) Какая доля исходного числа ядер остается спустя среднее времени жизни?

33. (II) Кусок ископаемого дерева содержит 240 г углерода и имеет активность 5,0 расп./с. Определите возраст дерева, если известно, что в живых деревьях отношение $^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}$ составляет около $1{,}3 \cdot 10^{-12}$.

34. (II) При $t = 0$ чистый образец радиоактивного нуклида (материнского) содержит N_{P0} ядер с периодом полураспада T_P. Дочерний нуклид также радиоактивен и имеет период полураспада T_D. а) Определите число дочерних ядер N_D как функцию времени, предполагая, что $N_D = 0$ при $t = 0$. б) Постройте график зависимости N_D от t для случаев $T_P = T_D$, $T_P = 3T_D$, $T_P = {}^{1}/_{3}T_D$. [Подсказка: воспользуйтесь для этого формулой (42.3), внеся в нее необходимые изменения.]

Раздел 42.11

35. (I) Определите, существует ли у реакции $^{2}_{1}\mathrm{H}\,(d, n)\,^{3}_{2}\mathrm{He}$ пороговая энергия.

36. (I) Возможна ли реакция $^{238}_{92}\mathrm{U}\,(n, \gamma)\,^{239}_{92}\mathrm{U}$ на медленных нейтронах? Объясните.

37. (II) Требует ли реакция $^{7}_{3}\mathrm{Li}\,(p, \alpha)\,^{4}_{2}\mathrm{He}$ затрат энергии или идет с выделением энергии? Какая энергия требуется или выделяется?

38. (II) а) Может ли реакция $^{24}_{12}\mathrm{Mg}(n,d)^{23}_{11}\mathrm{Na}$ происходить при бомбардировке магния нейтронами с кинетической энергией 10,0 МэВ? б) Если может, то какая энергия при этом выделяется?

39. (II) В реакции $^{14}_{7}\mathrm{N}(\alpha,p)^{17}_{8}\mathrm{O}$ налетающие α-частицы имеют кинетическую энергию 7,68 МэВ. а) Может ли происходить такая реакция? б) Если да, то чему равна полная кинетическая энергия продуктов? Масса $^{17}_{8}\mathrm{O}$ равна 16,999131 а. е. м.

40. (III) С помощью законов сохранения энергии и импульса покажите, что при реакции $^{13}_{6}\mathrm{C}(p,n)^{13}_{7}\mathrm{N}$ пороговая энергия налетающего протона равна 3,23 МэВ (пример 42.9).

41. (III) С помощью законов сохранения энергии и импульса покажите, что для ядерной реакции, идущей с поглощением энергии, минимальная кинетическая энергия налетающей частицы (*пороговая энергия*) равна $Qm_{pr}/(m_{pr} - m_b)$, где Q – необходимая энергия (разность суммарных масс продуктов и исходных частиц и ядер), m_b – масса покоя налетающей частицы, m_{pr} – суммарная масса покоя продуктов реакции. Предполагается, что перед столкновением с налетающей частицей ядро-мишень покоилось.

Раздел 42.12

42. (I) Вычислите энергию, выделяющуюся при реакции деления $^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{88}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{136}_{54}\mathrm{Xe} + 12{}^{1}_{0}n$. Необходимые данные приведены в приложении Г. Предполагается, что кинетическая энергия налетающего нейтрона очень мала.

43. (I) Какая энергия выделяется в реакции деления 42.8? (Массы $^{141}_{56}\mathrm{Ba}$ и $^{92}_{36}\mathrm{Kr}$ равны соответственно 140,9141 и 91,9250 а. е. м.)

44. (I) Сколько реакций деления происходит в 1 с в ядерном реакторе мощностью 25 МВт, если при каждом акте деления выделяется энергия 200 МэВ?

45. (II) Один из методов обогащения урана основан на диффузии газа UF_6. Вычислите отношение скоростей молекул этого газа, содержащего изотопы $^{235}_{92}\mathrm{U}$ и $^{238}_{92}\mathrm{U}$, от которого зависит этот процесс.

46. (II) Предположим, что среднесуточное потребление мощности в среднем доме составляет 300 Вт. Какая масса $^{235}_{92}\mathrm{U}$ должна разделиться, чтобы удовлетворить годовую потребность такого дома в энергии? (Предполагается, что при каждом акте деления выделяется энергия 200 МэВ.) Какая для этого потребуется полная масса $^{235}_{92}\mathrm{U}$ ($T_{1/2} = 7{,}0 \cdot 10^8$ лет)?

47. (II) Предположим, что коэффициент размножения нейтронов равен 1,0004, а среднее время между последовательными делениями в цепной реакции составляет 1,0 мс. Как возрастет скорость реакции за 1,0 с?

48. (II) Рассмотрим сеть атомных электростанций общей мощностью 4000 МВт. а) Какая масса уранового горючего $^{235}_{92}\mathrm{U}$ может обеспечить работу этих станций в течение 1 года, если предположить, что при каждом акте деления выделяется энергия 200 МэВ? б) Обычно 3% массы $^{235}_{92}\mathrm{U}$ превращается в $^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ – β^--излучатель с периодом полураспада 29 лет. Чему равна полная активность (в кюри) изотопа $^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ сразу после его наработки? (Пренебрегите распадом части стронция за год.)

Раздел 42.13

49. (I) Чему равна средняя кинетическая энергия протонов в центре звезды при температуре 10^7 К?

50. (II) Сколько дейтерия понадобится в год для обеспечения электроэнергией среднего дома, если потребляемая мощность составляет в среднем 300 Вт? Предполагается, что энергия выделяется в результате реакции (42.9б).

51. (II) Какая энергия выделяется на 1 г горючего в реакциях (42.9а) и (42.9в)? Сравните полученные величины с энергией, выделяющейся при делении 1 г урана.

52. (II) В так называемом углеродном цикле, происходящем на Солнце, $^{4}_{2}\mathrm{He}$ образуется из четырех протонов в результате длинной цепи превращений, которая начинается с $^{12}_{6}\mathrm{C}$. Сначала $^{12}_{6}\mathrm{C}$ поглощает протон и переходит в ядро X_1. X_1 распадается с испусканием позитрона β^+ и превращается в ядро X_2. X_2 поглощает протон и переходит в ядро X_3, которое также поглощает протон и превращается в ядро X_4. X_4 претерпевает β^+-распад и превращается в ядро X_5, которое вступает в ядерную реакцию $X_5(p,\ \alpha)X_6$. а) Определите промежуточные ядра, выпишите подробно каждый этап цикла и покажите, что X_6 это снова $^{12}_{6}\mathrm{C}$. (Таким образом, $^{12}_{6}\mathrm{C}$ не расходуется в углеродном цикле.) б) Определите, сколько энергии выделяется на каждом этапе.

53. (II) Сколько энергии (в Дж) содержится в 1 кг воды, если природный дейтерий использовать в реакции ядерного синтеза (42.9а)? Сравните полученную величину с энергией, извлекаемой при сгорании 1 кг бензина (около $5 \cdot 10^7$ Дж).

*Раздел 42.14

*54. (I) Животному сделана инъекция препарата $^{32}_{15}\mathrm{P}$ активностью 0,018 мкКи. Если в счетчик Гейгера попадает лишь 20% испускаемых β-частиц и его эффективность регистрации составляет 90%, то какой будет скорость счета?

*55. (I) Взрослый человек получает с пищей около 0,10 мкКи изотопа $^{40}_{19}$K. Сколько распадов происходит в 1 с?

*56. (I) а) Доза γ-излучения 500 рэм вызвала бы смертельный исход у половины получивших ее людей. Какому числу радов она соответствует? б) Какому числу радов рентгеновского излучения эквивалентна по биологическому воздействию доза 50 рад α-излучения? в) Какому числу радов при облучении медленными нейтронами эквивалентны по биологическому воздействию 50 рад при облучении быстрыми нейтронами?

*57. (II) Источник β^--излучателя $^{32}_{15}$P (в виде соли $NaHPO_4$) имплантирован в орган, который должен получить в лечебных целях 5000 рад. Период полураспада изотопа $^{32}_{15}$P равен 14,3 сут; 1 мКи соответствует 1 рад/мин. На какое время следует имплантировать источник?

*58. (II) Нуклид $^{57}_{27}$Co испускает γ-кванты с энергией 122 кэВ. Человек с массой 70 кг проглатывает 2,0 мкКи $^{57}_{27}$Co. Какой дозе (рад/сут) это соответствует в расчете на облучение всего тела? Предполагается, что тело поглощает 50% энергии γ-излучения.

*59. (II) Экранированный источник γ-излучения создает на расстоянии 1,0 м дозу 0,055 рад/ч для среднего человека. Допустимая максимальная доза составляет 5,0 рэм/год. Как близко от источника можно работать, если продолжительность рабочей недели составляет 35 ч? Предполагается, что интенсивность излучения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. (В действительности из-за поглощения в воздухе интенсивность излучения убывает еще быстрее, поэтому полученный вами ответ в действительности соответствует значению больше допустимого.)

Элементарные частицы

В этой заключительной главе мы расскажем об увлекательной области современной физики – физике *элементарных частиц*, в которой находят свое отражение современные представления о строении вещества.

Уже после второй мировой войны было обнаружено, что если в ядерной реакции налетающая частица обладает достаточной энергией, то при этом могут рождаться новые типы частиц. Для получения частиц с высокой энергией были построены различные типы ускорителей частиц (см., например, разд. 28.8). Как правило, они используются для ускорения протонов или электронов, но некоторые установки позволяют ускорять и тяжелые ионы. Ускорители частиц высоких энергий используются для более глубокого проникновения в детали строения атомных ядер, для определения и исследования свойств новых частиц, а также для получения новой информации о фундаментальных взаимодействиях и частицах вещества.

43.1. Частицы высоких энергий

Ускоренные до высоких энергий частицы служат инструментом изучения внутренней структуры ядер, с которыми они сталкиваются. Чем больше энергия «снарядов», тем больше деталей они позволяют обнаружить. Длина волны налетающих частиц, согласно формуле де Бройля, равна

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{43.1}$$

откуда видно, что, чем больше импульс налетающей частицы, тем меньше длина волны и, следовательно, тем больше деталей удастся различить. Как отмечалось в гл. 37, предел разрешающей способности определяется длиной волны. Именно поэтому в последние годы вступают в строй ускорители все более высоких энергий.

Пример 43.1. Для исследования распределения электрического заряда в ядре используются электроны очень высоких энергий. (Электроны обладают тем преимуществом перед протонами, что участвуют только в электромагнитных взаимодействиях и не участвуют в сильном взаимодействии.) Эксперименты, проведенные на Станфордском линейном ускорителе с помощью электронов с энергией 1,3 ГэВ,

позволили получить для ядра висмута распределение заряда, изображенное на рис. 43.1. Какая разрешающая способность была достигнута в этом эксперименте, т. е. какими были размеры самых мелких различимых деталей?

Решение. Энергия 1,3 ГэВ = 1300 МэВ примерно в 2500 раз больше выраженной в единицах энергии массы покоя электрона. Ясно, что в этом случае мы имеем дело с релятивистскими скоростями. Нетрудно показать, что скорость электрона почти равна $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. [Действительно, по формуле (39.10) кинетическая энергия электрона равна $mc^2 - m_0c^2 \approx mc^2$, а по формуле (39.13) $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \approx p^2c^2$, так как величина m_0c^2 мала по сравнению с pc. Следовательно, $p^2c^2 = m^2v^2c^2 \approx m^2c^4$, откуда $v \approx c$.] Учитывая это, получаем

$$\lambda = \frac{h}{mv} \approx \frac{h}{mc} = \frac{hc}{mc^2},$$

где $mc^2 = 1{,}3$ ГэВ. Таким образом,

$$\lambda = \frac{(6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{м/с})}{(1{,}3 \cdot 10^9\ \text{эВ})(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж/эВ})} = 0{,}96 \cdot 10^{-15}\ \text{м},$$

или 0,96 фм (1 фм $= 10^{-15}$ м = 1 фемтометр, или 1 ферми в честь Энрико Ферми). Это несколько меньше размеров ядер. Обратите внимание на то, что на рис. 43.1 распределение заряда почти постоянно внутри ядра, однако его граница оказывается размытой. Эксперименты по рассеянию электронов с еще бóльшими энергиями на протонах и нейтронах обнаружили у них наличие внутренней структуры, которая свидетельствует о том, что нуклоны состоят из еще более мелких частиц.

Рис. 43.1. Распределение электрического заряда в ядре висмута (по данным зондирования с помощью электронов с энергией 1,3 ГэВ).

Мы увидим, что ускоренные до высоких энергий частицы используются не только для исследования структуры ядра, но и для получения новых типов частиц.

43.2. Зарождение физики элементарных частиц – частица Юкавы

В середине 30-х годов нашего века было установлено, что все атомы построены из нейтронов, протонов и электронов. Основными «кирпичами мироздания» оказались не атомы, а протоны, нейтроны и электроны. Помимо этих трех *элементарных частиц*, как их можно назвать, было известно и несколько других: позитрон (частица с зарядом, противоположным по знаку заряда электрона), нейтрино и γ-квант (фотон), т. е. всего шесть элементарных частиц.

Оглядываясь назад, следует отметить, что в 1935 г. все выглядело очень просто. Но в последующие десятилетия были открыты сотни других субъядерных частиц. Изучением их свойств и взаимодействий, а также выяснением того, какие из них следует считать фундаментальными, или «элементарными», и стала заниматься область

физики, получившая название **физики элементарных частиц**.

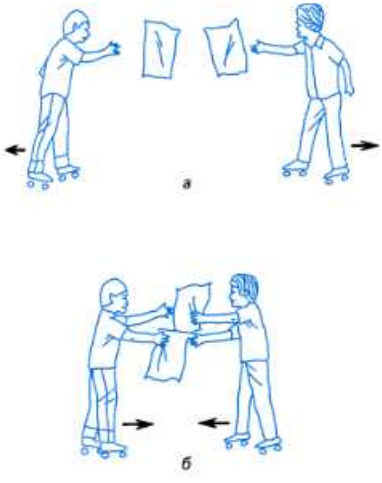


Рис. 43.2. Силы, эквивалентные обмену частицами. *а* – сила отталкивания (дети бросают друг в друга подушки); *б* – сила притяжения (дети вырывают друг у друга подушки).

Начало физике элементарных частиц в том виде, в каком она существует сегодня, было положено в 1935 г., когда японский физик Хидеки Юкава (1907–1981) предсказал существование новой частицы, которая могла быть своего рода переносчиком сильного взаимодействия. Чтобы понять идею Юкавы, обратимся сначала к электромагнитному взаимодействию. Еще при первом знакомстве с электричеством мы обратили внимание на то, что электрическая сила действует на расстоянии. Чтобы лучше представить себе, каким образом сила может действовать на расстоянии, Фарадей, как известно, ввел понятие *поля*. Можно сказать, что сила, с которой одна заряженная частица действует на другую, обусловлена электрическим полем, создаваемым первой частицей. Аналогичным образом магнитное поле является переносчиком магнитных сил. Затем в гл. 33 было показано, что электромагнитные поля могут распространяться в виде волн в пространстве. Наконец, в гл. 40 мы увидели, что электромагнитное излучение (свет) можно рассматривать либо как волну, либо как поток частиц, называемых фотонами. Вследствие этого корпускулярно-волнового дуализма можно считать, что электромагнитное взаимодействие между заряженными частицами обусловлено 1) электромагнитным полем одной частицы, действующей на другую частицу, или 2) обменом фотонами, или γ-квантами, между частицами. Для нас представляет интерес второй подход. На рис. 43.2 изображен наглядный пример того, как в результате обмена частицами может возникать взаимодействие. На рис. 43.2, *а* дети бросают друг в друга подушки. Поймав брошенную ему подушку, мальчик откатывается назад. Это иллюстрация силы отталкивания. Если же дети пытаются вырвать подушки друг у друга, то каждый из них тянет своего партнера к себе. Это иллюстрация силы притяжения. При электромагнитном взаимодействии двух заряженных частиц между ними происходит обмен фотонами, которым и обусловлено взаимодействие. На рис. 43.3 изображена простая диаграмма, описывающая этот процесс. Такие диаграммы называются *диаграммами Фейнмана*, а основанная на них теория – *квантовой электродинамикой* (КЭД). На рис. 43.3 показан простейший случай: обмен одним фотоном. Одна из заряженных частиц испускает фотон и испытывает вследствие этого некоторую отдачу, а вторая частица поглощает фотон. При таком столкновении, или *взаимодействии*, происходит передача энергии и импульса от одной частицы к другой, и их «переносчиком» служит фотон. Так как фотон поглощается второй частицей через очень короткий промежуток времени после испускания первой частицей, он ничем не обнаруживает себя, и поэтому его называют *виртуальным* в отличие от реаль-

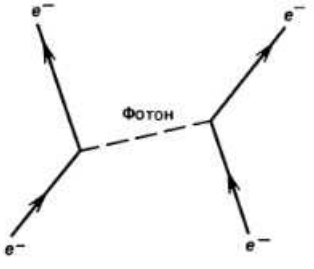


Рис. 43.3. Диаграмма Фейнмана, показывающая, как фотон действует в качестве переносчика электромагнитного взаимодействия между двумя электронами.

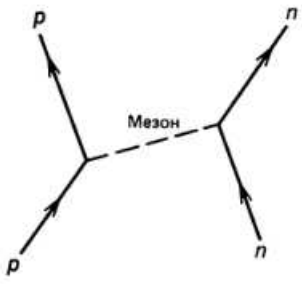


Рис. 43.4. Обмен мезоном при сильном ядерном взаимодействии протона и нейтрона.

ных свободных фотонов, которые могут быть зарегистрированы приборами.

Но вернемся к предсказанию Юкавы. Исходя из аналогии с обменом фотонов, которым обусловлено электромагнитное взаимодействие, Юкава высказал предположение о существовании частицы, служащей переносчиком сильного взаимодействия, т. е. силы, которая удерживает нуклоны внутри ядра. Подобно тому как фотон служит квантом электромагнитного поля (взаимодействия), частицу Юкавы можно рассматривать как квант поля сильного (ядерного) взаимодействия.

Юкава предсказал, что эта новая частица должна иметь массу, промежуточную между массами электрона и протона. Поэтому она получила название *мезон*, что означает «промежуточный». На рис. 43.4 изображена диаграмма Фейнмана для случая обмена мезоном. Грубую оценку массы мезона можно получить следующим образом. Предположим, что протон в левой части диаграммы Фейнмана на рис. 43.4 покоится. Чтобы испустить мезон, протону необходима энергия (эквивалентная массе мезона), которую неоткуда взять; процесс испускания мезона противоречит закону сохранения энергии. Однако принцип неопределенности допускает нарушение закона сохранения энергии на величину ΔE, если оно длится по времени Δt, где $(\Delta E)(\Delta t) \approx h/2\pi$. Положим величину ΔE равной энергии, отвечающей массе мезона m: $\Delta E = mc^2$. Тогда закон сохранения энергии будет нарушаться столь долго, сколько существует мезон, а это время Δt, необходимое мезону для перехода от одного нуклона к другому. Если предположить, что мезон движется с релятивистской скоростью, близкой к скорости света c, то Δt будет порядка d/c, где d – максимальное расстояние, на котором взаимодействуют нуклоны. Следовательно,

$$\Delta E \Delta t \approx \frac{h}{2\pi},$$

$$mc^2\left(\frac{d}{c}\right) \approx \frac{h}{2\pi},$$

или

$$mc^2 \approx \frac{hc}{2\pi d}. \qquad (43.2)$$

Радиус действия ядерных сил (сильного взаимодействия) составляет примерно $1{,}5 \cdot 10^{-15}$ м (это – наибольшее расстояние, на котором ощущается сильное взаимодействие), поэтому

$$mc^2 \approx \frac{(6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})(3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})}{(6{,}28)(1{,}5 \cdot 10^{-15}\ \text{м})} \approx$$

$$\approx 2{,}2 \cdot 10^{-11}\ \text{Дж} = 130\ \text{МэВ}.$$

Таким образом, масса предсказанного Юкавой мезона составляет по весьма грубой оценке 130 МэВ/c^2, или примерно в 250 раз больше массы электрона (0,51 МэВ/c^2). [Заметим, кстати, что, поскольку электромагнитное взаимодействие проявляется на любом расстоянии ($d = \infty$), из формулы (43.2) следует, что частица, обменом которой обусловлено электромагнитное взаимодействие (т. е. фотон), имеет нулевую массу покоя.]

Фотоны не только осуществляют электромагнитное взаимодействие, но и наблюдаются в качестве свободных частиц. Поэтому можно было ожидать, что и мезоны удастся наблюдать непосредственно. Мезон искали в космическом излучении, приходящем на Землю от Солнца и других источников во Вселенной. В 1937 г. была открыта новая частица с массой 106 МэВ (в 207 раз больше массы электрона). Эта масса мало отличалась от предсказанного значения. Но оказалось, что новая частица, получившая название *мю-мезон* (или *мюон*), не обнаруживает сильного взаимодействия с веществом, а частица, не участвующая в сильном (ядерном) взаимодействии, едва ли может служить переносчиком такого взаимодействия. Таким образом, мюон, который может иметь как положительный, так и отрицательный заряд, в действительности представляет собой просто очень тяжелый электрон, а не частицу Юкавы.

Предсказанная Юкавой частица была в конце концов открыта в 1947 г. Она получила название *пи-мезон* (или *пион*). У этой частицы имеются три зарядовых состояния: +, − или 0; π^+- и π^--мезоны имеют массу 139,6 МэВ/c^2, а π^0-мезон – массу 135,0 МэВ/c^2. Все три пиона сильно взаимодействуют с веществом. Вскоре после открытия пионов в космических лучах они были получены в лаборатории на ускорителе. Наблюдались реакции

$$p + p \to p + p + \pi^0, \qquad (43.3)$$

$$p + p \to p + n + \pi^+.$$

Ускоренный протон должен обладать энергией, достаточной для создания дополнительной массы пиона. В последующие годы был открыт ряд других мезонов, которые также считались переносчиками сильного взаимодействия. (В современной теории – квантовой хромодинамике, основанной на кварковой структуре, мезоны уступили свою роль переносчиков сильного взаимодействия глюонам; разд. 43.9.)

До сих пор мы рассматривали частицы, которые обеспечивали электромагнитное и сильное взаимодействия. Но в природе известно четыре фундаментальных взаимодействия, или четыре типа сил. Как же обстоит дело с двумя другими взаимодействиями: слабым и гравитационным? Интуитивно мы убеждены, что и эти взаимодействия переносятся частицами. Частицы, ответственные

Таблица 43.1. Четыре фундаментальных взаимодействия

Взаимодействие	Относительная интенсивность (приближенно)	Квант поля
Сильное	1	Мезоны/глюоны[1)]
Электромагнитное	10^{-2}	Фотон
Слабое	10^{-13}	W^+ и Z^0
Гравитационное	10^{-40}	Гравитон(?)

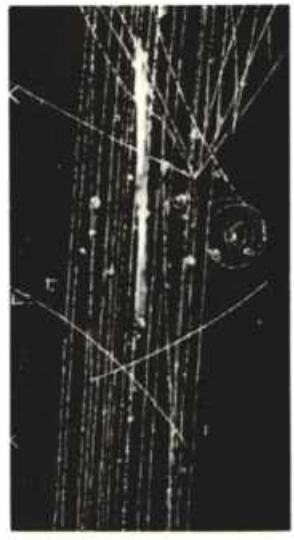
[1)] См. разд. 43.9.

за слабое взаимодействие, получили названия W^+-, W^-- и Z^0-частиц. После интенсивных поисков, в начале 1983 г., о долгожданном открытии W-частицы объявил Карло Руббиа. Он является одним из инициаторов строительства протон-антипротонного коллайдера на ускорителе сверхвысоких энергий – суперсинхротроне в ЦЕРНе[1)] (Женева), где и были получены результаты, а также руководит большой группой исследователей (более 100), осуществивших проект. Квант гравитационного поля, получивший название *гравитон*, пока экспериментально не обнаружен. Для сравнения в табл. 43.1 перечислены все четыре фундаментальных взаимодействия в порядке ослабления их интенсивности. Обратите внимание на то, что, хотя в повседневной жизни гравитация вполне ощутима (из-за огромной массы Земли), в масштабах ядра гравитационное взаимодействие оказывается самым слабым, и его влиянием в этом случае почти всегда можно пренебречь.

43.3. Частицы и античастицы

Позитрон, как мы уже знаем, по существу, представляет собой положительно заряженный электрон. Иначе говоря, многие свойства позитрона, например масса, такие же, как у электрона, а знак электрического заряда противоположен заряду электрона. Позитрон называют **античастицей** электрона. После открытия позитрона в 1932 г. существование античастиц было предсказано и у других частиц. В 1955 г. была обнаружена античастица протона – *антипротон* $\bar{p}$ (рис. 43.5). (Черточка над p обозначает античастицу.) Для рождения такой массивной частицы (масса антипротона равна массе протона) необходимо большое количество энергии. Открытие антипротона (принадлежащее Э. Сегре и О. Чемберлену) произошло после завершения строительства большого ускорителя (бэватрона) в Калифорнийском университете в Беркли.

[1)] ЦЕРН – сокращенное название Европейского центра ядерных исследований.



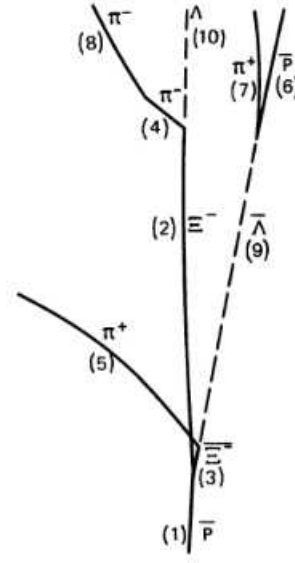


Рис. 43.5. На снимке, полученном с помощью пузырьковой камеры на жидком водороде, столкновение антипротона $\bar{p}$ с протоном приводит к образованию пары гиперонов ($\bar{p} + p \rightarrow \Xi + \bar{\Xi}^-$) с последующим распадом на другие частицы. На схеме каждый трек отождествлен с соответствующей частицей. Треки нейтральных частиц показаны штриховыми линиями, так как при пролете нейтральных частиц пузырьки не образуются. (Воспроизводится с разрешения Брукхейвенской национальной лаборатории, США.)

Вскоре затем был открыт антинейтрон $\bar{n}$. Большинство других частиц также имеют античастицы. Но у фотона, π^0-мезона и еще нескольких частиц не существует отличных от них античастиц. Можно сказать, что они тождественны своим античастицам.

Античастицы рождаются в ядерных реакциях при достаточно больших энергиях, но в веществе они живут очень недолго. Например, при столкновении позитрона и электрона они аннигилируют друг с другом. Их масса (в пересчете на энергию) и кинетическая энергия превращаются в энергию γ-квантов или других частиц. Аннигиляция происходит у всех пар частица – античастица.

43.4. Взаимодействия частиц и законы сохранения

Одним из важных применений ускорителей частиц высоких энергий является исследование взаимодействий элементарных частиц. Неоценимую помощь в классификации субъядерных частиц оказывают законы сохранения. Законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда строго выполняются при всех взаимодействиях частиц. (Хотя принцип неопределенности допускает, например, несохранение энергии на величину ΔE в течение промежутка времени $\Delta t \approx h/2\pi\Delta E$, однако такие промежутки времени лежат далеко за пределами возможности экспериментального наблюдения, и нарушение закона сохранения энергии никогда не обнаруживалось.)

Исследование взаимодействий частиц позволило установить ряд новых законов сохранения; некоторые из них

мы сейчас обсудим. Новые законы сохранения (как и прежние) играют важную роль: они помогают объяснить, почему одни реакции происходят, а другие нет. Например, никогда не наблюдалась реакция

$$p + n \not\to p + p + \bar{p},$$

хотя заряд, энергия и другие величины в ней сохраняются ($\bar{p}$ обозначает антипротон; перечеркнутая стрелка означает, что реакции не происходит). Физики для объяснения высказали гипотезу о существовании нового закона сохранения – закона сохранения **«барионного заряда»** (барионный заряд означает то же самое, что и число нуклонов, которое сохраняется, как мы видели, в ядерных реакциях). В связи с новым законом было сделано предположение о том, что барионный заряд всех нуклонов равен $+1$ ($B = +1$), а антинуклонов (антипротонов, антинейтронов) равен -1 ($B = -1$). В записанной выше реакции барионный заряд не сохраняется, так как в левой части $B = (+1) + (+1) = +2$, а в правой $B = (+1) + (+1) + (-1) = +1$. В то же время в реакции

$$p + n \to p + n + \bar{p} + p$$

барионный заряд *сохраняется*, и эта реакция действительно происходит, если налетающий протон обладает достаточно большой энергией: в левой части $B = +1 + +1 = +2$, в правой $B = +1 + 1 - 1 + 1 = +2$, т. е. барионный заряд до и после реакции равен $+2$. Эта и другие реакции продемонстрировали сохранение барионного заряда в качестве одного из основных законов физики.

Не менее полезные законы сохранения «зарядов» связаны со слабыми взаимодействиями, главным образом с распадами. При обычном β-распаде наряду с электроном или позитроном испускается нейтрино или антинейтрино. В распаде аналогичного типа вместо электрона испускается мюон. Оказалось, что нейтрино, возникающее при распаде с испусканием электрона (ν_e), отличается от нейтрино, сопровождающего распад с испусканием мюона (ν_μ). У каждого из двух типов нейтрино существует античастица: $\bar{\nu}_e$ и $\bar{\nu}_\mu$. Например, при обычном β-распаде

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

но никогда не бывает распада $n \to p + e^- + \bar{\nu}_\mu$ или $n \to p + + e^- + \bar{\nu}_e + \nu_e$. Чтобы объяснить, почему две последние реакции не происходят, было введено понятие «электронный лептонный заряд» L_e. Если у электрона e^- и электронного нейтрино ν_e электронный лептонный заряд $L_e = +1$, у позитрона e^+ и электронного антинейтрино $\bar{\nu}_e$ $L_e = -1$, а у остальных частиц $L_e = 0$, то во всех наблюдаемых распадах L_e сохраняется. Например, в распаде $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ до распада $L_e = 0$, а после распада $L_e = 0 + (+1) + (-1) = 0$. Распады, в которых лептонный заряд не сохранялся бы, а все остальные законы сохране-

ния были бы выполнены, не наблюдались. Поэтому считается, что L_e сохраняется во всех взаимодействиях.

В распадах с участием мюонов, например

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu,$$

сохраняется еще одно квантовое число – «мюонный лептонный заряд» L_μ. У мюона μ^- и мюонного нейтрино ν_μ мюонный лептонный заряд $L_\mu = +1$, у μ^+ и $\bar{\nu}_\mu$ лептонный заряд $L_\mu = -1$, и у остальных частиц $L_\mu = 0$. Считается, что L_μ также сохраняется во всех взаимодействиях или распадах. Аналогичное справедливо и в отношении третьего лептонного заряда L_τ, связанного со сравнительно недавно открытым τ-лептоном и его нейтрино ν_τ.

Следует иметь в виду, что античастицы отличаются от частиц противоположным знаком не только электрического, но и других зарядов: B, L_e, L_μ и L_τ.

Пример 43.2. Какие схемы мюонного распада возможны:

а) $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e$; б) $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$; в) $\mu^- \to e^- + \nu_e$?

Решение. У μ^--мюона $L_\mu = +1$, $L_e = 0$. Это начальное состояние (до распада). Следовательно, в конечном состоянии (после распада) лептонные заряды должны иметь те же значения: $L_\mu = +1$, $L_e = 0$. В результате распада «а» в конечном состоянии $L_\mu = 0 + 0 = 0$, $L_e = +1 - 1 = 0$; следовательно, мюонный лептонный заряд не сохраняется; такой распад действительно не наблюдался. В результате распада «б» в конечном состоянии $L_\mu = 0 + 0 + 1 = +1$, $L_e = +1 - 1 + 0 = 0$, т. е. оба лептонных заряда сохраняются. И это – один из наиболее распространенных распадов μ^--мюона. Распад «в» не происходит из-за несохранения электронного лептонного заряда L_e (в конечном состоянии $L_e = +2$).

Последние теоретические работы показывают, что законы сохранения барионного и лептонных зарядов могут выполняться не точно, а лишь приближенно, о чем мы расскажем в разд. 43.10.

43.5. Классификация частиц

За десятилетия после открытия в конце 40-х годов π-мезона было обнаружено много других субъядерных частиц. Ныне их насчитывается не одна сотня. Была проделана огромная теоретическая и экспериментальная работа, чтобы понять причину происхождения такого количества частиц. Один из путей состоит в классификации частиц, т. е. в распределении их по категориям в соответствии с их свойствами. Один из способов классификации основан на взаимодействиях частиц, поскольку не все частицы участвуют в четырех фундаментальных взаимодействиях. В табл. 43.2 представлены многочисленные стабильные (или «долгоживущие») частицы, классифицированные по взаимодействиям и другим свойствам. *Фотон* участвует

Таблица 43.2. Элементарные частицы (стабильные, или «долгоживущие»)[1)]

Тип частицы	Название частицы	Обозначение	Античастица	Масса покоя, МэВ/c^2	B	L_e	L_μ	L_τ	S	Время жизни, с	Основные типы распада
Фотон	Фотон	γ	γ	0	0	0	0	0	0	Стабилен	
Лептоны	Электрон	e^-	e^+	0,511	0	+1	0	0	0	Стабилен	
	Электронное нейтрино	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0(?)	0	+1	0	0	0	Стабилен	
	Мюон	μ^-	μ^+	105,7	0	0	+1	0	0	$2{,}20\cdot10^{-6}$	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$
	Мюонное нейтрино	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0(?)	0	0	+1	0	0	Стабильно	
	τ-лептон	τ^-	τ^+	1784,0	0	0	0	−1	0	$<4\times10^{-13}$	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, адроны
	τ-нейтрино	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0(?)	0	0	0	−1	0	Стабильно	
Андроны											
Мезоны	Пион	π^+	π^-	139,6	0	0	0	0	0	$2{,}60\cdot10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu$
		π^0	π^0	135,0	0	0	0	0	0	$0{,}83\times10^{-16}$	2γ
	Каон	K^+	K^-	493,7	0	0	0	0	+1	$1{,}24\cdot10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu$, $\pi^+\pi^0$
		K_S^0	$\overline{K_S^0}$	497,7	0	0	0	0	+1	$0{,}89\times10^{-10}$	$\pi^+\pi^-$, $2\pi^0$
		K_L^0	$\overline{K_L^0}$	497,7	0	0	0	0	+1	$5{,}2\cdot10^{-8}$	$\pi^+e^\pm\bar{\nu}_e$, $\pi^\pm\mu^\pm\bar{\nu}_\mu$, $3\pi^0$
	η-мезон	η^0	η^0	548,8	0	0	0	0	0	$<10^{-18}$	2γ, 3π
Барионы	Протон	p	$\bar{p}$	938,3	+1	0	0	0	0	Стабилен[2)]	
	Нейтрон	n	$\bar{n}$	939,6	+1	0	0	0	0	920	$pe^-\bar{\nu}_e$
	Лямбда	Λ^0	$\overline{\Lambda^0}$	1115,6	+1	0	0	0	−1	$2{,}6\cdot10^{-10}$	$p\pi^-$, $n\pi^0$
	Сигма	Σ^+	$\overline{\Sigma^-}$	1189,4	+1	0	0	0	−1	$0{,}80\times10^{-10}$	$p\pi^0$, $n\pi^+$
		Σ^0	$\overline{\Sigma^0}$	1192,5	+1	0	0	0	−1	$6\cdot10^{-20}$	$\Lambda^0\gamma$
		Σ^-	$\overline{\Sigma^+}$	1197,3	+1	0	0	0	−1	$1{,}5\cdot10^{-10}$	$n\pi^-$
	Кси	Ξ^0	$\overline{\Xi^0}$	1315	+1	0	0	0	−2	$2{,}9\cdot10^{-10}$	$\Lambda^0\pi^0$
		Ξ^-	$\overline{\Xi^+}$	1321	+1	0	0	0	−2	$1{,}64\times10^{-10}$	$\Lambda^0\pi^-$
	Омега	Ω^-	Ω^+	1672	+1	0	0	0	−3	$0{,}82\times10^{-10}$	$\Xi^0\pi^0$, Λ^0K^-

[1)] См. также табл. 43.4.
[2)] $>6\cdot10^{32}$ лет.

только в электромагнитном взаимодействии и сам по себе образует отдельный класс. **Лептоны** – это частицы, не участвующие в сильном взаимодействии, но участвующие в слабом взаимодействии (и еще более слабом гравитационном взаимодействии); заряженные лептоны помимо этого участвуют в электромагнитном взаимодействии. В число четырех хорошо изученных лептонов входят электрон, мюон и два типа нейтрино – электронное нейтрино ν_e и мюонное нейтрино ν_μ. У каждого из четырех лептонов существует античастица (табл. 43.2). После открытия еще одного лептона – τ-лептона – и его нейтрино ν_τ число лептонов увеличилось до шести.

Третий класс частиц образуют **адроны**. Так называют частицы, которые участвуют в сильном ядерном взаимодействии (само название «адроны» означает **сильно взаимодействующие частицы**). Адроны взаимодействуют также благодаря другим типам сил, но на малых расстояниях преобладает сильное взаимодействие. К адронам относятся нуклоны, пионы и много других частиц. Адроны подразделяются на две подгруппы[1]: **барионы** (частицы с барионным зарядом $+1$ или -1, если речь идет об античастицах) и **мезоны** (частицы с барионным зарядом 0).

Обратите внимание на то, что барионы Λ, Σ, Ξ и Ω распадаются на барионы с меньшей массой и в конечном счете на протоны и нейтроны. Во всех таких распадах барионный заряд сохраняется. Так как более легкого бариона, чем протон ($B = +1$), не существует, протон не может распадаться (если барионный заряд строго сохраняется) и поэтому стабилен (разд. 43.10).

43.6. Стабильность частиц и резонансы

В табл. 43.2 перечислены либо стабильные, либо долгоживущие частицы (с временем жизни $\gtrsim 10^{-19}$ с). Время жизни нестабильных частиц зависит от природы взаимодействия, вызывающего ее распад. Мы говорили, что электромагнитное взаимодействие слабее сильного. Под этим имелось в виду, что при сильном взаимодействии обмен между частицами происходит быстрее и чаще,

[1] Первоначально частицы подразделялись в соответствии с их массой на лептоны («легкие» частицы), барионы («тяжелые» частицы) и частицы с промежуточной массой – мезоны («средние» частицы). Новая классификация частиц в соответствии с их взаимодействием почти соответствует старой классификации. Однако мюон теперь называется лептоном (так как он не участвует в сильном взаимодействии, хотя раньше назывался мю-мезоном из-за своей массы). Еще одним исключением являются ψ-частицы: они очень тяжелые, но имеют нулевой барионный заряд, поэтому их классифицируют как мезоны (разд. 43.8).

чем при электромагнитном взаимодействии. Если распад обусловлен сильным взаимодействием, то время жизни частицы оказывается очень малым. Например, при распаде, обусловленном слабым взаимодействием, время жизни частицы составляет 10^{-10} с или больше. При распаде за счет электромагнитного взаимодействия времена жизни частиц оказываются гораздо короче – обычно от 10^{-16} до 10^{-19} с. Нестабильные частицы, перечисленные в табл. 43.2, распадаются за счет либо слабого, либо электромагнитного взаимодействия: распады с образованием γ-кванта (фотона) происходят за счет электромагнитного взаимодействия, остальные – за счет слабого взаимодействия (обратите внимание на времена жизни).

Оказалось, что большое число частиц распадается за счет сильного взаимодействия. Эти частицы в табл. 43.2 не указаны. Они распадаются на другие сильно взаимодействующие частицы (например, π, p, n, но не γ, e и т. д.) и имеют очень короткие времена жизни – обычно порядка 10^{-23} с. Времена жизни этих частиц настолько малы, что частицы не успевают пройти достаточное расстояние, чтобы их удалось зарегистрировать до того, как они распадутся. Однако удается зарегистрировать продукты их распада и по ним судить об этих короткоживущих частицах. Чтобы представить, как это делается, напомним историю открытия Ферми первой из таких частиц. В эксперименте Ферми пучок π^+-мезонов, энергию которых можно было изменять в определенных пределах, направлялся на водородную (протонную) мишень. Зависимость числа рассеянных π^+-мезонов от их кинетической энергии изображена на рис. 43.6. Большой максимум в окрестности 200 МэВ оказался гораздо выше, чем ожидалось, и выше числа взаимодействий при близких энергиях. Это привело Ферми к заключению, что π^+-мезон и протон, прежде чем разлететься, образуют короткоживущую частицу или по крайней мере успевают совершить несколько колебаний как бы в резонансе. Максимум на рис. 43.6 действительно напоминает резонанс-

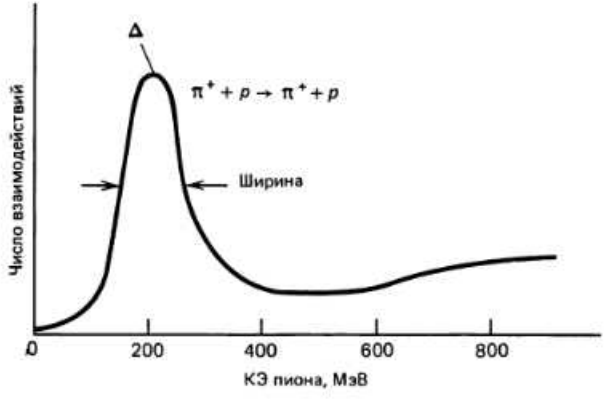


Рис. 43.6. Число пионов π^+, рассеянных на протонной мишени, как функция кинетической энергии (КЭ) налетающих пионов π^+

ную кривую (рис. 14.13 и 32.8), и эту новую «частицу» (обозначенную Δ) стали называть **резонансом**. Аналогичным образом были обнаружены сотни других резонансов. Многие резонансы представляют собой возбужденные состояния других частиц, таких как нуклон.

Ширина резонансов (ширина Δ на рис. 43.6 составляет примерно 100 МэВ) служит интересной иллюстрацией принципа неопределенности Гейзенберга. Если время жизни частицы составляет лишь 10^{-23} с, то неопределенность в ее массе (т. е. энергии покоя) будет порядка $\Delta E \approx \approx h/2\pi\Delta t = (6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с)/(6)$(10^{-23}$ с$) \approx 10^{-11}$ Дж $\approx \approx 100$ МэВ, что согласуется с наблюдаемой шириной резонанса. В действительности решают обратную задачу: оценивают времена жизни резонансов ($\approx 10^{-23}$ с) по их ширине (~ 100 МэВ).

43.7. Странные частицы

В начале 50-х годов XX в. было обнаружено, что некоторые из незадолго до того открытых частиц, а именно K, Λ и Σ, ведут себя странно в двух отношениях. Во-первых, они всегда рождаются парами. Например, реакция

$$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$$

происходит с вероятностью, близкой к единице, а реакция $\pi^- + p \to K^0 + n$ никогда не наблюдалась. Это казалось тем более странным, что вторая реакция не нарушала ни одного из известных законов сохранения и для ее осуществления было достаточно энергии. Во-вторых, хотя рождение *странных частиц* (как их стали называть) было обусловлено сильным взаимодействием (т. е. происходило с большой вероятностью), их распады не имели характерного для сильного взаимодействия времени жизни, хотя они и распадались только на сильно взаимодействующие частицы (например, $K \to 2\pi$, $\Sigma^+ \to p + \pi^0$). Вместо величин порядка 10^{-23} с, как следовало бы ожидать для частиц, распадающихся за счет сильного взаимодействия, времена жизни странных частиц оказались в пределах от 10^{-10} до 10^{-8} с, что характерно для слабого взаимодействия.

Для объяснения этих фактов были введены новое квантовое число **странность** и новый закон сохранения (странности). Если частицам приписать значение странности S, указанное в табл. 43.2, то легко объяснить рождение странных частиц парами: странность античастиц противоположна странности частиц и в паре частица – античастица у одного партнера $S = +1$, а у другого $S = -1$ (табл. 43.2). Например, в реакции $\pi^- + p \to K^0 + + \Lambda^0$ в начальном состоянии $S = 0 + 0 = 0$ и в конечном состоянии $S = +1 - 1 = 0$, т. е. странность сохраняется. В реакции же $\pi^- + P \not\to K^0 + n$ в начальном состоянии $S = 0$,

в конечном состоянии $S = +1 + 0 = +1$, т. е. странность не сохраняется, и эта реакция не происходит.

Для объяснения особенностей распада странных частиц предполагается, что странность сохраняется в сильном взаимодействии и *не сохраняется* в слабом взаимодействии. Следовательно, хотя закон сохранения запрещает распад странных частиц на более легкие нестранные частицы за счет сильного взаимодействия, такие распады могут происходить за счет слабого взаимодействия. Но слабые распады происходят гораздо медленнее, что соответствует бóльшим временам жизни – от 10^{-10} до 10^{-8} с.

Сохранение странности оказалось первым примером «частично сохраняющейся» величины: странность сохраняется в сильном и не сохраняется в слабом взаимодействии.

43.8. Кварки и «очарование»

Почти все наблюдаемые частицы принадлежат одному из двух семейств: лептонам или адронам. Основное различие между ними состоит в том, что адроны участвуют в сильном взаимодействии, а лептоны не участвуют. Другое важное различие состояло в том, что в 60-х годах были известны только четыре лептона (e^-, μ^-, ν_e, ν_μ) и более сотни адронов.

Лептоны считаются истинно элементарными частицами, так как они, насколько известно, не распадаются на составные части, не обнаруживают никакой внутренней структуры и не имеют поддающихся определению размеров. (Попытки определить размеры лептонов показали, что верхний предел составляет около 10^{-18} м.)

С другой стороны, адроны оказались более сложными частицами. Эксперименты показывают, что адроны обладают внутренней структурой. И их обилие наводит на мысль, что адроны совсем не элементарны. Для решения этой проблемы М. Гелл-Манн и Г. Цвейг в 1963 г. независимо высказали идею, согласно которой все известные адроны не элементарны, а построены из трех более фундаментальных точечных объектов, названных **кварками**[1]. Подобно лептонам, кварки представляют собой истинно элементарные частицы. Три «сорта» кварков были обозначены буквами *u*, *d* и *s* [от английских слов up (вверх), down (вниз) и sideways (в сторону) (*s* чаще сопоставляют слову strange – странный)]. Предполагается, что кварки имеют дробный электрический заряд (равный $^1/_3$ или $^2/_3$ заряда электрона, т. е. меньше заряда, который раньше считался минимальным). Другие свойства кварков

[1] Гелл-Манн воспользовался фразой: «Три кварка для мастера Марка» – из романа Джеймса Джойса «Поминки по Финнегану».

Таблица 43.3. Свойства кварков и антикварков

Название	Обозначение	Спин	Заряд	Барионный заряд	Странность	Очарование	*b*-свойство	*t*-свойство
			Кварки					
u-кварк	u	$^1/_2$	$+^2/_3e$	$^1/_3$	0	0	0	0
d-кварк	d	$^1/_2$	$-^1/_3e$	$^1/_3$	0	0	0	0
Странный кварк	s	$^1/_2$	$-^1/_3e$	$^1/_3$	-1	0	0	0
Очарованный кварк	c	$^1/_2$	$+^2/_3e$	$^1/_3$	0	$+1$	0	0
b-кварк	b	$^1/_2$	$-^1/_3e$	$^1/_3$	0	0	$+1$	0
t-кварк (?)	t	$^1/_2$	$+^2/_3e$	$^1/_3$	0	0	0	$+1$
			Антикварки					
u-антикварк	$\bar{u}$	$^1/_2$	$-^2/_3e$	$-^1/_3$	0	0	0	0
d-антикварк	$\bar{d}$	$^1/_2$	$+^1/_3e$	$-^1/_3$	0	0	0	0
Странный антикварк	$\bar{s}$	$^1/_2$	$+^1/_3e$	$-^1/_3$	$+1$	0	0	0
Очарованный антикварк	$\bar{c}$	$^1/_2$	$-^2/_3e$	$-^1/_3$	0	-1	0	0
b-антикварк	$\bar{b}$	$^1/_2$	$+^1/_3e$	$-^1/_3$	0	0	-1	0
t-антикварк	$\bar{t}$	$^1/_2$	$-^2/_3e$	$-^1/_3$	0	0	0	-1

приведены в табл. 43.3. Все известные в то время адроны теоретически можно было построить из кварков трех типов: u, d и s. Мезоны состоят из пар кварк–антикварк. Например, π^+-мезон представляет собой пару $u\bar{d}$ (у нее, как и должно быть у π^+-мезона, $Q = {}^2/_3e + {}^1/_3e = +1e$, $B = {}^1/_3 - {}^1/_3 = 0$, $S = 0 + 0 + 0$). С другой стороны, $K^+ = u\bar{s}$ с $Q = +1$, $B = 0$, $S = +1$. Барионы состоят из трех кварков. Например, нейтрон $n = ddu$, а антипротон $\bar{p} = \bar{u}\bar{u}\bar{d}$

Вскоре после появления гипотезы кварков физики занялись поиском этих частиц с дробным зарядом. Хотя имеются косвенные экспериментальные доказательства их существования, непосредственно обнаружить кварки не удалось. Было высказано предположение, что кварки связаны очень сильно и не существуют в свободном состоянии (заключены в адронах).

В 1964 г. ряд физиков высказал предположение о существовании четвертого кварка. Они основывались на глубокой симметрии природы, включая связь кварков и лептонов. Если существуют (как считали в 60-х годах) четыре лептона, то и кварков должно быть четыре. Четвертый кварк получил название *очарованный*. Его электрический заряд должен быть равен $+^2/_3e$. Кроме того,

четвертый кварк должен обладать еще одним свойством, отличающим его от трех остальных кварков. Это новое свойство, или квантовое число, было названо **очарованием** (или **чармом**) (табл. 43.3). Предполагалось, что очарование C ведет себя подобно странности: сохраняется в сильном и электромагнитном взаимодействиях и не сохраняется в слабом взаимодействии. У нового очарованного кварка $C = +1$, у его антикварка $C = -1$.

Между тем с точки зрения эксперимента необходимости в очарованном кварке не возникало. До 1974 г. все известные адроны удавалось объяснить комбинациями трех первоначально введенных кварков. Были известны адроны, соответствующие всем возможным комбинациям трех кварков и парам кварк–антикварк. Теория предсказала существование бариона Ω^- ($\Omega^- = sss$), который вскоре и был открыт (рис. 43.7). Но в 1974 г. две группы экспериментаторов независимо обнаружили новый тяжелый мезон. Этот новый мезон, называемый J/ψ-мезоном (часто просто ψ-мезоном), не укладывался в старую трехкварковую схему. Его масса 3100 МэВ/c^2 значительно превышала массы всех известных мезонов; он не мог представлять собой возбужденное состояние более легкого мезона (на который он распадался бы), так как в этом случае его время жизни было бы равно примерно 10^{-23} с. Экспериментально измеренное время жизни J/ψ-мезона оказалось примерно в 1000 раз больше, т. е. около 10^{-20} с. Вскоре стало ясно, что существование J/ψ-мезона можно объяснить с помощью очарованного кварка: J/ψ оказался комбинацией очарованного кварка и его антикварка $c\bar{c}$. Очарование J/ψ-мезона равно нулю ($C = +1 - 1 = 0$), поэтому он может распадаться за счет сильного взаимодействия на адроны (например, на не-

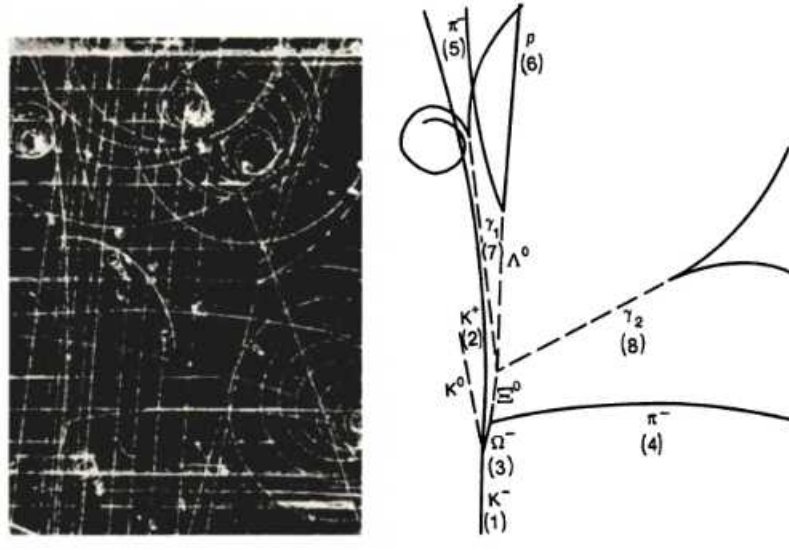


Рис. 43.7. На снимке, полученном с помощью пузырьковой камеры на жидком водороде, показано образование отрицательно заряженного Ω^--бариона в результате взаимодействия K^--мезона с протоном (ядром водорода) в пузырьковой камере. Справа – схема. (Воспроизводится с разрешения Брукхейвенской национальной лаборатории, США.)

сколько пионов, $p\bar{p}$, $\Lambda\bar{\Lambda}$ и т. д.). Такие распады действительно наблюдались. Время жизни J/ψ-мезона в 1000 раз больше, чем у других частиц, распадающихся за счет сильного взаимодействия. Теория объясняет это тем, что каждый из очарованных кварков c и $\bar{c}$, входящих в его состав, должен превратиться в кварки без очарования, из которых построены адроны, возникающие при распаде. Это превращение сильно уменьшает скорость распада, как утверждает модель с очарованным кварком.

Вскоре после открытия J/ψ-мезона был обнаружен аналогичный мезон, получивший название ψ'-мезон, с массой примерно 3685 МэВ/c^2. Были также открыты и другие мезоны семейства ψ, которые, как предполагается, все представляют собой связанные состояния $c\bar{c}$.

Хотя J/ψ-мезон и частицы из этого семейства сами не обладают явным очарованием, однако нет причин, по которым при распаде одной из $c\bar{c}$-комбинаций с большой массой не могли бы рождаться очарованные (с $c \neq 0$) мезоны. Иначе говоря, в результате распада кварки c и $\bar{c}$ могут оказаться в различных частицах, сообщив им свое очарование $+1$ или -1. В таких распадах должны возникать и другие кварки. Например, распад

$$\psi \to D^+ + D^-$$

можно записать в виде

$$\psi = c\bar{c} \to c\bar{c}d\bar{d} \to c\bar{d} + \bar{c}d.$$

На образование кварков $d\bar{d}$ расходуется энергия; так как у кварка d и антикварка $\bar{d}$ противоположные квантовые числа и электрические заряды, законы сохранения при этом не нарушаются: для образования этой пары кварк–антикварк необходима только энергия. Комбинация $c\bar{d}$ с $Q = +1$, $B = 0$, $S = 0$, $C = +1$ получила название D^+-мезон, а комбинацию $\bar{c}d$ считают его античастицей D^--мезоном. Поиск этого мезона и его нейтрального аналога D^0-мезона увенчался успехом в 1977 г. Масса D^+-мезона оказалась равной 1870 МэВ/c^2. Последующие эксперименты показали, что существуют и очарованные барионы. Некоторые из новых частиц приведены в табл. 43.4.

Еще одним важным событием стало экспериментальное обнаружение τ-лептона с массой 1784 МэВ/c^2. Этому лептону, так же как электрону и мюону, соответствует свое нейтрино. Таким образом, семейство лептонов в том виде, как оно сейчас известно, насчитывает шесть членов. Это нарушило бы симметрию между лептонами и кварками, которые рассматриваются как «кирпичи мироздания», если бы не два новых кварка. Физики-теоретики постулировали существование пятого и шестого кварков. Их назвали t- и b-кварками [от англ. top (верх) и bottom (низ)] за сходство с u- и d-кварками. [Некоторые предпочитают называть t-кварки *истинными* (от англ. truth), а b-кварки *красивыми* (от англ. beauty).] Соответственно новые свойства (квантовые числа), отличающие новые

Таблица 43.4. Некоторые андроны, связанные с очарованием и b-свойством ($L_e = L_\mu = L_\tau = 0$)

Тип андрона	Частица	Античастица	Масса покоя, МэВ/c^2	Барионный заряд	Странность	Очарование	Время жизни, с	Основные типы распада
Мезоны	D^+	D^-	1869	0	0	+1	$9\cdot10^{-13}$	K + другие частицы, e + другие частицы
	D^0	$\overline{D^0}$	1865	0	0	+1	$5\cdot10^{-13}$	K + другие частицы
	$F^+(D_s^+)$	$F^+(D_s^-)$	1969	0	+1	+1	$\sim 4\cdot10^{-13}$	$\phi\pi$, $\phi 3\pi$
	$\psi(3685)$	$\equiv\psi$	3686	0	0	0	$\sim 3\cdot10^{-20}$	Адроны
	$J/\psi(3100)$	$\equiv J/\psi$	3097	0	0	0	$\sim 1\cdot10^{-20}$	Адроны
	Υ	$\equiv\Upsilon$	9460	0	0	0	$\sim 1\cdot10^{-20}$	$\tau^+\tau^-$, $\mu^+\mu^-$, e^+e^-
Барион	Λ_c^+	Λ_c^-	2280	+1	0	+1	$1\cdot10^{-13}$	Адроны

кварки от ранее известных, называются t- и b-свойством или истиной и красотой. Список новых частиц приведен в табл. 43.4. Новый Υ-мезон с массой около 9400 МэВ/c^2 физики считают комбинацией $b\bar{b}$-кварков. Имеются также доказательства существования «красивого» мезона (состоящего из одного b-кварка и кварка другого типа). Что касается t-кварка, то его существование пока экспериментально надежно не установлено. Предполагается, что частицы, содержащие t-кварк, имеют очень большую массу и для их рождения необходимы ускорители очень высоких энергий.

43.9. «Стандартная модель»: квантовая хромодинамика (КХД) и электрослабая теория

Вскоре после возникновения модели кварков было выдвинуто предположение, что кварки обладают еще одним свойством (или качеством), которое получило название **цвет**. Различие между пятью или шестью кварками u, d, s, c, b, t (?) стали называть **ароматом**. Согласно существующим представлениям, каждый из ароматов кварка может иметь три цвета, обычно обозначаемых как красный, зеленый и синий. (Следует подчеркнуть, что названия свойств кварков «цвет» и «аромат» не имеют ничего общего с нашими зрительными или обонятельными ощущениями и явились причудой их авторов, как и другие термины в этой новой области, например «очарование».) Цвета антикварков называются соответственно антикрасным, антизеленым и антисиним. Барионы содержат три кварка – по одному каждого цвета; мезоны состоят из пары кварк – антикварк какого-либо цвета и соответст-

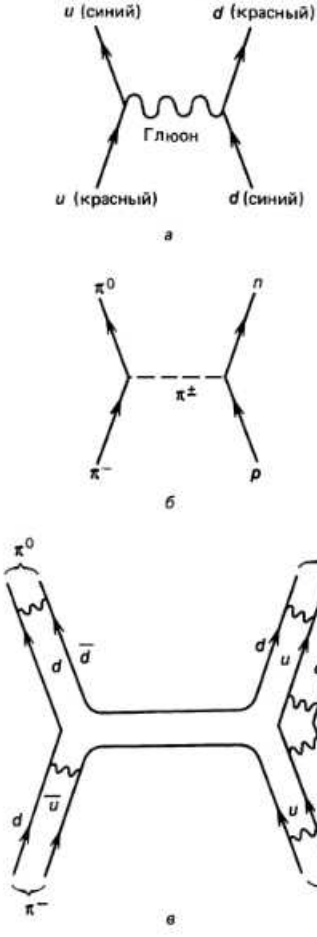


Рис. 43.8. *а* – переносчиком взаимодействия между двумя кварками, удерживающего их, например, в виде протона, служит глюон. Обмен глюоном приводит к изменению цвета; *б* – сильное взаимодействие $\pi^- p \to \pi^0 n$ с обменом заряженным π-мезоном (+ или − в зависимости от того, куда он движется – налево или направо); *в* – кварковая модель того же взаимодействия $\pi^- p \to \pi^0 n$. Промежуточный пион ($d\bar{u}$ или $\bar{d}u$) можно интерпретировать как аннигиляцию пары $u\bar{u}$ с образованием пары $d\bar{d}$. Волнистая линия между кварками означает обмен глюонами, удерживающими адроны вместе.

вующего антицвета, поэтому и барионы, и мезоны оказываются «белыми» или «бесцветными».

Первоначально цвета кварков были введены для того, чтобы удовлетворить принцип Паули (разд. 41.7) для частиц со спином $^1/_2$ (или любым полуцелым спином, например, $^3/_2$, $^5/_2$ и т. д.) – таким, как электроны или нуклоны. Так как спин кварков равен $^1/_2$, они должны подчиняться принципу Паули. Но у трех барионов *uuu*, *ddd*, *sss* все три кварка имели бы одинаковые квантовые числа, и по крайней мере у двух из них спины имели бы одинаковое направление [так как существуют только два возможных направления спина: $m_s = +^1/_2$ и $m_s = -^1/_2$ («вверх» и «вниз»)]. Это означало бы нарушение принципа Паули. Но если бы кварки обладали дополнительным квантовым числом (цветом), которое у каждого кварка принимало бы свое значение, то кварки могли бы различаться этим квантовым числом и принцип Паули не нарушался бы. Хотя цвет кварка и связанное с ним (троекратное) увеличение числа кварков первоначально было типичной «идеей на данный случай», это позволило улучшить согласие теории с экспериментом и, в частности, предсказать правильное время жизни π^0-мезона. Кроме того, представление о цвете вскоре стало центральным моментом теории, поскольку именно с цветом стали связывать взаимодействие, удерживающее кварки в адроне. Каждому кварку приписывается *цветовой заряд*, аналогичный электрическому заряду, и сильное взаимодействие между кварками часто называют **цветовым взаимодействием**. Новая теория сильного взаимодействия получила название **квантовой хромодинамики** (от греч. «хромос» – цвет), или КХД. Тем самым создатели ее хотели подчеркнуть, что речь идет о взаимодействии «цветовых зарядов» (а не электрических или каких-либо других). Считается, что сильное взаимодействие адронов[1] сводится к взаимодействию составляющих их кварков, как иллюстрирует рис. 43.8. Частицы, переносящие взаимодействие (аналогичные фотонам в электромагнитном взаимодействии), называются **глюонами** (от англ. «glue» – клей). Согласно теории, существуют восемь глюонов, все с нулевой массой покоя, шесть из них имеют цветовой заряд[2]. Таким образом, глюоны пришли на смену мезонам (см. табл. 43.1) в качестве частиц, переносящих сильное (цветовое) взаимодействие.

---

[1] Однако сильное взаимодействие между адронами, по-видимому, слабее взаимодействия между кварками внутри адрона.

[2] Сравните ситуацию в КХД с электромагнитным взаимодействием, переносчик которого – фотон – не имеет электрического заряда. Поскольку глюоны имеют цветовой заряд, они могут взаимодействовать друг с другом и образовывать составные частицы (чего не могут фотоны). Поиском таких «глюболов» интенсивно занимаются в последнее время. Возможно, их даже уже наблюдали.

Переносчиками слабого взаимодействия, как мы уже говорили, являются W^+-, W^-- и Z^0-частицы. Это взаимодействие обусловлено «слабым зарядом», которым обладает каждая частица. Таким образом, у каждой элементарной частицы есть электрический заряд, слабый заряд, цветовой заряд и гравитационная масса (хотя одна или даже несколько из этих характеристик могут быть равны нулю). Например, цветовой заряд всех лептонов равен нулю, поэтому они не участвуют в сильном взаимодействии.

Резюмируя, можно сказать, что в современных теориях истинно элементарными частицами являются фотон, лептоны, кварки, глюоны и $W^{\pm}$ - и Z^0-частицы. Фотон и лептоны наблюдаются на опыте, и недавно наконец удалось наблюдать W^+- и W^--частицы. До сих пор наблюдались только комбинации кварков (барионы, мезоны). Весьма вероятно, что кварки не существуют в свободном состоянии. С другой стороны, некоторые физики считают, что лептоны и кварки не являются фундаментальными частицами, а состоят из еще более фундаментальных частиц. Так ли это, покажет будущее.

Один из важных аспектов современной теории состоит в попытке найти основу для объединения различных взаимодействий, существующих в природе. На создание единой теории возлагал надежды Эйнштейн, которому так и не удалось осуществить свои замыслы. В начале 60-х годов Вайнберг, Глэшоу и Салам разработали так называемую калибровочную теорию, объединившую слабое и электромагнитное взаимодействия. В этой **электрослабой теории** слабое и электромагнитное взаимодействия рассматриваются как два различных проявления единого, более фундаментального взаимодействия. Электрослабая теория достигла немалых успехов, к числу которых помимо прочего относится предсказание W^+-частиц как переносчиков слабого взаимодействия с массой 82 ± 2 ГэВ/c^2, которое блестяще подтвердилось в 1983 г. экспериментально измеренным значением 81 ± 5 ГэВ/c^2. Электрослабую теорию и КХД для сильного взаимодействия часто называют «стандартной моделью».

43.10. Теории Великого объединения

Успехи единой электрослабой теории стимулировали в последнее время попытки включить ее и КХД для сильного (цветового) взаимодействия в рамки так называемой **теории Великого объединения**. В одном из вариантов теории Великого объединения, включающей электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия, существует только один класс частиц – лептоны и кварки, принадлежащие единому семейству и способные свободно превращаться друг в друга, а три типа сил представляют собой

различные аспекты единого фундаментального взаимодействия. Но такое объединение происходит в масштабах, меньших, чем 10^{-31} м. Если две элементарные частицы (лептоны или кварки) сближаются на расстояние меньше этого *масштаба объединения*, то между ними перестает существовать какое-либо различие и кварк может легко превращаться в лептон или наоборот. Барионный и лептонный заряды при этом не сохраняются. Лептоны и кварки принадлежат единому семейству. Слабое, электромагнитное и сильное (цветовое) взаимодействия сливаются в единое взаимодействие.

Каким образом лептон может превратиться в кварк и наоборот? Теория предсказывает существование частиц, обмен которыми между лептоном и кварком позволяет одной частице превращаться в другую подобно тому, как обмен заряженными пионами между π^--мезоном и протоном p на рис. 43.8, *б* позволяет протону превращаться в нейтрон. Масса новых частиц, осуществляющих обмен, в соответствии с принципом неопределенности, которым мы уже пользовались в этой главе [см. формулу (43.2), где следует положить $d \approx 10^{-31}$ м], равна примерно 10^{15} ГэВ/c^2, или 10^{15} масс протона. Столь необычайно большая масса не оставляет особых надежд на наблюдение этих частиц в лаборатории. Именно из-за чудовищной величины этой массы в наблюдаемых реакциях барионный и лептонный заряды сохраняются, так как вероятность рождения столь массивной частицы даже виртуально в процессе обмена при самых высоких достигнутых в лабораторных условиях энергиях крайне мала.

То, что происходит на расстояниях, превышающих масштаб объединения (10^{-31} м), называют *нарушением симметрии*. В качестве аналогии рассмотрим атом в кристалле. Внутри атома существует значительная симметрия – в самых близких к ядру областях электронное облако сферически-симметрично. Но к периферии атома симметрия нарушается: электронные облака испытывают возмущения главным образом в направлениях между узлами в кристаллической решетке. Точно так же взаимодействие между элементарными частицами на расстоянии 10^{-31} м симметрично и не отличает один тип «заряда» от другого. Но на бóльших расстояниях симметрия нарушается и возникают три разных взаимодействия. [В «стандартной модели» электрослабого взаимодействия (разд. 43.9) нарушение симметрии между электромагнитным и слабым взаимодействиями происходит на расстоянии около 10^{-18} м.]

Так как объединение наступает только на сверхмалых расстояниях при огромных энергиях, теория Великого объединения плохо поддается экспериментальной проверке. Тем не менее ее экспериментальную проверку нельзя считать полностью невозможной. Одна из проверок может использовать идею, высказанную в конце разд. 43.4,–

о возможности распада протона (например, $p \to \pi^0 e^+$) с нарушением закона сохранения барионного заряда. Такой распад мог бы произойти при сближении двух кварков на расстояние меньше 10^{-31} м. Но при нормальной температуре и энергии это крайне маловероятно и соответственно вероятность распада протона очень мала. В простейшем варианте теории Великого объединения оценка времени жизни протона дает значение $\sim 10^{31}$ лет. Эта величина уже допускает экспериментальную проверку. Пока наблюдать распад протона никому не удалось, и эксперименты 1983 г. установили нижний предел времени жизни протона около $6{,}5 \cdot 10^{31}$ лет, что почти на порядок величины выше предсказанного значения. Этот результат вызвал разочарование, но вместе с тем явился и вызовом. На более сложные варианты теории Великого объединения он не повлиял.

Еще одно интересное предсказание теории Великого объединения относится к космологии. Теория утверждает, что в первые 10^{-40} с после Великого Взрыва, в результате которого возникла наша Вселенная, температуры были столь высоки, что частицы обладали энергиями, соответствующими масштабу объединения. Это означает, что барионный заряд не сохранялся. Этим объясняется наблюдаемое в настоящее время преобладание вещества ($B > 0$) над антивеществом ($B < 0$) во Вселенной.

Последний пример интересен тем, что показывает глубокую связь между исследованиями, проводимыми на противоположных концах шкалы размеров: теории, занимающиеся изучением мельчайших объектов (элементарных частиц), вносят существенный вклад в наше понимание Вселенной как целого.

Еще более претенциозными, чем теория Великого объединения, представляются попытки включить в единую схему и гравитационное взаимодействие, объединив тем самым в рамках единой теории все четыре фундаментальных взаимодействия. Мир элементарных частиц открывает перед нами все новые и новые перспективы. Мы с нетерпением ожидаем того, что произойдет в ближайшем будущем.

Заключение

Для увеличения энергии заряженных частиц, например электронов и протонов, до очень больших значений, используются ускорители. Частицам высоких энергий соответствуют очень малые длины волн, поэтому их можно использовать для получения подробной информации о строении бомбардируемых объектов. При столкновениях с высокой энергией происходит образование новых частиц (соотношение $E = mc^2$).

Подобно тому как электромагнитное взаимодействие происходит благодаря обмену фотонами, сильное взаимодействие переносится *мезонами*, обладающими массой

покоя или, согласно более современным представлениям, безмассовыми *глюонами*.

Античастица имеет такую же массу, что и частица, но противоположный по знаку заряд. Противоположными могут быть и некоторые другие характеристики античастицы; например знак *барионного заряда* антипротона противоположен знаку барионного заряда протона. Во всех ядерных реакциях и реакциях с участием частиц выполняются следующие законы сохранения: импульса, массы-энергии, момента импульса, электрического заряда, барионного заряда и трех лептонных зарядов. Некоторые частицы обладают свойством, которое называется *странностью*, сохраняется при сильном и не сохраняется при слабом взаимодействии.

Частицы можно классифицировать как *лептоны* и *адроны*; фотон образует отдельный класс. Лептоны участвуют в слабом и электромагнитном взаимодействиях. Адроны, помимо того, участвуют в сильном взаимодействии. Адроны подразделяются на *мезоны* (с нулевым барионным зарядом) и *барионы* (с ненулевым барионным зарядом).

Все частицы, за исключением фотона, электрона, нейтрино и (насколько пока известно) протона, распадаются с измеримым периодом полураспада от 10^{-23} до 10^{3} с. Период полураспада зависит от того, каким взаимодействием в основном определяется распад. Период полураспада за счет слабого взаимодействия превышает примерно 10^{-10} с. Периоды полураспада при электромагнитном взаимодействии заключены в пределах от 10^{-16} до 10^{-19} с. Самые короткоживущие частицы – так называемые резонансы – распадаются за счет сильного взаимодействия и существуют лишь примерно 10^{-23} с.

Последние теории элементарных частиц основаны на гипотезе *кварков* как составных частей адронов. Первоначально считалось, что существует три кварка. Затем были получены указания о существовании четвертого – *очарованного* кварка, а еще позже возникла необходимость ввести пятый и шестой кварки. Ожидается, что число кварков совпадает с числом лептонов и что кварки и лептоны являются истинно элементарными частицами. Кварки обладают *цветом*. Согласно *квантовой хромодинамике*, переносчиками сильного цветового взаимодействия между цветовыми зарядами служат *глюоны*. Теория, объединяющая взаимодействия, предполагает, что на очень коротких расстояниях (10^{-31} м) и при очень высоких энергиях слабое, электромагнитное и сильное взаимодействия проявляются как единая сила, а фундаментальное различие между кварками и лептонами исчезает.

Вопросы

1. Приведите пример реакции между двумя нуклонами, сходной с реакцией (43.3), с образованием π-мезона.
2. Нарисуйте диаграмму Фейнмана для реакции $n + p \to n + p + \pi^0$.
3. Нарисуйте диаграмму Фейнмана для аннигиляции $p\bar{p}$ с образованием двух пионов.
4. Нарисуйте диаграмму Фейнмана для фотоэффекта.
5. Из каких античастиц состоял бы «антиатом»? Что произошло бы при контакте *антивещества*, состоящего из таких антиатомов, с обычным веществом?
6. Почему нейтрон распадается за счет слабого взаимодействия, хотя и сам нейтрон, и один из продуктов его распада (протон) участвуют в сильном взаимодействии?
7. В каких из четырех взаимодействий (сильном, электромагнитном, слабом, гравитационном) участвуют электрон? нейтрино? протон?
8. Проверьте, что в каждом из распадов, перечисленных в табл. 43.2, сохраняются электрический и барионный заряды.
9. Какие из распадов, приведенных в табл. 43.2, происходят за счет электромагнитного взаимодействия?
10. Какие из распадов, приведенных в табл. 43.2, происходят за счет слабого взаимодействия?
11. Какие из приведенных ниже распадов возможны? Для запрещенных распадов укажите, какому закону сохранения они противоречат:

а) $\Xi^0 \to \Sigma^+ + \pi^-$;
б) $\Omega^- \to \Sigma^0 + \pi^- + \nu$;
в) $\Sigma \to \Lambda + \gamma + \gamma$.

12. Какие из приведенных ниже реакций возможны и за счет какого взаимодействия они происходят? Для запрещенных реакций объясните, с чем связан запрет:

а) $\pi^- p \to K^+ \Sigma^-$;
б) $\pi^+ p \to K^+ \Sigma^+$;
в) $\pi^- p \to \Lambda^0 K^0 \pi^0$;
г) $\pi^+ p \to \Sigma^0 \pi^0$;
д) $\pi^- p \to p e^- \bar{\nu}_e$;
е) $\pi^- p \to K^0 p \pi^0$;
ж) $K^- p \to \Lambda^0 \pi^0$;
з) $K^+ n \to \Sigma^+ \pi^0 \gamma$;
и) $K^+ \to \pi^0 \pi^0 \pi^+$;
к) $\pi^+ \to e^+ \nu_e$.

13. Из каких кварков состоит а) нейтрон; б) антинейтрон; в) Λ^0; г) Ξ^0?
14. Какие частицы отвечают следующим комбинациям кварков: а) uud; б) $\bar{u}\bar{u}\bar{s}$; в) $\bar{u}\bar{s}$; г) $d\bar{u}$; д) $\bar{c}s$?
15. Какая комбинация кварков отвечает D^0-мезону ($Q = B = S = 0$, $C = +1$)?
16. F^+-мезон имеет квантовые числа $Q = S = C = +1$, $B = 0$. Из каких кварков он состоит?
17. Начертите возможную кварковую диаграмму Фейнмана (рис. 43.8, *в*) для реакции $K^- p \to K^- p$?

Задачи

Раздел 43.1

1. (I) Вычислите длину волны электронов с энергией 30 ГэВ.
2. (I) Чему равна полная энергия протона с кинетической энергией 25 ГэВ? Чему равна его длина волны?
3. (I) Чему равны длина волны и максимальная разрешающая способность, достижимая в Фермилаб с помощью протонов, ускоренных до энергии 400 ГэВ?

Раздел 43.2

4. (I) Какова минимальная кинетическая энергия (в отдельности) нейтрона и протона, летящих навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, если при их столкновении рождается пара $K^+ K^-$ (табл. 43.2)?
5. (II) Массу π^0-мезона можно измерить с помощью реакции $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ при очень малой кинетической энергии налетающей частицы (которая предполагается равной нулю). Нейтрон вылетает с кинетической энергией 0,60 МэВ. Определите массу π^0-мезона с помощью законов сохранения энергии и импульса.
6. (III) Может ли при столкновении протона с энергией 100 МэВ с покоящимся протоном произойти рождение π^+-мезона? Какую минимальную кинетическую энергию должен иметь протон?

Раздел 43.3

7. (I) а) Какая энергия выделяется при аннигиляции электрона и позитрона? б) Какая энергия выделяется при аннигиляции протона и антипротона?
8. (I) Какая энергия необходима для рождения нейтрон-антинейтронной пары?
9. (II) Чему равны длины волн двух фотонов, возникающих при аннигиляции в состоянии покоя протон-антипротонной пары?

Раздел 43.5

10. (I) Какая энергия выделяется при распаде $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$?
11. (I) Какая примерно энергия выделяется при распаде Λ^0-частицы (табл. 43.2)?
12. (II) Чему равны длины волн двух фотонов, возникающих при аннигиляции электрон-позитронной пары с кинетической энергией каждой частицы 300 кэВ?
13. (II) Чему равна кинетическая энергия позитрона, возникающего в редком распаде $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$?

Разделы 43.6–43.10

14. (I) Измеренная ширина ψ-мезона равна 63 кэВ. Оцените его время жизни.
15. (I) Измеренная ширина ψ′-мезона равна 215 кэВ. Оцените его время жизни.
16. (II) а) Покажите, что так называемый масштаб объединения (10^{-31} м) в теории Большого объединения эквивалентен энергии около 10^{15} ГэВ. Воспользуйтесь формулой для дебройлевской длины волны или принципом неопределенности и объясните, как их применять в данном случае. б) Вычислите температуру, соответствующую масштабу объединения.
17. (II) Нарушение симметрии в электрослабой теории происходит на расстояниях порядка 10^{-18} м. Покажите, что это соответствует энергии, примерно эквивалентной массе W^+-частиц.
18. (II) Нарисуйте кварковые диаграммы Фейнмана (по аналогии с рис. 43.8, *в*) для реакций: а) $pn \to pn$; б) $\bar{p}p \to \pi^+\pi^-$.

Приложение А
Математические формулы

а. Корни квадратного уравнения

Если

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

б. Биномиальное разложение

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

$$(x + y)^n = x^n\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = x^n\left[1 + n\frac{y}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{y^2}{x^2} + \dots\right].$$

в. Другие разложения

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots.$$

Разложение произвольной функции:

$$f(x) = f(0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} + \dots.$$

г. Площади и объемы

Фигура или тело	Площадь или площадь поверхности	Объем
Круг радиусом r	πr^2	–
Сфера радиусом r	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Прямой круговой цилиндр радиусом r и высотой h	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$

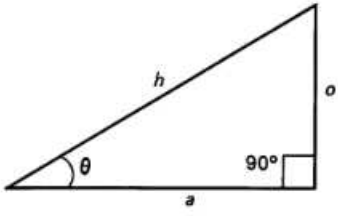


Рис. А.1.

д. Тригонометрические функции (рис. А.1)

$$\sin\theta = \frac{o}{h}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{h}{o},$$

$$\cos\theta = \frac{a}{h}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{h}{a},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{o}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{a}{o},$$

$a^2 + o^2 = h^2$ (теорема Пифагора).

е. Тригонометрические тождества

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1, \quad \operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{ctg}^2\theta = 1,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta},$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B,$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B,$$

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A\operatorname{tg} B},$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}},$$

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\left(\frac{A \pm B}{2}\right)\cos\left(\frac{A \mp B}{2}\right).$$

Приложение Б
Производные и интегралы

а. Производные: общие правила

$$\frac{dx}{dx} = 1,$$

$$\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{df}{dx} \quad (a = \text{const}),$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}[f(y)] = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{(дифференцирование сложной функции)},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}, \quad \text{если} \quad \frac{dy}{dx} \neq 0.$$

б. Производные различных функций

$$\frac{da}{dx} = 0 \quad (a = \text{const}),$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax,$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\sin ax,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} ax = a\sec^2 ax,$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}.$$

в. Неопределенные интегралы: общие правила

$$\int dx = x,$$

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a = \text{const}),$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int udv = uv - \int vdu \quad \text{(интегрирование по частям)}.$$

г. Неопределенные интегралы от различных функций

(К правой части каждого равенства может быть прибавлена произвольная постоянная.)

$$\int a\,dx = ax \quad (a = \text{const}),$$

$$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\,x^{m+1} \quad (m \neq -1),$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax,$$

$$\int \operatorname{tg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax|,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x,$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax},$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right) & \text{при} \quad x^2 > a^2, \\ -\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right) & \text{при} \quad x^2 < a^2. \end{cases}$$

Приложение B
Полярные координаты

Часто (особенно в тех случаях, когда мы имеем дело с вращательным движением) бывает удобно ввести полярные координаты r и θ, где r – расстояние от начала координат до точки (равное длине радиуса-вектора $\mathbf{r}$), а θ – угол, образуемый радиусом-вектором с положительным направлением оси x (рис. B.1). Положение точки на плоскости можно задавать либо с помощью прямоугольных координат x и y, либо с помощью полярных координат r и θ. Прямоугольные координаты связаны с полярными преобразованием (см. рис. B.1)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

полярные координаты с прямоугольными – обратным преобразованием

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = y/x.$$

Подобно тому как в прямоугольной системе координат полезно ввести единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, в полярной системе координат полезно ввести два единичных вектора $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Вектор $\hat{\mathbf{r}}$ всегда направлен в сторону увеличения радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и имеет единичную длину, вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ имеет единичную длину и направлен в сторону увеличения полярного угла θ (рис. B.1). Обратите внимание на то, что векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ действительно постоянны (и по величине, и по направлению), тогда как векторы $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ сохраняют только постоянную величину (единичную длину), а направление их меняется от точки к точке.

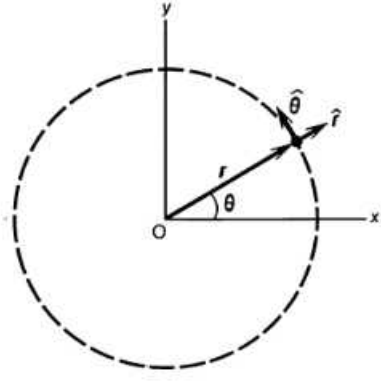


Рис. B.1.

В качестве примера рассмотрим движение по окружности (разд. 3.9 и 3.10). Векторы скорости и ускорения материальной точки, движущейся по окружности, можно записать с помощью векторов $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Так как вектор $\mathbf{v}$ всегда направлен по касательной к окружности,

$$\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Из соотношений (3.25) и (3.26), а также рис. 3.20 (разд. 3.10) и рис. В.1 следует, что ускорение можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a_c\hat{\mathbf{r}} + a_t\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \qquad \text{(В.1)}$$

Первый член – это центростремительное ускорение, второй – тангенциальное ускорение. Знак минус перед первым членом выбран потому, что центростремительное ускорение направлено к центру, т.е. в сторону, противоположную радиусу-вектору $\hat{\mathbf{r}}$.

Заметим, что если материальная точка движется по окружности с постоянной скоростью, то $a_t = dv/dt = 0$, и мы приходим к такому же результату, как и в разд. 3.9.

Формулы для a_t и a_c [см. соотношение (3.26) или В.1] остаются в силе и в том случае, если материальная точка движется по кривой, отличной от окружности, только под радиусом r следует понимать радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке. Тогда a_c – составляющая ускорения, перпендикулярная траектории, а a_t – составляющая ускорения, касательная (тангенциальная) к траектории в соответствующий момент времени.

Приложение Г
Некоторые изотопы[1)]

Атомный номер Z	Химический элемент	Символ	Массовое число A	Масса атома[2)]	Распространенность элемента в природе (в процентах) и тип распада (для радиоактивных элементов)	Период полураспада (для радиоактивных элементов)
0	(Нейтрон)	n	1	1,008665	β^-	10,6 мин
1	Водород	H	1	1,007825	99,985	
	Дейтерий	D	2	2,014102	0,015	
	Тритий	T	3	3,016049	β^-	12,33 года
2	Гелий	He	3	3,016029	0,00014	
			4	4,002603	~ 100	
3	Литий	Li	6	6,015123	7,5	
			7	7,016005	92,5	
4	Бериллий	Be	7	7,016930	Захват электрона, γ	53,3 сут
			9	9,012183	100	
5	Бор	B	10	10,012938	19,8	
			11	11,009305	80,2	
6	Углерод	C	11	11,011433	β^+, захват электрона	20,4 мин
			12	12,000000	98,89	
			13	13,003355	1,11	
			14	14,003242	β^-	5730 лет
7	Азот	N	13	13,005739	β^+	9,96 мин
			14	14,003074	99,63	
			15	15,000109	0,37	
8	Кислород	O	15	15,003065	β^+, захват электрона	122 с
			16	15,994915	99,76	
			18	17,999159	0,204	
9	Фтор	F	19	18,998403	100	
10	Неон	Ne	20	19,992439	90,51	
			22	21,991384	9,22	
11	Натрий	Na	22	21,994435	β^+, захват электрона, γ	2602 года
			23	22,989770	100	
			24	23,990964	β^-, γ	15,0 ч

[1)] Данные заимствованы из справочников: Chart of the Nuclides, 12th ed., 1987; *Lederer C. M., Shirley V. S.*, eds. Table of Isotopes, 7th ed.– N. Y.: John Wiley and Sons, 1978.

[2)] В пятом столбце приведены массы нейтрального атома.

Атомный номер Z	Химический элемент	Символ	Массовое число A	Масса атома[2)]	Распространенность элемента в природе (в процентах) и тип распада (для радиоактивных элементов)	Период полураспада (для радиоактивных элементов)
12	Магний	Mg	24	23,985045	78,99	
13	Алюминий	Al	27	26,981541	100	
14	Кремний	Si	28	27,976928	92,23	
			31	30,975364	β^-, γ	2,62 ч
15	Фосфор	P	31	30,973763	100	
			32	31,973908	β^-	14,28 дней
16	Сера	S	32	31,972072	95,0	
			35	34,969033	β^-	87,4 сут
17	Хлор	Cl	35	34,968853	75,77	
			37	36,965903	24,23	
18	Аргон	Ar	40	39,962383	99,60	
19	Калий	K	39	38,963708	93,26	
			40	39,964000	β^-, захват электрона, γ, β^+	$1{,}28 \cdot 10^9$ лет
20	Кальций	Ca	40	39,962591	96,94	
21	Скандий	Sc	45	44,955914	100	
22	Титан	Ti	48	47,947947	73,7	
23	Ванадий	V	51	50,943963	99,75	
24	Хром	Cr	52	51,940510	83,79	
25	Марганец	Mn	55	54,938046	100	
26	Железо	Fe	56	55,934939	91,8	
27	Кобальт	Co	59	58,933198	100	
			60	59,933820	β^-, γ	5,271 года
28	Никель	Ni	58	59,930789	26,1	
29	Медь	Cu	63	62,929599	69,2	
			65	64,927792	30,8	
30	Цинк	Zn	64	63,929145	48,6	
			66	65,926035	27,9	
31	Галлий	Ga	69	68,925581	60,1	
32	Германий	Ge	72	71,922080	27,4	
			74	73,921179	36,5	
33	Мышьяк	As	75	74,921596	100	
34	Селен	Se	80	79,916521	49,8	
35	Бром	Br	79	78,918336	50,69	
36	Криптон	Kr	84	83,911506	57,0	
37	Рубидий	Rb	85	84,911800	72,17	
38	Стронций	Sr	86	85,909273	9,8	
			88	87,905625	82,6	
			90	89,907746	β^-	28,8 года
39	Иттрий	Y	89	88,905856	100	
40	Цирконий	Zr	90	89,904708	51,5	
41	Ниобий	Nb	93	92,906378	100	
42	Молибден	Mo	98	97,905405	24,1	
43	Технеций	Tc	98	97,907210	β^-, γ	$4{,}2 \cdot 10^6$ лет
44	Рутений	Ru	102	101,904348	31,6	
45	Родий	Rh	103	102,90550	100	
46	Палладий	Pd	106	105,90348	27,3	

Атомный номер Z	Химический элемент	Символ	Массовое число A	Масса атома[2)]	Распространенность элемента в природе (в процентах) и тип распада (для радиоактивных элементов)	Период полураспада (для радиоактивных элементов)
47	Серебро	Ag	107	106,905095	51,83	
			109	108,904754	48,17	
48	Кадмий	Cd	114	113,903361	28,7	
49	Индий	In	115	114,90388	95,7 β^-	$5{,}1 \cdot 10^{14}$ лет
50	Олово	Sn	120	119,902199	32,4	
51	Сурьма	Sb	121	120,903824	57,3	
52	Теллур	Te	130	129,90623	34,5, β^-	$2 \cdot 10^{21}$ лет
53	Иод	I	127	126,904477	100	
			131	130,906118	β^-, γ	8,04 сут
54	Ксенон	Xe	132	131,90415	26,9	
			136	135,90722	8,9	
55	Цезий	Cs	133	132,90543	100	
56	Барий	Ba	137	136,90582	11,2	
			138	137,90524	71,7	
57	Лантан	La	139	138,90636	99,911	
58	Церий	Ce	140	139,90544	88,5	
59	Празеодим	Pr	141	140,90766	100	
60	Неодим	Nd	142	141,90773	27,2	
61	Прометий	Pm	145	144,91275	Захват электрона, α, γ	17,7 года
62	Самарий	Sm	152	151,91974	26,6	
63	Европий	Eu	153	152,92124	52,1	
64	Гадолиний	Gd	158	157,92411	24,8	
65	Тербий	Tb	159	158,92535	100	
66	Диспрозий	Dy	164	163,92918	28,1	
67	Гольмий	Ho	165	164,93033	100	
68	Эрбий	Er	166	165,93031	33,4	
69	Тулий	Tm	169	168,93423	100	
70	Иттербий	Yb	174	173,93887	31,6	
71	Лютеций	Lu	175	174,94079	97,36	
72	Гафний	Hf	180	179,94656	35,2	
73	Тантал	Ta	181	180,94801	99,988	
74	Вольфрам	W	184	183,95095	30,7	
75	Рений	Re	187	186,95577	62,60, β^-	$4 \cdot 10^{10}$ лет
76	Осмий	Os	191	190,96094	β^-, γ	15,4 сут
			192	191,96149	41,0	
77	Иридий	Ir	191	190,96060	37,3	
			193	192,96294	62,7	
78	Платина	Pt	195	194,96479	33,8	
79	Золото	Au	197	196,96656	100	
80	Ртуть	Hg	202	201,97063	29,8	
81	Таллий	Tl	205	204,97441	70,5	
82	Свинец	Pb	206	205,97446	24,1	
			207	206,97589	22,1	
			208	207,97664	52,3	
			210	209,98418	α, β^-, γ	22,3 года
			211	210,98874	β^-, γ	36,1 мин
			212	211,99188	β^-, γ	10,64 ч
			214	213,99980	β^-, γ	26,8 мин

Атомный номер Z	Химический элемент	Символ	Массовое число A	Масса атома[2)]	Распространенность элемента в природе (в процентах) и тип распада (для радиоактивных элементов)	Период полураспада (для радиоактивных элементов)
83	Висмут	Bi	209	208,98039	100	
			211	210,98726	α, β^-, γ	2,15 мин
84	Полоний	Po	210	209,98286	α, γ	138,38 сут
			214	213,99519	α, γ	164 мкс
85	Астатин	At	218	218,00870	α, β^-	~ 2 с
86	Радон	Rn	222	222,017574	α, γ	3,8235 сут
87	Франций	Fr	223	223,019734	α, β^-, γ	21,8 мин
88	Радий	Ra	226	226,025406	α, γ	$1{,}60 \cdot 10^3$ лет
89	Актиний	Ac	227	227,027751	α, β^-, γ	21,773 года
90	Торий	Th	228	228,02873	α, γ	1,9131 года
			232	232,038054	100, α, γ	$1{,}41 \cdot 10^{10}$ лет
91	Протактиний	Pa	231	231,035881	α, γ	$3{,}28 \cdot 10^4$ лет
92	Уран	U	232	232,03714	α, γ	72 года
			233	233,039629	α, γ	$1{,}592 \cdot 10^5$ лет
			235	235,043925	0,72, α, γ	$7{,}038 \cdot 10^8$ лет
			236	236,045563	α, γ	$2{,}342 \cdot 10^7$ лет
			238	238,050786	99,275, α, γ	$4{,}468 \cdot 10^9$ лет
			239	239,054291	β^-, γ	23,5 мин
93	Нептуний	Np	239	239,052932	β^-, γ	2,35 сут
94	Плутоний	Pu	239	239,052158	α, γ	$2{,}41 \cdot 10^4$ лет
95	Америций	Am	243	243,061374	α, γ	$7{,}37 \cdot 10^3$ лет
96	Кюрий	Cm	245	245,065487	α, γ	$8{,}5 \cdot 10^3$ лет
97	Берклий	Bk	247	247,07003	α, γ	$1{,}4 \cdot 10^3$ лет
98	Калифорний	Cf	249	249,074849	α, γ	351 год
99	Эйнштейний	Es	254	254,08802	$\alpha, \gamma, \beta^{-1}$	276 сут
100	Фермий	Fm	253	253,08518	Захват электрона, α, γ	3,0 сут
101	Менделевий	Md	255	255,0911	Захват электрона, α	27 мин
102	Нобелий	No	255	255,0933	Захват электрона, α	3,1 мин
103	Лоуренций	Lr	257	257,0998	α	~ 35 с
104	Резерфордий (?)	Rf	261	261,1087	α	1,1 мин
105	Ганий (?)	Ha	262	262,1138	α	0,7 мин
106			263	263,1184	α	0,9 с

Ответы к задачам с нечетными номерами

Глава 22

1. $6{,}25 \cdot 10^{14}$.
3. $6{,}0 \cdot 10^{-3}$ Н.
5. 5,1 м.
7. 53 Н, 16 Н, 37 Н.
9. $1{,}6 \cdot 10^{5}$ Н к центру квадрата.
11. 10,6 см от меньшего заряда.
13. $|Q_1| = |Q_2| = |Q_т|$, Q_1 или $Q_2 = 0$.
15. 4,8 мкКл.
17. $2{,}96 \cdot 10^{10}\, Q^2/l^2$.
19. $2{,}57 \cdot 10^{8}$ Н/Кл.
21. $1{,}02 \cdot 10^{-7}$ Н/Кл.
23. $2{,}6 \cdot 10^{6}$ Н/Кл; 90°; $6{,}7 \cdot 10^{6}$ Н/Кл, 56°.
25. $4{,}9 \cdot 10^{7}$ Н/Кл, 45°.
27. $a/\sqrt{2}$.
29. а) $\left(Q/2\pi\varepsilon_0 a^2\right)\left(1 - \dfrac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}\right)$.
31. $(\sigma/\pi\varepsilon_0)\arcsin\,[L^2/(L^2 + 4z^2)]^{1/2}$.
33. $2{,}39 \cdot 10^{4}$ Н/Кл, $7{,}4 \cdot 10^{2}$ Н/Кл; 0,005, 0,031.
39. а) 2,0 мм; б) 3,3 нс.
41. 16°.
43. а) $3{,}4 \cdot 10^{-20}$ Кл; в) $8{,}5 \cdot 10^{-26}$ Н·м; г) $2{,}5 \cdot 10^{-26}$ Н·м.
45. б) $(1/2\pi)\sqrt{pE/I}$.

Глава 23

1. а) 25 Н·м²/Кл; б) 18 Н·м²/Кл; в) 0.
3. $Q/6\varepsilon_0$.
5. $1{,}28 \cdot 10^{-8}$ Кл.
9. $2{,}1 \cdot 10^{-11}$ Кл.
11. а) $\rho r/3\varepsilon_0$; б) $\rho r_0^3/3\varepsilon_0 r^2$.
13. а) $-6{,}8 \cdot 10^{5}$ Кл; $8{,}3 \cdot 10^{9}$.
15. а) 0; б) σ/ε_0.
17. $\varepsilon_0 bl^3$.
19. а) всегда; б) $Q = 0$.
21. а) $Q/(4\pi\varepsilon_0 r_0^2(1 + t^2/900)^2)$ до $t = 30$ с; б) $Q/64\pi\varepsilon_0 r_0^2$.
23. а) 0; б) $(Q/4\pi\varepsilon_0)(1 - r_1^2/r^2)/(r_0^2 - r_1^2)$; в) $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.
25. а) $(\sigma/\varepsilon_0)(R_0/r)$; б) 0.
27. а) $4{,}9 \cdot 10^{10}$ Н/Кл; б) $1{,}4 \cdot 10^{6}$ Н/Кл.
29. а) $Q/\pi r_0^4$; б) $(Q/\varepsilon_0)(r^4/r_0^4)$; в) $(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.

Глава 24

1. −4,8 мДж.
3. а) $1{,}1 \cdot 10^{9}$ Дж; б) 2500 кг.
7. $2{,}2 \cdot 10^{4}$ В/м.
9. 1,7°.
11. 24 кВ.
13. $6{,}2 \cdot 10^{7}$ м/с.
15. а) $-2{,}0 \cdot 10^{8}$ В; б) $1{,}3 \cdot 10^{9}$ В/м, 26° на северо-восток.
17. а) 8,9 см от заряда −2,0 мкКл б) 4,0 см от заряда −2,0 мкКл; 0,80 см от заряда −2,0 мкКл в сторону другого заряда.
19. а) 0,043 В; б) 0,031 В; в) −0,031 В.
21. а) $(Q/(4\pi\varepsilon_0))\,(2r/(r^2 + l^2) - 2/r)$.
25. а) $-9{,}6 \cdot 10^{8}$ В; б) $9{,}6 \cdot 10^{8}$.
27. 1,0 см; $3{,}3 \cdot 10^{-8}$ Кл.
29. 9,4 МВ.
31. $1{,}6 \cdot 10^{12}$.
33. а) $V_0 - (\sigma R_0/\varepsilon_0)\ln(r/R_0)$; б) V_0; в) Нет.
35. а) $Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$; б) $(Q/8\pi\varepsilon_0 R)\,(3 - r^2/R^3)$.
37. а) $Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$; б) $(Q/4\pi\varepsilon_0 R)\,(5/4 - r^4/5R^4)$.
41. б) $2p\cos\theta/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$, $p\sin\theta/4\pi\varepsilon_0 r^3$.
43. а) 96 кэВ; б) 190 кэВ.
45. 43 эВ.
47. а) $-3{,}1 \cdot 10^{-20}$ Дж; б) $-2{,}0 \cdot 10^{-20}$ Дж; в) 0; г) $+3{,}1 \cdot 10^{-20}$ Дж.
49. а) $Q^2(4 + \sqrt{2})/(4\pi\varepsilon_0 b)$; б) $\sqrt{2}Q^2/\pi\varepsilon_0 b$.
51. $0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м.
53. $3Q^2/20\pi\varepsilon_0 R$.

Глава 25

1. 300 мкКл.
3. $Q_0C_1/(C_1 + C_2)$, $Q_0C_2/(C_1 + C_2)$; $Q_0/(C_1 + C_2)$.
5. 4,8 Кл.
7. $1{,}0 \cdot 10^{9}$ м².
9. $7{,}1 \cdot 10^{-4}$ Ф.
13. а) $4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2/(R_2 - R_1)$.
15. 9,0 мкФ; 0,25 мкФ.
17. 1400 пФ (последовательно).
19. а) $C_1 = C_2C_3/(C_2 + C_3)$; б) 200 мкКл, 67 мкКл, 67 мкКл.
21. 0,017 мкФ, последовательно; 0,0014 мкФ.

23. а) 3,7 мкФ; б) 21 В, 29 В, 50 В.
25. $(\varepsilon_0\sqrt{A}/\operatorname{tg}\theta)\ln(1+(\sqrt{A}\operatorname{tg}\theta)/d)$.
27. $4{,}0\cdot10^{-6}$ Дж.
29. 840 Дж.
31. $9{,}0\cdot10^{-6}$ Дж.
33. а) $\ln(2R_2/R_1)/\ln(R_2/R_1)$; б) $\ln(R_2/R_1)$.
35. а) $-{}^1\!/_2\varepsilon_0 AV_0^2 l/d(d-l)$; б) $Q_0^2 l/2\varepsilon_0 A$.
39. 33 пФ.
41. $\varepsilon_0 AV^2(1-K)/2d$.
43. в) $1{,}84\cdot10^{-8}$ Кл; г) $1{,}17\cdot10^5$ В/м; д) $3{,}33\times$ $\times10^4$; е) 150 В; з) $2{,}58\cdot10^{-8}$ Кл; остальные ответы совпадают.
45. $2\varepsilon_0 AK_1K_2/d(K_1+K_2)$.
47. 22,2%.
49. а) $7{,}1\cdot10^{-4}$ Кл/м^2, $3{,}5\cdot10^{-4}$ Кл/м^3; б) 1,14 мкКл; в) $2{,}1\cdot10^7$ В/м, $1{,}1\cdot10^7$ В/м; г) $4{,}5\times10^4$ В.

Глава 26

1. $1{,}2\cdot10^5$ Кл.
3. $4{,}0\cdot10^{-11}$ А.
5. $1{,}9\cdot10^{18}$ в минуту.
7. $6{,}7\cdot10^{-2}$ Ом$^{-1}$.
9. 1,09 Ом.
11. 1/4.
13. а) $0{,}38\cdot10^{-3}$ Ом; б) $1{,}5\cdot10^{-3}$ Ом; в) $6{,}0\times$ $\times10^{-3}$ Ом.
17. 9,0 Ом.
19. $(r_2-r_1)/4\pi\sigma r_1 r_2$.
21. $1{,}73\cdot10^{-4}$ м; 53,4 м.
23. 6,25 моль/м^3.
27. 3,6 Вт.
29. 0,10 долл.
31. 18 долл.
33. $3{,}2\cdot10^{-4}$ м.
35. 71%.
37. 4,4 мм.
39. 0,0473 кг/с.
41. 840 Вт.
43. 0,94 А; 1,33 А.
45. 0,15 а.
47. 5,8 кВт; 12 кВт; 0.

Глава 27

1. 150 Ом; 6,0 Ом.
3. Последовательно соединенные резисторы, сопротивления которых относятся как 2,1 : 3,9.
5. 3,4 кОм.
7. 37 Ом.
9. 1,8 кОм.
11. 130 Ом.
13. 42 В.
15. 3,5 мА; 2,2 мА; 1,32 мА; 0,88 мА; 0,44 мА; 0,44 мА.
17. 0,58 А.
19. 0,050 Ом.
21. 0,16 А.
23. 17,4 В; 13,3 В.
25. 77 В; 43 В.
27. 0,45 А.
29. 1,3 А.
31. а) 8,0 В; б) 16 В; в) 8,0 В (установившееся значение); г) $-5{,}76$ мкКл; д) 2,1 мкс.
33. 11 мс.
35. а) $R_1R_2C/(R_1+R_2)$; б) $C\mathscr{E}R_2/(R_1+R_2)$.
37. 2,1 мкс.
39. 1,5 МОм.
41. Шунт $1{,}0\cdot10^{-3}$ Ом.
43. а) шунт $1{,}2\cdot10^{-4}$ Ом; б) добавочное сопротивление $5{,}0\cdot10^7$ Ом.
45. 1,78 А.
47. 7,9 В.
51. $3{,}0\cdot10^4$ Ом.
53. 0,301 В.
55. 4,472 В.
57. 13,6 Ом.
59. 68 °С или -18 °С.
61. а) $a=4{,}99\cdot10^{-5}$ В/К; $в=-5{,}83\cdot10^{-8}$ В/К^2; б) 113 °С.

Глава 28

1. а) 17,9 Н/м; б) 12,6 Н/м.
3. 1,6 Н.
5. $2\pi RIBd/(d^2+R^2)^{1/2}$.
9. Против часовой стрелки по окружности радиусом 3,8 мм.
13. 13 Тл (на север).
15. $1{,}5\cdot10^{-8}$ м.
17. $-(2{,}3\mathbf{i}+2{,}8\mathbf{j})\cdot10^6$ м/с.
23. $2{,}6\cdot10^6$ В/м.
25. 6.
27. $1{,}2\cdot10^5$ м/с; $3{,}4\cdot10^5$ м/с.
29. $\pm3{,}4\cdot10^5$ В/м.
31. 70, 72, 73, 74 а. е. м.
33. 1,2 м.
35. 1,4 Тл.
37. 34 МэВ; $4{,}1\cdot10^7$ м/с.
39. 17 МэВ, 44 МэВ, 13 МГц, 11 МГц.
41. б) IBl/neA; в) $IBl/e\mathscr{E}A$.
43. 1,8 Тл.
47. 0,51 мм.
51. 39,6 мкА.

Глава 29

1. $1{,}5\cdot10^3$ А.
3. $1{,}2\cdot10^{-4}$ г.
5. 48° на северо-запад.
7. а) $4{,}0\cdot10^{-6}(I-10)$ Тл; б) $4{,}0\cdot10^{-6}(I+$ $+10)$ Тл.
9. $\mu_0(d-2x)/2\pi x(d-x)$.
11. $1{,}27\cdot10^{-17}$ Н.
13. 7,2 А.
17. $\mu_0 jt/2$.
19. $1{,}4\cdot10^4$.
21. Притягиваются с силой 0,23 Н.
23. А: $2{,}6\cdot10^{-5}$ Н/м; B, C: $1{,}5\cdot10^{-5}$ Н/м.

25. а) $9{,}7\cdot10^3$ А в том же направлении; б) равновесие неустойчивое; в) $1{,}08\cdot10^4$ А в противоположном направлении; равновесие устойчиво только в вертикальном направлении.
27. $\mu_0 I\theta(R_2-R_1)/(4\pi R_1R_2)$.
31. $1{,}2\cdot10^{-8}$ Н/м.
35. б) 94; в) $1{,}2\cdot10^{-3}$ Тл; г) нет.
37. а) $^1/_2\mu_0 NIR^2[1/(R^2+x^2)^{3/2}+1/(R^2+(R-x)^2)^{3/2}]$; в) $5{,}5\cdot10^{-2}$ Тл.
39. $\mu_0 Il/2\pi(x^2+l^2/4)(x^2+l^2/2)^{1/2}$.
43. $1{,}5\cdot10^6$ А/м.

Глава 30

1. 0,023 В.
3. 36 В.
5. $1{,}9\cdot10^{-4}$ Дж.
7. а) $(0{,}75t^2-1{,}26)$ В; б) $-0{,}51$ В; 17,5 В.
9. а) 0,0765 А; б) $4{,}9\cdot10^{-4}$ Вт.
11. 2,7 мВ.
15. а) 0,20 В; б) 8,0 мА.
19. $-^1/_2BR^2\omega$.
21. б) $\nu=\nu_0\exp[-(B^2l^2/mR)t]$.
23. 0,403 В/м.
25. б) $(l^2/R)(dB/dt)$; в) $(l^2/8)(dB/dt)$.
27. б) по часовой стрелке; в) увеличивается.
29. а) IR/l; б) $(\mathscr{E}_0/l)\exp[-(B^2l^2/mR)t]$.
33. 8,5 Гц.
37. б) 28,1 А; в) 4,72 А.
39. $B^2l^2A\omega d/\rho$.
41. 0,44.
43. 8,0 В; 0,53 А.
45. а) 17,5 кВ; б) $1{,}04\cdot10^7$ Вт; в) $3{,}1\cdot10^5$ Вт.
47. 46 кВт.

Глава 31

1. То же самое значение.
3. $\mu_0N_1N_2A_2\cos(\theta/L)$.
5. $\mu_0n_1n_2\pi r_2^2$.
7. 7,43 мВ.
9. 2,04 Гн.
11. 0,22 А.
13. 2,46 мм.
15. 1/2.
17. б) 23 мГн.
21. 31 Ом, 18 Гн.
25. 0,80 Дж.
27. а) $4{,}4\cdot10^{-4}$ Дж/м^3, $1{,}6\cdot10^6$ Дж/м^3; б) $6{,}8\cdot10^8$ В/м.
29. $2{,}2\cdot10^{-2}$ Дж/м^3.
31. $\mu_0N^2J^2/(8\pi^2r^2)$; $(\mu_0N^2I^2h/4\pi)\ln(R_2/R_1)$.
33. 4,61.
37. а) 2,25 мс; б) $1{,}38\cdot10^5$ Ом.
39. а) $(LV^2/(2R^2)(1-\exp(-Rt/L))^2$; б) 5,30 т.
41. а) 177 пФ; б) 56 мГн.
45. а) $Q_0/\sqrt{2}$; б) $T/8$.
47. 1150 Ом.
49. а) $(Q_2^0/2C)\exp(-Rt/L)$.

Глава 32

1. 7,0 кГц.
5. $3{,}35\cdot10^3$ Ом; 0,120 А.
7. а) $3{,}2\cdot10^4$ Ом; б) 93 мА. 200 Гц.
9. 770 Вт.
11. а) 4,5 мВ; б) 30,0 мВ.
13. а) 4,0 кОм; б) 4,2 кОм.
17. а) 1,77 А; б) 16°; в) 204 Вт; г) 115 В; 33 В.
19. $R=14{,}4$ Ом, $C=800$ мкФ.
21. 8,5 мкФ.
25. а) 0; б) $2\mathscr{E}_0/\pi$.
27. в) $Q_0=\mathscr{E}_0/\sqrt{(\omega R)^2+(\omega^2L-1/c)^2}$; $\operatorname{tg}\phi=R\omega/(\omega^2L-1/c)$; д) $I_0=\mathscr{E}_0/\sqrt{R^2+(-\omega L+1/\omega c)^2}$; $\operatorname{tg}\phi=\left(\frac{1}{\omega c}-\omega L\right)/R$.
31. 1,15 МГц.
33. а) $1{,}08\cdot10^{-8}$ Ф; б) 1,13 А; в) 26 кГц; 42 кГц.
35. б) $\sqrt{1/LC-R^2/2L^2}$.
37. а) $\mathscr{E}_0^2R/2[R^2+(\omega L-1/\omega c)^2]$; б) $1/\sqrt{LC}$; в) R/L.
39. $2{,}0\cdot10^4$.
41. 4 Ом.

Глава 33

1. $2{,}7\cdot10^{-9}$ А.
7. $\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}=Q_m$; $\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-d\Phi_B/dt+\mu_0dQ_m/dt$.
9. а) 3,31 м; б) 194 м.
11. а) $(E_0/c)\mathbf{j}$.
13. а) $1{,}49\cdot10^{-3}$ Вт/м^2.
15. $4{,}5\cdot10^{-6}$ Дж/м^3.
17. $3{,}82\cdot10^{26}$ Вт.
19. 7,75 В/м; $2{,}58\cdot10^{-8}$ Тл.
21. $E_0=7{,}9\cdot10^{-4}$ В/м; $8{,}2\cdot10^{-10}$ Вт/м^2.
25. До радиослушателя; 0,14 с.
29. а) $20\sin(3{,}14\cdot10\ \text{с}^{-1}(0{,}67\cdot10^{-8}\ \text{с}-t))$; б) $20\sin(1{,}05\ \text{м}^{-1}(x-6{,}00\cdot10^8\ \text{м}))$.

Глава 34

1. а) $2{,}21\cdot10^8$ м/с; б) $1{,}99\cdot10^8$ м/с.
3. 3 м.
5. $4{,}0\cdot10^{16}$ м.
7. 536 об/с.
11. Круг диаметром 2,75 мм.
15. 12,0 см.
21. а) вогнутое; б) $-29{,}3$ см; в) 117 см.
23. а) $r=\infty$; б) $d_i=-d_0$; в) 1; г) да.
25. $-4{,}50$ м.
27. 31,3°.
29. 54,3°.
37. $>1{,}80$.
39. $>1{,}4$.
41. 53,8°.

Глава 35

1. а) 96 см; б) 2,2 м.
3. а) 28 см; б) 23 см.
5. Собирающая, 18,3 см, действительное.
7. 1,53.
9. 0,47 мм.
11. а) 151 мм, $-1{,}74$ мм, действительное; б) -122 мм, 1,41 мм, мнимое.
13. $1/d_0 + 1/d_i = (n/n' - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$; $1/f = (n/n' - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$; такие же; такие же.
15. 88 см.
19. 3,5 м.
23. На расстоянии 20,2 см позади второй линзы, $m = -0{,}511$.
25. а) 12,5 см; б) 8,3 см.
27. 2,1-кратное против 3,9-кратного, но следует иметь в виду, что ребенок и без лупы видит больше деталей, чем нормальный глаз.
29. а) -76 см; б) 6,6 ×.
31. -16 ×, 53 см.
33. 92 ×.
35. 12 ×.
37. 6,4 ×.
39. а) 16,1 см; б) 160 ×.
41. а) 1,07 см; б) 190 ×.
43. 3,5 Д.
45. а) $-2{,}8$ Д; б) 36 см.
47. $-0{,}48$ Д, 1,3 Д.
49. 0,90 Д.
51. $-23{,}6$ см.

Глава 36

3. 0,097 мм.
5. 1,99 мм.
9. 425 мм.
11. $LC \approx 10^{-31}$ ГФ.
13. 0,111°.
15. 0,51 см.
19. $I_0(3 + 2\sqrt{2}\cos\delta)/(3 + 2\sqrt{2})$.
21. $I_0 \cos^2\delta \cos^2\dfrac{\delta}{2}$; максимум при $\sin\theta = m\lambda/d$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$; минимум при $\sin\theta = m\lambda/4d$, где $m = 1, 2, 3, 5, 6, \ldots$ (m не делится на 4).
23. 160 нм; 0 или 320 нм.
27. 7,4 мкм.
29. 1,39.
31. 510 нм.
35. До 0,117 и 0,109.
37. 96,1 мкм.
39. $I_0 \cos^2(2\pi x/\lambda)$.
41. $2{,}3 \times 10^{27}$ лм/ср; $2{,}8 \cdot 10^{28}$ лм.

Глава 37

1. 3,18°.
3. $D = \lambda$.
5. $D(\sin 30° - \sin\theta) = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ для минимумов и т. д.
7. $\beta/2 \approx \pm 1{,}4303\pi$; $\pm 2{,}4590\pi$; 4,65%, 1,64%.
9. $d = 8$ Д.
13. а) 3; б) 23; в) 9; г) 15.
15. 57,7°; 230 нм.
17. а) 1,4; б) 240 нм.
19. а) 0,84; б) 250 ×.
21. 0,13 м; 2,3 км на Луне.
23. 6,16°.
25. Все с $m = 2$, часть с $m = 3$ и $m = 4$.
27. 497 нм, 612 нм, 637 нм, 754 нм.
29. 12 500/см.
31. 446 нм, 653 нм.
33. 910 нм.
37. а) 2 по каждую сторону от центра; б) $6{,}67 \cdot 10^{-5}$ рад, $7{,}34 \cdot 10^{-5}$ рад, $1{,}21 \cdot 10^{-4}$ рад.
39. а) $^1/_9 I_0(1 + 2\cos\delta)^2(\sin^2\beta/2)/(\beta/2)^2$, где $\beta = \delta D/d$.
41. 0,032 нм, $m = 2$.
45. 12,3°.

Глава 38

1. $^1/_4$.
3. а) 35°; б) 63°.
5. Понижается до 37,1%.
7. а) 0; б) $^1/_8$; в) 0.
11. 49,6°.
13. 37°, 49°, 53°.
15. а) $7{,}4 \cdot 10^{-3}$ см.
17. Плоско-поляризованный свет, $I = I_0/2$.
19. 1,89 мкм.
23. а) Эллиптически поляризованный свет, главные оси параллельны и перпендикулярны оптической оси; б) плоско-поляризованный свет, плоскость поляризаций повернута на 60° относительно плоскости поляризации падающего света.

Глава 39

1. $7{,}81 \cdot 10^{-9}$ с.
3. 150 м.
5. $2{,}85 \cdot 10^{8}$ м/с.
7. а) 8,92 м, 1,45 м; б) 13,0 с; в) $-0{,}760$ с; г) 13,0 с.
9. 0,93 с.
11. а) (397 м, 20 м, 0); б) (1522 м, 20 м, 0).
13. а) 0,80 с; б) $-0{,}80$ с.
15. 60 м/с, 24°.
17. 0,90 с, 43°.
19. а) $L_0\sqrt{(1/\gamma^2 - 1)\cos^2\theta + 1}$; б) $\operatorname{arctg}(\gamma \operatorname{tg}\theta)$.
21. $2{,}52 \cdot 10^{-27}$ кг.
23. 0,14 с.
25. а) $(c - v)/c = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$; б) 30 см.
27. $9{,}0 \cdot 10^{10}$ Дж, $9{,}2 \cdot 10^{7}$ кг.
29. $2{,}84 \cdot 10^{-13}$ кг.
31. а) $5{,}9 \cdot 10^{19}$ Дж; б) 4,7%.

33. $6{,}10\cdot10^{-12}$ Дж, $1{,}44\cdot10^{-19}$ кг·м/с, 5,8%, 3,9%.
35. $2{,}25\cdot10^{8}$ м/с.
37. 28,3 МэВ.
39. а) $4{,}8\cdot10^{-16}$ кг; б) $3{,}2\cdot10^{-16}$ кг.

Глава 40

1. $5{,}4\cdot10^{-20}$ Дж, 0,34 эВ.
3. а) $2{,}7\cdot10^{-34}$ Дж; б) $2{,}2\cdot10^{35}$; в) $4{,}5\cdot10^{-36}$, нет.
5. а) 3,10 эВ; б) 1,77 эВ; в) $4{,}14\cdot10^{-7}$ эВ.
7. 0,11 эВ, $1{,}9\cdot10^{5}$ м/с.
11. а) 0; б) 1,17 эв.
13. $8{,}3\cdot10^{4}$ $с^{-1}$.
15. б) 0,041 нм.
17. а) 570 эВ; б) 0,105 нм.
19. 2,6 МэВ.
21. 212 МэВ, 5,85 фм.
23. $1{,}6\cdot10^{-11}$ м.
25. 1836.
27. $7{,}3\cdot10^{-16}$ м.
29. 0,15 нм, 0,038 eB.
31. $5{,}4\cdot10^{-12}$ м.
33. $4{,}7\cdot10^{-14}$ м.
35. а) 487 нм; б) 122 нм; в) 411 нм.
37. 91,2 нм.
41. $1{,}1\cdot10^{-8}$.
43. ~ 4300, $-7\cdot10^{-7}$ эВ.
45. $7{,}3\cdot10^{-3}$ с.
47. 103 нм, 122 нм, 656 нм.
51. в) 150 эВ; г) 10^{-47} эВ; д) 0,19 нм.

Глава 41

1. $5{,}3\cdot10^{-11}$ м.
3. $7{,}2\cdot10^{3}$ м/с.
5. а) $1{,}2\cdot10^{-34}$ м; б) $1{,}9\cdot10^{-32}$ кг·м/с; в) $1{,}1\cdot10^{-30}$ м.
9. $0{,}53\cdot10^{-10}$ м.
11. 1,0 нм.
13. 50.
15. 14.
19. $5{,}8\cdot10^{-13}$ м; 0,12 МэВ.
21. а) $1{,}56e$; б) $1{,}36\cdot10^{-10}$ м.
23. $4{,}1\cdot10^{-11}$ м;∞.
25. $1{,}95\cdot10^{-10}$ м.
27. $3{,}3\cdot10^{3}$ К/мин.
29. $1{,}7\cdot10^{-4}$ рад; 340 м.

Глава 42

1. 3727 МэВ/c^2.
3. а) $4{,}8\cdot10^{-15}$ м; б) 27.
5. а) $2{,}3\cdot10^{17}$ кг/м^3; б) 180 м; в) $2{,}6\cdot10^{-10}$ м.
7. 350 МэВ.
9. 2,224 МэВ.
11. 18,72 мЭв.
13. 59,93525.
15. $^{228}_{90}$Th; 228, 0288.
17. а) $^{32}_{16}$S; б) 31,97207.
19. 0,862 МэВ.
21. б) 0,960 МэВ; 0,960 МэВ, 0.
23. а) $4{,}9\cdot10^{-18}$ $с^{-1}$; б) $1{,}1\cdot10^{4}$ с.
25. 7,4.
27. $5{,}6\cdot10^{-12}$ кг.
29. 41 год.
31. $N_0(1-e^{-\lambda t})$.
33. 19 000 лет.
35. Нет.
37. Высвобождается 17,35 МэВ.
39. а) да; б) 6,49 МэВ.
43. 174,7 МэВ.
45. 1,0043.
47. 1,49.
49. 1,3 кэВ.
51. $9{,}7\cdot10^{10}$ Дж/г, $3{,}4\cdot10^{11}$ Дж/г; $6\cdot10^{8}$ Дж/г (необогащенный уран) или $8\cdot10^{10}$ Дж/г (чистый $^{235}_{92}$U).
53. $1{,}6\cdot10^{9}$ Дж/кг, 30 ×.
55. 3700 расп./с.
57. 90 ч.
59. 4,5 м.

Глава 43

1. 0,041 фм.
3. $3\cdot10^{-18}$ м.
5. 133,5 МэВ.
7. а) 1,022 МэВ; б) 1876,6 МэВ.
9. 1,32 фм.
11. 37,7 МэВ, 41,0 МэВ.
13. 69,3 МэВ.
15. $3{,}1\cdot10^{-21}$ с.

Именной указатель[1)]

Авогадро (Avogadro) **513**
Ампер (Amperè) 102, 191, 192, 291
Араго (Arago) 404
Аристотель (Aristotle) **16**
Архимед (Archimedes) **357**

Бардин (Bardeen) 109
Беккерель (Becquerel) 577
Бернулли (Bernoulli) **375**
Био (Biot) 203
Бойль (Boyle) **508**
Больцман (Boltzmann) **630, 632**
Бор (Bohr) 508, 517, 518, 524, 542
Борн (Born) 534
Броун (Brown) **495**
Брэгг У. Г. (Bragg W. H.) 435
Брэгг У. Л. (Bragg W. L.) 435

Вайнберг (Weinberg) 626
Ван-дер-Ваальс (van der Waals) **541**
Вин (Wien) 501
Вольта (Volta) 75, 97, 98, 99, 100

Галилей (Galilei) **15, 16, 32, 47, 48, 80, 96, 409, 497,** 321, 322, 325, 358, 360, 458, 459, 481
Гальвани (Galvani) 98
Ган (Hahn) 591
Гаусс (Gauss) 36
Гейзенберг (Heisenberg) 500, 532, 538, 540, 567
Гей-Люссак (Gay-Lussac) **509**
Гелл-Манн (Gell-Mann) (Gel) 620
Генри (Henry) 223
Герц (Hertz) 306
Глэшоу (Glashow) 626
Гримальди (Grimaldi) 377
Гук (Hooke) **132, 333,** 392
Гюйгенс (Huygens) 375

Дальтон (Dalton) **494**
Де Бройль (De Broglie) 509, 510, 525, 532
Джермер (Germer) 510
Джинс (Jeans) 501
Джоуль (Joule) **560**
Дирак (Dirac) 546
Дэвиссон (Davisson) 510

Кавендиш (Cavendish) **135, 138,** 10
Камерлинг-Оннес (Kammerling-Onnes) 108
Карно (Carnot) **613**
Кеплер (Kepler) **143,** 358
Кирхгоф (Kirhhoff) 129
Клаузиус (Clausius) **606**
Комптон (Compton) 505
Кулон (Coulomb) 10, 11
Купер (Cooper) 109
Кюри М. (Curie M.) 577
Кюри П. (Curie P.) 577

Лаплас (Laplace) **147**
Лауэ фон (Laue von) 433
Лоренц (Lawrence) 174
Лоусон (Lawson) 598
Лэнд (Land) 442

Майкельсон (Michelson) 322, 323, 396, 398, 462, 463, 464, 465
Максвелл (Maxwell) **530,** 291, 292, 297, 298, 305, 315, 316, 442
Малюс (Malus) 443
Мариотт (Mariotte) **508**
Мейтнер (Meitner) 592
Милликен (Millikan) 168, 169
Мозли (Moseley) 552
Морли (Morley) 462, 463, 464, 465

Ньютон (Newton) **15, 32, 85, 97, 132, 134, 144, 146,** 15, 377, 392, 441, 458, 502

[1)] Номера страниц, набранные жирным шрифтом, относятся к т. 1, а набранные светлым шрифтом – к т. 2. – *Прим. ред.*

Ом (Ohm) 103, 104
Остроградский М. В. 36

Паскаль (Pascal) **355**
Паули (Pauli) 548, 581
Планк (Planck) 500–502, 517
Пойнтинг (Poynting) 309
Пуазейль (Poiseuille) **383**

Резерфорд (Rutherford) 514, 571, 577, 589
Рентген (Roentgen) 432
Рёмер (Roemer) 322
Ридберг (Rydberg) 516
Руббиа (Rubbia) 612
Румфорд (Rumford) **559, 560**
Рэлей (Rayleigh) 418, 501

Салам (Salam) 626
Сегре (Segrè) 612
Снелль (Snell) 336

Таунсенд (Townsend) 168
Томпсон (Thompson) См. Румфорд
Томсон Дж. Дж. (Thomson J. J.) 167, 168, 170, 309, 510, 513, 514
Томсон Дж. П. (Thomson J. P.) 510
Торричелли (Torricelli) **354**

Уатт (Watt) **205**
Умов Н. Л. 309

Фарадей (Faraday) **148**, 15, 84, 223, 224, 291, 609
Ферми (Fermi) 581, 591, 593
Фик (Fick) **48**
Фицджеральд (Fitzgerald) 466
Франклин (Franklin) 6, 7, 97
Френель (Fresnel) 404, **442**, **443**
Фриш (Frisch) 591

Холл (Hall) 177

Цельсий (Celsius) **520**
Цезарь Юлий (Caesar Julius) 333
Цвейг (Zweig) 620

Чемберлен (Chamberlain) 612

Шарль (Charles) **508**
Шредингер (Schrödinger) 500, 532, 534, 567
Шриффер (Schrieffer) 109
Штрассман (Strassmann) 591

Эдисон (Edison) 169, 170
Эйнштейн (Einstein) **495**, 457, 462, 466, 467, 469, 476, 492, 502, 503, 517, 526, 527, 626
Эрстед (Oersted) 158, 159

Юкава (Yukawa) 609, 610, 611
Юнг (Young) 379, 380, 399, **442**

Предметный указатель

Аберрация линз 368
– монохроматическая 369
– света звезды 466
– сферическая 329
– хроматическая 369
Абсолютная температура **509, 516, 528**
– шкала *см. Кельвина* шкала температур
Абсолютно черного тела излучение 500
Абсолютный нуль температуры **508, 509, 528, 529**
Авогадро гипотеза **513**
– число **513**
Адгезия **363**
Адиабатическая стенка **501**
Адиабатический процесс **590, 591, 597–599**
Адиабатическое свободное расширение **622**
Адроны 617, 620
Акустический удар **486, 487**
Альфа-частицы 578, 587
Аморфные твердые тела **541, 542**
Ампер (единица измерения) **25**, 102
Ампера закон 191
Амперметр 137
Амплитуда давления **469, 471**
– колебания **397, 400, 401**
– световой волны 387–391, 413, 428
Анализатор (света) 443
Анализ размерностей **25–28**
Ангстрем (единица измерения) 385
Анероид **354**
Аннигиляция частица – античастица 613
Анод 100, 166, 171
Антинейтрино 581
Антинейтрон 613
Антипротон 612, 614
Античастицы 581, 612, 614
Ареометр **359**
Архимеда закон **357–359**
Астигматизм 365
Атвуда машина **312**
Атмосфера (единица измерения) **352**
Атома строение 500, 513, 543
–– водорода 516, 545
–– квантовомеханическая картина 500, 543
–– модель *Бора* 517, 532
––– планетарная 514
––– *Резерфорда* 514, 517
––– «сливового пудинга» 513
–– оболочки и подоболочки 549
Атомная единица массы (а. е. м.) **98**, 549
– масса **495**, 549
– теория **494, 495**, 500
Атомные спектры 515, 521, 533, 548, 551
–– тонкая структура 546
Атомный номер 548, 551, 572
Атомы 494, 513, 532, 548
– квантовая теория строения 518, 533, 543
– распределение вероятности 544, 547
– сложные 548
– состояние возбужденное 521
–– основное 521
–– стационарное 521
– энергетические уровни 516, 543, 545, 555

Баллистическое движение **80–83, 110**
Бальмера серия 516, 522
– формула 516, 522
Бар (единица измерения) **352, 353**
Барионный заряд 614, 615, 621, 624
Барионы 617, 620
Барометр **354, 355**
Батарея электрическая 98
Бел (единица измерения) **469**
Бернулли закон **375–377**
–– примеры проявления **378**
Бетатрон 246
Бета-частицы 580
Биения **480, 481**
Биметаллическая пластинка **519**
Бинокль 338, 361
Био–Савара закон 203
Близнецов парадокс 472
Бойля закон **508, 510**
Больцмана постоянная **514**
Бомба атомная 595, 597
– водородная 597
Бора модель атома 517, 532
– радиус 519

– условие квантования 518
Броуновское движение **495**, 514
Брэгга условие 435
Брюстера закон 446
– угол **446**
Быстрая оценка **28**

Ван-дер-Ваальса уравнение **541, 543, 544**
Ватт (единица измерения) **204, 205**
Вебер (единица измерения) 225
Векторная кинематика **76**
Векторное произведение **302**
Векторы **65**
– вычитание **68, 69**
– единичные **72**
– проекции **70**
– результирующие **67**
– сложение **66–68, 108**
– составляющие (компоненты) **69**
– умножение на скаляр **68**
Великого объединения теории 626–628
Величины основные **24, 25**
– производные **24**
Вентури трубка **379**
Вероятность 535, 541
Вес **99, 139**
Вина закон смещения 501
– кривая 501
Вихревые токи 236
Влажность **535–537**
– относительная **535**
Внутреннее трение *см.* Вязкость
Внутренняя энергия **192, 193, 561, 628**
Водяной эквивалент **566**
Возвращающая сила **413**
Волна **428–450**
– амплитуда **431**
– бегущая **440–443**
– гармоническая **442**
– давление **433, 467**
– дифракция **452–454**, 377, 404, 434, 436
– длина **431, 434, 435**
интенсивность **439**
– интерференция **450–452**, 379, 386, 413, 426
– математическое описание **433, 467**
– механическая **428, 434–438**
– непрерывная **431**
– отражение 324, 392
– периодическая **430**
– плоская 301
– поверхностная **437**
– поперечная **433**
– преломление 448, 376
– продольная **433, 467**
– радио 307
– сейсмическая **437–439, 449, 450, 461**
– скорость **431, 432, 435**
– сложение **444, 445**
– стоячая **458**
–– пучности **454**
–– узлы **454**
– сферическая **439**
– частота **431**
– электромагнитная 257
– энергия **438, 439**
Волновая функция 534, 543
Волноводы 313
Волновое уравнение **443**, 642
– число **441**
Волновой фронт **447**
Волоконная оптика 337
Вольт (единица измерения) 53
Вольтметр 137
Вращательное движение неравномерное **87**
–– равномерное **84**
Вращательный дисбаланс **313**
Вращающееся колесо **316, 317**
Вращающийся волчок **318–320**
Времени замедление 474, 742
Время абсолютное 460
– замедление 472, 474
– относительность 472, 474
– собственное 475
Вторая гармоника (первый обертон) **456**
– космическая скорость **196, 198**
Второе начало термодинамики **610**
Выпрямитель 564
– двухполупериодный 565
– однополупериодный 564
Выталкивающая сила **356–358**
Вязкость **373, 381**
– коэффициент **381, 382**
–– таблица **382**

Газ **347, 352, 539**
Газовая постоянная **511**
Галилея–Ньютона относительность 488
Галилея преобразования 481, 483
Гальванометр 180
– баллистический 245
Гамма-излучение 578, 582
Гармонические колебания **398, 401**
–– затухающие **412–414**
–– связь с равномерным движением по окружности **406**
Гармонический осциллятор **398, 402, 403**
– уравнение движения **398**
– энергия **404, 405**
Гаусса теорема 38, 40, 43, 2966, 314
–– для диэлектриков 88, 296
––– магнитного поля 296
Гей-Люссака закон **509, 510, 512**
Гелий **541**

Генри (единица измерения) 250
Германий 560
Герц (единица измерения) **397**
Гидравлический подъемник **355, 356**
– тормоз **355, 356**
Гидродинамика **372**
Гироскоп **318**
Гистерезис 209
Глаз 363
– аккомодация 364, 365
– астигматизм 364, 365
– дефекты зрения 365
––– близорукость 365
––– дальнозоркость 365
– желтое пятно 364
– корригирующие линзы 363
– нормальный 365
– разрешающая способность 421
– расстояние наилучшего зрения 364
– роговица 364
– сетчатая оболочка 363
– хрусталик 364
Глюон 611, 612, 625
Голограммы 557
Голография 557
Гравитационная масса 140
– постоянная **134, 135, 138**
Гравитационное поле **148**
Гравитационный квант 612
Гравитон 612
Градиент давления **384**
– концентрации **548**
– скорости **381, 382, 384**
– температуры **571**
– электрического потенциала 64
Грамм (единица измерения) **24**
Графит 594
Громкоговорители 183
Громкость **466**
Гука закон **163, 333**
Гюйгенса принцип 375, 376

Давление **338, 348**
– атмосферное **352, 353**
– газов **508, 537**
– единицы измерения **348**
– избыточное **352, 353**
– измерение **353**
– насыщенного пара **533, 534**
– отрицательное **365, 366**
– парциальное **514**
Дальтона закон **514**
Датирование радиоактивное 588
Датчики 144
Двигатель внутреннего сгорания **607, 608**
– *Карно* **613–615**
Движение **32, 372,** 457
– волновое **428, 429**
– вращательное **84, 85, 257**
–– неравномерное **87**
–– равномерное **84, 85, 406**
– *Ньютона* законы **95, 99, 103,** 457
– колебательное **395**
– общее **214**
– относительное **73,** 457
– периодическое **395**
– по наклонной плоскости **112**
–– окружности **84, 85, 125–131**
– поступательное **32**
– равноускоренное **55, 78**
– тела в жидкости **387**
Двойное лучепреломление 448
Дебая закон **603**
Де Бройля длина волны 509
– теория 509
Дейтерий 590
Декомпрессионная камера **522**
Детерминизм 541
Деформация **335**
Децибел (единица измерения) **469**
Диаграмма свободного тела **109**
Диамагнетизм 212
Диапазон слышимости **466**
Диатермальная стенка **501**
Дизеля двигатель **603, 638**
Дина (единица измерения) **101**
Динамика **33, 94**
– движение по окружности **125**
Диоды 564
– с обратным смещением 564
–– *p–n*-переходом 563
Диоптрия 366
Диполи и дипольные моменты магнитные 178, 205
–––– электрические 27, 60, 61, 65, 86
Дисперсия волн **445,** 385
Дифракционная решетка 428
Дифракция **452–454,** 377, 404, 434, 436
– от двух щелей 413
–– одной щели 406, 408
– рентгеновских лучей 432
– *Фраунгофера* 406
– *Френеля* 406
– электронов 510
Диффузия **546–553**
– коэффициент **548, 549,** 551
– *Фика* закон **548, 550, 552**
Дихроизм 448
Диэлектрики 82
Диэлектрическая проницаемость относительная 83
Длина волны **431, 434, 435**
–– видимого света 306, 380, 382
–– *де Бройля* 509

-- зависимость от угла преломления 379
-- измерение 423, 425
-- материальных частиц 509
Длины сокращение 477
Добротность **418, 425**, 268
Дозиметрия 598
Домены 207
Доплера эффект **481–485**
Дополнительности принцип 507
Дюлонга – Пти теплоемкость **597**
PT-диаграмма **539**
PV-диаграмма **539**

Емкость 75, 257

Жидкость **347, 349, 350**

Закон всемирного тяготения **132–135**
– инерции **97**
– постоянства состава вещества **494**
– сохранения энергии **587**
Законы **19**
Замедлитель **237, 238**
Замена единиц измерения **35, 36**
Замкнутая система **583**
– изолированная **583**
-- неизолированная **583**
Заряд свободный 86
– связанный 87
Заряженных элементарных частиц ускорение 174, 175, 607
Затухание **414, 415**
– докритическое **415**
– закритическое **415**
– критическое **415, 417**
Звуковые волны **465–490**
-- адиабатический характер **599, 600**
-- доплеровский сдвиг **479–481**
-- интенсивность **469–471**
-- интерференция **478–480**
-- инфразвуковые **467**
-- сверхзвуковые **466**
-- скорость **466, 467, 599, 600**
-- ультразвуковые **466**
Звукосниматели 241
Зеемана эффект 187, 546
Зеркало 324
Значащие цифры **21**
Зона валентная 562
– проводимости 562

Идеальный газ **524**
-- закон **510, 524**
– двигатель **610**
Излучательная способность **574**
Излучение абсолютно черного тела 500
– гамма 307
– инфракрасное 307
– микроволновое 307
– нагретых объектов 500
– рентгеновское 307, 432, 577
– тормозное 553
– ультрафиолетовое 307
Изобарический процесс **586**
Изоляторы электрические 8, 25
Изомер 583
Изотермический процесс **585**
Изотопы 173, 572, 599
– распространенность 572
Изохорический процесс **586**
Импеданс 252, 279, 313
Импедансов согласование 282
Импульс (количество движения) **214, 223, 224**, 486, 489
– закон сохранения **225, 226, 232**
– момент (угловой) 518, 545
– релятивистский 486, 489
– силы **229**
Индуктивности катушка 251, 257
Индуктивность 248, 251
– взаимная 248
Индукция электромагнитная 224
Инертная масса **99, 102, 140**
Инертность **97**
Инерциальные системы отсчета 458, 488
--- преобразования 481
--- эквивалентность 460
Интегралы и интегрирование **53, 54, 162**, 634
Интерференция **450–452**, 379, 386, 413, 426
Интерферометр 396
– *Майкельсона* 396, 462
Инфразвук **467**
Инфракрасное излучение 307, 385
Ионы 7
Испарение **532, 533, 568**

Калориметр **564, 565**
Калориметрия **564, 567, 568**
Калория **559**
Кандела (единица измерения) **25**, 398
Капиллярность **363, 364**
Карно двигатель **613–615**
-- КПД **615–618**
– теорема **616–618**
– цикл **615, 619**
Катод 100, 166, 171
Катодные лучи 166
Качества коэффициент 600
Качество звука **477**
Квадруполь электрический 34, 71
Квазистатический процесс **584**

Квант 500, 502
Квантовая гипотеза *Планка* 500
– механика 533
–– атомов 533
–– молекул 559
–– копенгагенская интерпретация 542
– теория 500, 567
–– абсолютно черного тела 500
–– атомов 517, 530, 533
–– молекул 559
–– света 502, 517, 521, 533, 552
–– твердого тела 560
– хромодинамика 625
– электродинамика 609
Квантовое число 518, 545
–– главное 545
–– магнитное 545
–– орбитальное 545
–– спиновое 546
Кварки 620, 621
– истинные 623
– красивые 623
– «цвет» и «аромат» 624
Кельвин (единица измерения) **633, 634**
Кельвина шкала температур (абсолютная) **498, 508, 509**
Кеплера законы **143, 144, 316**
K-захват 582
Килокалория **559**
Киловатт-час (единица измерения) 115
Килограмм (единица измерения) **25**
Кинематика **33**
Кинетическая теория **493, 524, 528**
Кипение **534, 535**
Классическая физика (определение) **15**
Клаузиуса уравнение состояния **542**
Когезия **363**
– воды **365**
Колебания **395, 430**
Количество движения *см.* Импульс
Компас магнитный 155
Конвекция **549**
Конденсатор 74, 132, 257
Конденсация **533**
Космология 628
Коэффициент полезного действия (КПД) **610**
– расширения линейного **503**
– объемного **503, 504**
– упругости **163**
Коэффициенты трения, таблица **113**
Краевой угол **363**
Кремний 560
Кривая потенциальной энергии (потенциальная кривая) **199, 200, 201, 405, 506**
Кристаллическая решетка **496**
Кристаллография 433
Критическая масса 594
– температура **538, 539**
– точка **538, 539**
Кулон (единица измерения) 11
Кулона закон 10, 15, 36
Кюри (единица измерения) 599
Кюри закон 213
– постоянная 213
– температура 207

Лазеры 384, 553
Лаймана серия 516, 523
Ленца правило 225
Лептоны 617
Линзы 347
– аберрации 367
– ахроматический дублет 369
– дисторсия 368
– контактные 367
– коррегирующие 363
– круг наименьшего искажения 368
– магнитные 511
– объектив 359, 360
– окуляр 359, 360
– оптическая сила 366
– покрытие пленками 395
– разрешающая сила 416
– рассеивающие 348, 353
– сложные 369
– собирающие 348
– тонкие 347
– увеличение 353, 362
– уравнение 351
– фокусное расстояние 347, 353, 358
– цилиндрические 366
Линия тока **373**
Лиссажу фигуры **420**
Лобовое сопротивление **387**
Лоренца преобразования 481
– сила 166
Лоусона критерий 598
Лошадиная сила (единица измерения) **205**
Лупа 356
Луч **447**
Лучепреломление двойное 441, 448
Люмен (единица измерения) 398

Магнит 155
– постоянный 207
Магнитная восприимчивость 216
– проницаемость 191, 201, 210
Магнитное поле 155, 253, 291
– склонение 158
Майкельсона – Морли эксперимент 462
Макроскопическое описание **493**
Макросостояние системы **630, 631**
Максвелла уравнения 291, 297, 310, 313, 461
– функция распределения **530, 531**

Малюса закон 443
Манометр **353, 354**
Масса **97**
– в теории относительности 457, 468
– гравитационная **98, 140, 141**
– единицы измерения **98**
– инертная **99, 102, 140, 141**
– покоя 491
– эталонная **98**
Массовое число 572
Массовый расход **374**
Масс-спектрометр 173
Маха число **485**
Маятник баллистический **243**
– конический **131**
– крутильный **425**
– математический **164, 408, 409, 427**
физический **410, 415**
Маятниковые часы **409**
Международная система единиц (СИ) **24**
Мезон 610, 616
Метастабильное состояние 554
Метр (единица измерения) **22, 23**
– определение эталона длины 398
Механика (определение) **32**
Механический эквивалент теплоты **560**
Микроскоп 362, 418
– электронный 511, 538
Микроскопическое описание **493**
Микросостояние системы **630, 631**
Микрофон ленточный 241
– конденсаторный 146
– электромагнитный 241
Миликена опыт 168
Модели **18**
Модуль объемный упругости (всестороннего сжатия) **335, 338**
– сдвига **335, 337**
– *Юнга* (продольной упругости) **335**
Мозли график 552
Молекулярная масса **495**
Моль (единица измерения) **511**
Момент вращающий 181, 236
–– действующий на виток с током 178
–– противодействующий 236
– импульса (количества движения) **214, 282–284, 304**
–– закон сохранения **282–284, 315, 316**
–– системы частиц **306**
– инерции **270–273, 410, 411**
–– вычисление **275**
–– измерение **411**
– силы **266, 269, 303, 304**
Монополь магнитный 206
Мощность **204, 205**
– единицы измерения 115
Мысленный эксперимент 469, 487
Мюон 611, 616

Намагниченность 213
Напряжение механическое **335**
– растяжения **336**
– сдвига **336, 337**
– сжатия **336**
– электрическое 53, 101
–– на клеммах источника 128
–– падение 131
–– пиковое 116
–– пробоя 63
–– смещения 565
Напряженности поток 36
Напряженный бетон **340**
Населенность инверсная 554
Начальные условия **400**
Невесомость **141–143**
Невязкое течение **373**
Незамкнутая (открытая) система **583**
Нейтрино 582, 608, 614
Нейтрон 571, 574, 608, 614
Нейтронов коэффициент размножения 594
– число 572
Необратимые процессы **614**
Неопределенности принцип 537, 588, 610, 619
Нептун **146**
Нормальные условия **511**
Нуклон 571
Нулевое начало термодинамики **502**
Ньютон (единица измерения) **101**
Ньютона закон всемирного тяготения **132, 134**
– законы движения **95, 97, 99,** 533
––– применение **108**
– кольца 392, 393
– обобщение **143, 144**
Ньютоновские жидкости **382**

Оболочки атомные 551
Обратимый процесс **613, 614, 621, 624**
цикл **614, 618, 621**
Объемный расход (поток) **374, 380**
Одновременность 469
Ом (единица измерения) 104
Ома закон 103, 113
Омметр 139, 153
Оптика геометрическая 321
– физическая 375
Орга́н **476**
Осаждение **388**
Освещенность 398
Осциллограф 172
Оптическая активность 446
– анизотропия 448
Основная мода (первая гармоника) **456**
Основные и производные величины **24**
Ось вращения **258**
Относительная ошибка **21**
Относительное движение 459
– удлинение **335, 336**

Относительности теория общая 468, 477
-- специальная 457, 467
--- постулаты 467
--- принципы 459, 467
Отражение волн **445–447, 452**
– диффузное 324
– законы 324
– изменение фазы 393
– от тонких пленок 391
– полное внутреннее 337
– света 324, 392
– угол **447**
«Очарование» 620, 624
Очки 364, 367

Падающие тела **47–51**
Падения угол 324, 335
-- критический 337
Пар **539**
Пар рождение 506
Парамагнетизм 212
Пара сил **329**
Параметры состояния **493**
Паровая турбина **608**
Паровой двигатель **607**
-- КПД **618**
Парциальное давление **514**
Паскаля закон **355**
Паули принцип запрета 548, 549
Пашена серия 516, 523
Первое начало термодинамики **587**
--- дифференциальная форма **588**
--- применения **582–592**
Передача теплоты **569–572**
-- излучение **573–576**
--- конвекция **572, 573**
Передающие линии 311
Перемещение **36, 52**
Период колебания **397, 401, 402**
Периодическая система элементов 549, 550
Перехода температура 108
Пион 611, 616
Переменного поля генераторы 234
Плазма 347, 598
Планка квантовая гипотеза 500
– постоянная 501
Плечо силы **267, 268**
Пластинка полуволновая 452
– четвертьволновая 450
Плотность вещества **347–349**
Плутон **146**
Поверхностная энергия **362**
Поверхностно-активные вещества **363**
Поверхностное натяжение **360–362**
Поглощения линии 427
Пограничный слой **388**
Погрешность измерений **20**
Подзорная труба 361
Подъемная сила **378**
Позитрон 582
Показатель адиабаты **592, 598**
Покоя масса 491
– энергия 491
Поле тяготения (гравитационное) **148**
-- напряженность **148, 149**
Полное внутреннее отражение 337
Полупроводники 8, 106, 560
– в диодах и транзисторах 562
– примесные 563
– собственные 563
– *n* и *p*-типов 561, 562
– удельное сопротивление 106, 564
Полураспада период 585
Поляризатор **443**
Поляризация света **441**
-- круговая 450
-- при отражении 445
-- эллиптическая 450
Поляроид **442**, 454
Полюса магнитные 155
-- Земли 155
Порог болевого ощущения **469**
– слышимости **469, 470**
Порядок и беспорядок **626–629**
Поступательное движение **32**
Потенциал электрический 53
Потенциальная яма **201**
Потенциометр 141
Поток теплоты **570, 571, 574, 575**
Правой руки правило **264, 265, 302,** 159, 160
Предел прочности **334**
– упругости **334**
Преобразователи 144, 240
Преломление (рефракция) **448**, 376
Прецессия **318, 319**
Принцип равнораспределения энергии **592, 595, 596**
– суперпозиции **444**
Пробоя напряжение 63
Проводимость 107
Пространство абсолютное 460
– относительность 476
Пространство-время 479
Противо-ЭДС 235
Процессы переноса **551**
Пружина **163, 395–397**
– потенциальная энергия **395, 397**
Псевдовектор **265**
Пуаз (единица измерения) **382**
Пуазейля формула **383**
-- ламинарное течение **385**
Пьезоэлектрический эффект 175

Работа **156–158, 160, 183, 587, 590**
– в первом начале термодинамики **587**

– выхода 504
– связь с энергией **160, 183**
Равновесие **202**
– безразличное **203**
– неустойчивое **203**
– сил **326**
– условие **328, 329**
– устойчивое **203**
Равноускоренное движение **43–47**
Рад (единица измерения) 599
Радиан **258, 292**
Радиоактивность 577
Радиоактивные выпадения 596
Радиоизотопы 599
Радиус инерции **273, 274**
Размерности **25**
Разность потенциалов 53
Разрушение тел **338, 339**
Разрядная трубка 166, 515
Распад 577
– альфа 578
–– и туннельный эффект 587
– бета 578, 580
– гамма 578, 582
Распада постоянная 584
Распределение молекул по скоростям **530–532**
Реактивная тяга **246**
Резисторы 103, 116, 124, 133
Резонанс **415, 417, 418, 455**
– в цепях переменного тока 281
Резонансная частота **417**
Рейнольдса число **386, 387**
Ренкина шкала температур **521**
Рентген (единица измерения) 599
Решетка дифракционная 425, 436
– разрешающая способность 430
Ридберга постоянная 516, 523
Ротор (вихрь) 314
Рэлея критерий 418
Рэм (единица измерения) 600

Самодиффузия **548, 550**
Сверхтекучесть **541**
Сверхпроводимость 106, 108
Свет 306, 324
видимый 383
– волновая теория 375
– дифракция 376
интерференция 375
как электромагнитная волна 306, 375
когерентный и некогерентный 383
корпускулярно-волновой дуализм 507
– монохроматический 380
неполяризованный 442, 444
отражение 324
– поляризованный **441**
– преломления законы 376
– рассеяние в атмосфере 452
– скорость 307, 321, 378
– цвет и длина волны 382
Свободное расширение газа **591**
Секунда (единица измерения) **23**
Сила **94, 95,** 5
– виды **147,** 5, 610
– внешняя **221**
– внутренняя **221**
– дальнодействующая 576
диссипативная **192**
– единицы измерения **101**
– импульсная **229**
– консервативная **182,** 231
– контактная **107, 148**
– короткодействующая 576
– неконсервативная **184, 194**
– нормальная **112**
– равнодействующая (результирующая) **99, 100, 108**
– сопротивления воздуха **200**
– стационарная модель 624
– трения **184**
– тяжести (гравитационная) **106, 134–149**
– центральная **196, 199**
– электромагнитного взаимодействия сильного 610
––– слабого 626
– ядерная **209,** 574
Симметрии нарушение 627
Синхротрон 176
Синхроциклотрон 176
Система отсчета **34, 35**
–– инерциальная **103**
–– лабораторная **242**
–– неинерциальная **103**
–– центра масс (СЦМ) **241**
Системы с переменной массой **244**
Сифон **368**
Скаляр **65, 66, 87**
Скалярное произведение **159**
Скорость звука в идеальном газе **603**
– мгновенная **37, 39**
– наиболее вероятная **530, 531**
– относительная **73,** 482
– сверхзвуковая **485**
– света 306, 321
– среднеквадратичная **529**
– средняя **529, 530**
–– по перемещению **36**
–– путевая **33, 34**
– угловая **259, 260**
– установившаяся **49**
– электромагнитной волны 305
Слаг (единица измерения) **101**
Сложение двух гармонических колебаний **419, 420**
Снелля закон преломления 335, 336

Собственные (резонансные) частоты **455**
Соленоид 196
Солнечная постоянная **575**
Соответствия принцип 494, 524, 533
Сопротивление воздуха **48, 49**
– электрическое 104
–– удельное 106
Состояние системы **493**
Сохранения законы, кажущееся нарушение в β-распадах 581
–– при взаимодействиях частиц 613
––– радиоактивном распаде 583
–– странности 620
–– числа барионов 583, 614, 627
––– лептонов 614
––– нуклонов 583, 614, 627
–– электрического заряда 5
Спектр атома водорода 522, 532, 546
– видимый 385
– дискретный 515
– звука **478**
– испускания абсолютно черного тела 500
– – атомный 515, 521, 532, 545, 548
–– нагретого тела 500
– линейчатый 426, 515, 532
молекулярный 559
– непрерывный 500
– поглощения 515
– полосатый 560
– рентгеновского излучения 551
– электромагнитный 307, 385
Спектроскоп 425, 426, 430, 436
Спектроскопия 425
Спектрофотометр 426
Спин электрона 208
Спутники **141–143**
Средняя длина свободного пробега **544–546**
Стандартный термометр **515**
Статика **326, 327**
Степень свободы **595**
Стефана–Больцмана постоянная **574**
Стоградусная шкала *см.* Цельсия шкала
Стокса теорема 314
– формула **388**
Столкновения **227**
неупругие **242–244**
– сохранение импульса и энергии **231**
– упругие **233–238**
Странность 619, 624
Странные частицы 619
Сублимация **539**
Суперпозиции принцип 17

Тахион 490
Твердое тело **257, 347,** 560
–– движение вращательное **310–320**
– – зонная теория 562
–– энергетические уровни 563
Телевизор 171
Телескоп 358
– астрономический 358, 360
– *Галилея* 358
– зрительная труба 360
– *Кассегрена* 360
– кеплеровский 359
– *Ньютона* 360
– рефлектор 360
– рефрактор 359
– увеличение 358, 359
Тембр **477**
Температура *Кюри* **497, 561**, 207, 213
Температурная шкала идеального газа **515, 516**
Температурные свойства воды **505**
Теорема о параллельных осях **277, 278**
–– перпендикулярных осях **278, 279**
–– связи энергии и работы **165, 168, 169, 182, 185, 186, 288**
Теория **19**
– информации **627**
Тепловая смерть Вселенной **630**
Тепловое равновесие **500–502**
– расширение **503–506**
Тепловой двигатель **606–610**
–– внутреннего сгорания **607, 608, 638**
— *Карно* **613–615**
––– КПД **615–621**
–––– реальных двигателей **610, 617, 618**
–– паровая машина **606, 607**
–– принцип действия **606–608**
–– рабочие температуры **607**
–– циклы **607**
– насос **609**
Тепловые напряжения **506, 507**
Теплоемкость **563–566**
– молярная **590, 592–594**
– удельная **563, 592**
Теплоизоляторы **571**
Теплопроводность **569–572, 623**
– коэффициент **570**
Теплород **558**
Теплота **558, 560**
– испарения (парообразования) **567**
– плавления **567**
– фазового перехода **566, 567**
Термистор 108
Термодинамика **583**
Термодинамическая вероятность **632**
– шкала температур **634**
Термодинамические процессы **583**
Термометр **497**
– газовый **499, 500, 520**
– ртутный **521**
– сопротивления 107
– спиртовой **519**
Термопара 144

Термостат **519**
Термохимическая калория **561**
Термоэлектрический эффект 145
Термоэлектронная эмиссия 169
Термоядерные установки 597
Тесла (единица измерения) 161
Течение ламинарное **372–374, 383**
– нестационарное **373**
– турбулентное **372**
– установившееся (стационарное) **373**
Токамак 598
Тональная окраска **477**
Тор 196
Тормозной путь **46, 47**
Торричелли теорема **377**
Точка росы **536**
– тройная **515, 539, 540**
Точки поворота движения **201, 202**
Транзисторы 565
Трансмутация элементов 578
Трансформатор 237, 242, 250, 284
Трение **112, 113**
– качения **112**
– коэффициенты **112, 113**
– скольжения **112**
Третье начало термодинамики **635**
Тригонометрические функции 633
Трубка тока **373**
Туннельный эффект 587
Тяжелая вода 594

Угловая скорость **259**
–– мгновенная **259**
–– средняя **259**
Угловые величины **258–261**
–– векторные свойства **263–265**
Ударная волна **485**
Удельный объем **542**
Уитстона мост 143
Ультразвук **467**
Ультрафиолетовое излучение 307
Универсальная газовая постоянная **511**
Уравнение неразрывности **373, 374**
– состояния **507, 511**
Уран 146, 572, 587, 592, 594
Уровень громкости **469–471**
Уровни акцепторные 563
– донорные 563
Усилители 566
Ускорение **40, 43**
– мгновенное **41**
– переменное **51, 55–58**
– свободного падения **49**
– среднее **40**
– тангенциальное **87**
– угловое **259**
–– мгновенное **260**
–– среднее **260**
– центростремительное **85, 125**
Утечки токи 285, 286

Фаза в световых пучках 383, 389, 410, 429
–– цепи переменного тока 262, 270
Фазовая диаграмма **539, 540**
– скорость **441**
Фазовые переходы **537–541**
–– теплота **566–569**
Фазовый угол 259
Фарад (единица измерения) 75
Фарадея закон 225, 229, 297
Фаренгейта шкала температур **498, 499**
Фейнмана диаграмма 609
Фермилаб 176
Ферромагнетизм 156, 206
Физика высоких энергий 607
– современная 15, 457
– твердого тела 560
––– зонная теория 562
– ядерная 571
Фотон 508, 571, 574, 613, 615
– виртуальный 609
Фотоэлемент 503
Фотоэффект 502
Фурье теорема **445**

Холла эффект 177
Холодильник **609, 611**

Цельсия шкала температур **498, 499**
Центр качаний **412**
– масс (ЦМ) **190, 214, 216–220**
– тяжести **327, 328**
– удара **412**
Центрифуга **129, 130**
Центрифугирование **389**
Цепи тока переменного 269
–– постоянного 124
Циклотрон 174

Частица (определение) **33**
– элементарная 607
Частота **397, 402**
– круговая **401**
– циклотронная 166, 175
Черенковское излучение 401
Чип 563
Численное интегрирование **55–58**

Шарля закон **509, 510**
Шлифовщика линз уравнение 351

Шредингера волновое уравнение 534, 543
Штейнера теорема 277

Эквипотенциальные поверхности 56
– линии 56
Электрическая мощность 113
– энергия 81, 113, 237
Электрические силы 5, 607
– цепи 101, 124
–– переменного тока 124
–– постоянного тока 269
Электрический заряд 5
– в атоме 5, 7
–– движение в поле магнитном 163
––––– электрическом 25
–– квантование 12
–– отрицательный 6
–– положительный 6
–– свободный 86
–– связанный 86
–– сохранения закон 5
–– точечный 11, 24
–– электрона 7
–– элементарный 12
– ток 97, 102, 116
Электрическое смещение 90
Электрогенератор 231
Электродвижущая сила (ЭДС) 101, 118, 127, 223
Электромагнит 162
– сверхпроводящий 162
Электромагнитные колебания 257
Электрометр 10, 78, 99, 141
Электрон 5, 168
Электроскоп 9, 78
Электростатика 15
Энергия **156, 165**
– активации **532**
– взаимодействия 67
– внутренняя **192, 193, 561, 628**
– в теории относительности 517
– гармонического осциллятора **404–406**
– закон сохранения **182, 192, 193, 195**
– и масса 490
– ионизации 521
– кинетическая **165–170, 491, 519, 521, 590**
–– вращения **286**
– механическая **186, 187, 628**
–– сохранение **186, 187, 189, 191**
– переносимая волнами **438–440**
– плотность 521
– покоя 491
– полная 491
– пороговая 591
– потенциальная **170, 184, 185,** 52
–– гравитационная **196, 197**
––– электростатическая 66
– преобразование **175, 176**
– принцип равнораспределения **595**
– различные виды **175**
– связи 521, 574
–– двух частиц **213**
–– удельная 575
– сохранение **182**
– электромагнитной волны 308
Энтропия **618–626**
– в природе **625, 628**
– и второе начало термодинамики **626**
– статистическая интерпретация **630, 633**

Юкавы потенциал 200

Ядер деление 591
– массы 573, 638
Ядерная реакция 589
–– цепная 593
Ядерные силы 574
–– взаимодействие сильное 576, 592
––– слабое 576, 592
–– дальнодействующие 576
–– и энергия связи 574
–– короткодействующие 576, 592
Ядерный реактор 593
– синтез 596
Ядро атома 571

Оглавление

22 Электрический заряд и электрическое поле 5

22.1. Статическое электричество. Закон сохранения электрического заряда 5
22.2. Электрические заряды в атомах 7
22.3. Изоляторы и проводники 8
22.4. Индуцированный заряд. Электроскоп 9
22.5. Закон Кулона 10
22.6. Электрическое поле 15
22.7. Расчет напряженности электрического поля E 16
22.8. Силовые линии 22
22.9. Электрические поля и проводники 24
22.10. Движение заряженной частицы в электрическом поле 25
22.11. Электрические диполи 27
Заключение 28
Вопросы 30
Задачи 31

23 Теорема Гаусса 36

23.1. Поток напряженности электрического поля 36
23.2. Теорема Гаусса 40
23.3. Применения теоремы Гаусса 43
Заключение 48
Вопросы 48
Задачи 49

24 Электрический потенциал 51

24.1. Электрический потенциал и разность потенциалов 51
24.2. Связь между электрическим потенциалом и напряженностью электрического поля 55
24.3. Эквипотенциальные поверхности 56
24.4. Электрон-вольт, единица энергии 58
24.5. Электрический потенциал уединенного точечного заряда 58
24.6. Потенциал электрического диполя 60
24.7. Потенциал произвольного распределения зарядов 61
24.8. Определение напряженности электрического поля E с помощью потенциала V 64

24.9. Электростатическая потенциальная энергия 66
Заключение 68
Вопросы 69
Задачи 70

25 Электрическая емкость, диэлектрики, накопление электрической энергии 74

25.1. Конденсаторы 74
25.2. Определение емкости конденсатора 75
25.3. Последовательное и параллельное соединения конденсаторов 79
25.4. Накопление электрической энергии 81
25.5. Диэлектрики 82
*25.6. Теорема Гаусса для диэлектриков 88
*25.7. Поляризация и электрическое смещение (векторы **P** и **D**) 90
Заключение 91
Вопросы 92
Задачи 93

26 Электрический ток 97

26.1. Электрическая батарея 98
26.2. Электрический ток 101
26.3. Закон Ома. Электрическое сопротивление и резисторы 103
26.4. Удельное сопротивление и сверхпроводимость 106
26.5. Микроскопическая картина электропроводности. Плотность тока и скорость дрейфа носителей заряда 109
26.6. Электрическая мощность 113
26.7. Переменный ток 116
Заключение 118
Вопросы 120
Задачи 120

27 Приборы и цепи постоянного тока 124

27.1. Последовательное и параллельное соединения резисторов 124
27.2. ЭДС и напряжение на клеммах источника 127
27.3. Правила Кирхгофа 129
27.4. Последовательное и параллельное соединения источников ЭДС 132
27.5. Цепи, содержащие резистор и конденсатор 133
*27.6. Амперметры и вольтметры 137
*27.7. Измерение тока и напряжения. Поправка на внутреннее сопротивление прибора 139
*27.8. Потенциометр 141
*27.9. Мост Уитстона 143

*27.10. Датчики и преобразователи. Термопары 144
Заключение 147
Вопросы 147
Задачи 148

28 Магнетизм 155

28.1. Магниты и магнитные поля 155
28.2. Магнитное поле, создаваемое электрическим током 158
28.3. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Определение вектора магнитной индукции **B** 159
28.4. Движение электрического заряда в магнитном поле 163
28.5. Открытие электрона и его свойства 166
*28.6. Термоэлектронная эмиссия. Электронно-лучевая трубка 169
*28.7. Масс-спектрометр 173
*28.8. Циклотрон и синхротрон 174
*28.9. Эффект Холла 177
*28.10. Вращающий момент, действующий на виток с током. Магнитный дипольный момент 178
*28.11. Приложения: гальванометры, электродвигатели, громкоговорители 180
Заключение 184
Вопросы 184
Задачи 186

29 Источники магнитного поля 190

29.1. Магнитное поле прямолинейного проводника 190
29.2. Закон Ампера 191
29.3. Магнитное поле соленоида и тора 196
29.4. Сила, действующая между двумя параллельными проводниками. Определение единиц силы тока и заряда 200
29.5. Закон Био – Савара 203
29.6. Ферромагнетизм 206
29.7. Гистерезис 209
*29.8. Парамагнетизм и диамагнетизм 212
*29.9. Вектор намагниченности **M** и обобщение закона Ампера 213
Заключение 216
Вопросы 217
Задачи 218

30 Электромагнитная индукция и закон Фарадея 223

30.1. ЭДС индукции 223
30.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца 225
30.3. ЭДС, наводимая в движущемся проводнике 227
30.4. Изменяющийся магнитный поток

создает электрическое поле 229
30.5. Электрогенератор 231
30.6. Противо-ЭДС и противодействующий момент. Вихревые токи 235
30.7. Трансформаторы. Передача электроэнергии на расстояние 237
*30.8. Электромагнитные микрофоны и звукосниматели 241
Заключение 241
Вопросы 242
Задачи 244

31 Индуктивность, энергия магнитного поля и электромагнитные колебания 248

31.1. Взаимная индуктивность 248
31.2. Индуктивность 251
31.3. Энергия магнитного поля 253
31.4. *RL*-цепочка 255
31.5. *LC*-контур и электромагнитные колебания 257
31.6. Колебательный контур с сопротивлением (*RCL*-контур) 261
Заключение 263
Вопросы 264
Задачи 265

32 Цепи переменного тока 269

32.1. Введение: цепи переменного тока 269
32.2. Резистор в цепи переменного тока 270
32.3. Конденсатор в цепи переменного тока 271
32.4. Индуктивность в цепи переменного тока 274
32.5. Переменный ток в *RCL*-цепочке 277
32.6. Резонанс в цепях переменного тока 281
*32.7. Согласование импедансов 282
*32.8. Поражение электрическим током. Точки утечки 285
Заключение 286
Вопросы 287
Задачи 287

33 Уравнения Максвелла и электромагнитные волны 291

33.1. Ток смещения. Возникновение магнитного поля при изменении электрического поля 291
33.2. Теорема Гаусса для магнитного поля 296
33.3. Уравнения Максвелла 297
33.4. Генерация электромагнитных волн 298
33.5. Электромагнитные волны и уравнения Максвелла. Скорость распространения электромагнитных волн 301
33.6. Свет как электромагнитная волна. Шкала элек-

тромагнитных волн 306
33.7. Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга 308
*33.8. Уравнения Максвелла и электромагнитные волны в материальной среде 310
*33.9. Передающие линии 311
*33.10. Дифференциальная форма уравнений Максвелла 313
Заключение 315
Вопросы 316
Задачи 317

34 Отражение и преломление света 320

34.1. Световые лучи 320
34.2. Скорость света и показатель преломления 321
34.3. Отражение света. Изображение в плоском зеркале 324
34.4. Изображения в сферических зеркалах 327
34.5. Преломление. Закон Снелля 335
34.6. Полное внутреннее отражение. Волоконная оптика 337
Заключение 340
Вопросы 340
Задачи 341

35 Линзы и оптические приборы 344

35.1. Преломление на сферической поверхности 344
35.2. Тонкие линзы 347
35.3. Лупа 356
35.4. Телескопы 358
35.5. Микроскоп 362
*35.6. Человеческий глаз. Корригирующие линзы 363
*35.7. Аберрации линз 367
Заключение 370
Вопросы 370
Задачи 372

36 Волновая природа света. Интерференция 375

36.1. Волны или частицы? Принцип Гюйгенса и дифракция 375
36.2. Принцип Гюйгенса и закон преломления 377
36.3. Интерференция. Опыт Юнга: интерференция от двух щелей 379
36.4. Когерентность 383
36.5. Видимый спектр и дисперсия 385
36.6. Распределение интенсивности в интерференционной картине от двух щелей 386
36.7. Интенсивность при когерентном и некогерентном источниках 390
36.8. Интерференция в тонких пленках 391
*36.9. Интерферометр Майкельсона 396
*36.10. Сила света 398

Заключение 399
Вопросы 400
Задачи 401

Дифракция 404

37.1. Дифракция на одной щели 406
37.2. Распределение и интенсивности в дифракционной картине от одной щели 408
37.3. Дифракция в опыте с интерференцией от двух щелей 413
37.4. Ограничения разрешающей способности. Критерий Рэлея 416
37.5. Разрешающая способность телескопов и микроскопов 418
37.6. Разрешающая способность человеческого глаза и полезное увеличение 421
37.7. Система с большим числом щелей – дифракционная решетка 422
37.8. Спектроскоп и спектроскопия 425
*37.9. Фазовые диаграммы в случае большого числа щелей. Ширина пика 428
*37.10. Разрешающая способность дифракционной решетки 430
*37.11. Рентгеновские лучи и дифракция рентгеновского излучения 432
Заключение 436
Вопросы 437
Задачи 437

Поляризация 441

38.1. Плоскость поляризации 441
38.2. Поляризация при отражении 445
38.3. Оптическая активность 446
*38.4. Оптическая анизотропия: двойное лучепреломление и дихроизм 448
*38.5. Круговая и эллиптическая поляризация 450
*38.6. Рассеяние света в атмосфере 452
Заключение 454
Вопросы 454
Задачи 454

Специальная теория относительности 457

39.1. Относительность Галилея – Ньютона 458
*39.2. Эксперимент Майкельсона – Морли 462
39.3. Постулаты специальной теории относительности 467
39.4. Одновременность 469
39.5. Замедление времени и парадокс близнецов 472
39.6. Сокращение длины 477
39.7 Четырехмерное пространство-время 479
39.8. Преобразования

Галилея и Лоренца 481
39.9. Релятивистская масса и релятивистский импульс 486
39.10. Предельная скорость 489
39.11. $E = mc^2$. Масса и энергия 490
39.12. Значение специальной теории относительности 494
Заключение 495
Вопросы 496
Задачи 497

40 Возникновение квантовой теории. Модели атома 500

40.1. Гипотеза квантов Планка 500
40.2. Фотонная (корпускулярная) теория света и фотоэлектрический эффект 502
40.3. Фотоны и рождение пар 506
40.4. Корпускулярно-волновой дуализм. Принцип дополнительности 507
40.5. Волновая природа материи 509
*40.6. Электронные микроскопы 511
40.7. Первые модели атома 513
40.8. Атомные спектры – ключ к строению атома 515
40.9. Модель Бора 517
40.10. Гипотеза де Бройля 524
Заключение 526
Вопросы 528
Задачи 529

41 Квантовая механика атомов и молекул 532

41.1. Квантовая механика – новая теория 533
41.2. Волновая функция и ее интерпретация. Интерференция от двух щелей 533
41.3. Принцип неопределенности Гейзенберга 537
41.4. Философский подход; вероятностное описание или детерминизм? 541
41.5. Квантовомеханическая картина строения атома 543
41.6. Квантовая механика атома водорода. Квантовые числа 545
41.7. Сложные атомы. Принцип запрета Паули 548
*41.8. Рентгеновское излучение и атомный номер 551
*41.9. Лазеры и голография 553
*41.10. Молекулярные спектры 559
*41.11. Полупроводники 560
Заключение 567
Вопросы 568
Задачи 568

42 Ядерная физика 571

42.1. Структура ядра 571
42.2. Энергия связи и ядерные силы 574

42.3. Радиоактивность 577
42.4. Альфа-распад 578
42.5. Бета-распад 580
42.6. Гамма-распад 582
42.7. Сохранение числа нуклонов и другие законы сохранения 583
42.8. Скорость распада и период полураспада 584
42.9. Стабильность и туннельный эффект 587
*42.10. Радиоактивное датирование 588
42.11. Ядерные реакции и превращение элементов 589
42.12. Деление ядер 591
42.13. Ядерный синтез 596
*42.14. Измерение излучения – дозиметрия 598
Заключение 601
Вопросы 602
Задачи 603

43 Элементарные частицы 607

43.1. Частицы высоких энергий 607
43.2. Зарождение физики элементарных частиц – частица Юкавы 608
43.3. Частицы и античастицы 612
43.4. Взаимодействия частиц и законы сохранения 613
43.5. Классификация частиц 615
43.6. Стабильность частиц и резонансы 617
43.7. Странные частицы 619
43.8. Кварки и «очарование» 620
43.9. «Стандартная модель»: квантовая хромодинамика (КХД) и электрослабая теория 624
43.10. Теории Великого объединения 626
Заключение 628
Вопросы 630
Задачи 630

Приложение А. Математические формулы 632
Приложение Б. Производные и интегралы 634
Приложение В. Полярные координаты 636
Приложение Г. Некоторые изотопы 638
Ответы к задачам с нечетными номерами 642
Именной указатель 647
Предметный указатель 649

Учебное издание

Дуглас К. Джанколи

ФИЗИКА
В двух томах
т. 2

Заведующий редакцией проф. А. Н. Матвеев
Зам. зав. редакцией С. М. Жебровский
Ст. научный редактор В. И. Самсонова
Мл. научные редакторы Г. Г. Сорокина, Р. Х. Зацепина
Художественный редактор К. В. Радченко
Технический редактор И. М. Кренделева
Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 6657
Сдано в набор 06.04.88. Подписано к печати 26.04.89. Формат $70 \times 100^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Гарнитура таймс. Объем 21 бум. л. Усл.печ.л. 54,6. Усл.кр.-отт. 112,45. Уч.изд.л. 49,36. Изд. № 2/5692. Тираж 40000 экз. Зак. 553. Цена 4 руб. 10 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Можайский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Г. Можайск, ул. Мира, 93.

Фундаментальные постоянные

Величина	Обозначение	Приближенное значение	Лучшее из известных значений[1]
Скорость света в пустоте	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с	$2{,}99792458(1{,}2) \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2	$6{,}6720(41) \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Число Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	$6{,}022045(31) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	8,314 Дж/моль·К = = 1,99 кал/моль·К = = 0,082 атм·л/моль·К	8,31441(26) Дж/моль·К
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	$1{,}380662(44) \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Заряд электрона	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл	$1{,}6021892(46) \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Стефана – Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2·К^4	$5{,}67032(71) \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2·К^4
Диэлектрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/Н·м^2	$8{,}85418782(7) \cdot 10^{-12}$ Кл^2/Н·м^2
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$Тл·м/А	
Постоянная Планка	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с	$6{,}626176(36) \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг = = 0,000549 а. е. м. = = 0,511 МэВ/c^2	$9{,}109534(47) \cdot 10^{-31}$ кг = = $5{,}4858026(21) \cdot 10^{-4}$ а. е. м.
Масса покоя протона	m_p	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,00728 а. е. м. = = 938,3 МэВ/c^2	$1{,}6726485(86) \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,007276470(11) а. е. м.
Масса покоя нейтрона	m_n	$1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,008665 а. е. м. = = 939,6 МэВ/c^2	$1{,}674954(9) \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,008665012(37) а. е. м.
Атомная единица массы (а. е. м.)		$1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг = = 931,5 МэВ/c^2	$1{,}6605655(86) \cdot 10^{-27}$ кг = = 931,5016(26) МэВ/c^2

[1] Данные заимствованы из работ: *Cohen E. R., Taylor B. N.* Journal of Physical and Chemical Reference Data, vol. 2 (1973); Particle Data Group, Phys. Lett., vol. 3B (April 1982). Числа в скобках указывают экспериментальную погрешность в последних знаках.

Другие полезные данные

Механический эквивалент теплоты (для 1 кал)	4,184 Дж
Абсолютный нуль температуры (0 К)	−273,15°C
Земля:	
Масса	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус (средний)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ м
Луна:	
Масса	$7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг
Радиус (средний)	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ м
Солнце:	
Масса	$2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус (средний)	$7 \cdot 10^{8}$ м
Расстояние от Земли до Солнца (среднее)	$1{,}50 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от Земли до Луны (среднее)	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ м

Греческий алфавит

Альфа	A	α	Ню	N	ν
Бета	B	β	Кси	Ξ	ξ
Гамма	Γ	γ	Омикрон	O	o
Дельта	Δ	δ	Пи	Π	π
Эпсилон	E	ε	Ро	P	ρ
Дзета	Z	ζ	Сигма	Σ	σ
Эта	H	η	Тау	T	τ
Тета	Θ	θ	Ипсилон	Υ	υ
Йота	I	ι	Фи	Φ	φ,ϕ
Каппа	K	ϰ	Хи	X	χ
Лямбда	Λ	λ	Пси	Ψ	ψ
Мю	M	μ	Омега	Ω	ω

Значения некоторых чисел

$\pi = 3{,}1415927$	$\sqrt{2} = 1{,}4142136$
$e = 2{,}7182818$	$\sqrt{3} = 1{,}7320508$
$\ln 2 = 0{,}6931472$	$\lg e = 0{,}4342945$
$\ln 10 = 2{,}3025851$	1 рад = 57,2957795

Множители для десятичных кратных и дольных единиц (СИ)

Приставка	Обозначение		Множитель
	русское	международное	
Тера	Т	T	10^{12}
Гига	Г	G	10^{9}
Мега	М	M	10^{6}
Кило	к	k	10^{3}
Гекто	г	h	10^{2}
Дека	да	da	10^{1}
Деци	д	d	10^{-1}
Санти	с	c	10^{-2}
Милли	м	m	10^{-3}
Микро	мк	μ	10^{-6}
Нано	н	n	10^{-9}
Пико	п	p	10^{-12}
Фемто	ф	f	10^{-15}

Математические знаки и обозначения

$\sim$	пропорционально, приблизительно
$=$	равно
$\approx$	приближенно равно
$\neq$	не равно
$>$	больше
$\gg$	много больше
$<$	меньше
$\ll$	много меньше
$\leqslant$	меньше или равно
$\geqslant$	больше или равно
Σ	сумма
$\bar{x}$	среднее от x
Δx	приращение по x
$\Delta x \to 0$	Δx стремится к нулю
$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots(1)$

Производные единицы в системе СИ и их обозначения

Величина	Единица	Обозначение		Размерность[1]
		русское	международное	
Сила	ньютон	Н	N	$кг \cdot м/с^2$
Энергия и работа	джоуль	Дж	J	$кг \cdot м^2/с^2$
Мощность	ватт	Вт	W	$кг \cdot м^2/с^3$
Давление	паскаль	Па	Pa	$кг/м \cdot с^2$
Частота	герц	Гц	Hz	$с^{-1}$
Электрический заряд	кулон	Кл	C	$А \cdot с$
Электрический потенциал	вольт	В	V	$кг \cdot м^2/А \cdot с^3$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	Ω	$кг \cdot м^2/А^2 \cdot с^3$
Емкость	фарад	Ф	F	$А^2 \cdot с^4/(кг \times \times м^2)$
Индукция магнитного поля	тесла	Тл	T	$кг/А \cdot с^2$
Магнитный поток	вебер	Вб	Wb	$кг \cdot м^2/А \cdot с^2$
Индуктивность	генри	Гн	H	$кг \cdot м^2/(с^2 \times \times А^2)$

[1] За основные единицы приняты кг – килограмм (масса), м – метр (длина), с – секунда (время), А – ампер (электрический ток).

Переводные множители

Длина

1 дюйм = 2,54 см
1 см = 0,394 дюйма
1 фут = 30,5 см
1 м = 39,4 дюйма = 3,28 фута
1 миля = 5280 футов = 1,61 км
1 морская миля = 1,85 км
1 ферми = 1 фемтометр (фм) = 10^{-15} м
1 ангстрем (Å) = 10^{-10} м
1 световой год = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м

Масса

1 атомная единица массы (а. е. м.) = $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг

Сила

1 Н = 10^5 дин

Время

1 сут = $8{,}64 \cdot 10^4$ с
1 год = $3{,}156 \cdot 10^7$ с

Энергия и работа

1 Дж = 10^7 эрг
1 ккал = $4{,}18 \cdot 10^3$ Дж
1 эВ = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж
1 кВт·ч = $3{,}80 \cdot 10^6$ Дж = 860 ккал

Скорость

1 миля/ч = 1,47 фут/с = 1,61 км/ч = 0,447 м/с
1 км/ч = 0,278 м/с
1 м/с = 3,60 км/ч
1 узел = 1,151 миля/ч = 0,5144 м/с

Мощность

1 Вт = 1 Дж/с
1 л.с. = 750 Вт
1 л. с. (США) = 746 Вт

Угол

1 радиан (рад) = 57,30° = 57°18′
1° = 0,01745 рад
1 об/мин = 0,1047 рад/с

Давление

1 атм = 1,013 бар = $1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м^2 = $= 760$ мм рт. ст.
1 Па = 1 Н/м^2

Тригонометрическая таблица

Угол, град	Угол, рад	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,000	0,000	1,000	0,000
1	0,017	0,017	1,000	0,017
2	0,035	0,035	0,999	0,035
3	0,052	0,052	0,999	0,052
4	0,070	0,070	0,998	0,070
5	0,087	0,087	0,996	0,087
6	0,105	0,105	0,995	0,105
7	0,122	0,122	0,993	0,123
8	0,140	0,139	0,990	0,141
9	0,157	0,156	0,988	0,158
10	0,175	0,174	0,985	0,176
11	0,192	0,191	0,982	0,194
12	0,209	0,208	0,978	0,213
13	0,227	0,225	0,974	0,231
14	0,244	0,242	0,970	0,249
15	0,262	0,259	0,966	0,268
16	0,279	0,276	0,961	0,287
17	0,297	0,292	0,956	0,306
18	0,314	0,309	0,951	0,325
19	0,332	0,326	0,946	0,344
20	0,349	0,342	0,940	0,364
21	0,367	0,358	0,934	0,384
22	0,384	0,375	0,927	0,404
23	0,401	0,391	0,921	0,424
24	0,419	0,407	0,914	0,445
25	0,436	0,423	0,906	0,466
26	0,454	0,438	0,899	0,488
27	0,471	0,454	0,891	0,510
28	0,489	0,469	0,883	0,532
29	0,506	0,485	0,875	0,554
30	0,524	0,500	0,866	0,577
31	0,541	0,515	0,857	0,601
32	0,559	0,530	0,848	0,625
33	0,576	0,545	0,839	0,649
34	0,593	0,559	0,829	0,675
35	0,611	0,574	0,819	0,700
36	0,628	0,588	0,809	0,727
37	0,646	0,602	0,799	0,754
38	0,663	0,616	0,788	0,781
39	0,681	0,629	0,777	0,810
40	0,698	0,643	0,766	0,839
41	0,716	0,656	0,755	0,869
42	0,733	0,669	0,743	0,900
43	0,750	0,682	0,731	0,933
44	0,768	0,695	0,719	0,966
45	0,785	0,707	0,707	1,000

Угол, град	Угол, рад	Синус	Косинус	Тангенс
46	0,803	0,719	0,695	1,036
47	0,820	0,731	0,682	1,072
48	0,838	0,743	0,669	1,111
49	0,855	0,755	0,656	1,150
50	0,873	0,766	0,643	1,192
51	0,890	0,777	0,629	1,235
52	0,908	0,788	0,616	1,280
53	0,925	0,799	0,602	1,327
54	0,942	0,809	0,588	1,376
55	0,960	0,819	0,574	1,428
56	0,977	0,829	0,559	1,483
57	0,995	0,839	0,545	1,540
58	1,012	0,848	0,530	1,600
59	1,030	0,857	0,515	1,664
60	1,047	0,866	0,500	1,732
61	1,065	0,875	0,485	1,804
62	1,082	0,883	0,469	1,881
63	1,100	0,891	0,454	1,963
64	1,117	0,899	0,438	2,050
65	1,134	0,906	0,423	2,145
66	1,152	0,914	0,407	2,246
67	1,169	0,921	0,391	2,356
68	1,187	0,927	0,375	2,475
69	1,204	0,934	0,358	2,605
70	1,222	0,940	0,342	2,748
71	1,239	0,946	0,326	2,904
72	1,257	0,951	0,309	3,078
73	1,274	0,956	0,292	3,271
74	1,292	0,961	0,276	3,487
75	1,309	0,966	0,259	3,732
76	1,326	0,970	0,242	4,011
77	1,344	0,974	0,225	4,332
78	1,361	0,978	0,208	4,705
79	1,379	0,982	0,191	5,145
80	1,396	0,985	0,174	5,671
81	1,414	0,988	0,156	6,314
82	1,431	0,990	0,139	7,115
83	1,449	0,993	0,122	8,144
84	1,466	0,995	0,105	9,514
85	1,484	0,996	0,087	11,43
86	1,501	0,998	0,070	14,30
87	1,518	0,999	0,052	19,08
88	1,536	0,999	0,035	28,64
89	1,553	1,000	0,017	57,29
90	1,571	1,000	0,000	∞