В. Д. ГЕТМАНЦЕВ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Допущено
Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник
для студентів економічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

КИЇВ
«ЛИБІДЬ»
2001

ББК 22.143я73
Г44

Рецензенти:
В. Т. Мовчан, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
П. З. Луговий, д-р техн. наук, проф.

Допущено Міністерством освіти і науки України
(Лист Міністерства освіти і науки України № 14/18.2-490
від 11.04.2001 р.)

Редакція
літератури з природничих та технічних наук

Редактор *Г. П. Трофімчук*

Г $\frac{1602040000-034}{2001}$

ISBN 966-06-0030-5

ВСТУП

Розвиток продуктивних сил суспільства в сучасних ринкових умовах висуває на перший план задачі прийняття рішень на підставі якісного поліпшення індикативного планування, розробки виробничих програм, середньострокових прогнозів функціонування як окремих господарських об'єктів, так і народного господарства в цілому. Основна увага керівників виробництва, менеджерів, працівників економічних органів повинна бути спрямована на раціональне та ефективне використання матеріальних, трудових, фінансових, природних й інших ресурсів, усунення та скорочення низькоокупних витрат і асигнувань, що є головною умовою прибутковості та конкурентоспроможності.

Сучасні умови виробництва продукції в різних галузях на рівні окремих підприємств, а також на вищому макроекономічному рівні супроводяться наростаючими інформаційними течіями, які надходять до економічних й управлінських органів. Різко зростає кількість операцій щодо переробки інформації, необхідної для пошуку найкращих (оптимальних) варіантів розвитку виробництва й прийняття рішень.

Розглянемо як приклад найпростішу задачу, яка полягає в прикріпленні 30 споживачів якогось виду продукції, що споживають одну умовну одиницю продукції кожний, до двох заводів-виготовлювачів, один з яких виробляє 20, а другий — 10 одиниць цієї продукції.

Розрахунки свідчать, що є близько 5 мільйонів різних варіантів такого прикріплення, при цьому можливість прикріплення якого-небудь із споживачів до двох заводів одночасно виключається. У противному разі кількість різних варіантів буде ще більшою. Якщо перебирати ці варіанти із швидкістю одного варіанта за хвилину, то для завершення подібного перебору потрібно було б 10 років.

Із збільшенням кількості споживачів до 50, а потужності заводів відповідно до 30 й 20 одиниць для завершення перебору всіх варіантів прикріплення (з тією самою швидкістю перебору) треба вже близько ста мільйонів років.

Таким чином, пошук найкращого (оптимального) плану (варіанта) простим перебором і порівняння всіх можливих планів стає вкрай непосильною задачею, при цьому не враховується той факт, що на складання одного варіанта плану також витрачається дуже багато часу.

Велику допомогу людині тепер для складних обчислень подають електронно-обчислювальні машини, спроможні за кілька хвилин або годин здійснити роботу, для виконання якої людині потрібні були б роки. Проте щоб скористатися послугами таких машин, необхідно вміти формулювати техніко-економічні показники в розв'язуваній задачі у вигляді тих чи інших математичних залежностей. Так виникла потреба впровадження математичних методів в економічні розрахунки.

Бурхливий розвиток економічного життя суспільства й економічної науки спричинив у свою чергу застосування нових методів у математиці. Виникла нова галузь математики — лінійне програмування, за допомогою якого досліджуються задачі, що мають множину розв'язків, з яких треба вибрати оптимальний.

Програмуванням таку галузь обчислення називають тому, що вона дає в кожному конкретному випадку «програму дій» для побудови оптимального розв'язку, а лінійним тому, що програмування оперує задачами, в яких розглядаються тільки лінійні залежності.

Праця «Математичні методи організації і планування виробництва» видатного математика акад. Л. В. Канторовича, опублікована в 1939 р., була першою в галузі лінійного програмування, в якій розв'язано задачу планування завантаження верстатів. Там же показано, що розроблений метод придатний і для розв'язання транспортної задачі.

Другою важливою задачею, яку розв'язав Л. В. Канторович у роботі «Про переміщення мас» (1942 р.), була задача складання оптимального плану перевезення однорідного вантажу.

Незалежно від цих праць транспортна задача була поставлена в 1941 р. Хічкоком (США) і в подальшому в деяких працях отримала назву «задача Хічкока».

Особливо інтенсивно почали займатися лінійним програмуванням і застосуванням його в різноманітних питаннях економіки, починаючи з другої половини 40-х років. У 1947—1948 рр. Дж. Данциг (США) розробив універсальний метод розв'язування екстремальних лінійних задач, який він назвав «симплекс методом». У наступні роки і дотепер лінійне програмування бурхливо розвивається. З'являється безліч праць, присвячених розробці теоретичних проблем лінійного програмування і питань практичного застосування його в різних галузях економіки.

Математичні методи в економічних дослідженнях застосовують етапами, з яких виділимо основні:

1) постановка задачі;

2) визначення необхідних вихідних даних. Математична наука вимагає точного формулювання початкових умов і властивостей явищ, які вивчаються. Це є попередньою передумовою для всіх наступних формальних математичних побудов. Порушення цього принципу призводить до помилкових висновків, в яких математика як наука сама по собі, безумовно, невинна. Видатний економіст-математик акад. В. С. Немчинов з цього приводу порівняв математику з млином, який не може змолоти гарного пшеничного борошна, якщо його примусити молоти насіння бур'янів;

3) математичне формулювання задачі. На цій стадії вихідні дані та невідомі величини подаються у вигляді рівнянь і нерівностей. Загальна мета задачі стає критерієм оптимальності і виражається як певна функція невідомих величин, для якої відшукується найбільше або найменше значення;

4) розв'язання задачі й аналіз здобутих результатів.

У посібнику описано і поставлено деякі техніко-економічні задачі й показано, що розв'язання таких задач зводиться до розв'язання задач лінійного програмування та економічної інтерпретації їх.

Частина I

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Розділ 1

ВИЗНАЧНИКИ

§ 1. Визначники другого й третього порядків

Вчення про визначники виникло в зв'язку з розв'язуванням систем лінійних рівнянь, тобто систем рівнянь першого степеня. Завдання полягало в тому, щоб відшукати загальні вирази для значень невідомих, які задовольняють задану систему лінійних рівнянь.

Знайдемо в загальному вигляді розв'язок системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Введемо такі позначення. Кожне невідоме позначимо однією й тією самою буквою x з індексом внизу, що означає номер невідомого. Кожен з коефіцієнтів при невідомих позначимо буквою a з двома індексами внизу. Перший індекс означає номер рівняння, яке містить даний коефіцієнт, а другий — номер невідомого, при якому він стоїть. Кожний з вільних членів позначимо буквою b з індексом внизу, що означає номер рівняння. Така система позначень особливо зручна тоді, коли невідомих і рівнянь багато.

Систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими запишемо у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 . \end{cases} \tag{1.1}$$

Систему (1.1) розв'яжемо методом виключення невідомих. Для цього помножимо перше рівняння на a_{22}, а друге — на a_{12}, після чого віднімемо від першого рівняння друге. Дістанемо

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 .$$

Аналогічно

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то, поділивши на цей вираз два останні рівняння, матимемо

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (1.2)$$

Сформулюємо правило, за яким з коефіцієнтів системи (1. 1) можна записати знаменники виразів (1.2).

Складемо таблицю коефіцієнтів при невідомих:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}.$$

Цю таблицю називають матрицею другого порядку, а числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — її елементами.

! *Означення*

Вираз $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називають *визначником другого порядку*, складеним для квадратної матриці $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$; його позначають $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} називають *елементами визначника*.

Множини елементів з однаковим першим індексом називають *рядками*, а з однаковим другим індексом — *стовпцями* визначника, тобто елементи, розміщені на горизонталях, утворюють рядки, а на вертикалях — стовпці визначника. Перший індекс елемента означає номер рядка, а другий — номер стовпця, на перетині яких лежить елемент. Діагональ, проведену з лівого верхнього кута до правого нижнього, називають *головною діагоналлю*, а діагональ, проведену з правого верхнього кута до лівого нижнього — *побічною діагоналлю*.

Добутки $a_{11}a_{22}$ і $-a_{12}a_{21}$ називають *членами* визначника.

Перший член визначника дорівнює добутку елементів, розміщених на головній діагоналі, а другий член дорівнює добутку елементів побічної діагоналі, взятому з протилежним знаком.

Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Згідно з означенням визначника чисельники виразів (1.2) можна записати так:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Тоді формули (1.2) набирають вигляду:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (1.3)$$

Визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, складений з коефіцієнтів при невідомих, позначимо буквою δ; називатимемо його *головним* або просто *визначником системи*; два інших визначника позначимо відповідно δ_1 і δ_2.

Тоді формули (1.3) запишемо у вигляді

$$x_1 = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad x_2 = \frac{\delta_2}{\delta}. \qquad (1.4)$$

Отже, доведено так звану теорему (правило) Крамера.

Теорема (правило) Крамера

Якщо визначник системи δ двох лінійних рівнянь з двома невідомими (1.1) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок. Його визначають за формулами (1.4), знаменниками яких є визначник системи δ, а чисельниками — визначники δ_1 і δ_2, що утворюються з визначника системи заміною стовпця з коефіцієнтів при шуканому невідомому стовпцем з вільних членів.

Нижче буде показано, що правило Крамера, виведене для систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими, виконується для будь-якої системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

Аналогічно введемо поняття визначника третього порядку.

! *Означення*

Визначником третього порядку, складеним для квадратної матриці,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix}$$

називається число, що дорівнює алгебраїчній сумі

$$a_{11}a_{22}a_{33}+ a_{21}a_{32}a_{13}+ a_{12}a_{23}a_{31}- a_{13}a_{22}a_{31}- a_{21}a_{12}a_{33}- a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Її позначають

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Поняття елементів, членів, рядків, стовпців, діагоналей, введені для визначників другого порядку, справедливі й для визначників третього порядку.

Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом, яке називається правилом трикутників (рис. 1.1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

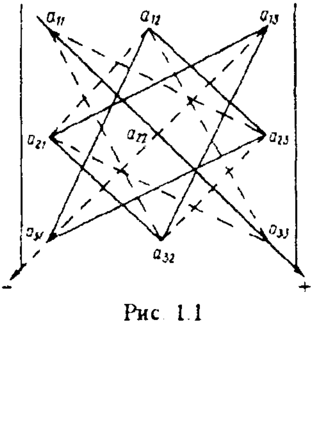

Рис. 1.1

$$+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Три перші члени визначника третього порядку є добутками елементів, розміщених на головній діагоналі ($a_{11}a_{22}a_{33}$), й елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні основній діагоналі ($a_{21}a_{32}a_{13}$ і $a_{12}a_{23}a_{31}$).

Три інші члени є добутками елементів побічної діагоналі, взятими з протилежним знаком ($a_{13}a_{22}a_{31}$), й елементів, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі ($a_{12}a_{21}a_{33}$ і $a_{32}a_{23}a_{11}$).

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot1+3\cdot(-3)\cdot1+$$

$$+1\cdot(-1)\cdot2-1\cdot5\cdot2-3\cdot1\cdot1-(-3)\cdot(-1)\cdot2=-20.$$

Є ще й інше правило обчислення визначників третього порядку, яке називають *правилом Саррюса*. За цим правилом складають таблицю, для якої обчислюють визначник. Справа до неї дописують два перші стовпці. В основній таблиці проводять головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що перетинають по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома першими членами визначника. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводять побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, на яких розміщено по три елементи. Добутки цих елементів беруть з протилежним знаком. Схематично це правило зображено на рис. 1.2.

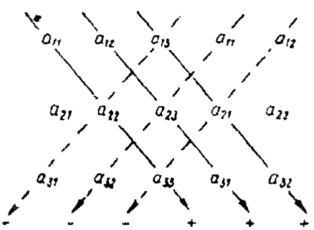

Рис. 1.2

Такий самий результат матимемо й тоді, коли до основної таблиці допишемо знизу два перші рядки і виконаємо ті самі дії, що й у першому випадку.

Розглянувши визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

робимо такі висновки:

1. Визначник третього порядку складається з шести членів (доданків).
2. Кожен член є добутком трьох елементів визначника.
3. Елементи кожного члена беруть з різних рядків і стовпців.

Число елементів у кожному члені визначника дорівнює числу рядків (стовпців). Отже, кожний член визначника є добутком елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Перш ніж навести означення визначника n-го порядку в загальному вигляді, розглянемо деякі допоміжні поняття.

§ 2. Перестановки

Розглянемо n перших натуральних чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Запишемо ці числа в будь-якому порядку

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n. \tag{1.5}$$

Тут числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є ті самі числа $1, 2, \ldots, n$, але записані, можливо, в іншому порядку.

! *Означення*

Будь-яке розміщення чисел $1, 2, \ldots, n$ називається їх перестановкою.

З курсу елементарної алгебри відомо, що число всіх різних перестановок з n чисел $1, 2, \ldots, n$ дорівнює $n!$

При цьому розміщення чисел $1, 2, \ldots, n$ в порядку їхнього зростання є також однією з перестановок.

Розглянемо довільну перестановку (1.5). Виберемо в ній два числа α_i і α_j. Якщо в цій перестановці більше з чисел α_i і α_j розміщено зліва від меншого (більше передує меншому), то кажуть, що числа α_i і α_j утворюють *інверсію* (порушення). У противному разі числа α_i і α_j інверсії не утворюють. Так, у перестановці 3, 2, 1, 4 інверсії утворюють пари чисел 3 і 2, 3 і 1, 2 і 1, а пари чисел 3 і 4, 2 і 4, 1 і 4 інверсій не утворюють.

Знайдемо ознаку наявності інверсії між числами α_i і α_j у перестановці (1.5). Припустимо, що числа α_i і α_j утворюють інверсію. Якщо $\alpha_i > \alpha_j$, то $i < j$. Якщо $\alpha_i < \alpha_j$, то $i > j$ (це означає, що в перестановці (1.5) більше число передує меншому). В обох випадках різниці $\alpha_i - \alpha_j$ та $i - j$ мають протилежні знаки. Отже, якщо між числами α_i і α_j є інверсія, то виконується нерівність $(\alpha_i - \alpha_j)(i - j) < 0$.

Якщо числа α_i і α_j не утворюють інверсію, то різниці $\alpha_i - \alpha_j$ і $i - j$ мають однакові знаки і $(\alpha_i - \alpha_j)(i - j) > 0$. Отже, за знаком добутку $(\alpha_i - \alpha_j)(i - j)$ можна робити висновок про наявність інверсії між числами α_i і α_j. Позначимо число всіх інверсій у перестановці (1.5) через $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Наприклад, для перестановки 3, 2, 1, 4 число $I(3, 2, 1, 4) = 3$, а для перестановки 2, 4, 3, 1 число $I(2, 4, 3, 1) = 4$.

! *Означення*

Перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називається парною, якщо число $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ парне. Якщо число $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ непарне, то перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називається непарною.

Наприклад, перестановка 3, 2, 1, 4 непарна, а перестановка 2, 4, 3, 1 парна.

Подамо ознаку парності перестановки. Розглянемо в перестановці всі можливі пари чисел α_k і α_l. Таких пар є стільки, скільки сполук можна скласти з числа n по 2, тобто $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$. Складемо добуток $P = \prod\limits_{(kl)} (\alpha_k - \alpha_l)(k - l)$. Символ (kl) означає, що в даний добуток входять множники виду $[(\alpha_k - \alpha_l)(k - l)]$, які відповідають усім можливим парам чисел k і l з перестановки (1.5). Визначимо знак добутку P. Як відомо, числа α_k і α_l утворюють інверсію тоді, коли $[(\alpha_k - \alpha_l)(k - l)] < 0$. Тому в добутку Π число від'ємних множників $[(\alpha_k - \alpha_l)(k - l)]$ точно дорівнює $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Отже, якщо число $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ парне, то $P > 0$, а якщо число $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ непарне, то $P < 0$, тобто за знаком P можна визначити парність перестановки.

Наприклад, для перестановки 3, 2, 1, 4 маємо $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 4$. Тоді

$$P = ((\alpha_4 - \alpha_3)(4 - 3))((\alpha_4 - \alpha_2) \cdot (4 - 2))((\alpha_4 - \alpha_1)(4 - 1)) \times$$

$$\times ((\alpha_3 - \alpha_2)(2 - 1))((\alpha_3 - \alpha_1)(3 - 1))((\alpha_2 - \alpha_1)(2 - 1)) =$$

$$= ((4-1)(4-3))((4-2)\cdot 2)((4-3)\cdot 3)\times$$

$$\times((1-2)\cdot 1)((1-3)\cdot 2)((2-3)\cdot 1) < 0.$$

Розглянемо перестановку (1.5). Поміняємо в ній місцями числа α_i і α_j, зберігши всі інші числа на своїх місцях. Дістанемо нову перестановку

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n.$$

Ця операція називається *транспозицією*. Справедливе таке твердження.

Теорема

Будь-яка транспозиція переводить парну перестановку в непарну, а непарну — в парну.

Перевіримо сформульовану теорему на прикладі. Нехай задано перестановку 5, 4, 1, 3, 2. Маємо $I(5, 4, 1, 3, 2) = 8$, тобто задана перестановка парна. Поміняємо місцями два будь-які числа, наприклад 4 і 2, тобто виконаємо одну транспозицію. Дістанемо перестановку 5, 2, 1, 3, 4. Тут $I(5, 2, 1, 3, 4) = 5$. Отже, перестановка з парної за допомогою однієї транспозиції перейшла в непарну.

§ 3. Визначники *n*-го порядку та їхні властивості

Розглянемо визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Члени визначника записано так, що елементи в кожному з них розміщено в порядку зростання перших індексів. При цьому другі індекси утворюють деякі перестановки з чисел 1, 2, 3. Як бачимо, три з цих перестановок парні, а решта — непарні. Членам визначника, що мають додатний знак, відповідають парні перестановки других індексів: 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2. Членам визначника, що мають знак мінус, відповідають непарні перестановки других індексів: 3, 2, 1; 2, 1, 3; 1, 3, 2.

Отже, кожний член визначника можна записати у вигляді

$$(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3},$$

де α_1, α_2, α_3 — деяка перестановка чисел з 1, 2, 3.

Визначник третього порядку має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3}.$$

Тут підсумовування виконується для всіх шести перестановок з чисел 1, 2, 3.

Узагальнивши сказане про визначники третього порядку, перейдемо до означення визначників n-го порядку. Розглянемо квадратну таблицю (матрицю) n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Візьмемо в першому рядку цієї матриці будь-який елемент $a_{1\alpha_1}$, тобто елемент першого рядка, що міститься у стовпці з номером α_1. У другому рядку візьмемо довільний елемент $a_{2\alpha_2}$ такий, що $\alpha_2 \neq \alpha_1$, тобто елемент $a_{2\alpha_2}$ не повинен міститися в стовпці α_1, з якого вже взято елемент $a_{1\alpha_1}$. У третьому рядку візьмемо довільний елемент $a_{3\alpha_3}$ такий, що не міститься в стовпцях α_1 і α_2, з яких взято вже два попередніх елементи $a_{1\alpha_1}$ і $a_{2\alpha_2}$. Цей процес продовжимо послідовно до останнього рядка. Внаслідок цього дістанемо набір елементів $a_{1\alpha_1}$, $a_{2\alpha_2}$, …, $a_{n\alpha_n}$.

Утворимо з них добуток

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}. \tag{1.6}$$

Цей добуток записано так, що перші індекси елементів розміщені в порядку зростання 1, 2, …, n, а другі утворюють деяку перестановку α_1, α_2, …, α_n. Таким чином, кожному добутку вигляду (1.6) відповідає певна перестановка α_1, α_2, …, α_n. Справедливе й обернене: будь-якій перестановці

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ відповідає деякий добуток вигляду (1.6), який містить тільки один елемент з кожного рядка й кожного стовпця матриці A. Отже, різних добутків вигляду (1. 6) можна скласти стільки, скільки є різних перестановок з n елементів, тобто $n!$ Нехай $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є число інверсій у перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тоді $(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$ дорівнює 1 для парних і -1 для непарних перестановок.

! *Означення*

Визначником або детермінантом n-го порядку, складеним для квадратної таблиці (матриці) A, називається алгебраїчна сума $n!$ членів, що є всіма можливими добутками елементів, узятих по одному і тільки по одному з кожного рядка та кожного стовпця. Знак кожного члена визначається як

$$(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)},$$

де $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — число інверсій у перестановці других індексів елементів члена, коли ці елементи розміщені в порядку зростання перших індексів. Позначають визначник n-го порядку так:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

Тут підсумовування здійснюється за всіма перестановками з чисел $1, 2, \ldots, n$.

Приклад. **Визначити знак члена $a_{21}a_{34}a_{43}a_{12}$ визначника четвертого порядку.**

Р о з в ' я з а н н я. Розмістимо елементи даного члена в порядку зростання перших індексів. Маємо $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$. Знайдемо число інверсій у перестановці 2, 1, 4, 3 других індексів, тобто $I(2, 1, 4, 3)$. Це число дорівнює 2. Отже, заданий член визначника має знак плюс.

Визначники є важливим апаратом дослідження проблем алгебри та її різноманітних застосувань.

§ 4. Основні властивості визначників

- **Властивість 1**

  Визначник не зміниться від заміни рядків стовпцями і стовпців рядками з однаковими номерами.

Операція заміни рядків стовпцями, а стовпців рядками з однаковими номерами називається *транспонуванням*. Отже, при транспонуванні визначник не змінюється.

Доведення. Нехай маємо визначник

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

і визначник

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який утворено з визначника D транспонуванням. Елементи визначника D' зв'язані з елементами визначника D співвідношеннями

$$a_{ij}'=a_{ji} \quad (i=1,\,2,\,\dots,\,n;\;\; j=1,\,2,\,\dots,\,n).$$

Розглянемо довільний набір $a'_{1\alpha_1}\,a'_{2\alpha_2}\,\dots\,a'_{n\alpha_n}$ елементів визначника D', узятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця. У визначнику D ці елементи також містилися в різних рядках і стовпцях. Це означає, що кожний член визначника D', тобто $a'_{1\alpha_1}\,a'_{2\alpha_2}\,\dots\,a'_{n\alpha_n}$, є також членом визначника D і навпаки, кожний член визначника D є членом визначника D'. Таким чином, визначники D і D' містять одні й ті самі члени. Визначимо знаки члена $a_{1\alpha_1}\,a_{2\alpha_2}\,\dots\,a_{n\alpha_n}$ у визначниках D' і D. У визначнику D' знак цього члена збігається зі знаком добутку

$$P' = \prod_{(kl)} (\alpha_k - \alpha_l)(k - l) .$$

Згідно зі співвідношенням $a_{ij}' = a_{ji}$, добуток $a_{1\alpha_1}' a_{2\alpha_2}' \dots a_{n\alpha_n}'$ можна записати як $a_{\alpha_1 1}' a_{\alpha_2 2}' \dots a_{\alpha_n n}'$. Знак цього члена у визначнику D збігається зі знаком добутку

$$P = \prod_{(kl)} (\alpha_k - \alpha_l)(k - l) .$$

Оскільки $P = P'$, то знаки однакові. Властивість доведено.

Зауваження. ◆ *З доведеної властивості випливає, що рядки та стовпці визначника рівноправні, тобто всі властивості, встановлені для рядків, справедливі й для стовпців і навпаки. У подальшому всі властивості можна формулювати й доводити тільки для рядків або тільки для стовпців.*

● **Властивість 2**

При переставлянні у визначнику двох будь-яких стовпців або рядків знак визначника змінюється на протилежний, а абсолютна величина не змінюється.

Доведення. Розглянемо визначник

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Переставимо в ньому два довільні стовпці, наприклад k-й і l-й. Дістанемо новий визначник

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Візьмемо будь-який член визначника D

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} .$$

Множники цього члена, як і завжди, взято по одному і тільки по одному з кожного рядка та кожного стовпця. У визначнику D_1 множники $a_{1\alpha_1}$, $a_{2\alpha_2}$, …, $a_{n\alpha_n}$ також належать різним рядкам і різним стовпцям. Отже, добуток $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ є одночасно й членом визначника D_1.

Справедливе й обернене твердження: будь-який член визначника D_1 є й членом визначника D, тобто визначники D і D_1 містять одні й ті самі члени. Знак члена $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ з D визначається парністю перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Серед множників добутку $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ є тільки по одному з k-го й l-го стовпців. Нехай це будуть елементи $a_{i\alpha_i}$ і $a_{j\alpha_j}$ ($\alpha_i = k$, $\alpha_j = l$). У визначнику D_1 елемент $a_{i\alpha_i}$ належить j-му стовпцю, $a_{j\alpha_j}$ — i-му стовпцю. Тому знак члена $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ з D_1 визначається парністю перестановки, яку дістають з перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ транспозицією чисел α_i і α_j. Згідно зі сформульованим вище твердженням, при будь-якій транспозиції парність перестановки змінюється. Отже, знаки члена $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ у визначниках D і D_1 протилежні. Таким чином, визначники D і D_1 містять одні й ті самі члени, але з протилежними знаками, тобто $D_1 = -D$.

● **Властивість 3**

Визначник з двома однаковими стовпцями (рядками) дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я . Поміняємо місцями два однакові стовпці визначника. Тоді, з одного боку, визначник не зміниться, а з іншого — згідно з властивістю 2, знак його зміниться на протилежний. Отже, $D = -D$, звідки $2D = 0$, тобто $D = 0$. Властивість доведено.

● **Властивість 4**

(Розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця).

Нехай маємо визначник

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Викреслимо в ньому i-й рядок і j-й стовпець, на перетині яких лежить елемент a_{ij}. Внаслідок цього дістанемо визначник $(n-1)$-го порядку, який називається мінором, що відповідає елементу a_{ij} у визначнику D; його позначають M_{ij}. Отже,

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

! *Означення*

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника D називається мінор M_{ij}, узятий зі знаком плюс, якщо сума номерів рядка й стовпця, на перетині яких лежить елемент a_{ij}, парна, і зі знаком мінус, якщо ця сума непарна.

Залежність між мінором M_{ij} і алгебраїчним доповненням A_{ij} виражається співвідношенням

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де i — номер рядка, j — номер стовпця, на перетині яких лежить елемент a_{ij}.

Теорема 1

Визначник D дорівнює сумі добутків елементів будь-якого з його стовпців (рядків) на їхні алгебраїчні доповнення.

Доведення. Покажемо, що коли вибрати всі доданки, що містять деякий елемент визначника, і винести цей елемент за дужки, то в дужках матимемо алгебраїчне доповнення цього елемента.

1°. Доведемо спочатку це твердження для елемента a_{nn}. Розглянемо довільний член визначника D, тобто $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n-1,\alpha_{n-1}} a_{nn}$, який містить елемент a_{nn}. Знак цього члена визначається як $(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1,n})}$, тобто визначається парністю перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1,n}$. Виберемо всі доданки, що містять елемент a_{nn}, і винесемо цей елемент за дужки. У дужках матимемо суму

$$\sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1,n})}, a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n-1,\alpha_{n-1}}.$$

Оскільки число n більше, ніж усі інші, то воно не вносить інверсії в перестановках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1,n}$.

Отже,

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1, n}) = I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}),$$

а в дужках матимемо суму

$$\sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1, \alpha_{n-1}}.$$

Тут підсумовування виконується за всіма перестановками $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Отже, сума $\sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n-1, \alpha_{n-1}}$ є мінором M_{nn} елемента a_{nn}. Оскільки $i = j = n$, $i + j = 2n$, то алгебраїчне доповнення A_{nn} елемента a_{nn} дорівнює мінору M_{nn}. Таким чином, вираз у дужках, який утворився після винесення елемента a_{nn}, є алгебраїчним доповненням A_{nn} цього елемента.

2°. Доведемо тепер твердження для загального випадку. Розглянемо елемент a_{ij} з i-го рядка та j-го стовпця. Для того щоб звести цей випадок до розглянутого вище, переставимо j-й стовпець у визначнику D спочатку із сусіднім з ним $(j + 1)$-м стовпцем, а потім з $(j + 2)$-м і так далі до n-го стовпця. Внаслідок цього визначник D_1 набере вигляду

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \ldots & a_{1n} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \ldots & a_{2n} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \ldots & a_{in} & a_{ij} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \ldots & a_{nn} & a_{nj} \end{vmatrix}.$$

Тут j-й стовпець став останнім. При цьому було виконано n-j перестановок, тобто стільки, скільки у визначнику D стовпців з номерами, більшими від j. У визначнику D_1 переставимо i-й рядок з $(i + 1)$-м і так далі до n-го. В результаті дістанемо визначник

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \ldots & a_{1n} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \ldots & a_{2n} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \ldots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \ldots & a_{(i-1)n} & a_{(i-1)j} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \ldots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \ldots & a_{(i+1)n} & a_{(i+1)j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \ldots & a_{nn} & a_{nj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \ldots & a_{in} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Отже, визначник $\tilde{D}$ утворено з визначника D в результаті $2n - i - j$ перестановок рядків і стовпців. Згідно з властивістю 2, при кожній такій перестановці знак визначника змінюється на протилежний, а абсолютна величина не змінюється. Тому для визначників $\tilde{D}$ і D виконується співвідношення

$$\tilde{D} = (-1)^{2n-i-j} D .$$

Оскільки $(-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j}$, то

$$\tilde{D} = (-1)^{i+j} D .$$

Звідси випливає, що алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} у визначнику D і алгебраїчне доповнення $\tilde{A}_{ij}$ того самого елемента a_{ij} у визначнику $\tilde{D}$ зв'язані співвідношенням

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} .$$

Мінори M_{ij} і $\tilde{M}_{ij}$ елемента a_{ij} у визначниках D і $\tilde{D}$ збігаються, тобто

$$\tilde{M}_{ij} = M_{ij} .$$

Винесемо за дужки елемент a_{ij} з усіх членів визначника $\tilde{D}$, що містять цей член. Відповідно до міркувань з п. 1° виразом у дужках є

$$\tilde{A}_{ij} = \tilde{M}_{ij} .$$

Отже,

$$(-1)^{i+j} A_{ij} = \tilde{A}_{ij} = M_{ij}, \text{ або } A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij} .$$

Таким чином, якщо з усіх членів визначника D, що містять елемент a_{ij}, винести його за дужку, то в дужках залишиться вираз, який є алгебраїчним доповненням A_{ij} цього елемента. Якщо тепер згрупувати всі члени визначника D відносно елементів деякого стовпця, то дістанемо результат, про який стверджує теорема.

Теорема 2

Сума добутків усіх елементів будь-якого стовпця (рядка) на алгебраїчні доповнення, що відповідають елементам другого стовпця (рядка), дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я . Розглянемо визначник

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1k} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2k} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nk} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

утворений з визначника D заміною його j-го стовпця k-м стовпцем. Згідно з властивістю 3, визначник $\overline{D}$ дорівнює нулю. Алгебраїчні доповнення будь-якого з елементів j-го стовпця не залежать від елементів цього стовпця, оскільки вони викреслюються при утворенні алгебраїчних доповнень. Тому алгебраїчні доповнення відповідних елементів j-го стовпця визначників D і $\overline{D}$ збігаються. Розклавши визначник $\overline{D}$ за елементами його j-го стовпця, матимемо

$$\overline{D} = a_{1k} A_{1j} + a_{2k} A_{2j} + \ldots + a_{nk} A_{nj} = 0 .$$

Теорему доведено. Об'єднавши теореми 1 і 2, дістанемо таку властивість визначників.

- **Властивість 4**

  Сума добутків елементів будь-якого стовпця (рядка) визначника на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику, а сума добутків елементів будь-якого стовпця (рядка) визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають елементам другого стовпця (рядка), дорівнює нулю.

- **Властивість 5**

  Визначник, у якого всіма елементами деякого стовпця (рядка) є нулі, дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я . Нехай усі елементи деякого стовпця (рядка) дорівнюють нулю. Розклавши визначник за елементами цього стовпця (рядка), дістанемо суму, кожний доданок якої дорівнює нулю.

- **Властивість 6**

  Множник, спільний для всіх елементів деякого стовпця (рядка), можна винести за знак визначника.

Д о в е д е н н я . Нехай усі елементи j-го стовпця мають спільний множник λ:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник D за елементами j-го стовпця, дістанемо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda a_{1j} A_{1j} + \lambda a_{2j} A_{2j} + \ldots + \lambda a_{nj} A_{nj} =$$

$$= \lambda \left(a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj} \right) .$$

Вираз у дужках є визначником, у якого всі елементи, крім елементів j-го стовпця, такі самі як і у визначника D, а елементи j-го стовпця нового визначника дорівнюють відповідно a_{1j} , a_{2j} , ..., a_{nj} . Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

що й треба було довести.

- **Властивість 7**

Якщо кожен елемент деякого стовпця (рядка) визначника є сумою двох доданків, то визначник розкладається на суму двох визначників, у яких всі стовпці (рядки), крім сумарного, такі самі, як і у вихідного визначника, а на місці сумарного стовпця (рядка) перебувають стовпці (рядки) відповідно з перших і других доданків.

Доведення. Нехай елементами j-го стовпця визначника D є сума двох доданків. Розкладемо визначник D за елементами j-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} + a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} + a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} + a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a'_{1j} + a''_{1j}) A_{1j} + (a'_{2j} + a''_{2j}) A_{2j} +$$

$$+ \ldots + (a'_{nj} + a''_{nj}) A_{nj} = (a'_{1j} A_{1j} + a'_{2j} A_{2j} + \ldots + a'_{nj} A_{nj}) +$$

$$+ (a''_{1j} A_{1j} + a''_{2j} A_{2j} + \ldots + a''_{nj} A_{nj}) .$$

Вирази в дужках у правій частині рівності є розкладами визначників, у яких всі стовпці, крім j-го, такі самі, як і у визначника D, а на місці j-го стовпця визначника D лежить стовпець з доданків. Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}' + a_{1j}'' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}' + a_{2j}'' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}' + a_{nj}'' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}'' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}'' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}'' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що й треба було довести.

Розглянемо деякий набір із k стовпців визначника:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Візьмемо k довільних дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Помножимо стовпець A_1 на λ_1, тобто помножимо всі елементи стовпця A_1 на λ_1, стовпець A_2 помножимо на λ_2 і так далі, нарешті стовпець A_k помножимо на λ_k. Дістанемо k стовпців $\lambda_1 A_1$, $\lambda_2 A_2$, …, $\lambda_k A_k$. Додавши їх, матимемо новий стовпець

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_k a_{1k} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_k a_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \ldots + \lambda_k a_{nk} \end{pmatrix},$$

який називають *лінійною комбінацією стовпців* $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ називають *коефіцієнтами лінійної комбінації*.

Аналогічно вводиться поняття лінійної комбінації рядків визначника. За допомогою поняття лінійної комбінації стовпців (рядків) визначника можна об'єднати властивості 6 і 7.

Якщо j-й стовпець A_j визначника D є лінійною комбінацією довільних стовпців B і C,

$$A_j = \lambda B + \mu C,$$

то визначник D є лінійною комбінацією

$$D = D_j(\lambda\, B + \mu\, C) = \lambda\, D_j(B) + \mu\, D_j(C)$$

визначників $D_j\,(B)$ і $D_j\,(C)$. Визначники $D_j\,(B)$ і $D_j\,(C)$ утворилися з визначника D заміною j-го стовпця відповідно стовпцями B і C. Сформульована властивість зберігається й тоді, коли j-й стовпець визначника D замінюється лінійною комбінацією будь-якого числа його стовпців.

- **Властивість 8**

  Якщо деякий стовпець (рядок) визначника є лінійною комбінацією інших його стовпців (рядків), то такий визначник дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я . Нехай j-й стовпець визначника D є лінійною комбінацією тільки двох його стовпців A_k і A_l :

$$A_j = \lambda\, A_k + \mu\, A_l\, (k \neq j\ ;\ l \neq j)\ .$$

Тоді визначник D є також лінійною комбінацією визначників $D_j\,(A_k)$ і $D_j\,(A_l)$:

$$D = D_j(\lambda\, A_k + \mu\, A_l) = \lambda\, D_j(A_k) + \mu\, D_j(A_l)\ .$$

Оскільки у визначників $D_j\,(A_k)$ і $D_j\,(A_l)$ відповідно j-й і k-й, j-й і l-й стовпці рівні між собою, то, згідно з властивістю 3, ці визначники, а отже і визначник D, дорівнюють нулю. Властивість доведена.

- **Властивість 9**

  Визначник не зміниться, якщо до будь-якого його стовпця (рядка) додати довільну лінійну комбінацію решти стовпців (рядків).

Д о в е д е н н я . Виділимо у визначнику D деякий стовпець, наприклад j-й. Складемо довільну лінійну комбінацію решти його стовпців:

$$B = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_{j-1} A_{j-1} + \lambda_{j+1} A_{j+1} + \ldots + \lambda_n A_n\ .$$

Додавши стовпець B до стовпця A_j , дістанемо новий визначник $\tilde{D}$, який запишемо у вигляді

$$\tilde{D} = D_j\,(A_j + B)\ .$$

Згідно з властивістю 7, визначник $\tilde{D}$ дорівнює сумі двох визначників:

$$\tilde{D} = D_j(A_j) + D_j(B).$$

Визначник $D_j(A_j)$ і є визначником D, а визначник $D_j(B)$ дорівнює нулю, оскільки його j-й стовпець є лінійною комбінацією решти стовпців визначника. Таким чином, $\tilde{D} = D$, що й треба було довести.

§ 5. Обчислення визначників

Визначники можна було б обчислювати, користуючись їхнім означенням, але вже обчислення визначників четвертого, п'ятого і наступних порядків зв'язано з великими труднощами. Так, для того щоб обчислити визначник шостого порядку, треба виконати понад тисячу операцій множення й додавання. Для обчислення визначника 27-го порядку на електронній обчислювальній машині, що виконує за секунду 100 000 000 операцій, необхідно було б витратити приблизно $6 \cdot 10^{11}$ років. Тому для обчислення визначників застосовують їхні властивості.

Розглянемо ряд способів обчислення визначників.

1°. *Розклад визначника за елементами рядків або стовпців.* Цей спосіб полягає в тому, що на основі властивості 4 визначник n-го порядку розкладають на алгебраїчну суму n визначників $(n-1)$-го порядку. Кожний з утворених визначників $(n-1)$-го порядку розкладають на алгебраїчну суму $n-1$ визначників $(n-2)$-го порядку і так далі доти, поки не дістануть визначники, які можна обчислити вже безпосередньо (це визначники другого або третього порядків). Якщо при цьому деякі елементи рядка або стовпця, за якими розкладається визначник, дорівнюють нулю, то доданки, що відповідають цим елементам у розкладі визначника, випадають. Тому доцільно розкладати визначник за тими рядками або стовпцями, які містять найбільшу кількість нулів. Згідно з властивістю 9, можна накопичувати нулі в будь-якому стовпці або рядку визначника.

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з властивістю 4, визначник можна було б розкласти за елементами будь-якого рядка чи стовпця. Проте найменша кількість операцій буде тоді, коли розкласти визначник за елементами останнього рядка чи стовпця. Розкладемо даний визначник за елементами останнього рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\,(0 + 20 + 0 - 48 - 0 - 0) + 3\,(6 + 15 + 28 - 36 - 10 - 7) = 44\,.$$

У подальшому доданки в розкладі визначника за елементами рядка чи стовпця, що відповідають нульовим елементам, не виписуватимемо.

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я . Перш ніж розкласти визначник за елементами деякого рядка чи стовпця, наприклад першого рядка, перетворимо визначник так, щоб у вибраному рядку всі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. Для цього послідовно помножимо перший стовпець на –2, –3, –4 і додамо до другого, третього і четвертого стовпців. Дістанемо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & -8 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix}, \quad \text{або} \quad 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник третього порядку можна обчислити безпосередньо, користуючись правилом трикутників. Проте його можна звести до визначника другого порядку, користуючись властивістю 4 та накопичивши, наприклад в останньому рядку, два нулі. Отже, помножимо перший рядок послідовно на –2 та на –3 і додамо до другого і третього рядків. Матимемо

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами третього стовпчика, знайдемо

$$-5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot 4 = -20\,.$$

Таким чином,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20\,.$$

Зауваження. *При накопичуванні нулів у рядку виконують операції, як правило, зі стовпцями, і навпаки при накопичуванні нулів у стовпці виконують операції з рядками. Проте бувають винятки.*

Так, в останньому визначнику третього порядку можна було б дістати відразу два нулі в другому рядку, додавши до нього перший рядок, помножений на –2

2°. *Зведення визначника до трикутного вигляду.* Цей спосіб полягає в такому перетворенні визначника, коли всі його елементи, розміщені по один бік від головної діагоналі, перетворюють в нулі. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Приклад 3. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я . Додамо до елементів другого, третього і четвертого стовпців перший стовпець, помножений відповідно на – 2, – 3, – 4. Матимемо

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & -11 & -11 \end{vmatrix}.$$

Тепер до третього і четвертого стовпців додамо другий, помножений відповідно на – 2 і – 7. Дістанемо

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 4 \\ 4 & -7 & 3 & 38 \end{vmatrix}.$$

Додавши третій стовпець до четвертого, утворимо трикутний визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 41 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)\,(-4) \cdot 41 = 164.$$

Усі виконувані перетворення не змінювали значення визначника. Отже, заданий визначник також дорівнює 164.

§ 6. Системи лінійних рівнянь. Загальні положення

У загальному випадку система лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.7}$$

Тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — невідомі, які треба знайти; a_{ij} — сталі числа ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), їх називають *коефіцієнтами системи* (перший індекс коефіцієнта означає номер рівняння, в якому міститься цей коефіцієнт, а другий індекс — номер невідомого, при якому його записано); b_1, $b_2, \ldots, b_m$ — сталі числа, їх називають *вільними членами*.

Розв'язком системи (1.7) називають будь-яку сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, яка при підстановці в систему замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює всі рівняння системи в тотожності. Сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є одним з розв'язків системи, а не n розв'язків.

Систему (1.7) називають *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Якщо система (1.7) має єдиний розв'язок, то її називають *визначеною*; якщо система має більш як один розв'язок, то її називають *невизначеною*.

Систему (1.7) називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо принаймні один з вільних членів не дорівнює нулю. Однорідні системи завжди сумісні, оскільки мають розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, який називають *очевидним* або *тривіальним*. Дві системи лінійних рівнянь називають *еквівалентними* або *рівносильними*, якщо вони сумісні й мають одні й ті самі розв'язки, або якщо вони несумісні.

В теорії систем лінійних рівнянь розробляються методи, за допомогою яких встановлюється сумісність чи несумісність системи і в разі сумісності визначаються усі її розв'язки.

§ 7. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Визначник

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

складений з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих, називають *головним визначником* або просто *визначником системи*. Помножимо перше рівняння системи (1.8) на A_{1j}, друге — на A_{2j} і так далі, n-е рівняння — на A_{nj}, де A_{1j}, A_{2j}, …, A_{nj} — алгебраїчні доповнення елементів j-го стовпця a_{1j}, a_{2j}, …, a_{nj}, і додамо всі ці рівняння. Дістанемо вираз

$$(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})\,x_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n2}A_{nj})\,x_2 + \ldots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})\,x_j + \ldots$$

$$\ldots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})\,x_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}.$$

Коефіцієнт при невідомому x_j є сумою добутків елементів j-го стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення і, згідно з теоремою 1 властивості 4 визначників, дорівнює визначнику D. Коефіцієнти при всіх інших невідомих є сумами добутків елементів усіх стовпців, крім j-го, на алгебраїчні доповнення елементів j-го стовпця і, у відповідності з теоремою 2 властивості 4 визначників, дорівнюють нулю. Вираз, що є правою частиною рівності, є визначником, що утворюється з визначника системи D заміною j-го стовпця стовпцем з вільних членів.

Таким чином, дістаємо співвідношення

$$Dx_j = D_j, \tag{1.9}$$

де

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи D не дорівнює нулю, то, поділивши на нього обидві частини рівності (1. 9), дістанемо

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (1.10)$$

Отже, доведено наступну теорему.

Т е о р е м а (правило) Крамера

Якщо визначник D системи n лінійних рівнянь з n невідомими (1.8) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, що визначається за виразами (1.10), знаменником яких є визначник системи D, а чисельником — визначник, утворений з визначника системи в результаті заміни стовпця з коефіцієнтів при шуканому невідомому стовпцем з вільних членів.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10\,, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2\,, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_2 + x_4 = 12\,, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 38\,. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я . Спочатку обчислимо визначник системи

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -68\,.$$

Оскільки $D \neq 0$, то за правилом Крамера система має єдиний розв'язок $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Маємо

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & 4 & 1 \\ 38 & 4 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -68\,, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 12 & 4 & 1 \\ 3 & 38 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -136\,.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 38 & 9 \end{vmatrix} = -204, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & -3 & 38 \end{vmatrix} = -272.$$

Визначники D_1, D_2, D_3, D_4 обчислюють за одним з наведених вище способів. Отже,

$$x_1 = \frac{-68}{-68} = 1, \quad x_2 = \frac{-136}{-68} = 2, \quad x_3 = \frac{-204}{-68} = 3, \quad x_4 = \frac{-272}{-68} = 4.$$

ВПРАВИ

1. Знайти число інверсій у перестановках:

а) 10, 1, 2, 8, 7, 4, 3, 6, 9, 5;

б) 8, 9, 5, 1, 10, 7, 2, 3, 6, 4;

в) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

2. Які з добутків є членами визначника відповідного порядку:

а) $a_{43}\, a_{61}\, a_{52}\, a_{13}\, a_{25}\, a_{34}$;

б) $a_{27}\, a_{63}\, a_{14}\, a_{56}\, a_{35}\, a_{41}\, a_{72}$;

в) $a_{15}\, a_{28}\, a_{75}\, a_{36}\, a_{81}\, a_{43}$;

г) $a_{n1}\, a_{(n-2)\,2} \cdots a_{1n}$;

д) $a_{12}\, a_{23} \cdots a_{k\,k+1} \cdots a_{n-1\;n}\, a_{n1}$.

Який порядок визначника і знак члена?

3. Обчислити визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & -12 \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Обчислити визначники четвертого і п'ятого порядків:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ В к а з і в к а. Застосувати спосіб розкладу визначника за елементами рядка або стовпця;

б) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ В к а з і в к а. Застосувати спосіб зведення визначника до трикутного вигляду;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Розв'язати за правилом Крамера системи лінійних рівнянь:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -9\,, \\ 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -13\,, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -5\,; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 7\,, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32\,, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 41\,; \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \alpha\,, \\ a_1 x_1 + (a_2 + b_1)\, x_2 + a_3 x_3 = \beta\,, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + (a_3 + b_2)\, x_3 = \gamma\,; \end{cases} \quad a_1 \neq 0\,,\ b_1 \neq 0\,,\ b_2 \neq 0\,;$$

$$\text{г)}\ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9\,, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18\,, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_3 = -5\,, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2\,; \end{cases}$$

$$\text{д)}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7\,, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9\,, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 5\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 7\,; \end{cases} \qquad \text{е)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9\,, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4\,, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5\,; \end{cases}$$

$$\text{є)}\ \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4 = 0\,, \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - 13 = 0\,, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 1 = 0\,, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_3 - 11 = 0\,; \end{cases} \qquad \text{ж)}\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 12\,, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 6\,, \\ 2x_1 - 3x_3 + 4x_5 = 8\,, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 11\,, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_5 = 4\,. \end{cases}$$

Розділ 2

МАТРИЦІ

§ 1. Основні поняття про матриці

! *Означення*

Матрицею порядку $m \times n$ називають прямокутну таблицю, складену з $m \cdot n$ чисел, розміщених в m рядках і n стовпцях.

Позначають матрицю так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці можна позначати двома вертикальними рисками з обох боків. Числа a_{ij}, з яких складено матрицю, називають її *елементами*. Елементи з однаковими першими індексами утворюють рядки, а з однаковими другими індексами — стовпці матриці. Якщо $m = n$, то матрицю називають ***квадратною n-го порядку***:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Множина елементів $a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}$ квадратної матриці n-го порядку утворює *головну діагональ*, а множина елементів $a_{1n}\ a_{2(n-1)}\ a_{3(n-2)}\ \ldots\ a_{n1}$ — *побічну діагональ*. Квадратну матрицю, в якої всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають *діагональною*:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, то таку матрицю називають *одиничною* і її позначають буквою E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, в якої всі елементи дорівнюють нулю, називають *нульовою* або *нуль-матрицею*:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, що складається з одного стовпця ($m \times 1$), називають *матрицею-стовпцем* або *вектором-стовпцем*; матрицю, що складається з одного рядка ($1 \times n$), називають *матрицею-рядком* або *вектором-рядком*. Елементи вектора (вектора-рядка або вектора-стовпця) називають його *координатами*. Число координат вектора називають його *виміром*.

! *Означення*

Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

одного й того самого порядку $m \times n$ називають *рівними*, якщо рівні їхні відповідні елементи, тобто $A = B$, якщо

$$a_{ij} = b_{ij} \; (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n).$$

Транспонованою щодо матриці A називають матрицю

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

утворену з матриці A заміною рядків однаковими за номером стовпцями. Матрицю A називають *симетричною*, якщо $A = A^{\mathrm{T}}$, тобто якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх i, j. Якщо $A = -A^{\mathrm{T}}$, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$, то матрицю A називають *кососиметричною*. З означення випливає, що всі елементи головної діагоналі кососиметричної матриці дорівнюють нулю. Квадратну матрицю називають *трикутною*, якщо всі її елементи a_{ij}, розміщені під головною діагоналлю ($i > j$) або над головною діагоналлю ($i < j$), дорівнюють нулю.

§ 2. Дії над матрицями

! *Означення*

Сумою (*різницею*) двох матриць

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

одного й того самого порядку $m \times n$ називають матрицю C, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів a_{ij} і b_{ij}, тобто $C = A + B$, якщо $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всіх i і j.

! *Означення*

Добутком матриці A на число α називають матрицю, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці A на число α, тобто

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операції множення матриці на число і додавання матриць підпорядковуються таким законам:

а) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативний закон додавання);

б) $A + B = B + A$ (комутативний закон);

в) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивний закон);

г) $A + 0 = A$.

Тут A, B і C матриці однакових порядків, α і β — скаляри.

Нехай задано дві матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix},$$

де число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

! *Означення*

Добутком двох матриць A і B називають третю матрицю C, елементи c_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, p$) якої дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто $C = A \cdot B$, якщо $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$ для всіх i та j.

Приклад. **Знайти добуток матриць A і B, якщо**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я . Маємо

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 18 & 14 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. ◆ *Множення матриць має дві особливості. При множенні матриць комутативний (переставний) закон може і не виконуватися, тобто $A \cdot B$ не завжди дорівнює $B \cdot A$.*

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

! *Означення*

Матриці A і B, для яких $AB = BA$, називають комутативними або переставними.

Відомо, що добуток двох чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один з множників дорівнює нулю. При множенні матриць ця вимога вже не є обов'язковою.

Наприклад, матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

не є нульовими, а добуток їх

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є нуль-матрицею.

§ 3. Ранг матриці

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній будь-які k рядків та k стовпців ($k \le \min(m, n)$). Елементи, розміщені на перетині цих k рядків і k стовпців, утворюють визначник k-го порядку, який називають *мінором* k-го порядку матриці A.

! *Означення*

Рангом матриці називають найбільший порядок мінорів даної матриці, які не дорівнюють нулю, тобто натуральне число r називають рангом матриці A, якщо серед мінорів r-го порядку цієї матриці є принаймні один відмінний від нуля, а всі мінори $(r+1)$-го порядку і вище дорівнюють нулю. Той факт, що натуральне число r є рангом матриці A, записують так: $r(A) = r$.

Якщо всі елементи матриці є нулями (нуль-матриця), то її ранг дорівнює нулю.

Якщо матриця має принаймні один відмінний від нуля елемент, то ранг цієї матриці дорівнює одиниці (за означенням всі мінори другого та вищих порядків у такій матриці дорівнюють нулю).

Приклад. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я . Розглянемо довільний мінор другого порядку цієї матриці, розміщений, наприклад, у лівому верхньому куті:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ne 0 .$$

Тепер обчислимо мінор третього порядку, що обводить мінор

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 18 \ne 0 .$$

Усі мінори четвертого порядку, що обводять мінор D_3, дорівнюють нулю:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & -6 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 , \quad D_4' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} .$$

Отже, найвищий порядок мінорів матриці A, які відмінні від нуля, дорівнює 3, тобто $r(A) = 3$.

Обчислюючи ранг матриці A, ми розглядали лише обвідні мінори четвертого порядку, а в означенні рангу матриці йшлося про всі можливі мінори того чи іншого порядку. Обмежуючись розглядом лише обвідних мінорів, ми виходили з такого твердження: якщо всі обвідні мінори k-го порядку дорівнюють нулю, то й усі можливі мінори k-го порядку також дорівнюють нулю. Тому обчислюють лише обвідні мінори, яких менше, ніж усіх можливих мінорів того самого порядку.

§ 4. Елементарні перетворення матриць

До елементарних перетворень матриць належать такі операції:

1) змінювання місць будь-яких двох рядків або стовпців;
2) множення рядка або стовпця на довільне число, відмінне від нуля;
3) додавання до будь-якого рядка або стовпця лінійної комбінації інших рядків або стовпців;
4) дописування або викреслювання рядка (чи стовпця), що повністю складається з нулів.

Дві матриці називають *еквівалентними*, якщо від однієї з них можна перейти до другої за допомогою скінченного числа елементарних перетворень.

Теорема

Еквівалентні матриці мають однакові ранги.

Доведення. Перетворення 1), 2) і 4) не змінюють рангу матриці, оскільки ці перетворення не впливають на те, чи дорівнюватиме нулю будь-який мінор цієї матриці. Покажемо, що й операція 3) не змінює рангу матриці. Ця операція полягає в тому, що коли, наприклад, до i-го рядка матриці A додають лінійну комбінацію решти рядків, то внаслідок цього дістають деяку матрицю B.

Нехай ранг матриці A дорівнює r. Усі мінори $(r + 1)$-го порядку матриці B, в яких немає i-го рядка, збігаються з відповідними мінорами матриці A і, отже, дорівнюють нулю. Розглянемо мінор $(r + 1)$-го порядку матриці B, який містить i-й рядок. Цей мінор, згідно з властивістю 7 визначників, розпадається на лінійну комбінацію мінорів $(r + 1)$-го порядку матриці A і, таким чином, також дорівнює нулю. Отже, ранг матриці B не може бути більшим від рангу матриці A. Ранг матриці B не може бути й меншим за ранг матриці A, оскільки в противному разі при зворотному переході від B до A треба буде підвищувати ранг матриці B, щоб дістати ранг матриці A. Теорему доведено.

§ 5. Обернена матриця

Розглянемо квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

! *Означення*

Матрицею, оберненою до даної квадратної матриці A, називають матрицю A^{-1}, яка задовольняє співвідношення $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, де E — одинична матриця.

Постає запитання: чи для кожної квадратної матриці A існує обернена матриця A^{-1}?

Визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають визначником квадратної матриці A; його позначають D_A, або $|A|$, або $\det \|A\|$.

! *Означення*

Квадратну матрицю A називають *неособливою* або *невиродженою*, якщо визначник цієї матриці D_A не дорівнює нулю. Якщо $D_A = 0$, то матрицю A називають *особливою* або *виродженою*.

Теорема

Для того щоб квадратна матриця A мала обернену матрицю A^{-1}, необхідно й достатньо, щоб матриця A була неособливою.

Доведення. *Необхідність.* Нехай матриця A має обернену матрицю A^{-1}. Покажемо, що $D_A \neq 0$. Згідно з означенням, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Нехай $AA^{-1} = E$. Відомо, що визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць. Отже, $D(AA^{-1}) = D_A D_{A^{-1}} = D_E = 1$ $(D_E = 1)$. Із співвідношення $D_A D_{A^{-1}} = 1$ випливає, що $D_A \neq 0$. З останньої рівності видно, зокрема, що $D_{A^{-1}} = \frac{1}{D_A}$, тобто визначник оберненої матриці дорівнює одиниці, поділеній на визначник прямої матриці.

Достатність. Нехай $D_A \neq 0$. Покажемо, що матриця A має обернену A^{-1}.

Розглянемо матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

складену з алгебраїчних доповнень елементів матриці A, причому алгебраїчні доповнення елементів рядків записані в стовпці і навпаки. Матрицю $\tilde{A}$ називають *приєднаною до матриці A*.

Нехай тепер $B = \frac{1}{D_A}\tilde{A}$. Покажемо, що матриця B і є оберненою до матриці A. Для цього перевіримо виконання співвідношення $AB = BA = E$.

Розглянемо добуток

$$AB = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}{D_A} & \dfrac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n}}{D_A} & \ldots & \dfrac{a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \ldots + a_{1n}A_{nn}}{D_A} \\ \dfrac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \ldots + a_{2n}A_{1n}}{D_A} & \dfrac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n}}{D_A} & \ldots & \dfrac{a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \ldots + a_{2n}A_{nn}}{D_A} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \ldots + a_{nn}A_{1n}}{D_A} & \dfrac{a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \ldots + a_{nn}A_{2n}}{D_A} & \ldots & \dfrac{a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn}}{D_A} \end{pmatrix}.$$

Тут чисельники елементів, що розміщені на головній діагоналі, дорівнюють визначнику D_A як суми добутків елементів рядків цього визначника на відповідні алгебраїчні доповнення (див. властивість 4, теорему 1). Чисельники всіх інших елементів дорівнюють нулю як суми добутків елементів рядків визначника D_A на алгебраїчні доповнення елементів інших рядків (див. властивість 4, теорему 2).

Таким чином,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно можна довести, що матриця B задовольняє співвідношення $BA = E$, тобто матриця B є оберненою матрицею A^{-1} для матриці A. Теорему доведено.

Нехай задано квадратну матрицю A. Щоб знайти обернену до неї матрицю A^{-1}, виконують такі дії.

1. Обчислюють визначник D_A матриці A. Якщо $D_A = 0$, то матриця A є особливою (виродженою) і оберненої матриці немає. Якщо $D_A \neq 0$, то матриця A — неособлива і обернена матриця A^{-1} існує.

2. Будують приєднану матрицю $\tilde{A}$, замінивши елементи рядків матриці A алгебраїчними доповненнями елементів відповідних стовпців:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Обчисливши добуток приєднаної матриці $\tilde{A}$ на $\dfrac{1}{D_A}$, дістають обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{D_A}\tilde{A} = \frac{1}{D_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад Знайти обернену матрицю A^{-1} для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я . Обчислимо визначник D_A матриці A :

$$D_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 .$$

Матриця А неособлива, оскільки $D_A \neq 0$. Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} &A_{11} = -3, \quad &A_{21} = -6, \quad &A_{31} = -6; \\ &A_{12} = -6, \quad &A_{22} = -3, \quad &A_{32} = 6; \\ &A_{13} = -6, \quad &A_{23} = 6, \quad &A_{33} = -3. \end{aligned}$$

Отже,

$$A^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Наведемо деякі властивості оберненої матриці.

- **Властивість 1**

Визначник оберненої матриці дорівнює оберненій величині визначника даної матриці $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

- **Властивість 2**

Обернена матриця добутку квадратних матриць дорівнює добутку обернених матриць-множників, узятих у зворотному порядку.

Справді, $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$ і $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$.

Таким чином, $B^{-1}A^{-1}$ є оберненою матрицею для AB.

- **Властивість 3**

Транспонована обернена матриця дорівнює оберненій до транспонованої даної матриці:

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}.$$

§ 6. Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Нехай задано систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Позначимо через A матрицю з коефіцієнтів при невідомих, через X — матрицю-стовпець з невідомих (вектор) і через B — матрицю-стовпець з вільних членів (вектор):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Урахувавши правило множення матриць і умову рівності матриць, систему (2.1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

або

$$AX = B. \tag{2.2}$$

Припустимо, що матриця A — неособлива ($D_A \neq 0$), тоді існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності (2.2) на A^{-1}:

$$A^{-1} AX = A^{-1} B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, то остаточно дістанемо

$$X = A^{-1}B. \tag{2.3}$$

Таким чином, матриця-стовпець з невідомих дорівнює добутку оберненої матриці A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів.

Приклад. Розв'язати за допомогою оберненої матриці систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (2.3), дістаємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Виконавши множення матриць у правій частині, знайдемо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

тобто $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці дуже ефективне тоді, коли ліва частина залишається незмінною, а стовпець з вільних членів змінюється. Справді, замість того, щоб знову розв'язувати кожну систему, можна, користуючись методом оберненої матриці, тільки раз обчислити A^{-1}, а потім за формулою (2.3) знаходити нові значення невідомих при кожному зміненому стовпці з вільних членів, помноживши матрицю A^{-1} на вектор-стовпець B.

Задачі, аналогічні описаним вище, часто трапляються в економічних дослідженнях, зокрема при вивченні так званих балансових розрахунків.

§ 7. Метод Гаусса

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера та за допомогою оберненої матриці пов'язані з великою кількістю обчислень. Значно швидше можна розв'язувати системи лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих, який називають ще методом Гаусса.

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Метод послідовного виключення невідомих полягає в тому, що систему рівнянь (2.1) зводять до еквівалентної їй трикутної системи (прямий хід виключень), а з утвореної трикутної системи невідомі знаходять послідовними підстановками (обернений хід).

Прямий хід виключень здійснюють так:

Перший крок. Припустимо, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Ця вимога не порушує загальності, оскільки в противному разі досить змінити нумерацію рівнянь. Рівняння системи записують так, щоб по головній діагоналі (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) містилися якомога більші за абсолютною величиною коефіцієнти, причому a_{11} був би найбільшим. Поділимо коефіцієнти першого рівняння системи (2.1), включаючи й вільний член, на коефіцієнт a_{11}. Назвемо цей коефіцієнт ведучим елементом першого кроку. Введемо позначення

$$l_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \; (j = 2, 3, \ldots, n), \; c_1 = \frac{b_1}{a_{11}} .$$

Тоді матимемо рівняння

$$x_1 + l_{12}\, x_2 + l_{13}\, x_3 + \ldots + l_{1n}\, x_n = c_1 . \tag{2. 4}$$

Тепер виключимо невідоме x_1 з усіх рівнянь системи (2.4), починаючи з другого. Для цього помножимо послідовно рівняння (2.4) на a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1} і віднімемо відповідно від другого, третього, і так далі, n-го рівнянь. В результаті дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}\, x_2 + a_{23}^{(1)}\, x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}\, x_n = b_2^{(1)} , \\ a_{32}^{(1)}\, x_2 + a_{33}^{(1)}\, x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}\, x_n = b_3^{(1)} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}\, x_2 + a_{n3}^{(1)}\, x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}\, x_n = b_n^{(1)} , \end{cases} \tag{2.5}$$

де $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\, l_{1j}$, $b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}\, c_1$ $(i, j \geq 2)$.

Другий крок. Поділимо коефіцієнти першого з перетворених рівнянь системи (2.5) на ведучий елемент другого кроку $a_{22}^{(1)}$, який вважатимемо відмінним від нуля. Дістанемо рівняння

$$x_2 + l_{23}\, x_3 + l_{24}\, x_4 + \ldots + l_{2n}\, x_n = c_2 , \tag{2.6}$$

де

$$l_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \ldots, n), \quad c_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Виключивши невідоме x_2 з рівнянь системи (2.5), починаючи з другого, матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 + \ldots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n3}^{(2)} x_3 + a_{n4}^{(2)} x_4 + \ldots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)}, \end{cases} \tag{2.7}$$

де $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} l_{2j}$, $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i2} c_2$ $(i, j \geq 3)$.

Продовживши цей процес далі, на n-му кроці дістанемо рівняння

$$x_n = c_n. \tag{2.8}$$

Об'єднавши рівняння (2.4), (2.6)—(2.8), знайдемо шукану трикутну систему:

$$\begin{cases} x_1 + l_{12} x_2 + \ldots + \qquad l_{1n} x_n = c_1, \\ \qquad x_2 + l_{23} x_3 + \ldots + l_{2n} x_n = c_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = c_n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ця система еквівалентна системі (2.1), оскільки вона утворена за допомогою операцій ділення всіх коефіцієнтів того чи іншого рівняння системи (2.1) на одне й те саме число, відмінне від нуля, множенням рівнянь на одне й те саме число та відніманням їх.

Зворотний хід полягає в тому, що із системи (2.9) знаходять значення невідомих за допомогою послідовного переходу від останнього рівняння до передостаннього, і так далі.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я . Помножимо перше рівняння послідовно на 3, 5, 7 і віднімемо відповідно від другого, третього та четвертого рівнянь. В результаті дістанемо систему

$$\begin{cases} -4x_2+22x_3-20x_4=-36\,, \\ -8x_2+26x_3-32x_4=-56\,, \\ -20x_2+38x_3-44x_4=-68\,. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на -4, матимемо

$$x_2-\frac{11}{2}x_3+5x_4=9\,. \tag{2.10}$$

Проте для виключення невідомого x_2 в другому і третьому рівняннях останньої системи зручніше скористатися неперетвореним першим рівнянням. Помноживши це рівняння на -2 і на -5 та додавши його до другого й третього рівнянь, дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} -18x_3+8x_4=16\,, \\ -72x_3+56x_4=112\,. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на -4 і додавши його до другого рівняння, матимемо $24x_4=48$, звідки $x_4=2$.

Об'єднавши перше рівняння заданої системи з рівнянням (2.10) і продовживши послідовно цей процес щодо решти рівнянь, дістанемо трикутну систему

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+7x_4=12\,, \\ \qquad x_2-\frac{11}{2}x_3+5x_4=9\,, \\ \qquad\quad -18x_3+8x_4=16\,, \\ \qquad\qquad\qquad x_4=2\,. \end{cases}$$

Виконавши зворотний хід, знайдемо невідомі:

$$x_4=2,\ x_3=0,\ x_2=-1,\ x_1=1$$

Часто в методі Гаусса замість того, щоб виконувати елементарні перетворення над рівняннями системи, виконують ці перетворення з рядками так званої розширеної матриці, яка складається з коефіцієнтів і вільних членів системи.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=8\,, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=6\,, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=7\,, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=4\,. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я . Складемо розширену матрицю

$$M=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(вертикальною рискою відокремлено стовпець з вільних членів). Зведемо матрицю M до трикутного вигляду, тобто до того самого вигляду, що й трикутна система. Перший крок розв'язання системи полягає в тому, що невідоме x_1 треба виключити з усіх рівнянь, починаючи з другого. У матричній формі цей крок зводиться до таких перетворень, коли всі елементи першого стовпця (крім того, що міститься в першому рядку) перетворюються в нулі. Помножимо послідовно перший рядок на 2, 1, 1 і віднімемо відповідно від другого, третього та четвертого рядків. У результаті дістанемо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Для зручності виконання наступних дій поміняємо місцями другий і третій рядки, помноживши останній на –1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Другий крок полягає в тому, що невідоме x_2 треба виключити з усіх рівнянь, починаючи з третього. В матричній формі цей крок зводиться до того, що всі елементи другого стовпця (крім тих, що містяться в першому та другому рядках) перетворюються в нулі. Помножимо другий рядок на 3 та 1 і додамо відповідно до третього і четвертого рядків. У результаті дістанемо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Поміняємо місцями третій і четвертий рядки, помноживши останній на –1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right).$$

Помножимо третій рядок на 4 і додамо до четвертого. Матимемо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Цій матриці відповідає трикутна система лінійних рівнянь, еквівалентна заданій системі:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8\,, \\ \qquad x_2 - x_3 \qquad = 1\,, \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 3\,, \\ \qquad\qquad\quad -5x_4 = 5\,. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему за допомогою зворотного ходу, дістанемо: $x_4=-1$, $x_3=4$, $x_2=5$, $x_1=-2$.

Метод Гаусса застосовують і для обчислення оберненої матриці. Для цього за заданою квадратною матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

записують лінійне перетворення

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n). \quad (S)$$

Застосувавши метод Гаусса, виразимо змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Матриця коефіцієнтів перетворення (S^{-1}), що при цьому утвориться, і є оберненою до заданої матриці A.

Приклад. Обчислити обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Розв'язання. Запишемо лінійне перетворення (S) щодо матриці (2.11). Матимемо

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+\ x_3&=y_1, \\ 4x_1+3x_2-2x_3&=y_2, \\ -5x_1-4x_2-\ x_3&=y_3. \end{aligned}$$

Йому відповідає розширена матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & y_1 \\ 4 & 3 & -2 & y_2 \\ -5 & -4 & -1 & y_3 \end{array}\right).$$

Тут y_1, y_2, y_3 відіграють роль вільних членів. Отже, щоб дістати останню матрицю, досить до заданої матриці дописати стовпець з y_j. Помноживши перший рядок на –4 та 5 і додавши послідовно до другого та третього рядків, дістанемо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & y_1 \\ 0 & -5 & -6 & -4y_1+y_2 \\ 0 & 6 & 4 & 5y_1+y_3 \end{array}\right).$$

Помножимо елементи другого рядка на $-\frac{1}{5}$:

$$
\left(\begin{array}{ccc|l}
1 & 2 & 1 & y_1 \\
0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} y_1 - \frac{1}{5} y_2 \\
0 & 6 & 4 & 5y_1 \qquad + y_3
\end{array}\right).
$$

Помножимо другий рядок на –6 і додамо до останнього:

$$
\left(\begin{array}{ccc|l}
1 & 2 & 1 & y_1 \\
0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} y_1 - \frac{1}{5} y_2 \\
0 & 0 & -\frac{16}{5} & \frac{1}{5} y_1 + \frac{6}{5} y_2 + y_3
\end{array}\right).
$$

Дістанемо трикутну систему

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= y_1 , \\
x_2 + \frac{6}{5} x_3 &= \frac{4}{5} y_1 - \frac{1}{2} y_2 , \\
-\frac{16}{5} x_3 &= \frac{1}{5} y_1 + \frac{6}{5} y_2 + y_3 .
\end{aligned}
$$

Звідси

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{11}{16} y_1 - \frac{2}{16} y_2 - \frac{7}{16} y_3 , \\
x_2 &= \frac{7}{8} y_1 + \frac{1}{4} y_2 + \frac{6}{16} y_3 , \\
x_3 &= -\frac{1}{16} y_1 - \frac{6}{16} y_2 - \frac{5}{16} y_3 .
\end{aligned}
$$

Коефіцієнти при y_1, y_2, y_3 утворюють обернену матрицю A^{-1}:

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix}
-\frac{11}{16} & -\frac{2}{16} & -\frac{7}{16} \\
\frac{7}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\
-\frac{1}{16} & -\frac{6}{16} & -\frac{5}{16}
\end{pmatrix}.
$$

§ 8. Метод Гаусса—Жордана

Нехай задано систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$
\begin{cases}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 , \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m .
\end{cases}
\qquad (2.12)
$$

Число рівнянь m і число n невідомих x_j можуть бути довільними. Метод послідовного виключення невідомих з усіх рівнянь системи, крім одного, називають методом Гаусса—Жордана. Цей метод є деякою модифікацією розглянутого методу Гаусса.

Нехай у системі (2.12) $a_{ij} \neq 0$. Називатимемо його далі розв'язувальним елементом. Виключимо з усіх рівнянь системи, крім i-го, невідоме x_j. Для цього виконаємо такі операції:

1) поділимо i-те рівняння на a_{ij}:

$$\frac{a_{i1}}{a_{ij}} x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ij}} x_2 + \ldots + 1 \cdot x_j + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ij}} x_n = \frac{b_i}{a_{ij}}; \qquad (2.13)$$

2) рівняння (2.13) помножимо на коефіцієнт a_{kj} ($k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$):

$$\frac{a_{ij} a_{i1}}{a_{ij}} x_1 + \frac{a_{ij} a_{i2}}{a_{ij}} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + \frac{a_{ij} a_{in}}{a_{ij}} x_n = \frac{a_{ij} b_i}{a_{ij}}; \quad (2.14)$$

3) рівняння (2.14) віднімемо від k-го рівняння системи (2.12):

$$\left(a_{k1} - \frac{a_{kj} a_{i1}}{a_{ij}}\right) x_1 + \left(a_{k2} - \frac{a_{kj} a_{i2}}{a_{ij}}\right) x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots +$$
$$+ \left(a_{kn} - \frac{a_{kj} a_{in}}{a_{ij}}\right) x_n = b_k - \frac{a_{kj} b_i}{a_{ij}}.$$

Введемо позначення:

$$a_{kl}' = a_{kl} - \frac{a_{kj} a_{il}}{a_{ij}} = \frac{a_{ij} a_{kl} - a_{kj} a_{il}}{a_{ij}}, \quad l = 1, 2, \ldots, n;$$

$$b_k' = b_k - \frac{a_{kj} b_i}{a_{ij}} = \frac{b_k a_{ij} - a_{kj} b_i}{a_{ij}}.$$

Тоді

$$a_{k1}' x_1 + a_{k2}' x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a_{kn}' x_n = b_k'$$
$$(k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m). \qquad (2.15)$$

Отже, в результаті перетворень 1) — 3) систему (2.12) зведено до еквівалентної їй системи

$$a_{k1}' x_1 + a_{k2}' x_2 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a_{kn}' x_n = b_k',$$

$$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1+\frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2+\ldots+1\cdot x_j+\ldots+\frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n=\frac{b_i}{a_{ij}}. \qquad (2.16)$$

Зведення системи (2.12) до системи (2.16) називають *кроком послідовних виключень* Гаусса—Жордана. Усі обчислення зручніше виконувати тоді, коли задану та всі наступні системи записувати у вигляді таблиць.

Запишемо таблиці, що відповідають системам (2.12) і (2.16) (відповідно табл. 2.1 і 2.2)

Таблиця 2.1

x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	b_i
a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...
a_{i1}	a_{i2}	...	$\boxed{a_{ij}}$	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m

Таблиця 2.2

x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	b_i'
a_{11}'	a_{12}'	...	0	...	a_{1n}'	b_1'
a_{21}'	a_{22}'	...	0	...	a_{2n}'	b_2'
...	...	...	...	...	...	...
$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}$	$\frac{a_{i2}}{a_{ij}}$	...	1	...	$\frac{a_{in}}{a_{ij}}$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
...	...	...	...	...	...	...
a_{m1}'	a_{m2}'	...	0	...	a_{mn}'	b_m'

У табл. 2.1 розв'язувальний елемент a_{ij} візьмемо в рамку; i-й рядок і j-й стовпець називатимемо відповідно *розв'язувальним рядком* та *розв'язувальним стовпцем*.

Алгоритм кроку перетворень Гаусса—Жордана, тобто перехід від табл. 2.1 до табл. 2.2, такий:

1) усі елементи розв'язувального рядка табл. 2.1 ділимо на розв'язувальний елемент $a_{ij} \neq 0$ і результат записуємо в i-й рядок табл. 2.2;

2) усі елементи розв'язувального стовпця, крім a_{ij}, замінюємо нулями;

3) решту елементів табл. 2. 2 обчислюємо за формулами:

$$a_{kl}'=\frac{a_{ij}a_{kl}-a_{kj}a_{il}}{a_{ij}}, \quad b_k'=\frac{b_k a_{ij}-a_{kj}b_i}{a_{ij}}$$

$$(k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m;\ l=1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n).$$

Елементи a_{kl}' і b_k' зручно обчислювати за правилом прямокутника. Розглянемо прямокутник, одна з вершин якого лежить в елементі, на місце якого обчислюється новий, а протилежна — в розв'язувальному елементі; дві інші вершини лежать відповідно: одна в розв'язувальному рядку, а друга — в розв'язувальному стовпці (рис. 2.1).

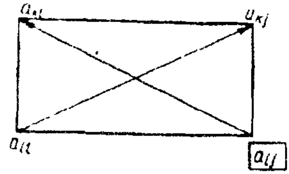

Рис. 2.1

Елемент a_{kl}' (або b_k') дорівнює добутку розв'язувального елемента на протилежний йому мінус добуток двох інших елементів і весь цей вираз ділиться на розв'язувальний елемент a_{ij}.

Зауваження. ◆ *1. Як розв'язувальний елемент зручно брати елемент, що дорівнює 1.*

2. Якщо $a_{il} = 0$, то $a_{kl}' = a_{kl} - \frac{a_{kj}\cdot 0}{a_{ij}} = a_{kl}$, тобто l-й стовпець табл. 2.1 записують без будь-яких змін у l-й стовпець табл. 2.2.

3. Якщо $a_{kj} = 0$, то $a_{kl}' = a_{kl} - \frac{0\cdot a_{il}}{a_{ij}}$, $b_k' = b_k - \frac{0\cdot b_i}{a_{ij}} = b_k$, тобто k-й рядок табл. 2.1 без змін записують в k-й рядок табл. 2.2.

Правильність обчислень можна проконтролювати в такий спосіб. Нехай a_{ij} — розв'язувальний елемент, а α_i — сума всіх елементів i-го рядка в табл. 2.1:

$$\alpha_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Покажемо, що в табл. 2.2

$$\beta_k = a_{k1}' + a_{k2}' + \ldots + a_{kn}' + b_k' \quad (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m)$$

обчислюється за формулою

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{a_{kj}\alpha_i}{a_{ij}},$$

тобто за тією самою формулою, за якою обчислюються всі елементи табл. 2.2. Справді, оскільки в табл. 2.2

$$a_{kl}' = a_{kl} - \frac{a_{kj}a_{il}}{a_{ij}} \quad (l = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n);$$

$$b_k' = b_k - \frac{a_{kj}b_i}{a_{ij}},$$

то

$$\beta_k = a_{k1}' + a_{k2}' + \ldots + a_{kn}' + b_k' = a_{k1} - \frac{a_{kj}a_{i1}}{a_{ij}} + a_{k2} - \frac{a_{kj}a_{i2}}{a_{ij}} + \ldots +$$

$$+ a_{kn} - \frac{a_{kj}a_{in}}{a_{ij}} + b_k - \frac{a_{kj}b_i}{a_{ij}} = a_{k1} + a_{k2} + \ldots +$$

$$+ a_{kn} + b_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + b_i) = \alpha_k - \frac{a_{kj}\alpha_i}{a_{ij}}.$$

Отже, щоб проконтролювати правильність кроку перетворень Гаусса—Жордана, в табл. 2.1 і 2.2 записують контрольний стовпець K. У табл. 2.2 елементи контрольного стовпця обчислюють як суму

$$\beta_k = a_{k1}' + a_{k2} + \ldots + a_{kn}' + b_k',$$

а також за формулою

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{a_{kj}\alpha_i}{a_{ij}}.$$

Якщо при цьому значення β_k збігаються, то елементи k-го рядка обчислено правильно. Табл. 2.2 доцільно заповнювати по рядках і відразу контролювати правильність обчислень.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса—Жордана

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я . Результати обчислення подано в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

x_1	x_2	x_3	b_i	K
2	–4	3	1	2
$\boxed{1}$	–2	4	3	6
3	–1	5	2	9
0	0	$\boxed{-5}$	–5	–10
1	–2	4	3	6
0	5	–7	–7	–9
0	0	1	1	2
1	–2	0	–1	–2
0	$\boxed{5}$	0	0	5
0	0	1	1	2
1	0	0	–1	0
0	1	0	0	1

Отже, система сумісна і має розв'язок $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

§ 9. Обчислення оберненої матриці методом Гаусса—Жордана

Нехай задано неособливу квадратну матрицю n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими, записану у векторно-матричній формі

$$AX = B,$$

де X — вектор-стовпець невідомих; B — вектор-стовпець вільних членів. За допомогою цієї системи знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покладемо послідовно

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, то

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}.$$

Якщо $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, то

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} \text{ і т. д.}$$

Якщо $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язки n систем $AX = B$ при

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

визначають відповідно 1-й, 2-й, ..., n-й стовпці оберненої матриці A^{-1}.

Ці n систем, що відрізняються тільки вільними членами, можна розв'язувати одночасно й методом Гаусса—Жордана, записавши їх в одній таблиці. Стовпці вільних членів утворюють одиничну матрицю E. Якщо розв'язувальні елементи вибирати по головній діагоналі, то після n кроків перетворень Гаусса—Жордана в таблиці на місці матриці A дістанемо одиничну матрицю E, а на місці одиничної матриці — обернену матрицю A^{-1}. Якщо розв'язувальні елементи вибирати довільно, то в останній таблиці треба рядки переставити так, щоб матриця стала одиничною.

Якщо обернену матрицю знаходять за методом Гаусса—Жордана, то не треба досліджувати задану матрицю на особливість чи неособливість, обчислюючи її визначник. Якщо можливе число кроків перетворень r менше від порядку матриці n ($r < n$), то матриця особлива і оберненої немає.

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю A, а справа поряд з нею — одиничну матрицю E третього порядку і контрольний стовпець K. Виконаємо максимально можливе число кроків перетворень Гаусса—Жордана. Обчислення подано в табл. 2.4 і 2.5.

Таблиця 2.4

A	E	K
3 −1 0	1 0 0	3
−2 $\boxed{1}$ 1	0 1 0	1
2 −1 4	0 0 1	6
$\boxed{1}$ 0 1	1 1 0	4
−2 1 1	0 1 0	1
0 0 5	0 1 1	7

Таблиця 2.5

A	E	K
1 0 1	1 1 0	4
0 1 3	2 3 0	9
0 0 $\boxed{5}$	0 1 1	7
1 0 0	1 $\frac{4}{5}$ $-\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$
0 1 0	2 $\frac{12}{5}$ $-\frac{3}{5}$	$\frac{24}{5}$
0 0 1	0 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, всі обчислення виконаємо з елементами табл. 2.6.

Таблиця 2.6

A				E				K
$\boxed{1}$	2	3	4	1	0	0	0	11
2	3	1	2	0	1	0	0	9
1	1	1	−1	0	0	1	0	3
1	0	−2	−6	0	0	0	1	−6

Закінчення табл. 2.6

A	*E*	*K*
1 2 3 4	1 0 0 0	11
0 $\boxed{-1}$ −5 −6	−2 1 0 0	−13
0 −1 −2 −5	−1 0 1 0	−8
0 −2 −5 −10	−1 0 0 1	−17
1 0 −7 −8	−3 2 0 0	−15
0 1 5 6	2 −1 0 0	13
0 0 3 $\boxed{1}$	1 −1 1 0	5
0 0 5 2	3 −2 0 1	9
1 0 17 0	5 −6 8 0	25
0 1 −13 0	−4 5 −6 0	−17
0 0 3 1	1 −1 1 0	5
0 0 $\boxed{-1}$ 0	1 0 −2 1	−1
1 0 0 0	22 −6 −26 17	8
0 1 0 0	−17 5 20 −13	−4
0 0 0 1	4 −1 −5 3	2
0 0 1 0	−1 0 2 −1	

Переставивши в заключній частині таблиці 2.6 третій і четвертий рядки, дістанемо (табл. 2.7):

Таблиця 2.7

E	A^{-1}
1 0 0 0	22 −6 −26 17
0 1 0 0	−17 5 20 −13
0 0 1 0	−1 0 2 −1
0 0 0 1	4 −1 −5 3

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 18 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Складемо табл. 2.8 і виконаємо над її елементами максимально можливе число кроків перетворень Гаусса—Жордана.

Таблиця 2.8

A	E	K
$\begin{matrix} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 18 & 2 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 23 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & \boxed{-1} \\ 0 & -4 & -10 & 5 \\ 0 & 20 & 5 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -9 \\ 15 \\ -11 \\ 29 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 1 \\ 0 & 36 & \boxed{15} & 0 \\ 0 & 36 & 15 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -9 \\ -15 \\ 64 \\ 59 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{36}{15} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{1}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{15} & \frac{5}{15} & \frac{1}{15} & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{7}{15} \\ \frac{19}{3} \\ \frac{64}{15} \\ -5 \end{matrix}$

У таблиці виконано $r = 3$ кроків виключень Гаусса—Жордана, а $n = 4 (r < n)$, тому матриця A є особливою і оберненої матриці A^{-1} немає.

Зазначимо, що за допомогою виключень методу Гаусса—Жордана можна також обчислити визначники n-го порядку.

Згідно з властивістю 6 визначників кожний крок перетворень Гаусса—Жордана не змінює величини визначника, якщо множити його на розв'язувальний елемент. Виконуючи над елементами визначника n кроків перетворень Гаусса—Жордана, зводимо його до вигляду, коли всі елементи кожного рядка і стовпця, крім одного, що дорівнює одиниці, дорівнюють нулю. Переставивши в такому визначнику рядки або стовпці між собою, зведемо його до діагонального вигляду. Якщо при перетвореннях визначника дістаємо рядок або стовпець, складений з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Приклад. Обчислити визначник за допомогою перетворень Гаусса—Жордана.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 14 & -4 & -11 \\ 0 & 9 & -6 & -4 \\ 0 & 17 & -7 & -22 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{23}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{11}{14} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{24}{7}} & -\frac{43}{14} \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{121}{14} \end{vmatrix} =$$

$$= 14\cdot\left(-\frac{24}{7}\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{43}{48} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{507}{48}} \end{vmatrix} = 14\cdot\left(-\frac{24}{7}\right)\cdot\left(-\frac{507}{48}\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 507\,;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{1} & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 9 & 4 \\ -1 & 0 & 7 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Зауваження. ◆ *При обчисленні визначників методом виключень Гаусса—Жордана, як і в усіх інших його застосуваннях, справа дописується контрольний стовпець K і контроль виконується на кожному кроці обчислень.*

ВПРАВИ

1. Обчислити добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 7 & -8 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}(7\ 5\ 4\ 2\ 1)$; з) $(4\ 5\ 1\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

і) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

ї) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \\ 4 & -7 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити степені матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^4$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^3$.

3. Обчислити значення многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити значення многочлена $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти всі матриці, комутативні (переставні) з матрицею:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Довести, що матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння

$$x^2 - (a + d)\,x - ad - bc = 0\,.$$

7. Знайти ранг матриці методом обведення:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

8. Знайти ранг матриці методом виключень Гаусса—Жордана:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -6 & 10 & 11 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 10 & 5 & 10 & -6 & 17 \end{pmatrix}$.

9. Знайти обернені матриці для таких матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Знайти обернені матриці методом Гаусса:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\1&0&4\end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix};\ \text{в)}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&1\\4&1&-5\end{pmatrix}.$$

11. Знайти обернені матриці методом перетворень Гаусса—Жордана:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&0&1&1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix}2&-1&3&2\\3&3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{pmatrix};\ \text{в)}\begin{pmatrix}1&1&3&2\\2&2&1&2\\1&2&3&4\\1&1&2&3\end{pmatrix}.$$

12. Обчислити методом перетворень Гаусса—Жордана визначники:

$$\text{а)}\begin{vmatrix}2&3&11&5\\1&1&5&2\\-3&1&3&2\\-3&1&3&4\end{vmatrix};\ \text{б)}\begin{vmatrix}2&2&11&5\\2&1&5&2\\2&-3&3&2\\1&-3&3&4\end{vmatrix}.$$

13. Розв'язати за допомогою оберненої матриці такі системи лінійних рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases}3x_1-x_2=5,\\-2x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-x_2+4x_3=15;\end{cases}\quad \text{б)}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\2x_1-x_2+x_3=2,\\x_1-x_2+2x_3=5;\end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4,\\4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6,\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12,\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6.\end{cases}$$

14. Розв'язати матричні рівняння:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix};\ \text{б)}\ X\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-5&6\end{pmatrix};$$

$$\text{в)}\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}.$$

15. Розв'язати методом Гаусса такі системи лінійних рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1,\\x_1+4x_2+9x_3+16x_4=1,\\x_1+8x_2+27x_3+64x_4=1,\\x_1+16x_2+81x_3+256x_4=0;\end{cases}$$

$$
\text{б)}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4-x_5=2, \\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4-x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5=-8; \end{cases} \quad \text{в)}\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3-4x_4=8, \\ 3x_1-4x_2+5x_3+x_4=0, \\ 5x_1-9x_2+4x_3-x_4=0, \\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4=1\,. \end{cases}
$$

Розділ 3

ЛІНІЙНІ (ВЕКТОРНІ) ПРОСТОРИ

§ 1. Означення n-вимірного вектора. Дії над векторами

У багатьох питаннях алгебри, лінійного програмування та інших розділів математики часто можна знайти прямий геометричний зміст у різних факторах, а також передбачити шукані результати, використовуючи поняття n-вимірних векторів. n-вимірні вектори є безпосереднім узагальненням двовимірних і тривимірних векторів.

! ***Означення***

Систему n чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, взятих у певному порядку, називають n-вимірним вектором або вектором, або точкою n-вимірного простору.

n-Вимірні вектори можна записувати не тільки у вигляді рядка, а й у вигляді стовпця

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.
$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називають *складовими* або *координатами* вектора, а число n — *вимірністю* вектора. Позначають вектори, як правило, жирним шрифтом або великими буквами латинського алфавіту з рискою або стрілкою зверху. Скаляри (числа) позначають буквами грецького алфавіту α, β, γ, ..., λ.

3 1-92

$$
\text{б)}\ \begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5=10,\\ x_1+2x_2+3x_3-\ x_4-\ x_5=2,\\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4-\ x_5=1,\\ x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4\ \ \ \ \ \ \ \ =0,\\ x_1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5=-8; \end{cases}
\qquad
\text{в)}\ \begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3-4x_4=8,\\ 3x_1-4x_2+5x_3+\ x_4=0,\\ 5x_1-9x_2+4x_3-\ x_4=0,\\ 4x_1-6x_2+3x_3+\ x_4=1. \end{cases}
$$

Розділ 3

ЛІНІЙНІ (ВЕКТОРНІ) ПРОСТОРИ

§ 1. Означення n-вимірного вектора. Дії над векторами

У багатьох питаннях алгебри, лінійного програмування та інших розділів математики часто можна знайти прямий геометричний зміст у різних факторах, а також передбачити шукані результати, використовуючи поняття n-вимірних векторів. n-вимірні вектори є безпосереднім узагальненням двовимірних і тривимірних векторів.

! *Означення*

Систему n чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, взятих у певному порядку, називають n-вимірним вектором або вектором, або точкою n-вимірного простору.

n-Вимірні вектори можна записувати не тільки у вигляді рядка, а й у вигляді стовпця

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.
$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називають *складовими* або *координатами* вектора, а число n — *вимірністю* вектора. Позначають вектори, як правило, жирним шрифтом або великими буквами латинського алфавіту з рискою або стрілкою зверху. Скаляри (числа) позначають буквами грецького алфавіту α, β, γ, ..., λ.

Приклади векторів

1. Рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

можна розглядати як n-вимірні та m-вимірні вектори, а матрицю A при цьому можна розглядати як набір m n-вимірних векторів-рядків або n m-вимірних векторів-стовпців.

2. Коефіцієнти при будь-якому невідомому в системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

утворюють m-вимірний вектор $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

3. Розв'язок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системи лінійних рівнянь можна розглядати як n-вимірний вектор.

! *Означення*

Два вектори $\vec{X} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{Y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називаються *рівними*, якщо рівні їхні відповідні координати, тобто $\vec{X} = \vec{Y}$, якщо

$$a_i = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Нульовим вектором називається вектор $\vec{0}(0, 0, \ldots, 0)$, всі координати якого дорівнюють нулю.

1. *Додавання векторів*

! *Означення*

Сумою векторів $\vec{X} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{Y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називається вектор $\vec{Z} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$, тобто для того щоб додати два вектори, треба додати їхні відповідні координати.

При цьому виконуються такі закони:

1) $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$ (переставний або комутативний закон);
2) $\vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z} = \vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z})$ (сполучний або асоціативний закон);
3) $\vec{X} + \vec{0} = \vec{X}$;
4) для кожного вектора $\vec{X}$ існує вектор $\vec{Y}$, такий, що $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{0}$ (існування протилежного вектора).

2. *Множення вектора на число*

! *Означення*

Добутком вектора $\vec{X} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число (скаляр) λ називається вектор $\lambda \vec{X} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$, тобто для того щоб помножити вектор на число, треба помножити всі координати вектора на це число.

При цьому виконуються закони:

1) $\lambda (\vec{X} + \vec{Y}) = \lambda \vec{X} + \lambda \vec{Y}$, $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{X} = \lambda_1 \vec{X} + \lambda_2 \vec{X}$ для будь-яких чисел λ, λ_1, λ_2 та будь-яких векторів $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ (розподільний або дистрибутивний закон);
2) $\lambda \vec{X} = \vec{X} \lambda$ (переставний або комутативний закон);
3) $\lambda_1 (\lambda_2 \vec{X}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{X}$ (сполучний або асоціативний закон);
4) $1 \cdot \vec{X} = \vec{X}$;
5) $0 \cdot \vec{X} = \vec{0}(0, 0, \ldots, 0)$.

! *Означення*

Скалярним добутком двох векторів $\vec{X} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{Y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називається число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів; його позначають $(\vec{X}\ \vec{Y})$.

Таким чином,

$$(\vec{X}\ \vec{Y}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n .$$

При цьому виконуються такі закони:

1) $(\vec{X}\ \vec{Y}) = (\vec{Y}\ \vec{X})$ (переставний закон);

2) $(\vec{X} + \vec{Y})\ \vec{Z} = (\vec{X}\ \vec{Z}) + (\vec{Y}\ \vec{Z})$ (розподільний закон);

3) $(\lambda \vec{X})\ \vec{Y} = \vec{X}(\lambda \vec{Y}) = \lambda (\vec{X}\ \vec{Y})$ (сполучний закон);

4) $(\vec{X}\ \vec{X}) \geq 0$, $(\vec{X}\ \vec{X}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{X} = \vec{0}$.

Зауваження. ◆ *Поняття рівності та дії над векторами визначені так само, як і рівність та відповідні дії над матрицями. Цей факт цілком природний, оскільки вектор можна розглядати як матрицю-рядок або матрицю-стовпець. Так, скалярний добуток двох векторів $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ можна знайти за правилом множення матриць, якщо один вектор, наприклад $\vec{X}$, розглядати як матрицю-рядок, а другий $\vec{Y}$ — як матрицю-стовпець.*

§ 2. Довжина вектора

! *Означення*

Додатне значення кореня квадратного з $(\vec{X}\ \vec{X})$ називають *довжиною вектора* $\vec{X}$; його позначають $|\vec{X}|$.

Отже,

$$|\vec{X}| = +\sqrt{(\vec{X}\ \vec{X})} = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} .$$

При цьому:

1) $|\vec{X}| \geq 0$, $|\vec{X}| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{X} = \vec{0}$;

2) $|\alpha \vec{X}| = |\alpha|\,|\vec{X}|$, тобто абсолютну величину числового множника можна виносити за знак довжини вектора;

3) $|\vec{X} + \vec{Y}| \le |\vec{X}| + |\vec{Y}|$ для будь-яких $\vec{X}$ і $\vec{Y}$.

Якщо $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ – двовимірні або тривимірні вектори, то нерівність $|\vec{X} + \vec{Y}| \le |\vec{X}| + |\vec{Y}|$ має простий геометричний зміст: $|\vec{X}|$, $|\vec{Y}|$, $|\vec{X} + \vec{Y}|$ — відповідно довжини векторів $\vec{X}$, $\vec{Y}$ і $\vec{X} + \vec{Y}$, що є сторонами трикутника *OAB*. Відомо, що будь-яка сторона трикутника менша або дорівнює сумі двох інших його сторін. За аналогією з двовимірними і тривимірними просторами нерівність $|\vec{X} + \vec{Y}| \le |\vec{X}| + |\vec{Y}|$ у будь-якому n-вимірному просторі називають нерівністю трикутника (рис. 3.1).

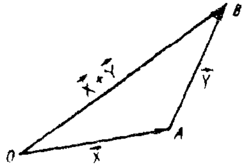

Рис. 3.1

Відстань між векторами

! *Означення*

Відстанню між двома векторами $\vec{X} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{Y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ або між двома точками $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називають число $d(\vec{X}, \vec{Y})$ виду

$$d(\vec{X}, \vec{Y}) = |\vec{X} - \vec{Y}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Одиничні вектори

! *Означення*

Одиничними векторами називають вектори виду $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

§ 3. Поняття про лінійний простір

Множину **R** n-вимірних векторів або n-вимірних точок називають лінійним n-вимірним простором, якщо:

1) сума двох будь-яких векторів $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ з **R** є деяким третім вектором $\vec{Z}$ множини **R**;

2) добуток кожного вектора $\vec{X}$ з **R** на будь-яке число λ є деяким вектором множини **R**. При цьому операції додавання векторів і множення вектора на число задовольняють згадані вище закони.

Так, сукупність усіх n-вимірних векторів утворює n-вимірний лінійний простір. Існують ще й інші n-вимірні лінійні простори.

§ 4. Поняття про лінійну залежність системи векторів

При вивченні систем лінійних рівнянь, систем n-вимірних векторів, систем лінійних форм, а також багатьох інших математичних об'єктів важливу роль відіграє поняття лінійної залежності та лінійної незалежності системи векторів. Розглянемо ці поняття.

Нехай задано вектори $\vec{X} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{Y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і $\vec{Z} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Помножимо вектор $\vec{X}$ на число α, $\vec{Y}$ — на β, $\vec{Z}$ — на γ і додамо. Вектор $\vec{P} = (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1, \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2, \ldots, \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n)$ називають *лінійною комбінацією векторів* $\vec{X}$, $\vec{Y}$ та $\vec{Z}$ і записують

$$\vec{P} = \alpha \vec{X} + \beta \vec{Y} + \gamma \vec{Z}.$$

Числа α, β, γ називають *коефіцієнтами цієї лінійної комбінації*. Аналогічно означається й лінійна комбінація будь-якого скінченного числа векторів.

! *Означення*

Систему векторів $\vec{X_1} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $\vec{X_2} = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, $\vec{X_k} = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ називають лінійно залежною, якщо можна вказати k сталих чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, і таких, що лінійна комбінація $c_1 \vec{X_1} + c_2 \vec{X_2} + \ldots + c_k \vec{X_k}$ є нульовим вектором, тобто $c_1 \vec{X_1} + c_2 \vec{X_2} + \ldots + c_k \vec{X_k} = \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Якщо лінійна комбінація $c_1 \vec{X_1} + c_2 \vec{X_2} + \ldots + c_k \vec{X_k}$ є нульовим вектором лише тоді, коли всі $c_1, c_2, \ldots, c_k$ дорівнюють нулю, то систему векторів $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \ldots, \vec{X_k}$ називають лінійно незалежною.

Наприклад, система двох векторів $\vec{X_1} = (1, 0)$ і $\vec{X_2} = (0, 1)$ є лінійно незалежною. Справді, маємо $c_1 \vec{X_1} + c_2 \vec{X_2} = c_1 (1, 0) + c_2 (0, 1) = (c_1, c_2)$. Вектор (c_1, c_2) може бути нульовим тільки при $c_1 = c_2 = 0$, тобто вектори $\vec{X_1}$ і $\vec{X_2}$ лінійно незалежні.

Аналогічно можна показати, що система n одиничних n-вимірних векторів $\vec{e_1} = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e_n} = (0, \dots, 0, 1)$ є лінійно незалежною.

Система векторів $\vec{X_1} = (1, 0)$, $\vec{X_2} = (0, 1)$, $\vec{X_3} = (1, 1)$ є лінійно залежною. Справді, $c_1 \vec{X_1} + c_2 \vec{X_2} + \dots + c_3 \vec{X_3} = c_1 (1, 0) + c_2 (0, 1) + c_3 (1, 1) = (c_1 + c_3, c_2 + c_3) = (0, 0)$. Маємо

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 , \\ c_2 + c_3 = 0 . \end{cases}$$

Якщо взяти, наприклад, $c_3 = 1$, $c_1 = c_2 = -1$, то дістанемо $-\vec{X_1} - \vec{X_2} + \vec{X_3} = \vec{0}$.

§ 5. Основні теореми про лінійну залежність

Теорема 1

Якщо деякі з векторів $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_k}$ лінійно залежні, то й уся система $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_k}$ є лінійно залежною.

Доведення. Припустимо, що лінійно залежними є перші l векторів ($l \leq k$). Згідно з означенням лінійної залежності лінійна комбінація $c_1 \vec{X} + c_2 \vec{X_2} + \dots + c_l \vec{X_l}$ дає нульовий вектор, причому принаймні один з коефіцієнтів лінійної залежності $c_1, c_2, \dots, c_l$ не дорівнює нулю, наприклад $c_l \neq 0$. Лінійна комбінація

$$c_1 \vec{X} + c_2 \vec{X_2} + \dots + c_l \vec{X_l} + c_{l+1} \vec{X_{l+1}} + \dots + c_k \vec{X_k}$$

також даватиме нульовий вектор, якщо покласти $c_{l+1} = c_{l+2} = \dots = c_k = 0$. Оскільки серед чисел $c_1, c_2, \dots, c_l, c_{l+1}, \dots, c_k$ є числа, які не дорівнюють нулю ($c_l \neq 0$), то це означає, що система векторів $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_k}$ є лінійно залежною. Теорему доведено.

Теорема 2

Будь-яка система векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$, що містить нульовий вектор, є лінійно залежною.

Доведення. Нехай серед векторів системи $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ є нульовий вектор, наприклад $\vec{X}_k = \vec{0}$. Вважаючи $c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 0$, а $c_k = 1$, дістаємо, що лінійна комбінація $c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \ldots + c_k\vec{X}_k$ даватиме нульовий вектор, і при цьому одна із сталих c_i не дорівнює нулю ($c_k \neq 0$). Отже, система векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ є лінійно залежною.

Теорему доведено.

Теорема 3

Система векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один з векторів системи можна виразити як лінійну комбінацію решти векторів цієї системи.

Доведення. Нехай система векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ є лінійно залежною. Це означає, що $c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \ldots + c_k\vec{X}_k = \vec{0}$, причому принаймні одне з чисел $c_i \neq 0$. Нехай $c_k \neq 0$. Тоді, розв'язавши систему відносно $\vec{X}_k$, дістанемо

$$\vec{X}_k = -\frac{c_1}{c_k}\vec{X}_1 - \frac{c_2}{c_k}\vec{X}_2 - \ldots - \frac{c_{k-1}}{c_k}\vec{X}_{k-1},$$

тобто вектор $\vec{X}_k$ є лінійною комбінацією решти векторів. Нехай тепер деякий вектор, наприклад $\vec{X}_k$, є лінійною комбінацією решти векторів:

$$\vec{X}_k = \alpha_1\vec{X}_1 + \alpha_2\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{X}_{k-1}.$$

Покажемо, що вектори $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ є лінійно залежними. Для цього досить перенести $\vec{X}_k$ у праву частину:

$$\alpha_1\vec{X}_1 + \alpha_2\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{X}_{k-1} - \vec{X}_k = \vec{0}.$$

У цьому співвідношенні $c_1 = \alpha_1$, $c_2 = \alpha_2$, …, $c_{k-1} = \alpha_{k-1}$, $c_k = -1$.

Отже, система векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ є лінійно залежною, оскільки одне з чисел c_i не дорівнює нулю ($c_k = -1 \neq 0$).

Теорему доведено.

Лінійну залежність і лінійну незалежність системи векторів можна означити ще й так.

! *Означення*

Система векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ називається лінійно залежною, якщо принаймні один з векторів системи є лінійною комбінацією решти векторів системи, і лінійно незалежною, якщо жоден з векторів системи не є лінійною комбінацією решти векторів системи.

Теорема 3 встановлює еквівалентність першого й другого означень лінійної залежності.

Нехай задано систему векторів

$$\begin{cases} \vec{X}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \vec{X}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{X}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}). \end{cases} \tag{3.1}$$

Складемо матрицю A, рядками якої є координати векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Задачу про кількість лінійно незалежних векторів, що містяться в системі (3.1), розв'язують за допомогою такої теореми.

Т е о р е м а 4

Максимальне число лінійно незалежних векторів системи (3.1) дорівнює рангу матриці A, складеної з координат векторів цієї системи.

Д о в е д е н н я . Нехай ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & a_{k(r+1)} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

дорівнює r. Доведемо, що максимальне число лінійно незалежних рядків матриці A, а, отже, і векторів системи (3.1) дорівнює r. Не порушуючи загальності, припустимо, що мінор r-го порядку D_r, який не дорівнює нулю, розміщений у лівому верхньому куті. Назвемо цей мінор базисним, а рядки і стовпці, на перетині яких він лежить, — базисними рядками і стовпцями. Базисні рядки лінійно незалежні, що випливає з другого означення лінійної залежності та властивості 8 визначників. Покажемо, що всі інші рядки матриці A лінійно виражаються через базисні. Для цього розглянемо мінор $(r + 1)$-го порядку, що є обвідним для базисного мінора D_r:

$$D_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr} & a_{ps} \end{vmatrix}, \quad r+1\le p\le k,\ 1\le s\le n .$$

Цей мінор дорівнює нулю, оскільки ранг матриці A дорівнює r. Розкладемо його за елементами останнього стовпця:

$$a_{1s}A_{1s}+a_{2s}A_{2s}+\ldots+a_{rs}A_{rs}+a_{ps}D_r=0 . \tag{3.2}$$

Оскільки $D_r\neq 0$, то, розв'язавши рівняння відносно a_{ps}, дістанемо

$$a_{ps}=-\frac{A_{1s}}{D_r}a_{1s}-\frac{A_{2s}}{D_r}a_{2s}-\ldots-\frac{A_{rs}}{D_r}a_{rs} . \tag{3.3}$$

Позначимо числа $-\frac{A_{1s}}{D_r}$, $-\frac{A_{2s}}{D_r}$, ..., $-\frac{A_{rs}}{D_r}$ відповідно через c_1, c_2, ..., c_r. Тоді співвідношення (3.3) набуває вигляду

$$a_{ps}=c_1a_{1s}+c_2a_{2s}+\ldots+c_ra_{rs} . \tag{3.4}$$

Нехай $s = 1, 2, \ldots, n$. Тоді

$$\begin{cases} a_{p1} = c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \ldots + c_r a_{r1}, \\ a_{p2} = c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + \ldots + c_r a_{r2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{pn} = c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \ldots + c_r a_{rn}, \end{cases}$$

$p = r+1, r+2, \ldots, k$.

Таким чином, p-й рядок матриці A є лінійною комбінацією r базисних рядків. Отже, вектори $\vec{X}_{r+1}, \vec{X}_{r+2}, \ldots, \vec{X}_k$ лінійно виражаються через лінійно незалежну систему векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$.

Теорему доведено.

Аналогічно вводиться поняття лінійної залежності та лінійної незалежності для системи лінійних рівнянь і системи лінійних форм. Вираз виду $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ називають *лінійною формою*, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сталі числа, які називають *коефіцієнтами* лінійної форми.

Приклад. Дослідити на лінійну залежність чи лінійну незалежність систему векторів:

$$\vec{X}_1 = (4, -5, 2, 6),$$
$$\vec{X}_2 = (2, -2, 1, 3),$$
$$\vec{X}_3 = (6, -3, 3, 9),$$
$$\vec{X}_4 = (4, -1, 5, 6).$$

Р о з в ' я з а н н я . Складемо матрицю A, рядками якої є координати заданих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Визначимо ранг матриці A як найвищий порядок її мінорів, що не дорівнюють нулю. Розглянемо мінор другого порядку

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Оскільки $D_2 \neq 0$, то розглянемо його обвідні мінори третього порядку:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \; D_3' = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \; D_3'' = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Мінор четвертого порядку

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює 3, $r(A) = 3$. Отже, система векторів є лінійно залежною. Максимальне число лінійно незалежних векторів системи дорівнює 3, а четвертий вектор лінійно виражається через них. За лінійно незалежні вектори можна взяти, наприклад, $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ і $\vec{X}_4$, оскільки визначник D_3'', утворений з координат цих векторів, не дорівнює нулю. Тоді вектор $\vec{X}_3$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_4$, тобто

$$\vec{X}_3 = c_1 \vec{X}_1 + c_2 \vec{X}_2 + c_4 \vec{X}_4 .$$

Для знаходження чисел c_1, c_2, c_4 прирівняємо відповідні координати вектора $c_1 \vec{X}_1 + c_2 \vec{X}_2 + c_4 \vec{X}_4$ і вектора $\vec{X}_3$. В результаті дістанемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими (досить взяти три рівняння, оскільки невідомих три: c_1, c_2, c_4 і немає значення, які три координати векторів $c_1 \vec{X}_1 + c_2 \vec{X}_2 + c_4 \vec{X}_4$ і $\vec{X}_3$ прирівнюємо, оскільки дістаємо еквівалентні між собою системи):

$$\begin{cases} 4c_1 + 2c_2 + 4c_4 = 6, \\ -5c_1 - 2c_2 - c_4 = -3, \\ 2c_1 + c_2 + 5c_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, наприклад за правилом Крамера, знайдемо, що $c_1 = -3$, $c_2 = 9$, $c_4 = 0$. Отже, $\vec{X}_3 = -3\vec{X} + 9\vec{X}_2 + 0\ \vec{X}_4$ або $3\vec{X}_1 - 9\vec{X}_2 + \vec{X}_3 = \vec{0}$.

Приклад. Знайти залежність між лінійними формами системи:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 , \\ y_2 = 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 , \\ y_3 = 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 . \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я . Складемо матрицю A з коефіцієнтів лінійних форм:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}.$$

Максимальне число лінійно незалежних форм системи дорівнює рангу матриці, складеної з коефіцієнтів цих форм. Обчислимо ранг матриці як найвищий порядок її мінорів, що не дорівнюють нулю:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 .$$

Мінори третього порядку, які є обвідними для мінора D_2, дорівнюють нулю:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 0 , \quad D_3' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 0 .$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює 2. Отже, дві будь-які форми системи, наприклад перша і друга, є лінійно незалежними, а третя лінійно виражається через них:

$$y_3 = c_1 \vec{X}_1 + c_2 \vec{X}_2 .$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових змінних у формі y_3 і в лінійній комбінації $c_1 y_1 + c_2 y_2$, дістанемо систему рівнянь для визначення невідомих сталих c_1 і c_2. Оскільки невідомих дві, то досить прирівняти коефіцієнти тільки при x_1 і x_2:

$$\begin{cases} 3c_1 + 3c_2 = 3, \\ 2c_1 - c_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, звідки

$$y_3 = 2y_1 - y_2 \text{ , або } 2y_1 = y_2 - y_3 = 0 .$$

З теореми 4 випливає ряд важливих тверджень:

1. Будь-який стовпець (рядок) матриці A є лінійною комбінацією її базисних стовпців (рядків) (теорема про базисний мінор).
2. Якщо визначник D дорівнює нулю, то він містить стовпець (рядок), який є лінійною комбінацією решти стовпців (рядків).
3. Якщо ранг матриці A менший від числа її стовпців (рядків), то стовпці (рядки) матриці A є лінійно залежними.

Теорема 5

Будь-яка система $n+1$ векторів n-вимірного векторного простору є лінійно залежною.

Доведення. Розглянемо будь-яку систему $n + 1$ векторів:

$$\begin{cases} \vec{X}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \vec{X}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{X}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}), \\ \vec{X}_{n+1} = (a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \ldots, a_{n+1,n}). \end{cases}$$

Складемо матрицю A з координат векторів цієї системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

Максимальне число лінійно незалежних векторів системи дорівнює рангу матриці A. Оскільки матриця A має n стовпців, то в ній немає мінорів, порядок яких вищий за n. Отже, ранг матриці A, а отже і максимальна кількість лінійно незалежних векторів системи, не може бути більше за n.

Теорему доведено.

§ 6. Друге означення рангу матриці

При доведенні теореми 4 встановлено, що максимальне число лінійно незалежних рядків матриці дорівнює рангу матриці. Транспонуємо матрицю, тобто замінюємо рядки стовпцями, а стовпці — рядками. При цьому максимальний порядок мінорів, що не дорівнюють нулю, не змінюється. Отже, ранг транспонованої матриці дорівнює рангу вихідної матриці. Тому ранг транспонованої матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків, тобто максимальному числу лінійно незалежних стовпців вихідної матриці.

Таким чином, максимальне число лінійно незалежних рядків будь-якої матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних стовпців і дорівнює рангу цієї матриці. Це твердження і вважають другим означенням рангу матриці.

! ***Означення***

Рангом матриці називається натуральне число r, яке дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків або стовпців.

Як було вже показано, за допомогою елементарних перетворень можна перейти від даної матриці до матриці, еквівалентної їй. Еквівалентні матриці мають однакові ранги. Будь-яку матрицю можна за допомогою елементарних перетворень звести до діагональної форми. Підрахувавши в такій матриці кількість чисел, які не дорівнюють нулю і лежать на головній діагоналі, дістанемо ранг матриці.

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}.$$

Р о з в ' я з а н н я . Додамо до другого, третього і четвертого рядків перший рядок, помножений відповідно на -2, -5, -7. Дістанемо матрицю

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & -14 & -26 & 12\\ 0 & -14 & -12 & 8\end{pmatrix}.$$

Додамо до третього і четвертого рядків другий, помножений на -2 та поміняємо місцями третій рядок з четвертим. Матимемо

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поміняємо місцями третій і четвертий стовпці:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 5\\ 0 & -7 & 6 & -13\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Додамо до другого, третього і четвертого стовпців перший, помножений на -3, 1, -5. Матимемо

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 6 & -13\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Додамо до третього і четвертого стовпців другий, помножений на $\frac{6}{7}$ і $-\frac{17}{7}$. Дістанемо

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A) = 3$.

Обчислення рангу матриці методом Гаусса—Жордана.

Крок перетворень Гаусса—Жордана це друге і третє елементарні перетворення матриці A. Оскільки максимальна кількість кроків перетворень Гаусса—Жордана дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків, то ранг матриці A дорівнює максимальному числу кроків перетворень Гаусса—Жордана.

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

за допомогою перетворень Гаусса—Жордана.

Р о з в ' я з а н н я . Результати обчислень подано в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

A				K
2	$\boxed{1}$	3	−1	5
3	−1	2	0	4
1	3	4	−2	6
4	−3	1	1	3
2	1	3	−1	5
5	0	5	−1	9
−5	0	−5	$\boxed{1}$	−9
10	0	10	−2	18
−3	1	−2	0	−4
0	0	0	0	0
−5	0	−5	1	−9
0	0	0	0	0

При цьому виконано два кроки перетворень Гаусса—Жордана, тому $r(A) = 2$.

§ 7. Базис лінійного простору. Розклад вектора за будь-яким базисом

! *Означення*

Базисом n-вимірного лінійного простору називається система n лінійно незалежних n-вимірних векторів f_1, f_2, ..., f_n, таких, що для будь-якого вектора $\vec{X}$ цього простору виконується рівність

$$\vec{X} = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \ldots + \xi_n f_n .$$

Наприклад, n n-вимірних одиничних векторів $\vec{e_1} = (1, 0, \ldots, \ldots, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\vec{e_n} = (0, \ldots, 0, 1)$ утворюють базис

n-вимірного простору. Для того щоб розкласти будь-який вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за цим базисом, досить покласти $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ..., $\xi_n = x_n$. Коефіцієнти $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ розкладу вектора $\vec{X}$ за базисом $f_1, f_2, \ldots, f_n$ визначають єдиним способом. Справді, припустимо супротивне, тобто, що вектор $\vec{X}$ має два розклади $\vec{X} = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \ldots + \xi_n f_n$ і $\vec{X} = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \ldots + \eta_n f_n$. Віднявши почленно від першої рівності другу, дістанемо $\vec{0} = (\xi_1 - \eta_1) f_1 + (\xi_2 - \eta_2) f_2 + \ldots + (\xi_n - \eta_n) f_n$. Оскільки вектори $f_1, f_2, \ldots, f_n$ є лінійно незалежними, то остання рівність можлива тільки за умови, що $\xi_1 - \eta_1 = 0$, $\xi_2 - \eta_2 = 0$, ..., $\xi_n - \eta_n = 0$, звідки $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2$, ..., $\xi_n = \eta_n$. Отже, розклад вектора $\vec{X}$ за базисом $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — єдиний.

При додаванні двох векторів n-вимірного простору їх координати відносно будь-якого базису додають, а при множенні вектора на число всі його координати множать на це число.

§ 8. Перехід від одного базису до іншого

Для тотожних перетворень систем лінійних рівнянь, а отже, й для розв'язання задач лінійного програмування, треба вміти переходити від одного базису до іншого.

Нехай вектори $g_1, g_2, \ldots, g_n$ утворюють базис в n-вимірному просторі $\mathbf{R}_n$ і $f_1, f_2, \ldots, f_n$ утворюють деякий інший базис у цьому ж просторі. Вектори $f_1, f_2, \ldots, f_n$ як вектори простору $\mathbf{R}_n$ однозначно визначаються своїми розкладами за векторами $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$\begin{cases} f_1 = a_{11} g_1 + a_{12} g_2 + \ldots + a_{1n} g_n, \\ f_2 = a_{21} g_1 + a_{22} g_2 + \ldots + a_{2n} g_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n = a_{n1} g_1 + a_{n2} g_2 + \ldots + a_{nn} g_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Система співвідношень (3.5) визначає матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яка називається матрицею переходу від базису $g_1, g_2, \dots, g_n$ до базису $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Визначник D_A цієї матриці не дорівнює нулю, тобто матриця A — неособлива. Оскільки матриця A неособлива, то систему (3.5) можна розв'язати відносно $g_1, g_2, \dots, g_n$. Система рівностей, яка утворюється при цьому,

$$\begin{cases} g_1 = b_{11}f_1 = b_{12}f_2 + \dots + b_{1n}f_n, \\ g_2 = b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \dots + b_{2n}f_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_n = b_{n1}f_1 + b_{n2}f_2 + \dots + b_{nn}f_n, \end{cases} \tag{3.6}$$

визначає перехід від базису $f_1, f_2, \dots, f_n$ до базису $g_1, g_2, \dots, g_n$. Матрицею цього переходу є матриця B, обернена до матриці A.

§ 9. Перетворення координат вектора при переході від одного базису до іншого

Нехай $\{g\} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ і $\{f\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ — два базиси в n-вимірному просторі R_n. Для будь-якого вектора $\vec{X} \in R_n$ виконується рівність

$$\vec{X} = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \dots + \xi_n g_n = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \dots + \eta_n f_n, \tag{3.7}$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{g\}$ і $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{f\}$.

Нехай задано матрицю A переходу від базису $\{g\}$ до базису $\{f\}$. Тоді вектори g_i через вектори f_j будуть виражені так:

$$\begin{cases} g_1 = b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \dots + b_{1n}f_n, \\ g_2 = b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \dots + b_{2n}f_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_n = b_{n1}f_1 + b_{n2}f_2 + \dots + b_{nn}f_n \end{cases}$$

або

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} f_i,$$

де B — матриця, обернена до матриці A. Підставивши у вираз (3.7) значення векторів g_j, дістанемо

$$\vec{X}=\sum_{j=1}^{n}\xi_j g_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{n}b_{ji}f_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\xi_j\right)f_i.$$

Звідси, внаслідок єдиності розкладу вектора $\vec{X}$ за базисом $\{f\}$, маємо

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\xi_j.$$

У розгорнутому вигляді дістанемо систему рівностей

$$\begin{cases}\eta_1=b_{11}\xi_1+b_{21}\xi_2+\ldots+b_{n1}\xi_n,\\ \eta_2=b_{12}\xi_1+b_{22}\xi_2+\ldots+b_{n2}\xi_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \eta_n=b_{1n}\xi_1+b_{2n}\xi_2+\ldots+b_{nn}\xi_n.\end{cases}$$

Таким чином, координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{f\}$ лінійно виражаються через координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{g\}$; коефіцієнти цих лінійних перетворень утворюють матрицю C, яка є транспонованою для матриці A^{-1}, оберненої до матриці A. Отже,

$$C=(A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

§ 10. Ранг і базис системи векторів

! *Означення*

Рангом r даної системи векторів називається максимальне число лінійно незалежних векторів цієї системи.

Т е о р е м а 1

Ранг n-вимірного простору дорівнює вимірності простору n.

Д о в е д е н н я . Згідно з теоремою 5, § 5, розділ III, ранг не може бути більшим за n. Крім того, в n-вимірному просторі є система n лінійно незалежних одиничних векторів, а це означає, що ранг не може бути менший за n. Таким чином, $r=n$.

Теорему доведено.

! *Означення*

Базисом системи векторів, що має ранг r, називається будь-яка сукупність з r лінійно незалежних векторів даної системи.

Відповідно, базисом n-вимірного простору є будь-яка сукупність n лінійно незалежних векторів цього простору.

Серед усіх можливих базисів n-вимірного простору виділяють одиничний базис.

Теорема 2

Будь-який вектор $\vec{X}$ системи можна подати єдиним способом у вигляді комбінації векторів базису системи $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$:

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \ldots + \alpha_r \vec{X}_r. \qquad (3.8)$$

Доведення. Розглянемо систему векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r, \vec{X}$. Згідно з означенням рангу системи, вона є лінійно залежною, тобто

$$c_1 \vec{X}_1 + c_2 \vec{X}_2 + \ldots + c_r \vec{X}_r + c\vec{X} = 0.$$

Тут $c \neq 0$, бо в противному разі перші r векторів базису були б лінійно залежними, що неможливо. Розв'язавши останню рівність відносно $\vec{X}$, дістанемо розклад цього вектора за векторами базису $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$.

Для доведення єдиності розкладу припустимо обернене, тобто, що існують два розклади:

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \ldots + \alpha_r \vec{X}_r \text{ і } \vec{X} = \beta_1 \vec{X}_1 + \beta_2 \vec{X}_2 + \ldots + \beta_r \vec{X}_r.$$

Віднявши почленно ці рівності, дістанемо

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{X}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{X}_2 + \ldots + (\alpha_r - \beta_r)\vec{X}_r.$$

Оскільки $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$ — лінійно незалежні, то остання рівність можлива тільки при $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ..., $\alpha_n - \beta_n = 0$, звідки $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$.

Теорему доведено.

Теорема 3

Якщо до системи векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$ додати або виключити з неї вектор, який лінійно виражається через вектори системи, то ранг системи не зміниться.

§ 11. Поняття про підпростір

! ***Означення***

Підмножина **L** лінійного простору **R** називається лінійним підпростором цього простору, якщо вона сама є простором відносно визначених в **R** операцій додавання векторів і множення вектора на число.

Наприклад, у тривимірному просторі сукупність векторів, які виходять з початку координат і розміщені на деякій площині або деякій прямій, що проходить через початок координат, є лінійним підпростором.

Множина **L** усіх векторів, що є лінійними комбінаціями системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$, також утворює лінійний підпростір вимірності r. При $r = n$ підпростір збігається з простором, при $r = 0$ маємо так званий нульовий простір.

§ 12. Означення евклідового простору. Основні метричні поняття

! ***Означення***

Лінійний n-вимірний простір **R** називатимемо евклідовим, якщо в ньому введено поняття скалярного добутку, тобто для будь-яких двох векторів $\vec{X} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{Y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ з **R** побудовано число $(\vec{X}\ \vec{Y}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

Скалярний добуток $(\vec{X}\ \vec{Y})$ задовольняє закони 1) — 4), наведені в § 1, розд. III. За допомогою скалярного добутку вводимо основні метричні поняття: довжини вектора та кута між двома векторами. Довжину вектора було розглянуто в § 2, розд. III.

! *Означення*

Кутом між двома векторами $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ називають кут (від 0 до π), косинус якого дорівнює відношенню

$$\frac{(\vec{X}\ \vec{Y})}{|\vec{X}|\,|\vec{Y}|},$$

де $(\vec{X}\ \vec{Y})$ — скалярний добуток; $|\vec{X}|$ і $|\vec{Y}|$ — довжини векторів $\vec{X}$ і $\vec{Y}$.

Для тривимірного простору наведене означення збігається зі звичайним виразом кута між двома векторами через скалярний добуток.

Щоб це означення не мало обмежень в n-вимірному евклідовому просторі, треба довести, що відношення $\frac{(\vec{X}\ \vec{Y})}{|\vec{X}|\,|\vec{Y}|}$ для будь-яких $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ за абсолютною величиною не перевищує одиниці.

Для доведення цього твердження розглянемо вектор $\lambda\vec{X}-\vec{Y}$, де λ — дійсне число. За законом 4), § 1, розд. 3, скалярний добуток

$$(\lambda\vec{X}-\vec{Y},\ \lambda\vec{X}-\vec{Y})\geq 0$$

при будь-якому λ. Застосувавши закони 1) — 3), § 1, розд. 3, запишемо нерівність у вигляді

$$\lambda^2(\vec{X}\ \vec{X})-2\lambda(\vec{X}\ \vec{Y})+(\vec{Y}\ \vec{Y})\geq 0\,. \tag{3.9}$$

Ліва частина нерівності є квадратним тричленом відносно λ зі сталими коефіцієнтами. Цей тричлен не може мати різних дійсних коренів, оскільки він не зміг би зберігати знак для всіх значень λ. Тому дискримінант $(\vec{X}\ \vec{Y})^2-(\vec{X}\vec{X})(\vec{Y}\ \vec{Y})$ цього тричлена не може бути додатним. Отже, $(\vec{X}\ \vec{Y})^2\leq(\vec{X}\ \vec{X})(\vec{Y}\ \vec{Y})$, звідки

$$|(\vec{X}\ \vec{Y})|\leq|\vec{X}|\,|\vec{Y}|\,. \tag{3.10}$$

Якщо виконується рівність

$$|(\vec{X}\ \vec{Y})|=|\vec{X}|\,|\vec{Y}|\,,$$

то дискримінант квадратного тричлена (3.9) дорівнює нулю і, отже, тричлен має один дійсний корінь λ_0.

Таким чином,

$$\lambda_0^2(\vec{X}\ \vec{X}) - 2\lambda_0(\vec{X}\ \vec{Y}) + (\vec{Y}\ \vec{Y}) = (\lambda_0\vec{X} - \vec{Y}, \lambda_0\vec{X} - \vec{Y}_0) = 0\ ,$$

звідки за законом 4), § 1, розд. 3, знаходимо, що

$$\lambda_0\vec{X} - \vec{Y} = 0,\ \text{або}\ \vec{Y} = \lambda_0\vec{X}.$$

Цей результат можна сформулювати в геометричних термінах: якщо скалярний добуток двох векторів за абсолютною величиною дорівнює добутку їхніх довжин, то ці вектори колінеарні.

Нерівність (3.10) називають *нерівністю Коші—Буняковського*. В розгорнутому вигляді її записують так:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\ . \qquad (3.11)$$

Ця нерівність справедлива для будь-якої пари векторів $\vec{X} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\vec{Y} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, або для будь-яких двох систем дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ і $b_1, b_2, \dots, b_n$.

§ 13. Ортогональні системи векторів

! *Означення*

Вектори $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ називаються ортогональними, якщо $(\vec{X}\ \vec{Y}) = 0$.

Якщо $\vec{X} \ne \vec{0}$ і $\vec{Y} \ne \vec{0}$, то за цим означенням, згідно з означенням кута між двома векторами, вектори $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ утворюють кут 90°. Нульовий вектор є ортогональним до будь-якого вектора $\vec{X} \in$ **R**.

Умова ортогональності векторів $\vec{X} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\vec{Y} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ має вигляд

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0\ .$$

Наприклад, вектори $\vec{e_1} = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., ..., $\vec{e_n} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ взаємно ортогональні.

Розглянемо деякі властивості ортогональних систем.

Теорема 1

Система взаємно ортогональних ненульових векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ є лінійно незалежною.

Доведення. Припустимо, що ці вектори лінійно залежні, тоді виконується рівність $c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \ldots + c_k\vec{X}_k = \vec{0}$, де, наприклад, $c_1 \neq 0$. Помножимо цю рівність скалярно на $\vec{X}_1$. Оскільки вектори $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ взаємно ортогональні, то $c_1(\vec{X}_1\vec{X}_1) = 0$, звідки $(\vec{X}_1\vec{X}_1) = 0$ і, отже, $\vec{X}_1$ є нульовим вектором, що суперечить умові.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що коли сума взаємно ортогональних векторів дорівнює нулю, то кожний з доданків є нуль-вектором.

Теорема 2

Якщо вектори $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_k$ ортогональні до вектора $\vec{X}$, то будь-яка лінійна комбінація $\alpha_1\vec{Y}_1 + \alpha_2\vec{Y}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{Y}_k$ також ортогональна до вектора $\vec{X}$.

Доведення. Розглянемо скалярний добуток

$$(\alpha_1\vec{Y}_1 + \alpha_2\vec{Y}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{Y}_k, \vec{X}) =$$

$$= \alpha_1(\vec{Y}_1\vec{X}) + \alpha_2(\vec{Y}_2\vec{X}) + \ldots + \alpha_k(\vec{Y}_k\vec{X}) = 0 .$$

Отже, вектор $\alpha_1\vec{Y}_1 + \alpha_2\vec{Y}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{Y}_k$ ортогональний до вектора $\vec{X}$, що й треба було довести.

Теорема Піфагора та її узагальнення

Нехай вектори $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ ортогональні. Тоді за аналогією з елементарною геометрією вектор $\vec{X}+\vec{Y}$ можна вважати гіпотенузою прямокутного трикутника, побудованого на векторах $\vec{X}$ і $\vec{Y}$. Помноживши $\vec{X}+\vec{Y}$ скалярно на себе та врахувавши ортогональність векторів $\vec{X}$ і $\vec{Y}$, дістанемо

$$(\vec{X}+\vec{Y}, \vec{X}+\vec{Y}) = |\vec{X}+\vec{Y}|^2 = (\vec{X}\vec{X}) + 2(\vec{X}\vec{Y}) + (\vec{Y}\vec{Y}) =$$

$$= (\vec{X}\vec{X}) + (\vec{Y}\vec{Y}) = |\vec{X}|^2 + |\vec{Y}|^2 .$$

Отже, доведено теорему Піфагора в евклідовому просторі: квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Ця теорема узагальнюється на випадок будь-якого числа доданків, а саме: нехай вектори $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_k$ взаємно ортогональні і $\vec{Z} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \ldots + \vec{X}_k$; тоді $|\vec{Z}|^2 = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \ldots + \vec{X}_k, \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \ldots + \vec{X}_k) = |\vec{X}_1|^2 + |\vec{X}_2|^2 + \ldots + |\vec{X}_k|^2$.

Нерівність трикутника

Якщо $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ — довільні вектори, то за аналогією з елементарною геометрією вектор $\vec{X} + \vec{Y}$ називають третьою стороною трикутника, побудованого на векторах $\vec{X}$ і $\vec{Y}$. За допомогою нерівності Коші—Буняковського маємо

$$|\vec{X} + \vec{Y}|^2 = (\vec{X} + \vec{Y}, \vec{X} + \vec{Y}) = (\vec{X}\vec{X}) + 2(\vec{X}\vec{Y}) + (\vec{Y}\vec{Y}) =$$

$$= \begin{cases} \le |\vec{X}|^2 + 2|\vec{X}||\vec{Y}| + |\vec{Y}|^2 = (|\vec{X}| + |\vec{Y}|)^2, \\ \ge |\vec{X}| - 2|\vec{X}||\vec{Y}| + |\vec{Y}|^2 = (|\vec{X}| - |\vec{Y}|)^2 \end{cases}$$

або

$$|\vec{X} + \vec{Y}| \le |\vec{X}| + |\vec{Y}| ; \qquad (3.12)$$

$$|\vec{X} - \vec{Y}| \ge \big| |\vec{X}| - |\vec{Y}| \big| . \qquad (3.13)$$

Нерівності (3.12) і (3.13) називають *нерівностями трикутника*. Геометрично вони означають, що довжина будь-якої сторони трикутника не більше, ніж сума довжин двох інших сторін, і не менше, ніж абсолютна величина різниці довжин цих сторін.

ВПРАВИ

1. Обчислити ранги матриць за допомогою елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$

2. Обчислити ранги матриць за допомогою перетворень Гаусса—Жордана:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 & -4 \\ 9 & -13 & 2 & -3 \\ 2 & 15 & 3 & -1 \\ 20 & -11 & 7 & -7 \\ 15 & 32 & 11 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Знайти лінійну залежність систем векторів:

а) $\begin{cases} \vec{X}_1 = (2,\ -3,\ 1), \\ \vec{X}_2 = (3,\ -1,\ 5), \\ \vec{X}_3 = (1,\ -4,\ 3); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \vec{X}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 2), \\ \vec{X}_2 = (-1,\ -3,\ 4,\ 5), \\ \vec{X}_3 = (-5,\ 0,\ 2,\ 3); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \vec{X}_1 = (1,\ -1,\ 2,\ -4,\ 1), \\ \vec{X}_2 = (3,\ 1,\ 1,\ -3,\ 4), \\ \vec{X}_3 = (3,\ 1,\ -1,\ 2,\ 4), \\ \vec{X}_4 = (-5,\ -2,\ -3,\ 1,\ 2); \end{cases}$ г) $\begin{cases} \vec{X}_1 = (5,\ 4,\ 3), \\ \vec{X}_2 = (3,\ 3,\ 2), \\ \vec{X}_3 = (8,\ 1,\ 3); \end{cases}$

д) $\begin{cases} \vec{X}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 2,\ 5), \\ \vec{X}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 4), \\ \vec{X}_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 7), \\ \vec{X}_4 = (2,\ -3,\ 4,\ 11,\ 12). \end{cases}$

4. Встановити залежність для систем лінійних форм:

а) $\begin{cases} y_1 = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4\ , \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4\ , \\ y_3 = 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4\ , \\ y_4 = x_1 + 7x_3 + 11x_4\ ; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5\ , \\ y_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5\ , \\ y_3 = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5\ , \\ y_4 = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5\ ; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4\ , \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 8x_4\ , \\ y_3 = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4\ , \\ y_4 = 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4\ , \\ y_5 = 6x_1 - 7x_2 - x_4\ . \end{cases}$

Розділ 4

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

У попередніх розділах було розглянуто квадратні системи лінійних рівнянь, в яких кількість невідомих збігалася з кількістю рівнянь, і викладено деякі методи розв'язання їх, зокрема, метод Крамера, метод оберненої матриці, метод Гаусса. У подальшому розглянемо довільні системи m лінійних рівнянь з n невідомими, де m і n — будь-які числа.

§ 1. Умова сумісності системи m лінійних рівнянь з n невідомими

Нехай задано довільну систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

Складемо матрицю з коефіцієнтів при невідомих:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Цю матрицю називають *матрицею системи* (4.1). Припишемо до матриці A справа стовпець вільних членів. Дістанемо

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матриця B називається *розширеною*.

Легко побачити, що ранг розширеної матриці B дорівнює рангу матриці A або на одиницю більший від нього.

Справді, нехай ранг матриці A дорівнює r. Тоді максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці A дорівнює r. Зафіксуємо деякі r лінійно незалежних стовпців матриці A. Ці стовпці входять і в розширену матрицю B. Приєднаємо до r лінійно незалежних стовпців стовпець вільних членів.

Якщо при цьому дістанемо лінійно залежну систему векторів, то r є максимальним числом лінійно незалежних стовпців матриці B, і, отже, ранг цієї матриці дорівнює r.

Якщо здобута система $(r + 1)$ векторів є лінійно незалежною, то ранг матриці B дорівнює $r + 1$.

Теорема Кронекера — Капеллі

Система лінійних рівнянь (4.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, тобто, для того щоб система (4.1) була сумісною, необхідно й достатньо, щоб $r(A) = r(B)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай система (4.1) сумісна. Покажемо, що $r(A) = r(B)$.

Оскільки система (4.1) сумісна, то існує n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які є її розв'язком, тобто

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{4.2}$$

Складемо розширену матрицю

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

і віднімемо від її останнього стовпця перший, другий і так далі, n-й стовпці, помножені відповідно на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Дістанемо матрицю

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 - \alpha_1 a_{11} - \alpha_2 a_{12} - \dots - \alpha_n a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 - \alpha_1 a_{21} - \alpha_2 a_{22} - \dots - \alpha_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m - \alpha_1 a_{m1} - \alpha_2 a_{m2} - \dots - \alpha_n a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна матриці B.

Згідно зі співвідношеннями (4.2), останній стовпець матриці B_1 складається з нулів:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

На підставі властивості 4 елементарних перетворень стовпець з нулів можна закреслити, при цьому ранг матриці B_1 не зміниться. Проте в результаті закреслення останнього стовпця матриця B_1 перетворюється в матрицю системи B. Отже, ранг матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці B. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай ранг матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці B, $r(A) = r(B)$. Покажемо, що система (4.1) сумісна.

Оскільки ранг матриці A дорівнює рангу матриці B, то будь-яка максимальна лінійно незалежна система стовпців матриці A є також максимальною лінійно незалежною системою і в матриці B. Тому через цю систему, а отже, і через систему всіх стовпців матриці A лінійно виражається останній стовпець матриці B. Це означає, що існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такі, що

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Виконавши дії в правій частині, матимемо

$$\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Узявши до уваги означення рівності векторів, дістанемо співвідношення

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 ,\\
&a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m ,
\end{aligned}
$$

тобто числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ є розв'язком системи (4.1). Отже, система (4.1) сумісна.

Теорему доведено.

§ 2. Загальний розв'язок системи лінійних рівнянь

Теорема Кронекера — Капеллі встановлює загальну умову сумісності лінійної системи рівнянь (4.1) і стверджує існування розв'язку, проте вона не визначає способів для практичного знаходження всіх розв'язків системи, якщо вона сумісна. Покажемо, як знайти загальний розв'язок системи (4.1).

Нехай матриця системи A і розширена матриця B мають ранг r. Тоді в матрицях A і B максимальне число лінійно незалежних рядків є r. Нехай, наприклад, перші r рядків матриці B лінійно незалежні, а кожний з решти m-r рядків лінійно виражається через перші r.

Оскільки елементами рядків матриці B є коефіцієнти рівнянь системи (4.1), включаючи й вільні члени, то перші r рівнянь лінійно незалежні, а кожне з решти m–r рівнянь лінійно виражається через перші r.

Отже, розв'язки перших r рівнянь є також і розв'язками решти m–r рівнянь. Тому залишаємо перші r лінійно незалежних рівнянь, а m–r відкинемо. В цих r рівняннях залишимо в лівих частинах r невідомих, наприклад перші r, так щоб визначник, складений з коефіцієнтів при них, не дорівнював нулю. Називатимемо ці невідомі базисними, а решту n–r переносимо в праві частини рівнянь і називатимемо їх вільними невідомими. В результаті дістанемо систему

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1} - \ldots - a_{1n}x_n ,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n ,
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

яка еквівалентна вихідній системі (4.1).

Якщо праві частини системи (4.3) вважати вільними членами, то матимемо систему r рівнянь з r невідомими x_1, x_2, ..., x_r. Визначник цієї системи не дорівнює нулю, бо він є базисним, тому систему можна розв'язувати, наприклад, за правилом Крамера. При цьому дістанемо розв'язок, який називається загальним. У ньому базисні невідомі $x_1, x_2, \dots, x_r$ виражені через вільні невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$.

Надавши вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ числові значення та обчисливши відповідні значення для базисних невідомих $x_1, x_2, \dots, x_r$, знайдемо розв'язки, які називають частинними розв'язками системи (4.3), а отже, й системи (4.1).

Оскільки вільним невідомим можна надавати довільних значень, то система (4.1) має нескінченну множину розв'язків.

Зауваження. *Система (4.1) має єдиний розв'язок, якщо $r = n$. Частинний розв'язок при нульових значеннях вільних невідомих називають базисним. Якщо всі компоненти базисного розв'язку невід'ємні, то його називають опорним.*

◆

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ \phantom{3x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю системи A і розширену матрицю B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

У подальшому матриці A і B записуватимемо у вигляді однієї матриці

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right).$$

Обчисливши ранги матриць A і B, матимемо

$$r(A) = r(B) = 2.$$

Візьмемо будь-які два, наприклад перші, рівняння, а два інші відкинемо. В перших двох рівняннях залишимо в лівій частині дві, наприклад перші, невідомі, а дві інші перенесемо у праву частину. В результаті дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5 , \\ 3x_1 + 2x_2 = -2 - x_3 - x_4 + 3x_5 . \end{cases}$$

Розв'яжемо її за правилом Крамера:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0;$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 - x_3 - x_4 - x_5 & 1 \\ -2 - x_3 - x_4 + 3x_5 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5 ,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 - x_3 - x_4 - x_5 \\ 3 & -2 - x_3 - x_4 + 3x_5 \end{vmatrix}}{-1} = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 .$$

Загальний розв'язок $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$. Нехай, наприклад, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$. Тоді $x_1 = -5$, $x_2 = 9$. Отже, дістали один частинний розв'язок: $x_1 = -5$, $x_2 = 9$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$.

Аналогічно, надавши вільним невідомим x_3, x_4, x_5 інші числові значення і визначивши відповідні значення базисних невідомих x_1 і x_2, знайдемо інші частинні розв'язки. Так, якщо $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, то матимемо частинний розв'язок $x_1 = -16$, $x_2 = 23$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, який є базисним. Опорним цей розв'язок не буде, оскільки $x_1 = -16 < 0$.

Для розв'язування систем m лінійних рівнянь з n невідомими застосовують метод Гаусса. Якщо при цьому система сумісна, то вона зводиться до трикутного вигляду при $r = n$ і до трапецоїдного при $r < n$. На місці лінійно залежних рівнянь утворюються рядки, що складаються лише з нулів. При використанні методу Гаусса не треба заздалегідь досліджувати систему на сумісність. Якщо система несумісна, то внаслідок елементарних перетворень прийдемо до суперечливої рівності.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я . Складемо матрицю з коефіцієнтів і вільних членів

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Віднімемо перший рядок від другого і третього:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Доламо другий рядок здобутої матриці до третього:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Цій матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \quad -3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи виразимо x_3 через x_4. Дістанемо $x_3 = \dfrac{1 - 2x_4}{3}$. Підставимо цей вираз у перше рівняння. Матимемо $x_1 = \dfrac{2 - 3x_2 - x_4}{3}$.

Вираз $x_1 = \dfrac{2 - 3x_2 - x_4}{3}$ і $x_3 = \dfrac{1 - 2x_4}{3}$ є загальним розв'язком системи лінійних рівнянь. Базисний розв'язок $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dfrac{1}{3}$, $x_4 = 0$ є також і опорним.

Системи лінійних рівнянь зручно розв'язувати за допомогою перетворень Гаусса—Жордана. При цьому також не треба заздалегідь досліджувати систему на сумісність.

Нехай над заданою системою (4.1) виконано максимальне число r кроків перетворень Гаусса—Жордана і останній, r-й крок перетворень, записано в табл. 4.1. При цьому можливі такі випадки.

Таблиця 4.1

x_1	x_2	...	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	...	x_n	β_i
1	0	...	0	α_{1r+1}	α_{1r+2}	...	α_{1n}	β_1
0	1	...	0	α_{2r+1}	α_{2r+2}	...	α_{2n}	β_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	1	α_{rr+1}	α_{rr+2}	...	α_{rn}	β_r

Випадок 1. $r \le m < n$. Система невизначена, її загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1(r+1)} x_{r+1} - \alpha_{1(r+2)} x_{r+2} - \ldots - \alpha_{1n} x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2(r+1)} x_{r+1} - \alpha_{2(r+2)} x_{r+2} - \ldots - \alpha_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r - \alpha_{r(r+1)} x_{r+1} - \alpha_{r(r+2)} x_{r+2} - \ldots - \alpha_{rn} x_n. \end{cases}$$

Невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_r$, відносно яких розв'язано систему (4.1), є базисними, а невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — вільними.

В и п а д о к 2. $r = n$. Система визначена, її розв'язок

$$x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \ \ldots, \ x_r = \alpha_r.$$

В и п а д о к 3. Якщо при перетворенні системи дістали рівняння, в якого всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система несумісна, бо вираз $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_r = \alpha_k \neq 0$ суперечливий.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса—Жордана:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Результати обчислень подано в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	K
$\boxed{1}$	2	3	−2	1	4	9
3	6	5	−4	3	5	18
1	2	7	−4	1	11	18
2	4	2	−3	3	6	14
1	2	3	−2	1	4	9
0	0	−4	2	0	−7	−9
0	0	4	−2	0	7	9
0	0	−4	$\boxed{1}$	1	−2	−4
1	2	−5	0	3	0	1
0	0	$\boxed{4}$	0	−2	−3	−1
0	0	−4	0	2	3	1
0	0	−4	1	1	−2	−4
1	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	−1	−5	−5

Отже, система сумісна і її загальним розв'язком є

$$x_1 = -\frac{15}{4} - 2x_2 - \frac{1}{2}x_5, \quad x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x_5, \quad x_4 = -5 + x_5,$$

де x_1, x_3, x_4 — базисні невідомі, x_2 і x_5 — вільні невідомі. Поклавши, наприклад, $x_2 = 1$, $x_5 = 2$, дістанемо частинний розв'язок $x_1 = -\frac{27}{4}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = -3$, $x_5 = 2$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса—Жордана

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я . Результати обчислень подано в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	K
$\boxed{1}$	1	3	−2	3	1	7
2	2	4	−1	3	2	12
3	3	5	−2	3	1	13
2	2	8	−3	9	2	20
1	1	3	−2	3	1	7
0	0	−2	3	−3	0	−2
0	0	−4	4	−6	−2	−8
0	0	2	$\boxed{1}$	3	0	6
1	1	7	0	9	1	19
0	0	$\boxed{-8}$	0	−12	0	−20
0	0	−12	0	−18	−2	−32
0	0	2	1	3	0	6
1	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
0	0	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
0	0	0	0	0	−2	−2
0	0	0	1	0	0	1

Система несумісна, оскільки її третє рівняння, знайдене після третього кроку перетворень Гаусса—Жордана,

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -2$$

суперечливе при будь-яких значеннях невідомих.

§ 3. Однорідні системи лінійних рівнянь

! *Означення*

Лінійне алгебраїчне рівняння називають однорідним, якщо вільний член його дорівнює нулю.

Нехай задано систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Системи лінійних однорідних рівнянь (4.4) є окремим випадком розглянутих систем лінійних рівнянь (4.1) ($b_i = 0$). Тому для них справедлива теорема Кронекера—Капеллі.

Розглянувши матрицю системи A і розширену матрицю B, побачимо, що матриця B відрізняється від матриці A стовпцем вільних членів-нулів, який не змінює рангу матриці. Отже, $r(A) = r(B)$, тобто системи лінійних однорідних рівнянь завжди сумісні. Всі однорідні системи лінійних рівнянь мають розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, який називають *нульовим* або *тривіальним* (очевидним).

З'ясуємо, в яких випадках однорідні системи лінійних рівнянь мають ненульові розв'язки.

Нехай ранг матриці системи дорівнює r.

Випадок 1. Якщо $r = n$, то система має єдиний розв'язок, який є нульовим.

Випадок 2. Якщо $r < n$, то система має нескінченну множину ненульових розв'язків, які визначають так само, як і для довільної системи (4.1).

Розв'язки лінійної однорідної системи рівнянь мають такі властивості.

1. Якщо $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ і $(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ — два розв'язки однорідної системи (4.4), то їхня сума $(x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', \ldots, x_n' + x_n'')$ є також розв'язком системи (4.4).

2. Якщо $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є розв'язком системи (4.4), то $(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ при будь-якому α є також розв'язком системи (4.4).

Ці властивості можна об'єднати в одну: будь-яка лінійна комбінація розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь (4.4) є також розв'язком цієї системи.

Розглянемо *фундаментальну систему розв'язків.*

! *Означення*

Систему розв'язків однорідної лінійної системи рівнянь називають фундаментальною, якщо вона є лінійно незалежною, а будь-який інший розв'язок системи є її лінійною комбінацією.
Інакше кажучи, фундаментальною системою розв'язків називають максимально лінійну незалежну систему розв'язків.

Зрозуміло, що фундаментальна система існує тільки тоді, коли система (4.4) має ненульові розв'язки, тобто коли ранг матриці системи менший від кількості невідомих. При цьому система (4.4) має багато різних фундаментальних систем. Усі ці системи еквівалентні і тому мають однакову кількість розв'язків.

Теорема

Якщо ранг r матриці A системи лінійних однорідних рівнянь (4.4) менший від числа невідомих n, то будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї системи складається з $n-r$ розв'язків.

Доведення. Число $n-r$ є числом вільних невідомих у системі (4.4). Нехай вільними невідомими є $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Розглянемо довільний визначник d порядку $n-r$, що не дорівнює нулю. Запишемо його у вигляді:

$$d = \begin{vmatrix} c_{1(r+1)} & c_{1(r+2)} & \cdots & c_{1n} \\ c_{2(r+1)} & c_{2(r+2)} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{(n-r)(r-1)} & c_{(n-r)(r+2)} & \cdots & c_{(n-r)n} \end{vmatrix}.$$

Вважаючи, що елементи i-го рядка цього визначника ($1 \leq i \leq n-r$) є значеннями вільних невідомих і обчислюючи значення невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_r$, дістанемо розв'язок системи (4.4). Запишемо його як вектор $\alpha_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ir}, c_{ir-1}, c_{ir-2}, \ldots, c_{in})$. Система векторів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, є фундаментальною системою розв'язків системи (4.4). Справді, ця система лінійно незалежна, оскільки матриця, рядками якої є вектори α_i, містить відмінний від нуля мінор d порядку $n-r$.

Нехай $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n)$ — довільний розв'язок системи рівнянь (4.4). Доведемо, що вектор β лінійно виражається через вектори $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$.

Позначимо через α_i' $(i = 1, 2, \dots, n-r)$ i-й рядок визначника d. Розглядатимемо його як $(n-r)$-вимірний вектор. Нехай $\beta' = (b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n)$. Вектори α_i' $(i = 1, 2, \dots, n-r)$ є лінійно незалежними, оскільки $d \neq 0$.

Система $(n-r)$-вимірних векторів $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha'_{n-r}, \beta'$ лінійно залежна, оскільки число векторів у ній більше від їх вимірності. Отже, існують такі числа $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, що

$$\beta' = k_1 \alpha_1' + k_2 \alpha_2' + \dots + k_{n-r} \alpha_{n-r}'.$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$\delta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-r} \alpha_{n-r} - \beta .$$

Вектор δ є розв'язком однорідної системи (4.4) як лінійна комбінація розв'язків цієї системи. З передостанньої рівності випливає, що в розв'язку δ значення всіх вільних невідомих дорівнюють нулю. Проте єдиний розв'язок системи (4.4), який дістаємо при нульових значеннях вільних невідомих, є нульовим розв'язком. Отже, $\delta = 0$, тобто

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-r} \alpha_{n-r} .$$

Теорему доведено.

Приклад. Розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Ранг матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -7 \\ 1 & 11 & -12 & 34 \end{pmatrix}$$

дорівнює 2.

Запишемо два перших рівняння у вигляді

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 , \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 . \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо загальний розв'язок

$$x_1 = \frac{19}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 , \; x_2 = \frac{7}{8} x_3 - \frac{25}{8} x_4 .$$

Тут $n = 4$, $r = 2$. Отже, фундаментальна система розв'язків складається з двох розв'язків. Щоб знайти одну з фундаментальних систем, розглянемо два вектори (1, 0) і (0, 1). Вважатимемо, що вільні невідомі x_3 і x_4 дорівнюють координатам цих векторів:

$$x_3 = 1,\ \ x_4 = 0,\ \ x_1 = \frac{19}{8},\ \ x_2 = \frac{7}{8};$$
$$x_3 = 0,\ \ x_4 = 1,\ \ x_1 = \frac{3}{8},\ \ x_2 = -\frac{25}{8}.$$

Розв'язки $x_1 = \frac{19}{8},\ x_2 = \frac{7}{8},\ x_3 = 1,\ x_4 = 0$ і $x_1 = \frac{3}{8},\ x_2 = -\frac{25}{8},\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$ лінійно незалежні, оскільки вектори (1, 0) і (0, 1) лінійно незалежні. Оскільки розв'язків два, то вони й утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Є також й інші фундаментальні системи розв'язків, відмінні від розглянутої.

Встановимо зв'язок між розв'язками неоднорідних і однорідних систем рівнянь.

Нехай задано систему неоднорідних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.5}$$

Систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

яку дістаємо із системи (4.5) внаслідок заміни вільних членів нулями, називають зведеною системою для системи (4.5).

Залежність між розв'язками систем (4.5) і (4.6) виражається такими теоремами.

Теорема

Сума будь-яких розв'язків систем (4.5) і (4.6) є розв'язком системи (4.5).

Доведення. Справді, нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — розв'язок системи (4.5), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — розв'язок системи (4.6). Візьмемо будь-яке рівняння системи (4.5), наприклад k-те, і підставимо в нього замість невідомих числа $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n$. Дістанемо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\beta_j = b_k + 0 = b_k .$$

Теорему доведено.

Теорема

Різниця будь-яких двох розв'язків системи (4.5) є розв'язком зведеної системи (4.6).

Д о в е д е н н я . Справді, нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ і $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ — розв'язки системи (4.5). Візьмемо будь-яке рівняння системи (4.6), наприклад k-те, і підставимо в нього замість невідомих числа $\alpha_1 - \alpha_1', \alpha_2 - \alpha_2', \ldots, \alpha_n - \alpha_n'$. Дістанемо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(\alpha_j - \alpha_j') = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\alpha_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\alpha_j' = b_k - b_k = 0 .$$

Теорему доведено.

З цих теорем випливає, що, знайшовши деякий частинний розв'язок системи неоднорідних рівнянь (4.5) і додавши до нього кожний з розв'язків зведеної системи (4.6), дістанемо всі розв'язки системи (4.5), тобто загальний розв'язок неоднорідної системи (4.5) дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку цієї системи і загального розв'язку зведеної системи (4.6).

ВПРАВИ

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 = 20; \end{cases}$

$$
\text{д)}\ \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8; \end{cases} \quad \text{е)}\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3; \end{cases}
$$

$$
\text{є)}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \end{cases}
$$

$$
\text{ж)}\ \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2; \end{cases}
$$

$$
\text{з)}\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases} \quad \text{и)}\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}
$$

$$
\text{і)}\ \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}
$$

Вказівка. Якщо задані системи сумісні, то загальний, а також деякий частинний їх розв'язок можна знайти одним із розглянутих вище методів.

2. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків однорідних систем рівнянь:

$$
\text{а)}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}
$$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ \quad 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

Частина II

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Розділ 5

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В n-ВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

§ 1. Гіперплощина й півпростір

З курсу аналітичної геометрії відомо, що будь-яке рівняння першого степеня $A_1 x_1 + A_2 x_2 = C$ зображає на площині $x_1 O x_2$ пряму, перпендикулярну до вектора $\vec{A}(A_1, A_2)$. Вектор $\vec{A}(A_1, A_2)$ називають *нормальним вектором прямої* $A_1 x_1 + A_2 x_2 = C$.

Якщо записати рівняння $A_1 x_1 + A_2 x_2 = C$ у вигляді рівняння у відрізках на осях, тобто $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 1$, то числа a_1, a_2 виражають величини відрізків, які пряма відтинає на координатних осях.

Аналогічно рівняння $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = C$ у тривимірному просторі зображає площину, перпендикулярну до вектора $\vec{A}(A_1, A_2, A_3)$, який називають *нормальним вектором площини*.

Рівняння $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ є рівнянням площини у відрізках на осях, числа a_1, a_2, a_3 — величини відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях.

Рівняння площини в тривимірному просторі, а також прямої на площині, можна подати у векторній формі $(\vec{A}^\circ \vec{X}) = p$, де $\vec{A}^\circ$ — одиничний вектор, перпендикулярний до площини, або нормальний вектор площини; $\vec{X}$ — поточний радіус-вектор площини, тобто вектор, який сполучає початок координат з довіль-

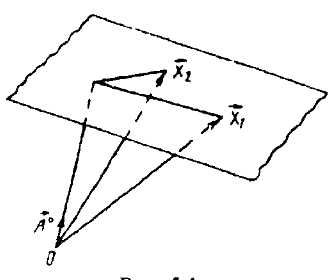

Рис. 5.1

ною точкою площини; p — відстань від початку координат до площини.

Рівняння $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) = p$ означає, що проекція будь-якого радіуса-вектора $\vec{X}$ площини на напрям нормального вектора $\vec{A}^{\circ}$ дорівнює p (рис. 5.1).

Узагальненням поняття прямої на площині та площини в тривимірному просторі є поняття *гіперплощини.*

! *Означення*

Гіперплощиною в n-вимірному просторі називають геометричне місце точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати яких задовольняють рівняння

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = C. \tag{5.1}$$

Вважатимемо, що ця гіперплощина нормальна до вектора $\vec{A}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ і що рівнянню

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \tag{5.1'}$$

відповідає гіперплощина, яка відтинає на координатних осях відрізки $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Векторне рівняння $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) = p$ в n-вимірному просторі визначає гіперплощину, нормальну до одиничного вектора $\vec{A}^{\circ}$ і розміщену на відстані p від початку координат. Пряма на площині ділить її на дві частини, які називають *півплощинами*. Площина в тривимірному просторі також ділить весь простір на дві частини, які називаються *півпросторами*. Аналогічно гіперплощина в n-вимірному просторі ділить цей простір на дві частини, кожну з яких називають *півпростором*.

Нехай деяка гіперплощина в n-вимірному просторі задається рівнянням $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) = p$. Тоді для точок M одного з півпросторів проекції OC_1 векторів, що їх зображають, на напрям нормального вектора $\vec{A}^{\circ}$ менші від p, а для точок N другого півпростору проекції OC_2 векторів, що їм відповідають, на $\vec{A}^{\circ}$ більші від p (рис. 5.2).

Отже, одним з півпросторів є множина векторів (точок) $\vec{X}$, для яких виконується нерівність $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) < p$, а для векторів (точок) другого півпростору — $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) > p$. Сама гіперпло-

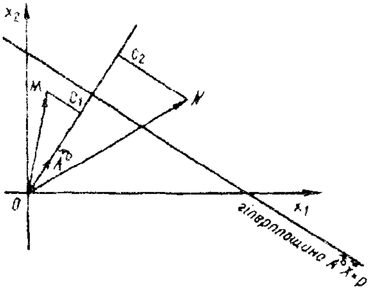

Рис. 5.2

щина може бути приєднана до одного з півпросторів. Тоді вся множина векторів (точок) n-вимірного простору поділяється на два види: вектори (точки), для яких $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) \le p$, і точки, для яких $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) > p$ або навпаки $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) < p$ і $(\vec{A}^{\circ}\vec{X}) \ge p$.

Для того щоб визначити належність вектора $\vec{X}$ (точки) до того чи іншого півпростору, треба координати вектора підставити в нерівність, що зображає цей півпростір. Якщо нерівність виконується, то вектор (точка) належить йому, в противному разі — не належить.

Приклад. Чи належить точка семивимірного простору X^* (1, 0, 2, 3, 5, – 2, 4) півпростору $2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 - 11x_6 + 3x_7 \ge 4$?

Р о з в ' я з а н н я. Підставивши координати точки в нерівність, дістанемо $2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - 11 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 32 > 4$. Отже, точка належить заданому півпростору.

§ 2. Поняття про відрізок в n-вимірному просторі

Розглянемо на площині дві точки M_1 і M_2 та їхні радіуси-вектори $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$ і $\vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$ (рис. 5.3).

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. Якщо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ помножити на t $(0 \le t \le 1)$, то дістанемо вектор $\vec{\rho} = t \cdot \overrightarrow{MM_1}$, колінеарний вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ і напрямлений так само як і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, оскільки $t \ge 0$. Якщо початок вектора $\vec{\rho}$ помістити в точку M_1, то його кінець M буде всередині відрізка $\overline{M_1M_2}$.

При $t = 0$ вектор $\vec{\rho} = \vec{0}$ і точка M збігається з точкою M_1, при $t = 1$ вектор $\vec{\rho} = \overrightarrow{M_1M_2}$ і точка M збігається з точкою M_2. Якщо t зростає від 0 до 1, то точка M пробігає відрізок від M_1 до M_2.

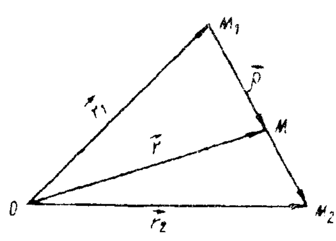

Рис. 5.3

Радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ дорівнює сумі векторів $\vec{r}_1$ і $\vec{\rho}$, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,(\,\vec{r}_2 - \vec{r}_1\,) = (1 - t\,)\,\vec{r}_1 + t\,\vec{r}_2\ .$$

При зростанні t від 0 до 1 кінець радіуса-вектора $\vec{r}$ пробігає відрізок M_1M_2.

Отже, радіус-вектор $\vec{r}$ будь-якої точки M, що лежить на відрізку M_1M_2, визначається рівнянням

$$\vec{r} = (1 - t\,)\,\vec{r}_1 + t\,\vec{r}_2\ , \quad \text{де} \quad 0 \le t \le 1. \tag{5.2}$$

Наведені міркування переносяться й на тривимірний простір.

Узагальнивши ці міркування на випадок n-вимірного простору, природно вважати, що відрізком M_1M_2 n-вимірного простору є сукупність точок M, радіуси-вектори яких задаються рівнянням (5.2).

У скалярній формі рівняння (5.2) має вигляд

$$x_i = (1 - t\,)\,x_i^{(1)} + t\,x_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ \ 0 \le t \le 1). \tag{5.3}$$

Тут $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ і $(\,x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\,)$ є координатами точок M_1 і M_2 або радіусів-векторів $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$.

§ 3. Опуклі множини

! *Означення*

Сукупність точок n-вимірного простору називають опуклою множиною або тілом, якщо воно разом з будь-якими двома своїми точками M_1 і M_2 містить і весь відрізок M_1M_2, що їх сполучає (рис. 5.4).

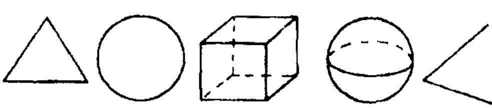

Рис. 5.4

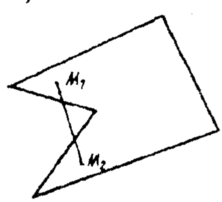

Рис. 5.5

Фігура, зображена на рис. 5.5, не є опуклою множиною. Справді, відрізок, що сполучає точки M_1 і M_2 , не належить повністю фігурі.

! ***Означення***

Перерізом множин називають сукупність точок, що належать кожній з цих множин.

Теорема

Переріз будь-якої кількості опуклих множин є також опуклою множиною.

Д о в е д е н н я. Розглянемо дві будь-які точки M_1 і M_2 перерізу. Ці точки належать кожній з перетинних множин. Проте ці множини опуклі, тому відрізок M_1M_2 належить кожній з них, а отже, належить і перерізу їх, тобто переріз є опуклою множиною.

Теорему доведено.

! ***Означення***

Опуклою лінійною комбінацією точок $A_1, A_2, \ldots, A_m$ n-вимірного лінійного простору називають точку $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_m A_m$, де $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

При $m = 2$ опукла лінійна комбінація збігається з точкою відрізка.

Справді, якщо позначити $1 - t = \alpha_1$, $t = \alpha_2$, то рівняння відрізка (5.2) набере вигляду $\vec{r} = \alpha_1 \vec{r_1} + \alpha_2 \vec{r_2} (\alpha_i \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$, тобто довільний вектор (точка) відрізка є опуклою лінійною комбінацією векторів (точок) $\vec{r_1}$ і $\vec{r_2}$. Справедливим є й обернене твердження: будь-яка точка, що є лінійною комбінацією двох точок n-вимірного простору, лежить на відрізку, що сполучає ці точки.

Щоб довести це, досить в лінійній комбінації $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ $(\alpha_i \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ позначити $\alpha_1 = 1 - t$, $\alpha_2 = t$.

! ***Означення***

Кутовими або крайніми точками опуклої множини називають точки, які не є опуклими лінійними комбінаціями двох будь-яких довільних точок цієї множини.

Так, якщо множиною M є відрізок, що сполучає деякі дві точки n-вимірного простору M_1 і M_2, то ці точки є кутовими точками множини M, оскільки їх не можна визначити як лінійні комбінації будь-яких інших точок відрізка.

У трикутнику ABC є три кутові точки — його вершини (рис. 5.6).

Щодо будь-якої іншої точки трикутника (як граничної, так і внутрішньої), то вона є опуклою лінійною комбінацією вершин A, B і C. Для точок, що лежать на сторонах AB, BC і CA, це твердження випливає з означення відрізка.

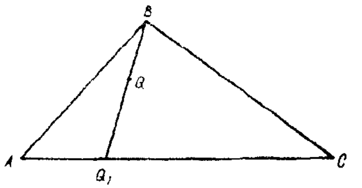

Рис. 5.6

Покажемо, що будь-яка внутрішня точка Q трикутника також є опуклою лінійною комбінацією вершин A, B і C. Для цього через точки B і Q проведемо пряму до перетину зі стороною AC у деякій точці Q_1. Точку Q_1 можна подати як лінійну комбінацію точок A і C:

$$Q_1 = \alpha_1 A + \alpha_2 C \quad (\alpha_i \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1).$$

Точку Q, як точку відрізка BQ_1, також можна подати у вигляді лінійної комбінації точок B і Q_1, тобто $Q = \beta_1 B + \beta_2 Q_1$ $(\beta_i \geq 0,\ \beta_1 + \beta_2 = 1)$. Підставивши сюди значення Q_1, дістанемо вираз

$$Q = \beta_1 B + \beta_2 (\alpha_1 A + \alpha_2 C) = \beta_1 B + \alpha_1 \beta_2 A + \alpha_2 \beta_2 C,$$

який є опуклою лінійною комбінацією. Справді,

$$\beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_2 = \beta_1 + \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2 = 1$$

і всі коефіцієнти β_1, $\alpha_1 \beta_2$ і $\alpha_2 \beta_2$ невід'ємні. Отже, Q є опуклою лінійною комбінацією точок A, B і C.

! *Означення*

n-Вимірним симплексом називають множину векторів (точок) $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ n-вимірного простору, що задовольняє умову

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad (\alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Двовимірним симплексом є відрізок, що лежить у першій чверті і відтинає на осях координат одиничні відрізки (рис. 5.7, *а*); тривимірним симплексом є трикутник, який розміщений у додатному октанті; він відтинає на осях координат одиничні відрізки (рис. 5.7, *б*).

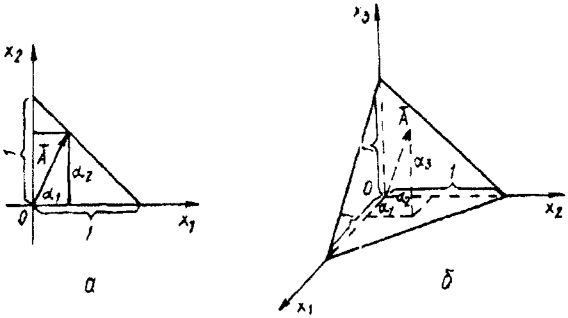

Рис. 5.7

Нехай в n-вимірному просторі задано l точок $P_1, P_2, \ldots, P_l$. Множину точок $Q = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_i$, утворену при всіх можливих змінах величин α_i, що задовольняють умову $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$ ($\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$), називають лінійною оболонкою точок $P_1, P_2, \ldots, P_l$.

Справедливим є таке твердження.

Т е о р е м а

Будь-яка опукла множина M містить лінійну оболонку кожної своєї підмножини.

Д о в е д е н н я. При $l = 2$ це твердження відповідає означенню опуклої множини.

Нехай $l = 3$. Візьмемо три довільні точки P_1, P_2, P_3, що належать M, і розглянемо їхню лінійну оболонку

$$Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (\alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3).$$

Зафіксуємо деякі значення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і утворимо вектор $\vec{A} = \vec{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, що належить тривимірному симплексу (рис. 5.8).

Проведемо через вектор $\vec{A}$ площину, перпендикулярну до площини $x_1 O x_2$ і подамо вектор $\vec{A}$ у вигляді суми двох векторів: $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}''$, де $\vec{A} = \overrightarrow{ON'}$, $\vec{A}'' = \overrightarrow{N'F}$. Оскільки вектор $\vec{A}'$ належить двовимірному симплексу $A'(\alpha'_1, \alpha'_2)$, де $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, то йому відповідає вектор $\vec{P_4} = \alpha'_1 P_1 + \alpha_2 P_2$.

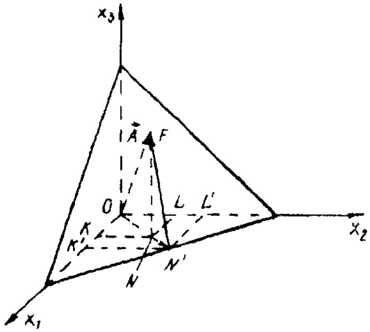

Рис. 5.8

Виразимо значення α'_1 і α'_2 через α_1 і α_2. З прямокутників $OKNL$ і $OK'N'L'$ маємо: $OK = \alpha_1$, $OL = \alpha_2$, $OK' = \alpha'_1$, $OL' = \alpha'_2$; $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}$ або $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} = \frac{\alpha'_1 + \alpha'_2}{\alpha'_2} = \frac{1}{\alpha'_2}$. Аналогічно $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha'_1}$, звідки

$$\alpha_1 = \alpha'_1(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$\alpha_2 = \alpha'_2(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Тоді

$$Q = \alpha'_1(\alpha_1 + \alpha_2) P_1 + \alpha'_2(\alpha_1 + \alpha_2) P_2 + \alpha_3 P_3 =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha'_1 P_1 + \alpha'_2 P_2) + \alpha_3 P_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) P_4 + \alpha_3 P_3 =$$

$$= \alpha_4 P_4 + \alpha_3 P_3, \text{ де } \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Оскільки P_3 і P_4 належать множині M, а $\alpha_4 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, то вектор Q належить опуклій множині M, що й треба було довести.

Методом індукції доведення переноситься на будь-яке число l.

З доведеної теореми випливає, що кожній підмножині точок P_i опуклої множини M можна поставити у відповідність принаймні одну точку P з M, що належить лінійній оболонці точок P_i. Обернене твердження справджується не завжди.

Кутові точки множини не належать лінійній оболонці інших точок цієї множини.

! *Означення*

Опуклу лінійну оболонку скінченного числа точок називають опуклим многогранником.

Кутові точки многогранника називають його *вершинами*, відрізки, що сполучають дві сусідні вершини, називають *ребрами*; плоскі многокутники, що обмежують многогранник, називають його *гранями*.

Як було вже показано, трикутник є опуклою лінійною оболонкою трьох його кутових точок (вершин).

Ця властивість характерна для всіх опуклих многогранників.

Теорема

Якщо M — опуклий многогранник, а $\overline{M}$ — множина його кутових точок то, M є опуклою лінійною оболонкою множини $\overline{M}$.

Доведення. Нехай M є опуклою лінійною оболонкою точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тоді будь-яка кутова точка множини M є однією з точок A_i, оскільки кутові точки не можуть бути лінійними комбінаціями інших точок.

Виберемо серед точок A_i мінімальну підмножину, опуклою лінійною оболонкою яких є множина M. Припустимо, що такою підмножиною є $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Тоді кожна з цих точок є кутовою. Якщо, наприклад,

$$A_r = \lambda A + (1 - \lambda) A' \quad (0 < \lambda < 1), \tag{5.4}$$

то

$$A = A' + A_r.$$

Справді, виразивши A і A' через A_i, матимемо

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i, \quad A' = \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i A. \tag{5.5}$$

Підставивши рівності (5.5) у рівність (5.4), дістанемо, що A_r є опуклою комбінацією векторів A_i:

$$A_r = \sum_{i=1}^{r} \mu_i A_i. \tag{5.6}$$

Нехай $\mu_r < 1$, тоді

$$A_r = \frac{1}{1 - \mu_r} = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i A_i,$$

що суперечить мінімальності підмножини $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

Крім того, якщо $\mu_r = 1$, то $\mu_i = 0$ для $i \neq r$. Визначивши μ_i через λ_i і λ'_i, знаходимо, що

$$\mu_i = \lambda \lambda_i + (1 - \lambda) \lambda'_i .$$

Отже, для $i \neq r$ виконується рівність

$$\lambda \lambda_i + (1 - \lambda) \lambda'_i = 0.$$

Звідси $\lambda_i = \lambda'_i = 0$. Отже,

$$A = A' = A_r .$$

Теорему доведено.

Таким чином, на основі цієї теореми опуклий многогранник можна розглядати як множину, що є опуклою лінійною оболонкою множини його кутових точок (вершин). Наприклад, куб є опуклою лінійною оболонкою восьми його вершин.

! *Означення*

Опорною прямою многокутника називають пряму, яка має з ним принаймні одну спільну точку, і таку, що весь многокутник лежить з одного боку від неї (рис. 5.9).

Прямі AB, CD, MN, PQ, TS — опорні. Опорна пряма може мати з опуклим многокутником спільну частину, яка складається з однієї точки (прямі AB, MN) або з відрізка (пряма CD).

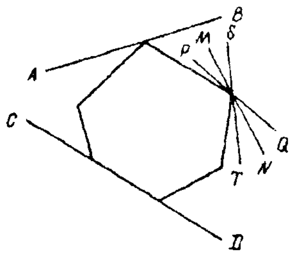

Рис. 5.9

Аналогічно опорною площиною опуклого многогранника називають площину, яка має з многогранником принаймні одну спільну точку, і таку, що весь многогранник лежить з одного боку від цієї площини.

Опорна площина може мати з многогранником спільну частину, яка складається з однієї точки (вершини многогранника); з відрізка (ребра многогранника) або з многокутника (грані многогранника).

Як бачимо, через кожну вершину і кожне ребро многогранника можна провести нескінченну кількість опорних площин, а через будь-яку грань многогранника проходить тільки одна опорна площина.

§ 4. Системи лінійних нерівностей

Нехай у двовимірному просторі задано n лінійних нерівностей з двома невідомими

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.7}$$

Кожна нерівність виду $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$ множенням її на -1 зводиться до виду (5.7).

Як було вже показано, кожна нерівність системи (5.7) визначає одну з двох півплощин, на які пряма $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ поділяє площину. Гранична пряма $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ перпендикулярна до вектора $\vec{A_i}(a_{i1},\ a_{i2})$.

Кожну пару чисел (точку площини), що задовольняє всі нерівності системи (5.7), називають *розв'язком даної системи*.

Наведемо кілька прикладів.

1. Нерівність $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{5} \le 1$, або $5x_1 + 2x_2 \le 10$ визначає півплощину, яка розміщена під граничною прямою $5x_1 + 2x_2 = 10$, що перпендикулярна до вектора $\vec{A}\ (5, 2)$ (рис. 5.10).

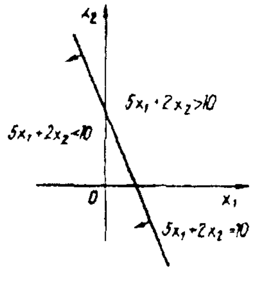

Рис 5.10

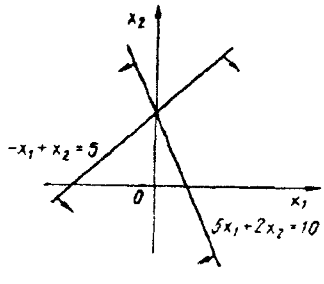

Рис. 5.11

2. Дві нерівності

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + \ \ x_2 \le 5 \end{cases}$$

визначають частину площини, зображену на рис. 5.11. Розв'язком цієї системи нерівностей є перетин (спільна частина) півплощин, які визначаються кожною нерівністю системи.

3. Розв'язком системи трьох нерівностей

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + \ \ x_2 \le 5, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$$

є множина точок площини, які утворюють трикутник MNP (рис. 5.12), який є перетином півплощин, що визначаються кожною з нерівностей системи.

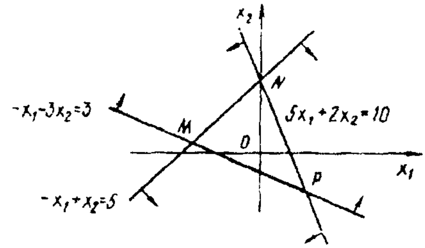

Рис. 5.12

4. Розв'язком системи чотирьох нерівностей

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\le 10, \\ -x_1\ \ +x_2\le 5, \\ -x_1-3x_2\le 3, \\ x_1\qquad\ \le 1 \end{cases}$$

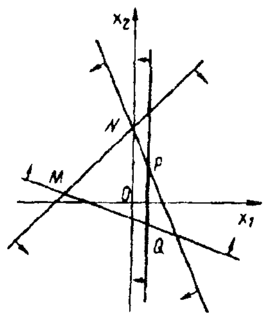

Рис. 5.13

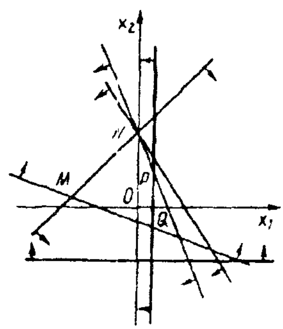

Рис. 5.14

є множина точок площини, яка утворює чотирикутник $MNPQ$ (рис. 5.13).

5. Розв'язком системи семи нерівностей

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\le 10, \\ -x_1+\ \ x_2\le 5, \\ -x_1\ -3x_2\le 3, \\ x_1\qquad\ \le 1, \\ 5x_1+3x_2\ \le 15, \\ -7x_1+8x_2\le 56, \\ \qquad -2x_2\le 7 \end{cases}$$

є чотирикутник $MNPQ$ (рис. 5.14). Півплощини, що визначаються нерівностями $5x_1 + 3x_2 \le 15$, $-7x_1 + 8x_2 \le 58$ і $-2x_1 \le 7$, повністю містять у собі чотирикутник $MNPQ$.

6. Розв'язком системи п'яти нерівностей

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le 1, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 15 \end{cases}$$

є одна точка N (0, 5) (рис. 5.15). Чотирикутник $MNPQ$ і півплощина, яка визначається нерівністю $5x_1 + 3x_2 \ge 15$, мають одну спільну точку N.

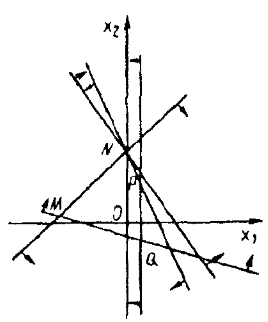

Рис. 5.15

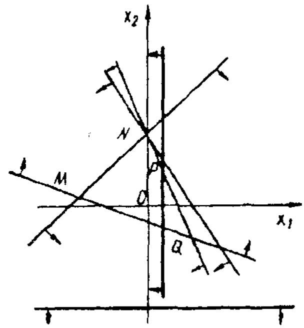

Рис. 5.16

7. Система шести нерівностей

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le 1, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_2 \le -7 \end{cases}$$

є несумісною (рис. 5.16).

Проаналізувавши наведені приклади, можна дійти таких висновків.

1. Система нерівностей може бути сумісною. У цьому разі є принаймні одна точка площини, що належить усім півплощинам, які визначаються кожною з нерівностей системи. Множина точок, яка є розв'язком системи нерівностей, може бути півплощиною, обмеженим або необмеженим многокутником, прямою чи її відрізком, точкою.

Сукупністю точок, що задовольняють систему нерівностей (множину її розв'язків), є опукле тіло.

2. Система нерівностей може бути несумісною.

У тривимірному просторі систему n лінійних нерівностей можна записати у вигляді

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5.8}$$

Кожна нерівність системи (5.8) визначає півпростір з граничною площиною $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$, перпендикулярною до вектора $\overrightarrow{A_i}\,(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$.

Розв'язком системи нерівностей (5.8) є сукупність точок простору, спільних для всіх півпросторів, що визначаються нерівностями системи. Якщо система сумісна, то множиною її розв'язків є опукла множина, яка може бути півпростором, многогранником (обмеженим або необмеженим), площиною, многокутником, прямою, відрізком прямої, точкою.

У сумісній системі серед її нерівностей можуть бути й зайві, тобто такі, після вилучення яких множина розв'язків не зміниться. Так, у прикладі 5 нерівності п'ята, шоста і сьома — зайві.

Зайві нерівності можуть бути двох видів:

1) нерівності, граничні прямі (площини) яких не перетинаються з множиною розв'язків системи (шоста і сьома нерівності у прикладі 5);

2) нерівності, граничні прямі (площини) яких є опорними для множини розв'язків (п'ята нерівність у прикладі 5).

Якщо півпростори, що визначаються нерівностями системи, не мають спільних точок, то система нерівностей несумісна.

Нехай в m-вимірному просторі задано систему нерівностей

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.9}$$

За аналогією з дво- і тривимірним просторами кажуть, що кожна з нерівностей системи (5.9) визначає в m-вимірному просторі півпростір з граничною гіперплощиною.

Якщо існує принаймні одна точка, спільна для всіх півпросторів, що визначаються нерівностями системи (5.9), то систему називають сумісною, у противному разі — несумісною.

Множиною розв'язків системи нерівностей (5.9) є опукла множина в m-вимірному просторі. Справді, досить показати, що коли X_1 і X_2 — два розв'язки системи (5.9), то будь-яка лінійна комбінація їх $\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$, де $0 \leq \alpha \leq 1$, також буде розв'язком цієї системи. Запишемо систему (5.9) у векторно-матричній формі

$$AX \leq B, \tag{5.10}$$

де A — матриця коефіцієнтів при невідомих, X — невідомий вектор, B — вектор вільних членів.

Підставивши $\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$ у нерівність (5.9) і врахувавши, що X_1 і X_2 є розв'язками, дістанемо

$$A[\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2] = \alpha AX_1 + (1 - \alpha) AX_2 \leq$$

$$\leq \alpha B + (1 - \alpha) B = B,$$

що і треба було довести.

ВПРАВИ

Розв'язати системи нерівностей:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \leq 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5 \leq 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5 \geq 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ 3x_1 + x_2 - 6 \geq 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0, \\ x_1 - x_2 - 1 \leq 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3 \leq 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 1 \geq 0, \\ -3x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6 \geq 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 10 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3 \leq 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 13 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0, \\ 4x_1 - x_2 - 19 \geq 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 - 8 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6 \geq 0, \\ x_1 - x_2 - 3 \leq 0. \end{cases}$

Розділ 6

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

§ 1. Математичні моделі деяких найпростіших економічних задач

Методами лінійного програмування розв'язують безліч економічних задач. Розглянемо найтиповіші з них та їхні математичні моделі.

Задачі оптимального виробничого планування

Задача про максимальну рентабельність підприємства

Прикладом задачі такого типу може бути визначення максимальної рентабельності підприємства, яке виготовляє різні види продукції з наявної на підприємстві сировини.

Задача. Для виготовлення столів і шаф на деякому підприємстві використовують два види деревини. Витрати деревини кожного виду на кожний предмет задано (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Виріб	Сировина	
	I вид деревини, $м^3$	II вид деревини, $м^3$
Стіл	0,3	0,1
Шафа	0,12	0,2

Прибуток підприємства від виробництва одного стола становить 12 грн., а шафи — 15 грн. Скільки столів і шаф має виготовити підприємство, щоб забезпечити найвищу рентабельність, якщо в розпорядженні підприємства є 84 $м^3$ деревини I виду і 88 $м^3$ деревини II виду.

Математична постановка задачі

Припустимо, що підприємство має випустити x_1 столів і x_2 шаф. За змістом задачі невідомі x_1 і x_2 повинні бути невід'ємними.

На виготовлення одного стола витрачається 0,3 $м^3$ деревини I виду. Тоді на виготовлення x_1 столів буде витрачено $0{,}3\,x_1$ ($м^3$) цієї деревини, а на виготовлення x_2 шаф — $0{,}12\,x_2$ ($м^3$) деревини I виду. Тоді всі витрати деревини I виду на виготовлення столів і шаф становитимуть $0{,}3\,x_1 + 0{,}12\,x_2$. Ураховуючи запаси підприємства, ця кількість не повинна перебільшувати 84 $м^3$

Таким чином,

$$0{,}3\,x_1 + 0{,}12\,x_2 \le 84. \tag{6.1}$$

Аналогічно для деревини II виду дістанемо нерівність

$$0{,}1\,x_1 + 0{,}2\,x_2 \le 88. \tag{6.2}$$

Прибуток підприємства від одного стола становить 12 грн., а від x_1 столів $12\,x_1$ (грн.). Прибуток від x_2 шаф становить $15\,x_2$ (грн.).

Отже, загальний прибуток підприємства становитиме

$$z = 12\,x_1 + 15\,x_2. \tag{6.3}$$

Задача полягає в тому, що треба виготовляти таку кількість x_1 столів і таку кількість x_2 шаф, щоб прибуток був максимальним, проте не можна виходити за межі запасів підприємства. Математично це записують так:

$$\begin{cases} 0{,}3\,x_1 + 0{,}12\,x_2 \le 84, \\ 0{,}1\,x_1 + 0{,}2\,x_2 \le 88, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0; \end{cases} \tag{6.4}$$

$$z = 12\,x_1 + 15\,x_2.$$

Треба знайти такі невід'ємні значення x_1 і x_2, які задовольняють систему лінійних нерівностей (6.4) і перетворюють лінійну функцію (6.3) на максимум.

Розглянута задача досить спрощена і числа в ній умовні, але підхід до задач реального життя є таким самим, як і в елементарних задачах. У загальному випадку задачу формулюють так.

Для виготовлення кожного з n видів продукції використовується m видів сировини, причому витрати i-го виду сировини на одиницю j-го виду продукції становлять a_{ij} одиниць. З кожної одиниці продукції j-го виду підприємство одержує прибуток p_j гривень. Треба визначити, скільки одиниць $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кожного виду продукції має виготовляти підприємство, щоб забезпечити найвищу рентабельність виробництва, якщо в розпорядженні підприємства є a_i одиниць i-ї сировини ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Міркуючи так само, як і в наведеному вище прикладі, складаємо математичну модель задачі:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le a_i \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, m); \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \ldots, \;\; x_n \ge 0; \end{cases} \tag{6.5}$$

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n. \tag{6.6}$$

Треба знайти невід'ємний розв'язок $x_1, x_2, ..., x_n$ системи лінійних нерівностей (6.5), який перетворює лінійну функцію (6.6) у максимум.

Задача про оптимальне використання обладнання

Задача. На дільниці цеху виготовляють деталі двох найменувань A і B за допомогою двох операцій на токарному та фрезерувальному верстатах. Витрати часу на обробку однієї деталі на кожному з верстатів (у годинах) задано таблицею 6.2.

Таблиця 6. 2

Верстат	Деталь	
	A	B
Токарний	**0,3**	**0,1**
Фрезерувальний	**0,16**	**0,4**

За планом деталей A необхідно виготовити не менше як 450 одиниць за місяць, а деталей B — не менше як 180 одиниць. Скласти найкращу програму, коли відомо, що фонд часу t (тривалість роботи) кожного з верстатів становить: токарний верстат може працювати 170 год за місяць, а фрезерувальний — 160 год.

Математична постановка задачі

Припустимо, що деталей A треба виготовити x_1 одиниць, а деталей B — x_2 одиниць. Тоді на обробку x_1 деталей A на токарному верстаті необхідно $0{,}3\,x_1$ (год), а на x_2 деталей B — $0{,}1\,x_2$ (год). Сума $0{,}3\,x_1 + 0{,}1\,x_2$ становить час, витрачений на токарному верстаті на обробку всіх деталей, що виробляє цех. Цей час не може перебільшувати фонд часу токарного верстата, тобто

$$0{,}3\,x_1 + 0{,}1\,x_2 \le 170. \tag{6.7}$$

Аналогічно

$$0{,}16\,x_1 + 0{,}4\,x_2 \le 160. \tag{6.8}$$

Оскільки за планом деталей A треба виготовити не менше як 450 одиниць, то це означає, що

$$x_1 \ge 450. \tag{6.9}$$

Аналогічно

$$x_2 \ge 180. \tag{6.10}$$

Задача виробництва полягає в тому, щоб не перебільшити фонд часу кожного з верстатів, виконати план і випустити найбільшу загальну кількість продукції.

Якщо загальну кількість продукції позначити буквою z, то

$$z = x_1 + x_2.$$

Таким чином, дістали таку математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 0{,}3\,x_1 + 0{,}1\,x_2 \le 170, \\ 0{,}16\,x_1 + 0{,}4\,x_2 \le 160, \\ x_1 \qquad\quad \ge 450, \\ \qquad\quad x_2 \ge 180; \end{cases} \tag{6.11}$$

$$z = x_1 + x_2, \tag{6.12}$$

де треба знайти такі значення невідомих x_1, x_2, які задовольняють систему нерівностей (6.11) і перетворюють лінійну функцію (6.12) у максимум. Невід'ємність змінних x_1 і x_2 випливає з нерівностей (6.9) і (6.10).

Задача на суміш

Задача на суміш зводиться до знаходження найдешевшого набору з певних вихідних матеріалів, який забезпечує одержання суміші із заданими властивостями. Прикладами таких задач є задачі на складання рецептури шихти в металургійному виробництві. Вихідні умови цих задач такі. Метал деякої марки, що виплавляється, повинен за хімічним складом відповідати певним вимогам, наприклад містити не менше встановленого відсотка марганцю або різних легуючих елементів та не більше встановленого відсотка шкідливих домішків, таких, як сірка, фосфор тощо.

Задовольнити ці умови можна тільки підбором у тих чи інших пропорціях різних шихтових матеріалів. Ці пропорції повинні бути такими, щоб виконувалися зазначені вимоги щодо хімічного складу металу. Проте різні шихтові матеріали мають різну вартість. Отже, треба знайти такий склад шихти, який був би найдешевшим за умови збереження заданого хімічного складу.

Аналогічними є задачі складання дієти харчування та кормового раціону для сільськогосподарських тварин.

Задача. Для відгодівлі свиней на фермі в щоденний раціон кожної свині треба включати не менше як 6 одиниць поживної речовини A, 8 одиниць поживної речовини B і 12 одиниць поживної речовини C. Для відгодівлі можна використати три види кормів. Дані про вміст поживних речовин в одному кілограмі кожного корму подано в таблиці 6.3.

Таблиця 6.3

Корм	Поживна речовина		
	A	*B*	*C*
№ 1	2	1	3
№ 2	1	2	4
№ 3	3	1,5	2

Треба скласти раціон, який відповідав би всім вимогам за поживністю і був би найдешевшим, коли відомо, що один кілограм корму № 1 коштує 2 грн., корму № 2 — 3 грн., корму № 3 — 2,5 грн.

Математична постановка задачі

Позначимо через x_1, x_2, x_3 число кілограмів відповідно трьох видів кормів у кормовому раціоні свині. В 1 кг корму № 1 міститься 2 одиниці речовини A, а в x_1 (кг) міститься $2x_1$ одиниць цієї речовини; в x_2 (кг) корму № 2 міститься $1x_2$ одиниць речовини A і в x_3 (кг) корму № 3 міститься $3x_3$ одиниць речовини A. Тоді $2x_1 + 1x_2 + 3x_3$ становить загальну кількість одиниць поживної речовини A в раціоні. За умовою ця кількість речовини A не повинна бути меншою від 6. Отже,

$$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \geq 6.$$

Аналогічно $x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3$ — загальна кількість речовини B в усьому раціоні, і за умовою його повинно бути не менше від 8 одиниць, тобто

$$x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \geq 8.$$

Загальна кількість поживної речовини C у раціоні становить $3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ одиниць, і воно не повинно бути менше від 12, тобто

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12.$$

Вартість 1 кг корму № 1 становить 2 грн., а для раціону його треба взяти x_1 (кг). Отже, його вартість $2x_1$ (грн.). Аналогічно вартість корму № 2 в раціоні становить $3x_2$ (грн.) і вартість корму № 3 — $2{,}5x_3$ (грн.). Вартість усього раціону становить (у гривнях)

$$2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3.$$

Задача полягає в тому, щоб підібрати такий склад раціону, який задовольняв би всі умови з поживності і був би найдешевшим.

Математично задачу формулюють так. Знайти такі невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, які задовольняли б систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12 \end{cases}$$

і перетворювали б лінійну функцію

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3$$

у мінімум.

Задачі на розкрій промислових матеріалів

Підприємства машинобудування, металообробної промисловості від металургійних заводів одержують прокат у вигляді довгих труб, рейок, листів тощо. Меблевиробна промисловість одержує пиломатеріали у вигляді брусків, дощок, листів тощо. Постає запитання, як найкраще розкроювати матеріали, щоб відходи були мінімальними.

Першу таку задачу було розв'язано в 1948—1949 рр. у С.-Петербурзі (колишньому Ленінграді) на вагонобудівному заводі, внаслідок чого оптимальний розкрій листів на потреби виробництва дав значну економію.

Пізніше аналогічним методом було розв'язано таку саму задачу на одній з паперових фабрик м. Торонто. Фабрика одержувала рулони газетного паперу стандартної ширини. Ці рулони треба було розрізати на смуги різної ширини. За допомогою методів лінійного програмування було складено оптимальний план розкрою, який забезпечив 97,3 % корисного витрачання всього матеріалу, що на 1,5 % вище, ніж раніше, а це становило 15 т паперу за день.

Задачі цього типу проілюструємо на такому прикладі.

Задача. Для виготовлення певного виробу потрібні три планки: одна завдовжки 2 м і дві по 1,5 м кожна. Запас становить 400 рейок завдовжки 5 м кожна і 100 рейок завдовжки 6,5 м кожна.

Визначити, як різати всі ці рейки на планки, щоб одержати найбільшу кількість вказаних вище виробів.

Математична постановка задачі

Наявний запас рейок можна різати на планки потрібної довжини різними способами. Спочатку розглянемо рейки завдовжки 6,5 м.

Спосіб 1. Три рейки по 2 м ($3 \times = 6$ м). Через x_1 позначимо кількість рейок завдовжки 6,5 м, які будуть розрізані способом 1.

Спосіб 2. Дві рейки по 2 м ($2 \times 2 = 4$ м) і одна рейка завдовжки 1,5 м ($1 \times 1{,}5 = 1{,}5$ м). Позначимо через x_2 кількість рейок завдовжки 6,5 м, які будуть розрізані способом 2.

Спосіб 3. Одна рейка завдовжки 2 м ($1 \times 2 = 2$ м) і три рейки по 1,5 м ($3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ м). Через x_3 позначимо кількість рейок по 6,5 м, які будуть розрізані способом 3.

Спосіб 4. Чотири рейки по 1,5 м ($4 \times 1{,}5 = 6$ м). Через x_4 позначимо кількість рейок по 6,5 м, які будуть розрізані способом 4.

Розглянемо далі рейки завдовжки 5 м кожна.

Спосіб 5. Дві рейки по 2 м ($2 \times 2 = 4$ м). Через x_5 позначимо кількість п'ятиметрових рейок, які будуть розрізані способом 5.

Спосіб 6. Одна рейка завдовжки 2 м ($1 \times 2 = 2$ м) і дві рейки по 1,5 м ($2 \times 1{,}5 = 3$ м). Через x_6 позначимо кількість п'ятиметрових рейок, які будуть розрізані способом 6.

Спосіб 7. Три рейки по 1,5 м ($3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ м). Через x_7 позначимо кількість п'ятиметрових рейок, які будуть розрізані способом 7.

Уся кількість рейок завдовжки 6,5 м кожна становить 100 шт., з них x_1 буде розрізано способом 1, x_2 — способом 2, x_3 — способом 3 і x_4 — способом 4. Отже,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100.$$

Аналогічно

$$x_5 + x_6 + x_7 = 400.$$

Підрахуємо кількість планок завдовжки 2 і 1,5 м, які будуть одержані від розрізання рейок завдовжки 6,5 і 5 м всіма способами. За способом 1 з однієї рейки в 6,5 м буде одержано три планки по 2 м, усього способом 1 розрізають x_1 рейок. Отже, одержують $3x_1$ планок по 2 м. За способом 2 одержать $2x_2$ планок по 2 м, за способом 3 — $1 \cdot x_3$, за способом 5 — $2x_5$, за способом 6 — $1 \cdot x_6$. За способами 4 і 7 планок по 2 м не одержують. Таким чином, загальна кількість планок по 2 м становитиме

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6.$$

Аналогічно, загальна кількість планок по 1,5 м становитиме

$$x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_6 + 3x_7.$$

Оскільки на кожний виріб витрачається одна планка завдовжки 2 м і дві планки по 1,5 м, то

$$x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_6 + 3x_7 = 2\,(\,3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6\,).$$

Враховуючи, що на кожний виріб витрачається одна планка завдовжки 2 м, то кількість усіх виробів збігається з кількістю планок завдовжки 2 м. Позначивши через z кількість усіх виробів, матимемо

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6.$$

Отже, дістанемо таку математичну модель задачі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \\ \qquad x_5 + x_6 + x_7 = 400, \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_6 + 3x_7 = 2\,(\,3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6\,); \end{cases} \tag{6.13}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6. \tag{6.14}$$

Треба знайти такий невід'ємний розв'язок системи (6.13), який перетворював би лінійну функцію (6.14) у максимум, оскільки підприємство зацікавлене в максимальному випуску виробів.

Транспортні задачі та задачі спеціалізації й кооперування виробництва

Для розв'язання питань спеціалізації виробництва часто доводиться розв'язувати таку задачу:

а) є ряд різноманітних підприємств або цехів;
б) відома виробнича потужність кожного з цих підприємств або цехів;
в) є ряд інших підприємств або цехів, що споживають продукцію перших підприємств (цехів), тобто є споживачі.

Треба визначити:

1) скільки продукції та якої номенклатури необхідно виготовляти на кожному підприємстві-виробнику, щоб найефективніше задовольнити попит споживачів?
2) скільки продукції кожного підприємства або цеху необхідно доставити кожному підприємству-споживачеві, щоб дістати найкращий економічний ефект?

Аналогічна задача:

а) є ряд пунктів відправників;
б) у кожному пункті є певна кількість однорідного (або взаємозамінного) вантажу;
в) є ряд пунктів призначення;
г) відомо, скільки вантажу необхідно завезти в кожний пункт призначення;
д) відома вартість перевезення одиниці вантажу з кожного пункту відправника в кожний пункт призначення.

Визначити скільки з кожного пункту відправника необхідно направити вантажу в кожний пункт призначення, щоб транспортні витрати були найменшими. (Транспортна задача за критерієм вартості.)

За наявності товарів, що швидко псуються, або виходячи з деяких інших міркувань (наприклад під час війни), треба всі вантажі з пунктів відправлення доставити в пункти призначення за мінімально короткий термін, не враховуючи транспортні витрати. (Транспортна задача за критерієм часу.)

Часто необхідно скласти такий план перевезення, щоб і транспортні витрати, і час перевезення були мінімальними.

Конкретні задачі цієї групи, математичну постановку їх і методи розв'язування подано в розділі 11 «Транспортна задача».

Сільськогосподарські задачі

Галузь застосування математичних методів і, зокрема методів лінійного програмування, в сільському господарстві досить широка. За допомогою методів лінійного програмування розв'язують такі задачі.

1. Вибір найкращої структури посівних площ.

2. Вибір оптимальних розмірів господарств різних форм власності.

3. Раціональне розміщення капіталовкладень.

4. Визначення оптимального набору машин у господарстві.

5. Визначення оптимального раціону в тваринництві (задача на суміш).

6. Підбір найкращої структури добрив.

7. Спеціалізація господарств тощо.

Як приклад, розглянемо задачу на вибір найкращої структури посівних площ.

Задача. Державне сільськогосподарське підприємство відвело три земельних масиви площею 5, 8 і 9 тис. га відповідно під посіви жита, пшениці й кукурудзи. Середню врожайність культур на кожному масиві подано в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Культура	Земельний масив		
	перший	другий	третій
Жито, ц/га	20	18	17
Пшениця, ц/га	30	25	28
Кукурудза, ц/га	25	24	26

За 1 ц жита господарство одержує 20 у. г. о. (умовних грошових одиниць), за 1 ц пшениці — 25 у. г. о. і за 1 ц кукурудзи — 14 у. г. о.

Яку площу слід відвести господарству під кожну з культур і на якому масиві, щоб одержати максимальний прибуток, коли за планом передбачається зібрати не менше як 19 000 ц жита, 158 000 ц пшениці і 300 000 ц кукурудзи.

Математична постановка задачі

Позначимо через x_1 (га) площу, яка відводиться під жито на першому масиві, через x_2 (га) площу, яка відводиться під жито на другому масиві, через x_3 (га) площу, яка відводиться під жито на третьому масиві.

Аналогічно через x_4, x_5, x_6 (га) позначимо відповідно площу під пшеницю на першому, другому і третьому масивах і через x_7, x_8, x_9 (га) — площу під кукурудзу на першому, другому і третьому масивах.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_7 = 5000, \\ x_2 + x_5 + x_8 = 8000, \\ x_3 + x_6 + x_9 = 9000. \end{cases} \qquad (6.15)$$

Враховуючи врожайність кожної культури на кожному з масивів та беручи до уваги план, дістанемо такі три обмеження:

$$\begin{cases} 20x_1 + 18x_2 + 17x_3 \geq 19\,000, \\ 30x_4 + 25x_5 + 28x_6 \geq 158\,000, \\ 25x_7 + 24x_8 + 26x_9 \geq 300\,000. \end{cases} \qquad (6.16)$$

Функція мети в задачі має вигляд:

$$z = 20\,(20x_1 + 18x_2 + 17x_3) + 25\,(30x_4 + 25x_5 + 28x_6) +$$

$$+ 14\,(25x_7 + 24x_8 + 26x_9).$$

Треба знайти такі невід'ємні значення $x_1, x_2, \ldots, x_9$, які задовольняють рівняння (6.15) і нерівності (6.16) та перетворюють лінійну функцію z у максимум.

Методами лінійного програмування розв'язуються, крім розглянутих вище, багато інших задач, наприклад, задачі про призначення, військові задачі, задачі про раціональне використання відходів хімічного виробництва тощо.

Усі ці задачі зводяться до однієї й тієї самої схеми: є деяка величина, наприклад, кількість виробів, вартість, прибуток підприємства та інші, яка є лінійною функцією ряду змінних. Ці змінні, в свою чергу, задовольняють обмеження, що виражені системами лінійних нерівностей або лінійних рівнянь. Треба знайти такий невід'ємний розв'язок системи обмежень, при якому лінійна функція набуває найменшого або найбільшого значень (залежно від мети, поставленої задачею).

§ 2. Загальна постановка задач лінійного програмування

Математично в загальному вигляді задачі лінійного програмування формулюють так.

Задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (6.17)$$

і лінійну функцію (цільову функцію)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \qquad (6.18)$$

Треба знайти такий невід'ємний розв'язок системи (6.17), при якому лінійна функція (6.18) набуває найбільшого (найменшого) значення.

Може статися, що система (6.17) не має невід'ємних розв'язків, тоді й задача лінійного програмування не має розв'язків. Якщо система рівнянь (6.17) має єдиний невід'ємний розв'язок, то й задача лінійного програмування має єдиний розв'язок.

У практичних задачах система обмежень має нескінченну множину невід'ємних розв'язків. Задача лінійного програмування полягає саме в тому, щоб з цієї множини знайти той розв'язок, при якому цільова функція набуває максимуму (мінімуму). Далі, коли йтиметься про розв'язки системи обмежень, матимемо на увазі тільки невід'ємні розв'язки.

Як було зазначено, шуканий розв'язок задачі лінійного програмування повинен задовольняти систему лінійних рівнянь. Нижче показано, що систему лінійних нерівностей можна звести до системи лінійних рівнянь введенням допоміжних невід'ємних змінних. Тому в загальному випадку задачі лінійного програмування формулюються у вигляді (6.17) і (6.18).

§ 3. Заміна нерівностей рівняннями

Будь-яку нерівність введенням допоміжної невід'ємної невідомої можна звести до рівняння. Наприклад, нехай $x > 7$. Це означає, що x дорівнює 7 з деяким надвишком. Віднявши від x цей надвишок, дістанемо рівняння $x - y = 7$, тут $y > 0$.

Аналогічно, якщо $x < 5$, то, додаючи до x деяку додатну величину, дістанемо рівняння $x + y = 5$ ($y > 0$).

Нехай задано систему m лінійних нерівностей з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{6.19}$$

Введемо допоміжні невід'ємні змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$ і зведемо систему нерівностей (6.19) до системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n y_m = b_m . \end{cases} \tag{6.20}$$

Якби нерівності системи (6.19) мали протилежні знаки, то допоміжні невід'ємні змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$ віднімалися б. Будь-якому невід'ємному розв'язку $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o$ системи нерівностей (6.19) відповідає певний невід'ємний розв'язок x_1^o, $x_2^o, \ldots, x_n^o$, $y_1^o, y_2^o, \ldots, y_m^o$ системи рівнянь (6.20). Справді, якщо $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o$ є розв'язком системи нерівностей (6.19), то виконуються нерівності

$$\begin{cases} a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o + \ldots + a_{1n}x_n^o \le b_1, \\ a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o + \ldots + a_{2n}x_n^o \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1^o + a_{m1}x_2^o + \ldots + a_{mn}x_n^o \le b_m . \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\begin{array}{l} y_1^o = b_1 - (a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o + \ldots + a_{1n}x_n^o), \\ y_2^o = b_2 - (a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o + \ldots + a_{2n}x_n^o), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m^o = b_m - (a_{m1}x_1^o + a_{m2}x_2^o + \ldots + a_{mn}x_m^o). \end{array} \tag{6.21}$$

Тоді $y_1^o \ge 0$, $y_2^o \ge 0, \ldots, y_m^o \ge 0$, а числа $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o$, $y_1^o, y_2^o, \ldots$, y_m^o є розв'язком системи рівнянь (6.20).

Навпаки, будь-якому невід'ємному розв'язку $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o$, $y_1^o, y_2^o, \ldots, y_m^o$ системи рівнянь (6.20) відповідає певний невід'ємний розв'язок $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o$ системи нерівностей (6.19).

Справді, оскільки система чисел $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o$, $y_1^o, y_2^o, \ldots$, y_m^o є розв'язком системи рівнянь (6.20), то виконуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o + \ldots + a_{1n}x_n^o + y_1^o = b_1, \\ a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o + \ldots + a_{2n}x_n^o + y_2^o = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1^o + a_{m1}x_2^o + \ldots + a_{mn}x_n^o + y_m^o = b_m . \end{cases}$$

Оскільки $y_1^o \ge 0$, $y_1^o \ge 0, \ldots, y_m^o \ge 0$, то дістаємо рівності

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{\circ} + a_{12}x_2^{\circ} + \ldots + a_{1n}x_n^{\circ} \le b_1, \\ a_{21}x_1^{\circ} + a_{22}x_2^{\circ} + \ldots + a_{2n}x_n^{\circ} \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1^{\circ} + a_{m2}x_2^{\circ} + \ldots + a_{mn}x_n^{\circ} \le b_m, \end{cases}$$

звідки й випливає, що числа $x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, \ldots, x_n^{\circ}$ є розв'язком системи нерівностей (6.19).

Отже, встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною розв'язків системи нерівностей (6.19) і системи рівнянь (6.20).

З'ясуємо геометричний зміст допоміжних невідомих y_1, $y_2, \ldots, y_m$. Розглянемо деяку точку $M(x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, \ldots, x_n^{\circ})$ многогранника розв'язків, який визначається системою нерівностей (6.19). Позначимо через h_i відстань від точки M до i-ї гіперплощини. Ця відстань дорівнює

$$h_i = \frac{b_i - (a_{i1}x_1^{\circ} + a_{i2}x_2^{\circ} + \ldots + a_{in}x_n^{\circ})}{\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Порівнявши останні співвідношення з рівностями (6.21), матимемо

$$\begin{aligned} y_1^{\circ} &= h_1\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2}, \\ y_2^{\circ} &= h_2\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m^{\circ} &= h_m\sqrt{a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \ldots + a_{mn}^2}. \end{aligned}$$

Отже, значення допоміжних змінних пропорційні відстаням від точки $M(x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, \ldots, x_n^{\circ})$ до граничних гіперплощин

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 4. Перехід від мінімуму до максимуму

Під час розв'язування задач методами лінійного програмування обчислюють як максимуми, так і мінімуми цільової функції. Складати різні алгоритми окремо для обчислення максимуму і мінімуму цільової функції немає потреби. Складається алгоритм для обчислення одного, наприклад мінімуму. В задачах, де треба знайти максимум цільової функції, досить змінити знак цієї функції на протилежний і для зміненої таким чином цільової функції знайти вже мінімум.

Справедливість такого твердження випливає з того, що максимум лінійної функції z і мінімум лінійної функції $\bar{z} = -z$ досягається при тих самих значеннях змінних. Щоб знайти шукане максимальне значення лінійної функції z, треба взяти значення знайденого мінімуму лінійної функції $\bar{z}$ з протилежним знаком.

Наочно це можна проілюструвати на прикладі функції однієї змінної.

Нехай функція $y = f(x)$ має мінімум у точці $x = a$.

Розглянемо функцію $y = -f(x)$. Графік цієї функції симетричний графіку заданої функції $y = f(x)$ відносно осі Ox. Функція $y = -f(x)$ набуває максимуму в тій самій точці $x = a$ і дорівнює $-f(a)$.

Отже, мінімум функції $y = f(x)$ і максимум функції $y = -f(x)$ будуть досягнуті в тій самій точці $x = a$ і $|-f(a)| = f(a)$.

Розділ 7

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД

§ 1. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

У § 2 розд. 6, показано, що задачу лінійного програмування в загальному вигляді записують так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, ..., m); \tag{7.1}$$

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n. \tag{7.2}$$

Якщо многогранник розв'язків системи рівнянь (7.1) обмежений, то лінійна функція (7.2) набуває шуканого екстремального значення в кутовій (крайній) точці цього многогранника розв'язків.

Щоб довести це, розглянемо множину точок $(x_1, x_2, ..., x_n)$ простору, в яких функція $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ набуває фіксованого значення z_0. Множиною таких точок є гіперплощина $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = z_0$, нормальна до вектора $\vec{C}(c_1, c_2, ..., c_n)$. Напрям вектора $\vec{C}(c_1, c_2, ..., c_n)$ як вектора градієнта, є напрямом зростання лінійної функції z.

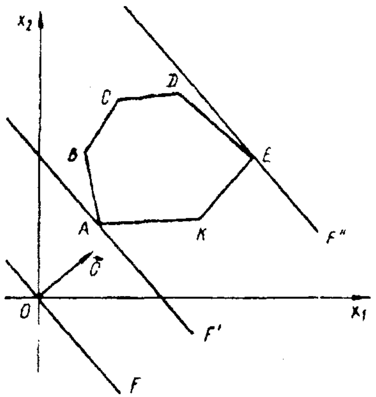

Рис. 7.1

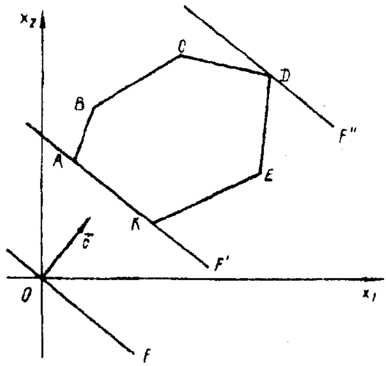

Рис. 7.2

Переміщатимемо гіперплощину $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = 0$ паралельно самій собі в напрямі вектора $\vec{C}$. При цьому гіперплощина стане опорою до многогранника розв'язків двічі: в точках A і E (рис. 7.1). Оскільки напрям вектора $\vec{C}$ є напрямом зростання лінійної функції z, то на опорній гіперплощині F' (у кутовій точці A) лінійна функція z набуває мінімального значення, а на опорній гіперплощині F'' (у кутовій точці E) — максимального значення.

Якщо опорна гіперплощина, на якій досягається екстремум лінійної функції z, має з многогранником розв'язків більш ніж одну спільну кутову точку, то лінійна функція набуває екстремального значення на деякій множині точок, що є лінійною комбінацією зазначених кутових точок (рис. 7.2).

На рис. 7.2 показано, що лінійна функція z досягає мінімуму в усіх точках відрізка AK, який сполучає кутові точки A і K. Найбільше значення досягається в кутовій точці D.

Якщо многогранник розв'язків необмежений, то можливі два випадки.

Випадок 1. Гіперплощина, переміщуючись паралельно самій собі в напрямі вектора $\vec{C}$, перетинає многогранник розв'язків і не стає для нього опорною гіперплощиною. Лінійна форма необмежена на многограннику розв'язків. Отже, вона не набуває екстремального значення (рис. 7.3).

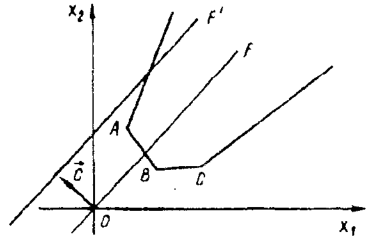

Рис. 7.3

Випадок 2. Гіперплощина стає опорною для многогранника розв'язків. Екстремальне значення досягається на

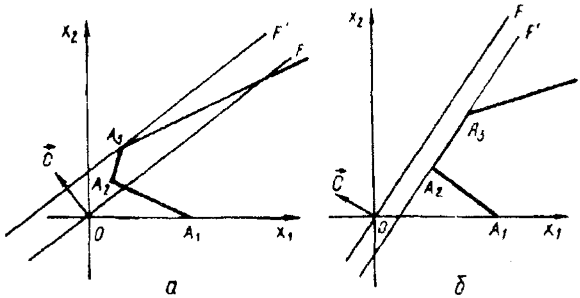

Рис. 7.4

спільній частині многогранника розв'язків й опорної гіперплощини. Гіперплощина стає опорною в точці A_3 (рис. 7.4, *а*) вздовж сторони A_2A_3 (рис. 7.4, *б*).

§ 2. Графічний метод

Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування випливає з геометричної інтерпретації задач лінійного програмування. Для розв'язання задач цим методом найважливішим питанням є побудова многокутника розв'язків за обмеженнями задачі і знаходження кутової точки або точок, де лінійна функція набуває оптимального значення. Після цього обчислюємо координати оптимальної точки — оптимальний план і оптимальне значення лінійної функції.

Розглянемо кілька задач, на яких проілюструємо зміст графічного методу.

Задача. Знайти максимум лінійної функції $z = x_1 + 4x_2$ за умови, що невідомі x_1 і x_2 задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо многокутник розв'язків, що визначається системою обмежень. Нерівність $x_1 - 5x_2 \le 3$ визначає одну з півплощин, на які гранична пряма (l_1) $x_1 - 5x_2 = 3$ ділить всю площину. Щоб знайти потрібну півплощину, підставимо координати деякої точки площини, наприклад початку координат, у нерівність $x_1 - 5x_2 \le 3$. Якщо нерівність виконується, то беруть ту півплощину, де міститься досліджувана точка. Якщо нерівність не виконується, то беруть протилежну площину. У цьому випадку $0 - 5 \cdot 0 < 3$, отже, беруть півплощину, яка містить початок координат.

Дві інші нерівності $x_1 - x_2 \ge -1$ і $x_1 + x_2 \le 9$ визначають півплощини з граничними прямими (l_2) $x_1 - x_2 = 1$ і (l_3) $x_1 + x_2 = 9$, кожна з яких проходить через початок координат. На рис. 7.5 стрілками позначено півплощини, що визначаються нерівностями системи. При цьому слід врахувати нерівності $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, які означають, що многокутник розв'язків повинен лежати в першій чверті. Спільна частина $OABCD$ півплощин, яка визначається системою нерівностей, є многокутником розв'язків.

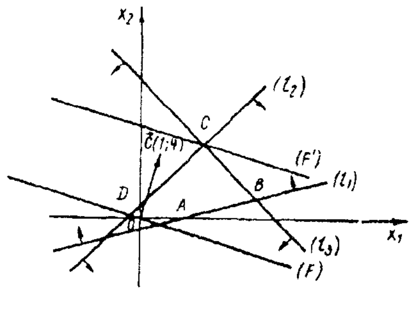

Рис. 7.5

Побудуємо пряму (F) $x_1 + 4x_2 = 0$, перпендикулярну до вектора $\vec{C}(1, 4)$.

У точці O пряма (F) є першою опорною прямою многокутника розв'язків. У цій точці лінійна функція z набуває мінімального значення. За умовою задачі треба знайти точку, в якій лінійна функція набуває максимального значення. Для цього переміщатимемо пряму (F) паралельно самій собі в напрямі вектора $\vec{C}$. У точці C вона знову стане опорною прямою многокутника розв'язків. Отже, лінійна функція z набуває максимального значення в кутовій точці C. Розв'язавши систему, складену з рівнянь прямих (l_2) і (l_3), які перетинаються в точці C, знайдемо її координати: $x_1 = 4$, $x_2 = 5$. Підставивши ці значення в лінійну функцію z, дістанемо $z_{max} = 4 + 4 \cdot 5 = 24$.

Розглянемо задачу на знаходження мінімального значення.

Задача. Нехай задано систему лінійних нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Знайти мінімум лінійної функції $z = 2x_1 + 3x_2$.

Р о з в ' я з а н н я. Виконавши ті самі дії, що й у попередній задачі, дістанемо многокутник розв'язків *ABCDE*, що визначається системою нерівностей задачі (рис. 7.6).

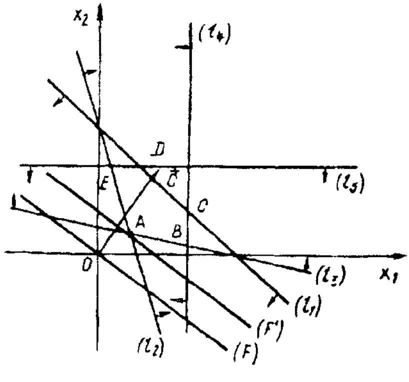

Рис. 7.6

Побудуємо пряму (F) $2x_1 + 3x_2 = 0$, перпендикулярну до вектора $\vec{C}(2, 3)$. Перемістивши цю пряму паралельно самій собі в напрямі вектора $\vec{C}$, дістанемо, що вона буде першою опорною прямою многокутника розв'язків *ABCDE* в точці *A*. Отже, в точці *A* лінійна функція z набуває мінімального значення.

Розв'яжемо сумісно рівняння прямих (l_2) і (l_3), які перетинаються в точці *A*. Знайдемо координати точки *A*: $x_1 = \frac{8}{7}$, $x_2 = \frac{4}{7}$.

Отже, $z_{min} = 2 \cdot \frac{8}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} = 4$.

Розв'яжемо задачу про виготовлення шаф і столів (§ 1, розділ 4).

Р о з в ' я з а н н я. Система нерівностей і лінійна функція в цій задачі мають вигляд

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}12x_2 \le 84, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 88, \end{cases}$$
$$z = 12x_1 + 15x_2.$$

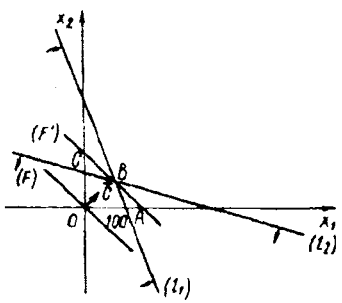

Рис. 7.7

Треба знайти невід'ємний розв'язок системи нерівностей $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, який перетворює лінійну функцію z у максимум.

Будуємо многокутник розв'язків, що визначається обмеженнями задачі, і пряму (F) $12x_1 + 15x_2 = 0$, перпендикулярну до вектора $\vec{C}$ (12, 15) (рис. 7.7). Як бачимо, лінійна функція z набуває найбільшого значення в кутовій точці *B* многокутника розв'язків *OABC*. Координати цієї точки визначаємо в результаті сумісного розв'язання рівнянь прямих (l_1) і (l_2): $x_1 = 130$, $x_2 = 375$.

Отже, план підприємства буде оптимальним, якщо виробляти 130 столів і 375 шаф. Прибуток підприємства буде максимальним і становитиме $z = 6335$ грн. (числа умовні).

Графічним методом можна розв'язувати такі задачі лінійного програмування, системи обмежень яких складаються з m незалежних рівнянь і n невідомих, причому $n - m = 2$, тобто рівняння містять по дві вільні невідомі.

Задача. Нехай задано канонічну форму задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Знайти невід'ємний розв'язок системи рівнянь $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$, який перетворює лінійну функцію z у мінімум.

Р о з в ' я з а н н я. Тут всі рівняння системи лінійно незалежні і $n - m = 2$. Виконаємо m кроків виключень Гаусса—Жордана. В результаті m невідомих, наприклад x_1, x_2, ..., x_m, будуть базисними, а дві останні невідомі x_{m+1} і x_n — вільними. Система обмежень набере вигляду

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1(m+1)}x_{m+1} + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2(m+1)}x_{m+1} + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m + a'_{n(m+1)}x_{m+1} + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{7.3}$$

За допомогою рівнянь (7.3) запишемо лінійну функцію z через вільні невідомі x_{m+1}, x_n:

$$z = c'_{m+1}x_{m+1} + c'_nx_n. \tag{7.4}$$

Оскільки базисні невідомі невід'ємні, то, відкидаючи їх у системі (7.3), перейдемо до системи обмежень у вигляді нерівностей, що залежать від двох невідомих:

$$\begin{cases} a'_{1(m+1)}x_{m+1} + a'_{1n}x_n \leq b'_1, \\ a'_{2(m+1)}x_{m+1} + a'_{2n}x_n \leq b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m(m-1)}x_{m+1} + a'_{mn}x_n \leq b'_m. \end{cases} \tag{7.5}$$

Отже, дістали задачу: знайти невід'ємний розв'язок $x_{m-1} \geq 0$, $x_n > 0$ системи нерівностей (7.5), який перетворює лінійну функцію (7.4) у мінімум.

Задача (7.4), (7.5) має дві невідомі x_{m+1}, x_n. Розв'язавши її графічним методом, знайдемо оптимальні значення x_{m+1}, x_n, а підставивши їх у систему (7.3), знайдемо оптимальні значення x_1, x_2, ..., x_m.

Задача. Знайти графічним методом максимальне значення лінійної функції

$$z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Виконаємо три кроки перетворень Гаусса—Жордана, в результаті чого система обмежень набере вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 7x_4 + 2x_5 = 14, \\ x_2 + 11x_4 + 5x_5 = 55, \\ x_3 - x_4 - 2x_5 = -8. \end{cases} \tag{7.6}$$

Підставивши значення базисних невідомих x_1, x_2, x_3 у лінійну функцію z і відкинувши їх в останній системі рівнянь, дістанемо задачу: знайти максимальне значення лінійної функції

$$z = -3x_4 - 6x_5 + 35$$

за умови, що невідомі x_4, x_5 задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} -7x_4 + 2x_5 \leq 14, & (l_1) \\ 11x_4 + 5x_5 \leq 55, & (l_2) \\ -x_4 - 2x_5 \leq -8, & (l_3) \end{cases}$$
$$x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0.$$

Побудуємо многокутник розв'язків і лінійну функцію в системі координат x_4Ox_5 (рис. 7.8). З рисунка видно, що лінійна функція z набуває максимуму в точці D многокутника розв'язків, яка є перетином прямої (l_3) і осі Ox_5. Отже, $x_4 = 0$, $x_5 = 4$.

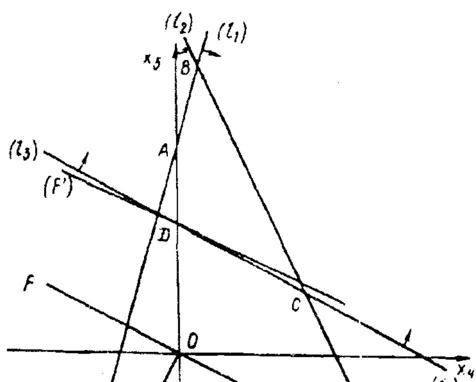

Рис. 7.8

Максимальне значення лінійної функції

$$z_{max} = -3 \cdot 0 - 6 \cdot 4 + 35 = 11.$$

Підставивши значення вільних невідомих x_4, x_5 у систему (7.6), дістанемо оптимальні значення базисних невідомих: $x_1 = 6$, $x_2 = 35$, $x_3 = 0$. Таким чином, оптимальним планом є:

$$x_1 = 6,\ x_2 = 35,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 4 \text{ і } z_{max} = 11.$$

ВПРАВИ

Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план таких задач лінійного програмування:

1. $z_{max} = x_1 + 2x_2$

при

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $z_{min} = -2x_1 - 3x_2$

при

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $z_{max} = -x_1 - x_2$

при

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -15, \\ 4x_1 - x_2 \ge 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 30, \\ x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $z_{min} = 2x_1 + 3x_2$

при

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 3x_2 - 12 \le 0, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $z_{max} = 2x_1 - 5x_2$

при

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. $z_{min} = -2x_1 + 5x_2$

при

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. $z_{min} = x_1 - 10x_2$

8. $z_{max} = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5$

при

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

при

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Розділ 8

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§ 1. Різні форми запису задачі лінійного програмування

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ \quad x_j \ge 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{8.1}$$

і лінійну функцію

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{8.2}$$

Не порушуючи загальності, припустимо, що всі вільні члени b_i системи (8.1) невід'ємні, бо якщо, наприклад, $b_i < 0$, то досить помножити i-те рівняння на – 1. Припустимо також, що $m < n$.

Задачу лінійного програмування (8.1), (8.2) в скороченій формі можна подати у вигляді таких записів.

1. Мінімізувати лінійну функцію

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j, \tag{8.3}$$

змінні якої $x_j \ge 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) задовольняють систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{8.4}$$

2. Мінімізувати лінійну функцію

$$z = \vec{c}\,\vec{X} \tag{8.5}$$

за умови, що $\vec{X} \geq \vec{0}$ задовольняє систему рівнянь

$$A\vec{X} = \vec{b}, \tag{8.6}$$

де $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A = (a_{ij})_{\substack{i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n;}} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

3. Мінімізувати лінійну функцію

$$z = \vec{c}\,\vec{X}$$

за умови, що $\vec{X} \geq 0$ і

$$x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 + \dots + x_n \vec{P}_n = \vec{P}_0, \tag{8.7}$$

де $\vec{P}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ — j-й стовпець матриці A і $\vec{P}_0 = \vec{b}$ — вектор-стовпець вільних членів.

! *Означення*

Планом задачі лінійного програмування називають невід'ємний вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто вектор, усі координати якого невід'ємні, який задовольняє систему рівнянь (8.1), (8.4).

! *Означення*

План $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають опорним, якщо вектори $\vec{P}_i$, які входять у розклад $\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{P}_i = \vec{P}_0$ з додатними коефіцієнтами x_i, є лінійно незалежними.

Оскільки система (8.1) складається з m рівнянь, то число додатних компонент опорного плану не може бути більшим за m.

! *Означення*

Опорний план називають невиродженим або неособливим, якщо він складається тільки з m додатних компонент.

! *Означення*

Оптимальним планом або розв'язком задачі лінійного програмування називають план, який мінімізує (максимізує) лінійну функцію (8.2).

§ 2. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Теорема 1

Лінійна функція (8.2) досягає свого мінімуму (максимуму) в кутовій точці опуклої множини K планів задачі лінійного програмування. Якщо лінійна функція набуває оптимального значення більше, ніж в одній кутовій точці, то вона набуває того самого значення в будь-якій точці, що є опуклою лінійною комбінацією цих кутових точок.

Доведення. За припущенням K є опуклим многогранником і, отже, має скінченне число кутових точок. Позначимо кутові точки многогранника K через $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, а оптимальний план — через $\vec{X}_0$.

Оскільки $\vec{X}_0$ — оптимальний план, то $\vec{c}\,\vec{X}_0 \le \vec{c}\,\vec{X}$ для всіх $\vec{X} \in K$. Якщо $\vec{X}_0$ є кутовою точкою, то першу частину теореми доведено.

Нехай $\vec{X}_0$ не є кутовою точкою (рис. 8.1).

У розд. 5 показано, що будь-яку некутову точку опуклої множини можна записати у вигляді опуклої лінійної комбінації кутових точок K, тобто

$$\vec{X}_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{X}_i, \quad \text{де} \quad \alpha_i \geq 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p) \quad \text{і} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

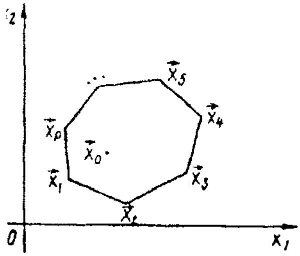

Рис. 8.1

Тоді

$$\vec{c}\,\vec{X}_0 = \vec{c}\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{P}_i\right) = \alpha_1 \vec{c}\,\vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{c}\,\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_p \vec{c}\,\vec{X}_p. \quad (8.8)$$

Нехай

$$\min\{c\vec{X}_1,\ c\vec{X}_2, \ldots, c\vec{X}_p\} = \vec{c}\,\vec{X}_m,$$

де $\vec{X}_m$ — одна з кутових точок $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$.

Оскільки всі $\alpha_i \geq 0$, то замінивши в рівності (8.8) $\vec{c}\vec{X}_i$ $(i =$ $= 1, 2, \ldots, p)$ на $c\vec{X}_m$ та врахувавши рівність $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, дістанемо

$$\vec{c}\,\vec{X}_0 \geq \vec{c}\,\vec{X}_m.$$

Проте за припущенням $\vec{c}\,\vec{X}_0 \leq \vec{c}\,\vec{X}$ для всіх $\vec{X} \in K$. Отже, $c\vec{X}_0 = \vec{c}\,\vec{X}_m$. Таким чином, існує кутова точка $\vec{X}_m$, в якій лінійна функція z набуває мінімального значення.

Для доведення другої частини теореми припустимо, що лінійна функція z набуває мінімального значення у кількох кутових точках, наприклад, $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_q$. Тоді

$$c\vec{X}_1 = \vec{c}\,\vec{X}_2 = \ldots = \vec{c}\,\vec{X}_q = m,$$

де m — мінімум лінійної функції на множині K.

Нехай $\vec{X}$ — довільна опукла лінійна комбінація точок $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_q$:

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{X}_i, \quad \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., q); \ \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1.$$

Тоді

$$\vec{c}\,\vec{X} = \vec{c}\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{X}_i\right) = \alpha_1 \vec{c}\,\vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{c}\,\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_q \vec{c}\,\vec{X}_q =$$

$$= \alpha_1 m + \alpha_2 m + \ldots + \alpha_q m = m \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = m.$$

Теорему доведено.

Теорема 2

Якщо система векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_k$ — лінійно незалежна і така, що $x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 + \ldots + x_k \vec{P}_k = \vec{P}_0$, де всі $x_i > 0$, то точка $\vec{X}(x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$ є кутовою точкою опуклої множини K ($\vec{X}$ є n-вимірним вектором, в якого останні $n-k$ координат дорівнюють нулю).

Доведення. Припустимо, що $\vec{X}$ не є кутовою точкою. Оскільки $\vec{X}$ — план, то його можна записати у вигляді опуклої лінійної комбінації двох інших точок $\vec{X}_1, \vec{X}_2$, які належать K:

$$\vec{X} = \alpha \vec{X}_1 + (1-\alpha)\vec{X}_2, \quad \text{де} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Оскільки компоненти векторів $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$ невід'ємні, $0 < \alpha < 1$, і останні $n-k$ координат вектора $\vec{X}$ є нулями, то останні $n-k$ координат векторів $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$ також є нулями, тобто

$$\vec{X}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_k^{(1)}, 0, ..., 0),$$

$$\vec{X}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_k^{(2)}, 0, ..., 0).$$

Оскільки $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$ — плани, то

$$x_1^{(1)} \vec{P}_1 + x_2^{(1)} \vec{P}_2 + \ldots + x_k^{(1)} \vec{P}_k = \vec{P}_0,$$

$$x_1^{(2)}\vec{P}_1 + x_2^{(2)}\vec{P}_2 + \ldots + x_k^{(2)}\vec{P}_k = \vec{P}_0.$$

Проте вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k$ є лінійно незалежні, тому $\vec{P}_0$ виражається лінійно через них єдиним способом. Порівнявши дві останні рівності і рівність $x_1\vec{P}_1 + x_2\vec{P}_2 + \ldots + x_k\vec{P}_k = \vec{P}_0$, дістанемо $x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), тобто

$$\vec{X} = \vec{X}_1 = \vec{X}_2.$$

Отже, $\vec{X}$ не можна подати у вигляді опуклої лінійної комбінації двох різних точок множини K, а це означає, що $\vec{X}$ є кутовою точкою K.

Теорему доведено.

Т е о р е м а 3

Якщо $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є кутовою точкою K, то вектори $\vec{P}_i$, що відповідають додатним x_i, утворюють лінійно незалежну систему.

Д о в е д е н н я. Нехай перші k компонент вектора $\vec{X}$ не дорівнюють нулю, тоді

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\vec{P}_i = \vec{P}_0. \qquad (8.9)$$

Припустимо, що система векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k$ — лінійно залежна. Тоді виконується рівність

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_k\vec{P}_k = \vec{0}, \qquad (8.10)$$

де принаймні одне з чисел α_i не дорівнює нулю.

Помноживши обидві частини рівності (8.10) на деяке число $d > 0$ та додавши й віднявши здобутий результат від рівності (8.9), матимемо

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\vec{P}_i + d\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{P}_i = \vec{P}_0$$

і

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\vec{P}_i - d\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{P}_i = \vec{P}_0.$$

З цих рівностей випливає, що вектори

$$\vec{X}_1 = (x_1 + d\alpha_1, x_2 + d\alpha_2, \ldots, x_k + d\alpha_k, 0, \ldots, 0)$$

$$\vec{X}_2 = (x_1 - d\alpha_1, x_2 - d\alpha_2, \ldots, x_k - d\alpha_k, 0, \ldots, 0)$$

є розв'язками системи рівнянь (8.1).

Оскільки всі $x_i > 0$, то d можна вибрати таким малим, що перші k компонент векторів $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$ набуватимуть додатних значень. Тоді $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$ будуть планами. Проте $\vec{X} = \frac{1}{2}\vec{X}_1 + \frac{1}{2}\vec{X}_2$, що суперечить тому, що $\vec{X}$ є кутовою точкою. Отже, припустивши, що вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k$ є лінійно залежними, зайшли у суперечність.

Таким чином, система векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k$ є лінійно незалежною. Теорему доведено.

Зауваження. Вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ є векторами m-вимірного простору. Відомо, що будь-яка система $m+1$ векторів m-вимірного простору є лінійно залежною. Тому з теореми 3 випливає, що серед координат кутової точки множини K не може бути більше ніж m додатних.

Наслідок. Кожній кутовій точці з K відповідає m лінійно незалежних векторів з даної системи $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$.

Доведення. З теореми 3 випливає, що є k ($k \le m$) таких векторів. При $k = m$ наслідок доведено.

Нехай $k < m$ і існує не більше ніж $r - k$ таких векторів $\overrightarrow{P_{k+1}}, \ldots, \vec{P}_r$, що $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k, \overrightarrow{P_{k+1}}, \ldots, \vec{P}_r$ є лінійно незалежною системою.

Якщо $r < m$, то решта $n - r$ векторів залежить від $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_r$, що суперечить існуванню m лінійно незалежних векторів у даній системі $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$. Тому $r = m$.

Таким чином, кожній кутовій точці $\vec{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ відповідає m лінійно незалежних векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$, таких, що

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{P}_i + \sum_{i=m+1}^{n} 0 \cdot \vec{P}_i = \vec{P}_0.$$

Теореми 2 і 3 можна об'єднати в одну: щоб точка $\vec{X}$ (x_1, x_2, ..., x_n) була кутовою точкою K, необхідно і достатньо, щоб додатні компоненти x_j були коефіцієнтами при лінійно незалежних векторах $\vec{P}_j$ у розкладі

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{P}_j = \vec{P}_0.$$

Теорема 3 є необхідною умовою, а теорема 2 — достатньою.

Проаналізувавши здобуті результати, можна зробити такі висновки:

1) існує така кутова точка опуклого многогранника K, в якій лінійна функція задачі набуває мінімального (максимального) значення;
2) між опорними планами задачі й кутовими точками K існує взаємно однозначна відповідність;
3) з кожною кутовою точкою пов'язані m лінійно незалежних векторів даної системи n векторів.

Таким чином, необхідно дослідити лише кутові точки опуклого многогранника K, тобто лише опорні плани, кожний з яких визначається системою m лінійно незалежних векторів. Проте навіть у порівняно простих задачах обчислення координат кутових точок і порівнювання значень лінійної функції в них потрібно виконувати безліч операцій. Тому необхідно мати метод, за яким можна здійснювати впорядкований перебір кутових точок (опорних планів задачі) K. Такий метод, розроблений американським вченим Дж. Г. Данцігом, називають симплексним методом. Ця назва походить від слова «симплекс», що означає «найпростіший многогранник» $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

За допомогою симплексного методу можна знайти кутову точку і дослідити її на оптимальність. Якщо відповідь негативна, то симплексний метод дає змогу знайти наступну кутову точку, в якій лінійна функція набуває значення ближчого до оптимального або такого, що дорівнює значенню лінійної функції в попередній кутовій точці. Цю властивість називають монотонністю симплексного методу. Через скінченне число кроків досягається мінімум (максимум) лінійної функції.

Якщо задача не має планів або якщо її лінійна функція не обмежена на множині планів K, то симплексний метод дає змогу встановити це також за скінченне число кроків.

Розділ 9

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

§ 1. Теоретичні основи симплексного методу

Перш ніж побудувати алгоритм симплексного методу, доведемо такі дві теореми.

Припустимо, що задача лінійного програмування має плани і кожний її опорний план — невироджений (неособливий). Припустимо також, що відомий деякий опорний план $\vec{X}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ і відповідна йому система m лінійно незалежних векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$.

Тоді

$$x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 + \ldots + x_m \vec{P}_m = \vec{P}_0 \tag{9.1}$$

і

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_m c_m = z_0, \tag{9.2}$$

де всі $x_i > 0$, c_i — коефіцієнт лінійної функції z і z_0 — її значення, що відповідає заданому плану.

Оскільки вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$ — лінійно незалежні (утворюють базис у m-вимірному просторі), то будь-який вектор системи $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ можна єдиним способом розкласти за цим базисом.

Нехай для векторів $\vec{P}_j$ справедливі розклади

$$x_{1j} \vec{P}_1 + x_{2j} \vec{P}_2 + \ldots + x_{mj} \vec{P}_m = \vec{P}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{9.3}$$

Складемо вирази

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \ldots + x_{mj}c_m = z_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{9.4}$$

в яких коефіцієнт лінійної форми z стоїть на місці відповідних векторів $\vec{P}_j$.

> **Теорема 1**
>
> Якщо для деякого фіксованого j виконується умова $z_j - c_j > 0$, то можна побудувати таку множину планів задачі, що для будь-якого з них виконується нерівність $z < z_0$, де z — значення лінійної функції, яке відповідає цьому плану.

Випадок 1. Якщо нижня границя чисел z скінченна, то можна побудувати новий опорний план, якому відповідає менше значення лінійної функції порівняно з попереднім.

Випадок 2. Якщо нижня границя z нескінченна, то можна знайти новий план лише з $m+1$ додатних компонентів, якому відповідає як завгодно велике за абсолютною величиною значення лінійної функції задачі.

Доведення. Помножимо (9.3) і (9.4) на деяке число λ і віднімемо результати відповідно від (9.1) і (9.2). Дістанемо

$$(x_1 - \lambda x_{1j})\vec{P}_1 + (x_2 - \lambda x_{2j})\vec{P}_2 + \ldots$$
$$+ (x_m - \lambda x_{mj})\vec{P}_m + \lambda \vec{P}_j = \vec{P}_0; \tag{9.5}$$

$$(x_1 - \lambda x_{1j})c_1 + (x_2 - \lambda x_{2j})c_2 + \ldots$$
$$+ (x_m - \lambda x_{mj})c_m + \lambda c_j = z_0 - \lambda(z_j - c_j). \tag{9.6}$$

В останньому співвідношенні до обох частин додали величину λc_j.

Якщо всі коефіцієнти при векторах $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m, \vec{P}_j$ у розкладі (9.5) невід'ємні, то вони утворюють новий план задачі, якому відповідає значення лінійної функції z, що дорівнює $z_0 - \lambda(z_j - c_j)$. Оскільки за умовою змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ додатні, то існує $\lambda > 0$, для якого всі коефіцієнти у виразі (9.8) — невід'ємні. Таке $\lambda > 0$ знайдемо, якщо розглянемо всі компоненти виразу (9.5), які містять і додатні x_{ij} (компоненти, які містять недодатні x_{ij}, будуть додатними при будь-якому $\lambda > 0$).

Таким чином, шукатимемо таке $\lambda > 0$, що $x_i - \lambda x_{ij} \geq 0$ для всіх $x_{ij} > 0$. Тоді матимемо

$$\frac{x_i}{x_{ij}} \geq \lambda > 0.$$

Отже, при будь-якому λ, для якого виконується умова $0 < \lambda \leq \min \frac{x_i}{x_{ij}}$, де мінімум розглядається тільки для тих i, для яких $x_{ij} > 0$, вираз (9.5) визначає деякий план нашої задачі.

З припущення $z_j - c_j > 0$ при деякому j дістаємо

$$z = z_0 - \lambda (z_j - c_j) < z_0 \quad (\lambda > 0).$$

Отже, якщо виконується умова $z_j - c_j > 0$ для деякого фіксованого j, то можна побудувати новий план, якому відповідає менше значення лінійної функції, ніж вихідному опорному плану.

В и п а д о к 1. Нехай для фіксованого j принаймні один з коефіцієнтів x_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$) додатний. Тоді найбільше значення величини λ, для якої всі координати в (9.5) залишаються невід'ємними, визначається співвідношенням

$$\lambda_0 = \min \frac{x_i}{x_{ij}}, \tag{9.7}$$

де мінімум береться по всіх i, для яких $x_{ij} > 0$.

Оскільки за припущенням задача невироджена, тобто всі опорні плани складаються лише з m додатних компонент, то мінімум у рівності (9.7) визначається при єдиному i.

Якщо підставити у рівність (9.5) замість λ значення λ_0, то коефіцієнт, що відповідає цьому i, перетвориться в нуль. Внаслідок цього дістанемо новий опорний план, базис якого складається з $\vec{P}_j$ та ($m - 1$) векторів вихідного базису.

З новим базисом можна здійснювати ті самі операції, що й з вихідним. Якщо знову одна з різностей $z_j - c_j > 0$ і принаймні один коефіцієнт $x_{ij} > 0$, то можна перейти до другого опорного плану, зв'язаного з ще меншим значенням лінійної функції. Процес триватиме доти, поки або всі різниці $z_j - c_j$ стануть недодатними, або для деякої різниці $z_j - c_j > 0$ будуть недодатними всі x_{ij}.

Якщо всі $z_j - c_j \leq 0$, то процес закінчено.

В и п а д о к 2. Якщо на деякому кроці для деякого j різниця $z_j - c_j > 0$ і всі $x_{ij} \leq 0$, то λ не має верхньої границі і лінійну функцію можна зробити як завгодно великою за абсолютною величиною. При цьому для будь-якого $\lambda > 0$ всі коефіцієнти в розкладі (9.5) — додатні. Отже, дістали план, що складається з $m + 1$ додатних компонент.

Якщо вибрати λ достатньо великим, то відповідне значення лінійної функції буде як завгодно малим від'ємним числом і тоді лінійна функція мінімуму не матиме.

Теорема 2

Якщо для деякого опорного плану $\vec{X}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виконуються нерівності $z_j - c_j \le 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то план $\vec{X}_0$ є оптимальним.

Доведення. Нехай $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — довільний план

$$y_1 \vec{P}_1 + y_2 \vec{P}_2 + \ldots + y_n \vec{P}_n = \vec{P}_0; \tag{9.8}$$

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 + \ldots + y_n c_n = z^*, \tag{9.9}$$

де z^* — значення лінійної функції, яке відповідає плану $\vec{Y}$. Покажемо, що $z_0 \le z$. За припущенням $z_j - c_j \le 0$ для всіх j. Отже, замінивши c_j на z_j, дістанемо

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n \le z^*. \tag{9.10}$$

Справді, додавши й віднявши в лівій частині рівності (9.9) вираз $y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n$, матимемо рівність

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n - [\, y_1 (z_1 - c_1) + y_2 (z_2 - c_2) + \ldots$$

$$+ y_n (z_n - c_n) \,] = z^*.$$

Відкинувши вираз у квадратних дужках, дістанемо нерівність (9.10). Підставимо вираз $\vec{P}_j$, що відповідає кожному j, за формулами (9.3) у вираз (9.8):

$$y_1 \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i1} \vec{P}_i \right) + y_2 \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i2} \vec{P}_i \right) + \ldots + y_n \left(\sum_{i=1}^{n} x_{in} \vec{P}_i \right) = \vec{P}_0 .$$

Змінивши порядок підсумовування, знаходимо

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_{1j}\right)\vec{P}_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_{2j}\right)\vec{P}_2 + \ldots$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_{mj}\right)\vec{P}_m = \vec{P}_0. \qquad (9.11)$$

Аналогічно, підставивши в нерівність (9.10) для кожного j вираз z_j за формулою (9.4), матимемо

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_{ij}\right)c_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_{2j}\right)c_2 + \ldots$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_{mj}\right)c_m \le z^*. \qquad (9.12)$$

Оскільки система векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$ лінійно незалежна, то коефіцієнти при однакових векторах у виразах (9.1) і (9.11), згідно з єдиністю розкладу, збігаються. Тому із співвідношення (9.12) випливає, що

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_m c_m \le z^*,$$

або, згідно з (9.2),

$$z_0 \le z^*.$$

Теорему доведено.

За допомогою теорем 1 і 2 можна, починаючи з вихідного опорного плану, визначати послідовність нових її опорних планів, яка завершується оптимальним планом, або визначити, що оптимального плану не існує.

Нерівності $z_j - c_j \le 0$ є умовою оптимальності плану задачі на знаходження мінімуму лінійної функції, а значення $z_j - c_j$ називають *оцінками плану*.

Отже, щоб план задачі на знаходження мінімуму лінійної функції був оптимальним, необхідно й достатньо, щоб його оцінки були недодатними.

Для задачі лінійного програмування (8.1), (8.2) на знаходження максимального значення лінійної функції (8.2) доводяться такі теореми.

Теорема 3

Якщо для деякого фіксованого j виконується умова $z_j - c_j < 0$, то план $\vec{X}_0$ не є оптимальним і можна побудувати таку множину планів $\vec{X}$, що для будь-якого з них виконується нерівність $z(\vec{X}) > z(\vec{X}_0)$.

Випадок 1. Якщо верхня границя чисел z скінченна, то можна побудувати новий опорний план, якому відповідає більше значення лінійної функції порівняно з попереднім.

Випадок 2. Якщо верхня границя z нескінченна, то можна знайти план, який складається рівно з $m + 1$ додатних компонентів і якому відповідає як завгодно велике значення лінійної функції.

Теорема 4

Якщо для деякого опорного плану $\vec{X}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виконуються нерівності $z_j - c_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то план $\vec{X}_0$ є оптимальним.

Нерівність $z_j - c_j \geq 0$ є критерієм оптимальності плану задачі на знаходження максимуму лінійної функції z.

Отже, щоб план задачі на знаходження максимуму лінійної функції був оптимальним, необхідно й достатньо, щоб його оцінки були невід'ємними.

§ 2. Алгоритм симплексного методу

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 + \ldots + x_n \vec{P}_n = \vec{P}_0,$$

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

Треба знайти такий невід'ємний розв'язок $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ системи обмежень (9.1), який перетворює лінійну функцію z у мінімум.

Припустимо, що задана система з n векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ містить m одиничних векторів і цими одиничними векторами є $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$. Тоді матриця $B = (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m) = E_m$ є базисом m-вимірного простору. Оскільки E_m одинична матриця, то $B^{-1} = E_m$.

За вихідний опорний план у цьому випадку можна взяти вектор $\vec{X} = B^{-1}\vec{P}_0 = \vec{P}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(x_i \geq 0)$. Вектори $\vec{X}_j$ у базисі B мають розклади

$$\vec{X}_j = B^{-1}\vec{P}_j = \vec{P}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}).$$

У задачі, що розглядається, $x_i = b_i$, $x_{ij} = a_{ij}$.

Усі обчислення зручно виконувати, якщо умову задачі та вихідні дані, здобуті після визначення першого опорного плану, записати в так звану першу симплексну таблицю (табл. 9.1). У стовпці $\vec{c}$ записано коефіцієнти лінійної функції z, що відповідають векторам базису. У стовпці $\vec{P}_0$ записано вихідний опорний план, тут же внаслідок подальших обчислень дістанемо оптимальний план. У стовпцях $\vec{P}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ записано коефіцієнти розкладу j-го вектора $\vec{P}_j$ або $\vec{X}_j$ за базисом. Вираз z_j для $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ дорівнює скалярному добутку j-го вектора $\vec{P}_j$ на вектор $\vec{c}$, тобто

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i, \quad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Вирази z_0, $z_j - c_j$ розміщуємо на відповідних місцях $(m + 1)$-го рядка. Як бачимо, різниці $z_j - c_j$ для векторів базису завжди дорівнюють нулю.

Якщо всі різниці $z_j - c_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$ менші або дорівнюють нулю, то, згідно з теоремою 2, § 1, план $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ є оптимальним і мінімальне значення лінійної функції z дорівнює z_0.

Припустимо тепер, що принаймні одна з різниць $z_j - c_j >$ > 0. Якщо всі $x_{ij} \leq 0$, то на підставі випадку 2 теореми 1, § 1, розділу 9, лінійна функція необмежена і, отже, мінімуму не має.

Якщо серед координат вектора $\vec{P}_j$ є принаймні одна $x_{ij} > 0$, то переходимо до нового опорного плану, який складається з $m - 1$ векторів вихідного базису $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$ і вектора $\vec{P}_j$. За вектор, що вводиться в новий базис, можна брати будь-який вектор, для якого $z_j - c_j > 0$. Проте число кроків перетворень, які треба виконати для визначення оптимального плану,

Таблиця 9.1

i	Базис	$\vec{C}$ базису	$\vec{P}_0$	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	…	$\vec{P}_l$	…	$\vec{P}_m$	$\vec{P}_{m+1}$	…	$\vec{P}_j$	…	$\vec{P}_k$	…	$\vec{P}_n$
1	$\vec{P}_1$	c_1	x_1	1	0	…	0	…	0	x_{1m+1}	…	x_{1j}	…	x_{1k}	…	x_{1n}
2	$\vec{P}_2$	c_2	x_2	0	1	…	0	…	0	x_{2m+1}	…	x_{2j}	…	x_{2k}	…	x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	$\vec{P}_l$	c_l	x_l	0	0	…	1	…	0	x_{lm+1}	…	x_{lj}	…	x_{lk}	…	x_{ln}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\vec{P}_m$	c_m	x_m	0	0	…	0	…	1	x_{mm+1}	…	x_{mj}	…	x_{mk}	…	x_{mn}
$m+1$ рядок	$z_j - c_j$		z_0	0	0	…	0	…	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	…	$z_j - c_j$	…	$z_k - c_k$	…	$z_n - c_n$

можна зменшити, якщо ввести в базис такий вектор $\vec{P}$ з $z_j - c_j > 0$, для якого досягається $\max\limits_j \lambda_0 (z_j - c_j)$, де λ_0 визначається для кожного j за формулою (9.7). Пояснюється це тим, що введення такого вектора в новий базис зв'язане з максимальним зменшенням значення лінійної функції на даному кроці перетворень.

Значення лінійної функції, що відповідає новому опорному плану, дорівнює $z = z_0 - \lambda_0 (z_j - c_j)$.

Практично при великому числі індексів j, для яких $z_j - c_j > 0$, це правило застосовувати складно. Тому за вектор, що вводиться в новий базис, беруть той, для якого досягається $\max\limits_j (z_j - c_j)$ (максимум розглядається лише для j, для яких $z_j - c_j > 0$).

Припустимо, що $\max\limits_j (z_j - c_j) = z_k - c_k > 0$. Тоді вектор $\vec{P}$ треба ввести в новий базис.

Щоб з'ясувати, який вектор треба вивести з базису $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$, обчислимо

$$\lambda_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}} \text{ для } x_{ik} > 0.$$

Припустимо, що $\lambda_0 = \min\limits_i \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}}$. Тоді вектор $\vec{P}_l$ треба виключити з базису. Новий опорний план матиме базис, складений з векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_{l-1}, \vec{P}_k, \vec{P}_{l+1}, \ldots, \vec{P}_m$. Обчислимо новий опорний план і розкладемо вектори, що не входять у його базис, за векторами базису.

Оскільки вихідний базис $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m) = E_m$ є одиничною матрицею, то

$$\vec{P}_0 = x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 + \ldots + x_l \vec{P}_l + \ldots + x_m \vec{P}_m; \tag{9.13}$$

$$\vec{P}_k = x_{1k} \vec{P}_1 + x_{2k} \vec{P}_2 + \ldots + x_{lk} \vec{P}_l + \ldots + x_{mk} \vec{P}_m; \tag{9.14}$$

$$\vec{P}_j = x_{1j} \vec{P}_1 + x_{2j} \vec{P}_2 + \ldots + x_{lj} \vec{P}_l + \ldots + x_{mj} \vec{P}_m \tag{9.15}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m).$$

Використавши вираз (9.14), запишемо розклад вектора $\vec{P}_l$ за векторами $\vec{P}_1, \ldots, \overrightarrow{P_{l-1}}, \vec{P}_k, \overrightarrow{P_{l+1}}, \ldots, \vec{P}_m$:

$$\vec{P}_l = \frac{1}{x_{lk}} (\vec{P}_k - x_{1k} \vec{P}_1 - \ldots - x_{mk} \vec{P}_k). \qquad (9.16)$$

Підставивши значення $\vec{P}_l$ у (9.13), дістанемо

$$\vec{P}_0 = x_1 \vec{P}_1 + \ldots + x_{l-1} \overrightarrow{P_{l-1}} + x_l \left[\frac{1}{x_{lk}} \left(\vec{P}_k - x_{1k} \vec{P}_1 - \ldots - x_{mk} \overrightarrow{P_{mk}} \right) \right] +$$

$$+ x_{l+1} \overrightarrow{P_{l+1}} + \ldots + x_m \vec{P}_m .$$

Виконавши перетворення, матимемо

$$\vec{P}_0 = \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k} \right) \vec{P}_1 + \left(x_2 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{2k} \right) \vec{P}_2 + \ldots$$

$$+ \frac{x_l}{x_{lk}} \vec{P}_k + \ldots + \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk} \right) \vec{P}_m .$$

Отже, новий опорний план $\vec{X}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, \ldots, x'_m)$, що визначається співвідношенням

$$\vec{P}_0 = x'_1 \vec{P}_1 + x'_2 \vec{P}_2 + \ldots + x'_k \vec{P}_k + \ldots + x'_m \vec{P}_m ,$$

обчислюється за формулами

$$x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} \quad (i = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m);$$

$$x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}} . \qquad (9.17)$$

Аналогічно, підставивши вираз (9.16) у (9.15), дістанемо розклад кожного вектора $\vec{P}_j$, що не входить у новий базис, за векторами цього базису:

$$\vec{P}_j = x'_{1j} \vec{P}_1 + \ldots + x'_{kj} \vec{P}_k + \ldots + x'_{mj} \vec{P}_m ,$$

де

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i \neq l ;$$

$$x'_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} . \qquad (9.18)$$

Об'єднавши (9.17) і (9.18), побачимо, що новий опорний план і розклад векторів за новим базисом для $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ визначаються за формулами

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (i \neq l),$$

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (i = l), \quad (x_{i0} = x_i). \qquad (9.19)$$

Обчислимо різниці

$$z'_j - c_j = x'_{1j} c_1 + \ldots + x'_{kj} c_k + \ldots + x'_{mj} c_m - c_j =$$

$$= \left(x_{1j} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{1k} \right) c_1 + \ldots + \frac{x_{lj}}{x_{lk}} c_k + \ldots + \left(x_{mj} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{mk} \right) c_m - c_j =$$

$$= x_{1j} c_1 + \ldots + x_{l-1j} c_{l-1} + x_{l+1,\,j}\, c_{l+1} + \ldots + x_{mj} c_m) - c_j -$$

$$- \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (x_{1k} c_1 + \ldots + x_{l-1,\,k}\, c_{l-1} + x_{l+1,\,k}\, c_{l+1} + \ldots + x_{mk} c_m) + \frac{x_{lj}}{x_{lk}} c_k .$$

Додамо до виразу в перших дужках вираз $x_{lj} c_l$, а від виразу в других дужках віднімемо цей вираз. Матимемо

$$\left[\left(x_{1j} c_1 + \ldots + x_{l-1,\,j} c_{l-1} + x_{lj} c_l + x_{l+1,\,j} c_{l+1} + \ldots + x_{mj} c_m \right) - c_j \right] -$$

$$- \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \left[\left(x_{1k} c_1 + \ldots + x_{l-1,k} c_{l-1} + x_{lk} c_l + x_{l+1,k} c_{l+1} + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_{mk} c_m \right) - c_k \right] = \left(z_j - c_j \right) - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \left(z_k - c_k \right).$$

Таким чином,

$$z'_j - c_j = \left(z_j - c_j \right) = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \left(z_k - c_k \right). \qquad (9.20)$$

Аналогічно

$$z'_0 = z_0 - \frac{x_l}{x_{lk}} \left(z_k - c_k \right). \qquad (9.21)$$

Проаналізувавши формули (9.19), (9.20), (9.21), побачимо, що для складання нового плану $\overline{X'}$, нових векторів $\overline{X'_j}$ та відповідних різниць $z'_j - c_j$ нового ($m + 1$)-го рядка, треба кожен елемент першої симплексної таблиці (табл. 9.1) перетворити за формулами

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i \neq l,$$

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, \quad i = l, \qquad (9.22)$$

де $j = 0, 1, 2, \ldots, n$; $x'_i = x'_{i0}$, $z'_0 = x'_{m+1,0}$, $z'_j - c_j = x'_{m+1,j}$.

Формули (9.22) можна записати так:

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} x_{lk} - x_{lj} x_{ik}}{x_{lk}}, \quad i \neq l;$$

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, \quad i = l. \qquad (9.23)$$

Таким чином, після заповнення табл. 9.1 треба виконати такі операції:

1. Розглянути значення різниць $z_j - c_j$ і визначити, чи не є опорний план $\vec{P}_0$ оптимальним, тобто чи не виконується умова $z_j - c_j \leq 0$ для всіх j.
2. Якщо для деяких j значення $z_j - c_j > 0$, то вибрати вектор, який треба ввести в базис, для чого знайти індекс j, для якого досягається $\max\limits_j (z_j - c_j)$. Нехай цей максимум досягається для $j = k$, тобто $\max\limits_j (z_j - c_j) = z_k - c_k$. Тоді вектор $\vec{P}_k$ треба ввести в базис.
3. Вибрати вектор, який слід виключити з базису. Для цього розглянути $\min \frac{x_i}{x_{ik}}$ для всіх $x_{ik} > 0$.

   Якщо всі $x_{ik} \leq 0$, то лінійна функція задачі не обмежена знизу і мінімуму не існує.

   Нехай мінімум досягається при $i = l$, тобто $\min\limits_i \frac{x_i}{x_{ik}} = x_{lk}$. Тоді вектор $\vec{P}_l$ слід вивести з базису.

   Елемент x_{lk} називають розв'язувальним елементом, а рядок і стовпець, на перетині яких він лежить, — розв'язувальним рядком і розв'язувальним стовпцем.
4. Після виконання операцій 1 — 3 обчислити елементи нової таблиці за формулами (9.22) або (9.23).

Проаналізувавши формули (9.23), за якими будують другу симплексну таблицю (табл. 9.2), побачимо, що елементи цієї таблиці можна обчислювати за елементами першої симплексної таблиці за такими правилами:

1) усі елементи розв'язувального рядка ділять на розв'язувальний елемент і записують на місці елементів розв'язувального рядка;
2) усі елементи розв'язувального стовпця (крім розв'язувального елемента), включаючи й елемент ($m+1$)-го рядка, замінюють нулями;
3) елементи, що не містяться в розв'язувальних рядку і стовпці, обчислюють так: розглядають прямокутник, одна вершина якого лежить в елементі, на місце якого обчислюють новий елемент, а протилежна — у розв'язувальному елементі; з двох інших вершин одна лежить у розв'язувальному рядку, а друга — в розв'язувальному стовпці. Новий елемент дорівнює різниці добутку розв'язувального елемента на протилежний і добутку двох інших елементів, поділеній на розв'язувальний елемент.

Отже, формули (9.23) і правила 1)—3), які їм відповідають, є алгоритмом перетворень Гаусса—Жордана.

Щоб проконтролювати правильність обчислення, використовують ($m+1$)-й рядок, елементи якого, з одного боку, обчислюють, як і всі інші елементи таблиці, за правилами 1) — 3), а з іншого,

$$z'_0 = c_1 x'_1 + c_2 x'_2 + \ldots + c_m x'_m ,$$

$$x'_j - c_j - \vec{P}_j \vec{c} - c_j = (x'_{1j} c_1 + x_{2j} c_2 + \ldots + x'_{mj} c_m) - c_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Якщо значення виразів z'_0, $z'_j - c_j$, знайдених різними способами, збігаються, то обчислення виконано правильно.

Зауваження. *Правила 1)—3) не розповсюджуються на елементи стовпця, який відповідає вектору $\vec{C}$. Елементи цього стовпця записують у нову таблицю без змін, крім елемента із розв'язувального рядка. На його місце записують елемент c_k із розв'язувального стовпця.*

Над другою симплексною таблицею (табл. 9.2) виконуємо ті самі дії, що й над першою симплексною таблицею (табл. 9.1). Розглядаємо елементи ($m+1$)-го рядка, починаючи з $z'_1 - c_1$,

Таблиця 9.2

i	Базис	$\vec{C}$ базису	$\vec{P}_0$	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	…	$\vec{P}_l$	…	$\vec{P}_m$	$\vec{P}_{m+1}$	…	$\vec{P}_j$	…	$\vec{P}_k$	…	$\vec{P}_n$
1	$\vec{P}_1$	c_1	x'_1	1	0	…	x'_{1l}	…	0	x'_{1m+1}	…	x'_{1j}	…	0	…	x'_{1n}
2	$\vec{P}_2$	c_2	x'_2	0	1	…	x'_{2l}	…	0	x'_{2m+1}	…	x'_{2j}	…	0	…	x'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	$\vec{P}_k$	c_k	x'_k	0	0	…	x'_{ll}	…	0	x'_{lm+1}	…	x'_{lj}	…	1	…	x'_{ln}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\vec{P}_m$	c_m	x'_m	0	0	…	x'_{ml}	…	1	x'_{mm+1}	…	x'_{mj}	…	0	…	x'_{mn}
$m+1$ рядок	$z'_j - c_j$		z'_0	0	0	…	$z'_l - c_l$	…	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	…	$z'_j - c_j$	…	0	…	$z'_n - c_n$

тобто різниці $z'_j - c_j$ ($j = 1, 2, ..., n$). Якщо всі ці різниці недодатні ($z'_j - c_j \le 0$), то на підставі теореми 2, § 1, розд. 9, опорний план $\vec{P}_0$ ($x'_1, x'_2, ..., x'_m$) є оптимальним і мінімум лінійної функції дорівнює z'_0. Якщо серед елементів $z'_j - c_j$ ($m+1$)-го рядка є додатні, то виконуємо ті ж самі дії, що й у попередньому випадку. На підставі теорем 1, 2, § 1, розд. 9, дістаємо, нарешті, оптимальний план або впевнюємося в необмеженості лінійної функції задачі.

Для ілюстрації симплексного методу розв'яжемо задачу лінійного програмування.

Задача. Знайти мінімум лінійної функції

$$z = -x_4 + x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_4 + x_5 &= 2, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 7, \\ x_3 - x_4 - 3x_5 &= 2, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5). \end{aligned}$$

Р о з в ' я з а н н я. Вихідний базис складається з векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$. Цьому базису відповідає опорний план $\vec{X}$ (2, 7, 2, 0, 0). Оскільки $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то значення лінійної функції, що відповідає цьому опорному плану, дорівнює 0, тобто $z_0 = 0$.

Складемо першу симплексну таблицю (табл. 9.3).

Таблиця 9.3

i	Базис	$\vec{C}_{базису}$	$\vec{P}_0$	0	0	0	-1	1
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$
1	$\vec{P}_1$	0	2	1	0	0	$\boxed{1}$	1
2	$\vec{P}_2$	0	7	0	1	0	2	3
3	$\vec{P}_3$	0	2	0	0	1	-1	-3
$m+1$ рядок	$z_j - c_j$		0	0	0	0	1	-1

Серед елементів ($m+1$)-го рядка, починаючи з другого, є додатний елемент 1. Розглянемо елементи стовпця, що містить цей елемент і обчислимо відношення координат вектора $\vec{P}_0$ до відповідних додатних елементів вказаного стовпця (у цьому випадку до відповідних додатних координат вектора $\vec{P_4}$). Якби в ($m+1$)-му рядку було кілька додатних елементів, то насамперед розглядали б найбільший з них.

Відношеннями є $\frac{2}{1}$ і $\frac{7}{2}$, найменше з яких $\frac{2}{1}$. Отже, 1 є розв'язувальним елементом. Вектор $\vec{P_1}$ треба вивести з базису, а вектор $\vec{P_4}$ — ввести в базис. Складемо другу симплексну таблицю (табл. 9.4).

Таблиця 9.4

i	Базис	$\vec{C}$ базису	$\vec{P_0}$	0	0	0	-1	1
				$\vec{P_1}$	$\vec{P_2}$	$\vec{P_3}$	$\vec{P_4}$	$\vec{P_5}$
1	$\vec{P_4}$	-1	2	1	0	0	1	1
2	$\vec{P_2}$	0	3	-2	1	0	0	1
3	$\vec{P_3}$	0	4	1	0	1	0	-2
$m+1$ рядок	$z_j - c_j$		-2	-1	0	0	0	-2

Оскільки серед елементів ($m+1$)-го рядка, починаючи з другого, додатних немає, то опорний план $\vec{X}$ (0, 3, 4, 2, 0) є оптимальним, значення лінійної функції $z=-2$, що йому відповідає, є мінімальним.

Таким чином, $z_{min}=-2$ при $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=2$, $x_5=0$.

§ 3. Метод штучного базису

У попередньому параграфі було зроблено припущення, що система обмежень задачі лінійного програмування містить одиничну матрицю, з якої можна складати первісний базис. Проте більшість задач лінійного програмування не має одиничної матриці в своїх системах обмежень.

Використовують різні методи побудови первісного опорного плану. Розглянемо так званий метод штучного базису або M-метод, який об'єднує знаходження первісного (вихідного) опорного плану та оптимального плану задачі лінійного програмування.

Цей метод дає змогу одночасно з'ясувати, чи сумісна система обмежень в області невід'ємних розв'язків, тобто чи має вона принаймні один план.

Нехай треба визначити мінімум лінійної функції

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Разом з вихідною задачею розглянемо розширену задачу, зв'язану з мінімізацією лінійної функції

$$\bar{z} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \\ + Mx_{n+2} + \dots + Mx_{n+m} \tag{9.24}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+m). \tag{9.25}$$

Невідомі $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ називаються *штучними*, M — вважається досить великим додатним числом, значення якого наперед не задається.

Розширена задача має одиничний базис, що складається з векторів $\vec{P}_{n+1}, \vec{P}_{n+2}, \dots, \vec{P}_{n+m}$; його називають *штучним базисом*. Суть методу штучного базису полягає в тому, що виходячи з відомого штучного базису $\vec{P}_{n+1}, \vec{P}_{n+2}, \dots, \vec{P}_{n+m}$, за допомогою перетворень симплексного методу переходимо до других базисів, послідовно звільняючись від усіх векторів $\vec{P}_{n+i}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$; внаслідок цього повертаємося до умов вихідної задачі, але діставши для неї базис. Для складання оптимального плану далі застосовують звичайний симплексний метод. Отже, плани вихідної задачі є також і планами розширеної задачі.

Теорема 5

Якщо існує принаймні один план вихідної задачі, то для оптимального плану розширеної M-задачі виконуються рівності

$$x_{n+i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Доведення. Припустимо, що $\vec{X} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ — план вихідної задачі. Тоді вектор $\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, 0, ..., 0)$ є планом розширеної задачі, оскільки задовольняються рівняння системи (9.25) і всі $x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, ..., n, n+1, n+2, ..., n+m)$. Позначимо через $\bar{z}^*$ значення лінійної функції розширеної задачі, яке відповідає плану $\vec{X}^*$.

Нехай

$$\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n, n+1, n+2, ..., n+m)$$

є оптимальним планом розширеної задачі. Позначимо через $\bar{z}_{\min}$ мінімальне значення лінійної функції (9.24) розширеної задачі, що відповідає цьому оптимальному плану. Тоді

$$\bar{z}_{\min} \leq \bar{z}^*.$$

Запишемо значення для $\bar{z}_{\min}$:

$$\bar{z}_{\min} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m}.$$

Отже,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m} \leq z^*,$$

або

$$M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \leq z^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Оскільки $x_{n+i} \geq 0$ для всіх $i = 1, 2, ..., m$ і M як завгодно велике додатне число, то остання нерівність можлива тільки при $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} = 0$, тобто при $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+m} = 0$.

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що коли оптимальний план розширеної задачі матиме принаймні одну невідому $x_{n+i} > 0$, то вихідна задача не матиме жодного плану, тобто коли на деякому кроці перетворень стане неможливим виключення всіх штучних векторів $\vec{P}_{n+i}$ з базису, то це означатиме, що система рівнянь вихідної задачі несумісна в області невід'ємних розв'язків.

Теорема 6

Якщо в оптимальному плані $\overline{\overline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$ розширеної задачі штучні невідомі $x_{n+i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то план $\vec{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є оптимальним планом вихідної задачі.

Доведення. Якщо $\overline{\overline{X}}$ — оптимальний план розширеної задачі, то $\vec{X}$ — план вихідної задачі і при цьому $\bar{z}(\overline{\overline{X}}) = z(\vec{X})$, а це випливає з того, що штучні невідомі дорівнюють нулю $(x_{n+i} = 0)$. Припустимо, що $\vec{X}$ не є оптимальним планом вихідної задачі. Тоді існує такий опорний план $\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, для якого $z(\vec{X}^*) < z(\vec{X})$. Звідси для вектора $\overline{\overline{X}}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, 0, \ldots, 0)$, що є планом розширеної задачі, дістаємо $\bar{z}(\overline{\overline{X}}^*) = z(\vec{X}^*) < z(\vec{X}) = \bar{z}(\overline{\overline{X}})$, тобто $\bar{z}(\overline{\overline{X}}^*) < \bar{z}(\overline{\overline{X}})$.

Таким чином, план $\overline{\overline{X}}$ розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми.

Теорему доведено.

Розглянемо застосування симплексного методу до розширеної задачі. За вихідний план цієї задачі візьмемо вектор $\vec{X} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Передбачається, що перші n координат цього вектора дорівнюють нулю. Цьому опорному плану відповідає одиничний базис

$$\vec{P}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \vec{P}_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значення лінійної функції, яке відповідає цьому вихідному опорному плану, є

$$\bar{z}_0 = M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} = M \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Оскільки базисом є одинична матриця $B = (\vec{P}_{n+1}, \vec{P}_{n+2}, \ldots, \vec{P}_{n+m})$, то з рівності $\vec{P}_j = B\vec{X}_j$ випливає, що

$$\vec{X} = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}) = \vec{P}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \quad \text{і} \quad z_j = M \sum_{i=1}^{m} x_{ij} .$$

Різниці $z_j - c_j$ будуть лінійними функціями M доти, поки серед векторів базису знайдуться штучні вектори $\vec{P}_{n+i}$.

Для вихідного опорного плану

$$z_j - c_j = M \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - c_j .$$

Як бачимо, різниці $z_j - c_j$ складаються з двох незалежних частин, одна з яких залежить від M, а друга не залежить.

Усі обчислення виконуємо за допомогою симплексних таблиць. Першу симплексну таблицю для розширеної задачі складають так само, як і першу симплексну таблицю для вихідної задачі, тільки для зручності обчислень замість одного $(m + 1)$-го рядка вводимо два рядки: $(m + 1)$-й і $(m + 2)$-й, де в $(m + 1)$-й записуємо частини різниць $z_j - c_j$, які не залежать від M, а в $(m + 2)$-й — коефіцієнти при M у других частинах цих різниць.

Першу симплексну таблицю розширеної задачі подано як таблицю 9.5.

Як вектор, що вводиться в новий базис, беремо той, для якого досягається $\max\limits_j (z_j - c_j)$. Максимум знаходимо лише для додатних різниць $z_j - c_j$.

Оскільки M є як завгодно великим додатним числом, то максимальною буде та додатна різниця, в якої коефіцієнт при M найбільший. При дуже великих додатних M доданки, що не залежать від M, практично не впливають на величину різниць $z_j - c_j$. Тому в новий базис вводиться той вектор, для якого досягається

$$\max_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} .$$

Елементи наступної таблиці, включаючи й елементи $(m + 2)$-го рядка, обчислюють за формулами (9.23). Ті зі штучних векторів, які внаслідок деяких ітерацій виведені з базису, не вводять у подальшому в жоден з наступних базисів,

Таблиця 9.5

i	Базис	$\vec{C}$	$\vec{P}_0$	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n	M	…	M	…	M
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	…	$\vec{P}_k$	…	$\vec{P}_n$	$\vec{P}_{n+1}$	…	$\vec{P}_{n+1}$	…	$\vec{P}_{n+m}$
1	$\vec{P}_{n+1}$	M	x_{n+1}	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}	…	x_{1n}	1	…	0	…	0
2	$\vec{P}_{n+2}$	M	x_{n+2}	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}	…	x_{2n}	0	…	0	…	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	$\vec{P}_{n+l}$	M	x_{n+l}	x_{l1}	x_{l2}	…	x_{lk}	…	x_{ln}	0	…	1	…	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\vec{P}_{n+m}$	M	x_{n+m}	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mk}	…	x_{mn}	0	…	0	…	1
$(m+1)$-й рядок	$z_j - c_j$		0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_k$	…	$-c_n$	0	…	0	…	0
$(m+2)$-й рядок			$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$	…	$\sum_{i=1}^{m} x_{in}$	0	…	0	…	0

тому в нових таблицях можна не записувати стовпці, що відповідають цим векторам.

Оперуючи з елементами ($m+2$)-го рядка, здійснюють обчислення доти, поки всі штучні вектори будуть виключені з базису. При цьому всі елементи ($m+2$)-го рядка перетворюються в нуль і здобутий базис відповідає деякому опорному плану вихідної задачі. Для визначення оптимального плану далі застосовують звичайний симплексний метод.

Зауваження 1. ◆ *Може статися, що внаслідок перетворень усі елементи ($m+2$)-го рядка з номерами від 1 до ($n+m$) будуть недодатні.*

I. Якщо елемент, розміщений у нульовому стовпці та в ($m+2$)-му рядку, додатний, а всі елементи ($m+1$)-го рядка, що містяться над нульовими елементами ($m+2$)-го рядка, недодатні, то вихідна задача не має жодного плану. Справді, на підставі теореми 2, § 1, розділ 9, план, що відповідає знайденому базису, оптимальний. Оскільки елемент ($m+2$, 0), який є коефіцієнтом при M у значенні лінійної функції, більший від нуля, то до оптимального плану входять деякі штучні невідомі $x_{n+i} > 0$. На підставі теореми 5 це означає, що вихідна задача не має жодного плану.

Якщо над нульовими елементами ($m+2$)-го рядка є додатні елементи ($m+1$)-го рядка, то при наступній ітерації в базис вводиться вектор, який відповідає найбільшому додатному елементу ($m+1$)-го рядка, розміщеному над нульовими елементами ($m+2$)-го рядка. Ці операції здійснюють доти, поки не залишиться більше додатних елементів ($m+1$)-го рядка, розміщених над нульовими елементами ($m+2$)-го рядка. Після цього знову аналізують елементи ($m+2$)-го рядка.

II. Якщо елемент, розміщений у ($m+2$)-му рядку й нульовому стовпці, дорівнює нулю, то дістанемо план, штучні компоненти якого дорівнюють нулю. Отже, цей план буде також і планом вихідної задачі (виродженим, оскільки складається менш ніж з m додатних компонентів). Досліджуваний план буде оптимальним, якщо серед елементів ($m+1$)-го рядка, розміщених над нульовими елементами ($m+2$)-го рядка, немає додатних. Якщо є додатні елементи ($m+1$)-го рядка, розміщені над нульовими елементами ($m+2$)-го рядка, то вводимо в базис вектор, який відповідає максимальному додатному елементу.

Зазначені перетворення ведуть до зменшення лінійної функції задачі, при цьому штучні невідомі, які ще є в плані, дорівнюють нулю.

Перетворення виконуватимемо доти, поки серед елементів ($m+1$)-го рядка, розміщених над нульовими елементами ($m+2$)-го рядка, не залишиться додатних, що відповідатиме досягненню оптимального плану.

Зауваження 2. ◆ *Якщо вихідна задача містить кілька одиничних векторів, то їх необхідно включити в штучний базис, що скоротить кількість ітерацій, необхідних для знаходження оптимального розв'язку.*

Приклад. Задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

і лінійну функцію

$$z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 .$$

Знайти невід'ємний розв'язок $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$) системи рівнянь, який перетворює лінійну функцію z у мінімум.

Розв'язання. Запишемо розширену задачу. Оскільки вихідна задача має одиничний вектор $\vec{P_4}$, то слід ввести тільки дві штучні невідомі x_5 і x_6 (два штучні вектори $\vec{P_5}, \vec{P_6}$). Отже, розширена задача має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10; \end{cases}$$

$$\bar{z} = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 .$$

Складемо першу симплексну таблицю для розширеної задачі (табл. 9.6). Вихідним планом є $\vec{X} = (x_5, x_6, x_4) = (15, 20, 10)$, відповідним значенням лінійної функції є $\bar{z}_0 = 10 + 35M$, кожне z_j збігається із скалярним добутком $\vec{P_j}\,\vec{c}$. Наприклад, $z_1 - c_1 = M + 2M + 1 - (-1) = 2 + 3M$.

Таблиця 9.6

i	Базис	$\vec{C}$ базису	$\vec{P_0}$	-1	-2	-3	1	M	M
				$\vec{P_1}$	$\vec{P_2}$	$\vec{P_3}$	$\vec{P_4}$	$\vec{P_5}$	$\vec{P_6}$
1	$\vec{P_5}$	M	15	1	2	3	0	1	0
2	$\vec{P_6}$	M	20	2	1	$\boxed{5}$	0	0	1
3	$\vec{P_4}$	1	10	1	2	1	1	0	0
$m+1$	$z_j - c_j$		10	2	4	4	0	0	0
$m+2$			35	3	3	8	0	0	0

Оскільки максимальний елемент ($m+2$)-го рядка дорівнює 8 і відповідає вектору $\vec{P_3}$, то в новий базис вводитимемо цей вектор; $\min_i \frac{x_i}{x_{ij}} = 4$ і відповідає вектору $\vec{P_6}$, тому з базису виводиться вектор $\vec{P_6}$.

Виконавши над елементами першої симплексної таблиці крок перетворень Гаусса—Жордана, дістанемо другу симплексну таблицю (табл. 9.7).

Таблиця 9.7

i	Базис	$\vec{C}_{базису}$	$\vec{P_0}$	-1	-2	-3	1	M
				$\vec{P_1}$	$\vec{P_2}$	$\vec{P_3}$	$\vec{P_4}$	$\vec{P_5}$
1	$\vec{P_5}$	M	3	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{7}{5}}$	0	0	1
2	$\vec{P_3}$	-3	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0
3	$\vec{P_4}$	1	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	1	0
$m+1$	$z_j - c_j$		-6	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$	0	0	0
$m+2$			3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	0

Стовпець, що відповідає штучному вектору $\vec{P_6}$, викреслюємо і з подальших обчислень виключаємо.

Другим опорним планом є план $\vec{X'} = (x_5, x_3, x_4)$, $\vec{X'} = (3, 4, 6)$ з відповідним йому значенням лінійної функції $z'_0 = -6 + 3M$.

Вводимо в базис вектор $\vec{P_2}$ і виключаємо вектор $\vec{P_5}$ (табл. 9.8).

Таблиця 9.8

i	Базис	$\vec{C}_{базису}$	$\vec{P_0}$	-1	-2	-3	1
				$\vec{P_1}$	$\vec{P_2}$	$\vec{P_3}$	$\vec{P_4}$
1	$\vec{P_2}$	-2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0
2	$\vec{P_3}$	-3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0
3	$\vec{P_4}$	1	$\frac{15}{7}$	$\boxed{\frac{6}{7}}$	0	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		$-\frac{90}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	0
$m+2$			0	0	0	0	0

Третій опорний план розширеної задачі $\vec{X''} = (x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}\right)$ є опорним планом і вихідної задачі, $z''_0 = -\frac{90}{7}$. Він не є оптимальним, оскільки $z_1 - c_1 = \frac{6}{7} > 0$. Виконавши крок перетворень Гаусса—Жордана з розв'язувальним елементом $\frac{6}{7}$, дістанемо четверту симплексну таблицю (табл. 9.9).

Таблиця 9.9

i	Базис	$\vec{c}_{базису}$	$\vec{P_0}$	-1	-2	-3	1
				$\vec{P_1}$	$\vec{P_2}$	$\vec{P_3}$	$\vec{P_4}$
1	$\vec{P_2}$	-2	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$
2	$\vec{P_3}$	-3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{6}$
3	$\vec{P_1}$	-1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{7}{6}$
$m+1$	$z_j - c_j$		-15	0	0	0	-1

Оскільки всі різниці $z_j - c_j$ недодатні, то опорний план $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 0$ оптимальний, йому відповідає мінімальне значення лінійної функції $z_{min} = -15$.

§ 4. Задачі з мішаними обмеженнями

Нехай задано систему обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{(k+1),1}x_1 + a_{(k+1),2}x_2 + \ldots + a_{(k+1),n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{9.26}$$
$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

і лінійну функцію

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{9.27}$$

Треба знайти розв'язок системи обмежень (9.26), який перетворює лінійну функцію (9.27) у мінімум або максимум.

Система обмежень (9.26) складається з k нерівностей ($1 \le k < m$) і $m - k$ рівнянь.

Задачу з такими обмеженнями називають задачею з мішаними обмеженнями. У загальному випадку її вихідний опорний план складається з додаткових та штучних невідомих (векторів).

Нехай система обмежень (9.26) має l рівнянь і не має одиничної матриці. Тоді, щоб скласти вихідний опорний план, її можна перетворити так, щоб необхідно було включити не більш ніж l штучних невідомих. Справді, якщо всі k нерівностей, які входять у систему обмежень (9.26), мають вигляд $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \le b_i$, $b_i \ge 0$, то наведене твердження очевидне, оскільки кожна така нерівність після введення допоміжної невід'ємної невідомої зводиться до рівняння $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n + x_{n+i} = b_i$, $x_{n+i} \ge 0$, і таким невідомим відповідають одиничні вектори.

Нехай тепер k нерівностей системи обмежень мають вигляд

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \ge b_i, \quad b_i \ge 0.$$

За допомогою k невід'ємних невідомих $x_{n+i} \ge 0$ зведемо ці нерівності до рівняння

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n - x_{n+i} = b_i. \qquad (9.28)$$

Цим невідомим у рівняннях відповідають k від'ємних одиничних векторів. Щоб мати k додатних одиничних векторів, виконаємо такі перетворення.

Розглянемо деяке i-те рівняння системи обмежень з вільним членом $b_i > 0$ ($i = k+1, k+2, \ldots, m$). Кожну нерівність поділимо на довільне додатне число так, щоб вільний член став меншим за вільний член b_i вибраного рівняння. Потім введенням допоміжних невід'ємних невідомих зведемо ці нерівності до рівнянь виду (9.28). Віднявши почленно кожне з них від i-го рівняння, дістанемо рівняння, в яких допоміжні невідомі x_{n+i} матимуть знак «+».

Якщо система обмежень складається лише з нерівностей

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \ge b_i, \quad b_i \ge 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

то її можна звести до задачі, система обмежень якої включає $m - 1$ допоміжну невідому, а також одну штучну невідому, тобто система обмежень задачі матиме одиничний базис із $m - 1$ допоміжного вектора і одного штучного вектора.

Для цього кожну з нерівностей заданої системи обмежень введенням невід'ємних допоміжних невідомих x_{n+i} ($i = 1, 2, \ldots, m$) зведемо до рівнянь

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i,$$

$$x_{n+i} \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Від рівняння, вільний член якого дорівнює $\max\limits_{1 \leq i \leq m} b_i$, віднімемо всі інші рівняння. Дістанемо систему обмежень, яка має $m - 1$ одиничний допоміжний вектор. Щоб утворити базис із m векторів, введемо в рівняння, вільний член якого дорівнює $\max\limits_{1 \leq i \leq m} b_i$, штучну невідому.

Приклад. Знайти мінімальне значення лінійної функції $z = 2x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2}x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Зведемо систему нерівностей, застосувавши допоміжні невід'ємні невідомі x_4, x_5, x_6, до системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_5 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_6 = 12. \end{cases}$$

Оскільки $\max\limits_{1 \leq i \leq 3} b_i = 16$, то, віднявши почленно від другого рівняння перше і третє, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_2 + x_4 - x_5 = 10, \\ -x_1 + x_3 - x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_5 = 16. \end{cases}$$

В останнє рівняння введемо штучну невідому x_7 ($x_7 \geq 0$). В результаті матимемо розширену задачу: знайти мінімальне значення лінійної функції $\bar{z} = 2x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2}x_3 + Mx_7$ (допоміжним невідомим x_4, x_5, x_6 тут відповідають нульові коефіцієнти) при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_2 + x_4 - x_5 = 10, \\ -x_1 + x_3 - x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_5 + x_7 = 16. \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 7). \end{cases}$$

У векторній формі система обмежень набирає вигляду

$$\vec{P}_1 x_1 + \vec{P}_2 x_2 + \vec{P}_3 x_3 + \vec{P}_4 x_4 + \vec{P}_5 x_5 + \vec{P}_6 x_6 + \vec{P}_7 x_7 = \vec{P}_0 .$$

Вихідним базисом є одиничні вектори $\vec{P}_4, \vec{P}_6, \vec{P}_7$. Прирівнявши вільні невідомі до нуля, дістанемо вихідний опорний план $\vec{X}_0$ (0, 0, 0, 10, 0, 4, 16), якому відповідає значення лінійної функції $\bar{z}$ розширеної задачі $\bar{z}_0 = 16M$. Оптимальний план вихідної задачі шукатимемо за допомогою симплексного методу (табл. 9.10).

Таблиця 9.10

i	Базис	$\vec{C}$ базису	$\vec{P}_0$	2	3	$\frac{5}{2}$	0	0	0	M
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$	$\vec{P}_7$
1	$\vec{P}_4$	0	10	0	$\boxed{3}$	0	1	−1	0	0
2	$\vec{P}_6$	0	4	−1	0	1	0	−1	1	0
3	$\vec{P}_7$	M	16	2	4	3	0	−1	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		0	−2	−3	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	0
$m+2$			16	2	4	3	0	−1	0	0
1	$\vec{P}_2$	3	$\frac{10}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
2	$\vec{P}_6$	0	4	−1	0	1	0	−1	1	0
3	$\vec{P}_7$	M	$\frac{8}{3}$	2	0	$\boxed{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		10	−2	0	$-\frac{5}{2}$	1	−1	0	0
$m+2$			$\frac{8}{3}$	2	0	3	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
1	$\vec{P}_2$	3	$\frac{10}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
2	$\vec{P}_6$	0	$\frac{28}{9}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{4}{9}$	$-\frac{10}{9}$	1	
3	$\vec{P}_3$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	
$m+1$	$z_j - c_j$		$\frac{110}{9}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{18}$	$-\frac{13}{18}$	0	
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	

Стовпець, що відповідає штучному векторові $\vec{P}_7$ (виведеному з базису), не обчислюємо і з подальших обчислень виключаємо. Проаналізувавши завершальну частину табл. 9.10, здобуту на другому кроці перетворень Гаусса—Жордана, побачимо, що штучних векторів немає і всі елементи $(m+1)$-го рядка недодатні. Це означає, що базис $\vec{P}_2, \vec{P}_6, \vec{P}_3$ оптимальний. Йому відповідає оптимальний план $\vec{X}_{\text{опт.}} = \left(0, \frac{10}{3}, \frac{8}{9}, 0, 0, \frac{28}{9}\right)$, що перетворює лінійну функцію z у мінімум: $z_{\min} = \frac{110}{9}$ (додаткові невідомі x_4, x_5, x_6 входять у лінійну функцію z з нульовими коефіцієнтами).

§ 5. Геометрична інтерпретація симплексного методу

Наведемо спрощену геометричну інтерпретацію симплексного методу, яка випливає з геометричної інтерпретації задач лінійного програмування.

Нехай система обмежень (8.1) задачі лінійного програмування визначає многогранник розв'язків K (рис. 9.1). Дві вершини многогранника розв'язків називають сусідніми, якщо вони лежать на одному ребрі многогранника.

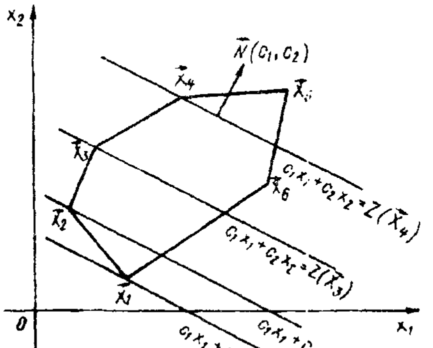

Рис. 9.1

Доведено, що перетворенням, виконаним симплексним методом, відповідають переміщення від однієї кутової точки многогранника до її сусідньої.

Припустимо, що $\vec{X}_4$ є кутовою точкою многокутника K, яка відповідає вихідному опорному плану. Через цю точку проведено пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = z(\vec{X}_4)$, де $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ є лінійною функцією задачі.

Переміщатимемо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = z(\vec{X}_4)$ паралельно самій собі в напрямі, протилежному вектору $\vec{N}(c_1, c_2)$, тобто в напрямі спадання лінійної функції z. При наступній ітерації пряма $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ проходитиме через точку $\vec{X}_3$,

$z(\vec{X}_3) < z(\vec{X}_4)$. Внаслідок двох наступних ітерацій пряма пройде через точку $\vec{X}_1$, чим буде визначено оптимальний план.

Загальна кількість ітерацій, необхідних для досягнення оптимального плану, залежить від того, який опорний план взято як вихідний. Якщо цей план відповідає точці $\vec{X}_6$, то для досягнення оптимального розв'язку задачі треба виконати тільки одну ітерацію.

Як бачимо, при виконанні ітерацій за симплексним методом досліджуються не всі кутові точки, а лише ті, що лежать на одному ребрі многогранника розв'язків з попередньою кутовою точкою. Так, у першому випадку пропущено кутову точку $\vec{X}_6$, а в другому — кутові точки $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$. Це пояснюється вибором розв'язувального елемента за правилом (9.7), яке є основною складовою симплексного методу.

ВПРАВИ

Розв'язати симплексним методом задачі лінійного програмування.

1. **Мінімізувати лінійну функцію**

$$z = x_1 + x_2 + x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{cases}$$

2. **Мінімізувати лінійну функцію**

$$z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{cases}$$

3. **Мінімізувати лінійну функцію**

$$z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

4. Максимізувати лінійну функцію

$$z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

5. Мінімізувати лінійну функцію

$$z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

6. Максимізувати лінійну функцію

$$z = 5x_1 + 2x_2 - x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

7. Максимізувати лінійну функцію

$$z = x_4 - x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0, \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, 3, 4, 5). \end{cases}$$

8. **Максимізувати лінійну функцію**

$$z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ -x_1 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_6 + x_7 = 6, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 7). \end{cases}$$

9. **Мінімізувати лінійну функцію**

$$z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

10. **Максимізувати лінійну функцію**

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Розділ 10

ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

§ 1. Поняття про двоїстість

З кожною задачею лінійного програмування можна поєднати деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають двоїстою або спряженою. Первісну задачу називають вихідною.

Зв'язок між вихідною та двоїстою задачами в тому, що коефіцієнти c_j лінійної функції цілі вихідної задачі є вільними членами системи обмежень двоїстої задачі, вільні члени b_i системи обмежень вихідної задачі є коефіцієнтами функції цілі двоїстої задачі, а матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою матрицею коефіцієнтів системи обмежень вихідної задачі.

Розв'язок двоїстої задачі можна знайти з розв'язку первісної задачі і навпаки.

Двоїсті задачі відіграють велику роль в економічному аналізі результатів розрахунків. Пояснимо це на прикладі використання ресурсів.

Підприємство, що має m видів ресурсів у кількості b_i одиниць ($i = 1, 2, ..., m$), виробляє n видів продукції. Для виробництва однієї одиниці продукції витрачається a_{ij} одиниць i-го ресурсу, вартість одиниці продукції становить c_j. Треба скласти план випуску продукції, який забезпечив би максимальний прибуток.

Позначимо через x_j ($j = 1, 2, ..., n$) кількість одиниць j-ї продукції. Тоді вихідну задачу формулюють так.

Знайти невід'ємний розв'язок системи обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ (j = 1, 2, ..., n), \end{cases}$$

який перетворює лінійну функцію

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

у максимум.

Оцінимо ресурси, необхідні для виготовлення продукції. За одиницю вартості ресурсів візьмемо одиницю вартості виготовленої продукції. Позначимо через $y_i = (i = 1, 2, \ldots, m)$ вартість одиниці i-го ресурсу. Тоді вартість усіх витрачених ресурсів, що йдуть на виготовлення одиниці j-ї продукції, дорівнюватиме $a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{mj} y_m \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$. Вартість витрачених ресурсів не може бути меншою за вартість кінцевого продукту, тому виконується нерівність

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{mj} y_m \geq c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Вартість усіх ресурсів, що є в наявності, дорівнюватиме $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$. Отже, двоїсту задачу можна сформулювати так. Знайти невід'ємний розв'язок системи обмежень

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n, \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

який перетворює в мінімум лінійну функцію

$$T = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m.$$

Розглянуті вихідну та двоїсту задачі можна інтерпретувати економічно так.

Вихідна задача. Скільки і якої продукції $x_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ треба виробити, щоб при заданих вартостях $c_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ одиниці продукції і розмірах наявних ресурсів $b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ максимізувати прибуток підприємства.

Двоїста задача. Якою повинна бути ціна одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих кількостях ресурсів b_i та величинах вартості одиниці продукції c_j мінімізувати загальну вартість витрат?

Змінні y_i називають *оцінками* або *обліковими неявними цінами*.

§ 2. Несиметричні двоїсті задачі

Вихідна задача. Визначити вектор-стовпець $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що мінімізує лінійну функцію

$$z = \vec{c}\vec{X} \tag{10.1}$$

за умов

$$\begin{cases} A\vec{X} = \vec{B}, \\ \vec{X} \geq \vec{0}. \end{cases} \tag{10.2}$$

Передбачається, що число рядків матриці A менше від числа її стовпців. (Вихідною взято задачу мінімізації, а можна було б взяти й задачу максимізації.)

Двоїста задача. Визначити вектор-рядок $\vec{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, що перетворює в максимум лінійну функцію

$$g = \vec{W}\vec{B} \tag{10.3}$$

за умов

$$\vec{W}A \leq \vec{C}. \tag{10.4}$$

У двоїстій задачі змінні w_i можуть бути й від'ємними. В обох задачах $\vec{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор-рядок, $\vec{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — вектор-стовпець, $A = (a_{ij})$ — матриця коефіцієнтів порядку $m \times n$. Помноживши вектор-рядок $\vec{W}$ на матрицю A, дістанемо систему (10.4) в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \leq c_1, \\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \leq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \leq c_n. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів цієї системи збігається з A^{T}.

Для вихідної та двоїстої задач справджується така теорема.

Теорема двоїстості

Якщо з двох задач (вихідної та двоїстої) одна має оптимальний план, то й друга має розв'язок, причому оптимальні значення лінійних функцій задач рівні, тобто

$$\min z = \max g.$$

Якщо лінійна функція однієї із задач необмежена (для вихідної — знизу, а для двоїстої — зверху), то друга задача не має жодного плану.

Д о в е д е н н я. Нехай вихідна задача має оптимальний план, побудований за симплексним методом. Не порушуючи загальності, припустимо, що оптимальний план складається з перших m векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$, компоненти яких утворюють матрицю M.

Кінцева симплексна таблиця має такий вигляд (табл. 10.1).

Ця таблиця містить розклади векторів вихідної системи $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m, \vec{P}_{m+1}, \vec{P}_{m+2}, \ldots, \vec{P}_n$ за векторами базису $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$, тобто кожному вектору $\vec{P}_j$ відповідає такий вектор $\vec{X}_j$, що

$$\vec{P}_j = M\vec{X}_j \ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{10.5}$$

Для оптимального плану дістанемо:

$$\vec{P}_0 = M\vec{X}_0, \tag{10.6}$$

де $\vec{X}_0 = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Позначимо через $\overline{X} = (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m, \vec{X}_{m+1}, \ldots, \vec{X}_n)$ матрицю, складену з компонентів векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m, \vec{X}_{m+1}, \ldots, \vec{X}_n$, тобто

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & x_{1(m+1)} & \ldots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & x_{2(m+1)} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & x_{m(m+1)} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виконуються такі співвідношення:

$$A = M\overline{X}, \quad M^{-1}A = \overline{X}; \tag{10.7}$$

$$B = M\vec{X}_0, \quad M^{-1}B = \vec{X}_0; \tag{10.8}$$

$$\min z = \vec{C}_{\text{базису}}\vec{X}_0; \tag{10.9}$$

$$\vec{Z} = \vec{C}_{\text{базису}}\overline{X} - \vec{C} \leq \vec{0}, \tag{10.10}$$

де $\vec{C}_{\text{базису}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — вектор-рядок, $\vec{Z} = (\vec{C}_{\text{базису}}\vec{X}_1 - c_1, \vec{C}_{\text{базису}}\vec{X}_2 - c_2, \ldots, \vec{C}_{\text{базису}}\vec{X}_n - c_n) = (z_1 - c_1, z_2 - c_2, \ldots, z_n - c_n)$ — вектор, компоненти якого недодатні, оскільки вони є різницями $z_j - c_j$, що відповідають оптимальному плану.

Таблиця 10.1

i	Базис	$\vec{C}$ базису	$\vec{P}_0$	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	...	c_n
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	...	$\vec{P}_m$	$\vec{P}_{m+1}$	$\vec{P}_{m+2}$	...	$\vec{P}_n$
1	$\vec{P}_1$	c_1	x_1^*	1	0	...	0	$x_{1(m+1)}$	$x_{1(m+2)}$	...	x_{1n}
2	$\vec{P}_2$	c_2	x_2^*	0	1	...	0	$x_{2(m+1)}$	$x_{2(m+2)}$	...	x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\vec{P}_m$	c_m	x_m^*	0	1	...	0	$x_{m(m+1)}$	$x_{m(m+2)}$	...	x_{mn}
$m+1$	$z_j - c_j$		z_0	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_m - c_m$	$z_{m+1} - c_{m+1}$	$z_{m+2} - c_{m+2}$	...	$z_n - c_n$

Нехай $\vec{W}^0 = (w_1^0, w_2^0, \ldots, w_m^0)$ визначають із співвідношення $W^0 = \vec{C}_{\text{базису}} M^{-1}$.

Тоді відповідно до (10.7) і (10.10)

$$\vec{W}^0 A - \vec{C} = \vec{C}_{\text{базису}} M^{-1} A - \vec{C} = \vec{C}_{\text{базису}} \bar{X} - \vec{C} \le \vec{0} \text{ або } \vec{W}^0 A \le \vec{C}.$$

Таким чином, вектор $\vec{W}^0$ є планом двоїстої задачі, оскільки задовольняє обмеження (10.4). Відповідне значення лінійної функції задачі

$$g(\vec{W}^0) = \vec{W}^0 \vec{B}.$$

Врахувавши співвідношення (10.8) і (10.9), дістаємо

$$\vec{W}^0 \vec{B} = \vec{C}_{\text{базису}} M^{-1} \vec{B} = \vec{C}_{\text{базису}} \vec{X}_0 = \min z. \qquad (10.11)$$

Отже, значення лінійної функції двоїстої задачі, що відповідає плану $\vec{W}^0$, збігається з мінімальним значенням лінійної функції вихідної задачі.

Покажемо, що $\vec{W}^0$ є оптимальним планом двоїстої задачі.

Для будь-якого n-вимірного вектора $\vec{X}$, що задовольняє умови (10.2), та будь-якого m-вимірного вектора $\vec{W}$, що задовольняє умови (10.4), маємо

$$\vec{W} A \vec{X} = \vec{W} \vec{B} = g(\vec{W}); \qquad (10.12)$$

$$\vec{W} A \vec{X} \le \vec{C} \vec{X} = z(\vec{X}). \qquad (10.13)$$

Порівнявши (10.12) і (10.13), знайдемо, що

$$g(\vec{W}) \le z(\vec{X}). \qquad (10.14)$$

Ця нерівність виконується для будь-яких $\vec{W}$ і $\vec{X}$, що є відповідно планами двоїстої і вихідної задач. Звідси випливає, що й оптимальні значення лінійних функцій (10.1) і (10.3) зв'язані нерівністю

$$\max g(\vec{W}) \le \min z(\vec{X}).$$

Для плану $\vec{W}^0$ у відповідності з (10.11) маємо

$$g(\vec{W}_0) = \vec{W}^0 \vec{B} = \min z(\vec{X}). \qquad (10.15)$$

Таким чином, лінійна функція двоїстої задачі досягає максимуму при $\vec{W}_0$. Тому, згідно з (10.15), маємо

$$\max g = \min z. \tag{10.16}$$

Аналогічно можна довести, що оскільки двоїста задача має розв'язок, то вихідна задача також має розв'язок і

$$\max g = \min z.$$

Для доведення другої частини теореми припустимо, що лінійна функція вихідної задачі не обмежена знизу. Тоді з (10.14) випливає, що

$$g(w) \leq -\infty, \tag{10.17}$$

тобто будь-якому розв'язку системи обмежень двоїстої задачі (10.4) відповідає значення двоїстої лінійної функції (10.3), яке менше або дорівнює мінус нескінченності. Оскільки співвідношення (10.17) не має змісту, то робимо висновок, що двоїста задача не має планів. Теорему доведено.

Якщо матриця A коефіцієнтів вихідної задачі містить одиничну матрицю M, складену для визначеності з перших m одиничних векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$, або доповнена одиничною матрицею, то у кінцевій симплексній таблиці стовпці вихідного одиничного базису перетворюються у стовпці оберненої матриці $M^{-1} = (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m)$. Тому можна не визначати складові W_i^0 оптимального плану двоїстої задачі за формулою $\vec{W}^0 = \vec{C}^0 M^{-1}$.

Справді, $\vec{W}^0 = \vec{C}^0 M^{-1} = (\vec{C}^0 \vec{X}_1, \vec{C}^0 \vec{X}_2, \ldots, \vec{C}^0 \vec{X}_m) = (w_1^0, w_2^0, \ldots, w_m^0)$. За означенням z_j маємо:

$$\vec{C}_0 \vec{X}_1 = z_1, \quad \vec{C}^0 \vec{X}_2 = z_2, \ldots, \vec{C}^0 \vec{X}_m = z_m.$$

В $(m+1)$-му рядку кінцевої таблиці кожному $\vec{X}_j$ відповідає оцінка $z_j - c_j$.

Отже, i-му компоненту оптимального розв'язку двоїстої задачі дістанемо зі значення оцінки $z_j - c_j$ $(m+1)$-го рядка кінцевої таблиці, що міститься проти відповідного вектора, який входить у первісний одиничний базис, додаванням до неї значення c_j.

Приклад. Нехай вихідною задачею є задача, розглянута в § 2, розд. 9.

Вихідна задача. Знайти мінімум лінійної функції

$$z = -x_4 + x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_4 + x_5 = 2, \\ \quad x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7, \\ \quad\quad x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases}$$

Тут $\vec{C} = (0, 0, 0, -1, 1)$, $\vec{B} = (2, 7, 2)$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Двоїста задача. Знайти максимум лінійної функції

$$g = 2w_1 + 7w_2 + 2w_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} w_1 \le 0, \\ w_2 \le 0, \\ w_3 \le 0, \\ w_1 + 2w_2 - w_3 \le -1, \\ w_1 + 3w_2 - 3w_3 \le 1. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Вихідний одиничний базис складається з векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$. У кінцевій таблиці їм відповідають вектори $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$, які утворюють обернену матрицю

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{C}_{\text{базису}} = (-1, 0, 0).$$

Оптимальний план двоїстої задачі $\vec{W}^0 = (w_1^0, w_2^0, w_3^0)$ обчислимо за формулою $\vec{W}^0 = \vec{C}_{\text{базису}} M^{-1}$:

$$\vec{W}^0 = (-1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 0, 0).$$

Як видно, компоненти оптимального плану збігаються з оцінками $(m+1)$-го рядка кінцевої таблиці, які містяться в першому, другому і третьому стовпцях. При оптимальному плані $w_1 = -1$, $w_2 = w_3 = 0$ лінійна функція g досягає максимуму:

$$\max g = 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = -2.$$

Для вихідної задачі $z_{\min} = -2$.

§ 3. Симетричні двоїсті задачі

Вихідна задача. Знайти вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що мінімізує лінійну функцію

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{10.18}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \ge b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \ge b_m \end{cases} \tag{10.19}$$

і

$$\vec{X} \ge \vec{0}. \tag{10.20}$$

Двоїста задача. Знайти вектор $\vec{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$, що максимізує лінійну функцію

$$g = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_m w_m \tag{10.21}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \ldots + a_{m1} w_m \le c_1, \\ a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \ldots + a_{m2} w_m \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \ldots + a_{mn} w_m \le c_n \end{cases} \tag{10.22}$$

і

$$\vec{W} \ge 0. \tag{10.23}$$

Теорема двоїстості, доведена в § 2 для несиметричних двоїстих задач, справджується й для симетричних двоїстих задач. Щоб упевнитися в цьому, перетворимо систему нерівностей (10.19) вихідної задачі за допомогою невід'ємного вектора $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ у систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n - y_1 = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n - y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n - y_m = b_m, \end{cases} \tag{10.24}$$

або у векторно-матричній формі

$$A\vec{X} - E\vec{Y} = \vec{B}, \qquad (10.25)$$

де E — одинична матриця порядку m. Лінійна функція z набирає вигляду

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \ldots + 0 \cdot y_m =$$
$$= \vec{C}\,\vec{X} + \vec{0}\cdot\vec{Y}, \qquad (10.26)$$

де $\vec{O}$ — m-вимірний нульовий вектор.

Отже, еквівалентна первісна задача має вигляд:

мінімізувати лінійну функцію

$$z = \vec{C}\vec{X} + \vec{0}\cdot\vec{Y}$$

за умов

$$A\vec{X} + E\vec{Y} = \vec{B}$$

і

$$\vec{X} \geq \vec{0}, \quad \vec{Y} \geq \vec{0}. \qquad (10.27)$$

Двоїсту задачу відносно перетвореної первісної сформулюємо так:

знайти максимум лінійної функції

$$g = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_m w_m = \vec{W}\cdot\vec{B} \qquad (10.28)$$

за умов

$$\begin{array}{l} a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \ldots + a_{m1} w_m \leq c_1, \\ a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \ldots + a_{m2} w_m \leq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \ldots + a_{mn} w_m \leq c_n, \\ \quad -w_1 \leq 0, \\ \qquad\qquad -w_2 \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -w_m \leq 0, \end{array} \qquad (10.29)$$

або у векторно-матричній формі

$$\vec{W}\,(A \mid -E) \leq (\vec{C} \mid \vec{0}). \qquad (10.30)$$

Кожна із систем нерівностей (10.29) або (10.30) розкладається на дві системи $\vec{W}A \le \vec{C}$ і $-\vec{W}E \le \vec{0}$. Остання нерівність рівносильна умові $\vec{W} \ge \vec{0}$.

Таким чином, досліджувані симетричні двоїсті задачі перетворені на еквівалентні несиметричні, для яких теорему двоїстості вже доведено.

Розглянувши дві симетричні двоїсті задачі, можна вибрати з них одну, зручнішу для розв'язання.

Приклад. *Вихідна задача.* Знайти мінімальне значення лінійної функції

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3, \\ x_j \ge 0 \;\; (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Двоїста задача. Знайти максимум лінійної функції

$$g = 2w_1 + 3w_2 + 6w_3 + 3w_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2w_1 - w_2 + w_3 + 2w_4 \le 1, \\ 2w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \le 2, \\ -w_1 + 4w_2 - 2w_3 - 2w_4 \le 3. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Проаналізувавши обидві задачі, побачимо, що для розв'язання вихідної задачі треба чотири додаткові невідомі, а після перетворень ще одну штучну невідому. Перша симплексна таблиця цієї задачі складається з шести рядків, включаючи ($m+1$)-й та ($m+2$)-й, і дев'яти стовпців. Для розв'язання двоїстої задачі треба ввести три додаткові невідомі. Перша симплексна таблиця задачі складається з чотирьох рядків, включаючи ($m+1$)-й, та з восьми стовпців.

Отже, доцільніше розв'язувати двоїсту задачу. Після перетворень її сформулюємо так:

знайти максимум лінійної функції

$$g = 2w_1 + 3w_2 + 6w_3 + 3w_4 + 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2w_1 - w_2 + w_3 + 2w_4 + t_1 = 1, \\ 2w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + t_2 = 2, \\ -w_1 + 4w_2 - 2w_3 - 2w_4 + t_3 = 3, \\ w_i \ge 0 \;\; (i = 1, 2, 3, 4), \;\; t_l \ge 0 \;\; (l = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Розв'язок двоїстої задачі знайдемо симплексним методом (табл. 10.2).

Таблиця 10.2

i	Базис	$\vec{C}_{базису}$	$\vec{Q}_0$	2	3	6	3	0	0	0
				$\vec{Q}_1$	$\vec{Q}_2$	$\vec{Q}_3$	$\vec{Q}_4$	$\vec{Q}_5$	$\vec{Q}_6$	$\vec{Q}_7$
1	Q_5	0	1	2	−1	$\boxed{1}$	2	1	0	0
2	Q_6	0	2	2	1	1	1	0	1	0
3	Q_7	0	3	−1	4	−2	−2	0	0	1
$m+1$	$w_j - c_j$		0	−2	−3	−6	−3	0	0	0
1	$\vec{Q}_3$	6	1	2	−1	1	2	1	0	0
2	$\vec{Q}_6$	0	1	0	$\boxed{2}$	0	−1	−1	1	0
3	$\vec{Q}_7$	0	5	3	6	0	2	2	0	1
$m+1$	$w_j - c_j$		6	10	−9	0	9	6	0	0
1	$\vec{Q}_3$	6	$\frac{3}{2}$	2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	$\vec{Q}_6$	3	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3	$\vec{Q}_7$	0	2	3	0	0	4	5	3	1
$m+1$	$w_j - c_j$		$\frac{21}{2}$	10	0	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	0

Щоб розв'язати задачу, треба знайти максимум. Оскільки всі оцінки ($w_j - c_j$) ($m + 1$)-го рядка невід'ємні, то здобутий при другій ітерації базис $\vec{Q}_3$, $\vec{Q}_2$, $\vec{Q}_7$ оптимальний, йому відповідає оптимальний план

$$\vec{W}^{0} = \left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right),\quad g_{\max} = \frac{21}{2}.$$

Оптимальний план вихідної задачі визначимо за допомогою оцінки $(m+1)$-го рядка заключної частини таблиці, що міститься в стовпцях $\vec{Q}_5$, $\vec{Q}_6$, $\vec{Q}_7$:

$$x_1 = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2},\quad x_2 = \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2},\quad x_3 = 0 + 0 = 0.$$

Отже, оптимальний план вихідної задачі є $\vec{X}_0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$, йому відповідає мінімальне значення лінійної функції z, а саме: $z_{\min} = \frac{21}{2}$.

Систематизувавши розглянуті вище несиметричні та симетричні двоїсті задачі, запишемо математичні моделі всіх двоїстих задач.

Несиметричні задачі

1. *Вихідна задача* — *Двоїста задача*

Вихідна задача	Двоїста задача
$z_{\min} = \vec{C}\vec{X},$	$g_{\max} = \vec{W}\vec{B},$
$A\vec{X} = \vec{B},$	$\vec{W}A \ge \vec{C}.$
$\vec{X} \ge 0.$	

2. *Вихідна задача* — *Двоїста задача*

Вихідна задача	Двоїста задача
$z_{\max} = \vec{C}\vec{X},$	$g_{\min} = \vec{W}\vec{B},$
$A\vec{X} = \vec{B},$	$\vec{W}A \ge \vec{C}.$
$\vec{X} \ge \vec{0}.$	

Симетричні задачі

1. *Вихідна задача* — *Двоїста задача*

Вихідна задача	Двоїста задача
$z_{\min} = \vec{C}\vec{X},$	$g_{\max} = \vec{W}\vec{B},$
$A\vec{X} \ge \vec{B},$	$\vec{W}A \le \vec{C},$
$\vec{X} \ge \vec{0}.$	$\vec{W} \ge \vec{0}.$

2. *Вихідна задача* — *Двоїста задача*

Вихідна задача	Двоїста задача
$z_{\max} = \vec{C}\vec{X},$	$g_{\min} = \vec{W}\vec{B},$

$$A\vec{X} \le \vec{B}, \qquad \vec{W}A \ge \vec{C},$$

$$\vec{X} \ge 0. \qquad \vec{W} \ge \vec{0}.$$

Наприкінці подамо без доведення таку теорему.

Теорема

Якщо в разі підстановки компонентів оптимального плану в систему обмежень вихідної задачі i-те обмеження перетворюється на нерівність, то i-та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо i-та компонента оптимального плану двоїстої задачі додатна, то i-те обмеження вихідної задачі задовольняється її оптимальним розв'язком як строга нерівність.

§ 4. Двоїстий симплексний метод

Розглянемо двоїстий симплексний метод для несиметричної двоїстої задачі.

Вихідна задача. Знайти мінімум лінійної функції

$$z = \vec{C}\,\vec{X}$$

при обмеженнях

$$A\vec{X} = \vec{B}$$

і

$$\vec{X} \ge \vec{0}.$$

Двоїста задача. Знайти максимум лінійної функції

$$g = \vec{W}\,\vec{B}$$

при обмеженнях

$$\vec{W}A \le \vec{C}.$$

У § 2 показано, що для розв'язання вихідної задачі можна перейти до двоїстої, знайти її оптимальний план, а потім, використавши оцінки цього оптимального плану, визначити оптимальний план вихідної задачі.

Перехід до двоїстої задачі не є обов'язковим, оскільки, як показує аналіз першої симплексної таблиці з одиничним допоміжним базисом, у стовпцях записано вихідну задачу, а в рядках — двоїсту, оцінками плану вихідної задачі є c_j, а оцінками плану двоїстої задачі — b_i.

Використавши симплексну таблицю вихідної задачі, знайдемо оптимальний план двоїстої задачі, а разом з ним і оптимальний план вихідної задачі. Цей метод називають двоїстим симплексним методом.

Нехай взято такий базис $K = (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_l, \ldots, \vec{P}_m)$, для якого принаймні одна з компонент вектора $\vec{X} = K^{-1}\vec{B} = (x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_m)$ від'ємна, наприклад $x_l < 0$, але оцінки векторів $\vec{P}_j$ недодатні, тобто $z_j - c_j \leq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді, згідно з основною теоремою двоїстості $\vec{W} = \vec{C}_{\text{базису}} K^{-1}$, є планом двоїстої задачі. Цей план не є оптимальним, оскільки, по-перше, вибраний базис $\vec{X}$ має від'ємну компоненту і не є планом вихідної задачі, а, по-друге, оцінки оптимального плану двоїстої задачі мають бути невід'ємними.

Таким чином, вектор $\vec{P}_l$, що відповідає компоненті $x_l < 0$, необхідно вилучити з базису вихідної задачі, а вектор, що відповідає від'ємній оцінці, — ввести до базису вихідної задачі.

Для вибору вектора, що вводиться в базис вихідної задачі, аналізуємо l-й рядок: якщо в ньому немає $x_{lj} < 0$, то лінійна функція двоїстої задачі необмежена на многограннику розв'язків, а вихідна задача не має розв'язків. Якщо деякі $x_{lj} < 0$, то для стовпців, що містять ці від'ємні значення, обчислюємо $\theta_{0j} = \min(x_i/x_{ij}) \geq 0$ і визначаємо вектор, що відповідає $\max \theta_{0j}(z_j - c_j)$ для розв'язання вихідної задачі на мінімум і $\min \theta_{0j}(z_j - c_j)$ для розв'язання вихідної задачі на максимум. Цей вектор вводимо в базис вихідної задачі. Вектор, який необхідно вилучити з базису вихідної задачі, визначається розв'язувальним рядком.

Якщо $\theta_{0j} = \min(x_i/x_{ij}) = 0$, тобто $x_i = 0$, то x_{ij} береться за розв'язувальний елемент тільки тоді, коли $x_{ij} > 0$. Такий вибір розв'язувального елемента на даному етапі не веде до збільшення кількості від'ємних компонентів вектора $\vec{X}$.

Процес продовжуємо доти, поки не дістанемо, що $\vec{X} \geq \vec{0}$. При цьому знаходимо оптимальний план двоїстої задачі, а отже, оптимальний план вихідної задачі.

У процесі обчислень за алгоритмом двоїстого симплексного методу умову $z_j - c_j \le 0$ можна не враховувати до вилучення всіх $x_i < 0$. Після цього оптимальний план визначається звичайним симплексним методом. Це доцільно застосовувати, коли всі $x_i < 0$. Тоді для переходу до плану вихідної задачі за одну ітерацію необхідно θ_{0j} визначити не за мінімумом, а за максимумом відношень, тобто $\theta_{0j} = \min(x_i/x_{ij}) > 0$

Двоїстим симплексним методом можна розв'язувати задачі лінійного програмування, системи обмежень яких при додатному базисі мають вільні члени будь-якого знака. За допомогою цього методу можна зменшити кількість перетворень системи обмежень, а також розміри симплексної таблиці. Розглянемо застосування двоїстого симплексного методу на прикладі.

Приклад. Максимізувати лінійну функцію

$$z = 7x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_4 + x_6 = 12, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Складемо першу симплексну таблицю, взявши за базис вектори $\vec{P}_3, \vec{P}_5, \vec{P}_6$ (табл. 10.3).

Таблиця 10.3

i	Базис	$\vec{C}_{базису}$	$\vec{P}_0$	7	7	2	1	6	0
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$
1	$\vec{P}_3$	2	−3	3	$\boxed{-1}$	1	2	0	0
2	$\vec{P}_5$	6	4	2	1	0	1	1	0
3	$\vec{P}_6$	0	12	−1	3	0	−3	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		18	11	−3	0	9	0	0

Оскільки $x_3 = -3$, то розглядаємо елементи першого рядка, серед яких є від'ємний елемент -1, що міститься в стовпці, який відповідає вектору $\vec{P}_2$. Це означає, що в новий базис вводитимемо вектор $\vec{P}_2$. Знайдемо $\theta_{01} = \min\left(\frac{-3}{-1}; \frac{4}{1}; \frac{12}{3}\right) = \frac{-3}{-1} = 3$. Отже, розв'язувальним елементом є -1, з базису виведемо вектор $\vec{P}_3$.

Виконавши над елементами табл. 10.3 перетворення Гаусса—Жордана, дістанемо таблицю 10.4.

Таблиця 10.4

i	Базис	$\vec{C}_{базису}$	$\vec{P}_0$	7	7	2	1	6	0
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$
1	$\vec{P}_2$	7	3	-3	1	-1	-2	0	0
2	$\vec{P}_5$	6	1	5	0	$\boxed{1}$	3	1	0
3	$\vec{P}_6$	0	3	8	0	3	3	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		27	2	0	-3	3	0	0
1	$\vec{P}_2$	7	4	2	1	0	1	1	0
2	$\vec{P}_3$	2	1	5	0	1	3	1	0
3	$\vec{P}_6$	0	0	-7	0	0	-6	-3	1
$m+1$	$z_j - c_j$		30	17	0	0	12	3	0

Після другої ітерації дістали опорний план вихідної задачі, що дає змогу в подальшому розв'язувати вихідну задачу на максимум звичайним симплексним методом. Серед оцінок цього плану є від'ємна ($z_3 - c_3 = -3$). Виконавши крок перетворень Гаусса—Жордана з розв'язувальним елементом, що дорівнює 1, дістали опорний план, усі оцінки якого невід'ємні. Оскільки задачу розв'язуємо на максимум, то це означає, що цей план є оптимальним:

$$\vec{X}_{опт} = (17, 0, 0, 12, 3, 0), \quad Z_{max} = 30.$$

Оптимальний план двоїстої задачі матимемо, розглянувши оцінки опорного плану вихідної задачі, які відповідають першому базису $\vec{P}_3, \vec{P}_5, \vec{P}_6$, а саме: $w_1 = 0 + 2 = 2$, $w_2 = 3 + 6 = 9$, $w_3 = 0 + 0 = 0$. Тоді

$$g_{min} = -3 \cdot 2 + 4 \cdot 9 + 12 \cdot 0 = 30.$$

ВПРАВИ

1. **Записати вихідну задачу для такої симетричної двоїстої задачі:**

   максимізувати лінійну функцію

   $$g = w_1 + w_2 + w_3$$

   при обмеженнях

   $$\begin{cases} 2w_1 + w_2 + 2w_3 \le 2, \\ 4w_1 + 2w_2 + w_3 \le 2, \\ w_i \ge 0 \ \ (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Розв'язати обидві задачі симплексним методом.

2. **Розв'язати симплексним методом задачу:**

   мінімізувати лінійну функцію

   $$z = 2x_1 - 3x_2.$$

   при обмеженнях

   $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Розв'язати двоїсту задачу графічним методом.

3. **Записати для симетричної двоїстої задачі вихідну задачу і знайти її розв'язок симплексним методом:**

   мінімізувати лінійну функцію

   $$g = 2w_1 + 4w_2 + 12w_4$$

   при обмеженнях

   $$\begin{cases} w_1 + 2w_2 + w_3 + 4w_4 \ge 10, \\ 2w_1 + w_2 - 2w_3 + 3w_4 \ge 4, \\ w_i \ge 0 \ \ (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

4. **За допомогою двоїстого симплексного методу розв'язати наведені нижче задачі:**

   1) **максимізувати лінійну функцію**

   $$z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

   при обмеженнях

   $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 2, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1, 2, 3, 4); \end{cases}$$

2) мінімізувати лінійну функцію

$$z = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3); \end{cases}$$

3) максимізувати лінійну функцію

$$z = 5x_1 - x_2 - 4x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \\ -x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Вказівка. Записати оптимальні плани вихідної і двоїстої задач.

Розділ 11
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Транспортна задача — одна з найбільш важливих і розроблених задач лінійного програмування. Вперше вона виникла як задача визначення оптимальних схем перевезень.

Як і будь-яку задачу лінійного програмування, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом. Проте симплексний метод як універсальний метод лінійного програмування не враховує особливостей тих чи інших класів задач, він досить громіздкий і вимагає великої обчислювальної роботи.

Для розв'язування транспортної задачі були створені спеціальні методи, зокрема розподільний метод, метод потенціалів або модифікований розподільний метод (скорочено «Моді»). За допомогою цих методів можна розв'язувати також інші задачі, такі як планування матеріально-технічного постачання, визначення оптимального варіанта завантаження верстатів тощо.

Розглянемо транспортну задачу, яку називають транспортною задачею за критерієм вартості.

§ 1. Постановка задачі та її математична модель

Транспортну задачу за критерієм вартості формулюють так:

У даних m пунктах-відправниках $A_1, A_2, ..., A_m$ є відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж треба перевезти в n пунктів призначення B_1, $B_2, ..., B_n$. При цьому в кожний пункт призначення необхідно доставити відповідно $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць вантажу.

Передбачається, що обов'язково виконується умова: загальна кількість вантажів у всіх пунктах-відправниках повинна дорівнювати загальній сумі вантажів у пунктах призначення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (11.1)$$

Нехай вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення дорівнює c_{ij} (в деяких випадках задають відстані від пунктів відправлення до пунктів призначення). Треба скласти такий план перевезень, за яким їхня загальна вартість буде найменшою.

Позначимо через x_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) кількість одиниць вантажу, що відправляється з i-го пункту в j-й. У подальшому іноді називатимемо пункти відправлення *постачальниками*, кількості вантажів, що є в кожному з них — їхніми *потужностями*, а пункти призначення та кількості одиниць вантажів, які необхідно в них доставити, — *споживачами* та їхнім *попитом*.

Запишемо умови задачі у вигляді таблиці 11.1.

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит					
		B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
⋮	⋮	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
⋮	⋮	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Як бачимо, табл. 11.1 є подвійною матрицею, складеною з матриці $\| x_{ij} \|_{m,n}$, яку називають *матрицею перевезень*, та матриці $\| c_{ij} \|_{m,n}$, яку називають *матрицею витрат*. Елементи цих матриць невід'ємні, тобто $x_{ij} \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), оскільки вартості перевезень (відстані) і розміри постачань не можуть бути від'ємними числами. З умови задачі випливає, що повинні виконуватися такі умови:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{11.2}$$

тобто весь вантаж, що є в кожному пункті відправлення A_i, необхідно вивезти і

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{11.3}$$

Отже, потреби кожного пункту призначення B_j повинні бути повністю задоволені.

Вартість перевезень з i-го пункту відправлення в усі пункти призначення дорівнює

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Загальна вартість перевезень вантажів з усіх пунктів відправлення в усі пункти призначення

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{11.4}$$

Математично транспортну задачу формулюють так: серед невід'ємних розв'язків системи обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1, 2, ..., m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1, 2, ..., n) \tag{11.5}$$

знайти такий, який перетворює лінійну функцію (11.4) на мінімум.

З'ясуємо питання про сумісність системи рівнянь (11.5).

Рівняння (11.2) здобуті в результаті додавання елементів рядків табл. 11.1, а рівняння (11.3) — в результаті додавання елементів стовпців тієї самої таблиці. Якщо скласти всі рівняння системи (11.2) і окремо всі рівняння системи (11.3), то складені при цьому суми $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ і $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ є одним і тим самим числом, що є сумою всіх елементів таблиці 11.1.

Крім того,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Отже, умова $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ є необхідною для сумісності системи рівнянь (11.5).

Покажемо, що ця умова є також і достатньою для існування планів, тобто невід'ємних розв'язків задачі лінійного програмування. Введемо позначення

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \ (i = 1, 2, \ldots, m ; \ j = 1, 2, \ldots, n),$$

де $A = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Числа $x_{ij} \geq 0$ і задовольняють систему (11.5).

Справді, підставивши ці вирази в систему (11.5), дістанемо

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{A} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{A} = b_j.$$

Отже, числа $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ утворюють план задачі (11.4) і (11.5).

Визначимо ранг матриці системи рівнянь (11.5).

Додавши перші m рівнянь цієї системи $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ і останні n рівнянь $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$ та взявши до уваги рівність $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, робимо висновок, що між рівняннями системи (11.5) існує лінійна залежність. Отже, ранг матриці системи менший за $m + n$ ($m + n$ — кількість рівнянь).

Покажемо, що ранг матриці системи дорівнює $m + n - 1$. Для цього досить показати, що систему (11.5) можна розв'язати відносно деяких $m + n - 1$ невідомих. За такі невідомі візьмемо невідомі $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{m1}$, що містяться в першому рядку і першому стовпці табл. 11.1. Цих невідомих $m + n - 1$.

З рівнянь системи (11.2), починаючи з другого, знайдемо невідомі x_{i1} ($i = 2, 3, \ldots, m$):

$$x_{i1} = a_i - x_{i2} - x_{i3} - \ldots - x_{in} \ (i = 2, 3, \ldots, m). \qquad (11.6)$$

Аналогічно, використавши всі рівняння системи (11.3), крім першого, знайдемо невідомі x_{1j} ($j = 2, 3, \ldots, n$):

$$x_{1j} = b_j - x_{2j} - x_{3j} - \ldots - x_{mj} \ (j = 2, 3, \ldots, n). \qquad (11.7)$$

Щоб знайти невідому x_{11}, використаємо, наприклад, перше рівняння системи (11.2), підставивши в нього знайдені вже вирази невідомих x_{1j} ($j = 2, 3, \ldots, n$) з (11.7). Дістаємо

$$x_{11} = a_1 - x_{12} - x_{13} - \ldots - x_{1n} =$$

$$= a_1 - (b_2 - x_{22} - x_{32} - \ldots - x_{m2}) - (b_3 - x_{23} - x_{33} - \ldots - x_{m3}) -$$

$$- \ldots - (b_n - x_{2n} - x_{3n} - \ldots - x_{mn}).$$

Таким чином, $m + n - 1$ невідомих системи (11.5) виражено через решту $mn - (m + n - 1)$ невідомих цієї системи, а це означає, що ранг матриці системи дорівнює $m + n - 1$.

Отже, якщо складено невироджений опорний план транспортної задачі, то в матриці $\| x_{ij} \|_{m,n}$ значень його компонентів (табл. 11.1) додатними є тільки $m + n - 1$, а решта дорівнюють нулю.

Клітинки, в яких містяться відмінні від нуля перевезення, називають *завантаженими*, а решту — *незавантаженими*. Завантажені клітинки відповідають базисним невідомим. Для невиродженості опорного плану кількість цих клітинок повинна дорівнювати $m + n - 1$.

Транспортну задачу в постановці (11.4), (11.5) можна розв'язати симплексним методом, але навіть при невеликих значеннях m і n застосування цього методу призводить до громіздких обчислень.

Враховуючи специфіку системи обмежень (11.5) (обмеження задано у вигляді рівнянь, кожна невідома входить тільки в два рівняння, коефіцієнти при всіх невідомих дорівнюють одиниці), для розв'язання транспортної задачі вдалося розробити спеціальні методи, які є видозміною симплексного методу, значно менш громіздкі, ніж симплексний метод.

Розглянемо один з цих методів, який називають *методом потенціалів* або *модифікованим розподільним методом* (скорочено методом «Моді»).

§ 2. Метод потенціалів

Введемо деякі попередні поняття. Дані задачі запишемо у вигляді табл. 11.2.

Таблиця 11.2

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит					
		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
		b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
A_i	a_i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}

! *Означення 1*

Ланцюгом називають сукупність клітин (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3), ... або (i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_2), ..., таких, що кожна пара сусідніх клітинок ланцюга розміщена або в одному рядку, або в одному стовпці табл. 11.2, причому ніякі три клітинки не розміщені в одному рядку або в одному стовпці.

! *Означення 2*

Якщо остання клітинка ланцюга розміщена в одному стовпці (рядку) з першою, тобто якщо ланцюг має вигляд

$$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3), \ldots, (i_k, j_1)$$

або

$$(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_2), \ldots, (i_1, j_k),$$

то такий ланцюг називають *замкненим* або *циклом*.

Наприклад, у табл. 11.3 зображено цикл (1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (3,4), (3,1).

Таблиця 11.3

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

! *Означення 3*

Ациклічним називають будь-який припустимий план $X = \| x_{ij} \|_{m,n}$, якщо сукупність клітинок з відмінними від нуля елементами x_{ij} не має жодного циклу.

Покажемо, що оптимальний план перевезень достатньо шукати лише серед ациклічних припустимих планів. Для цього досить показати, що будь-який план $X = \| x_{ij} \|_{m,n}$, який містить цикли, можна замінити ациклічним планом, причому вартість перевезень при цьому не збільшиться.

Справді, нехай деякі додатні елементи матриці $X = \| x_{ij} \|_{m,n}$ утворюють цикл (замкнений ланцюг). Обійдемо послідовно всі клітинки цього циклу в одному напрямі (наприклад, проти руху стрілки годинника), позначаючи їх позмінно знаками + і –. Дістанемо додатний і від'ємний півланцюги, при цьому $\sum^{+}\left(\sum^{-}\right)$ означає, що сума розповсюджена на додатний (від'ємний) півланцюг.

Нехай, наприклад, $\sum^{+} c_{ij} \le \sum^{-} c_{ij}$ і λ — мінімальний елемент серед елементів від'ємного півланцюга. Виправимо вихідний план $X = \| x_{ij} \|_{m,n}$, віднявши λ від усіх x_{ij} від'ємного півланцюга і додавши його до всіх x_{ij} додатного півланцюга.

Цикл складається з ланок, що об'єднують по дві клітинки стовпця або рядка. Одна з цих клітинок належить додатному півланцюгу, а друга — від'ємному. Розглянемо довільну ланку, розміщену в стовпці. Внаслідок вказаної вище операції від від'ємної її клітинки віднімається число λ і додається до додатної. Отже, за новим планом X' кількість вантажу, що направляється в кожний пункт призначення, не змінюється.

Аналогічно можна показати, що не змінюється кількість вантажу, який вивозиться з кожного пункту відправлення.

Таким чином, X' також є припустимим планом.

Порівнявши вартості перевезень за обома планами,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \left(\sum{}^{+}c_{ij} - \sum{}^{-}c_{ij}\right)\lambda \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

побачимо, що вартість перевезень за планом X' не більша ніж за планом X. Кількість циклів у плані X' на одиницю менша ніж у плані X, оскільки цикл, що розглядається, розімкнувся внаслідок вилучення клітинки, яка містила елемент λ.

Виконавши ті самі операції з усіма циклами, що є в плані X, дістанемо нарешті ациклічний план з вартістю перевезень, яка не перевищує вартості за вихідним планом.

Справедливе таке твердження. Число N додатних x_{ij} у кожному ациклічному плані задовольняє умову $N \le m + n - 1$. Для реалізації методу потенціалів необхідно, щоб $N = m + n - 1$, тобто, щоб завантажених клітинок було рівно $m + n - 1$. Якщо ця умова не виконується, то число завантажених клітинок збільшують на $[\,(m + n - 1) - N\,]$ порожніх клітинок так, щоб побудований при цьому план був ациклічним. Порожні клітинки при цьому називають *умовно завантаженими*.

Метод потенціалів базується на такій теоремі.

Теорема

Для того щоб деякий план $X = \| x_{ij} \|_{m,n}$ транспортної задачі був оптимальний, необхідно й достатньо, щоб йому відповідала така послідовність з $m + n$ чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m;\ v_1, v_2, \ldots, v_n$, для якої виконуються умови

$$u_i + v_{1j} \le c_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n); \quad (11.8)$$

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{для всіх} \quad x_{ij} > 0 \ (x_{ij} \in X). \quad (11.9)$$

Д о в е д е н н я. *Достатність*. Нехай виконуються умови (11.8) і (11.9). Покажемо, що $X = \| x_{ij} \|_{m,n}$ є оптимальним планом. Припустимо, що $X' = \| x'_{ij} \|_{m,n}$ — довільний план. Тоді

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j)\,x'_{ij} =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}_j b_j,$$

згідно з рівностями (11.2) і (11.3). Підставивши замість $\sum_{i=1}^{m} a_i$ і $\sum_{j=1}^{n} b_j$ відповідно $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ і $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, матимемо

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}_j x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i + \mathrm{v}_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

оскільки $u_i + \mathrm{v}_j = c_{ij}$ для всіх $x_{ij} > 0$ (умова (11.9)).

Таким чином, вартість перевезень за будь-яким планом X' не менша, ніж вартість перевезень за планом X, для якого виконуються умови (11.8) і (11.9).

Отже, план X — оптимальний. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $X = \| x_{ij} \|_{m,n}$ — оптимальний план задачі (11.4) і (11.5). Покажемо, що для нього виконуються умови (11.8) і (11.9):

$$u_i + \mathrm{v}_j \le c_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$u_i + \mathrm{v}_j = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij} > 0.$$

Справді, нехай лінійна транспортна задача (11.4) і (11.5) про мінімізацію функції

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i \ (i = 1, 2, \ldots, m); \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j \ (j = 1, 2, \ldots, n); \\ x_{ij} \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

є двоїстою для вихідної задачі:

максимізувати лінійну функцію

$$g = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{v}_j$$

при обмеженнях

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

де u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — змінні, що відповідають обмеженням $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i$; v_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) — змінні, що відповідають обмеженням $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j$.

Оскільки X — оптимальний план двоїстої задачі, то план $W^* = (u_i^*, v_j^*)$ є розв'язком вихідної задачі і за основною теоремою двоїстості

$$\max g = \min z$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \quad x_{ij} > 0.$$

З теореми 4 § 3 випливає, що обмеження вихідної задачі, які відповідають додатним компонентам оптимального плану двоїстої задачі, задовольняються як строгі рівності, а ті, що відповідають компонентам, які дорівнюють нулю, — як нерівності, тобто

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \ \text{ для } \ x_{ij} > 0,$$

$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \ \text{ для } \ x_{ij} = 0.$$

Теорему доведено.

! *Означення*

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_m$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ називають потенціалами відповідно рядків і стовпців.

Алгоритм методу потенціалів складається з попереднього кроку і загального кроку, що повторюється. У попередньому кроці:

1) складають первісний ациклічний план X;

2) для отримання плану будують систему потенціалів $u_1, u_2, \ldots, u_m$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$, використавши співвідношення

$$u_i + v_j = c_{ij}, \tag{11.10}$$

які повинні виконуватися для всіх завантажених клітинок плану X.

Як було вже зазначено, можна вважати, що будь-який ациклічний план має рівно ($m + n - 1$) завантажених клітин. Отже, для визначення $m + n$ невідомих $u_1, u_2, \ldots, u_m$; v_1, $v_2, \ldots, v_n$ маємо $m + n - 1$ лінійних рівнянь (11.10). Оскільки число невідомих на одиницю більше від числа рівнянь, то вважають, що одне з невідомих, неважливо яке, дорівнює деякому числу (найзручніше брати $u_1 = 0$). Після цього визначають решту невідомих;

3) план X досліджують на оптимальність, тобто перевіряють виконання умов (11.8) і (11.9).

Загальний крок застосовують тоді, коли план X, побудований у попередньому кроці, не є оптимальним, тобто система потенціалів не задовольняє умови (11.8), (11.9). Він складається з трьох етапів: а) поліпшення плану, тобто заміна плану X новим планом X' з вартістю перевезень, що не перебільшує вартості перевезень за планом X; б) побудова для плану X' відповідної йому системи потенціалів $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$; $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ за співвідношеннями $u'_i + v'_j = c_{ij}$, які повинні виконуватися для всіх завантажених клітинок плану X'; в) дослідження плану X' на оптимальність, тобто перевірка виконання умов (11.8), (11.9) для системи потенціалів.

Розглянемо докладно зміст алгоритму, ілюструючи його на конкретному прикладі.

Задача. Умову задачі задано у вигляді табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит		
		B_1	B_2	B_3
		70	115	80
A_1	45	2	3	1
A_2	130	4	1	5
A_3	90	2	8	9

Як бачимо, є три пункти відправлення, або три постачальника відповідно з 45, 130 і 90 одиницями вантажу і три пункти призначення, або три споживачі з попитом у 70, 115 і 80 одиниць цього вантажу.

Вартість перевезень одиниці вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення задано в лівому верхньому куті кожної клітинки. Вартості перевезень називають також *критеріями оптимальності* відповідних клітинок.

Задача полягає в тому, щоб скласти такий план перевезень, за яким загальна вартість останніх була б мінімальною.

Попередній крок. Побудуємо вихідний припустимий план за так званим правилом північно-західного кута (в даній задачі маємо баланс між пропозицією та споживанням). Суть цього правила полягає в тому, що, не враховуючи вартості перевезення одиниці вантажу, заповнюють спочатку клітинки першого рядка, починаючи з крайньої лівої, а потім переходять до другого рядка, в якому клітинки також заповнюють зліва направо. При цьому враховують, що попит деяких пунктів призначення повністю або частково задовольняється за рахунок вантажів першого пункту відправлення. Цей процес продовжують доти, поки не будуть повністю розподілені вантажі з усіх пунктів відправлення A_i і не буде повністю задоволений попит усіх пунктів призначення B_j.

План, побудований внаслідок такого розподілу вантажів, є припустимим у тому розумінні, що вантажі з усіх пунктів відправлення повністю вивезено і попит усіх пунктів призначення повністю задоволено.

Перевіримо цей план на оптимальність. У разі негативної відповіді поліпшуватимемо його доти, поки не прийдемо до оптимального плану.

1. У даній задачі в першому пункті відправлення A_1 є 45 одиниць вантажу, а попит першого пункту призначення B_1 становить 70 одиниць. Тому всі 45 одиниць пункту A_1 відправляємо в пункт B_1, тобто в першу клітинку першого рядка записуємо 45. Оскільки з пункту A_1 весь вантаж вивезено, то решта клітинок першого рядка залишається порожньою.

Переходимо до другого пункту відправлення A_2, тобто до другого рядка. Оскільки в пункт призначення B_1 треба доставити ще $70 - 45 = 25$ одиниць вантажу, то із 130 одиниць, що є в пункті A_2, записуємо в першу клітинку другого рядка 25.

У пункті відправлення A_2 залишилося $130 - 25 = 105$ одиниць вантажу, а в пункт призначення B_2 треба доставити 115 одиниць, тому всі 105 одиниць записуємо в другу клітинку другого рядка, третя клітинка другого рядка залишається порожньою.

Переходимо до третього пункту відправлення A_3. Попит першого пункту призначення B_1 повністю задоволено, тому першу клітинку третього рядка залишаємо порожньою. У другий пункт призначення B_2 необхідно доставити ще 115 – – 105 = 10 одиниць вантажу, тому з 90 одиниць, що є в пункті A_3, в другу клітинку третього рядка запишемо 10 одиниць. У пункті A_3 залишилося 90 – 10 = 80 одиниць вантажу, записуємо їх у третю клітинку третього рядка.

Попит усіх пунктів призначення задовольнили повністю, і всі вантажі з пунктів відправлення вивезено. Внаслідок такого розподілу дістаємо таблицю 11.5.

Таблиця 11.5

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит			Потенціали рядків (u_i)
		B_1	B_2	B_3	
		70	115	80	
A_1	45	2 45	3	1	$u_1=0$
A_2	130	4 – 25	1 + 105	5	$u_2=2$
A_3	90	2 +	8 – 10	9 80	$u_3=9$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1=2$	$v_2=-1$	$v_3=0$	

Як бачимо, в таблиці завантажених клітинок 5, тобто $m+n-1$.

Показники оптимальності цих клітинок візьмемо в кружечок. Побудований план X є ациклічним, тобто завантажені клітинки не утворюють жодного циклу.

2. Для перевірки плану X на оптимальність і, в разі негативної відповіді, для його подальшого поліпшення складемо систему потенціалів рядків і стовпців. Потенціали u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3 визначимо із системи рівнянь

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

які повинні виконуватися для всіх завантажених клітинок.

Раніше було показано, що оскільки число невідомих на одиницю більше від числа рівнянь, то вважаємо, що одне з невідомих, наприклад u_1, дорівнює нулю ($u_1=0$), а решту невідомих знаходимо з наведеної системи рівнянь.

Практично потенціали рядків і стовпців обчислюють так.

Першому рядку приписують потенціал, який дорівнює нулю, і розглядають завантажені клітинки цього рядка. Оскільки показник оптимальності завантаженої клітинки дорівнює сумі потенціалів рядка і стовпця, на перетині яких вона міститься, то стовпцям, в яких є завантажені клітинки першого рядка, приписують потенціали, що дорівнюють показникам оптимальностей цих клітинок, оскільки $0 + v_j = v_j$.

Тепер розглядають стовпці з обчисленими потенціалами і беруть в них завантажені клітинки другого, третього і наступних рядків. Використавши співвідношення $u_i + v_j = c_{ij}$, обчислюють потенціали цих рядків і знову повертаються до стовпців. Цей процес продовжують доти, поки не будуть обчислені потенціали всіх рядків і стовпців.

Так, в даній задачі, надавши першому рядку потенціал, що дорівнює нулю ($u_1 = 0$), для першого стовпця дістанемо потенціал, що дорівнює 2 ($v_1 = 2$), оскільки $u_1 + v_1 = 2$. Потенціал другого рядка також дорівнює 2, оскільки $u_2 + v_1 = 4$; потенціал другого стовпця дорівнює -1 ($u_2 + v_2 = 1$); потенціал третього рядка дорівнює 9 ($u_3 + v_2 = 8$) і потенціал третього стовпця дорівнює нулю ($u_3 + v_3 = 9$).

3. Дослідимо план X на оптимальність. Для цього перевіримо виконання умови (11.8) для всіх незавантажених клітинок:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= -1 < 3 = c_{12}, \\ u_1 + v_3 &= \ \ 0 < 1 = c_{13}, \\ u_2 + v_3 &= \ \ 2 < 5 = c_{23}, \\ u_3 + v_1 &= 11 > 2 = c_{31}. \end{aligned}$$

Оскільки умова оптимальності (11.8) для незавантажених клітинок не виконується для клітинки A_3B_1, то план X не є оптимальним.

Загальний крок: 1. Щоб поліпшити план, треба серед незавантажених клітин, для яких не виконується умова оптимальності (11.8), знайти таку, де різниця між сумою потенціалів рядка і стовпця, на перетині яких вона міститься, і показником оптимальності є найбільшою. Взагалі будь-яка з клітинок, для якої не виконується умова (11.8), підходить для поліпшення плану, але клітинка з найбільшою різницею $(u_i + v_j) - c_{ij}$, веде до найбільшого зменшення значення лінійної функції z на даному кроці, тобто вона найбільше підходить для поліпшення плану. У розглядуваній задачі умова (11.8) не виконується для єдиної клітинки A_3B_1.

Будуємо цикл, початок і кінець якого лежать у вибраній незавантаженій клітинці, а решта вершин — у завантажених клітинках. Для цього з вихідної незавантаженої клітинки рухаємось по горизонталі або по вертикалі до першої завантаженої клітинки, з якої, в свою чергу, можливий рух по вертикалі або по горизонталі до завантаженої клітинки і так доти, поки не утворимо наведений вище цикл. Вершинами циклу вважають клітинки, в яких здійснюється поворот під прямим кутом.

Далі обходимо цей цикл, наприклад проти руху стрілки годинника, починаючи з незавантаженої клітинки, і позначаємо його клітини позмінно знаками + і –. Незавантаженій клітинці приписуємо знак +. В результаті цикл розпадеться на два півланцюги: додатний та від'ємний. Серед елементів плану X, розміщених у клітинках від'ємного півланцюга, вибираємо найменший, він дорівнює λ.

Новий план X' будуємо так. Від усіх клітин від'ємного півланцюга віднімаємо число λ, а до всіх клітин додатного півланцюга додаємо число λ. Усі інші елементи плану X, що не увійшли в цикл, який розглядається, залишаємо без зміни.

Для доведення твердження про те, що оптимальний план достатньо шукати серед ациклічних планів, було показано, що внаслідок такої операції знову дістанемо припустимий план.

Доведемо тепер, що вартість перевезень за новим планом X' менша від вартості перевезень за вихідним планом X. Новий план X' складається з елементів:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \lambda, & \text{якщо клітинка } (i, j) \text{ входить у від'ємний півланцюг,} \\ x_{ij} + \lambda, & \text{якщо клітинка } (i, j) \text{ входить у додатний півланцюг,} \\ x_{ij}, & \text{якщо клітинка } (i, j) \text{ не входить у цикл,} \end{cases}$$

x_{ij} — елементи вихідного плану X.

Вартість перевезень за планом X' становить

$$\sum x_{ij} c_{ij} + \sum{}^{+} (x_{ij} + \lambda) c_{ij} + \sum{}^{-} (x_{ij} - \lambda) c_{ij}. \qquad (11.11)$$

У першій сумі підсумовують по елементах плану X', клітинки яких не входять у цикл, у другій — по елементах клітинок додатного півланцюга і в третій сумі — по елементах клітинок від'ємного півланцюга.

Перетворивши вираз (11.11), дістанемо

$$\sum x_{ij} c_{ij} + \lambda\left(\sum{}^{+} c_{ij} - \sum{}^{-} c_{ij}\right). \tag{11.12}$$

Тут перший доданок $\sum x_{ij} c_{ij}$ є вартістю перевезень за вихідним планом X, коефіцієнт при λ у другому доданку є алгебраїчною сумою вартостей перевезень клітинок, що утворюють цикл. Покажемо, що виконується рівність

$$\sum{}^{+} c_{ij} - \sum{}^{-} c_{ij} = c_{i_0 j_0} - (u_{i_0} + v_{j_0}),$$

де (i_0, j_0) — незавантажена клітинка циклу, u_{i_0}, v_{j_0} — потенціали рядка і стовпця, на перетині яких розміщена ця клітинка. Виконуватимемо цикл, починаючи з незавантаженої клітинки, наприклад за стовпцем. Спочатку потрапимо в завантажену клітинку (k, j_0), розміщену в k-му рядку і в тому самому j_0-му стовпцю, що й клітинка (i_0, j_0). Після цього, рухаючись k-м рядком, перейдемо з клітинки (k, j_0) у завантажену клітинку (k, l), розміщену в l-му стовпці і в тому самому k-му рядку, що й клітинка (k, j_0) і т. д.

Нарешті, виходячи із завантаженої клітинки (x_{i_0}, t), розміщеної в t-му стовпці і i_0-му рядку, повернемося цим рядком до незавантаженої клітинки (i_0, j_0).

Отже, вершинами циклу є такі клітинки:

$$(i_0, j_0) \to (k, j_0) \to (k, l) \to (m, l) \to$$

$$\to (m, n) \to \ldots \to (s, t) \to (i_0, t).$$

Вираз $\sum{}^{+} c_{ij} - \sum{}^{-} c_{ij}$ можна записати так:

$$\sum{}^{+} c_{ij} - \sum{}^{-} c_{ij} = c_{i_0 j_0} - c_{k j_0} + c_{kl} - c_{ml} + c_{mn} - \ldots + c_{st} - c_{i_0 t}.$$

Усі клітинки, крім (i_0, j_0), у циклі завантажені. Тому всі вартості, крім $c_{i_0 j_0}$, дорівнюють сумам відповідних потенціалів. Тоді

$$\sum{}^{+} c_{ij} - \sum{}^{-} c_{ij} = c_{i_0 j_0} - (u_k + v_{j_0}) + (u_k + v_l) -$$

$$- (u_m + v_l) + (u_m + v_n) - \ldots + (u_s + v_t) - (u_{i_0} + v_t).$$

Розкривши дужки і звівши подібні члени, побачимо, що всі потенціали, крім v_{j_0} і u_{i_0}, взаємно знищуються.

Таким чином,

$$\sum{}^{+} c_{ij} - \sum{}^{-} c_{ij} = c_{i_0 j_0} - (u_{i_0} + v_{j_0}).$$

Оскільки, згідно з умовою, $c_{i_0 j_0} - (u_{i_0} + v_{j_0}) < 0$, то з виразу (11.12) випливає, що вартість перевезень за новим планом X' менша від вартості перевезень за вихідним планом X, що й треба було довести.

З доведення випливає також, що новий план X' буде найліпшим тоді, коли брати незавантажену клітинку з найбільшою різницею $u_i + v_j - c_{ij} > 0$, $c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$.

Повернемось до розв'язання задачі. Як було зазначено, умова (11.8) не виконується для клітинки (3,1). Виходячи з цієї клітинки, побудуємо викладеним вище способом цикл. Серед елементів клітинки від'ємного півланцюга найменшим є 10. Віднімемо це число від елементів клітинок від'ємного півланцюга і додамо його до елементів клітинок додатного півланцюга. Дістанемо новий план X' (табл. 11.6).

Таблиця 11. 6

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит			Потенціали рядків (u_i)
		B_1	B_2	B_3	
		70	115	80	
A_1	45	2 − 45	3	1 +	$u_1 = 0$
A_2	130	4 15	1 115	5	$u_2 = 2$
A_3	90	2 + 10	8	9 − 80	$u_3 = 0$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1 = 2$	$v_2 = -1$	$v_3 = 9$	

2. Побудуємо для плану X' систему потенціалів, яка йому відповідає так само, як і в п. 2 попереднього кроку.

3. Досліджуємо план X' на оптимальність, тобто перевіряємо виконання умови (11.8) для незавантажених клітинок табл. 11.6.

$$u_1 + v_2 = -1 < 3 = c_{12},$$
$$u_1 + v_3 = 9 > 1 = c_{13},$$
$$u_2 + v_3 = 11 > 5 = c_{23},$$
$$u_3 + v_2 = -1 < 8 = c_{32}.$$

Умова (11.8) не виконується для клітинок (1,3) і (2,3). Отже, план X' не є оптимальним. З цих двох клітинок для поліпшення плану X' використаємо клітинку (1,3), оскільки для неї різниця $(u_i + v_j) - c_{ij} > 0$ є найбільшою (для клітинки (1,3) ця різниця дорівнює 8, а для клітинки (2,3) вона дорівнює 6).

Будуємо цикл, виходячи з незавантаженої клітинки (1,3). Серед елементів клітинок від'ємного півланцюга циклу найменшим є елемент 45, що міститься в клітинці (1,1). Віднімаємо цей елемент від усіх елементів клітинок від'ємного півланцюга і додамо його до елементів клітинок додатного півланцюга. Дістанемо план X'' (табл. 11.7).

Таблиця 11.7

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит B_1 70	B_2 115	B_3 80	Потенціали рядків (u_i)
A_1	45	2	3	1; 45	$u_1 = 0$
A_2	130	4; −; 15	1; 115	5; +;	$u_2 = 10$
A_3	90	2; +; 55	8	9; −; 35	$u_3 = 8$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1 = -6$	$v_2 = -9$	$v_3 = 1$	

Побудуємо для плану X'' відповідну систему потенціалів і перевіримо для неї виконання умов (11.8):

$$u_1 + v_1 = -6 < 2,$$
$$u_1 + v_2 = -9 < 3,$$
$$u_2 + v_3 = 11 > 5,$$
$$u_3 + v_2 = -1 < 8.$$

Умова (11.8) не виконується для клітинки (2,3). Тому план X'' не є оптимальним. Виходячи з клітинки (2,3), будуємо цикл. З елементів клітинок від'ємного півланцюга найменшим є елемент 15, що міститься в клітинці (2,3). Віднімемо його від елементів клітинок від'ємного півланцюга і додамо до елементів клітинок додатного півланцюга. Дістанемо план X''' (табл. 11.8).

Таблиця 11.8

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит B_1	B_2	B_3	Потенціали рядків (u_i)
		70	115	80	
A_1	45	2	3	1 45	$u_1 = 0$
A_2	130	4	1 115	5 15	$u_2 = 4$
A_3	90	2 70	8	9 20	$u_3 = 8$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1 = -6$	$v_2 = -3$	$v_3 = 1$	

Обчисливши систему потенціалів для плану X''' та перевіривши для неї виконання умов (11.8), знаходимо

$$u_1 + v_1 = -6 < 2 = c_{11},$$
$$u_1 + v_2 = -3 < 3 = c_{12},$$
$$u_2 + v_1 = -2 < 4 = c_{21},$$
$$u_3 + v_2 = \ \ 5 < 8 = c_{32}.$$

Таким чином, умови оптимальності (11.8), (11.9) виконуються для системи потенціалів, що відповідає плану X'''. Отже, цей план є оптимальним, а вартість перевезень за цим планом є мінімальною:

$$z_{min} = 1 \cdot 45 + 1 \cdot 115 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 70 + 9 \cdot 20 = 555.$$

Вартості перевезень за планами X, X', X'' становлять відповідно 1095, 1005 і 645.

§ 3. Побудова вихідного опорного плану

Для розв'язування будь-якої задачі лінійного програмування можна очікувати, що число ітерацій, необхідних для побудови оптимального плану, залежатиме від того, наскільки вихідний опорний план близький до оптимального.

Вище було розглянуто метод північно-західного кута. Вихідний опорний план, побудований за цим методом, не враховує вартості перевезень одиниці вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення. Тому в загальному випадку він далекий від оптимального плану, побудова якого зв'язана з громіздкими обчисленнями. Простота методу північно-західного кута дає змогу застосовувати його під час обчислень за допомогою ЕОМ.

Якщо при складанні вихідного опорного плану враховувати вартості перевезень одиниці вантажу, то, очевидно, побудований план буде значно ближчий до оптимального.

Метод мінімальної вартості. Суть цього методу в тому, що з усієї таблиці вартостей вибирають найменшу і в клітинку (i, j), де вона міститься, записують менше з чисел a_i або b_j. Після цього не розглядають рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю вичерпано, або стовпець, що відповідає споживачу, попит якого повністю задоволено, або й рядок, і стовпець, якщо вичерпано запаси постачальника й задоволено попит споживача.

У частині таблиці вартостей, що залишилася, знову вибираємо найменшу вартість, і процес розподілу продовжуватимемо доти, поки всі запаси не буде вичерпано, а попит задоволено.

Складемо за допомогою цього методу вихідний опорний план розглянутої вище задачі.

Таблиця 11.9

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит			Потенціали рядків (u_i)
		B_1	B_2	B_3	
		70	115	80	
A_1	45	2	3	1 45	$u_1 = 0$
A_2	130	4	1 115	5 15	$u_2 = 4$
A_3	90	2 70	8	9 20	$u_3 = 8$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1 = -6$	$v_2 = -3$	$v_3 = 1$	

Дослідимо побудований план на оптимальність, тобто перевіримо виконання умов (11.8) для незавантажених клітинок табл. 11.9:

$$u_1 + v_1 = -6 < 2,$$
$$u_1 + v_2 = -3 < 3,$$
$$u_2 + v_1 = -2 < 4,$$
$$u_3 + v_2 \;\; = 5 < 8.$$

Умови оптимальності (11.8), (11.9) виконуються для системи потенціалів цього плану, а отже, він є оптимальним. Таким чином, вихідний опорний план, побудований за методом мінімальної вартості, виявився відразу оптимальним:

$$z_{\min} = 1 \cdot 45 + 1 \cdot 115 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 70 + 9 \cdot 20 = 555.$$

Метод подвійної переваги. Якщо таблиця вартостей велика за об'ємом, то перебор усіх елементів є досить складним. У цьому випадку доцільно застосовувати так званий метод подвійної переваги, суть якого така.

У кожному стовпці позначкою V вказують на клітинку з найменшою вартістю. Те саме роблять і в кожному рядку. Внаслідок цього в деяких клітинках буде дві позначки VV, а це означає, що в них мінімальна вартість розміщена як стовпцем, так і рядком. У такі клітинки направляють максимально можливі об'єми вантажів, не розглядаючи щоразу відповідні стовпці або рядки. Після цього розподіляємо по клітинках, що мають одну позначку V, використовуючи принцип найменшої вартості.

Побудуємо за допомогою методу подвійної переваги вихідний опорний план для задачі, записаної в табл. 11.10.

Таблиця 11.10

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит					Потенціали рядків (u_i)
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		250	100	200	150	100	
A_1	250	10	7	4 100	VV 1 150	4	$u_1 = 0$
A_2	150	VV 2 150	7	10	6	11	$u_2 = -1$
A_3	150	8	V 5	V 3 50	2	VV 2 100	$u_3 = -1$
A_4	250	11 100	V 8 100	12 50	16	13	$u_4 = 8$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1 = 3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 4$	$v_4 = 1$	$v_5 = 3$	

Дослідимо побудований вихідний опорний план на оптимальність, тобто перевіримо виконання умов (11.8):

$$
\begin{array}{ll}
u_1+v_1=\ \ 3<10=c_{11}, & u_2+v_5=\ \ 2<11=c_{25},\\
u_1+v_2=\ \ 0<7\ \ =c_{12}, & u_3+v_1=\ \ 2<8\ \ =c_{31},\\
u_1+v_5=\ \ 3<4\ \ =c_{15}, & u_3+v_2=-1<5\ \ =c_{32},\\
u_2+v_2=-1<7\ \ =c_{22}, & u_3+v_4=\ \ 0<2\ \ =c_{34},\\
u_2+v_3=\ \ 3<10=c_{23}, & u_4+v_4=\ \ 9<16=c_{44},\\
u_2+v_4=\ \ 0<6\ \ =c_{24}, & u_4+v_5=\ \ 11<13=c_{45}.
\end{array}
$$

Оскільки умови оптимальності (11.8), (11.9) виконуються, то план є оптимальним:

$$
z_{\min}=4\cdot100+1\cdot150+2\cdot150+3\cdot50+2\cdot100+11\cdot100+
$$
$$
+8\cdot100+12\cdot50=3\,700
$$

§ 4. Відкрита модель транспортної задачі

Як було показано, необхідною й достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є умова $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=$ $=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$, тобто всі запаси вантажів у пунктах відправлення і попит у цих вантажах у пунктах призначення рівні. Задачі такого типу називають закритими моделями транспортної задачі.

На практиці часто рівність $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$ не виконується, тобто або запас вантажів у пунктах відправлення перевищує попит у пунктах призначення $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}a_i>\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\right)$, або попит у пунктах призначення перевищує запас вантажів у пунктах відправлення $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i<\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$. Для цих випадків також можна поставити задачі про побудову плану перевезень з мінімальними транспортними витратами. Такі задачі називають відкритими моделями транспортних задач.

Відкриті моделі транспортних задач розв'язують зведенням їх до закритих моделей. Так, щоб знайти оптимальний план перевезень, коли запаси перевищують попит $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, вводять фіктивного споживача B_{n+1} і вважають, що його попит дорівнює різниці між запасами вантажів у пунктах відправлення і реальним попитом у пунктах призначення, тобто

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Вважають, що вартості перевезень вантажів з усіх пунктів відправлення у фіктивний пункт призначення рівні:

$$c_{1(n+1)} = c_{2(n+1)} = \ldots = c_{m(n+1)} = c^*.$$

Ця нова задача вже є закритою моделлю транспортної задачі, оскільки виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j.$$

Величини $c_{i(n+1)}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) можуть бути якими завгодно, важливо тільки, щоб усі вони були рівні між собою. При цьому вартості перевезень за планами вихідної задачі $\|x_{ij}\|_{m,n}$ відрізняються від вартостей перевезень за планами нової задачі $\|x_{ij}\|_{m(n+1)}$ на сталу величину, що дорівнює $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n+1} b_j\right)c^*$. Тому план вихідної задачі, який дістали з оптимального плану нової задачі, є також оптимальним. Справді, якби для вихідної задачі був ліпший план, то, додавши вираз $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n+1} b_j\right)c^*$, мали б для нової задачі план, ліпший за оптимальний, що неможливо.

На практиці, звичайно, вважають, що вартості перевезень у фіктивний пункт призначення дорівнюють нулю: $c_{i(n+1)} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), оскільки вантажі в цей пункт реально не перевозяться.

Розглянемо задачу, записану у вигляді табл. 11.11.

Таблиця 11.11

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит: B_1	B_2	B_3
		90	25	90
A_1	50	2	3	1
A_2	75	4	5	3
A_3	140	7	1	6

Тут загальна потужність постачальників становить $\sum_{i=1}^{3} a_i = 265$ і загальний попит споживачів $\sum_{j=1}^{3} b_j = 205$. Вводимо фіктивного споживача B_4 з попитом $b_4 = 60$ одиниць вантажу і з нульовими вартостями доставок. Дістаємо нову задачу (табл. 11.12).

Таблиця 11.12

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит: B_1	B_2	B_3	B_4	Потенціали рядків (u_i)
		90	25	90	60	
A_1	50	2 50	3	1	0	$u_1 = 0$
A_2	75	4 40	5 − 25	3 + 10	0	$u_2 = 2$
A_3	140	7	1 +	6 − 80	0 60	$u_3 = 5$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = -5$	

Початковий розподіл виконаємо за правилом північно-західного кута. Обчисливши потенціали рядків і стовпців та перевіривши виконання умови (11.8) для незавантажених клітинок,

$$u_1 + v_2 = \;\; 3 = 3 = c_{12}, \qquad u_3 + v_1 = 7 = 7 = c_{31},$$
$$u_1 + v_3 = \;\; 1 = 1 = c_{13}, \qquad u_3 + v_2 = 8 > 1 = c_{32},$$
$$u_2 + v_4 = -3 < 2 = c_{24},$$
$$u_1 + v_4 = -5 < 0 = c_{12},$$

побачимо, що вона не виконується для клітинки (3,2). Тому початковий розподіл не буде оптимальним. Для його поліпшення побудуємо цикл, виходячи з клітинки (3,2). З елементів клітинок від'ємного півланцюга мінімальним є 25. Віднімемо його від усіх елементів клітинок від'ємного півланцюга і додамо до всіх елементів клітинок додатного півланцюга. Внаслідок цього дістанемо план (табл. 11.13).

Таблиця 11.13

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит				Потенціали рядків (u_i)
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		90	25	90	60	
A_1	50	2 50	3	1	0	$u_1 = 0$
A_2	75	4 40	5	3 35	0	$u_2 = 2$
A_3	140	7	1 25	6 55	0 60	$u_3 = 5$
Потенціали стовпців (v_j)		$v_1 = 2$	$v_2 = -4$	$v_3 = 1$	$v_4 = -5$	

Обчисливши потенціали рядків і стовпчиків для побудованого плану та перевіривши умову (11.8), побачимо, що вона виконується для всіх незавантажених клітинок табл. 11.13. Отже, цей план є оптимальним.

Оскільки клітинка (3,4) завантажена, а решта клітинок фіктивного стовпця порожні, то в цьому разі найдоцільніше постачальнику A_3 залишити в себе невивезеними 60 одиниць вантажу.

Аналогічно, якщо попит перевищує пропозицію, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

вводять фіктивний $(m+1)$-й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$ і з однаковими вартостями перевезень $c_{(m+1)1}=c_{(m+1)2}=\ldots=c_{(m+1)n}$. Як і у випадку фіктивного споживача, на практиці завжди беруть

$$c_{(m+1)j}=0 \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

Внаслідок цього вихідна задача зводиться до звичайної закритої моделі транспортної задачі, з оптимального розв'язку якої дістаємо оптимальний розв'язок вихідної задачі.

Числа, які містяться в останньому рядку оптимального розв'язку нової задачі, показують, що певним споживачам для задоволення свого попиту необхідно придбати якусь кількість вантажу «ззовні».

§ 5. Застосування транспортної задачі до розв'язування деяких економічних задач

Методи, розроблені для розв'язування транспортної задачі, застосовуються й для розв'язування деяких економічних задач. Величини c_{ij} можуть мати різний зміст, наприклад, вартість, відстань, час, продуктивність праці тощо.

Розглянемо як приклад постановку й математичну модель задачі на оптимальне закріплення за верстатами операцій по обробленню деталей.

Нехай на підприємстві є m видів верстатів, максимальний час роботи яких відповідно дорівнює a_i $(i=1,2,\ldots,m)$. Кожний з верстатів може виконувати n операцій. Сумарний час виконання кожної операції відповідно дорівнює b_j $(j=1,2,\ldots,n)$ годин. Відома продуктивність c_{ij} i-го верстата при виконанні j-ї операції. Скільки часу і на яку операцію треба задіяти кожний верстат, щоб обробити максимальну кількість деталей?

Позначимо через x_{ij} $(i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n)$ час, за який на i-му верстаті виконується j-та операція.

Тоді кількість деталей, оброблених на i-му верстаті, дорівнює $c_{ij}x_{ij}$.

Кількість деталей, оброблених на всіх верстатах, визначається функцією

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}.$$

Оскільки максимально можливий час роботи i-го верстата обмежений значенням a_i, то

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=1, 2, ..., m),$$

якщо максимальний час роботи верстатів використовується повністю, або

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i \quad (i=1, 2, ..., m),$$

якщо цей час використовується неповністю.

Крім того, час, відведений на j-ту операцію, дорівнює b_j год. Тому

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=1, 2, ..., n).$$

З умови випливає, що загальний час роботи всіх верстатів

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}a_i$$

і час, необхідний для виконання всіх операцій

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_j,$$

повинні бути однаковими.

З цього випливає, що

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j,$$

Отже, математичну модель задачі формулюємо так: знайти максимальне значення лінійної функції

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Щоб розв'язати задачу методом потенціалів, досить лінійну функцію z помножити на -1, тобто вважати, що всі значення c_{ij} в таблиці від'ємні.

Більш грунтовно питання про застосування транспортної задачі до розв'язання економічних задач викладено в [8, 11, 15].

§ 6. Транспортна задача за критерієм часу

Розрізняють два типи транспортних задач: за критерієм вартості і за критерієм часу. У першому типі задач, який докладно розглянуто в попередніх параграфах, елементи c_{ij} означали вартості перевезень одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. За елементи c_{ij} беруть також величини, пропорційні відстаням між пунктами. Можливі й інші способи оцінювання вартості перевезень. Залежно від цього дістають і різні оптимальні розв'язки. Проте методи розрахунків у всіх випадках будуть тими самими.

Інший зміст мають транспортні задачі за критерієм часу.

Нехай задано матрицю $\| t_{ij} \|$, де t_{ij} — час на перевезення вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Нехай, як і раніше, x_{ij} — кількість одиниць вантажу, який планується перевезти з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Припустимо, що виконується умова закритої моделі $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Задача полягає у визначенні mn невід'ємних змінних x_{ij}, тобто плану перевезень $\| x_{ij} \|_{mn}$, за яким весь вантаж буде доставлено споживачам у найкоротший термін. Така постановка задачі доцільна тоді, коли йдеться про перевезення термінових вантажів, або таких, що швидко псуються.

Система обмежень у математичній моделі такої задачі не відрізняється від системи обмежень (11.5) транспортної задачі за критерієм вартості, змінюється тільки вираз для цільової функції.

Позначимо через $\underline{t}_{ij}$ елементи матриці $\| t_{ij} \|$, що відповідають завантаженим клітинкам у розв'язку $X = \| x_{ij} \|$, тобто для яких $x_{ij} > 0$.

Серед усіх цих t_{ij} існує найбільше, яке позначимо через T. Отже, $T = \max \{ \underline{t}_{ij} \}$. Величина T визначатиме час, протягом якого здійснюється даний план перевезень $X = \| x_{ij} \|$. Кожному плану перевезень $X = \| x_{ij} \|$ відповідає певне значення T, отже $T = T(X)$. Необхідно визначити такий план перевезень X, для якого величина T буде найменшою.

Зазначимо, що оптимальний розв'язок, побудований за умовою мінімізації функції $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$, не забезпечуватиме перевезень за мінімальний час.

Для розв'язування транспортних задач за критерієм часу скористаємось таким методом.

Починаючи з вихідного опорного плану, будуватимемо наступні плани, визначаючи на кожній ітерації досягнуте значення

$$T = \max \{ t_{ik} \} .$$

Усі вільні клітинки, яким відповідають значення $t_{ik} > T$, завантажувати недоцільно, оскільки це призведе до збільшення T. Тому, закреслюючи, вилучаємо їх з подальшого розгляду.

У таблиці, що залишилася, клітинку (s, t), для якої $t_{ik} = T$ треба звільнити. Для цього побудуємо так званий «розвантажувальний» цикл, який може складатися як з завантажених, так і з вільних клітинок, але за умови, що всім клітинкам з непарними номерами (вважаючи першою клітинку (s, t), яку розвантажують) відповідатимуть x_{ik}, а з парними номерами відповідатимуть клітинки, для яких $t_{ik} < T$. Таких «розвантажувальних» циклів у загальному випадку можна побудувати кілька.

Визначивши для побудованого циклу значення $\lambda = \min \{ x_{ik} \}$, переміщатимемо його вздовж циклу, віднімаючи від $x_{ik} > 0$, розміщених у непарних клітинках та додаючи до чисел, розміщених у парних клітинках.

Якщо виявиться, що $\lambda = x_{st}$, то клітинка (s, t) повністю звільнюється і в подальшому не розглядається (закреслюється). Якщо ж $\lambda < x_{st}$, то вантаж у даній клітинці зменшується: $x'_{st} = x_{st} - \lambda$. У цьому випадку будуватимемо новий «розвантажувальний» цикл і т. д., поки не дістанемо $x'_{st} = 0$. На цьому одна ітерація закінчується. Далі знову визначатимемо нове значення $T' < T$, закреслюючи клітинки зі значеннями $t_{ik} > T'$. Продовжуємо цей процес доти, поки на якійсь ітерації вже неможливо буде перетворити на нуль вантаж, якому відповідає час T. Це означатиме, що досягнуто оптимальне значення.

Задача. Побудувати план перевезень $\| x_{ik} \|_{mk}$, за яким весь вантаж буде доставлено споживачам у найкоротший термін. Вихідні дані задано табл. 11.14.

Таблиця 11.14

a_i	b_k			
	5	10	20	15
10	$\boxed{8}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$
15	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$
25	$\boxed{1}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$

У цій таблиці та в наступних у правому верхньому куті кожної клітинки містяться елементи t_{ik}.

Розв'язання. Вихідний опорний план (табл. 11.15) побудовано за правилом «північно-західного» кута

Таблиця 11.15

a_i	b_k			
	5	10	20	15
10	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$
15	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{7}$
20	$\boxed{1}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{3}$ 15

Значення $T = \max\{t_{ik}\} = t_{11} = 8$ візьмемо в кружечок. Серед незавантажених клітинок є тільки клітинка (3, 2) зі значенням $t_{32} > T = 8$. Закреслимо її.

Для клітинки (1,1) будуємо розвантажувальний цикл і, діставши $\lambda = \min\{5, 10\} = 5$, переміщатимемо його вздовж циклу, віднімаючи від «непарних» клітинок $x_{11} = 5$ і $x_{23} = 10$ та додаючи до «парних» клітинок $x_{13} = 0$ і $x_{21} = 0$.

В результаті матимемо новий розв'язок, в якому клітинка (1,1) стала розвантаженою (табл. 11.16).

Визначивши тепер нове значення $T' = \max\{t_{ik}\} = t_{23} = 6$, клітинки (1,1) і (2,4) на цій ітерації закреслимо.

Таблиця 11.16

a_i	b_k			
	5	10	20	15
10	X [8]	5 [3]	5 [5]	[2]
15	5 [4]	5 [1]	5 [6]	X [7]
25	[1]	X [9]	10 [4]	15 [3]

Тепер розвантажимо клітинку (2,3). Переміщаючи вздовж побудованого циклу $\lambda' = \min(5,5) = 5$, дістаємо нове значення λ'' (табл. 11.17).

Таблиця 11.17

a_i	b_k			
	5	10	20	15
10	X [8]	[3]	10 [5]	[2]
15	5 [4]	10 [1]	X [6]	X [7]
25	[1]	X [9]	10 [4]	15 [3]

Вилучаємо клітинку (2,3). Із завантажених клітинок плану визначаємо T'':

$$T'' = t_{13} = 5.$$

Побудувавши для клітинки (1,3) «розвантажувальний» цикл і перемістивши число $\lambda'' = \min(10{,}15) = 10$, дістанемо оптимальний план (табл. 11.18)

Таблиця 11.18

a_i	b_k			
	5	10	20	15
10	8	3	5	10 (2)
15	5 (4)	10 (1)	6	7
25	1	9	20 (4)	5 (3)

Справді, більше «розвантажувальних» циклів, які б дали змогу розвантажити клітинки (2,3) та (3,3) зі значеннями $t_{21} = t_{33} = T''' = 4$, побудувати не можна.

Отже, оптимальний план перевезень $x_{14} = 10$, $x_{21} = 5$, $x_{22} = 10$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 5$ здійснюється за час $T_{\min} = 4$.

Зауваження. *Для скорочення числа ітерації вихідний опорний план доцільно будувати за методом, аналогічним методу «мінімальної вартості» у транспортній задачі за критерієм вартості. Цей метод називатимемо умовно методом «мінімального часу». Вихідний опорний план можна будувати також за методом подвійної переваги.*

◆

ВПРАВИ

1. Знайти оптимальні плани транспортних задач (за критерієм вартості), заданих табл. 11.19—11.23.

Таблиця 11.19

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		125	60	40	75	25
A_1	100	3	2	3	4	1
A_2	150	4	1	2	4	2
A_3	75	1	1	5	3	2

Таблиця 11.20

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		2	3	4	2	2
A_1	1	3	2	3	2	2
A_2	5	5	4	3	2	4
A_3	7	4	2	3	4	5

Таблиця 11.21

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		160	100	140	50
A_1	90	3	5	2	2
A_2	210	4	5	5	3
A_3	110	3	6	3	6
A_4	40	3	5	2	2

Таблиця 11.22

A_i		B_j		
		B_1	B_2	B_3
		100	120	60
A_1	60	4	4	3
A_2	160	2	5	4
A_3	60	1	3	2

Таблиця 11.23

A_i		B_1	B_2	B_3
		30	40	30
A_1	70	6	4	5
A_2	40	8	3	2
A_3	50	7	5	6

Таблиця 11.24

A_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		22	55	30	28	48
A_1	40	4	1	3	4	4
A_2	30	2	3	2	2	3
A_3	26	3	5	2	4	4
A_4	50	2	2	3	2	5

Таблиця 11.25

A_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		22	50	32	25	40
A_1	60	3	2	5	2	3
A_2	40	1	4	3	3	4
A_3	40	2	5	3	2	5
A_4	80	1	1	4	1	1

Таблиця 11.26

A_i		B_j			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		14	26	31	7
A_1	30	3	3	2	2
A_2	15	2	4	5	2
A_3	18	3	4	2	2
A_4	20	2	5	4	3

Таблиця 11.27

A_i		B_j							
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
		200	300	400	250	150	100	150	200
A_1	650	21	19	17	18	15	16	27	18
A_2	600	16	14	7	20	18	19	15	20
A_3	200	15	13	11	18	19	22	23	14
A_4	100	14	12	12	17	21	23	14	14
A_5	200	10	11	10	20	16	21	12	12

Таблиця 11.28

A_i		B_j						
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
		100	350	50	150	20	300	350
A_1	450	19	24	26	28	30	22	18
A_2	450	31	29	27	25	21	21	19
A_3	300	25	15	17	22	24	18	13
A_4	400	28	25	21	20	23	27	29
A_5	350	13	20	27	18	14	30	24

2. Знайти оптимальні плани транспортних задач за критерієм часу, заданих ресурсами a_i, потребами b_k і матрицею часу перевезень $T = \| t_{ik} \|$:

1) a_i : 70, 80, 90;
b_k : 20, 60, 70, 50, 40;
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix};$$

2) a_i : 60, 40, 100, 50;
b_k : 30, 80, 65, 35, 40;
$$T = \begin{pmatrix} 70 & 20 & 40 & 90 & 30 \\ 60 & 40 & 120 & 70 & 80 \\ 20 & 50 & 40 & 30 & 70 \\ 90 & 80 & 50 & 60 & 40 \end{pmatrix};$$

3) a_i : 40, 25, 35;
b_k : 15, 40, 30, 15;
$$T = \begin{pmatrix} 80 & 50 & 40 & 40 \\ 50 & 40 & 60 & 100 \\ 40 & 140 & 50 & 70 \end{pmatrix};$$

4) a_i : 30, 35, 40;
b_k : 20, 34, 16, 10, 25;
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix};$$

Розділ 12

ІНДЕКСНИЙ МЕТОД

На практиці, коли складають плани завантаження верстатів, завдання можуть змінюватися дуже часто, навіть кілька разів на день. Застосовувати симплексний метод за таких умов, зважаючи на велику трудомісткість, недоцільно. Тому було розроблено методи, за допомогою яких можна складати оперативні плани при значно менших витратах праці й часу.

Одним з таких спрощених методів розрахунку оптимальних планів є *індексний*. Цей метод не є строго математичним методом лінійного програмування; розв'язки, здобуті за його допомогою, мають наближений характер.

Користуючись індексним методом, всі дані слід подавати у вигляді таблиці, в яку записують: кількість виробів кожного виду, які мають бути виготовлені, типи верстатів, норми часу або виробничі витрати, або прибуток від виробництва кожного виробу на кожному верстаті, фонд часу кожного верстата. Передбачається, що кожний виріб можна оброблювати на кожному верстаті.

Зміст індексного методу з'ясуємо на такому прикладі.

Задача. Підприємство випускає 7 видів виробів на п'яти видах верстатів. Виробниче завдання й норми часу на обробку одного виробу на кожному з верстатів подано в табл. 12.1. Скласти такий план завантаження верстатів, щоб загальні витрати часу були мінімальними.

Таблиця 12.1

Виріб	План	Верстат				
		I	II	III	IV	V
А	100	2	1	3	2	3
Б	40	—	—	—	2	4
В	20	3	2	4	—	2
Г	120	1	0,5	2	—	1
Д	140	2	4	0,5	1	—
Е	60	4	2	1	2	3
Є	200	2	1	1	2	1,5
Фонд часу кожного верстата		220	60	200	80	220

Риска в таблиці означає, що виріб не виготовляється на певному верстаті. Фонд часу — це та кількість годин, протягом яких може працювати верстат за період, що розглядається.

Введемо такі поняття:

1) ідеальний верстат — це такий верстат, на якому певний виріб виготовляється за найменший час або з найменшими виробничими витратами, або з найбільшим прибутком;

2) індекс верстата — це число, що дорівнює відношенню різниці часу, необхідного для обробки одного виробу на цьому верстаті, і часу, необхідного на обробку цього виробу на ідеальному верстаті, до часу ідеального верстата, тобто

$$\text{індекс} = \frac{\text{час даного верстата} - \text{час ідеального верстата}}{\text{час ідеального верстата}}.$$

Індекс ідеального верстата дорівнює нулю. Індекси інших верстатів показують як близько за своїми характеристиками підходять ці верстати до ідеального.

Суть індексного методу така. Спочатку обчислюються індекси кожного верстата для кожного виробу. Потім складається вихідний варіант плану, за яким усі замовлення розподіляються відповідно до їхніх ідеальних верстатів і підраховується час роботи кожного верстата за цим варіантом плану. Якщо необхідний час не буде більшим за той, що є (для кожного верстата), то такий план — оптимальний.

Якщо для одних верстатів необхідний час виходить за дані межі, а для інших навпаки використано не весь час, то необхідно зробити перерозподіл завантаження між верстатами, створюючи тим самим перевитрати загального часу роботи верстатів порівняно з первісним варіантом. При цьому слід намагатися, щоб такі перевитрати часу були якомога найменшими.

Досягається це шляхом переміщення замовлень від перевантажених верстатів до недовантажених у порядку переходу від нижчих індексів до вищих.

Обчислимо індекси для виробу A, виготовленому на кожному з верстатів. Ідеальним верстатом для цього виробу є верстат II, йому приписують індекс нуль. Верстат I має індекс $\frac{2-1}{1} = 1$, верстат III — $\frac{3-1}{1} = 2$, верстат IV — $\frac{2-1}{1} = 1$ і верстат V — $\frac{3-1}{1} = 2$.

Аналогічно обчислюються індекси решти виробів на всіх верстатах, де ці вироби виготовляються.

Обчислені індекси записують у правому верхньому куті відповідних клітинок таблиці 12.2. Час обробки кожного виробу на кожному з верстатів у цю таблицю не переноситься.

У цій таблиці наведено розподіл виробів за ідеальними верстатами (за верстатами з індексом нуль), в останньому рядку записано загальні суми верстато-годин кожного верстата, необхідні для здійснення такого розподілу.

Таблиця 12.2

Виріб	План	Верстат				
		I	II	III	IV	V
А	100	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 100	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
Б	40				$\boxed{0}$ 40	$\boxed{1}$
В	20	$\boxed{0,5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$		$\boxed{0}$ 20
Г	120	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 120	$\boxed{3}$		$\boxed{1}$
Д	140	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$ 140	$\boxed{1}$	
Е	60	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 60	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
Є	200	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 130	$\boxed{0}$ 70	$\boxed{1}$	$\boxed{0,5}$
Фонд часу кожного верстата		220	60	200	80	220
Необхідний час			290	200	80	40

Необхідний час будь-якого верстата підраховують так: кількість виробів кожного виду, розподілених на цей верстат, помножають на норми обробки одного виробу на цьому верстаті, а потім усі добутки підсумовують. Наприклад, необхідний час другого верстата становить

$$100 \cdot 1 + 120 \cdot 0,5 + 130 \cdot 1 = 290.$$

Аналогічно обчислюється необхідний час для решти верстатів.

Загальний час, необхідний для здійснення такого варіанта плану, становить 290 + 200 + 80 + 40 = 610 верстато-годин (фонд часу, що є, дорівнює 780 верстато-годин). Як бачимо, при цьому варіанті плану необхідний час верстата II значно перевищує фонд часу цього верстата, тоді як верстати I і V виявилися недовантаженими.

Перерозподілимо замовлення з перевантажених ідеальних верстатів на недовантажені верстати в порядку зростання індексів. Оскільки перевантаженим є верстат II, то частину замовлень з цього верстата перенесемо на інші верстати. Так, усі 100 виробів А перенесемо на верстат I, а оскільки на верстаті I ще залишається невикористаний час, то можна перенести на нього ще 10 виробів Є. Внаслідок цього необхідний час верстата I становитиме 100 · 2 + 10 · 2 = 220 верстато-годин. 120 виробів Є, що залишилися, перенесемо на недовантажений верстат V. Необхідний час цього верстата становитиме 20 · 2 + 120 · 1,5 = 220 верстато-годин. На верстаті II залишиться тільки 120 виробів Г, для обробки яких необхідно 120 · 0,5 = 60 верстато-годин.

У таблиці 12.3 наведено план завантаження верстатів після перерозподілу.

Таблиця 12.3

Виріб	План	Верстат					Перевитрати часу
		I	II	III	IV	V	
1	2	3	4	5	6	7	8
А	100	$\boxed{1}$ 100	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	100
Б	40				$\boxed{0}$ 40		0
В	20	$\boxed{0,5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$		$\boxed{0}$ 20	0
Г	120	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 120	$\boxed{3}$		$\boxed{1}$	0
Д	140	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$ 140	$\boxed{1}$		0

Закінчення табл. 12.3

1	2	3	4	5	6	7	8
Е	60	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 60	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	0
Є	200	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 70	$\boxed{1}$	$\boxed{0,5}$ 120	70
Фонд часу кожного верстата		220	60	200	80	220	
Необхідний час		220	60	200	80	40	

Як бачимо, в цьому плані завантаження верстатів необхідний час кожного верстата дорівнює фонду часу цього верстата. Отже, такий план можна вважати наближеним оптимальним планом завантаження верстатів. Проте не можна сказати, як близько він наближається до оптимального, оскільки процедура перерозподілу замовлень після складання вихідного варіанта не підпорядкована строгим правилам.

Тому складання плану, який якомога повніше відображає оптимальний, значною мірою залежить від уміння укладача. Завжди можуть залишитися невикористані резерви подальшого поліпшення плану.

Зауваження. ◆ *В останньому стовпці таблиці 12.3 записано перевитрати часу на виробництво виробів кожного виду, які виникають внаслідок того, що виріб обробляється не на ідеальному верстаті. Ці перевитрати дорівнюють різниці між часом оброблення виробу деякого виду за розглядуваним планом і часом його оброблення за вихідним планом або сумі добутків кількостей виробів на індекси клітинок, де вони розміщені. Звідси, чим менші сумарні перевитрати часу, тим ближче побудований план до оптимального.*

Таким чином, розглянуто застосування індексного методу для побудови плану завантаження обладнання з метою найменшого використання загального мінімального часу всього парку обладнання.

Цілком аналогічно будується план завантаження обладнання з метою мінімізації витрат. При цьому треба тільки замість норм часу оброблення виробів внести в таблицю вартості машино-часу, що складаються з прямих витрат на працю, а також інших розподілених витрат.

Індексний метод можна застосовувати також і до деяких інших типів задач. За допомогою цього методу можна, наприклад, побудувати розв'язок сільськогосподарської задачі на найраціональніше використання посівних площ.

Повна умова такої задачі наведена вище, тут тільки скористуємося таблицею (табл. 12.4).

Таблиця 12.4

Культура	План	Масив		
		I	II	III
Жито	19 000	12	14	15
Пшениця	158 000	14	15	12
Кукурудза	300 000	30	35	25
Площа землі, що є у розпорядженні, га		5 000	8 000	9 000

Для кожної з культур як ідеальний беремо той масив, де врожайність даної культури найбільша. Так, для жита ідеальним є масив III, для пшениці — масив II і для кукурудзи — масив II. Цим масивам приписуємо індекс нуль. Індекси решти масивів дорівнюють відношенню різниці врожайностей ідеального і даного масивів до врожайності ідеального масиву. Так, для жита індексом масиву I є $\frac{15-12}{12}=\frac{1}{5}$, індексом масиву II є $\frac{15-14}{15}=\frac{1}{15}$.

Аналогічно обчислюють індекси всіх масивів для решти культур. Знайдені індекси запишемо в таблицю і складемо початкове розподілення культур за ідеальними масивами (табл. 12.5). У таблиці записуватимемо не кількості центнерів культур, а площу землі, необхідну для одержання цього врожаю.

Таблиця 12.5

Культура	План	Масив		
		I	II	III
Жито	19 000	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	0 1266,7
Пшениця	158 000	$\frac{1}{15}$	0 10533,3	$\frac{3}{15}$
Кукурудза	300 000	$\frac{1}{7}$	0 8571,4	$\frac{2}{7}$
Площа землі, що є у розпорядженні, га		5 000	8 000	9 000
Необхідна площа землі, га			19104,7	1266,7

Для вирощування жита на його ідеальному масиві необхідно 19 000 : 15 = 1266,7 га; для пшениці — 158 600 : 15 = 10533,3 га; для кукурудзи — 3 000 : 35 = 8571,4 га. Звідси випливає, що другий масив дуже перевантажений, тоді як перший і третій масиви недовантажені. Треба зробити перерозподіл. Наприклад, другий масив повністю відведемо під пшеницю, частину плану по пшениці, що залишилася, і частину плану по кукурудзі перенесемо на перший масив, а частину плану по кукурудзі, що залишилася, — на третій масив. Внаслідок цього матимемо такий варіант плану (табл. 12.6):

Таблиця 12.6

Культура	План	Масив			Перевитрата посівних площ, га
		I	II	III	
Жито	19 000	$\boxed{\frac{3}{15}}$	$\boxed{\frac{1}{15}}$	$\boxed{0}$	
Пшениця	158 000	$\boxed{\frac{1}{15}}$ 2714,2	$\boxed{0}$ 8000	$\boxed{\frac{3}{15}}$	180,9
Кукурудза	300 000	$\boxed{\frac{1}{7}}$ 2285,8	$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{2}{7}}$	2971,4
Площа землі, що є у розпорядженні, га		5 000	8 000	9 000	
Необхідна площа землі, га		5 000	8 000	10 523,7	

Якщо другий масив повністю відвести під кукурудзу, частину плану по кукурудзі, що залишилася, і частину плану по пшениці перенести на перший масив, а частину плану, що залишилася, по пшениці перенести на третій масив, то дістанемо поліпшений варіант плану (табл. 12.7).

Таблиця 12.7

Культура	План	Масив			Перевитрата посівних площ, га
		I	II	III	
1	2	3	4	5	6
Жито	19 000	$\boxed{\frac{3}{15}}$	$\boxed{\frac{1}{15}}$	$\boxed{0}$ 1266,7	
Пшениця	158 000	$\boxed{\frac{1}{15}}$ 4333,3	$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{3}{15}}$ 8111,5	1911,5

1	2	3	4	5	6
Кукурудза	300 000	$\boxed{\frac{1}{7}}$ 666,7	$\boxed{0}$ 8 000	$\boxed{\frac{2}{7}}$	95,3
Площа землі, що є у розпорядженні, га		5 000	8 000	9 000	
Необхідна площа землі, га		5 000	8 000	9378,2	

Як було зазначено вище, в індексному методі процедура складання варіантів плану не підпорядкована строгим правилам, тому індексний метод не має такого поняття лінійного програмування, як оптимальна або найкраща відповідь у випадку, коли розрахунки закінчено.

Отже, можна стверджувати, що останній план (табл. 12.7) не може бути поліпшеним.

Аналізуючи розглянуті приклади, бачимо, що індексний метод дає змогу швидко складати наближені плани. Важливим є також і те, що за допомогою цього методу легко виявляються «вузькі місця» виробництва.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Багаєнко І. М., Григорків В. С., Бойчук М. В., Рюмшин М. О.* Математичне програмування. К., 1996. 266 с.

2. *Банди Б.* Основы линейного программирования. М., 1989. 176 с.

3. *Гасс С.* Линейное программирование. М., 1961. 304 с.

4. *Заславский Ю. П.* Сборник задач по линейному программированию. М., 1969. 256 с.

5. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М., 1967. 460 с.

6. *Калихман И. Л.* Линейная алгебра и программирование. М., 1967. 427 с.

7. *Калихман И. Л.* Сборник задач по линейной алгебре и программированию. М., 1969. 160 с.

8. *Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М., 1967. 312 с.

9. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. М., 1980. 200 с.

10. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., 1971. 426 с.

11. *Мартыненко Л. Ф., Чернис Г. Н.* Методическая разработка к проведению практических занятий по линейной алгебре. К., 1982. 58 с.

12. *Наконечний С. І., Гвоздецька Л. В.* Збірник задач з математичного програмування: У 2 ч. К., 1996. Ч. 1. 128 с.

13. *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра. М., 1966. 335 с.

14. *Окунев Л. Я.* Сборник задач по высшей алгебре. М., 1964. 183 с.

15. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М., 1984. 336 с.

16. *Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М.* Математичне програмування. К., 1996. 312 с.

17. *Степанюк В. В.* Методи математичного програмування. К., 1984. 272 с.

18. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. М., 1977. 288 с.

19. *Фергюссон Р. О., Сарджент Л. Ф.* Линейное программирование. М., 1962. 361 с.

20. *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейних пространств. М., 1956. 303 с.

21. *Юдин Д. Б., Гольштейн Б. Г.* Линейное программирование. М., 1969. 424 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Е

З

І

К

Л

М

Н

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ч

ЗМІСТ

Навчальне видання

Гетманцев Володимир Данилович

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Художник обкладинки *О. Г. Григір*
Художній редактор *Т. О. Щур*
Технічний редактор *Л. І. Швець*
Коректор *Т. В. Кацовенко*

Підп. до друку 10.06.2001. Формат 84 x 108/32. Папір офс. № 1.
Гарнітура Тип Таймс. Офсетний друк. Умов.-друк. арк. 13.44.
Умов. фарбовідб. 13.86. Обл.-вид. арк. 12.85.
Вид. № 3823. Зам. № 1-92.

Видавництво «Либідь» при Київському університеті. 01001 Київ, Хрещатик, 10

Свідоцтво про державну реєстрацію № 404 від 06.04.2000 р.

Віддруковано відповідно якості наданих діапозитивів
на ВАТ "Білоцерківська книжкова фабрика"
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4

Гетманцев В. Д.

Г44 Лінійна алгебра і лінійне програмування: Навч. посібник. — К.: Либідь, 2001. — 256 с.

ISBN 966-06-0030-5.

Викладено теорію визначників і матриць, поняття лінійних просторів і систем лінійних рівнянь, а також методи їх розв'язування. Розглянуто графічний і симплексний методи, двоїсту задачу лінійного програмування, двоїстий симплексний метод, транспортну задачу та індексний метод. Теоретичний матеріал ілюструється прикладами й задачами економічного змісту.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Г $\frac{1602040000-034}{2001}$

ББК 22.143я73 + 22.18я73