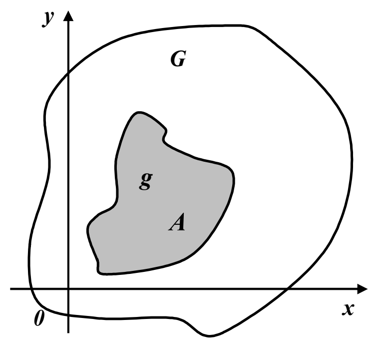
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

ЧАСТИНА 1



$$p(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}$$

Навчальне видання

Хом'юк Ірина Володимирівна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Ковальчук Майя Борисівна
Хом'юк Віктор Вікторович

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Частина 1

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек
Оригінал-макет підготовлено Н. Сачанюк-Кавецькою

Підписано до друку 23.06.2017 р.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 8,34.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2017-238.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38.
press.vntu.edu.ua; *e-mail:* kivc.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.я73
Е22

Автори:
І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук, В. В. Хом'юк

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 8 від 26. 03. 2015 р.)

Рецензенти:
Ю. І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
Т. Б. Мартинюк, доктор технічних наук, доцент

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.
Е22 Частина 1 : навчальний посібник / І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 145 с.

У посібнику розглянуто основні поняття і теореми теорії ймовірностей та математичної статистики. Виклад навчального матеріалу побудовано за такою схемою: наводиться необхідний теоретичний матеріал, подаються приклади розв'язування типових задач, в кінці пропонуються вправи для самостійного розв'язування та питання для самоперевірки у вигляді кросвордів.

Посібник містить чимало задач прикладного характеру. Розглядаються варіанти розв'язування деяких задач засобами MathCad.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ. Очевидно, що в природі, техніці та економіці немає явищ, в яких би не був присутній елемент випадковості. Існує два підходи до вивчення цих явищ. Класичний підхід полягає в тому, що виділяються основні фактори, які визначають дане явище і формують його основну закономірність, а рештою другорядних факторів нехтують. Такий підхід притаманний «точним» наукам.

Однак при дослідженні багатьох явищ необхідно враховувати не тільки основні фактори, а й множину другорядних факторів, які призводять до випадкових збурень та спотворення результату. Тому інший підхід до вивчення випадкових явищ потребує спеціальних методів дослідження таких явищ. Розробкою саме таких методів, вивченням специфічних закономірностей спостережуваних випадкових явищ і займається теорія ймовірностей.

Вивчення ймовірнісних моделей дає змогу зрозуміти різноманітні властивості випадкових явищ на абстрактному та узагальненому рівні без експерименту. При великій кількості спостережень випадкові впливи значною мірою нівелюються і одержаний результат стає невипадковим, передбачуваним. Це твердження і є базою для практичного використання ймовірнісних методів дослідження. Метою вказаних методів є вивчення закономірностей масових випадкових явищ, прогнозування їх характеристик, контроль над цими явищами, обмеження області дії випадковості.

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці курсу теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв’язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (в тому числі фізичного, технічного та економічного змісту), які наводяться з розв’язуванням, та задачами для самостійної роботи.

Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

ТЕМА 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Класифікація подій та операції над подіями

Подією будемо називати будь-який спостережуваний результат випробування, який можна зафіксувати. Позначають події великими літерами латинської абетки.

Наприклад, випробування – підкидання монети. Тоді можливими подіями будуть A= «Випав герб» та B = «Випала решка».

Випадковою будемо називати подію, що при неодноразовому проведенні одного і того ж випробування кожен раз відбувається по-різному. Наприклад, політ літака, який супроводжується відхиленням центра мас від теоретичної траєкторії і т. п.

Щоб кількісно порівнювати між собою події за ступенем їх об’єктивної можливості, потрібно з кожною подією пов’язати певне число.

Ймовірністю випадкової події називається чисельна міра ступеня об’єктивної можливості події (частота події). Позначається ймовірність $p(A)$, $p(B)\ldots$, а значення ймовірності належать відрізку $[0,1]$.

Подія називається *елементарною (ω)*, якщо її не можна розвинути на більш прості події. Розглянемо випробування – підкидання грального кубика, тоді ω= «Випало два очки». *Множиною елементарних подій* (Ω) (повною групою подій, полем подій) називають сукупність усіх взаємно виключних подій, які охоплюють будь-яку подію для даного експерименту.

Приклад 1.1 Монету кидають три рази. Результат спостережень – поява герба (*Г)* або решки *(Р)* на верхній стороні монети. Подія А= «Решка випала не менше, ніж 2 рази підряд». Побудувати простір Ω елементарних подій та описати подію А.

Розв’язування

Розглянемо елементарні події:

ω_1 = «Поява герба»=*Г*, ω_2 = «Поява решки»=*Р*.

Тоді Ω={*ГГГ, ГРР, РГР, РРГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РРР*} і *А*={*ГРР, РРГ, РРР*}.

Достовірною називається подія, яка відбувається за будь-яких обставин. Ймовірність такої події дорівнює 1. Прикладом достовірної події є випадання не більше шести очок при киданні одного грального кубика.

Подія називається *неможливою*, якщо вона не відбувається за жодних обставин. Ймовірність такої події дорівнює 0. Прикладом неможливої події є випадання 12 очок при киданні одного грального кубика.

Події називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбуватись одночасно і *сумісними* в протилежному випадку. Приклади несумісних подій:

1) поява герба та решки при одному підкиданні монети;
2) промах та влучення в ціль при одному пострілі.

Дві несумісні події, з яких одна обов'язково повинна відбутись, називають *протилежними*. Подію, протилежну події A, будемо позначати $\overline{A}$ (подію $\overline{A}$ називають іноді *антиподією* події A).

Наприклад, «поява герба» та «поява решки» при підкиданні монети, «відсутність бракованих виробів» та «наявність хоча б одного бракованого виробу» в партії – події протилежні.

Події називають *рівноможливими*, якщо жодна з цих подій не є більш можливою за інші. Приклади рівноможливих подій:

1) поява герба чи поява решки при підкиданні монети;
2) поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при киданні грального кубика;
3) влучення в мішень чи промах при пострілі.

Рівноможливі несумісні події, що утворюють повну групу, називаються *випадками* або *шансами.* Якщо випробування можна описати за допомогою шансів, то кажуть, що дане випробування зводиться до схеми випадків.

Для подій вводяться відношення та операції, аналогічні операціям над множинами. Нагадаємо основні з них.

1) $A \cup B = A + B$ – додавання подій, яке полягає у появі хоча б однієї з цих подій ($\omega \in (A \cup B) \leftrightarrow \omega \in A \quad або \quad \omega \in B$). При додаванні подій використовується лінгвістичний сполучник «або» чи словосполучення «хоча б», «один з».

2) $A \cap B = AB$ – множення подій, яке полягає в одночасній появі цих подій ($\omega \in (A \cap B) \leftrightarrow \omega \in A \quad і \quad \omega \in B$). При множенні подій використовується лінгвістичний сполучник «і» чи слово «одночасно».

3) $B - A$ – доповнення події *A,* яка відбудеться за умови появи події *B* і відсутності події *A* ($\omega \in (B - A) \leftrightarrow \omega \notin A \quad і \quad \omega \in B$).

4) Нехай подія *A* містить *n* елементарних подій, а подія *B* – *m* елементарних подій. Тоді декартів добуток цих подій $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, \quad b \in B\}$ містить *mn* елементарних подій.

Приклад 1.2 Переможець олімпіади нагороджується: призом (подія *A*), грошовою премією (подія *B*), медаллю (подія *C*). Описати події: а) $A + B$; б) ABC; в) $AC - B$.

Розв'язування

а) Подія $A + B$ полягає в нагородженні переможця або призом, або премією.

б) Подія ABC полягає в нагородженні переможця одночасно і призом, і премією, і медаллю.

в) Подія $AC-B$ полягає в нагородженні переможця одночасно і призом, і премією без медалі.

1.2 Елементи комбінаторного аналізу

Розглянемо таку задачу. Нехай з пункту A міста Вінниці в пункт B можна доїхати трьома видами транспорту: тролейбусом (Т), автобусом (А) та трамваєм (Тр), а з пункту B в пункт C – лише двома видами транспорту: тролейбусом (Т) та трамваєм (Тр). Скількома способами можна доїхати з пункту A в пункт C? Розв'язування цієї задачі зводиться, очевидно, до підрахунку кількості елементів в декартовому добутку множин $\{T, A, Tp\}\times\{T, Tp\}$. Кількість елементів, як ми знаємо, дорівнює добутку кількості елементів першої множини на кількість елементів другої множини, тобто в нашому випадку це $3\cdot 2=6$. Отже, існує шість способів доїхати з пункту A в пункт C. Виявляється, що за цією простою задачею стоїть *основне правило комбінаторики.*

Нехай необхідно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 і так далі до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ способами.

Приклад 1.3 Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) цифри можуть повторюватися;

б) ні одна з цифр не повторюється двічі;

в) цифри непарні і можуть повторюватися.

Розв'язування

а) Першою цифрою може бути одна із цифр 1, 2, 3, 4, 5, оскільки 0 не може бути першою цифрою, бо в такому випадку число не буде тризначним. Якщо перша цифра вибрана, то друга, як і третя цифра, може бути вибрана шістьома способами. Отже, загальне число тризначних чисел $5\cdot 6\cdot 6=180$.

б) Першою цифрою може бути одна із п'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, оскільки 0 не може бути першою цифрою. Якщо перша цифра вибрана, то другою може бути теж одна з п'яти цифр (тут уже враховується 0), а третя може бути вибрана чотирма способами з чотирьох цифр, що залишилися. Отже, загальна кількість таких тризначних чисел $5\cdot 5\cdot 4=100$.

в) Першою цифрою може бути одна з трьох цифр: 1, 3, 5. Друга та третя цифри теж можуть бути однією з цих трьох цифр. Таким чином, загальна кількість таких чисел дорівнює $3\cdot 3\cdot 3=27$.

Комбінацією (без повторень) називається довільна k-елементна підмножина n-елементної множини. Кількість різних комбінацій становить

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.1)$$

Числа (1.1) називаються біноміальними коефіцієнтами бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n. \qquad (1.2)$$

Для зручності роботи з комбінаціями (без повторень) вкажемо їх основні *властивості:*

1) формула симетрії $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$;
2) формула додавання $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;
3) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
4) формула суми всіх біноміальних коефіцієнтів $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + C_n^n = 2^n$.

Приклад 1.4 Збірна команда університету з волейболу налічує 15 чоловік. Скільки різних варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру?

Розв'язування

Кількість гравців волейбольної команди дорівнює шести. Значить, кількість всіх можливих варіантів – це кількість різних підмножин, які складаються з шести елементів у множині з 15-ти елементів. Таким чином, маємо

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 5005.$$

Формули, які будуть встановлені нижче, відносять до упорядкованих множин. Дві упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються між собою або своїми елементами, або порядком елементів. Зрозуміло, що коли множина має більше одного елемента, то її можна упорядкувати більше, ніж одним способом. Розглянемо скількома способами можна упорядкувати скінченну n-елементну множину A.

Упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів (тобто можуть бути одержані з однієї і тієї ж множини лише переставлянням її елементів), називаються *перестановками*. Загальна кількість перестановок n-елементної множини A позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = n! \qquad (1.3)$$

Приклад 1.5 Скількома різними способами можна розмістити п'ять книжок на книжковій полиці?

Розв'язування

Шукана кількість розміщень є кількістю способів упорядкування множини з п'яти елементів. Значить ця кількість дорівнює $P_5 = 5! = 120$.

Розглянемо таку задачу. Скількома способами можна подати n-елементну множину A у вигляді об'єднання її підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_m$, що попарно не перетинаються, так, щоб $|A_1| = k_1$, $|A_2| = k_2$, … , $|A_m| = k_m$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Поставлену задачу можна розв'язати таким чином. Візьмемо довільну k_1-елементну підмножину A_1 множини A (це можна зробити $C_n^{k_1}$ способами); серед $n - k_1$ елементів, що залишилися, візьмемо k_2-елементну підмножину A_2 множини A (це можна зробити $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами) і т. д. За основним правилом комбінаторики маємо, що кількість шуканих відношень еквівалентності становить

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Таким чином, має місце теорема.

Теорема 1.1 Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – деякі натуральні числа, такі, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Кількість способів, якими можна побудувати розбиття n-елементної множини A на класи $A_1, A_2, \ldots, A_m$, кількість елементів яких відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, становить

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}. \tag{1.4}$$

Числа $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ називають поліноміальними коефіцієнтами.

Розглянемо одне з можливих застосувань даної теореми. Нехай маємо деякий алфавіт $X = \{a, b, c, \ldots, d\}$ з m символів і множину з n символів цього алфавіту, причому серед n елементів цієї множини є k_1 – букв a, k_2 – букв b, … , k_m – букв d і $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Необхідно визначити кількість різних «слів», які можна побудувати з цих n букв.

Перенумеруємо місця, на яких стоять букви, числами від 1 до n. Кожне слово однозначно визначається множинами A_1 (номери місць, на яких стоять букви a), A_2 (номери місць, на яких стоять букви b), …, A_m (номери місць, на яких стоять букви d). Отже, кількість різних слів дорівнює кількості різних подань n-елементної множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ у вигляді об'єднання її підможин A_1, A_2, …, A_m, тобто

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

З цієї задачі випливає інше формулювання попередньої теореми.

Теорема 1.2 Кількість різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких знаходиться k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, …, k_m елементів m-го типу, дорівнює $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Приклад 1.6 Скільки «слів» довжини 8 можна скласти з букв «а» та «б» таких, щоб кількість букв «а» в цих словах не перевищувала три.

Розв'язування

Такими «словами» будуть всі «слова», які не мають жодної «а», всі «слова», які мають одну, дві та три букви «а». Тобто загальна кількість таких слів становить

$$C_8(0, 8) + C_8(1, 7) + C_8(2, 6) + C_8(3, 5) = \frac{8!}{0!8!} + \frac{8!}{1!7!} + \frac{8!}{2!6!} + \frac{8!}{3!5!} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93.$$

Нехай дана деяка неупорядкована n-елементна множина A. Скільки різних упорядкованих k-елементних підмножин може мати ця множина? Розглянемо два можливих варіанти цієї задачі:

а) підмножина має k різних між собою елементів;

б) підмножина має k не обов'язково різних між собою елементів.

Отже, в задачі «а» підмножини задаються не надлишково, а в задачі «б» – надлишково, але кількість всіх різних елементів підмножини разом з кількістю всіх екземплярів кожного з її елементів дорівнює k.

Упорядкована k-елементна підмножина множини A, всі елементи якої різні, називається *розміщенням без повторень*, а будь-яка упорядкована k-елементна підмножина множини A, всі k елементів якої не обов'язково різні, називається *розміщенням з повтореннями*. Зауважимо, що в першому випадку $k \le n$, причому якщо $k = n$, то в цьому випадку розміщення є перестановкою. У другому випадку k не обов'язково має бути меншим за n.

Під час розв'язування задачі «а» слід пам'ятати, що будь-яка її k-елементна підмножина може бути упорядкована одним із $k!$ способів, а кількість всіх можливих різних k-елементних підмножин множини A дорівнює C_n^k. Отже, кількість всіх можливих розміщень із n елементів по k дорівнює $k!{\cdot}C_n^k$, тобто має місце така теорема.

Теорема 1.3 Кількість упорядкованих k-елементних підмножин n-елементної множини A, всі k елементів якої різні, становить

$$A_n^k = k!{\cdot}C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \tag{1.5}$$

Приклад 1.7 Студенту необхідно скласти три іспити протягом семи днів. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язування

Шукана кількість способів дорівнює кількості триелементних упорядкованих підмножин множини з семи елементів, тобто існує $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ способів.

Якщо відомо, що останній іспит буде складатись сьомого дня, то число способів становить $3 \cdot A_5^2 = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

Приклад 1.8 Скількома різними способами можна розмістити п'ять студентів в аудиторії, яка має 20 місць?

Розв'язування

Шукана кількість способів дорівнює кількості розміщень із 20 елементів по 5 елементів, тобто $A_{20}^5 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$.

Розв'яжемо задачу «б». Нехай $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ – деяка скінченна k-елементна множина, а $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – n-елементна множина і $f : B \to A$ – функція з B в A. Як відомо, цю функцію можна задати за допомогою таблиці значень

b_1	b_2	$\ldots$	b_k
a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{ik}

де $a_{ij} = f(b_j), \quad j = \overline{1,k}$. Тепер нашу задачу можна сформулювати так: скільки існує функцій з множини B в множину A? В такому формулюванні задача розв'язується досить просто.

Умовимося називати кортежем довжини k елементи вигляду $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, де a_i – не обов'язково різні елементи деякої скінченної множини A. Оскільки кожний елемент a_{ij} може бути будь-яким елементом множини A, то кількість різних кортежів виду $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ може бути n^k.

Теорема 1.4 Кількість різних упорядкованих k-елементних підмножин n-елементної множини, всі k елементів якої не обов'язково різні між собою, дорівнює n^k.

Приклад 1.9 Скільки різних «слів» можна скласти в алфавіті $X = \{0, 1\}$ з восьми символів?

Розв'язування

Всіх таких «слів» буде стільки, скільки існує відображень восьмиелементної множини в множину з двох елементів, тобто $2^8 = 256$ слів.

1.3 Класичне означення ймовірності

Для практичної діяльності важливо вміти порівнювати події за ступенем їх об'єктивної можливості, тобто за ймовірністю події. Щоб визначення ймовірності стало математичним, необхідно визначити його кількісно.

Нехай результати деякого випробування утворюють повну групу подій та рівноможливі. При цьому кажуть, що випробування зводиться до схеми випадків або «схеми урн» (оскільки будь-яку ймовірнісну задачу можна замінити еквівалентною задачею з урнами та кульками різних кольорів).

Випадок називається *сприятливим події A*, якщо поява цього випадку приводить до появи події *A*.

Згідно з класичним означенням *ймовірність події A* дорівнює відношенню кількості сприятливих цій події випадків до загальної кількості випадків, тобто

$$p(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.6}$$

де $p(A)$ – ймовірність події *A*;
m – кількість сприятливих події *A* випадків;
n – загальна кількість випадків.

Приклад 1.10 На окремих карточках написано три букви А, дві букви Н та одна буква С. Дитина навмання бере картки та прикладає одна до одної всі шість карток. Знайти ймовірність того, що вийде слово «АНАНАС».

Розв'язування

Нехай A= «Вийшло слово «АНАНАС». Загальна кількість випадків $n = P_6 = 6! = 720$. Кількість сприятливих випадків $m = P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 12$, оскільки перестановка трьох букв А, що здійснюється $P_3 = 3!$ способами, та перестановка двох букв Н ($P_2 = 2!$) не змінюють складене з карток слово «АНАНАС». Таким чином,

$$p(A) = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}.$$

Приклад 1.11 В партії 100 виробів, з яких 4 – браковані. Партію довільним чином розділено навпіл і кожну частину відправлено споживачам.

Яка ймовірність того, що всі браковані вироби дістануться: а) одному споживачеві; б) обом споживачам порівну?

Розв'язування

а) Нехай A= «Всі браковані вироби дісталися одному споживачеві». Загальна кількість способів, якими можна вибрати 50 виробів із 100, дорівнює $n = C_{100}^{50}$. Події A сприяють випадки, коли із 50 виробів буде або 46 стандартних з 96, або 50 стандартних з 96, їх кількість $m = C_{96}^{46} \cdot C_4^4 + C_{96}^{50} \cdot C_4^0$. Тому

$$p(A) = \frac{C_{96}^{46} \cdot C_4^4 + C_{96}^{50} \cdot C_4^0}{C_{100}^{50}} = \frac{C_{96}^{46} \cdot 1 + C_{96}^{46} \cdot 1}{C_{100}^{50}} = \frac{2C_{96}^{46}}{C_{100}^{50}} = \frac{2 \cdot 96! \cdot 50! \cdot 50!}{46! \cdot 50! \cdot 100!} =$$

$$= \frac{2 \cdot 96! \cdot 46! \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{46! \cdot 96! \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} = 0{,}117.$$

б) Нехай B= «В кожній партії по два бракованих вироби». Тепер події B сприятимуть випадки, коли з 50 відправлених одному споживачеві виробів буде 48 стандартних з 96 та 2 бракованих з 4, їх кількість $m = C_{96}^{48} \cdot C_4^2$. Тому

$$p(B) = \frac{C_{96}^{48} \cdot C_4^2}{C_{100}^{50}} = \frac{96! \cdot 4! \cdot 50! \cdot 50!}{48! \cdot 48! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 100!} = \frac{96! \cdot (2! \cdot 3 \cdot 4)(48! \cdot 49 \cdot 50)^2}{(48!)^2 \cdot 2! \cdot 2 \cdot (96! \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot (49 \cdot 50)^2}{2 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} = 0{,}383.$$

Слід відмітити, що ймовірності подій використовуються при кількісному оцінюванні інформації дискретних джерел повідомлень. Будь-яке джерело інформації створює повідомлення тільки з того набору символів (елементів), який воно має в своєму арсеналі. Якщо ймовірність вибору символів повідомлень неоднакова, то джерело інформації визначається такою схемою:

$$A = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, \ldots, & a_i, \ldots, & a_m \\ p(a_1), & p(a_2), \ldots, & p(a_i), \ldots, & p(a_m) \end{bmatrix},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ – символи (елементи) алфавіту джерела повідомлень; $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_i), \ldots, p(a_m)$ – ймовірності того, що джерело повідомлень знаходиться в станах $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$, що називається ансамблем повідомлень. При цьому $\sum_{i=1}^{m} p(a_i) = 1$.

1.4 Геометричне означення ймовірності

Одним із істотних недоліків класичного означення ймовірності, який обмежує його використання, є той факт, що таке означення передбачає скінченне число можливих результатів випробування.

Виявляється, іноді цей недолік можна подолати, використовуючи *геометричне* означення ймовірності, тобто знаходячи ймовірність потрапляння точки в деяку область (відрізок, частину площини і т. п.).

Нехай, наприклад, плоска фігура g є частиною плоскої фігури G. На фігуру G навмання кидається точка. Це означає, що всі точки області G «рівноправні» стосовно влучення туди випадково кинутої точки. Нехай подія A= «Влучення кинутої точки на фігуру g» і її ймовірність пропорційна площі фігури g та не залежить ні від її розташування відносно G, ні від її форми. Тоді

$$p(A) = \frac{S_g}{S_G}, \tag{1.7}$$

де S_g та S_G – відповідно площі областей g та G (рис. 1.1).

Фігуру g називають сприятливою події A.

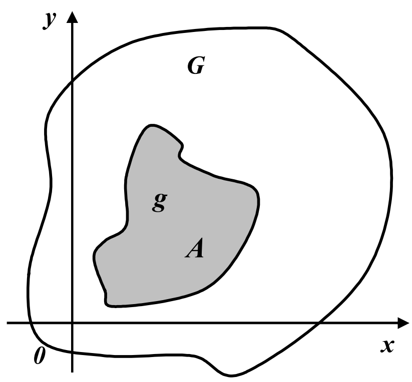


Рисунок 1.1 – Геометрична інтерпретація ймовірності

Область, на яку розповсюджується поняття геометричної ймовірності, може бути одновимірною (пряма, відрізок), двовимірною (площина) та тривимірною (деяке тіло в просторі). Позначивши міру (довжину, площу, об’єм) області через mes, одержуємо таке означення.

Геометричною ймовірністю події A називається відношення міри сприятливої цій події області до міри всієї області, тобто

$$p(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}. \qquad (1.8)$$

Приклад 1.12 Дві особи – A та B вирішили зустрітися в певному місці, домовившись тільки про те, що кожен прийде туди в довільний момент часу з 11-ї до 12-ї години та буде чекати протягом 30 хвилин. Якщо партнер до того часу не надійшов або встиг залишити домовлене місце, зустріч не відбудеться. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язування

Позначимо моменти надходження в певне місце осіб A та B відповідно через x та y. В прямокутній системі координат візьмемо за початок відліку 11-у годину, а за мірило вимірювання – 1 годину. За умовою $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Ці нерівності задовольняють координати будь-якої точки, що належать квадрату $OKLM$ зі стороною, рівною 1 (рис. 1.2).

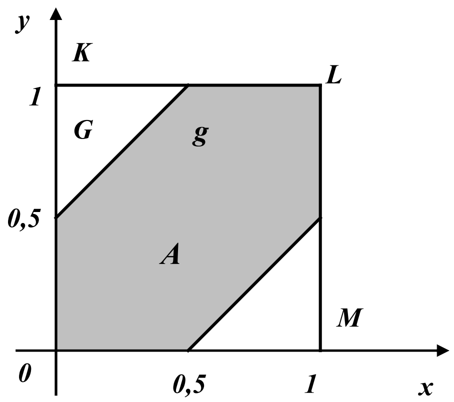


Рисунок 1.2 – Геометрична інтерпретація

Нехай подія C= «Зустріч двох осіб» відбудеться, якщо різниця x та y не перевищує 0,5 години (за абсолютною величиною), тобто $|y-x|\le 0{,}5$. Розв'язком останньої нерівності є смуга $x-0{,}5\le y\le x+0{,}5$, яка всередині квадрата на рисунку 1.2 є заштрихованою областю g. За формулою (1.7)

$$p(C)=\frac{S_g}{S_G}=\frac{1-2\cdot 0{,}5^3}{1^2}=0{,}75,$$

оскільки площа області g дорівнює площі квадрата G без суми площ двох кутових (незаштрихованих) трикутників.

Питання для самоперевірки

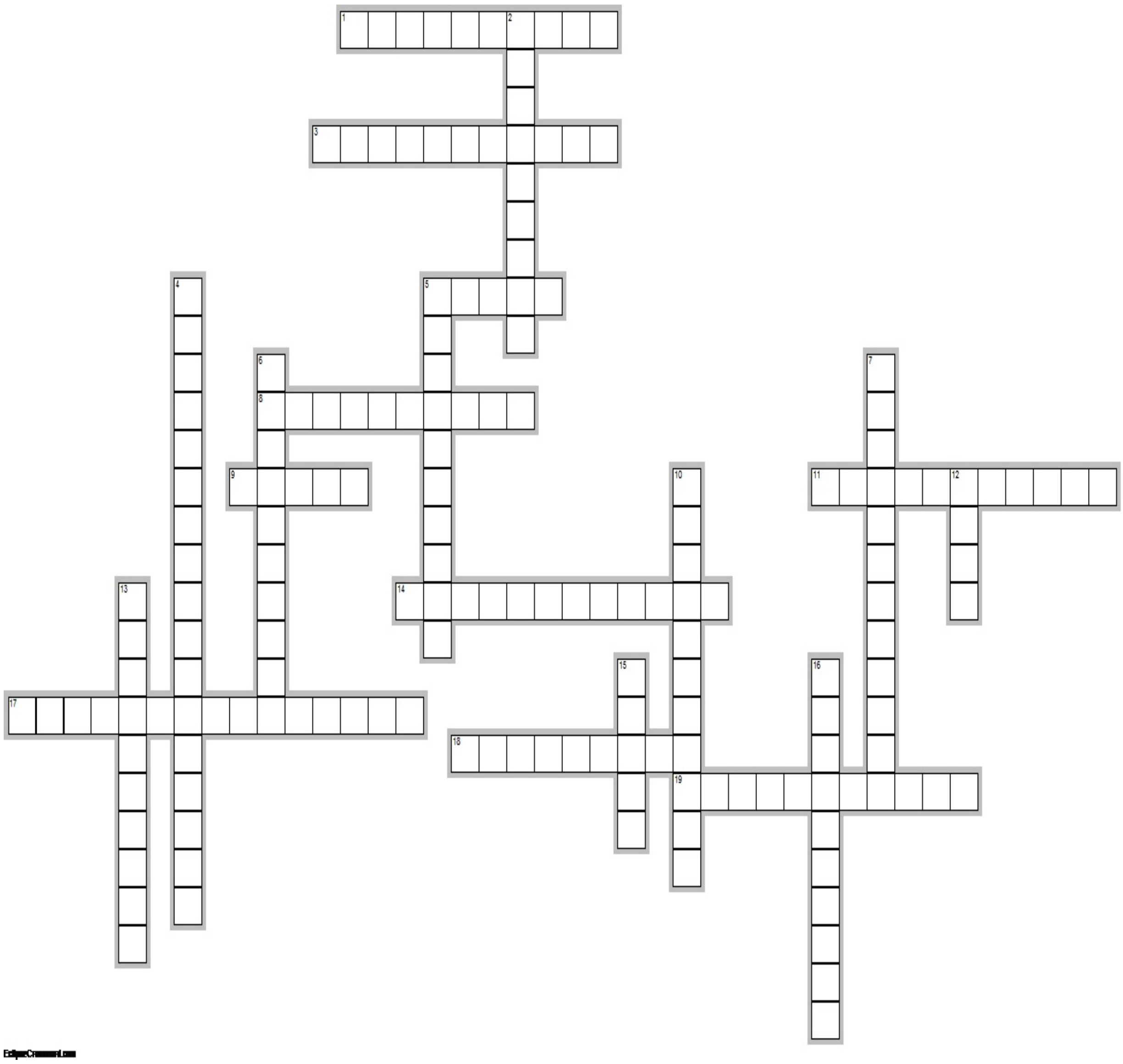
Розгадайте кросворд.

По горизонталі

1. Довільна k-елементна підмножина n-елементної множини.
3. Визначення ймовірності події як відношення міри сприятливої цій події області до міри усієї області.
5. Будь-який спостережуваний результат випробування, який можна зафіксувати.
8. Ймовірність того, що з урни, в якій дві білих і три чорних кульки, виймають одну білу.
9. Рівноможливі несумісні події, що утворюють повну групу.
11. Подія, яку не можна розбити на більш прості події.
14. Події, жодна з яких не є більш можливою за інші.
17. Кількість способів, якими можна скласти комісію для приймання заборгованостей із 12 викладачів кафедри вищої математики.
18. Події, що не можуть відбуватись одночасно.
19. Випадок, поява якого приводить до появи події.

По вертикалі

2. Подія, протилежна події А.
4. Числові величини, які використовують при кількісному оцінюванні інформації дискретних джерел повідомлень.
5. Сукупність усіх взаємно виключних подій, що охоплюють будь-яку подію для даного випробування.
6. Ймовірність того, що при одному підкиданні монети випаде орел.
7. Упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів.
10. Чисельна міра ступеня об’єктивної можливості події.
12. Ймовірність неможливої події.
13. Подія, яка відбувається за будь-яких обставин.
15. Кількість способів, якими можна розмістити 3 книги на книжковій полиці.
16. Дві несумісні події, з яких одна обов’язково повинна відбутись.



ТЕМА 2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1 Теорема додавання ймовірностей

Сформулюємо теорему (правило) додавання ймовірностей.

Теорема 2.1 Ймовірність суми скінченної кількості несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B+\ldots+K)=p(A)+p(B)+\ldots+p(K). \qquad (2.1)$$

Доведення

Доведемо теорему для схеми випадків, розглядаючи суму двох подій.

Нехай в результаті випробування із загальної кількості n рівноможливих та несумісних наслідків випробування події A сприяють m_1 випадків, а події B – m_2 випадків (рис. 2.1).

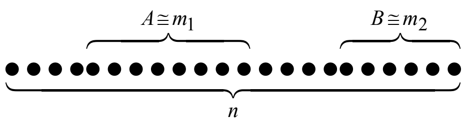


Рисунок 2.1 – Геометричне тлумачення

Згідно з класичним означенням $p(A)=\dfrac{m_1}{n}$, $p(B)=\dfrac{m_2}{n}$. Оскільки ці події несумісні, то жоден із випадків, сприятливих одній події, не є сприятливим іншій (рис. 2.1). Тому події $A+B$ сприятливими є m_1+m_2 випадків. Таким чином,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=p(A)+p(B).$$

Наслідок 1 Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1:

$$p(A)+p(B)+\ldots+p(K)=1. \tag{2.2}$$

Дійсно, якщо події $A, B, \ldots, K$ утворюють повну групу, то вони єдино можливі та несумісні.

Оскільки події $A, B, \ldots, K$ – єдино можливі, то подія $A+B+\ldots+K$, суть якої у появі в результаті випробування хоча б однієї з цих подій, є достовірною. Тобто: $P(A+B+\ldots+K)=1$. В силу теореми додавання ймовірностей для несумісних подій $A, B, \ldots, K$ маємо

$$P(A+B+\ldots+K)=p(A)+p(B)+\ldots+p(K)=1.$$

Наслідок 2 Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \tag{2.3}$$

Дане твердження випливає з того, що протилежні події утворюють повну групу.

Приклад 2.1 Ймовірність виходу з ладу пристрою при експлуатації терміном до року дорівнює 0,13, а при експлуатації терміном понад три роки – 0,36. Знайти ймовірність виходу з ладу пристрою при експлуатації від року до 3 років.

Розв'язування

Нехай

$A=$ «Вихід з ладу пристрою при експлуатації терміном до року»;

$B=$ «Вихід з ладу пристрою при експлуатації терміном від року до трьох років»;

$C=$ «Вихід з ладу пристрою при експлуатації терміном понад три роки».

За умовою $p(A)=0{,}13$, $p(C)=0{,}36$. Зрозуміло, що $C=A+B$, де події A та B несумісні. За теоремою додавання $p(C)=p(A)+p(B)$, звідки $p(B)=p(C)-p(A)=0{,}36-0{,}13=0{,}23$.

Зауваження. Розглянута *теорема додавання застосовується лише для несумісних подій* і спроба її використання для сумісних подій призводить до хибних і навіть абсурдних результатів. Наприклад, нехай ймовірність події $A_i=$ «Виграш на будь-який білет грошово-речової лотереї» дорівнює $p(A_i)=0{,}05$ і придбано 100 білетів ($i=\overline{1,100}$). Тоді, застосовуючи теорему додавання, одержимо, що ймовірність виграшу хоча б на один із 100 білетів дорівнює

$$p(A_1+A_2+\ldots+A_{100})=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_{100})=\underbrace{0{,}05+0{,}05+\ldots+0{,}05}_{100\,раз}=5.$$

Абсурдність одержаної відповіді пояснюється неможливістю застосування в даному випадку теореми додавання, оскільки виграші на кожен із білетів (події A_i, $i=\overline{1,100}$) є сумісними подіями.

2.2 Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей. Незалежні події

Розглянемо приклад.

Приклад 2.2 У ящику 5 деталей, серед яких 3 стандартні і 2 браковані. По черзі з нього виймають по одній деталі (з поверненням та без повернення). Знайти ймовірність того, що вийнята вдруге деталь є стандартною за умови, що першого разу вийняли: а) стандартну деталь; б) браковану деталь.

Розв'язування

Нехай події A та B – поява стандартної деталі відповідно першого та другого разу. Очевидно, що $p(A)=\dfrac{3}{5}$. Якщо витягнута деталь повертається до ящика, то ймовірність витягнути стандартну деталь вдруге $p(B)=\dfrac{3}{5}$. Якщо витягнута деталь до ящика не повертається, то ймовірність витягнути стандартну деталь вдруге $p(B)$ залежить від того, яку деталь було витягнуто першого разу – стандартну (подія A) чи браковану (подія $\overline{A}$). В першому випадку $p(B)=\dfrac{2}{4}$, в другому випадку $p(B)=\dfrac{3}{4}$, оскільки серед тих чотирьох деталей, що залишились, стандартних деталей буде дві або три.

Розглянутий приклад наочно продемонстрував поняття *умовної ймовірності* – ймовірності події B, знайденої за умови, що подія A відбулась. Позначається умовна ймовірність $p_A(B)$ або $p(B|A)$.

В прикладі 2.2 маємо, що $p_A(B)=\dfrac{2}{4}$ і $p_{\overline{A}}(B)=\dfrac{3}{4}$.

Має місце теорема.

Теорема 2.2 Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, знайдену за умови, що перша подія відбулась, тобто

$$p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)=p(B)\cdot p_B(A). \tag{2.4}$$

Доведення

Нехай із загальної кількості рівноможливих та несумісних наслідків випробування (подій) події A сприяє m випадків, події B – k випадків, а їх одночасній появі, тобто події AB – l випадків ($l \le m, l \le k$) (рис. 2.2).

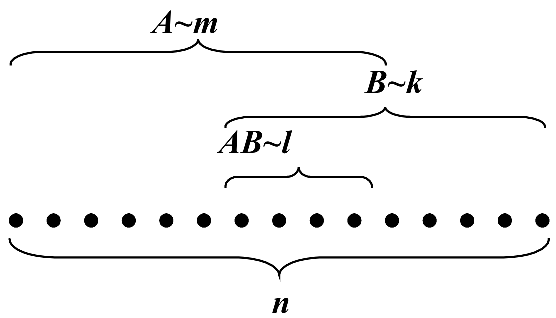


Рисунок 2.2 – Геометричне тлумачення випробування

Згідно з класичним означенням ймовірності $p(A)=\dfrac{m}{n}$, $p(AB)=\dfrac{l}{n}$.

Після того як подія A відбулась, число всіх рівноможливих випадків скоротилось з n до m, а число випадків, сприятливих події B – з k до l. Тому умовна ймовірність становить

$$p_A(B)=\frac{l}{m}=\frac{l/n}{m/n}=\frac{p(AB)}{p(A)}. \tag{2.5}$$

Аналогічно

$$p_B(A) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \qquad (2.6)$$

Помноживши праву та ліву частину рівностей (2.5) та (2.6) відповідно на $p(A)$ та $p(B)$, одержуємо

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A).$$

Теорема множення ймовірностей легко узагальнюється на випадок довільної кількості подій:

$$p(ABC\ldots KL) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{AB}(C) \cdot \ldots \cdot p_{ABC\ldots K}(L), \qquad (2.7)$$

тобто ймовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовні ймовірності інших; при цьому умовна ймовірність кожної наступної події обчислюється за припущення, що всі попередні події відбулись.

Приклад 2.3 Робота електронного пристрою припинилась внаслідок виходу із ладу одного з п'яти уніфікованих блоків. Проводиться послідовна заміна кожного блока новим до тих пір, доки пристрій не почне працювати. Яка ймовірність того, що доведеться замінити: а) 2 блоки; б) 4 блоки?

Розв'язування

а) Позначимо події:
A_i= «i-тий блок справний», $i = \overline{1,5}$;
B= «Заміна двох блоків».

Зрозуміло, що доведеться замінити два блоки, якщо 1-й блок справний (4 шанси з 5), а 2-ий – несправний (1 шанс з 4, що залишились), тобто $B = A_1 \cdot \overline{A_2}$. Таким чином, за теоремою множення (2.4)

$$p(B) = p(A_1 \cdot \overline{A_2}) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

б) Нехай подія C =«Заміна чотирьох блоків». Очевидно, що

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_2 \cdot \overline{A_4} = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1A_2}(A_3) \cdot p_{A_1A_2A_3}(\overline{A_4}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Слід відмітити, що умовну ймовірність досить часто використовують при визначенні ентропії складних повідомлень, що їх виробляють декілька статистичних джерел. Наприклад, для залежних джерел повідомлень A та B умовна ймовірність $p(a_i|b_j)$ – це ймовірність того, що джерело повідомлень A набуде i-ого стану, якщо відомо, що джерело B набуло j-ого стану. Сукупна ймовірність появи двох взаємонезалежних подій визначається як добуток ймовірності появи однієї з них на умовну ймовірність другої відносно першої.

Теорема множення ймовірностей набуває найбільш простого вигляду коли події, що утворюють добуток, *незалежні.* Подія B називається незалежною від події A, якщо її ймовірність не залежить від того, відбулась подія A чи ні $p(B)=p_A(B)$ (або $p(A)=p_B(A)$). В протилежному випадку подія B буде називатись залежною від події A.

Доведемо, що якщо подія B не залежить від A, то і подія A не залежить від B.

Дійсно, оскільки за умовою подія B не залежить від A, то $p(B)=p_A(B)$. Запишемо теорему множення ймовірностей (2.4) в двох формах:

$$p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)=p(B)\cdot p_B(A).$$

Замінюючи $p_A(B)$ на $p(B)$, одержуємо: $p(A)\cdot p(B)=p(B)\cdot p_B(A)$.

Припускаючи, що $p(B)\neq 0$ маємо: $p(A)=p_B(A)$, тобто подія A не залежить від B.

Таким чином, залежність та незалежність подій завжди взаємна. Тому можна дати інше означення незалежності подій.

Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої.

Приклад 2.4 Встановити залежні чи ні події A та B з прикладу 2.2.

Розв'язування

У випадку повернення витягнутої деталі $p_A(B)=p_B(A)=p(B)=\dfrac{3}{5}$, тобто події A та B незалежні. Якщо витягнута деталь до ящика не повертається, то $p_A(B)\neq p_B(A)$ $\left(\dfrac{2}{4}\neq\dfrac{3}{4}\right)$, тобто $p_A(B)\neq p(B)$ і події A та B залежні.

Приклад 2.5 Ймовірність влучного пострілу для першого стрілка дорівнює 0,8, для другого – 0,7 для третього – 0,9. Кожен стрілок робить по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що в мішені буде рівно два отвори.

Розв'язування

Позначимо події:

A_i = «Влучний постріл i-го стрілка», $i=1,2,3$;

B = «В мішені рівно два отвори».

Зрозуміло, що $B=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot A_3\cdot\overline{A_2}+A_3\cdot A_2\cdot\overline{A_1}$. За теоремами додавання та множення для незалежних подій

$$p(B)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A_3})+p(A_1)\cdot p(A_3)\cdot p(\overline{A_2})+p(A_3)\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A_1})=$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}398.$$

Зауваження. Говорячи про незалежність подій, відмітимо таке.

1) В основі незалежності подій лежить їх фізична незалежність. Це означає, що множини випадкових факторів, що призводять до того чи іншого наслідку випробування, не перетинаються. Наприклад, якщо в цеху є дві установки, що ніяк не пов'язані між собою за умовами виробництва, то простій кожної установки – незалежні події. Якщо ці установки пов'язані єдиним технологічним циклом, то простій однієї з цих установок залежить від стану роботи іншої.

Разом з тим, якщо множини випадкових факторів перетинаються, то події, що з'являються в результаті випробування, не обов'язково залежні.

Наприклад розглядаються події:

$A =$ «Витягнута навмання з колоди карта пікової масті»;

$B =$ «Витягнута навмання з колоди карта – туз».

Потрібно з'ясувати, чи є події A та B залежними. Маємо $p(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (в колоді 4 тузи із 36 карт), $p_A(B) = \frac{1}{9}$ (в колоді 1 туз із 9 карт пікової масті).

Оскільки $p_A(B) = p(B)$, то події A та B незалежні.

2) Попарна незалежність декількох подій ще не означає їх незалежності в сукупності. Переконаємось в цьому на прикладі (приклад С. М. Бернштейна).

Припустимо, що грані правильного тетраедра пофарбовані: 1-ша – в червоний колір (подія A), 2-га – в зелений (подія B), 3-тя – в синій (подія C) і 4-та – в усі три кольори (подія ABC). При підкиданні тетраедра ймовірність появи будь-якої грані однакового кольору дорівнює 0,5 (оскільки всього граней 4, а з відповідним кольором 2, тобто два шанси з чотирьох). Таким чином, $p(A) = p(B) = p(C) = 0{,}5$.

В такий же спосіб можна підрахувати, що

$$p_B(A) = p_A(B) = p_C(A) = p_C(B) = p_A(C) = p_B(C) = 0{,}5$$

(один шанс з двох), тобто події A, B та C попарно незалежні. Якщо відбулись одночасно дві події, наприклад A та B (подія AB), то третя подія C обов'язково відбудеться, тобто $p_{AB}(C) = 1$ і аналогічно $p_{AC}(B) = 1$, $p_{BC}(A) = 1$. Це означає, що ймовірність кожної з подій A, B та C змінилась і ці події залежні.

Під час розв'язування певного класу задач необхідно знайти ймовірність суми двох або декількох сумісних подій, тобто ймовірність появи хоча б однієї з цих подій. Нагадаємо, що в цьому випадку застосовувати теорему додавання ймовірностей у вигляді (2.1) не можна.

Теорема 2.3 Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку, тобто

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB). \tag{2.8}$$

Доведення

Подамо подію $A+B$, суть якої є поява хоча б однієї з подій A та B, у вигляді суми трьох несумісних варіантів:

$$A+B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB.$$

Тоді за теоремою додавання маємо

$$p(A+B) = p(A\overline{B}) + p(\overline{A}B) + p(AB). \qquad (2.9)$$

Враховуючи, що $A = A\overline{B} + AB$, $p(A) = p(A\overline{B}) + p(AB)$ і аналогічно $B = \overline{A}B + AB$, $p(B) = p(\overline{A}B) + p(AB)$, знаходимо

$$p(A\overline{B}) = p(A) - p(AB); \quad p(\overline{A}B) = p(B) - p(AB). \qquad (2.10)$$

Таким чином, підставляючи вирази (2.10) в (2.9), одержуємо

$$p(A+B) = [p(A) - p(AB)] + [p(B) - p(AB)] + p(AB) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Зауваження. У випадку трьох та більше сумісних подій формула (2.8) досить громіздка. Тому простіше перейти до протилежної події L:

$$L = \overline{A+B+\ldots+K} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\ldots\cdot\overline{K}.$$

Враховуючи те, що протилежні події утворюють повну групу, маємо:

$$p(A+B+\ldots+K) = 1 - p(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\ldots\cdot\overline{K}), \qquad (2.11)$$

тобто ймовірність суми декількох сумісних подій $A, B, \ldots, K$ дорівнює різниці між одиницею та ймовірністю добутку протилежних подій $\overline{A}, \overline{B}, \ldots, \overline{K}$.

Якщо при цьому події $A, B, \ldots, K$ – незалежні, то

$$p(A+B+\ldots+K) = 1 - p(\overline{A})\cdot p(\overline{B})\cdot\ldots\cdot p(\overline{K}). \qquad (2.12)$$

Приклад 2.6 Серед 100 лотерейних квитків є 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б на один із квитків, якщо придбано: а) 2 квитки; б) 4 квитки?

Розв'язування

Нехай A_i= «Виграш на i-ий квиток», $i = 1, 2, 3, 4$.

а) За формулою (2.8) ймовірність виграшу хоча б на один із квитків

$$p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2) =$$

$$= \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0{,}098.$$

б) За формулою (2.11) ймовірність виграшу хоча б на один квиток із чотирьох

$$p(A_1 + A_1 + A_3 + A_4) = 1 - p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) = 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} = 0{,}188.$$

2.3 Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Теорема 2.3 Якщо подія A може відбутись тільки за умови появи однієї з подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків кожної з гіпотез на відповідні умовні ймовірності події A:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p_{H_i}(A). \qquad (2.13)$$

Доведення

За умовою гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу, тобто вони єдино можливі та несумісні.

Оскільки гіпотези єдино можливі, а подія A за умовою теореми може відбутись лише з однією з них, то

$$A = H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A.$$

В силу несумісності гіпотез можна застосувати теорему додавання ймовірностей:

$$p(A) = p(H_1 A) + p(H_2 A) + \ldots + p(H_n A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i A).$$

За теоремою множення ймовірностей $p(H_i A) = p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)$. Підставивши ці рівності у попередній вираз, одержуємо

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p_{H_i}(A).$$

Наслідком теореми множення та формули повної ймовірності є ***формула Байєса.***

Вона застосовується тоді, коли подія A, яка може відбутись тільки за появи однієї з подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу, відбулась і необхідно провести кількісне переоцінювання апріорних ймовірностей цих гіпотез $p(H_1), p(H_2), \ldots, p(H_n)$, відомих до випробування. Тобто необхідно знайти апостеріорні (одержувані після проведення випробування) умовні ймовірності гіпотез $p_A(H_1)$, $p_A(H_2)$,..., $p_A(H_n)$.

Для одержання шуканої формули запишемо теорему множення ймовірностей подій A та H_i в двох формах:

$$p(AH_i)=p(A)\cdot p_A(H_i)=p(H_i)\cdot p_{H_i}(A),$$

звідки

$$p_A(H_i)=\frac{p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}{p(A)}, \tag{2.14}$$

або, враховуючи (2.13),

$$p_A(H_i)=\frac{p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}p(H_i)\cdot p_{H_i}(A)}. \tag{2.15}$$

Формула (2.15) називається ***формулою Байєса.*** Значення цієї формули полягає в тому, що при появі події A, тобто із надходженням нової інформації, ми можемо перевіряти та коригувати висунуті до випробування гіпотези. Байєсівський підхід дає змогу коригувати управлінські рішення в економіці, оцінки невідомих параметрів розподілу ознак, що вивчаються в статистичному аналізі і т. п.

Приклад 2.7 До торгової фірми надійшли телевізори від трьох постачальників у співвідношенні 1:4:5. Практика показує, що телевізори, які надходять від 1-го, 2-го та 3-го постачальників, не потребують ремонту протягом гарантійного терміну відповідно у 98, 88 та 92% випадків. 1) Знайти ймовірність того, що одержаний телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного терміну. 2) Проданий телевізор потребував ремонту протягом гарантійного терміну. Від якого постачальника найімовірніше надійшов цей телевізор?

Розв'язування

1) Позначимо події:

H_i= «Телевізор надійшов до торгової фірми від i-го постачальника», $i=1,2,3$;

A= «Телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного терміну».

За умовою:

$$p(H_1)=\frac{1}{1+4+5}=0{,}1; \quad p_{H_1}(A)=0{,}98;$$

$$p(H_2)=\frac{4}{1+4+5}=0{,}4; \quad p_{H_2}(A)=0{,}88;$$

$$p(H_3)=\frac{5}{1+4+5}=0{,}5; \quad p_{H_3}(A)=0{,}92.$$

За формулою повної ймовірності (2.13)

$$p(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}88 + 0{,}5 \cdot 0{,}92 = 0{,}91.$$

2) Подія $\overline{A} =$ «Телевізор потребує ремонту протягом гарантійного терміну»; $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$.

За умовою

$$p_{H_1}(\overline{A}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02; \quad p_{H_2}(\overline{A}) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12; \quad p_{H_3}(\overline{A}) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08.$$

За формулою Байєса (2.15)

$$p_{\overline{A}}(H_1) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}02}{0{,}09} = 0{,}022; \qquad p_{\overline{A}}(H_2) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}12}{0{,}09} = 0{,}533;$$

$$p_{\overline{A}}(H_3) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}08}{0{,}09} = 0{,}444.$$

Таким чином, після появи події $\overline{A}$ ймовірність гіпотези H_2 збільшилась з $p(H_2) = 0{,}4$ до максимальної $p_{\overline{A}}(H_2) = 0{,}533$.

Якщо раніше найбільш ймовірною була гіпотеза H_3, то у світлі нової інформації (поява події $\overline{A}$) найбільш ймовірною стала гіпотеза H_2 – телевізор надійшов від другого постачальника.

Вправи

1. * Скільки, в середньому, разів потрібно підкинути гральний кубик до появи шістки?

2. * Три в'язні A, B, C однакової зразкової поведінки подали прохання щодо дострокового звільнення. Адміністрація вирішила звільнити двох з трьох. Таке рішення відоме в'язням, але вони не знають хто саме ці двоє. У в'язня A в охороні є товариш, який знає, кого саме випустять, але A вважає неетичним запитувати, чи буде його звільнено. Однак хоче запитати, чи буде звільнений в'язень B чи C. Перш ніж запитати, він оцінює ймовірність свого звільнення як $2/3$. A думає, що якщо охоронець скаже «B буде звільнено», то його шанси зменшаться до 0,5, оскільки в цьому випадку будуть звільнені або A та B, або B та C. Однак A помиляється в своїх розрахунках. Поясніть це явище.

ТЕМА 3 ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Досить часто виникають задачі, які можна подати у вигляді випробувань, що багаторазово повторюються, і в яких потрібно знайти ймовірність числа m появ деякої події A в n випробуваннях. Наприклад, необхідно визначити ймовірність певної кількості влучень у мішень при декількох пострілах, ймовірність певного числа бракованих виробів в даній партії і т. д.

Якщо ймовірність появи події A у кожному випробуванні не змінюється залежно від результатів інших випробувань, то такі випробування називають *незалежними відносно події* A. Якщо незалежні повторні випробування проводяться за одних і тих же умов, то ймовірність появи події A в кожному випробуванні залишається сталою. Описана послідовність незалежних випробувань одержала назву *схеми Бернуллі.*

3.1 Формула Бернуллі (частинна теорема повторення випробувань)

Теорема 3.1 Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m раз в n незалежних випробуваннях, дорівнює

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{3.1}$$

де $q = 1 - p$.

Доведення

Нехай

A_i = «Поява події A в i-му випробуванні»;

$\overline{A_i}$ = «Відсутність події A в i-му випробуванні», i=1, 2, 3,…, n;

B_m = «В n незалежних випробуваннях подія A з'явилась m разів».

Подамо подію B_m через елементарні події A_i та $\overline{A_i}$.

Наприклад, при $n = 3$, $m = 2$ подія B_2 набуває вигляду

$$B_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

В загальному вигляді маємо

$$B_m = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A_{m+1}} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A_{n-1}} \cdot A_n + \ldots +$$

$$+ \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \overline{A_{n-m}} \cdot A_{n-m+1} \cdot \ldots \cdot A_n, \tag{3.2}$$

тобто кожен варіант появи події B_m (кожен доданок суми (3.2)) складається з m появ події A та $n - m$ непояв цієї події.

Кількість всіх варіантів (доданків суми (3.2)) дорівнює кількості способів вибору з n випробувань m, в яких з'явилась подія A, тобто кількості комбінацій C_n^m. Ймовірність кожного такого варіанта за теоремою множення незалежних подій дорівнює $p^m \cdot q^{n-m}$, оскільки $p(A_i) = p$, $p(\overline{A_i}) = q$, i=1, 2, 3,…, n. Через те, що варіанти несумісні, за теоремою додавання ймовірностей маємо

$$P_{m,n} = p(B_m) = \underbrace{p^m \cdot q^{n-m} + \ldots + p^m \cdot q^{n-m}}_{C_n^m \quad раз} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Приклад 3.1 Ймовірність виготовлення на автоматичному станку стандартної деталі дорівнює 0,8. Знайти ймовірності можливої кількості появи бракованих деталей серед 5 відібраних.

Розв'язування

Ймовірність виготовлення бракованої деталі $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Шукані ймовірності знаходимо за формулою Бернуллі (3.1):

$$P_{0,5} = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}32768; \quad P_{1,5} = C_5^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096;$$

$$P_{2,5} = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048; \quad P_{3,5} = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$$

$$P_{4,5} = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064; \quad P_{5,5} = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032.$$

Одержані ймовірності зобразимо графічно точками з координатами $(m, \ P_{m,n})$. З'єднуючи ці дискретні точки прямолінійними відрізками, одержимо *багатокутник або полігон розподілу ймовірностей* (рис. 3.1)

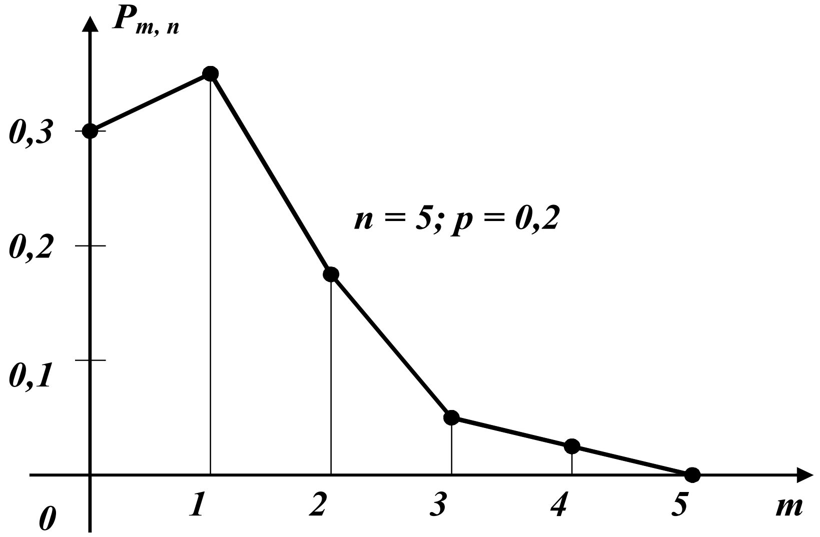


Рисунок 3.1 – Полігон розподілу ймовірностей

Розглянувши багатокутник розподілу (рис. 3.1) відмічаємо, що є таке значення $m_0 = 1$, яке має найбільшу ймовірність $P_{m,n}$.

Число m_0 появ події A в n випробуваннях називається *найімовірнішим*, якщо ймовірність появи цієї події $P_{m_0,n}$ принаймні не менша за ймовірності інших подій $P_{m,n}$ для довільного m.

Для знаходження m_0 складемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} P_{m_0,n} \ge P_{m_0+1,n}, \\ P_{m_0,n} \ge P_{m_0-1,n}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Розв'яжемо першу нерівність системи (3.3). Використовуючи формули Бернуллі та числа комбінацій без повторень, запишемо:

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}.$$

Оскільки $(m_0+1)! = m_0!(m_0+1)$, $(n-m_0)! = (n-m_0-1)!(n-m_0)$, то одержуємо спрощену нерівність $\frac{1}{n-m_0} q \ge \frac{1}{m_0+1} p$, звідки $q(m_0+1) \ge p(n-m_0)$.

Тепер $m_0(p+q) \ge np - q$ або $m_0 \ge np - q$ (оскільки $p+q=1$).

Розв'язуючи другу нерівність системи (3.3), одержуємо аналогічно: $m_0 \le np + p$. Об'єднуючи одержані розв'язки двох нерівностей, маємо подвійну нерівність:

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{3.4}$$

Відмітимо, що оскільки різниця $np + q - (np - p) = p + q = 1$, то завжди існує ціле число m_0, яке задовольняє нерівність (3.4)

Приклад 3.2 За даними прикладу 3.1 знайти найімовірнішу кількість появи бракованих деталей серед 5 відібраних та ймовірність цієї кількості.

Розв'язування

За формулою (3.4) $5 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le m_0 \le 5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2$ або $0{,}2 \le m_0 \le 1{,}2$. Єдине ціле число, що задовольняє одержану нерівність, $m_0 = 1$, а її ймовірність $P_{1,5} = 0{,}4096$ була обчислена в прикладі 2.1.

Приклад 3.3 Скільки разів потрібно підкидати гральний кубик, щоб найімовірніше випадіння трійки дорівнювало б 10?

Розв'язування

У даному випадку $p = \frac{1}{6}$. Згідно з (3.4) $n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 10 \le n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ або $n - 5 \le 60 \le n + 1$. Звідки $59 \le n \le 65$, тобто гральний кубик потрібно підкинути від 59 до 65 разів включно.

3.2 Загальна теорема повторення випробувань

Нехай випробування проводяться в неоднакових умовах і ймовірність події від випробування до випробування змінюється. Позначимо через p_i – ймовірність появи події A в i-му випробуванні; $q_i = 1 - p_i$ – ймовірність відсутності події A в i-му випробуванні. Нехай ймовірність $P_{m,n}$ – ймовірність того, що в результаті n випробувань подія A з'явиться m раз. Тоді функцію

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i)z\,, \tag{3.5}$$

де z – довільний параметр, називають *продукувальною функцією ймовірностей* $P_{m,n}$, якщо її розвинення в ряд за степенями z дає як коефіцієнти ймовірності $P_{m,n}$.

Має місце теорема.

Теорема 3.2 Ймовірність того, що подія A в n незалежних випробуваннях з'явиться m раз, дорівнює коефіцієнту при z^m у виразі виробничої функції, тобто

$$\varphi_n(z) = \sum_{m=0}^{n} P_{m,n} \cdot z^m. \tag{3.6}$$

Приклад 3.4 Проводяться чотири незалежні постріли по одній і тій же мішені з різних відстаней. Ймовірність влучення при цих пострілах дорівнює $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$. Знайти ймовірності жодного, одного, двох, трьох та чотирьох влучень.

Розв'язування

Побудуємо виробничу функцію за формулою (3.5):

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i)z = (0{,}9 + 0{,}1z)(0{,}8 + 0{,}2z)(0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}6 + 0{,}4z) =$$
$$= 0{,}302 + 0{,}440z + 0{,}215z^2 + 0{,}040z^3 + 0{,}002z^4.$$

Тоді за формулою (3.6) маємо: $P_{0,4} = 0{,}302$; $P_{1,4} = 0{,}44$; $P_{2,4} = 0{,}215$; $P_{3,4} = 0{,}04$; $P_{4,4} = 0{,}002$.

3.3 Формула Пуассона

Припустимо, що потрібно обчислити ймовірність $P_{m,n}$ появи події A при великій кількості випробувань n, наприклад, $P_{300,\,500}$. За формулою Бернуллі (3.1)

$$P_{300,\,500}=\frac{500!}{300!\cdot 200!}\cdot p^{300}\cdot q^{200}.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку безпосереднє обчислення за формулою Бернуллі технічно складне, особливо якщо врахувати, що самі p та q – дробові числа. Тому виникає бажання мати більш прості наближені формули обчислення $P_{m,n}$ при достатньо великих n. Такі формули, що називаються *асимптотичними*, існують та визначаються теоремами Пуассона, локальною та інтегральною теоремами Муавра – Лапласа. Найбільш простою є теорема Пуассона.

Теорема 3.3 Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні прямує до нуля ($p\to 0$) при необмеженому збільшенні кількості випробувань n ($n\to\infty$), причому добуток np прямує до сталого числа λ ($np\to\lambda$), то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m разів в n незалежних випробуваннях, задовольняє граничну рівність

$$\lim_{n\to\infty}P_{m,n}=P_m(\lambda)=\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (3.7)$$

Доведення

За формулою Бернуллі (3.1)

$$P_{m,n}=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}p^m(1-p)^n(1-p)^{-m},$$

або, враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}np=\lambda$, тобто при достатньо великих n $p\approx\dfrac{\lambda}{n}$ і

$$P_{m,n}\approx\frac{\lambda^m}{m!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)=\ldots=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{m-1}{n}\right)=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right)^{-\lambda}=e^{-\lambda}$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{-m}=1$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}.$$

Строго кажучи, умова теореми Пуассона суперечить вихідному твердженню схеми випробування Бернуллі, згідно з яким ймовірність появи події в кожному випробуванні $p = const$. Однак у випадку, коли p – стала і мала, кількість випробувань n велика та число $\lambda = np$ – незначне (будемо припускати, що $\lambda = np \le 10$), то з граничної рівності (3.7) випливає *наближена формула Пуассона:*

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda). \tag{3.8}$$

У таблиці (додаток А) наведено значення функції Пуассона $P_m(\lambda)$.

Приклад 3.5 На факультеті навчається 1825 студентів. Яка ймовірність того, що 6 січня є днем народження одночасно чотирьох студентів факультету?

Розв'язування

Ймовірність того, що день народження студента 6 січня, дорівнює $p = \frac{1}{365}$. Оскільки ймовірність $p = \frac{1}{365}$ – мала, $n = 1825$ – велике та $\lambda = np = \frac{1825}{365} = 5 \le 10$, то застосуємо формулу Пуассона (3.8):

$P_{4,1825} = P_4(5) = 0{,}1755$ (за додатком А).

3.4 Локальна та інтегральна формули Муавра – Лапласа

Теорема 3.4 *(локальна теорема Муавра – Лапласа).* Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала та відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A з'явиться m разів в n незалежних випробуваннях при достатньо великому n, наближено дорівнює

$$P_{m,n} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{3.9}$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ – } \textit{функція Гаусса} \tag{3.10}$$

та

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (3.11)$$

Чим більше n, тим точніша наближена формула (3.9), яка називається *локальною формулою Муавра – Лапласа.* Наближені значення ймовірностей $P_{m,n}$, обчислені за формулою (3.9), на практиці досить часто використовують як точні при $npq \geq 20$.

Для спрощення розрахунків, пов'язаних з використанням формули (3.9), складено таблицю значень функції Гаусса (додаток Б). Користуючись цією таблицею, необхідно знати основні ***властивості*** функції $\varphi(x)$ (3.10).

1. Функція $\varphi(x)$ є парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. Функція $\varphi(x)$ – монотонно спадна при додатних значеннях x, зокрема при $x \to \infty$, $\varphi(x) \to 0$ (можна вважати, що вже при $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$).

Приклад 3.6 В деякій місцевості із 100 сімей 80 мають авто. Знайти ймовірність того, що із 400 сімей авто мають 300.

Розв'язування

Ймовірність того, що сім'я має авто, становить $p = \frac{80}{100} = 0{,}8$. Оскільки $n = 400$ достатньо велике (умова $npq = 400 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8) = 64 \geq 20$ виконується), то застосовуємо локальну теорему Муавра – Лапласа.

Спочатку визначаємо за формулою (3.11) $x = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5$. Тоді за формулою (3.9)

$$P_{300,\,400} \approx \frac{\varphi(-2{,}5)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{\varphi(2{,}5)}{\sqrt{64}} = \frac{0{,}0175}{8} \approx 0{,}0022$$

(значення $\varphi(2{,}5)$ знайдено за таблицею додатка В).

Досить мале значення ймовірності $P_{300,\,400}$ не повинно викликати сумніви, оскільки окрім події «рівно 300 сімей із 400 мають авто» можливими є ще 400 подій: «0 із 400», «1 із 400», …, «400 із 400» зі своїми ймовірностями. Усі ці події утворюють повну групу, а це означає, що сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.

Нехай за умовою прикладу (3.6) необхідно знайти ймовірність того, що від 300 до 360 сімей (включно) мають авто. В цьому випадку, за теоремою додавання ймовірність шуканої події

$$P_{400}(300 \leq m \leq 360) = P_{300,\,400} + P_{301,\,400} + \ldots + P_{360,\,400}.$$

Загалом обчислити кожен доданок можна і за локальною формулою Муавра–Лапласа, але велика кількість доданків робить розрахунки досить громіздкими. В таких випадках використовується така теорема.

Теорема 3.5 (*інтегральна теорема Муавра – Лапласа).* Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала та відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_{m,n}$ того, що число m появ події A в n незалежних випробуваннях належить відрізку $[a, b]$ при достатньо великому n, наближено дорівнює

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right], \tag{3.12}$$

де

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \; - \tag{3.13}$$

*функція (*або *інтеграл ймовірностей) Лапласа;*

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3.14}$$

Формула (3.12) називається *інтегральною формулою Муавра – Лапласа*. Ця наближена формула на практиці досить часто використовується як точна при $npq \ge 20$.

Функція $\Phi(x)$ табульована (додаток *B*). Для застосування цієї таблиці потрібно знати ***властивості*** функції Лапласа.

1. Функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Дійсно,

$$\Phi(-x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left\{ \begin{matrix} t = -z, & dt = -dz, \\ t_a = 0, & t_a = x \end{matrix} \right\} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\Phi(x),$$

оскільки величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування.

2. Функція $\Phi(x)$ монотонно зростає, причому при $x \to \infty$ $\Phi(x) \to 1$ (можна вважати, що вже при $x > 4$ $\Phi(x) \approx 1$).

Доведемо цю властивість. Оскільки похідна інтеграла із змінною верхньою межею дорівнює значенню підінтегральної функції у верхній межі ($\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$) та завжди додатна, то $\Phi(x)$ зростає уздовж усієї числової осі.

Знайдемо

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left\{\begin{matrix}z=\frac{t}{\sqrt{2}},\quad dt=\sqrt{2}dz,\\ \textit{межі інтегрування не}\\ \textit{змінюються}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\sqrt{2}\,dz=\left\{\begin{matrix}\textit{в силу парності}\\ \textit{підінтегральної функції}\end{matrix}\right\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz=\sqrt{\pi}$ (інтеграл Ейлера – Пуассона), маємо

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}=1.$$

Приклад 3.7 За даними прикладу 3.6 обчислити ймовірність того, що від 300 до 360 (включно) сімей із 400 мають авто.

Розв'язування

Застосуємо інтегральну теорему Муавра – Лапласа ($npq=64\ge 20$). Спочатку визначимо за (3.14)

$$x_1=\frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-2{,}5;\qquad x_2=\frac{360-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=5{,}0.$$

Тепер за формулою (3.12), враховуючи властивості функції $\Phi(x)$, маємо

$$P_{400}(300\le m\le 360)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(5{,}0)-\Phi(-2{,}5)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi(5{,}0)+\Phi(2{,}5)\right]\approx$$

$\approx\frac{1}{2}(1+0{,}9876)=0{,}9938$ (за додатком В $\Phi(2{,}5)=0{,}9876$, $\Phi(5{,}0)=1$).

Розглянемо наслідки інтегральної теореми Муавра – Лапласа.

Наслідок 1 Число m появ події A відрізняється від добутку np не більше, ніж на $\varepsilon>0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n\left(|m-np|\le\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).\qquad(3.15)$$

Доведення

Нерівність $|m-np|\le\varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $np-\varepsilon\le m\le np+\varepsilon$. Тоді за інтегральною формулою (3.12)

$$P_n\left(|m-np|\le\varepsilon\right)=P_n(np-\varepsilon\le m\le np+\varepsilon)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{np+\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{np-\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)+\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

Наслідок 2 Частота $\frac{m}{n}$ події A належить відрізку $[\alpha,\beta]$, тобто

$$P_n(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)\right], \tag{3.16}$$

де

$$z_1=\frac{\alpha-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}},\qquad z_2=\frac{\beta-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}. \tag{3.17}$$

Доведення

Нерівність $\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta$ рівносильна нерівності $\alpha n\le m\le\beta n$. Тоді за інтегральною формулою (3.12) та формулою (3.14) маємо:

$$P_n(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta)=P_n(\alpha n\le m\le\beta n)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta n-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha n-np}{\sqrt{npq}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)\right].$$

Наслідок 3 Частота $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p не більше, ніж на $\Delta>0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\Delta\right)\approx\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \tag{3.18}$$

Доведення

Нерівність $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\Delta$ рівносильна нерівності $|m-np|\le\Delta n$. Застосовуючи формулу (3.15), отримуємо:

$$P_n\left(|m-np|\le \Delta\cdot n\right)\approx \Phi\left(\frac{\Delta\cdot n}{\sqrt{npq}}\right)\approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Приклад 3.8 За даними прикладу 3.6 знайти ймовірність того, що від 280 до 360 сімей із 400 мають авто.

Розв'язування

Помічаємо, що межі відрізка $[280, 360]$ симетричні відносно $np = 320$. Тоді за формулою (3.15)

$$P_{400}(280\le m\le 360) = P_{400}\left(|m-320|\le 40\right)\approx \Phi\left(\frac{40}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) = \Phi(5)\approx 1.$$

Приклад 3.9 За статистичними даними в середньому 85% новонароджених доживають до 60 років. Знайти ймовірність того, що із 2000 новонароджених частота тих, хто дожив до 60 років, буде: а) належати відрізку $[0{,}7; 0{,}95]$; б) буде відрізнятись від ймовірності цієї події за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02. При якій кількості новонароджених з надійністю 0,95 частота тих, хто дожив до 60 років, буде належати відрізку $[0{,}81; 0{,}89]$?

Розв'язування

а) За умовою $p = 0{,}85$. Оскільки $n = 2000$ досить велике (умова $npq = 2000\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15 = 255\ge 20$ виконується), то використаємо наслідок 2 інтегральної теореми Муавра–Лапласа. Спочатку за формулами (3.17) обчислимо

$$z_1 = \frac{0{,}7-0{,}85}{\sqrt{\dfrac{0{,}85\cdot 0{,}15}{2000}}}\approx \frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}00006}}\approx -18{,}99; \quad z_2 = \frac{0{,}95-0{,}85}{\sqrt{\dfrac{0{,}85\cdot 0{,}15}{2000}}}\approx \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}00006}}\approx 12{,}66.$$

Тепер за формулою (3.16) та властивостями функції $\Phi(x)$ маємо:

$$P_{2000}(0{,}7\le \frac{m}{n}\le 0{,}95)\approx \frac{1}{2}\left[\Phi(12{,}66)+\Phi(18{,}99)\right]\approx 1.$$

Тобто практично достовірно, що від 0,7 до 0,95 кількості новонароджених з 2000 доживуть до 60 років.

б) За формулою (3.18)

$$P_{2000}\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}85\right|\le 0{,}02\right)\approx \Phi\left(\frac{0{,}02\cdot\sqrt{2000}}{\sqrt{0{,}85\cdot 0{,}15}}\right)\approx \Phi\left(\frac{0{,}894}{0{,}357}\right)\approx \Phi(2{,}5) = 0{,}9876.$$

в) За умовою $P_{2000}(0{,}81\le \dfrac{m}{n}\le 0{,}89) = 0{,}95$ або

$$P_{2000}(-0{,}04\le \frac{m}{n}-0{,}85\le 0{,}04) = P_{2000}\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}85\right|\le 0{,}04\right) = 0{,}95.$$

За формулою (3.18) при $\Delta = 0{,}04$ $\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 0{,}95$. За додатком В $\Phi(t) = 0{,}95$ при $t = 1{,}96$, тобто $\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = t$, звідки

$$n = \frac{t^2 pq}{\Delta^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15}{0{,}04^2} = \frac{0{,}489804}{0{,}0016} \approx 306 .$$

3.5 Поліноміальна схема

Як відмічалося раніше, схема Бернуллі є послідовністю незалежних випробувань з двома можливими результатами. При цьому в кожному випробуванні подія A може з'явитись з однією і тією ж ймовірністю p, а подія $\overline{A}$ – з ймовірністю $q = 1 - p$.

За *поліноміальною схемою* здійснюється перехід від послідовності незалежних випробувань з двома можливими результатами (A та $\overline{A}$) до послідовності незалежних випробувань з k взаємно виключними результатами $A_1, A_2, ..., A_k$. При цьому в кожному випробуванні події $A_1, A_2, ..., A_k$ з'являються відповідно з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_k$. Тоді ймовірність $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A_1 відбудеться m_1 разів, A_2 – m_2 і т. д., подія A_k – m_k разів ($m_1 + m_2 + ... + m_k = n$), визначиться за формулою:

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k} . \qquad (3.20)$$

Доведемо цю формулу. Нехай подія B = «В n незалежних випробуваннях подія A_1 з'явиться m_1 разів, A_2 – m_2 і т. д., подія A_k – m_k разів», ($m_1 + m_2 + ... + m_k = n$). Подія B може бути подана як сума несумісних варіантів, ймовірність кожного з яких за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$. Число таких варіантів визначається числом перестановок з повтореннями (1.4) з n елементів.

Зокрема, у випадку двох результатів при $m_1 = m$, $m_2 = n - m$, $p_1 = p$, $p_2 = q = 1 - p$ формула (3.20) є формулою Бернуллі (3.1).

Приклад 3.10 Людина певної соціальної групи з ймовірністю 0,2 може бути брюнетом, з ймовірністю 0,3 – шатеном, з ймовірністю 0,4 – блондином та з ймовірністю 0,1 – рудим. Знайти ймовірність того, що у складі обраної навмання групи з восьми чоловік: а) порівну брюнетів, шатенів, блондинів та рудих; б) блондинів втричі більше за рудих.

Розв'язування

а) За формулою (3.20) ймовірність шуканої події A= «У групі із 8 чоловік порівну брюнетів, шатенів, блондинів та рудих» дорівнює

$$P_8(2,2,2,2)=\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}0{,}2^2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}1^2=0{,}0145.$$

б) Нехай подія B= «У групі із 8 чоловік блондинів втричі більше за рудих». Дану подію можна подати у вигляді суми двох несумісних подій (варіантів):

B_1= «У групі із 8 чоловік 3 блондини та 1 рудий»;

B_2= «У групі із 8 чоловік 6 блондинів та 3 рудих».

За формулою (3.20), припускаючи, що $p_1=0{,}4$; $p_2=0{,}1$; $p_3=1-(0{,}4+0{,}1)=0{,}5$, знайдемо

$$p(B_1)=P_8(3,1,4)=\frac{8!}{3!1!4!}0{,}4^3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}5^4=0{,}1120;$$

$$p(B_2)=P_8(6,2)=\frac{8!}{6!2!}0{,}4^6\cdot 0{,}1^2=0{,}0011;$$

$$p(B)=p(B_1)+p(B_2)=0{,}1120+0{,}0011=0{,}1131.$$

Питання для самоперевірки

І. Вправи

1. Доведіть, що $P_n\left(|m-np|\le\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$, якщо p – ймовірність появи події А в кожному випробуванні, m – число появ події A в n незалежних випробуваннях.
2. Доведіть, що $P_n(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta)\approx\frac{1}{2}\left[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)\right]$, якщо $z_1=\frac{\alpha-p}{\sqrt{pq/n}}$, $z_2=\frac{\beta-p}{\sqrt{pq/n}}$; p – ймовірність появи події A в кожному випробуванні, m – число появ події A в n незалежних випробуваннях.
3. Доведіть, що частота $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p не більше, ніж на $\Delta>0$ (за абсолютною величиною), тобто $P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\Delta\right)\approx\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$.
4. *(Задача Л. Керролла). В урні лежать дві кульки, відносно яких спочатку відомо, що кожна з них або біла, або чорна. Було проведено випробування. З урни декілька разів підряд витягали по 1 кульці, дивилися, якого вона кольору, і знову повертали її в урну. Результати виявилися такими: всі витягнуті кульки були білими, а ймовірність

витягнути білу кульку стала дорівнювати $\alpha/(\alpha+p)$. Випробування повторили ще m разів. Витягнуті кульки завжди були білими. Чому дорівнює ймовірність витягнути білу кульку після $m+1$ випробування?

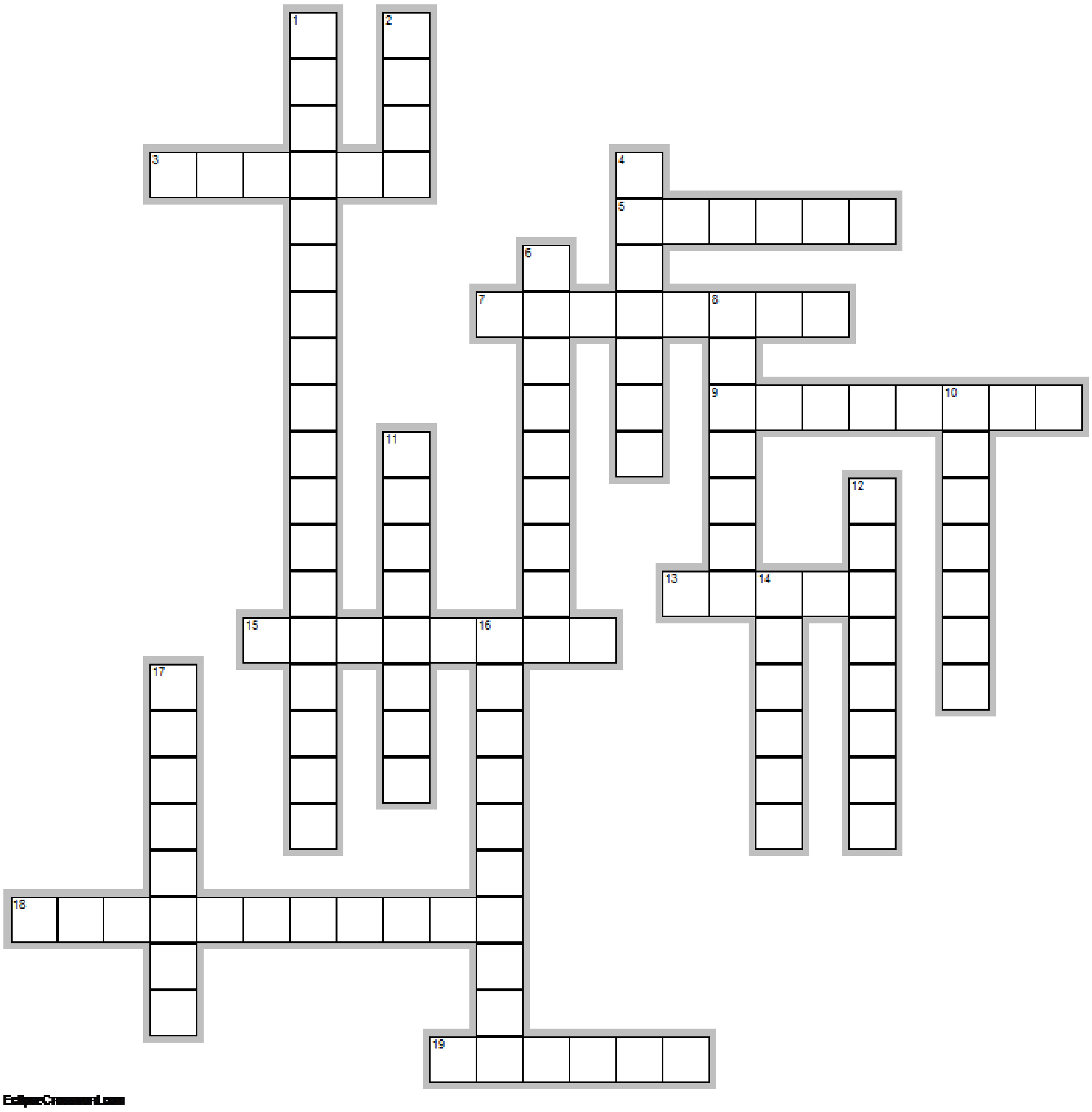
II. Розгадайте кросворд

По горизонталі

3. Функція Гаусса є...
5. Формула Пуассона застосовується у випадку, коли добуток *np* менший ...
7. Формула обчислення того, що подія A з'явиться m разів в n незалежних випробуваннях.
9. Формула знаходження ймовірності m появ події A в n випробуваннях, в якій ймовірність p появи події прямує до нуля, а добуток *np* – до сталого числа.
13. В локальній теоремі Муавра – Лапласа використовують функцію...
15. Явище складних повідомлень кількох статистичних джерел, при вивченні якого використовують умовну ймовірність.
18. Протилежні події утворюють...
19. Формула, яка застосовується для переоцінення апріорних ймовірностей гіпотез.

По вертикалі

1. Формула, при доведенні якої використовують теорему множення ймовірностей.
2. Функція Гаусса при значеннях аргументу більшого за чотири дорівнює...
4. Чому дорівнює сума ймовірностей двох протилежних подій?
6. Події, для яких застосовується теорема додавання ймовірностей.
8. В інтегральній формулі Муавра – Лапласа використовується функція...
10. Число, якому дорівнює сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу.
11. Функція Лапласа є...
12. Інтегральна формула Муавра – Лапласа використовується, коли добуток *npq* більший або дорівнює ...
14. Ймовірність події B, знайденої за умови, що подія A відбулась.
16. Функція, розвинення якої в ряд за степенями z дає коефіцієнти ймовірності m появ події A в n випробуваннях.
17. Теорема, в якій використовують поняття умовної ймовірності.



ТЕМА 4 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1 Поняття випадкової величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Математичні операції над випадковими величинами

Випадковою величиною (*casual size*) називається змінна, що в результаті проведення випробування залежно від випадку набуває одного з можливих значень.

Прикладами випадкових величин є:

1) кількість новонароджених протягом доби в м. Вінниці;
2) кількість бракованих виробів в партії;
3) витрати електроенергії на підприємстві протягом місяця.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень є зчисленною (скінченною чи нескінченною).

Неперервною випадковою величиною називають величину, множина можливих значень якої є деяким проміжком числової осі.

З попередніх прикладів 1-2 є дискретними випадковими величинами, а 3-й приклад – неперервна випадкова величина.

Випадкові величини будемо позначати великими літерами латинської абетки $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення – відповідними маленькими літерами $x, y, z, \ldots$.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Розглянемо дискретну випадкову величину X з можливими значеннями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Події $X = x_1$, $X = x_2$, … , $X = x_n$ (в результаті випробування випадкова величина набула значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, відповідно) є несумісними та єдино можливими, тобто утворюють повну групу. Позначивши ймовірності цих подій буквами p з відповідними індексами: $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$, … , $P(X = x_n) = p_n$, одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{4.1}$$

Найпростішою формою подання закону розподілу дискретної випадкової величини є таблиця, в якій перераховані в порядку зростання усі можливі значення випадкової величини та відповідні їм ймовірності, тобто

X :

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Така таблиця називається *рядом розподілу* дискретної випадкової величини.

Ряд розподілу може бути поданий графічно, якщо вздовж осі абсцис відкладати значення випадкової величини, а вздовж осі ординат – відповідні ймовірності. З'єднавши отримані дискретні точки прямолінійними відрізками, одержуємо ламану, яка називається *багатокутником* або *полігоном розподілу ймовірностей* (рис. 4.1).

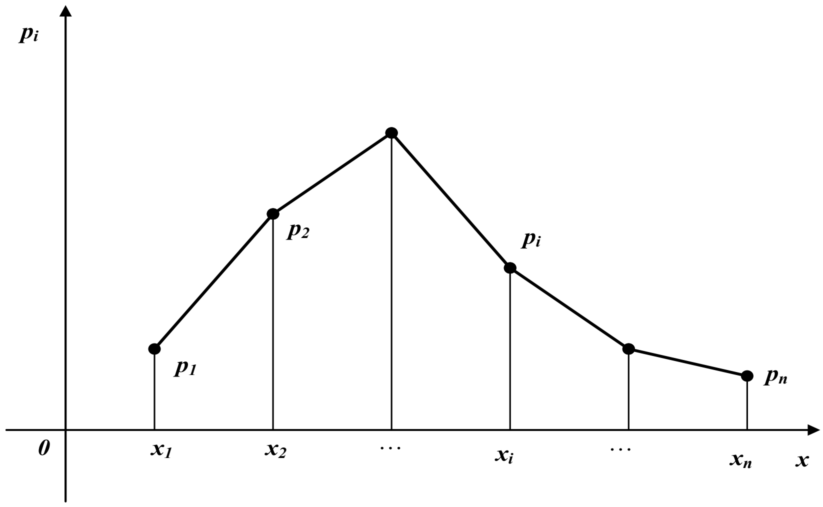


Рисунок 4.1 – Полігон розподілу ймовірностей

Приклад 4.1 Ймовірності того, що студент складе семестровий іспит в сесію з «Вищої математики» та «Теоретичних основ електротехніки», дорівнюють відповідно 0,9 та 0,7. Скласти закон розподілу кількості семестрових іспитів, які складе студент та побудувати полігон цього розподілу.

Розв'язування

Можливі значення випадкової величини X – кількості складених іспитів – 0, 1, 2.

Нехай A_i= «Студент складе i-ий іспит» $i=1,2$. Тоді ймовірності того, що студент складе в сесію 0, 1, 2 іспити, відповідно дорівнюють:

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=(1-0{,}9)(1-0{,}7)=0{,}1\cdot 0{,}3=0{,}03$;

$P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A_2}+A_2\cdot\overline{A_1})=P(A_1\cdot\overline{A_2})+P(A_2\cdot\overline{A_1})=0{,}9\cdot 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}1=0{,}34$;

$P(X=2)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}63$.

Таким чином, ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

На рисунку 4.2 одержаний ряд розподілу поданий графічно у вигляді полігону розподілу ймовірностей.

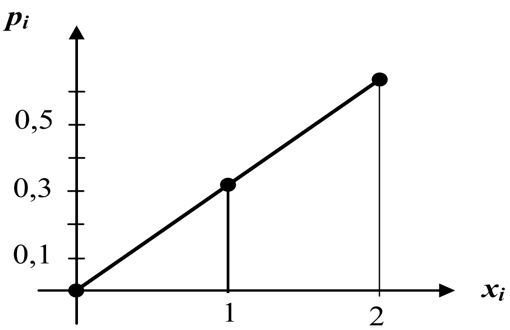


Рисунок 4.2 – Полігон розподілу ймовірностей

Розглянемо найбільш використовувані операції над випадковими величинами.

Нехай дано дві дискретні випадкові величини:

X:

x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

та

Y:

y_1	y_2	$\dots$	y_m
p_1	p_2	$\dots$	p_m

Добутком kX випадкової величини X на сталу величину k називається випадкова величина, яка набуває значення kx_i з тими ж ймовірностями p_i $\left(i = 1, 2, \dots, n\right)$.

m*-им степенем* випадкової величини X, тобто X^m, називається випадкова величина, яка набуває значення x_i^m з тими ж ймовірностями p_i $\left(i = 1, 2, \dots, n\right)$.

Приклад 4.2 Задана випадкова величина

X:

x_i	-2	1	3
p_i	0,5	0,3	0,2

Знайти закон розподілу випадкових величин: а) $Y = 2X$; б) $Z = X^3$.

Розв'язування

а) Y:

$y_i = 2x_i$	-4	2	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Z:

$z_i = x_i^2$	4	1	27
p_i	0,5	0,3	0,2

Приклад 4.3 Дано закони розподілу двох незалежних випадкових величин:

X:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

та Y:

y_j	-2	0	2
p_j	0,1	0,6	0,3

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X - Y$.

Розв'язування

Для зручності знаходження усіх значень різниці $Z = X - Y$ та їх ймовірностей складемо допоміжну таблицю, в кожній клітинці якої розмістимо в лівому кутку значення різниці $Z = X - Y$, а в правому кутку – ймовірності цих значень, одержані в результаті множення ймовірностей відповідних значень випадкових величин X та Y.

x_i	y_j	-2	0	2
p_i	p_j	0,1	0,6	0,3
0	0,5	2 0,05	0 0,3	-2 0,15
2	0,2	4 0,02	2 0,12	0 0,06
4	0,3	6 0,03	4 0,18	2 0,09

Наприклад, якщо $X = 2$ (передостанній рядок таблиці), а $Y = 0$ (четвертий стовпець таблиці), то випадкова величина $Z = X - Y$ набуває значення $Z = 2 - 0 = 2$ з ймовірністю $P(Z = 2) = P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$.

Оскільки серед дев'яти значень випадкової величини Z є ті, що повторюються, то їх відповідні ймовірності додаємо за теоремою додавання ймовірностей. Наприклад, значення $Z = 2$ може бути одержане, коли $X = 2$, $Y = 0$ (з ймовірністю 0,12); $X = 0$, $Y = -2$ (з ймовірністю 0,05); $X = 4$, $Y = 2$ (з ймовірністю 0,09), тому $P(Z = 2) = 0{,}12 + 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}26$ і т.д.

Таким чином одержуємо розподіл
Z:

z_i	-2	0	2	4	6
p_i	0,15	0,36	0,26	0,20	0,03

4.2 Математичне сподівання дискретної випадкової величини та його властивості

Розглянемо таку задачу. Відомі закони розподілу випадкових величин X та Y – кількість очок, що набрав 1-ий та 2-ий стрілок, відповідно.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,1	0,1	0,04	0,05	0,12	0,2

Y:

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,1	0,1	0,04	0,02

Потрібно з'ясувати, котрий з двох стрілків стріляє краще. Розглянувши ряди розподілу випадкових величин X та Y, важко відповісти на це запитання через велику кількість значень. До того ж в першого стрілка достатньо великі ймовірності мають крайні значення кількості очок (X=0; 1 та X=9; 10), а в другого стрілка – середні значення (див. полігон розподілу ймовірностей X та Y на рис. 4.3)

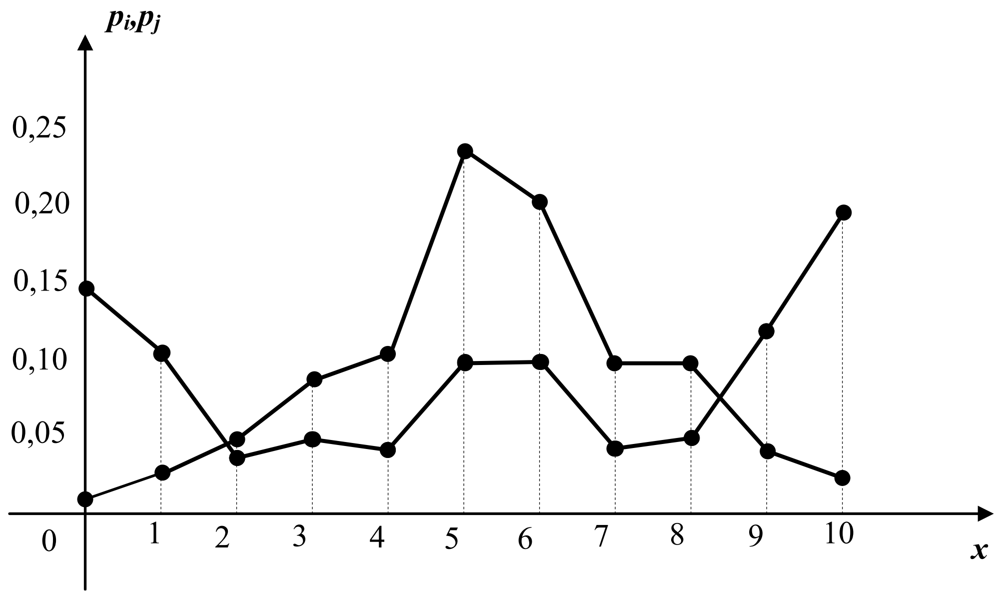


Рисунок 4.3 – Полігон розподілу ймовірностей X та Y

Зрозуміло, що з двох стрілків краще стріляє той, хто в *середньому* набирає більшу кількість очок. Таким середнім значенням випадкової величини є її математичне сподівання.

Математичним сподіванням (*mathematical hope*) $M(X)$ дискретної випадкової величини X називають суму добутків усіх її значень на відповідні їм ймовірності:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\,. \tag{4.2}$$

Приклад 4.4 Обчислити $M(X)$ та $M(Y)$ в задачі про стрілків.

Розв'язування

За формулою (4.2) маємо:

$$M(X)=0\cdot 0{,}15+1\cdot 0{,}11+2\cdot 0{,}04+3\cdot 0{,}05+4\cdot 0{,}04+5\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}1+7\cdot 0{,}04+$$

$$+8\cdot 0{,}05+9\cdot 0{,}12+10\cdot 0{,}2=5{,}36\,;$$

$$M(Y)=0\cdot 0{,}01+1\cdot 0{,}03+2\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}09+4\cdot 0{,}11+5\cdot 0{,}24+6\cdot 0{,}21+7\cdot 0{,}1+$$

$$+8\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}04+10\cdot 0{,}02=5{,}36\,.$$

З *механічної* точки зору математичне сподівання є абсциса центра мас системи матеріальних точок з абсцисами x_i та масами p_i.

Розглянемо основні ***властивості*** математичного сподівання.

1. Математичне сподівання сталої величини є величина стала:

$$M(C)=C\text{, де } C=const\,. \tag{4.3}$$

Доведення

Сталу величину можна розглядати як величину, що набуває значення C з ймовірністю 1. Тому $M(C)=C\cdot 1=C$.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто:

$$M(kX)=kM(X)\text{, де } k=const\,. \tag{4.4}$$

Доведення

Дійсно $M(kX)=\sum_{i=1}^{n}kx_i p_i=k\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=kM(X)$.

3. Математичне сподівання алгебраїчної суми скінченної кількості випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань, тобто:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \tag{4.5}$$

Доведення

Згідно з означенням операції додавання (віднімання) випадкових величин маємо:

$$M(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i \pm y_j)P\big[(X = x_i)(Y = y_j)\big] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i \pm y_j)p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij} \pm \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}.$$

Оскільки в першій подвійній сумі x_i не залежить від індексу j, а в другій сумі y_j не залежить від індексу i, то

$$M(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij} \pm \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}x_i p_i \pm \sum_{j=1}^{m}y_j p_j = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математичне сподівання добутку скінченного числа випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XY) = M(X)M(Y). \tag{4.6}$$

5. Якщо всі значення випадкової величини збільшити (зменшити) на сталу C, то на цю ж сталу збільшиться (зменшиться) математичне сподівання цієї випадкової величини:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C. \tag{4.7}$$

Доведення

Враховуючи властивості ***1*** та ***3*** математичного сподівання, одержуємо

$$M(X \pm C) = M(X) \pm M(C) = M(X) \pm C.$$

6. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання дорівнює нулю:

$$M\big[X - M(X)\big] = 0. \tag{4.8}$$

Доведення

Нехай $a = M(X)$, тоді, використавши властивість 5, одержуємо

$$M(X - a) = M(X) - a = a - a = 0.$$

Приклад 4.5 Знайти математичне сподівання випадкової величини $Z = 8X - 5Y + 6$, якщо відомо, що $M(X) = 3$, $M(Y) = 4$.

Розв'язування

Використовуючи властивості 1, 2, 3 математичного сподівання знаходимо

$$M(Z) = 8M(X) - 5M(Y) + 6 = 8 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 6 = 10.$$

4.3 Дисперсія дискретної випадкової величини

Математичне сподівання, на жаль, не може достатньо точно охарактеризувати випадкову величину. В задачі про стрілків (п. 4.2) ми переконались, що $M(X) = M(Y) = 5{,}36$, тобто середня кількість очок у обох стрілків однакова. Зрозуміло, що краще стріляє той стрілок, в якого менше відхилення кількості очок відносно середнього значення.

Дисперсією (dispersion) $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \tag{4.9}$$

Якщо випадкова величина X – дискретна із скінченною кількістю значень, то

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i. \tag{4.10}$$

З формули (4.10) випливає, що дисперсія має розмірність квадрата, що не завжди зручно. Тому як показник ступеня розсіювання використовують також величину $\sqrt{D(X)}$.

Середнім квадратичним відхиленням (standard deviation) σ_x випадкової величини X називається арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \qquad (4.11)$$

Приклад 4.6 В задачі про стрілків (прикл. 4.2) обчислити дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості одержаних очок для кожного стрілка.

Розв'язування

В прикладі 4.4 було обчислено, що $M(X) = M(Y) = 5{,}36$. Тому за формулами (4.10) та (4.11) маємо:

$$D(X) = (0-5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1-5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + (2-5{,}36)^2 \cdot 0{,}04 + (3-5{,}36)^2 \cdot 0{,}05 +$$

$$+ (4-5{,}36)^2 \cdot 0{,}04 + (5-5{,}36)^2 \cdot 0{,}1 + (6-5{,}36)^2 \cdot 0{,}1 + (7-5{,}36)^2 \cdot 0{,}04 + ;$$

$$+ (8-5{,}36)^2 \cdot 0{,}05 + (9-5{,}36)^2 \cdot 0{,}12 + (10-5{,}36)^2 \cdot 0{,}2 = 13{,}61;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0-5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1-5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + (2-5{,}36)^2 \cdot 0{,}05 + (3-5{,}36)^2 \cdot 0{,}09 +$$

$$+ (4-5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + (5-5{,}36)^2 \cdot 0{,}24 + (6-5{,}36)^2 \cdot 0{,}21 + (7-5{,}36)^2 \cdot 0{,}1 +$$

$$+ (8-5{,}36)^2 \cdot 0{,}1 + (9-5{,}36)^2 \cdot 0{,}04 + (10-5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Таким чином, при рівності середніх значень кількості очок ($M(X) = M(Y)$) дисперсія, тобто характеристика розсіювання відносно середнього значення, менша для другого стрілка $\left(D(X) > D(Y)\right)$ і йому для одержання більш високих результатів стрільби порівняно з першим стрілком потрібно змістити «центр» розподілу кількості одержаних очок, збільшивши $M(Y)$, навчившись краще цілитися.

Відмітимо основні ***властивості*** дисперсії випадкової величини.

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C) = 0, \text{ де } C = const. \qquad (4.12)$$

Доведення

Дійсно, $D(C) = M[C - M(C)]^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0$.

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його при цьому до квадрата:

$$D(kX) = k^2 D(X). \qquad (4.13)$$

Доведення

Враховуючи, що $M(kX) = kM(X)$, маємо:

$$D(kX) = M[kX - M(kX)]^2 = M[kX - kM(X)]^2 = k^2 M[X - M(X)]^2 = k^2 D(X).$$

3. Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (4.14)$$

Доведення

Нехай $M(X) = a$, тоді

$$D(X) = M(X - a)^2 = M(X^2 - 2aX + a^2) = M(X^2) - 2aM(X) + a^2 =$$

$$= M(X^2) - 2a \cdot a + a^2 = M(X^2) - a^2.$$

Зауваження. Цю властивість досить часто використовують для обчислення дисперсії, оскільки вона дає спрощення розрахунків порівняно з основною формулою (4.9), якщо значення випадкової величини – цілі. А математичне сподівання – нецілі числа.

Приклад 4.7 За даними прикладу 4.6 (задача про стрілків) обчислити дисперсії випадкових величин X, Y, використовуючи формулу (4.14).

Розв'язування

У прикладі 4.4 було обчислено, що $M(X) = M(Y) = 5{,}36$. Тому маємо:

$$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}15+1^2\cdot 0{,}11+2\cdot 0{,}04+3^2\cdot 0{,}05+4^2\cdot 0{,}04+5^2\cdot 0{,}1+6^2\cdot 0{,}1+$$

$$+7^2\cdot 0{,}04+8^2\cdot 0{,}05+9^2\cdot 0{,}12+10^2\cdot 0{,}2=42{,}34$$
$$D(X)=42{,}34-5{,}36^2=13{,}61;$$

$$M(Y^2)=0^2\cdot 0{,}01+1^2\cdot 0{,}03+2^2\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}09+4\cdot 0{,}11+5^2\cdot 0{,}24+$$

$$+6^2\cdot 0{,}21+78^2\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}04+10^2\cdot 0{,}02=32{,}90;$$

$$D(Y)=32{,}90-5{,}36^2=4{,}17.$$

4. Дисперсія алгебраїчної суми скінченного числа незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y). \tag{4.15}$$

Приклад 4.8 Знайти дисперсію випадкової величини $Z=8X-5Y+7$, якщо відомо, що випадкові величини X та Y незалежні і $D(X)=1{,}5$; $D(Y)=1$.

Розв'язування

Використовуючи властивості ***1, 2, 4***, знайдемо

$$D(Z)=8^2\cdot D(X)+5^2\cdot D(Y)+0=64\cdot 1{,}5+25\cdot 1=121.$$

Приклад 4.9 На фінансовому ринку представлені акції трьох видів (*A, B, C*). Норма прибутку акцій залежить від ринкової кон'юнктури (%). Проаналізувати ситуацію і вибрати тип акції, що найбільш приваблива для інвестора з точки зору міри її ризику.

Види проек-тів	Оцінка можливого результату					
	Песимістична		Стримана		Оптимістична	
	Прибуток X_{1i}	Ймовірність p_{1i}	Прибуток X_{2i}	Ймовірність p_{2i}	Прибуток X_{3i}	Ймовірність p_{3i}
A	59	0,25	29	0,53	19	0,22
B	49	0,3	39	0,45	29	0,25
C	39	0,27	29	0,5	19	0,23

Розв'язування

Визначимо сподівану норму прибутку для кожного виду акцій:

$$M(A) = 59 \cdot 0{,}25 + 29 \cdot 0{,}53 + 19 \cdot 0{,}22 = 34{,}3 \ \ (\%);$$

$$M(B) = 49 \cdot 0{,}3 + 39 \cdot 0{,}45 + 29 \cdot 0{,}25 = 39{,}5 \ \ (\%);$$

$$M(C) = 39 \cdot 0{,}27 + 29 \cdot 0{,}5 + 19 \cdot 0{,}23 = 29{,}4 \ \ (\%).$$

Визначимо дисперсію (варіацію) норм прибутку кожного виду акцій за формулою (4.14):

$$D(A) = 59^2 \cdot 0{,}25 + 29^2 \cdot 0{,}53 + 19^2 \cdot 0{,}22 - (34{,}3)^2 = 218{,}91 \quad (\%)^2;$$

$$D(B) = 49^2 \cdot 0{,}3 + 39^2 \cdot 0{,}45 + 29^2 \cdot 0{,}25 - (39{,}5)^2 = 54{,}75 \ \ (\%)^2;$$

$$D(C) = 39^2 \cdot 0{,}27 + 29^2 \cdot 0{,}5 + 19^2 \cdot 0{,}23 - (29{,}4)^2 = 49{,}84 \ \ (\%)^2.$$

Обчислимо середні квадратичні відхилення від сподіваних норм прибутків кожної акції:

$$\sigma_A = \sqrt{D(A)} = \sqrt{218{,}91} = 14{,}8 \quad (\%);$$

$$\sigma_B = \sqrt{D(B)} = \sqrt{54{,}75} = 7{,}4 \quad (\%);$$

$$\sigma_C = \sqrt{D(C)} = \sqrt{49{,}84} = 7{,}06 \quad (\%).$$

Обчислимо величину ризику для кожного виду акцій:

$$CV_A = \frac{14{,}8}{34{,}3} = 0{,}432; \qquad CV_B = \frac{7{,}4}{39{,}5} = 0{,}187; \qquad CV_C = \frac{7{,}06}{29{,}4} = 0{,}24.$$

З одержаних результатів зрозуміло, що потрібно вибрати акцію виду B, оскільки для неї ризик найменший. Якщо використати механічну інтерпретацію розподілу випадкової величини, то її дисперсія є *моментом інерції* розподілу мас відносно центра мас.

Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та інші числа, що в стислій формі описують найбільш істотні риси розподілу, називають *числовими характеристиками* випадкової величини.

Досить часто в практичних обрахунках використовують середнє квадратичне відхилення для обчислення величини ризику (коефіцієнт варіації CV):

$$CV = \frac{\sigma_x}{M(X)}. \qquad (4.16)$$

4.4 Функція розподілу випадкової величини

До цих пір ми розглядали закон розподілу випадкової величини як ряд розподілу або формулу, що дозволяє знаходити ймовірності довільних значень випадкової величини X. Однак такий опис не є універсальним, оскільки його неможливо застосувати до неперервної випадкової величини, яка має нескінченну незчисленну множину можливих значень.

Для опису закону розподілу випадкової величини можливо розглядати не ймовірності подій $X = x$ для різних x, а ймовірності події $X < x$, де x – поточна змінна. Зрозуміло, що ймовірність $P(X < x)$ буде деякою функцією від змінної x.

Функцією розподілу (*function of distribution*) випадкової величини X називається ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за x. Позначають функцію розподілу $F(x)$, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (4.17)$$

Функцію $F(x)$ іноді називають *інтегральною функцією розподілу* або *інтегральним законом* розподілу.

Приклад 4.10 Дано ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Знайти та графічно зобразити її функцію розподілу.

Розв'язування

Будемо задавати різноманітні значення x та знаходити для них $F(x) = P(X < x)$.

1. Якщо $x \le 1$, то зрозуміло, що $F(x) = P(X < x) = 0$.

2. Якщо $1 < x \le 4$, то $F(x) = P(X = 1) = 0{,}4$. Зрозуміло, що і $F(4) = P(X < 4) = 0{,}4$.

3. Якщо $4 < x \le 5$, то $F(x) = P(X = 1) + P(X = 4) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$.

4. Якщо $5 < x \le 7$, то $F(x) = [P(X = 1) + P(X = 4)] + P(X = 5) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$.

5. Якщо $x > 7$, то $F(x) = [P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5)] + P(X = 7) =$

$= 0{,}8 + 0{,}2 = 1$.

Графічно зобразимо функцію $F(x)$ (рис. 4.4).

Маємо:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 1, \\ 0.4, & \textit{якщо} \quad 1 < x \le 4, \\ 0.5, & \textit{якщо} \quad 4 < x \le 5, \\ 0.8, & \textit{якщо} \quad 5 < x \le 7, \\ 1, & \textit{якщо} \quad x > 7. \end{cases}$$

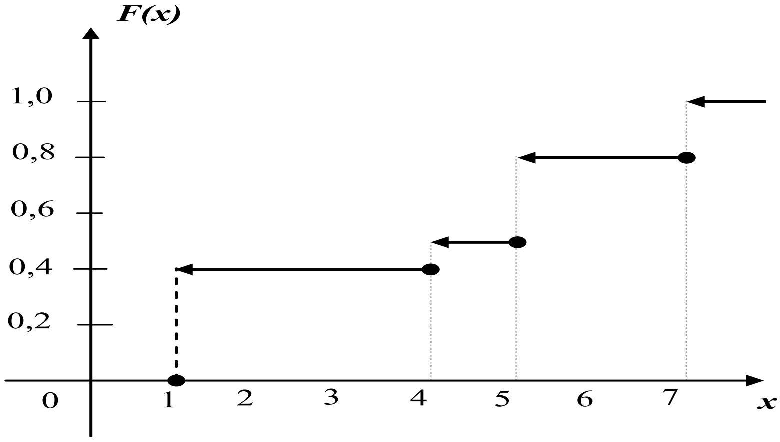


Рисунок 4.4 – Графік функції $F(x)$

Зауваження. З попереднього приклада зрозуміло, що функція розподілу довільної дискретної випадкової величини є східчастою функцією, стрибки якої відбуваються в точках, що відповідають можливим значенням випадкової величини і дорівнюють ймовірностям цих значень. Сума усіх стрибків функції розподілу дискретної випадкової величини дорівнює 1.

Розглянемо загальні ***властивості*** функції розподілу.

1. Значення функції розподілу належать відрізку [0, 1].

Дане твердження випливає з того, що функція розподілу – це ймовірність.

2. Функція розподілу є неспадною на всій числовій осі.

Доведення

Нехай x_1 та x_2 – деякі точки числової осі, причому $x_1 < x_2$. Розглянемо дві несумісні події $A = X < x_1$ та $B = x_1 \le X < x_2$. Тоді $A + B = X < x_2$. Це співвідношення між подіями випливає з їх геометричної інтерпретації (рис. 4.5).

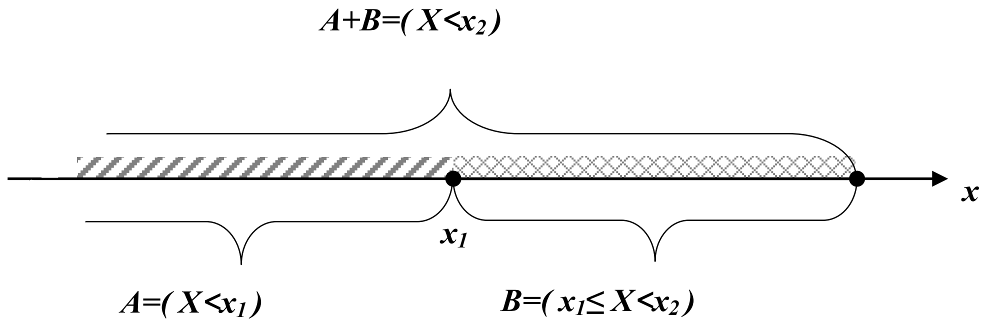


Рисунок 4.5 – Геометрична інтерпретація

За теоремою додавання: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

або $$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

звідки

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2). \tag{4.18}$$

Оскільки ймовірність $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$, тобто $F(x)$ – неспадна функція.

3. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, на плюс нескінченності дорівнює одиниці, тобто

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \; F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Доведення

$F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$ як ймовірність неможливої події $X < -\infty$.

$F(+\infty) = P(X < +\infty) = 1$ як ймовірність достовірної події $X < +\infty$.

4. Ймовірність потрапляння випадкової величини на проміжок $[x_1, x_2)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому інтервалі, тобто

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)\,. \tag{4.19}$$

Формула (4.19) випливає безпосередньо з формули (4.18).

4.5 Неперервні випадкові величини. Щільність ймовірності

Враховуючи розглянуте поняття функції розподілу, *неперервною випадковою величиною* називають випадкову величину, функція розподілу якої неперервна та диференційовна в усіх точках. Має місце теорема.

Теорема 4.1 Ймовірність будь-якого окремо взятого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

Доведення

Покажемо, що для довільного значення x_1 випадкової величини X ймовірність $P(X = x_1) = 0$. Подамо $P(X = x_1)$ у вигляді

$$P(X = x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} P(x_1 \le X < x_2)\,.$$

Застосувавши властивість (4) функції розподілу і враховуючи неперервність $F(x)$, одержимо

$$P(X = x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} P(x_1 \le X < x_2) = \lim_{x_2 \to x_1} F(x_2) - F(x_1) = F(x_1) - F(x_1) = 0\,.$$

До цих пір ми розглядали випробування, які зводились до схеми випадків, і нульову ймовірність мали лише неможливі події. З наведеної теореми випливає, що нульову ймовірність можуть мати і можливі події.

Наслідок. Якщо X – неперервна випадкова величина, то ймовірність потрапляння випадкової величини на проміжок (x_1, x_2) не залежить від того, є цей проміжок відкритим чи закритим, тобто

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2)\,.$$

Дійсно,

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(X = x_1) + P(x_1 < X < x_2) + P(X = x_2) = 0 + P(x_1 < X < x_2) + 0 =$$

$= P(x_1 < X < x_2)$.

Аналогічно доводяться інші рівності.

Подання неперервної випадкової величини за допомогою функції розподілу не є єдиним. Введемо поняття *щільності ймовірності* неперервної випадкової величини.

Щільністю ймовірності (closeness of probability) (або просто *щільністю*) $f(x)$ неперервної випадкової величини X називається похідна її функції розподілу

$$F'(x) = f(x). \tag{4.20}$$

Про випадкову величину кажуть, що вона розподілена із щільністю $f(x)$ на певному проміжку осі абсцис. Функція $f(x)$ є однією з форм закону розподілу, але існує вона лише для *неперервних* випадкових величин. Щільність ймовірності іноді називають *диференціальним законом розподілу*. Графік щільності ймовірності $f(x)$ називають *кривою розподілу*.

Приклад 4.11 Знайти щільність розподілу ймовірності випадкової величини X, задану функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Розв'язування

За формулою (4.20) маємо

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \ \ i \ \ x > \dfrac{\pi}{6}, \\ 2\cos x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Розглянемо загальні ***властивості*** щільності ймовірності неперервної випадкової величину.

1. Щільність ймовірності – невід'ємна функція, тобто

$$f(x) \ge 0.$$

Дійсно, оскільки функція розподілу неспадна, то $f(x) = F'(x) \geq 0$.

2. Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини на проміжок $[a, b]$ дорівнює визначеному інтегралу від її щільності ймовірності в межах від a до b, тобто

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (4.21)$$

Доведення

За четвертою властивістю функції розподілу маємо

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Оскільки $F(x)$ є первісною для щільності ймовірності, то за формулою Ньютона – Лейбніца приріст первісної на відрізку $[a, b]$ є визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, тобто $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

З геометричної точки зору одержана ймовірність дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою розподілу, віссю Ox та прямими $x = a$ та $x = b$.

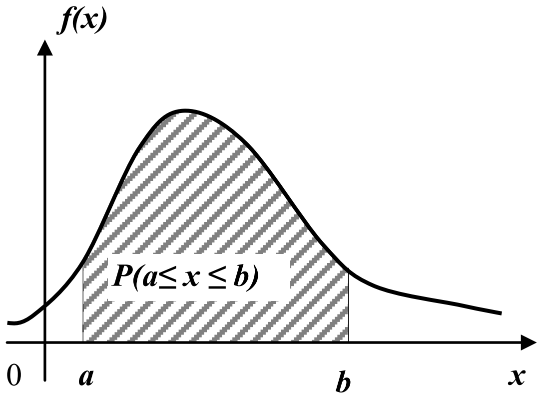


Рисунок 4.6 – Геометричне тлумачення властивості 2

3. Функція розподілу неперервної випадкової величини знаходиться через щільність ймовірності за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{4.22}$$

Формула (4.22) може бути одержана з (4.21) при $a \to -\infty$, якщо замінити верхню межу b на змінну межу x.

З геометричної точки зору функція розподілу дорівнює площі фігури, обмеженої зверху кривою розподілу та розташованої лівіше точки x (рис. 4.7).

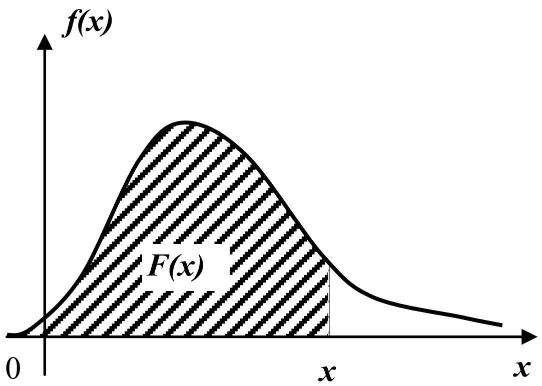


Рисунок 4.7 – Геометричне тлумачення

4. Невласний інтеграл у нескінченних межах від щільності ймовірності неперервної випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{4.23}$$

Дійсно, за формулою (4.22): $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ та при $x \to +\infty$ $F(+\infty) = 1$.

Поняття математичного сподівання та дисперсії, розглянуті для дискретної випадкової величини, можна поширити на неперервні випадкові величини. Для одержання відповідних формул достатньо у формулах (4.3) та (4.10) для дискретної випадкової величини замінити знак підсумовування $\sum_{i=1}^{n}$ знаком інтеграла із нескінченними межами $\int_{-\infty}^{+\infty}$, можливі значення x_i – неперервною змінною x, а ймовірність p_i – елементом ймовірності $f(x)dx$.

Зауваження. Під *елементом ймовірності* розуміють ймовірність потрапляння випадкової величини X на проміжок $[x, \quad x+dx]$.

В результаті одержуємо такі формули для математичного сподівання та дисперсії неперервної випадкової величини X:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \qquad (4.24)$$

(якщо інтеграл абсолютно збіжний) та

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx \qquad (4.25)$$

(якщо інтеграл збіжний).

Усі властивості математичного сподівання та дисперсії, розглянуті для дискретних величин, справедливі і для неперервних. Зокрема, на практиці при обчисленні дисперсії використовують формулу:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2. \qquad (4.26)$$

Приклад 4.12 Дано функцію:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1, \\ \dfrac{a}{x^4}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Знайти: а) значення сталої a, при якому дана функція буде щільністю ймовірності деякої випадкової величини X; б) вираз для функції розподілу $F(x)$; в) обчислити ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з відрізку $[5, 6]$; г) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Розв'язування

а) Для того, щоб дана функція була щільністю ймовірності неперервної випадкової величини, вона повинна бути невід’ємною, тобто $\frac{a}{x^3} \ge 0$ $(a \ge 0)$, і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Таким чином,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{a}{x^4}dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{a}{x^4}dx = \frac{a}{3} \lim_{B\to+\infty} \left(-\frac{1}{x^3} \right)\Bigg|_1^B =$$

$$= \frac{a}{3} \lim_{B\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{B^3} \right) = \frac{a}{3} = 1, \text{ звідки } a = 3.$$

б) За формулою (4.22) знайдемо $F(x)$.

Якщо $x \le 1$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$.

Якщо $x > 1$, то $F(x) = 0 + \int\limits_{1}^{x} f(x)dx = \int\limits_{1}^{x} \frac{3}{x^4} \cdot dx = -\frac{1}{x^3}\Bigg|_1^x = 1 - \frac{1}{x^3}$.

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, & \textit{якщо } x > 1. \end{cases}$$

в) За формулою (4.21) маємо

$$P(5 \le X \le 6) = \int\limits_{5}^{6} \frac{3}{x^4}dx = -\frac{1}{x^3}\Bigg|_5^6 = \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} = \frac{91}{27000} \approx 0{,}0034.$$

Ймовірність $P(5 \le X \le 6)$ можна знайти за формулою (1.19):

$$P(5 \le X \le 6) = F(6) - F(5) = \left(1 - \frac{1}{6^3} \right) - \left(1 - \frac{1}{5^3} \right) = \frac{91}{27000} \approx 0{,}0034.$$

г) За формулою (4.24) маємо

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}dx = 3 \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{1}{x^3}dx = \frac{3}{2} \lim_{B\to+\infty} -\frac{1}{x^2}\Bigg|_1^B =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{B \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{B^2} \right) = \frac{3}{2}.$$

Дисперсію обчислимо $D(X)$ за формулою (4.26). Для цього спочатку знайдемо

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{1}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4} dx = 3 \lim_{B \to +\infty} \int_{1}^{B} \frac{1}{x^2} dx = 3 \lim_{B \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_{1}^{B} = 3,$$

тоді

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(M(X) \right)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}.$$

4.6 Мода, медіана, квантилі, моменти випадкових величин. Асиметрія та ексцес (надвишок)

Модою (*fashion*) $Mo(X)$ випадкової величини X називається її найімовірніше значення (для якого ймовірність p_i або щільність ймовірності набуває максимального значення). Якщо ймовірність або щільність ймовірності набуває максимального значення в декількох точках, то такий розподіл називають *полімодальним* (рис. 4.8)

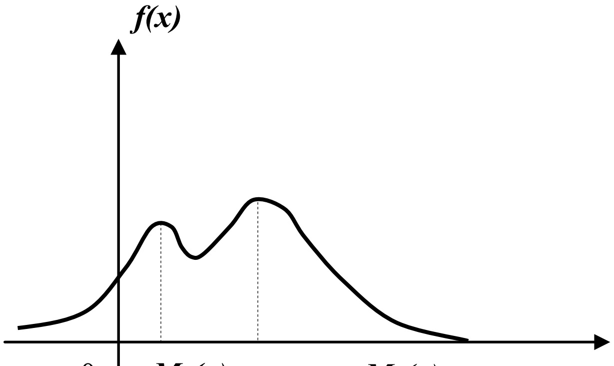


Рисунок 4.8 – Полімодальний розподіл

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини називається таке її значення, для якого

$$P\big(X < Me(X)\big) = P\big(X > Me(X)\big) = \frac{1}{2} \qquad (4.27)$$

З геометричної точки зору, пряма $x = Me(X)$ ділить площу фігури під кривою розподілу на дві рівні частини. Зрозуміло, що $F(Me(X)) = 0,5$ (рис. 4.9).

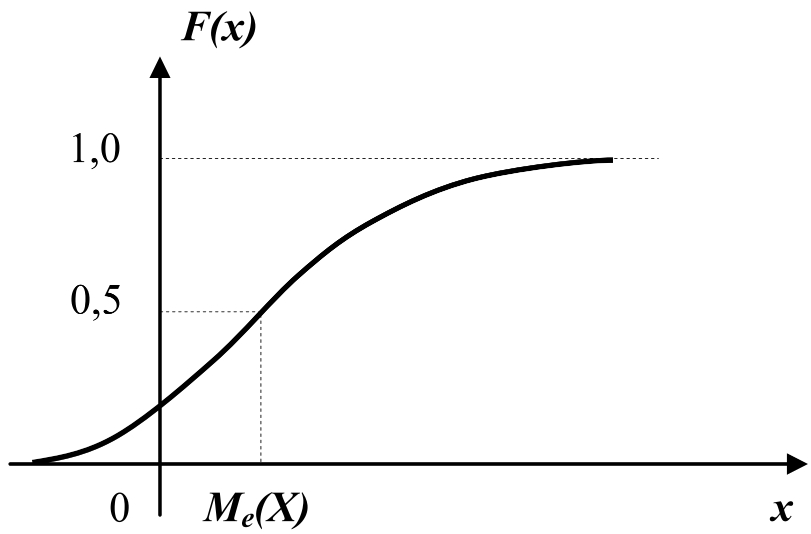


Рисунок 4.9 – Геометричне тлумачення медіани

Квантилем рівня q *(quantile of level q)* (або q*-квантилем*) називають таке значення x_q випадкової величини, при якому

$$F(x_q) = P(X < x_q) = q\,. \qquad (4.28)$$

Деякі квантилі мають особливу назву. Наприклад, медіана – квантилі рівня 0,5, а квантилі $x_{0,25}$ та $x_{0,75}$ називають відповідно *верхнім* та *нижнім* квантилем. З поняттям квантиля тісно пов'язане поняття *відсоткової точки. 100% точкою* називають квантиль x_{1-q}, тобто таке значення випадкової величини X, при якому $P(X \ge x_{1-q}) = q$.

Приклад 4.13 Знайти квантиль $x_{0,3}$ та 30%-ву точку випадкової величини X із щільністю ймовірності $f(x)=3x^2$ при $x\in[0,1]$.

Розв'язування

За формулою (4.22) функція розподілу

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=0+\int_{0}^{x} 3x^2 dx=x^3.$$

Квантиль $x_{0,3}$ знайдемо за формулою (4.28), тобто $F(x_{0,3})=0{,}3$ або $x_{0,3}^3=0{,}3$. Звідки $x_{0,3}\approx 0{,}67$. Знайдемо 30%-ву точку випадкової величини X або квантиль $x_{0,7}$ з рівняння $x_{0,7}^3=0{,}7$, звідки $x_{0,7}\approx 0{,}89$.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання k-го степеня цієї величини:

$$\nu_k=M(X^k). \tag{4.29}$$

Центральним моментом k-го порядку (*central moment of order k)* випадкової величини X називають математичне сподівання k-го степеня відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\mu_k=M[X-M(X)]^k. \tag{4.30}$$

Якщо позначити $M(X)=a$, то формули для обчислення моментів дискретних та неперервних випадкових величин можна подати у вигляді таблиці (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Формули для обчислення моментів дискретних та неперервних випадкових величин

Момент	Випадкова величини	
	Дискретна	Неперервна
Початковий	$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$ (4.31)	$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$ (4.32)
Центральний	$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k p_i$ (4.33)	$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k f(x)dx$ (4.34)

Легко помітити, що перший початковий момент ($k=1$) випадкової величини – математичне сподівання $(\nu_1 = M(X))$, а другий центральний момент – дисперсія випадкової величини $(\mu_2 = D(X))$.

Третій центральний момент μ_3 характеризує асиметрію розподілу. Він має розмірність куба випадкової величини. Щоб одержати безрозмірну величину, її ділять на σ^3, де σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини X. Одержану величину A називають *коефіцієнтом асиметрії випадкової величини:*

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{4.35}$$

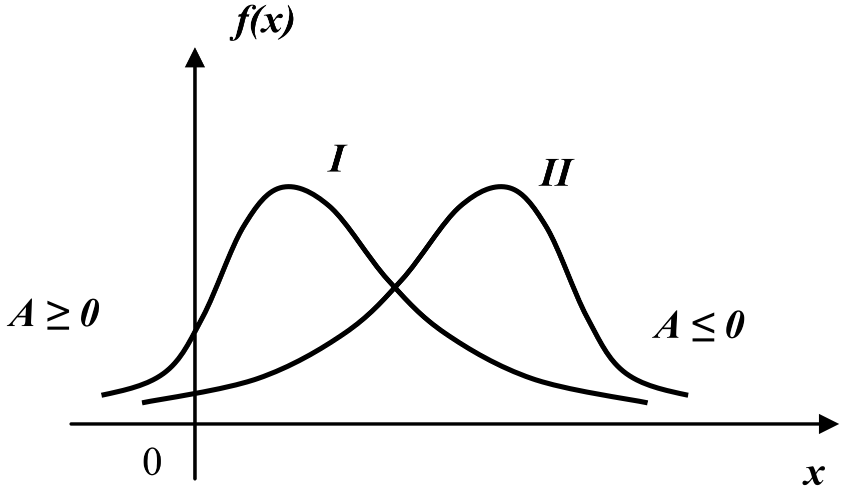


Рисунок 4.10 – Правостороння та лівостороння асиметрія

На рисунку 4.10 крива **I** має додатну (правосторонню) асиметрію ($A > 0$), а крива **II** – від’ємну (лівосторонню) асиметрію ($A < 0$).

Ексцесом випадкової величини називається число

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \tag{4.36}$$

де μ_4 – четвертий центральний момент, що характеризує гостроту вершини кривої розподілу; σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Якщо для неперервної випадкової величини $E > 0$, то її крива розподілу має більш гостру вершину, для випадкових величин з від’ємним ексцесом характерна більш пласка вершина (рис. 4.11).

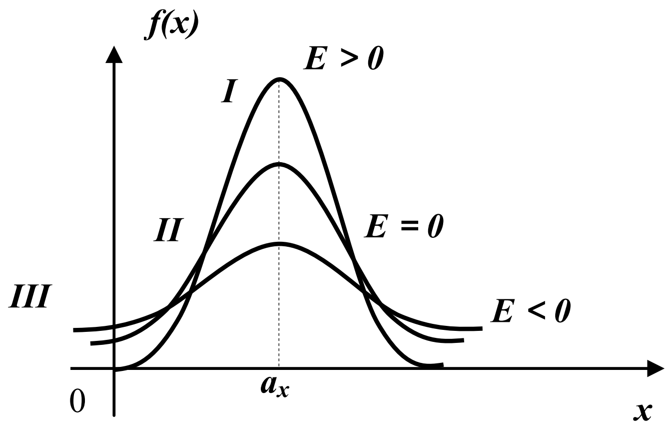


Рисунок 4.11 – Випадки кривих розподілу

Приклад 4.14 Знайти коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини, розподіленої за законом Лапласа із щільністю ймовірності $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

Розв’язування

Оскільки розподіл випадкової величини X симетричний відносно осі ординат, то всі непарні моменти дорівнюють 0, тобто $\nu_1 = 0$, $\nu_3 = 0$, $\mu_3 = 0$. Тоді за формулою (4.35) коефіцієнт асиметрії також дорівнює нулю $A = 0$.

Для знаходження ексцесу необхідно обчислити парні початкові моменти ν_2 та ν_4:

$$\nu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B x^2 e^{-x}dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} U = x^2 & dU = 2xdx \\ dV = e^{-x}dx & V = -e^{-x} \end{Bmatrix} = \lim_{B\to+\infty}\left(-x^2 e^{-x}\Big|_0^B + 2\int_0^B xe^{-x}dx \right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{-B^2}{e^B}\right) + 2\lim_{B\to+\infty}\int_0^B xe^{-x}dx = 2\lim_{B\to+\infty}\int_0^B xe^{-x}dx = \begin{Bmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = e^{-x}dx & V = -e^{-x} \end{Bmatrix} =$$

$$= 2\lim_{B\to+\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^B + \int_0^B e^{-x}dx \right) = 2\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{-B}{e^B}\right) + 2\lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-x}dx =$$

$$= 2\lim_{B\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^B \right) = 2\lim_{B\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{B}\right) = 2\,.$$

Аналогічним чином можна показати, що

$$\nu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}dx = 24\,.$$

Тоді $D(X) = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2 - 0^2 = 2$ та $\sigma = \sqrt{2}$, звідки за формулою (4.36) $E = \dfrac{24}{\left(\sqrt{2}\right)^4} - 3 = 3$ (оскільки $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$).

Оскільки ексцес розподілу додатний, то крива даного розподілу має гостру вершину (рис. 4.12).

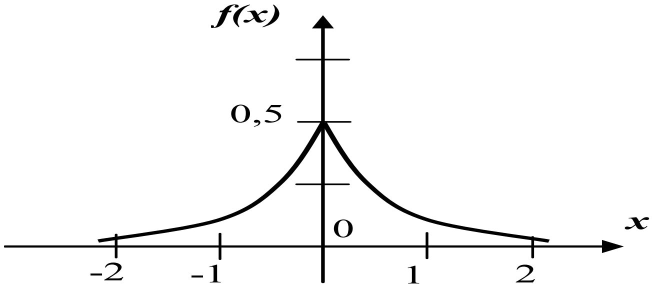


Рисунок 4.12 – Крива розподілу

Питання для самоперевірки

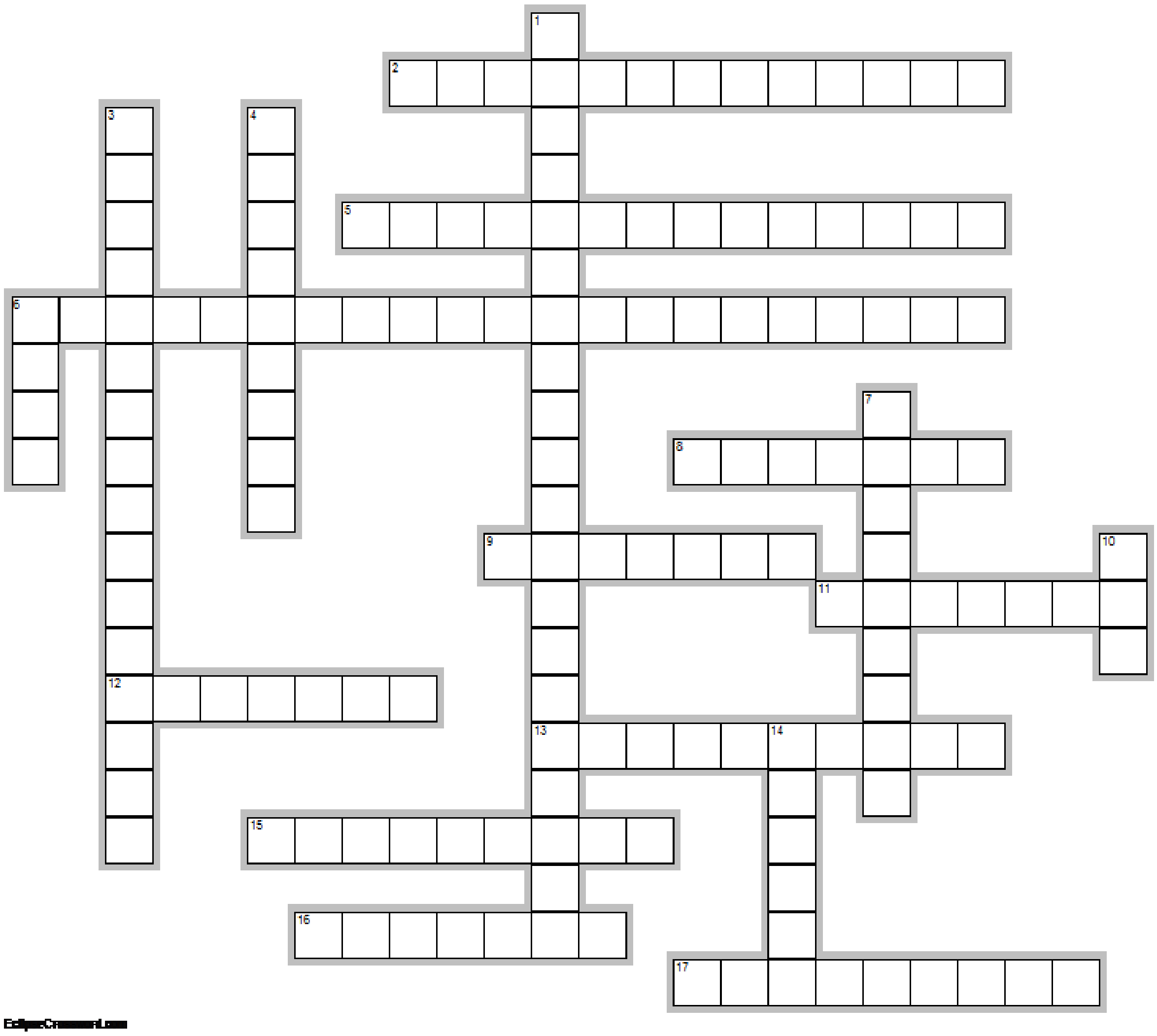
Розгадайте кросворд

По горизонталі

2. Розподіл, при якому щільність ймовірності набуває максимального значення в декількох точках.
5. Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними ймовірностями.
6. Сума добутків можливих значень дискретної випадкової величини на відповідні ймовірності.
8. На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює...
9. Графічне подання розподілу дискретної випадкової величини.
11. Число, яке відповідає невласному інтегралу у нескінченних межах від щільності ймовірності.
12. Середнє значення неперервної випадкової величини.
13. Випадкова величина, множина можливих значень якої є проміжок числової осі.
15. Характеристика, що визначає середнє значення квадрата відхилення від середнього значення.
16. Закон розподілу, який визначає ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, меншого за певне число.
17. Випадкова величина, множина можливих значень якої є зчисленною.

По вертикалі

1. Похідна функції розподілу.
3. Математичне сподівання певного степеня випадкової величини.
4. Функція розподілу на числовій осі є...
6. Найімовірніше значення випадкової величини.
7. Змінна величина, що в результаті проведення випробування залежно від випадку, набуває одного з можливих значень.
10. Таблиця, за допомогою якої задають розподіл дискретної випадкової величини.
14. Число, що характеризує форму вершини кривої розподілу.



ТЕМА 5 ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

5.1 Біноміальний закон розподілу

Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу з параметрами n та p, якщо вона набуває значень $0, 1,..., m,..., n$ з ймовірностями

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{5.1}$$

де $q = 1 - p$.

Ряд розподілу біноміального закону такий:

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	…	$C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$	…	p^n

Зрозуміло, що означення біноміального закону є коректним, оскільки основна властивість ряду розподілу $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ виконується (сума усіх ймовірностей є сумою членів розвинення бінома Ньютона $q^n + C_n^1 pq^{n-1} + ... + C_n^m p^m q^{n-m} + ... + p^n = (p+q)^n = 1^n = 1$). Звідси випливає і назва закону – біноміальний.

На рис. 3.1 даного посібника було наведено полігон розподілу випадкової величини, що має біноміальний розподіл з параметрами $m = 5$, $p = 0{,}2$.

Теорема 5.1 Математичне сподівання випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом, дорівнює

$$M(X) = np, \tag{5.2}$$

а її дисперсія

$$D(X) = npq. \tag{5.3}$$

Доведення

Випадкову величину X – число m появ події A в n незалежних випробуваннях – можна подати у вигляді суми n незалежних випадкових величин $X_1 + X_2 + ... + X_k + ... + X_n$, кожна з яких має один і той самий закон розподілу:

X_k :

x_i	0	1
p_i	q	p

та виражає число появ події A в k-му (одиничному) випробуванні ($k = \overline{1, n}$). Тобто при появі події A $X_k = 1$ з ймовірністю p, а за відсутності цієї події – $X_k = 0$ з ймовірністю q. Випадкову величину X_k називають альтернативною випадковою величиною.

Знайдемо числові характеристики альтернативної випадкової величини.

$$M(X_k) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

$$D(X_k) = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq,$$

оскільки $p + q = 1$.

Тепер математичне сподівання та дисперсія даної випадкової величини X:

$$M(X) = M(X_1 + ... + X_k + ... + X_n) = \underbrace{p + ... + p}_{n \text{ раз}} = np,$$

$$D(X)=D(X_1+...+X_k+...+X_n)=\underbrace{pq+...+pq}_{n\ \text{раз}}=npq\,.$$

Наслідок. $M\left(\dfrac{m}{n}\right)=p,\ D\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{pq}{n}.$

Дійсно, $M\left(\dfrac{m}{n}\right)=M\left(\dfrac{X}{n}\right)=\dfrac{1}{n}M(X)=\dfrac{1}{n}np=p$;

$$D\left(\frac{m}{n}\right)=D\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D(X)=\frac{1}{n^2}npq=\frac{pq}{n}.$$

Зауваження. Стає зрозумілим зміст аргументів у функціях $\varphi(x)$ та $\Phi(x)$ локальної та інтегральної теорем Муавра – Лапласа (див. підрозділ 3.4). Аргумент функції Гаусса $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ є відхиленням кількості появ події A в n незалежних випробуваннях, розподіленої за біноміальним законом, від її середнього значення $M(X)=np$, вираженого в стандартних відхиленнях $\sigma_x=\sqrt{npq}$.

Аргумент функції Лапласа $x=\dfrac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}=\dfrac{\Delta}{\sqrt{pq/n}}$ є відхиленням Δ частоти $\dfrac{m}{n}$ події в n незалежних випробуваннях від її ймовірності p в окремому випробуванні, вираженим в стандартних відхиленнях $\sigma\left(\dfrac{m}{n}\right)=\sqrt{D\left(\dfrac{m}{n}\right)}=\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$.

У підрозділі 3.1 встановлено, що найімовірніша кількість m_0 появ події A в n випробуваннях задовольняє нерівність $np-q\le m_0\le np+p$. Це означає, що мода випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом – ціле число – знаходиться з тієї ж нерівності

$$np-q\le Mo(X)\le np+p. \tag{5.4}$$

Біноміальний закон розподілу широко використовується в теорії та практиці статистичного контролю якості продукції, при описі функціонування систем масового обслуговування, при моделюванні цін активів, в теорії стрільби та ін. Так, наприклад, одержаний в прикладі 1.16 закон розподілу випадкової величини X – кількість кущів малини, інфікованих вірусом, серед чотирьох висаджених кущів – біноміальний з параметрами $n=4$, $p=0{,}1$.

5.2 Закон розподілу Пуассона

Дискретна випадкова величина X має закон розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо вона набуває значень 0, 1, 2, … , m, … (нескінченна, але зчисленна множина) з ймовірностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda). \tag{5.5}$$

Ряд розподілу закону Пуассона такий:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	…

Зрозуміло, що означення закону Пуассона є коректним, оскільки виконується основна властивість ряду розподілу:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + ... + \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} + ... =$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + ... + \frac{\lambda^m}{m!} + ...\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 .$$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона збігаються і дорівнюють параметру його закону, тобто

$$M(X) = D(X) = \lambda \tag{5.6}$$

(доведіть дане твердження самостійно).

При необмеженому збільшенні кількості випробувань n ($n \to \infty$), за умови, що добуток np прямує до параметра закону Пуассона λ ($np \to \lambda$), закон Пуассона є гарним наближенням біноміального закону. В даному випадку функція ймовірностей Пуассона гарно апроксимує функцію ймовірностей, визначену за формулою Бернуллі.

При $p \to 0$, $n \to \infty$, $np \to \lambda$ закон розподілу Пуассона є граничним випадком біноміального закону. Оскільки ймовірність події A в кожному випробуванні мала, то закон розподілу Пуассона часто називають *законом рідкісних явищ.*

Приклад 5.1 Довести, що сума двох незалежних випадкових величин, розподілених за законом Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2, також розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Розв'язування

Нехай випадкові величини $X = m$ та $Y = n$ розподілені за законом Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2. Оскільки дані випадкові величини незалежні, то сума $Z = X + Y$ набуває значення $Z = s$ з ймовірністю

$$P(Z = s) = P(X = m) \cdot P(Y = n) = \sum_{m+n=s} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} \cdot \frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{m+n=s} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^n}{m! \cdot n!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{n=0}^{s} \frac{\lambda_1^{s-n} \cdot \lambda_2^n}{(s-n)! \cdot n!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{s!} \sum_{n=0}^{s} \frac{s! \lambda_1^{s-n} \cdot \lambda_2^n}{(s-n)! \cdot n!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{s!} \sum_{n=0}^{s} C_s^n \lambda_1^{s-n} \lambda_2^n = = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{s!} (\lambda_1 + \lambda_2)^s .$$

5.3 Рівномірний закон розподілу

Неперервна випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність ймовірності така:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a \le x \le b, \\ 0, & \text{якщо } x < a, \quad x > b, \end{cases} \tag{5.7}$$

а функція розподілу визначається за формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \quad x \le a, \\ (x-a) \big/ (b-a), & \text{якщо } \quad a < x \le b, \\ 1, & \text{якщо } \quad x > b. \end{cases} \tag{5.8}$$

Криву розподілу та графік функції розподілу випадкової величини X наведено на рис. 5.1, а, б.

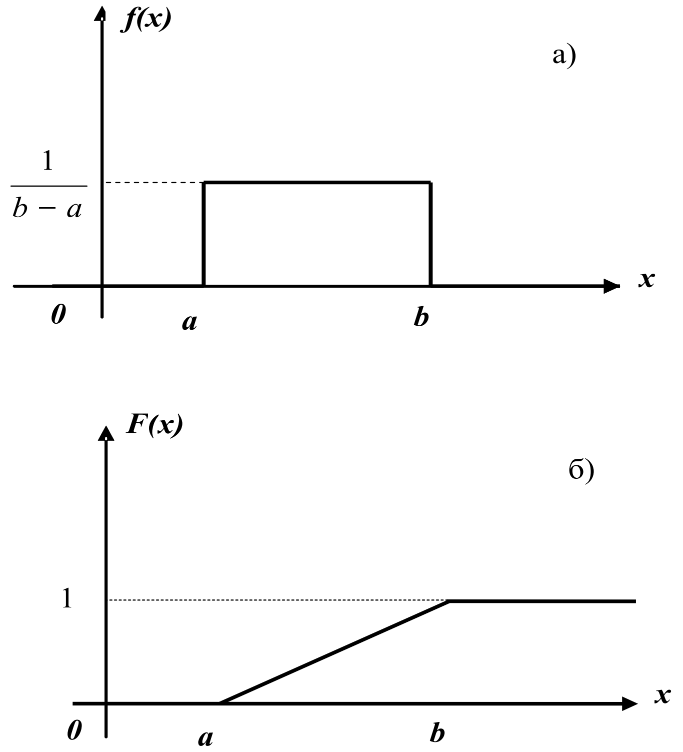


Рисунок 5.1 – Крива розподілу та графік функції розподілу випадкової величини X

Теорема 5.2 Якщо випадкова величина розподілена за рівномірним законом, то її математичне сподівання

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\qquad(5.9)$$

а дисперсія

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.\qquad(5.10)$$

Доведення

Математичне сподівання обчислюємо за формулою:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

Дисперсію даної випадкової величини знайдемо за формулою (4.25):

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[X-M(X)]^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{3(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}\right]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Рівномірний закон розподілу використовують при аналізуванні помилок округлення при проведенні числових обрахунків, в задачах масового обслуговування, при статистичному моделюванні спостережень.

Приклад 5.2 Випадкова величина X має рівномірний розподіл із $M(X)=2$ і $D(X)=\frac{1}{3}$. Знайти щільність імовірності випадкової величини X та функцію розподілу F(x). Обчислити P(1<x<2).

Розв'язування

Знайдемо, спочатку, параметри даного розподілу як розв'язки системи:

$\begin{cases}\frac{a+b}{2}=2\\ \frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{3}\end{cases}$, або $\begin{cases}a+b=4\\ (b-a)^2=4\end{cases}$. Звідки одержуємо дві пари розв'язків:

$a=3,\quad b=1$ та $a=1,\quad b=3$. Оскільки передбачається, що $a<b$, то даній умові відповідає пара $a=1,\quad b=3$. За формулами (5.7) та (5.8) маємо:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{якщо } 1\le x\le 3,\\ 0, & \text{якщо } x<1,\quad x>3,\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 1,\\ \frac{1}{2}(x-1), & \text{якщо } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$$

Ймовірність P(1<x<2) обчислимо за формулою (4.21):

$$P(1<x<2)=\frac{1}{2}\int_1^2 dx=\frac{1}{2}x\Big|_1^2=\frac{2-1}{2}=0{,}5.$$

5.4 Показниковий закон розподілу

Неперервна випадкова величина X має показниковий закон розподілу з параметром λ, якщо її щільність ймовірності така:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \ge 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \tag{5.11}$$

а функція розподілу визначається за формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \ge 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Крива розподілу та графік функції розподілу випадкової величини X розподіленої за показниковим законом, наведено на рис. 5.2, а, б.

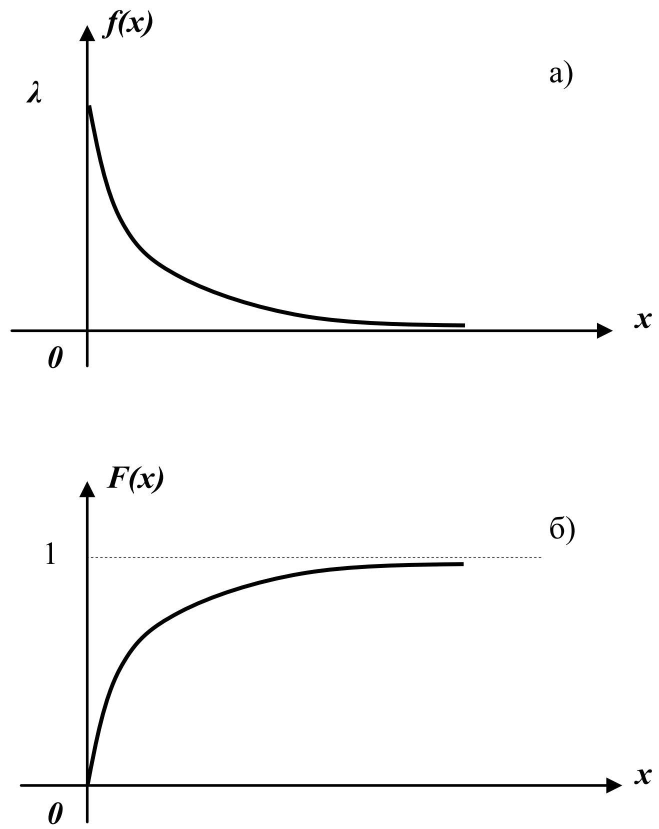


Рисунок 5.2 – Крива розподілу та графік функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за показниковим законом

Теорема 5.3 Якщо випадкова величина розподілена за показниковим законом, то її математичне сподівання

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \tag{5.13}$$

а дисперсія

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.14}$$

Доведення

Математичне сподівання обчислюємо за формулою:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^b xde^{-\lambda x}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-\lambda x}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-be^{-\lambda b}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b\right)=0-\frac{1}{\lambda}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-\lambda b}-1\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

Для знаходження дисперсії спочатку знайдемо

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^b x^2 de^{-\lambda x}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\int_0^b 2xe^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-b^2e^{-\lambda b}+\frac{2}{\lambda}\int_0^b x\lambda e^{-\lambda x}dx\right)=0+\frac{2}{\lambda}\cdot M(X)=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Тоді

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини X в заданий інтервал (α,β) дорівнює

$$P(\alpha\le X\le\beta)=e^{-\alpha\lambda}-e^{-\beta\lambda}. \tag{5.15}$$

Показниковий закон відіграє важливу роль в теорії масового обслуговування та теорії надійності. Зокрема, інтервал часу T між двома сусідніми подіями в елементарному потоці має показниковий розподіл з параметром λ – інтенсивністю потоку.

Приклад 5.3 Довести, що якщо проміжок часу T, розподілений за показниковим законом, вже тривав деякий час τ, то це ніяк не впливає на закон розподілу проміжку $T_1 = T - \tau$.

Розв'язування

Нехай функція розподілу проміжку часу T визначається за формулою (5.12), тобто $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Функція розподілу частини, що залишилася, ($T_1 = T - \tau$) за умови, що подія $T > \tau$ відбулась, є умовна ймовірність події $T_1 < t$ відносно події $T > \tau$, тобто $F_1(t) = P_{T>\tau}(T_1 > t)$. Оскільки умовна ймовірність довільної події B відносно події A визначається за формулою $P_A(B) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$, то беручи $A = (T > \tau)$, $B = (T_1 < t)$ отримаємо

$$F_1(t) = P_{T>\tau}(T_1 > t) = \frac{P[(T > \tau)(T_1 < t)]}{P(T > \tau)}.$$

Добуток подій $T > \tau$ та $T_1 = (T - \tau) < t$ рівносильний події $\tau < T < t + \tau$, ймовірність якої

$$P(\tau < T < t + \tau) = F(t + \tau) - F(\tau).$$

Оскільки $P(T > \tau) = 1 - P(T \le \tau) = 1 - F(\tau)$, то $F_1(t) = P_{T>\tau}(T_1 > t)$ можна подати у вигляді:

$$F_1(t) = \frac{F(t + \tau) - F(\tau)}{1 - F(\tau)}.$$

Враховуючи рівність (5.12), отримуємо

$$F_1(t) = \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}} = 1 - e^{-\lambda t} = F(t).$$

Зауваження. Доведена властивість широко використовується в марковських випадкових процесах.

5.5 Нормальний закон розподілу

Даний закон найбільш широко застосовується на практиці, оскільки він є граничним законом, до якого наближаються інші закони.

Неперервна випадкова величина X має *нормальний закон розподілу* (*normal law of distribution*) (закон Гаусса) з параметрами a та σ^2, якщо її щільність ймовірності така:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (5.16)$$

Криву нормального закону розподілу називають *нормальною* або *гаус-совою* кривою. На рис. 5.3 наведено нормальну криву $f_N(x)$ з параметрами a та σ^2, тобто $N(a,\sigma^2)$, та графік функції розподілу випадкової величини X, що розподілена за нормальним законом.

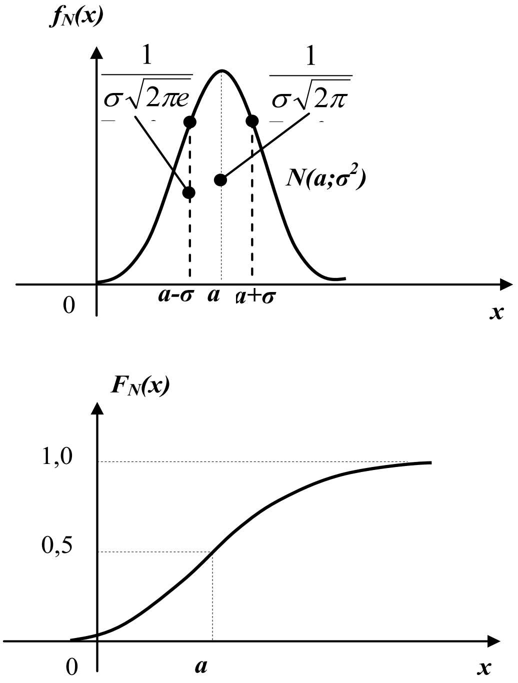


Рисунок 5.3 – Нормальна крива $f_N(x)$ з параметрами a та графік функції розподілу випадкової величини X

Нормальна крива симетрична відносно прямої $x = a$. Значення $x = a$ є точкою максимум, причому $f_{\max} = f(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Існують дві точки перегину $x = a \pm \sigma$ з ординатою $f_{\text{пер}}(a \pm \sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx \dfrac{0{,}242}{\sigma}$.

Теорема 5.4 Математичне сподівання випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, дорівнює параметру a цього закону, тобто

$$M(X) = a, \qquad (5.17)$$

а її дисперсія – параметру σ^2, тобто

$$D(X)=\sigma^2. \qquad (5.18)$$

Доведення

Математичне сподівання випадкової величини X:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_N(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Зробимо заміну змінної, позначивши $t=\dfrac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$, тоді $x=a+\sqrt{2}\sigma t$ та $dx=\sqrt{2}\sigma dt$, межі інтегрування не змінюються. Маємо

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(a+\sqrt{2}\sigma t)\,e^{-t^2}\sqrt{2}\sigma\,dt=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=a$$

(перший інтеграл дорівнює нулю як інтеграл від непарної функції по симетричному відносно початку координат проміжку, а другий інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ – інтеграл Ейлера – Пуассона).

Дисперсія випадкової величини X:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f_N(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Робимо ту саму заміну змінної, як і при обчисленні попереднього інтеграла. Тоді

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2 2t^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}\sqrt{2}\sigma\,dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}tde^{-t^2}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} U=t & dU=dt \\ dV=de^{-t^2} & V=e^{-t^2}\end{matrix}\right\}=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\sigma^2.$$

З'ясуємо, як буде змінюватись нормальна крива при зміні параметрів a та σ^2 (або σ). Якщо $\sigma=const$, а змінюється параметр, тобто центр симетрії, то нормальна крива буде суміщатися вздовж осі абсцис, не змінюючи форми (рис. 5.4).

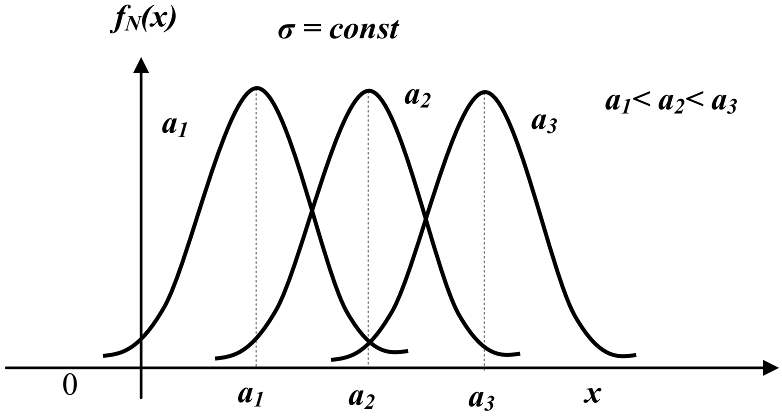


Рисунок 5.4 – Нормальна крива при зміні параметра a, якщо $\sigma = const$

Якщо $a = const$, а змінюється параметр σ^2, то змінюється ордината максимуму кривої $f_{\max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При збільшенні σ ордината максимуму кривої зменшується, але оскільки площа під довільною кривою розподілу повинна незмінно дорівнювати одиниці, то крива стає більш пласкою, розтягуючись вздовж осі абсцис; при зменшенні σ нормальна крива витягується вверх, одночасно стискаючись з боків. На рис. 5.5 зображено нормальні криві з параметрами $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

Таким чином, параметр a характеризує положення центра, а параметр σ^2 – форму нормальної кривої.

Нормальний закон з параметрами $a = 0$ та $\sigma^2 = 1$, тобто $N(0,1)$, називають стандартним або нормованим, а відповідну нормальну криву – стандартною або нормованою.

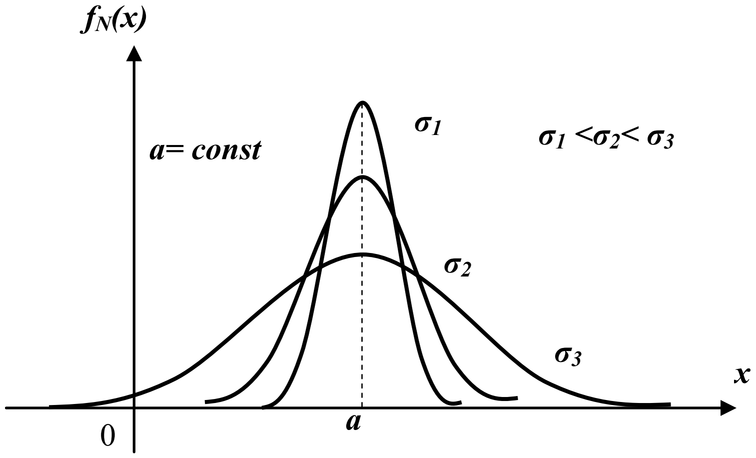


Рисунок 5.5 – Нормальна крива при зміні параметра σ^2, якщо $a = const$

Теорема 5.5 Функцію розподілу випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, можна виразити за допомогою функції Лапласа $\Phi(x)$ так:

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{5.19}$$

Доведення

За формулою (4.22) функція розподілу:

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^{x} f_N(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Зробимо заміну змінної, позначивши $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$, тоді $x = a + \sigma t$ та $dx = \sigma dt$, при $x \to -\infty \quad t \to -\infty$, тому

$$F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Перший інтеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

(в силу парності підінтегральної функції і того, що інтеграл Ейлера-Пуассона дорівнює $\sqrt{\pi}$).

Оскільки $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то другий інтеграл становить $\dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$.

Тобто, $F_N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$.

З геометричної точки зору функція розподілу є площею під нормальною кривою на інтервалі $(-\infty, \quad x)$ (рис. 2.6). Очевидно, що вона складається з двох частин: на інтервалі $(-\infty, \quad a)$ вона дорівнює 0,5; на інтервалі (a, x) – дорівнює $\dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$.

Розглянемо основні ***властивості*** нормально розподіленої випадкової величини.

1. Ймовірність потрапляння випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, в інтервал $[x_1, x_2]$ дорівнює

$$P\left(x_1 \le X \le x_2\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right], \tag{5.20}$$

де

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}, \qquad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

Доведення

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right].$$

2. Ймовірність того, що відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, від математичного сподівання не перевищить величину $\Delta > 0$ (за абсолютною величиною) дорівнює

$$P\left(\left|X - a\right| \le \Delta\right) = \Phi(t), \tag{5.21}$$

де

$$t = \frac{\Delta}{\sigma}. \tag{5.22}$$

На рис. 5.6 та 5.7 наведена геометрична інтерпретація властивостей нормального закону.

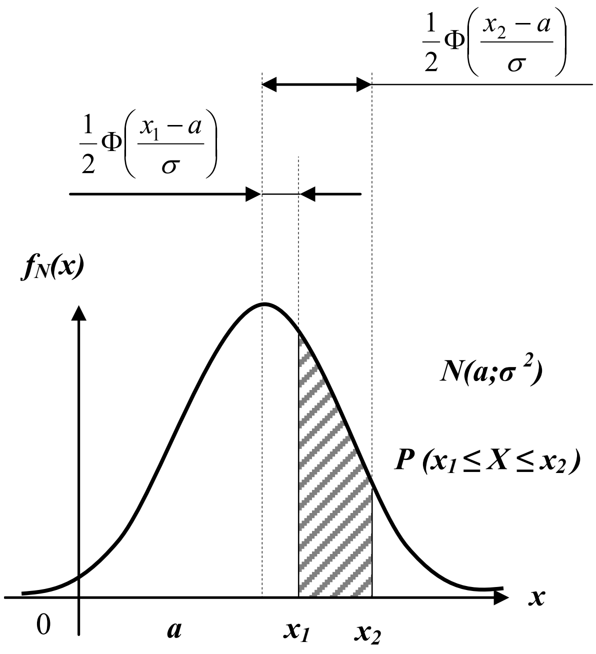


Рисунок 5.6

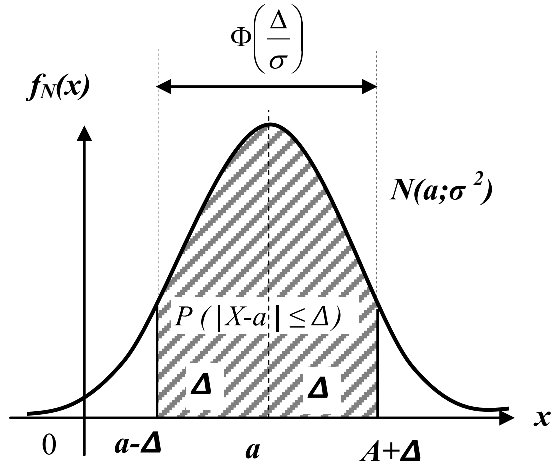


Рисунок 5.7

Обчислимо за формулою (2.21) ймовірності $P(|X-a|\le\Delta)$ при різних значеннях Δ. Маємо при

$\Delta=\sigma$ $\quad P(|X-a|\le\sigma)=\Phi(1)=0{,}6827$; (див. дод. В)

$\Delta=2\sigma$ $\quad P(|X-a|\le 2\sigma)=\Phi(2)=0{,}9545$;

$\Delta=3\sigma$ $\quad P(|X-a|\le 3\sigma)=\Phi(3)=0{,}9973$

(рис. 5.8).

Звідси випливає *«правило трьох сигм»*.

Якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу з *параметрами a та σ^2, то практично достовірно, що її значення належать інтервалу $(a-3\sigma,\quad a+3\sigma)$.*

Порушення «правила трьох сигм», тобто відхилення випадкової величини більше, ніж на 3σ є подією практично неможливою, оскільки її ймовірність досить мала:

$$P(|X-a|>3\sigma)=1-P(|X-a|\le 3\sigma)=1-0{,}9973=0{,}0027.$$

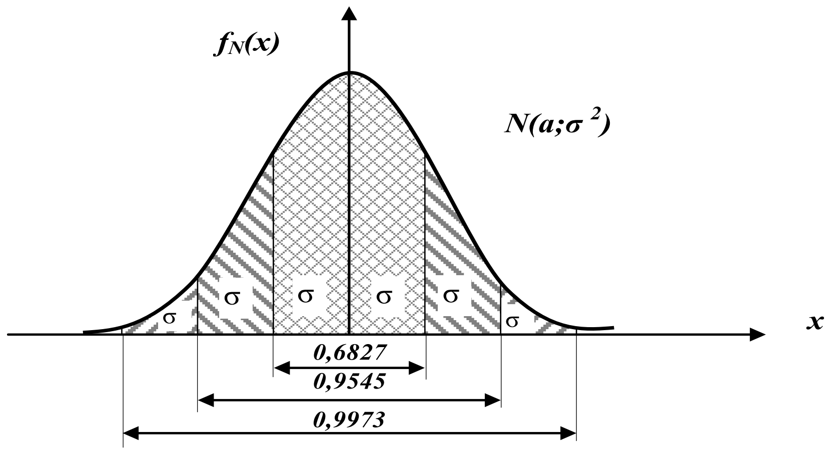


Рисунок 5.8 – «Правило трьох сигм»

Знайдемо коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом.

Зрозуміло, що в силу симетрії нормальної кривої відносно прямої $x=a$, коефіцієнт асиметрії нормального розподілу $A=0$. Тоді ексцес нормально розподіленої випадкової величини дорівнює

$$E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^4\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx}{\sigma^4}-3=\frac{3\sigma^4}{\sigma^4}-3=0.$$

Приклад 5.4 Припускаючи, що зріст чоловіків певної вікової групи є нормально розподілена випадкова величина з параметрами $a = 173$ та $\sigma^2 = 36$, знайти:

2. а) щільність ймовірності та функцію розподілу; б) частки костюмів 4-го зросту (176-182 см) та 3-го зросту (170-176 см), котрі потрібно передбачити в загальному обсязі виробництва для даної вікової групи; в) квантиль $x_{0,7}$ та 10%-ву точку випадкової величини X.
3. Сформулювати «правило трьох сигм» для випадкової величини X.

Розв'язування

1. а) За формулами (5.15) та (5.18) запишемо

$$f_N(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}};$$

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-173}{6}\right).$$

б) Частка костюмів 4-го зросту в загальному обсязі виробництва обчислимо за формулою (5.20)

$$P(176 \le X \le 182) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{182-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{176-173}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5)] =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}8664 - 0{,}3829) = 0{,}2418.$$

Аналогічно обчислюємо частку костюмів 3-го зросту

$$P(170 \le X \le 176) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{176-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-173}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(0{,}5) + \Phi(0{,}5)] = \Phi(0{,}5) = 0{,}3829\cdot$$

в) Квантиль $x_{0,7}$ знайдемо з рівняння (4.28) з врахуванням (4.19):

$$F(x_{0,7}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-173}{6}\right) = 0{,}7;$$

звідки

$$\Phi\left(\frac{x-173}{6}\right) = \Phi(t) = 0{,}4.$$

За таблицями додатку В знаходимо $t = 0{,}524$ та $x_{0,7} = 6t + 173 \approx 176$ (см).

Це означає, що 70% чоловіків даної вікової групи мають зріст 176 см.
10%-ва точка випадкової величини X – це квантиль $x_{0,9} = 181$ см.

2. Практично достовірно, що зріст чоловіків даної вікової групи знаходиться в межах від $a - 3\sigma = 173 - 18 = 155$ до $a + 3\sigma = 173 + 18 = 191$ (см), тобто $155 \le X \le 191$ (см).

5.6 Розподіл χ^2

Розподілом χ^2 (*хі-квадрат*) з k *ступенями свободи* (додаток Г) називають розподіл суми квадратів k незалежних випадкових величин, розподілених за стандартним нормальним законом, тобто

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 , \qquad (5.23)$$

де Z_i $\left(i = 1, 2, ..., k\right)$ має нормальний розподіл $N(0, 1)$.

Щільність ймовірності χ^2 – розподілу така:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{якщо} \quad x \ge 0, \\ 0, \quad \text{якщо} & x < 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$ – гамма-функція Ейлера (для цілих додатних значень $\Gamma(y) = (y-1)!$).

Криві χ^2 – розподілу для різних значень ступенів свободи наведено на рис. 5.9.

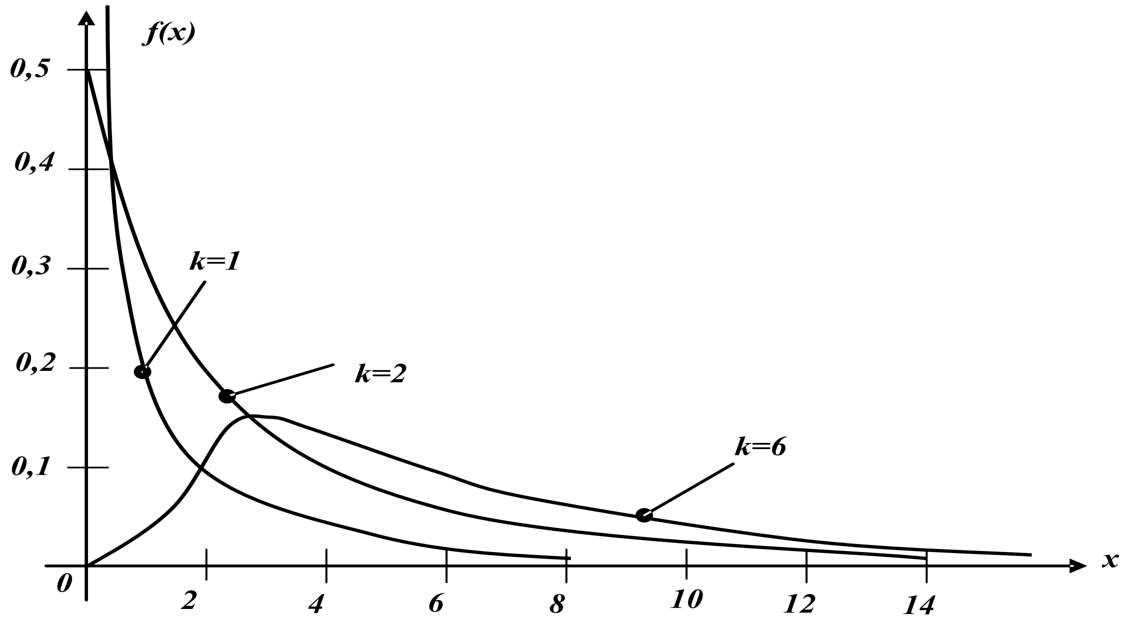


Рисунок 5.9 – Криві χ^2 – розподілу для різних значень ступенів свободи

Очевидно, що χ^2 – розподіл асиметричний з правосторонньою (додатною) асиметрією. При $k > 30$ розподіл випадкової величини $Z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2k-1}$ близький до стандартного нормального закону $N(0,1)$.

5.7 Розподіл Стьюдента

Розподілом Стьюдента (distribution of Students) або *t – розподілом* (додаток Д) називають розподіл випадкової величини

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}}, \qquad (5.24)$$

де Z має нормальний розподіл $N(0,1)$.

χ^2 – незалежна від Z випадкова величина, що має χ^2 – розподіл з k ступенями свободи.

Щільність ймовірності Стьюдента така:

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

де $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1}$ – гамма-функція Ейлера.

На рис. 5.10 наведено криву розподілу Стьюдента. Як і стандартна нормальна крива, крива t – розподілу симетрична відносно осі ординат, але порівняно з нормальною більш пласка.

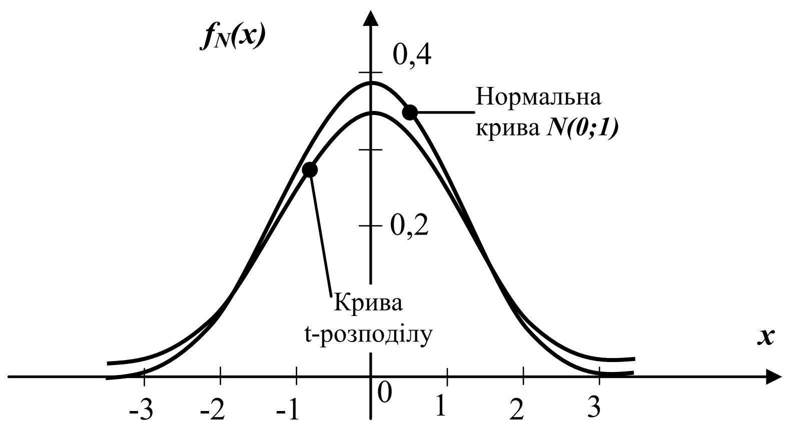


Рисунок 5.10 – Крива розподілу Стьюдента

Практично при $k > 30$ розподіл випадкової величини близький до стандартного нормального закону $N(0,1)$.

Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл Стьюдента, дорівнює нулю (оскільки крива розподілу симетрична), а дисперсія – $D(t) = \frac{k}{k-2}$.

5.8 Розподіл Фішера – Снедекора

Розподілом Фішера – Снедекора або F*– розподілом* (додаток Е) називають розподіл випадкової величини

$$F = \frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)}, \tag{5.25}$$

де $\chi^2(k_1)$ та $\chi^2(k_2)$ – випадкові величини, що мають розподіл χ^2 відповідно з k_1 та k_2 ступенями свободи.

Щільність ймовірності F – розподілу така

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} k_1^{\frac{k_1}{2}} k_2^{\frac{k_2}{2}} x^{\frac{k_1}{2}-1} \left(k_1 x + k_2\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}.$$

На рис. 5.11 зображено криві F – розподілу при деяких значеннях числа ступенів свободи k_1 та k_2.

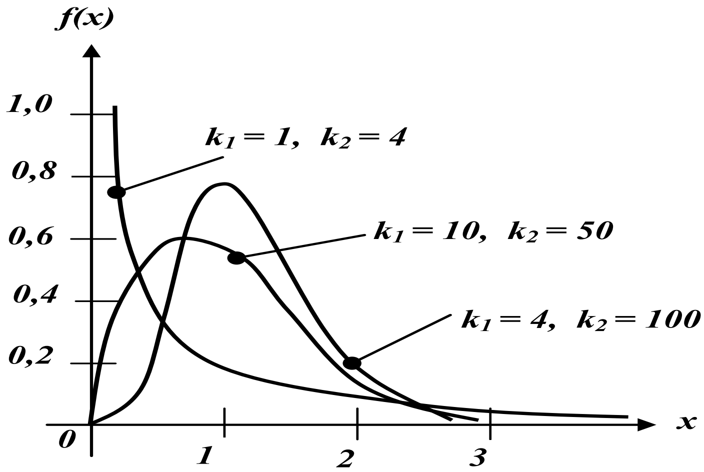


Рисунок 5.11 – Криві F – розподілу при деяких значеннях числа ступенів свободи k_1 та k_2

При $n \to \infty$ F –розподіл наближається до нормального закону.

ТЕМА 6 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

6.1 Варіаційні ряди, їх графічне подання та характеристики

Встановлення статистичних закономірностей, притаманних масовим випадковим явищам, побудоване на вивченні статистичних даних – відомостей про те, яких значень набула в результаті спостережень певна ознака.

Математична статистика розробляє методи отримання, математичного опису і обробки експериментальних даних, які дають змогу за результатами випробувань робити ймовірні висновки про закономірності випадкових масових явищ. Основні задачі математичної статистики такі:

- оцінення невідомої функції розподілу;
- оцінення невідомих параметрів розподілу;
- статистична перевірка гіпотез;
- довірчі інтервали.

В практиці статистичних спостережень розрізняють два види спостережень: *суцільне*, коли вивчаються всі об'єкти сукупності, та *вибіркове*, коли вивчається частина об'єктів. Прикладом суцільного спостереження є перепис населення, який охоплює усе населення країни. Вибірковим спостереженням є соціологічне опитування, яке охоплює лише частину населення країни, області, району тощо.

Уся сукупність об'єктів (спостережень), що підлягає вивченню, називається *генеральною сукупністю (general aggregate).* Та частина об'єктів, що відібрана для безпосереднього вивчення генеральної сукупності, називається *вибірковою сукупністю* або *вибіркою*. Кількість об'єктів у генеральній або вибірковій сукупності називають їх обсягами.

Позначимо:

x_i – значення ознаки (випадкової величини X);

N *та* n – об'єми генеральної та вибіркової сукупності;

N_i *та* n_i – кількість елементів генеральної та вибіркової сукупностей із значенням ознаки x_i;

M *та* m – кількість елементів генеральної та вибіркової сукупностей, що мають дану ознаку.

Повторною (*repeatead selection*) називають вибірку, при якій відібраний об'єкт (перед вибором наступного) повертається в генеральну сукупність. *Безповторною* (*non repeatead selection)* називають вибірку, при якій відібраний об'єкт не повертається в генеральну сукупність.

Репрезентативною називають вибірку, яка правильно подає пропорції генеральної сукупності. Значення ознаки x_k окремих членів сукупності називають варіантами, а числа, які показують, скільки разів повторюється кожна варіанта – частотами n_k.

Приклад 6.1 Необхідно вивчити зміну виробітку на одну кравчиню швейного цеху у звітному році порівняно з попереднім. Отримано такі дані про розподіл 100 кравчинь цеху за виробітком у звітному році (у відсотках до попереднього року):

$$\underbrace{97{,}8;\quad 97{,}0;\quad 101{,}7;\ldots;\quad 142{,}3;\quad 104{,}2;\quad 141{,}0;\quad 122{,}1}_{100\quad \text{значень}}.$$

Різні значення ознаки (випадкової величини X) називають варіантами (позначають x).

Щоб скласти уявлення про дану вибірку, потрібно, спочатку, її впорядкувати, розташувавши варіанти в порядку зростання (спадання). Цю операцію називають ранжуванням варіант вибірки:

$$\underbrace{x_{\min} = 97{,}0;\quad 97{,}2;\ \ldots;\quad 141{,}0;\quad 142{,}3 = x_{\max}}_{n=100\quad \text{значень}}.$$

У такому вигляді вивчати виробіток кравчинь також не дуже зручно через велику кількість числових даних. Тому розіб'ємо варіанти на окремі інтервали, тобто проведемо їх групування (*інтервальне групування*), суть якого полягає в такому. Весь розмах зміни ознаки від найменшої $(x_{\min})$ до найбільшої $(x_{\max})$ розбивають на певне число інтервалів $[x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_{k-1}, x_k], \ldots, [x_{s-1}, x_s]$ або розрядів. Число інтервалів m потрібно брати не дуже великим, щоб після групування вибірка не була громіздкою або дуже малою, щоб не втратити особливостей розподілу ознаки і підраховують частоти варіант, що відповідно однакові.

Згідно з формулою Стерджеса можливе число інтервалів $m = 1 + 3{,}322 \cdot \lg n$, а величина інтервалу (інтервальна різниця, ширина інтервалу)

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}. \qquad (6.1)$$

У прикладі 6.1 $k = \dfrac{142{,}3 - 94{,}0}{1 + 3{,}3221 \cdot \lg 100} = \dfrac{48{,}3}{7{,}6442} \approx 6{,}32\ (\%)$.

Візьмемо $k = 6\,(\%)$. За початок першого інтервалу рекомендується обирати величину $x_{\text{поч}} = x_{\min} - \dfrac{k}{2}$. В прикладі 6.1 $x_{\text{поч}} = 97{,}0 - \dfrac{6}{2} = 94{,}0\,(\%)$.

Наступним кроком є підрахунок *частоти варіант* $n_1, n_2, \ldots, n_s$. *Зауваження.* Числа, що показують скільки разів зустрічаються варіанти з даного інтервалу, називають частотами (n_i). Відношення їх до загального числа спостережень – $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ називають їхніми *вагами.*

Варіаційним рядом називають сукупність ранжованих в порядку зростання (спадання) варіант з відповідними їм вагами.

Інтервальний варіаційний ряд, або інтервальний статистичний ряд, розподілу записують у вигляді таблиці.

Таблиця 6.1 – Інтервальний статистичний ряд розподілу

інтервал	$[x_1 - x_2]$	$[x_2 - x_3]$		$[x_{k-1} - x_k]$		$[x_{s-1} - x_s]$	$\sum$
n_i	n_1	n_2		n_k		n_s	n
$W_i = \frac{n_i}{n}$	W_1	W_2		W_k		W_s	1

У прикладі 6.1 згруповану вибірку можна подати у вигляді таблиці (табл. 6.2).

Варіаційний ряд називають *дискретним*, якщо будь-які його варіанти відрізняються на сталу величину, та *неперервним* (*інтервальним)*, якщо варіанти відрізняються одна від одної на як завгодно малу величину. Варіаційний ряд, поданий в табл. 6.2, є інтервальним (відсотки виробітку умовно округлені до десятих).

Таблиця 6.2 – Варіаційний інтервальний ряд

i	Виробіток в звітному році у відсотках до попереднього x	Частота (кількість кравчинь) n_i	Ваги (частка кравчинь) $W_i = \frac{n_i}{n}$
1	94,0-100,0	3	0,03
2	100,0-106,0	7	0,07
3	106,0-112,0	11	0,11
4	112,0-118,0	20	0,20
5	118,0-124,0	28	0,28
6	124,0-130,0	19	0,19
7	130,0-136,0	10	0,10
8	136,0-142,0	2	0,02
	$\sum$	100	1

Для задання варіаційного ряду достатньо вказати варіанти та відповідні їм частоти.

Дискретний варіаційний ряд або ряд розподілу частот може бути записаний у вигляді таблиць.

Таблиця 6.3 – Ряд розподілу частот

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_s
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k	$\ldots$	n_s
x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_s
W_i	W_1	W_2	$\ldots$	W_k	$\ldots$	W_s

При цьому виконуються такі рівності: $\sum\limits_{k=1}^{s} n_k = n\,; \sum\limits_{k=1}^{s} W_k = 1\,.$

Прикладом дискретного ряду є розподіл 50 робітників механічного цеху за тарифним розрядом (табл. 6.4).

Таблиця 6.4 – Дискретний ряд розподілу

Тарифний розряд x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Частота (кількість робітників) n_i	2	3	6	8	22	9	50

Зауваження

1. Інтервальний ряд може бути умовно перебудований в дискретний шляхом заміни кожного інтервалу його серединою.

2. На практиці найчастіше розглядають інтервали однакової довжини.

Для графічного зображення варіаційних рядів найчастіше використовують полігон та гістограму.

Якщо на площині нанести точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_s, n_s)$ і з'єднати сусідні точки відрізками прямих ліній, то отримана ламана лінія називається *полігоном частот* або *частотним багатокутником* (рис. 6.1). Якщо на площині нанести точки $\left(x_1, \frac{n_1}{n}\right), \ldots, \left(x_2, \frac{n_2}{n}\right), \left(x_s, \frac{n_s}{n}\right)$ і з'єднати сусідні точки відрізками прямих ліній, отримаємо *полігон відносних частот*. Для побудови полігонів частот (відносних частот) на осі абсцис відкладають варіанти, а на осі ординат – відповідні їм частоти чи відносні частоти.

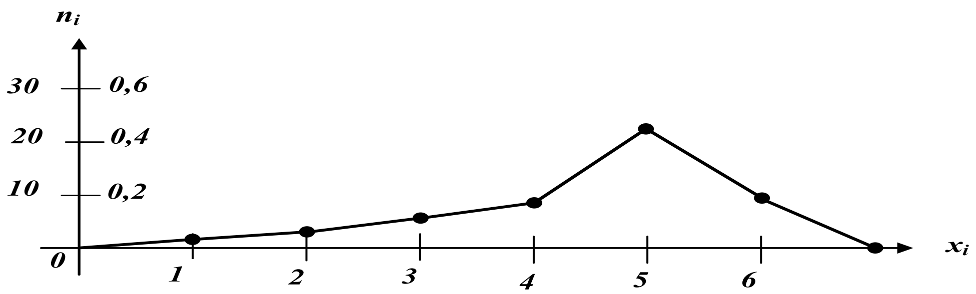


Рисунок 6.1 – Полігон частот

Гістограмою (*histogram*) називають графічне зображення інтервального статистичного ряду. Будується гістограма так. Для кожного частотного інтервалу довжиною h знаходять суму частот варіант n_i, що потрапляють в *i*-тий інтервал. Вздовж осі абсцис відкладають інтервали $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ і на кожному з них будується прямокутник площею n_i, тобто висотою $l = \dfrac{n_i}{h}$. Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки n.

Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ і на кожному з них будується прямокутник висотою $l = \dfrac{n_i}{n \cdot h} = \dfrac{W_i}{h}$. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

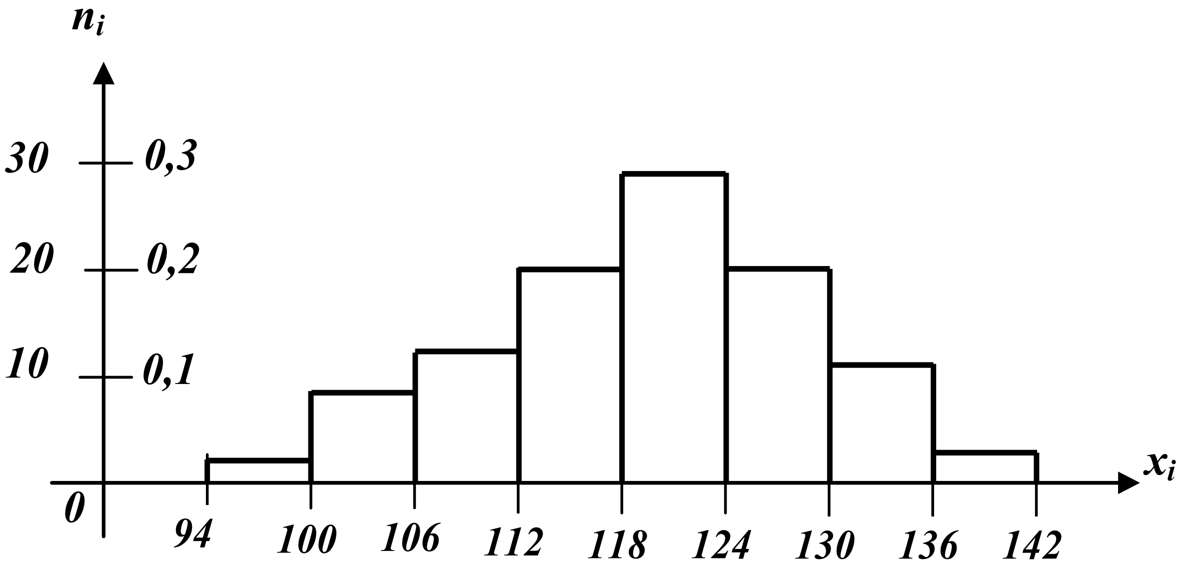


Рисунок 6.2 – Гістограма

Надзвичайно важливим є поняття емпіричної та теоретичної функцій розподілу. Функцію розподілу $F(x) = P(X < x)$ генеральної сукупності називають *теоретичною функцією розподілу. Емпіричною функцією розподілу (empiric function of distribution) (функцією розподілу вибірки)* називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \tag{6.2}$$

де n_x – число тих x_i, для яких $x_i < x$; n – об'єм вибірки. При великих n $F^*(x) \approx F(x)$ або $\lim\limits_{n\to\infty} p \cdot \left[\left| F(x) - F^*(x) \right| < \varepsilon \right] = 1$ $(\varepsilon > 0)$.

Вкажемо основні властивості емпіричної функції розподілу:

1) значення емпіричної функції належать проміжку $[0;1]$;
2) $F^*(x)$ – неспадна функція;
3) якщо x_1 і x_k – відповідно найменша і найбільша варіанти, то $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Графік емпіричної функції для дискретного варіаційного ряду – східчаста лінія, яка має розриви (скачки) в точках x_1, x_2 і т. д. Для інтервального варіаційного ряду маємо лише значення функції розподілу на кінцях інтервалу. Тому для графічного подання такої функції доцільно її довизначити, з'єднавши точки графіка, що відповідають кінцям інтервалів, відрізками прямої.

Розглянемо основні характеристики варіаційного ряду.

Значення ознаки (варіанти), яке розділяє ранжований варіаційний ряд на дві рівні за кількістю варіант частини, називається *медіаною* Me^*.

Якщо число варіант парне, тобто $n = 2k$, то $Me^* = \dfrac{(x_k + x_{k+1})}{2}$, при непарному $n = 2k + 1$ $Me^* = x_{k+1}$. З означення емпіричної інтегральної функції випливає рівність $F^*(Me^*) = 0,5$. Для інтервального ряду, виходячи з умови $F^*(x_{k-1}) \le 0,5$ і $F^*(x_k) \ge 0,5$, знаходять медіанний інтервал (x_{k-1}, x_k). Тоді, використовуючи лінійну інтерполяцію, значення медіани на цьому інтервалі обчислюють згідно з формулою:

$$Me^* = x_{k-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{k-1})}{F^*(x_k) - F^*(x_{k-1})} \cdot (x_k - x_{k-1}). \qquad (6.3)$$

Для знаходження медіани можна використати іншу формулу:

$$Me = x_{k-1} + \frac{\frac{\sum m}{2} - S_{Me-1}}{m_{Me}} \cdot (x_k - x_{k-1}), \qquad (6.4)$$

де $\sum m = n$ – сума всіх частот;

S_{Me-1} – сума частот до медіанного інтервалу;

m_{Me} – частота медіанного інтервалу.

Для того, щоб знайти медіанний інтервал, послідовно знаходять накопичені частоти S. Першій накопиченій частоті S_{Me}, яка більша за $\frac{1}{2}\sum m$, відповідає медіанний інтервал (у випадку дискретного ряду S_{Me} відповідає самій медіані).

Модою Mo^* дискретного статистичного розподілу називається варіанта, що має найбільшу частоту. Для інтервального розподілу визначається модальний інтервал (x_{k-1}, x_k), якому відповідає найбільша щільність відносної частоти $\frac{n_i}{h_i}$, де n_i – число варіант з i-го інтервалу. Тоді відповідно до лінійної інтерполяції значення Mo^* всередині модального інтервалу дорівнює:

$$Mo^* = x_{k-1} + \frac{m_{Mo} - m_{Mo-1}}{(m_{Mo} - m_{Mo-1}) + (m_{Mo} - m_{Mo+1})} \cdot (x_k - x_{k-1}) =$$
$$= x_{k-1} + \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1})} \cdot (x_k - x_{k-1}), \qquad (6.5)$$

де x_{k-1} – початок модального інтервалу, тобто інтервалу, в якому міститься мода;

m_{Mo-1} – частота інтервалу, попереднього перед Mo (що передує модальному);

m_{Mo} – частота модального інтервалу;

m_{Mo+1} – частота інтервалу, наступного за модальним.

Розмахом варіації R називають різницю між найбільшою і найменшою варіантами: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Середнім вибірковим (арифметичним) варіаційного ряду називається дріб, в чисельнику якого міститься сума добутків варіант x_i ряду на відповідні їм ваги n_i, а в знаменнику – сума ваг, тобто обсяг вибірки n:

$$\overline{X_в} = \overline{X} = \overline{x_в} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_i n_i + \ldots + x_m n_m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}. \qquad (6.6)$$

За середнє арифметичне неперервного варіаційного ряду беруть середнє арифметичне дискретного розподілу, що відповідає даному неперервному. Це означає, що частоти неперервного розподілу відносять до середин відповідних інтервалів, які тепер стають варіантами.

Приклад 6.2 Знайти середній виробіток кравчинь за даними таблиці 6.2.

Розв'язування

За формулою (6.6) маємо для інтервального ряду

$$\overline{X_г} = \overline{x_в} = \frac{97 \cdot 3 + 103 \cdot 7 + ... + 133 \cdot 10 + 139 \cdot 2}{100} = 119{,}2\,(\%),$$

де числа 97, 103, … , 133, 139 – середини відповідних інтервалів.

Розглянемо властивості середнього арифметичного.

1. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) в одне і те ж число k разів, то середнє арифметичне збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів: $\overline{k \cdot x} = k \cdot \overline{x}$.

2. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) на одне і те ж число c, то середнє арифметичне збільшиться (зменшиться) на те ж число c:

$$\overline{x \pm c} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i \pm c) \cdot n_i}{n} = \overline{X} \pm c.$$

3. Сума добутків відхилень варіант від середнього арифметичного на відповідні їм ваги дорівнює нулю:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{X}\right) \cdot n_i}{n} = \overline{X} - \overline{X} = 0.$$

4. При збільшенні і зменшенні ваг в одне і те ж число k разів середнє арифметичне не змінюється:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i k n_i}{\sum_{i=1}^{m} k n_i} = \overline{X}.$$

5. Якщо кожне значення ознаки z є сумою (різницею) значень ознак x і y, то середнє арифметичне ознаки z дорівнює сумі (різниці) середніх арифметичних ознак x і y:

$$\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}.$$

6. Якщо ряд складається з декількох груп, загальне середнє дорівнює середньому арифметичному групових середніх, причому вагами є обсяг груп:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} \overline{x_i} n_i}{n}, \qquad (6.7)$$

де $\overline{x}$ – загальне середнє;

$\overline{x_i}$ – групове середнє i-ої групи, обсяг якої дорівнює n_i;

l – кількість груп.

Наведені властивості приводять до спрощеної формули:

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k}}{n} k + c. \qquad (6.8)$$

Дисперсією $D_в = \sigma_в^2$ варіаційного ряду називається середнє арифметичне квадратів відхилень варіант від їх середнього:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{X}\right)^2 \cdot n_i}{n}. \qquad (6.9)$$

Середнім квадратичним відхиленням називається арифметичне значення кореня квадратного з дисперсії:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \qquad (6.10)$$

Вкажемо основні властивості дисперсії.

1. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) в k разів, то дисперсія збільшиться (зменшиться) в k^2 разів, а середнє квадратичне значення – в $|k|$ разів.

2. Якщо варіанти збільшити чи зменшити на одну і ту ж постійну величину, то дисперсія не зміниться.

3. Якщо ваги збільшити чи зменшити в одне і те ж число разів, то дисперсія не зміниться.

4. Дисперсія відносно середнього арифметичного дорівнює дисперсії відносно довільної сталої без квадрата різниці між середнім арифметичним і цією сталою:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - c)^2 \cdot n_i}{n} - \left(\overline{X} - c\right)^2. \qquad (6.11)$$

5. Дисперсія дорівнює середньому арифметичному квадратів варіант без квадрата середнього арифметичного:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} \cdot n_i}{n} - \left(\overline{X}\right)^2. \qquad (6.12)$$

6. Якщо ряд складається з декількох груп l спостережень, то загальна дисперсія дорівнює сумі середніх арифметичних групових дисперсій та міжгрупових дисперсій:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} D_i \cdot n_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{l} \left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2 n_i}{n}. \qquad (6.13)$$

Наведені властивості приводять до спрощеної формули:

$$D_в = \sigma_в^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2}{n} \cdot k^2 - \left(\overline{X} - c\right)^2. \qquad (6.14)$$

Коефіцієнтом варіації (V) називається відношення середнього квадратичного відхилення $\sigma_в$ до середнього $\overline{X_в}$ виражене у відсотках (або частці одиниці):

$$V = \frac{\sigma_в}{\overline{\overline{X}}_в} \cdot 100\%. \qquad (6.15)$$

Середнє арифметичне та дисперсія варіаційного ряду є окремими випадками більш загального поняття – моментів варіаційного ряду.

1. *Початкові статистичні моменти* k*-го порядку*:

$$M_k = \sum_{i=1} x_i^k \cdot \frac{m_i}{n}, \ \sum_{i=1} m_i = n. \qquad (6.16)$$

Тоді при:

$k = 0$, $M_0 = \sum_{i=1} x_i^0 \cdot \frac{m_i}{n} = 1$;

$k = 1$, $M_1 = \sum_{i=1} x_i \cdot \frac{m_i}{n} = \overline{X}$ – середнє арифметичне;

$k = 2$, $M_2 = \sum_{i=1} x_i^2 \cdot \frac{m_i}{n} = \overline{X}^2$ – середнє квадратичне відхилення;

$k = 3$, $M_3 = \sum_{i=1} x_i^3 \cdot \frac{m_i}{n} = \overline{X}^3$.

2. *Центральні статистичні моменти k-го порядку:*

$$\overline{\mu_k} = \sum_i \left(x_i - \overline{X}\right)^k \cdot \frac{m_i}{n}, \quad \sum_{i=1} m_i = n. \qquad (6.17)$$

Тоді при:

$k = 0$, $\mu_0 = \sum_i \left(x_i - \overline{X}\right)^0 \cdot \frac{m_i}{n} = 1$;

$k = 1$, $\mu_1 = \sum_i \left(x_i - \overline{X}\right) \cdot \frac{m_i}{n} = 0$;

$k = 2$, $\mu_2 = \sum_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 \cdot \frac{m_i}{n} = \sigma_в^2$ – статистична дисперсія;

$k = 3$, $\mu_3 = \sum_i \left(x_i - \overline{X}\right)^3 \cdot \frac{m_i}{n}$;

$k = 4$, $\mu_4 = \sum_i \left(x_i - \overline{X}\right)^4 \cdot \frac{m_i}{n}$.

Асиметрія вибіркового розподілу обчислюється за формулою $As = \frac{\mu_3}{\sigma_в^3}$. Якщо розподіл симетричний, то $As = 0$. *Ексцес* вибіркового розподілу визначається за формулою $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Середні арифметичні розподілу ознаки в генеральній та вибірковій сукупностях називають відповідно *генеральним* та *вибірковим середніми,* а дисперсії цих розподілів – *генеральною* та *вибірковою дисперсіями.* Всі формули зведемо в таблицю.

Таблиця 6.5 – Формули для обчислення числових характеристик

Найменування характеристики	Генеральна сукупність	Вибірка
Середнє	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i N_i}{N}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}$
Дисперсія	$D = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2 N_i}{N}$	$D = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2 n_i}{n}$
Частка	$p = \frac{M}{N}$	$W = \frac{m}{n}$

6.2 Поняття оцінення параметрів. Методи знаходження оцінок

Сформулюємо задачу оцінення параметрів в загальному вигляді. Нехай розподіл ознаки X (генеральної сукупності) задано функцією ймовірностей $f(x_i,\theta)=P(X=x_i)$ (для дискретної випадкової величини) чи щільністю ймовірності $f(x,\theta)$ (для неперервної випадкової величини), яка містить невідомий параметр θ. Наприклад, параметр λ в розподілі Пуассона чи a та σ^2 для нормального закону розподілу тощо.

Для обчислення параметра θ розглядають вибірку, яка складається із значень варіант $x_1, x_2, ..., x_n$. Ці значення можна розглядати як окремі випадки n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, кожна з яких має той самий закон розподілу, що й випадкова величини X .

Оцінкою параметра θ називають довільну функцію результатів спостережень над випадковою величиною (статистику), за допомогою якої складають враження про значення параметра θ:

$$\theta_n^* = \theta_n^*(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Оскільки $X_1, X_2, ..., X_n$ – випадкові величини, то оцінка θ_n^* також є випадковою величиною, яка залежить від закону розподілу випадкової величини X та числа n.

Зрозуміло, що оцінок параметра можна підібрати безліч. Але яка оцінка є оптимальною? Якщо значення θ_n^* близьке до реального значення θ, то розсіювання випадкової величини θ_n^* відносно θ буде найменшим (розсіювання випадкової величини можна виражати, наприклад, математичним сподіванням квадрата відхилення оцінки від параметра, що оцінюється). Оцінка параметра θ_n^* називається *несуміщеною*, якщо $M(\theta_n^*)=\theta$. В іншому випадку оцінка називається *суміщеною.* Несуміщена оцінка θ_n^* параметра θ називається *ефективною*, якщо вона має найменшу дисперсію серед усіх можливих несуміщених оцінок параметра θ, обчислених за вибірками одного і того ж обсягу.

Розглянемо методи оцінювання генеральної сукупності за вибіркою.

1. *Оцінка генеральної частки.* Нехай генеральна сукупність містить N елементів, з який M має певну ознаку A. Потрібно знайти «найкращу» оцінку генеральної частки $p=\dfrac{M}{N}$. Розглянемо як таку можливу оцінку цього параметра його статистичний аналог – вагу $W=\dfrac{m}{n}$.

Для *повторної вибірки* вибіркову частку можна подати як середнє арифметичне n альтернативних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, тобто

$W = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$, де кожна випадкова величина X_k є числом появ ознаки в k-му елементі вибірки та має один і той самий закон розподілу.

Таблиця 6.6 – Закон розподілу

x_i	0	1
p_i	$\dfrac{N-M}{N}$	$\dfrac{M}{N}$

Слід відмітити, що вибіркова частка $W = \dfrac{m}{n}$ є несуміщеною оцінкою генеральної частки $p = \dfrac{M}{N}$ з дисперсією

$$D_W = \frac{pq}{n}, \tag{6.18}$$

де $q = 1 - p$.

Для *безповторної вибірки* випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ є залежними. Тоді розглянемо, наприклад, події $X_1 = 1$ та $X_2 = 1$. Тепер ймовірність $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{M-1}{N-1}$, оскільки відібраний елемент у вихідну сукупність не повертається, то в ній залишається $N-1$ елемент, серед яких $M-1$ елемент має ознаку A. Ця ймовірність $P_{X_1=1}(X_2 = 1)$ не дорівнює $P(X_2 = 1) = \dfrac{M}{N}$, тобто події $X_1 = 1$ та $X_2 = 1$ – залежні. Аналогічно можна показати залежність інших подій. Слід відмітити, що вибіркова частка безповторної вибірки є несуміщеною оцінкою генеральної частки з дисперсією

$$D'_W = \frac{pq}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right), \tag{6.19}$$

де $q = 1 - p$.

Приклад 6.3 Знайти несуміщену оцінку частки кравчинь швейного цеху з виробітком не менш як 124% за вибіркою з табл. 6.2.

Розв'язування

Несуміщеною оцінкою генеральної частки $P(X \geq 124)$ є вибіркова частка

$$W(X \geq 124) = \frac{19 + 10 + 2}{100} = 0{,}31.$$

2. *Оцінка генерального середнього*. Нехай із генеральної сукупності обсягом N відібрано випадкову вибірку $X_1, X_2, ..., X_n$, де X_k – випадкова величина, що є значенням ознаки в k-му елементі вибірки. Потрібно знайти «найкращу» оцінку генеральної середньої.

Розглянемо як таку можливу оцінку вибіркове середнє $\overline{X_г} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$. Для *повторної вибірки* закон розподілу для кожної випадкової величини X_k зведено в табл. 6.7.

Таблиця 6.7 – Закон розподілу для повторної вибірки

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m
p_i	$\dfrac{N_1}{N}$	$\dfrac{N_2}{N}$	…	$\dfrac{N_i}{N}$	…	$\dfrac{N_m}{N}$

Вибіркове середнє повторної вибірки $\overline{X}$ є суміщеною оцінкою генерального середнього з дисперсією

$$D_{\overline{X_г}} = \frac{D}{n}. \tag{6.20}$$

Знайдемо числові характеристики випадкової величини X_k:

$$M(X_k) = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i N_i}{N} = \overline{X}, \tag{6.21}$$

$$D(X_k) = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{X})^2 N_i}{N}. \tag{6.22}$$

Тобто математичне сподівання та дисперсія кожної випадкової величини X_k є відповідно генеральним середнім та генеральною дисперсією.

Для *безповторної вибірки* випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ є залежними. Тоді розглянемо, наприклад, події $X_1 = 1$ та $X_2 = 1$. Тепер ймовірність $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{N_1 - 1}{N - 1}$, оскільки відібраний елемент у вихідну сукупність не повертається, то в ній залишається $N - 1$ елемент, серед яких $N_1 - 1$ елемент має ознаку A. Ця ймовірність $P_{X_1=1}(X_2 = 1)$ не дорівнює

$P(X_2 = 1) = \dfrac{N_1}{N}$, тобто події $X_1 = 1$ та $X_2 = 1$ – залежні. Аналогічно можна показати залежність інших подій. Слід відмітити, що вибіркове середнє безповторної вибірки є несуміщеною оцінкою генерального середнього з дисперсією

$$D'_{\overline{X_г}} = \frac{D}{n}\left(1 - {}^{n}\!/_{N}\right). \qquad (6.23)$$

3. *Оцінка генеральної дисперсії.* Вибіркова дисперсія D' повторної та безповторної вибірки є суміщеною оцінкою генеральної дисперсії D, причому

$$D' = \frac{n}{n-1} D = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{X_г})^2 n_i}{n-1}. \qquad (6.24)$$

Приклад 6.4 Знайти несуміщену оцінку дисперсії виробітку кравчинь швейного цеху за даними з табл. 6.2.

Розв'язування

Несуміщеною оцінкою дисперсії випадкової величини X (генеральної дисперсії) є вибіркова дисперсія, яку обчислюємо так.

За формулою (6.9)

$$D = \frac{(97 - 119{,}2)^2 \cdot 3 + (103 - 119{,}2)^2 \cdot 7 + ... + (133 - 119{,}2)^2 \cdot 10 + (139 - 119{,}2)^2 \cdot 2}{100} = 87{,}48 \cdot$$

Згідно з формулою (6.24) маємо:

$$D' = \frac{n}{n-1} D = \frac{100}{99} \cdot 87{,}48 = 88{,}36 .$$

Всі розглянуті методи оцінюють параметри θ одним числом. Такі оцінки називають точковими. Однак точкова оцінка є лише наближеним значенням невідомого параметра навіть в тому випадку, якщо вона несуміщена, ефективна та для вибірки малого обсягу може істотно відрізнятись від реального θ.

Інтервальною оцінкою параметра θ називають числовий інтервал $\left(\theta_n^{*(1)}; \theta_n^{*(2)}\right)$, який із заданою ймовірністю γ накриває невідоме значення параметра θ (рис. 6.5)

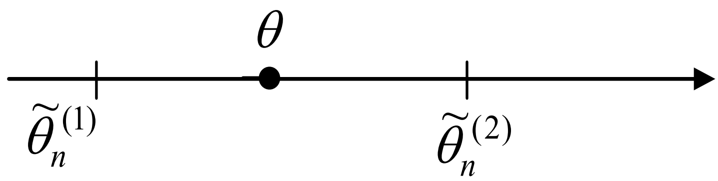


Рисунок 6.5 – Геометрична інтерпретація

Зрозуміло, що межі інтервалу є випадковими величинами. Такий інтервал називають *довірчим*, а ймовірність γ – *довірчою ймовірністю*, *рівнем довіри* або *надійністю оцінки.*

Величина довірчого інтервалу істотно залежить від обсягу вибірки n (зменшується із зростанням n) та від значення довірчої ймовірності γ (збільшується з наближенням γ до одиниці).

При побудові довірчого інтервалу для генерального середнього та генеральної частки великих вибірок потрібно пам'ятати, що ймовірність того, що відхилення вибіркового середнього (або частки) від генерального середнього (або частки) не перевищить число $\Delta > 0$ (за абсолютною величиною), дорівнює:

$$P\left(\left|\overline{X} - \overline{X_г}\right| \le \Delta\right) = \Phi(t) = \gamma, \qquad (6.25)$$

де $t = \dfrac{\Delta}{\sigma_{\overline{X}}}$

$$P\left(\left|W - p\right| \le \Delta\right) = \Phi(t) = \gamma, \qquad (6.26)$$

де $t = \dfrac{\Delta}{\sigma_W}$

$\Phi(t)$ – функція (інтеграл ймовірностей) Лапласа.

Середнє квадратичне відхилення вибіркового середнього $\sigma_{\overline{X}}$ та вибіркової частки σ_W називають середньою квадратичною (стандартною) помилкою вибірки (для без повторної вибірки позначаємо відповідно $\sigma'_{\overline{X}}$ та σ'_W).

Зауваження.

1. При заданій довірчій ймовірності γ гранична похибка дорівнює t-кратній величині середньої квадратичної помилки, де $\Phi(t) = \gamma$, тобто $\Delta = t\sigma_{\overline{X}}$, $\Delta = t\sigma_W$.

2. Інтервальні оцінки (довірчі інтервали) для генерального середнього та генеральної частки можна знайти за формулами:

$$\overline{X} - \Delta \le \overline{X_г} \le \overline{X} + \Delta, \qquad (6.27)$$

$$W - \Delta \le p \le W + \Delta. \qquad (6.28)$$

Формули для обчислення середніх квадратичних похибок зведемо в таблицю (табл. 6.8).

Таблиця 6.8 – Формули для обчислення середніх квадратичних похибок

Параметр, що оцінюється	Формули середніх квадратичних похибок вибірки	
	повторна вибірка	безповторна вибірка
Середня	$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\dfrac{D}{n}} \approx \sqrt{\dfrac{D'}{n}}$ (6.28)	$\sigma'_{\overline{X}} \approx \sqrt{\dfrac{D}{n}\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}$ (6.29)
Частка	$\sigma_W = \sqrt{\dfrac{pq}{n}} \approx \sqrt{\dfrac{W(1-W)}{n}}$ (6.30)	$\sigma_W \approx \sqrt{\dfrac{W(1-W)}{n}\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}$ (6.31)

Для проведення вибіркового спостереження особливо важливо встановити обсяг вибірки n, який істотно визначає необхідні при цьому часові, трудові та вартісні витрати. Для визначення n необхідно задати надійність (довірчу ймовірність) оцінки γ та точність (граничну помилку вибірки) Δ.

Формули для знаходження обсягів вибірок зведемо в таблицю (табл. 6.9)

Таблиця 6.9 – Формули для знаходження обсягів вибірок

Параметр, що оцінюють	Повторна вибірка	Безповторна вибірка
Генеральне середнє	$n = \dfrac{t^2 D}{\Delta^2}$	$n' = \dfrac{Nt^2 D}{t^2 D + N\Delta^2}$
Генеральна частка	$n = \dfrac{t^2 pq}{\Delta^2}$	$n' = \dfrac{Nt^2 pq}{t^2 pq + N\Delta^2}$

Якщо знайдений обсяг повторної вибірки n, то обсяг відповідної безповторної вибірки n' можна обчислити так :

$$n' = \frac{nN}{n+N}. \qquad (6.32)$$

Оскільки $\dfrac{N}{n+N} < 1$, то за одних і тих же точності та надійності оцінок обсяг безповторної вибірки завжди менший за обсяг повторної вибірки. Цим і пояснюється той факт, що на практиці зазвичай використовують безповторну вибірку.

Приклад 6.5 За умовою попереднього прикладу визначити обсяг вибірки, при якому з ймовірністю 0,9973 відхилення середнього виробітку кравчинь у вибірці від середнього виробітку усіх кравчинь цеху не перевищить 1% (за абсолютною величиною).

Розв'язування

Як невідоме значення дисперсії для визначення обсягу вибірки оберемо його оцінку $D' = 87{,}48$, знайдену в попередньому прикладі.

Враховуючи, що $\gamma = \Phi(t) = 0{,}9973$ та (додаток В) $t = 3$, знайдемо обсяг повторної вибірки за формулою $n = \dfrac{t^2 D}{\Delta^2} = \dfrac{3^2 \cdot 87{,}48}{1} = 787$.

Обсяг безповторної вибірки $n' = \dfrac{1000 \cdot 3^2 \cdot 87{,}48}{3^2 \cdot 87{,}48 + 1000 \cdot 1} = 440{,}5 \approx 441$.

Обсяг безповторної вибірки можна обчислити за формулою (6.32), оскільки уже відомий обсяг повторної вибірки n, тобто

$$n' = \frac{787 \cdot 1000}{787 + 1000} \approx 441.$$

Очевидно, за однієї і тієї ж точності $\Delta = 1\%$ та надійності $\gamma = 0{,}9973$ оцінка обсягу безповторної вибірки істотно менша за оцінку обсягу повторної.

6.3 Статистична гіпотеза та загальна схема її перевірки

З теорією статистичного оцінювання параметрів тісно пов'язана перевірка статистичних гіпотез. Вона використовується щоразу, коли потрібно обґрунтувати висновок про переваги того чи іншого способу інвестування, вимірювання, стрільби, технологічного процесу, стосовно ефективності нового навчального метода, управління, про значимість математичної моделі тощо.

Статистичною гіпотезою (*statistical hypothesis*) називають довільне припущення про вигляд чи параметри закону розподілу. Розрізняють *просту* та *складену* статистичні гіпотези. Проста гіпотеза повністю визначає теоретичну функцію розподілу випадкової величини. Ту гіпотезу, що перевіряють, називають *нуль-гіпотезою* (*zero-hypothesis*) (або *основною гіпотезою*) та позначають H_0. Одночасно з нуль-гіпотезою розглядають *альтернативну (alternative hypothesis)*, або *конкуруючу*, гіпотезу H_1, яка є логічним запереченням гіпотези H_0.

Суть перевірки статистичної гіпотези полягає в тому, що використовується спеціально складена вибіркова характеристика (статистика)

$\widetilde{\theta}_n(x_1,....,x_n)$, отримана за вибіркою X_1 ,..., X_n, точний чи наближений розподіл якої відомий. Потім за цим вибірковим розподілом визначають критичне значення $\theta_{кр}$. Якщо ймовірність $P\left(\widetilde{\theta}_n > \theta_{кр}\right) = \alpha$ мала, то гіпотеза H_0 є правильною. Правило, за яким гіпотеза H_0 приймається чи відкидається, називається статистичним критерієм чи статистичним тестом.

Таким чином, множина можливих значень статистики критерію $\widetilde{\theta}_n$ розбивають на дві підмножини, які не перерізаються: критичну область (область відхилення гіпотези) W та область допустимих значень (область прийняття гіпотези) $\overline{W}$. Якщо спостережуване значення статистики $\widetilde{\theta}_n$ потрапляє в критичну область W, то гіпотезу H_0 відкидають. При цьому можливі чотири випадки (табл. 6.10).

Таблиця 6.10 – Можливі випадки

Гіпотеза H_0	*Приймається*	*Відкидається*
Правильна	Правильне рішення	Помилка 1-го роду
Неправильна	Помилка 2-го роду	Правильне рішення

Ймовірність α допустити помилку 1-го роду, тобто відкинути гіпотезу H_0, коли вона правильна, називається *рівнем значимості* чи *розміром критерію*.

Ймовірність допустити помилку 2-го роду, тобто прийняти хибну гіпотезу, зазвичай позначають β.

Ймовірність $(1-\beta)$ не допустити помилку 2-го роду, тобто відхилити гіпотезу H_0, коли вона хибна, називають *потужністю критерію*.

Користуючись термінологією статистичного контролю якості продукції можна сказати, що ймовірність α – «ризик постачальника» пов’язаний із забракуванням усієї партії за результатами вибіркового контролю, а ймовірність β – «ризик споживача» пов’язаний з прийняттям за аналізом партії, що не задовольняє стандарт.

Застосовуючи юридичну термінологію, α – ймовірність винесення судом обвинувачувального вироку, коли насправді підсудний не винен, β – ймовірність винесення судом виправдовувального вироку у випадку реального скоєння злочину підсудним. В прикладних дослідженнях помилка першого роду означає ймовірність того, що сигнал не буде прийнято спостерігачем, а помилка другого роду – ймовірність того, що спостерігач прийме хибний сигнал.

Слід відмітити, що при практичних обрахунках зазвичай обирають таку критичну область, при якій потужність критерію є максимальною, а ймовірність потрапляння в неї статистики критерію $\widetilde{\theta}_n$ була мінімальною та дорівнювати α у випадку справедливості нуль-гіпотези та максимальною в іншому випадку.

Іншими словами, критична область повинна бути такою, щоб при заданому рівні значимості α потужність критерію $(1-\beta)$ була максимальною.

Серед усіх критеріїв заданого рівня значимості α, що перевіряють гіпотезу H_0, критерій відношення правдоподібності є найбільш потужним (за Нейманом – Пірсоном). Основу методу максимальної правдоподібності становить функція правдоподібності, яка є щільністю ймовірності одночасної появи результатів вибірки $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \varphi(x_1, \theta) \cdot \varphi(x_2, \theta) \cdot ... \cdot \varphi(x_i, \theta) \cdot ... \cdot \varphi(x_n, \theta)$$

або

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \theta). \tag{6.33}$$

Згідно з цим методом як оцінка параметра θ береться таке значення $\tilde{\theta}_n$, яке максимізує функцію L.

Приклад 6.6 Випадкова величина має нормальний закон розподілу $N(a;\sigma^2)$, де $a = M(X)$ невідоме, а дисперсія – відома. Побудувати найбільш потужний критерій перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ на противагу альтернативній гіпотезі H_1: $a = a_1 > a_0$. Знайти: а) потужність критерію; б) мінімальний обсяг вибірки, що забезпечить задані рівень значимості α та потужність критерію $1-\beta$.

Розв'язування

Якщо правильною є гіпотеза H_0, тобто $X \approx N(a_0;\sigma^2)$, то функція правдоподібності, згідно з формулою (6.33), така:

$$L_0(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Аналогічно, якщо правильною є гіпотеза H_1, тобто $X \approx N(a_1;\sigma^2)$, то

$$L_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найбільш потужний критерій базується на відношенні правдоподібності $\frac{L_1}{L_0}$. Знайдемо його логарифм натуральний

$$\ln\frac{L_1}{L_0} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[2x_i(a_1 - a_0) - \left(a_1^2 - a_0^2\right)\right] = \frac{1}{2\sigma^2}(a_1 - a_0)\sum_{i=1}^{n}(2x_i - a_1 - a_0) =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}(a_1 - a_0)(2\bar{x} - a_1 - a_0)n.$$

Для побудови критерію знайдемо таку сталу C (або $\ln C = c$), що

$$P\left(\frac{L_1}{L_0} > C\right) = P\left(\ln\frac{L_1}{L_0} > c\right) = \alpha.$$

Одержаний вираз для рівня значимості α можна замінити йому рівносильним (враховуючи монотонність функції $\ln\frac{L_1}{L_0}$ відносно $\bar{x}$):

$$P(\bar{x} > c') = \alpha.$$

Для визначення c' потрібно врахувати, що якщо випадкова величина розподілена нормально, тобто $X \approx N(a_0; \sigma^2)$, то її середня $\bar{x}$ також розподілена нормально з параметрами a_0 та $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$, тобто $\bar{x} \approx N\left(a_0; \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$.

За формулою (4.19) отримуємо:

$$P(\bar{x} > c') = 1 - P(\bar{x} \le c') = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{c' - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{c' - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \alpha,$$

звідки $\Phi\left(\frac{c' - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1 - 2\alpha$ або за таблицями $\frac{c' - a_0}{\sigma}\sqrt{n} = t_{1-2\alpha}$. Таким чином, межа критичної області W визначається значенням $c' = \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0$.

Отже, найбільш потужним критерієм перевірки гіпотези $H_0: a = a_0$ на противагу альтернативній гіпотезі $H_1: a = a_1 > a_0$ є такий*: гіпотеза* H_0 *відхиляється, якщо* $\bar{x} > \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0$; H_0 *приймається, якщо* $\bar{x} \le \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0$.

а) Для знаходження потужності критерію визначимо спочатку ймовірність β допустити помилку 2-го роду – прийняти гіпотезу*,* коли вона хибна, тобто має місце альтернативна гіпотеза $X \approx N(a_1;\sigma^2)$ або $\bar{x} \approx N\left(a_1;\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$:

$$\beta = P\left(\bar{x} \le \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a_0 + {t_{1-2\alpha}\sigma}/{\sqrt{n}} - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\left(a_1 - a_0\sqrt{n}\right)}{\sigma} - t_{1-2\alpha}\right).$$

Таким чином, потужність критерію така:

$$1 - \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\left(a_1 - a_0\sqrt{n}\right)}{\sigma} - t_{1-2\alpha}\right).$$

Проаналізувавши одержане значення, переконуємось, що зменшення рівня значимості α при сталому обсязі вибірки призводить до збільшення ймовірності β та відповідно до зменшення потужності критерію $1-\beta$. І тільки при збільшенні обсягу вибірки можна, зменшуючи ймовірність α, одночасно зменшити ймовірність β (збільшувати потужність критерію $1-\beta$).

б) При заданих ймовірностях помилок 1-го та 2-го роду α та β з виразу для β нескладно знайти відповідний обсяг вибірки за формулою:

$$n = \frac{\left(t_{1-2\alpha} + t_{1-2\beta}\right)^2 \sigma^2}{\left(a_1 - a_0\right)^2}.$$

Принцип тестування статистичної гіпотези не дає логічного доведення її істинності чи хибності. Більш того, прийняття гіпотези H_0 не потрібно розглядати як назавжди встановлений, абсолютно правильний факт.

Розглянемо деякі методи тестування статистичних гіпотез.

1. Перевірка гіпотез про рівність середніх.

У промисловості задача порівняння середніх часто виникає при вибірковому контролі якості продукції, виготовленої на різних установках чи при різних технологічних режимах, у фінансовому аналізі – при зіставленні рівня дохідності різних активів і т. д.

Сформулюємо задачу. Нехай є дві сукупності, які характеризуються генеральними середніми $\overline{x_0}$ та $\overline{y_0}$ та відомими дисперсіями σ_x^2 та σ_y^2. Необхідно перевірити гіпотезу H_0 про рівність генеральних середніх, тобто H_0: $\overline{x_0}$ та $\overline{y_0}$. Для перевірки цієї гіпотези із цих сукупностей взято дві незалежні вибірки об'ємів n_1 та n_2, за якими знайдені середні арифметичні $\bar{x}$ та $\bar{y}$ і вибіркові дисперсії D'_x та D'_y.

Якщо H_0 справедлива, то різниця $\bar{x}-\bar{y}$ має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $M(\bar{x}-\bar{y})=\overline{x_0}-\overline{y_0}=0$ та дисперсією $\sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}}=\sigma^2_{\bar{x}}+\sigma^2_{\bar{y}}=\dfrac{\sigma_x^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_y^2}{n_2}$. Тому при виконанні гіпотези H_0 статистика

$$t=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-M(\bar{x}-\bar{y})}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_y^2}{n_2}}} \tag{6.34}$$

має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$.

У випадку конкуруючої гіпотези $H_1: \ \overline{x_0}>\overline{y_0}$ (чи $H_1: \ \overline{x_0}<\overline{y_0}$) критичне значення статистики знаходять з умови

$$\Phi(t_{кр})=\Phi(t_{1-2\alpha})=1-2\alpha, \tag{6.35}$$

а при конкуруючій гіпотезі $H_1: \ \overline{x_0}\neq\overline{y_0}$ критичне значення статистики знаходять з умови

$$\Phi(t_{кр})=\Phi(t_{1-\alpha})=1-\alpha. \tag{6.36}$$

Якщо спостережуване значення статистики t більше за критичне $t_{кр}$, визначене на рівні значимості α (за абсолютною величиною), то гіпотеза H_0 не приймається. В іншому випадку роблять висновок, що дана гіпотеза не суперечить результатам спостережень.

Приклад 6.7 Для перевірки ефективності нової технології відібрано дві групи робітників: в першій групі чисельністю n_1= 50 чол., де застосовувалась нова технологія, вибірковий середній виробіток становив $\bar{x}=85$ (виробів); в другій групі чисельністю n_2=70 чол. вибірковий середній виробіток становив $\bar{x}=78$ (виробів). Попередньо встановлено, що дисперсії виробітку в обох групах відповідно $\sigma_x^2=100$ та $\sigma_y^2=74$. На рівні значимості $\alpha=0{,}05$ з'ясувати вплив нової технології на середню продуктивність.

Розв'язування

У нашому випадку тестуємо гіпотезу H_0: $\overline{x_0}$ та $\overline{y_0}$, тобто середня продуктивність однакова за новою та старою технологіями. Як конкуруючу гіпотезу розглянемо гіпотезу H_1: $\overline{x_0} > \overline{y_0}$, оскільки справедливість цієї гіпотези означає ефективність застосування нової технології. За формулою (6.34) фактичне значення статистики критерію

$$t = \frac{85 - 78}{\sqrt{\frac{100}{50} + \frac{74}{70}}} = 4.$$

За формулою (6.35) знайдемо критичне значення статистики $\Phi(t_{кр}) = 1 - 2\alpha = 1 - 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}9$; звідки за додатком В $t_{кр} = 1{,}64$. Оскільки фактичне значення статистики більше за критичне, то гіпотеза H_0 не приймається, тобто на 5%-му рівні значимості можна стверджувати, що нова технологія дозволяє підвищити середню продуктивність робітників.

2. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох сукупностей.

Гіпотези про дисперсії виникають доволі часто, оскільки дисперсія характеризує такі важливі показники, як точність машин, приладів, технологічних процесів, ризик, пов'язаний із відхиленням дохідності активів та очікуваного рівня і т. д.

Сформулюємо задачу. Нехай є дві нормально розподілені сукупності, дисперсії яких дорівнюють σ_1^2 та σ_2^2. Необхідно перевірити нуль-гіпотезу про рівність дисперсій, тобто H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ відносно конкуруючої гіпотези H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ чи H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Для перевірки гіпотези H_0 із цих сукупностей взято дві незалежні вибірки обсягами n_1 та n_2. Для оцінювання дисперсій використовуються «виправлені» вибіркові дисперсії $\hat{D}_1'$ та $\hat{D}_2'$. Тобто, задача перевірки гіпотези зводиться до порівняння цих дисперсій.

Вибіркові статистики $\frac{(n_1 - 1)\hat{D}_1'}{\sigma^2}$ та $\frac{(n_2 - 1)\hat{D}_2'}{\sigma^2}$ мають розподіл χ^2 відповідно з $k_1 = n_1 - 1$ та $k_2 = n_2 - 1$ ступенями свободи, а їх відношення $\dfrac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)}$ має розподіл Фішера – Снедекора з k_1 та k_2 ступенями свободи.

Отже, випадкова величина F визначається відношенням

$$F=\frac{\frac{1}{n_1-1}\left[\frac{(n_1-1)\hat{D}_1'}{\sigma^2}\right]}{\frac{1}{n_2-1}\left[\frac{(n_2-1)\hat{D}_2'}{\sigma^2}\right]}=\frac{\hat{D}_1'}{\hat{D}_2'}. \qquad (6.37)$$

Гіпотеза H_0 відкидається, якщо розрахована F-статистика більша за табличне значення $F_{\alpha;k_1;k_2}$ (додаток Е).

Приклад 6.8 На двох слюсарних станках обробляють втулки. Відібрано дві проби: серед втулок, оброблених на першому станку, $n_1=15$ шт., на другому станку – $n_2=18$ шт. За даними цих вибірок розраховано вибіркові дисперсії $\hat{D}_1'=8{,}5$ (для першого станка) та $\hat{D}_2'=6{,}3$ (для другого станка). Припускаючи, що розміри втулок підпорядковуються нормальному закону, на рівні значимості $\alpha=0{,}05$ з'ясувати, чи можна вважати, що станки мають різну точність.

Розв'язування

Необхідно перевірити нуль-гіпотезу про рівність дисперсій розміру втулок, тобто H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ відносно конкуруючої гіпотези H_1: $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ (дисперсія першого станка більша). За (6.37) статистика критерію така:

$$F=\frac{\hat{D}_1'}{\hat{D}_2'}=\frac{\frac{1}{n_1-1}n_1\hat{D}'}{\frac{1}{n_2-1}n_2\hat{D}_2'}=\frac{\frac{15}{14}8{,}5}{\frac{18}{17}6{,}3}=1{,}37.$$

За додатком Е критичне значення F-критерію на рівні значимості $\alpha=0{,}05$ при $k_1=n_1-1=14$ та $k_2=n_2-1=17$ дорівнює $F_{\alpha;k_1;k_2}=2{,}33$. Оскільки $F<F_{0,05;14;17}$, то гіпотеза H_0 не відкидається, тобто наявні дані не дозволяють вважати, що станки мають різну точність.

3. Побудова теоретичного закону розподілу за експериментальними даними. Перевірка гіпотез про закон розподілу.

Однією з найважливіших задач математичної статистики є встановлення теоретичного закону розподілу випадкової величини, яка характеризує досліджувану ознаку за емпіричним розподілом, що подає варіаційний ряд.

Припущення щодо виду закону розподілу може бути висунуто, виходячи із теоретичних передумов, досвіду аналогічних попередніх досліджень та на основі графічного зображення емпіричного розподілу.

На практиці найчастіше застосовують χ^2– *критерій Пірсона* для встановлення розбіжності між теоретичним та емпіричним законами розподілу. Як міру розбіжності U обирають величину χ^2, що дорівнює сумі квадратів відхилень статистичних ймовірностей ω_i від гіпотетичних ймовірностей p_i, розрахованих за припущеним розподілом, взятих з деякими вагами c_i:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i\left(\omega_i - p_i\right)^2 . \tag{6.38}$$

Ваги c_i вводять таким чином, щоб за одних і тих самих відхилень $\left(\omega_i - p_i\right)^2$ більшу вагу мали ті відхилення, при яких ймовірність p_i мала, та меншу вагу – при яких p_i велика. Обравши $c_i = \dfrac{n}{p_i}$ можна показати, що при $n \to \infty$ статистика

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i}\left(\omega_i - p_i\right)^2$$

чи

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i} \tag{6.39}$$

мають розподіл χ^2 з $k = m - r - 1$ ступенями свободи, де m – число інтервалів емпіричного розподілу (варіаційного ряду); r – число параметрів теоретичного розподілу, обчислених за експериментальними даними.

Числа $n_i = n\omega_i$ та np_i називають відповідно *емпіричними* та *теоретичними частотами*.

Схема застосування критерію χ^2 для перевірки нуль-гіпотези така.

1. Визначають міру розбіжності емпіричних та теоретичних частот χ^2 за (6.39).
2. Для обраного рівня значимості α за таблицею χ^2– розподілу знаходять критичне значення $\chi^2_{\alpha;k}$ при числі ступенів свободи $k = m - r - 1$ (додаток Г).
3. Якщо розраховане значення більше за критичне, тобто $\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k}$, то гіпотеза H_0 не суперечить практичних даним.

Зауваження. Під час застосування критерію Пірсона необхідно, щоб в кожному інтервалі було не менше 5 спостережень.

Питання для самоперевірки

Розгадайте кросворд

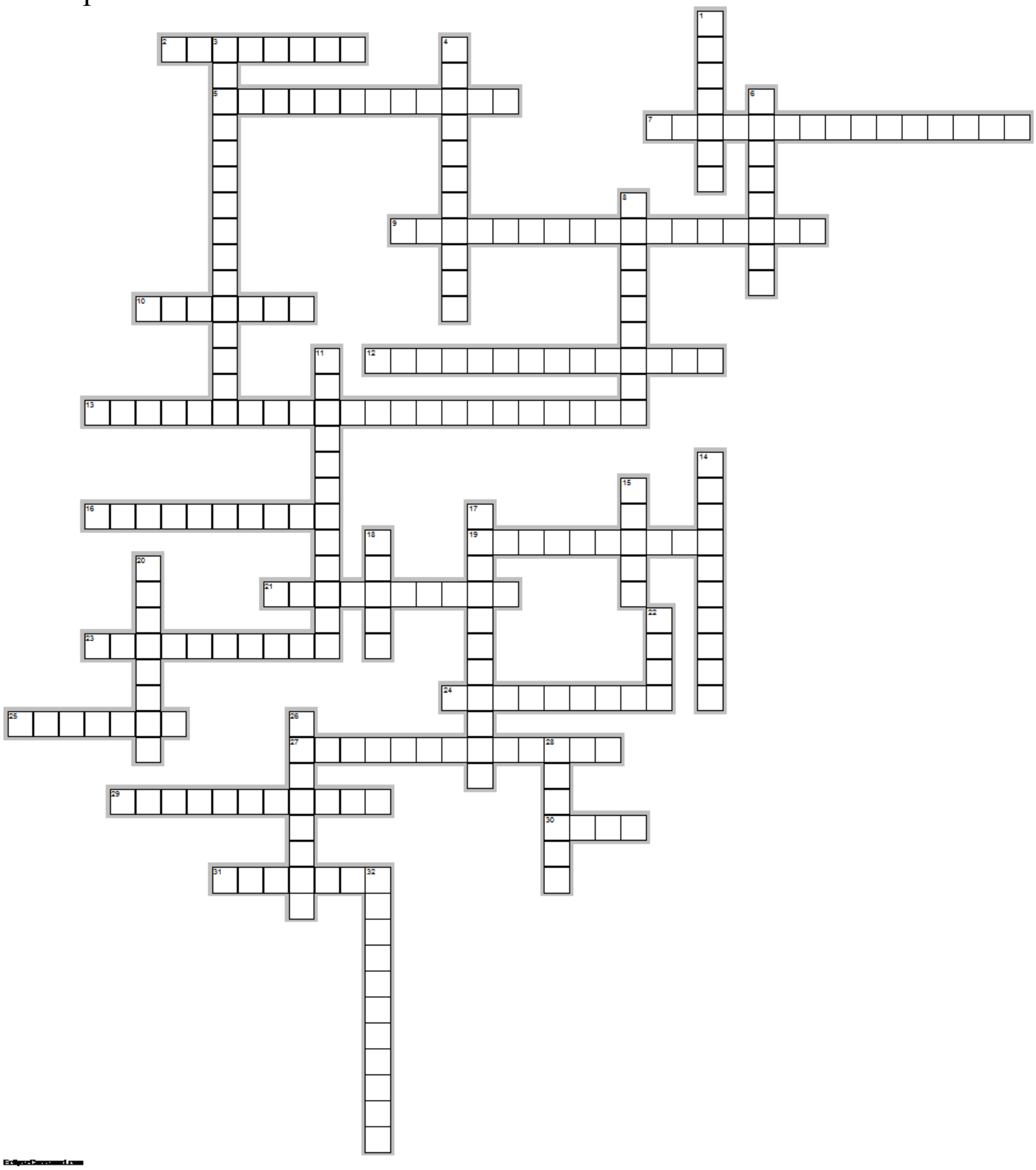
По горизонталі

2. Значення ознаки окремих членів сукупності.
5. Закон розподілу, для якого дисперсія дорівнює відношенню одиниці до квадрата параметра цього закона.
7. Сукупність ранжованих в порядку зростання (спадання) варіант з відповідними їм вагами.
9. Дріб, в чисельнику якого міститься сума добутків варіант ряду на відповідні їм ваги, а в знаменнику обсяг вибірки.
10. Числа, які показують, скільки разів повторюється кожна варіанта.
12. Ламана лінія, яка з'днує точки, координатами яких є значення варіанти і відповідні частоти.
13. Значення параметра а нормального закону.
16. Графічне зображення інтервального статистичного ряду.
19. Правило, згідно якого практично достовірно, що значення нормально розподіленої випадкової величини належить певному інтервалу, межі якого визначаються за допомогою параметрів даного закону.
21. Уся сукупність обєктів, що підлягає вивченню.
23. Варіаційний ряд, довільні варіанти якого відрізняються на сталу величину.
24. Формула, за допомогою якої обчислюють можливе число інтервалів при інтервальному групуванні.
25. Значення варіанти, яке розподіляє ранжований варіаційний ряд на дві рівні за кількістю варіант частини.
27. Площа гістограми дорівнює...
29. Якщо змінювати центр симетрії, то нормальна крива буде...
30. Варіанта дискретного статистичного ряду, що має найбільшу частоту
31. Означення біноміального закону є коректним, оскільки сума усіх ймовірностей дорівнює ...

По вертикалі

1. Частина об'єктів, що відібрана для безпосереднього вивчення генеральної сукупності.
3. Вибірка, яка правильно відображає пропорції генеральної сукупності.
4. Закон розподілу, який використовують при аналізі помилок округлення під час числових обрахунків.
6. Крива нормального закону.
8. Середня арифметична квадратів відхилень варіант від їх середньої.
11. Закон, математичне сподівання якого дорівнює np.
14. Закон, до якого наближаються інші закони.

15. Кількість елементів вибірки.
17. Нормальний закон із математичним сподіванням рівним нулю і дисперсією, рівною одиниці.
18. Дисперсія нормального закону характеризує... нормальної кривої.
20. Закон розподілу, математичне сподівання і дисперсія якого дорівнює первному параметру.
22. Відношення частоти до загального числа спостережень.
26. Вибірка, при якій відібраний об'єкт (перед вибором наступного) повертають в генеральну сукупність.
28. Різниця між найбільшою та найменшою варіантами.
32. Вид групування, при якому множину варіант розбивають на окремі інтервали.



ТЕМА 7 ІНТЕРАКТИВНЕ ЗАНЯТТЯ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Наведемо приклад ігрового заняття, яке ми проводимо замість контрольної роботи для перевірки умінь та навичок застосування теоретичного матеріалу до розв’язування прикладних задач після вивчення теми «Випадкові величини» розділу теорії ймовірностей. Ведучим є викладач кафедри. Всі учасники гри поділяються на групи, в кожній з яких обираються провідні інженери, рецензенти, оцінювачі. Кількість груп та учасників у них залежить від кількості студентів в академічній групі. Для того, щоб студенти могли добре підготуватися до ігрового заняття і воно було цікавим та ефективним, ми за 10 днів ознайомили їх з темою і змістом ігрового заняття, рекомендували необхідну літературу, розподілили ролі між учасниками.

За імітовану ситуацію (ідея належить В. А. Петрук [16]) пропонується ігрова модель (рис. 7.1), яка відповідає структурі відділу управління якістю виробництва біомедичних та оптикоелектронних приладів певного підприємства.

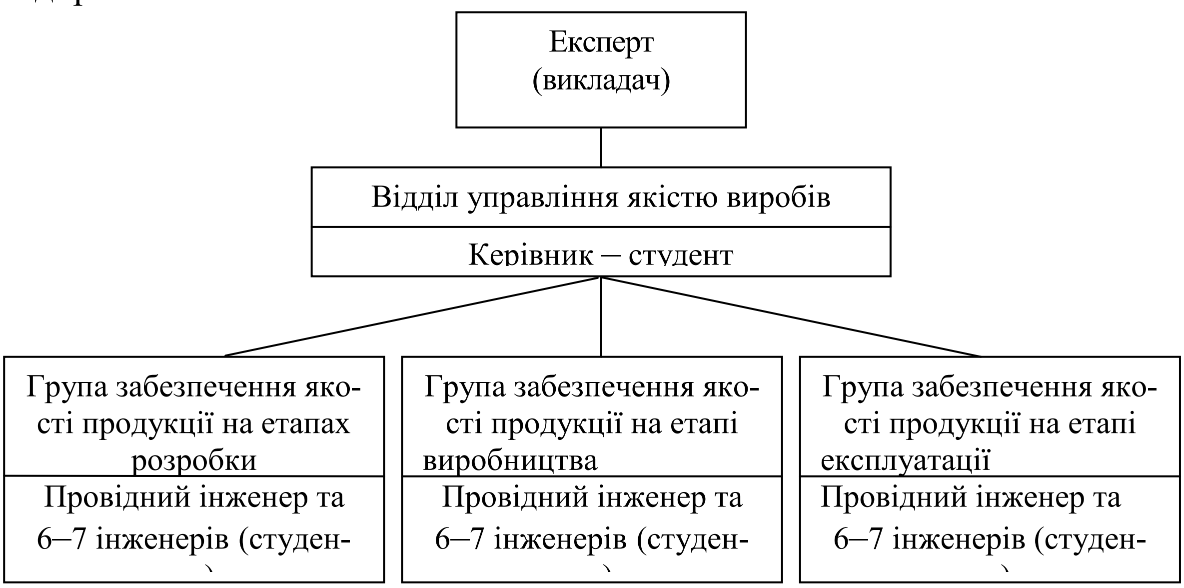
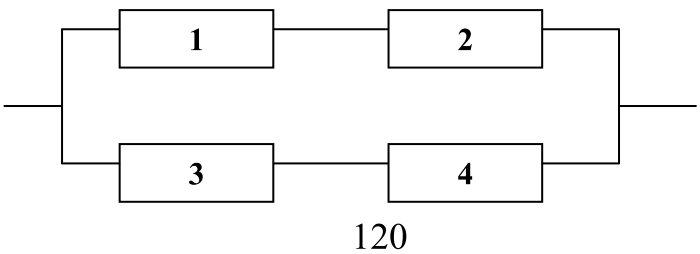


Рисунок 7.1 – Ігрова модель заняття

Для заняття розроблено систему стимулювання, яка має заохочувальні та штрафні бали, завдання для кожної групи, які відповідають напрямку роботи. Наприклад, першій групі видається завдання: для підвищення якості приладу розроблено 6–7 схем елементів. Необхідно визначити серед них найбільш надійну, надійність елементів задається p_k. Зробити висновок про її рекомендацію щодо використання. Приклад однієї із схем:



Для другої групи: на підприємство надходять комплектуючі з трьох заводів–постачальників у відсотках (%): N_1 – першого заводу, N_2 – другого заводу, N_3 – третього заводу. Їхні надійності були досліджені раніше і мають відповідні значення p_1, p_2, p_3. Проаналізувати потік дефектних комплектуючих за тиждень, зробити висновки і подати рекомендації щодо підвищення якості комплектуючих.

Для третьої групи: прилад може працювати в двох режимах: нормальному і форсованому. У цьому закладі він працює M % у нормальному режимі і N % у форсованому. Надійність приладу для кожного режиму $p_н, p_ф$. Знайти повну надійність приладу для цього закладу. Дані наведено на один місяць. Проаналізувати щомісячно і зробити висновки.

Отже, кожний учасник має індивідуальне та загальне завдання. Від якісної роботи кожного залежать результати роботи всієї групи. Бали інженерам груп за правильність розв'язків та пропозиції щодо загальних висновків нараховуються провідним інженером. Вони можуть отримати пораду від провідних інженерів, але за штрафні бали, які отримає провідний інженер на свій рахунок.

Як основні критерії оцінювання формування професійної спрямованості нами вибрані такі.

1. Наявність відомостей про роботу за обраною спеціальністю.
2. Бажання працювати за обраною спеціальністю.
3. Наявність уявлення щодо застосування отриманих знань з теорії ймовірностей при виконанні:

а) курсових робіт та завдань з інших дисциплін;

б) у майбутній роботі за фахом.

4. Наявність уявлення щодо розв'язання завдань управління виробництвом, якістю продукції на основі ймовірносно-статистичних методів.
5. Наявність необхідних теоретичних знань з теорії ймовірностей та їх якість.
6. Наявність сформованих умінь та навичок застосування теоретичних знань до розв'язування задач: а) алгоритмічних; б) прикладних.

Ігрове заняття виступає в цьому випадку як виховання студента, причому таке, котре дозволяє розв'язувати найближчі і більш віддалені задачі розвитку в кожного учасника професійно важливих якостей, властивостей особистості.

Висновки. Запропонований підхід до вивчення розділу теорії ймовірностей дає позитивні результати в засвоєнні теоретичного курсу, набутті студентами навичок розв'язування прикладних задач, допомагає вирішувати низку питань психолого-педагогічного плану та формувати професійну спрямованість на перших курсах навчання у ВТНЗ. Разом з тим можна відмітити, що формуванню фахівця з високим професійним рівнем сприяє розвиток професійних інтересів та особистісних професійно важливих якостей, які знаходяться у взаємозв'язку.

Результативність: формування професійної спрямованості, самооцінки, розвиток творчого мислення та професійних інтересів.

ТЕМА 8 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗАСОБАМИ MathCad

Зауваження. Необхідно відмітити, що MathCad, будуючи графік зображення ступінчастих функцій, з'єднує відрізком прямої значення функцій в точках розриву. Розривні функції зображають, відмічаючи стрілкою напрям розриву (стрілка вправо – функція неперервна в точці справа, стрілка вліво – для точок, де функція неперервна зліва).

Приклад 8.1 За даними багаторічних статистичних досліджень відомо, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості хлопчиків в сім'ї із 4 дітей. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

Розв'язування

$p:=0.515$
$q:=1-p$
$q=0.485$

$$p(k):=4!\cdot 0.515^{k}\cdot\frac{0.485^{4-k}}{k!(4-k)!}$$

$k:=0..4$

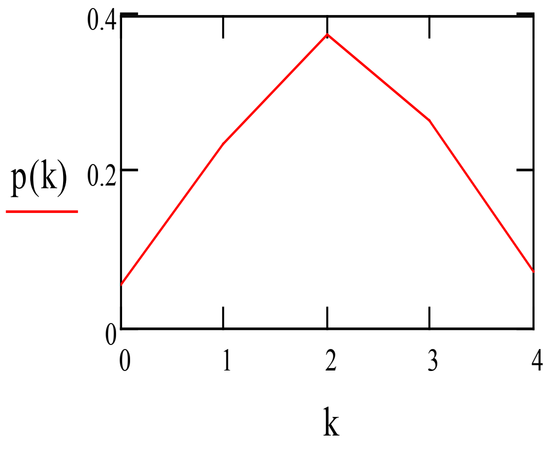


Рисунок 8.1

Закон розподілу *p(k)*

0.055
0.235
0.374
0.265
0.07

Функція розподілу випадкової величини

$$G(x) := \begin{vmatrix} 0 \text{ if } -\infty < x < 0 \\ 0.055 \text{ if } 0 \le x < 1 \\ 0.29 \text{ if } 1 \le x < 2 \\ 0.665 \text{ if } 2 \le x < 3 \\ 0.93 \text{ if } 3 \le x4 \\ 1 \text{ if } 4 \le x\infty \end{vmatrix}$$

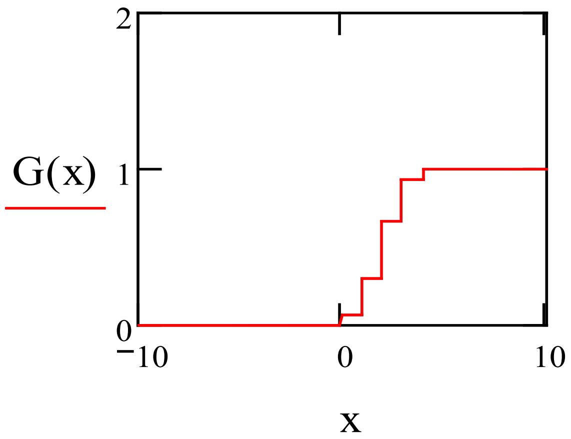


Рисунок 8.2

Математичне сподівання
$n := 4$

$p := 0.515$

$M := n\,p$

$M = 2.06$

Дисперсія

$D := n\,p\,q$

$D = 0.999$

Приклад 8.2 Побудуйте біноміальний розподіл для серії із 25 незалежних випробувань з ймовірністю успіху $p = 0,3;\ 0,7;\ 0,9$. Побудуйте багатокутник розподілу і графік функції розподілу. Для $p = 0,3$ знайдіть значення k, для якого величина $P(\xi = k)$ максимальна. Перевірте рівність $\sum\limits_k p_k = 1$. Обчисліть ймовірність потрапляння значення випадкової величини в проміжок (1;5).

Розв'язування

> **Зауваження.** В MathCad для обчислення щільності ймовірності і функції розподілу випадкової величини, яка має пуассонів розподіл, використовують функції $dpois(k,\lambda)$ і $ppois(k,\lambda)$, значення яких відповідно p_k і $F(k)$.

k: =0..25

$P3_k$: = dbinom (k, 25, 0.3)

F3(k): = pbinom (k, 25, 0.3)

$P6_k$: = dbinom (k, 25, 0.6)

F6(k): = pbinom (k, 25, 0.6)

$P9_k$: = dbinom (k, 25, 0.9)

F9(k): = pbinom (k, 25, 0.9)

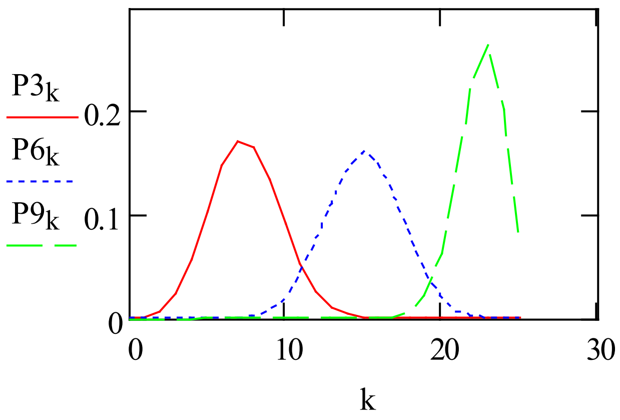


Рисунок 8.3

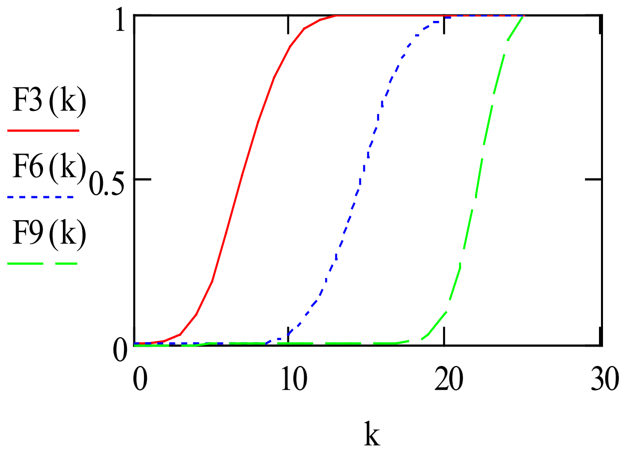


Рисунок 8.4

Для $p = 0{,}3$ знайдемо значення k, величина $P(\xi = k)$ якого максимальна.

Зауваження. Для того, щоб визначити за графіком розподілу найімовірніше значення випадкової величини, необхідно ввійти в пункт меню *Формат/ Графики/ Трассировка*, встановити маркер на точці максимуму розподілу і вивести в робочий документ ймовірність значення, яке вказане в вікні *X*–Value (Величина *X*). Для досліджуваної величини найімовірніше значення дорівнює 7, ймовірність події якого дорівнює 0,17.

Фрагмент робочого документа, який містить обчислення, наведено на рисунку 8.5.

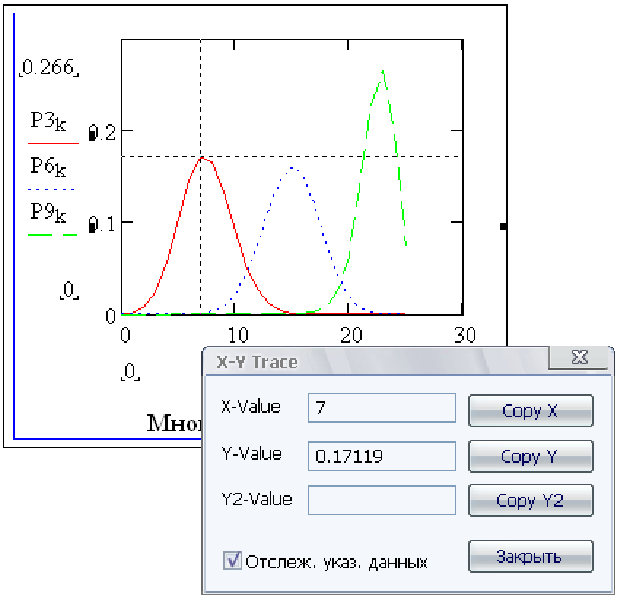


Рисунок 8.5

Перевіримо рівність $\sum_k p_k = 1$.

$$\sum_{k=1}^{25} P3_k = 1 \qquad \sum_{k=1}^{25} P6_k = 1 \qquad \sum_{k=1}^{25} P9_k = 1$$

Ймовірності потрапляння значення випадкової величини в проміжок (1;5) з відповідними ймовірностями успіху дорівнюють:

$$P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

$$F3(5) - F3(1) = 0.192$$

$$F7(5) - F7(1) = 5.359 \times 10^{-5}$$

$$F9(5) - F9(1) = 0$$

Приклад 8.3 Радист викликає кореспондента. Кожний наступний виклик проводиться лише в тому випадку, коли попередній виклик не пройшов. Ймовірність того, що кореспондент прийме виклик, дорівнює

0,4. Скласти закон розподілу кількості викликів, якщо викликів не більше 5, обчислити математичне сподівання і дисперсію.

Розв'язування

Нехай випадкова величина X – кількість викликів кореспондента – може набувати значення 1, 2, 3, 4, 5. Позначимо A_i – i–й виклик прийнято (i=1, 2, 3, 4, 5). Тоді ймовірність того, що перший виклик прийнято:

$p_1 := 0,4$
$q_1 := 1 - p_1$
$q_1 := 0,6$

Другий виклик відбудеться лише за умови, що перший виклик не прийнято, тобто:

$p_2 := q_1\, p_1$
$p_2 := 0,24$

Аналогічно:
$p_3 := (q)^2\, p_1;$
$p_3 = 0,144$
$p_4 := (q)^3\, p_1$
$p_4 = 0,086$
$p_5 := (q)^4$

Перевірка:

$$P := \sum_{i=1}^{5} p_i$$

$$P = 1$$

Складемо закон розподілу кількості викликів, якщо викликів не більше 5.

Ряд розподілу

$i := 1..5$

$p_i =$

0.4
0.24
0.144
0.086
0.13

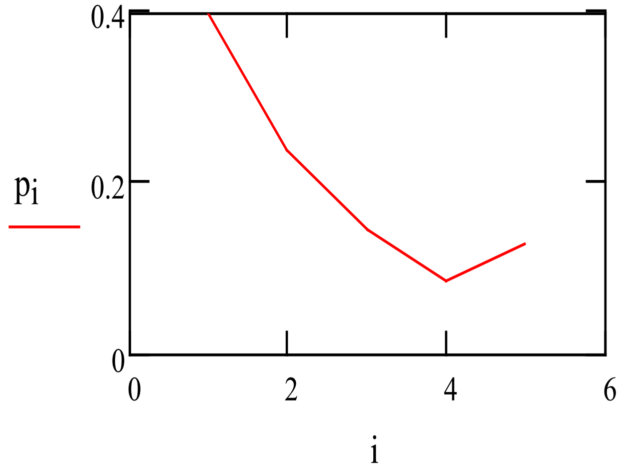


Рисунок 8.6

Функція розподілу

$$F(x) := \begin{cases} 0 \text{ if } -\infty < x < 1 \\ 0.4 \text{ if } 1 \le x < 2 \\ 0.64 \text{ if } 2 \le x < 3 \\ 0.784 \text{ if } 3 \le x < 4 \\ 0.8704 \text{ if } 4 \le x < 5 \\ 1 \text{ if } 5 \le x < \infty \end{cases}$$

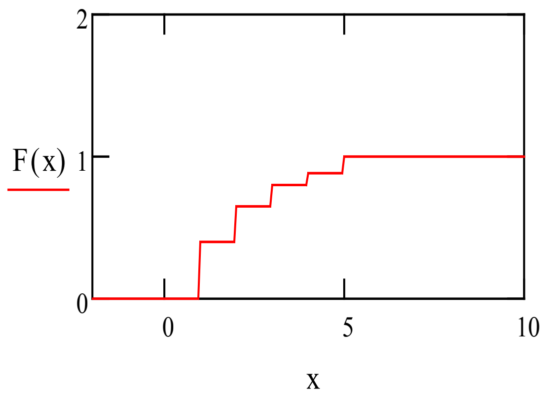


Рисунок 8.7

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію.
M = 2.306; D = 1.96

Приклад 8.4 Побудувати геометричний розподіл для серії із 30 незалежних випробувань з ймовірністю успіху $p = 0,4$.

Розв'язування

k: =0..30

$P1_k$: = dgeom (k, 0.4)

F1(k): = pgeomom (k, 0.4)

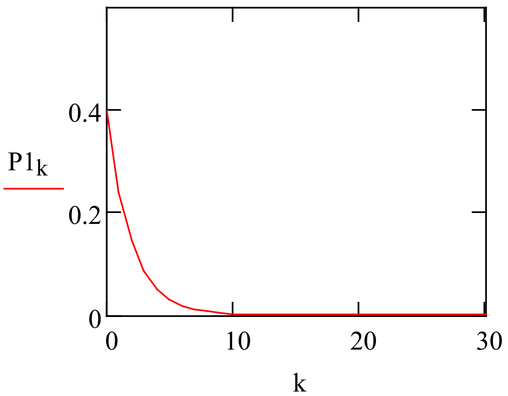


Рисунок 8.8

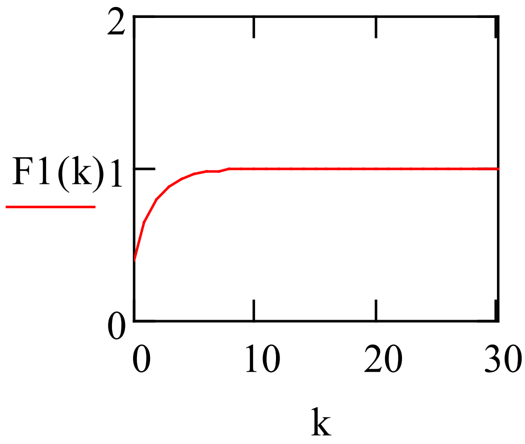


Рисунок 8.9

Приклад 8.5 Побудувати пуассонів розподіл для серії із 20 незалежних випробувань з параметром $\lambda = 0,2; 0,4$. Побудувати графіки функцій розподілу. Обчислити ймовірність потрапляння значень випадкової величини з параметром $\lambda = 0,4$ у проміжок (1; 5). Для кожного розподілу знайти значення k, для якого величина p_k максимальна.

Розв'язування

$\lambda := 0.2$

k: = 0..20

$$p_k := \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

$p_k =$

0.819
0.164
0.016
$1.092 \cdot 10^{-3}$
$5.458 \cdot 10^{-5}$
$2.183 \cdot 10^{-6}$
$7.278 \cdot 10^{-8}$
$2.079 \cdot 10^{-9}$
$5.198 \cdot 10^{-11}$
$1.155 \cdot 10^{-12}$
$2.31 \cdot 10^{-14}$
0
0
0
0
0

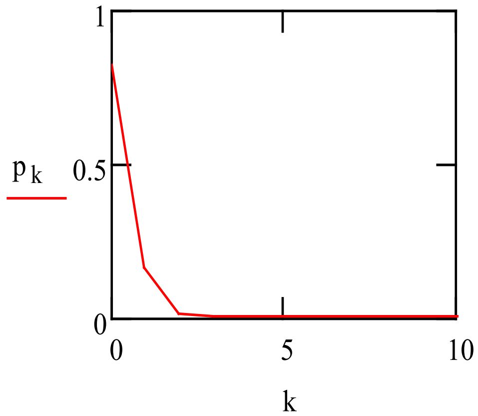


Рисунок 8.10

k: = 0..20

$\lambda_1 := 0.4$

$$p1_k := \lambda1^k \cdot \frac{e^{-\lambda1}}{k!}$$

$P1_k =$

0.67
0.268
0.054
7.15·10–3
7.15·10–3
5.72·10–5
3.813·10–6
2.179·10–7
1.09·10–8
4.842·10–10
1.937·10–11
7.043·10–13
2.348·10–14
0
0
0

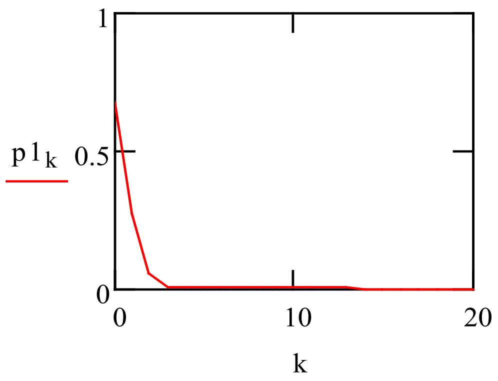


Рисунок 8.11

Для виконання обчислень з випадковими величинами (дискретними і неперервними) в MathCad є бібліотека функцій стандартних розподілів.

В MathCad для обчислення щільності ймовірності і функції розподілу випадкової величини, яка має пуассонів розподіл, використовують функції *dpois(k, λ)* і *ppois(k, λ*), значення яких відповідно p_k і *F(k)*.

Побудуємо багатокутники розподілів і графіки функцій розподілу.

k: =0..20

$P1_k$: = dpois (k, 0.2)

F1(k): = ppois (k, 0.2)

Перевірка: $\sum_{k=0}^{20} P1_k = 1$

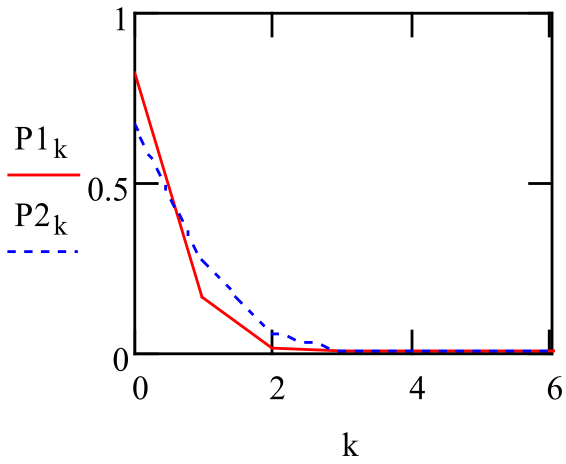


Рисунок 8.12

Найімовірніше значення розподілу з параметром $\lambda := 0.2$ дорівнює $P1_0 = 0.819$.

$P2_k: = \text{dpois}\,(k, 0.4)$

$F2(k): = \text{ppois}\,(k, 0.4)$

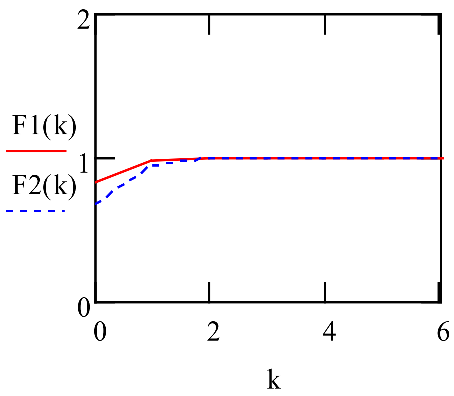


Рисунок 8.13

Найімовірніше значення розподілу з параметром $\lambda 1 := 0{,}4$ дорівнює $P2_0 = 0.67$.

Ймовірність потрапляння значень випадкової величини з параметром $\lambda = 0{,}4$ у проміжок (1; 5) дорівнює :

$F1(5)–F(1) = 0.018$

Приклад 8.6 (локальна теорема Муавра–Лапласа). Для $n = 10;30;50$ і $p = 0{,}7;0{,}5;0{,}2$ обчисліть ймовірності того, що випадкова величина, яка має біноміальний розподіл, набуває значення, яке дорівнює $\frac{n}{2}$. Проведіть обчислення за формулою Бернуллі та Муавра–Лапласа. Порівняйте результати.

Розв'язування

Дослідимо для вказаних значень параметрів біноміального розподілу точність асимптотичної формули Муавра–Лапласа.

Перший випадок.

n:= 10

$k := \frac{n}{2}$

PB1:= dbinom (k, n, 0.7)
PB2:= dbinom (k, n, 0.5)
PB3:= dbinom (k, n, 0.2)

$x1 := \frac{k - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}$ $x2 := \frac{k - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.5 \cdot 0.5}}$ $x3 := \frac{k - n \cdot 0.2}{\sqrt{n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$

$PM1 := \frac{e^{\frac{-x1^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}$ $PM2 := \frac{e^{\frac{-x2^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.5 \cdot 0.5}}$ $PM3 := \frac{e^{\frac{-x3^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$

PB1 = 0.103 PB2 = 0.246 PB3 = 0.026
PM1 = 0.106 PM2 = 0.252 PM3 = 0.019

Другий випадок

n:= 30

$k := \frac{n}{2}$

PB1:= dbinom (k, n, 0.7)
PB2:= dbinom (k, n, 0.5)
PB3:= dbinom (k, n, 0.2)

$$x1 := \frac{k - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}} \quad x2 := \frac{k - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \quad x3 := \frac{k - n \cdot 0.2}{\sqrt{n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$$

$$PM1 := \frac{e^{\frac{-x1^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.7 \cdot 0.3}} \quad PM2 := \frac{e^{\frac{-x2^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \quad PM3 := \frac{e^{\frac{-x3^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$$

$PB1 = 0.011$ $\quad PB2 = 0.144$ $\quad PB3 = 1.788 \times 10^{-4}$

$PM1 = 9.128 \times 10^{-3}$ $\quad PM2 = 0.146$ $\quad PM3 = 3.944 \times 10^{-5}$

Третій випадок

$n := 50$

$k := \frac{n}{2}$

PB1:= dbinom (k, n, 0.7)
PB2:= dbinom (k, n, 0.5)
PB3:= dbinom (k, n, 0.2)

$$x1 := \frac{k - n \cdot 0.7}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}} \quad x2 := \frac{k - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \quad x3 := \frac{k - n \cdot 0.2}{\sqrt{n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$$

$$PM1 := \frac{e^{\frac{-x1^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.7 \cdot 0.3}} \quad PM2 := \frac{e^{\frac{-x2^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \quad PM3 := \frac{e^{\frac{-x3^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$$

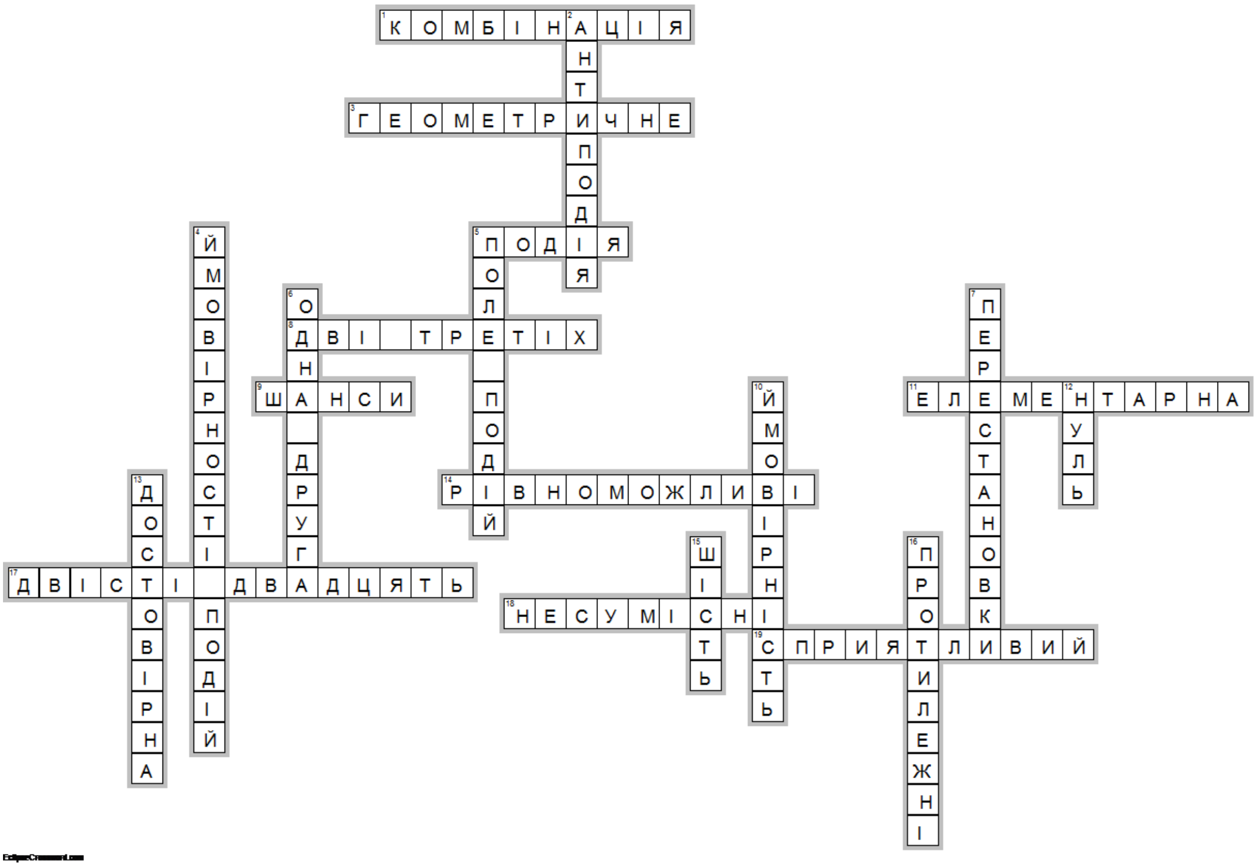
$PB1 = 1.436 \times 10^{-3}$ $\quad PB2 = 0.112$ $\quad PB3 = 1.602 \times 10^{-6}$

$PM1 = 1.053 \times 10^{-3}$ $\quad PM2 = 0.113$ $\quad PM3 = 1.102 \times 10^{-7}$

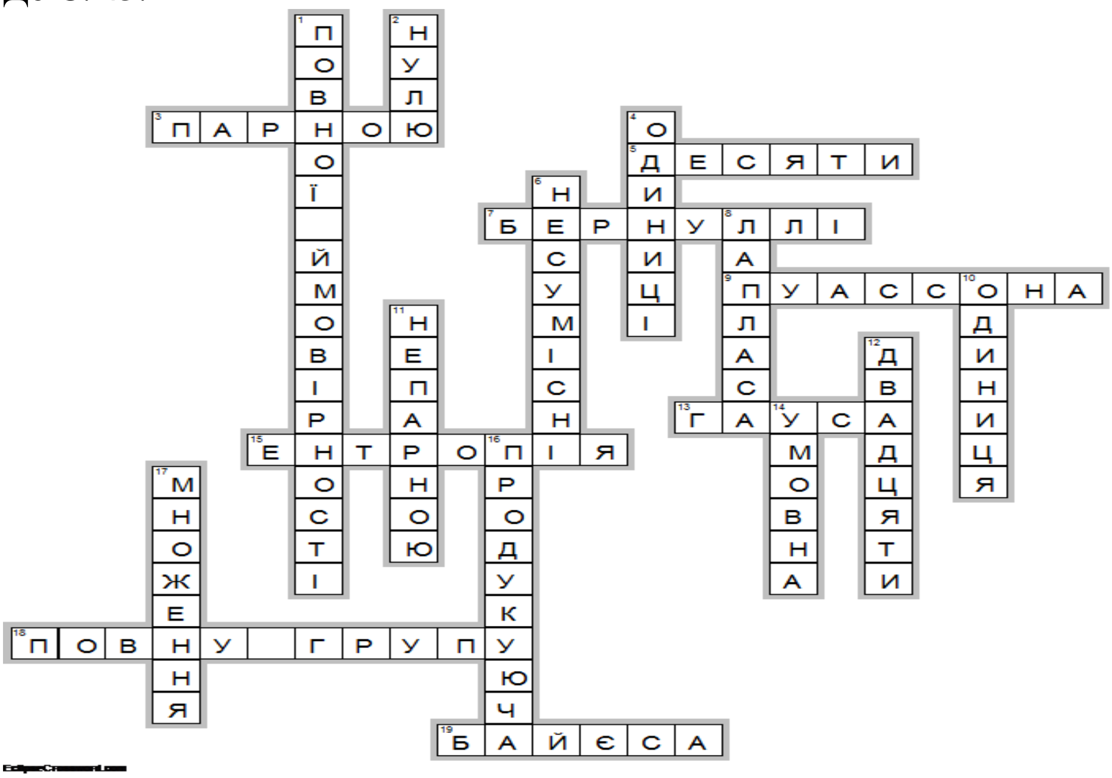
Висновок. Наведені обчислення повністю підтверджують теоретичні твердження: похибка апроксимації зменшується із зростанням n та із наближенням p і q до 0,5.

ВІДПОВІДІ ДО КРОСВОРДІВ

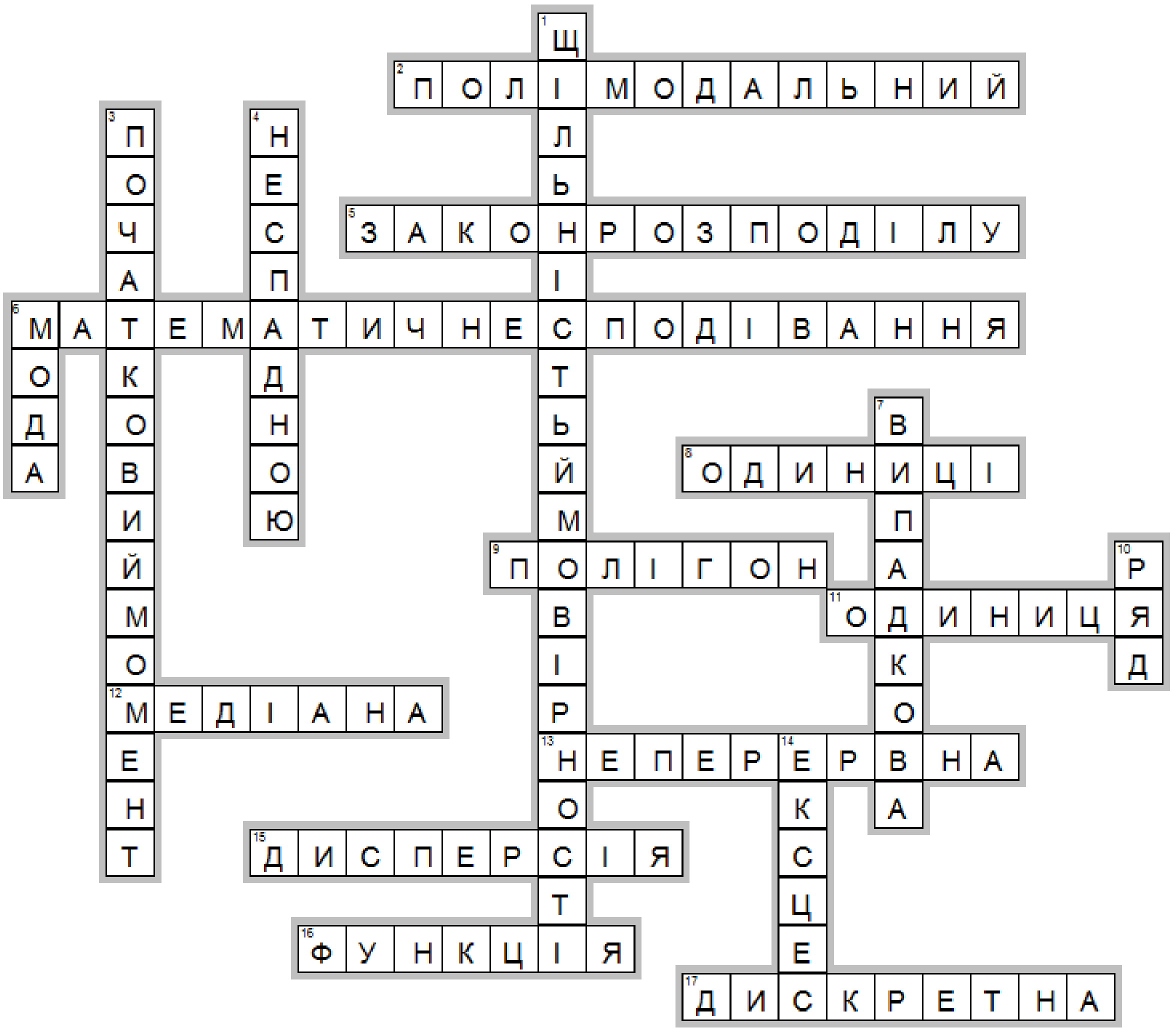
До С. 18.



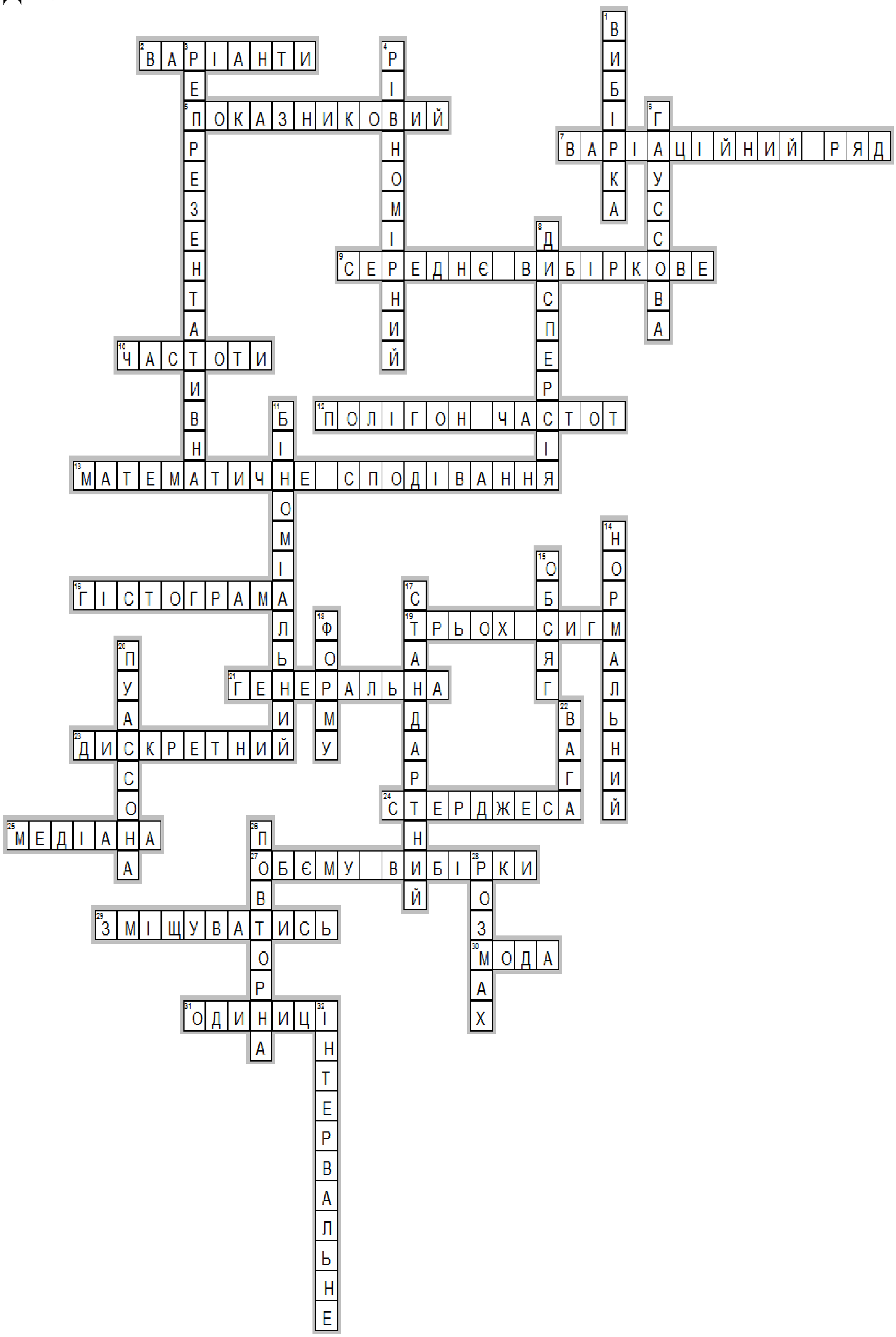
До С. 43.



До С. 72.


1 ЩІЛЬНІСТЬ ЙМОВІРНОСТІ
2 ПОЛІМОДАЛЬНИЙ
3 ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ
4 НЕСПАДНОЮ
5 ЗАКОН РОЗПОДІЛУ
6 МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ
МОДА
7 ВИПАДКОВА
8 ОДИНИЦІ
9 ПОЛІГОН
10 РЯД
11 ОДИНИЦЯ
12 МЕДІАНА
13 НЕПЕРЕРВНА
14 ЕКСЦЕС
15 ДИСПЕРСІЯ
16 ФУНКЦІЯ
17 ДИСКРЕТНА

До С. 119.



EclipseCrossword.com

ЛІТЕРАТУРА

1. Бочаров П. П. Теория вероятностей и математическая статистика / П. П. Бочаров, А. В. Печенкин. – М. : Гардарика, 1998.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей / Боровков А. А. – М. : Наука, 1987.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1988.
4. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высшая школа, 2002.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов / Вентцель Е. С. – [7-е изд., стереотип.]. – М. : Высшая школа, 2001.
6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа, 1979.
7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа, 1977.
8. Основи дискретної математики / [Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А. та ін.]. – К. : Наукова думка, 2002.
9. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А. Н. – М. : Наука, 1975.
10. Кэрролл Л. История с узелками / Кэрролл Л. ; пер. с англ. : под ред. Я. А. Смородинского. – М. : ООО «Издательство АСТ»; Харьков : Фолио, 2001.
11. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / Кремер Н. Ш. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2004.
12. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Мостеллер Ф. ; пер. с англ. ; под ред. Ю. В. Линника. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1985.
13. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / Сеньо П. С. – Київ : Центр навчальної літератури, 2004.
14. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. – М. : Наука, 1970.
15. Четыркин Е. М. Вероятность и статистика / Е. М.Четыркин, И. Л. Калихман. – М. : Финансы и статистика, 1982.
16. Петрук В. А. Інтерактивні технології навчання вищої математики студентів технічних ВНЗ : навчально-методичний посібник / Петрук В. А. , Хом'юк І. В. , Хом'юк В. В. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 93 с.

Додаток А

Значення функції Пуассона $P_m(\lambda) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	–	0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	–	–	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	–	–	–	–	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7	–	–	–	–	–	–	0,00001	0,00002	0,00004

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01074	0,00500
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14307	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176
9	–	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10141	0,12408	0,13176
10	–	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858
11	–	0,00001	0,00022	0,00193	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702
12	–	–	0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07276
13	–	–	0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038
14	–	–	–	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238
15	–	–	–	0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943
16	–	–	–	–	0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093
17	–	–	–	–	0,00001	0,00012	0,00059	0,00212	0,00579
18	–	–	–	–	–	0,00004	0,00023	0,00094	0,00289
19	–	–	–	–	–	0,00001	0,00008	0,00040	0,00137

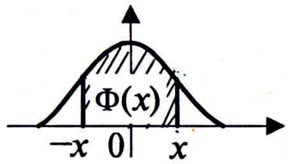
Додаток Б

Значення функції Гаусса $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток В

Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9331	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9951	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Додаток Г
Критичні точки розподілу χ^2

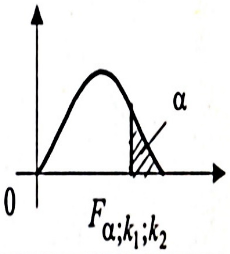
Кількість степенів вільності k	Рівень значимості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,6	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток Д
Значення t - критерія Стьюдента

Кількість ступенів вільності k	Рівень значимості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,68	3,09	3,29

Додаток Е

Значення $F_{\alpha,\,k_1,\,k_2}$ - критерія Фішера – Снедекора



α=0,05																			
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6.59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84

ГЛОСАРІЙ

Багатокутник розподілу – polygonal figure of the distribution
Варіанта – variant
Варіаційний ряд – variational row
Вибіркове середнє – selective average
Випадкова величина – random distribution
Випадкова подія – casual event
Випробування – test
Гіпотеза – hypothesis
Гістограма – histogram
Дисперсія – variance
Дослід – experience
Закон розподілу – law of the distribution
Інтервал – interval
Ймовірність – probability
Кореляція – correlation
Коефіцієнт кореляції – factor to correlations
Критерій – criterion
Математичне сподівання – mathematics expectation
Медіана – median
Мода – mode
Область – area
Перестановка – transposition
Подія – event
Розміщення – accomodation
Середнє квадратичне відхилення – average square deflection
Сполучення – combination
Функція розподілу – distribution function
Частота – frequency
Щільність – density

Навчальне видання

Хом'юк Ірина Володимирівна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Ковальчук Майя Борисівна
Хом'юк Віктор Вікторович

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Частина 1

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек
Оригінал-макет підготовлено Н. Сачанюк-Кавецькою

Підписано до друку 23.06.2017 р.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 8,34.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2017-238.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 59-85-32, 59-87-38.
press.vntu.edu.ua; *e-mail:* kivc.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.