В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Частина 2
ВИЩА МАТЕМАТИКА
В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
Практикум

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 51(075)
ББК 22.я73
Х76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 3 від 30.10.2014 р.)

Рецензенти:
Ю. І. Волков, доктор фізико-математичних наук, професор
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, В. В.
Х76 Вища математика. Частина 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : практикум / В. В. Хом'юк, І. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 152 с.

У навчальному посібнику на системній основі наводиться теоретичний мінімум з базових тем курсу «Вища математика», а саме з диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної наведено основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач, запитання для самоперевірки, вправи для практичних занять та самостійного розв'язування. Наведені приклади проведення інтерактивних практичних занять із розглядуваних тем.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51(075)
ББК 22.я73

ЗМІСТ

Уся глибина думки, закладена у формулювання математичних понять, згодом розкривається тим умінням, із яким ці поняття використовуються.
Е. Вігнер

Математика – це не так знання, як уміння.
В. Серве

ВСТУП

Курс математичного аналізу є одним із основних, визначальних як для всього процесу навчання, так і подальшої практичної діяльності спеціаліста. Він є необхідним для успішного засвоєння таких фундаментальних дисциплін, як фізика, інформатика, теоретична механіка, теорія пружності, опір матеріалів, а також спеціальних дисциплін, у зв'язку з інтенсивним використанням та дослідженням математичних моделей. Викладання математичного аналізу має за мету: формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту й здібностей до логічного та алгоритмічного мислення; оволодіння студентами основами математичного апарату; вироблення навичок самостійного вивчення наукової літератури з математики та її застосувань; навчання основним математичним методам, які необхідні для аналізу та моделювання процесів, явищ, пристроїв при пошуку оптимальних розв'язків, методом обробки та аналізу результатів числових та натуральних експериментів. Саме одним із засобів розв'язання поставленої мети, виступає розроблений авторами навчальний посібник.

Друга частина практикуму складається з таких розділів, як вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Запропонований у задачнику матеріал містить розділи, що відповідають програмі курсу «Вищої математики». Кожний розділ посібника містить короткий теоретичний довідник (означення, формули, теореми) та велику кількість детально розібраних прикладів, які дають можливість студентам самостійно виконати запропоновані завдання та перевірити засвоєння матеріалу. Всі запропоновані завдання для самостійної роботи наведені із відповідями, що досить зручно для перевірки контролю засвоєння знань студентами з відповідної теми.

Для розвитку самостійного мислення, формування математичної компетентності майбутніх фахівців і поглибленої роботи студентів, пояснення розв'язання деяких прикладів свідомо скорочено.

Кожний розділ посібника закінчується індивідуальними домашніми завданнями по 30 варіантів з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Практикум, призначений для використання студентами різних спеціальностей денної та заочної форм навчання в процесі вивчення окремих розділів курсу.

1 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Практичне заняття № 1

Поняття функції. Границя. Неперервність

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з тем: «Функції», «Границі», «Неперервність», набути навичок і вмінь обчислення границь, дослідження функцій на неперервність.

Питання для самопідготовки:

– поняття функції;
– властивості функцій;
– границя функції в точці;
– границя функції на нескінченності. Нескінченна границя;
– нескінченно малі та їх властивості;
– основні теореми про границі;
– чудові границі;
– неперервність функції в точці;
– розривні функції. Класифікація точок розриву;
– порівняння нескінченно малих.

План практичного заняття

1. Поняття функції, її властивості.
2. Границя функції.
3. Неперервність функції. Точки розриву.

Теоретичний довідник

Нехай маємо дві множини X і Y. Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким законом поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано ***функцію*** $f(x)$. Записують так: $y = f(x)$, $x \in X$. У такому разі x називають ***аргументом функції*** f, а $y -$ функцією змінної x. Множину X називають ***областю визначення*** функції f, а множину всіх y, для яких $y = f(x) -$ областю значень. Область визначення функції f позначають $D(f)$, а область значень – $E(f)$. Функцію $y = f(x)$, $x \in D$ називають ***обмеженою***, якщо існує таке число M, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$.

Функцію $y = f(x),\ x \in D$ називають ***обмеженою знизу (зверху)***, якщо існує таке число M, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \ge M \quad (f(x) \le M)$.

Функцію $y = f(x),\ x \in D$ називають ***обмеженою***, якщо вона є обмеженою знизу і зверху, тобто існують такі числа M_1 і M_2, що для всіх $x \in D$ виконуються нерівності $M_1 \le f(x) \le M_2$.

Функцію $y = f(x)$ називають ***зростаючою (спадною)*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-яких $x_1 \in (a;b), \quad x_2 \in (a;b)$, таких що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)\ (f(x_1) \ge f(x_2))$.

Якщо $f(x_1) < f(x_2) \quad ((f(x_1) > f(x_2))$ для всіх $x_1 < x_2$, то функцію $y = f(x)$ називають ***строго зростаючою*** (строго спадною).

Функцію $y = f(x),\ x \in D$ називають ***парною (непарною)***, якщо область її визначення симетрична відносно початку координат і для всіх x з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат (Oy), а графік непарної функції – відносно початку координат.

Існують теореми, пов'язані з парністю (непарністю) функцій.

Теорема 1. Алгебраїчна сума скінченої кількості парних (непарних) функцій є функція парна (непарна).

Теорема 2. Добуток парних функцій є функція парна.

Теорема 3. Добуток парної кількості непарних функцій є функція парна.

Добуток непарної кількості непарних функцій є функція непарна.

Теорема 4. Якщо $f(x), g(x) -$функції однакової (різної) парності і $g(x) \ne 0$ для всіх $x \in D(g)$, то функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є парною (непарною) функцією.

Функцію $y = f(x), x \in D$ називають ***періодичною,*** якщо існує таке число $T > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується рівність $f(x+T) = f(x)$. Найменше з таких чисел T називають основним періодом функції $f(x)$.

Число А називають ***границею функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}, n \in N$, з $O^*(x_0)$, що збігається до числа x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа А (означення за Гейне).

Символічно записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, або $f(x) \to A, x \to x_0$.

Число А називають ***границею функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число δ таке, що з нерівності

$|x-x_0|<\delta, x \neq x_0$ для всіх $x \in D(f)$ випливає нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon.$ (означення за Коші).

Число А називають ***границею*** $y=f(x)$ ***при*** $x \to +\infty,$ якщо для будь-яких послідовностей $\{x_n\}$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty,$ виконується $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$ Записують так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ у точці x_0 має границю, то така границя єдина.

Якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}$ такої, що $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,$ має місце $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty,$ то кажуть, що в точці x_0 границя функції дорівнює нескінченності. Записують так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Крім означення «границі функції у точці», існують ще означення односторонніх границь, а саме «границі справа» і «границі зліва», якщо в означенні «границі в точці», за Гейне, поставити вимоги, щоб усі значення x_n вибиралися зліва від точки x_0, то одержимо «границю зліва», а якщо тільки справа від точки x_0, то одержимо «границю справа». Односторонні границі позначають так:

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $f(x_0+0)-$ границя справа (правостороння границя);

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ або $f(x_0-0)-$ границя зліва (лівостороння границя).

Мовою «$\varepsilon-\delta$» означення односторонньої границі є таким.

Число А називають ***границею справа (зліва) функції*** $y=f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує додатне число δ таке, що для всіх x з інтервалу $(x_0;x_0+\delta)$ $((x_0-\delta;x_0))$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon.$

Теорема 2. Якщо функція $y=f(x)$ у точці x_0 має границю, то в цій точці: 1) існує границя зліва; 2) існує границя справа; 3) односторонні границі рівні.

Якщо границя функції $y=f(x)$ у точці x_0 дорівнює нулю, то цю ***функцію називають нескінченно малою*** в точці x_0.

Функція $y=f(x)$ ***називається нескінченно великою при*** $x\to x_0$***,*** якщо для будь-якого E>0, яке може бути як завгодно великим, існує такий окіл точки x_0, що для всіх точок його, хіба що крім x_0, виконується нерівність $|f(x)|>E.$ Позначають цей факт так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty.$

Властивості нескінченно малих

Теорема 1 *(зв'язок нескінченно малих і великих функцій).* Якщо $f(x)-$ нескінченно велика при $x\to x_0,$ то $\dfrac{1}{f(x)}-$ нескінченно мала при $x\to x_0.$

Теорема 2 ***(зв'язок границі функції з нескінченно малою).*** 1) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ то існує проколотий окіл точки x_0, в якому $f(x)$ має вигляд

$f(x) = A + \alpha(x),$ де $\alpha(x) -$ нескінченно мала при $x \to x_0.$

2) Якщо в деякому проколотому околі точки x_0 має місце рівність $f(x) = A + \alpha(x),$ то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

Теорема 3 ***(сума нескінченно малих).*** Сума нескінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою.

Теорема 4 ***(добуток обмеженої й нескінченно малої функцій).*** Добуток обмеженої й нескінченно малої функцій є нескінченно малим.

Наслідок. Добуток скінченого числа нескінченно малих є нескінченно малою.

Основні теореми про границі

Теорема 1. Якщо для функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ у точці x_0 існують границі, то в точці x_0 існує границя і для функцій $y = f(x) \pm g(x)$ та $y = f(x)g(x),$ причому

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак границі, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x).$

Наслідок 2. Границя натурального степеня функції дорівнює натуральному степеню границі функції, тобто

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0}(f(x))^n, \forall n \in N.$$

Теорема 2 ***(границя частки).*** Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0,$ то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

Теорема 3 ***(граничний перехід в нерівності).*** Якщо $f_1(x) < f_2(x)$ для всіх $x \in (x_0, x),$ то $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x).$

Теорема 4 ***(існування границі монотонної послідовності).*** Якщо послідовність монотонно зростаюча й обмежена зверху, то вона має границю.

Важливе значення в теорії границь мають, так звані, чудові границі. Традиційно, розрізняють першу і другу чудові границі, а саме:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 -$ ***перша чудова границя***;

$\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \dfrac{1}{x})^x = e -$ ***друга чудова границя***.

Другу чудову границю часто записують у такій формі:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Функцію $y = f(x)$ називають ***неперервною в точці*** x_0, якщо:

1) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0;

2) у точці x_0 існує границя функції $y = f(x)$;

3) границя функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Поняття «неперервності функції в точці» можна визначити, використовуючи односторонні границі або прирости аргументу і функції.

Функцію $y = f(x)$ ***називають неперервною в точці*** x_0, якщо:

1) функція визначена в точці x_0;

2) нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто якщо $\Delta x \to 0$, то $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.

Точки з області визначення функції, в яких функція є неперервною, називають ***точками неперервності функції***, а точки в яких неперервність порушується – ***точками розриву функції***.

Розрізняють точки розриву першого і другого роду.

Точку розриву x_0 функції $y = f(x)$ називають ***точкою розриву першого роду***, якщо функція в цій точці має скінченні границі зліва і справа.

Точку розриву x_0 функції $y = f(x)$ називають ***точкою розриву другого роду***, якщо функція в цій точці має нескінченну границю справа чи зліва або обидві або границі взагалі не існують.

Якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0),$ то таку точку розриву першого роду називають точкою «усувного розриву».

Якщо односторонні границі в точці x_0 не рівні між собою, а решта умов неперервності виконуються, то таку точку називають точкою розриву першого роду «стрибок». Величина цього стрибка дорівнює $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$

Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають один і той самий порядок мализни при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = A \neq 0.$

Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ ***еквівалентні*** при $x \to x_0$ ($f_1 \sim f_2$), якщо виконується умова $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1.$

Функція $f_1(x)$ називається ***нескінченно малою вищого порядку***, ніж $f_2(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$

Вкажемо одне застосування еквівалентних нескінченно малих.

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих функцій дорівнює границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих, тобто якщо $f_1 \sim \phi_1, f_2 \sim \phi_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}$.

Наведемо таблицю еквівалентності нескінченно малих

Таблиця еквівалентності

При $u \to 0$

$$1)\sin u \sim u;\quad 3) arctgu \sim u;\quad 5) a^u - 1 \sim u\ln u;\quad 7)(1+u)^\alpha - 1 \sim u\alpha;$$

$$2)\, tgu \sim u;\quad 4)\arcsin u \sim u;\quad 6)\, e^u - 1 \sim u;\quad 8)\ln(1+u) \sim u.$$

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Знайти область визначення і область значень функцій: $y = 2x+3;\ y = \sin 2x;\ y = \ln\sqrt{x};\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$.

Розв'язування

$y = 2x + 3 -$ лінійна функція, отже, область визначення і значень збігаються з множиною дійсних чисел, тобто $D(y) = E(y) = R$;

$y = \sin 2x : D(y) = R, E(y) = [-1;1]$;

$y = \ln\sqrt{x} : D(y) = (0;+\infty), E(y) = (-\infty;+\infty)$;

$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} : D(y) = (-\infty;-2) \cup (3;+\infty), E(y) = (0;+\infty)$.

Приклад 2. Показати, що функції: 1) $y = \sin x$; 2) $y = \sqrt{4 - x^2}$; 3) $y = |x|$; 4) $y = 2 - x^2$ є обмеженими.

Розв'язування

1) Функція $y = \sin x$ є обмеженою, оскільки $|\sin x| \le 1$ для будь-якого $x \in R$.

2) Функція $y = \sqrt{4 - x^2}$ є обмеженою, оскільки для будь-якого x з області визначення $[-2;2]$ справедлива нерівність $|y| \le 2$.

3) Функція $y = |x|$ обмежена знизу, оскільки для будь-якого $x \in R$ виконується нерівність $|x| \ge 0$.

4) Функція $y = 2 - x^2$ обмежена зверху, оскільки для будь-якого $x \in R$ виконується нерівність $2 - x^2 \le 2$.

Приклад 3. Довести парність, непарність функцій: $f(x)=3x^2+5\cos x-\dfrac{12}{x^2}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+x^4+x^6}$.

Розв'язування

Функція $f(x)=3x^2+5\cos x-\dfrac{12}{x^2}$ – парна як сума парних функцій.

Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+x^4+x^6}$ – непарна як частка двох функцій різної парності.

Приклад 4. Довести, що функція $y=\cos\dfrac{1}{x}$ в точці $x=0$ не має границі.

Розв'язування

Розглянемо послідовність значень аргументу функції $\{x_n\}: x_n=\dfrac{1}{\pi n}, n\in Z.$ Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$ Розглянемо послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}:\cos\pi n=(-1)^n, n\in Z.$ Вона має вигляд –1;1;-1;... і границя при $n\to\infty$ не існує. Цього достатньо, щоб дійти висновку про те, що в точці $x=0$ функція $y=\cos\dfrac{1}{x}$ не має границі.

Приклад 5. Довести, що функція $y=3x+2$ у точці $x_0=1$ має границю, що дорівнює 5. Доведення здійснити за означенням Коші.

Розв'язування

Потрібно довести, що $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5.$

Задамо довільне $\varepsilon>0.$ Потрібно показати, що для заданого ε завжди існує число δ таке, що з нерівності $|x-1|<\delta$ випливає нерівність $|3x+2-5|<\varepsilon$ (1). З нерівності (1) маємо послідовність рівносильних нерівностей

$$|3x-3|<\varepsilon, |x-1|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, якщо взяти $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3},$ то для всіх x, що задовольняють умову $|x-1|<\delta,$ виконується нерівність (1). Оскільки число ε вибиралось довільно, можна стверджувати, що для будь-якого $\varepsilon>0$ завжди існує число δ, яке залежить від ε, а саме $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3},$ що з нерівності $|x-1|<\delta$ випливає нерівність $|3x+2-5|<\varepsilon$.

Приклад 6. Обчислити односторонні границі для $y = f(x)$ у заданих точках x_0 : 1) $y = \frac{1}{|x|}, x_0 = 0$; 2) $y = tgx, x_0 = \frac{\pi}{2}$;

Розв'язування

1) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{|x|} = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{|x|} = +\infty;$

2) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} tgx = +\infty;\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} tgx = -\infty.$

Приклад 7. Знайти односторонні границі функції

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x \ge 0, \\ x^2, x < 0 \end{cases}$$

у точці $x = 0$. Визначити, чи існує у функції границя при $x \to 0$.

Розв'язування

Обчислимо односторонні границі:

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (x-1)^2 = 1,\quad \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} x^2 = 0.$

З того, що $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \ne \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, випливає, що при $x \to 0$ задана в умові функція границі не має.

Приклад 8. Обчислити границю: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 6}{x^3 + 2}$.

Розв'язування

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 6}{x^3 + 2} = \frac{0^2 + 6}{0^2 + 2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Приклад 9. Обчислити границю: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{3x^3 + 2x - 3}$.

Розв'язування

Маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, тому спочатку винесемо в чисельнику та знаменнику дробу x^3 за дужки, а потім скоротимо та використаємо властивість границі частки.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{3x^3 + 2x - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^3(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3})} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 10. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}$.

Розв'язування

Маємо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Щоб відшукати найвищий степінь x чисельника та знаменника, розкриємо в чисельнику та знаменнику дужки та виконаємо перетворення:

$$\frac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}=\frac{x^3+18x^2+108x+216-x^3-3x^2-3x-1}{4x^2+12x+9+x^2+8x+16}=$$

$$=\frac{15x^2+105x+215}{5x^2+20x+25}=\frac{3x^2+21x+43}{x^2+4x+5}.$$

Тому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+21x+43}{x^2+4x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=3.$$

Приклад 11. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

Розв'язування

Маємо невизначеність $\left((+\infty)-(+\infty)\right)$. Для того щоб позбутися цієї невизначеності, виконаємо наступні перетворення:

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Звідки , $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{1}{\infty}\right)}{=}0.$

Приклад 12. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Розв'язування

Якщо $x\to1$, то $x^2-2x+1\to0$ та $x^3-x\to0$. Тому маємо невизначеність. Очевидно $x = 0$ є корінь виразів чисельника та знаменника, тому при розкладанні їх на множники вираз (x – 1) міститься як в чисельнику так і в знаменнику. Щоб позбутися невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ вилучимо у чисельнику та знаменнику одночлен (x – 1) та потім на нього скоротимо дріб:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left[\frac{0}{0}\right]\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

Приклад 13. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$.

Розв'язування

Щоб позбутися невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, розкладемо вирази чисельника та знаменника на множники. За теоремою Вієта корені чисельника $x_1=-2, x_2=1$, тому $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$, так само корені знаменника $x_1=-2, x_2=3$ звідки, $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x-3}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}.$$

Приклад 14. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Розв'язування

Для того, щоб розкрити невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, спочатку чисельник та знаменник дробу доповнимо до різниці квадратів, а потім вилучимо вираз $(x-4)$ та скоротимо на нього дріб:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\frac{2(2+2)}{3+3}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 15. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язування

Зведемо до першої чудової границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\frac{3x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Приклад 16. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$.

Розв'язування

Використовуючи результат попереднього прикладу, отримуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x\sin 2x}{2x}}{\frac{7x\sin 7x}{7x}}=\frac{2}{7}\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x}{\sin 7x}\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{7}.$$

Приклад 17. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3})^{1-2x}$.

Розв'язування

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3})^{1-2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3}-1)^{1-2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2x-4}{4x^2+2x+3})^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2x-4}{4x^2+2x+3})^{\frac{(4x^2+2x+3)}{(2x-4)}\frac{(2x-4)}{(4x^2+2x+3)}(1-2x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-4)(1-2x)}{4x^2+2x+3}}=e^{-1}.$$

Перехід границею в показник можна було зробити, так як показникова функція неперервна.

Приклад 18. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Розв'язування

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{(\cos x-1)}\frac{\cos x-1}{1}\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x}}=e^0=1.$$

Приклад 19. Довести неперервність функції $y=\sin x$ у будь-якій точці $x_0\in R$, використовуючи означення неперервності (мовою приростів).

Розв'язування

Виберемо деяку точку $x_0\in R.$ Надамо аргументу приріст $\Delta x.$ Одержимо точку $x_0+\Delta x.$ Розглянемо приріст функції:

$$\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}\sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}=2\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$$

Якщо $\Delta x\to 0$ (нескінченно малий приріст), то

$\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\to\cos x_0, \sin\frac{\Delta x}{2}\to\sin 0.$ З того, що $\sin 0=0,$ одержимо, що

приріст функції $\Delta y=2\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Це означає, що нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Отже, за означенням функція $y=\sin x$ неперервна в точці x_0. Точку x_0 вибрано довільно, тому функція $y=\sin x$ неперервна в будь-якій точці $x\in R.$

Приклад 20. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x^2, & x \ge 0, \\ x^2 - 1, & x < 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Функція $y = f(x)$ визначена для всіх $x \in R$, але в точці $x_0 = 0$ односторонні границі не дорівнюють одна одній, а саме

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (x^2 - 1) = -1; \ \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x^2 = 0.$$

Отже, у точці $x_0 = 0$ границя функції не існує.

Приклад 21. Визначити точки розриву функцій і встановити їх характер:

1) $y = \begin{cases} x^2 + 3, & x > 0; \\ x^2, & x \le 0. \end{cases}$ 2) $y = 2^{\frac{1}{3+x}}$.

Розв'язування

Знайдемо односторонні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0+} (x^2 + 3) = 3; \quad \lim\limits_{x\to 0-0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0-} x^2 = 0,$ але $3 \ne 0.$

Точка x_0=0 є точкою неусувного розриву першого роду, оскільки існують скінченні односторонні границі, нерівні між собою. Величина стрибка в точці $x_0 = 0$ дорівнює трьом.

Знайдемо односторонні границі:

2) $\lim\limits_{x\to -3+0} y(x) = \lim\limits_{x\to -3+} 2^{\frac{1}{3+x}} = 2^{+\infty} = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to -3-0} y(x) = \lim\limits_{x\to -3-} 2^{\frac{1}{3+x}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0.$

Точка $x_0 = -3$ є точкою розриву другого роду.

Приклад 22. Використовуючи нескінченно малі функції, обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

Розв'язування

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{2(\frac{x}{2})^2} = \frac{2}{3}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що при $n \to \infty$ послідовність 3, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, ..., $2 + \frac{1}{n}$, ... має границею число 2.

2. Довести, що при $n \to \infty$ послідовність $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}, ..., \frac{3n+4}{2n+1}, ...$ має границею число 1,5.

Знайти границі послідовностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$. *Відповідь.* 3.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. *Відповідь.* ∞.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n^3+3n^2}{0,001n^4-100n^3+1}$. *Відповідь.* 0.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$. *Відповідь.* $\frac{15}{17}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. *Відповідь.* 1.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. *Відповідь.* 4.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$. *Відповідь.* 1.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$. *Відповідь.* 0.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$. *Відповідь.* 0.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. *Відповідь.* 0.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$. *Відповідь.* $\frac{4}{3}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$. *Відповідь.* 1.

17. Знайти точки розриву функції $y=1/\left((x-1)(x-5)\right)$.

Відповідь. $x=1,\ x=5$ – точки розриву 2-го роду.

18. Який характер розриву функції $y=1/\left(1-e^{1-x}\right)$ в точці x = 1?

Відповідь. x = 1 – точка розриву 2-го роду.

19. Знайти точки розриву функції $y=\left(x^3-6x^2+11x-6\right)/\left(x^2-3x+2\right)$.

Відповідь. x = 1, x = 2 – точки усувного розриву.

20. Знайти точки розриву функції $y=1/\left(x^2+x+1\right)$.

Відповідь. Функція неперервна на всій числовій прямій $(-\infty,+\infty)$.

21. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті: а) [2, 5]; б) [4, 10]; в) [0, 7].

Відповідь. а) функція неперервна; б) має одну точку розриву 2-го роду; в) має дві точки розриву 2-го роду.

22. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\begin{cases} x^2+1, \text{ якщо } x>1, \\ x+1, \text{ якщо } x<1, \\ 3, \text{ якщо } x=1. \end{cases}$$

Відповідь. x = 1 – точка розриву 1-го роду (розрив усувний).

Питання для самоперевірки

1. Навести геометричну інтерпретацію границі функції в точці.
2. Сформулюйте означення границі функції за Гейне.
3. Сформулюйте означення границі функції за Коші.
4. Дати означення односторонньої границі.
5. Що розуміють під поняттям «невизначеність»?
6. Як можна розкрити невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right), \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$?
7. Що таке епсілон-окіл точки?
8. Які різні форми запису має друга границя?
9. Дати означення нескінченно малої і нескінченно великої величини
10. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала вищого порядку, ніж $\beta(x)$ при $x\to a$, то …

11. Яка з наведених функцій має вищий порядок малості при $x \to 0$ $f_1(x) = 5x^3 + x^2 + 3x$, $f_2(x) = x^2 + 3x + \sqrt{x}$? Відповідь обґрунтуйте.

Інтерактивне практичне заняття № 2 «Математична лотерея з теорії границь»

Мета заняття: освітня – перевірити знання студентів з фактичного матеріалу й основних понять, глибину осмислення знань і ступеня їх узагальнення, підвищити рівень засвоєння знань; розвиваюча – розвивати пам’ять, активність, прищепити способи пізнавальної діяльності; виховна – сприяти формуванню моральних, естетичних та інших якостей особистості.

Це заняття ми проводимо для закріплення розкриття невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty]$, обчислення першої та другої стандартної границь та використання еквівалентних нескінченно малих функцій.

Кожному студенту пропонується придбати лотерею за символічну ціну. Ціна білета – відповідь на зовсім просте питання, наприклад, чому еквівалентний $\arcsin x$, таким чином, можна повторити із групою таблицю еквівалентності, яка необхідна під час обчислення границь.

Отже, кожний студент отримує лотерейний білет виду:

Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-3}{2x+1} - 2x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{3x}{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-5x^2-x-5}{x^3-25x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{e^{tg4x}-1}$.

Розв’язавши отримані завдання лотерейного білету, відповіді пропонуються перевірити за таблицею «виграшів», в якій містяться відповіді до задач «щасливих» білетів. Якщо відповідь розв’язаних задач є в таблиці, то студент отримує приз, в якості якого виступає автоматична здача типового розрахунку на цю тему. Всі решта студентів, які отримали правильні відповіді до задач «нещасливих білетів», отримують бали за кожне завдання.

Результативність: формування практичних вмінь розв’язування задач репродуктивного характеру, навичок «здорової» конкуренції.

Індивідуальні домашні завдання

ВАРІАНТ № 1

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{4x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x^2-5}}{\sqrt[3]{8x^3+3}+\sqrt[4]{5x^3+1}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2+4x-1}\right)^{-x^2}$ $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin 2x}{x(\pi+x)}$; $\lim\limits_{x\to-3}(7+2x)^{\frac{3}{x+3}}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+3x^3-2x-2}{2x^3+8x^2+5x-15}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=e^{\frac{1}{x-7}}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=3-e^{x+1}$; $y=\dfrac{x}{x+1}$; $y=-2\sin(3x+1)$.

ВАРІАНТ № 2

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^{n-1}}{2^n-3^n}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x+5}=2$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+9x)}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^5+8x^4-5x^3-13x+3}{x^2-21x+20}$; $\lim\limits_{x\to 0}2x\cdot ctg5x$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)!+(2x+2)!}{(2x+3)!+(2x+2)!}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\ln(x-8)$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-e^{2-x}$; $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; $y=3\sin(2x-1)$.

ВАРІАНТ № 3

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 4}(x+1)=5$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2+x-12}{x^3-x^2-4x-6}$; $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{\sqrt{3x+4}-1}{2x^2-5x-7}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=1-e^{2-x}$; $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; $y=1+\sin(3x-2)$.

ВАРІАНТ № 4

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{2n}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{3x+2}=\dfrac{4}{3}$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{2x^3+10x^2+5x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$;

$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{3x^3+3}+\sqrt[4]{x^5+1}}$; $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+x-7}\right)^{5x-1}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{|x-4|}{x^2+x-20}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=2+e^{x-1}$; $y=\dfrac{x-2}{x+2}$; $y=-3\sin(x-2)$.

ВАРІАНТ № 5

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to -1}(9+2x)=7$.

3. Обчислити границі функцій:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}};\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right);\ \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x};\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^3+3x^2-7x-14};$$

$$\lim_{x\to\infty}(3x-7)\ln\frac{2x-1}{2x+4};\quad \lim_{x\to 10}\frac{5x^2-51x+10}{x-10};\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+2}{5x^4+8x-6};\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x};$$

$$\lim_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}.$$

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=5^{\frac{1}{11-x}}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-2+e^{x+3};\ y=\dfrac{x-3}{x+1};\ y=2-3\sin(2x+1).$

ВАРІАНТ № 6

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-2}+\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+n}}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{3x+10}=\dfrac{1}{3}$.

3. Обчислити границі функцій:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3};\ \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6};\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx};\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg8x}{2x};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right);\ \lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x-2}};\quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2+6x-8}{x-1}.$$

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=arctg\left(\dfrac{1}{x+9}\right)$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=3-e^{2-x};\ y=\dfrac{x}{x+4};\ y=5\sin(\dfrac{x}{2}+1).$

ВАРІАНТ № 7

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-2)!-(2n+1)!}{(2n)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 0}(7x+1)=1$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{xtg2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[7]{x^4+3x^2}+\sqrt[5]{x^7+2x^4+1}}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+2x^2+2x+3}{6x^4+3x^3-3x-6}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)tg2x$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+4x}$; $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^2-16}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=2e^{2+x}$; $y=\dfrac{x}{2x+1}$; $y=1{,}5\cos(2x-1)$.

ВАРІАНТ № 8

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+4}{1-3x}=-\dfrac{5}{3}$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x-2}{5x^3+3x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{27x^6+x^2}}{\left(x+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt{9+x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^5-2x^3-x^2-4}{2x^4-x^3+4x^2-8x+4}$;

$\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=x+\dfrac{x+3}{|x+3|}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-1+e^{2x+1}$; $y=\dfrac{-x}{x+3}$; $y=2\cos(\dfrac{x}{2}-2)$.

ВАРІАНТ № 9

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n+3}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 8}(x-5)=3$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{x^4+2x^3+x^2+10x-6}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\ln\dfrac{2x+1}{2x-7}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{\frac{4x-2}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=arctg\dfrac{1}{3-x}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=2-e^{1-x}$; $y=\dfrac{x}{3x+2}$; $y=-5\sin(\dfrac{x}{2}+1)$.

ВАРІАНТ № 10

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x}{6x-2}=-\dfrac{5}{6}$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-7x^2-2x-12}{5x^3-11x^2-36}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+1}{-2x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{\arcsin 4x}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{4}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=e^{\frac{1}{x+5}}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=1+e^{1-2x}$; $y=\dfrac{-3x}{2x+4}$; $y=3\sin(\dfrac{x}{3}-3)$.

ВАРІАНТ № 11

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n+2)!}{(n+1)!}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 6}(x-5)=1$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{4x+5}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^5-4}-\sqrt[4]{x^4+1}}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$; $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-4x^2+6x-4}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-4)(x+1)}{x^3+x^2+2}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{\sqrt{20+x}-5}{x^2-25}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=3-e^{x+4}$; $y=\dfrac{3+x}{4-x}$; $y=\cos(\dfrac{x}{3}+1)$.

ВАРІАНТ № 12

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{n-n^2+3}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-3}{2x+3}=3$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-2x-39}{-x^2-2x+15}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)ctg\dfrac{\pi x}{2}$; $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)^{\frac{3x^2}{x-4}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\ln(x+7)$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=4+e^{1-2x}$; $y=\dfrac{x}{3x-2}$; $y=\sin(\dfrac{2x}{3}+1)$.

ВАРІАНТ № 13

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+3)!}{(2n+2)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to1}(2-3x)=-1$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-tgx}{\sin^3 x}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$; $\lim\limits_{x\to0,5}\frac{2x-1}{8x^3+16x-9}$; $\lim\limits_{x\to0}3xctg9x$;

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x}{2x^2-3x+5}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{3x-9}$; $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\frac{2-2x}{x^3-x^4}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=2e^{1-3x}$; $y=\frac{-3x}{2x+1}$; $y=\cos(\frac{x}{2}-2)$.

ВАРІАНТ № 14

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+3)!}{(n+2)!+(n+4)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-2}{3x}=\frac{4}{3}$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to0}\arcsin^2 3x\cdot ctg^2 8x$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$;

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^5+3x^4+x+18}{x^3+8}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos4x-\cos6x}{\sin^2 5x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+2)^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-5x-2}\right)^{-x^2+3}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=x+\frac{x+2}{|x+2|}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-2+e^{4-x}$; $y=\frac{2x+1}{3x-4}$; $y=2\cos(3x+2)$.

ВАРІАНТ № 15

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-4^{n-1}}{2^n+4^n}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+5\right)=7$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x}{2x^2+6x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 1}\left(8-7x\right)^{\frac{x+5}{2x-2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-4}{3x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{3x-3}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$;

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{3x^4-5x^2+x+3}$; $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-5}-1}{36-x^2}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=e^{\frac{1}{x+1}}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-1+e^{2+2x}$; $y=\dfrac{x-2}{3x+1}$; $y=-3\sin(2x-1)$.

ВАРІАНТ № 16

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-2}\right)^{2n+7}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x}=3$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2+2}-x^2\right)$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^4-x^3+2x^2-x-62}{x^3+2x^2-20x+24}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+3\right)\left(\ln\left(2-4x\right)-\ln\left(1-4x\right)\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos 5x\right)\cdot ctg^2 3x$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x-5\right)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-3e^{\frac{x}{2}-1}$; $y=\dfrac{3x-1}{2x+4}$; $y=2\cos(2x+3)$.

ВАРІАНТ № 17

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n+1)!+(4n+2)!}{(4n+3)!}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 4}(5x-9)=11$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x-2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2xtg2x}$;

$\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{5x-10}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^4-x^3+2x^2-x-4}$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\frac{x}{|x|}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=1-2e^{4-2x}$; $y=\frac{2-3x}{2x+3}$; $y=-4\cos(\frac{x}{3}+4)$.

ВАРІАНТ № 18

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^2+1}}$
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-3}{7x-1}=1$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+1}{2x^2+x-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^9+6x+3}-\sqrt[5]{4x^8+7x^2}}{\sqrt[4]{x-4}+\sqrt[4]{9+16x^7}}$; $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{6x+2}{3x-6}}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 4x}{1-\cos 3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2-3x+8}\right)^{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2+3x-4}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=2-e^{\frac{-x}{2}}$; $y=\frac{2x}{2x-5}$; $y=-3\cos(\frac{x}{2}-2)$.

ВАРІАНТ № 19

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+8}\right)^{n-1}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x+5\right)=5$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^4-x^3+2x^2-x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(3-x\right)^{\frac{4x}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+5\right)\left(\ln\left(2x-3\right)-\ln\left(2x+3\right)\right)$; $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt{1-\sin x}}{2x-\pi}$;

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x^2-2x}{x^2+4x+1}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=arctg\frac{1}{x-2}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=2+3e^{1-2x}$; $y=\frac{1+x}{4x-2}$; $y=\sin(\frac{x}{2}+1)$.

ВАРІАНТ № 20

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n-1\right)!+\left(n-2\right)!}{\left(n-3\right)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+x^2-3}}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^4+x+5}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$;

$\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-4x\right)^{\frac{1-x}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x\left(x+5\right)}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot ctg 7x$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\frac{4x}{x+3}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=1+2^{2-x}$; $y=\frac{2-x}{2x+3}$; $y=5\cos(\frac{x}{2}+2)$.

ВАРІАНТ № 21

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 4}(x-1)=3$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^7+8x-5}-\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[5]{x^7-64}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(5x-4)(2x+2)}{5x^3+2x^2+2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+2}\right)^x$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{2-x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}$; $\lim\limits_{x\to 2}(9-4x)^{\frac{1-x}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$;

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+5x+12}{3-x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\frac{|x+1|}{x^2+x^3}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-2+3^{x-1}$; $y=\frac{2x}{x+5}$; $y=-3\sin(\frac{x}{3}-1)$.

ВАРІАНТ № 22

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+3}{2x-1}=2$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{1-x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2-7x}\right)$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{arctg(x+2)}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

$\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\frac{|x|}{x-x^3}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-3+e^{1-3x}$; $y=\dfrac{x-4}{2x+5}$; $y=-5\sin(\dfrac{x}{3}-2)$.

ВАРІАНТ № 23

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+...+2n}{\sqrt{9n^2+1}}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to-2}\left(x+6\right)=4$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-4x^3-2}{5x^3+3x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$; $\lim\limits_{x\to0}xctg\dfrac{5x}{2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+3x-1}{5x^2+3x+3}\right)^{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt[7]{x^3+1}}{\sqrt{36x^2+x+7}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin\left(\pi\left(x+2\right)\right)}$;

$\lim\limits_{x\to3}\left(3x-8\right)^{\frac{8}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2-1}{2x^4+x^3-x^2+5x+5}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{x-1}{2x^2-x-1}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y=-4+e^{2x-1}$; $y=\dfrac{3x}{5x-1}$; $y=5\sin(3x+2)$.

ВАРІАНТ № 24

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2n+3\right)!-\left(2n+1\right)!}{\left(2n+1\right)!-\left(2n+2\right)!}$.
2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-2}{2-3x}=-2$.
3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+10x+12}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-x^2}{x^3+2x^2-5x-6}$; $\lim\limits_{x\to2}\left(5x-9\right)^{\frac{x}{2x-4}}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+1}{3x^5-9x+3}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$;

$\lim\limits_{x\to0}\arcsin 2x\cdot ctg25x$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=arctg\dfrac{1}{x}$.
5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y = 2 - e^{4-3x}$; $y = \dfrac{2x}{x+2}$; $y = \dfrac{1}{3}\cos(3x+2)$.

ВАРІАНТ № 25

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-5}{n+2}\right)^{3n-1}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-2\right) = 4$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{2-\sqrt[3]{8-x}}$; $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin\left(1-2x\right)}{4x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+x-56}{x^2-49}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{4x^4-x^3+2x^2-x-4}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\frac{2x}{1-x}}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^8+2x-2x^2}+\sqrt[5]{x^3+1}}{\sqrt[3]{2x-x^5+1}-\sqrt{x+7}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^2+1}{3x^5-x+3}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:

$y = 3 - e^{2-x}$; $y = \dfrac{x}{x+4}$; $y = 5\sin(\dfrac{x}{2}+1)$.

ВАРІАНТ № 26

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-\left(n-1\right)!}{\left(n+1\right)!+2}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-2x}{6-x} = 2$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-\sin x\right)}{\sin 4x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x-3\right)^{\frac{x^2}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{7+x}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0} ctgx^2\left(1-\cos x\right)$;

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{2x^4-x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[7]{x+2}-\sqrt[5]{32x^5+2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x^5+1}{4x^5-2x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-8}\right)^{x+2}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y = \ln\left(1+2x\right)$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень: $y=-e^{3-x}$; $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$; $y=3\sin(2x+1)$.

ВАРІАНТ № 27

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+2)!}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to-3}(4-x)=7$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x-2}-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^7+8x-5}-\sqrt[3]{x^7+2}}{\sqrt[5]{x^5-64x^2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{2x^4+x^3-3}$;

$\lim\limits_{x\to0}(\cos 7x-1)\cdot ctgx^2$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-4x^2+3}{x-1}$;

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{4x^4-4}$; $\lim\limits_{x\to3}(4x-11)^{\frac{5}{3-x}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2x}{x^4}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=x+\dfrac{x-5}{|x-5|}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень: $y=1-e^{2+x}$; $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$; $y=1+\cos(3x+1)$.

ВАРІАНТ № 28

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^4}{1-2n^4}-2^{\frac{1}{n}}\right)$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{2x-8}=\dfrac{5}{2}$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to-2}(4x+9)^{\frac{5-x}{2+x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{x^2+2x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3+x-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{2x+1}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(x-\pi/2)\cos x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^3+1}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=arctg\dfrac{1}{x-6}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:
$y=2+e^{1-2x};\ y=\dfrac{x-3}{x+4};\ y=-2\sin(x+3).$

ВАРІАНТ № 29

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to5}(2x-6)=4$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin7x}{x^2+\pi x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-11}{5}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-4x^2-2}{3x^3+x^2+4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{tg\left(2\pi\left(x+1/2\right)\right)}$; $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{7x}{1-x}}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+x}}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=3^{\frac{1}{1-x}}$.

5. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:
$y=-3+e^{3-x};\ y=\dfrac{x+3}{x+5};\ y=6\sin(\dfrac{x}{2}-1).$

ВАРІАНТ № 30

1. Обчислити границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-5^{n-1}+5}{3^{n+1}+5^n}$.

2. Довести за означенням границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-5x}{6x-4}=-\dfrac{5}{6}$.

3. Обчислити границі функцій:

$\lim\limits_{x\to0}x\sin2xctg^23x$; $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^2+4x-21}{x+7}$; $\lim\limits_{x\to3}(10-3x)^{\frac{2}{3-x}}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-9x^2+12}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+1}{3x^3+x^2-3}\right)^{2x+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{x^3-4x^4+4x}$.

4. Вказати характер точок розриву функції: $y=\dfrac{3}{x^2-2x}$.

6. Побудувати графік функції шляхом елементарних перетворень:
$y=-3+e^{3-x};\ y=\dfrac{x}{x-4};\ y=2\sin(\dfrac{x}{2}+2)-1.$

2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практичне заняття № 1

Похідна, її обчислення. Застосування диференціалу до наближених обчислень

Мета: закріпити теоретичні знання з теми «Похідна функції, її обчислення. Диференціал, його застосування», набути навички та вміння диференціювання складених функцій, функцій заданих неявно, параметрично користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання; набути навичок і вміння по наближеному обчисленню значень виразів за допомогою диференціала функції і формули наближених обчислень.

Питання для самопідготовки:

– поняття похідної функції, геометричний і механічний зміст похідної;
– таблиця похідних;
– основні правила диференціювання функцій;
– похідні вищих порядків;
– поняття диференціалу функції. Знаходження диференціалу через похідну;
– формула наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала.

План практичного заняття

1. Знаходження похідної суми, добутку та частки функцій.
2. Знаходження похідної складеної і оберненої функцій. Обчислення похідних функцій, заданих параметрично та неявно.
3. Рівняння дотичної та нормалі до плоскої кривої.
4. Обчислення диференціала функцій.
5. Застосування диференціала до наближених обчислень.

Теоретичний довідник

Похідною функції $y = f(x)$ в даній точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля довільним чином, тобто

$$y' \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 дорівнює значенню похідної цієї функції в т. x_0: $k = f'(x_0)$.

Якщо функція $f(x)$ має неперервну похідну $f'(x)$ на $[a,b]$, то функція $f(x)$ називається ***гладкою*** на цьому проміжку.

Функція $f(x)$, похідна якої $f'(x)$ допускає тільки скінчене число точок розриву, причому I-го роду, на даному проміжку $[a,b]$, називається ***кусково-гладкою*** на цьому проміжку. Знаходження похідної функції називають ***диференціюванням***.

Теорема 1. 1) Будь-яка диференційована в точці функція є неперервною в цій точці; 2) Існують неперервні в точках функції, недиференційовані в цих точках.

Правила диференціювання

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю.

Теорема 2. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$, диференційовані в даній точці x, то в цій же точці диференційована і їх сума, до того ж: $(u+v)' = u' + v'$.

Зауваження. Аналогічно $(u-v)' = u' - v'$.

Теорема 3. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$, диференційовані на проміжку (a,b), то $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто $(cf(x))' = cf'(x)$.

Теорема 3. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$, диференційовані та $v(x) \neq 0$, то в цій точці диференційована і частка: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Похідна складеної функції

Теорема 4. Нехай $y = q(x)$, $x \in (a,b)$ має похідну в точці $x_0 \in (a,b)$, а $z = \varphi(y)$ має похідну в точці $y_0 = q(x_0)$. Тоді $z(x) = \varphi(q(x))$ має похідну в точці x_0 до того ж $z'(x_0) = \varphi'(y_0) \cdot q'(x_0)$.

Похідна оберненої, неявної функції та функції заданої параметрично

Теорема 5. Якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка в точці y має похідну $\varphi'(y)$, відмінну від нуля, то у відповідній точці x функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$, що дорівнює $\frac{1}{\varphi'(y)}$, тобто $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.

Нехай функція задана ***параметричними рівняннями*** $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ $x = x(t)$ і $y = y(t)$ диференційовані в околі точки t, причому $x'(t) \neq 0$.

Тоді $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, тобто $y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Співвідношення $F(x, f(x))=0$ визначає ***неявну функцію*** $y=f(x)$, якщо $F(x, f(x))\equiv 0$.

Нехай функція задана рівнянням $F(x,y)=0$, а не $y=f(x)$, тобто неявно. Для того, щоб знайти похідну треба продиференціювати обидві частини цього рівняння по x і з отриманого рівняння знайти $y'(x)$.

Рівняння дотичної є рівнянням прямої з даним кутовим коефіцієнтом k, що проходить через т. $M_0(x_0;y_0)$ має вигляд: $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$;

$k=f'\left(x_0\right) \Rightarrow y-y_0=f'(x_0)\cdot\left(x-x_0\right)$.

Нормаллю до кривої в даній точці називається пряма, що проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної.

$$k_n=-\frac{1}{k_g};\qquad y-y_0=\frac{-1}{f'\left(x_0\right)}\cdot\left(x-x_0\right).$$

Таблиця похідних

1. $(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}u'$,

2. $(a^u)'=a^u\ln a u'$,

3. $(e^u)'=e^u u'$,

4. $(\log_a u)'=\frac{u'}{u}(\log_a e)=\frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{\ln a}$

5. $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

6. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$

7. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$

8. $(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

9. $(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

10. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

12. $(\mathrm{arc}\,tgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

13. $(\mathrm{arc}\,ctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

14. $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$

15. $c'=0, c=const$

16. $(shu=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u}))'=chu\cdot u'$

17. $(chu=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u}))'=shu\cdot u'$

18. $(thu)'=\frac{1}{ch^2u}\cdot u'$

19. $(cthu)'=\frac{1}{sh^2u}\cdot u'$

Якщо функція має першу похідну, то похідна від похідної першого порядку називається ***похідною другого порядку*** або ***другою похідною***:

$$y'' = \left(f(x)\right)' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}; \text{ аналогічно: } y'' = \left(f''(x)\right)' = \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Аналогічно приходимо до поняття похідної довільного порядку, тобто $y'' = (f'(x))', y''' = (f''(x))', ..., y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$.

Фізичний зміст похідної другого порядку – $v'(t) = \left(s'(t)\right)' = s''(t) = a(t)$ – полягає в тому, що така похідна є прискоренням точки, яка рухається вздовж траєкторії, що є графіком даної функції.

Друга похідна функції заданої параметрично знаходиться за формулою:

$$y''_x = (y'_x)'_t / x'_t \text{ або } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}.$$

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0)$, тоді добуток $f'(x_0)\Delta x$ називається ***диференціалом функції*** $f(x)$ в т. x_0. Записують $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Застосування диференціала до наближених обчислень

$\Delta y = f'(x)\Delta x \quad \Rightarrow \quad f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x$

$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ – формула наближеного обчислення значення функції.

Диференціал від диференціала першого порядку називають ***диференціалом другого порядку***: $d^2 y = d(dy)$ або $d^2 y = f''(x)dx^2$. Аналогічно знаходимо диференціал 3-го та 4-го порядку: $d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\cdot dx^n$.

Зауваження. Теореми про добуток і частку похідної справедливі і для диференціала: $d(uv) = vdu + udv$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$. Але для диференціала $n > 1$ порядку вони мають зміст тільки коли x незалежна змінна. Для складеної функції ці формули не виконуються.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Користуючись означенням похідної (не використовуючи формули диференціювання), знайти похідну функції $y = \cos^2 5x$.

Розв'язування

1. Надамо аргументу x довільний приріст Δx і, підставляючи в даний вираз функції замість x значення приросту $x + \Delta x$, знаходимо приріст функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

В даному випадку $y + \Delta y = \cos^5 5(x + \Delta x) = \cos^2(5x + 5\Delta x)$.

2. Знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x);$$

$$\Delta y = \cos^2(5x + \Delta 5x) - \cos^2 5x.$$

3. Поділимо приріст функції на приріст аргументу, тобто складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos^2(5x+5\Delta x) - \cos^2 5x}{\Delta x} = \frac{\left[\cos(5x+5\Delta x) - \cos 5x\right]}{\Delta x} \times$$

$$\times\left[\cos(5x+5\Delta x) + \cos 5x\right] = \frac{-2\sin\left(5x + \frac{5\Delta x}{2}\right)\sin\frac{5\Delta x}{2}}{\Delta x} \times$$

$$\times\left[\cos(5x+5\Delta x) + \cos 5x\right].$$

4. Знаходимо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$. Ця границя і дасть шукану похідну y' від функції $y = f(x)$; $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-2\sin(5x + \frac{5\Delta x}{2})\sin\frac{5\Delta x}{2}\left[\cos(5x+5\Delta x) + \cos 5x\right]}{\Delta x} =$$

$$= -2\sin 5x \cdot 2\cos 5x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{5\Delta x}{2} \cdot \frac{5}{2}}{\Delta x \cdot \frac{5}{2}} = -2\sin 5x \cdot 2\cos 5x \cdot \frac{5}{2} =$$

$$= -2\sin 5x \cos 5x \cdot 5 = -5\sin 10x;$$

$$y' = -5\sin 10x.$$

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

Приклад 2. $y = x\sqrt{x}\left(3\ln x - 2\right)$.

Розв'язування

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln x - 2\right)\right)' = x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\left(3\ln x - 2\right) =$$

$$3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

Приклад 3. $y = \sin\left(2x+3\right)$.

Розв'язування

$$y' = \cos\left(2x+3\right) \cdot \left(2x+3\right)' = 2\cos\left(2x+3\right).$$

Приклад 4. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язування

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Приклад 5. $y=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

Розв'язування

$$y'=\mathrm{tg}\sqrt{x}\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}-1\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\sqrt{x}.$$

Приклад 6. $y=x^{x^2}$.

Розв'язування

Логарифмуючи функцію, дістаємо $\ln y=x^2\ln x$.

Звідки: $\left(\ln y\right)'=\frac{1}{y}\cdot y'$,

$$\frac{y'}{y}=x^2\cdot\frac{1}{x}+2x\ln x,\quad \frac{y'}{y}=x\left(1+2\ln x\right),$$

$$y'=xy\left(1+2\ln x\right)=x\,x^{x^2}\left(1+2\ln x\right)=x^{x^2+1}\left(1+2\ln x\right).$$

Приклад 7. $y=\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}$.

Розв'язування

Маємо:

$$\ln y=\mathrm{tg}x\ln\sin x,\quad \frac{y'}{y}=\mathrm{tg}x\frac{1}{\sin x}\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x=1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x,$$

$$y'=y\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right)=\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right).$$

Приклад 8. Найти $\frac{dy}{dx}$ для даної неявної функції $5x^2+3xy-2y^2+2=0$.

Розв'язування

Диференціюємо по x обидві частини рівності, де y є функція від x, отримаємо $5\cdot 2x+3\left(x'y+xy'\right)-2\cdot 2y\cdot y'=0$.

Враховуючи, що $x'=1$, отримаємо

$10x+3y+3xy'-4yy'=0;$

$y'(3x-4y)=-10x-3y;$

$$y'=\frac{-10x-3y}{3x-4y}=\frac{10x+3y}{4y-3x}.$$

Приклад 9. Знайти похідну y_x' для функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x=t^3+3t+1; \\ y=3t^5+5t^3+1. \end{cases}$$

Розв'язування

Знайдемо $y_t'=15t^4+15t^2$ и $x_t'=3t^2+3$. Відповідно, $y_t'=\dfrac{15t^4+15t^2}{3t^2+3}=5t^2.$

Приклад 10. Показати, що функція $y\left(x^2+Cx\right)=1$ перетворює рівняння $y'+\dfrac{y}{x}=-xy^2$ в тотожність.

Розв'язування

Виразимо y в явному виді $y=\dfrac{1}{x^2+Cx}$. Знайдемо

$$y'=\left(\frac{1}{x^2+Cx}\right)'=\left[\left(x^2+Cx\right)^{-1}\right]'=-\left(x^2+Cx\right)^{-2}\left(2x+C\right)=-\frac{2x+C}{\left(x^2+Cx\right)^2}.$$

Підставимо y і y' в ліву частину рівняння, отримаємо:

$$y'+\frac{y}{x}=-\frac{2x+C}{\left(x^2+Cx\right)^2}+\frac{1}{x\left(x^2+Cx\right)}=\frac{-2x^2-Cx+x^2+Cx}{x\left(x^2+Cx\right)^2}=$$

$$=\frac{-x^2}{x\left(x^2+Cx\right)^2}=\frac{-x}{\left(x^2+Cx\right)^2}.$$

Підставляємо y в праву частину рівності, отримаємо:

$$-xy^2=-x\frac{1}{\left(\mathrm{x}^2+Cx\right)^2},$$

$\dfrac{-x}{\left(\mathrm{x}^2+Cx\right)^2}=\dfrac{-x}{\left(\mathrm{x}^2+Cx\right)^2}$, що й треба було довести .

Приклад 11. Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Знайти $y', y'', y''', \ldots$.

Розв'язування

Маємо: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2, \quad y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{(4)} = 120x + 48, \quad y^{(5)} = 120, \quad y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

Приклад 12. Для даної неявної функції знайти y''.

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 4 = 0.$$

Розв'язування

Диференціюємо по x обидві частини рівності, де y є функцією від x, отримаємо $2x + 2yy' - 4 + 10y' = 0$. Звідси знаходимо y'.

$$y'(2y + 10) = 4 - 2x;$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2y + 10} = \frac{2 - x}{y + 5}.$$

Знайдемо y'':

$$y'' = \frac{-1(y+5) - (2-x)y'}{(y+5)^2} = -\left[\frac{y + 5 + (2-x)y'}{(y+5)^2}\right].$$

Підставляємо в ліву частину знайдену похідну $y' = \frac{2-x}{y+5}$, отримаємо:

$$y'' = -\left[\frac{y + 5 + (2-x)\cdot\left(\frac{2-x}{y+5}\right)}{(y+5)^2}\right] = -\frac{(y+5)^2 + (2-x)^2}{(y+5)^3} =$$

$$= -\frac{y^2 + x^2 + 10y - 4x + 29}{(y+5)^3}.$$

Враховуючи, що $x^2 + y^2 = 4x - 10y - 4$, отримаємо

$y'' = -\frac{4x - 10y - 4 + 10y - 4x + 29}{(y+5)^3}$ або $y'' = -\frac{25}{(y+5)^3}$.

Приклад 13. Для функції, заданої параметрично, знайти y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t; \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$$

Розв'язування

Знаходимо похідні x і y по параметру t.

$x'_t = 2t + 2,\ \ y'_t = \dfrac{1}{t+1};$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{1}{t+1}}{2(t+1)} = \frac{1}{2(t+1)^2} = \frac{1}{2}(t+1)^{-2}.$$

Далі знаходимо похідну від y'_x по t, а потім шукану другу похідну від y по x як відношення похідних від y'_x по t і від x по t.

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{1}{2}(-2)(t+1)^{-3} = -\frac{1}{\left(t+1\right)^3};$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\dfrac{1}{(t+1)^3}}{2(t+1)} = -\frac{1}{2(t+1)^4}.$$

Приклад 14. Який кут утворює з віссю *Ox* дотична до кривої $y = \dfrac{2}{3}x^5 - \dfrac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

Розв'язування

Знаходимо похідну $y' = \dfrac{10}{3}x^4 - \dfrac{1}{3}x^2$; при $x = 1$, $y' = 3$, таким чином $\mathrm{tg}\alpha = 3$, звідки $\alpha = \mathrm{arctg}3 \approx 71^\circ 34'$.

Приклад 15. Знайти рівняння дотичної і нормалі до еліпса

$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}\cos t; \\ y = 2\sin t; \end{cases}$ в точці, де $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язування

При $t = \dfrac{\pi}{6}$: $\begin{array}{l} x_0 = 2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3 \\ y_0 = 2\sin\dfrac{\pi}{6} = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1 \end{array}$, отримаємо точку $M_0(3,1)$.

Знайдемо $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2\cos t}{-2\sqrt{3}\sin t} = -\dfrac{\mathrm{ctg}\, t}{\sqrt{3}}$.

При $t = \dfrac{\pi}{6}$, отримаємо $y'_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{6} = -1$.

Рівняння дотичної:

$$y - 1 = -(x-3);$$

$$x + y - 4 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$y-1=(x-3);$$

$$x-y-2=0.$$

Приклад 16. Знайти диференціал функції y, якщо $y=\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Розв'язування

Використовуючи властивість логарифма:

$y=\ln(\sin x)-\ln x$.

Використаємо формулу $dy=y'\cdot dx$.

$y'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=ctgx-\dfrac{1}{x};$

$dy=\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)dx.$

Завдання для самостійної роботи

I. Знайти похідні функцій:

1. $y=\dfrac{1}{x^2}$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{2}{x^3}$.

2. $y=\sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3. $y=5\sin x+3\cos x$. *Відповідь.* $y'=5\cos x-3\sin x$.

4. $y=5(\mathrm{tg}x-x)$. *Відповідь.* $y'=5\mathrm{tg}^2x$.

5. $y=\dfrac{1}{e^x+1}$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

6. $y=2^{x^2}$. *Відповідь.* $y'=2^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 2$.

II. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

7. $y=\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}.$ *Відповідь.* $y'=x^2\sqrt{x}\left(1-x^2\right)^2$.

8. $y=3x^3\cdot\ln x-x^3$. *Відповідь.* $y'=9x^2\cdot\ln x$.

9. $y = 2^{3x} / 3^{2x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\frac{8}{9}\right)^x \cdot \ln\frac{8}{9}$.

10. $y = x\arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$. *Відповідь.* $y' = \arccos\frac{x}{2}$.

11. $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{\cos x}$.

12. $y = \ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4+1}\right)$. *Відповідь.* $y' = \frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

13. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(\sin x) + \ln\cos(\sin x)$. *Відповідь.* $y' = \operatorname{tg}^3(\sin x)\cdot\cos x$.

14. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

15. $y = 2x\cdot\operatorname{tg}2x + \ln\cos 2x - 2x^2$. *Відповідь.* $y' = 4x\cdot\operatorname{tg}^2 2x$.

16. $y = \operatorname{arctg}\frac{3x-x^2}{1-3x^2}$. *Відповідь.* $y' = \frac{3}{1+x^2}$.

17. $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$. *Відповідь.* $y' = -\frac{2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

18. $y = e^x\cdot 2^{5x} / 3^{4x}$. *Відповідь.* $y' = \frac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}\cdot\ln\frac{32e}{81}$.

19. $y = \frac{x+1}{x} - e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$. *Відповідь.* $y' = 0$.

20. $y = \frac{x^2\cdot e^{x^2}}{x^2+1}$. *Відповідь.* $y' = 2e^{x^2}\cdot x\cdot\frac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

21. $y = \frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. *Відповідь.* $y' = \frac{x^2}{x^4-a^4}$.

22. $y = \log_{x^2} 2$. *Відповідь.* $y' = -\frac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

III. Знайти похідні другого порядку від функцій:

1. $y=-\dfrac{22}{x+5}$. *Відповідь.* $y''=-\dfrac{44}{(x+5)^3}$.

2. $y=\dfrac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$. *Відповідь.* $y''=\ln x$.

3. $y=-\dfrac{1}{9}x\sin 3x-\dfrac{2}{27}\cos 3x$. *Відповідь.* $y''=x\cdot\sin 3x$.

4. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}$. *Відповідь.* $y''=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

5. $y=xe^{x^2}$. *Відповідь.* $2e^{x^2}\left(3x+2x^3\right)$.

6. $y=\dfrac{1}{1+x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{6x\left(2x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^3}$.

7. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

8. $y=e^{\sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}$.

Питання для самоперевірки

1. Що називають похідною функції в точці?
2. В чому полягає геометричний та фізичний зміст похідної?
3. Чи буде диференційована в точці функція неперервною в цій точці? Чи справедливе обернене твердження?
4. Пригадайте таблицю похідних основних елементарних функцій. Спробуйте за означенням вивести формулу $(e^x)'=e^x$.
5. Сформулюйте і доведіть теореми про похідні суми, добутку та частки двох диференційованих функцій.
6. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну складеної функції.
7. Назвіть випадки, коли доцільно використовувати логарифмічне диференціювання. В чому полягає цей метод?
8. Як знаходити похідну функції, що задана параметрично, неявно?
9. Як використовується диференціал у наближених обчисленнях?
10. Що називається похідною n-го порядку?

Індивідуальні домашні завдання

ВАРІАНТ № 1

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

2. Знайти похідні: $y=3x^2+\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^2}+3$, $y=\sin x\ \cdot arctg\ x$, $y=\dfrac{\cos x}{x-\sqrt[3]{x}}$, $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2+1}}$, $y=\dfrac{1}{3}tg^3x-tgx+x$, $y=\arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$, $y=(1+\ln\sin x)^2$, $y=2^{\frac{1}{\ln x}}$, $y=x\ arctg\sqrt{x}$, $y=e^{\sin x}$, $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $y=ctg\ e^x$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $x^3+arctg(e^y)+y(x-1)=0$; б) $\sin y=x+3y$; в) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=x\cos 2x.$

5. Знайти диференціал функції: $y=\ln\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}.$

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y=x^2-x+1$ в точці з абсцисою $x=-1$.

7. Показати, що функція $y=x\sqrt{1-x^2}$ задовольняє рівняння $yy'=x-2x^3$.

ВАРІАНТ № 2

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=2x-\cos 3x.$

2. Знайти похідні: $y=4x^5-\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{1}{x^3}-\sqrt[3]{3}$, $y=\sqrt{x}\sin x$, $y=\dfrac{tgx}{\sin x-\cos x}$, $y=ctg(2x\sin\dfrac{1}{2})$, $y=arctg\ln(2x+3)$ $y=(\arccos x+\arcsin x)^2$, $y=tg\dfrac{e^x}{x}$, $y=\sin 3x\cos 5x$, $y=\ln(1+\sqrt{x^2-1})$, $y=tg^2 6x-2^x$, $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$, $y=x+e^{\sin x}$, $y=\left(x+5\right)^{\frac{1}{3}e^{-x}}$

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $y\sin x=\cos xy$; б) $x^3+y^2-3axy=0$; в) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=\sqrt{1+x^2}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\arcsin\frac{\ln x}{x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=4x-x^2$ в точці з абсцисою $x=1$.

7. Показати, що функція $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1}$ задовольняє рівняння $\ln x+y^3-3xy^2y'=0$.

ВАРІАНТ № 3

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\sqrt{x^2+3}+4$

2. Знайти похідні: $y=x^{10}-2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{2}$, $y=e^x tgx$, $y=\frac{x^2+x}{\sqrt{x}-1}$, $y=tg\frac{x+1}{2}$, $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, $y=\ln(1-2x)$, $y=\sin 2^x+3^{\sin x}$, $y=\frac{1}{x^2}\ln x$, $y=arctg\ x\cdot\ln x$, $y=e^{-x^2}$, $y=10^{xtgx}$, $y=\sin 3x\cos 5x$, $y=\left(x^3+4\right)^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $e^{x-y}=\frac{x}{y}$; б) $\sin xy=x^2y$; в) $\begin{cases} x=2t^3+t, \\ y=\ln t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=\ln(tg\,x)$.

5. Знайти диференціал функції: $y=arctg\frac{\sin x}{x}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-4x+4$ в точці з абсцисою $x=2$.

7. Показати, що функція $y=\frac{x}{x-1}+x^2$ задовольняє рівняння $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$.

ВАРІАНТ № 4

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

2. Знайти похідні: $y=7x^4-\sqrt[7]{x^2}-\frac{1}{x^4}+\sqrt{7}$, $y=e^x ctgx$, $y=\frac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$, $y=\cos x-\frac{1}{3}\sin 2x$, $y=\frac{x-1}{\ln x}$, $y=x^2e^x$, $y=tg^2 6x-e^{\frac{1}{x}}$, $y=\ln\frac{\sin x}{\cos 2x}$, $y=x\arcsin\frac{2x-1}{5}$, $y=\left(\cos x\right)^{5e^x}$, $y=(e^{-\sqrt{x}}+1)(1+e^{2x})$, $y=\frac{1}{arcctg\ e^x}$, $y=3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{x}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $x^2y=\arcsin yx$; б) $e^{x+y}=xy$; в) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=x^2a^x$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\arcsin 2^{x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2+4x$ в точці з абсцисою $x=-2$.

7. Показати, що функція $y=-\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}$ задовольняє рівняння $1+y^2+xyy'=0$.

ВАРІАНТ № 5

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\sqrt[3]{x^2-1}$.

2. Знайти похідні: $y=8x^3-3\sqrt[5]{x^4}-\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{3}$, $y=xarctgx$, $y=\frac{x}{\sin x}$, $y=tg\sqrt{x}+\frac{1}{ctg(2x-1)}$, $y=\ln\frac{x}{e^x}$, $y=\arcsin\sqrt{x}\cdot\ln x$, $y=x^2 10^{-x+2}$, $y=\arcsin x\cdot 9^{-x}$, $y=ctg\frac{\ln x+1}{2-\ln x}$, $y=(1+\sqrt{1+x})^2$, $y=\cos^3\sqrt{e^x}$, $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{e^x}}$

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $\arcsin\frac{x}{y}-yx=0$; б) $2x^2+x=y^3$; в) $\begin{cases} x=2t-t^3, \\ y=2t^2. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=tg\ln\left(x^3+2\right)$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+4x^2-1$ в точці з абсцисою $x=-1$.

7. Показати, що функція $y=\frac{\sin x}{x}$ задовольняє рівняння $xy'+y=\cos x$.

ВАРІАНТ № 6

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

2. Знайти похідні: $y=x^{10}-3\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[3]{10}$, $y=e^x\arcsin x$, $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$, $y=3\sin(3x-1)$, $y=(1-2\sqrt[3]{x})^2$, $y=\dfrac{1}{4}tg^4x+\dfrac{1}{2}tg^2x$, $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln 2x}$, $y=10^{1-\sin 2x}$, $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y=\sin^2 2x\cos\dfrac{x}{2}$, $y=3^{arctg\,3x}$, $y=\ln\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $y=\left(\arcsin x\right)^{x/2}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $\dfrac{y}{x}=arctg(xy)$; б) $x-3y+e^y=5$; в) $\begin{cases} x=\ln\dfrac{t^2-1}{4}, \\ y=\sin t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=\ln\sin x.$

5. Знайти диференціал функції: $y=\arcsin\sqrt{1-2x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-2x-2$ в точці (0; – 2).

7. Показати, що функція $x^2+y^2-2\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=C$ задовольняє рівняння $x+yy'=\dfrac{xy'-y}{x^2+y^2}$.

ВАРІАНТ № 7

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

2. Знайти похідні: $y=10x^5-\dfrac{1}{4x^4}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\sin x$, $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$, $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, $y=\ln(1-ctgx)$, $y=e^{-x}+10^{\ln x}$, $y=arctg\dfrac{1+x}{1-x}$, $y=\sin^2 3x\cos^3 2x$, $y=\arcsin e^x+\arccos\dfrac{1}{2^x}$, $y=tg3^{\ln x}$, $y=x\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}}$, $y=arctgx^2-\ln\sin x$, $y=\sqrt[x]{\cos 2x}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $xy=\ln\left(e^{x+y}-2\right)$; б) $tg(y-1)=x+y^2$; в) $\begin{cases} x=arctg\,t, \\ y=\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=\frac{x^3}{x-1}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=tg\left(x^3+\sqrt{x}\right)$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=-x^2-2x+1$ в точці (2; –7).

7. Показати, що функція $x=Ce^y-\frac{1}{2}(\sin y+\cos y)$ задовольняє рівняння $y'(x+\sin y)=1$.

ВАРІАНТ № 8

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\frac{2x}{x+3}$.

2. Знайти похідні: $y=7x^5-2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt[3]{x}\cos x$, $y=\frac{\sin x}{\cos x+1}$, $y=\frac{1}{\cos^2 2x}$, $y=(arctgx+x)^2$, $y=tg5x\sin 7x$, $y=\cos^2 2x\sin^2 3x$, $y=(1+\arcsin x)^2$, $y=\frac{10^x+10^{-x}}{2x}$, $y=\ln(x^2-4x)$, $y=ctg(\ln 2x)$, $y=e^{\sin x+\cos x}$, $y=\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{x^3}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $e^x tgy-x^2+y^3=0$; б) $\cos x+e^{4y}=9$; в) $\begin{cases} x=\ln\frac{\sin t-1}{2}, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=\frac{\ln x}{x}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=2^{xtgx}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-x-1$ в точці (1; –1).

7. Показати, що функція $\begin{cases} x=\ln t-\arcsin t+C; \\ y=t-\sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ задовольняє рівняння $y=y'+\sqrt{1-y^2}$.

ВАРІАНТ № 9

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=3\sqrt[3]{x}+4$.

2. Знайти похідні: $y = 3x^{12} + 4\sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{10}$, $y = (\sqrt{x} - 4)\sin x$, $y = \frac{e^x}{arctgx}$, $y = \sin(3x - 5)$, $y = e^{x^2 - 3} tgx$, $y = \ln\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}$, $y = arctg\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = e^x tg\frac{e^x}{\sqrt{x^4 - 1}}$, $y = \sin^2 x^2$, $y = 3^{\ln(x+1)}$, $y = \frac{\arcsin(\ln x)}{\ln(\arcsin x)}$, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $\frac{x}{y} = \arcsin xy$; б) $arctgy = xy$; в) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{t^2 - 5}. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

5. Знайти диференціал функції: $y = \arcsin\frac{x^3}{x^2 + 2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = -x^2 - x + 1$ в точці (–1; 1).

7. Показати, що функція $y = \frac{C - x^4}{4\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$ задовольняє рівняння $\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}} y' + \left(x^3 + 3xy\sqrt{x^2 - 1}\right) = 0$.

ВАРІАНТ № 10

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}$.

2. Знайти похідні: $y = 7x^3 + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{x + \sqrt[3]{5}}$, $y = (x^3 + 1)\sin x$, $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{tgx}{\sin x + 3}$, $y = 2^{x + \sin x}$, $y = \arccos\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, $y = \ln(tg^2 2x)$, $y = e^{-\sqrt{x} + x}$, $y = arctg(e^{x+2})$, $y = \sin^2 x^2$, $y = arctg\sqrt[3]{x^2 - 2}$, $y = x^4 e^{\sqrt{x^2 + 4}}$, $y = (\ln x)^x$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $\ln y = \cos xy - 7$; б) $x^2 y^2 - ctgy + 3 = 0$; в) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y = x\arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\cos(arctg\frac{x}{2})$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-4x+3$ в точці (1; 0).

7. Показати, що функція $\frac{1}{y}\ln x+\frac{1}{2}y^2=C$ задовольняє рівняння $\frac{y}{x}+(y^3-\ln x)y'=0$.

ВАРІАНТ № 11

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

2. Знайти похідні: $y=5x^7+\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{3}$, $y=(\sqrt[3]{x}+1)arctgx$, $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt[5]{x}-x}$, $y=arcctg(4x^2+1)$, $y=\sin^3 x+2\sin x+x^3$, $y=\arcsin\frac{x+1}{x}$, $y=3^{arctg(x^2+1)}+\sqrt{2}$, $y=\cos\ln(x^2+1)$, $y=x\ arc\sin ctg\sqrt{x}$, $y=2^{\sin x}$, $y=\frac{e^x+2e^{-x}}{4}$, $y=tg(\cos x)$, $y=(\arccos 2x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $x^4+y^4=x^2y^2$; б) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

в) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-arctgt. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=x\sin 3x$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\ln\frac{\cos x}{\sqrt{x^2}}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=-x^2-2x+5$ в точці з абсцисою $x=1$.

7. Показати, що функція $\begin{cases} x=2t+3t^2, \\ y=t^2+2t^3; \end{cases}$ задовольняє рівняння $y=y'^2+2y'^3$.

ВАРІАНТ № 12

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=3+\text{ctg}\,2x$.

2. Знайти похідні: $y = 4x^9 - \sqrt[7]{x^3} + \frac{1}{x^4} - \sqrt[7]{2}$, $y = e^x arctgx$, $y = \frac{ctgx}{x - x^3}$, $y = \sin(\frac{x}{x^2 + 1})$, $y = (arctgx + e^x)^2$, $y = \log_2 \frac{x+1}{\sqrt{3}}$, $y = \arcsin(tg^2 x)$, $y - \log_2(x^2 + 4x - 2)$, $y = \ln(3 - \sqrt{x^2 + 1})$, $y = ctg^2 7x + (\sqrt{7})^x$, $y = x^6 \cdot 2^{\sqrt{x}}$, $y = x + 5e^{tgx}$, $y = \left(\frac{x}{a}\right)^{ax}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $2y \ln y = x$; б) $x \ + \ln y - x^2 e^y = 0$; в) $\begin{cases} x = e^{-t} \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$: $y = \sqrt{1 - 3x^2}$.

5. Знайти диференціал функції: $y = \arccos \frac{\ln x}{x^4}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = -x^3 - 3x$ в точці з абсцисою $x = -2$.

7. Показати, що функція $x^2 = \frac{1}{y + Cy^2}$ задовольняє рівняння $y = \left(\frac{1}{2} x^3 y - x\right) y'$.

ВАРІАНТ № 13

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = \sqrt{4x + 1}$.

2. Знайти похідні: $y = 9x^5 - 7\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{x^8} - 2\sqrt[4]{5}$, $y = \sqrt{x} \cos x$, $y = \frac{arctgx}{e^x - \sin x}$, $y = \log_7 \sin x$, $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$, $y = 2^{\log_3 x}$, $y = arctg \frac{3 - x}{x - 2}$, $y = e^{arctgx^2}$, $y = \arcsin \ x \cdot \lg x$, $y = 3^{-x^2}$, $y = 2^{xctgx}$, $y = \sin x \cos 2x$, $y = 3x^{\sqrt[3]{x}}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = x + y$; б) $x^2 \sin y + 2x - y + 1 = 0$;

в) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - \sin t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$: $y = \ln(ctg\, x)$.

5. Знайти диференціал функції: $y = arcctg \frac{\cos x}{x}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 4x - 12$ в точці з абсцисою $x = 1$.

7. Показати, що функція $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$ задовольняє рівняння $x^2 - 3y^2 = -2xyy'$.

ВАРІАНТ № 14

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = \mathrm{tg}\,2x - 5.$

2. Знайти похідні: $y = -7x^3 + 2\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{4}{x^8} - 3\sqrt[3]{4}$, $y = e^x ctgx$, $y = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\arcsin x}$, $y = \log_5(\sqrt[3]{x} + 2x)$, $y = (\sin x + \sqrt[3]{x^2})^2$, $y = \log_2 \sin x$, $y = \sin\dfrac{\ln x}{x}$, $y = e^{\sqrt[4]{2-3x}}$, $y = x\arccos\dfrac{2x+1}{9}$, $y = (\mathrm{tg}\,2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$, $y = (e^{\sqrt{x}} - 2)(1 + e^{3x})$, $y = \dfrac{1}{arctg\ 2^x}$, $y = 2x^3 \arcsin x - (x^3 - 1)\sqrt{x}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $y + x = x^2$; б) $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 + 15y^2 = 0$;
в) $\begin{cases} x = \ln t + \sin t, \\ y = t^2 \cos t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y = x^4 3^x$.

5. Знайти диференціал функції: $y = \arccos 5^{x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x - 1$ в точці з абсцисою $x = 2$.

7. Показати, що функція $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1 + e^x)$ задовольняє рівняння $(1 + e^x)yy' = e^x$.

ВАРІАНТ № 15

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2x.$

2. Знайти похідні: $y = -5x^4 - 3\sqrt[4]{x^5} + \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[5]{6}$, $y = e^x arcctgx$, $y = \dfrac{e^x}{arcctgx}$, $y = \sin(5x^2 + 1)$, $y = \ln(1 + 2\sin x)$, $y = arctg \ln x$,

$y=\arcsin\frac{\sqrt{1-3x}}{x}$, $y=\sin\sqrt{1+x^2}$, $y=3^{-x}\arccos x$, $y=tg\frac{\ln x}{2-x}$,

$y=(1-2\sqrt{1+x})^3$, $y=\sin^4\sqrt{e^x}$, $y=(1+x)^{\frac{3}{x}}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $x=\sin(xy)+arctgy$; б) $y\ arctg\ y-\arcsin x=0$;

в) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=tarcctg\ t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=ctg\ln\left(x^4-1\right)$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=-x^2+2x-3$ в точці з абсцисою $x=1$.

7. Показати, що функція $y=x+Ce^y$ задовольняє рівняння $(x-y+1)y'=1$.

ВАРІАНТ № 16

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

2. Знайти похідні: $y=-3x^6+5\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^7}-\sqrt[5]{6}$, $y=\sin x\log_7 x$,

$y=\frac{tgx}{\sin x-\sqrt[3]{x^2}}$, $y=\cos(\log_6 x)$, $y=\sin x^2+\ln(x^2+4)$, $y=\ln\arcsin x$,

$y=(e^{\cos x}+3)^2$, $y=\log_7(x-\sin 7x)$, $y=x\ arctg\sqrt{x^3}$, $y=2^{\sin x}$, $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$y=arcctg\ e^x$, $y=(\mathrm{ctg}3x)^{x^2}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$; б) $e^{xy}-y^2=0$; в) $\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=a^t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=3x^2\cos 4x$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\ln\frac{tgx}{\sqrt{2}x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x$ в точці з абсцисою $x=-2$.

7. Показати, що функція $y=\dfrac{1}{x\ln Cx}$ задовольняє рівняння $xy'+y=-xy^2$.

ВАРІАНТ № 17

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\dfrac{2}{(x-2)^2}$.

2. Знайти похідні: $y=-6x^8-4\sqrt[9]{x^5}-\dfrac{7}{x^6}+3\sqrt[8]{3}$, $y=\sqrt[5]{x}\log_2 x$, $y=\dfrac{arcctgx}{\log_3 x}$, $y=arcctg\cos x$, $y=\ln(\sin x+2)$, $y=ctg\dfrac{x+3}{3x}$, $y=\ln\sin(2x+5)$, $y=\sin(3-tg^2x)$, $y=\ln(1+\sqrt{x^2+5})$, $y=tg^2 3x-3^x$, $y=x\cdot 7^{\sqrt{x}}$, $y=x-4e^{\sin x}$, $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $y=x^2+arctgy$; б) $y^2+5x=5^x-\sin y$; в) $\begin{cases} x=t^2\cos t, \\ y=t^2\sin t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=\sqrt{8-x^2}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\arcsin\dfrac{e^x}{3x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3-4x-2$ в точці з абсцисою $x=1$.

7. Показати, що функція $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ задовольняє рівняння $(x-y)y'-x-y=0$.

ВАРІАНТ № 18

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\sqrt{x-1}$.

2. Знайти похідні: $y=8x^3-\sqrt[5]{x^6}+\dfrac{6}{x^9}-4\sqrt[9]{5}$, $y=arcctgx\ \log_3 x$, $y=\dfrac{\log_7 x}{x^3+x^2}$, $y=tg\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $y=arctg(e^{2x})+x$, $y=\sin(e^x+2)$, $y=x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$, $y=tge^{2x+1}$, $y=arctg\ 2x\cdot\ln 4x$, $y=e^{-2x^3}$, $y=2^{xtgx}$, $y=tg3x\cos 5x$, $y=x^{\arcsin x}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $x^2+xy-(y+1)^2=0$; б) $\sin(y-x^2)-3=0$;

в) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y = \log_2(\sin x)$.

5. Знайти диференціал функції: $y = \arcsin\dfrac{\ln x}{x}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 2x + 1$ в точці з абсцисою $x = 2$.

7. Показати, що функція $y = \dfrac{x - e^{-x^2}}{2x^2}$ задовольняє рівняння $xy' + 2y = e^{-x^2}$.

ВАРІАНТ № 19

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

2. Знайти похідні: $y = -12x^4 + 2\sqrt[6]{x^7} - \dfrac{3}{x^7} + 7\sqrt[3]{2}$, $y = \sin x \arcsin x$, $y = \dfrac{\sin x}{\ln x + \sqrt{x}}$, $y = \arcsin(x^2 + x)$, $y = \arccos\sqrt{1-3x}$, $y = \sin^4 x + \ln^2 x$, $y = \sin^2 x \; arcctg^2 x$, $y = \arcsin^4(\cos x)$, $y = x^2\cos\dfrac{2x+1}{2}$, $y = (2^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + 3^{2x})$, $y = \dfrac{1}{arctg \; e^x}$, $y = 3x^3 \arcsin 2x + (x^2 + 2)\sqrt{x^3}$, $y = (tgx)^{\frac{1}{x}}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $y - x = \arcsin x - \arcsin y$; б) $x^2 + y^2\ln x - 4 = 0$;

в) $\begin{cases} x = \sin t\cos^2 t, \\ y = -\cos^3 t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y = 2x^2 7^x$.

5. Знайти диференціал функції: $y = arctg 6^{x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 3x - 8$ в точці з абсцисою $x = -1$.

7. Показати, що функція $y = (x^2 + 1)(e^x + c)$ задовольняє рівняння $y' - \dfrac{2xy}{x^2 + 1} = e^x(x^2 + 1)$.

ВАРІАНТ № 20

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = x + \cos 2x$.

2. Знайти похідні: $y = -4x^7 + 3\sqrt[7]{x^3} + \dfrac{4}{x^3} - 2\sqrt[5]{3}$, $y = \arccos x \; ctgx$, $y = \dfrac{x\sqrt{x} + x^2}{x + x^2}$, $y = \log_3 ctgx$, $y = 3^{\arcsin x}$, $y = e^{\sin x + x^2}$, $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $y = \sin^7 e^{2x}$, $y = 3^{-2x}\arcsin x$, $y = tg\dfrac{x}{2 - \ln x}$, $y = 3(1 + \sqrt{1-x})^3$, $y = \cos^3\sqrt{e^{3x}}$, $y = x^{\ln x}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $y\sin x - \cos(x - y) = 0$; б) $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$; в) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Знайти диференціал функції: $y = tg\lg\left(x^3 - 1\right)$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 3x$ в точці з абсцисою $x = -2$.

7. Показати, що функція $x = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$, $y = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$ задовольняє рівняння $yy' - x = 0$.

ВАРІАНТ № 21

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = \sin 3x - x$.

2. Знайти похідні: $y = x^7 - 3\sqrt[4]{x^7} + \dfrac{1}{x^5} - \sqrt[3]{13}$, $y = e^x arctgx$, $y = \dfrac{4^x}{\sin x}$, $y = 3\cos(3x - 1)$, $y = (7 - 2\sqrt[3]{x^2})^6$, $y = \dfrac{1}{5}ctg^5 x + \dfrac{1}{7}ctg^7 x$, $y = \dfrac{3 - \ln 4x}{3 + \ln 6x}$, $y = 14^{1 - \arcsin 6x}$, $y = \arccos\sqrt{1 - 3x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $y = \sin^8 3x \cos\dfrac{x}{7}$, $y = 7^{\arccos 7x}$, $y = \ln\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y = x^{2^x}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $\ln\dfrac{y}{x} = x - \sin y$; б) $x^4 - 3y + 2^y = 6$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t^4}, \\ y = \dfrac{4}{t^2} + \dfrac{1}{3t}. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y = \lg\cos 3x$.

5. Знайти диференціал функції: $y = \arccos\sqrt{1 - 5x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=-x^2-2x+1$ в точці (1; –2).

7. Показати, що функція $x=\dfrac{1+\ln t}{t^2}$, $y=\dfrac{3+2\ln t}{t}$ задовольняє рівняння $yy'=2xy'^2+1$.

ВАРІАНТ № 22

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=3x^2+3x-5$.

2. Знайти похідні: $y=12x^6-\dfrac{2}{3x^3}$, $y=2\cos x(x^2-1)$, $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$, $y=\ln(2+\sin x)$, $y=4^x+10^{-\ln x}$, $y=\arcsin\dfrac{2-x}{2+x}$, $y=\sin^3 2x\cos^2 4x$, $y=arctge^x+arcctg\dfrac{1}{5^x}$, $y=ctg4^{\ln x}$, $y=x^2\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-3}}$, $y=arctgx^3+\ln\cos x$, $y=\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $x+\sqrt{xy}=arctg\dfrac{x}{y}$; б) $\arccos x-4y^2=5$; в) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^{-t}\sin t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=ctg\left(x^4+\sqrt{x^3}\right)$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-3x+3$ в точці (2; 1).

7. Показати, що функція $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t}$ задовольняє рівняння $xy'^3=1+y'$.

ВАРІАНТ № 23

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$.

2. Знайти похідні: $y=7x^8-6\sqrt[4]{x}+7$, $y=\sqrt[5]{x}\sin x$, $y=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$, $y=\dfrac{1}{\cos^3 5x}$, $y=(\arcsin x+x)^5$, $y=arctg4x\sin 8x$, $y=\cos^7 4x\sin^2 8x$,

$y=(3+\arccos x)^7$, $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{x}$, $y=\ln(x^3-5x^2)$, $y=cg(\ln 7x)$, $y=e^{2\sin x+8\cos x}$, $y=x^{e^{2x}}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $\arcsin xy=2^{x+y}-5$; б) $\cos(y+5)=2x+y^3$; в) $\begin{cases} x=\sin t+t, \\ y=\sqrt{t^3+1}. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=4^{x\sin x}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=-x^2+3x-3$ в точці (2; -1).

7. Показати, що функція $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ задовольняє рівняння $(1-x^2)y'-xy=1$.

ВАРІАНТ № 24

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

2. Знайти похідні: $y=4x^{17}+4\sqrt[5]{x^8}-\dfrac{1}{x^9}+\sqrt[4]{19}$, $y=(\sqrt{x^3}-7)tgx$, $y=\dfrac{e^{3x}}{\arcsin x}$, $y=\cos(2x-6)$, $y=e^{x-3}ctgx^2$, $y=\ln\dfrac{\arccos x}{\sqrt{x^2+1}}$, $y=arctg\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[9]{x^8}}$, $y=7^x tg\dfrac{6^x}{\sqrt{x^3-9}}$, $y=\sin^3 x^5$, $y=5^{\ln x-4}$, $y=\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\arccos(\ln x)}$, $y=\log_5(x^4+\sqrt{x+1})$, $y=(\cos x)^{\sin 2x}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $e^x\sin y-x^2y^3=0$; б) $\cos\dfrac{x}{y}+3^{4y}=0$; в) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t}, \\ y=arctgt. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=(1-x^2)\sqrt{x}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=arctg\dfrac{x^5}{x+2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2+6x+5$ в точці (–1; 0).

7. Показати, що функція $y=\ln\dfrac{1}{1+x}$ задовольняє рівняння $xy'+1=e^y$.

ВАРІАНТ № 25

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = \dfrac{1}{x^2}$.

2. Знайти похідні: $y = 3x^7 + \dfrac{1}{3x^4} + \sqrt{2x + \sqrt[3]{5}}$, $y = \cos x(1 + \dfrac{6}{\sqrt{x^3}})$, $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$, $y = \dfrac{\sin x - 6}{ctgx}$, $y = 4^{x + \cos x}$, $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$, $y = \ln(tg^3 4x)$, $y = 2^{-\sqrt{x^3} + 5x}$, $y = arcctg(e^{4-x})$, $y = \cos^7 x^5$, $y = arctg\sqrt[4]{x^5 - 7}$, $y = e^{\sqrt{x+2}} \arccos x^4$, $y = x^{x^2}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $\arccos\dfrac{x}{y} = x + 4y$; б) $xtgy = x + y^2$; в) $\begin{cases} x = \ln^3 t, \\ y = \sin(t+1). \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y = x\arccos x + \sqrt{1 - x^2}$.

5. Знайти диференціал функції: $y = arctg\sqrt[3]{1 + 5x^2}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = -x^2 + 4x - 1$ в точці (0; -1).

7. Показати, що функція $y = ae^{-\sin x} + \sin x - 1$ задовольняє рівняння $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

ВАРІАНТ № 26

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = \sqrt{x}$.

2. Знайти похідні: $y = x^{15} - 3\sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{x^5} - \sqrt{34}$, $y = 2^x arctg 4x$, $y = \dfrac{\sin x}{\log_4 x}$, $y = 2\cos(4x - 1)$, $y = (7 - 3\sqrt[8]{x^7})^4$, $y = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$, $y = \dfrac{\ln 7x}{\ln x + 3x}$, $y = 7^{1 - \cos 4x}$, $y = arctg\sqrt{1 + x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $y = \sin^5 7x \cos^6 \dfrac{x}{8}$, $y = 5^{\arcsin 3x}$, $y = \ln\dfrac{2^x - 3x}{6}$, $y = (2 - 4x^2)^{\cos 2x}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $xarctgy = xy + 2$; б) $x^4 + y^4 = e^{x+y}$; в) $\begin{cases} x = \ln(\cos t + 1), \\ y = \sin t + t. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y = \sin\ln x.$

5. Знайти диференціал функції: $y=\sin(arcctg\frac{x}{3})$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-8x+15$ в точці (2; 3).

7. Показати, що функція $xy-\ln y=1$ задовольняє рівняння $y^2+(xy-1)y'=0$.

ВАРІАНТ № 27

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=5(\text{tg}\,x-x)$.

2. Знайти похідні: $y=7x^5-\frac{1}{2x}+\sqrt{3}$, $y=5^x(1-\frac{6}{\sqrt[13]{x^8}})$, $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$, $y=\frac{\cos x}{4-tgx}$, $y=\ln(2+\sin x)$, $y=e^{-2x}+5^{\ln x}$, $y=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$, $y=\cos^2 5x\sin^3 2x$, $y=arctge^x+\arccos\frac{1}{5^x}$, $y=ctg5^{\ln x}$, $y=\sqrt{\frac{x-4}{x-1}tgx}$, $y=arctg2x^3-\cos\ln x$, $y=(3+x^2)^{\sqrt{x}}$.

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $\frac{y}{x}=e^{xy}+\cos y$; б) $2^x+2^y=2^{x+y}$; в) $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y=\frac{x^2+6}{tgx}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\ln\left(x^3+\sqrt[4]{x}\right)$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=-x^2+8x-13$ в точці (1; -6).

7. Показати, що функція $\begin{cases} x=2t+3t^2, \\ y=t^2+2t^3; \end{cases}$ задовольняє рівняння $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

ВАРІАНТ № 28

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=\sqrt[3]{x^2}$.

2. Знайти похідні: $y=5x^7-3\sqrt[5]{x}+\sqrt{7}$, $y=\sqrt[3]{x^2}\,tgx$, $y=\frac{\sin x+3}{\cos x}$, $y=\frac{1}{\ln^2 2x}$, $y=(\cos x+x)^5$, $y=arctg5x\cos 4x$, $y=\sin^7 2x\cos^2 6x$,

$y=(3+\arccos x)^4$, $y=\dfrac{8^x}{3x+8^{-x}}$, $y=\arcsin(x^3-6x)$, $y=\ln(tg3x)$,
$y=7^{\cos x-3\sin x}$, $y=(\arccos 3x)^{1+\sqrt[5]{x}}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $\log_2\dfrac{x}{y}=\sin\left(x^2+y^3\right)$; б) $ctgy+x^2=9$; в) $\begin{cases} x=arcctgt, \\ y=\ln(1+t^2). \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=\dfrac{\arcsin x}{2x}$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\arccos\sqrt[3]{x^2+6x}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-5x+6$ в точці (2; 0).

7. Показати, що функція $y=\dfrac{1}{1+x+\ln x}$ задовольняє рівняння $xy'=y(y\ln x-1)$.

ВАРІАНТ № 29

1. Знайти похідну функції за означенням: $y=-\mathrm{ctg}\,x-x.$

2. Знайти похідні: $y=7x^{19}+2\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{1}{x^7}+\sqrt[5]{16}$, $y=(\sqrt{x}-4)\cos x$,
$y=\dfrac{\sin e^x}{\sqrt[3]{x}}$, $y=arctg(5x-8)$, $y=e^{x^4-7}\arccos x$, $y=\ln\dfrac{\sqrt{\sin x}}{x^2}$, $y=tg\sqrt{x^3}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$,
$y=2^x arctg\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x^3-1}}$, $y=\cos^7 3x^5$, $y=2^{\log_2 x+3}$, $y=\dfrac{\arcsin(\ln 9x)}{\sqrt{x+\sin x}}$,
$y=\ln(7x+\sqrt{x^3-1})$, $y=(3tg2x)^{2+\sqrt{x}}$.

3. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$: а) $e^x\sin y+e^y\cos x=5$; б) $ctg(y+6)=x^5+2y^2$;
в) $\begin{cases} x=tg\,t+1, \\ y=\sin^2(t-4). \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $y=xarctgx+4$.

5. Знайти диференціал функції: $y=\sqrt{\cos\left(\ln x\right)}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=-x^2+5x-7$ в точці (3; –1).

7. Показати, що функція $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ задовольняє рівняння $xy'=(1-x^2)y$.

ВАРІАНТ № 30

1. Знайти похідну функції за означенням: $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

2. Знайти похідні: $y = x^7 + \frac{1}{9x^3} + \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{5}}$, $y = (\frac{1}{\sqrt{x}} + 2)tgx$, $y = \frac{\sqrt[5]{5x}}{\sin\sqrt{x}}$,

$y = \frac{\cos x - 3}{\sin 8x}$, $y = 7^{x + ctgx}$, $y = arctg\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}$, $y = \log_2(tg^4 7x)$, $y = e^{\sqrt{x} + \arcsin x}$,

$y = \arccos(e^{\sqrt{x-9}})$, $y = \ln^6 x^6$, $y = \arcsin\sqrt[7]{x^2 + 5}$, $y = \frac{tg\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$, $y = (\sin 5x)^{\sqrt{x}}$,

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$: а) $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{y^3} = \sqrt[4]{4}$; б) $\arccos^2 xy + \sin y = 1$;

в) $\begin{cases} x = ctgt, \\ y = t\cos t + \sin t. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $y = \sqrt{x+1}\ln(x+1)$.

5. Знайти диференціал функції: $y = arctg\frac{x}{x^2 + 5}$.

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 2x - 5$ в точці (3; –2).

7. Показати, що функція $y = xe^{-x}$ задовольняє рівняння $xy' = (1 - x)y$.

Практичне заняття № 2

Основні теореми диференціального числення. Застосування похідної

Мета: закріпити теоретичні знання з теми «Основні теореми диференціального числення. Дослідження функції за допомогою похідної», набути навички і вміння знаходити інтервали монотонності, екстремуми функції, проміжки опуклості графіка функції, точки перегину.

Питання для самопідготовки:

– основні теореми диференціального числення, їх геометричний зміст;
– поняття зростаючої, спадної функції;
– дослідження функції на зростання (спадання);
– екстремум функції. Дослідження функції на екстремум;

– опуклість і вгнутість функції. Точки перегину. Дослідження функції на опуклість, вгнутість;
– найбільше і найменше значення функції на відрізку.

План практичного заняття

1. Основні теореми диференціального числення.
2. Розв'язування вправ на знаходження інтервалів монотонності і екстремумів функції.
3. Застосування похідної до дослідження функції на опуклість (вгнутість).
4. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.

Теоретичний довідник

Точка *c* ***називається точкою зростання функції*** $f(x)$, якщо для всіх досить малих додатних значень h маємо: $f(c-h)<f(c)<f(c+h).$ Вона називається точкою спадання, якщо $f(c-h)>f(c)>f(c+h).$

Теорема. Якщо функція $f(x)$ диференційована при $x=c$ і якщо похідна $f'(c)\neq 0,$ то при $f'(c)>0$ точка є точкою зростання функції $f(x)$, а при $f'(c)<0$ точка є точкою спадання.

Точка c називається ***екстремальною точкою типу максимуму*** для $f(x)$, якщо для всіх досить малих $h>0$ маємо $f(c-h)\leq f(c)$ і $f(c+h)\leq f(c).$ Точка c називається екстремальною точкою типу мінімуму для $f(x)$, якщо для всіх досить малих $h>0$ маємо $f(c-h)\geq f(c)$ і $f(c+h)\geq f(c).$

Теорема Ферма. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і приймає в деякій точці $x=c\in(a,b)$ найбільше або найменше значення. Тоді якщо в точці $x=c$ існує похідна цієї функції, вона дорівнює нулю.

Геометричне тлумачення теореми: в екстремальних точках дотичні до кривої паралельні осі Ox.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$, має рівні значення $f(a)=f(b)$ на кінцях цього сегмента і притому диференційована в усіх внутрішніх точках сегмента, тобто в інтервалі (a,b), то в цьому інтервалі існує принаймні одне значення $x=c,$ для якого похідна $f'(c)=0.$

Геометричне тлумачення теореми полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє умови теореми, існує хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна осі Ox.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$ і диференційована в кожній точці інтервалу (a,b), то між a і b існує принаймні одне середнє значення c таке, що $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ або $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (формула Лагранжа).

Геометричне тлумачення теореми Лагранжа полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє на певному інтервалі умови теореми, існує хоча б одна така точка, в якій дотична до графіка функції паралельна січній, що проходить через крайні точки графіка функції на цьому інтервалі.

Теорема Коші (про середнє). Якщо дві функції $f(t)$ та $g(t)$ неперервні на сегменті $[a,b]$ та диференційовані в інтервалі (a,b), причому $g'(t)\neq 0$ в кожній точці інтервалу (a,b), то знайдеться принаймні одна точка c, $a<c<b$, така, що $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Теореми Ролля, Лагранжа і Коші мають спільну назву: диференціальні теореми про середнє значення.

Правило Лопіталя. Границя відношень двох нескінченно малих функцій, або двох нескінченно великих функцій дорівнює границі відношень їх похідних (скінченної або нескінченної), якщо така існує. Тобто: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{u'(x)}{v'(x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)}$.

Зростання і спадання функції

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$, що диференційована на відрізку $[a,b]$, зростає на цьому відрізку, то її похідна $f'(x)$ для всіх $x\in(a,b)$ невід'ємна, тобто $f'(x)\geq 0$.

Якщо функція $y=f(x)$, неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційована на проміжку (a,b), причому $f'(x)>0$ для всіх $a<x<b$, то функція $y=f(x)$ зростає на відрізку $[a,b]$.

Теорема 2. Якщо функція $y=f(x)$ спадає на відрізку $[a,b]$, то її похідна $f'(x)\leq 0$.

Якщо похідна $f'(x)$ функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$ від'ємна, тобто $f'(x)<0$, то на відрізку $[a,b]$ функція спадає.

Мінімум і максимум функції

Функція $y=f(x)$ у точці x_0 має ***локальний максимум***, якщо значення функції $f(x)$ у точці x_0 перевищує її значення в усіх точках деякого інтервалу, що містить точку x_0.

Функція $y = f(x)$ у точці x_0 має ***локальний мінімум***, при $x = x_0$, якщо $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ для всіх Δx, достатньо малих за абсолютною величиною.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають ***стаціонарними***. Стаціонарні точки, а також точки, де функція визначена, але її похідна не існує, називаються ***критичними***. Максимуми і мінімуми функції називають екстремумами функції, або екстремальними значеннями функції, а точки, в яких ці значення досягаються – точками екстремуму функції.

Теорема 1 ***(необхідна умова існування екстремуму функції).*** Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має у точці $x = x_0$ екстремум, то в цій точці похідна функції перетворюється на нуль, тобто $f^{'}(x_0) = 0$.

Теорема 2 ***(достатня умова існування екстремуму функції).*** Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, який містить критичну точку x_0, і диференційована в усіх точках цього інтервалу (окрім, можливо, точки x_0). Якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з «–» на «+», то в точці x_0 функція має мінімум, а якщо з «+» на «–», то в точці x_0 функція має максимум.

Якщо при дослідженні функції постає питання щодо найбільшого та найменшого значень функції на відрізку, то потрібно діяти за таким алгоритмом: 1) відшукати критичні точки функції і значення функції в них; 2) знайти значення функції на кінцях відрізка; 3) серед значень функції, одержаних в п.1 і 2, вибрати найбільше і найменше, які будуть відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції на відрізку.

Опуклість функції, точки перегину

Графік функції $y = f(x)$ має ***опуклість вгору*** на інтервалі $(a;b)$, якщо всі точки графіка розміщені нижче будь-якої дотичної на цьому інтервалі. У такому разі криву називають опуклою.

Графік функції $y = f(x)$ має ***опуклість вниз*** на інтервалі $(a;b)$, якщо всі точки графіка розміщені над будь-якою дотичною на цьому інтервалі. У такому разі криву називають опуклою вниз.

Точку з області визначення функції, в якій змінюється характер опуклості, називають ***точкою перегину***.

Теорема 1. Якщо в усіх точках інтервалу $(a;b)$ друга похідна функції $f(x)$ від'ємна, тобто $f^{''}(x) < 0$, то крива $y = f(x)$ на цьому інтервалі має опуклість вгору (крива опукла); якщо $f^{''}(x) > 0$, то крива має опуклість вниз (крива угнута).

Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ у деякій точці $x = x_0$ виконується рівність $f^{''}(x_0) = 0$ або $f^{''}(x_0)$ не існує і при перебігу через точку $x = x_0$ друга похідна $f^{''}(x)$ змінює знак, то точка з абсцисою $x = x_0$ є точкою перегину функції $y = f(x)$.

Асимптоти функції

Пряму a називають ***асимптотою кривої***, якщо відстань від довільної точки М кривої до прямої a при необмеженому віддаленні точки М у нескінченність прямує до нуля.

Розрізняють вертикальні та похилі асимптоти. Вертикальні асимптоти паралельні осі ординат, похилі – не паралельні.

Пряма $x = a$ є ***вертикальною асимптотою*** для функції $y = f(x)$, якщо виконується хоча б одна з умов: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Пряму $y = kx + b$ називають ***похилою асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty(-\infty)$, якщо

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \quad (\lim_{x \to -\infty}(f(x) - kx - b) = 0).$$

Теорема. Для того, щоб пряма $y = kx + b$ була похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty(-\infty)$, необхідно і достатньо, щоб існували границі:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty}(f(x) - kx) = b,$$

$$(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to -\infty}(f(x) - kx) = b).$$

Загальна схема дослідження функції і побудови графіка

1. Область визначення функції.
2. Точки розриву функції, перетин з осями.
3. Перевіряємо функцію на періодичність, парність, непарність.
4. Інтервали монотонності функції.
5. Екстремуми функції.
6. Опуклість функції.
7. Асимптоти графіка функції.
8. Схематична побудова графіка.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Функція $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на кінцях відрізка [0; 4] приймає рівні значення $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. Чи справедлива для цієї функції теорема Ролля на відрізку [0, 4]?

Розв'язування

Знайдемо $f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)' = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$. При $x = 2$, $f'(2)$ не існує. Порушена друга умова теореми Ролля.

Приклад 2. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа для функції $f(x)=x-x^3$ на відрізку $[-2;1]$ і знайти відповідне проміжне значення *c*.

Розв'язування

Функція $f(x)=x-x^3$ неперервна і диференційована для всіх значень x, причому $f'(x)=1-3x^2$. Звідси за формулами Лагранжа маємо:

$f(1)-f(-2)=f'(c)\left[1-(-2)\right]$,

$0-6=f'(c)\cdot 3$,

$f'(c)=-2.$

Відповідно, $1-3c^2=-2$ і $c=\pm 1$; підходить тільки значення $c=-1$, для якого справедлива нерівність $-2<c<1$.

Приклад 3. Перевірити справедливість формули Коші для функцій $f(x)=x^3$ *і* $\phi(x)=x^2+1$ на відрізку [1; 2].

Розв'язування

Функції $f(x)$ і $\phi(x)$ неперервні і диференційовані при всіх значеннях x. Похідні даних функцій рівні відповідно $f'(x)=3x^2$ і $\phi'(x)=2x$. На відрізку [1, -2], $\phi'(x)\neq 0; \phi(1)=2, \phi(2)=5, f(1)=1, f(2)=8$.

Тоді між двома значеннями $a=1$і $b=2$ існує значення $x=c$, яке задовольняє рівність $\dfrac{f(2)-f(1)}{\phi(2)-\phi(1)}=\dfrac{f'(c)}{\phi'(c)}$,

$\dfrac{8-1}{5-2}=\dfrac{3c^2}{2c},\ \dfrac{7}{3}=\dfrac{3c}{2},\ c\neq 0, c=\dfrac{14}{9}.$

Приклад 4. Дослідити функцію та побудувати її графік $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Розв'язування

1) Знайти область визначення функції:

$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – область визначення функції.

2) Знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями:

$y=0\Rightarrow x=-\sqrt[3]{4}\quad A\left(-\sqrt[3]{4};0\right)$ – точка перетину графіка функції з віссю Ox. Вісь Oy графік функції не перетинає.

3) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність

Оскільки $y(-x)=\dfrac{(-x)^3+4}{(-x)^2}=\dfrac{-x^3+4}{x^2}$, то функція ні парна, ні непарна.

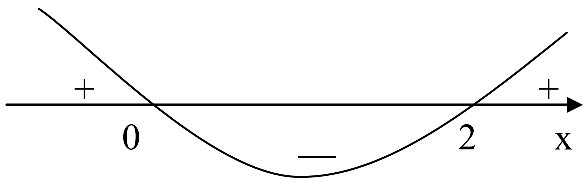
Функція неперіодична.

4) Знайти точки розриву та дослідити їх

Функція в точці $x=0$ має розрив другого роду

5) Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках

Похідна $y'=\dfrac{3x^2x^2-\left(x^3+4\right)2x}{x^4}=\dfrac{x^4-8x}{x^4}$ дорівнює нулю при $x=2$ і не існує в точці $x=0$. Але $x=0$ не входить до області визначення, тому функція має одну критичну точку $x=2$.



На інтервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ – функція зростає; на інтервалі $(0;2)$ – функція спадає. В точці $x=2$ функція має мінімум: $y_{\min}=f(2)=3$.

6) Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину

Похідна $y''=\dfrac{\left(4x^3-8\right)x^4-\left(x^4-8x\right)4x^3}{x^8}=\dfrac{24x^4}{x^8}=\dfrac{24}{x^4}$ не існує при $x=0$.

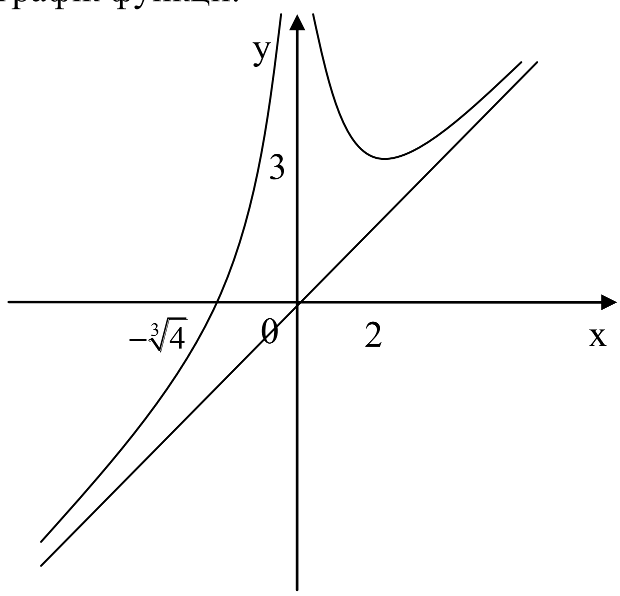
7) Знайти асимптоти кривої:

$y=kx+b$, де $\quad k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right),$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1,\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Отже, функція має похилу асимптоту $y=x$.

8) Побудувати графік функції.



Приклад 5. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку: $y = 108x - x^4$; $\left[-1;4\right]$.

Розв'язування

Знайдемо похідну функції і критичні точки з умови: $y' = 0$.

$$y' = 108 - 4x^3;\quad 108 - 4x^3 = 0$$

$$4x^3 = 108$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

Знайдемо значення функції на кінцях відрізку та у критичних точках:

$$f(-1) = -109;\quad f(4) = 176;\quad f(3) = 243;$$

таким чином, $\max\limits_{[-1;4]} f(x) = f(3) = 243$ та $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = f(-1) = -109$.

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

Розв'язування

1. Функція не існує в точках $x = \pm 1$. Тому область визначення функції: $D\left(x\right) = \left\{x \middle| x \in \left(-\infty;-1\right) \cup \left(-1;1\right) \cup \left(1;+\infty\right)\right\}$.

2. Функція непарна, оскільки $y\left(-x\right) = \dfrac{-x^3}{1-\left(-x\right)^2} = \dfrac{-x^3}{1-x^2} = -y\left(x\right)$. З огляду на непарність функції достатньо побудувати її графік лише при $x \ge 0$.

Функція неперіодична.

3. Точки перетину з осями координат:

з віссю *Ox*: $y = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

(0; 0) – точка перетину з віссю *Ox*.

з віссю *Oy*: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0^3}{1-0^2} = 0.$

(0; 0) – точка перетину з віссю *Oy*.

4. Функція невизначена в точці $x = \pm 1$, тому ці точки є «підозрілими» на розрив. Знайдемо односторонні границі в точці $x = \pm 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 \\ x < 1 \\ 1-x^2 \to 0+ \\ \dfrac{x^3}{1-x^2} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty;\quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 \\ x > 1 \\ 1-x^2 \to 0- \\ \dfrac{x^3}{1-x^2} \to -\infty \end{array} \right| = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to -1-0 \\ x<-1 \\ 1-x^2\to 0- \\ \dfrac{x^3}{1-x^2}\to +\infty \end{array}\right|=+\infty;\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=\left|\begin{array}{l} x\to -1+0 \\ x>-1 \\ 1-x^2\to 0+ \\ \dfrac{x^3}{1-x^2}\to -\infty \end{array}\right|=-\infty.$$

Точки $x=\pm 1$ – точки розриву другого роду.

$D(x)=\{x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)\}$ – область неперервності функції.

5. Знаходимо асимптоти функції. Насамперед з'ясовуємо, що прямі $x=\pm 1$ – вертикальні асимптоти. (Це випливає з означення вертикальних асимптот та п. 4.)

Шукаємо похилу асимптоту $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} y/x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{\left(1-x^2\right)x}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+3\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

Отже, $y=-x$ – похила асимптота.

6. В п. 4 знайдені односторонні границі функції в точках $x=\pm 1$. Залишилось знайти границі функції, коли $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty.$$

7. Знайдемо першу похідну від функції y (вона існує на $D(x)$):

$$y'=\frac{3x^2\left(1-x^2\right)-x^3(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

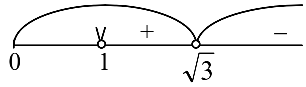
8. Дослідимо функцію на монотонність і знайдемо точки екстремуму. Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо першу похідну до нуля:

$y'=0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x^2-x^4=0,$

$x^2\left(3-x^2\right)=0$

$x_{1,2}=0, \qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$

Зважаючи на зауваження п. 2, розглядатимемо дослідження функції при $x\ge 0$.



$y'>0$, коли $x\in(0;1)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$,

$y'<0$, коли $x\in\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Тому $x_{\max} = \sqrt{3}$ – точка максимуму, $x_{\min} = -\sqrt{3}$ – точка мінімуму.

$$f\left(x_{\max}\right) = f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$f\left(x_{\min}\right) = f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

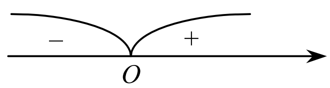
9. Знайдемо другу похідну функції y:

$$y'' = \left(\frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(3x^2-x^4\right)'\left(1-x^2\right)^2-\left(3x^2-x^4\right)\cdot 2\left(1-x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(6x-4x^3\right)\left(1-x^2\right)^2+4x\left(1-x^2\right)\left(3x^2-x^4\right)}{\left(1-x^2\right)^4} = \frac{2x\left(3-2x^2\right)\left(1-x^2\right)+4x\left(3x^2-x^4\right)}{\left(1-x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{2x\left(3-2x^2-3x^2+2x^4+6x^2-2x^4\right)}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

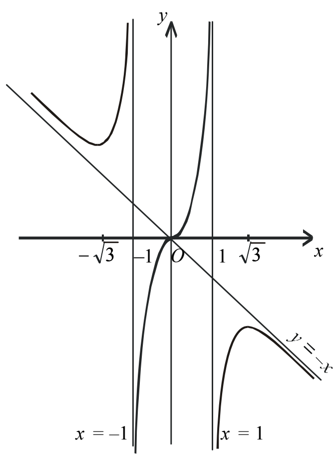
Точка $x = 0$ може бути точкою перегину, бо $y''(0) = 0$. Перевіримо це за критерієм. Визначимо знак y'' в околі точки $x = 0$.



Друга похідна змінює в точці $x = 0$ свій знак, тому функція $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ має точку перегину $x = 0$, на проміжку (0; 1) функція опукла, $(1, +\infty)$ – функція вгнута.

10. Найбільше та найменше значення функції не існують.

11. Побудуємо графік функції, враховуючи дослідження.



Приклад 7. Дослідити та побудувати графік функції: $\begin{cases} y = 1 - \cos t \\ x = t - \sin t. \end{cases}$

Розв'язування

Зауважимо, що в разі заміни t на $t + 2\pi$ змінна x набуває приросту 2π:

$$\begin{cases} y\left(t + 2\pi\right) = y\left(t\right); \\ x\left(t + 2\pi\right) = t + 2\pi - \sin t = x\left(t\right) + 2\pi. \end{cases}$$

Тому достатньо побудувати частину графіка при $t \in \left[0; 2\pi\right]$. Решту графіка дістаємо, перенісши вісь x.

1. При скінченних значеннях t значення x, y обмеженні. Оскільки величина y завжди обмежена, то вертикальних асимптот немає. Відшукуємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1 - \cos t}{t - \sin t} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y - kx\right) = \lim_{t \to \pm\infty} \left(1 - \cos t\right) \text{ не існує;}$$

похилих асимптот також немає.

2. Знайдемо проміжки додатності та від'ємності функцій.

$$y = 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} \geq 0, \; t \in \left[0; 2\pi\right).$$

3. Знайдемо проміжки зростання та спадання функцій. Знайдемо критичну точку.

$$y'_x = \frac{d\left(1 - \cos t\right)}{d\left(t - \sin t\right)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Якщо $t = 0$, $t = 2\pi$, то $\sin\left(t / 2\right) = 0$.

Отже, y'_x при $t = 0$, $t = 2\pi$ не існує.

При $t = \pi \Rightarrow \cos\left(t / 2\right) = 0$. Отже, $y'_x = 0$ при $t = \pi$.

Визначаємо характер критичних точок.

У загальному випадку зі зростанням параметра t функція x зростає:

у точці $t = 0$ при $t < 0 \Rightarrow y'_x < 0$ і при $t > 0 \Rightarrow y' > 0$, отже, у точці $t = 0$ – маємо min;

у точці $t = \pi$ при $t < \pi \Rightarrow y'_x > 0$ при $t > \pi \Rightarrow y'_x < 0$, отже, у точці $t = \pi$ – маємо max;

у точці $t=2\pi$ при $t<2\pi \Rightarrow y'_x<0$ при $t>2\pi \Rightarrow y'_x<0$, отже, у точці $t=2\pi$ – маємо min;

у точках $t=0$, $t>2\pi$ маємо вертикальну дотичну, а в точці $t=\pi$ – горизонтальну.

4. Обчислюємо екстремальні значення функції:

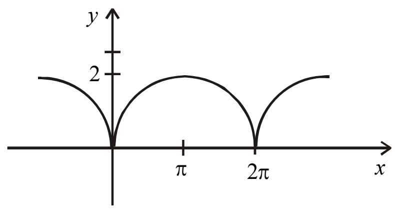
$$t=0 \qquad y=0 \qquad x=0;$$
$$t=\pi \qquad y=2 \qquad x=\pi;$$
$$t=2\pi \qquad y=0 \qquad x=2\pi.$$

5. Знаходимо проміжки опуклості та вгнутості.

Обчислюємо другу похідну:

$$y''_x=\frac{d\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}}{d\left(t-\sin t\right)}=\frac{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{t}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\cos t}=-\frac{1}{4\sin^4\dfrac{t}{2}}<0.$$

Похідна скрізь від’ємна, крива вгнута.



6. Дістали графік функції.

Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити функції та побувати їх графік:

а) $f(x)=x^4-x^2$; б) $f(x)=x^2-x^3$; в) $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}$; г) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$,

д) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; е) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; є) $y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$; ж) $y=\ln\left(x^2+1\right)$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати теорему Ферма та дати її геометричне тлумачення.
2. Сформулювати теорему Ролля та дати її геометричне тлумачення.
3. Сформулювати теорему Лагранжа та дати її геометричне тлумачення.
4. Сформулювати теорему Коші.
5. У чому полягає геометричний зміст диференціала?

6. Які ознаки зростання та спадання функції?
7. Які значення аргументу називаються критичними?
8. Що називається екстремумом функції? Як знайти максимуми і мінімуми функції? Сформулюйте два правила.
9. Як визначається найбільше і найменше значення функції на відрізку? Чи завжди вони існують?
10. Як знаходяться інтервали опуклості й угнутості графіка функції?
11. Як знаходяться асимптоти графіка функції?
12. З яких основних пунктів складається загальна схема дослідження функції і побудови її графіка?
13. Як скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в точці?
14. Як обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в даній точці?

Інтерактивне практичне заняття № 3 «Практичні задачі на екстремум»

Мета заняття: освітня – формування практичних умінь самостійно застосовувати отримані знання під час розв’язування нестандартних завдань, умінь складання цільових функцій, перевірити уміння знаходження екстремуму; розвиваюча – розвивати мовлення, пам’ять, увагу, активність і самостійність студентів, прищепити способи пізнавальної діяльності; виховна – сприяти формуванню наукового світогляду.

Це заняття передбачає ігрову ситуацію в залежності від факультету. В одній із областей України протягом двох днів випала місячна норма опадів, які супроводжувалися сильними шквалами вітру. В результаті чого зруйноване сполучення між окремими населеними пунктами, затоплена велика кількість будівель, мостів, житлових масивів, без електроенергії залишились тисячі людей. Від нашої області прибула група будівельників-ремонтників (зі студентів даної групи) для відновлення робіт. Прораб (студент) ділить групу на дві будівельні бригади.

Між двома населеними пунктами A і C необхідно відновити сполучення за допомогою шосейної дороги. Для цього перша бригада повинна визначити, в якому місці P потрібно розпочати будівництво, щоб якомога дешевше доставляти вантаж із пункту A в C. Відомо, що вартість залізничного перевезення вантажу на 1 км (AB) рівна k_1 грн, а автомобільною (PC) – k_2 грн $\left(k_1 < k_2\right)$, $|AB| = a$, $|BC| = b$. (Відповідь: на відстані $a - \dfrac{k_1 b}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}$ від точки A).

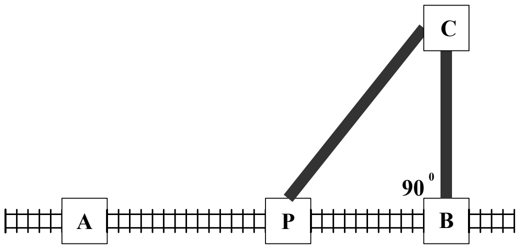


Рисунок 1 – Ескіз умови задачі

Але є деяка проблема, що заважає початку будівництва, а саме: територія між пунктами A і C болотиста і перш, ніж почати будівельні роботи, необхідно осушити болота. Саме тому друга бригада повинна для осушення боліт вирити відкритий канал, поперечний переріз якого – рівнобічна трапеція. Канал повинен бути побудований так, щоб під час руху води втрати на тертя були б найменшими. Визначити величину кута укосу α, при якому ці втрати будуть найменшими, якщо площа поперечного перерізу каналу S, а глибина h (Відповідь: $\alpha = \pi / 6$).

В кінці заняття викладач виставляє кожній бригаді зароблену кількість балів, враховуючи швидкість виконання завдання, правильність та теоретичне обґрунтування. Проведене таким чином практичне заняття знайомить студентів з прикладними та виробничими задачами диференціального числення, вчить застосовувати отримані знання в суто професійній ситуації, самостійно приймати рішення.

Під час проведення ігрових занять у студентів відпрацьовується уміння зосередитися, мислити самостійно, розвивати увагу і прагнення до знань. Захопившись, студент не відчуває, що вчиться, – він пізнає, запам'ятовує нове, орієнтується у надзвичайній ситуації. Дидактичні ігри важливі для виховання активності студентів.

Результативність: формування професійної спрямованості, вмінь раціонально використовувати свій час у процесі розв'язування завдань, обґрунтовування тверджень, звички до самоперевірки.

Індивідуальні домашні завдання

ВАРІАНТ № 1

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку: $y = \dfrac{x+6}{x^2+13}$; $[-5;5]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y = \frac{x}{(x-1)^2};\; y = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x};\; y = arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

ВАРІАНТ № 2

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x}{2}+\cos x;\ \left[0;\pi\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^3+16}{x};\ y=x^4\cdot\ln\frac{1}{x};\ y=x\cdot arctgx.$$

ВАРІАНТ № 3

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x-3}{x^2+16};\ \left[-5;10\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^3-1}{4x^2};\ y=x^2\cdot\ln x;\ y=\frac{1}{2}x+arctgx.$$

ВАРІАНТ № 4

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x+3}{x^2+7};\ \left[-3;7\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x-1}{x^2-2x};\ y=\left(x+\lambda\right)\cdot e^{-\lambda x},\lambda<0;\ y=x-\sin 2x.$$

ВАРІАНТ № 5

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x}{2}-\sin x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\pi\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2};\ y=8x^2\cdot e^{-x^2};\ y=x-arctg2x.$$

ВАРІАНТ № 6

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x}{x^2+16};\ \left[-3;7\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^2+1}{x};\ y=x\cdot e^{-\frac{1}{x}};\ \ y=\sin^4 x-\cos^4 x.$$

ВАРІАНТ № 7

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x}{\sqrt{2}}-\cos x;\left[-\pi;\pi\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2};\ y=(x+2)\cdot e^{-2x};\ y=\frac{\sin 2x}{\sin x}.$$

ВАРІАНТ № 8

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку: $y=\frac{x-4}{x^2+6}; [-4;6].$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{4x^2}{x^3-1};\ y=\left(1-x^2\right)\cdot e^{-x};\ y=\ln\sin x.$$

ВАРІАНТ № 9

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\cos x; [-\pi;\pi].$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x}{3+x^2};\ y=\frac{e^{x+1}}{x+2};\ y=\sin x-\ln\sin x.$$

ВАРІАНТ № 10

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\cos x-\frac{x}{\sqrt{2}};\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{2x}{1+x^2};\ y=x^2\cdot e^{-x^2};\ y=\cos 3x+3\cos x.$$

ВАРІАНТ № 11

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку: $y=3x+x^3-1-3x^2$; $[-1;2]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^3+3}{x};\ y=\ln(x^3-3x^2+4);\ y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x.$$

ВАРІАНТ № 12

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку: $y=x^2e^{-x}+\sqrt{3}$; $[-1;4]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^2+4}{x};\ y=x^2\cdot e^{-x};\ y=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x.$$

ВАРІАНТ № 13

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$y = \frac{1}{2} + x^5 - \frac{5}{3}x^3$; $[0;2]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$; $y = e^{\frac{1}{x}} - x$; $y = e^{\cos x}$.

ВАРІАНТ № 14

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$y = \frac{x^2}{1 + x} - \sqrt{2}$; $[-\frac{1}{2};4]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$y = \frac{x}{x^2 + 5}$; $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; $y = \arccos\frac{1}{x}$.

ВАРІАНТ № 15

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$y = 2x^2 - \ln x + \frac{1}{2}$; $[\frac{1}{4};1]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$y = \frac{2x - 8}{(x - 3)^3}$; $y = \ln^2 x$; $y = \arccos\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

ВАРІАНТ № 16

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$y = 1 - 2x^2 + x^4$; $[-2;0]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$y = \frac{2x}{(x - 2)^2}$; $y = \frac{1}{\ln(x - 1)}$; $y = x \cdot arctgx$.

ВАРІАНТ № 17

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$y = \sin 2x - x - 2$; $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$; $y = x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$; $y = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$.

ВАРІАНТ № 18

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:
$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$; $[-2;3]$.
2. Дослідити функцію та побудувати її графік:
$y = \dfrac{x+3}{2(x+2)^2}$; $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

ВАРІАНТ № 19

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:
$y = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}$; $[0;2]$.
2. Дослідити функцію та побудувати її графік:
$y = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $y = \ln\dfrac{1-x}{x+5}$; $y = \arccos\dfrac{1-x}{1-2x}$.

ВАРІАНТ № 20

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:
$y = 3x^4 + 16x^3 + 9, \left[-3;1\right]$.
2. Дослідити функцію та побудувати її графік:
$y = \dfrac{16x^2}{x-4}$; $y = x\ln^2 x$; $y = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

ВАРІАНТ № 21

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:
$y = x + \dfrac{1}{x^2}$; $\left[1;20\right]$.
2. Дослідити функцію та побудувати її графік:
$y = \dfrac{2x+1}{\left(x+1\right)^2}$; $y = \dfrac{e^x}{1+x}$; $y = \left(7 + 2\cos x\right)\sin x$.

ВАРІАНТ № 22

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:
$y = \sin 2x - x; \left[0;\pi\right]$.
2. Дослідити функцію та побудувати її графік:
$y = \dfrac{x}{3-x^2}$; $y = \dfrac{e^x}{1+x}$; $y = \sin x + \cos^2 x$.

ВАРІАНТ № 23

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x-1}{x^2+3};\ [-3;3].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x}{x^2+2};\ y=x^{\frac{2}{3}}\cdot e^{-x};\ y=\sin x\cdot\sin 3x.$$

ВАРІАНТ № 24

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\sqrt{3}x-2\sin x;\ [0;\pi].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^3}{3-x};\ y=x\cdot e^{\frac{1}{x-2}};\ y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

ВАРІАНТ № 25

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\sin x-\frac{x}{2};\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x}{3+x^2};\ y=x\cdot e^{\frac{1}{x}};\ y=\sin^4 x+\cos^4 x.$$

ВАРІАНТ № 26

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{1-x}{1+x};\ [-1;1].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{2x^3}{x-2};\ y=\frac{x}{e^x};\ y=\frac{1}{\sin x+\cos x}.$$

ВАРІАНТ № 27

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x}{2}-\sin x;\ [-\pi;\pi].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1};\ y=x\cdot e^{\frac{1}{x^2}};\ y=\cos x-\ln\cos x.$$

ВАРІАНТ № 28

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=\frac{x+4}{x^2-3};\ [2;4].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x-1}{x^2+2};\ y=x\cdot e^{\frac{1}{x}};\ y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

ВАРІАНТ № 29

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y=2\cos x+\sqrt{3}x;\ [0;\pi].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^3}{1-x^2};\ y=1-x\cdot e^{-\frac{2}{x}};\ y=\ln\cos x.$$

ВАРІАНТ № 30

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

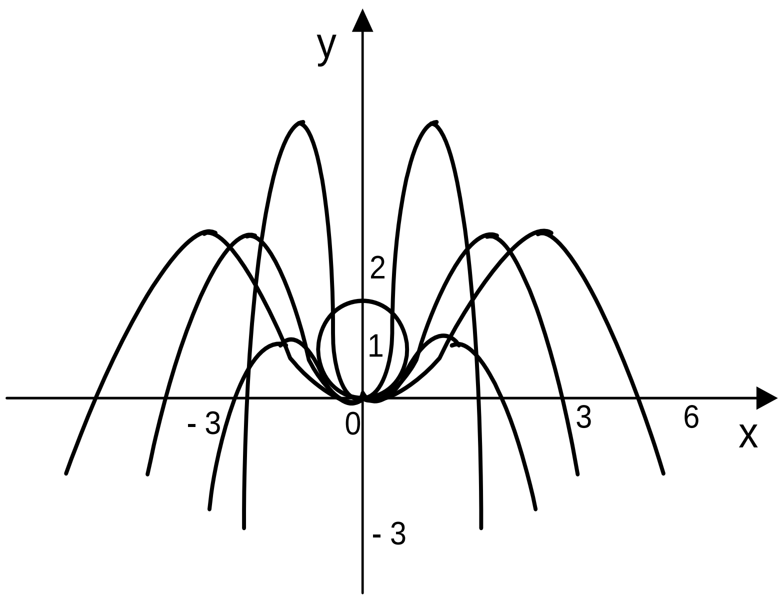
$$y=\cos x+\frac{\sqrt{3}x}{2};\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1};\ y=e^{x^2-2x};\ y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x.$$

Проблемне завдання

Спробуйте виконати творче завдання: за допомогою графіків функцій спробуйте створити свій власний витвір мистецтва. У декартовій системі координат побудуйте графіки певних функцій таким чином, щоб отримати «малюнок». Дослідіть всі побудовані функції. (Зразок «малюнка» наводиться).



3 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практичне заняття № 1

Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з теми «Невизначений інтеграл», набути навичок та вмінь обчислення інтегралів методом заміни змінної, інтегрування частинами; закріпити навички інтегрування основних класів функцій.

Питання для самопідготовки:

– поняття невизначеного інтегралу;
– властивості невизначеного інтегралу;
– таблиця невизначених інтегралів;
– методи інтегрування: табличний, заміна змінної, інтегрування частинами;
– інтегрування основних класів функцій.

План практичного заняття

1. Методи інтегрування.
2. Інтегрування основних класів функцій: раціональних, тригонометричних, ірраціональних.

Теоретичний довідник

Функцію $F(x)$ називають ***первісною*** для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо в кожній точці $x \in X$ виконується умова $F'(x) = f(x)$.

Множину всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$. Позначають так: $\int f(x)dx$.

Функцію $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)dx -$ ***підінтегральним виразом***, $x -$змінною інтегрування.

За доведеним $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x) -$одна з первісних для $f(x)$, С – довільне дійсне число.

Знаходження невизначеного інтеграла від функції $f(x)$ називається ***інтегруванням цієї функції***.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $(\int f(x)dx)' = f(x).$

2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу: $d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$

3. Невизначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) невизначених інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$$

На відміну від диференціювання не існує простих правил обчислення невизначеного інтеграла від частки чи добутку двох функцій. Для обчислення таких інтегралів існують спеціальні прийоми.

Таблиця невизначених інтегралів

Одним із основних моментів успішного оволодіння технікою інтегрування є досконале знання таблиці основних інтегралів.

$$1. \int 0 \cdot du = C \qquad 2. \int 1 \cdot du = \int du = u + C$$

$$3. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad 4. \int \frac{du}{u} = ln|u| + C \quad (u \neq 0)$$

$$5. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln u} + C \quad (a > 0, a \neq 1) \quad 6. \int e^u du = e^u + C$$

$$7. \int \sin u du = -\cos u + C \qquad 8. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C \qquad 10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$$

$$11. \int tgudu = -\ln|\cos u| + C \qquad 12. \int ctgudu = \ln|\sin u| + C$$

$$13. \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C \qquad 14. \int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0) \quad 16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$17. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \quad (a \neq 0, u \neq \pm a)$$

$$18. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

Методи інтегрування

1. Табличний метод

Суть методу полягає в тому, щоб одразу «розпізнати» табличний інтеграл або після нескладних перетворень отримати його.

2. Метод заміни. Внесення функції під знак диференціала

Якщо $u=\varphi(x)$, де $\varphi(x)-$функція, що має неперервну похідну на певному інтервалі (a,b), то на цьому інтервалі справедлива формула:

$$\int f(u)du=\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx.$$

Докладніше формулу запишемо так:

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx=\int f\left[\varphi(x)\right]d\varphi(x)=\int f(u)du=F(u)+C=F\left[\varphi(x)\right]+C.$$

3. Метод інтегрування частинами

Якщо u і v позначають дві будь-які диференційовані функції від x, то, як відомо, $d\left(uv\right)=udv+vdu$ або $udv=d(uv)-vdu.$

Припускаючи існування і неперервність похідних $u'(x)$ і $v'(x)$ та інтегруючи обидві частини цієї тотожності, отримаємо:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

4. ***Простіші інтеграли, які містять квадратний тричлен***

1. ***Інтеграли виду*** $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ **та** $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводяться до табличних шляхом виділення повного квадрату в квадратному тричлені.

2. ***Інтеграли виду*** $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ **та** $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ зводяться до інтегралів виду $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ **та** $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ шляхом виділення в чисельнику похідної $\left(2ax+b\right)$квадратного тричлена.

Інтегрування раціональних функцій

Функцію $y=f(x)$ називають ***раціональною***, якщо її можна зобразити у вигляді $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x),Q(x)-$многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Теорема. Будь-який правильний раціональний дріб можна подати у вигляді скінченої суми елементарних раціональних дробів.

Отже, для інтегрування довільного раціонального дробу достатньо виконати такі кроки:

1) виділити цілу частину $M(x)$ та правильний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$ (якщо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильний, то перший крок не виконується);

2) розкласти дріб $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ на суму елементарних раціональних дробів;

3) проінтегрувати цілу частину $M(x)$ і кожний з утворених елементарних раціональних дробів.

5. *Інтегрування тригонометричних функцій*

Розглянемо деякі види тригонометричних функцій.

1. *Інтеграли виду* $\int \sin^n x \cos x dx$ **та** $\int \cos^n x \sin x dx$ легко знайти методом заміни

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int \sin^n x d(\sin x) = \begin{cases} \ln|\sin x| + C, & n = -1, \\ \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1}, & n \neq -1. \end{cases}$$

2. *Інтеграли виду* $\int \sin^n x \cos^{2k+1} x dx$ **та** $\int \cos^k x \sin^{2n+1} x dx$ так само зводяться до інтегралів від многочленів методом заміни.

3. *Інтеграли виду* $\int \sin^{2n} x dx$ **та** $\int \cos^{2k} x dx$ обчислюються спрощенням підінтегральних функцій за допомогою формул пониження степеня:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

4. *При знаходженні інтегралу виду:*

$$\int \sin(kx)\sin(mx)dx; \quad \int \cos(kx)\cos(mx)dx; \quad \int \sin(kx)\cos(mx)dx$$

використовуються такі тригонометричні формули:

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x);$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x);$$

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(k+m)x + \sin(k-m)x).$$

5. *При інтегруванні функцій* $f(x)$, ***які є раціональними функціями*** від $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$, ефективним **є використання *універсальної тригонометричної підстановки*** $tg\dfrac{x}{2} = t.$

Оскільки

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}; \quad ctgx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}},$$ то

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad tgx = \frac{2t}{1-t^2}; \quad ctgx = \frac{1-t^2}{2t};$$

$$x = 2arctgt; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

і підінтегральна функція стає раціональною функцією від змінної t.

Проте слід зауважити, що замість цієї підстановки $tg\frac{x}{2} = t$, яка теоретично є універсальною, на практиці здебільшого застосовують інші підстановки, за допомогою яких можна швидше знайти шукане, а саме:

а) якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то приймають $\cos x = t$;

б) якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то приймають $\sin x = t$;

в) якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то приймають або $tgx = t$, або $ctgx = t$.

6. ***Інтегрування деяких класів функцій, що містять ірраціональності***

Розглянемо класи функцій, які містять ірраціональності та які можна проінтегрувати нескладними підстановками.

1. Якщо $f(x)$ є раціональною функцією від функцій виду $\sqrt[n_1]{x^{k_1}}, \sqrt[n_2]{x^{k_2}}, ..., \sqrt[n_s]{x^{k_s}}$, то використавши підстановку $x = \sqrt[n_0]{t}$, де n_0 – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, ..., n_s$, зведемо знаходження інтеграла від функції $f(x)$ до знаходження інтеграла від раціональної функції змінної t (раціоналізуємо інтеграл).

2. Якщо функція $f(x)$ є раціональною від функції $f_1(x) = x$ та $f_2(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, то інтеграл від функції $f(x)$ раціоналізується за допомогою однієї з підстановок, які названі на честь видатного німецького математика Л. Ейлера.

І підстановка (використовується тоді, коли $a > 0$):

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x.$

ІІ підстановка (використовується тоді, коли $c > 0$):

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}.$

ІІІ підстановка (використовується тоді, коли α – один з дійсних коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$):

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$

3. Інтеграли виду

а) $\int R(u, \sqrt{l^2 - u^2})du$ зводяться до табличних за допомогою заміни $u = l\sin t$;

б) $\int R(u, \sqrt{l^2 + u^2})du$ зводяться до табличних за допомогою заміни $u = l\,tgt$;

в) $\int R(u,\sqrt{u^2-l^2})du$ зводяться до табличних за допомогою заміни $u=\dfrac{l}{\cos t}$.

4. Інтеграли виду $\int \dfrac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводяться до табличних інтегралів за допомогою підстановки $mx+n=\dfrac{1}{t}$.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Обчислити інтеграл: $\int (5x^2+\dfrac{7}{x^2}+\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$.

Розв'язування

$$\int (5x^2+\frac{7}{x^2}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx=\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C .$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл: $\int \dfrac{dx}{2x^2+144}$.

Розв'язування

$$\int \frac{dx}{2x^2+144}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{72})^2}=\frac{1}{2\sqrt{72}}arctg(\frac{x}{\sqrt{72}})+C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл: $\int 2xe^{x^2}dx$.

Розв'язування

$$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}dx^2=\int e^u du=e^u+C=e^{x^2}+C.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл: $\int \sin(2x+6)dx$.

Розв'язування

$$\int \sin(2x+6)dx=\left|\begin{array}{l} 2x+6=t \\ d(2x+6)=dt \\ 2dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2} \end{array}\right|=\int \sin t\cdot\frac{dt}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin t dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos(2x+6)+C$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл: $\int x\sin x dx$.

Розв'язування

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\sin x + \int \cos x dx = -x\sin x + \sin x + C .$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл: $\int \ln x dx$.

Розв'язування

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл: $\int xe^{3x} dx$.

Розв'язування

$$\int xe^{3x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x; & dv = e^{3x} dx \\ du = dx; & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C .$$

Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє такий приклад.

Приклад 7. Обчислити інтеграл: $\int x^2 e^{3x} dx$.

Розв'язування

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\ du = 2xdx; \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int xe^{3x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx; \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) =$$

$$= e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) + C.$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл: $\int \frac{10x - 25}{x^2 - 3x - 4} dx$.

Розв'язування

Розкладемо підінтегральний вираз на суму елементарних дробів:
$$\frac{10x-25}{x^2-3x-4}=\frac{10x-25}{(x+1)(x-4)}=\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{x-4}.$$

Числа B_1, B_2 знайдемо методом невизначених коефіцієнтів:
$$\frac{10x-25}{(x+1)(x-4)}=\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{x-4}=\frac{B_1(x-4)+B_2(x+1)}{(x+1)(x-4)}=\frac{(B_1+B_2)x+(-4B_1+B_2)}{(x+1)(x-4)}$$

Ця рівність можлива лише тоді, коли $10x-25=(B_1+B_2)x+(-4B_1+B_2)$.

Два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх коефіцієнти при відповідних степенях x. Отже,
$$\begin{cases} B_1+B_2=10, \\ -4B_1+B_2=-25 \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо $B_1=7, \quad B_2=3,$ звідки
$$\int\frac{10x-25}{x^2-3x-4}dx=\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{7}{x+1}dx=3\ln|x-4|+7\ln|x+1|+C.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл: $\int\frac{x^2-4x+1}{(x+1)(x-2)^2}dx$.

Розв'язування

Зобразимо підінтегральну функцію у вигляді
$$\frac{x^2-4x+1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{B_1}{x+1}+\frac{C_1}{x-2}+\frac{C_2}{(x-2)^2}=\frac{B_1(x-2)^2+C_1(x+1)(x-2)+C_2(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}=$$
$$=\frac{(B_1+C_1)x^2+(-4B_1-C_1+C_2)x+(4B_1-2C_1+C_2)}{(x+1)(x-2)^2}$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях x:
$$\begin{cases} B_1+C_1=1, \\ -4B_1-C_1+C_2=-4, \\ 4B_1-2C_1+C_2=1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо $B_1=\frac{2}{3}; C_1=\frac{1}{3}; C_2=-1.$ Отже,
$$\int\frac{x^2-4x-1}{(x+1)(x-2)^2}dx=\int\frac{\frac{2}{3}}{x+1}dx+\int\frac{\frac{1}{3}}{x-2}dx+\int\frac{-1}{(x-2)^2}dx=\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+$$
$$+\frac{1}{x-2}+C.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$.

Розв'язування

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3\left(t^2+1\right)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$= 6\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 6\left(t - \operatorname{arctg} t\right) + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл: $\int \sin^8 x \cos^5 x dx$.

Розв'язування

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx = \int \sin^8 x \cos^4 x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^8 x (\cos^2 x)^2 d(\sin x) = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \left|\sin x = t\right| = \int t^8 (1 - t^2)^2 dt =$$

$$= \int (t^8 - 2t^{10} + t^{12}) dt = \frac{t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2\sin^{11} x}{11} + \frac{\sin^{13} x}{13} + C.$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл: $\int \sin^4 x dx$.

Розв'язування

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + (\frac{1+\cos 4x}{2})) dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x) + C.$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл: $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

Розв'язування

$$\int \sin 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x) dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x) + C.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$.

Розв'язування

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{1}{3+\frac{5-5t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right| + C.$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл: $\int tg^5 2x dx$.

Розв'язування

$$\int tg^5 2x dx = \left| \begin{array}{l} tg2x = t \\ x = \frac{1}{2}arctgt \\ dx = \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^5 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int (t^3 - t + \frac{t}{1+t^2})dt = \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{4}t^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right| + C = \frac{1}{8}tg^4 2x - \frac{1}{4}tg^2 2x + \frac{1}{4}\ln(1+tg^2 2x) + C.$$

Приклад 15. Обчислити інтеграл: $\int \frac{\sqrt[6]{x}+10}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язування

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}+10}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{(t+10)6t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^4+10t^3}{t+1}dt =$$

$$= 6\int (t^3 + 9t^2 - 9t + 9 - \frac{9}{t+1})dt = 6(\frac{t^4}{4} + 3t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 9t - 9\ln\left|t+1\right|) + C = \left|t = \sqrt[6]{x}\right| =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 18\sqrt{x} - 27\sqrt[3]{x} + 54\sqrt[6]{x} - 54\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Приклад 16. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Розв'язування

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{t}\\ dx=-\dfrac{1}{t^2}dt\\ \sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}-1}=\dfrac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}\end{array}\right|=-\int\frac{dt}{t^2\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}}=-\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{\dfrac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$ *Відповідь.* $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C.$

2. $\int\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

3. $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx.$ *Відповідь.* $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$

4. $\int\frac{dx}{x\ln^4 x}.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{3\ln^3 x}+C.$

5. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{5-\sin^2 x}}dx.$ *Відповідь.* $-\sqrt{5-\sin^2 x}+C.$

6. $\int\frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{9}\left(\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3\right)+C.$

7. $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь.* $2\sin\sqrt{x}+C.$

8. $\int\frac{dx}{e^x+1}.$ *Відповідь.* $-\ln\left(e^{-x}+1\right)+C$.

9. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}.$ *Відповідь.* $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

10. $\int\arcsin x dx.$ *Відповідь.* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

11. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}.$ *Відповідь.* $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$.

12. $\int\ln\left(x^2+1\right)dx.$ *Відповідь.* $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$.

13. $\int \sin(\ln x)dx.$ *Відповідь.* $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$.

14. $\int (2x+5)e^{-3x}dx.$ *Відповідь.* $-\frac{e^{-3x}}{9}(6x+17) + C$.

15. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) + \operatorname{arctg}(x+1) + C$.

16. $\int \frac{(8x-1)dx}{x^2-4x+1}.$ *Відповідь.* $4\ln\left|x^2-4x+1\right| + \frac{15}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right| + C$.

17. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$ *Відповідь.* $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C$.

18. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$ *Відповідь.* $x + \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$.

19. $\int \frac{\left(2x^2-3x-3\right)dx}{(x-1)\left(x^2-2x+3\right)}.$ *Відповідь.* $\ln\frac{\sqrt{\left(x^2-2x+3\right)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$.

20. $\int \sin^3 x\cos^3 x dx$ *Відповідь.* $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$

Питання для самоперевірки

1. Що таке первісна? Що називають невизначеним інтегралом?
2. Які властивості невизначеного інтегралу?
3. В чому суть методів інтегрування частинами та заміни змінної в невизначеному інтегралі? Навести приклади.
4. Який раціональний дріб називається правильним? Які дроби називаються найпростішими? Навести приклад.
5. В чому суть методу інтегрування раціональної функції? Подайте схему.
6. Навести приклади інтегрування найпростіших ірраціональних функцій, обчислення інтегралу від функції, раціональної відносно тригонометричних функцій. Приведіть приклад.

Інтерактивне практичне заняття № 2 «Подолання інтегрального мосту»

Мета заняття: освітня – актуалізація та корекція опорних знань, умінь та навичок, вивчення основи інтегрального числення, як математичного апарату; розвивальна – сприяє формуванню студента як особистості та підготовки її до самостійної професійної діяльності;

майбутньому фахівці життєві настанови та принципи, уявлення про соціально-моральні норми.

Це заняття ми пропонуємо проводити для закріплення теми «Методи інтегрування невизначеного інтегралу». Групу поділяємо на дві підгрупи і пропонуємо таку ігрову ситуацію для кожної із підгруп. Дві наукові експедиції внаслідок повені залишились відрізаними від їх бази. Для того, щоб добратися до місця призначення, їм необхідно поповнити запаси їжі, води та медикаментів, що потребує з'єднання з пунктом X мостом через річку, що вийшла з берегів. Кожна підгрупа отримує два конверти для виконання завдання: перший – для побудови мосту, другий – для його проходження. Картки першого конверта мають на меті систематизувати знання про основні методи обчислення невизначеного інтегралу, вони мають вигляд:

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx$; 2. $\int arctgx dx$; 3. $\int \ln(x+4)dx$; 4. $\int x\sqrt{2x^2+8}dx$;

5. $\int xe^{x^2+3}dx$; 6. $\int \sqrt[6]{1-7x^3}\,x^2 dx$.

Кількість карток конверта відповідає кількості студентів підгрупи. Шляхом жеребкування кожен з них отримує свою картку із завданнями. Правильно виконане завдання відповідає одному побудованому щаблю мосту. Якщо студент затрудняється в розв'язанні завдання, він може звернутися за допомогою до головного прораба підгрупи, а у разі його некомпетентності – до голови експедиції (викладача). Міст зараховується побудованим, якщо в ньому присутні всі щаблі, тобто всі студенти справились із завданням.

Другий етап експедиції – переправлення її членів побудованим мостом. Студенти отримують картки із другого конверта, які мають на меті систематизувати знання про інтегрування основних класів функцій, вони мають вигляд:

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$; 2. $\int tg^5 3x dx$; 3. $\int \frac{2x-4}{x(x+2)(x-3)}dx$;

4. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; 5. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}dx$; 6. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

Правильно виконане завдання відповідає одному переправленому члену експедиції через міст. Перемагає та підгрупа, яка раніше побудувала свій міст і вдало переправилась через нього.

Результативність: формування вмінь раціонально використовувати свій час для підготовки до практичних занять та в процесі розв'язування завдань, індивідуальної відповідальності.

Індивідуальні домашні завдання

ВАРІАНТ № 1

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int (4+3x^2)^6 x\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$; $\int 2^x \sin 2^x dx$; $\int \frac{x^3}{9+x^8}dx$; $\int \cos(5-2x)dx$;

$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$; $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx$; $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$; $\int e^{tg 2x}\frac{dx}{\cos^2 2x}$; $\int \frac{x}{5-x^4}dx$;

$\int (1-2x)ctg(x-x^2)dx$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctg^2 x+4}}$; $\int 5^{\sin x}\cos x dx$;

$\int \sin 2x \cdot tg(\cos 2x)dx$; $\int \frac{x-1}{\sin^2(5-2x+x^2)}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$; $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+6x+7}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\sin 7x dx$; $\int \arccos 2x dx$; $\int e^x \cos 2x dx$; $\int \sqrt{e^x+1}dx$; $\int \sqrt{100-x^2}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{2x^2-10x+10}{x^3-6x^2+11x-6}dx$; $\int \frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}dx$; $\int \frac{x^6+3x^4+2x^2+x}{x^4+3x^2+2}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{1-2\cos x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{3-\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{2+6\sin^2 x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^9 x}dx$; $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$; $\int \sin^4 x\cos^4 x\ dx$;

$\int \cos 4x\cos 5x\ dx$.

ВАРІАНТ № 2

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int 3^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \frac{1}{x}tg(\ln x)dx$; $\int \frac{2^x}{\sin^2 2^x}dx$; $\int \frac{x^2}{\sin(1+x^3)}dx$; $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos 2x dx$;

$\int x\sin(5-2x^2)dx$; $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$; $\int \cos(7+5x)dx$; $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+4}dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^2(4-3x)}$; $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^4}}dx$; $\int e^{tg 3x}\frac{dx}{\cos^2 3x}$; $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x}dx$; $\int x^2 ctg x^3 dx$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{ctg^2 x-25}}$; $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$; $\int \frac{x+7}{x^2+5x+7}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x+x^2}}$;

$\int \frac{5x-2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\cos 7x dx$; $\int \ln(x^2+2)dx$; $\int e^x \sin 2x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(100+x^2\right)^3}}$;

$\int \frac{\sqrt{x}-9}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{3x^2-1}{x^3-x}dx$; $\int \frac{2x^4-4x^3+3x^2-3x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$; $\int \frac{-3x}{x^4+5x^2+4}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{1+2\sin x}$; $\int \frac{\sin^5 x}{3-\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+9\cos^2 x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$; $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{14} x}dx$;

$\int \sin^2 2x\cos^2 2x\ dx$; $\int \sin 5x \sin 6x\ dx$.

ВАРІАНТ № 3

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sin x^3}$; $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$; $\int e^{ctgx}\frac{dx}{\sin^2 x}$; $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^4}}dx$;

$\int 5^{\sin 2x}\cos 2x dx$; $\int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$; $\int e^x \sin e^x dx$; $\int ctg\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \frac{\cos 2x}{25+\sin^2 2x}dx$;

$\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-3^{2x}}}$; $\int (x^2-5x)\cos\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2\right)dx$ $\int \frac{1}{x^2}tg\frac{1}{x}dx$; $\int \frac{x^3}{\cos^2(x^4-1)}dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2(tgx)}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}}$; $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

$\int \frac{3x+1}{2x^2+5x-3}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int xe^{7x}dx$; $\int x\cdot arctg 2x dx$; $\int e^{2x}\cos x dx$; $\int \sqrt{e^{2x}+9}dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}}dx$;

$\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{x^4-3x^3+4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$; $\int \frac{x^3-2x^2+4x-1}{x^4-2x^3+2x-1}dx$; $\int \frac{-2x}{x^4+4x^2+3}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{2+\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$; $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$; $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^{10} x}dx$;

$\int \sin^4 3x\, dx$; $\int \sin 4x \cos 2x\, dx$.

ВАРІАНТ № 4

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \sin(\sqrt{x}+2)\frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x + 5)}$; $\int (x-2)\cdot ctg(x^2-4x+2)\, dx$;

$\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}+5\right)}{x^2}dx$; $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin 2x dx$; $\int \frac{5^x}{\cos^2 5^x}dx$; $\int \frac{x}{9-x^4}dx$;

$\int 2^{x^3} x^2 dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+5)}$; $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}tg(\sqrt[3]{x}-5)dx$; $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 25}dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-tg^2 x}}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sin x^3}$; $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+\cos^2 3x}}dx$; $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$; $\int \frac{x}{x^2+3x+3}dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x-x^2}}$; $\int \frac{5x+7}{\sqrt{x^2+13x+43}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2 \sin 7x dx$; $\int x^2 \ln x dx$; $\int e^{2x}\sin x dx$; $\int \sqrt{e^x - 9}dx$; $\int \sqrt{64-x^2}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx$; $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{x^4+x^3}dx$; $\int \frac{x^5+x^4+5x^3+5x^2+7x+6}{x^4+5x^2+6}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{3-\cos x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{2-\cos^2 x}$; $\int \sin^3 x \cos^7 x\, dx$; $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{12} x}dx$; $\int \cos^6 x\, dx$;

$\int \cos 3x \cos 6x\, dx$.

ВАРІАНТ № 5

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{e^x\sqrt{arctg(e^x)}}{1+e^{2x}}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$; $\int (4x-5)\sin(2x^2-5x+7)dx$; $\int 2^{x^4} x^3 dx$;

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\left(\sqrt{x}+4\right)};\ \int e^{\sin 3x}\cos 3x dx;\int\frac{1}{x}\cos(\ln x-1)dx;\int\frac{x}{\cos^2(5x^2+1)}dx;$$

$$\int\frac{\ln x}{x(\ln^2 x-9)}dx;\int x\cdot 2^{x^2}\cdot tg2^{x^2}dx;\int\frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x}dx;\int\frac{7^x dx}{3+7^{2x}};\int\frac{x^3}{\sqrt{x^8+25}}dx;$$

$$\int ctg(2x-3)dx;\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}};\int\frac{dx}{\sqrt{-2+4x+4x^2}};\ \int\frac{x+5}{\sqrt{4-4x^2-4x}}dx;$$

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5};\int\frac{4x-1}{x^2-5x+6}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x^2\cos 7x dx;\int arctg 2x dx;\int e^{3x}\cos x dx;\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-4}};\int\frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}dx;\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}.$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int\frac{4x^2-x-2}{x^3-x^2-2x}dx;\int\frac{3x^4-4x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3}dx;\int\frac{8x}{x^4+10x^2+9}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int\frac{dx}{2-2\sin x};\int\frac{\sin^5 x}{2+3\cos x}dx;\int\frac{dx}{1+\sin^2 x};\int\frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}dx;\int\frac{\sin^6 x}{\cos^{10} x}dx;$$

$$\int\sin^2 x\cos^2 x\ dx;\int\sin 4x\sin 5x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 6

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\frac{x^3dx}{\sin^2(x^4-5)};\ \int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+5}};\int\frac{1}{\sqrt{x}}ctg\left(\sqrt{x}-3\right)dx;\int\frac{2\cos^2 x\sin x}{\cos^3 x+2}dx;\int 7^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}dx;$$

$$\int\frac{x}{25-x^4}dx;\int\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx;\int(2x-3)\sin(x^2-3x+4)dx;\int\frac{dx}{x\cos^2(\ln x)};$$

$$\int\frac{\cos 2x}{\sqrt{4-\sin^2 2x}}dx;\int 2^x\cos 2^x dx;\ \int e^{arctg 2x}\frac{dx}{1+4x^2};\int\frac{dx}{\sin^2(2x+7)};\int 5^x\frac{dx}{3+5^{2x}};$$

$$\int\sin x\cdot tg(\cos x)dx;\int\frac{dx}{x^2-5x-6};\int\frac{2x+3}{x^2+6x+12}dx;\int\frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}};$$

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+12x+9}}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x^2e^{7x}dx;\int\arcsin 2x dx;\int e^{3x}\sin x dx;\int\sqrt{e^{2x}-3}dx;\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}};\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx.$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int\frac{x^4-6x^3+13x^2-15x+11}{x^3-6x^2+11x-6}dx;\int\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}dx;\int\frac{2x}{x^4+6x^2+8}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x};\int\frac{\cos^3 x}{1+2\sin x}dx;\int\frac{dx}{1+\cos^2 x};\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx;\int\frac{\cos^8 x}{\sin^{14} x}dx;\int\cos^6 3x\ dx;$$

$$\int\sin 3x\cos 2x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 7

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^{3/2}};\ \int\frac{(2x-5)}{\sin^2(x^2-5x+4)}dx;\int\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}tg\left(\sqrt[5]{x}+2\right)dx;\int\frac{x^3}{25-x^8}dx;\int\frac{3^x dx}{\cos^2(3^x)};$$

$$\int\frac{\sin\left(\frac{1}{x}+4\right)}{x^2}dx;\int\frac{dx}{\sin(2x+4)};\int\frac{\sqrt{(1+arctg3x)^5}}{1+9x^2}dx;\int 7^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$\int\frac{1}{x}\cos(\ln x+5)dx;\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{3-x}};\int e^{2x}ctg(e^{2x}+1)dx\ \int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+9}};\int e^{x^8}x^7dx;$$

$$\int\frac{10^x dx}{9+10^{2x}};\int\frac{dx}{x^2+3x+4};\int\frac{3x+3}{x^2+5x+6}dx;\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}};\int\frac{x-7}{\sqrt{-x^2+10x-21}}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x\sin 5xdx;\int\arccos 3xdx;\int e^x\cos 3xdx;\int\sqrt{e^x-1}dx;\int\sqrt{256-x^2}dx;\int\frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int\frac{4x^2-2}{x^3-x}dx;\int\frac{x^6-2x^5+x^4+2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx;\int\frac{-4}{x^4+6x^2+5}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int\frac{dx}{1+2\cos x};\int\frac{\cos^5 x}{2-\sin x}dx;\int\frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x};\int\frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx;\int\sin^5 x\cos^3 x\ dx;$$

$$\int\sin^2 3x\cos^6 3x\ dx;\int\cos 3x\cos 4x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 8

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}};\ \int\frac{x}{\sin(5x^2+7)}dx;\int\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}dx;\int e^{2x}\cos(e^{2x}-1)dx;$$

$$\int e^{ctg3x}\frac{dx}{\sin^2 3x};\int tg(7-2x)dx;\ \int\frac{x^4}{16-x^{10}}dx;\int\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx;\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^2 x-5}};$$

$\int \frac{5^x dx}{\sin^2 5^x}$; $\int \cos x \cdot ctg(1+\sin x)dx$; $\int 7^{x^3} x^2 dx$; $\int \frac{\arcsin^5 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

$\int \frac{(2x+5)}{\cos^2(x^2+5x+4)}dx$; $\int \frac{\cos 3x \sin 3x}{\cos^2 3x+5}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+6x+2}}$; $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2+16x+22}}dx$;

$\int \frac{dx}{x^2+x-2}$; $\int \frac{3x-4}{4x^2+4x+10}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\cos 5x dx$; $\int \ln(x^2+3)dx$; $\int e^x \sin 3x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-3}}$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{4x^2-9x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$; $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^4-2x^3+2x-1}dx$; $\int \frac{3x^4+24x^2-6x+21}{x^4+8x^2+7}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{1-2\sin x}$; $\int \frac{\sin^5 x}{2+\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^8 x}dx$; $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$;

$\int \sin 4x \sin 6x \, dx$.

ВАРІАНТ № 9

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int 5^x \cos(5^x+10)dx$; $\int 7^{\cos 3x} \sin 3x dx$; $\int \frac{x^3}{9-x^8}dx$; $\int (x-2)tg(x^2-4x+10)dx$;

$\int \frac{\sin\left(7-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\sin^2 2x-4}}$; $\int \frac{e^{\arccos x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$; $\int ctg(7x+2)dx$;

$\int \frac{2^x dx}{\cos^2 2^x}$; $\int \sqrt[3]{7x-\sqrt{x}} \cdot \left(7-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$; $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^4}}dx$; $\int \frac{4-\sin 2x}{8x+\cos 2x}dx$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x(9+tg^2 x)}$; $\int \frac{dx}{\sin(2x+1)}$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$; $\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+6}}$;

$\int \frac{3x-5}{\sqrt{12x-4x^2-5}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int xe^{5x}dx$; $\int x \cdot arctg 3x dx$; $\int e^{2x}\sin 2x dx$; $\int \sqrt{e^{2x}+1}dx$; $\int \sqrt{16-x^2}dx$; $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{x^4-3x^2+2x+2}{x^3+x^2-2x}dx$; $\int \frac{1-x^2-x}{x^4-x^3}dx$; $\int \frac{3x^2-2x^3-4x+15}{x^4+7x^2+10}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$; $\int \sin^5 x \cos^4 x\ dx$; $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$;
$\int \sin^6 3x \cos^2 3x\ dx$; $\int \sin 2x \cos 3x\ dx$.

ВАРІАНТ № 10

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{x^3}{\sin^2 x^4}dx$; $\int \frac{5^{ctg 3x}dx}{\sin^2 3x}$; $\int \cos 5x \cdot \sqrt[5]{\sin^7 5x}dx$; $\int x\sin(x^2+7)dx$; $\int \frac{x^2}{4-x^6}dx$;

$\int e^{2x} ctg(e^{2x})\ dx$; $\int e^{\sin 5x}\cos 5x dx$; $\int \frac{\cos(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}$;

$\int tg(3^x)\cdot 3^x dx$; $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+16)}$; $\int \frac{14}{\cos^2(7x-2)}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x(ctgx+7)}$;

$\int \frac{x^4}{\sqrt{x^{10}-5}}dx$; $\int \frac{\sin 2x}{\sin(\cos 2x)}dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$; $\int \frac{2x+7}{x^2+10x+29}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$;

$\int \frac{x-3}{\sqrt{9x^2+6x-1}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2 \sin 5x dx$; $\int x^3 \ln x dx$; $\int e^{2x}\cos 2x dx$; $\int \sqrt{e^x-4}dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x}dx$; $\int \frac{x^5+x^4-x^2+x+1}{x^4+x^3}dx$; $\int \frac{14}{x^4+11x^2+18}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{2+\cos x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{1+2\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}dx$; $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$;
$\int \sin^4 2x\cos^2 2x\ dx$; $\int \cos 5x \cos 3x\ dx$.

ВАРІАНТ № 11

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \left(4+3x^2\right)^{15} xdx$; $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}}$; $\int 3^{2x}\sin 3^{2x}dx$; $\int \frac{x^3}{4+x^8}dx$; $\int \cos(3+2x)dx$;

$\int \frac{\sin 6x}{1+\cos^2 3x}dx$; $\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4}dx$; $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}}dx$; $\int \frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{x}{9-x^4}dx$;

$\int (1+2x)\cdot ctg(x+x^2)dx$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{5+arctg^2 x}}$; $\int 3^{\sin 2x}\cos 2x dx$;

$\int \sin 2x \cdot tg(\cos 2x)dx$; $\int \frac{(x+1)}{\sin^2(5+2x+x^2)}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}$; $\int \frac{2x+3}{\sqrt{6x-x^2}}dx$;

$\int \frac{dx}{x^2+6x+12}$; $\int \frac{5x+4}{x^2+5x-6}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2\cos 5x dx$; $\int arctg 3x dx$; $\int e^{5x}\cos 3x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(81+x^2\right)^3}}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx$; $\int \frac{x^3+x-2}{x^4-2x^3}dx$; $\int \frac{x^5+3x^3+2x+1}{x^4+3x^2+2}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{1+3\sin x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2}$; $\int \sin^3 x\cos^3 x\, dx$; $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^{12} x}dx$; $\int \cos^4 x\, dx$;

$\int \sin 3x \sin 6x\, dx$.

ВАРІАНТ № 12

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \frac{1}{x}tg(\ln 2x)\, dx$; $\int \frac{7^x dx}{\sin^2 7^x}$; $\int \sqrt[5]{\sin^3 x}\cdot\cos x dx$; $\int \frac{x^2}{\sin(x^3+5)}dx$;

$\int x\cos(3-4x^2)dx$; $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos^2 3x}dx$; $\int \cos(1+3x)dx$; $\int \frac{e^{4x}}{4+e^{4x}}dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(4+\sqrt{x})}$; $\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}dx$; $\int \frac{e^{tg 2x}dx}{\cos^2 2x}$; $\int \frac{\sin 2x}{9-\cos^2 2x}dx$; $\int x^3\cdot ctg(x^4)dx$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 3x\sqrt{ctg^2 3x-9}}$; $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$; $\int \frac{4x-5}{4x^2+4x+10}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$;

$\int \frac{7x-1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2 e^{5x}dx$; $\int \arcsin 3x dx$; $\int e^{2x}\sin 3x dx$; $\int \sqrt{e^{3x}+1}\, dx$; $\int \sqrt{81-x^2}\, dx$; $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{x^5-x^2+x-1}{x^3-x}dx$; $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{x^4+2x^3}dx$; $\int \frac{-3}{x^4+5x^2+4}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int\frac{dx}{\sin x-\cos x};\int\frac{\cos^3 x}{3+\sin x}dx;\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x};\int\frac{\sin^3 x}{\cos^9 x}dx;\int\frac{\cos^6 x}{\sin^{14} x}dx;$$

$$\int\sin^2 3x\cos^2 3x\ dx;\int\sin 3x\cos 5x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 13

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\frac{dx}{\arcsin^3 x\cdot\sqrt{1-x^2}};\ \int\frac{x}{\sin x^2}dx;\int\frac{x}{(x^2+4)\ln(x^2+4)}\ dx;\int\frac{e^{ctg\,2x}dx}{\sin^2 2x};$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{16+x^4}}dx;\int 7^{\sin 2x}\cos 2x\ dx;\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx;\int\cos(1+3x)dx;\int\frac{ctg\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}dx;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(4+\sqrt{x})};\int\frac{\cos 3x}{25+\sin^2 3x}dx;\int(x^2-2)\cos(x^3-6x+1)dx;\int\frac{2}{x^3}tg\frac{1}{x^2}dx;$$

$$\int\frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}dx;\int\frac{dx}{\sin^2 x\sin^2(ctgx)};\int\frac{dx}{x^2+3x+3};\int\frac{x+6}{x^2-4x+3}dx;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{15+8x+x^2}};\int\frac{3x+7}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x\sin 3xdx;\int\arccos 4xdx;\int e^{3x}\cos 2xdx;\int\sqrt{e^{3x}-2}\ dx;\int\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx;\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int\frac{5x^2-10x+4}{x^3-3x^2+2x}dx;\int\frac{x^5-x^4-x^2-x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx;\int\frac{3x^2+7}{x^4+4x^2+3}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int\frac{dx}{2-\cos x};\int\frac{\cos^5 x}{1+\sin x}dx;\int\frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x};\int\frac{\sin^2 x}{\cos^{10} x}dx;\int\sin^4 x\cos^3 x\ dx;$$

$$\int\sin^6 2x\ dx;\int\cos 3x\cos 2x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 14

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\frac{\sin(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}}dx;\ \int\frac{dx}{(\arcsin 2x+3)\cdot\sqrt{1-4x^2}};\int\frac{e^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$$

$$\int(x+2)\cdot ctg(x^2+4x-1)dx;\int\frac{5}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}+7\right)dx;\int\sqrt[7]{\cos^5 2x}\cdot\sin 2xdx;$$

$$\int\frac{3^x dx}{\cos^2 3^x};\int\frac{x}{25-x^4}dx;\int x^2\cdot 5^{x^3}dx;\int\frac{dx}{\sin^2(3-2x)};\int\frac{tg(\sqrt[3]{x}+3)}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$$

$$\int\frac{\cos 5x}{25+\sin^2 5x}dx;\ \int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt{9-tg^2 x}};\int\frac{x^3}{\sin x^4}dx;\int\frac{\sin 4x}{\sqrt{4+\cos^2 4x}}dx;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}};\int\frac{3x-5}{\sqrt{4x^2-4x+6}}dx;\int\frac{dx}{x^2+4x+3};\int\frac{7x+1}{x^2+8x+20}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x\cos 3x dx;\int\ln(x^2+4)dx;\int e^{3x}\sin 2x dx;\int\frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+3}};\int\frac{dx}{\sqrt{\left(36+x^2\right)^3}};\int\frac{2dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int\frac{4x^2+x-2}{x^3+x^2-2x}dx;\int\frac{-x^3+4x^2-x+2}{x^4-2x^3+2x-1}dx;\int\frac{-x^5+x^4-5x^3+5x^2-6x+6}{x^4+4x^2+3}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int\frac{dx}{1-\sin x};\int\frac{\sin^5 x}{1-2\cos x}dx;\int\frac{dx}{2-\sin^2 x};\int\frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx;\int\frac{\cos^6 x}{\sin^{12} x}dx;\int\sin^2 2x\cos^6 2x\ dx$$

$$\int\sin 3x\sin 5x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 15

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\frac{x\cdot\sqrt{arctgx^2}}{x^4+1}\ dx;\ \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{3-\ln^2 x}};\int(1-2x)\sin(x-x^2)dx;\int x^3\cdot 3^{x^4}dx;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2(\sqrt{x}+2)};\ \int e^{\sin 3x}\cdot\cos 3x dx;\int\frac{\cos(\ln x+5)}{x}dx;\int\frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}dx;$$

$$\int\frac{\ln x}{x\cdot(\ln^2 x+5)}dx;\int x\cdot 5^{x^2}\cdot tg(5^{x^2})dx;\ \int\frac{\sin 3x}{4-\cos^2 3x}dx;\int\frac{2^x}{3+2^{2x}}dx;\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^8}}dx;$$

$$\int ctg(1+3x)dx;\int\frac{x}{\sin 2x^2}dx;\int\frac{dx}{4x^2+4x+4};\ \int\frac{x+6}{x^2+2x-3}dx;\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+10}};$$

$$\int\frac{4x+3}{\sqrt{1+4x-x^2}}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x\cdot e^{3x}dx;\int x\cdot arctg4x dx;\int e^x\cos 4x dx;\int\sqrt{e^{2x}-1}\ dx;\int\sqrt{9-x^2}\ dx;\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int\frac{x^4-x^3+3x-2}{x^3-x^2-2x}dx;\int\frac{2x-1}{x^4-x^3}dx;\int\frac{x^3+x^2+x+9}{x^4+10x^2+9}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x};\int \frac{\cos^3 x}{1+3\sin x}dx;\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x};\int \sin^4 x\cos^5 x\ dx;\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx;$$

$$\int \cos^4 3x\ dx;\int \sin 3x\cos 4x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 16

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int \frac{x^2}{\sin^2(x^3+1)}dx;\ \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^{2x}+3}}dx;\int \frac{ctg(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}}dx;\int \frac{5x^4+8x}{x^5+8x^2+1}dx;$$

$$\int 5^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{dx}{x^2};\int \frac{x}{16-x^4}dx;\ \int \sin 3x\cdot tg(\cos 3x)dx;\int (5x-x^2)\sin\left(4+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\ dx;$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx;\int \frac{3dx}{x\cdot\cos^2(\ln 2x)};\ \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{4-\sin^2 3x}}dx;\int 3^x\cdot\cos(3^x)\ dx;$$

$$\int e^{arctg\,2x}\frac{dx}{1+4x^2};\ \int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)};\int \frac{7^x}{7+7^{2x}}dx;\int \frac{2dx}{x^2+2x+3};\ \int \frac{3x+1}{x^2-3x+2}dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}};\int \frac{2x-3}{\sqrt{7+6x+x^2}}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x^2\sin 3x\ dx;\int x^4\cdot\ln x\ dx;\int e^x\sin 4x\ dx;\int \sqrt{e^x-3}\ dx;\int \frac{x^2}{\sqrt{49-x^2}}dx;$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx.$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx;\int \frac{x^5+3x^4+x^3+x+1}{x^4+x^3}dx;\int \frac{2}{x^4+6x^2+8}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x};\int \frac{\cos^5 x}{1-2\sin x}dx;\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x};\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}dx;\int \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x}dx;$$

$$\int \sin^2 3x\cos^4 3x\ dx;\int \cos 2x\cos 7x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 17

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x^3}}dx;\ \int \frac{x^2}{\sin^2(1-2x^3)}dx;\int \frac{tg(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx;\int \frac{x^3}{16-x^8}dx;$$

$\int 4^x \cdot \frac{dx}{\cos^2 4^x}$; $\int \frac{1}{x^2}\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx$; $\int \frac{dx}{\sin(4x-1)}$; $\int \frac{\sqrt{(1+arctg 2x)^3}}{4x^2+1}\, dx$;

$\int 5^{tgx} \frac{dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{\cos(\ln 3x)}{x}\, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{5-x}}$; $\int ctg(e^{2x}+5)\cdot e^{2x}dx$;

$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^6}}dx$; $\int x^4 \cdot e^{x^5}dx$; $\int \frac{5^x}{9+5^{2x}}dx$; $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$; $\int \frac{4}{x^2-5x+6}dx$;

$\int \frac{x-5}{x^2+5x+7}\, dx$; $\int \frac{4x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2\cos 3x\, dx$; $\int arctg 4x\, dx$; $\int e^{3x}\sin 3x\, dx$; $\int \sqrt{e^{3x}+4}\, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(64+x^2\right)^3}}$;

$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{x^2-4x+1}{x^3-x}dx$; $\int \frac{2x^2-x+2}{x^4-2x^3}dx$; $\int \frac{x^5+x^4+7x^3+5x^2+10x+4}{x^4+6x^2+5}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{2+\sin x}$; $\int \frac{\sin^5 x}{1+2\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$; $\int \sin^6 x\cos^3 x\, dx$; $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x}dx$; $\int \sin^4 2x\, dx$

$\int \sin 3x \sin 4x\, dx$.

ВАРІАНТ № 18

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{5-\ln^2 x}}$; $\int \frac{9x^2}{\sin(6x^3+3)}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$; $\int \cos(e^{3x}-5)\cdot e^{3x}dx$;

$\int 5^{ctg 2x}\frac{dx}{\sin^2 2x}$; $\int tg(3-x)\, dx$; $\int \frac{x^4}{9-x^{10}}dx$; $\int \frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$; $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x-5}}dx$;

$\int \frac{3^{2x}dx}{\sin^2 3^{2x}}$; $\int \sin x\cdot ctg(1+\cos x)dx$; $\int x^2\cdot 4^{x^3}dx$; $\int \frac{\arcsin^3 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\, dx$;

$\int \frac{x}{\cos^2(x^2+5)}dx$; $\int \frac{\sin 4x\cos 4x}{9+\sin^2 4x}dx$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; $\int \frac{3x+5}{2x^2+5x-3}\, dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; $\int \frac{5x-1}{\sqrt{9+4x+x^2}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2 e^{3x}\ dx$; $\int \arcsin 4x\ dx$; $\int e^{3x}\cos 3x\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-2}}$; $\int \sqrt{25-x^2}\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{-2x^3+5x^2-2}{x^3-3x^2+2x}dx$; $\int \frac{-2x^2+x+2}{x^4+2x^3}dx$; $\int \frac{dx}{x^4+8x^2+7}$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{\cos x-\sin x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{1-3\cos^2 x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx$; $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x}dx$;

$\int \sin^4 x\cos^6 x\ dx$; $\int \sin 3x\cos 7x\ dx$.

ВАРІАНТ № 19

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int 3^x\cdot\cos(3^x+2)\ dx$; $\int 5^{\cos 2x}\cdot\sin 2x dx$; $\int (x-3)\cdot tg(1-6x+x^2)dx$; $\int \frac{x^2}{4-x^6}\ dx$;

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(5-\sqrt{x})\ dx$; $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin^2 3x-16}}dx$; $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int \frac{dx}{x\cdot\sin^2(\ln 2x)}$;

$\int ctg(3x+4)\ dx$; $\int \frac{4^x dx}{\cos^2 4^x}$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$; $\int \sqrt[5]{5x-\sqrt{x}}\cdot\left(5-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$;

$\int \frac{16x+3\cos 3x}{8x^2+\sin 3x}dx$; $\int \frac{\sec^2 x}{4+tg^2 x}dx$; $\int \frac{x}{\sin(x^2+5)}dx$; $\int \frac{5dx}{2x^2+2x-1}$;

$\int \frac{2x-3}{x^2+3x+3}\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{8-4x-x^2}}$; $\int \frac{3x-2}{\sqrt{43+13x+x^2}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\sin 4x\ dx$; $\int \arccos 5x\ dx$; $\int e^x\cos 5x\ dx$; $\int \sqrt{e^x-4}\ dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{36-x^2}}dx$;

$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{x^2+4x-2}{x^3+x^2-2x}dx$; $\int \frac{x^5-3x^4+3x^3-x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$; $\int \frac{3x}{x^4+7x^2+10}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{1-3\cos x}$; $\int \frac{\cos^5 x}{2+3\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$; $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^8 x}dx$; $\int \sin^3 x\cos^2 x\ dx$;

$\int \sin^4 3x\cos^2 3x\ dx$; $\int \cos 2x\cos 5x\ dx$.

ВАРІАНТ № 20

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx;\ \int 7^{ctg2x}\frac{dx}{\sin^2 2x};\int\sqrt[3]{\sin^4 2x}\cdot\cos 2x\ dx;\int(x+1)\cdot\sin(x^2+2x)dx;$$

$$\int\frac{x^3}{9-x^8}dx;\ \int e^{3x}ctg(e^{3x})\ dx;\int e^{\sin 2x}\cdot\cos 2xdx;\int\frac{\cos(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}}dx;$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 3x\cdot\sqrt{1-tg^2 3x}};\int 7^x\cdot tg(7^x)\ dx;\ \int\frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+4)};\int\frac{x}{\cos^2(x^2+2)}dx;$$

$$\int\frac{\cos ec^2 3x}{3+ctg3x}dx;\ \int\frac{x}{\sqrt{x^4-3}}dx;\int\frac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)}dx;\int\frac{3dx}{x^2+4x+8};$$

$$\int\frac{6x+3}{x^2-5x+6}\ dx;\int\frac{4dx}{\sqrt{4x^2+4x-2}};\int\frac{2x+5}{\sqrt{4-4x-4x^2}}dx.$$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$$\int x\cos 4x\ dx;\int\ln(5+x^2)\ dx;\int e^x\sin 5x\ dx;\int\sqrt{e^x+2}\ dx;\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}};$$

$$\int\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx.$$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$$\int\frac{x^2+2}{x^3-x^2-2x}dx;\int\frac{2x^3-6x^2+7x-1}{x^4-2x^3+2x-1}dx;\int\frac{-x^5+x^4-11x^3+11x^2-25x+18}{x^4+11x^2+18}dx.$$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$$\int\frac{dx}{2+2\sin x};\int\frac{\sin^3 x}{2-\cos x}dx;\int\frac{dx}{3\sin^2 x+1};\int\frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}dx;\int\frac{\cos^2 x}{\sin^{10} x}dx;\int\cos^4 2x\ dx;$$

$$\int\sin 2x\sin 4x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 21

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$$\int\left(1+x^3\right)^5 x^2dx;\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin^2\sqrt[3]{x}};\int 3^x\sin(3^x)\ dx;\int\frac{x^4}{4+x^{10}}dx;\ \int\cos(3+2x)\ dx;$$

$$\int\frac{\sin 2x\cos 2x}{1+\cos^2 2x}dx;\ \int\frac{x}{\cos^2 x^2}dx;\int\frac{e^{3x}dx}{\sqrt{9-e^{6x}}};\ \int e^{tg4x}\cdot\sec^2 4x\ dx;\int\frac{x^3}{16-x^8}dx;$$

$$\int(2x-3)\cdot ctg(x^2-3x+1)dx;\ \int\frac{dx}{(9x^2+1)\cdot\sqrt{1+arctg3x}};\int\sin x\cdot tg(\cos x)dx;$$

$\int \frac{x}{\sin^2(3-x^2)}dx$; $\int 3^{\sin 2x}\cdot\cos 2x dx$; $\int \frac{4dx}{x^2+5x-6}$; $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+10}\, dx$; $\int \frac{9dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$;

$\int \frac{2x+5}{\sqrt{9+12x+4x^2}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int xe^{4x}\, dx$; $\int x\cdot arctg5x\, dx$; $\int e^{2x}\cos 4x\, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-5}}$; $\int \sqrt{49-x^2}\, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{-x^4+6x^3-11x^2+3x+7}{x^3-6x^2+11x-6}dx$; $\int \frac{-x^3+x-1}{x^4-x^3}dx$; $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^4+3x^2+2}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x}$; $\int \frac{\sin^5 x}{1+\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2}$; $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}dx$; $\int \sin^2 x\cos^5 x\, dx$;

$\int \sin^6 3x\, dx$; $\int \sin 2x\cos 5x\, dx$.

ВАРІАНТ № 22

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int 4^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 3x\cdot\sqrt{ctg^2 3x-4}}$; $\int \frac{tg(\ln 2x)}{x}dx$; $\int \sqrt[7]{\sin^8 3x}\cdot\cos 3x\, dx$;

$\int \frac{3^x}{\sin^2(3^x)}dx$; $\int \frac{x^2+1}{\sin(3x+x^3)}dx$; $\int \frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$; $\int \frac{\sin 4x}{4+\cos^2 4x}dx$;

$\int \cos(2+3x)\, dx$; $\int \frac{e^{5x}}{7+e^{5x}}\, dx$; $\int \frac{x}{\cos^2(1-x^2)}dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$; $\int e^{tg 2x}\frac{dx}{\cos^2 2x}$;

$\int \frac{\sin 2x}{9-\cos^2 2x}dx$; $\int (3x^2+1)\cdot ctg(x^3+x)dx$; $\int \frac{3dx}{x^2+3x+4}$; $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}}$;

$\int \frac{2x+15}{x^2+5x+6}\, dx$; $\int \frac{3x+1}{\sqrt{10x-x^2-21}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2\sin 4x\, dx$; $\int x^5\cdot\ln x\, dx$; $\int e^{2x}\sin 4x\, dx$; $\int \sqrt{e^{3x}-1}\, dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$;

$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\, dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{3x-1}{x^3-x}dx$; $\int \frac{x^6+x^5+x^3-x-1}{x^4+x^3}dx$; $\int \frac{2x^3-x^2+2x-1}{x^4+5x^2+4}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{3\cos x+2}$; $\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{9\cos^2 x+\sin^2 x}$; $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x}dx$; $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^{12} x}dx$;
$\int \sin^2 2x\cos^4 2x\ dx$; $\int \cos 2x\cos 5x\ dx$.

ВАРІАНТ № 23

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{\sec^2 x}{\sin^2(tgx)}dx$; $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+2)}dx$; $\int tg\sqrt{x}\ \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{4-5^{2x}}}$; $\int x^3\cos(x^4-4)\ dx$;

$\int \frac{\cos 3x}{4+\sin^2 3x}dx$; $\int \frac{1}{x^2}\cdot ctg\left(\frac{1}{x}\right)dx$; $\int e^{2x}\cdot \sin e^{2x}\ dx$; $\int \frac{\sin 2x}{9-\cos^2 2x}dx$;

$\int 7^{\cos x}\sin x\ dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}dx$; $\int \frac{x^3}{\sin(1+x^4)}dx$; $\int e^{ctg 2x}\frac{dx}{\sin^2 2x}$;

$\int \frac{dx}{(2x+3)\cdot \ln(x^2+3x-1)}$; $\int \frac{dx}{(\arccos x)^3\cdot\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{3dx}{\sqrt{-9x^2+6x+2}}$;

$\int \frac{4dx}{x^2+x-2}$; $\int \frac{5x+2}{4x^2+4x+10}\ dx$; $\int \frac{3x-1}{\sqrt{10x+x^2+22}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2\cos 4x\ dx$; $\int arctg 5x\ dx$; $\int e^{3x}\sin 4x\ dx$; $\int \sqrt{e^x+9}\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$;

$\int \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}\ dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{-x^2+2x-2}{x^3-3x^2+2x}dx$; $\int \frac{x^3-x-2}{x^4-2x^3}dx$; $\int \frac{x^4-x^3+5x^2-x+6}{x^4+4x^2+3}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{2-\sin x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{1+3\cos x}dx$; $\int \frac{dx}{2+2\sin^2 x}$; $\int \sin^6 x\cos^5 x\ dx$; $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{12} x}dx$;
$\int \cos^6 2x\ dx$; $\int \sin 2x\sin 6x\ dx$.

ВАРІАНТ № 24

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{1}{x^2}\cdot \sin\left(3+\frac{1}{x}\right)dx$; $\int \frac{dx}{(\arccos x+3)\cdot\sqrt{1-x^2}}$; $\int e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\int x^2 \cdot ctg(x^3+4)\ dx$; $\int \cos\left(\sqrt{x}+1\right)\ \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \sqrt[3]{\cos^5 3x} \cdot \sin 3x\ dx$; $\int \frac{7^x}{\cos^2(7^x)} dx$;

$\int \frac{x^2}{4-x^6} dx$; $\int x^3 \cdot 8^{x^4}\ dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+7)}$; $\int \frac{tg(\sqrt[5]{x^3}+3)}{\sqrt[5]{x^2}} dx$; $\int \frac{\cos 4x}{4+\sin^2 4x} dx$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt{9-ctg^2 x}}$; $\int \frac{x}{\sin(4+x^2)} dx$; $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{25+\sin^2 2x}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+7}$;

$\int \frac{3x-2}{x^2+3x+2}\ dx$; $\int \frac{5dx}{\sqrt{4x^2-4x+6}}$; $\int \frac{4x-1}{\sqrt{12x-4x^2-5}} dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2 e^{4x}\ dx$; $\int \arcsin 5x\ dx$; $\int e^{3x} \cos 4x\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}$; $\int \sqrt{36-x^2}\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{x^4-x^2-x-2}{x^3+x^2-2x} dx$; $\int \frac{-x^2+4x+4}{x^4+2x^3} dx$; $\int \frac{x^3+x^2+3x+3}{x^4+5x^2+6} dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x} dx$; $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$; $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; $\int \sin^3 x \cos^5 x\ dx$;

$\int \sin^4 3x \cos^4 3x\ dx$; $\int \sin 2x \sin 3x\ dx$.

ВАРІАНТ № 25

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{x}{\sin(2+x^2)} dx$; $\int ctg\left(3x+1\right) dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^6}} dx$; $\int \frac{5^x dx}{4+5^{2x}}$; $\int \frac{\cos 2x}{9-\sin^2 2x} dx$;

$\int x \cdot 3^{x^2} \cdot tg(3^{x^2})\ dx$; $\int \frac{\cos 2x + 1}{\sin 2x + 2x + 3} dx$; $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(\ln x)}$; $\int x \cdot \cos(x^2+4)\ dx$;

$\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int \frac{x^2}{\sin^2(x^3-1)} dx$; $\int 5^{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx$; $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{5-\ln^2 x}}$;

$\int (3x^2-2) \cdot \sin(x^3-2x)\ dx$; $\int \frac{e^x \cdot \sqrt{arctg^3 e^x}}{e^{2x}+1}\ dx$; $\int \frac{7dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$;

$\int \frac{3x-2}{x^2+10x+29}\ dx$; $\int \frac{3dx}{x^2-x+2}$; $\int \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2+6x-1}} dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\sin 2x\,dx$; $\int \arccos 7x\,dx$; $\int e^x\cos 7x\,dx$; $\int \sqrt{e^{2x}+4}\,dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$;

$\int \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{-x-4}{x^3-x^2-2x}dx$; $\int \frac{x^5-2x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$; $\int \frac{8}{x^4+10x^2+9}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{3-2\cos x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{1+4\sin x}dx$; $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+5\cos^2 x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$; $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{12} x}dx$;

$\int \sin^4 x\,dx$; $\int \cos 2x\cos 4x\,dx$.

ВАРІАНТ № 26

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{3^x dx}{5+3^{2x}}$; $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$; $\int e^{arctg\,3x}\frac{dx}{1+9x^2}$; $\int 5^x\cdot\cos(5^x)\,dx$; $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{9-\cos^2 5x}}dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$; $\int \frac{tg(\ln x)}{x}\,dx$; $\int (2x^3+1)\cdot\sin(x^4+2x)\,dx$;

$\int \frac{x}{16-x^4}dx$; $\int 4^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{dx}{x^2}$; $\int \frac{ctg(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{8\cos^3 x\sin x}{\cos^4 x+4}dx$; $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{(e^{2x}+3)^2}}\,dx$;

$\int \frac{x^2}{\sin^2(5+x^3)}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+20}}$; $\int \frac{3}{x^2+6x+18}\,dx$; $\int \frac{3x+1}{x^2+5x-6}\,dx$;

$\int \frac{x+4}{\sqrt{6x-x^2}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\cos 2x\,dx$; $\int \ln(x^2+7)\,dx$; $\int e^x\sin 7x\,dx$; $\int \sqrt{e^x+3}\,dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{dx}{x^3-6x^2+11x-6}$; $\int \frac{x^3-2x^2+2x-3}{x^4-2x^3+2x-1}dx$; $\int \frac{x^6+6x^4+x^3+6x^2+2x-8}{x^4+6x^2+8}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int\frac{dx}{2+3\sin x}$; $\int\frac{\sin^5 x}{2-\cos x}dx$; $\int\frac{dx}{1-3\sin^2 x}$; $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}dx$; $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$;
$\int\sin^4 2x\cos^4 2x\ dx$; $\int\sin 2x\sin 3x\ dx$.

ВАРІАНТ № 27

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int\frac{2^x dx}{9+2^{2x}}$; $\int x^2\cdot e^{x^3}dx$; $\int\frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}}dx$; $\int\frac{ctg(\ln x+1)}{x}\ dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{9-x}}$;

$\int e^x\cdot\cos(e^x)\ dx$; $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$; $\int\frac{dx}{\sin(6+2x)}$; $\int\frac{\sqrt{(3+arctg 2x)^3}}{4x^2+1}\ dx$;

$\int 4^x\cdot\cos(4^x)\ dx$; $\int\frac{dx}{x^2\cdot\cos^2\frac{1}{x}}$; $\int\frac{x^4}{16-x^{10}}dx$; $\int\frac{tg(\sqrt[5]{x^3}+4)}{\sqrt[5]{x^2}}dx$; $\int\frac{x^2-1}{\sin^2(x^3-3x)}\ dx$;

$\int\frac{2x+2\cos 2x+1{,}5\sqrt{x}}{x^2+\sin 2x+\sqrt{x^3}}dx$; $\int\frac{10}{x^2-x-6}\ dx$; $\int\frac{3x+1}{4x^2+4x+10}\ dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$;

$\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\cdot e^{2x}\ dx$; $\int x\cdot arctg 7x\ dx$; $\int e^{2x}\cos 5x\ dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+9}}$; $\int\sqrt{4-x^2}\ dx$;

$\int\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}\ dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int\frac{-x^4+2x^3+3x^2-x+1}{x^3-x}\ dx$; $\int\frac{2x^3-1}{x^4-x^3}dx$; $\int\frac{-4x}{x^4+6x^2+5}dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x}$; $\int\frac{\sin^3 x}{1+2\cos x}dx$; $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$; $\int\sin^3 x\cos^6 x\ dx$; $\int\frac{\sin^8 x}{\cos^{12} x}dx$;
$\int\sin^6 x\ dx$; $\int\sin 2x\cos 6x\ dx$.

ВАРІАНТ № 28

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int\frac{\cos 4x\sin 4x}{\cos^2 4x+3}dx$; $\int\frac{x^3}{\cos^2(x^4+1)}\ dx$; $\int\frac{(\arccos x)^7}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$; $\int x\cdot 6^{x^2}dx$;

$\int \sin x \cdot ctg(3-\sin x)\ dx ; \int \frac{7^x}{\sin^2(7^x)}\ dx ; \int \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin^2 x}} dx ; \int \sin\left(8x-3\right) dx ;$

$\int \frac{x^3}{9-x^8} dx ; \int tg\left(\frac{1}{x}+2\right)\frac{dx}{x^2} ; \int e^{ctg\,2x}\frac{dx}{\sin^2 2x} ; \int \frac{\cos(e^{-x})}{e^x}\ dx ; \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(4+x)} ;$

$\int \frac{dx}{\sin(4+3x)} ; \int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{5-\ln^2 3x}} ; \int \frac{dx}{x^2+2x+10} ; \int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}\ dx ;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{17+8x+x^2}} ; \int \frac{2x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx .$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x\cdot\sin 2x\ dx ; \int x^7\cdot\ln x\ dx ; \int e^{2x}\sin 5x\ dx ; \int \sqrt{e^{3x}-4}\ dx ; \int \frac{dx}{\sqrt{\left(49+x^2\right)^3}} ;$

$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\ dx .$

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{-3x+2}{x^3-3x^2+2x}\ dx ; \int \frac{x^6+2x^5+2x^4+x^3+1}{x^4+x^3} dx ; \int \frac{2x^3-x^2+14x-1}{x^4+8x^2+7} dx .$

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{3+\cos x} ; \int \frac{\cos^3 x}{2+3\sin x} dx ; \int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x} ; \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx ; \int \sin^3 x\cos^4 x\ dx ;$

$\int \sin^6 2x\cos^2 2x\ dx ; \int \cos 2x\cos 6x\ dx .$

ВАРІАНТ № 29

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{dx}{\sin(4+2x)} ; \int \frac{dx}{\cos^2 3x\cdot(4+tg^2 3x)} ; \int \frac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}+4}\ dx ; \int \frac{x^2}{\sqrt{7-x^6}} dx ;$

$\int \sqrt[5]{3+x-\sqrt{x}}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx ; \int \frac{3^x}{\cos^2(3^x)}\ dx ; \int ctg\left(7x+5\right)dx ; \int \frac{dx}{x\cdot\sin^2(\ln 5x)} ;$

$\int e^{\arccos 2x}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} ; \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x-25}} dx ; \int x^2\cdot\sin(x^3+1)\ dx ; \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(4-x)} ;$

$\int tg\left(\frac{1}{x}+2\right)\frac{dx}{x^2} ; \int 5^{\sin 2x}\cdot\cos 2x dx ; \int 7^{2x}\cdot\cos(7^{2x}-1)\ dx ; \int \frac{2dx}{\sqrt{6x-8-x^2}} ;$

$\int \frac{7dx}{x^2+4x+3} ; \int \frac{3x-1}{x^2+8x+20}\ dx ; \int \frac{2x+8}{\sqrt{4x^2-4x+6}} dx .$

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2 \cdot \cos 2x\ dx$; $\int arctg 6x\ dx$; $\int e^{3x} \sin 5x\ dx$; $\int \sqrt{e^x + 4}\ dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$;

$\int \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}\ dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{-x^2 - 4x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}\ dx$; $\int \frac{-2x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3} dx$; $\int \frac{x^5 + 7x^3 + 10x + 3}{x^4 + 7x^2 + 10} dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{3 + \sin x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{2 + 3\cos x} dx$; $\int \frac{dx}{8\sin^2 x + 1}$; $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$; $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx$; $\int \sin^6 x \cos^2 x\ dx$;

$\int \sin 4x \cos 3x\ dx$.

ВАРІАНТ № 30

Завдання 1. Інтеграли, що зводяться до табличних:

$\int \frac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)}\ dx$; $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^8}} dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 2x \cdot (3 + tg 2x)}$; $\int \frac{x + 1}{\cos^2(x^2 + 2x)}\ dx$;

$\int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 5x + 10)}$; $\int x \cdot 3^{x^2} \cdot tg 3^{x^2}\ dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt{4 - ctg^2 x}}$; $\int \cos\left(\sqrt[3]{x} + 5\right) \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

$\int e^{\ln x} \cdot \frac{dx}{x}$; $\int \frac{ctg(e^{-x})}{e^x}\ dx$; $\int \frac{\cos x}{9 - \sin^2 x} dx$; $\int x^3 \cdot \sin(x^4 + 2)\ dx$; $\int \sqrt[3]{\cos^2 3x} \cdot \sin 3x\ dx$

$\int 3^{tg 4x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 4x}$; $\int 7^{2x} \cdot \cos(7^{2x} - 1)\ dx$; $\int \frac{7dx}{x^2 + x + 2}$; $\int \frac{3x + 2}{x^2 + 2x - 3}\ dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 12x + 13}}$; $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{-x^2 + 4x + 1}} dx$.

Завдання 2. Методи інтегрування у невизначеному інтегралі:

$\int x^2 \cdot e^{2x}\ dx$; $\int \arcsin 6x\ dx$; $\int e^{3x} \cos 8x\ dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 5}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(25 + x^2\right)^3}}$;

$\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}\ dx$.

Завдання 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій:

$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\ dx$; $\int \frac{2x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^3} dx$; $\int \frac{-x^3 + x^2 - 4x + 9}{x^4 + 11x^2 + 18} dx$.

Завдання 4. Інтегрування тригонометричних функцій:

$\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$; $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}$; $\int \sin^5 x \cos^2 x\ dx$; $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^{10} x} dx$;

$\int \sin^4 x \cos^2 x\ dx$; $\int \sin 2x \sin 5x\ dx$.

Практичне заняття № 3

Визначений інтеграл, його обчислення та застосування. Невласний інтеграл

Мета: закріпити методи обчислення визначеного інтегралу, набути навичок та вмінь застосування визначеного інтегралу до обчислення площ фігур, довжин дук, об'ємів тіл.

Питання для самопідготовки:

– методи обчислення визначеного інтегралу: заміна змінної, інтегрування частинами;
– застосування інтегралу до обчислення площ фігур;
– застосування інтегралу до обчислення довжин дуг кривих;
– застосування інтегралу до обчислення об'ємів тіл;
– невласні інтеграли, дослідження їх на збіжність.

План практичного заняття

1. Обчислення визначених інтегралів.
2. Застосування визначеного інтегралу.
3. Невласні інтеграли.

Теоретичний довідник

Нехай $f(x)$ визначена в будь-якому $x \in [a;b]$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ існує і не залежить від вибору т. c_i, то $f(x)$ називають інтегрованою на [a;b], а границя називають ***визначеним інтегралом від функції*** $f(x)$ на [a; b] і позначають $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Властивості визначеного інтегралу

1. Для будь-якого числа k: $\int\limits_a^b kdx = k(b-a)$.

2. Якщо $f(x)$ інтегрована на [a; b], то $\forall\, k$ функція $kf\left(x\right)$також інтегрована на [a; b]: $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$

3. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів, тобто:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Зауваження. Властивість 3 має місце для будь-якого скінченного числа доданків.

4. Для інтегрованої функції $f(x)$ на проміжку [*a*; *b*] виконується:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5. Які б не були числа $a, b, c,$ має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Якщо всюди на відрізку [*a*; *b*], де $a < b$, функція $f(x) \geq 0,$ то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на [*a*; *b*] і $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

8. Якщо інтегрована на [*a*; *b*] функція $f(x)$ задовольняє нерівності $m \leq f(x) \leq M$, де m, M = const, відповідно min та max $f(x)$ на [*a*; *b*], то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

9. Якщо $f(x)$ інтегрована на проміжку [*a*; *b*], то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, (a \leq b).$$

Теорема про середнє. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку існує точка c така, що $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Зауваження: Теорема про середнє має геометричний зміст: величина визначеного інтеграла при $f(x) \geq 0$ дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b-a$.

Теорема про визначений інтеграл зі змінною верхньою межею. Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$

Теорема (формула Ньютона – Лейбніца) (*основна теорема інтегрального числення*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Якщо функція $F(x)$ є довільною її первісною на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Метод заміни змінної інтегрування. **Теорема.** Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a;b]$. Тоді, якщо:

1) функція $x=\phi(t)$ диференційована на $[\alpha;\beta]$ і $\phi'(t)$ неперервна на $[\alpha;\beta]$;

2) множиною значень функції $x=\phi(t)$ є відрізок $[a;b]$;

3) $\phi(\alpha)=a$ і $\phi(\beta)=b$, то має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\ [\phi(t)]\ \phi'(t)dt.$$

Ця формула називається *формулою заміни змінної у визначеному інтегралі* або *формулою інтегрування підстановкою.*

Метод інтегрування частинами

Теорема. Якщо функція $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, то має місце формула

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

Наближені обчислювання визначених інтегралів

1. Формула прямокутника

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}+x_i)}{2},$$

де *n* – кількість інтервалів Δx_i

2. *Формула трапеції*

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right],$$

де *n* – кількість інтервалів Δx_i.

3. *Формула параболи (Сімпсона*)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} \ [f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n} f_{2n-1}(x_i)+2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2n}(x_i)\ ],$$

де n – кількість інтервалів Δx_i.

Якщо фігура обмежена двома неперервними кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ і прямими $x=a, x=b,$ причому $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всіх $x\in[a,b]$, то площа визначається за формулою: $S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx.$

Площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданої рівняннями в параметричній формі:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \alpha\le t\le\beta,$$

де функція $y(t)\ge 0$ неперервна, а $x(t)$ – неперервно диференційована, обчислюється за формулою:

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Зауваження. Нижня межа інтегрування α у формулі повинна відповідати *лівій* точці *a*, а верхня – *правій* точці *b* на осі *Ox*.

Площа криволінійного сектора, обмеженого неперервною кривою $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\le\varphi\le\beta)$ і двома полярними радіусами, що відповідають значенням полярного кута $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$, обчислюється за формулою: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$

Зауваження. Для замкнутої кривої, що охоплює полюс, полярний кут φ змінюється від 0 до 2π.

Під ***довжиною дуги*** АВ розуміють границю до якої прямує довжина ламаної, вписаної в цю дугу, коли число частин ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої частини прямує до нуля.

Нехай на відрізку $[a,b]$ плоска крива задана рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – неперервна разом із похідною функція. Тоді ***довжина дуги*** обчислюється за формулою: $l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.$

Довжина дуги *плоскої* кривої, заданої параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ (\alpha\le t\le\beta)$, де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні на $[\alpha,\beta]$

функції, що мають неперервні похідні, обчислюється за формулою: $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt.$

Довжина дуги *просторової* лінії, заданої параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $(\alpha\le t\le\beta)$, де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – неперервно диференційовані на $[\alpha,\beta]$ функції, обчислюється за формулою:

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}dt.$$

Довжина дуги кривої, заданої рівнянням у полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\le\varphi\le\beta)$, де $\rho(\varphi)$ і $\rho'(\varphi)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$, обчислюється за формулою:

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\rho(\varphi)\right]^2+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}d\varphi.$$

Якщо плоска крива L задана параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, $x_t',y_t'\in C[\alpha;\beta]$ і $x_t'(t)\ne 0$ при $\forall t\in[\alpha;\beta]$, то в інтегралі $\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$ можна зробити заміну змінної $x=x(t)$, $dx=x_t'dt$ і

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}:\ L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2}x_t'\,dt.=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\ dt.$$

Нехай площа перерізу деякого тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, подана у вигляді $S=S(x)$, де $x\in[a,b]$. Тоді об’єм частини тіла, укладеної між площинами $x=a$ і $x=b$, обчислюється за формулою: $V=\int\limits_a^b S(x)dx.$

Об’єм тіла, утвореного обертанням *навколо осі Ox* криволінійної трапеції, обмеженої неперервною на відрізку $[a,b]$ кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, обчислюється за формулою: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$, $V_{ox}=\pi\int\limits_a^b y^2dx$; $V_{oy}=\pi\int\limits_c^d x^2dy$.

Площа поверхні обертання: $S_x=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$.

Якщо гладка крива L задана параметрично, тобто $x=x(t),y=y(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, $x_t',y_t'\in C[\alpha;\beta]$ і $x_t'(t)\ne 0$ при $\forall t\in[\alpha;\beta]$, то

$$S_x=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt.$$

Невласні інтеграли

При означенні інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ припускалось, що

1) проміжок $[a, b]$ скінченний;
2) підінтегральна функція $f(x)$ визначена та неперервна на $[a, b]$.

Такий визначений інтеграл називається власним. Якщо хоча б одна з умов порушується, інтеграл називається ***невласним***.

Інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \le x < \infty$. Тоді інтеграл зі змінною верхньою межею $I(b) = \int_a^b f(x)dx$ є неперервною функцією верхньої межі b. Якщо існує ***скінченна*** границя $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$ то її називають ***невласним інтегралом першого роду*** від функції $f(x)$ на інтервалі $[a;\infty)$ і позначають так: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$.

При цьому кажуть, що невласний інтеграл ***збігається***. Якщо границя не існує або нескінченна, то кажуть, що невласний інтеграл ***розбігається***.

Аналогічно визначаються невласні інтеграли для інтервалів $(-\infty; b)$, $(-\infty; +\infty)$: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$ $\quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)dx,$

де c – довільна фіксована точка осі Ox.

Якщо обчислити первісну для $f(x)$ важко, то існують ознаки, що дозволяють вирішити питання про збіжність чи розбіжність невласного інтеграла.

Ознаки порівняння для невласних інтегралів першого роду.

Теорема 1. Нехай для всіх $x \ge a$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тоді: 1) якщо інтеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$, причому $\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty \varphi(x)dx$; 2) Якщо інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ розбігається, то й інтеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ розбігається ; 3) якщо при всіх

$x \in [a;+\infty)$ $\varphi(x)>0$, то інтеграли $\int_a^{\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Якщо підінтегральна функція змінює знак, то застосовують таку ознаку збіжності.

Теорема 2. Якщо збігається інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$, то збігається й інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$, який у цьому випадку називають абсолютно збіжним. Якщо інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то перший інтеграл називається *умовно збіжним.*

Корисно мати на увазі, що $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \le 1$.

Інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b)$, а при $x=b$ або невизначена, або перетворюється на нескінченність. Невласний інтеграл другого роду визначається таким способом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо існує границя, що стоїть праворуч, то невласний інтеграл називається *збіжним*, в іншому разі він називається *розбіжним*.

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x=a$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ розривна в точці $x=c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Якщо *обидві* границі в правій частині формули існують і скінченні, то інтеграл називають *збіжним*, інакше – розбіжним.

Для невласних інтегралів другого роду застосовують ознаки порівняння, аналогічні ознакам порівняння для інтегралів першого роду.

Корисно мати на увазі, що $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$ збіжний при $\alpha<1$ і розбіжний при $\alpha \geq 1$.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2$ і прямою $y=x+2$.

Розв'язування

Знайдемо координати точок перетину параболи і прямої:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0, \\ y=x+2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=1, \end{cases} \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=4. \end{cases} \Rightarrow M_1(-1,\ 1),\ M_2(2,4).$$

За формулою площі одержуємо:

$$S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}=4{,}5\ \text{(од.}^2\text{)}.$$

Приклад 2. Обчислити площу, обмежену аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 2).

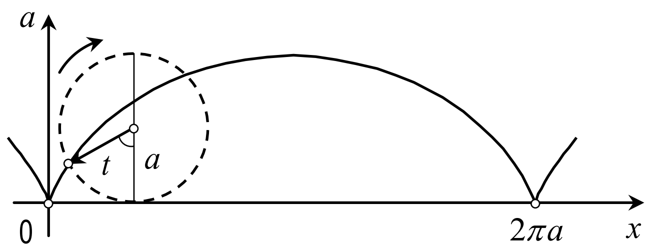


Рисунок 2 – Циклоїда

Розв'язування

За формулою довжини дуги $dx=a(t-\sin t)'\,dt=a(1-\cos t)dt$, маємо:

$$S = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right] dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (3 - 4\cos t + \cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(3t - 4\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Приклад 3. Обчислити площу, обмежену кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 3).

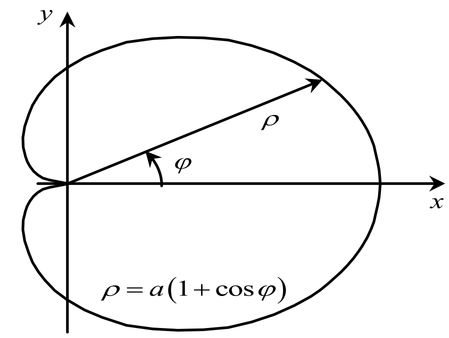


Рисунок 3 – Кардіоїда

Розв'язування

З урахуванням симетрії фігури одержимо:

$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} [1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)] d\varphi = \frac{1}{2}(3\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

Приклад 4. Обчислити довжину дуги лінії $y = 2\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)$ на відрізку [0; 4].

Розв'язування

Перетворимо вираз під знаком кореня у формулі довжини дуги:

$$y' = \left(e^{x/4} - e^{-x/4}\right)/2,\ 1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{x/4} - e^{-x/4}\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(e^{x/2} - 2 + e^{-x/2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{x/2} + 2 + e^{-x/2}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)\right]^2.$$

Отже, довжину дуги: $l = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)dx = 2\left(e^{x/4} - e^{-x/4}\right)\Big|_0^4 = 2\left(e - e^{-1}\right).$

Приклад 5. Обчислити довжину дуги лінії

$$x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t,\ \ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t \quad \left(0 \le t \le \pi\right).$$

Розв'язування

Знайдемо підінтегральну функцію та обчислимо довжину дуги:

$$x'(t) = 2t\sin t + \left(t^2 - 2\right)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t,$$

$$y'(t) = -2t\cos t - \left(2 - t^2\right)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t.$$

$$\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2} = \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t} = t^2, \Rightarrow l = \int\limits_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}.$$

Приклад 6. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a\left(1 + \cos\varphi\right)$ (див. рис. 3).

Розв'язування

Унаслідок симетрії кривої досить обчислити довжину верхньої половини кардіоїди і подвоїти результат.

За формулою довжини дуги маємо:

$$l = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{a^2\left(1 + \cos\varphi\right)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int\limits_0^\pi \sqrt{2\left(1 + \cos\varphi\right)}d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^\pi \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 4a\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi = 8a.$$

Приклад 7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$ і $y = 0,\ x \in [0; \pi]$.

Розв'язування

Застосовуючи формулу об'єму, одержимо:

$$V = \pi\int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi \left(1 - \cos 2x\right)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Приклад 8. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

Розв'язування

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_1^b=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2}-\operatorname{arctg}1\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 9. Дослідити збіжність інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx.$

Розв'язування

Це один з інтегралів, що не беруться в елементарних функціях.

При $x\geq 1$ виконується нерівність $0<\frac{e^{-x}}{x}\leq e^{-x}$. Обчислимо інтеграл

$$\int_1^{\infty}e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{-1}\right)=e^{-1}.$$

Оскільки інтеграл $\int_1^{\infty}e^{-x}dx$ збігається, то за теоремою 1 збігається й інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx,$ причому його значення не перевищує $1/e$.

Приклад 10. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Розв'язування

$$\int_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\left\{\begin{aligned}&t=1-x^2,\text{ при } x=0\;\; t=1\\&dt=-2xdx,\text{ при } x=1-\varepsilon\;\; t=2\varepsilon-\varepsilon^2\end{aligned}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2}\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{t}\Bigg|_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}-1\right)=1.$$

Інтеграл збігається.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_1^{5}\frac{dx}{3x-2}$ *Відповідь.* $\frac{\ln 13}{3}$. 2. $\int_1^{2}\frac{dx}{x^2+5x+4}$ *Відповідь.* $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$.

3. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ *Відповідь.* $\ln 2$. 4. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}dx$ *Відповідь.* 0.

5. $\int\limits_0^1 \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *Відповідь.* $\frac{\pi^3}{24}$. 6. $\int\limits_1^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$ *Відповідь.* $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

7. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$ *Відповідь.* $\frac{\pi}{4}$. 8. $\int\limits_0^{\pi/4} e^x \sin 2xdx$ *Відповідь.* $0{,}3+0{,}1e^{\pi/6}$.

9. $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ *Відповідь.* $2(2-arctg2)$.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

1. $y=-x^2,\quad x+y+2=0$ *Відповідь.* $S=4{,}5$.
2. $y=\frac{16}{x^2},\quad y=17-x^2,\quad x>0$ *Відповідь.* $S=18$.
3. $y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad x=0.$ *Відповідь.* $S=\sqrt{2}-1$.
4. $y=e^x,\quad y=e^{-x},\quad x=1$ *Відповідь.* $S=\frac{(e-1)^2}{e}$.

Обчислити довжини дуг кривих:

1. $9y^2=4(3-x)^3$ між точками перетину з віссю Oy. *Відповідь.* $\frac{28}{3}$.
2. $x=3\cos^3 t,\quad y=3\sin^3 t,\quad t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. *Відповідь.* 4,5.
3. $y=\ln(\sin x)$ від $x=\frac{\pi}{3}$ *до* $x=\frac{\pi}{2}$. *Відповідь.* $\ln\sqrt{3}$.
4. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ від $y=1$ до $y=e.$ *Відповідь.* $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

Знайти об'єми тіл, утворених обертанням фігур, обмеженими заданими лініями, навколо вказаних осей координат:

1. $y=\sin x$ (одною хвилею), $y=0$ навколо осі Ox. *Відповідь.* π^2.
2. $y^2+x-4=0,\quad x=0$ навколо осі Oy. *Відповідь.* $34\frac{2}{15}\pi$.
3. $y=e^x,\quad x=0,\quad y=0$ навколо осі Ox. *Відповідь.* $\frac{\pi}{2}$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла, його геометричний та економічний зміст.

2. Перерахувати властивості визначеного інтеграла.
3. Чому дорівнює похідна інтеграла зі змінною верхньою межею?
4. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Запишіть формулу заміни змінної для визначеного інтеграла.
6. Запишіть формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла.
7. За якими формулами обчислюється площа плоскої фігури?
8. За якою формулою обчислюється об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі Ox (Oy)?
9. За якими формулами обчислюється довжина дуги плоскої кривої?
10. Які інтеграли називаються невласними?
11. Сформулюйте означення невласних інтегралів першого та другого родів.
12. В якому випадку невласні інтеграли називаються збіжними (розбіжними)?

Індивідуальні домашні завдання

ВАРІАНТ № 1

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}\,dx;\ \int_0^2 \ln(x^2+4)\,dx;\ \int_0^3 \frac{4x}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2,\ y=2-x^2;\ \begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases},\ \frac{\pi}{6}\le t\le 0;\ \rho=2\cos 2\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15};\ \begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases},\ 0\le t\le\pi;\ \rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$, б) $y=\sin x,\ y=0,\ 0\le x\le\pi$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx,\ \int_e^\infty \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}},\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}},\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg2x\,dx.$$

ВАРІАНТ № 2

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx;\ \int_0^1 x^3 arctgx\,dx;\ \int_0^1 \frac{4x}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}-\sqrt[3]{9x-1}+1}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 + 4x,\ y = 4 + x;\ \begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases},\ \frac{5\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{6};\ \rho = 3\sin 6\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2;\ \begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi;$$

$$\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}},\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

$$\text{а) } x^2 + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1,\ \text{б) } y = \frac{6}{x},\ x = 0,\ y = 0,\ y = 6.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx,\ \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^6 x},\ \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}},\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}.$$

ВАРІАНТ № 3

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^1 \frac{4arctgx - x}{x^2+1}\,dx;\ \int_{-1}^0 (2x+3)\cdot e^{-2x}\,dx;\ \int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x+1} + 1}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y^2 = x^3,\ y = 8,\ x = 0;\ \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases},\ \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{3};\ \rho = \cos\varphi,\ \rho = 2\cos\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = \sqrt{1 - x^2} - \arcsin x,\ 0 \le x \le \frac{7}{9};\ \begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2;$$

$$\rho = \sqrt{2}e^{\varphi},\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

$$\text{а) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,\ \text{б) } y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 4,\ y = 0.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_{-\infty}^0 x^3 \cdot e^{x^2}\,dx,\ \int_0^{\infty} \frac{3x+1}{3x^2+2x-3}\,dx,\ \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2},\ \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}.$$

ВАРІАНТ № 4

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx;\ \int_0^1 3x^2\cdot\arcsin x\,dx;\int_{-1}^0 \frac{7x+16}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$4y=x^2,\ y^2=4x;\ \begin{cases} x=8\cos^3 t\\ y=3\sin^3 t\end{cases},\ \frac{\pi}{4}\le t\le 0;\ \rho=3\cos 2\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15};\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t)\end{cases},\ 0\le t\le\pi;$$

$$\rho=5e^{\frac{5\varphi}{12}},\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$, б) $y=\frac{1}{4}x^2,\ y=4.$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2},\ \int_e^\infty \frac{dx}{x\cdot\ln x},\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},\ \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{1-\cos 4x}.$$

ВАРІАНТ № 5

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cdot\sin 2x\,dx;\ \int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2,\ y=8-x^2;\ \begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases},\ \frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4};\ \rho=2\sin 2\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=-\ln(\cos x),\ 0\le x\le\frac{\pi}{6};\ \begin{cases} x=10\cos^3 t\\ y=10\sin^3 t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2};$$

$$\rho=6e^{\frac{12\phi}{5}},\ -\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, б) $y=4x^2,\ x=2,\ y=0.$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-x^3}\ dx,\ \int_e^{\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\ dx,\ \int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+2}},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} tgx\ dx.$$

ВАРІАНТ № 6

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sin x+2\cos x}{(2\sin x-3\cos x)^3}\ dx;\ \int_{-1}^{2}3x^2\cdot\ln(2+x)\ dx;\ \int_0^3\frac{15x}{\sqrt[4]{(5x+1)^3}+\sqrt[4]{5x+1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$2y=x^3,\ y^2=2x;\qquad \begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases},\ \frac{2\pi}{3}\le t\le\frac{4\pi}{3};$$

$\rho=2\sin\varphi,\ \rho=3\sin\varphi.$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=e^x+6,\ \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15};\ \begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t)\\ y=e^t(\cos t-\sin t)\end{cases},\ 0\le t\le\pi;$$

$$\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу,
б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$, б) $y=x^3,\ y=4x,\ x>0.$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ dx,\ \int_e^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^4 x},\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}},\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}.$$

ВАРІАНТ № 7

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}\ dx;\int_0^2 arctg\frac{x}{2}\ dx;\int_0^5\frac{27x}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+\sqrt[4]{3x+1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 + 2x,\ \ y = 2 + x\,;\ \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases},\ \ \frac{\pi}{3} \le t \le 0\,;\ \rho = 2\cos 3\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = 2 + \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x},\ \frac{1}{4} \le x \le 1\,;\ \begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases},\ \ \pi \le t \le 2\pi\,;$$

$$\rho = 3e^{\frac{4\varphi}{3}},\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$, б) $y = \dfrac{5}{x},\ \ y + x = 6.$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_{-\infty}^{0} x^4 \cdot e^{x^5} dx\,,\ \int_{0}^{\infty} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}\, dx\,,\ \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^3}}\,,\ \int_{1}^{e} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}\,.$$

ВАРІАНТ № 8

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{1}^{4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2}\, dx\,;\int_{0}^{\pi} x \cdot \cos\frac{x}{2}\, dx\,;\int_{1}^{4} \frac{13 - 5x}{\sqrt[4]{(5x-4)^3} + 3\sqrt[4]{5x-4}}\, dx\,.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = -x^2 + 4x,\ \ y = x^2 - 4x\,;\ \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases},\ \ \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}\,;\ \rho = 3\sin 5\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = \ln(x^2 - 1),\ \ 2 \le x \le 3\,;\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t \end{cases},\ \ \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3};$$

$$\rho = \sqrt{2} \cdot e^{\varphi},\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$; б) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\ dx$; $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$; $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)^2}}$; $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1+\cos 6x}$.

ВАРІАНТ № 9

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\ dx;\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x\ dx;\int_0^5 \frac{3x}{\sqrt[4]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y^2=x^3,\ y=0,\ x=8;\begin{cases} x=6(t-\sin t) \\ y=6(1-\cos t) \end{cases},\ \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{5\pi}{3};$$

$\rho=\cos\varphi,\ \rho=3\cos\varphi.$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\ 0\le x\le\frac{8}{9};\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t) \\ y=3(\sin t-t\cos t) \end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{3};$$

$\rho=5\cdot e^{\frac{5}{12}\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу; б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

$$\text{а) } x^2+y^2+\frac{z^2}{25}=1;\ \text{б) } y=9x^2,\ x=3,\ y=0.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}\ dx;\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}};\int_1^{e}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^5 x}};\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}.$$

ВАРІАНТ № 10

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\cdot\ln(\cos x)\ dx;\int_1^{e}\frac{\ln^2 x}{x^3}\ dx;\int_1^2\frac{5x}{\sqrt[4]{5x^2-4}+\sqrt{5x^2-4}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2+3x,\ y=3+x;\ \begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases},\ \frac{\pi}{6}\le t\le 0;\ \rho=3\cos 3\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\ln(1-x^2),\ 0\le x\le\frac{1}{4};\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{3};$$

$$\rho=12\cdot e^{\frac{12}{5}\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy.

$$\textbf{а)}\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1;\text{б)}\ y=x^3,\ y=9x,\ x>0.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^\infty\frac{x+2}{x^2+4x+1}\ dx;\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^2}\ dx;\int_{-16}^0\frac{dx}{\sqrt[4]{(16+x)^3}};\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos 2x}$$

ВАРІАНТ № 11

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x-arctg^4x}{1+x^2}\ dx;\int_0^3\ln(x^2+9)\ dx;\int_0^3\frac{27x}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}+3\sqrt[3]{3x-8}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$3y=x^2,\ y^2=3x;\ \begin{cases}x=9\cos t\\ y=8\sin t\end{cases},\ \frac{5\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{6};\ \rho=2\sin 6\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=2+\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ 0\le x\le 1;\begin{cases}x=6\cos^3 t\\ y=6\sin^3 t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{3};$$

$$\rho=1-\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

$$\text{а)}\ x^2+\frac{y^2}{9}+z^2=1;\ \text{б)}\ y=x^2,\ x=y^2.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^\infty\frac{arctgx}{1+x^2}\ dx;\int_e^\infty(x^2+3)\cdot x\ dx;\int_0^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}};\int_1^e\frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}.$$

ВАРІАНТ № 12

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + arctgx}{1+x^2}\ dx;\int_0^3 arctg\frac{x}{3}\ dx;\int_0^1 \frac{27x}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}+3\sqrt[3]{9x-1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 + x,\ \ y = x+1;\ \begin{cases} x = 6(t-\sin t) \\ y = 6(1-\cos t) \end{cases},\ \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3};$$

$\rho = \sin\varphi,\ \ \rho = 2\sin\varphi.$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = 1-\ln(\cos x),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6};\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases},\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi;$$

$$\rho = 2(1-\cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}.$$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$; б) $2x = y^2,\ \ x = 2.$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+10x+50};\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x}\ dx;\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-8)^2}};\int_0^{\frac{\pi}{6}} tg3x\ dx.$$

ВАРІАНТ № 13

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + arctgx}{1+x^2}\ dx;\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\sin 2x\ dx;\int_0^7 \frac{27x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{x+1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$5y = x^2,\ \ y^2 = 5x;\ \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases},\ \frac{\pi}{4} \le t \le 0;\ \rho = 2\cos 4\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = e^x + 13,\ \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24};\ \begin{cases} x = 2{,}5(t-\sin t) \\ y = 2{,}5(1-\cos t) \end{cases},\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi;$$

$$\rho = 3(1+\sin\varphi),\ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0.$$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

$$\text{а) } x^2+\frac{y^2}{16}+z^2=1;\ \text{б) } y=\frac{3}{x},\ \ y+x=4.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{x^4+3}\,dx;\int_0^{\infty}\frac{x-1}{x^2-2x+10}\,dx;\int_0^3\frac{dx}{(x-3)^2};\int_1^e\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}.$$

ВАРІАНТ № 14

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^e\frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx;\int_0^1(x+1)\cdot e^{2x}\,dx;\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2+5x,\ \ y=x+5;\begin{cases}x=2\cos t\\ y=4\sin t\end{cases},\ \frac{2\pi}{3}\le t\le\frac{\pi}{3};\rho=3\sin 2\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x},\ 0\le x\le\frac{1}{4};\ \begin{cases}x=3{,}5(2\cos t-\cos 2t)\\ y=3{,}5(2\sin t-\sin 2t)\end{cases},\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2};$$

$$\rho=4(1-\sin\varphi),\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}.$$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

$$\text{а) } \frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1;\ \text{б) } y=x^3,\ \ y=0,\ \ x=1.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}}\,dx;\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5};\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}};\int_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{dx}{1-\cos 6x}.$$

ВАРІАНТ № 15

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^e\frac{x+\ln x}{x}\,dx;\int_0^1 x^2\cdot\sin 3x\,dx;\int_1^4\frac{3x-3}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2,\ y = 18 - x^2;\ \begin{cases} x = 12(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases},\ \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{3};\ \rho = \cos\varphi,\ \rho = 4\cos\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = 2 - e^x,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8};\ \begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le \pi;$$

$$\rho = 5(1 - \cos\varphi),\ -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

$$\text{а) } x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1;\ \text{б) } y = \frac{1}{3}x^2,\ x = 3,\ y = 0.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x}\ dx;\ \int_e^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x}\ dx;\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}};\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)^4}}.$$

ВАРІАНТ № 16

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1} \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}\ dx;\ \int_{-2}^{1} 3x^2 \cdot \ln(x+3)\ dx;\ \int_0^3 \frac{5}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + \sqrt[4]{5x+1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 - x,\ y = 1 - x;\ \begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases},\ \frac{\pi}{3} \le t \le 0;\ \rho = 3\cos 4\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le x \le \frac{15}{16};\ \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi;$$

$$\rho = 6(1 + \sin\varphi),\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

$$\text{а) } \frac{x^2}{25} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1;\ \text{б) } y^2 = 5x,\ x = 5$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty}\frac{2x-5}{x^2-5x+7}\,dx;\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^5 x};\int_0^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};\int_0^{\pi/10} tg5x\,dx.$$

ВАРІАНТ № 17

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arccos^3 x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;\int_0^{0,25} arctg4x\,dx;\int_0^5\frac{6}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+2\sqrt[4]{3x+1}}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2,\ y=50-x^2;\ \begin{cases}x=3\sqrt{2}\cos t\\ y=2\sqrt{2}\sin t\end{cases},\ \frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{6};\ \rho=2\sin 3\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=1-\ln\sin x,\ \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2};\ \begin{cases}x=4(t-\sin t)\\ y=4(1-\cos t)\end{cases},\ \frac{\pi}{2}\le t\le\frac{2\pi}{3};$$

$$\rho=7(1-\sin\varphi),\ -\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$; б) $xy=4,\ x+y=5$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{(x^2+2)^3}\,dx;\int_e^{\infty}\frac{\ln^4 x}{x}\,dx;\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos x}.$$

ВАРІАНТ № 18

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,dx;\int_0^{\pi/4} x\cdot\cos 2x\,dx;\int_1^4\frac{4x}{\sqrt[4]{(5x-4)^2}+3\sqrt[4]{5x-4}}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2-2x,\ y=x-2;\ \begin{cases}x=4(t-\sin t)\\ y=4(1-\cos t)\end{cases},\ \frac{2\pi}{3}\le t\le\frac{4\pi}{3};$$

$\rho=\sin\varphi,\ \rho=3\sin\varphi.$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$y = 1 - \ln(x^2 - 1),\ 3 \le x \le 4$; $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases},\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$;

$\rho = 8(1 - \cos\varphi),\ -\dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le 0.$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{16} = 1$; б) $y = x^3,\ x = 2,\ y = 0.$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^x\ dx;\ \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\ dx;\ \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{\ln^3 x}};\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

ВАРІАНТ № 19

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5}\ dx;\ \int_0^{1/3} \arcsin 3x\ dx;\ \int_0^5 \frac{3}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$7y = x^2,\ y^2 = 7x$; $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases},\ \dfrac{\pi}{6} \le t \le 0$; $\rho = 2\cos 5\varphi.$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5,\ \dfrac{1}{9} \le x \le 1$; $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$;

$\rho = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}.$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$; б) $2y = x^2,\ y^2 = 2x.$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} (x^3+1)^5 \cdot x^2\ dx;\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 18};\ \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^3 x}};\ \int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{(32-x)^3}}.$$

ВАРІАНТ № 20

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} ctgx \cdot \ln\sin x\ dx;\ \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\ dx;\ \int_0^3 \frac{5x}{\sqrt[4]{(5x^2-4)^3} + \sqrt[4]{5x^2-4}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2-2x,\ \ y=2-x;\begin{cases}x=4\sqrt{2}\cos t\\ y=3\sqrt{2}\sin t\end{cases},\ \frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4};\rho=3\sin 3\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x+1,\ 0\le x\le\frac{9}{16};\ \begin{cases}x=4\cos^3 t\\ y=4\sin^3 t\end{cases},\ \frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{4};$$

$$\rho=2\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{4}{3}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\dfrac{x^2}{9}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$; б) $y^3=x,\ \ x=1$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^\infty x^3\cdot e^{-x^2}\ dx;\int_0^\infty\frac{4x-1}{2x^2-x+5}\ dx;\int_1^e\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}};\ \int_0^5\frac{dx}{(x-5)^4}.$$

ВАРІАНТ № 21

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^1\frac{x^3+x}{1+x^4}\ dx;\int_0^5\ln(x^2+25)\ dx;\int_0^3\frac{3}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}+4\sqrt[3]{3x-8}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2,\ \ y=32-x^2;\ \begin{cases}x=8(t-\sin t)\\ y=8(1-\cos t)\end{cases},\ \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{5\pi}{3};$$

$$\rho=2\cos\varphi,\ \ \rho=4\cos\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\ln(\sin x),\ \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2};\ \begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t\end{cases},\ \ 0\le t\le 2\pi;$$

$$\rho=2\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{5}{12}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=1$; б) $3y=x^2,\ \ y^2=3x$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)^5}\,dx\,;\int_0^{\infty}\frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx\,;\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}\,;\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{1-\cos 3x}\,.$$

ВАРІАНТ № 22

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x + x\cos x}{(x\sin x)^2}\,dx\,;\int_0^{1/2} arctg 2x\,dx\,;\int_0^1\frac{3}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}+2\sqrt[3]{9x-1}}\,dx\,.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2-3x,\ y=3-x\,;\ \begin{cases} x=16\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t\end{cases},\ \frac{\pi}{6}\le t\le 0\,;\ \rho=3\cos 5\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\ln 7-\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}\,;\ \begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t)\end{cases},\ 0\le t\le\frac{3\pi}{2}\,;$$

$$\rho=2\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{12}{5}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$; б) $y=\dfrac{1}{8}x^3,\ x=4,\ y=0$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_{-\infty}^0 x^3\cdot e^{x^2}\,dx\,;\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx\,;\int_1^e\frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{\ln^2 x}}\,;\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^3}\,.$$

ВАРІАНТ № 23

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{e+2}^{e^2+2}\frac{\ln(x-2)+1}{x-2}\,dx\,;\int_0^{\pi}x\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx\,;\int_0^7\frac{3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}}\,dx\,.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y^2=x^3,\ \ x=4\,;\ \begin{cases} x=6\cos t \\ y=4\sin t\end{cases},\ \frac{5\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{6}\,;\ \rho=2\sin 4\phi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ 0\le x\le 1\,;\ \begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t)\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\,;\ \rho=4\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{3}{4}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$; б) $xy=6,\ x+y=7$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_e^{\infty}\frac{x}{x\cdot\ln^2 x}\,dx;\int_0^{\infty}\frac{6x+1}{3x^2+x+2}\,dx;\int_0^8\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}};\int_{\pi/8}^{\pi/4}\frac{dx}{1+\cos 4x}$$

ВАРІАНТ № 24

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{-1}^{0}\frac{tg^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,dx;\int_0^{\pi}x^2\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx;\int_0^3\frac{9(x-1)}{\sqrt[3]{(3x-4)^3}+\sqrt[3]{3x-4}}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2-2x,\ y=2x-x^2;\ \begin{cases}x=10(t-\sin t)\\ y=10(1-\cos t)\end{cases},\ \frac{2\pi}{3}\le t\le\frac{4\pi}{3};$$

$\rho=\sin\varphi,\ \rho=4\sin\varphi.$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=1-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\le x\le\frac{3}{4};\ \begin{cases}x=4(2\cos t-\cos 2t)\\ y=4(2\sin t-\sin 2t)\end{cases},\ 0\le t\le\pi;$$

$$\rho=3\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{3}{4}.$$

Завдання 4. Обчислити об’єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{16}=1$; б) $y^3=2x,\ x=4$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)^6}\,dx;\int_e^{\infty}\frac{\ln^5 x}{x}\,dx;\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{1-\cos^2 x};\int_1^e\frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{\ln x}}.$$

ВАРІАНТ № 25

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^1\frac{x^3+1}{\left(1+4x+x^4\right)^2}\,dx;\int_0^1(2x+1)\cdot e^{-x}\,dx;\int_{-1}^{0}\frac{7}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+3\sqrt[3]{7x+8}}\,dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 - 4x,\ \ y = 4 - x\,;\ \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases},\ \ \frac{\pi}{4} \le t \le 0\,;\ \ \rho = 2\cos 6\phi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = \ln(\cos x) + 2,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}\,;$$

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases},\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,; \rho = 5\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{12}{5}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2 + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 1$; б) $4y = x^2,\ \ y^2 = 4x$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\ dx\,; \int_0^{\infty} \frac{3x+1}{3x^2+2x+5}\ dx\,; \int_1^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln^4 x}}\,; \int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,.$$

ВАРІАНТ № 26

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x + arctg^2 x}{1+x^2}\ dx\,; \int_{-4}^{-1} 3x^2 \cdot \ln(x+5)\ dx\,; \int_0^{3} \frac{27x}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + 2\sqrt[4]{5x+1}}\ dx$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y^3 = x^2,\ \ y = 4\,;\ \begin{cases} x = 4\sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \end{cases},\ \ \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}\,;\ \ \rho = 3\sin 4\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = e^x + 26,\ \ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}\,;\ \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases},\ \ 0 \le t \le 3\pi\,;$$

$$\rho = 2\cos\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$; б) $y^2 = 3x,\ \ x = 3$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx\,;\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}\,;\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\,;\int_0^8\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^4}}\,.$$

ВАРІАНТ № 27

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{\sin 1}\frac{\arcsin^3 x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,;\int_0^3 arctg\frac{x}{3}\,dx\,;\int_0^5\frac{9}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+4\sqrt[4]{3x+1}}\,dx\,.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2-5x,\ y=5-x\,;\ \begin{cases}x=10(t-\sin t)\\ y=10(1-\cos t)\end{cases},\ \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{5\pi}{3}\,;$$

$$\rho=2\cos\varphi,\ \rho=3\cos\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=\frac{1}{4}(3+e^{2x}+e^{-2x})\ 0\le x\le 2\,;\ \begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{4}\,;$$

$$\rho=8\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

а) $x^2+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$; б) $xy=2,\ x+y=3$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}\,;\int_0^{\infty}\frac{x+3}{x^2+6x+1}\,dx\,;\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}\,;\int_1^y\frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{\ln^3 x}}\,.$$

ВАРІАНТ № 28

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^{1/3}\frac{18x-arctg3x}{1+9x^2}\,dx\,;\int_0^{\pi/6}x\cdot\cos 3x\,dx\,;\int_0^3\frac{25x}{\sqrt{5x+1}+\sqrt[4]{5x+1}}\,dx\,.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y=x^2-4,\ y=2-x\,;\ \begin{cases}x=8\cos^3 t\\ y=3\sin^3 t\end{cases},\ \frac{\pi}{3}\le t\le 0\,;\ \rho=3\cos 6\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y=-\sqrt{x-x^2}+\arccos\sqrt{x}+4,\ 0\le x\le\frac{1}{2}\,;\ \begin{cases}x=2(\cos t+t\sin t)\\ y=2(\sin t-t\cos t)\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\,;$$

$\rho = 6\cos\varphi,\ 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{3}.$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:.

$$\text{а) } x^2 + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1;\ \text{б) } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1,\ y = 3,\ y = -3.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\ dx;\ \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}};\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x)^4}};\ \int_0^{\pi/8} tg 4x\ dx$$

ВАРІАНТ № 29

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_0^1 \frac{x^5 + x^2}{1 + x^6}\ dx;\ \int_0^2 \arcsin\frac{x}{2}\ dx;\ \int_0^5 \frac{25x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = 4 - x^2,\ x = 2y - 2;\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases},\ \frac{5\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{6};\ \rho = 2\sin 5\varphi.$$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = e^x + e,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15};\ \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi;$$

$$\rho = 2\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Ox:

$$\text{а) } \frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1;\ \text{б) } 5y = x^2,\ y^2 = 5x.$$

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}\ dx;\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8};\ \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{\ln x}};\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4}}.$$

ВАРІАНТ № 30

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{\frac{\pi}{4}-1}^{\frac{\pi}{3}-1} \frac{ctg(x+1)}{\sin^2(x+1)}dx;\ \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}\ dx;\ \int_1^4 \frac{5}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} + \sqrt[3]{3x-4} + 1}\ dx.$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

$$y = x^2 - 4,\ y = 2 + x;\ \begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases},\ \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3};$$

$\rho = 2\sin\varphi,\ \rho = 4\sin\varphi.$

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих:

$$y = \frac{1}{2}(1 - e^x - e^{-x}),\ 0 \le x \le 3;\ \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases},\ \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4};$$

$$\rho = 8\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

Завдання 4. Обчислити об'єми тіл: а) по поперечному перерізу, б) отриманих обертанням фігури навколо осі Oy:

а) $x^2 + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$; б) $x = y^2,\ x = 4$.

Завдання 5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}\,dx;\ \int_e^\infty \frac{\ln^6 x}{x}\,dx;\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^3}};\ \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \cos 3x}.$$

Література

1. Валєєв К. Г. Вища математика: навч. посібник : у 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
2. Валєєв К. Г. Математичний практикум: навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
3. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання, 2007. – 454 с.
4. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1980. – 320 с.
6. Долгіх В. М. Вища математика для економістів. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди: навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад «Українська академія банківської справи Національного банку України». – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2009. – 135 с.
7. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі: посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
8. Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.
9. Кривуца В. Г. Вища математика: практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. К. : ЦУЛ, 2003. – 536 с.
10. Лиман, Ф. М. Вища математика: навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
11. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Вища школа, 1987. – 552 с.
12. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач: навч. посібник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко – К. : Діал, 2000. – 160 с.
13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.
14. Шипачев В. С. Высшая математика: учеб. / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 1996. – 479 с.

ГЛОСАРІЙ

асимптоти – asymptote
визначений інтеграл – definite integral
диференціал – differential
диференціальне числення – differential calculus
довжина дуги – arc length
дотична – tangent
еквівалентні функції – equivalent functions
екстремум функції – extremum function
елементарні перетворення – elementary transformations
інтегральне числення – integral calculus
кутовий коефіцієнт – angular coefficient
ліва границя – left coast
наближене обчислення – approximate calculation
невизначений інтеграл – indefinite integral
невласний інтеграл – improper integrals
нескінченно мала величина – infinitesimal quantity
непарна функція – odd function
неперервність – continuity
нормаль – normal
обмежена послідовність – bounded sequence
об’єм – volume
парна функція – even function
первісна – original
періодична функція – periodic function
площа – area
послідовність – sequence
похідна – derivative
права границя – right border
раціональна функція – rational function
стаціонарні точки – fixed point
точки перегину – inflection point
точки розриву – break point
тригонометрична функція – trigonometric function
усувна точка розриву – removable point of discontinuity
чудові границі – superior border
функція – function

Навчальне видання

Хом'юк Віктор Вікторович
Хом'юк Ірина Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної

Практикум

Навчальний посібник

Редактор І. Городенська

Оригінал-макет підготовлено І. Хом'юк

Підписано до друку 09.02.2017 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 9,7.
Наклад 50 пр. Зам. № 2017-028.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.