В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Практикум

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 51(075)
ББК 22.я73
Х76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 3 від 30.10.2014 р.)

Рецензенти:
Ю. І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, В. В.
Х76 Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум / В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2017. –118 с.

У навчальному посібнику на системній основі наводиться теоретичний мінімум з базових тем курсу «Вища математика», а саме з лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії та основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач, запитання для самоперевірки, вправи для практичних занять та самостійного розв'язування. Наведені приклади проведення інтерактивних практичних занять із розглядуваних тем.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51(075)
ББК 22.я73

ЗМІСТ

Математика – цариця всіх наук. Її улюблениця – істина, її вбрання – простота і ясність. Палац цієї володарки оточено тернистими заростями, і, щоб досягти його, кожному доводиться пробиратися крізь хащі. Випадковий мандрівник не виявить у палаці нічого привабливого. Краса його відкривається лише розуму, що любить істину і загартований в боротьбі з труднощами, і такому, який свідчить про незвичайну схильність людини до заплутаних, але невичерпних і піднесених розумових насолод.

Ян Снядецький

Розв'язування задач є найхарактернішим і специфічним різновидом вільного мислення.

В. Джеймс

ВСТУП

У суспільстві розвиненої ринкової економіки працевлаштування та досягнення мети всіма членами суспільства тісно пов'язано з умінням постійно вдосконалювати свої здібності, встигати за розвитком науково-технічного прогресу, бути готовим до використання сучасних інформаційних технологій. В епоху науково-технічної революції широке розповсюдження математичних знань стає органічною потребою. Більшість провідних професій в сучасному суспільстві вимагають від майбутніх спеціалістів різного профілю значних знань з математики та умінь її застосування. Математика набуває все більшого значення в інших науках, а також широко використовується при розв'язанні завдань науково-технічного прогресу, особливо тих, що стосуються нових галузей техніки. В сучасних умовах певний обсяг математичних знань, добре володіння математичними методами стали обов'язковим елементом загальної культури. Організація навчального та виховного процесу студентів повинна сприяти досягненню ними ґрунтовних знань з обраної спеціальності, умінню творчо мислити, коротко та логічно виражати свої думки. Важливу роль у набутті вказаних вище рис відіграє процес вивчення математичних дисциплін.

Для загальної освіти майбутніх спеціалістів вкрай необхідно познайомити їх з науковими методами дослідження, логічної побудови математичних теорій. Математика завжди вважалася і вважається одним із найскладніших предметів, однак не можна переоцінити її особливу роль у розвитку мислення, формуванні творчої особистості. Загальноосвітня мета вивчення даної дисципліни полягає в тому, щоб надати студентам систематизовані знання основ математичної науки і ті уміння та навики, що необхідні для міцного, повноцінного і свідомого засвоєння знань, окреслених навчальною програмою. Життєво-практична ціль викладання даної дисципліни полягає в озброєнні студентів тими знаннями, уміннями та навичками математичних алгоритмів, які б вони могли використовувати у своїй повсякденній практичній діяльності.

У **практикумі** подано перелік практичних занять з розділів курсу «Елементи лінійної алгебри», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія». Кожне практичне заняття містить: тему, мету, питання для самопідготовки, план, термінологічний словник ключових понять, зразки розв'язування типових задач, добірку завдань для аудиторної та самостійної роботи. Для допомоги у підготовці до практичних занять, а також для виконання самостійної роботи у практикумі подано список рекомендованої літератури.

Практикум, призначений для використання студентами різних спеціальностей денної та заочної форм навчання в процесі вивчення окремих розділів курсу.

1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Практичне заняття № 1

Матриці та дії над ними. Визначники, їх властивості та обчислення

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з тем: «Матриці», «Визначники», набути навичок і вмінь виконання дій над матрицями, обчислення визначників різними методами, знаходження рангу матриці.

Питання для самопідготовки:

– поняття матриці, визначника матриці;
– види матриць;
– дії над матрицями, властивості дій над матрицями;
– поняття визначника другого (третього) порядку;
– основні властивості визначників;
– поняття мінору, алгебраїчного доповнення елемента визначника;
– теорема про розклад визначника за елементами рядка або стовпця;
– ранг матриці, способи знаходження рангу матриці.

План практичного заняття

1). Матриці, їх види. Додавання, віднімання, множення матриць.
2). Обчислення визначників II та III порядків.
3). Обчислення визначників третього і вищих порядків методом розкладу визначника за елементами рядка або стовпця.
4). Знаходження рангу матриці.

Теоретичний довідник

Матрицею називають прямокутну таблицю розмірами m на n або $m \times n$. Як правило, елементами матриці є числа, хоча це можуть бути й функції, і буквені вирази. Записують матриці так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця – це матриця, у якої $m = n$.

Діагональна матриця – це квадратна матриця, в якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одинична матриця – це діагональна матриця, в якої всі елементи дорівнюють одиниці.

Нульова матриця – це матриця, в якої всі елементи дорівнюють нулю.

Трикутна матриця – це квадратна матриця, в якої всі її елементи, що розміщені нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Вектор - рядок – це матриця, що містить лише один рядок.

Вектор - стовпець – це матриця, що містить лише один стовпець.

Симетрична матриця – це матриця, для якої $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i \in \overline{1,m}; \forall j \in \overline{1,m})$.

Транспонована матриця – це матриця рядки і стовпці якої поміняні місцями, позначають $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Узгоджені матриці – це матриці, для яких кількість стовпчиків у першій матриці дорівнює кількості рядків у другій.

Операції додавання, віднімання, порівняння, множення матриць на число здійснюється поелементно. Множаться матриці лише узгоджені.

Добуток матриць не має переставної властивості, тобто ***не завжди*** $AB = BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці називають ***переставними***.

Кожній квадратній матриці другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ поставимо у відповідність дійсне число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, яке називають ***визначником другого порядку***. Позначають:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

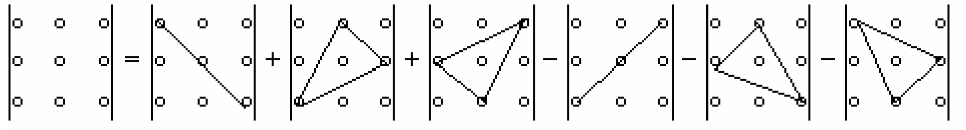
Теорема. Визначник другого порядку з ненульовими елементами дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його рядки (стовпчики) пропорційні.

Кожній квадратній матриці А третього порядку поставимо у відповідність число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} +$$

$$+a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}),$$

яке називають ***визначником третього порядку***: $\Delta = \det A$ *або* $\Delta = |A|$.



Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ n-го порядку називають визначник $(n-1)$-го порядку, що одержується з визначника Δ викресленням i-го рядка і j-го стовпчика, на перетині яких розміщується елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника Δ називають число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, тобто якщо число $(i+j)$ парне, то $A_{ij} = M_{ij}$, в іншому випадку – $A_{ij} = -M_{ij}$.

Теорема (про розклад визначника). Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на їх алгебраїчні доповнення.

Властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо рядки та стовпці його поміняти місцями

2. Якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки або стовпці, то знак визначника змінюється на протилежний.

Наслідок. Якщо визначник містить два однакових рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

3. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника

Наслідок 1. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то й визначник дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо визначник містить пропорційні рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

4. Якщо елементи деякого рядка визначника представляють собою суму двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних визначників.

Наслідок. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) домножити на число λ і додати почленно до елементів іншого рядка (стовпця), то значення визначника не зміниться.

5. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Наслідок. Визначник діагональної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Ранг матриці А – це найбільший порядок відмінного від нуля її мінора. Ранг матриці А прийнято позначати *Rg(A)* або *rang A*.

Властивості рангу матриці:

1. Ранг матриці А порядку $m \times n$ не перевищує меншого з чисел m і n тобто $r(A) \leq \min\{m,n\}$.
2. $r(A)=0$ тоді і тільки тоді, коли А – нульова матриця.
3. Ранг квадратної матриці А n-го порядку дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця А невироджена, тобто її визначник не дорівнює нулю.

Методи обчислення рангу матриці:

1. Метод ***окантування*** (за означенням).
2. Метод, який полягає в застосуванні ***елементарних перетворень*** матриці, до яких належать:

а) вилучення нульового рядка (стовпця);

б) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;

в) зміна порядку рядків (стовпців);

г) додавання до кожного елемента деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на будь-яке число;

д) транспонування матриці.

За допомогою елементарних перетворень матрицю можна звести до трикутного вигляду.

Матриці, які ми одержуємо за допомогою елементарних перетворень, називаються ***еквівалентними*** і позначаються знаком «$\sim$».

Ранг матриці трикутного вигляду дорівнює кількості діагональних елементів, які не дорівнюють нулю.

Алгоритм знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень

1. Зробити так, щоб коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Для цього можна поміняти рядки місцями.
2. В першому стовпці під коефіцієнтом a_{11} зробити всі нулі. Для цього помножити перший рядок послідовно на $\frac{-a_{21}}{a_{11}}, \frac{-a_{31}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ і додати відповідно до другого, третього, m-го рядків.
3. Якщо в результаті перетворень отримали рядок чи стовпець, що містить усі нулі, то його вилучити.
4. Аналогічно зробити так, щоб коефіцієнт $a_{22} \neq 0$, а під ним були нулі.
5. Описані дії повторити для всіх діагональних елементів (з однаковими індексами), доки матриця не буде зведена до трикутного вигляду.
6. Знайти ранг матриці (кількість діагональних елементів, які не дорів-

нюють нулю).

Теорема 1. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Теорема 2. Ранг ступінчатої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

Ненульовий рядок – це рядок, який містить в собі хоча б один елемент, який не дорівнює нулю.

Ранг матриці не зміниться, якщо її транспонувати. Ранг матриці дорівнює рангу ступінчатої матриці, яка одержана із даної матриці за допомогою елементарних перетворень.

Метод обвідних мінорів

Цей метод полягає в наступному:

1. Находимо який-небудь мінор M_1 першого порядку (тобто елемент матриці) відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 0$ (матриця A– нульова).

2. Обчислюємо мінори другого порядку, які містять в собі M_1 (обводять M_1) до тих пір, поки не знайдеться мінор M_2 відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, якщо є, то $r(A) \geq 2$ і т. д.

k. Обчислюємо мінори k-го порядку, якщо вони існують, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$. Якщо таких мінорів немає, або вони всі дорівнюють нулю, то $r(A) = k - 1$, якщо хоча б один мінор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$ і т. д.

При знаходженні рангу матриці таким способом достатньо на кожному кроці знайти всього один ненульовий мінор k-го порядку, причому шукати його потрібно тільки серед мінорів, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$.

Матрицю A^{-1} називають ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Квадратну матрицю A називають ***виродженою***, якщо її визначник дорівнює нулю. Якщо $|A| \neq 0$, то матрицю A називають ***невиродженою***.

Якщо матриця A невироджена, то обернену до неї матрицю A^{-1} можна знайти за таким алгоритмом:

1) обчислити визначник $|A| = \Delta$;

2) обчислити алгебраїчні доповнення A_{ij} для всіх елементів матриці A;

3) знайти матрицю $\tilde{A}$, що має вигляд $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$;

4) записати обернену матрицю: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}$

Для контролю варто переконатися, що $A \cdot A^{-1} = E$.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Виконати дії над матрицями: для пункту а) знайти матрицю $3A-5B$; для пункту б) знайти добуток матриць AB і BA

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & -5\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & -6\\ 2 & 1 & 0\\ 8 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язування

а) Знайдемо $3A$, $2B$ та $3A-5B$:

$$3A=\begin{pmatrix}-3 & -9\\ 12 & 15\end{pmatrix};\quad 5B=\begin{pmatrix}10 & -30\\ 15 & 5\end{pmatrix}$$

$$3A-5B=\begin{pmatrix}-3-10 & -9-(-30)\\ 12-15 & 15-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 21\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

б) Матриця A має розмірність 3×3, матриця B – 3×3; добуток існує – це матриця розмірності 3×3.

Знайдемо AB:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & -5\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -6\\ 2 & 1 & 0\\ 8 & -3 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 4+1\cdot 2+(-1)\cdot 8 & 2\cdot 5+1\cdot 1+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot(-6)+1\cdot 0+(-1)\cdot 1\\ 3\cdot 4+4\cdot 2+(-5)\cdot 8 & 3\cdot 5+4\cdot 1+(-5)\cdot(-3) & 3\cdot(-6)+4\cdot 0+(-5)\cdot 1\\ 1\cdot 4+7\cdot 2+3\cdot 8 & 1\cdot 5+7\cdot 1+3\cdot(-3) & 1\cdot(-6)+7\cdot 0+3\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 14 & -13\\ -20 & 34 & -23\\ 42 & 3 & -3\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 5 & -6\\ 2 & 1 & 0\\ 8 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & -5\\ 1 & 7 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot 2+5\cdot 3+(-6)\cdot 1 & 4\cdot 1+5\cdot 4+(-6)\cdot 7 & 4\cdot(-1)+5\cdot(-5)+(-6)\cdot 3\\ 2\cdot 2+1\cdot 3+0\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 7 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-5)+0\cdot 3\\ 8\cdot 2+(-3)\cdot 3+1\cdot 1 & 8\cdot 1+(-3)\cdot 4+1\cdot 7 & 8\cdot(-1)+(-3)\cdot(-5)+1\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17 & -18 & -47\\ 7 & 6 & -7\\ 8 & 3 & 10\end{pmatrix};\quad AB\neq BA.$$

Приклад 2. Обчислити визначники матриць:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Розв'язування

В прикладах 1) та 2) обчислимо визначники матриці 2-го порядку:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) - 2\cdot 4 = -15 - 8 = -23$;

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - (-2)\cdot(-3) = 7 - 6 = 1$.

В прикладах 3) та 4) обчислимо визначники матриці 3-го порядку:

3) обчислимо визначник за правилом Саррюса

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}\right| = 2\cdot 3\cdot(-3) + 5\cdot 4\cdot 5 + 7\cdot 6\cdot(-2) - 5\cdot 3\cdot 7 - (-2)\cdot 4\cdot 2 -$$

$$-(-3)\cdot 6\cdot 5 = -18 + 100 - 84 - 105 + 16 + 90 = -1 ;$$

4) обчислимо визначник, шляхом розкладання його за елементами 3-го рядка, оскільки один елемент рядка дорівнює нулю, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(2+1) - 5(3-2) = 3 - 5 = -2 .$$

Приклад 3. Використовуючи властивості визначників, обчислити визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 36 & -24 & 60 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}$

Розв'язування

Винесемо спільний множник елементів другого рядка за знак визначника:

$$\Delta = 12\begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 3 & -2 & 5 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}.$$

Додавши до першого рядка другий, матимемо:

$$\Delta = 12\begin{vmatrix} 20 & 27 & 46 \\ 3 & -2 & 5 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix} = 0,$$ оскільки перший і третій рядки визначника однакові.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} = 4$

Розв'язування

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$-1 + 2x^2 + 6x^2 - 3x + 2x^2 - 2x = 4;$$

$$10x^2 - 5x - 5 = 0;$$

$$2x^2 - x - 1 = 0;$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 > 0;\ x_1 = \frac{1+3}{4} = 1;\ x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 5. Обчислити визначник 4-го порядку, утворюючи нулі в рядках або стовпчиках:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Розв'язування

Скориставшись означенням визначника, утворимо алгебраїчну суму добутків елементів, наприклад першого рядка, на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = 2 \cdot \left(-1\right)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отже, тепер потрібно обчислити три визначники третього порядку, оскільки визначник, який входить до третього доданка, обчислювати не потрібно. Зрозуміло, що чим більше нулів маємо в рядку або стовпці, за елементами якого утворюється алгебраїчна сума, тим менше визначників $(n-1)$-го порядку потрібно обчислювати.

Згідно з відповідною властивістю, утворимо в одному зі стовпців визначника Δ, наприклад в останньому, нулі. Якщо нулі утворюються в стовпці, використовуються елементи рядків, а якщо нулі утворюються в рядках, то навпаки – елементи стовпців. У четвертому стовпці є дві одиниці, одну з них візьмемо як *розв'язувальний елемент* і виконаємо перетворення:

1) елементи третього (робочого) рядка перепишемо у перетворюваний визначник без змін;

2) помножимо всі елементи третього рядка на (–3), додамо до відповідних елементів першого рядка, а результат запишемо в перший рядок;

3) помножимо всі елементи третього рядка на (–1), додамо до відповідних елементів другого рядка, а результат запишемо у другий рядок;

4) помножимо всі елементи третього рядка на (–2), додамо до відповідних елементів четвертого рядка, а результат запишемо в четвертий рядок.

Після цих перетворень значення визначника не зміниться, але він набере такого вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -7 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тепер, скориставшись означенням визначника і розклавши його за елементами четвертого стовпця, отримаємо:

$$\Delta = 1\cdot\left(-1\right)^{3+4} \begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Тепер обчислення визначника четвертого порядку звелось до обчислення одного визначника третього порядку. Його можна обчислити за означенням, а можна знову утворити нулі, скажімо, у другому рядку, скориставшись одиницею як розв'язувальним елементом і виконавши дії зі стовпцями. Дістанемо:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 7 & -4 & -18 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 18 = 14\,.$$

Зрозуміло, що за такою схемою можна обчислити визначник будь-якого порядку.

Приклад 6. Знайти ранг матриці: $A=\begin{pmatrix}0&1&7&1\\1&3&11&3\\1&2&4&2\\2&3&1&3\end{pmatrix}$

Розв'язування

2) поміняємо перший і другий рядок місцями для того, щоб елемент $a_{11}\neq 0$;

3) щоб отримати в першому стовпці всі решта нулі, перший рядок домножимо на (–1) і додамо до третього рядка; перший рядок домножимо на (–2) і додамо до четвертого рядка;

4) щоб отримати нулі, другий рядок додамо до третього рядка; другий рядок домножимо на 3 і додамо до четвертого рядка;

5) вилучимо нульові рядки.

$$\begin{pmatrix}0&1&7&1\\1&3&11&3\\1&2&4&2\\2&3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\\1&2&4&2\\2&3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\\0&-1&-7&-1\\0&-3&-21&-3\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці r(A)=2.

Приклад 7. Знайти обернену до матриці A матрицю A^{-1}, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&0\\2&3&3\end{pmatrix}.$$

Розв'язування

1) $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&0\\2&3&3\end{vmatrix}=6+9-12-6=-3.$

2) $A_{11}=\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}=6;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}=-3;\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1;$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, матрицю A^{-1} знайдено правильно.

Приклад 8. Розв'язати матричне рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Щоб побудувати A^{-1}, знайдемо $\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$. Оскільки $A_{11} = 3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 3$, маємо: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Визначаємо $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$. Отже, шукана матриця $X = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & 7 & -14 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$.

2. Скориставшись властивостями визначників, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ax_1+bx_2 \\ y_1 & y_2 & ay_1+by_2 \\ z_1 & z_2 & az_1+bz_2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1+b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2+b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 0; б) 0; в) 0.

3. Розклавши визначник за рядком або стовпцем, що складається лише з букв, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Відповідь. а) $8a+15b+12c-19d$; б) $2a-8b+c+5d$; в) $abcd$; г) $3a-b+2c+d$

4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 90; б) 27; в) 52; г) 10; д) 100.

5. Обчислити визначники четвертого порядку: а) розкладаючи за елементами третього рядка (стовпця); б) шляхом занулення рядків або стовпців.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ 4 & -8 & -3 & -4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & -8 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

6. Довести, що

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

7. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

8. Знайти матрицю $A = (2B - 3C)D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Виконати дії: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, якщо n – парне; $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, якщо n – непарне.

10. Знайти значення

$$f(A) = 3A^2 - 2A + 5 \text{ і } f(B) = B^3 - 7B^2 + 13B - 5,$$

якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $f(A) = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Знайти невідому матрицю X з рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

12. Матриці A і B називаються *переставними*, якщо $AB = BA$. Знайти всі матриці, переставні з матрицями:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 3\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ -5\beta & \alpha + 9\beta \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, де α, β, γ – будь-які числа.

13. Знайти матриці, обернені до матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Результат перевірити множенням.

14. Знайти ранг матриць методом обвідних мінорів:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) 3; б) 3.

15. Дослідити залежно від значення λ ранг матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) якщо $\lambda = 0, r(A) = 2$; якщо $\lambda \neq 0, r(A) = 3$; б) якщо $\lambda = 3, r(A) = 2$; якщо $\lambda \neq 3, r(A) = 3$.

16. Знайти ранг матриць методом елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) 3; б) 2.

17. Довести, що в результаті приєднання до матриці одного стовпця або рядка її ранг збільшується на одиницю або не змінюється.

Питання для самоперевірки

1) Що називається матрицею?
2) Чи може матриця дорівнювати числу?
3) Яка матриця називається ступінчастою?
4) Чи може діагональна матриця бути прямокутною?
5) Яка матриця називається одиничною?
6) Які матриці називають узгодженими?
7) Що називається добутком двох узгоджених матриць?
8) Якщо $AB = BA$, то як називають такі матриці?
9) Чи можна перемножити квадратну матрицю на неквадратну?
10) Що називається рангом матриці?
11) Які властивості рангу матриці ви знаєте?
12) Методи обчислення рангу матриці.
13) Алгоритм знаходження рангу матриці.
14) Які властивості визначників ви знаєте? Охарактеризуйте їх.
15) Яка матриця називається невиродженою?
16) Чи може матриця A розміром $[3\times 4]$ мати обернену матрицю?
17) Яким умовам повинна задовольняти матриця A, щоб мати обернену матрицю?
18) Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці.
19) Як розв'язується матричне рівняння $XC = A$?

Практичне заняття № 2

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера, Гаусса, матричним методом

Мета: набути навичок і вмінь розв'язувати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера, Гаусса, матричним методом.

Питання для самопідготовки:

- поняття системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими;
- сумісна, несумісна, визначена, невизначена система лінійних рівнянь;
- формули Крамера, особливості їх застосування;
- метод Гаусса та Жордана-Гаусса;
- матричний метод розв'язування систем рівнянь;
- дослідження на сумісність довільних систем рівнянь;
- теорема Кронекера-Капеллі.

План практичного заняття

1. Методи розв'язування невироджених систем рівнянь: метод Крамера, матричний метод, метод Жордана-Гаусса.
2. Розв'язування однорідних систем рівнянь.
3. Дослідження довільних систем на сумісність.

Теоретичний довідник

Система m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ – це система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Коефіцієнти біля невідомих – це числа a_{ij}, ($i=1,2,...m; j=1,2,...,n$), ***вільні члени системи*** – *це* числа b_i.

Сумісна система лінійних рівнянь (СЛР) – це система, яка має хоча б один розв'язок.

Несумісна СЛР – це система, яка не має жодного розв'язку.

Визначена СЛР – це сумісна система, яка має єдиний розв'язок.

Невизначена СЛР – це сумісна система, яка має більше ніж один розв'язок.

Однорідна система – це система рівнянь, у якої всі вільні члени дорівнюють нулю.

Неоднорідна система – це система рівнянь, у якої хоча б один вільний член відмінний від нуля.

Розв'язок системи ЛР – це впорядкований набір *n* чисел $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, якщо внаслідок їх підстановки замість $x_1, x_2, ..., x_n$ в систему кожне рівняння системи перетворюється на правильну рівність.

Формули Крамера для розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими мають вигляд: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; ....; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$, де Δ – визначник системи, складений з коефіцієнтів системи, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n}$ – визначники, які утворюються з визначника системи відповідно заміною стовпців при невідомих x_i вільними членами.

Теорема 1. Якщо визначник Δ системи рівнянь дорівнює нулю, а серед алгебраїчних доповнень A_{ks} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ елементів *k*-го рядка є ненульові, то ця система має ненульовий розв'язок виду:

$$x_s = A_{ks}\ t\ (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$ де $t-$ довільний параметр.

Теорема 2. Для того, щоб система лінійних однорідних рівнянь мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю.

Метод Гаусса для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в ***послідовному виключенні змінних*** і перетворенні системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n0}, \end{cases}$$

в якій коефіцієнт $a_{11} \neq 0$ (якщо ця умова не виконується, то на перше місце переносимо таке рівняння, щоб $a_{11} \neq 0$) до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{10}; \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{20}; \\ \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = b_{n0},\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{cases}$$

Цю систему розв'язують, починаючи з останнього рівняння. Спочатку знаходять x_n і підставляють в передостаннє рівняння, з якого визначають x_{n-1}, і т. д.

За допомогою методу Гаусса можна повністю дослідити систему лінійних рівнянь: довести її сумісність або несумісність; у разі сумісності дослідити систему на визначеність; для визначених систем знайти їх єдиний розв'язок, а для невизначених – загальний.

Теорема (Кронекера-Капеллі). Для того, щоб система була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранги основної і розширеної матриць збігались ($r(A) = r(\overline{A})$).

Теорема (критерій визначеності). Для того, щоб сумісна система була визначеною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих, що входять у цю систему.

На основі цих двох теорем отримаємо алгоритм дослідження системи лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.

1) Знайти $r(A)$ та $r(\overline{A})$. Якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несумісна, і алгоритм завершено. Якщо $r(A) = r(\overline{A})$, то система сумісна.

2) Якщо $r(A) = n$, де $n-$кількість змінних, то система визначена. Якщо $r(A) \neq n$, то система невизначена.

Метод Жордана-Гаусса є модифікацією методу Гаусса і часто застосовується в економічних розрахунках. Сутність методу полягає в тому, що кожне невідоме виключається не тільки з розміщених нижче, а з усіх рівнянь. У такому разі зростає обсяг обчислень. Якщо система n рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n0} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, то вона матиме вигляд:

$$x_1 = b_{10},\ x_2 = b_{20},\ \ldots,\ x_n = b_{n0}\,.$$

Системою n ***лінійних рівнянь з*** n ***змінними*** називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Систему можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ – основна матриця системи; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик відповідно невідомих і вільних членів.

Запишемо систему у вигляді $A \cdot X = B$.

Припустимо, що $|A| \neq 0$. Домножимо обидві частини попередньої рівності зліва на матрицю A^{-1}: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то $X = A^{-1} \cdot B$.

Отже, щоб розв'язати систему ***матричним методом***, потрібно:

1) знайти матрицю A^{-1} (при $|A| \neq 0$);

2) виконати множення $A^{-1} \cdot B$; отриманий вектор-стовпчик і буде вектором-стовпчиком розв'язків.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Методом Крамера розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

Розв'язування

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

Визначник системи відмінний від нуля. Знайдемо тепер визначник $\Delta_k (k = 1, 2, 3)$ і розв'язки системи рівнянь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4;$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{8}{4} = 2, \quad x_3 = \frac{4}{4} = 1.$$

Приклад 2. Знайти ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів першого рядка:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10.$$

Система однорідних рівнянь має розв’язок: $x_1 = -2t,\ x_2 = -6t,$ $x_3 = -10t$, що залежить від довільного параметра. Узявши $s = -2t$, дістанемо іншу форму запису розв’язку: $x_1 = s,\ x_2 = 3s,\ x_3 = 5s$, де s – довільний параметр.

Приклад 3. Методом Гаусса розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язування

Складемо розширену матрицю системи і здійснимо її перетворення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \\ 0 & -13 & -5 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -22 & -22 \end{pmatrix}.$$ Система зведена до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ \quad x_2 - 3x_3 = -2, \\ \quad\quad -22x_3 = -22, \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 6 = 1, \\ x_2 = -2 + 3 \cdot 1 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 1; 1).

Приклад 4. Розв’язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4, \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 32. \end{cases}$$

Розв’язування

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ -3 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -3 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рядок, який містить лише нулі, можна відкинути. Отримаємо систему трапецієподібного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ 11x_2 - 2x_3 = 46. \end{cases}$$

Покладемо x_2 вільною змінною, а x_1, x_3 – залежними:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - x_3 + 14, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{74 - 17x_2}{2}, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: Система має безліч розв'язків $\left\{ \left(\dfrac{74 - 17x_2}{2}; x_2; \dfrac{11x_2 - 46}{2}\right), x_2 \in R \right\}$.

Приклад 5. Розв'язати матричним методом систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язування

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Отже, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, тобто $x_1 = 2; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 3.$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати за формулами Крамера та матричним методом системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

Відповідь. а) $x_1 = 3,\ x_2 = x_3 = 1$; б) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$.

2. Розв'язати методом Гаусса (Жордана-Гаусса) системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

Відповідь. а) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3$; б) $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$.

3. Довести, що система $\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0, \\ bx - ay + dz - ct = 0, \\ cx - dy - az + bt = 0, \\ dx + cy - bz - at = 0 \end{cases}$

має єдиний розв'язок, якщо a, b, c, d – дійсні числа, серед яких не всі дорівнюють нулю.

4. Розв'язати системи рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

Відповідь. а) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$; в) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$; г) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

5. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; г) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Питання для самоперевірки

1) Що таке розв'язок системи лінійних рівнянь?
2) Яка система називається сумісною (несумісною)?
3) Яка сумісна система називається визначеною (невизначеною)?

4) Чи може система мати два розв'язка?

5) Які системи називають еквівалентними (рівносильними)?

6) Як записати систему в матричному вигляді?

7) Що таке матриця системи A?

8) Чи можна розв'язати систему трьох рівнянь з чотирма невідомими методом Крамера?

9) Які формули Крамера для системи трьох рівнянь з трьома невідомими?

10) Яким умовам повинна задовольняти система лінійних рівнянь, щоб її можна було розв'язати методом Крамера?

11) Яка матриця називається розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?

12) Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.

13) В якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, а у якому нескінченну кількість розв'язків?

Інтерактивне практичне заняття № 3 «Робота регіонального підприємства»

Викладач сам обирає директора підприємства і його помічника (консультанта), враховуючи, що ними повинні бути студенти, які добре орієнтуються в питаннях цієї теми і в будь-який момент можуть дати консультацію. Директор формує:

1) відділ постачання (5 чоловік). Для них розроблені завдання, наприклад, такого змісту:

Підприємство розмістило для продажу 2 види виробів P_1, P_2 в магазини A і B. Кількість проданих у магазинах A і B виробів за 2 тижні подається матрицями: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, де $i-$рядок відповідає виробу P_i, а $j-$ стовпець – $j-$му тижню. Знайти матрицю сумарних тижневих продажів виробів (додавання двох матриць).

2) бухгалтерію (5 чоловік). Для них розроблені такі завдання:

Підприємство випускає три види виробів: $P_1, P_2,\ P_3$ і при цьому використовує 4 типи обладнання: S_1, S_2, S_3, S_4. Витрати робочого часу на виробництво одного виробу, прибуток від його реалізації, погодинна заробітна плата на кожному типу обладнання, кількість замовлених виробів наведено у табл. 1. Потрібно обчислити: а) заробітну плату за кожне замовлення; б) прибуток від реалізації виробів у кожному замовленні.

Таблиця 1 – Витрати робочого часу на виробництво одного виробу, прибуток від його реалізації, погодинна заробітна плата на кожному типі обладнання, кількість замовлених виробів

Тип обладнання	Витрати робочого часу на виробництво одного виробу P_j			Погодинна заробітна праця
	P_1	P_2	P_3	
S_1	3	2	1	1
S_2	4	1	3	4
S_3	5	3	4	3
S_4	1	4	5	2
Прибуток від реалізації одного виробу P_j	30	15	20	
Замовлення 1	15	30	20	
Замовлення 2	35	20	18	

3) плановий відділ (6–8 чоловік). Для нього розроблені завдання:

У табл. 2 наведені дані про добове виробництво 5 підприємств, які виготовляють 4 види виробів і при цьому використовують 3 види сировини.

Таблиця 2 – Добове виробництво п’яти підприємств

Вид виробу	Кількість виробів на добу					Витрати сировини на один виріб		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	1	4	0	5	6	1	4	3
2	2	3	4	7	1	2	2	5
3	4	6	7	0	2	4	3	1
4	1	3	5	2	0	5	6	2
	Кількість робочих днів за рік					Вартість одиниці сировини		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	150	200	170	120	180	20	30	40

Знайти для кожного підприємства такі річні показники:

а) продуктивність по кожному виду виробів;

б) потребу у кожному виді сировини;

в) суму витрат на закупівлю сировини для виробництва вказаної кількості виробів.

4) відділ контролю використання матеріалу (6–8 чоловік). Для них задачі такого типу: нехай підприємство виготовляє три види виробів: P_1, P_2, P_3 і при цьому використовує 4 види сировини: S_1, S_2, S_3, S_4 (табл. 3). Потрібно знайти:

а) кількість сировини, що затрачається на виробництво усіх видів продукції;

б) загальну вартість сировини;

в) сумарний прибуток від реалізації продукції.

Таблиця 3 – Кількість сировини, що витрачається на один виріб та вартість одиниці сировини

Вид сировини	Кількість сировини, що затрачається на одиницю продукції P_j			Вартість одиниці сировини
	P_1	P_2	P_3	
S_1	3	2	4	10
S_2	1	5	6	25
S_3	3	4	2	30
S_4	5	5	3	40
Прибуток від реалізації одиниці продукції P_j	10	20	30	-
План виробництва	25	15	30	

2) Підприємство випускає 2 види виробів: P_1, P_2, P_3, на які використовується 3 види сировини: S_1, S_2, S_3. Витрати сировини на один комплект продукції описується матрицею:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, де a_{ij} – кількість сировини S_i, яка потрібна для виготовлення одиниці продукції P_j. Визначити витрати ресурсів на 5 комплектів продукції (множення матриць на число).

Після того, як всі завдання розв’язані, «директор підприємства» підводить підсумки їхньої роботи, вказує на недоліки, відповідає на питання співпрацівників, причому чим більше задається питань, тим вищий стає рейтинг підприємства. В кінці заняття викладач виставляє кожному відділу зароблену кількість балів, ураховуючи швидкість виконання завдання, правильність і теоретичне обґрунтування. Проведене таким чином практичне заняття знайомить студентів з прикладними та виробничими задачами лінійної алгебри, вчить застосовувати отримані знання в суто професійній ситуації, самостійно приймати рішення.

Результативність: формування професійної спрямованості, підвищення рівня знань та вмінь з вивченої теми, адаптація в академічній групі.

Індивідуальні домашні завдання

Завдання 1. Знайти матрицю *C*, виконавши операції над матрицями A та *B*:

1.1 $C = A(2A + B)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 $C = 2A(A + B)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3 $C = (A + 2B)A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4 $C = 3B(A - B)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.5 $C = (A - 2B)3A$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.6 $C = 2A(B - A)$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.7 $C = B(A - 3B)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.8 $C = B(A + 2B)$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9 $C = (A + 3B)A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.10 $C = B(2A + B)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

1.11 $C = 2(A - B)A$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.12 $C = (2A - B)B$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.13 $C = A(2A + B),\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.14 $C = (A - B)2A,\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.15 $C = (A - 2B)B,\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

1.16 $C = 2(A - B)A,\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$

1.17 $C = 2A(A + B),\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$

1.18 $C = 3(A - B)B,\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

1.19 $C = 2A(A + 2B),\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

1.20 $C = B(A + 2B),\quad A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.21 $C = 2(B - A)A,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.22 $C = 3(A + B)B,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.23 $C = 2A(A + B),\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.24 $C = B(2B - 3A),$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.25 $C = 2A(B + A),$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.26 $C = 4A(A - B),$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

1.27 $C = 2A(-4A + B),$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

1.28 $C = -2A(A + 4B),$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

1.29 $C = 3A(4A - B),$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$

1.30 $C = 2A(-2A + 3B),$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Завдання 2. Обчислити визначник: а) методом трикутників; б) методом приписування стовпців; в) методом розкладання за елементами деякого рядка (стовпця); г) методом занулення.

2.1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **2.2** $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ **2.3** $\begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ **2.4** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2.5 $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **2.6** $\begin{vmatrix} -8 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **2.7** $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **2.8** $\begin{vmatrix} -9 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

2.9 $\begin{vmatrix} -8 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **2.10** $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **2.11** $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -6 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **2.12** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix}$

2.13 $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ **2.14** $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ **2.15** $\begin{vmatrix} -6 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ **2.16** $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

2.17 $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ **2.18** $\begin{vmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **2.19** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -7 \\ -1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ **2.20** $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -4 & 8 & -1 \\ -1 & 6 & -5 \end{vmatrix}$

2.21 $\begin{vmatrix} 8 & -8 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ **2.22** $\begin{vmatrix} -6 & -6 & 1 \\ -4 & 5 & -7 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ **2.23** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & 3 & -9 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **2.24** $\begin{vmatrix} -7 & -7 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

2.25 $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ **2.26.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **2.27** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & -5 & -5 \end{vmatrix}$ **2.28** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -4 & -5 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

2.29 $\begin{vmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & -9 & -3 \end{vmatrix}$ **2.30** $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -4 & 6 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

Завдання 3.

3.1 Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} y-1 & 0 & 0 \\ 0 & y+2 & 0 \\ 0 & 0 & y+4 \end{vmatrix} = 0$.

3.2 Обчислити визначник за властивостями $\begin{vmatrix} x+3y & 1 & 3 \\ 5x+6y & 5 & 6 \\ 6x+7y & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

3.3 Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} y-1 & 2 & -8 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \geq 0$.

3.4 Розв’язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & x & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

3.5 Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -8 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & x \end{vmatrix} \leq 0$.

3.6 Довести рівність, користуючись властивостями визначника:

$$\begin{vmatrix} c & c^2+1 & 1 \\ 2c & c^2+2 & 1 \\ 3c & c^2+3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.7 Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & x+4 & x-2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \ge 0.$

3.8 Не розкриваючи визначників, довести справедливість рівності:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

3.9 Розв’язати нерівність: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & x \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} \le 0.$

3.10 Обчислити визначник, користуючись властивостями:

$$\begin{vmatrix} x & x^2+1 & (x+1)^2 \\ y & y^2+1 & (y+1)^2 \\ z & z^2+1 & (z+1)^2 \end{vmatrix}.$$

Розв’язати рівняння:

3.11 $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; **3.12** $\begin{vmatrix} (0,5)^{x^2} & 0,25 \\ 0,125 & 2^{2x-6} \end{vmatrix} = 0$; **3.13** $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0.$

Скориставшись властивостями визначників, довести тотожність:

3.14 $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

3.15 $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ba \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

Використовуючи тільки означення визначника, обчислити:

3.16 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 2 \ldots 0 \\ 0 & 2 & 0 \ldots 0 \end{vmatrix}$ **3.17** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **3.18** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

3.19 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ **3.20** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

Не обчислюючи визначника, розв’язати рівняння:

3.21 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x & 4 \\ 4 & 9 & x^2 & 16 \\ 8 & -27 & x^3 & 64 \end{vmatrix}=0;$ **3.22** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ (x+1) & -1 & -2 & (x+2) \\ 3 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & (x^2-5) & (6-x^2) & -4 \end{vmatrix}=0.$

3.23 Розв’яжіть рівняння: $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix}=0$.

Користуючись властивостями визначника, обчислити:

3.24 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **3.25** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}$ **3.26** $\begin{vmatrix} 42 & 70 & 53 \\ 43 & 68 & 52 \\ 7 & 11 & 8 \end{vmatrix}$

3.27. $\begin{vmatrix} 3x_1 & 2x_1 & -x_1 & -4x_1 \\ 3x_2 & 2x_2 & -x_2 & -4x_2 \\ -2x_3 & -3x_3 & 3x_3 & 2x_3 \\ -2x_4 & -3x_4 & 3x_4 & 2x_4 \end{vmatrix}$ **3.28** $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$

3.29 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

3.30 Довести, що визначник 3-го порядку, всі елементи якого дорівнюють ± 1, може дорівнювати тільки 0, 2 або 4.

Завдання 4. Обчислити $f(A) = (3A^2 - nA + 2)^{-1}$, де $A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 3 & 1 & n+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ і

$n-$номер варіанта (за списком).

Завдання 5. Визначити ранг матриці A.

5.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.2** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ **5.3** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

5.4 $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$ **5.5** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

5.6 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **5.7** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

5.8 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.9** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ **5.10** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.11 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.12** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ **5.13** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

5.14 $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$ **5.15** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

5.16 $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **5.17** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **5.18** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.19 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 7 & -11 & 18 \end{pmatrix}$ **5.20** $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 5 & 2 \\ 19 & 27 & 15 & 11 & 4 \end{pmatrix}$ **5.21** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.22 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 13 & 10 \\ 2 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$ **5.23** $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

5.24 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ -7 & 5 & -1 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 7 & 3 & 11 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ **5.25** $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

5.26 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ -7 & 5 & 6 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **5.27** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5.28 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ **5.29** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.30** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

Завдання 6. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома методами: Крамера, Гаусса (Жордана-Гаусса), матричним.

6.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ **6.2** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **6.3** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

6.4 $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$ **6.5** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -7, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -13, \\ 7x_1 - 6x_2 + 7x_3 = -17. \end{cases}$

6.6 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -7, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -13, \\ 7x_1 - 6x_2 + 7x_3 = -17. \end{cases}$ **6.7** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

6.8 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$ **6.9** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ **6.10** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

6.11 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **6.12** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ **6.13** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$

6.14 $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$ **6.15** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ **6.16** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

6.17 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ **6.18** $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -4. \end{cases}$ **6.19** $\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

6.20 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 12x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$ **6.21** $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -7, \\ 8x_1 - x_2 + 4x_3 = -1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ **6.22** $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

6.23 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ -2x_1 - x_3 = 3. \end{cases}$ **6.24** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 12. \end{cases}$ **6.25** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -17, \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

6.26 $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=6, \\ x_1-x_2=1, \\ -x_1+2x_2+x_3=0. \end{cases}$ **6.27** $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$ **6.28** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6, \\ 2x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=5. \end{cases}$

6.29 $\begin{cases} 5x_1-4x_2+2x_3=-9, \\ 3x_1-2x_2+x_3=3, \\ 10x_1-9x_2+2x_3=7. \end{cases}$ **6.30** $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-4x_4=3, \\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_4=3, \\ 5x_1-x_2+x_3-2x_4=-1, \\ 11x_1-3x_2+2x_3-5x_4=-2. \end{cases}$

Завдання 7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок (методом Гаусса)

7.1 $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4, \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16. \end{cases}$ **7.2** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$ **7.3** $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=8, \\ -2x_1+x_3=3, \\ -x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1-2x_2+x_3=7. \end{cases}$

7.4 $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$ **7.5** $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$

7.6 $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+x_4=2, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=1, \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=0. \end{cases}$ **7.7** $\begin{cases} 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1, \\ -3x_1+x_2+x_3-2x_4=1, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=1. \end{cases}$ **7.8** $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=-5, \\ 2x_1+x_2-9x_3=0, \\ 3x_1-x_2-x_3=2. \end{cases}$

7.9 $\begin{cases} 3x_1-11x_2-x_3+2x_4=4, \\ x_1+2x_2-x_4=4, \\ 4x_1-9x_2-x_3+x_4=8, \\ 7x_1-20x_2-2x_3+3x_4=12. \end{cases}$ **7.10** $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-9, \\ 4x_1+3x_2-x_3=3, \\ 2x_1-2x_2+x_3=-6. \end{cases}$

7.11 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1+x_2=5, \\ x_1+3x_2+2x_3=-1. \end{cases}$ **7.12** $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3-x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=-1. \end{cases}$ **7.13** $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ 2x_1+4x_2=-1, \\ -2x_1+3x_2=0. \end{cases}$

7.14 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+9x_4=-7, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+12x_4=-1, \\ -x_1+3x_2-x_4=8, \\ 3x_1+6x_2+x_3+17x_4=-6. \end{cases}$ **7.15** $\begin{cases} x_1-x_3+x_4=7, \\ 5x_1+2x_2+3x_3-23x_4=1, \\ x_1-4x_2+5x_3-31x_4=-35, \\ x_1+3x_2+3x_4=11. \end{cases}$

7.16 $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=8. \end{cases}$ **7.17** $\begin{cases} x_1+3x_2=0, \\ 5x_1+3x_3=3, \\ 3x_1-x_2+2x_3=2, \\ 4x_1-3x_2+3x_3=3. \end{cases}$

7.18 $\begin{cases} x_1-6x_3-9x_4=-8, \\ 4x_1-2x_2+x_3-3x_4=28, \\ 3x_1+4x_2+3x_3-22x_4=-2, \\ 8x_1+2x_2-2x_3-34x_4=18. \end{cases}$ **7.19** $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4=2, \\ 5x_1-3x_2+6x_3+3x_4=3, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1+4x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$

7.20 $\begin{cases} x_1+3x_2=0, \\ 5x_1+3x_3=3, \\ 3x_1-x_2+2x_3=2, \\ 4x_1-3x_2+3x_3=3. \end{cases}$ **7.21** $\begin{cases} |3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2, \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3, \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4. \end{cases}$

7.22 $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$ **7.23** $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=6. \end{cases}$

7.24 $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2. \end{cases}$ **7.25** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=12, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=18, \\ x_1-x_2+3x_3-4x_4=6, \\ -x_1+7x_2-11x_3+18x_4=6. \end{cases}$

7.26 $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-x_4=2, \\ 3x_1-5x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 6x_1-11x_2-3x_3+x_4=2, \\ -2x_1+3x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$ **7.27** $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4-3x_5=5, \\ 2x_1+5x_2+3x_3+x_5=3, \\ 3x_1+7x_2+7x_3-x_4-2x_5=8. \end{cases}$

7.28 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-3, \\ 2x_1-3x_2-4x_3+x_4=1, \\ x_1+7x_3-4x_4=-10. \end{cases}$ **7.29** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+7x_3-x_4=5, \\ x_1-7x_2+2x_3+4x_4=3. \end{cases}$

7.30 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$

Завдання 8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь.

8.1 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$ **8.2** $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$ **8.3** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

8.4 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$ **8.5** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ **8.6** $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

8.7 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **8.8** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$ **8.9** $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

8.10 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ **8.11** $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

8.12 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ **8.13** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

8.14 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$ **8.15** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$ **8.16** $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ 3x - y - 2z = 0. \end{cases}$

8.17 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$ **8.18** $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

8.19 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0, \\ 2x_1-5x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=0. \end{cases}$ **8.20** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$ **8.21** $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3=0, \\ -x_1+5x_2-x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+3x_4=0. \end{cases}$

8.22 $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+x_4=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3+2x_4=0, \\ x_1+11x_2-12x_3-5x_4=0, \\ x_1-5x_2+2x_3+3x_4=0. \end{cases}$ **8.23** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3+10x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+x_3-6x_4=0. \end{cases}$

8.24 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 3x+6y+5z=0, \\ x+4y+3z=0. \end{cases}$ **8.25** $\begin{cases} 4x+y+z=0, \\ x+3y+x=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$ **8.26** $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+2y+9z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$

8.27 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3-4x_4=0, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0, \\ x_1+5x_2+x_3+9x_4=0, \\ x_1-5x_2-2x_3-11x_4=0. \end{cases}$ **8.28** $\begin{cases} 2x_1+3x_2-7x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2-3x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+9x_2-11x_3+x_4=0, \\ 4x_1+6x_2-14x_3+6x_4=0. \end{cases}$

8.29 $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$ **8.30** $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 5x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$

Завдання 9. Підприємство розмістило для продажу 2 види виробів P_1, P_2 в магазини A і B. Кількість проданих у магазинах A і B виробів за 2 тижні подається матрицями:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & n & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & n+1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & n+1 & 1 \\ 3 & 4 & n & 1 \end{pmatrix},$$

де $i-$рядок відповідає виробу P_i, а $j-$ стовпець $-$ $j-$му тижню, $n-$ номер варіанта. Знайти матрицю сумарних тижневих продажів виробів (додавання двох матриць).

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Практичне заняття № 1

Вектори та операції над ними. Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з теми: «Вектори», набути навичок і вмінь виконання дій над векторами, обчислення скалярного, векторного, мішаного добутків векторів.

Питання для самопідготовки:

– поняття вектора;
– види векторів;
– додавання векторів (правило паралелограма та трикутника);
– операції над векторами;
– скалярний добуток, його властивості;
– векторний добуток, його властивості;
– мішаний добуток, його властивості.

План практичного заняття

1). Вектори, їх види. Додавання, віднімання, множення на число векторів.
2). Координати векторів.
3). Обчислення скалярного, векторного, мішаного добутків векторів.

Теоретичний довідник

Вектором називають напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого зазначено, яка з його точок є першою (початок вектора), а яка – другою (кінець вектора).

Вектор називається ***нульовим*** (нуль-вектором), якщо він має нульову довжину, тобто його кінець збігається з початком.

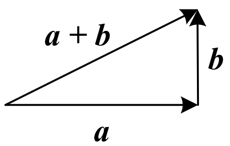
Два вектора називають ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Нуль-вектор вважають колінеарним довільному вектору.

Якщо колінеарні вектори мають один напрям, то їх називають ***співнапрямленими***; якщо вектори мають протилежні напрями, то їх називають протилежно напрямленими.

Довжиною (модулем) вектора називають довжину відрізка, який зображує цей вектор.

Вектор довжина якого дорівнює одиниці, називають ***одиничним***.

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розташованих послідовно називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$.



Сумою прикладених до однієї точки двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який зображають у вигляді діагоналі паралелограма, побудованого на заданих векторах, причому початок вектора $\vec{c}$ збігається з початком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на дійсне число*** λ є вектор $\vec{b}$, який має такі властивості:

а) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, при $\lambda \ge 0$, $\quad \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, при $\lambda < 0$;

б) $|\vec{b}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$

Різницею векторів $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\overrightarrow{(-b)}$: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Для виконання операції віднімання достатньо до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний $\vec{b}$.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ (позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$) називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}$ перпендикулярний до $\vec{b}$.

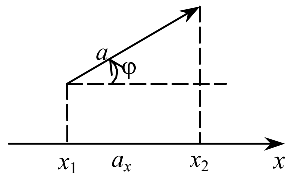
3. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$.

4. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

5. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ тоді і тільки тоді, коли кут між векторами гострий.

З означення скалярного добутку випливає: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Якщо вектор $\vec{a}$ утворює кут φ з віссю *x*, то ***проекцією вектора*** $\vec{a}$ на вісь називається величина: $np_x\vec{a}\equiv a_x=|\vec{a}|\cos\varphi$



Систему векторів $\vec{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називають ***лінійно залежною***, якщо серед них існує вектор $\overrightarrow{a_k}$, який лінійно виражається через інші вектори системи, тобто якщо існують дійсні числа α_i такі, що $\overrightarrow{a_k} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}} + + \alpha_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$.

Якщо жоден з векторів $\vec{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ лінійно не виражається через решту, то таку систему називають ***лінійно незалежною***.

Вектор $\vec{a}$ паралельний площині α, якщо в цій площині існує пряма, паралельна $\vec{a}$.

Систему векторів $\vec{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називають ***компланарною***, якщо існує площина, паралельна кожному вектору системи.

Теорема 1. Нехай $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ – компланарні вектори, причому $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні. Тоді вектор $\vec{c}$ лінійно виражається через $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

Теорема 2. Будь-який вектор $\vec{d}$ простору можна подати у вигляді лінійної комбінації трьох некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$: $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$

Наслідок. Будь-які чотири вектори простору лінійно залежні.

Базисом системи векторів $\vec{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k}$ називають таку її підсистему, яка має властивості:

1) вектори підсистеми лінійно незалежні;
2) будь-який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

Теорема 3. Нехай $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ – фіксовані вектори, які задані координатами в ортогональному базисі; φ – кут між ними. Тоді маємо:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
2) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;
3) $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{f}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;
4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
5) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
6) $\cos\varphi = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Теорема 4. Два вектори $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ – колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

Позначимо α, β, γ кути між осями координат x, y, z та вектором $\vec{a}$. Ці кути називаються ***напрямними кутами***. Проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі подаються так: $a_x=|a|\cos\alpha$, $a_y=|a|\cos\beta$, $a_z=|a|\cos\gamma$.

Величини $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються ***напрямними косинусами вектора а***. Згідно попередньої формули маємо: $\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|}$, $\cos\beta=\frac{a_y}{|a|}$, $\cos\gamma=\frac{a_z}{|a|}$, $|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Векторним добутком неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначають $\vec{a}\times\vec{b}$) називають вектор $\vec{c}$, який має такі властивості:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) трійка векторів $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ права.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\parallel\vec{b}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

3) $i\times i=j\times j=k\times k=\vec{0}$; $i\times j=k$; $j\times k=i$; $k\times i=j$;

4) $\overrightarrow{\lambda a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

5) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

6) вектор $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку векторів $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ і $\vec{c}$.

Позначають мішаний добуток так: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Отже, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Теорема. Мішаний добуток векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ та $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ дорівнює визначнику третього порядку:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку.

1. Мішаний добуток не змінюється при кругових перестановках векторів: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)=(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\,)=(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\,)$.

2. При зміні двох векторів місцями знак мішаного добутку змінюється на протилежний: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\,)$.

3. Для довільного числа α : $(\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)=(\vec{a},\alpha\vec{b},\vec{c}\,)=(\vec{a},\vec{b},\alpha\vec{c}\,)=$ $=\alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)$.

4. Модуль мішаного добутку $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)$ чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ як суміжних ребрах.

5. Вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)=0$.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Дано просторовий трикутник з вершинами А (1;2;-1), *B*(2; 4; 1), *C*(3; 0; 0). Знайти кут при вершині *A*.

Розв'язування

Розглянемо вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}(1;2;2)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}(2;-2;1)$; із їх скалярного добутку визначимо косинус шуканого кута:

$$\cos\hat{A}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot2+2\cdot(-2)+2\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\,\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{0}{3\cdot3}=0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів $\vec{a},\vec{b}$ дорівнює нулю, то кут при вершині *A* прямий.

Приклад 2. Дано вектор $\vec{a}$ у площині xy, який утворює кут 60° з віссю *x* і кут 30° з віссю *y*. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Розв'язування

$$\cos\alpha=\cos60°=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\gamma=\cos90°=0.$$

Приклад 3. Знайти площу просторового трикутника з вершинами *A*(1; 2; 1), *B*(4; 3; 2), *C*(2;4;4).

Розв'язування

Позначаючи вектори: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}(3;1;1)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}(1;2;3)$, обчислюємо їх векторний добуток:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}-8\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+8^2+5^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$$

Площа S трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$: $S=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$.

Приклад 4. Знайти об'єм V тетраедра з вершинами $A(1;\,2;\,3)$, $B(4;\,4;\,4)$, $C(2;\,6;\,4)$, $D(2;\,3;\,6)$.

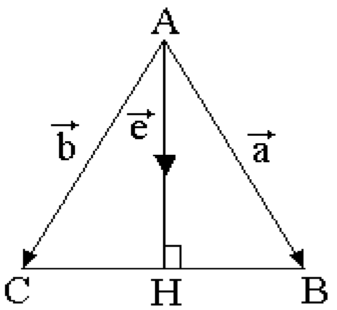
Розв'язування

Розглянемо вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}(3;2;1)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}(1;4;1)$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}(1;1;3)$ і запишемо їх мішаний добуток: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=26$.

Шуканий об'єм тетраедра $ABCD$ становить $\dfrac{1}{6}$ від об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Отже, $V=\dfrac{1}{6}\left|(\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c})\right|=\dfrac{26}{6}$.

Приклад 5. В трикутнику ABC дано: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\angle BAC=60^\circ$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=a$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ одиничний вектор, направлений по висоті трикутника, що проведена з вершини A.

Розв'язування



Позначимо через $\vec{e}$ – одиничний вектор, направлений по висоті AH. Оскільки $2\overrightarrow{AH}=\vec{a}+\vec{b}$, то

$$\vec{e}\cdot\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.\ \left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \text{отже,}\ \vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{a\sqrt{3}}.$$

Приклад 6. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $3\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-3\vec{b}$ були колінеарні?

Розв'язування

Щоб ненульові вектори $3\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-3\vec{b}$ були колінеарні, необхідно, щоб модуль їх векторного добутку дорівнював нулеві, тобто $\left|\left[\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right]\right|=0$,

або $3\left|\vec{a}\right|^2\sin 0-9\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a}\right)-9\left|\vec{b}\right|^2\sin 0=0$;

$-9\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=0$, $-10\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=0$, але $\left|\vec{a}\right|\neq 0$, $\left|\vec{b}\right|\neq 0$, отже, $\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=0$. Звідки $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=0$, або $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\pi$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ повинні бути теж колінеарними.

Приклад 7. Чи будуть колінеарними вектор $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, які розкладені по векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{a}+\vec{b},\vec{a}=\{2;-1;5\}\vec{b}=\{7;1;-3\}$.

Розв'язування

1. Обчислимо проекції векторів $\vec{c}_1,\vec{c}_2$:

$\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}=\{5\cdot 2+3\cdot 7;5\cdot(-1)+3\cdot 1;5\cdot 5+3\cdot(-3)\}=\{31;-2;16\}$,

$\vec{c}_2=4\vec{a}+\vec{b}=\{4\cdot 2+7;4\cdot(-1)+1;4\cdot 5+(-3)\}=\{15;-3;17\}$.

2. Два вектори колінеарні, якщо їх проекції пропорційні, відповідно, перевіряємо пропорційність проекцій векторів:

$$\frac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2}=\frac{31}{15}\neq\frac{-2}{-3}\neq\frac{16}{17},\Rightarrow \vec{c}_1,\vec{c}_2 - \text{ неколінеарні.}$$

Приклад 8. Чи будуть перпендикулярні вектори $\vec{a}=\{-7;1;2\}$, $\vec{b}=\{3;2;-1\}$?

Розв'язування

Два вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю, маємо: $\vec{a}\cdot\vec{b}=-7\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot(-1)=-21\neq 0\Rightarrow$ вектори неперпендикулярні.

Приклад 9. Чи будуть компланарними вектори $\vec{a}=\{-1;2;-1\}$, $\vec{b}=\{0;2;1\},\vec{c}=\{2;0;3\}$?

Розв'язування

Три вектори компланарні, якщо мішаний добуток векторів дорівнює нулю, обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-6+4+0-(-4)-0-0=2\neq 0\Rightarrow \text{вектори некомпланарні.}$$

Приклад 10. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, де $A(2;1;3)$, $B(3;1;4), C(2;5;3)$.

Розв'язування

Косинус кута між векторами обчислимо за формулою:

$$cos\left(A\vec{B},A\vec{C}\right)=\frac{\left(A\vec{B},A\vec{C}\right)}{\left|A\vec{B}\right|\left|A\vec{C}\right|}=\frac{\left(\{3-2;1-1;4-3\},\{2-2;5-1;3-3\}\right)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+0^2}}=$$

$$=\frac{1\cdot 0+0\cdot 4+1\cdot 0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}}=\frac{0}{4\sqrt{2}}=0\Rightarrow \angle\left(A\vec{B},A\vec{C}\right)=arc\cos 0=\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 11. Дано точки: $A(1;0;-1), B(0;1;3), C(2;0;1)$. Знайти: 1) $\text{пр}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}$; 2) $\text{пр}_{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)}\left(2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}\right)$; 3) $\left|\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}\right|$; 4) $\angle\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right)$; 5) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$; 6) $\left(\left(\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}\right)\right)$; 7) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]$; 8) $\left[\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}\right)\right]$; 9) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; 10) $\left[\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right),\overrightarrow{BC}\right],\overrightarrow{AC}\right]$; 11) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$; 12) орт вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язування

1. Проекція вектора на вектор обчислюється за формулою:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}\Rightarrow \text{ знаходимо проекції векторів:}$$

$$\overrightarrow{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},$$

$$\overrightarrow{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\}$$

Обчислюємо скалярний добуток векторів і довжину вектора:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=(-1)\cdot 2+1\cdot(-1)+4\cdot(-2)=-11,$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3.$$

$$\Rightarrow \text{пр}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}=\frac{-11}{3}.$$

2. Знаходимо проекції векторів:

$$\overrightarrow{AB}=\{-1;1;4\},\overrightarrow{CB}=\{-2;1;2\},\overrightarrow{AC}=\{1;0;2\},$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\{-3;2;6\},2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}=\{-4;3;10\},$$

$$\left(\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right),\left(2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}\right)\right)=78,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right|=7\Rightarrow$$

$$\text{пр}_{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)}\left(2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}\right)=\frac{78}{7}.$$

3. Знаходимо проекції векторів:

$$\overrightarrow{AB}=\{-1;1;4\},\overrightarrow{BC}=\{2;-1;-2\},\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}=\{7;-3;-4\}\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{74};$$

4. Знаходимо проекції векторів:

$$\overrightarrow{AB}=\{-1;1;4\},\overrightarrow{CB}=\{-2;1;2\},\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\{1;0;2\}\Rightarrow$$

$$\angle\left(\vec{AB}-\vec{CB},\vec{AB}\right)=\arccos\frac{\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\arccos\frac{1\cdot(-1)+0\cdot1+2\cdot4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}}=$$

$$=\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}}.$$

5. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=(-1)\cdot2+1\cdot(-1)+4\cdot(-2)=-11;$

6. $$\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}=\{7;-3;-4\},\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}=\{0;-1;-6\}\Rightarrow\\ \left(\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}\right)=27\end{array}$$

7. Векторний добуток векторів обчислимо за формулою: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_y&b_y&b_z\end{vmatrix}$, де $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}\Rightarrow$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&1&4\\2&-1&-2\end{vmatrix}=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}=\{2;6;-1\};$$

8. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\{3;-1;0\},\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}=\{0;-1;-6\}\Rightarrow$

$$\left[\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&0\\0&-1&-6\end{vmatrix}=6\vec{i}+18\vec{j}-3\vec{k};$$

9. Мішаний добуток обчислимо за формулою: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$,

де

$$\vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}, \vec{b} = \left\{b_x; b_y; b_z\right\}, \vec{c} = \left\{c_x; c_y; c_z\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

10. $\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right), \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k} = \{2;6;-1\}$

$$\left[\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right), \overrightarrow{BC}\right], \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{k};$$

11. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = -11$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC} = (-11)\cdot\{2;-1;-2\} = \{-22;11;22\}$;

12. Орт вектора $\overrightarrow{AB} = \left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$, так як орт – це вектор одиничної довжини $\Rightarrow$ необхідно кожну проекцію вектора розділити на його довжину.

Приклад 12. Дано координати вершини піраміди: $A(1;4;3)$, $B(2;3;1)$, $C(-2;1;3), D(0;1;2)$. Обчислити: 1) об'ємпіраміди; 2) довжину ребра AB; 3) площу грані ABC; 4) кут між ребрами AB і AD.

Розв'язування

1. Об'єм піраміди обчислимо за формулою: $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right| \Rightarrow$

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|3+0-18+6-0+3| = \frac{1}{6}|-6| = 1;$$

2. Довжина ребра $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$;

3. Площу грані ABC обчислимо за формулою: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| \Rightarrow$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-6\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}\right| \quad =\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$

4. Кут між ребрами AB і AD обчислюємо по формулі: $\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=$

$$=\arccos\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}\Rightarrow\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\arccos\frac{1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}}=$$

$$=\arccos\frac{4}{\sqrt{66}}.$$

Приклад 13. Чи має зміст вираз $\left[\left(\vec{a}+\left(\vec{b},\vec{c}\right),\vec{d}\right),\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]$? Обґрунтувати.

Розв'язування

Вираз $\left[\left(\vec{a}+\left(\vec{b},\vec{c}\right),\vec{d}\right),\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]$ змісту не має, так як додавати числа з векторами не можна: в результаті скалярного добутку $\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ отримаємо число, потім ми маємо додати вектор $\vec{a}$ до результату скалярного добутку (число), що неможливо.

Приклад 14. Дано: $\vec{x}\perp\vec{a}=\{1;2;1\},\vec{x}\perp\vec{b}=\{-1;3;2\},\angle\left(\vec{x},oy\right)-$тупий, $\Rightarrow x_2<0,\left|\vec{x}\right|=2.$ Знайти: $\vec{x}=\{x_1;x_2;x_3\}$.

Розв'язування

За умовою:

$\vec{x}\perp\vec{a}\Rightarrow\left(\vec{x},\vec{a}\right)=0\Rightarrow1\cdot x_1+2\cdot x_2+1\cdot x_3=0,$

$\vec{x}\perp\vec{b}\Rightarrow\left(\vec{x},\vec{b}\right)=0\Rightarrow(-1)\cdot x_1+3\cdot x_2+2\cdot x_3=0,$

$\left|\vec{x}\right|=2\Rightarrow\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=2.$

Отже, отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими, розв'язок якої і буде проекціями шуканого вектора:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ -x_1+3x_2+2x_3=0\\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_3}+2\dfrac{x_2}{x_3}+1=0\\ -\dfrac{x_1}{x_3}+3\dfrac{x_2}{x_3}+2=0\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=4\end{cases}\Rightarrow$$ за формулами Крамера знаходимо відношення коефіцієнтів:

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{1}{5},\ \frac{x_2}{x_3}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-3}{5}\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{1}{5}x_3,\ x_2=\frac{-3}{5}x_3$$

$$\frac{1}{25}x_3{}^2+\frac{9}{25}x_3{}^2+x_3{}^2=4\Rightarrow x_3{}^2=\frac{100}{35}=\frac{20}{7}\Rightarrow x_3=\pm\sqrt{\frac{20}{7}}\,.$$

Умова $x_2<0$ виконується при $x_3>0$ тобто $x_3=+\sqrt{\frac{20}{7}}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{7}}=$

$$=\frac{2}{\sqrt{35}},x_2=\frac{-3\sqrt{20}}{5\sqrt{7}}=-\frac{6}{\sqrt{35}},x_3=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}}=\frac{10}{\sqrt{35}}.$$

Відповідь: $\vec{x}=\left\{\frac{2}{\sqrt{35}};-\frac{6}{\sqrt{35}};\frac{10}{\sqrt{35}}\right\}.$

Другий спосіб розв’язування:

За умовою:

$$\vec{x}\perp\vec{a},\vec{x}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{x}\parallel\vec{y}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}=\{1;-3;5\}$$

$$\Rightarrow\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{-3}=\frac{x_3}{5}=t,\Rightarrow x_1=t,x_2=-3t,x_3=5t.$$

Знайдені значення x_1,x_2,x_3 підставимо в умову $|\vec{x}|=2$, знайдемо t так, щоб $x_2<0$.

Тому: $|\vec{x}|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}=\sqrt{t^2+9t^2+25t^2}=\pm\sqrt{35}t=2\Rightarrow t=\pm\frac{2}{\sqrt{35}}.$

Оскільки за умовою $x_2<0,$ то $t=+\frac{2}{\sqrt{35}}.$

Отже, $x_1=\frac{2}{\sqrt{35}},x_2=-\frac{6}{\sqrt{35}},x_3=\frac{10}{\sqrt{35}}.$

Відповідь: $\vec{x}=\left\{\frac{2}{\sqrt{35}};-\frac{6}{\sqrt{35}};\frac{10}{\sqrt{35}}\right\}.$

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити відстань точки A (12; –3; 4) від початку координат і від осей координат.

Відповідь. 13; 5; $4\sqrt{10}$; $3\sqrt{17}$.

2. Вектор утворює з двома осями системи координат кути, що рівні 60°. Під яким кутом він нахилений до третьої осі.

Відповідь. 45° або 135°.

3. Обчислити координати точки M, якщо відстань від початку координат до неї рівна 8 од., а вектор $\overrightarrow{OM}$ нахилений до осі Ox під кутом 45°, а до осі Oz – під кутом 60°.

Відповідь. $M_1(4\sqrt{2};4;4)$, $M_2(4\sqrt{2};-4;4)$.

4. Три вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$; $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$ є сторони трикутника. За допомогою $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ знайти вектори, що збігаються з медіанами трикутника: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

5. У паралелограмі $ABCD$ позначаємо: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{MD}$, де M – точка перетину діагоналей паралелограма.

6. Яку властивість повинні мати вектори, щоб виконувалися співвідношення:

1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 4) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; 5) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$;

3) $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$; 6) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=[\vec{a}[+\left|\vec{b}\right|$?

Відповідь. 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні; 3) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однаковий напрям; 4) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні й мають однаковий напрям; 5), 6), $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, але протилежно напрямлені.

7. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{g}$; $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{g}$, коли відомо, що $\left|\vec{p}\right|=2\sqrt{2}$, $\left|\vec{g}\right|=3$, $(p\ g)=-\dfrac{\pi}{4}$.

Відповідь. 15 і $\sqrt{593}$.

8. Обчислити довжину вектора $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями.

Відповідь. 7; $\arccos\dfrac{6}{7}$; $\arccos\left(-\dfrac{2}{7}\right)$; $\arccos\dfrac{3}{7}$.

9. Знайти $3\vec{m}^2 - 2(\vec{m}\vec{n}) + 4\vec{n}^2,$ якщо $\left|\vec{m}\right| = \dfrac{1}{3};$ $\left|\vec{n}\right| = \vec{b};$ $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

Відповідь. 143.

10. Знайти $\left|\vec{a}\,\right|,$ якщо $\vec{a} = 2\vec{m} - 4\vec{n};$ $\left|\vec{m}\right| = \left|\vec{n}\right| = 1$ $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

Відповідь. 5.

11. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s}$, $\vec{g}$, якщо $\vec{a} = \vec{s} + 3\vec{g}$; $\vec{b} = 5\vec{s} - 4\vec{g}$ – взаємно перпендикулярні.

Відповідь. 60°.

12. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 10\vec{m} - 2\vec{n}$ на напрям вектора $b = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ одиничні орти.

Відповідь. 2.

13. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n};$ $\vec{в} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $\left|\vec{m}\right| = 5;$ $\left|\vec{n}\right| = 1$ і $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = \dfrac{\pi}{6}.$

Відповідь. 125 кв. од.

14. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}; b = \vec{j} + \vec{k}.$

Відповідь. $\sqrt{35}$ кв. од.

15. Обчисліть проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = \left(\vec{i} - 2\vec{k}\right) \times \left(\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\right).$

Відповідь. $\dfrac{6}{7}.$

16. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k};$ $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k};$ $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

17. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k};$ $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k},$ $\vec{i} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},$ якщо його основа побудована на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відповідь. $\dfrac{49}{\sqrt{232}}.$

18. Дано вершини трикутника A (3; 2); B (–1; –1); C (11; –6). Знайти довжини його сторін і точку перетину медіан.

19. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3;-2),$ $N(1;6),$ $P(-4;2).$

Відповідь. $A(-2;-6),$ $B(8;2),$ $C(-6;10).$

20. Дано три вершини паралелограма $A\,(4;2),$ $B\,(5;7),$ $C\,(-3;4).$ Знайти четверту вершину D, яка протилежна вершині B.

21. Відрізок між точками *A* (3; 2); *B* (15; 6) поділити на п'ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.

22. Обчислити периметр і площу трикутника, якщо *A* (–2; 1); *B* (2; – 2); *C* (8; 6).

23. Дано трикутник *A* (4; 1), *B* (7; 5), *C* (– 4; 7). Знайти точку перетину бісектриси кута *A* з протилежною стороною *BC*.

Питання для самоперевірки

1) Що таке вектор? Які види векторів ви знаєте?
2) Які операції можна здійснювати над векторами?
3) Що називають модулем вектора?
4) Який добуток векторів називають скалярним? Назвіть властивості скалярного добутку.
5) Який добуток векторів називають векторним? Назвіть властивості векторного добутку.
6) Який добуток векторів називають мішаним? Назвіть властивості мішаного добутку.
7) Яка система векторів називається лінійно залежною (лінійно незалежною) ?
8) Що таке базис?
9) Що називають проекцією вектора на вісь?

Інтерактивне практичне заняття № 2 «Будівельник»

Заняття пропонуємо проводити на тему «Вектори. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів».

Мета заняття: освітня – перевірити засвоєння студентами формул для обчислення площ трикутника, паралелограма через векторний добуток, операцій над векторами та використання отриманих знань до розв'язування практичних задач; розвиваюча – розвивати професійне творче мислення, пам'ять, уяву, активність і самостійність, інтерес до обраної спеціальності; активізувати роботу шляхом створення мотивації щодо вивчення дисципліни, виховна – сприяти формуванню моральних, естетичних та інших якостей особистості, позитивному ставленню до майбутньої професії. На початку заняття викладач знайомить студентів із будівельним виробництвом і однією із найбільш розповсюджених будівельних професій – столяра.

1етап. Будівельне виробництво сьогодні – це механізований процес зборки будинків і споруд із крупногабаритних деталей, які виготовлені заводським способом. Столяр працює в будівельно-монтажних організаціях, на деревообробних підприємствах, в столярних майстернях. Він виконує різні операції на станках. Безпосередньо на будівництві столяр установлює віконні та дверні блоки, виконує настилку паркетної підлоги, монтує вбудовані меблі. Виконання такої роботи неможливо без знання пристроїв і правил експлуатації деревообробних станків, знання технології і організації будівельного виробництва, уміння читати креслення. Професія вимагає об'ємної уяви, знання геометрії, креслення.

Постановка задачі. Викладач оголошує, що сьогодні всі студенти будуть виступати в ролі будівельників. Потрібно виконати роботу по покриттю підлоги дитячого садка, який будується. Паркетні плитки мають форму трикутників та паралелограмів, розміри яких задаються вершинами з певними координатами. Наприклад, дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$. Обчислити площу трикутника ABC.

Правила гри. Студенти поділяються на три бригади, в кожній з яких обирається бригадир серед кращих студентів.

Перша бригада – столяри. Їм потрібно виготовити паркетні плитки у формі трикутника та паралелограма за вказаними координатами вершин цих фігур, використовуючи векторний добуток векторів.

Друга бригада – постачальники. Їм потрібно забезпечити поставку паркетних плиток на будівельний майданчик двох видів форми трикутника та паралелограма. Необхідні дані наведено у табл. 4.

Таблиця 4 – Кількість, витрати сировини, норми часу, вартість різних видів паркетних плиток

Вид паркетних плиток	Кількість паркетних плиток, од.	Витрати сировини на одну паркетну плитку	Норми часу виробництва на одну паркетну плитку, год\виріб	Вартість однієї паркетної плитки, грош.од.
1	20	5	15	30
2	30	8	20	40

Необхідно знайти показники: витрати сировини S, сумарні витрати часу T і вартість P продукції.

Третя бригада – паркетники. Їм, щоб проконтролювати доставку, необхідно наперед знати, скільки і яких паркетних плиток потрібно буде для покриття підлоги, яка є паралелограмом з вершинами в точках $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3), D(1;-2;8)$.

Перемагає в грі та команда, яка першою виконає правильний підрахунок. Для цього необхідно знати формули для обчислення площ вищевказаних фігур та властивості скалярного та векторного добутків. Викладач записує на дошці тему практичного заняття. Студенти приступають до роботи з підручниками та конспектами лекцій. Всередині кожної команди дозволяються взаємоконсультації. При потребі консультацію проводить викладач.

Після того, як теоретичний матеріал вивчений, а необхідні формули для обчислення площ трикутників та паралелограмів та властивості скалярних і векторних добутків записані в зошитах, проводиться перевірка готовності бригад. З цією метою кожній команді запропоновується по два-три теоретичних питання з цієї теми. Відповіді студентів оцінюються призовими балами. Рахунок команд можна записувати на дошці.

2 етап. Кожна команда приступає до практичних обчислень. Наприкінці цього етапу викладач обирає сам доповідача з кожної бригади, який біля дошки звітує про пророблену роботу, кожна команда за результатами звіту отримує свої зароблені бали.

На заключному етапі викладач перевіряє, наскільки глибоко студенти засвоїли матеріал. Для цього їм видаються контрольні питання у вигляді тестів.

Приклад тестового завдання для ігрового заняття «Будівельник»

1) Векторним добутком двох векторів називається:

а) добуток їх довжин на косинус кута між ними;

б) добуток їх довжин на синус кута між ними;

в) добуток їх довжин;

г) синус кута між ними;

д) інша відповідь.

2) Обчислити мішаний добуток векторів $a = (3;7;2)$, $b = (-2;0;-1)$, $c = (2;2;1)$:

а) − 2; б) 6; в) 3; г) − 5; д) інша відповідь

3) Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, де A (0;2;−4), B (8;2;2), C (6;2;4):

а) 0,5; б) $\frac{1}{25}$; в) –1; г) $\frac{24}{25}$; д) інша відповідь

4) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли:

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; в) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$; г) $\vec{a}\times\vec{b}=0$; д) інша відповідь

5) Скалярним добутком двох векторів називається:

а) добуток їх довжин на синус кута між ними;

б) добуток їх довжин;

в) добуток їх довжин на косинус кута між ними;

г) косинус кута між ними;

д) інша відповідь.

6) Знайти проекцію вектора $\vec{a}=(2,-1,2)$ на вектор $\vec{b}$, якщо кут між векторами $(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$:

а) $\frac{9}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$; д) інша відповідь.

7) Нехай $\vec{a}-$ довільний вектор. Які з наведених нижче рівностей правильні:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$; 2) $\left|\vec{a}\times\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|^2$; 3) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$; 4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$?

а) 1 і 3; б) 2 і 4; в) 3 і 4; г) 1 і 2; д) інша відповідь.

Розподіл часу для такого ігрового заняття може бути таким: розповідь викладача про професію будівельника – 5 хв., постановка задачі – 3 хв., робота з підручником – 10 хв., розв'язання задач – 15–20 хв., перевірка глибини знань студентів –10 хв, домашнє завдання – 2 хв.

Як бачимо, дидактичні ігри представляють собою неперервну послідовність навчальних дій в процесі розв'язання поставленої задачі. Цей процес умовно поділяється на такі етапи:

- знайомство з професією будівельника;
- побудова імітаційної моделі виробничого об'єкта;
- постановка головної задачі бригадам і з'ясування їх ролі у виробництві;
- створення ігрової проблемної ситуації;
- оволодіння необхідним теоретичним матеріалом;
- розв'язування виробничої задачі на основі математичних знань;
- перевірка результатів, корекція;
- аналіз підсумків роботи, оцінка результатів.

Основна ідея гри полягає в тому, щоб створити виробничу ситуацію, в якій студент може поставити себе на місце людини тієї чи іншої спеціальності, зможе побачити і оцінити значення математичних знань на виробництві, самостійно оволодіти необхідним теоретичним матеріалом і використати отримані знання на практиці.

Результативність: розвиток умінь самостійної організаційної роботи, формування професійної спрямованості, вмінь самостійно розв'язувати задачі репродуктивного характеру, мотивів до більш глибокого вивчення матеріалу, вмінь формулювання висновків, переключатись на розв'язування задач спорідненої або іншої інженерної спеціальності.

Індивідуальні домашні завдання

Завдання 1. Чи будуть колінеарні вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, розкладені по векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

Завдання 2. Чи будуть перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

Завдання 3. Чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

Завдання 4. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$.

Завдання 5. Дано координати точок A,B,C. Обчислити: 1) $\text{пр}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}$; 2) $\text{пр}_{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)}\left(2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}\right)$; 3) $\left|\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}\right|$; 4) $\angle\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right)$; 5) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$; 6) $\left(\left(\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}\right)\right)$; 7) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]$; 8) $\left[\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}\right)\right]$;

9) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; 10) $\left[\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right),\overrightarrow{BC}\right],\overrightarrow{AC}\right]$; 11) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$; 12) орт вектора $\overrightarrow{AB}$.

Завдання 6. Дано координати вершин піраміди $ABCD$. Обчислити: 1) об'єм піраміди; 2) довжину ребра AB; 3) площу грані ABC; 4) кут між ребрами AB і AD.

Завдання 7. Чи має зміст вираз ? Обґрунтувати.

Завдання 8. Вибрати самостійно вихідні дані на вказані типи задач векторної алгебри та розв'язати їх.

8.1 Дано: $\vec{x}\parallel\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\angle\left(\vec{x},oz\right)-$гострий (або з довільною іншою віссю, тупий або гострий), $\left|\vec{x}\right|=A$, де $A-$довільне число.

Знайти: $\vec{x}=\left\{x_1;x_2;x_3\right\}$.

8.2 Дано: $\vec{x}\parallel\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\left(\vec{x},\vec{a}\right)=A$.

Знайти: $\vec{x}=\left\{x_1;x_2;x_3\right\}$.

8.3 Дано: $\vec{x}\perp\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{x}\perp\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},\angle\left(\vec{x},oy\right)-$тупий (гострий або з довільною іншою віссю), $\left|\vec{x}\right|=A.$

Знайти: $\vec{x}=\left\{x_1;x_2;x_3\right\}$.

8.4 Дано: $\vec{x}\perp oz$ (іншої другої осі),
$\left(\vec{x},\vec{a}\right)=A,\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\left(\vec{x},\vec{b}\right)=B,\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}.$

Знайти: $\vec{x}=\left\{x_1;x_2;x_3\right\}$.

8.5 Дано: $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=A,\left(\vec{x},\vec{b}\right)=B,\left(\vec{x},\vec{c}\right)=C$, де
$\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\},A,B,C-$довільні числа.

Знайти: $\vec{x}=\left\{x_1;x_2;x_3\right\}$.

ВАРІАНТ № 1

1.1 $\vec{a}=\{1;-2;3\},\vec{b}=\{3;0;1\},\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}.$

2.1 $\vec{a}=\{1;3;-1\},\vec{b}=\{3;-2;3\}.$

3.1 $\vec{a}=\{2;3;-1\},\vec{b}=\{1;-1;3\},\vec{c}=\{1;9;-1\}.$

4.1 $A(1;-2;3),B(0;-1;2),C(3;-4;5).$

5.1 $A(1;2;1),B(-1;3;4),C(0;1;2).$

6.1 $A(1;1;1),B(-1;2;4),C(2;0;6),D(-2;5;-1).$

7.1 $\left(\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right],\vec{c}\right).$

ВАРІАНТ № 2

1.2 $\vec{a}=\{1;0;1\},\vec{b}=\{-2;3;5\},\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.2 $\vec{a}=\{2;1;4\},\vec{b}=\{4;1;3\}.$

3.2 $\vec{a}=\{3;-2;1\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{3;-1;-2\}.$

4.2 $A(0;-3;6),B(-12;-3;-3),C(-9;-3;-6).$

5.2 $A(0;1;2),B(3;-1;2),C(-1;2;5).$

6.2 $A(0;5;0),B(2;3;-4),C(0;0;6),D(-3;1;-1).$

7.2 $\left(\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right),\vec{a}\right).$

ВАРІАНТ № 3

1.3 $\vec{a}=\{-2;4;1\},\vec{b}=\{1;-2;7\},\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}.$

2.3 $\vec{a}=\{0;1;2\},\vec{b}=\{1;3;-2\}.$

3.3 $\vec{a}=\{2;-1;2\},\vec{b}=\{1;2;-3\},\vec{c}=\{3;-4;7\}.$

4.3 $A(3;3;-1),B(5;5;-2),C(4;1;1).$

5.3 $A(0;2;3),B(3;1;2),C(1;5;1).$

6.3 $A(0;0;6),B(4;0;-4),C(1;3;-1),D(4;-1;-3).$

7.3 $\left[\left[\vec{a},\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right],\vec{d}\right].$

ВАРІАНТ № 4

1.4 $\vec{a}=\{1;2;-3\},\vec{b}=\{2;-1;-1\},\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}.$

2.4 $\vec{a}=\{1;2;1\},\vec{b}=\{3;1;2\}.$

3.4 $\vec{a}=\{1;2;4\},\vec{b}=\{2;1;-5\},\vec{c}=\{1;-1;-1\}.$

4.4 $A(-1;2;-3),B(3;4;-6),C(1;1;-1).$

5.4 $A(1;0;3),B(1;4;1),C(0;2;3).$

6.4 $A(-5;6;-1),B(6;-5;2),C(6;5;1),D(0;0;2).$

7.4 $\left[\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right),\vec{c}\right],\vec{d}\right].$

ВАРІАНТ № 5

1.5 $\vec{a}=\{3;5;4\},\vec{b}=\{5;9;7\},\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.5 $\vec{a}=\{2;1;7\},\vec{b}=\{2;4;-3\}.$

3.5 $\vec{a}=\{2;-1;1\},\vec{b}=\{1;2;3\},\vec{c}=\{1;-3;-2\}.$

4.5 $A(-4;-2;0), B(-1;-2;4), C(3;-2;1).$

5.5 $A(1;1;0), B(4;1;2), C(1;2;3).$

6.5 $A(2;-5;3), B(3;2;-5), C(5;-3;-2), D(-5;3;-2).$

7.5 $\left[\left[\vec{a}, 5\vec{d}\right], \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right].$

ВАРІАНТ № 6

1.6 $\vec{a} = \{1;4;-2\}, \vec{b} = \{1;1;-1\}, \vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}.$

2.6 $\vec{a} = \{-4;1;5\}, \vec{b} = \{1;3;1\}.$

3.6 $\vec{a} = \{3;-1;2\}, \vec{b} = \{2;-1;-1\}, \vec{c} = \{4;-2;-2\}.$

4.6 $A(5;3;-1), B(5;2;0), C(6;4;-1).$

5.6 $A(-1;4;2), B(5;2;3), C(0;1;2).$

6.6 $A(6;0;4), B(0;6;4), C(4;6;0), D(0;-6;4).$

7.6 $\left[\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right), \vec{d}\right].$

ВАРІАНТ № 7

1.7 $\vec{a} = \{1;-2;5\}, \vec{b} = \{3;-1;6\}, \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$

2.7 $\vec{a} = \{3;-1;2\}, \vec{b} = \{2;3;-1\}.$

3.7 $\vec{a} = \{1;1;-1\}, \vec{b} = \{7;3;-6\}, \vec{c} = \{-1;1;9\}.$

4.7 $A(-3;-7;-5), B(0;-1;-2), C(2;3;0).$

5.7 $A(3;-2;1), B(1;3;2), C(2;4;1).$

6.7 $A(3;2;4), B(2;4;3), C(4;3;-2), D(-4;-2;-3).$

7.7 $\left(\left(\vec{a}, \vec{b}\right), \vec{c}\right).$

ВАРІАНТ № 8

1.8 $\vec{a} = \{3;5;-1\}, \vec{b} = \{2;-1;1\}, \vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$

2.8 $\vec{a} = \{-4;-1;5\}, \vec{b} = \{1;-3;1\}.$

3.8 $\vec{a} = \{2;-4;9\}, \vec{b} = \{2;0;-3\}, \vec{c} = \{7;9;-3\}.$

4.8 $A(2;-4;6), B(0;-2;4), C(2;3;0).$

5.8 $A(-1;3;-1), B(-3;2;3), C(-1;3;0).$

6.8 $A(6;3;5), B(5;-6;3), C(3;5;6), D(-6;-1;2).$

7.8 $\left(\left(\vec{a}, \vec{b}\right), \vec{c}\right) \cdot \vec{c}.$

ВАРІАНТ № 9

1.9 $\vec{a}=\{-2;-3;-2\},\vec{b}=\{1;0;5\},\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b},\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}.$

2.9 $\vec{a}=\{9;1;2\},\vec{b}=\{-1;1;4\}.$

3.9 $\vec{a}=\{1;1;1\},\vec{b}=\{1;1;-1\},\vec{c}=\{6;0;5\}.$

4.9 $A(0;1;-2),B(3;1;2),C(4;1;1).$

5.9 $A(1;-1;6),B(4;5;-2),C(-1;3;0).$

6.9 $A(5;-2;-1),B(4;0;0),C(2;5;1),D(1;2;5).$

7.9 $\left[\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c}\right],\vec{a}\right].$

ВАРІАНТ № 10

1.10 $\vec{a}=\{-1;4;2\},\vec{b}\{3;-2;6\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}.$

2.10 $\vec{a}=\{8;2;3\},\vec{b}=\{-2;8;0\}.$

3.10 $\vec{a}=\{7;2;3\},\vec{b}=\{5;-3;2\},\vec{c}=\{10;-11;5\}.$

4.10 $A(3;3;1),B(1;5;-2),C(4;1;1).$

5.10 $A(7;1;2),B(-5;3;-2),C(3;2;5).$

6.10 $A(4;2;5),B(3;0;4),C(0;2;3),D(5;-2;-4).$

7.10 $\text{пр}_{\vec{d}}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$

ВАРІАНТ № 11

1.11 $\vec{a}=\{5;0;-1\},\vec{b}=\{7;2;3\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{b}+6\vec{a}.$

2.11 $\vec{a}=\{7;3;4\},\vec{b}=\{-1;-1;1\}.$

3.11 $\vec{a}=\{1;2;1\},\vec{b}=\{3;-5;3\},\vec{c}=\{2;7;1\}.$

4.11 $A(2;1;-1),B(6;-1;5),C(4;2;1).$

5.11 $A(-2;3;-2),B(2;-3;2),C(-1;3;0).$

6.11 $A(4;2;5),B(-3;0;4),C(0;2;3),D(5;2;-4).$

7.11 $\text{пр}_{\left(\vec{d}+\vec{c}\right)}\left[\vec{d},\vec{c}\right].$

ВАРІАНТ № 12

1.12 $\vec{a}=\{0;3;-2\},\vec{b}=\{1;-2;1\},\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}.$

2.12 $\vec{a}=\{6;-4;2\},\vec{b}=\{1;2;7\}.$

3.12 $\vec{a}=\{2;1;-1\},\vec{b}=\{3;-5;3\},\vec{c}=\{2;-1;3\}.$

4.12 $A(-1;-2;1),B(-4;-2;5),C(-5;-2;2).$

5.12 $A(4;2;-1), B(3;0;4), C(1;2;1).$

6.12 $A(4;4;10), B(7;10;2), C(2;8;4), D(9;6;9).$

7.12 $\text{пр}_{[\vec{d},\vec{c}]}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).$

ВАРІАНТ № 13

1.13 $\vec{a}=\{-2;7;1\}, \vec{b}=\{-3;5;2\}, \vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}.$

2.13 $\vec{a}=\{1;-2;3\}, \vec{b}=\{3;2;1\}.$

3.13 $\vec{a}=\{1;-1;-1\}, \vec{b}=\{1;4;2\}, \vec{c}=\{3;7;3\}.$

4.13 $A(6;-2;3), B(6;3;-2), C(7;3;-3).$

5.13 $A(1;2;3), B(-1;2;-3), C(-2;3;1).$

6.13 $A(4;6;5), B(6;9;4), C(2;10;10), D(7;5;9).$

7.13 $\text{пр}_{(\vec{c}-3\vec{d})}\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right].$

ВАРІАНТ № 14

1.14 $\vec{a}=\{3;7;0\}, \vec{b}=\{1;-3;4\}, \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.14 $\vec{a}=\{-2;4;1\}, \vec{b}=\{2;1;0\}.$

3.14 $\vec{a}=\{-7;2;-3\}, \vec{b}=\{-5;3;2\}, \vec{c}=\{-10;11;-5\}.$

4.14 $A(0;0;4), B(-3;-6;1), C(-5;-10;-1).$

5.14 $A(4;-5;2), B(1;-3;4), C(5;2;-4).$

6.14 $A(3;5;4), B(8;7;4), C(5;10;3), D(4;7;8).$

7.14 $\text{пр}_{(4\vec{c}-7\vec{d})}\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right).$

ВАРІАНТ № 15

1.15 $\vec{a}=\{-1;2;-1\}, \vec{b}=\{2;-7;1\}, \vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.15 $\vec{a}=\{3;4;1\}, \vec{b}=\{1;1;7\}.$

3.15 $\vec{a}=\{1;-2;1\}, \vec{b}=\{-5;3;1\}, \vec{c}=\{-7;2;1\}.$

4.15 $A(2;-8;-1), B(4;-6;0), C(-2;-5;-1).$

5..15 $A(4;4;9), B(7;10;2), C(2;8;4).$

6.15 $A(10;6;5), B(-2;8;4), C(6;8;9), D(7;10;3).$

7.15 $\text{пр}_{(\vec{c},\vec{d})}\left[\left(3\vec{d}-\vec{b}\right),\vec{c}\right].$

ВАРІАНТ № 16

1.16 $\vec{a}=\{7;9;-2\},\vec{b}=\{5;4;3\},\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}.$

2.16 $\vec{a}=\{-1;4;2\},\vec{b}=\{2;2;3\}.$

3.16 $\vec{a}=\{-2;4;-9\},\vec{b}=\{-7;3;6\},\vec{c}=\{1;1;1\}.$

4.16 $A(3;-6;9),B(0;-3;6),C(9;-12;15).$

5.16 $A(4;6;5),B(6;9;4),C(7;5;9).$

6.16 $A(1;8;2),B(5;2;6),C(5;7;4),D(4;10;9).$

7.16 пр$_{3\vec{c}}\left[\vec{b},(\vec{a},\vec{c})\right].$

ВАРІАНТ № 17

1.17 $\vec{a}=\{5;0;-2\},\vec{b}=\{6;4;3\},\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}.$

2.17 $\vec{a}=\{-5;1;3\},\vec{b}=\{2;1;3\}.$

3.17 $\vec{a}=\{3;4;5\},\vec{b}=\{2;1;3\},\vec{c}=\{-1;4;3\}.$

4.17 $A(0;2;-4),B(8;2;2),C(6;2;4).$

5.17 $A(3;5;4),B(8;7;4),C(4;7;8).$

6.17 $A(6;6;5),B(4;9;5),C(4;6;11),D(5;9;3).$

7.17 пр$_{((2\vec{a}-\vec{c}),\vec{d})}(\vec{a}+\vec{b}).$

ВАРІАНТ № 18

1.18 $\vec{a}=\{8;3;-1\},\vec{b}=\{4;1;3\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}.$

2.18 $\vec{a}=\{4;3;7\},\vec{b}=\{-4;1;3\}.$

3.18 $\vec{a}=\{-5;6;-2\},\vec{b}=\{-2;-3;1\},\vec{c}=\{2;1;-1\}.$

4.18 $A(3;3;-1),B(5;1;-2),C(4;1;1).$

5.18 $A(10;6;5),B(-2;8;4),C(7;10;3).$

6,18 $A(7;2;2),B(5;7;7),C(5;3;1),D(2;3;7).$

7.18 пр$_{(\vec{a}-\vec{b})}\left((3\vec{b}-\vec{d}),\vec{b}\right).$

ВАРІАНТ № 19

1.19 $\vec{a}=\{3;-1;6\},\vec{b}=\{5;7;10\},\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{b}+4\vec{a}.$

2.19 $\vec{a}=\{-4;2;1\},\vec{b}=\{1;-2;1\}.$

3.19 $\vec{a}=\{5;6;1\},\vec{b}=\{4;1;1\},\vec{c}=\{2;-1;2\}.$

4.19 $A(-4;3;0),B(0;1;3),C(-2;4;-2).$

5.19 $A(6;3;5), B(8;7;3), C(5;10;4)$.

6.19 $A(8;6;4), B(10;5;5), C(5;6;8), D(8;10;-7)$.

7.19 $\text{пр}_{5\vec{b}-\vec{c}}\left(\left[4\vec{c},\vec{d}\right],\vec{a}\right)$.

ВАРІАНТ № 20

1.20 $\vec{a}=\{1;-2;4\}, \vec{b}=\{7;3;5\}, \vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

2.20 $\vec{a}=\{-6;7;1\}, \vec{b}=\{3;2;4\}$.

3.20 $\vec{a}=\{2;-1;4\}, \vec{b}=\{4;-1;1\}, \vec{c}=\{3;4;1\}$.

4.20 $A(1;-1;0), B(-2;-1;4), C(8;-1;-1)$.

5.20 $A(1;8;2), B(5;2;6), C(6;9;3)$.

6.20 $A(7;7;3), B(6;5;8), C(3;6;7), D(8;4;1)$.

7.20 $\left[\left(\vec{d},\vec{c}\right),\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$.

ВАРІАНТ № 21

1.21 $\vec{a}=\{3;7;0\}, \vec{b}=\{4;6;-1\}, \vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}, \vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}$.

2.21 $\vec{a}=\{6;-7;-1\}, \vec{b}=\{2;1;5\}$.

3.21 $\vec{a}=\{-2;-1;4\}, \vec{b}=\{-4;1;-1\}, \vec{c}=\{1;1;2.\}$

4.21 $A(7;0;2)B(8;1;3), C(6;-1;2)$.

5.21 $A(7;2;2), B(5;7;6), C(2;3;7)$.

6.21 $A(4;0;0), B(-2;1;2), C(1;3;2), D(3;2;7)$.

7.21 $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\left(\vec{c},\vec{d}\right)\right]\right]$.

ВАРІАНТ № 22

1.22 $\vec{a}=\{2;-1;4\}, \vec{b}=\{3;-7;-6\}, \vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}-3\vec{b}$.

2.22 $\vec{a}=\{3;-3;4\}, \vec{b}=\{2;1;-1\}$.

3.22 $\vec{a}=\{2;1;3\}, \vec{b}=\{3;-2;1\}, \vec{c}=\{4;-2;3\}$.

4.22 $A(2;3;2), B(-1;3;-2), C(3;-7;-3)$.

5.22 $A(-5;6;-1), B(2;4;3), C(5;2;-4)$.

6.22 $A(-2;1;2), B(4;0;1), C(3;2;7), D(1;3;2)$.

7.22 $\left[\left(\vec{b},\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right),\vec{c}\right]$.

ВАРІАНТ № 23

1.23 $\vec{a}=\{5;-1;-2\},\vec{b}=\{6;0;7\},\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{b}-6\vec{a}.$

2.23 $\vec{a}=\{-4;-5;1\},\vec{b}=\{2;3;7\}.$

3.23 $\vec{a}=\{-3;1;-4\},\vec{b}=\{4;3;1\},\vec{c}=\{1;2;2\}.$

4.23 $A(2;2;7),B(0;-1;6),C(-2;5;7).$

5.23 $A(3;2;4),B(-3;1;-2),C(5;-2;3).$

6.23 $A(1;3;2),B(3;2;7),C(4;0;1),D(-2;1;-2).$

7.23 $\left(\left(\left[\vec{a},\vec{d}\right],\vec{a}\right),\vec{b}\right).$

ВАРІАНТ № 24

1.24 $\vec{a}=\{-3;6;3\},\vec{b}=\{7;1;2\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}.$

2.24 $\vec{a}=\{-5;4;2\},\vec{b}=\{2;-1;1\}.$

3.24 $\vec{a}=\{4;3;-2\},\vec{b}=\{-1;2;2\},\vec{c}=\{2;2;1\}.$

4.24 $A(-1;2;-3),B(0;1;-2),C(-3;4;-5).$

5.24 $A(5;-2;1),B(4;2;5),C(-1;2;4).$

6.24 $A(3;2;7),B(1;3;2),C(-2;1;3),D(4;-2;3).$

7.24 $\left[\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c}\right],\vec{d}\right].$

ВАРІАНТ № 25

1.25 $\vec{a}=\{4;2;9\},\vec{b}=\{0;-1;3\},\vec{c}_1=4\vec{b}-3\vec{a},\vec{c}_2=4\vec{a}-3\vec{b}.$

2.25 $\vec{a}=\{5;-4;2\},\vec{b}=\{3;5;2\}.$

3.25 $\vec{a}=\{3;1;4\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{5;4;3\}.$

4.25 $A(0;3;-6),B(9;3;6),C(12;3;3).$

5.25 $A(7;5;6),B(-2;-5;2),C(-3;1;0).$

6.25 $A(3;1;-2),B(1;-2;1),C(-2;1;0),D(2;2;5).$

7.25 $\left(np_{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{d}\right).$

ВАРІАНТ № 26

1.26 $\vec{a}=\{2;-1;6\},\vec{b}=\{-1;3;8\},\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}.$

2.26 $\vec{a}=\{5;4;-2\},\vec{b}=\{4;4;3\}.$

3.26 $\vec{a}=\{-1;2;1\},\vec{b}=\{3;2;-1\},\vec{c}=\{-5;6;1\}.$

4.26 $A(3;3;-1), B(5;1;-2), C(4;1;-3)$.
5.26 $A(-2;1;2), B(-1;-2;2), C(3;-1;4)$.
6.26 $A(1;-2;1), B(3;1;-2), C(2;2;5), D(-2;1;0)$.
7.26 $\left[np_{(\vec{b}-2\vec{a})}(\vec{a},\vec{b}), \vec{c}\right]$.

ВАРІАНТ № 27

1.27 $\vec{a}=\{5;0;8\}, \vec{b}=\{-3;1;7\}, \vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b}, \vec{c}=12\vec{b}-9\vec{a}$.
2.27 $\vec{a}=\{7;-3;1\}, \vec{b}=\{1;1;-4\}$.
3.27 $\vec{a}=\{-1;2;-2\}, \vec{b}=\{4;5;4\}, \vec{c}=\{6;5;1\}$.
4.27 $A(-2;1;1), B(2;3;2), C(0;1;3)$.
5.27 $A(1;3;2), B(-2;3;2), C(-5;6;8)$.
6.27 $A(-3;2;1), B(-2;1;0), C(1;-2;1), D(3;1;2)$.
7.27 $np_{(\vec{b},\vec{c})}(\vec{b},\vec{d})$.

ВАРІАНТ № 28

1.28 $\vec{a}=\{-1;3;4\}, \vec{b}=\{2;-1;0\}, \vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$.
2.28 $\vec{a}=\{8;-2;3\}, \vec{b}=\{1;3;2\}$.
3.28 $\vec{a}=\{2;-1;2\}, \vec{b}=\{3;3;3\}, \vec{c}=\{4;5;1\}$.
4.28 $A(1;4;-1), B(-2;3;-5), C(8;4;0)$.
5.28 $A(3;1;-2), B(4;-2;7), C(-2;1;2)$.
6.28 $A(1;-2;1), B(3;1;-2), C(2;2;5), D(-2;1;0)$.
7.28 $np_{[\vec{a},\vec{b}]}(\vec{b},\vec{c})$.

ВАРІАНТ № 29

1.29 $\vec{a}=\{4;2;-7\}, \vec{b}=\{5;0;-3\}, \vec{c}_1=2\vec{a}-5\vec{b}, \vec{c}_2=6\vec{b}-2\vec{a}$.
2.29 $\vec{a}=\{-8;2;-3\}, \vec{b}=\{2;2;3\}$.
3.29 $\vec{a}=\{-2;1;-3\}, \vec{b}=\{2;2;1\}, \vec{c}=\{1;1;2\}$.
4.29 $A(0;1;0), B(0;2;1), C(1;2;5)$.
5.29 $A(1;-2;1), B(-2;3;2), C(1;3;-2)$.
6.29 $A(-3;1;2), B(-2;1;1), C(1;-2;3), D(3;2;1)$.
7.29 $\left(\left[(\vec{a}-\vec{b}),\vec{c}\right],\left[\vec{d},\vec{c}\right]\right)$.

ВАРІАНТ № 30

1.30 $\vec{a}=\{2;0;-5\},\vec{b}=\{1;-3;-4\},\vec{c}_1=2\vec{a}+6\vec{b},\vec{c}_2=5\vec{a}-2\vec{b}.$

2.30 $\vec{a}=\{3;6;-7\},\vec{b}=\{1;2;1\}.$

3.30 $\vec{a}=\{2;-1;4\},\vec{b}=\{1;1;2\},\vec{c}=\{1;2;-3\}.$

4.30 $A(-4;0;4),B(-1;6;7),C(1;10;9).$

5.30 $A(2;2;5),B(3;2;7),C(3;5;8).$

6.30 $A(2;-1;1),B(2;2;5),C(3;2;1),D(1;-2;1).$

7.30 $\left[\vec{a},\left(\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{d}\right)\right].$

3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Практичне заняття № 1

Пряма та площина. Пряма в просторі. Площина. Кут між прямими. Кут між прямою та площиною.

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з даної теми, набути навичок і вмінь знаходити різні рівняння прямих на площині та в просторі, складати рівняння площини, обчислення кута між прямими та кута між прямою та площиною.

Питання для самопідготовки:

− рівняння прямої, що проходить через відому точку і має відомий вектор напряму;
− рівняння прямої, що проходить через дві відомі точки;
− рівняння прямої «у відрізках на осях»;
− рівняння прямої, що проходить через відому точку і має відомий вектор нормалі;
− загальне рівняння прямої;
− рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
− взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими;
− відстань від точки до прямої;
− рівняння площини, що проходить через відому точку і перпендикулярна до заданого вектора;
− рівняння площини, що проходить через відому точку і паралельна двом неколінеарним векторам;
−рівняння площини, що проходить через три точки;
− загальне рівняння площини;

– взаємне розміщення двох площин. Кут між площинами. Взаємне розташування трьох площин;
– відстань від точки до площини;
– кут між прямою і площиною.

План практичного заняття

1. Пряма на площині, її види.
2. Площина.
3. Пряма в просторі.

Теоретичний довідник

Будь-який ненульовий вектор, який паралельний до прямої l, називається ***вектором напряму*** цієї прямої.

Канонічне рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і паралельна вектору $\vec{s_l}(s_1; s_2)$: $\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}$.

Нехай $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$ – відомі точки прямої l. ***Рівняння прямої***, що проходить ***через дві задані точки***: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$.

Нехай пряма перетинає перетинає вісь Ox у точці $A(a;0)$, а вісь Oy – у точці $B(0;b)$ $(a \neq 0; b \neq 0)$. ***Рівняння прямої «у відрізках на осях»:***
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ненульовий вектор, що перпендикулярний до прямої l, називають ***вектором нормалі прямої*** .

Нехай $A(x_A; y_A)$ – фіксована точка прямої l; $\vec{n}(n_1; n_2)$ – вектор нормалі прямої l; $M(x; y)$ – довільна точка прямої l. ***Рівняння прямої, що проходить через відому точку і має відомий вектор нормалі:*** $n_1(x - x_A) + n_2(y - y_A) = 0.$

Теорема 1. Будь-яка пряма на площині має рівняння $Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0,$ (1) і, навпаки, довільне рівняння виду (1) є рівнянням деякої прямої на площині.

Рівняння виду $Ax + By + C = 0$ називають ***загальним рівнянням прямої на площині.***

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y - y_A = k(x - x_A),$ або $y = kx + b,$ де $b = y_A - kx_A.$ Число b називають вільним членом. Якщо рівняння прямої записане у вигляді $Ax + By + C = 0$, то кутовий коефіцієнт дорівнює: $k = \frac{-A}{B}.$

Кутом між прямими l_1 і l_2 називають нетупий кут між векторами напряму цих прямих.

Нехай пряма l_1 має рівняння $A_1x+B_1y+C_1=0,$ а пряма l_2- рівняння $A_2x+B_2y+C_2=0.$ Тоді $\vec{n}_1(A_1;B_1), \overrightarrow{n_2}(A_2;B_2).$

$\varphi=\arccos\left|\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right|-$ кут між прямими.

Прямі l_1 і l_2 ***перетинаються*** тоді і тільки тоді, коли їх вектори нормалі не колінеарні, тобто $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$.

Прямі l_1 і l_2 ***перпендикулярні*** тоді і тільки тоді, коли $A_1A_2+B_1B_2=0.$

Прямі l_1 і l_2 ***збігаються*** тоді і тільки тоді, коли їх рівняння рівносильні, тобто $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Прямі l_1 і l_2 ***паралельні*** тоді і тільки тоді, коли їх вектори нормалі колінеарні, але рівняння не рівносильні, тобто $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$

Зауваження. Якщо рівняння прямих l_1 і l_2 записати у вигляді $y=k_1x+b_1;\ y=k_2x+b_2,$ то

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2, \\ b_1\neq b_2; \end{cases} \quad l_1\equiv l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2, \\ b_1=b_2; \end{cases}$$

l_1 перетинає $l_2 \Leftrightarrow k_1\neq k_2,$ причому $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$

Відстанню від точки до прямої називають довжину перпендикуляра, опущеного із заданої точки на пряму.

Теорема. Нехай пряма l у прямокутній системі координат має рівняння $Ax+By+C=0,$ а точка $M_0(x_0;y_0)\notin l.$ Тоді відстань від точки M_0 до прямої l становить $\rho(M_0,l)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$

Вектор, що перпендикулярний до площини α, називають ***вектором нормалі*** цієї площини і позначають $\vec{n}.$

Нехай точка $A(x_0;y_0;z_0)$ належить площині α; $\vec{n}(n_1;n_2;n_3)-$ вектор нормалі цієї площини.

$n_1\cdot(x-x_0)+n_2\cdot(y-y_0)+n_3\cdot(z-z_0)=0-$ це ***рівняння площини, що проходить через відому точку і перпендикулярна до заданого вектора***.

Нехай $A(x_0;y_0;z_0)-$точка площини α; $\overrightarrow{a}(a_1;a_2;a_3)\parallel\alpha,$ $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)\parallel\alpha,$ причому $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$ – ***рівняння площини, що проходить через відому точку і паралельна двом неколінеарним векторам.***

Нехай площина α, проходить через три точки $A\,(x_1; y_1; z_1)$, $B\,(x_2; y_2; z_2)$, $C\,(x_3; y_3; z_3)$, що не лежать на одній прямій.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$ – це є ***рівняння площини, яка проходить через три точки***.

Загальним рівнянням площини називають рівняння виду $Ax + By + Cz + D = 0$, де хоча б один з коефіцієнтів А, В, С відмінний від нуля.

Нехай площини α_1 і α_2 задано загальними рівняннями

$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D = 0; \quad \vec{n}_{\alpha_1}(A_1, B_1, C_1);$

$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D = 0; \quad \vec{n}_{\alpha_2}(A_2, B_2, C_2).$

Очевидно, що при виконанні умови $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ ці два рівняння рівносильні й тому $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Площини α_1 і α_2 ***паралельні*** тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{n}_{\alpha_1}$ і $\vec{n}_{\alpha_2}$ колінеарні (тобто їх координати пропорційні), але площини не збігаються: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, але $\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Якщо вектори $\vec{n}_{\alpha_1}$ і $\vec{n}_{\alpha_2}$ неколінеарні, то площини ***перетинаються*** по прямій.

Кутом між площинами називають нетупий кут між векторами нормалей цих площин.

Теорема. Кут між площинами α_1 і α_2 становить:

$$\varphi = \arccos\frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Наслідок. Площини α_1 і α_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Теорема. Відстань від точки $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ до площини α: $Ax + By + Cz + D = 0$ становить

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Рівняння прямої l***, що проходить через відому точку*** $A(x_0;y_0;z_0)$ і ***має відомий вектор напряму*** $\vec{s}(s_1;s_2;s_3)$: $\frac{x-x_0}{s_1}=\frac{y-y_0}{s_2}=\frac{z-z_0}{s_3}$.

Параметричне рівняння прямої : $\begin{cases} x=x_0+s_1t, \\ y=y_0+s_2t, \\ z=z_0+s_3t. \end{cases}$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Кутом між прямою l ***і площиною*** π називають кут між прямою і проекцією цієї прямої на площину.

$$\phi=\arccos\frac{|A\cdot s_1+B\cdot s_2+C\cdot s_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}},\alpha=90^\circ-\phi.$$

Нехай пряма l задана рівнянням $\frac{x-x_0}{s_1}=\frac{y-y_0}{s_2}=\frac{z-z_0}{s_3}$, а площина α – рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$.

Пряма l ***паралельна площині*** α тоді і тільки тоді, коли вектор напряму $\vec{s}\,(s_1;s_2;s_3)$ прямої перпендикулярний до вектора нормалі $\vec{n}\,(A;B;C)$ площини, тобто $l\,||\,\alpha \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow s_1A+s_2B+s_3C=0.$ Якщо умова не виконується, то ***пряма і площина перетинаються***, причому вони ***взаємно перпендикулярні*** тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ колінеарні, тобто $l\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{n}\,||\,\vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{s_1}=\frac{B}{s_2}=\frac{C}{s_3}$.

Загальне рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$ ***називають неповним***, якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю.

1. Якщо $D=0,$ то площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A=0,$ то площина $By+Cz+D=0$ паралельна осі Ox, яка має вектор напряму $\vec{i}\,(1;0;0)$. Якщо B = 0, то площина паралельна осі Oy. Якщо C = 0, то площина паралельна осі Oz.

3. Якщо $A=0$ і $B=0,$ то площина, що паралельна осям Ox та Oy, буде паралельна площині XOY. Якщо при цьому $D=0,$ то отримаємо рівняння площини $XOY: z=0$.

Відстанню між мимобіжними прямими l_1 і l_2 називають довжину спільного перпендикуляра цих двох прямих.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. У трикутнику *ABC*: *A* (1; 3), *B* (5; 6), *D* (4; 2) – точка перетину висот трикутника. Скласти рівняння прямих *AC* та *BC*.

Розв'язування

1) Оскільки *D* – точка перетину висот трикутника, то $\overrightarrow{AD} \perp BC$. Пряма *BC* задана точкою *B* та вектором $\overrightarrow{AD}$. Скористаємося рівнянням: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

$\overrightarrow{AD}(4-1;2-3) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(3;-1)$.

Отже, $3(x-5)+(-1)(y-6)=0 \Rightarrow$ – рівняння прямої *BC*.

2) Аналогічно знаходимо рівняння прямої *AC*.

$\overrightarrow{BD} \perp AC$. $\overrightarrow{BD}(4-5;2-6) \Rightarrow \overrightarrow{BD}(-1;-4)$. $-1(x-1)+(-4)(y-3)=0 \Rightarrow$ $x-1+4y-12=0 \Rightarrow x+4y-13=0$

Приклад 2. Написати рівняння прямої *l*, якщо $A(5;-4) \in l$; $\vec{n}(2;3) \perp l$. записати це рівняння «у відрізках на осях».

Розв'язування

Рівняння прямої має вигляд:

$$2(x-5)+3(y+4)=0, \quad 2x+3y+2=0.$$

Перепишемо останнє рівняння у такому вигляді:

$$2x+3y=-2; \quad \frac{x}{-1}+\frac{y}{-2/3}=1.$$

Звідси випливає, що шукана пряма перетинає вісь Ox у точці $A_1\ (-1;0)$, а вісь Oy – у точці $A_2\ (0;-2/3)$.

Приклад 3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A\,(1;-2;0)$ і паралельна векторам $\vec{a}\,(1;2;3), \vec{b}\,(2;0;1)$.

Розв'язування

Вектор $\vec{c}$, який є векторним добутком векторів $\vec{a}\,(1;2;3), \vec{b}\,(2;0;1)$, є вектором нормалі площини (оскільки $\vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}$):

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(2;5;-4).$$

$$2x+5y-4z+8=0.$$

Приклад 4. Написати рівняння прямої l, що проходить через точки А (1;3;5) і В (2;5;4). Знайти точку перетину цієї прямої з площиною $x-3y+7z-3=0$.

Розв'язування

Знайдемо вектор напряму $\overline{AB}$ прямої l: $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$. Запишемо канонічне рівняння прямої: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$.

Для того, щоб знайти спільну точку прямої і площини, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}=t, \\ x-3y+7z-3=0. \end{cases}$$

Перейдемо від канонічного рівняння прямої до параметричного

$\begin{cases} x=1+t, \\ y=3+2t, \\ z=5-t \end{cases}$ і підставимо замість x,y,z у рівняння площини отримані вирази: $1+t-3(3+2t)+7(5-t)-3=0; t=2.$ Отже,

$$\begin{cases} x=1+2=3, \\ y=3+2\cdot 2=7, \\ z=5-2=3. \end{cases}$$

Приклад 5. Визначити взаємне розміщення прямих

$l_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$; $\quad l_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{1}$ і знайти відстань між ними.

Розв'язування

Точка А (2;1;0) належить прямій l_1, а вектор $\vec{s}(1;2;-1)$ є вектором напряму l_1. Точка В $(-1;2;-2)$ належить прямій l_2, а вектор $\overrightarrow{m}(3;3;1)$ є вектором напряму l_2; $\overline{AB}(-3;1;-2)$.

$$(\overline{AB},\vec{s},\overrightarrow{m})=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0.$$ Отже, l_1 і l_2 мимобіжні.

Напишемо рівняння площини, яка проходить через точку В (–1;2; –2) і компланарна векторам $\vec{s}(1;2;-1)$ і $\overrightarrow{m}(3;3;1)$. Маємо:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0; \quad 3x-4y-5z+1=0.$$

$$\rho\,(l_1,l_2)=\rho\,(A,\alpha)=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 1-5\cdot 0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-5)^2}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

Приклад 6. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Перевірити, які з точок A $(-2; 3)$, B $(0; 3)$, C $(5; 6)$, належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

Розв'язування

Для перевірки того, чи лежать точки A, B, C на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

$$A:\ 3(-2) - 5\cdot 3 + 15 \neq 0,\quad B:\ 3\cdot 0 - 3\cdot 5 + 15 = 0,$$
$$C:\ 3\cdot 5 - 5\cdot 6 + 15 = 0.$$

Таким чином, точка A не лежить на прямій, а точки B і C лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при y: $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$, а далі запишемо його у вигляді $y = \frac{3}{5}x + 3 -$ рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} + 1 = 0, \text{ або } \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Приклад 7. Дано дві вершини трикутника A $(2; -3)$, B $(5; 1)$, рівняння сторони BC: $x + 2y - 7 = 0$ і медіани AM: $5x - y - 13 = 0$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини C, обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині A.

Розв'язування

Нехай вершина трикутника C (x_1, y_1). Тоді точка з координатами $x_2 = \frac{5 + x_1}{2}$; $y_2 = \frac{1 + y_1}{2}$ лежить на медіані, тобто виконується рівність $5\left(\frac{5 + x_1}{2}\right) - \frac{1 + y_1}{2} - 13 = 0$. Крім того, точка C лежить на прямій BC. Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат (x_1, y_1):

$$\begin{cases} 5x_1 - y_1 - 2 = 0 \\ x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих AB і AC, використовуючи рівняння прямої що проходить через дві точки, маємо:

$$AB:\ \frac{y+3}{1+3} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3};\quad AC:\ \frac{y+3}{3+3} = \frac{x-2}{1-2} \Rightarrow y = -6x + 9.$$

Висота проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB. Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4}$. Використаємо рівняння через точку і кутовий коефіцієнт і знайдемо рівняння висоти:

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-1)\Rightarrow 3x+4y-15=0.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки C (1; 3) до прямої AB.

$$h=\frac{|4\cdot 1-3\cdot 3-17|}{\sqrt{16+9}}=\frac{22}{5}=4{,}4.$$

Щоб обчислити кут A, скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими:

$$\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{|k_2-k_1|}{1+k_1k_2}=\frac{\left|-6-\frac{3}{4}\right|}{1+6\cdot\frac{3}{4}}=\frac{27}{22};\quad \hat{A}=\operatorname{arctg}\frac{27}{22}.$$

Приклад 8. Паралельні прямі проходять відповідно через точки O (0; 0) і M (1; 3). Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$.

Розв'язування

Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді $y=kx,\ y-3=k(x-1).$ Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад $(1;k)$. Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:

$\sqrt{5}=\frac{|k-k-k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$, звідки знайдемо $k_1=-2,\ k_2=\frac{1}{2}.$ Рівняння прямих: $y=-2x;\ 2x+y-5=0$ або $y=\frac{1}{2}x;\ x-2y+5=0.$

Приклад 9. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x+7y-6=0$ і $5x-5y+1=0.$

Розв'язування

Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай M (x; y) – точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$\frac{|x+7y-6|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|5x-5y+1|}{\sqrt{25+25}}.$ Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x+7y-6=5x-5y+1$ і $x+7y-6=-5x+5y+1,$ або, після перетворень: $4x-12y+7=0,\ 6x+2y-5=0.$

Приклад 10. Обчислити площу ромба, знаючи одну з його вершин A (0; –1), точку перетину діагоналей M (4; 4) і точку N (2; 0) на стороні AB.

Розв'язування

Використовуючи рівняння прямої через дві точки, запишемо рівняння сторони *AB*: $\frac{y+1}{1}=\frac{x}{2}$, або $x-2y-2=0$. Знайдемо координати точки *C* (*x*; *y*), яка за властивістю точки перетину діагоналей ромба симетрична точці *A* відносно точки *M*. Отже, $4=\frac{0+x}{2}$; $4=\frac{-1+y}{2}$, звідки *C* (8; 9). Висоту ромба знайдемо як відстань від точки *C* до прямої *AB*:

$$h=\frac{|8-18-2|}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт діагоналі ромба *AC*: $k=\frac{9+1}{8-0}=\frac{5}{4}$. Кутовий коефіцієнт другої діагоналі дорівнює $\left(-\frac{4}{5}\right)$, а її рівняння $4x+5y-36=0$. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases}x-2y=2\\4x+5y=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{82}{13}\\y=\frac{28}{13}\end{cases},$$

знаходимо координати точки $B\left(\frac{82}{13};\frac{28}{13}\right)$. Довжина сторони ромба $|AB|=\sqrt{\left(\frac{82}{13}\right)^2+\left(\frac{28}{13}\right)^2}=\frac{41}{13}\sqrt{5}.$

Отже, площа ромба $s=|AB|\cdot h=\frac{41}{13}\sqrt{5}\cdot\frac{12}{\sqrt{5}}=37\frac{11}{13}$.

Приклад 11. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин *A* (2;–4) і рівняння бісектрис двох його кутів: $x+y-2=0$; $x-3y-6=0$.

Розв'язування

Підставлянням координати точки *A* в рівняння бісектрис переконаємось, що бісектриси не проходять через цю точку. Нехай для визначеності вершина *B* і вершина *C* належать відповідно першій і другій бісектрисам. Знайдемо координати точки *A*′, симетричної точці *A* відносно бісектриси $x+y-2=0$. Ця точка буде лежати на прямій *BC*. Для цього запишемо рівняння перпендикуляра до цієї бісектриси, що проходить через точку *A*. Маємо: $y+4=x-2$, або $x-y-6=0$. Знайдемо точку перетину бісектриси і перпендикуляра, розв'язуючи систему $\begin{cases}x+y=2\\x-y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$; координати точки $A'(x;y)$ знайдемо з виразів $4=\frac{2+x}{2}$; $-2=\frac{-4+y}{2}$; $A'(6;0)$. Аналогічно знайдемо координати точки A'', симетричної точці A, відносно бісектриси $x-3y-6=0$. $A''\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$. Рівняння прямої BC знайдемо як рівняння прямої через дві точки: $\frac{y}{\frac{4}{5}}=\frac{x-6}{-\frac{28}{5}} \Rightarrow x+7y-6=0$.

Обчислимо координати вершин B і C як координати точок перетину відповідних бісектрис з прямою BC: $x+7y-6=0$. Дістаємо: $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$; $C(6;0)$. З рівняння прямої через дві точки маємо рівняння сторін відповідно AB і AC: $7x+y-10=0$; $x-y-6=0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ – рівняння гіпотенузи, A (4; – 1) – вершина прямого кута.

Відповідь. $y=-2x+7; y=\frac{1}{2}x-3$.

2. Дано вершини трикутника A (4; 6), B (– 4; 0), C (– 1; – 4). Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C; в) бісектриси кута B; г) висоти, опущеної з вершини A.

3. Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7};-\frac{3}{28}\right)$, $B(4;3)$, $C(2;\,-1)$. Обчислити довжини його висот.

Відповідь. $h_A=\frac{27\sqrt{5}}{28}$.

4. На осі абсцис знайти точку, яка міститься на відстані a від прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Відповідь. $\left(0;\ b\pm\sqrt{a^2+b^2}\right)$.

5. З точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

Відповідь. $5x-3y+9=0; 5x-3y-25=0$.

6. Дано дві вершини трикутника A (– 6; 2), B (2; – 2) і H (1; 2) – точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

Відповідь. C (2; 4).

7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю *Ox* удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x-3y+4=0$.

Відповідь. $3x-4y-10=0$.

8. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $y=3$; $x - y + 4 = 0$. Скласти рівняння основи, якщо вона проходить через початок системи координат.

Відповідь. $y=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x$.

9. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо *A* (2; – 4) – його вершина, *M* (5; 2) – точка перетину діагоналей.

Відповідь. $3x+y=2;\ x-3y=14;\ x-3y=-16;\ 3x+y=32.$

10. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо *A* (3; 5), *B* (6; 1) – його вершини, *M* (4; 0) – точка перетину медіан.

Відповідь. $4x+3y=27,\ x=3,\ 7x-3y=39.$

11. Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок *AB*, *A* (–3; 2), *B* (5; – 2) навпіл і утворює з відрізком *AB* кут, удвічі більший, ніж із віссю *Ox*.

Відповідь. $x-2y-1=0$.

12. Через точку *A* (5; 2) провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

Відповідь. $x+y=7$.

13. Знайти дотичні до кола $x^2+y^2=29$, що проходять через точку *A* (7; –3).

Відповідь. $5x+2y=29,\ 2x-5y=29.$

14. У трикутнику *A* (1; 2), *B* (3; 7), *C* (5; – 13) обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини *B* на медіану, проведену з вершини *A*.

Відповідь. $\dfrac{25}{\sqrt{34}}$.

15. Знайти рівняння прямої, паралельної прямій $12x+5y-52=0$, що знаходиться від неї на відстані 2 лінійних одиниць.

Відповідь. $12x+5y-26=0,\ 12x+5y-78=0.$

16. Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими $4x-6y=3,\ 2x-3y=-7.$

Відповідь. $8x-12y+11=0$.

17. Знайти точку, симетричну точці *A* (–2;–9) відносно прямої $2x+5y=38$.

Відповідь. (10; 21).

18. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y = 1$, $x - 2y = 0$, *M* (3; –1) – точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.

Відповідь. $x - y = 7,\ x - 2y = 10.$

19. Відоме рівняння $3x+2y+6=0$ однієї сторони кута і $x - 3y + 5 = 0$ – рівняння його бісектриси. Скласти рівняння другої сторони кута.

Відповідь. $6x + 17y = 15$.

20. У трикутнику ABC відомі AB: $4x+y-12=0$, висота BH: $5x-4y=15$, висота AK: $2x+2y-9=0$. Записати рівняння сторін AC; BC.

Відповідь. $4x+5y=20$; $x-y=3$.

Питання для самоперевірки

1) Побудуйте рівняння прямої, що проходить через задану точку.
2) Побудуйте рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
3) Побудуйте рівння прямої у відрізках на осях.
4) Побудуйте рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
5) Яким чином обчислити кут між двома прямими?
6) Загальне рівння прямої. Як при цьому визначиити кутовий коефіцієнт прямої?
7) Як обчислити відстань від точки до прямої?
8) Назвіть умови перпендикулярності двох прямих на площині.
9) Назвіть умови паралельності двох прямих на площині.

Практичне заняття № 2

Криві другого порядку

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з даної теми, набути навичок і вмінь знаходити рівняння різних кривих, складати рівняння еліпса, гіперболи, параболи.

Питання для самопідготовки:

– рівняння кола;
– взаємного розташування кола і прямої;
– еліпс, його рівняння, ексцентриситет, директриса;
– властивості еліпса;
– гіпербола, її рівняння, асимптоти, ексцентриситет, директриси;
– властивість гіперболи;
– парабола, її рівняння.

План практичного заняття

1. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Теоретичний довідник

Коло – це геометричне місце точок площини, віддалених від фіксованої точки на фіксовану відстань. Фіксовану точку $C\,(x_0; y_0)$ називають центром кола, а фіксовану відстань R – радіусом кола.

Канонічним рівнянням кола: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Еліпс – це геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох заданих точок площини є величиною сталою, що перевищує відстань між цими точками. Дві задані точки F_1 і F_2 називають ***фокусами еліпса***, а відстань F_1F_2 – ***фокусною відстанню***.

Канонічне рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Ексцентриситетом еліпса називають таке число ε, яке дорівнює відношенню $\dfrac{c}{a}$, тобто $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$.

Директрисами еліпса називають прямі, які перпендикулярні до великої осі еліпса і розміщуються на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від центра еліпса. Директриси мають рівняння: $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon};\pm\dfrac{a^2}{c}$. Еліпс із центром у точці $C\,(x_0; y_0)$ і півосями a і $b\,(a>b)$, що паралельні осям координат, має таке рівняння: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, а для еліпса, заданого рівнянням (2), $x=x_0\pm\dfrac{a^2}{c}$. Оскільки $0\le\varepsilon\le1$, то директриси еліпс не перетинають.

Фокальна властивість еліпса: відношення відстані від довільної точки еліпса до фокуса до відстані від цієї точки до відповідної директриси є величиною сталою, яка дорівнює ексцентриситету еліпса.

Відрізки F_1M і F_2M називають фокальними радіусами точки М.

Дотичною до еліпса називають пряму, яка має з еліпсом лише одну спільну точку.

Оптична властивість еліпса: фокальні радіуси довільної точки еліпса утворюють однакові кути з дотичною, проведеною через цю точку.

Гіпербола – це геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок є величиною сталою, що менша від відстані між цими точками.

Задані точки F_1 і F_2 називають ***фокусами***, а відстань між ними – фокусною.

Канонічне рівнянням гіперболи: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Пряму l називають ***асимптотою*** лінії γ, якщо при прямуванні довільної точки М лінії γ у нескінченність відстань від точки М до прямої l прямує до нуля.

Можна довести, що гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \frac{b}{a}x$ і $y = -\frac{b}{a}x.$

Ексцентриситетом гіперболи називають число $\varepsilon = \frac{c}{a}.$

Оскільки для гіперболи $c > a,$ то її ексцентриситет перевищує одиницю:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}.$$

Чим менший ексцентриситет гіперболи, тим сильніше її вітки «стиснуті» до дійсної осі.

Директрисами гіперболи називають прямі, які перпендикулярні до її дійсної осі і розміщуються на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від її центра.

Директриси гіперболи не перетинають гіперболу (оскільки $\varepsilon > 1; \frac{a}{\varepsilon} < a$).

При цьому директриси мають рівняння: $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ та $x = \frac{a}{\varepsilon}.$ Якщо осі гіперболи пеаралельні координатним осям, а центр розміщується в точці $C\,(x_0; y_0),$ то її рівняння: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)}{b^2} = 1$.

Рівняння асимптот: $y = y_0 - \frac{b}{a}(x - x_0); \quad y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$.

Рівняння директрис: $x = x_0 + \frac{a}{\varepsilon}; \quad x = x_0 - \frac{a}{\varepsilon}.$

Фокальна властивість гіперболи: відношення відстані від довільної точки гіперболи до фокуса до відстані від цієї точки до відповідної директриси є величиною сталою, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи.

Парабола – це геометричне місце точок площини, відстань від яких до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої, що не проходить через задану точку.

Задану точку F називають ***фокусом*** параболи, а пряму d – ***директрисою параболи***. Відстань від фокуса до директриси називають ***фокальним параметром*** параболи, і як правило позначають p.

Канонічним рівнянням параболи: Рівняння $y^2 = 2px$.

Точка перетину параболи з її віссю називають ***вершиною параболи***.

Якщо парабола має вершину в точці $C\,(x_0; y_0)$ і вісь паралельну осі Ox, то її рівняння $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$.

Пряму називають ***дотичною до параболи***, якщо вона непаралельна осі і перетинає параболу лише в одній точці.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої, в два рази ближча до точки A (6;3), ніж до початку координат.

Розв'язування

Нехай $M(x;y)$ – деяка точка шуканої лінії. Запишемо рівняння лінії у векторній формі: $\left|\overline{\mathrm{OM}}\right| = 2\left|\overline{AM}\right|$.

Перейдемо до координатної форми :

$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}$.

Відповідно, $\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}$.

Позбудемось від ірраціональності, шляхом піднесення обох частин рівняння до квадрату:

$$\mathrm{x}^2 + y^2 = 4(x-6)^2 + 4(y-3)^2 \text{ або } 3x^2 - 48x + 3y^2 - 24y + 180 = 0 .$$

Виділимо повний квадрат:

$$3(x^2 - 16x + 64) - 192 + 3(y^2 - 8y + 16) - 48 + 180 = 0 \text{ або}$$

$$3(x-8)^2 + 3(y-4)^2 = 60.$$

Отже, маємо:

$$(x-8)^2 + (y-3)^2 = 20 .$$

Отримане рівняння задає коло з центром в точці $O(8;4)$, радіуса $R = \sqrt{20}$.

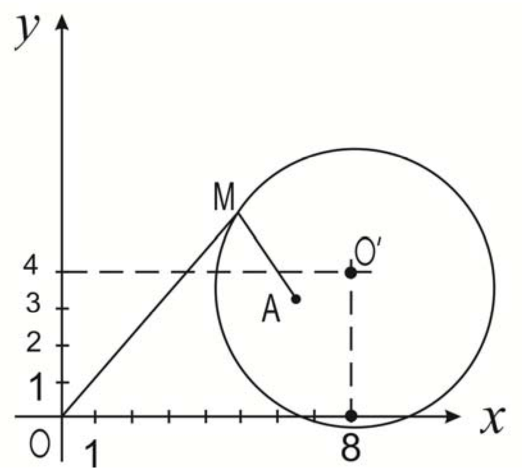


Рисунок 1 – Отримане коло

Приклад 2. Дано рівняння кривої другого порядку:

$$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$$ Визначити її тип.

Розв'язування

Оскільки $A = 16, C = 25$, $AC = 16 \cdot 25 > 0$, то рівняння визначає криву еліптичного типу. Зведемо рівняння до канонічного виду. Згрупуємо доданки з x і доданки із y:

$(16x^2 + 32x) + (25y^2 - 100y) - 284 = 0$, або

$16(x^2 + 2x) + 25(y^2 - 4y) - 284 = 0$,

Виділимо повний квадрат відносно x і y:

$16(x^2 + 2x + 1) - 16 + 25(y^2 - 4y + 4) - 100 - 284 = 0$ або

$$16(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 400,$$

Отже, маємо:

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 .$$

Перенесемо початок координат O в точку $O_1(-1;2)$ і використаємо формули паралельного переноса системи координат:

$$\overline{x} = x - x_0, \overline{y} = y - y_0$$

або, враховуючи координати вибраного початку,

$$\overline{x} = x - (-1), \overline{y} = y - 2 ,$$

тоді рівняння даного еліпса в системі $\overline{x}O_1\overline{y}$ буде мати вигляд :

$$\frac{\overline{x}^2}{25} + \frac{\overline{y}^2}{16} = 1 .$$

Побудуємо обидві системи координат і еліпс.

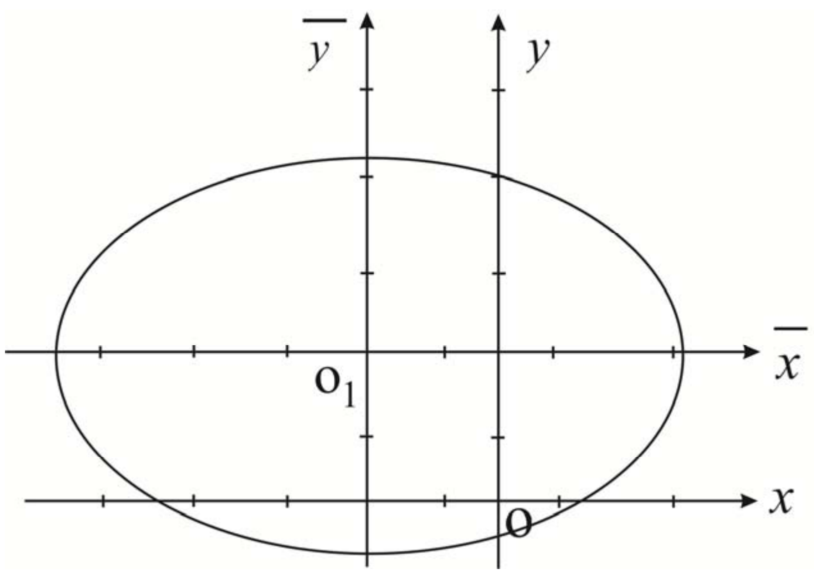


Рисунок 2 – Шуканий еліпс

Приклад 3. а) Дано рівняння кривої в полярних координатах $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. Потрібно побудувати цю криву по її полярному рівнянню.

б) Дано рівняння кривої в прямокутних декартових кординанах $(x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2$. Записати це рівняння в полярних координатах, а потім побудувати дану лінію по її полярному рівнянню.

Розв'язування

а) побудуємо лінію, задану рівнянням: $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, де $a > 0$.
Для побудови вказаної лінії складемо таблицю значень φ і ρ (надаючи φ значення, рівні $\frac{\pi k}{12}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 12$).

Враховуючи парність функції $\cos\varphi$, значення ρ для $\pm\varphi$ однакові.

На площині побудуємо точки, що відповідають в таблиці парам чисел φ і ρ, у вибраній нами полярній системі координат. З'єднуючи послідовно ці точки, отримаємо лінію, яку називають кардіоїдою (див. рис.3).

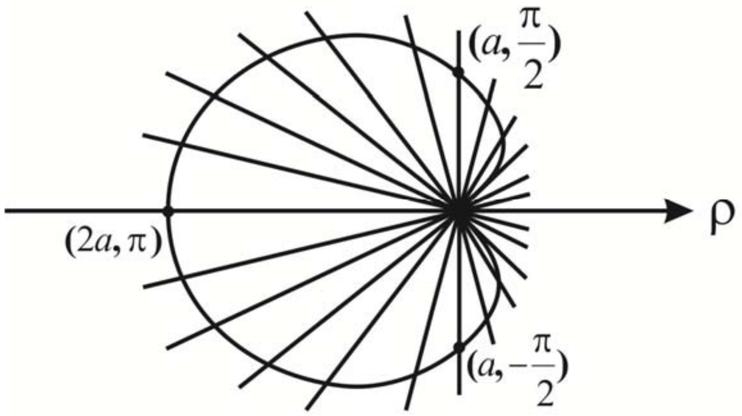


Рисунок 3 – Графік отриманої кардіоїди

б) дано рівняння кривої:

$$(x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2 \ , \ a > 0 \ .$$

Використаємо формули переходу з прямокутної системи в полярну: $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ і запишемо рівняння в полярних координатах:

$$(\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi)^3 = a^4 \rho^2 \sin^2\varphi \text{ , або}$$

$$\rho^6 = a^4 \rho^2 \sin^2\varphi,$$

$$\rho^4 = a^4 \sin^2\varphi.$$

Отже, маємо:

$$\rho = a\sqrt{|\sin\varphi|} \ .$$

Складемо таблицю відповідних значень ρ і φ.

φ	0	$\pm\frac{\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{7\pi}{12}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\frac{11\pi}{12}$	π
ρ	0	0,51	0,71a	0,84a	0,93a	0,98a	1a	0,98a	0,84a	0,71a	0,51a	0

Нанесемо на площину точки, які відповідають знайденим парам чисел. З'єднавши послідовно точки, отримаємо лінію, що визначається даним рівнянням.

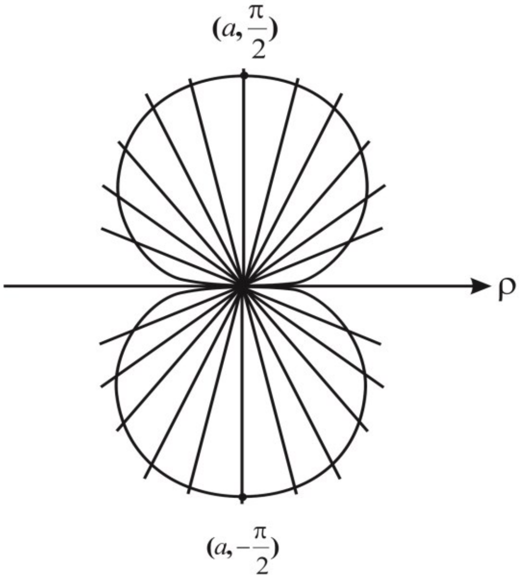


Рисунок 4 – Графік отриманої лінії

Приклад 4. Дано еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, через точку A (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

Розв'язування

Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння прямої через точку і кутовий коефіцієнт: $(y - 1) = k\,(x - 1)$. Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку A. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ y-1=k\left(x-1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(4+9k^2\right)x^2+18k\left(1-k\right)x+9\left(1-k\right)^2-36=0 \\ y=kx+1-k. \end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ мають задовольняти рівності: $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ і $\frac{y_1+y_2}{2}=1$. З теореми Вієтта і останньої умови маємо:

$$\frac{18\left(k-1\right)k}{4+9k^2}=2, \text{ звідки } k=-\frac{4}{9}.$$

Шукане рівняння хорди набуває вигляду $y-1=-\frac{4}{9}\left(x-1\right)$, або $4x + 9y - 13 = 0$.

Приклад 5. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами – 6;
2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2},\ x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами – прямий;
3) ексцентриситет дорівнює ε = 2, а уявна піввісь b = 3;
4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$.

Розв'язування

1) Координати фокусів F_1 (–c;0); F_2 (c;0), тому з умови 2c = 8; c = 4, відстань між директрисами $6=\frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon=\frac{c}{a}$ маємо: a^2 = 12, $b^2 = c^2 - a^2$ = 4. Остаточно $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то a = b. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ маємо $\varepsilon=\sqrt{2}$ і a = 6; b = 6. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, звідки $a=\sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$, або $b=\frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\quad a^2=\frac{171}{25},\quad b^2=19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1$.

Приклад 6. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язування

Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок: $\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=2px. \end{cases}$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2 - \frac{2p}{k} y + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Воно має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p\left(p - 2bk\right) = 0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ – умова дотику прямої і параболи.

Приклад 7. Записати рівняння прямої центрів двох кіл $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

Розв'язування

Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25, \text{ або } (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 36, \text{ або } (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 36.$$

Отже, координати центра першого кола C_1 (3; – 4), а другого – C_2 (– 1; 6). Скориставшись рівнянням прямої через дві точки, знайдемо

$$\frac{y+4}{6+4} = \frac{x-3}{-1-3}.$$

$5x + 2y - 7 = 0$ – шукане рівняння прямої центрів кіл.

Завдання для самостійної роботи

1. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

Відповідь. $M_1\left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

2. Еліпс проходить через точку $P\left(3; \frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої $4x + 5y - 25 = 0$. Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.

Відповідь. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\left(4;\ \frac{9}{5}\right)$; $\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\left(\frac{9}{4},\ \frac{16}{5}\right)$.

3. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами A (7; 7), B (0; 8), C (– 2; 4).

Відповідь. $\left(x-3\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 25.$

4. Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7), що дотикається до прямої $5x - 12y = 24$.

Відповідь. $\left(x-6\right)^2 + \left(y-7\right)^2 = 36.$

5. В еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписано правильний трикутник так, що одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайти координати двох інших вершин.

Відповідь. $\left(\frac{6}{7};\frac{12\sqrt{3}}{7}\right),\left(\frac{6}{7};\frac{-12\sqrt{3}}{7}\right).$

6. Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ у точці (2; – 3).

Відповідь. $x-2y=8.$

7. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2+8y^2=45,$ відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

Відповідь. $\pm 3x\pm 4y+15=0.$

8. Гіпербола дотикається до прямої $x-y=2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

Відповідь. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1.$

9. До параболи $y^2=12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x+y-7=0.$

Відповідь. $4x+2y+3=0.$

10. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої:

а) ексцентриситет $\varepsilon=2.$

б) відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

Відповідь. а) 120°; б) 90°.

11. Записати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ у точці (5, – 4).

Відповідь. $x+y=1.$

12. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2=64x$ до прямої $4x+3y+46=0.$

Відповідь. 2.

13. Визначити типи таких кривих:

а) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0,$

б) $3x^2+2xy+3y^2+4x+4y-4=0,$

в) $x^2+4xy+3y^2+2x-2y=0,$

г) $x^2+4xy+4y^2+2x-2y-1=0,$

д) $9x^2-6xy+y^2-6x+2y=0.$

Відповідь. а) гіпербола; б) еліпс; в) пара прямих, що перетинаються; г) парабола; д) пара паралельних прямих.

Питання для самоперевірки

1) Дайте означення еліпса, назвіть його характеристики.
2) Дайте означення гіперболи, назвіть її характеристики.
3) Дайте означення параболи, назвіть її характеристики.
4) Дайте означення кола.

Інтерактивне практичне заняття № 3 *«Криві другого порядку»*

Мета заняття: освітня – перевірити сформованість теоретичних знань з самостійно опрацьованої теми, самостійних практичних умінь використання теоретичного матеріалу для розв'язування прикладних та репродуктивних задач, поглибити та уточнити знання, здобуті у процесі самостійної роботи, підвищити рівень засвоєння знань; розвивальна – розвивати уміння самостійно аналізувати інформацію, прищепити уміння вчитися самостійно, «видобувати» інформацію; виховна – сприяти формуванню наукового світогляду та потреби в самовдосконаленні, саморозвитку.

Під час вивчення теми «Криві другого порядку», яка відповідно до зменшеної кількості годин з вищої математики досить часто відводиться на самостійне опрацювання, для контролю вивченого, ми пропонуємо провести підсумкове практичне заняття у вигляді гри, яка має назву «***Вислови свою думку***». Еліпс, гіпербола, парабола – це ті криві, які студенти вивчали самостійно, тому групу пропонуємо поділити на три підгрупи за бажанням або по списку. Ця гра є різновидом загальногрупового обговорення навчальної інформації. Вона дає можливість сказати щось кожному по черзі, висловлюючи свою думку. Наприклад, запропонуємо студентам висловити свої знання щодо гіперболи, дотримуючись певних правил.

1. Кожна підгрупа має заготовку ескізу певної кривої (еліпса, гіперболи, параболи), який виконує роль перехідного прапорця. Студенти передають ескіз один одному і по черзі беруть слово.

2. Слово надається лише тому, хто отримав перехідний ескіз.

3. Відповіді студентів повинні бути короткими, лаконічними, чіткими, обгрунтованими.

Наприклад:

- гіпе́рбола від грецького «*hyperbole*» – перебільшення, означає вид тропа;
- давньогрецький математик Аполлоній Пергський вперше вивів властивості гіперболи, що ефективно вплинуло на розвиток астрономії, а в XVII ст. – на розвиток аналітичної геометрії;
- гіпербола – це геометричне місце точок площини, модуль різниці

відстаней, від яких до двох заданих точок F_1 і F_2 є величиною сталою, що менша від відстані між цими точками;

- задані точки F_1 і F_2 називають фокусами, а відстань між ними – фокусною;
- канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
- пряму F_1F_2 називають дійсною віссю гіперболи. Точка $A_1\,(-a;0)$ і $A_2\,(a;0)-$ вершини. Пряма B_1B_2 – уявна вісь гіперболи. $P_1P_2P_3P_4$ – асимптотичний прямокутник (прямі, що містять його діагоналі, є асимптотами гіперболи);
- Якщо $a=b,$ то гіперболу називають рівнобічною;
- Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y=\frac{b}{a}x$ і $y=-\frac{b}{a}x.$
- Ексцентриситетом гіперболи називають число $\varepsilon=\frac{c}{a}.$
- Для гіперболи $c>a,$ то її ексцентриситет перевищує одиницю:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}.$$

- Директрисами гіперболи називають прямі, які перпендикулярні до її дійсної осі і розміщуються на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від її центра;
- Для гіперболи, заданої канонічним рівнянням, дирекриси мають рівняння $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ та $x=\frac{a}{\varepsilon}.$
- Фокальна властивість гіперболи. Відношення відстані від довільної точки гіперболи до фокуса, до відповідної директриси є величиною сталою, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи.

Відповіді студентів можна оцінювати таким чином: повна відповідь на питання – 2 бали, неповна або неточна відповідь – 1 бал, причому студенти можуть доповнювати відповіді один одного за додаткові бали. Таку ігрову ситуацію можна використовувати в якості закріплення вивченого матеріалу.

Після теоретичного обговорення кожна підгрупа отримує практичне завдання виду:

1. Побудувати гіперболу $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. Визначити її фокуси, вершини, ексцентриситет, асимптоти.

2. Джерело короткоінтервального звуку знаходиться в невідомому пункті M. Звук досяг трьох пунктів спостереження неодночасно: пункту

A – на t_1 пізніше, а пункту C – на t_2 пізніше, ніж пункту B. Визначити місце знаходження пункту M, прийнявши швидкість звуку рівною 330 м/с.

Проведена таким чином гра, сприяє розвитку умінь пояснення теоретичного матеріалу, саме ті знання, які здобуті своїми власними зусиллями, виявляються міцнішими і стійкішими, ніж ті, що отримані на лекції.

Результативність: формування професійної спрямованості, самооцінки, вільного володіння уміннями опрацювання інформації та роботи з інформаційними об'єктами, які відповідно впливають на навички вдосконалення професійних знань і умінь, знання міжпредметних зв'язків.

Індивідуальні домашні завдання

ВАРІАНТ № 1

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-8;-3)$; $B(4;-12)$; $C(8;10)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $16x^2+25y^2-32x+100y-284=0$;
2) $9x^2-4y^2+18x-16y-43=0$;
3) $2x^2+4x+8y+8=0$;
4) $x^2+4x+y^2-2y-21=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{5}$, перпендикулярно до площини $x+2y-3z+7=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(1;2;3)$ відносно прямої $\frac{x-\frac{1}{2}}{0}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{1}$.

ВАРІАНТ № 2

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-5;7)$; $B(7;-2)$; $C(11;20)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9x^2+25y^2+36x-50y-164=0$;
2) $4x^2-9y^2-8x-54y-113=0$;
3) $x^2-6x+2y+11=0$;
4) $x^2+2x+y^2-6y-6=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{4}, \quad \begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t+3. \\ z=4t \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(-2;-3;0)$ відносно прямої $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y+\frac{3}{2}}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1}$.

ВАРІАНТ № 3

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-12;-1)$; $B(0;-10)$; $C(4;12)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*

6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $16x^2+9y^2-64x+18y-71=0$;
2) $-4x^2+25y^2-24x-100y-36=0$;
3) $x^2+4x+3y+7=0$;
4) $10x^2+10x+10y^2+10y-5=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{7}=\frac{z+2}{-1}$, перпендикулярно до площини $3x+4y=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(3;-3;1)$ відносно прямої $\frac{x-6}{5}=\frac{y-\frac{7}{2}}{4}=\frac{z-\frac{1}{2}}{0}$.

ВАРІАНТ № 4

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-10;9)$; $B(2;0)$; $C(6;22)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9x^2+16y^2+18x-64y-89=0$;
2) $4y^2-25x^2+100x+8y-196=0$;
3) $x^2-4x+4y+8=0$;
4) $x^2+y^2+6x-8y=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}, \qquad \frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}.$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M\left(0;-3;-2\right)$ відносно прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-1}=\frac{z}{1}$.

ВАРІАНТ № 5

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A\left(0;2\right)$; $B\left(12;-7\right)$; $C\left(16;15\right)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9x^2+4y^2+18x+8y-23=0$;
2) $-16x^2+4y^2+64x-8y-124=0$;
3) $x^2+4x+2y+2=0$;
4) $x^2+4x+y^2-8y+1=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{7}$, перпендикулярно до площини $x-y+1=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M\left(0;2;1\right)$ відносно прямої $\frac{x-\frac{3}{2}}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

ВАРІАНТ № 6

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A\left(-9;6\right)$; $B\left(3;-3\right)$; $C\left(7;19\right)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;

3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $25x^2+4y^2-5x+8y-7=0$;

2) $9x^2-4y^2-72x+16y+92=0$;

3) $y^2-6y+2x+11=0$;

4) $x^2+2x+y^2-8y+1=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{3}, \qquad \begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t-2. \\ z=3t \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(2;1;0)$ відносно прямої $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+\frac{3}{2}}{-1}=\dfrac{z+\frac{1}{2}}{1}$.

ВАРІАНТ № 7

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(1;0)$; $B(13;-9)$; $C(17;13)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $14x^{2}+25y^{2}+8x-150y+129=0$;

2) $16x^{2}-9y^{2}-64x-72y-116=0$;

3) $x^{2}-6x+2y+13=0$;

4) $x^{2}+4x+y^{2}-8y+4=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-3}$, перпендикулярно до площини $x+y-2z=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M\left(-1;0;-1\right)$ відносно прямої $\frac{x}{-1}=\frac{y-\frac{3}{2}}{0}=\frac{z-2}{1}$.

ВАРІАНТ № 8

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A\left(-4;10\right)$; $B\left(8;1\right)$; $C\left(12;23\right)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9y^{2}+-4x^{2}+16x+54y+29=0$;

2) $16x^{2}+9y^{2}-96x+36y+36=0$;

3) $y^{2}+3x-10y+28=0$;

4) $x^{2}+y^{2}-2x+8y+1=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-1}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{-1}$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M\left(2;-1;1\right)$ відносно прямої $\frac{x-\frac{9}{2}}{1}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

ВАРІАНТ № 9

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC.
$A(2;5)$; $B(14;-4)$; $C(18;18)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $4x^2 - 925y^2 + 32x + 18y + 19 = 0$;
2) $16x^2 + 4y^2 + 32x + 48y + 96 = 0$;
3) $y^2 + 4x + 14y + 57 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{-3}$, перпендикулярно до площини $x + 2y - z + 1 = 0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(1;1;1)$ відносно прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y+\frac{3}{2}}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

ВАРІАНТ № 10

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC.
$A(-1;4)$; $B(11;-5)$; $C(15;17)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9y^2 - 16x^2 - 32x - 72y - 16 = 0$;

2) $25x^2 + 16y^2 + 150x + 32y + 159 = 0$;

3) $x^2 + 4x + 2y + 10 = 0$;

4) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{5}, \qquad \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -4t+2. \\ z = 5t \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(1;0;-1)$ відносно прямої $\dfrac{x-\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{y-\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{z}{0}$.

ВАРІАНТ № 11

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC.
$A(-2;7)$; $B(10;-2)$; $C(8;12)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $25y^2 - 4x^2 - 24x - 150y + 89 = 0$;

2) $9x^2 + 25y^2 - 36x - 100y - 89 = 0$;

3) $y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$;

4) $x^2 + 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{5}$, перпендикулярно до площини $5x + y - 7z + 1 = 0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M\left(-1;0;1\right)$ відносно прямої $\frac{x+\frac{1}{2}}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}$.

ВАРІАНТ № 12

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A\left(-6;8\right)$; $B\left(6;-1\right)$; $C\left(4;13\right)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9x^2+4y^2+54x+24y+81=0$;

2) $25y^2-4x^2+24x+50y-86=0$;

3) $y^2+3x-6y+15=0$;

4) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3},\quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+4}{3}.$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M\left(3;3;3\right)$ відносно прямої $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-\frac{3}{2}}{0}=\frac{z-3}{1}$.

ВАРІАНТ № 13

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A\left(3;6\right)$; $B\left(15;-3\right)$; $C\left(13;11\right)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;

4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *К* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *К* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9x^2+16y^2+90x-32y+97=0$;

2) $4x^2-9y^2-32x-36y+64=0$;

3) $y^2+4x-2y+9=0$;

4) $x^2-4x+y^2+6y+4=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-2}$, перпендикулярно до площини $3x+y=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(0;-3;-2)$ відносно прямої $\frac{x-\frac{1}{2}}{0}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{1}$.

ВАРІАНТ № 14

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника *ABC*. $A(-10;5)$; $B(2;-4)$; $C(0;10)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *К* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *К* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $4x^2-9y^2+32x+54y-53=0$;

2) $9x^2+25y^2-36x+50y-139=0$;

3) $x^2-6x+4y+13=0$;

4) $x^2 - 4x + y^2 + 10y - 33 = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}, \qquad \frac{x}{7} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(2;-2;-3)$ відносно прямої $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{0} = \dfrac{z+\frac{1}{2}}{1}$.

ВАРІАНТ № 15

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-4;12)$; $B(8;3)$; $C(6;17)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *К* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *К* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $25x^2 + 45y^2 - 50x - 40y + 25 = 0$;

2) $4y^2 - 16x^2 - 96x - 16y - 76 = 0$;

3) $x^2 - 5x + 2y + 27 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{4}$, перпендикулярно до площини $x + y + z - 1 = 0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(-1;2;0)$ відносно прямої $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{x+0,7}{-0,2} = \dfrac{z-2}{2}$.

ВАРІАНТ № 16

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-3;10)$; $B(9;1)$; $C(7;15)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;

3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $16x^2+4y^2+96x+16y+76=0$;

2) $4x^2-9y^2+72x+18y+337=0$;

3) $2y^2+3x-4y+8=0$;

4) $x^2+y^2+6x-8y=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}, \quad \begin{cases} x=3t, \\ y=2t+3, \\ z=4t+2. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(2;-1;1)$ відносно площини $x-y+2z-2=0$.

ВАРІАНТ № 17

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(4;1)$; $B(16;-8)$; $C(14;6)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$;

2) $16x^2-25y^2-32x-100y-484=0$;

3) $2y^2+5x-4y+27=0$;

4) $x^2+6x+y^2+6y-22=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$, перпендикулярно до площини $x+2y-z-3=0$.

Завдання 4. Знайти точку *M₁* симетричну до точки $M(-1;0;1)$ відносно площини $2x+4y-3=0$.

ВАРІАНТ № 18

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника *ABC*. $A(-7;4)$; $B(5;-5)$; $C(3;9)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $25x^2+4y^2+50x+40y+25=0$;

2) $16x^2-4y^2+96x+40y-20=0$;

3) $3y^2+4x-6y+23=0$;

4) $x^2+y^2-8x+6y=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{4},\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{4}.$$

Завдання 4. Знайти точку *M₁* симетричну до точки $M(1;1;1)$ відносно площини $x+4y+3z+5=0$.

ВАРІАНТ №19

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника *ABC*. $A(0;3)$; $B(12;-6)$; $C(10;8)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;

2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *К* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *К* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $4x^2+9y^2-8x+54y+49=0$;

2) $9x^2-25y^2+36x+50y-214=0$;

3) $x^2-6x-2y-1=0$;

4) $x^2-10x+y^2+8y+16=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$, перпендикулярно до площини $2x+y+z=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(1;0;1)$ відносно площини $4x+6y+4z-25=0$.

ВАРІАНТ № 20

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника *ABC*. $A(-5;9)$; $B(7;0)$; $C(5;14)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *К* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *К* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $25x^2+4y^2+24x-100y+36=0$;

2) $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$;

3) $x^2-4x+3y+16=0$;

4) $x^2+y^2-8x+10y+25=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3},\quad \begin{cases} x=-2t+1, \\ y=2t-1, \\ z=3t-2. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(-1;0;2)$ відносно площини $2x+6y-2z+11=0$.

ВАРІАНТ № 21

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-3;-2)$; $B(0;10)$; $C(6;2)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $25x^2+4y^2-100x+8y+4=0$;

2) $9x^2-16y^2+18x+64y-199=0$;

3) $x^2-4x+4y=0$;

4) $x^2+10x+y^2+6y+9=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$, перпендикулярно до площини $x+2y+2z=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(0;2;1)$ відносно площини $2x+4y-3=0$.

ВАРІАНТ № 22

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(1;1)$; $B(4;13)$; $C(10;5)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;

2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $4x^2+9y^2+32x-18y+37=0$;

2) $4y^2-16x^2-32x+48y+64=0$;

3) $y^2-4x+14y+41=0$;

4) $x^2+y^2-4x+4y-8=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}, \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(3;-3;-1)$ відносно площини $2x-4y-4z-13=0$.

ВАРІАНТ № 23

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC.
$A(0;3)$; $B(3;15)$; $C(9;7)$. Знайти:

1) довжину сторони AB;
2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;
3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти CD і її довжину;
5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;
6) рівняння прямої, що проходить через точку K паралельно до сторони AB;
7) координати точки M, симетричної до точки A відносно прямої CD.

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $4x^2-9y^2-18x+8y-41=0$;

2) $16x^2+4y^2-64x-8y+4=0$;

3) $x^2+4x+8y-4=0$;

4) $x^2+4x+y^2-4y-9=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$, перпендикулярно до площини $x+y-2z+2=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(2;1;0)$ відносно площини $y+z+2=0$.

ВАРІАНТ № 24

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-2;0)$; $B(1;12)$; $C(7;4)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $4y^2-25x^2+50x+8y-57=0$;

2) $9x^2+4y^2-72x-16y+124=0$;

3) $y^2+2x-8y+18=0$;

4) $x^2+y^2+8x-6y=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}, \quad \begin{cases} x=2t+2, \\ y=3t-1, \\ z=4t+3. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(-1;2;0)$ відносно площини $4x-5y-z-7=0$.

ВАРІАНТ № 25

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(2;-1)$; $B(5;11)$; $C(11;3)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;

2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* у радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *К* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *К* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $25y^2-4x^2-8x-150y+112=0$;

2) $16x^2+9y^2-64x+72y-44=0$;

3) $x^2+6x+2y+13=0$;

4) $x^2+4x+y^2-6y+4=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{4}$, перпендикулярно до площини $x+2y+z-1=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(1;2;3)$ відносно площини $2x+10y+10z-1=0$.

ВАРІАНТ № 26

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника *ABC*.
$A(3;-3);B(6;9);C(12;1)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* у радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *К* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *К* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $16x^2-9y^2-96x-54y-81=0$;

2) $4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$;

3) $y^2-2x-10y+31=0$;

4) $x^2 + y^2 - 2x - 35 = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3},\quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(-2;0;3)$ відносно площини $2x-2y-10z-1=0$.

ВАРІАНТ № 27

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-1;2)$; $B(2;14)$; $C(8;6)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $36y^2-25x^2+50x-72y-889=0$;

2) $16x^2+9y^2+32x-72y-16=0$;

3) $x^2+10x+2y+17=0$;

4) $x^2-4x+y^2-6y+4=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$, перпендикулярно до площини $x-3y+z+5=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(0;-3;-2)$ відносно площини $2x-20y+10z+1=0$.

ВАРІАНТ № 28

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(5;-4)$; $B(8;8)$; $C(14;0)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;

3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $9x^2 + 36y^2 + 18x + 144y - 459 = 0$;

2) $9x^2 - 25y^2 - 36x + 100y - 189 = 0$;

3) $y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}, \quad \begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t - 3, \\ z = 3t + 1. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(1;0;-1)$ відносно площини $2y + 4z - 1 = 0$.

ВАРІАНТ № 29

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. $A(-4;5)$; $B(-1;17)$; $C(5;9)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* в радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $16y^2 - 25x^2 - 150x + 32y - 609 = 0$;

2) $9x^2+36y^2-18x+144y-171=0$;

3) $2y^2-4x-6y-5=0$;

4) $3x^2-6x+3y^2+12y+11=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$, перпендикулярно до площини $x+3y-z-4=0$.

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(3;3;3)$ відносно площини $8x+6y+8x-25=0$.

ВАРІАНТ № 30

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника *ABC*. $A(4;4)$; $B(7;16)$; $C(13;8)$. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;
2) рівняння сторін *AB* і *BC* і їх кутові коефіцієнти;
3) кут *B* у радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти *CD* і її довжину;
5) рівняння медіани *AE* і координати точки *K* перетину цієї медіани з висотою *CD;*
6) рівняння прямої, що проходить через точку *K* паралельно до сторони *AB*;
7) координати точки *M*, симетричної до точки *A* відносно прямої *CD.*

Завдання 2. Записати рівняння кривих в канонічному вигляді. Знайти координати фокусів, вершин, центра. Записати рівняння директрис і асимптот. Зробити рисунок.

1) $4x^2+25y^2+24x-150y+161=0$;

2) $9x^2-36y^2-54x+72y-279=0$;

3) $4y^2-6x-8y-7=0$;

4) $2x^2+2y^2+8x-8y+7=0$.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1},\quad \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

Завдання 4. Знайти точку M_1 симетричну до точки $M(2;-2;-3)$ відносно площини $y+z+2=0$.

Література

1. Бугір М. К. Математика для економістів : посібник. / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
2. Валєєв К. Г. Вища математика : навч. посібник : у 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
3. Валєєв К. Г. Математичний практикум : навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
4. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи ; ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
5. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування : навч. посібник / В. Д. Гетманцев. – К. : Либідь, 2001. – 256 с.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебн. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1980. – 320 с.
7. Долгіх В. М. Вища математика для економістів : навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх. – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – Ч. 1 : Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – 103 с.
8. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі : посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
9. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К. : Вища школа, 2001. – 303 с.
10. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / за редакцією Ю. К. Рудавського. – Львів : Бескид БіТ, 2002. – 256 с.
11. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1972. – 240 с.
12. Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.
13. Кривуца В. Г. Вища математика : практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : ЦУЛ, 2003. – 536 с.
14. Лиман Ф. М. Вища математика : навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
15. Навієв Е. Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник / Е. Х. Навієв, В. М. Владіміров, О. А. Миронець. – К. : Либідь, 1997. – 152 с.
16. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Вища школа, 1987. – 552 с.

17. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач : навч. посібник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – К. : Діал, 2000. – 160 с.
18. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. – Львів : Бескид БіТ, 2002. – 262 с.
19. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебн. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.

ГЛОСАРІЙ

алгебраїчне доповнення – algebraic addition
базис – base
вектор нормалі – normal vector
векторний добуток – cross product
визначена система – defined system
визначник – determinant
вироджена матриця – degenerate matrix
гіпербола – hyperbole
діагональна матриця – diagonal matrix
елементарні перетворення – elementary transformations
еліпс – ellipse
квадратна матриця – square matrix
кутовий коефіцієнт – angular coefficient
кут між прямими – the angle between the straight
колінеарні вектори – collinear vectors
коло – circle
криві II порядку – curves of the second order
матриця – matrix
модуль вектора – vector module
метод Гаусса – Gauss method
метод Крамера – Cramer's method
мінор – minor
мішаний добуток – mixed product
напрямні косинуси – directing cosines
невизначена система – uncertain system
несумісна система – compatible system
неоднорідна система – heterogeneous system
обернена матриця – inverse matrix
одинична матриця – identity matrix
однорідна система – homogeneous system
парабола – parabola
площина – plane
проекція вектора – projection of the vector
ранг матриці – rank of the matrix
розв’язний рядок – deciding row
розширена матриця – expanded matrix
скалярний добуток – scalar product
сумісна система – compatible system
транспонована матриця – transposed matrix
трикутна матриця – triangular matrix
узгоджені матриці – agreed matrix

Навчальне видання

Хом'юк Віктор Вікторович
Хом'юк Ірина Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Практикум

Редактор І. Городенська

Оригінал-макет підготовлено І. Хом'юк

Підписано до друку 09.02.2017 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 7,4.
Наклад 50 пр. Зам. № 2017-024.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.