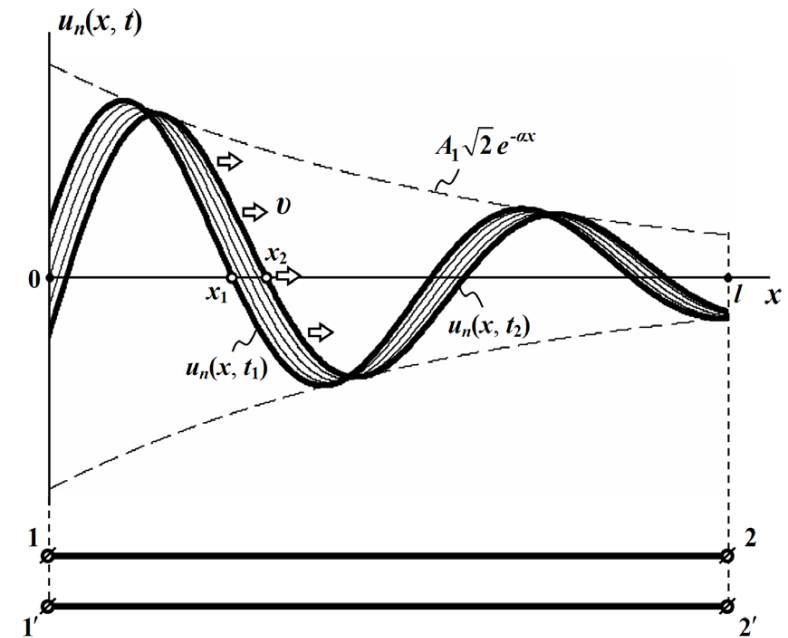


С. Ш. Кацев

# ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**С. Ш. Каців**

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ**

**Конспект лекцій**

Вінниця  
ВНТУ  
2017

УДК 621.3(075)  
ББК 31.211я73  
К30

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 24 листопада 2016 р.)

Рецензенти:

**М. Й. Бурбело**, доктор технічних наук, професор

**О. Д. Азаров**, доктор технічних наук, професор

**А. Я. Кулик**, доктор технічних наук, професор

**Кацев, С. Ш.**

К30 Теорія електричних та магнітних кіл : конспект лекцій / Кацев С. Ш. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 134 с.

У конспекті лекцій висвітлено широке коло питань теоретичної електро-техніки та теорії сигналів. Посібник розраховано на студентів, аспірантів та викладачів спеціальності «Комп'ютерна інженерія».

УДК 621.3(075)  
ББК 31.211я73

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ЛЕКЦІЯ № 1	
Електричне коло та його елементи. Закони електротехніки .....	5
ЛЕКЦІЯ № 2	
Електричні кола змінного синусоїдного струму.....	16
ЛЕКЦІЯ № 3	
Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму .....	28
ЛЕКЦІЯ № 4	
Методи розрахунку складних кіл .....	32
ЛЕКЦІЯ № 5	
Резонансні явища в електричних колах .....	40
ЛЕКЦІЯ № 6	
Електричні кола періодичного несинусоїдного струму.....	45
ЛЕКЦІЯ № 7	
Чотириполюсники та їх основні властивості .....	51
ЛЕКЦІЯ № 8	
Класичний метод аналізу перехідних процесів .....	59
ЛЕКЦІЯ № 9	
Операторний метод аналізу перехідних процесів .....	74
ЛЕКЦІЯ № 10	
Перехідні процеси при довільному вхідному сигналі.....	81
ЛЕКЦІЯ № 11	
Нелінійні електричні та магнітні кола .....	86
ЛЕКЦІЯ № 12	
Електричні кола з розподіленими параметрами .....	95
ЛІТЕРАТУРА.....	128
СЛОВНИК ІНШОМОВНИХ ТЕРМІНІВ.....	129

## ВСТУП

Курс «Теорія електричних та магнітних кіл» (ТЕМК) є одним із нормативних курсів, які вивчаються студентами вищих навчальних закладів спеціальності «Комп'ютерна інженерія».

Предметом курсу ТЕМК є функціонування лінійних і нелінійних електричних кіл в усталених і перехідних режимах під впливом дії сигналів різної форми. Матеріал дисципліни ТЕМК, таким чином, є теоретичною базою для вивчення і засвоєння спеціальних дисциплін: «Комп'ютерна електроніка», «Комп'ютерна схемотехніка», «Лінійні інтегральні схеми», «Комп'ютерні системи», «Комп'ютерні мережі», «Архітектура комп'ютерів», «Технології проектування комп'ютерних систем», «Метрологія та вимірювання».

Водночас, курс ТЕМК вимагає під час його вивчення знання основних розділів фізики й математики, зокрема, операцій з комплексними числами, диференціальних рівнянь, рядів Фур'є, перетворень Лапласа, векторного аналізу тощо.

Курс ТЕМК викладається протягом одного семестру і складається з 12 лекцій.

Для полегшення розуміння та засвоєння курсу основні положення теорії в кожній лекції ілюструються числовими прикладами з детальними розв'язаннями. Під час розв'язання цих прикладів широко застосовується (у випадках, коли це доцільно) комп'ютерний програмний комплекс MathCAD.

# ЛЕКЦІЯ № 1

## ЕЛЕКТРИЧНЕ КОЛО ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ.

### ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

#### 1.1 Основні поняття електричного кола

*Електричним колом (electric circuit) називається сукупність пристроїв, призначених для тривалого проходження електричного струму.*

Електричне коло складається:

- із джерел електромагнітної енергії – пристроїв, які перетворюють енергію інших видів (механічну, теплову, світлову, хімічну тощо) в електромагнітну;
- з пристроїв для передавання електромагнітної енергії і сигналів (лінії передачі, лінії зв'язку);
- зі споживачів електромагнітної енергії – пристроїв, які перетворюють електромагнітну енергію в інші види: механічну (електричні двигуни); теплову (нагрівачі); світлову (освітлювачі).

Електричний *струм*, що протікає в колі, є впорядкованим рухом електричних зарядів. Чисельно величина струму визначається як кількість електричного заряду  $q$ , який проходить через поперечний переріз провідника, за одиницю часу:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1.1)$$

У міжнародній системі одиниць (СІ) заряд вимірюється в *кулонах* (Кл), час – у *секундах* (с), а струм – в *амперах* (А).

Струм є скалярною алгебраїчною величиною, тобто може приймати додатні або від'ємні значення. За додатний напрямок струму прийнято вважати напрямок руху додатних зарядів, які під дією сил електричного поля рухаються від точок вищого потенціалу до точок нижчого. Під час аналізу електричних кіл заздалегідь, як правило, додатний напрямок струму невідомий, тому при розрахунках кіл на їх окремих ділянках довільно задається додатним напрямком струму та позначають його стрілкою.

*Напруга* на ділянці електричного кола (наприклад, між точками 1 та 2, рис. 1.1) чисельно дорівнює кількості енергії, яка витрачається на переміщення одиниці заряду з точки 1 у точку 2:

$$u = \frac{dw}{dq}. \quad (1.2)$$

Вимірюється напруга у *вольтах* (В). Це теж скалярна алгебраїчна величина, додатний напрямок якої приймають таким, що збігається з додатним напрямком струму. Якщо струм тече від точки 1 до точки 2, то потенціал точки 1 ( $\varphi_1$ ) вищий за потенціал точки 2 ( $\varphi_2$ ) і напруга між цими точками  $u = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Кожна група пристроїв електричного кола – це безліч різних конкретних приладів, які відрізняються за принципом дії, конструкцією тощо. Усю різноманітність складових частин електричного кола доцільно охарактеризувати певними ознаками – основними властивостями, з електротехнічного погляду, і провести класифікацію *елементів* електричного кола за цими ознаками.

Під елементами електричного кола, зазвичай, розуміють не фізично існуючі частини електротехнічних пристроїв, а їх ідеалізовані моделі.

## 1.2 Джерела електромагнітної енергії

Незалежно від конкретного виконання джерел їх об'єднує одна загальна властивість – здатність перетворювати в електромагнітну енергію інші види енергії. Джерела є причиною виникнення струмів і напруг в електричних колах.

Розрізняють *незалежні* та *залежні (керовані)* джерела. Параметри (напруга і струм) незалежних джерел не залежать від зовнішнього діяння і визначаються тільки внутрішніми їх властивостями.

Струми і напруги залежних джерел можуть залежати від напруги або струму будь-якої вітки чи будь-якої ділянки кола. Залежні джерела – це, як правило, результат ідеалізації властивостей реальних електронних схем, що працюють у лінійному режимі.

Для аналізу кін зручно вводити ідеалізовані незалежні джерела двох видів: *напруги* і *струму*.

*Джерелом напруги (voltage source)* є таке джерело, напруга якого не залежить від струму, що протікає через нього. У джерелах напруги під дією так званих *сторонніх сил* (хімічні реакції, електромагнітні сили тощо) відбувається примусове розділення додатних та від'ємних зарядів проти сил електричного поля і поява різних значень потенціалів на затискачах джерела. Створена таким чином різниця потенціалів називається *електро-рушійною силою* (е.р.с.), яка вимірюється у вольтах.

Умовне графічне зображення джерела напруги показано на рис. 1.1, а), де напрямок стрілки усередині круга показує напрямок дії е.р.с., при цьому  $e = \varphi_1 - \varphi_2$ . Оскільки  $\varphi_1 > \varphi_2$ , то напруга джерела направлена від точки 1 до точки 2, тому при вказаних напрямках е.р.с. та напруги  $u = e$ .

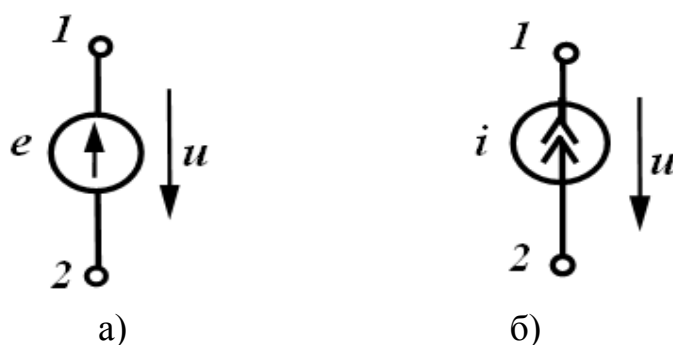


Рисунок 1.1

Джерелом струму (*current source*) є таке джерело, сила струму  $i$  якого не залежить від властивостей кола, що є зовнішнім відносно джерела. Графічне зображення джерела струму показано на рис. 1.1, б), де стрілки характеризують додатний напрямок струму джерела.

Розглянуті джерела є *ідеальними*. Внутрішній опір ідеальної е.р.с. дорівнює нулю, а ідеального джерела струму – нескінченності.

Залежні (керовані) джерела, які зображені на рис. 1.2, також можна розділити на джерела напруги й струму, що можуть змінюватися залежно від струмів або напруг в інших вітках.

Розрізняють чотири типи залежних джерел:

а) джерела напруги, керовані напругою (ДНКН) (рис. 1.2, а). Напруга джерела пропорційна напрузі  $u_1$ :

$$u_2 = ku_1; \quad (1.3)$$

б) джерела напруги, керовані струмом (ДНКС) (рис. 1.2, б):

$$u_2 = ri_1; \quad (1.4)$$

в) джерела струму, керовані напругою (ДСКН) (рис. 1.2, в):

$$i_2 = gu_1; \quad (1.5)$$

г) джерела струму, керовані струмом (ДСКС) (рис. 1.2, г):

$$i_2 = \beta i_1. \quad (1.6)$$

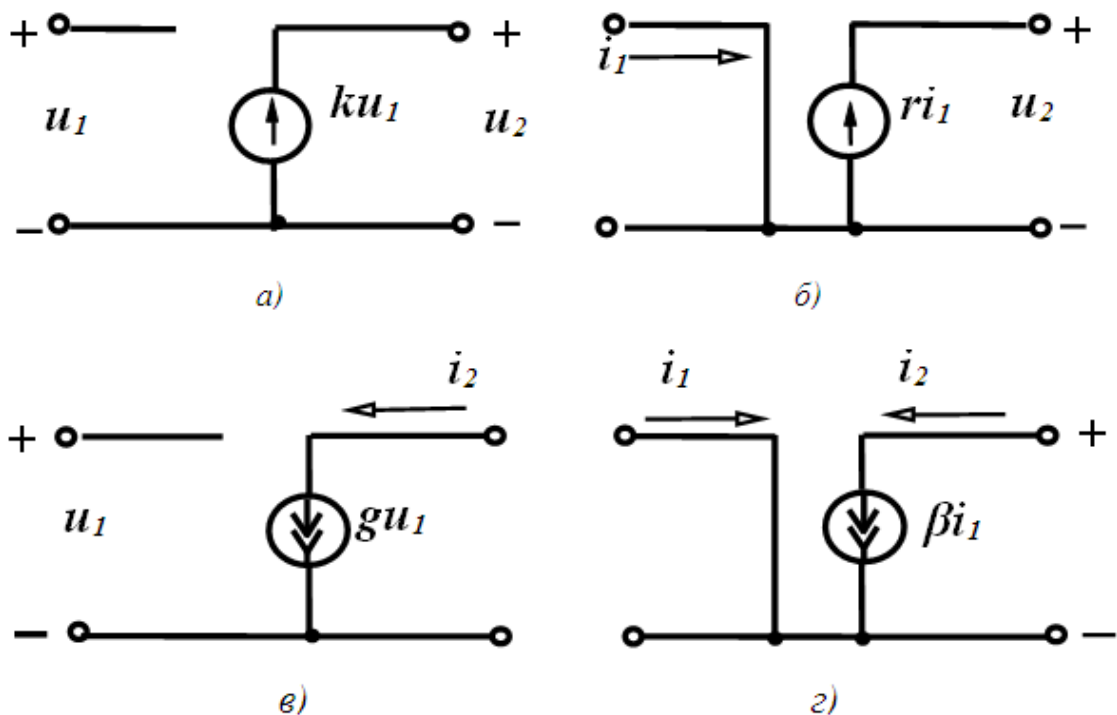


Рисунок 1.2



Ділянки електричного кола, які містять джерела енергії, називаються *активними*, а ті, у яких джерела відсутні, – *пасивними*.

### 1.3 Пасивні елементи електричного кола

Для класифікації пасивних елементів варто виділити найбільш суттєві загальні ознаки, властиві тим чи іншим елементам. Із курсу фізики відомо, що протікання електричного струму в колі пов'язане з виникненням електричного та магнітного полів і перетворенням електричної енергії в теплову або інші види енергії. Точніше кажучи, ці явища присутні на всіх ділянках електричного кола, однак їх інтенсивність на різних ділянках неоднакова. Залежно від того, яке явище переважає на ділянці, розрізняють три типи пасивних елементів: резистивний, індуктивний та ємнісний.

#### *Резистивний елемент*

*Резистивний елемент* або *резистор* (*resistor*) – це ідеалізований елемент електричного кола, у якому електромагнітна енергія безповоротно (необратимий) перетворюється в теплоту або в інші види енергії.

Вважають, що на цій ділянці кола відсутні електричні або магнітні поля. Графічне зображення резистора показано на рис. 1.3.

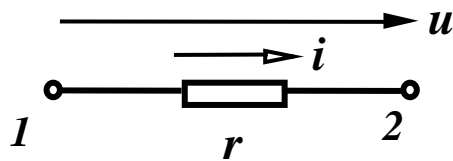


Рисунок 1.3

Зв'язок між напругою і струмом на резисторі визначається відношенням:

$$u = ri. \quad (1.7)$$

Величина  $r$  називається *електричним опором* (*electric resistance*) і вимірюється в омах [Ом]; величина, обернена опору,

$$g = \frac{1}{r} \quad (1.8)$$

називається *провідністю* (*conductivity*) і вимірюється в сименсах [См].

Миттєва потужність, що виділяється у вигляді теплоти в резисторі, визначається як:

$$p = ui = ri^2. \quad (1.9)$$

Миттєва потужність не набуває від'ємних значень, тому в будь-який момент часу енергія надходить від джерела до резистора.

### Індуктивний елемент

Елемент електричного кола, що характеризується створенням магнітного поля і запасанням енергії в ньому, називають *індуктивним елементом* або *індуктивністю* (*inductance*). Індуктивність в електричному колі реалізують за допомогою *індуктивної котушки*, яка має малий активний опір.

Умовне зображення індуктивного елемента з додатними напрямками струму і напруги показано на рис. 1.4.

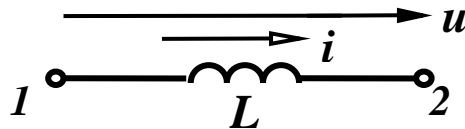


Рисунок 1.4

Зв'язок між напругою і струмом на ділянках, які містять індуктивність, записується як:

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (1.10)$$

Величина  $L$  називається *індуктивністю* і вимірюється в генрі [Гн].

Миттєва потужність

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} \quad (1.11)$$

може набувати як додатних, так і від'ємних значень. Тобто індуктивний елемент може приймати енергію ( $p > 0$ ) і запасати її в магнітному полі та повертати її до джерела ( $p < 0$ ).

Кількість енергії, яка запасується магнітним полем:

$$w = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.12)$$

### Ємнісний елемент

Елемент електричного кола, що характеризує створення електричного поля і запасання в ньому енергії, називається *ємнісним елементом* (*capacitance*). Умовне зображення ємнісного елемента показано на рис. 1.5.

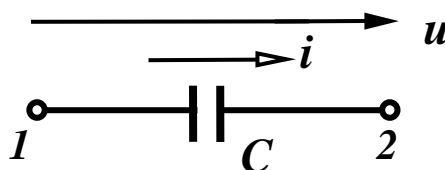


Рисунок 1.5

Ємність в електричному колі реалізують спеціально виготовленим елементом – *конденсатором*. Найпростіший конденсатор складається з двох металевих пластин, розділених діелектриком.

Зв'язок між напругою і струмом визначається за співвідношенням:

$$u = \frac{1}{C} \int idt. \quad (1.13)$$

Цей вираз не завжди зручний для використання, тому часто користуються формулою, яка відображає зворотний зв'язок:

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (1.14)$$

Величину  $C$  називають *ємністю* і вимірюють у фарадах [Ф]. Миттєва потужність на ємнісному елементі

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt} \quad (1.15)$$

також може набувати додатних і від'ємних значень.

Енергія, яка запасється в електричному полі:

$$w = \frac{Cu^2}{2}. \quad (1.16)$$

Розглянуті активні та пасивні елементи є *ідеальними*. Реальні джерела відрізняються від ідеальних передусім тим, що напруги й струми на їх затискачах залежать від навантаження, викликаного наявністю внутрішніх опорів або провідностей. Такі реальні джерела можна зобразити як послідовне з'єднання ідеального джерела напруги та внутрішнього опору  $r_0$  (рис. 1.6, а) або паралельне з'єднання ідеального джерела струму і внутрішньої провідності  $g_0$  (рис. 1.6, б). У реальному джерелі напруги, якщо воно працює в замкненому колі, напруга на його затискачах менша за е.р.с. на величину напруги на його внутрішньому опорі ( $r_0$ )  $u = e - ir_0$ .

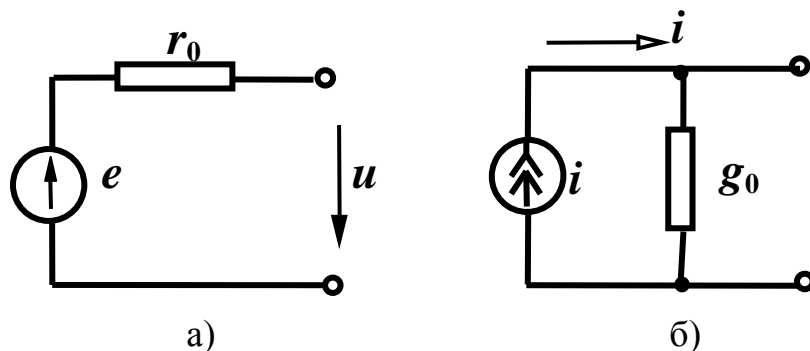


Рисунок 1.6

Реальні прообрази резистивного, індуктивного та ємнісного елементів разом із головними параметрами мають також інші побічні (паразитні) параметри. Наприклад, резистивний елемент, що має вигляд дрютяного реостата, крім активного опору  $r$  містить індуктивність витків  $L_0$  і міжвиткову ємність  $C_0$  (рис. 1.7, а).

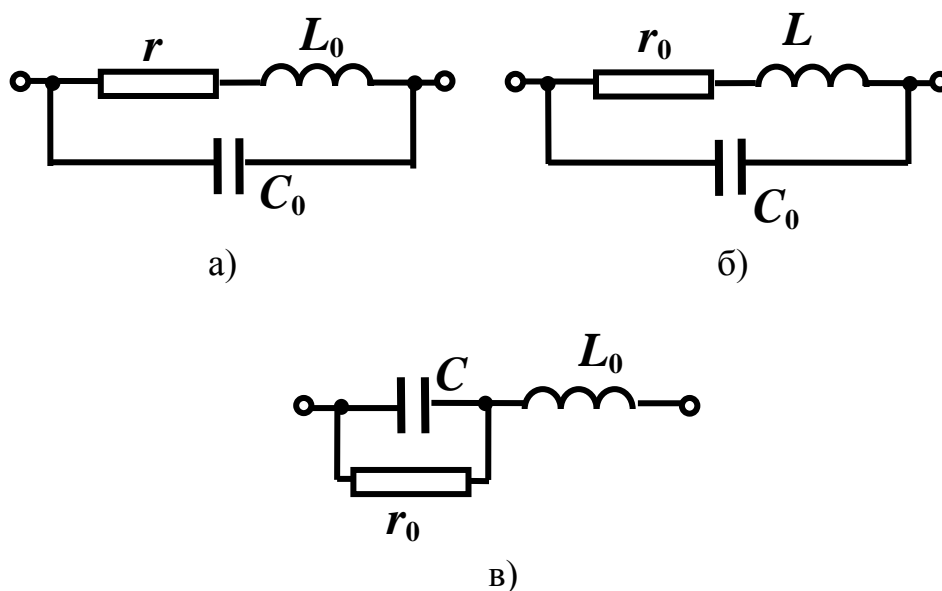


Рисунок 1.7

Так само індуктивний елемент, виконаний у вигляді котушки, який характеризується індуктивністю  $L$ , має активний опір цієї котушки  $r_0$  і міжвиткову ємність  $C_0$  (рис. 1.7, б). Аналогічний вигляд має схема заміщення конденсатора з «паразитними» параметрами (рис. 1.7, в). Залежно від умов роботи кола величини «паразитних» параметрів можуть змінюватися і деякими з них можна знехтувати. Так, наприклад, за низької частоти можна знехтувати параметрами  $L_0$  і  $C_0$ .

## 1.4 Електричні схеми

Графічне зображення електричного кола називають *електричною схемою* (рис. 1.8).

Основними поняттями, що характеризують геометричну структуру кола, є *вітка (branch)*, *вузол (knot)* і *контур (contour)*.

*Вітка* – це ділянка кола, уздовж якої струм у будь-який момент часу має одне й те саме значення.

Зазвичай, усі елементи, які входять до однієї вітки, отримують однакові індекси і тоді вітки зручно нумерувати. Так, точки 1 та 3 (рис. 1.8) з'єднуються віткою 1, точки 1 та 2 – віткою 5. Якщо вітка містить кілька елементів, то ці елементи з'єднані *послідовно*. Наприклад, у вітці 3 елементи  $r_3$ ,  $e_3$ ,  $L_3$  з'єднані послідовно.

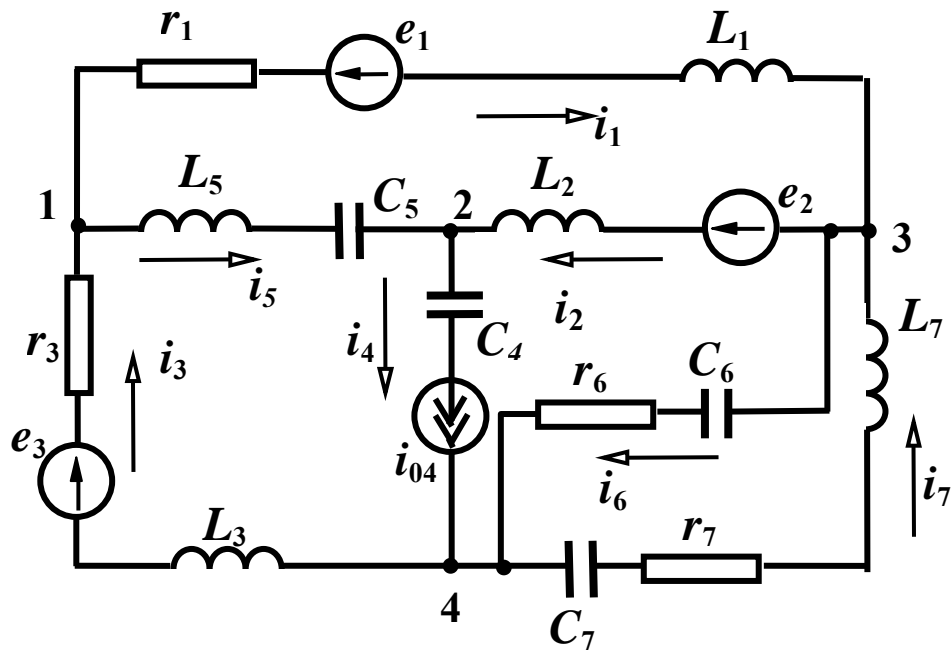


Рисунок 1.8

*Вузол – це точка кола, де з'єднуються три або більше вітки.*

У колі (рис. 1.8) є чотири вузли, які позначаються відповідними цифрами. Дві або більше віток, приєднані до одних і тих самих двох вузлів, називають *паралельними* вітками, а таке з'єднання – *паралельним*. Вітки 6 і 7 з'єднані паралельно, оскільки вони з'єднані з одними і тими ж вузлами 3 і 4.

*Контуром називають довільну замкнену послідовність віток.*

Загальна кількість контурів в колі визначається всіма можливими комбінаціями таких замкнених послідовностей віток.

Зазвичай задані конфігурація кола, параметри елементів і джерел. Задача аналізу кола в цьому випадку полягає у визначенні струмів усіх віток (зазначимо, що струми у вітках, які містять джерела струму, відомі, оскільки дорівнюють струмові джерела).

### 1.5 Закони електротехніки

Основними законами, що діють в електричному колі, є:

- *закон Ома (the Ohm law)*, який задає залежність напруги від струму в кожній вітці кола;
- *перший закон Кірхгофа (the first law of Kirhgof)*, який виражає закон збереження заряду та принцип неперервності електричного струму й належить до вузлів кола;
- *другий закон Кірхгофа (the second law of Kirhgof)*, який виражає закон збереження енергії та належить до контурів кола.

Закон Ома для окремих пасивних елементів кола виражається співвідношеннями (1.7), (1.10), (1.13), а для вітки є сумою відповідних напруг.

Розглянемо закон Ома для активної вітки, тобто для вітки із джерелом напруги (рис. 1.9).

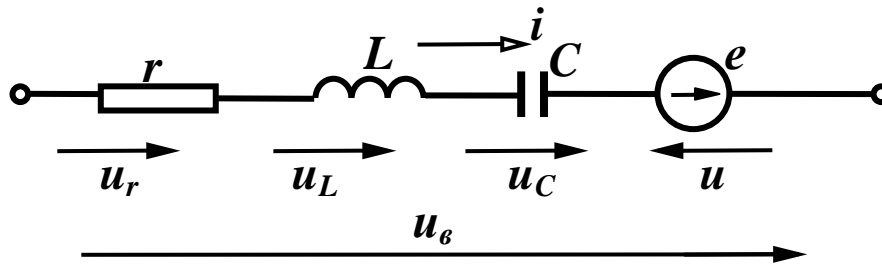


Рисунок 1.9

Напруга такої вітки визначається:

$$u_B = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt - e. \quad (1.17)$$

Зазначимо, що у формулі (1.19) е.р.с. приймається зі знаком «мінус», якщо її напрямок збігається з напрямком струму, і навпаки – вона береться зі знаком «плюс».

Перший закон Кірхгофа формулюється так:

для будь-якого вузла схеми у будь-який момент часу алгебраїчна сума струмів усіх віток, які сходяться у цьому вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (1.18)$$

де  $k$  – індекси віток, зв'язаних із цим вузлом.

Знак струму, який входить у рівняння, визначається довільним вибором додатного напрямку струмів. Струми, які виходять з вузла, записуються зі знаком «плюс»; струми, які входять у вузол, – зі знаком «мінус».

Таким чином, для вузла 1, зображеного на схемі (див. рис. 1.8), перший закон Кірхгофа записується як:

$$i_1 - i_3 + i_5 = 0.$$

Другий закон Кірхгофа формулюється так:

для будь-якого контуру схеми в будь-який момент часу алгебраїчна сума е.р.с. джерел напруги, що діють у цьому контурі, дорівнює алгебраїчній сумі напруг на всіх пасивних елементах цього контуру:

$$\sum_{k=1}^n \left( r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k, \quad (1.19)$$

де  $k$  – індекси всіх віток, що входять у контур.

Для можливості формування рівнянь за другим законом Кірхгофа, окрім напрямків струмів у вітках, варто задати напрямки обходу контурів (за годинниковою стрілкою або проти неї). При цьому, якщо напрям е.р.с. збігається з напрямком обходу контуру, то вона входить у рівняння зі знаком «плюс», і навпаки – зі знаком «мінус». Напряга на пасивному елементі приймається зі знаком «плюс», якщо напрямок струму в цьому елементі збігається з напрямком обходу контуру, і навпаки – зі знаком «мінус».

При виборі контуру для запису рівняння за другим законом Кірхгофа доцільно уникати контурів, у які входять вітки із джерелами струму.

Для контуру з вітками 1–2–5 кола, зображеного на рис. 1.8, при обході контуру за годинниковою стрілкою, рівняння за другим законом Кірхгофа виглядає як:

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_5 \frac{di_5}{dt} - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt = e_2 - e_1.$$

### ***Правила складання систем рівнянь за законами Кірхгофа***

1. Загальна кількість рівнянь має дорівнювати кількості *невідомих* струмів (струм у вітці з джерелом струму вважається відомим).

2. Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа має бути на одну менша, ніж кількість вузлів.

3. Решта рівнянь складається за другим законом Кірхгофа.

Складемо за цими правилами систему рівнянь законами Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 1.8.

Ця система має складатися із 6 рівнянь, оскільки в колі протікають 7 струмів, але струм  $i_4 = i_{04}$  відомий.

Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа має дорівнювати 3, оскільки коло містить 4 вузли.

Отже, за другим законом Кірхгофа необхідно скласти ще 3 рівняння.

Рівняння за першим законом запишемо для 1-го, 2-го та 3-го вузлів.

Для другого закону виберемо такі контури:

- контур з вітками 1–2–5 (обхід за годинниковою стрілкою);
- контур з вітками 3–5–2–7 (обхід за годинниковою стрілкою);
- контур з вітками 6–7 (обхід проти годинникової стрілки).

Система рівнянь має вигляд:

$$i_1 - i_3 + i_5 = 0,$$

$$i_{04} - i_2 - i_5 = 0,$$

$$i_2 + i_6 - i_1 - i_7 = 0,$$

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_5 \frac{di_5}{dt} - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt = e_2 - e_1,$$

$$r_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + L_5 \frac{di_5}{dt} + \frac{1}{C_5} \int i_5 dt - r_7 i_7 - L_7 \frac{di_7}{dt} - \frac{1}{C_7} \int i_7 dt = e_3 - e_2,$$

$$r_7 i_7 + L_7 \frac{di_7}{dt} + \frac{1}{C_7} \int i_7 dt + \frac{1}{C_6} \int i_6 dt + r_6 i_6 = 0.$$

### Контрольні запитання

1. Чи можна з'єднати послідовно два ідеальних джерела струму з різними значеннями струмів?
2. Чи може коло мати 1 вузол?
3. Яку мінімальну кількість контурів може мати коло?
4. Яку мінімальну кількість вузлів може мати коло?
5. Чи можна з'єднати паралельно два ідеальних джерела напруги з різними значеннями е.р.с.?
6. Чим відрізняються залежні джерела енергії від незалежних?
7. Чому дорівнює напруга на індуктивності в колі постійного струму?
8. Чому дорівнює струм в ємності в колі постійного струму?



## ЛЕКЦІЯ № 2

### ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

#### 2.1 Основні поняття і співвідношення

Якщо напруги і струми в колі не змінюють своїх значень протягом часу, то вони називаються *постійними* (позначаються літерами  $U$  та  $I$ ). Напруги і струми, що змінюються за величиною та/або напрямком, називаються *змінними*, характеризуються *миттєвими* значеннями, тобто їх значеннями в будь-який момент часу  $t$ , і позначаються літерами  $u$  та  $i$ .

Для *періодичного змінного струму* (*periodic alternating current*) виконується умова  $i(t) = i(t+T)$ .

Цикл зміни струму повторюється через інтервал часу  $T$ , який називається *періодом* (*period*). Величина, обернена періоду, тобто кількість періодів струму за секунду, називається *частотою* (*frequency*):

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

$f$  вимірюється в герцах [Гц]. Стандартна частота в енергетичних системах України  $f = 50$  Гц.

Форми зміни струмів та напруг у часі, які зустрічаються під час використання електричної енергії, можуть бути різними. Але переважною формою напруг та струмів в електричних колах є синусоїдна функція часу.

*Синусоїдний струм* (*sinusoidal current*) описується виразом:

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right), \quad (2.2)$$

де  $i$  – *миттєве значення струму* (*instant value of a current*), тобто значення струму в будь-який момент часу;

$I_m$  – *амплітудне або максимальне значення* (*peak value*);

$\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$  – *фаза коливань* (*phase of fluctuations*);

$\frac{2\pi}{T} = \omega$  – *кутова (циклічна) частота* (*cyclic frequency*), яка визначає швидкість зміни фази, вимірюється в радіанах за секунду [рад/с];

$\alpha$  – значення фази при  $t=0$ , *початкова фаза* (*initial phase*).

Графіки синусоїдного струму (2.2) і напруги  $u = U_m \sin(\omega t + \beta)$  показано на рис. 2.1.

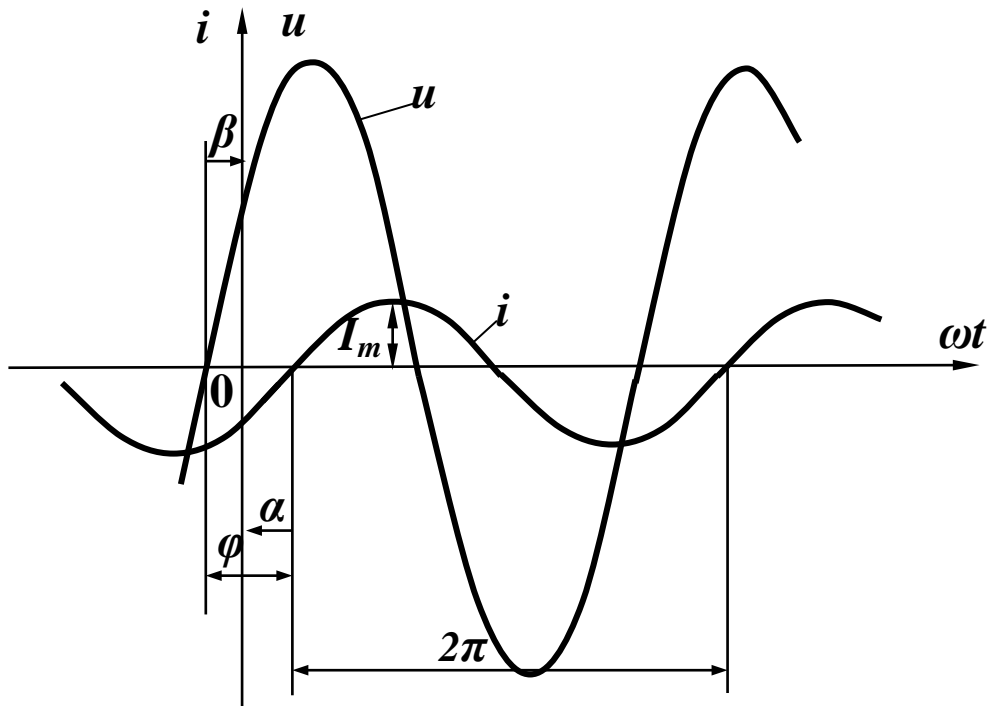


Рисунок 2.1

Початкова фаза завжди відраховується від початку синусоїди (на висхідній ділянці) до початку координат (на рис. 2.1  $\beta > 0$ ,  $\alpha < 0$ ).

Враховуючи (2.1), отримаємо:

$$\omega = 2\pi f. \quad (2.3)$$

Якщо напруга і струм мають різні початкові фази, то говорять, що вони зсунуті за фазою на кут:

$$\varphi = \beta - \alpha, \quad (2.4)$$

який називається *кутом зсуву фаз (angle of shift of phases)*.

Якщо  $\varphi > 0$  (як на рис. 2.1), то напруга *випереджає* струм або струм *відстає* за фазою від напруги. Якщо початкові фази двох синусоїд однакові ( $\beta = \alpha$ ), то кажуть, що напруга та струм *збігаються* за фазою, а якщо  $\beta - \alpha = \pm\pi$ , тобто синусоїди зсунуті за фазою на половину періоду, то говорять, що ці синусоїди знаходяться у *протифазі*.

## 2.2 Діюче значення змінного струму

Змінні струми, зазвичай, можуть значно відрізнитися за частотою і формою.

Струми на рис. 2.2 мають однакові частоту й амплітуду, але значно відрізняються за формою. Очевидно, що їх теплова дія або механічний вплив на сусідні провідники будуть різними, тому необхідним є введення

відповідного критерію, який кількісно характеризував би дію змінного струму. Таким критерієм, звичайно, вважають теплову дію струму, а величину, яка характеризує цю дію, називають *діючим* значенням змінного струму  $i$ .

Діюче значення змінного струму (*operating value of an alternating current*) дорівнює такому еквівалентному постійному струму, що, протікаючи через опір  $r$  за період  $T$ , виділяє стільки ж енергії, як  $i$  змінний струм.

Діюче значення змінного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (2.5)$$

є середньоквадратичним значенням змінного струму за період.

Для змінного синусоїдного струму  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \alpha) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.6)$$

Можна показати, що діючі значення синусоїдної напруги або е.р.с. дорівнюють:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.7)$$

### 2.3 Зображення синусоїдних функцій векторними величинами

Графічне зображення синусоїдних функцій (див. рис. 2.1) звичайно називають *хвильовою діаграмою* (*wave diagramme*). Якщо на одній діаграмі зображено більше ніж дві синусоїдні функції, втрачається наочність і важко здійснювати графічне додавання двох або більше функцій. Тому вдаються до зображення синусоїдних функцій векторними величинами, що значно покращує наочність і спрощує операцію додавання.

Нехай маємо синусоїдний струм  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ . Виберемо прямокутну систему координат (рис. 2.2) і відкладемо з початку координат під кутом  $\alpha$  до горизонтальної осі вектор, довжина якого у вибраному масштабі дорівнює  $I_m$ .

Проекція цього вектора на вертикальну вісь  $y_0 = I_m \sin \alpha$ . Змусимо обертатися вектор  $I_m$  із кутовою швидкістю  $\omega$  проти годинникової стрілки.

У момент часу  $t_1$  вектор буде займати положення 1, а його проекція на вертикальну вісь:

$$y_1 = I_m \sin(\omega t_1 + \alpha).$$

Під час безперервного обертання проекція вектора  $I_m$  на вертикальну вісь змінюється за синусоїдним законом:

$$y = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

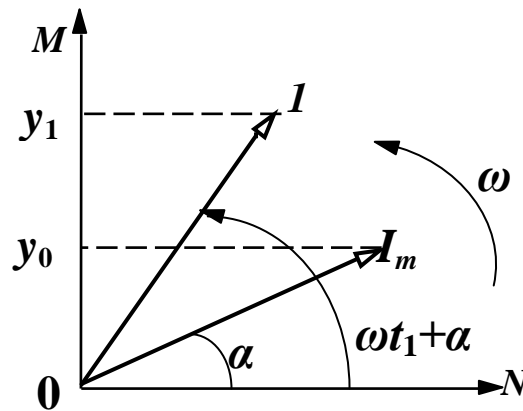


Рисунок 2.2

Вектор, що обертається, характеризує синусоїдну функцію: у будь-який момент часу амплітуда і фаза цієї функції відомі. Якщо є дві синусоїдні функції часу однієї частоти  $u = U_m \sin(\omega t + \beta)$ ,  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ , то вони також можуть бути зображені векторами (рис. 2.3).

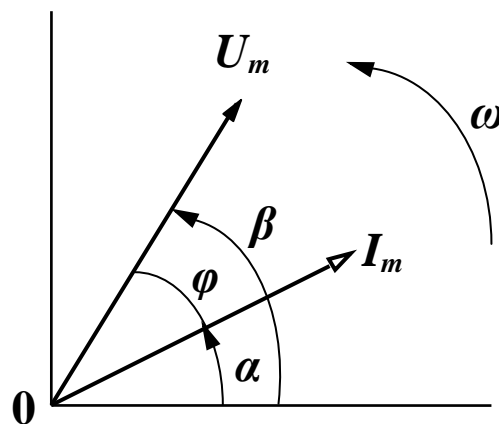


Рисунок 2.3

Оскільки ці вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю  $\omega$ , то в будь-який момент часу їх положення один відносно одного є незмінним. Між ними завжди зберігається кут:

$$\varphi = \beta - \alpha.$$

Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення векторів повністю визначає синусоїдні функції і немає потреби зображати ці вектори такими, що обертаються.

Векторне зображення дає наочну картину взаємного розташування амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити прості операції векторного додавання й віднімання.

Сукупність векторів, які характеризують струми й напруги в електричному колі, називається *векторною діаграмою (vector diagramme)*.

Оскільки для одного будь-якого вектора початкова фаза може бути прийнята такою, що дорівнює нулю, то на векторній діаграмі можна не вказувати систему координат. Якщо величину векторів  $I_m$ ,  $U_m$  зменшити у  $\sqrt{2}$  разів, то можна відкладати у вигляді векторів діюче значення.

## 2.4 Синусоїдний струм у пасивних елементах електричного кола

Головною метою цього підрозділу є визначення форми й параметрів напруги на пасивних елементах кола під час протікання ними синусоїдного струму. Вважаємо, що струм протікає всіма елементами:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

### *Резистивний елемент*

Для резистивного елемента (рис. 2.4, а) відоме компонентне співвідношення (1.18), тому

$$u = ri = rI_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.8)$$

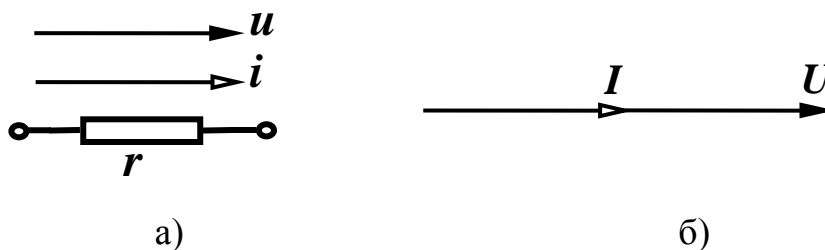


Рисунок 2.4

Отже, напруга на резисторі при синусоїдному струмі також синусоїдна, тобто, зазвичай, має вигляд:

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (2.9)$$

Порівнявши (2.8) і (2.9), можна визначити амплітудне значення напруги:

$$U_m = rI_m. \quad (2.10)$$

Поділивши обидві частини рівняння (2.10) на  $\sqrt{2}$ , маємо:

$$U = rI. \quad (2.11)$$

Таким чином, для амплітудних і діючих значень струму та напруги справедливий закон Ома.

Порівнюючи у виразах (2.8) і (2.9) початкові фази, виявляємо, що в резистивному елементі  $\beta = \alpha$ , тобто струм і напруга на резисторі збігаються за фазою. Векторна діаграма струму й напруги для резистора показана на рис. 2.4, б).

Середнє значення потужності за період  $P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt$  називається *активною потужністю (active power)*, вимірюється у ватах (Вт) і дорівнює:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} = UI. \quad (2.12)$$

### **Індуктивний елемент**

В індуктивному елементі (рис. 2.5, а) співвідношення між струмом і напругою

$$u_L = L \frac{di}{dt},$$

тому

$$u = L \frac{d[I_m \sin(\omega t + \alpha)]}{dt} = L\omega I_m \cos(\omega t + \alpha) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.13)$$

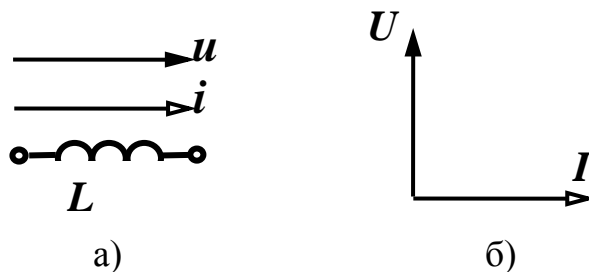


Рисунок 2.5

Порівнявши (2.9) і (2.13), визначаємо:

$$U_m = \omega L I_m. \quad (2.14)$$

Величина  $\omega L$  має розмірність опору. Назвемо її *індуктивним опором (inductive resistance)* і позначимо:

$$x_L = \omega L. \quad (2.15)$$

Величина, обернена індуктивному опору, називається *індуктивною провідністю*:

$$b_L = \frac{1}{\omega L}. \quad (2.16)$$

Зазначимо, що  $x_L$  і  $b_L$  залежать від частоти. Таким чином, для амплітудних або діючих значень також справедливий закон Ома:

$$U_m = x_L I_m, \quad U = x_L I. \quad (2.17)$$

Порівнявши (2.9) і (2.13), можна визначити початкову фазу напруги

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad (2.18)$$

яка більша за початкову фазу струму на  $\frac{\pi}{2}$ .

Зсув фаз між напругою і струмом

$$\varphi = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad (2.19)$$

а, відповідно, *струм відстає від напруги* на індуктивному елементі на  $\frac{\pi}{2}$  (див. рис. 2.5, б).

Середнє значення потужності за період для індуктивності

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = 0,$$

тобто індуктивний елемент енергії не споживає.

### Ємнісний елемент

Для ємнісного елемента (рис. 2.6, а):

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

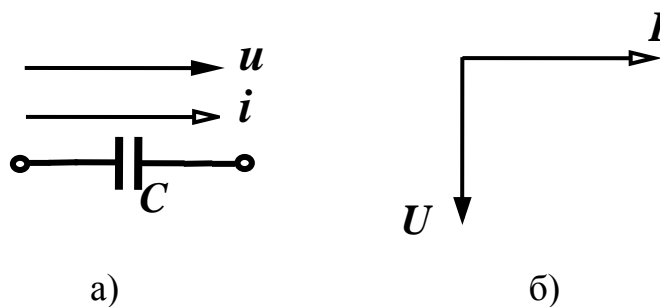


Рисунок 2.6

Таким чином:

$$u_C = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \alpha) dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \alpha) + A, \quad (2.20)$$

де  $A$  – стала інтегрування.

Враховуючи, що розглядається усталений режим періодичних струмів і напруг, вважаємо, що постійна інтегрування дорівнює нулю, тому

$$u_C = I_m \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.21)$$

Напруга на ємності при синусоїдному струмі синусоїдна. Введемо поняття *ємнісного опору (capacitance)*

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \quad (2.22)$$

і *ємнісної провідності*

$$b_C = \omega C. \quad (2.23)$$

Отже, на ємності амплітудні та діючі значення струму й напруги теж підпорядковуються закону Ома:

$$U_m = x_C I_m, \quad U = x_C I, \quad (2.24)$$

а початкова фаза напруги

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (2.25)$$

менша від початкової фази струму на  $\frac{\pi}{2}$ .

Зсув фаз між напругою та струмом

$$\varphi = \beta - \alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad (2.26)$$

тобто, струм *випереджає* напругу на  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 2.6, б).

Середнє значення потужності за період для ємності також дорівнює 0, тобто ємнісний елемент енергії не споживає.

Через те, що в резистивному елементі відбувається безперервне споживання енергії, резистор називають *активним опором (active resistance)*, а індуктивний і ємнісний елементи – *реактивними опорами (reactive resistance)*.

Розглянемо приклад аналізу простого кола синусоїдного струму за допомогою векторної діаграми.



Знайдемо струм у нерозгалуженій частині кола (рис. 2.7, а).

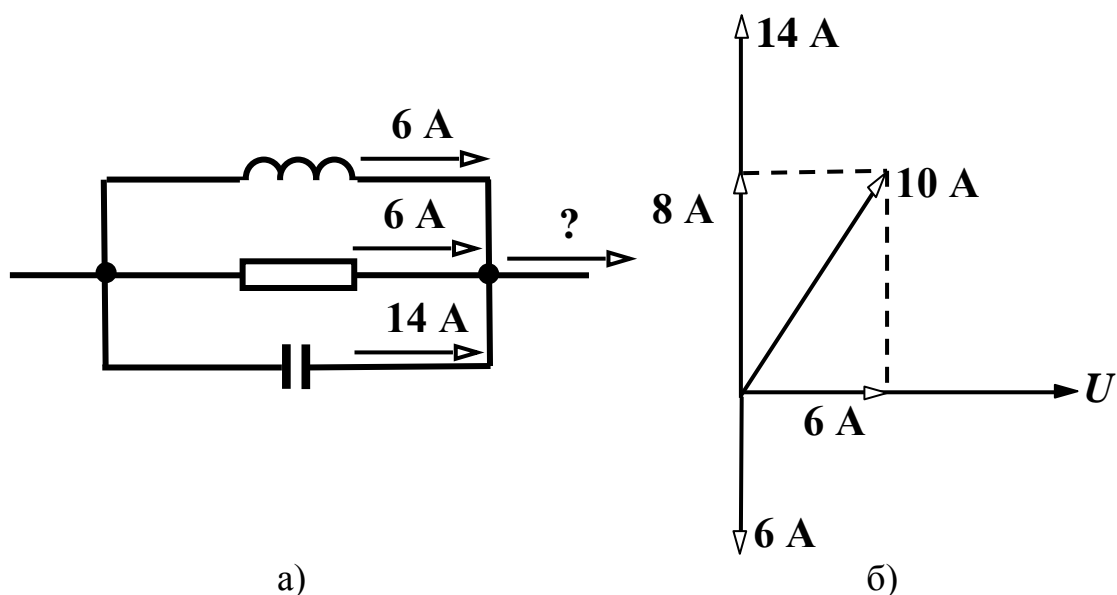


Рисунок 2.7

Оскільки на паралельних елементах напруга однакова, починаємо побудову діаграми зі спільного вектора напруги (його довжина в нашому випадку неважлива), який спрямовуємо горизонтально (рис. 2.7, б).

Далі вздовж цього вектора відкладаємо вектор струму в резисторі і перпендикулярно до нього вектори струмів в індуктивності та ємності, згідно з рис. 2.5 та рис. 2.6.

Оскільки вектори струмів в індуктивності та ємності напрямлені протилежно один одному, їх векторна сума дорівнює 8 А. Далі за теоремою Піфагора можна знайти струм у нерозгалуженій частині кола, що дорівнює 10 А.

## 2.5 Послідовне з'єднання елементів $r, L, C$ при синусоїдному струмі

Розглянемо коло (рис. 2.8), у якому послідовно з'єднані елементи  $r, L, C$  і синусоїдне джерело напруги.

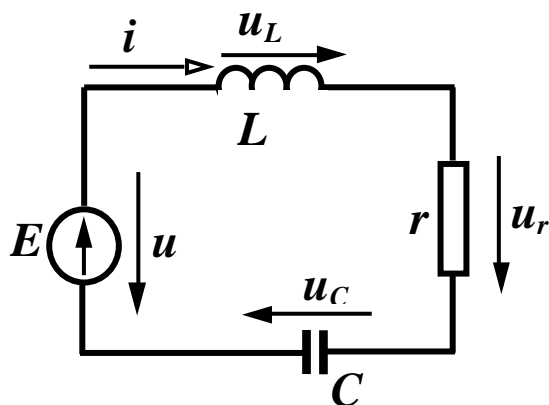


Рисунок 2.8

Припустимо, що струм в колі  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ . Визначимо параметри і форму напруги джерела.

Складемо для миттєвих значень рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$u_L + u_r + u_C = u. \quad (2.27)$$

Підставивши у (2.27) формули (2.8), (2.13) та (2.20), запишемо:

$$\begin{aligned} U_m \sin(\omega t + \beta) &= I_m x_L \cos(\omega t + \alpha) + I_m r \sin(\omega t + \alpha) - I_m x_C \cos(\omega t + \alpha) = \\ &= I_m [r \sin(\omega t + \alpha) + (x_L - x_C) \cos(\omega t + \alpha)]. \end{aligned}$$

Позначимо  $x_L - x_C = x$  і назовемо  $x$  *реактивним опором*. Тоді

$$U_m \sin(\omega t + \beta) = I_m [r \sin(\omega t + \alpha) + x \cos(\omega t + \alpha)] = I_m \sqrt{r^2 + x^2} \sin(\omega t + \alpha + \varphi),$$

де 
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}. \quad (2.28)$$

Введемо ще одне позначення:

$$Z = \sqrt{r^2 + x^2} \quad (2.29)$$

і назовемо його *повним опором (full resistance)* кола. Тоді

$$U_m \sin(\omega t + \beta) = I_m Z \sin(\omega t + \alpha + \varphi). \quad (2.30)$$

Вираз (2.30) показує, що за послідовного з'єднання елементів  $r$ ,  $L$ ,  $C$  амплітуда прикладеної напруги (напруги джерела) і струм пов'язані законом Ома  $U_m = ZI_m$  або для діючих значень:

$$U = ZI. \quad (2.31)$$

Початкова фаза напруги  $\beta = \alpha + \varphi$  відрізняється від початкової фази струму на кут  $\varphi$ , який залежить від параметрів кола (2.28) і може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

## 2.6 Потужність в колах синусоїдного струму

Нехай у деякому лінійному електричному колі протікає струм

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

і прикладена напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta).$$

Активна потужність кола знаходиться так:

$$P = UI \cos \varphi \quad (2.32)$$

або

$$P = I^2 r . \quad (2.33)$$

Для характеристики джерел енергії вводять поняття *повної потужності (full power)*, яка вимірюється у вольт-амперах [ВА]. Це максимальна потужність, яку може віддати джерело:

$$S = UI \quad (2.34)$$

або

$$S = I^2 Z . \quad (2.35)$$

Вводиться ще одне поняття – *реактивна потужність (reactive power)*, яка характеризує обмін енергією між споживачем і джерелом

$$Q = UI \sin \varphi \quad (2.36)$$

або

$$Q = I^2 x . \quad (2.37)$$

Одиницею вимірювання реактивної потужності є вольт-ампер реактивний [вар].

Оскільки  $x = x_L - x_C$  може набувати додатних або від'ємних значень, то і реактивна потужність може бути додатною або від'ємною.

Між  $P$ ,  $S$ ,  $Q$  існує співвідношення:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} , \\ P &= S \cos \varphi , \\ Q &= S \sin \varphi . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Згідно із законом збереження енергії, в електричному колі вся потужність надходить в коло і в будь-який момент часу дорівнює всій потужності, що поглинається колом. Це справедливо і для активної, і для реактивної потужності.

Таким чином, сумарна активна потужність джерел енергії в будь-якому колі дорівнює споживаній активній потужності цього кола. Сума реактивних

потужностей, яка віддається джерелами, дорівнює сумі реактивних потужностей приймачів. Ця умова називається відповідно *балансом* активної і реактивної потужностей. Математично це записується так:

$$\begin{aligned}\sum_k U_k I_k \cos \varphi_k &= \sum_k I_k^2 r_k, \\ \sum_k U_k I_k \sin \varphi_k &= \sum_k I_k^2 x_k.\end{aligned}\tag{2.39}$$

### Контрольні запитання

1. Чи може на пасивних ділянках електричного кола зсув фаз між напругою і струмом бути більшим за  $\frac{\pi}{2}$ ?
2. Чи може активна потужність кола бути від'ємною?
3. Чи може реактивна потужність кола бути від'ємною?
4. Чи може повна потужність кола бути від'ємною?
5. Яку активну потужність споживає ідеальна індуктивність?
6. Яку активну потужність споживає ідеальна ємність?
7. Чи буде обов'язково виконуватись баланс повної потужності, якщо виконуються баланси активної та реактивної потужностей?
8. Чи будуть обов'язково виконуватись баланси активної і реактивної потужностей, якщо виконується баланс повної потужності?

### ЛЕКЦІЯ № 3

## СИМВОЛІЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Символічний метод аналізу кіл синусоїдного струму базується на існуванні взаємно однозначної відповідності між тригонометричними функціями та комплексними числами, що дає можливість здійснювати розрахунки не з синусоїдними функціями струмів та напруг, а з їх комплексними зображеннями.

### 3.1 Елементи алгебри комплексних чисел

Нагадаємо основні відомості про комплексні числа та дії над ними.

У межах символічного методу використовують дві з трьох форм запису комплексного числа – алгебраїчну та показникову.

*Алгебраїчна* форма має вигляд (літеру, що позначає комплексне число, підкреслюють знизу):

$$\underline{A} = a_1 + ja_2, \quad (3.1)$$

де  $a_1$  – дійсна частина комплексного числа;

$a_2$  – уявна частина комплексного числа;

$j = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця, на відміну від позначення  $\sqrt{-1} = i$ , яке прийняте в математиці; в електротехніці уявну одиницю позначають літерою  $j$ .

*Показникова* форма має вигляд:

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha}, \quad (3.2)$$

де  $A$  – модуль комплексного числа;

$\alpha$  – аргумент комплексного числа.

Перехід від однієї форми запису до іншої здійснюється за допомогою співвідношень:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{a_2}{a_1}, \quad a_1 = A \cos \alpha, \quad a_2 = A \sin \alpha. \quad (3.3)$$

Операції додавання (віднімання) двох комплексних чисел зручно проводити в алгебраїчній формі, при цьому додаються (віднімаються) відповідно дійсні та уявні частини:

$$\underline{A} \pm \underline{B} = (a_1 + ja_2) \pm (b_1 + jb_2) = (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2). \quad (3.4)$$

Операції множення та ділення комплексних чисел краще проводити в показниковій формі:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = AB e^{j(\alpha+\beta)}, \quad \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}. \quad (3.5)$$

Корисно запам'ятати деякі прості співвідношення:

$$j^2 = -1, \quad \pm jA = Ae^{\pm j\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{1}{j} = -j. \quad (3.6)$$

Два комплексних числа вигляду

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = Ae^{j\alpha}, \quad \underline{A}^* = a_1 - ja_2 = Ae^{-j\alpha}$$

називаються *взаємно спряженими*.

### 3.2 Комплексні зображення електротехнічних параметрів

Надалі ми будемо здійснювати розрахунок кіл синусоїдного струму в діючих значеннях, тому наведемо відповідність комплексних діючих значень струму та напруги їх синусоїдним функціям:

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta) \rightarrow \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\beta}, \quad (3.7)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}.$$

Комплексні зображення активних, реактивних та повних опорів кола визначаються як:

- комплексний опір резистора  $r$  є дійсним числом і дорівнює  $r$ ;
- комплексний опір індуктивності  $L$  є уявним числом і дорівнює:

$$j\omega L = jx_L; \quad (3.8)$$

- комплексний опір ємності  $C$  є уявним числом і дорівнює:

$$\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -jx_C; \quad (3.9)$$

• *повний комплексний опір (full complex resistance)* ділянки кола  $rLC$  є комплексним числом і в алгебраїчній формі записується так:

$$\underline{Z} = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + j(x_L - x_C) = r + jx. \quad (3.10)$$

Введемо поняття *повної комплексної провідності (full complex conductivity)* ділянки кола як:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j\frac{x}{r^2 + x^2}. \quad (3.11)$$

Звідси величини

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2} \quad (3.12)$$

називають відповідно активною та реактивною провідністю ділянки кола.

### 3.3 Закони електротехніки в комплексній формі

1. Закон Ома:

$$\underline{U} = \underline{I}\underline{Z}. \quad (3.13)$$

2. Перший закон Кірхгофа:

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0. \quad (3.14)$$

3. Другий закон Кірхгофа:

$$\sum_{k=1}^n \underline{E}_k = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k \underline{Z}_k. \quad (3.15)$$

### 3.4 Баланс потужності в комплексній формі

Згідно з формулами (2.39), які наводились в лекції № 2, результати розрахунків кіл синусоїдного струму мають пройти перевірку на баланси активної та реактивної потужностей окремо. При цьому наявність балансу лише повної потужності не є критерієм правильності розрахунків.

Якщо розрахунки вести в комплексних числах, то необхідність окремої перевірки балансів активної та реактивної потужностей зникає.

Введемо поняття *повної комплексної потужності (full complex power)*.

Вона визначається:

$$\underline{S} = P + jQ = |\underline{I}|^2 \underline{Z} = \underline{U} \underline{I}^*. \quad (3.16)$$

Баланс потужності має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^n |\underline{I}_k|^2 \underline{Z}_k. \quad (3.17)$$

### Контрольні запитання

1. Зобразити миттєві струми в діючій комплексній формі:

$$i = 10 \sin(\omega t - 25^\circ) \text{ А}, \quad i = 7 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ А},$$

$$i = 4 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ А}, \quad i = 2 \sin(\omega t + 240^\circ) \text{ А}.$$

2. За заданими комплексами діючих значень струмів

$$\underline{I} = 6e^{-j45^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I} = 4e^{j120^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I} = 12e^{j21^\circ} \text{ А}$$

записати миттєві значення струмів.

3. Чи будуть обов'язково виконуватися баланси активної та реактивної потужностей, якщо виконується баланс повної комплексної потужності?

4. Як зобразити комплексне число в декартовій системі координат?

5. Чим відрізняються між собою взаємно спряжені комплексні числа?



## ЛЕКЦІЯ № 4

### МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СКЛАДНИХ КІЛ

Складним колом надалі ми будемо називати коло, яке містить більше ніж один контур. Основним методом розрахунку такого кола є складання і подальше розв'язання системи рівнянь за законами Кірхгофа.

Водночас, цей метод часто потребує розв'язання досить великої системи рівнянь, що не може бути реалізовано в межах стандартних математичних програмних продуктів. Тому розроблені методи аналізу складних кіл, які значно спрощують їх розрахунок. Деякі з цих методів будуть наведені нижче.

#### 4.1 Метод еквівалентних перетворень

Метод еквівалентних перетворень доцільно використовувати тоді, якщо коло містить лише одне джерело живлення. Суть цього методу полягає в тому, що вся пасивна частина схеми згортається до одного еквівалентного опору, який приєднується до полюсів джерела живлення. Після цього за законом Ома знаходиться вхідний струм кола, який далі розподіляється між вітками.

Розглянемо різні можливі варіанти еквівалентних перетворень.

1. *Послідовне з'єднання опорів (consecutive connection resistance).*

Нехай є електричне коло з  $n$  послідовно з'єднаними опорами, через які протікає один і той самий струм  $I$  (рис. 4.1, а). Еквівалентне коло містить лише один опір  $Z$  (рис. 4.1, б).

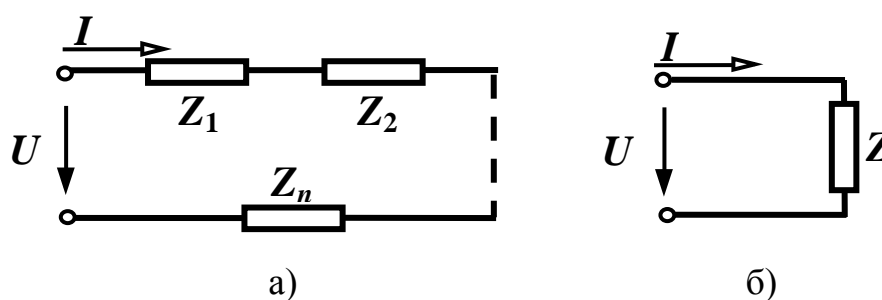


Рисунок 4.1

У цьому випадку еквівалентний комплексний опір кола при послідовному з'єднанні дорівнює сумі комплексних опорів окремих елементів, тобто

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n, \quad (4.1)$$

## 2. Паралельне з'єднання опорів (parallel connection resistance).

Нехай є електричне коло з  $n$  паралельно з'єднаними опорами, до яких прикладена однакова напруга  $U$  (рис. 4.2, а). Еквівалентне коло містить лише один опір  $Z$  (рис. 4.2, б).

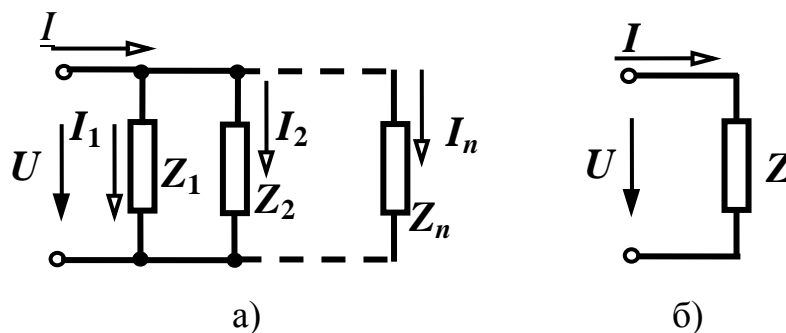


Рисунок 4.2

При паралельному з'єднанні комплексна провідність еквівалентного кола дорівнює сумі комплексних провідностей окремих елементів:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_k + \dots + \underline{Y}_n. \quad (4.2)$$

Для випадку двох паралельних опорів, який часто зустрічається,  $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ , або  $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$ , звідки після нескладних перетворень

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (4.3)$$

Аналогічно, для трьох паралельних опорів отримаємо:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}. \quad (4.4)$$

Розглянемо випадок змішаного з'єднання (рис. 4.3, а).

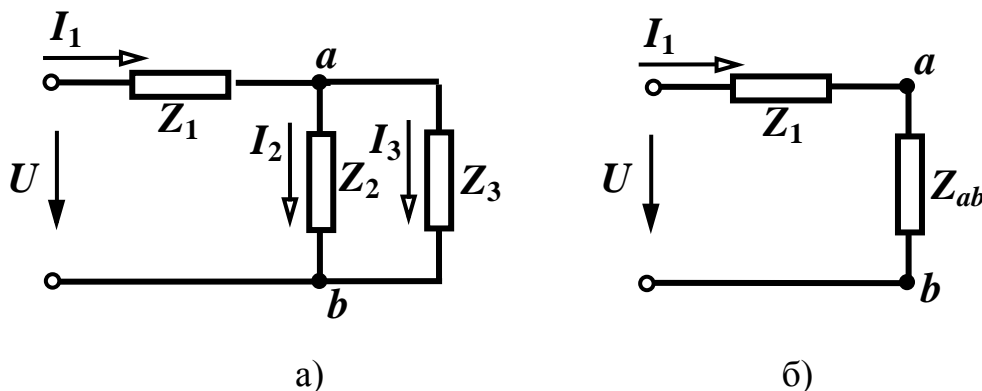


Рисунок 4.3

При змішаному з'єднанні шляхом послідовного перетворення паралельного і послідовного з'єднання елементів отримують еквівалентну схему, яка складається з одного опору.

Спочатку перетворюють два паралельно з'єднаних опори  $\underline{Z}_2$  і  $\underline{Z}_3$  в один  $\underline{Z}_{ab}$  ( $\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$ ).

З рис. 4.3, б) видно, що опори  $\underline{Z}_1$  і  $\underline{Z}_{ab}$  з'єднані послідовно, тому

$$\underline{Z}_{екв} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab}.$$

Струм  $\underline{I}_1$  визначається за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{екв}}.$$

Щоб знайти струми  $\underline{I}_2$  і  $\underline{I}_3$ , треба визначити спочатку напругу між точками  $a$  і  $b$ :

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Знаючи  $\underline{U}_{ab}$ , легко визначаються

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3},$$

або

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

## 4.2 Метод контурних струмів

*Метод контурних струмів (method of contours currents)* доцільно застосовувати, якщо кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа менша кількості рівнянь за першим законом.

Суть методу полягає в тому, що замість струмів у вітках вводяться нові змінні – замкнені струми, які умовно проходять вітками незалежних контурів. Ці струми називаються *контурними*, і їхня кількість менша за кількість струмів віток.

Зручність цього методу полягає ще і в тому, що його система рівнянь має уніфікований вигляд за будь-якої схеми кола.





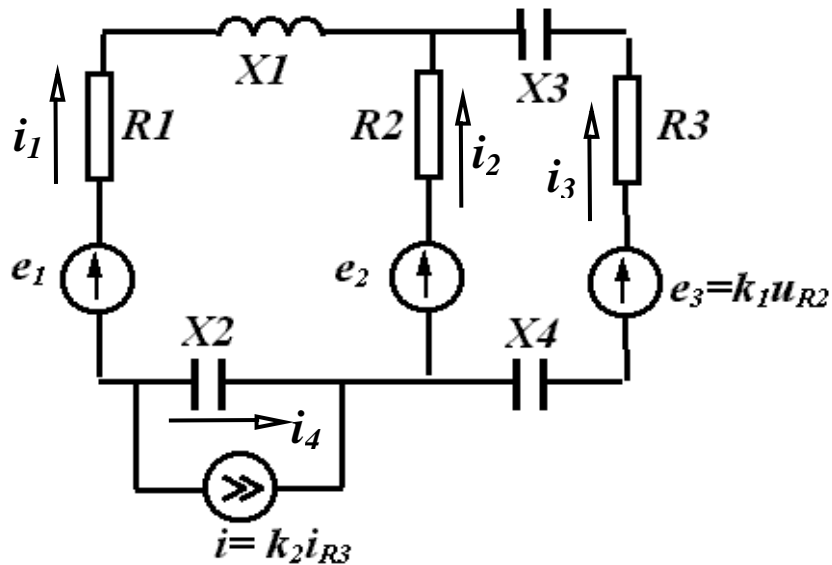


Рисунок 4.4

Оскільки в колі діють чотири *невідомі* струми, система має складатися з чотирьох рівнянь, два з яких – за першим законом (коло містить три вузли), і два – за другим.

Запишемо вирази для повних комплексних опорів віток, вважаючи, що номер вітки збігається з номером струму:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - j(X_3 + X_4), \quad \underline{Z}_4 = -jX_2.$$

Запишемо систему рівнянь у комплексній формі:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0,$$

$$\underline{I} + \underline{I}_4 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0,$$

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_4 \underline{Z}_4 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2,$$

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{E}_2 - \underline{E}_3.$$

Ураховуючи те, що  $\underline{E}_3 = k_1 \underline{I}_2 \underline{Z}_2$ , а  $\underline{I} = k_2 \underline{I}_3$ , система рівнянь матиме вигляд:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0,$$

$$\underline{I}_4 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3(k_2 - 1) = 0,$$

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_4 \underline{Z}_4 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2,$$

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_2(k_1 + 1) - \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{E}_2$$

(4.7)

Усі розрахунки виконаємо в середовищі MathCAD.  
Введемо вхідні дані.

$$\begin{aligned}
 E_{m1} &:= 100 & \beta_1 &:= -20 \text{deg} & E_{m2} &:= 150 & \beta_2 &:= 30 \text{deg} \\
 r_1 &:= 6 & r_2 &:= 10 & r_3 &:= 8 & x_1 &:= 9 & x_2 &:= 6 \\
 x_3 &:= 4 & x_4 &:= 12 & k_1 &:= 0.8 & k_2 &:= 0.5 \\
 E_1 &:= \frac{E_{m1}}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \beta_1} & E_2 &:= \frac{E_{m2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \beta_2} \\
 E_1 &= 66.446 - 24.184i & E_2 &= 91.856 + 53.033i \\
 Z_1 &:= r_1 + i \cdot x_1 & Z_2 &:= r_2 & Z_3 &:= r_3 - i \cdot (x_3 + x_4) & Z_4 &:= -(i \cdot x_2)
 \end{aligned}$$

Базуючись на системі (4.7), введемо в MathCAD матрицю коефіцієнтів при невідомих струмах та вектор правих частин, після чого знайдемо комплексні значення струмів.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k_2 - 1 & 1 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 \\ 0 & Z_2 \cdot (k_1 + 1) & -Z_3 & 0 \end{bmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_1 - E_2 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

$$J := \text{lsolve}(A, B) \quad I_1 := J_0 \quad I_2 := J_1 \quad I_3 := J_2 \quad I_4 := J_3$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -0.682 - 5.038i & |I_1| &= 5.084 & \arg(I_1) &= -97.709 \text{deg} \\
 I_2 &= 3.549 + 5.354i & |I_2| &= 6.423 & \arg(I_2) &= 56.464 \text{deg} \\
 I_3 &= -2.867 - 0.316i & |I_3| &= 2.884 & \arg(I_3) &= -173.717 \text{deg} \\
 I_4 &= 2.115 + 5.196i & |I_4| &= 5.61 & \arg(I_4) &= 67.849 \text{deg}
 \end{aligned}$$

Перевіримо баланс потужностей.

Для визначення потужності джерел енергії знайдемо спочатку комплексні значення е.р.с.  $\underline{E}_3$ , напруги джерела струму  $\underline{U}_i$  і струму  $\underline{I}$  за формулами:

$$\underline{E}_3 = k_1 \underline{I}_2 \underline{Z}_2, \quad \underline{U}_i = \underline{I}_4 \underline{Z}_4, \quad \underline{I} = k_2 \underline{I}_3.$$

Потужність джерел енергії:

$$S_{\text{дж}} = \overset{*}{E_1} \overset{*}{I_1} + \overset{*}{E_2} \overset{*}{I_2} + \overset{*}{E_3} \overset{*}{I_3} - \overset{*}{U_i} \overset{*}{I}.$$

Зауважимо, що потужність джерела струму приймається від'ємною, тому що струм і напруга в джерелі струму спрямовані протилежно.

Потужність споживачів:

$$S_{cn} = I_1^2 Z_1 + I_2^2 Z_2 + I_3^2 Z_3 + I_4^2 Z_4.$$

Реалізуємо ці вирази в MathCAD.

$$E3 := k1 \cdot I2 \cdot Z2 \quad E3 = 28.389 + 42.832i \quad |E3| = 51.386 \quad \arg(E3) = 56.464 \text{ deg}$$

$$I := k2 \cdot I3 \quad I = -1.433 - 0.158i \quad |I| = 1.442 \quad \arg(I) = -173.717 \text{ deg}$$

$$U_i := I4 \cdot Z4 \quad U_i = 31.177 - 12.692i \quad |U_i| = 33.662 \quad \arg(U_i) = -22.151 \text{ deg}$$

$$S_d := E1 \cdot \bar{I1} + E2 \cdot \bar{I2} + E3 \cdot \bar{I3} - U_i \cdot \bar{I}$$

$$S_{sp} := (|I1|)^2 \cdot Z1 + (|I2|)^2 \cdot Z2 + (|I3|)^2 \cdot Z3 + (|I4|)^2 \cdot Z4$$

$$S_d = 634.217 - 89.257i \quad S_{sp} = 634.217 - 89.257i$$

Баланс потужностей збігається.

### Контрольні запитання

1. Збільшується чи зменшується при зростанні частоти повний опір послідовного з'єднання резистора та індуктивності?
2. Збільшується чи зменшується при зростанні частоти повний опір послідовного з'єднання резистора та ємності?
3. Повний опір паралельного з'єднання двох резисторів: більший чи менший за кожен з опорів?
4. У яких випадках доцільніше використовувати метод контурних струмів, а в яких – метод вузлових потенціалів?



## ЛЕКЦІЯ № 5 РЕЗОНАНСНІ ЯВИЩА В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

### 5.1 Резонанс у послідовному контурі. Резонанс напруг

В електричному колі на різних його ділянках реактивні опори можуть бути додатними та від'ємними і в окремих випадках можуть взаємно компенсуватися. За повної компенсації реактивних опорів в колі його вхідний опір має активний характер, вхідна напруга та струм будуть збігатися за фазою, а електричне коло не буде ні споживати, ні генерувати реактивну потужність.

*Режим роботи електричного кола, якщо за наявності реактивних опорів у ньому його вхідний опір є активним, називається резонансним.*

Умовою резонансного режиму є рівність нулю вхідного реактивного опору або реактивної провідності, тобто

$$x_{\text{вх}} = 0, \quad b_{\text{вх}} = 0. \quad (5.1)$$

Частоти, за яких у колі існує резонанс, називають *резонансними*.

Розглянемо контур (рис. 5.1), що складається з послідовно з'єднаних елементів  $r$ ,  $L$ ,  $C$  і запишемо комплексний вхідний опір кола:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

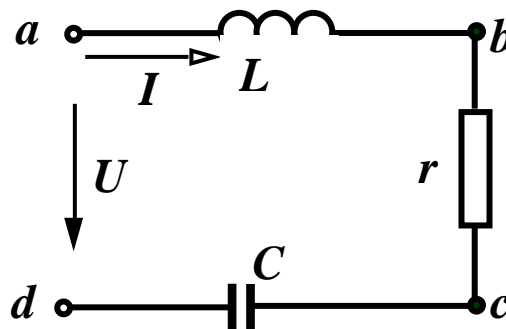


Рисунок 5.1

Відповідно до умови (5.1) резонанс у цьому контурі можливий, якщо ємнісний опір дорівнює індуктивному опору, тобто

$$x_{\text{вх}} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad (5.2)$$

З (5.2) видно, що резонансного режиму можна досягнути, змінюючи або величину ємності, або індуктивність чи частоту. За постійних параметрів  $L$  та  $C$  резонансна частота:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.3)$$

Діюче значення струму в контурі:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (5.4)$$

Якщо амплітуда прикладеної напруги постійна, то струм у колі в момент резонансу набуває максимальне значення:

$$I_0 = \frac{U}{r} \quad (5.5)$$

і, як вже зазначалось, збігається за фазою з прикладеною напругою.

Напруги на реактивних елементах при  $\omega = \omega_0$  рівні між собою:

$$U_{0L} = I_0 \omega_0 L = U \frac{\omega_0 L}{r}, \quad U_{0C} = I_0 \frac{1}{\omega_0 C} = U \frac{1}{\omega_0 C r}.$$

Якщо  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \gg r$ , то напруги на реактивних елементах значно перевищують вхідну напругу, тому резонанс у послідовному контурі називають *резонансом напруг* (*resonance of voltage*).

Величину реактивного опору в момент резонансу

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \quad (5.6)$$

називають *характеристичним опором* (*characteristic resistance*) контуру.

Важливий параметр резонансного контуру – його *добротність*  $Q$ , яка є відношенням одного з реактивних опорів при резонансі до активного опору контуру:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{\rho}{r} = \frac{U_{0L}}{U} = \frac{U_{0C}}{U}. \quad (5.7)$$

Добротність показує, у скільки разів напруга на кожному з реактивних елементів у резонансному режимі перевищує прикладену вхідну напругу. Добротність контурів, які використовують у радіотехніці, зазвичай, становить 50–300.

Величина  $\alpha = \frac{1}{Q}$  називається *згасанням* контуру.

## 5.2 Резонанс у паралельному контурі. Резонанс струмів

Нехай у паралельному ідеальному контурі (рис. 5.2) до паралельно з'єднаних елементів  $g$ ,  $L$ ,  $C$  приєднане ідеальне джерело струму.

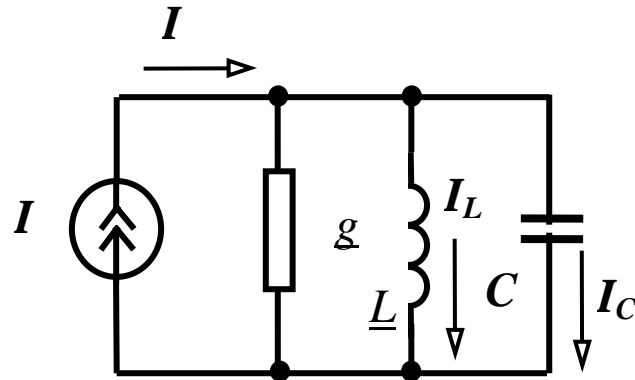


Рисунок 5.2

Комплексна вхідна провідність кола  $Y_{\text{вх}} = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$ , звідки резонансна частота  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Якщо контур живиться від джерела напруги, то в режимі резонансу вхідний струм набуває мінімальне значення  $I_0 = Ug$ , а струми у вітках з реактивними елементами можуть у багато разів перевищувати вхідний струм, тому такий резонанс називається *резонансом струмів* (*resonance of current*).

Добротність у цьому випадку визначається як відношення струму в будь-якому реактивному елементі в резонансному режимі до струму:

$$Q = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{U}{\omega_0 L U g} = \frac{1}{\omega_0 L g} = \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Величина  $\sqrt{\frac{C}{L}}$  має розмірність провідності і називається *характеристичною провідністю* (*characteristic conductivity*)  $\gamma$ , тому  $Q = \frac{\gamma}{g}$ .

Розглянемо загальний випадок, коли в колі є дві паралельні вітки, які містять індуктивність і ємність із втратами (рис. 5.3).

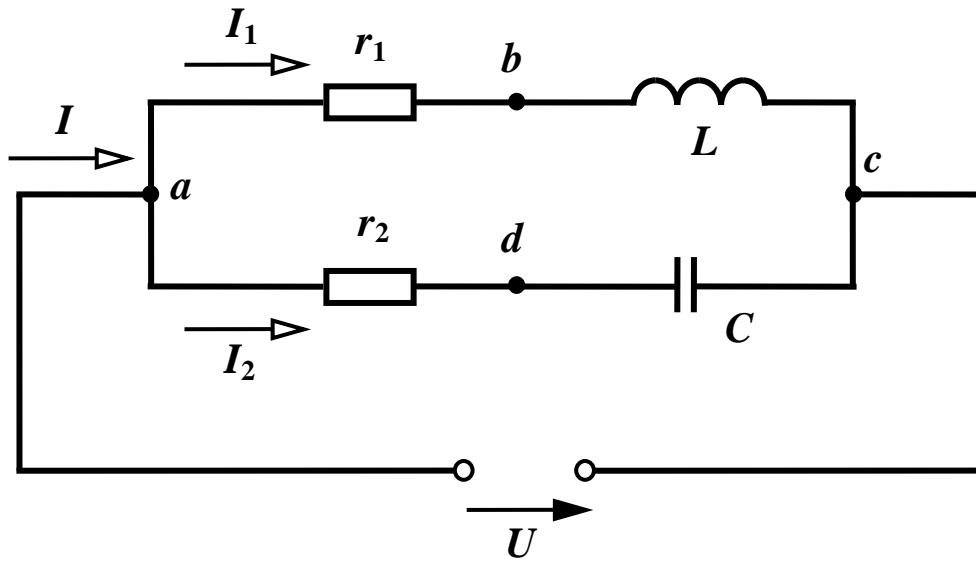


Рисунок 5.3

Умова резонансу: реактивна складова вхідного опору або вхідна провідність дорівнює нулю. Тобто,  $b_1 + b_2 = 0$ .

Оскільки

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{r_1 + jx_1} = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} - j \frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{r_2 + jx_2} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

де  $x_1 = \omega L$ ,  $x_2 = -\frac{1}{\omega C}$ .

Тоді умову резонансу можна записати так:

$$\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2} - \frac{\omega_0 L}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2} = 0.$$

Після нескладних перетворень визначаємо резонансну частоту:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{r_1^2 C - L}{r_2^2 C - L}}. \quad (5.8)$$

Ураховуючи, що  $\frac{L}{C} = \rho^2$ , запишемо:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{r_1^2 - \rho^2}{r_2^2 - \rho^2}}. \quad (5.9)$$

Залежно від співвідношення між  $r_1$ ,  $r_2$  та  $\rho$  можуть бути різні випадки. Так, при  $r_1 > \rho$ ,  $r_2 < \rho$  або при  $r_1 < \rho$ ,  $r_2 > \rho$  резонансу не буде за будь-якої частоти. При  $r_1 \ll \rho$ ,  $r_2 \ll \rho$  резонансна частота така сама, як і для ідеального контуру  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Отже, при  $r_1 = r_2 = \rho$  значення резонансної частоти буде невизначеним, тобто резонанс існує на будь-якій частоті (*байдужий резонанс*).

### Контрольні запитання

1. Чому резонанс у послідовному контурі називають резонансом напруг, а в паралельному – резонансом струмів?
2. Чи завжди при резонансі напруг напруги на реактивних елементах більші від прикладених? Якщо ні, то чому?
3. Яку мінімальну кількість реактивних елементів повинна мати послідовна ділянка кола, щоб у ній був можливий резонанс напруг?
4. Як у радіотехніці використовують явище резонансу?
5. Що таке «байдужий резонанс»?

## ЛЕКЦІЯ № 6 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

### 6.1 Зображення періодичних несинусоїдних функцій рядами Фур'є

Наявність в електричних колах джерел енергії, напруга яких хоча й періодична, але відрізняється від гармонічної (рис. 6.1), не дозволяє для розрахунку таких кіл використовувати безпосередньо символічний метод. Тому, звичайно, періодичну несинусоїдну функцію зображають у вигляді ряду Фур'є.

Така несинусоїдна періодична напруга  $u(t)$ , що задовольняє умови Діріхле, тобто якщо функція має за період скінченну кількість розривів першого роду і скінченну кількість максимумів та мінімумів, може бути зображена гармонічним рядом:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \sin \frac{2k\pi}{T} t + B_k \cos \frac{2k\pi}{T} t \right), \quad (6.1)$$

де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються виразами:

$$B_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin \frac{2k\pi}{T} t dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos \frac{2k\pi}{T} t dt. \quad (6.2)$$

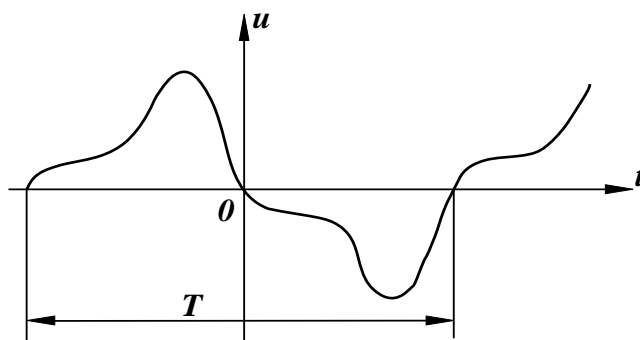


Рисунок 6.1

Запишемо ряд Фур'є для напруги, зобразивши вираз у дужках (6.1) у вигляді однієї синусоїди:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega t + \beta_k), \quad (6.3)$$

де

$$U_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2};$$

$$\beta_k = \arctg \frac{B_k}{A_k}.$$

Члени ряду (6.3) називають *гармонічними складовими* або *гармоніками* (*harmonic*). Перша складова  $U_0$  – *нульова гармоніка* або *стала складова*. Складова  $U_{m1} \sin(\omega t + \beta_1)$  – *основна* або *перша гармоніка*. Усі інші складові – *вищі гармоніки*. Кожна гармоніка може мати амплітуду ( $U_{mk}$ ) і початкову фазу ( $\beta_k$ ), які відрізняються від інших, але головною відмінністю гармонік є *частота*, тобто кожна гармоніка має свою частоту. Можна зобразити на графіку значення амплітуд і початкових фаз гармонік залежно від номера гармоніки (рис. 6.2).

Закон розподілу амплітуд гармонічних складових за частотою називається спектром амплітуд або *амплітудно-частотним спектром* (*peak-frequency spectrum*). Закон розподілу початкових фаз називають спектром фаз або *фазочастотним спектром* (*fazofrequency a spectrum*).

Спектр, що складається з ряду окремих ліній, називають *дискретним* або *лінійним*. Амплітудно-частотний (рис. 6.2, а) і фазочастотний (рис. 6.2, б) спектри цілком визначають періодичну функцію.

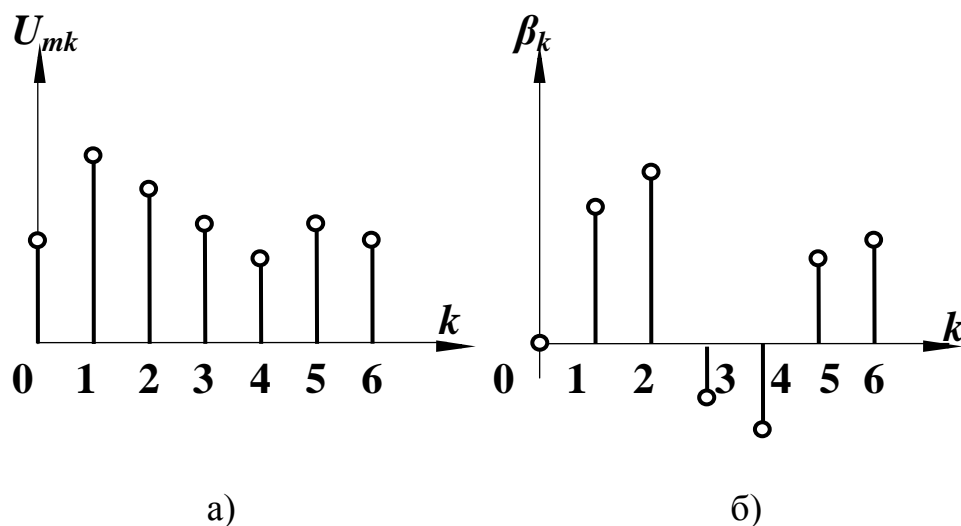


Рисунок 6.2

## 6.2 Діючі значення несинусоїдних струмів і напруг

У лекції № 2 було введено поняття діючого значення періодичного струму і його вираз (2.5):  $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$ .

Визначимо діюче значення несинусоїдного струму:

$$i = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

Отриманий ряд необхідно піднести до квадрата і підставити у вираз для діючого значення. Після необхідних перетворень матимемо:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \frac{I_{m3}^2}{2} + \dots}$$

або

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (6.4)$$

Таким чином, діюче значення несинусоїдного струму дорівнює кореню квадратному із суми квадратів діючих значень окремих гармонік.

Аналогічно діюче значення несинусоїдної напруги:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \quad (6.5)$$

Зазначимо, що діючі значення несинусоїдних струмів та напруг залежать лише від амплітуд гармонік та не залежать від їх початкових фаз.

### 6.3 Розрахунок електричних кіл при несинусоїдних напругах

Якщо прикладена напруга описується періодичною несинусоїдною функцією, то ця функція може бути зображена рядом Фур'є:

$$u = U_0 + U_{m1} \sin(\omega t + \beta_1) + U_{m2} \sin(2\omega t + \beta_2) + \dots \quad (6.6)$$

Вхідну напругу можна розглядати такою, що забезпечується окремими джерелами гармонічних напруг різних частот.

Згідно з теоремою накладання, можна стверджувати, що струми у вітках лінійного електричного кола можна визначати як алгебраїчну суму струмів від дії кожного джерела окремо. Таким чином, розрахунок електричного кола виконується для кожної гармоніки окремо. Оскільки в цьому випадку напруги джерел синусоїдні, то може використовуватися символічний метод, а через те, що частоти гармонік різні, то й опори віток кола для різних гармонік також відрізняються.

Розглянемо методику розрахунку на прикладі електричного кола, зображеного на рис. 6.3.

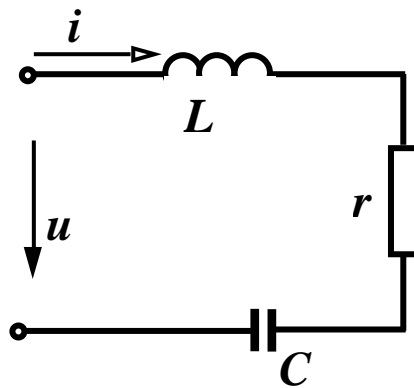


Рисунок 6.3



Нехай до цього кола прикладена напруга (6.6). Для першої гармоніки запишемо:

$$\underline{U}_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\beta_1}, \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Для  $k$ -ї гармоніки змінюються опори індуктивності і ємності:

$$x_L^{(k)} = k\omega L = kx_L^{(1)}, \quad x_C^{(k)} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{x_C^{(1)}}{k}, \quad (6.7)$$

тому

$$\underline{U}_k = \frac{U_{mk}}{\sqrt{2}} e^{j\beta_k}, \quad \underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{r + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)}.$$

Очевидно, що для сталої складової ( $k = 0$ ) з виразів (6.7) випливає:

$$x_L^{(0)} = 0 \cdot \omega L = 0, \quad x_C^{(0)} = \frac{1}{0 \cdot \omega C} = \infty, \quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_k}{r + j(0 - \infty)} = 0.$$

Миттєве значення струму знаходиться як сума миттєвих значень струмів різних гармонік.

Якщо коло складне, то для кожної гармоніки можна використовувати всі відомі методи розрахунку в комплексній формі.

#### 6.4 Потужності в колах несинусоїдного струму

У колах несинусоїдного струму *активна потужність дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік, а реактивна потужність – алгебраїчній сумі реактивних потужностей окремих гармонік, тобто*

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots, \quad (6.8)$$

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 + \dots. \quad (6.9)$$

Повна потужність визначається так:

$$S = UI = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \dots} \cdot \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}. \quad (6.10)$$

На відміну від кіл синусоїдного струму, у колах з несинусоїдними струмами та напругами *не виконується* рівність  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ . Щоб пов'язати певним співвідношенням ці потужності між собою, вводять поняття *потужності спотворення*  $T$  (*power of distortion*), яка характеризує ступінь відмінності у формах кривих напруги та струму, і тоді

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}. \quad (6.11)$$

Зазначимо, що баланс активних та реактивних потужностей виконується і для цього класу кіл.

Відношення активної потужності до повної називають *коефіцієнтом потужності*:

$$k_n = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots}{\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \cdot \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}}.$$

Для кіл синусоїдного струму

$$k_n = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi,$$

тобто, коефіцієнт потужності в цьому випадку дорівнює косинусу кута зсуву фаз  $\varphi$  напруги та струму.

### 6.5 Коефіцієнти, які характеризують відмінність кривої від синусоїди

Для оцінювання ступеня відмінності негармонічної кривої від синусоїдної вводять низку різних коефіцієнтів.

*Коефіцієнт амплітуди (amplitude factor)* визначається як відношення максимального значення функції до її діючого значення, тобто

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}. \quad (6.12)$$

*Коефіцієнтом спотворення (factor of distortions)* називається відношення діючого значення першої гармоніки до діючого значення всієї функції:

$$K_c = \frac{I_1}{I} = \frac{I_1}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}. \quad (6.13)$$

*Коефіцієнт нелінійних спотворень (factor of nonlinear distortions)* – відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення першої гармоніки:

$$K_{н.с} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots}}{I_1}. \quad (6.14)$$

Зазвичай ці коефіцієнти вводять для кривих, які не мають сталих складових. Тому в них немає складової  $I_0$ .

Визначимо можливі границі зміни цих коефіцієнтів. Мінімальне значення  $K_a = 1$  при  $I = I_m$ . У всіх інших випадках  $K_a > 1$ . Для синусоїди

$$K_a = \frac{I\sqrt{2}}{I} = 1,41.$$

Максимальне значення коефіцієнт спотворення набуває при синусоїдній формі кривої, коли відсутні вищі гармоніки. У цьому випадку  $K_c = \frac{I_1}{I_1} = 1$ . В інших випадках  $K_c < 1$ , і що меншим є  $K_c$ , то сильніше крива відрізняється від синусоїди.

Мінімальне значення коефіцієнта нелінійних спотворень можливе також при синусоїдній формі кривої, якщо відсутні вищі гармоніки:  $K_{н.с} = 0$ .

### Контрольні запитання

1. Якими параметрами відрізняються одна від одної гармонічні складові?
2. Як залежить діюче значення струму від початкових фаз гармонічних складових?
3. Визначити діюче значення напруги:

$$u = 30 + 80 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t \text{ В.}$$

4. У яких випадках вхідний опір кола залишається однаковим для всіх гармонік?
5. Що називають потужністю спотворення?

## ЛЕКЦІЯ № 7

### ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ ТА ЇХ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

#### 7.1 Основні рівняння чотириполюсника

Електричне коло (рис. 7.1), яке містить дві пари затискачів (виводів, полюсів), за допомогою яких воно може бути приєднане до інших кіл, називається *чотириполюсником* (*twoport network*). Ліві затискачі називаються *вхідними* (*первинними*), праві – *вихідними* (*вторинними*).

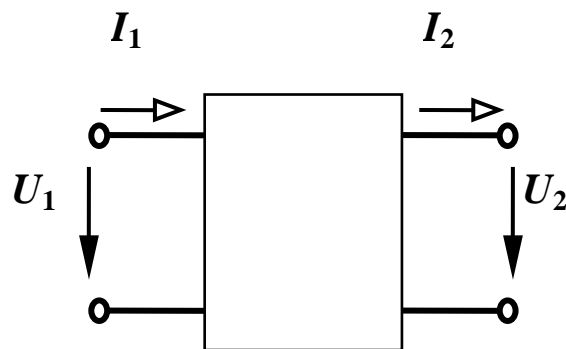


Рисунок 7.1

Цей клас кіл, зазвичай, розглядають у тому разі, якщо необхідно знати лише струми й напруги на вході та виході чотириполюсника. Теорія чотириполюсників дозволяє знаходити зв'язок між цими величинами, не виконуючи розрахунки струмів та напруг усередині самого чотириполюсника, схема якого може бути як завгодно складною і навіть невідомою.

Залежно від внутрішніх параметрів та схем чотириполюсників їх можна класифікувати за різними ознаками.

Якщо чотириполюсник містить усередині джерела енергії, його називають *активним*, а за відсутності всередині джерел енергії – *пасивним*. За наявності всередині чотириполюсника тільки лінійних елементів його називають *лінійним*, а якщо в ньому міститься хоча б один нелінійний елемент – *нелінійним*.

Розрізняють *симетричні* та *несиметричні* чотириполюсники. Чотириполюсник називається *симетричним*, якщо при взаємній заміні вхідних затискачів на вихідні не змінюються струми та напруги в колах, з якими він з'єднаний. Чотириполюсники, що не задовольняють цю умову, є *несиметричними*.

Надалі розглядаються лише пасивні лінійні чотириполюсники.

Знайдемо співвідношення, які пов'язують між собою вхідні та вихідні параметри чотириполюсники, – залежність вигляду:

$$(\underline{U}_1, \underline{I}_1) = f(\underline{U}_2, \underline{I}_2).$$

У матричній формі її можна записати як

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

а у звичайному вигляді:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Отримані рівняння називаються *основними рівняннями чотириполюсника*, а їх коефіцієнти називаються *A-параметрами*.

Загалом *A-параметри* є комплексними величинами та мають різні розмірності:  $\underline{A}_{11}$  та  $\underline{A}_{22}$  – безрозмірні;  $\underline{A}_{12}$  має розмірність опору, а  $\underline{A}_{21}$  – розмірність провідності.

Важлива властивість *A-параметрів*: визначник матриці  $[\underline{A}]$  завжди дорівнює одиниці.

$$\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1. \quad (7.3)$$

З виразу (7.3) видно, що лише три *A-параметри* з чотирьох є незалежними.

Для симетричного чотириполюсника повинна виконуватись рівність

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}. \quad (7.4)$$

## 7.2 Визначення параметрів чотириполюсників

Як уже зазначалося, внутрішня схема чотириполюсника може бути невідомою, тому часто коефіцієнти чотириполюсника визначаються дослідним шляхом. Оскільки чотириполюсник має три незалежних параметри, то необхідно виконати досліди із знаходження вхідних комплексних опорів чотириполюсника при трьох різних, бажано стандартних, режимах. Такими дослідями, зазвичай, є досліди короткого замикання та холостого ходу.

### *Режим прямого короткого замикання*

У цьому режимі вихідні затискачі замкнені накоротко, напруга  $\underline{U}_2 = 0$  і рівняння (7.2) мають вигляд:  $\underline{U}_{1к} = \underline{A}_{12} \underline{I}_{2к}$ ,  $\underline{I}_{1к} = \underline{A}_{22} \underline{I}_{2к}$ .

Із цих рівнянь випливає, що  $\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{2к}}$ ,  $\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_{1к}}{\underline{I}_{2к}}$ , а вхідний опір чотириполюсника зі сторони первинних затискачів:

$$\underline{Z}_{1к} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{1к}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}. \quad (7.5)$$

### Режим прямого холостого ходу

Вихідні затискачі в цьому випадку розімкнені, струм  $I_2 = 0$  та основні рівняння:  $\underline{U}_{1x} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{2x}$ ,  $\underline{I}_{1x} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{2x}$ .

З цих рівнянь випливає, що  $\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_{2x}}$ ,  $\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{1x}}{\underline{U}_{2x}}$ , а вхідний опір чотириполюсника зі сторони первинних затискачів:

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}. \quad (7.6)$$

### Режим зворотного короткого замикання

У цьому режимі чотириполюсник живиться зі сторони вторинних затискачів при короткому замиканні первинних. Через зміну напрямку передавання енергії міняються місцями коефіцієнти  $\underline{A}_{11}$  та  $\underline{A}_{22}$ , тому вхідний опір зі сторони вторинних затискачів знайдемо з (7.5), замінюючи  $\underline{A}_{22}$  на  $\underline{A}_{11}$ :

$$\underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}. \quad (7.7)$$

З виразів (7.3), (7.5), (7.6), (7.7) випливає:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{2k}(\underline{Z}_{1x} - \underline{Z}_{1k})}}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}, \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}}, \quad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{11}\frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{1k}}. \quad (7.8)$$

## 7.3 Найпростіші чотириполюсники

Знайдемо  $\underline{A}$ -параметри найпростіших чотириполюсників, що складаються лише з одного елемента (рис. 7.2).

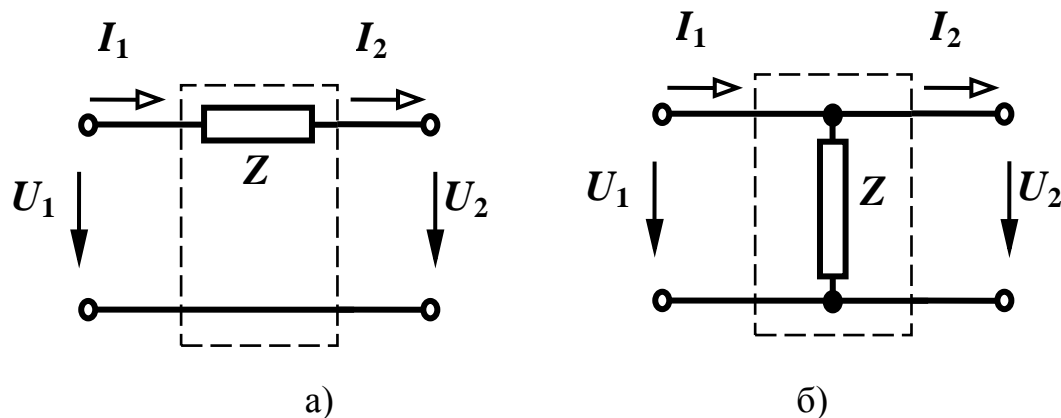


Рисунок 7.2

Знання  $\underline{A}$ -параметрів таких чотириполіусників дозволить отримувати параметри чотириполіусників багатьох типових структур. Зазначимо, що обидва чотириполіусники симетричні, тому вони характеризуються двома незалежними параметрами.

Знайдемо  $\underline{A}$ -параметри першого чотириполіусника (рис. 7.2, а) за допомогою дослідів короткого замикання та холостого ходу. Із схеми видно, що  $\underline{Z}_{1к} = \underline{Z}$ ,  $\underline{Z}_{1х} = \infty$ .

Підставивши ці значення в (7.5) і позбувшись невизначеності, отримаємо:  $\underline{A}_{11} = 1$ ,  $\underline{A}_{12} = \underline{Z}$ ,  $\underline{A}_{21} = 0$ ,  $\underline{A}_{22} = 1$ , тобто  $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Для чотириполіусника (рис. 7.2, б)  $\underline{Z}_{1к} = 0$ ,  $\underline{Z}_{1х} = \underline{Z}$ . Звідси  $\underline{A}_{11} = 1$ ,  $\underline{A}_{12} = 0$ ,  $\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}}$ ,  $\underline{A}_{22} = 1$  і матриця  $\underline{A}$ -параметрів  $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}} & 1 \end{bmatrix}$ .

Зазначимо тепер  $\underline{A}$ -параметри більш складного чотириполіусника (рис. 7.3).

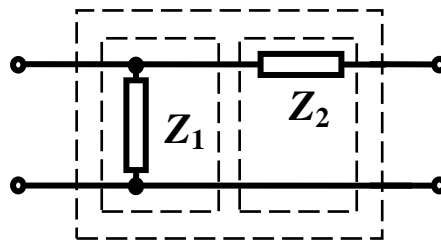


Рисунок 7.3

Цей чотириполіусник вже не є симетричним, тому для нього визначимо три параметри:  $\underline{Z}_{1к} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ ,  $\underline{Z}_{2к} = \underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_{1х} = \underline{Z}_1$ .

Тоді

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}{\underline{Z}_2 \left( \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right)}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1^2}{(\underline{Z}_1^2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2)}} = 1,$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_2, \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1},$$

а матриця  $\underline{A}$ -параметрів:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}.$$

## 7.4 Характеристичні параметри чотириполюсників

Чотириполюсники як складові частини складного електричного кола часто застосовують у пристроях передавання інформації. У такому разі важливо знати, яким чином чотириполюсник впливає на проходження сигналу, тобто як змінюється його амплітуда та фаза. Для цього  $\underline{A}$ -параметри чотириполюсника малоінформативні, і тому вводять інші параметри – *характеристичні*.

Визначимо їх лише для симетричних чотириполюсників. Незалежних  $\underline{A}$ -параметрів у симетричного чотириполюсника є два, тому і характеристичних параметрів теж два. Одним з них є *характеристичний опір*  $\underline{Z}_c$ . Це такий опір, під час приєднання якого до вихідних затискачів чотириполюсника (як навантаження) його вхідний опір також дорівнює  $\underline{Z}_c$  (рис. 7.4).

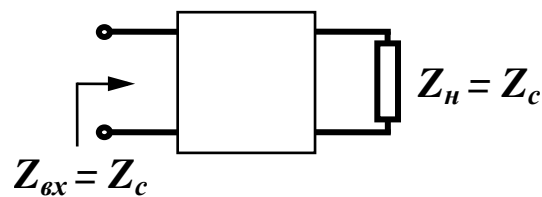


Рисунок 7.4

Характеристичний опір визначається як

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_{1к} \underline{Z}_{1х}}. \quad (7.9)$$

Якщо чотириполюсник навантажений характеристичним опором, його режим роботи називають *узгодженим*.

Іншим характеристичним параметром є *стала передачі* (*transfer constant*), що знаходиться як

$$\underline{g} = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}\right). \quad (7.10)$$

Це комплексне число, яке в алгебраїчній формі можна записати у вигляді  $\underline{g} = a + jb$ , де величина  $a$  показує, як змінюється величина напруги чи струму під час проходження через чотириполюсник, і називається *коефіцієнтом згасання* (*attenuation factor*);  $b$  характеризує зміну фази напруги або струму і називається *фазовим коефіцієнтом* (*phase factor*).

Основні рівняння чотириполюсника можна також виразити через характеристичні параметри:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \underline{ch} \underline{g} + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \underline{sh} \underline{g} \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \underline{sh} \underline{g} + \underline{I}_2 \underline{ch} \underline{g} \end{aligned} \quad (7.11)$$



## 7.5 Каскадне з'єднання чотириполюсників

Переважну більшість сучасних електронних пристроїв можна розглядати як *каскадне з'єднання* різноманітних багатополюсників.

Каскадним називається таке з'єднання, якщо вихідні затискачі одного чотириполюсника з'єднані з вхідними затискачами іншого чотириполюсника (рис. 7.5).

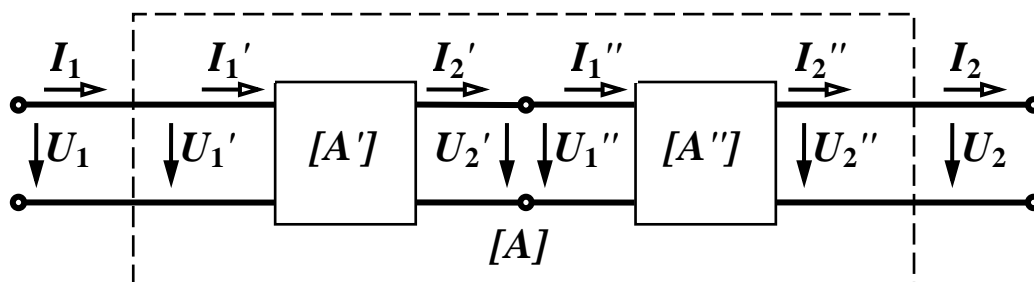


Рисунок 7.5

Для каскадного з'єднання діє така теорема: *матриця  $\underline{A}$ -параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює добутку матриць  $\underline{A}$ -параметрів окремих чотириполюсників*, тобто

$$[\underline{A}] = [\underline{A}'] \cdot [\underline{A}'']. \quad (7.12)$$

Розглянемо приклад.

Визначити матрицю  $\underline{A}$ -параметрів чотириполюсника, зображеного на рис. 7.3, за відомими матрицями  $\underline{A}$ -параметрів чотириполюсників (див. рис. 7.2), використовуючи вираз (7.16).

*Розв'язання.*

$$\text{Відомо, що } [\underline{A}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 1 \end{bmatrix}, \quad [\underline{A}'''] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тоді } [\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер, як визначаються характеристичні параметри еквівалентного чотириполюсника за відомими аналогічними параметрами окремих чотириполюсників. Нехай кожен з окремих чотириполюсників має однаковий характеристичний опір  $\underline{Z}_c$  і різні сталі передавання  $\underline{g}_1, \underline{g}_2$ .

Тоді

$$\underline{Z}_{cekv} = \underline{Z}_c, \quad \underline{g}_{ekv} = \underline{g}_1 + \underline{g}_2. \quad (7.13)$$

## 7.6 Передатні характеристики чотириполіусників

Одними з найважливіших характеристик чотириполіусника є його *передатні характеристики (transfer characteristics)*, тобто комплексні функції залежності співвідношення вихідних та вхідних параметрів від частоти. Таких характеристик може бути чотири види:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{uu}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)}, & \underline{H}_{iu}(j\omega) &= \frac{\underline{I}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)}, \\ \underline{H}_{ui}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{I}_1(j\omega)}, & \underline{H}_{ii}(j\omega) &= \frac{\underline{I}_2(j\omega)}{\underline{I}_1(j\omega)}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Модуль передатної характеристики чотириполіусника називають його *амплітудно-частотною характеристикою (peak-frequency characteristic)*, а її аргумент – *фазочастотною характеристикою (fzofrequency characteristic)*.

Розглянемо приклад визначення передатних характеристик чотириполіусника, зображеного на рис. 7.6.

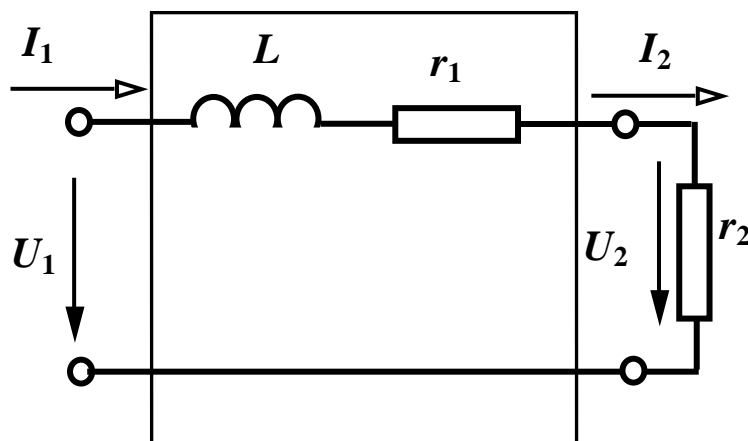


Рисунок 7.6

Очевидно, що

$$\underline{I}_1(j\omega) = \underline{I}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_1}{r_1 + r_2 + j\omega L},$$

тоді

$$\underline{U}_2(j\omega) = \underline{I}_2(j\omega)r_2 = \frac{\underline{U}_1 r_2}{r_1 + r_2 + j\omega L}, \quad \underline{H}_{uu}(j\omega) = \frac{r_2}{r_1 + r_2 + j\omega L}.$$

Звідси

$$\underline{H}_{iu}(j\omega) = \frac{\underline{I}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{1}{r_1 + r_2 + j\omega L}, \quad \underline{H}_{ui}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{I}_1(j\omega)} = r_2.$$

Отже,

$$\underline{H}_{ii}(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} = 1.$$

З наведених вище виразів видно, що залежно від схеми кола передатні характеристики мають різну форму запису. Водночас, для розв'язання багатьох задач є доцільним подавати їх в уніфікованій формі.

Для кіл з одним реактивним елементом ця форма досить проста:

$$\underline{H}_{uu}(j\omega) = \frac{j\omega b_1 + b_0}{j\omega + a_0}. \quad (7.15)$$

Якщо передатна характеристика задана у формі (7.15), то амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики визначаються за формулами:

$$H(\omega) = |\underline{H}_{uu}(j\omega)| = \frac{\sqrt{(b_1\omega)^2 + b_0^2}}{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}}, \quad (7.16)$$

$$\varphi(\omega) = \arg[\underline{H}_{uu}(j\omega)] = \arctg\left(\frac{b_1\omega}{b_0}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{a_0}\right). \quad (7.17)$$

### Контрольні запитання

1. Яку розмірність мають  $\underline{A}$ -параметри чотириполюсника?
2. Як можна визначити  $\underline{A}$ -параметри чотириполюсника?
3. Чим відрізняється симетричний чотириполюсник від несиметричного?
4. Що називають амплітудно-частотною характеристикою чотириполюсника?
5. Що називають фазочастотною характеристикою чотириполюсника?

## ЛЕКЦІЯ № 8

### КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

#### 8.1 Причини виникнення перехідних процесів. Закони комутації

Електричне коло, до складу якого входять ємності й індуктивності, в усталеному режимі містить деяку енергію, що накопичена в електричному та магнітному полях. Величина цієї енергії в будь-який момент часу визначається за допомогою виразів:

- в електричному полі ємності:  $W_e = \frac{Cu^2}{2}$ ;
- у магнітному полі індуктивності:  $W_m = \frac{Li^2}{2}$ .

При зміні усталеного режиму, який відбувається під впливом будь-яких перемикачів, що призводять до зміни параметрів кола або зовнішніх дій, змінюється кількість енергії в полях. Оскільки енергія не може змінитися за одну мить, то і зміна одного усталеного режиму іншим проходить також протягом деякого часу. Процес переходу від одного усталеного стану кола до іншого називається *перехідним процесом (transitive process)*. Таким чином, основною причиною виникнення перехідного процесу є зміна енергетичного стану кола.

Введемо деякі поняття, що характеризують перехідні процеси. Будь-яку зміну параметрів кола або зовнішніх дій, звичайно, називають *комутацією (switching)*, під час розрахунків вважають, що будь-яка комутація відбувається миттєво.

Установлено два *закони комутації (laws of switching)*.

Оскільки енергія магнітного поля в індуктивності не може змінитися миттєво, то при постійному значенні  $L$  не може змінитися миттєво і струм через індуктивність.

**Перший закон комутації.** *Струм через індуктивність у перший момент часу після комутації дорівнює струмові через індуктивність в останній момент часу перед комутацією.*

Якщо перший момент часу після комутації будемо позначати  $t=0+$ , а час безпосередньо перед комутацією через  $t=0-$ , то перший закон комутації запишеться так:

$$i_L(0+) = i_L(0-). \quad (8.1)$$

**Другий закон комутації.** *Напруга на ємності в перший момент часу після комутації дорівнює напрузі на ємності в останній момент часу перед комутацією:*

$$u_C(0+) = u_C(0-). \quad (8.2)$$

Практична тривалість перехідних процесів залежить від параметрів кола і в багатьох випадках становить частки секунди. Проте під час перехідних процесів на окремих елементах кола можуть виникати великі напруги або протікати великі струми.

## 8.2 Вмикання кола rL на постійну напругу

Розглянемо методику розрахунку перехідного процесу на простому прикладі (рис. 8.1).

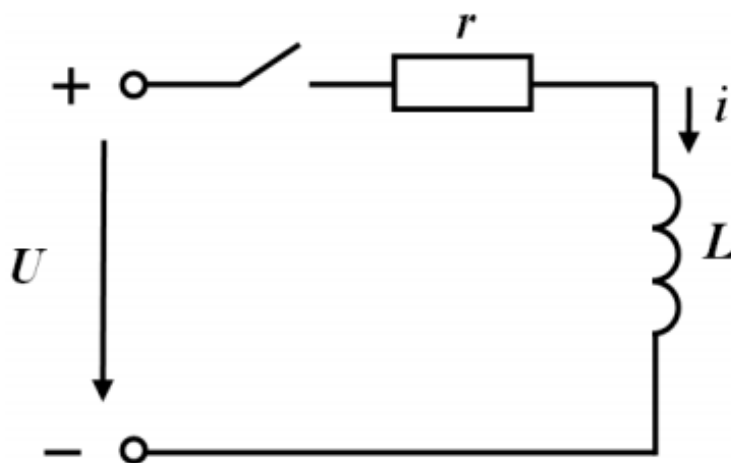


Рисунок 8.1

При замиканні ключа в колі виникає перехідний процес, оскільки коло переходить із одного усталеного режиму в інший. Під час перехідного процесу струми і напруги в колі змінюються залежно від часу, тому складаючи рівняння, яке описує процес у колі, використаємо другий закон Кірхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + ri = U. \quad (8.3)$$

Отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох складових – загального і часткового розв'язків. Загальний розв'язок отримаємо із розв'язання однорідного диференціального рівняння, коли права частина дорівнює нулю. В електротехніці цю складову прийнято називати *вільною складовою*  $i_g$  (*free component*), оскільки вона не залежить від зовнішнього впливу. Частковий розв'язок, який називається *примусовою складовою*  $i_{np}$  (*forced component*), залежить від вигляду правої частини.

Таким чином,

$$i = i_{np} + i_g. \quad (8.4)$$

Для визначення  $i_g$  рівняння (8.3) має вигляд:

$$L \frac{di_g}{dt} + ri_g = 0. \quad (8.5)$$

Його розв'язок

$$i_g = Ae^{pt}, \quad (8.6)$$

де  $p$  – корінь характеристичного рівняння,

$A$  – стала інтегрування.

Характеристичне рівняння можна отримати, якщо в однорідному рівнянні (8.5) замінити змінну на одиницю і першу похідну на  $p$ , тобто

$$Lp + r = 0, \text{ звідки } p = -\frac{r}{L}.$$

Зазначимо, що корінь характеристичного рівняння може бути лише від'ємним.

Оскільки права частина рівняння (8.3) є сталою величиною, то примусова складова теж стала, тому  $i_{np} = I$ . Тоді  $L \frac{dI}{dt} + rI = U$  або  $rI = U$ , тому

що в новому усталеному режимі  $\frac{dI}{dt} = 0$ .

Звідси

$$i_{np} = I = \frac{U}{r}. \quad (8.7)$$

Очевидно, що примусова складова є струмом в новому усталеному режимі. Тому, зазвичай, числові значення цієї складової і визначаються з розрахунку нового усталеного режиму.

Повний розв'язок рівняння (1.5) має вигляд:

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (8.8)$$

Для визначення сталої інтегрування використаємо початкові умови. Знайдемо значення струму в момент часу  $t=0+$ , використавши перший закон комутації. Оскільки до комутації струму в колі не було  $i_L(0-)=0$  (ключ розімкнутий), то, згідно з першим законом комутації,  $i_L(0+)=0$ .

$$\text{Тоді } i(0+) = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L} \cdot 0} = \frac{U}{r} + A = 0, \text{ звідки } A = -\frac{U}{r}.$$

Таким чином,

$$i = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (8.9)$$

Графіки зміни струму через індуктивність показані на рис. 8.2.

Примусова складова на графіку має вигляд прямої лінії, а вільна складова – експоненти. Повний розв’язок теж є експонентою, яка починається з нуля і асимптотично наближається до усталеного значення.

Коефіцієнт при  $t$  у показнику експоненти має розмірність  $1/c$ , тому обернена величина має розмірність часу, позначається літерою  $\tau$  і називається *сталю часу перехідного процесу (constant of time of transient)*.

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r}. \quad (8.10)$$

Стала часу залежить від параметрів кола і характеризує тривалість протікання перехідного процесу.

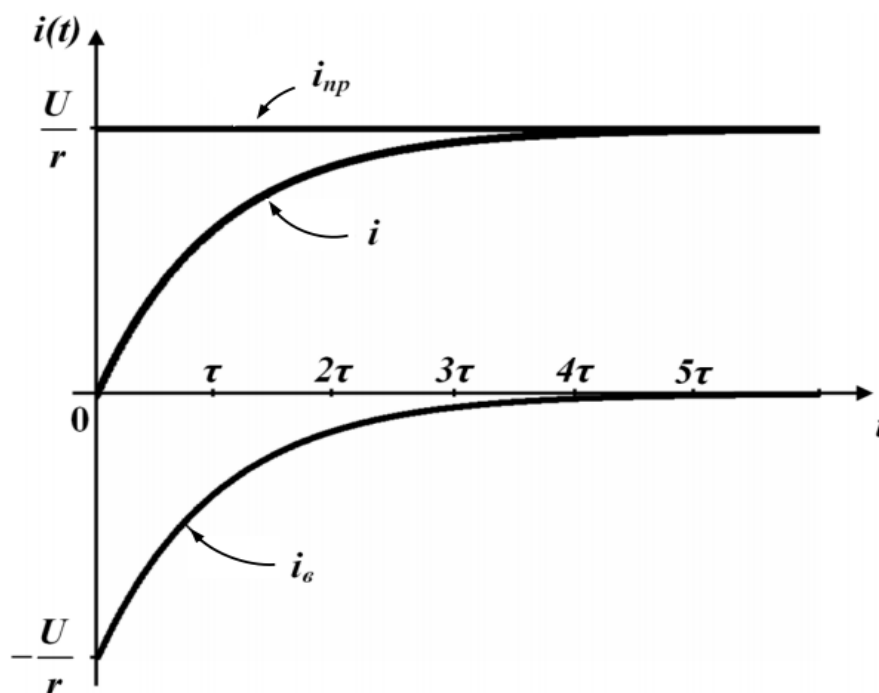


Рисунок 8.2

Не дивлячись на те, що теоретично перехідний процес триває нескінченно довго (лише при  $t \rightarrow \infty$  вільна складова наближається до нуля), можна вважати, що перехідний процес практично закінчується, коли вільна складова стає меншою 1% від усталеного значення. Тому, практична тривалість перехідного процесу  $t_{пер.проц.} = (4 \div 5)\tau$ .

### 8.3 Вмикання кола rC на постійну напругу

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для кола з послідовно з’єднаними  $r$  і  $C$  при вмиканні на постійну напругу (рис. 8.3):

$$ri + u_C = U. \quad (8.11)$$

Оскільки  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , отримаємо:

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U. \quad (8.12)$$

Повний розв'язок цього рівняння:

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cв}.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо:

$$u_{Cnp} = U.$$

Вільна складова розв'язку диференціального рівняння першого порядку

$$u_{Cв} = Ae^{pt}.$$

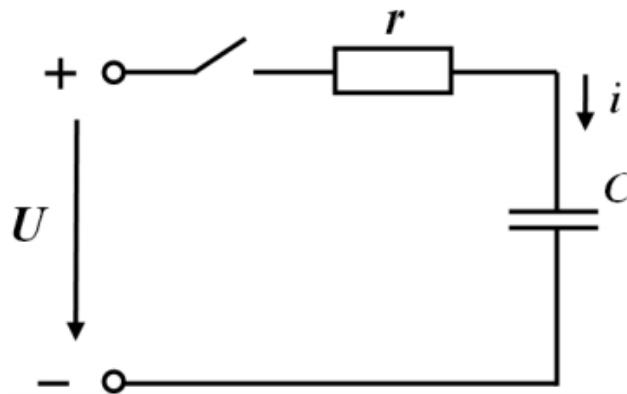


Рисунок 8.3

Характеристичне рівняння:

$$rCp + 1 = 0, \quad (8.13)$$

звідки

$$p = -\frac{1}{rC}, \quad \tau = \frac{1}{|p|} = rC.$$

Тоді повний розв'язок:

$$u_C = U + Ae^{-\frac{t}{rC}}.$$

Сталу інтегрування  $A$  знаходимо, використовуючи початкові умови.

Згідно з другим законом комутації,  $u_C(0+) = u_C(0-)$ ,  $u_C(0-) = U + A$  і  $A = u_C(0-) - U$ . Якщо до комутації конденсатор не був заряджений, то  $u_C(0-) = 0$  і  $A = -U$ .



Остаточний повний розв'язок:

$$u_c = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{rC}} \right). \quad (8.14)$$

Визначимо закон зміни струму в ємності:

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C \left[ -U \left( -\frac{1}{rC} \right) e^{-\frac{t}{rC}} \right] = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}}. \quad (8.15)$$

Графіки зміни струму і напруги на ємності показані на рис. 8.4 та 8.5.

Із графіків видно, що  $u_c$  – нерозривна лінія в момент комутації, а  $i$  змінюється стрибком від нуля до величини:  $\frac{U}{r}$ .

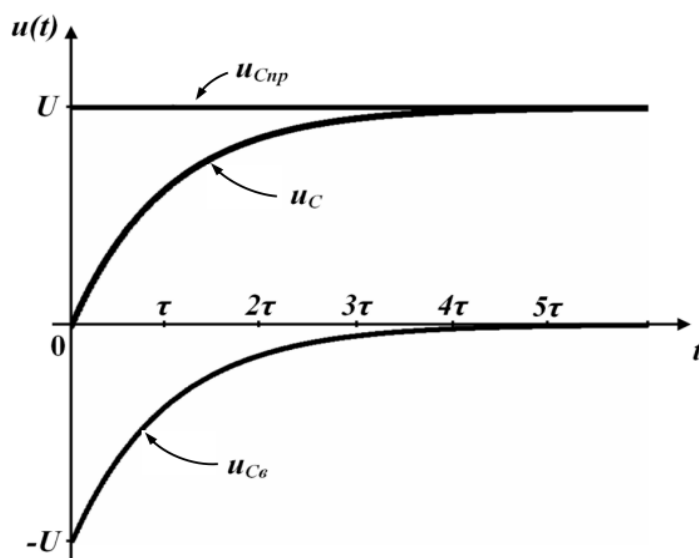


Рисунок 8.4

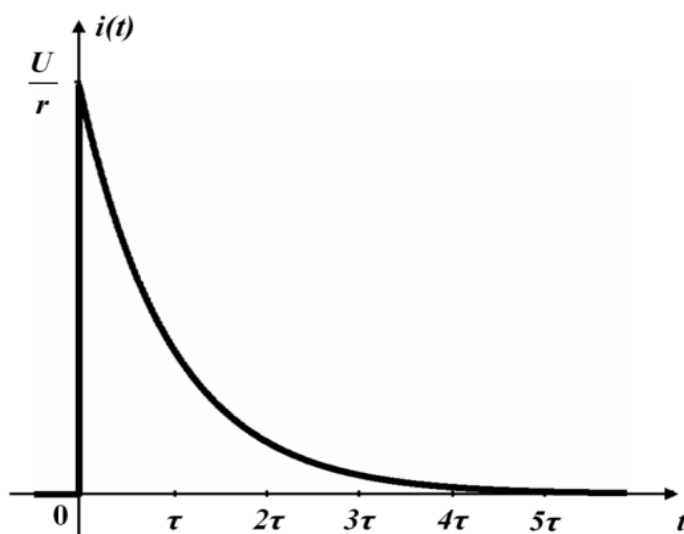


Рисунок 8.5

## 8.4 Формування характеристичного рівняння методом вхідного опору

У попередніх прикладах характеристичне рівняння формувалося на основі однорідного диференціального рівняння. У цьому рівнянні варто виконувати заміну змінної на одиницю, першої похідної – на  $p$ , другої похідної – на  $p^2$ ,  $k$ -ї похідної – на  $p^k$  тощо.

Водночас, для складного кола формування диференціального рівняння є непростю задачею, оскільки потребує іноді досить трудомістких алгебраїчних перетворень. Тому у складних колах доцільного застосовувати *метод вхідного опору (method of entrance resistance)*.

За цим методом характеристичне рівняння формується відповідно до такого алгоритму:

1. Для кола визначається вхідний опір кола як функція комплексної частоти  $Z_{ex}(j\omega)$ .

2. В отриманій функції виконується заміна комплексної частоти  $j\omega$  на параметр  $p$ .

3. Функцію  $Z_{ex}(p)$  прирівнюють до нуля і розв'язують отримане характеристичне рівняння:

$$Z_{ex}(p) = 0. \quad (8.16)$$

## 8.5 Незалежні і залежні початкові умови

Як видно з попередніх підрозділів, стала інтегрування завжди визначається, виходячи з початкових умов. При цьому, для довільного параметра режиму кола  $X$  (це може бути напруга чи струм у будь-якому елементі) стала інтегрування дорівнює:

$$A = X(0+) - X_{np}. \quad (8.17)$$

Існують два методи визначення  $X(0+)$ .

1. Якщо  $X(0+)$  – це струм в індуктивності або напруга на ємності, то така величина визначається, виходячи із законів комутації (8.1), (8.2). У цьому разі  $X(0+)$  називають *незалежними початковими умовами (independent entry conditions)*.

2. Якщо  $X(0+)$  – це будь-який інший параметр, тоді таку величину називають *залежними початковими умовами (dependent entry conditions)*. Для визначення  $X(0+)$  у цьому разі необхідно скласти й розв'язати систему рівнянь за законами Кірхгофа, у яку мають входити всі незалежні початкові умови такого кола.

## 8.6 Вмикання кола rLC на постійну напругу

Проведемо аналіз перехідного процесу в колі з двома реактивними елементами (рис. 8.6).

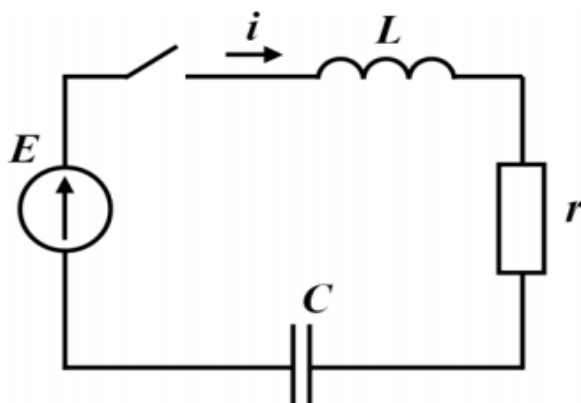


Рисунок 8.6

Згідно із другим законом Кірхгофа, для кола можна скласти систему рівнянь:

$$\begin{aligned}ir + L \frac{di}{dt} + u_C &= E, \\ i &= C \frac{du_C}{dt}.\end{aligned}\tag{8.18}$$

Після перетворень отримаємо рівняння другого порядку:

$$rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = E.\tag{8.19}$$

Характеристичне рівняння:

$$rCp + LCp^2 + 1 = 0\tag{8.20}$$

має корені

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.\tag{8.21}$$

Залежно від співвідношення складових під знаком радикала матимемо три види коренів:

1.  $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$  – корені комплексно-спряжені;
2.  $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$  – корені дійсні різні;

$$3. \left(\frac{r}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} - \text{корені дійсні рівні.}$$

Перед тим, як розглянути всі три випадки, знайдемо для кола незалежні початкові умови та примусову складову напруги на ємності.

Оскільки ключ до комутації було вимкнено, то очевидно, що

$$i(0+) = i(0-) = 0, u_C(0+) = u_C(0-) = 0.$$

Струм у колі після комутації дорівнює нулю (конденсатор не пропускає постійний струм), тому з першого рівняння системи (8.18) випливає, що  $u_{Cnp} = E$ .

1. Нехай корені будуть комплексно-спряженими.

Тоді вони матимуть вигляд:  $p_1 = -\delta + j\omega_0$ ,  $p_2 = -\delta - j\omega_0$ , де  $\delta = \frac{r}{2L}$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}, \text{ а перехідний процес буде періодичним (коливальним).}$$

Перехідна напруга на ємності може бути записана як:

$$u_C(t) = E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (8.22)$$

Знайдемо сталі інтегрування  $A_1, A_2$ .

Підставляючи  $t = 0$  і  $u_C(0) = 0$  у (8.22), маємо  $0 = E + 1(A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1)$ , звідки  $A_2 = -E$ .

Для визначення  $A_1$  виразимо струм у колі через сталі інтегрування:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d[E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t)]}{dt} = \\ &= C e^{-\delta t} [(-\delta)(A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + \omega_0 (-A_2 \sin \omega_0 t + A_1 \cos \omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Підставивши  $t = 0$  і  $i(0) = 0$ , отримаємо:

$$0 = C \cdot 1 [(-\delta)(A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1) + \omega_0 (-A_2 \cdot 0 + A_1 \cdot 1)], \text{ або } 0 = -\delta A_2 + \omega_0 A_1.$$

Враховуючи, що  $A_2 = -E$ , отримаємо:

$$A_1 = -\frac{\delta}{\omega_0} E.$$

Отже,

$$u_C(t) = E - e^{-\delta t} \left( \frac{\delta}{\omega_0} E \sin \omega_0 t + E \cos \omega_0 t \right). \quad (8.23)$$

2. Нехай корені будуть дійсними різними.

Тоді, перехідна напруга на ємності може бути записана як:

$$u_C(t) = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (8.24)$$

Перехідний процес буде аперіодичним (неколивальним).

Тоді для знаходження сталих інтегрування варто скласти систему рівнянь. Перше з цих рівнянь отримаємо, підставивши  $t = 0$  і  $u_C(0) = 0$  у (8.24):

$$0 = E + A_1 + A_2. \quad (8.25)$$

Друге рівняння знайдемо з виразу:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d(E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}).$$

Підставивши  $t = 0$  і  $i(0) = 0$ , отримаємо:

$$0 = C(A_1 p_1 + A_2 p_2)$$

або

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (8.26)$$

Розв'язок системи рівнянь (8.25), (8.26):

$$A_1 = \frac{E p_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{E p_1}{p_1 - p_2}.$$

Таким чином,

$$u_C(t) = E + \frac{E p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{E p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (8.27)$$

3. Якщо корені однакові, тобто  $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ , то перехідний процес є критичним. Він перехідний між аперіодичним та коливальним процесами.

У цьому разі  $p_1 = p_2 = -\frac{r}{2L}$ , а напруга на ємності записується так:

$$u_C = E + (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (8.28)$$

Знайдемо сталі інтегрування. Підставляючи  $t = 0$  і  $u_C(0) = 0$  у (8.28), маємо  $0 = E + A_1$ , звідки  $A_1 = -E$ .

Виразимо струм у колі через сталі інтегрування:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d[E + (A_1 + A_2 t) e^{pt}]}{dt} = C e^{pt} [p(A_1 + A_2 t) + A_2].$$

Підставивши  $t = 0$  і  $i(0) = 0$ , отримаємо  $0 = C(pA_1 + A_2)$ , звідки, з урахуванням  $A_1 = -E$ , отримаємо :

$$A_2 = pE.$$

Отже

$$u_C(t) = E + (pEt - E)e^{pt}. \quad (8.29)$$

### 8.7 Аналіз складного кола другого порядку

Розглянемо приклад розрахунку перехідного процесу у складному колі з двома реактивними елементами.

Знайти перехідні струми  $i_1, i_2, i_3$  та напруги на ємності  $u_C$  і на індуктивності  $u_L$  у колі постійного струму, яке зображене на рис. 8.7. Побудувати графіки цих величин у часі. Параметри кола:  $U = 200$  В,  $L = 100$  мГн,  $C = 50$  мкФ,  $r_1 = 200$  Ом,  $r_2 = 50$  Ом.

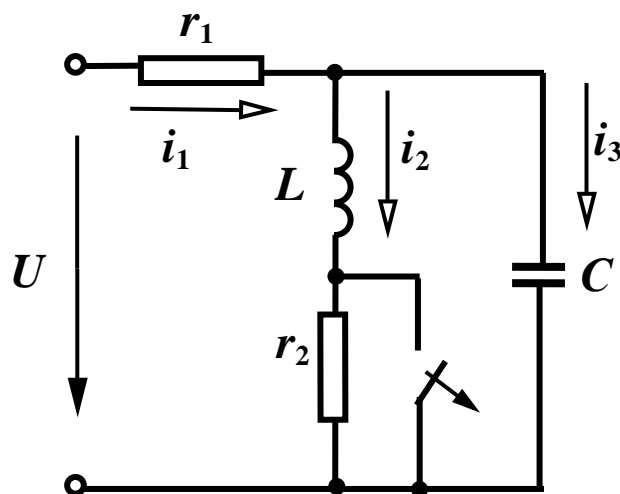


Рисунок 8.7

Спочатку визначимо перехідний струм через індуктивність  $i_2$ :

$$i_2(t) = i_{2np} + i_{2\varepsilon}.$$

Знайдемо примусову складову. Оскільки в післякомутаційний період  $i_{3np} = 0$ , то

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Вигляд вільної складової можна буде записати лише після визначення коренів характеристичного рівняння, яке ми запишемо за методом вхідного опору:

$$Z(p) = r_1 + \frac{(r_2 + pL) \frac{1}{pC}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}} = 0.$$

Реалізуємо ці вирази в MathCAD.

$$U := 200 \quad L := 0.1 \quad C := 50 \cdot 10^{-6} \quad r_1 := 200 \quad r_2 := 50$$

$$i_{2pr} := \frac{U}{r_1 + r_2} \quad i_{2pr} = 0.8$$

$$r_1 + \frac{(r_2 + p \cdot L) \cdot \frac{1}{p \cdot C}}{r_2 + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}} \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} -300. - 400. i \\ -300. + 400. i \end{pmatrix}$$

$$p_1 := -300. - 400. i \quad p_2 := -300. + 400. i$$

Оскільки коренями характеристичного рівняння є два спряжених комплексних числа, то вільна складова:

$$i_{2s} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t),$$

де  $\delta = 300$ ;

$\omega_0 = 400$ .

Повний розв'язок:

$$i_2(t) = \frac{U}{r_1 + r_2} + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (8.30)$$

Для визначення сталих інтегрування  $A_1$ ,  $A_2$  знайдемо незалежні початкові умови.

Значення  $i_2(0_-)$  і  $u_C(0_-)$  можна знайти, якщо розрахувати коло до комутації. Оскільки прикладена до кола напруга постійна, то в колі до комутації (при замкненому ключі) текли постійні струми. Струм у вітці з ємністю не протікав. Також не протікав струм і через опір  $R_2$ , оскільки він закорочений ключем, тому

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = \frac{U}{r_1}.$$

Напруга на ємності при замкненому ключі дорівнює напрузі на індуктивності (паралельно з'єднані вітки). Оскільки опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю, то і напруга на індуктивності дорівнює нулю, і, відповідно,  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ .

Сталі інтегрування можна визначити, розв'язавши систему рівнянь (за умови  $t = 0$ ):

$$i_2(0_+) = i_2(t)|_{t=0}, \quad L \frac{di_2(t)}{dt} \Big|_{t=0} + r_2 i_2(t) \Big|_{t=0} = u_C(0_+).$$

Виконаємо ці процедури в MathCAD, використавши для розв'язання системи рівнянь блок «**Given-Find**» і одну з процедур символьних перетворень «**simplify**». Разом з нею доцільно застосовувати процедуру «**float**», яка дасть можливість задати кількість цифр після десяткової точки.

$$i20 := \frac{U}{r1} \quad UC0 := 0 \quad \delta := \operatorname{Re}(p2) \quad \omega := \operatorname{Im}(p2)$$

$$iv(t, A1, A2) := e^{\delta \cdot t} \cdot (A1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \quad t := 0$$

Given

$$i2pr + iv(t, A1, A2) = i20$$

$$(i2pr + iv(t, A1, A2)) \cdot r2 + L \cdot \frac{d}{dt} (iv(t, A1, A2)) = 0$$

$$\text{Find}(A1, A2) \text{ simplify float, } 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1.10 \\ .200 \end{pmatrix}$$

$$A1 := -1.1 \quad A2 := 0.2$$

$$i2(t) := i2pr + e^{\delta \cdot t} \cdot (A1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A2 \cdot \cos(\omega \cdot t))$$

$$i2(t) \text{ simplify float, } 3 \rightarrow .800 - 1.10 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) + .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t)$$

Знайдемо струми  $i_1(t)$ ,  $i_3(t)$  та напруги  $u_L(t)$ ,  $u_C(t)$ . Напруги визначаються так:

$$u_L(t) = L \frac{di_2(t)}{dt}, \quad u_C(t) = u_L(t) + r_2 i_2(t).$$

Струм в конденсаторній вітці:

$$i_3(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Вхідний струм:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t).$$



У MathCAD це виглядатиме так:

$$u_L(t) := \left( L \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) \right) \quad u_C(t) := u_L(t) + i_2(t) \cdot r_2 \quad i_3(t) := C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) \quad i_1(t) := i_2(t) + i_3(t)$$

$$u_L(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow 25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) - 50 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t)$$

$$u_C(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow -30 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) - 40 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) + 40$$

$$i_1(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow .800 + .150 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) + .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t)$$

$$i_3(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow 1.25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t)$$

Побудуємо графіки знайдених параметрів (рис. 8.8–8.12), для чого визначимо докомутаційні значення параметрів  $u_L(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $i_3(t)$ :

$$u_L(0_-) = 0, \quad i_1(0_-) = i_2(0_-), \quad i_3(0_-) = 0.$$

$$u_C(t) := \begin{cases} u_{C0} & \text{if } t < 0 \\ u_C(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

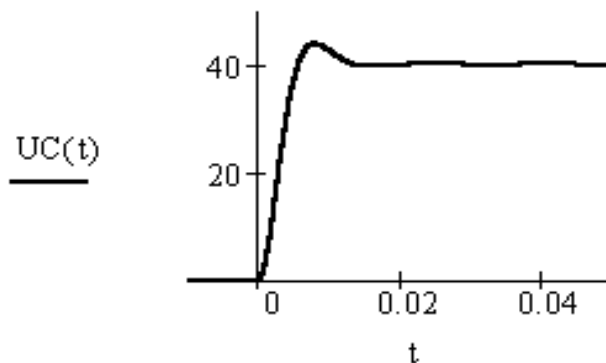


Рисунок 8.8

$$i_1(t) := \begin{cases} i_{10} & \text{if } t < 0 \\ i_1(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

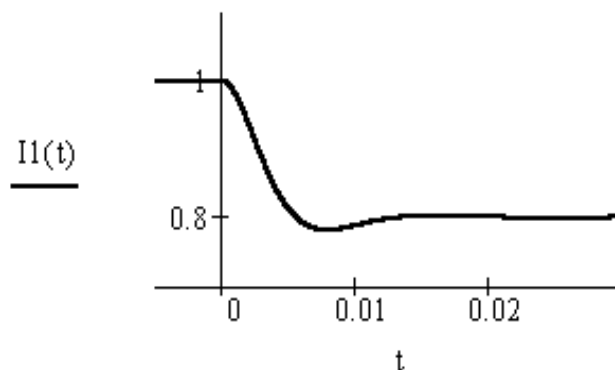


Рисунок 8.9

$$i_2(t) := \begin{cases} i_{20} & \text{if } t < 0 \\ i_2(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

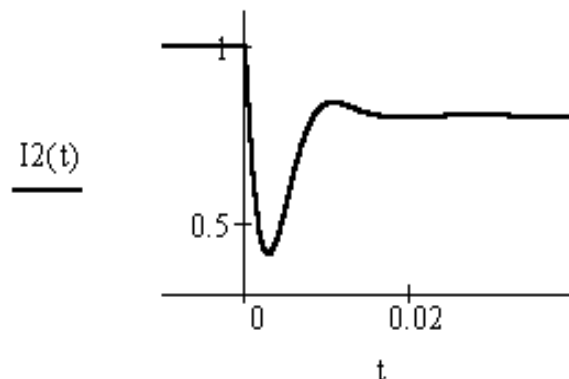


Рисунок 8.10

$$i_{30} := 0$$

$$I_3(t) := \begin{cases} i_{30} & \text{if } t < 0 \\ i_3(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

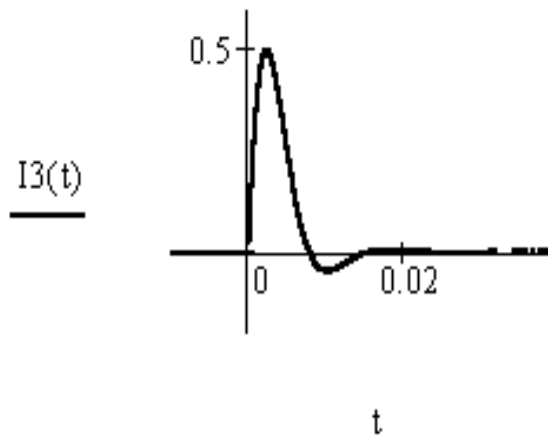


Рисунок 8.11

$$u_{L0} := 0$$

$$U_L(t) := \begin{cases} u_{L0} & \text{if } t < 0 \\ u_L(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

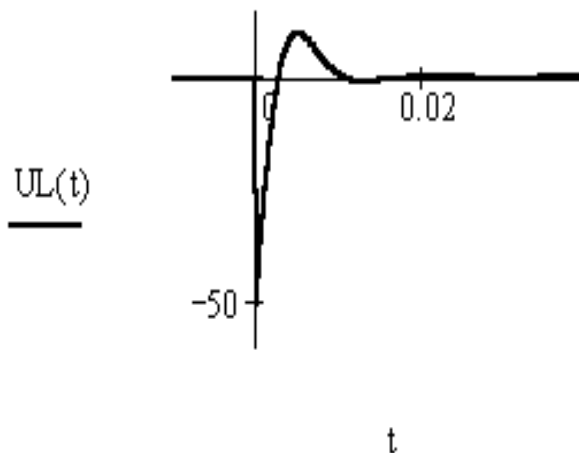


Рисунок 8.12

### Контрольні запитання

1. Які причини виникнення перехідних процесів?
2. Як формуються і записуються закони комутації?
3. Як визначається примусова складова?
4. Що розуміють під залежними початковими умовами і яка методика їх визначення?
5. Чи може корінь характеристичного рівняння бути додатним?
6. Чи може струм у резисторі після комутації змінитися стрибком?
7. Чи може напруга на резисторі після комутації змінитися стрибком?
8. Чи може коло другого порядку мати два однакових комплексних корені характеристичного рівняння?
9. Чи може коло другого порядку мати один комплексний та один дійсний корені характеристичного рівняння?

## ЛЕКЦІЯ № 9

### ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

#### 9.1 Суть операторного методу аналізу перехідних процесів

Як видно з попередньої лекції, класичний метод потребує складання систем диференціальних рівнянь, формування характеристичного рівняння, визначення примусової складової, сталої інтегрування тощо.

Цього всього можна уникнути, якщо використати інтегральне перетворення Лапласа

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (9.1)$$

що переводить функцію часу  $f(t)$ , яку називають *оригіналом*, у функцію комплексної змінної  $F(s)$ , що називають *зображенням*.

Відповідність між функціями часу (оригіналами) і функціями комплексної змінної (зображеннями), зазвичай, записують у вигляді:

$$f(t) \rightarrow F(s) \quad (9.2)$$

або

$$F(s) = L[f(t)]. \quad (9.3)$$

Надалі всі параметри режиму й параметри кола подають у вигляді операторних зображень, проводять розрахунок кола одним з відомих методів, і потім повертаються до оригіналів, тобто до функцій часу.

#### 9.2 Операторні зображення електротехнічних параметрів

Вхідна напруга кола  $u(t)$  або діюча в ньому е.р.с.  $e(t)$  зображуються в операторному вигляді як  $U(s)$  або  $E(s)$ .

Для кіл постійного струму можна записати:

$$U(s) = \frac{U}{s}, \quad E(s) = \frac{E}{s}. \quad (9.4)$$

Для кіл синусоїдного струму:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \rightarrow U(s) = \frac{U_m \omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (9.5)$$

Розглянемо операторні зображення пасивних елементів і закон Ома в операторному вигляді для них.

### Резистор

Операторне зображення резистора показано на рис. 9.1. Закон Ома в операторному вигляді:

$$U_r(s) = I(s)r. \quad (9.6)$$

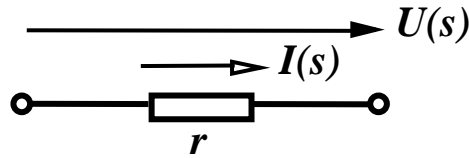


Рисунок 9.1

### Індуктивність

Операторне зображення індуктивності (рис. 9.2), крім операторного опору, може містити в собі і тимчасову додаткову е.р.с, яка є наслідком накопиченої в елементі енергії магнітного поля (якщо, звичайно, через індуктивність до комутації протікав струм). Напрямок цієї е.р.с. збігається з напрямком струму в індуктивності до комутації.

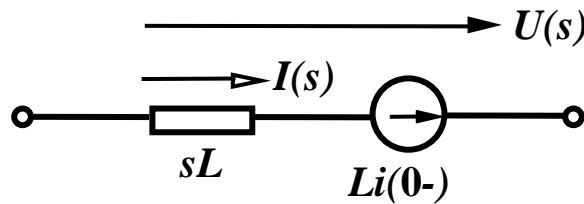


Рисунок 9.2

Закон Ома в операторному вигляді:

$$U_L(s) = I(s)sL - Li(0-). \quad (9.7)$$

### Ємність

Операторне зображення ємності (рис. 9.3), крім операторного опору, може містити в собі і тимчасову додаткову е.р.с, яка є наслідком накопиченої в елементі енергії електричного поля (якщо, звичайно, напруга на ємності до комутації не дорівнювала нулю). Напрямок цієї е.р.с. протилежний напрямку струму.

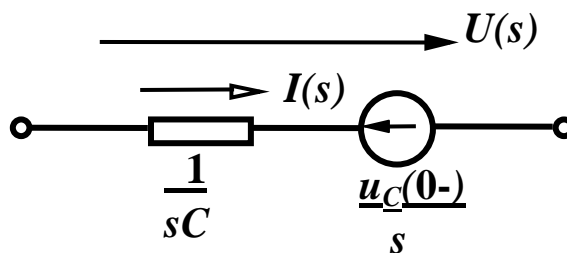


Рисунок 9.3

Закон Ома в операторному вигляді:

$$U_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0-)}{s}. \quad (9.8)$$

### 9.3 Операторні схеми

Операторні схеми – це такі схеми, у вітках яких діють зображення джерел енергії, містяться операторні елементи і протікають зображення струмів.

Під час складання операторної схеми треба враховувати такі правила.

1. Операторна схема складається для післякомутаційного стану, тому в операторній схемі не показується ключ і вилучаються елементи, у яких *одразу після комутації* перестає протікати струм. Можуть існувати кола, для яких операторні схеми складаються з окремих, непов'язаних між собою, частин.

2. Додаткові тимчасові е.р.с. у реактивних елементах доцільно показувати на операторних схемах лише у випадку ненульових початкових умов.

Розглянемо приклад.

Складемо операторну схему для кола, зображеного на рис. 8.8.

Зазначимо: оскільки  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ , то додаткова е.р.с.  $\frac{u_C(0)}{s}$  у конденсаторній вітці відсутня. Операторна схема зображена на рис. 9.4.

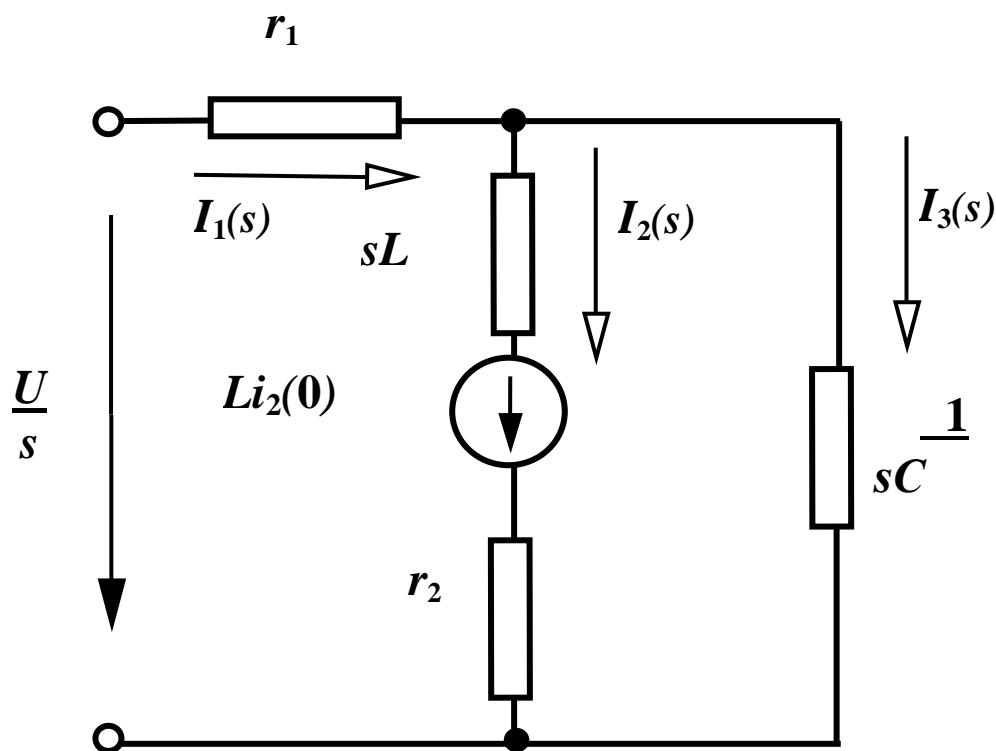


Рисунок 9.4

## 9.4 Закони Кірхгофа в операторній формі

Операторна форма запису першого закону Кірхгофа виглядає так:

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0. \quad (9.9)$$

Перед записом другого закону Кірхгофа введемо поняття повного операторного опору ділянки кола  $rLC$ :

$$Z(s) = r + sL + \frac{1}{sC}. \quad (9.10)$$

Тоді другий закон Кірхгофа запишеться так:

$$\sum_{k=1}^n I_k(s)Z_k(s) = \sum_{k=1}^n \left[ E_k(s) + L_k i_{Lk}(0-) - \frac{u_{Ck}(0-)}{s} \right]. \quad (9.11)$$

Розглянемо приклад.

Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа в операторному вигляді для схеми (див. рис. 9.4). Прийmemo напрямком обходу контурів за годинниковою стрілкою.

$$I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0,$$

$$I_1(s)r_1 + I_3(s)\frac{1}{sC} = \frac{U}{s}, \quad (9.12)$$

$$I_1(s)r_1 + I_2(s)(r_2 + sL) = \frac{U}{s} + Li_2(0).$$

## 9.5 Перехід від зображення до оригіналу

Отримані операторні значення шуканих параметрів потрібно записати у вигляді функцій часу, тобто знайти оригінал отриманих зображень. Існують різні шляхи знаходження оригіналів. У теорії кіл, зазвичай, використовують теорему розкладання.

Теорема розкладання використовується в тих випадках, коли зображення деякої функції  $F(s)$  записано як відношення двох правильних поліномів:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad (9.13)$$

при цьому  $m < n$ .

Як правило, зображення величин, які визначаються під час розрахунку перехідних процесів в лінійних колах, задовольняють цю умову.

Далі перехід до оригіналу здійснюється за таким алгоритмом:

1. Визначаються корені рівняння:  $Q(s) = 0$ . Максимально можлива кількість коренів на одиницю більша за кількість реактивних елементів у колі.
2. Знаходиться перша похідна знаменника  $Q'(s)$ .
3. Оригінал функції  $F(s)$  визначається за формулою:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (9.14)$$

де  $s_k$  – корінь знаменника;

$P(s_k)$  – значення чисельника функції  $F(s)$  при  $s = s_k$ ;

$Q'(s_k)$  – значення похідної знаменника функції  $F(s)$  при  $s = s_k$ ;

$n$  – кількість коренів знаменника.

Розглянемо приклад.

Нехай зображення деякої функції має вигляд:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + 4s + 8}{s(s^2 + 6s + 8)}.$$

Знайти оригінал цієї функції.

Знаходимо корені знаменника:

$$s(s^2 + 6s + 8) = 0 \Rightarrow s_1 = 0, s_2 = -2, s_3 = -4.$$

Визначаємо значення чисельника для  $s = s_k$ :

$$P(s_1) = 8; P(s_2) = 4 - 8 + 8 = 4; P(s_3) = 16 - 16 + 8 = 8.$$

Знаходимо похідну знаменника  $Q'(s) = s^2 + 6s + 8 + s(2s + 6)$  і її значення для  $s = s_k$ :

$$Q'(s_1) = 8; Q'(s_2) = -4; Q'(s_3) = 8.$$

Підставляємо отримані значення в (9.14):

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)} e^{s_2 t} + \frac{P(s_3)}{Q'(s_3)} e^{s_3 t} =$$

$$= \frac{8}{8} e^{0t} + \frac{4}{4} e^{-2t} + \frac{8}{8} e^{-4t} = 1 - e^{-2t} + e^{-4t}.$$

Розглянемо тепер розрахунок переходного процесу в колі (див. рис. 9.4) операторним методом. Операторна система рівнянь записана вище (9.12).

Розв'яжемо цю систему рівнянь в середовищі MathCAD, застосувавши процедурний блок «*Given-Find*» разом з функцією символічних перетворень « $\rightarrow$ ».

$$U := 200 \quad L := 0.1 \quad C := 50 \cdot 10^{-6} \quad r_1 := 200 \quad r_2 := 50 \quad i_{20} := \frac{U}{r_1}$$

Given

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad I_1 \cdot r_1 + I_3 \cdot \frac{1}{s \cdot C} = \frac{U}{s} \quad I_1 \cdot r_1 + I_2 \cdot (r_2 + s \cdot L) = \frac{U}{s} + L \cdot i_{20}$$

$$\text{Find}(I_1, I_2, I_3) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(600 \cdot s + s^2 + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)} \\ \frac{(s^2 + 100 \cdot s + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)} \\ \frac{500.}{(250000. + 600 \cdot s + s^2)} \end{bmatrix}$$

$$I_1(s) := \frac{(600 \cdot s + s^2 + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)} \quad I_2(s) := \frac{(s^2 + 100 \cdot s + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)}$$

$$I_3(s) := \frac{500.}{(250000. + 600 \cdot s + s^2)}$$

Отже, ми отримали операторні зображення струмів:  $I_1(s)$ ,  $I_2(s)$ ,  $I_3(s)$ . Операторні зображення напруг на індуктивності та ємності знайдемо за формулами:

$$u_L(s) = I_2(s)sL - Li_2(0), \quad u_C(s) = u_L(s) + I_2(s)r_2.$$

Повернутися до оригіналів, тобто знайти функції  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$ ,  $u_C(t)$ ,  $u_L(t)$  у Mathcad, можна за допомогою процедури оберненого перетворення Лапласа «*invlaplace*», наприклад:



$$\begin{aligned}
U_L(s) &:= I_2(s) \cdot s \cdot L - L \cdot i_2(0) & U_C(s) &:= U_L(s) + I_2(s) \cdot r_2 \\
i_3(t) &:= I_3(s) \text{ invlaplace, } s \text{ float, } 3 \rightarrow 1.25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\
i_1(t) &:= I_1(s) \text{ invlaplace, } s \text{ float, } 3 \rightarrow .800 + \\
&+ .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) + .150 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\
i_2(t) &:= I_2(s) \text{ invlaplace, } s \text{ float, } 3 \rightarrow .800 + \\
&+ .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) - 1.10 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\
u_L(t) &:= U_L(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow \\
&-50 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) + 25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\
u_C(t) &:= U_C(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow \\
&-40 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) - 30 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) + 40.
\end{aligned}$$

### Контрольні запитання

1. Що є причиною можливої появи в операторній схемі додаткової е.р.с. індуктивності?
2. Що є причиною можливої появи в операторній схемі додаткової е.р.с. ємності?
3. Чи можуть поліноми  $P(s)$  або  $Q(s)$  містити складову  $s^{-k}$ ?
4. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати примусові складові параметрів?
5. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати незалежні початкові умови?
6. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати залежні початкові умови?

## ЛЕКЦІЯ № 10

### ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ ПРИ ДОВІЛЬНОМУ ВХІДНОМУ СИГНАЛІ

#### 10.1 Елементи теорії сигналів

Під час аналізу різноманітних сигналів ми будемо абстрагуватися від їхньої фізичної природи і розглядати сигнал як математичну функцію часу  $f(t)$ .

У попередніх лекціях ми аналізували відгуки електричних кіл на постійні сигнали (кола постійного струму), синусоїдні сигнали (кола синусоїдного струму), несинусоїдні періодичні сигнали (кола несинусоїдного періодичного струму).

Водночас, у складних електронних пристроях, якими є мережі зв'язку та комп'ютерні мережі, сигнали мають набагато складніший характер.

Тому важливо впровадити універсальну форму подання сигналів, яка б поширювалась на будь-які сигнали, незалежно від їх форми.

Одним з таких методів є подання сигналів з використанням *функції Хевісайда* (*function of Hevisajd*), яка зображена на рис. 10.1.

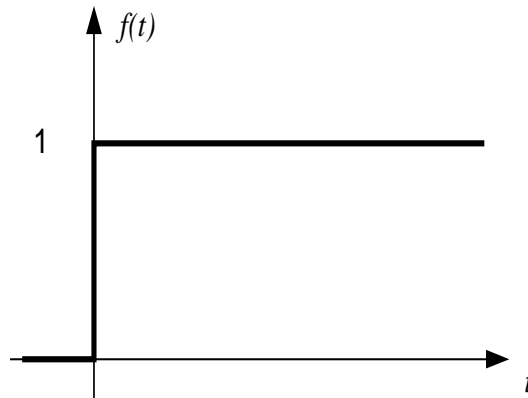


Рисунок 10.1

Іноді цю функцію називають *функцією вмикання* або  *$\sigma$ -функцією*. Записується вона так:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (10.1)$$

Зазначимо, що в момент часу  $t = 0$ , функція Хевісайда *невизначена*.

Якщо ця функція діє не в момент  $t = 0$ , а зміщена на час  $\tau$  (рис. 10.2), то вона записується:

$$\sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (10.2)$$

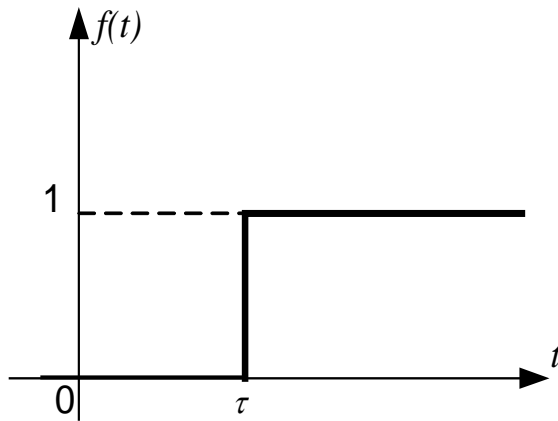


Рисунок 10.2

Покажемо, як подати прямокутний імпульсний сигнал, використовуючи функцію Хевісайда (рис. 10.3).

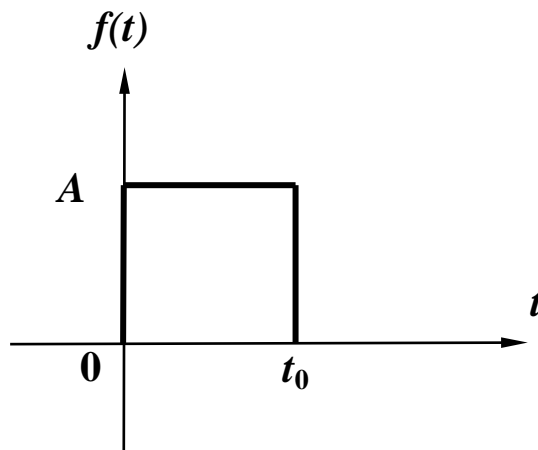


Рисунок 10.3

Під час запису функції  $f(t)$ , вираженої через функцію Хевісайда, варто пам'ятати:

- кількість складових у формулі має дорівнювати кількості стрибків сигналу на графіку;
- коефіцієнт при  $\sigma$ -функції дорівнює абсолютній величині стрибка, а його знак залежить від напрямку стрибка (якщо стрибок вгору, то знак коефіцієнта «плюс», а якщо вниз – «мінус»);
- аргумент  $\sigma$ -функції має вигляд  $(t \pm \tau)$ , де  $\tau$  – час стрибка (знак «плюс» приймається, якщо  $\tau$  знаходиться зліва від нуля, і навпаки – «мінус»).

Таким чином, можна записати:

$$f(t) = A\sigma(t) - A\sigma(t - t_0). \quad (10.3)$$

Розглянемо приклад подання східчастого сигналу напруги через функцію Хевісайда (рис. 10.4).

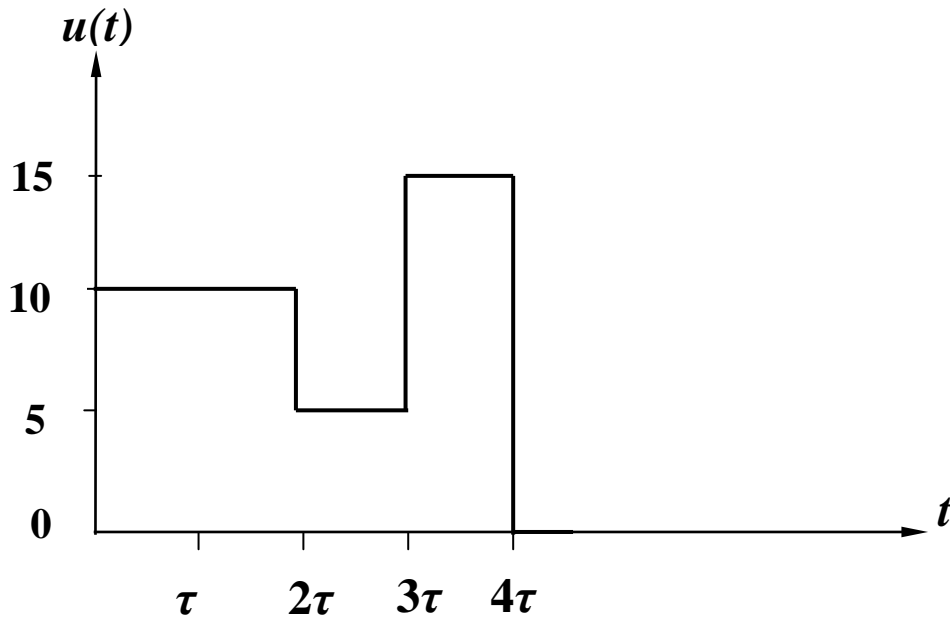


Рисунок 10.4

Цей сигнал має вигляд:

$$u(t) = 10\sigma(t) - 5\sigma(t - 2\tau) + 10\sigma(t - 3\tau) - 15\sigma(t - 4\tau). \quad (10.4)$$

Нехай вхідний сигнал  $f(t)$  є неперервною гладкою аналітичною функцією довільної форми.

Тоді його подання через функцію Хевісайда визначається *інтегралом Дюамеля (integral of Djuamel)*:

$$f(t) = f(0)\sigma(t) + \int_0^t f'(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau. \quad (10.5)$$

## 10.2 Часовий метод розрахунку перехідних процесів при довільному вхідному сигналі

При розрахунках за цим методом найчастіше використовують *перехідні характеристики кіл (transitive characteristic of circuit)*.

*Перехідною характеристикою кола  $h_x(t)$  відносно параметра  $X$  ( $X$  – це напруга або струм в будь-якому елементі кола) називають реакцію кола на одиничну вхідну напругу  $u(t) = \sigma(t)$ .*

Зазначимо, що перехідна характеристика кола *завжди* визначається для *нульових початкових умов*.

Розглянемо основні методи визначення  $h_x(t)$ .

### **Класичний метод розрахунку**

У цьому методі виконується розрахунок  $X(t)$  для значення вхідної напруги 1 В.

Наприклад, для схеми, зображеної на рис. 8.1 (лекція № 8) було знайдено  $i(t) = \frac{U}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right)$ . Тоді  $h_i(t) = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right)$ .

### **Операторний метод розрахунку**

У цьому методі виконується звичайний розрахунок для значення вхідної операторної напруги  $U(s) = \frac{1}{s}$ .

### **Розрахунок перехідної характеристики кола за допомогою передатної характеристики**

Цей метод доцільно використовувати лише в колах з одним реактивним елементом.

Нехай для кола відома передатна характеристика  $\underline{H}_{xu}(j\omega)$  в уніфікованій формі, тобто відомі коефіцієнти  $b_1, b_0, a_0$ .

Тоді перехідна характеристика визначається як:

$$a_0 > 0 \Rightarrow h_x(t) = \frac{b_0}{a_0} + \left( b_1 - \frac{b_0}{a_0} \right) e^{-a_0 t}. \quad (10.6)$$

Отже, як вже було сказано вище, сама перехідна характеристика  $h_x(t)$  – це реакція кола на одиничну вхідну напругу. Визначимо реакцію кола на довільний вхідний сигнал.

Якщо нам відоме подання цього сигналу через функцію Хевісайда, то з нього можна отримати реакцію кола за такими правилами:

- кількість рядків у формулі реакції кола має дорівнювати кількості складових у формулі сигналу;
- останній рядок у формулі збігається з формулою сигналу, якщо замінити  $\sigma(t)$  на  $h_x(t)$ ;
- кожен з попередніх рядків формули можна отримати, якщо вилучити останню складову наступного рядка;
- після кожного рядка формули необхідно вказати часові межі, у яких діє цей рядок.

Розглянемо приклад.

Знайдемо реакцію довільного кола на сигнал (10.4), тобто за перехідними характеристиками  $h_x(t)$  визначимо  $x(t)$ .

Згідно з вищенаведеними правилами, можна записати:

$$x(t) = \begin{cases} 10h_x(t), & 0 \leq t < 2\tau \\ 10h_x(t) - 5h_x(t - 2\tau), & 2\tau \leq t < 3\tau \\ 10h_x(t) - 5h_x(t - 2\tau) + 10h_x(t - 3\tau), & 3\tau \leq t < 4\tau \\ 10h_x(t) - 5h_x(t - 2\tau) + 10h_x(t - 3\tau) - 15h_x(t - 4\tau), & t \geq 4\tau \end{cases}. \quad (10.7)$$

Якщо вхідний сигнал  $u(t)$  є неперервною гладкою аналітичною функцією довільної форми, то реакція на нього буде виглядати як:

$$x(t) = u(0)h_x(t) + \int_0^t u'(\tau)h_x(t - \tau)d\tau. \quad (10.8)$$

### 10.3 Частотний (спектральний) метод розрахунку перехідних процесів при довільному вхідному сигналі

Цей метод завдяки сучасним комп'ютерним технологіям є найбільш зручним і компактним.

Нехай для кола, зображеного двополюсником (рис. 10.5), відомі передатна характеристика  $\underline{H}_{xu}(j\omega)$  і вхідна напруга довільної форми  $u(t)$ . Потрібно знайти  $X(t)$ .

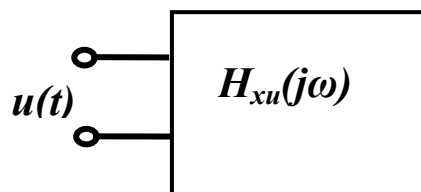


Рисунок 10.5

Розрахунок виконується за таким алгоритмом.

1. Визначається *спектральна густина вхідного сигналу (spectral density of entrance signal)* за допомогою *прямого перетворення Фур'є (direct transformation of Fure)* за формулою:

$$\underline{U}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (10.9)$$

2. Визначається *спектральна густина вихідного сигналу* за формулою:

$$\underline{X}(j\omega) = \underline{U}(j\omega)\underline{H}_{xu}(j\omega). \quad (10.10)$$

3. Визначається *реакція кола на вхідний сигнал* за допомогою *зворотного перетворення Фур'є (return transformation of Fure)* за формулою:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.11)$$

#### Контрольні запитання

1. Що таке перехідна характеристика кола?
2. Що таке функція Хевісайда?
3. Скільки рядків має містити реакція кола на вхідний сигнал, якщо в ньому присутні чотири стрибки напруги?

## ЛЕКЦІЯ № 11 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ ТА МАГНІТНІ КОЛА

### 11.1 Нелінійні електричні кола

#### Основні поняття

*Лінійний елемент (linear element) – це такий елемент електричного кола, параметри якого не залежать від струму, що через нього протікає.*

*Нелінійний елемент (nonlinear element) – це такий елемент електричного кола, параметри якого залежать від струму, що через нього протікає.*

*Лінійне коло (linear circuit) – це коло, яке складається лише з лінійних елементів.*

*Нелінійне коло (nonlinear circuit) – це коло, яке містить хоча б один нелінійний елемент.*

#### Вольт-амперні характеристики (ВАХ) нелінійних елементів

Згідно з вищенаведеними означеннями, параметри нелінійних елементів є функціями струму, наприклад, опір нелінійного резистора можна записати як  $r = f(i)$ .

Водночас, оскільки залежність активного опору від струму є суто експериментальною, набагато зручніше наводити її у вигляді:  $u = f(i)$ , тобто задавати як *вольт-амперну характеристику (voltampere characteristic)*.

На схемах нелінійні резистори, ємності та індуктивності позначаються так, як показано на рис. 11.1.



Рисунок 11.1

Загалом для індуктивності вводиться залежність потокозчеплення від струму  $\psi = f(i)$  (*вебер-амперна характеристика*), а для ємності – залежність заряду від напруги  $q = f(u)$  (*кулон-вольтна характеристика*). Зазначимо, що для кіл синусоїдного струму і для індуктивності, і для ємності теж зручно задавати *вольт-амперні характеристики* як залежність їх *реактивних* опорів від струму.

Під час розрахунків нелінійних кіл часто необхідно знати опір резистора в певній точці ВАХ. Це потрібно, по-перше, для визначення втрат активної потужності в колі, і, по-друге, для аналізу перехідних процесів.

З цією метою вводять поняття *статичного* та *диференціального* опорів нелінійного резистора.

Статичний опір (*static resistance*) нелінійного резистора (рис. 11.2) у точці 1 визначається як відношення напруги до струму в цій точці, тобто

$$r_{1\text{cm}} = \frac{u_1}{i_1}. \quad (11.1)$$

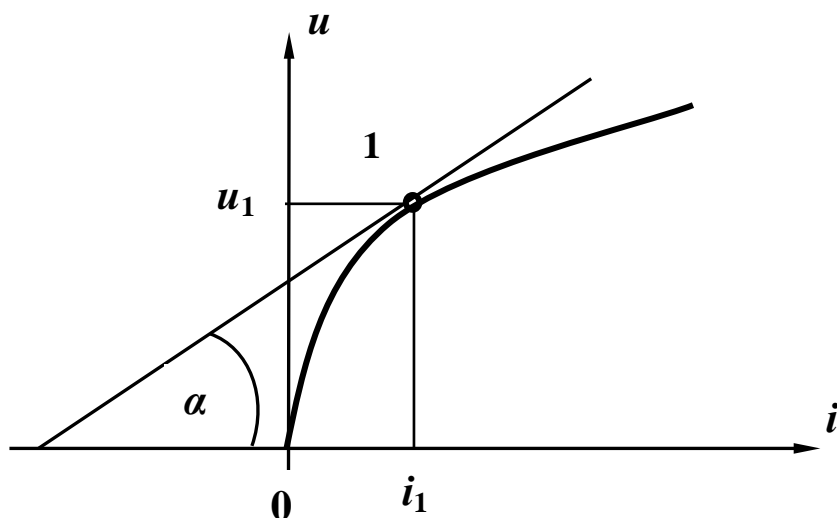


Рисунок 11.2

Відношення нескінченно малого приросту напруги до нескінченно малого приросту струму або похідна від напруги за струмом в точці 1 визначає *диференціальний опір (differential resistance)*  $r_{1\partial}$ . Значення цього опору дорівнює добутку тангенса кута  $\alpha$  між дотичною до ВАХ у точці 1 і віссю струмів на співвідношення масштабів осей:

$$r_{1\partial} = \left. \frac{du}{di} \right|_1 = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \alpha, \quad (11.2)$$

де  $m_u$  – масштаб осі напруг (кількість вольт в одиниці довжини осі);

$m_i$  – масштаб осі струмів (кількість ампер в одиниці довжини осі).

На відміну від статичного опору, який може бути тільки додатним, диференціальний опір може приймати від'ємне значення, дорівнювати нулю або бути нескінченно великим.

### **Розрахунок нелінійних резистивних кіл постійного струму**

Якщо в колі діє лише одна е.р.с., то розрахунок доцільно вести за допомогою еквівалентних перетворень, для чого будуються еквівалентні ВАХ. Розглянемо приклади таких кіл.

Нехай у колі присутні два послідовно з'єднаних нелінійних резистори (рис. 11.3) із вольт-амперними характеристиками, які показані на рис. 11.4. Побудуємо графічно еквівалентну ВАХ усього кола.

Оскільки при послідовному з'єднанні через елементи 1 та 2 струм протікає один і той же, точки загальної ВАХ (1+2) визначаються додаванням



напруг цих елементів для значень струмів  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . Так, наприклад, точка  $d$  загальної характеристики отримана додаванням відрізків  $ab$  і  $ac$ , тобто  $ad = ab + ac$ . Якщо виконувати побудову за допомогою циркуля та лінійки, то відрізок  $ab$  варто відкласти по горизонталі струму  $i_k$  після точки  $c$ , тобто  $cd = ab$ .

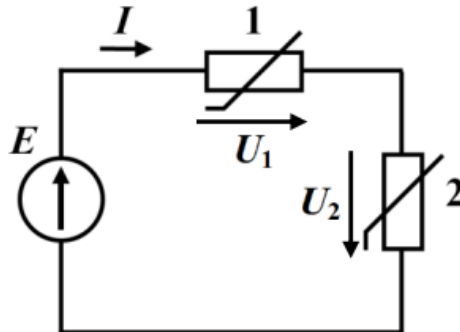


Рисунок 11.3

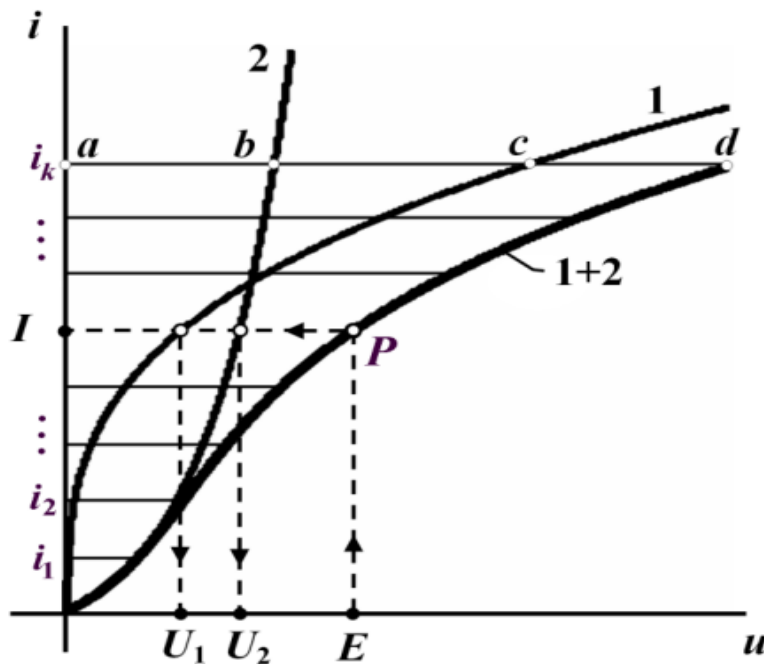


Рисунок 11.4

Знайдемо струм у колі й напруги на кожному з нелінійних резисторів, якщо в колі діє е.р.с. –  $E$  (її значення показано на рис. 11.4 точкою на осі напруг).

Для цього потрібно провести вертикальну лінію від точки  $E$  до перетину з ВАХ (1+2). Точку перетину  $P$  називають робочою точкою режиму кола. Провівши горизонтальну лінію від неї можна отримати струм у колі  $I$ , а також напруги  $U_1$  та  $U_2$ .

Розглянемо коло з паралельним з'єднанням нелінійних резисторів 1 та 2 (рис. 11.5) з ВАХ, які показані на рис. 11.6. Побудуємо графічно еквівалентну ВАХ усього кола.

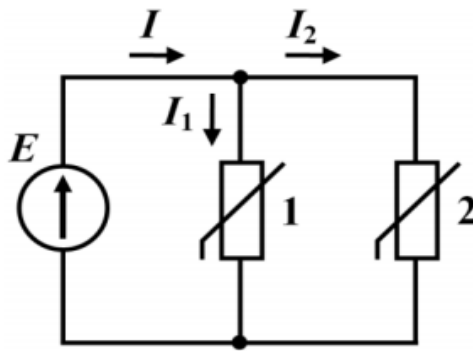


Рисунок 11.5

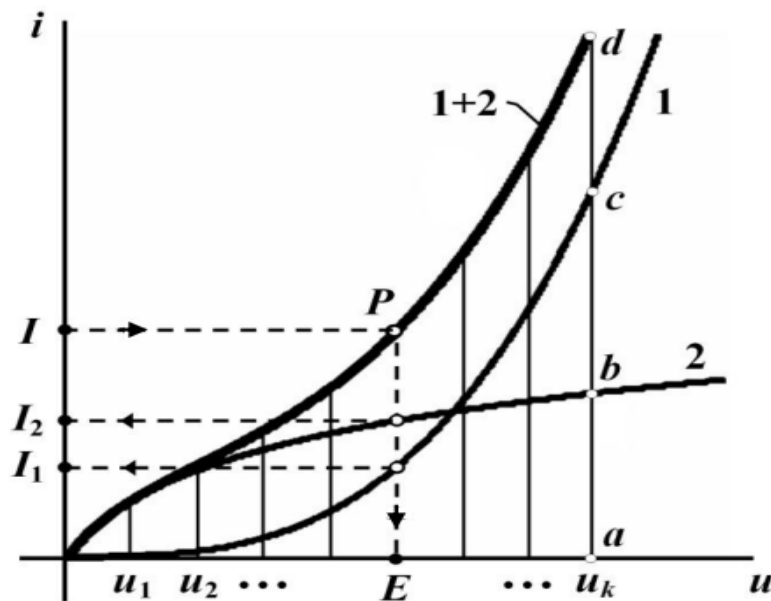


Рисунок 11.6

Оскільки при паралельному з'єднанні напруга на елементах 1 та 2 однакова, точки загальної ВАХ (1+2) визначаються додаванням струмів цих елементів для значень напруг  $u_1, u_2, \dots, u_k$ . Так, наприклад, точка  $d$  загальної характеристики отримана додаванням відрізків  $ab$  і  $ac$ , тобто  $ad = ab + ac$ . Якщо виконувати побудову за допомогою циркуля та лінійки, то відрізок  $ab$  варто відкласти за вертикаллю напруги  $u_k$  після точки  $c$ , тобто  $cd = ab$ .

Знайдемо е.р.с.  $E$  і струми в кожному з нелінійних резисторів, якщо струм на вході в коло –  $I$  (його значення показане на рис. 11.6 точкою на осі струмів).

Для цього потрібно провести горизонтальну лінію від точки  $I$  до перетину з ВАХ (1+2). Точку перетину  $P$  називають робочою точкою режиму кола. Провівши горизонтальну лінію від неї, можна отримати е.р.с.  $E$ , а також струми  $I_1$  та  $I_2$ .

Розглянемо коло зі змішаним з'єднанням нелінійних резисторів 1, 2, 3 (рис. 11.7) з ВАХ, які показані на рис. 11.8. Побудуємо графічно еквівалентну ВАХ усього кола.

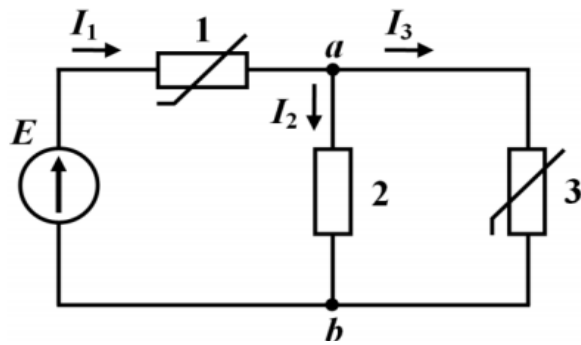


Рисунок 11.7

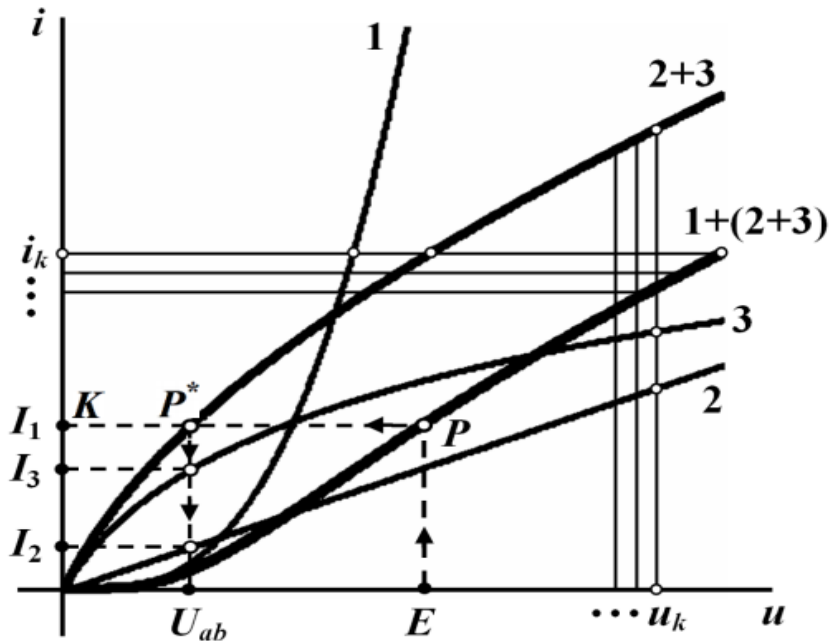


Рисунок 11.8

Побудову еквівалентної ВАХ виконаємо у два етапи: спочатку побудуємо еквівалентну ВАХ паралельно з'єднаних резисторів 2 і 3 (аналогічно до рис. 11.6), після чого резистор 1 та еквівалентний резистор (2+3) виявляються з'єднаними послідовно, і еквівалентна ВАХ 1+(2+3) будуватиметься аналогічно до рис. 11.4.

Знайдемо струми  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , якщо в колі діє е.р.с. –  $E$  (її значення показане на рис. 11.8 точкою на осі напруг).

Для цього потрібно провести вертикальну лінію від точки  $E$  до перетину з ВАХ 1+(2+3). Точку перетину  $P$  називають робочою точкою режиму кола. Провівши горизонтальну лінію від точки  $P$ , можна отримати струм на вході в коло  $I_1$ , а на перетині з ВАХ (2+3) – напругу  $U_{ab}$  і, відповідно, струми  $I_2$ ,  $I_3$ .

### **Розрахунок нелінійних кіл синусоїдного струму**

У лінійних електричних колах при синусоїдній вхідній напрузі струми і напруги у всіх вітках також синусоїдні. У нелінійних електричних колах ця умова не виконується, тому точні розрахунки таких кіл досить трудомісткі і потребують використання комп'ютерних технологій.

На практиці часто застосовують наближений метод розрахунку, у якому ВАХ нелінійних елементів будують для діючих значень струмів і напруг, а розрахунок ведуть як для кіл постійного струму. Похибка розрахунку при цьому незначна і вважається цілком прийнятною.

Якщо коло суто резистивне, то графічні розрахунки не відрізняються від розрахунків кіл постійного струму, але якщо в колі містяться реактивні елементи, то побудова ВАХ усього кола має свої особливості.

Розглянемо коло (рис. 11.9), яке містить нелінійний резистор і нелінійну індуктивність при синусоїдній входній напрузі. ВАХ цих елементів побудовані для діючих значень і показані на рис. 11.10.

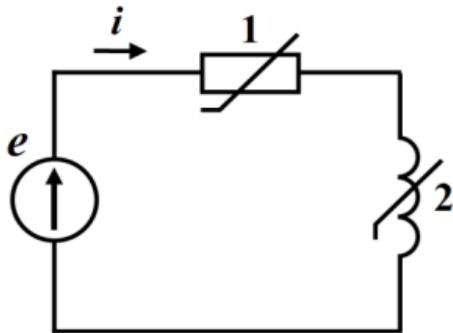


Рисунок 11.9

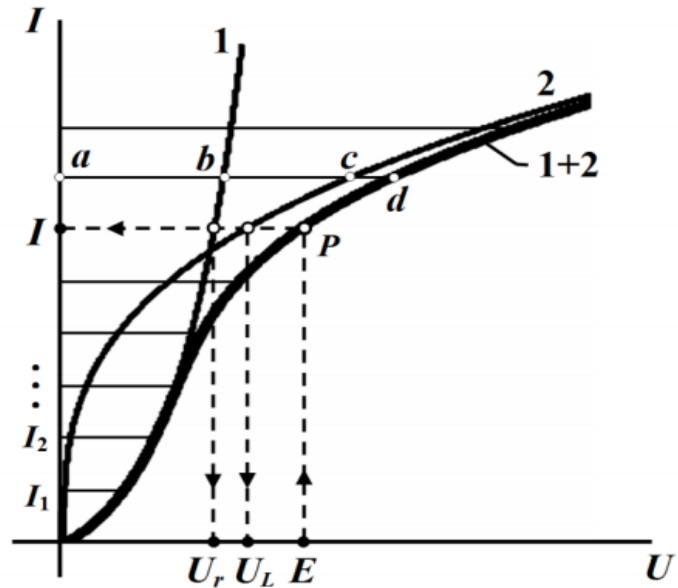


Рисунок 11.10

Для отримання ВАХ усього кола при послідовному з'єднанні потрібно додавати діючі значення напруг елементів при одному і тому ж струмові, але за наявності реактивних елементів таке додавання має бути векторним, тобто  $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$ , тому що вектори напруги на резисторі й індуктивності перпендикулярні між собою.

Наприклад, точка *d* ВАХ усього кола будується, виходячи з умови:

$$ad = \sqrt{ab^2 + ac^2}.$$

Інші точки характеристики знаходяться подібним чином.

Діюче значення струму в колі і напруги на резисторі та індуктивності визначаються аналогічно колам постійного струму (див. рис. 11.10).

## 11.2 Нелінійні магнітні кола

### *Загальна характеристика властивостей магнітних матеріалів*

Сукупність пристроїв, переважно із феромагнітних матеріалів, призначених для створення і концентрації в певному місці магнітного потоку, називається *магнітним колом* (*magnetic circuit*).

Магнітні кола є невід'ємною частиною електромагнітних реле, електромагнітів, трансформаторів, двигунів, електромашинних генераторів тощо. Феромагнітні осердя використовуються тому, що вони мають малий магнітний опір і полегшують проходження магнітного потоку.

Властивості магнітних матеріалів найчастіше характеризуються залежністю між *магнітною індукцією* (*magnetic induction*)  $B$ , яка вимірюється в Тесла [Тл], і *напруженістю магнітного поля* (*intensity of a magnetic field*)  $H$ , яка вимірюється в [А/м].

Характеристика  $B = f(H)$  для феромагнітних матеріалів є водночас і нелінійною, і неоднозначною. Її графік – це замкнена крива (рис. 11.11), яку називають *петлею гістерезису* (*hysteresis loop*).

На рис. 11.11 тонкими лініями показані *часткові петлі гістерезису*, які отримані за різних значень  $H_{max_k}$ . Зі зростанням  $H_{max_k}$  збільшується ширина цих петель і дещо змінюється їхня форма.

За деякого граничного значення  $H_{max}$  форма петлі змінюватися вже не буде. Таку криву називають *граничною петлею гістерезису* (потовщена лінія на рис. 11.11).

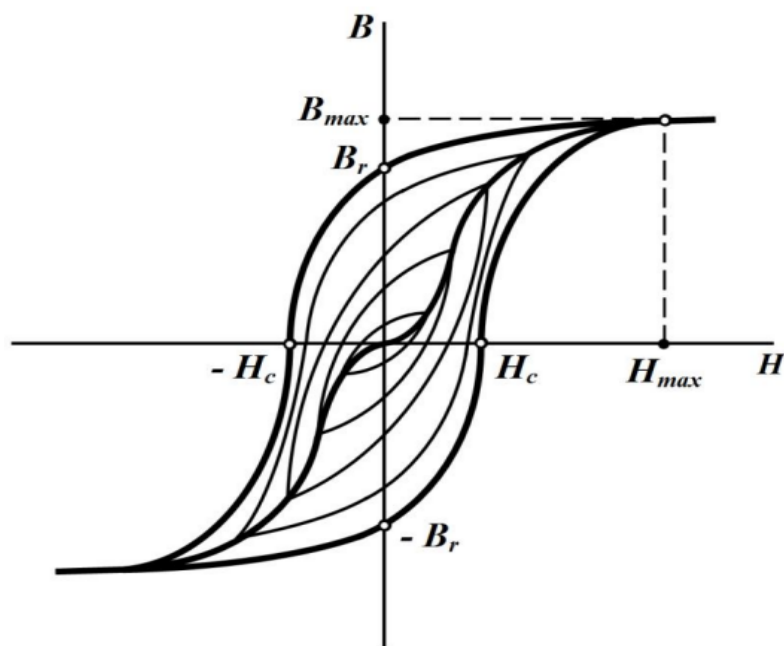


Рисунок 11.11

Значення магнітної індукції  $B_r$  при  $H = 0$  називають *залишковою індукцією*, а значення напруженості  $H_c$  при  $B = 0$  – *коерцитивною силою*.

Геометричне місце вершин петель гістерезису, знятих при різних значеннях  $H_{max_k}$ , називається *основною кривою намагнічування*.

Зв'язок між магнітною індукцією  $B$  і напруженістю магнітного поля  $H$  визначається співвідношенням:

$$B = \mu_a H, \quad (11.3)$$

де  $\mu_a = \mu\mu_0$  – абсолютна магнітна проникність речовини;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – абсолютна магнітна проникність вакууму ( $\mu_0$  є однією з фундаментальних сталих всесвіту);

$\mu$  – відносна магнітна проникність речовини.

Для феромагнітних матеріалів  $\mu$  не є сталою величиною і нелінійно залежить від напруженості магнітного поля, а її значення може досягати десятків тисяч одиниць.

### **Основні закони та особливості магнітних кіл**

Потік вектора магнітної індукції  $\vec{B}$ , який називається *магнітним потоком* (*magnetic stream*)  $\Phi$ , через деяку поверхню  $S$  визначається з виразу:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (11.4)$$

Якщо магнітна індукція у всіх точках поверхні однакова, тобто магнітне поле однорідне, а сам вектор  $\vec{B}$  є перпендикулярним до поверхні  $S$ , то

$$\Phi = BS. \quad (11.5)$$

Відповідно до *принципу неперервності* силових ліній магнітного поля, магнітний потік через замкнену поверхню завжди дорівнює нулю.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (11.6)$$

У магнітному колі виконується *закон повного струму*:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum_k i_k, \quad (11.7)$$

де  $\sum_k i_k$  – алгебрична сума струмів, що охоплені контуром інтегрування  $l$ .

Між магнітним та електричним колами існує формальна аналогія, яка виглядає так:

- електрична напруга  $U$  відповідає магнітній напрузі:

$$U_m = HI;$$

- електрорушійна сила  $E$  відповідає магніторушійній силі:  $\vec{F}$

$$F = wI,$$

де  $I$  – струм котушки, яка створює магнітне поле у феромагнітному осерді;

$w$  – кількість витків цієї котушки;

- електричний струм  $I$  відповідає магнітному потоку  $\Phi$ ;

- опір  $R$  електричного кола відповідає магнітному опору:

$$R_m = \frac{l}{\mu_a S},$$

де  $l$  – довжина ділянки магнітного кола (феромагнітного осердя);  
 $S$  – площа поперечного перерізу цього осердя.

Користуючись цими поняттями, можна сформулювати закони Кірхгофа для магнітних кіл.

Перший закон Кірхгофа формулюється так:

*для будь-якого вузла магнітного кола в будь-який момент часу алгебраїчна сума магнітних потоків дорівнює нулю:*

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (11.8)$$

Другий закон Кірхгофа формулюється так:

*для будь-якого контуру схеми в будь-який момент часу алгебраїчна сума е.р.с. джерел напруги, що діють в цьому контурі, дорівнює алгебраїчній сумі напруг на всіх пасивних елементах цього контуру:*

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k R_{mk} = \sum_{k=1}^n F_k. \quad (11.9)$$

### Контрольні запитання

1. Які кола не можна вважати лінійними?
2. Як описуються електричні властивості нелінійних елементів?
3. Чи можуть статичні та диференціальні опори нелінійних резисторів бути від'ємними?
4. Чим відрізняється побудова еквівалентних ВАХ за послідовного та паралельного з'єднань?
5. Як побудувати еквівалентну ВАХ у послідовному колі синусоїдного струму з резистором та ємністю?
6. Як побудувати еквівалентну ВАХ у послідовному колі синусоїдного струму з індуктивністю та ємністю?
7. Як побудувати еквівалентну ВАХ у послідовному колі синусоїдного струму з двома ємностями?
8. Що називають залишковою індукцією та коерцитивною силою?
9. Що називають магнітною напругою?
10. Що називають магнітним опором?
11. Сформулюйте закони Кірхгофа для магнітних кіл.
12. Проведіть аналогію між електричним та магнітним колами.

## ЛЕКЦІЯ № 12

### ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### 12.1 Загальні поняття

Під час проходження електричного струму вздовж усього кола виникають електричне і магнітне поля та необоротні перетворення електромагнітної енергії в тепло. Розподіл інтенсивності прояву цих явищ уздовж електричного кола є переважно *нерівномірним*.

Так, на одних ділянках електричного кола, наприклад, у конденсаторах, домінують фізичні явища, що пов'язані зі зміною в часі електричного поля і накопиченої в ньому енергії, в індуктивних котушках переважає магнітне поле, а в резистивних елементах на перший план виходять процеси необоротного перетворення енергії електричного струму.

У реальних електричних колах проводять ідеалізацію конкретних його ділянок, тобто нехтують тими фізичними процесами, що є несуттєвими та маловпливовими, наприклад:

- ділянки, де переважно зосереджене електричне поле, на схемах задають виключно електричними ємностями  $C$ ;
- ділянки, де переважає магнітне поле, подають індуктивними елементами  $L$ ;
- ділянки, на яких суттєвого значення набуває перетворення електромагнітної енергії в інші види (теплову, механічну, хімічну тощо), зображають активними опорами  $r$  чи провідностями  $g$ .

Такі ідеалізовані кола називають електричними *колами із зосередженими параметрами* (*circuit with the concentrated parametres*). Подібної ідеалізації здебільшого цілком достатньо для проведення доволі точних електротехнічних розрахунків і аналізу тих процесів, що спостерігаються в реальних електричних колах.

Однак на практиці часто постають задачі розрахунку електричних кіл, де чітко виділити й зосередити окремі ділянки локалізації електричного і магнітного полів чи ділянки необоротного розсіювання електромагнітної енергії або взагалі немає можливості, або такі дії призводять до значного спотворення картини прояву існуючих електромагнітних явищ, оскільки ті є неперервно розподіленими вздовж усього електричного кола, їхній прояв відчутний та впливовий скрізь, а тому нехтувати жодними з них не можна.

Такі електричні кола називаються *колами з розподіленими параметрами* (*circuit with the distributed parametres*).

До них належать лінії телеграфного й телефонного зв'язку, антени та фідери радіо- і телепередавачів та приймачів, лінії електропередач тощо.

Вивчення електромагнітних процесів у колах з розподіленими параметрами проведемо на прикладі *двопровідної лінії*. Такій лінії притаманні неперервно розподілені вздовж неї активний опір самих проводів, їхня індуктивність, електрична ємність та провідність середовища між ними.



Для спрощення аналізу вважатимемо, що неперервний розподіл параметрів уздовж лінії є *рівномірним*. Таку лінію, у якій її електричні параметри розподілені рівномірно, називають *однорідною*.

Характеризують однорідну лінію за допомогою *первинних* або «*погонних*» параметрів, тобто параметрів, віднесених до одиниці довжини двопровідної лінії.

До первинних параметрів належать:

- поздовжній питомий активний опір  $r_0$  [Ом/м] двох проводів лінії;
- поздовжня питома індуктивність  $L_0$  [Гн/м] обох проводів;
- поперечна питома ємність  $C_0$  [Ф/м] між проводами;
- поперечна питома активна провідність  $g_0$  [См/м] між ними.

## 12.2 Диференціальні рівняння однорідної лінії

Розподілений характер параметрів призводить до того, що миттєві напруги між проводами і струми в них зазнають змін уздовж усієї лінії і є неперервними функціями не лише часової координати  $t$ , а й, водночас, і просторової координати  $x$  – відстані від одного з кінців лінії:

$$u = u(x, t), \quad i = i(x, t).$$

Тому дослідження процесів у лінії розпочнемо із визначення значень миттєвих напруги та струму в будь-якій точці лінії  $x$  у будь-який момент часу  $t$ .

На рис. 12.1 схематично показано однорідну двопровідну лінію довжиною  $l$ . Затискачі джерела живлення 1–1' назвемо початком довгої лінії, а затискачі навантаження 2–2' – її кінцем.

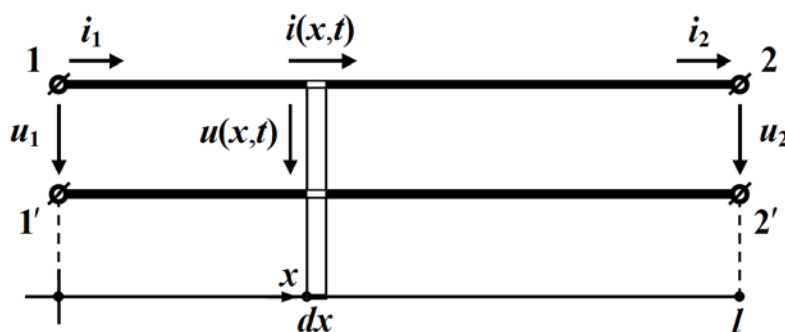


Рисунок 12.1

Отже, виділимо на деякій відстані  $x$  від початку лінії елементарну нескінченно малу ділянку двопровідної лінії довжиною  $dx$  (рис. 12.1).

Подамо цю елементарну ділянку як чотириполюсник (рис. 12.2), що має *зосереджені* параметри: активний опір  $r_0 dx$ ; індуктивність  $L_0 dx$ ; активну провідність  $g_0 dx$ ; ємність  $C_0 dx$ .

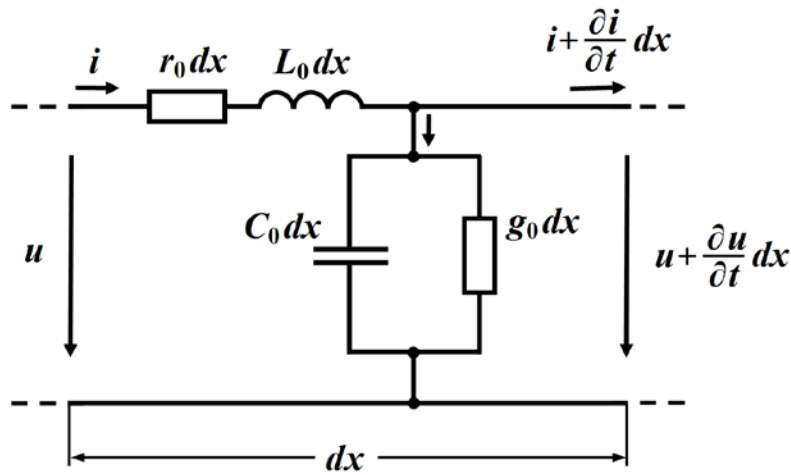


Рисунок 12.2

Враховуючи те, що струм і напруга, як вже зазначалося, є функціями і часу  $t$ , і відстані  $x$ , то швидкості зміни струму вздовж лінії  $\frac{\partial i}{\partial x}$  та напруги  $\frac{\partial u}{\partial x}$  визначаються через частинні похідні. Якщо позначити струм і напругу на вході елементарної ділянки лінії через  $i$  та  $u$ , то на її виході зі зміною відстані на  $dx$  струм і напруга отримають прирости – відповідно  $\frac{\partial i}{\partial x} dx$  та  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$  (рис. 12.2).

Зв'язок між вхідною та вихідною напругами визначимо з другого закону Кірхгофа:

$$u - \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = r_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t},$$

а за першим законом Кірхгофа отримаємо співвідношення між вхідним і вихідним струмами:

$$i - \left( i + \frac{\partial i}{\partial t} dx \right) = g_0 dx \left( u + \frac{\partial u}{\partial t} dx \right) + C_0 dx \frac{\partial \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)}{\partial t}.$$

У другому рівнянні знехтуємо складовими другого порядку малості, тобто такими, що містять величини  $(dx)^2$ . Обидва ж рівняння скоротимо на  $dx$ .

Унаслідок перетворень отримаємо систему з двох диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують електричні процеси, що відбуваються в однорідній двопровідній лінії:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (12.1)$$

Ці рівняння називають *телеграфними рівняннями (cable equations)*.

Спільне розв'язування отриманих диференціальних рівнянь за заданих початкових та граничних умов дозволяє в кожному конкретному випадку визначити розподіл струму  $i = i(x, t)$  і напруги  $u = u(x, t)$  в однорідній лінії як в усталеному, так і в перехідному режимах.

### 12.3 Усталений режим роботи лінії при синусоїдній вхідній напрузі

Під час живлення кола з розподіленими параметрами від джерела синусоїдної напруги, струм та напруга в усталеному режимі в довільній точці лінії також змінюються за синусоїдним законом, що дозволяє застосовувати символічний метод. Як відомо, при цьому миттєвим синусоїдним значенням струмів та напруг у відповідність ставляться їхні комплексні величини:

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\psi_i}, \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\psi_u}, \end{aligned}$$

де  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ ,  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ , а операціям диференціювання синусоїдних функцій – операції множення комплексного числа на  $j\omega$ .

Застосовуючи символічний метод, рівняння (12.1) можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

або

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= \underline{Z}_0 \underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= \underline{Y}_0 \underline{U} \end{aligned} \right\}, \quad (12.3)$$

де  $\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0$  – *поздовжній питомий комплексний опір лінії*;

$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0$  – *поперечна питома комплексна провідність лінії*.

У цих диференціальних рівняннях комплексні значення  $\underline{U}$  та  $\underline{I}$  не є функціями часу  $t$ , тому частинні похідні замінюються на звичайні.

Систему (12.3) з двох рівнянь із двома невідомими зведемо до одного рівняння. Для цього ще раз продиференціюємо перше рівняння цієї системи

$$\text{ми } -\frac{d^2 \underline{U}}{d x^2} = \underline{Z}_0 \frac{d \underline{I}}{d x} \text{ і в отриманий вираз з другого рівняння системи (12.3)}$$

підставимо похідну  $\frac{d \underline{I}}{d x}$ . Тоді

$$\frac{d^2 \underline{U}}{d x^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U}$$

або

$$\frac{d^2 \underline{U}}{d x^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0, \quad (12.4)$$

$$\text{де } \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta. \quad (12.5)$$

Величину  $\underline{\gamma}$  прийнято називати *коефіцієнтом поширення (distribution factor)*, а його дійсну  $\alpha$  та уявну  $\beta$  складові, відповідно, *коефіцієнтом згасання та фазовим коефіцієнтом*.

Рівняння (12.4) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку, загальний розв'язок якого записують так:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma} x}, \quad (12.6)$$

де  $\underline{U}$  – комплексне діюче значення напруги в лінії на відстані  $x$  від її початку;

$-\underline{\gamma}$  та  $\underline{\gamma}$  – корені характеристичного рівняння  $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$ ;

$\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$  – сталі інтегрування.

Комплексне значення струму в лінії на відстані  $x$  від її початку можна визначити з першого рівняння системи (12.3), підставивши туди вираз (12.6)

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d \underline{U}}{d x} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \left( -\underline{\gamma} \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{\gamma} \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma} x} \right),$$

а, урахувавши рівняння (12.4), маємо:

$$\underline{I} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} \left( \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma} x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma} x} \right) = \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}} \left( \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma} x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma} x} \right).$$

Комплексний вираз має розмірність опору, тому введемо позначення:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}, \quad (12.7)$$

де  $\underline{Z}_C$  – хвильовий опір (wave resistance) лінії.

Перепишемо вираз для струму у вигляді:

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x}. \quad (12.8)$$

Сталі інтегрування  $\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$  визначають із граничних умов таким чином.

Якщо на початку лінії  $x = 0$  відомими є напруга  $\underline{U}_1$  і струм  $\underline{I}_1$

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_1, \quad \underline{I}(0) = \underline{I}_1,$$

то рівняння (12.6) і (12.8) набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} \end{aligned} \right\},$$

звідки визначаємо сталі інтегрування:

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1), \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1). \quad (12.9)$$

Отже, розв'язками системи (12.3) за заданих граничних умов будуть функції:

$$\underline{U} = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{\gamma x}, \quad (12.10)$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2\underline{Z}_C}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2\underline{Z}_C}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1) e^{\gamma x}. \quad (12.11)$$

Коефіцієнт поширення і хвильовий опір називають вторинними параметрами лінії.

Розглянемо приклад.

Нехай задано вторинні параметри лінії зв'язку:  $\underline{\gamma} = 1,801 \cdot 10^{-2} e^{j81,67^\circ} \text{ км}^{-1}$  та  $\underline{Z}_C = 564,3 e^{-j8,07^\circ} \text{ Ом/км}$  на частоті 800 Гц. Знайти первинні параметри лінії.

Складемо систему рівнянь:  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}$ ,  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$ , звідки випливає

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 = \underline{Z}_C \underline{\gamma}, \quad \underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_C}.$$

Розрахунок виконаємо в середовищі MathCAD.

$$Z_C := 564.3 \cdot e^{-i \cdot 8.07 \text{deg}} \quad \gamma := 1.801 \cdot 10^{-2} \cdot e^{i \cdot 81.67 \text{deg}} \quad f := 800$$

$$Z_0 := Z_C \cdot \gamma \quad Y_0 := \frac{\gamma}{Z_C}$$

$$Z_0 = 2.869 + 9.75i \quad Y_0 = 1.448 \times 10^{-7} + 3.192i \times 10^{-5}$$

Таким чином,  $r_0 = 2,869$  Ом/км,  $g_0 = 1,448 \cdot 10^{-7}$  См/км, а оскільки  $\omega L_0 = 9,75$  Ом/км,  $\omega C_0 = 3,192 \cdot 10^{-5}$  Ом/км, то  $L_0 = 1,94 \cdot 10^{-3}$  См/км,  $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9}$  Ом/км.

$$L_0 := \frac{9.75}{2 \cdot \pi \cdot f} \quad C_0 := \frac{3.192 \times 10^{-5}}{2 \cdot \pi \cdot f}$$

$$L_0 = 1.94 \times 10^{-3} \quad C_0 = 6.35 \times 10^{-9}$$

## 12.4 Пряма та зворотна хвилі

Для з'ясування фізичного змісту складових у формулі (12.6) запишемо їхні миттєві значення, урахувавши, що і сталі інтегрування  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$ , і коефіцієнт  $\underline{\gamma}$ , і хвильовий опір  $\underline{Z}_C$  є комплексними числами, які можна записати у вигляді:

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}, \quad \underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}, \quad \underline{\gamma} = \alpha + j\beta, \quad \underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta}.$$

Спочатку розглянемо лише першу складову виразу (12.6), яку позначимо як  $\underline{U}_n$ :

$$\underline{U}_n = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} = A_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha + j\beta)x} = A_1 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_1 - \beta x)}.$$

Тоді миттєве значення цієї складової буде функцією двох змінних – часу  $t$  і відстані  $x$ :

$$u_n = A_1 \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x). \quad (12.12)$$

Це означає, що напруга  $u_n$  у будь-якій точці  $x = x_i$  двопровідної лінії з часом  $t$  змінюватиметься за синусоїдним законом з амплітудою

$$U_{m_n}(x_i) = A_1 \sqrt{2} e^{-\alpha x_i}$$

та початковою фазою

$$\psi_n(x_i) = \psi_1 - \beta x_i,$$

тобто

$$u_n(x_i, t) = U_{m_n}(x_i) \sin[\omega t + \psi_n(x_i)].$$

Однак, з іншого боку, за будь-якого фіксованого моменту часу  $t = t_1$  напруга *вздовж лінії* також змінюватиметься за синусоїдним законом лише із згасаючою амплітудою  $U_{m_n}(x) = A_1 \sqrt{2} e^{-\alpha x}$ , як це і показано на рис. 12.3.

Дослідимо характер поведінки цього згасаючого синусоїдного коливання напруги  $u_n$  за умови незначного приросту часу з моменту  $t_1$  до  $t_2$ .

Визначимо, де опиниться ця точка синусоїди в момент часу  $t_2 > t_1$ .

Оскільки повна фаза має залишатися незмінною, то можна записати

$$\omega t_2 + \psi_1 - \beta x_2 = \omega t_1 + \psi_1 - \beta x_1,$$

звідки

$$\omega(t_2 - t_1) = \beta(x_2 - x_1). \quad (12.13)$$

З (12.13) випливає, що за умови  $t_2 > t_1$ , координата  $x_2$  обраної точки в момент часу  $t_2$  буде більшою, ніж координата  $x_1$  цієї точки для моменту часу  $t_1$ , тобто  $x_2 > x_1$ . Тобто, за час  $\Delta t = t_2 - t_1$  ця точка має зміститися *вправо* на відстань  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Подібні міркування можна провести і для будь-яких інших точок, що належать згасаючій синусоїді миттєвої напруги  $u_n$ .

Отже, з перебігом часу синусоїдна хвиля напруги  $u_n$  зазнаватиме руху і переміщуватиметься від початку лінії в напрямку її кінця, як це і показано на рис. 12.3.

Тому цю напругу  $u_n = u_n(x, t)$  називають *прямою* або *падаючою хвилею* (*falling wave*) напруги.

Швидкість руху хвилі визначимо з умови сталості повної фази для будь-якої з точок, що належать цій хвилі і перебувають у стані руху:

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \text{Const}.$$

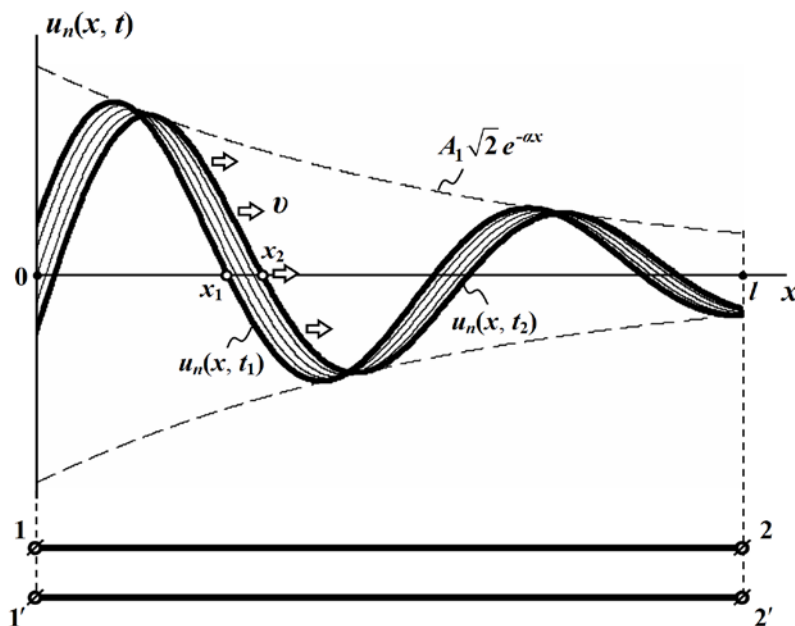


Рисунок 12.3

Продиференціюємо це співвідношення за  $t$ , унаслідок чого отримаємо:

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0$$

або

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}, \quad (12.14)$$

де  $v$  – фазова швидкість (*phase speed*) хвилі.

Для хвилі, що падає, можна задати і визначити довжину хвилі (*length of a wave*).

Довжиною хвилі  $\lambda$  називають відстань між двома найближчими точками в напрямку поширення хвилі, фази коливання в яких відрізняються на величину  $2\pi$ .

Отже,

$$(\omega t + \psi_1 - \beta x) - [\omega t + \psi_1 - \beta (x + \lambda)] = 2\pi,$$

звідки

$$\beta \lambda = 2\pi$$

або

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (12.15)$$

Миттєве значення струму  $i_n(x, t)$  теж є хвилею, яка згасає і рухається в напрямку від початку лінії до її кінця із фазовою швидкістю  $v$ :

$$i_n = \frac{A_1 \sqrt{2}}{Z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x - \theta). \quad (12.16)$$

Другі складові у виразах комплексів діючих значень напруги і струму відрізняються від перших складових іншою сталою інтегрування  $A_2$  та знаком незалежної змінної  $x$ , тому миттєве значення другої складової напруги буде також функцією  $u_3(x, t)$  водночас як часової  $t$ , так і просторової  $x$  координат, та дорівнюватиме:

$$u_3 = A_2 \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x).$$

Таким чином, друга складова також є синусоїдною хвилею, яка згасає (рис. 12.4), яка рухається з тією ж фазовою швидкістю  $v$ , що і пряма хвиля (див. рис. 12.3), але у протилежному до неї напрямку, тобто від кінця лінії до її початку, через що таку хвилю напруги називають *звотною* або *відбитою хвилею* (*reflected wave*).



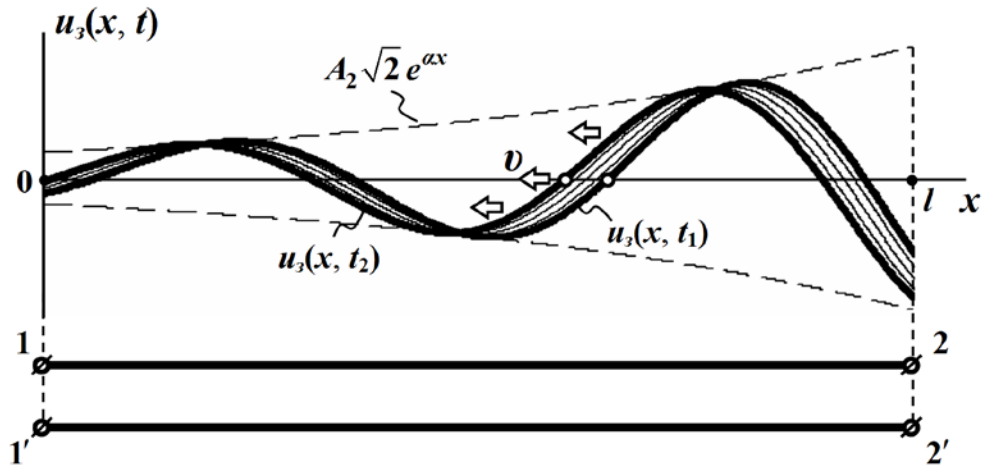


Рисунок 12.4

Зворотна хвиля миттєвого струму  $i_3(x, t)$  описується функцією:

$$i_3 = \frac{A_2 \sqrt{2}}{Z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x - \theta).$$

Підведемо підсумок проведеного аналізу процесів, що відбуваються в однорідній двопровідній лінії за дії синусоїдної вхідної напруги:

- розподіл миттєвого значення напруги  $u(x, t)$  уздовж лінії можна розглядати як результат накладання двох хвиль напруг: прямої  $u_n(x, t)$  і зворотної  $u_3(x, t)$ , які рухаються з однаковими фазовими швидкостями  $v$  у протилежних напрямках і зазнають під час цього руху однакового згасання:

$$u = u_n + u_3;$$

- розподіл миттєвого значення струму  $i(x, t)$  також можна розглядати як результат накладання двох хвиль, але з однією відмінністю, що результатом накладання буде не сума, а різниця прямої  $i_n(x, t)$  та зворотної  $i_3(x, t)$  хвиль струмів:

$$i = i_n - i_3;$$

- комплекси діючих значень напруги  $\underline{U}(x)$  і струму  $\underline{I}(x)$  у будь-якій точці лінії  $x$  можна записати у вигляді:

$$\underline{U} = \underline{U}_n + \underline{U}_3, \quad \underline{I} = \underline{I}_n - \underline{I}_3.$$

- введені поняття прямої та зворотної хвиль напруги й струму суттєво полегшують аналіз і розуміння тих електромагнітних процесів, які спостерігаються в електричних колах з розподіленими параметрами, якщо ті перебувають в усталених синусоїдних режимах роботи. Однак потрібно

пам'ятати: фізично в реальній двопровідній лінії існують лише виключно напруга  $u(x,t)$  та струм  $i(x,t)$ , а розкладання їх на прямі й зворотні хвилі є лише зручним та корисним прийомом, який став можливим лише внаслідок лінійності досліджуваної системи.

З (12.14) та (12.15) випливає, що  $\lambda = \frac{v}{f}$ , тобто довжина хвилі обернено пропорційна частоті. Двopовідну лінію, довжина  $l$  якої є сумірною з довжиною хвилі  $\lambda$  або більшою від неї, називають *довгою лінією* (*long line*).

Хвилеподібна зміна напруги і струму вздовж таких ліній є особливо помітною. Це потрібно враховувати під час аналізу, застосовуючи вищенаведений теоретичний апарат. Однак у тих випадках, коли геометричні розміри лінії є значно меншими, аніж довжина хвилі  $l \ll \lambda$ , можна і доцільно розглядати ці лінії як електричні кола із зосередженими параметрами.

Наприклад, лінію електропередачі довжиною до 200 км на частоті  $f = 50$  Гц можна розглядати як коротку лінію із зосередженими параметрами, а п'ятиметровий відрізок лінії на частоті  $f = 150$  МГц уже матиме вигляд довгої лінії, тому що за частоти  $f = 50$  Гц довжина хвилі в такій лінії досягає  $\lambda = 6000$  км, що набагато перевищує довжину самої лінії, а при частоті  $f = 150$  МГц довжина хвилі становить  $\lambda = 2$  м.

### 12.5 Відбивання хвиль. Узгоджений режим

У п. 12.3 отримано формули для комплексів діючих значень напруги в будь-якій точці лінії через сталі інтегрування  $A_1$  і  $A_2$ . Останні легко визначаються зі співвідношень (12.9) за відомих значень напруги  $\underline{U}_1$  й струму  $\underline{I}_1$  на початку лінії.

Однак часто зручніше виражати струми і напруги в будь-якій точці лінії через струм  $\underline{I}_2$  та напругу:

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_n \underline{I}_2, \quad (12.17)$$

де  $\underline{Z}_n$  – опір навантаження.

У цьому випадку найкраще початком відліку відстані  $y$  вважати кінець двопровідної лінії (рис. 12.5).

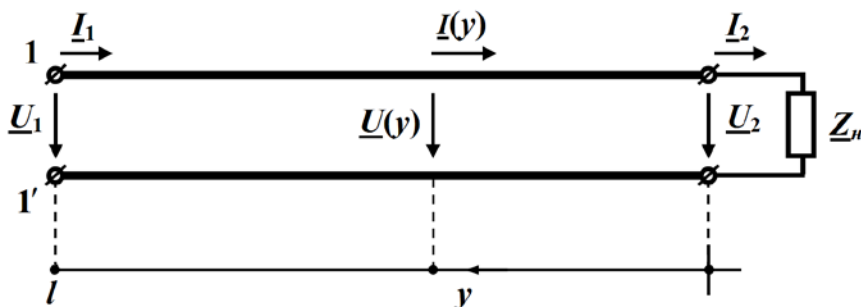


Рисунок 12.5

Тоді, якщо замінити у виразах (12.6) і (12.8) змінну  $x$  на різницю  $l - y$ , де  $l$  є довжина лінії, то отримаємо рівняння:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma(l-y)} + \underline{A}_2 e^{\gamma(l-y)}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma(l-y)} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma(l-y)}.$$

Введемо до цих рівнянь нові сталі інтегрування:

$$\underline{A}_3 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l}, \quad \underline{A}_4 = \underline{A}_2 e^{\gamma l}.$$

З урахуванням проведених перетворень, отримаємо:

$$\underline{U} = \underline{A}_3 e^{\gamma y} + \underline{A}_4 e^{-\gamma y}, \quad (12.18)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_3}{\underline{Z}_C} e^{\gamma y} - \frac{\underline{A}_4}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma y}, \quad (12.19)$$

де змінна  $y$ , як було зазначено, має рахуватися з кінця лінії.

Визначимо нові сталі інтегрування  $\underline{A}_3$  і  $\underline{A}_4$  через напругу  $\underline{U}_2$  та струм  $\underline{I}_2$ , що задані в кінці лінії.

Для  $y = 0$  рівняння (12.18), (12.19) набувають вигляду:

$$\underline{U}(0) = \underline{A}_3 + \underline{A}_4 = \underline{U}_2, \quad \underline{I}(0) = \frac{\underline{A}_3}{\underline{Z}_C} - \frac{\underline{A}_4}{\underline{Z}_C} = \underline{I}_2.$$

Розв'язуючи цю систему відносно сталих інтегрування, маємо:

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2), \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2).$$

Таким чином,

$$\underline{U} = \underline{U}_n + \underline{U}_3 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} e^{\gamma y} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} e^{-\gamma y}, \quad (12.20)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_n - \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_C} e^{\gamma y} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_C} e^{-\gamma y}. \quad (12.21)$$

Проведемо перегрупування в цих рівняннях

$$\underline{U} = \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} \underline{U}_2 + \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} \underline{Z}_C \underline{I}_2, \quad \underline{I} = \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} + \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} \underline{I}_2$$

і введемо гіперболічні функції косинуса й синуса:

$$ch \underline{\gamma} y = \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2}, \quad sh \underline{\gamma} y = \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2}.$$

У результаті для напруги  $\underline{U}(y)$  та струму  $\underline{I}(y)$  остаточно отримаємо рівняння лінії в гіперболічних функціях:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} y, \quad (12.22)$$

$$\underline{I} = \underline{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} y}{\underline{Z}_C} + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y. \quad (12.23)$$

Для вхідних напруги  $\underline{U}_1$  та струму  $\underline{I}_1$ , що задані на початку лінії  $y = l$ , маємо:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} y, \quad (12.24)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} y}{\underline{Z}_C} + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y. \quad (12.25)$$

У виразах (12.20), (12.21) другі складові напруги і струму є зворотними (відбитими) хвилями.

Величину зворотної хвилі зручно визначати, якщо ввести поняття коефіцієнта відбиття  $\underline{N}$ .

*Коефіцієнтом відбиття* називають комплексну величину, яка дорівнює відношенню комплексного значення напруги (струму) зворотної хвилі в кінці лінії ( $y = 0$ ) до комплексного значення прямої хвилі напруги (струму) у кінці лінії:

$$\underline{N} = \frac{\underline{U}_3(0)}{\underline{U}_n(0)} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_4}{\underline{A}_3}. \quad (12.26)$$

Ураховуючи, що  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_n \underline{I}_2$ , для коефіцієнта відбиття можна записати:

$$\underline{N} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_C} = N e^{j\delta_0}. \quad (12.27)$$

Таким чином, величина зворотної хвилі залежить від співвідношення між опором навантаження і хвильовим опором лінії.

Якщо опір навантаження дорівнює хвильовому опору ( $\underline{Z}_n = \underline{Z}_C$ ), то коефіцієнт відбиття  $\underline{N} = 0$ , відбита хвиля відсутня і вся енергія, яка переноситься прямою хвилею, поглинається навантаженням.

Такий режим роботи лінії називається *узгодженням*.

Оскільки в узгодженому режимі роботи зворотна хвиля відсутня:

$$\underline{U}_3 = 0, \quad \underline{I}_3 = 0,$$

то

$$\underline{U} = \underline{U}_n = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} e^{\underline{\gamma} y}, \quad \underline{I} = \underline{I}_n = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_C} e^{\underline{\gamma} y}.$$

Урахувавши, що  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_C \underline{I}_2$ , для цього режиму отримуємо:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{\gamma y}, \quad \underline{I} = \underline{I}_2 e^{\gamma y}. \quad (12.28)$$

Тоді вхідні напруга і струм за узгодженого режиму дорівнюють:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\gamma l}, \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 e^{\gamma y}. \quad (12.29)$$

З рівнянь (12.28) випливає важливий висновок: в узгодженому режимі в будь-якій точці лінії відношення напруги до струму є сталим і дорівнює хвильовому опору  $\frac{U}{I} = \frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_C$ .

Це стосується, зокрема, і вхідного опору лінії також:

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_C. \quad (12.30)$$

Отже, вхідний опір лінії, що перебуває в узгодженому режимі, завжди дорівнює хвильовому опору і не залежить від її довжини  $l$ .

Під час *короткого замикання* лінії, коли опір навантаження дорівнює нулю  $\underline{Z}_н = 0$ , як випливає зі співвідношення (12.27), коефіцієнт відбиття  $\underline{N} = -1$ , а під час *холостого ходу* –  $\underline{N} = 1$  через те, що опір навантаження  $\underline{Z}_н = \infty$ . У цих режимах спостерігається повне відбиття прямої хвилі.

Розглянемо приклад розрахунку режиму довгої лінії.

Однорідна довга лінія, яка зображена на рис. 12.5, довжиною  $l = 200$  м навантажена на опір  $\underline{Z}_н = 150e^{j45^\circ}$  Ом і живиться від синусоїдного джерела напруги  $u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \sin(2\pi ft + \varphi_1)$ , де  $f = 3$  МГц. Первинні параметри лінії відомі і дорівнюють:  $r_0 = 2,7$  Ом/м,  $L_0 = 4,3$  мкГн/м,  $C_0 = 2,9$  пФ/м,  $g_0 = 1,1$  мкСм/м. Вихідна напруга  $U_2 = 43$  В.

Розрахунки проведемо в середовищі MathCAD.

Вхідні дані:

$$Z2 := 150 \cdot e^{i \cdot 45 \text{deg}} \quad U2 := 43 \quad f := 3 \cdot 10^6 \quad l := 200$$

$$r0 := 2.7 \quad g0 := 1.1 \cdot 10^{-6} \quad L0 := 4.3 \cdot 10^{-6} \quad C0 := 2.9 \cdot 10^{-12}$$

Визначимо хвильовий опір, коефіцієнт поширення, коефіцієнт згасання та фазовий коефіцієнт, фазову швидкість і довжину хвилі.

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad Z0 := r0 + i \cdot \omega \cdot L0 \quad Y0 := g0 + i \cdot \omega \cdot C0 \quad Zc := \sqrt{\frac{Z0}{Y0}}$$

$$Z0 = 2.7 + 81.053i \quad Y0 = 1.1 \times 10^{-6} + 5.466i \times 10^{-5}$$

$$\gamma := \sqrt{Z0 \cdot Y0} \quad \alpha := \text{Re}(\gamma) \quad \beta := \text{Im}(\gamma) \quad v := \frac{\omega}{\beta} \quad \lambda := \frac{2 \cdot \pi}{\beta}$$

$$Zc = 1.218 \times 10^3 - 8.025i \quad \gamma = 1.778 \times 10^{-3} + 0.067i$$

$$\alpha = 1.778 \times 10^{-3} \quad \beta = 0.067 \quad v = 2.832 \times 10^8 \quad \lambda = 94.392$$

Знайдемо комплекс діючого значення струму  $\underline{I}_2$  у навантаженні  $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$ , що дозволить провести за формулами  $\underline{B}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2)$ ,  $\underline{B}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2)$  розрахунок сталих інтегрування  $\underline{B}_1 = B_1 e^{j\psi_1}$  (для прямої хвилі) та  $\underline{B}_2 = B_2 e^{j\psi_2}$  (для зворотної хвилі) через вихідні напругу  $\underline{U}_2$  та струм  $\underline{I}_2$  на навантаженні.

$$\underline{I}_2 := \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \quad |\underline{I}_2| = 0.287 \quad \arg(\underline{I}_2) = -45 \text{ deg}$$

$$\underline{B}_1 := \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} \quad |\underline{B}_1| = 190.284 \quad \arg(\underline{B}_1) = -40.765 \text{ deg}$$

$$\underline{B}_2 := \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} \quad |\underline{B}_2| = 160.196 \quad \arg(\underline{B}_2) = 129.141 \text{ deg}$$

Комплекси діючих значень прямих, зворотних і сумарних хвиль напруги та струму у функції просторової координати  $y$ , відповідно дорівнюють:

$$\underline{U}_n = \underline{B}_1 e^{\gamma y}, \quad \underline{U}_3 = \underline{B}_2 e^{-\gamma y}, \quad \underline{U} = \underline{U}_n + \underline{U}_3,$$

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{B}_1}{\underline{Z}_C} e^{\gamma y}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{B}_2}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma y}, \quad \underline{I} = \underline{I}_n - \underline{I}_3,$$

що дає можливість визначити функції:

- миттєвої напруги

$$u(y, t) = u_n(y, t) + u_3(y, t),$$

де  $u_n(y, t) = B_1 \sqrt{2} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y + \psi_1)$  – її пряма хвиля;

$u_3(y, t) = B_2 \sqrt{2} e^{-\alpha y} \sin(\omega t - \beta y + \psi_2)$  – зворотна хвиля;

- миттєвого струму

$$i(y, t) = i_n(y, t) - i_3(y, t),$$

де  $i_n(y, t) = \frac{B_1}{Z_C} \sqrt{2} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y + \psi_1 - \theta)$  – його пряма хвиля;

$i_3(y, t) = \frac{B_2}{Z_C} \sqrt{2} e^{-\alpha y} \sin(\omega t - \beta y + \psi_2 - \theta)$  – зворотна хвиля.

У MathCAD:

$$u_n(y,t) := |B1| \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\alpha \cdot y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot y + \arg(B1))$$

$$u_z(y,t) := |B2| \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha \cdot y} \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot y + \arg(B2))$$

$$i_n(y,t) := \frac{|B1|}{|Zc|} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\alpha \cdot y} \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot y + \arg(B1) - \arg(Zc))$$

$$i_z(y,t) := \frac{|B2|}{|Zc|} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha \cdot y} \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot y + \arg(B2) - \arg(Zc))$$

$$u(y,t) := u_n(y,t) + u_z(y,t) \quad i(y,t) := i_n(y,t) - i_z(y,t)$$

Побудуємо графіки цих напруг та струмів для моменту часу  $t_1$ , за якого пряма хвиля напруги  $u_n(y,t)$  у кінці лінії  $y=0$  набуває, максимального із своїх можливих, значення.

Оскільки у кінці лінії пряма хвиля напруги в момент часу  $t_1$

$$u_n(0,t_1) = B_1 \sqrt{2} \sin(\omega t_1 + \psi_1),$$

то означеної умови можна дотриматися тільки, якщо

$$\sin(\omega t_1 + \psi_1) = 1,$$

звідки і отримаємо значення моменту  $t_1$

$$t_1 := \frac{\frac{\pi}{2} - \arg(B1)}{\omega} \quad t_1 = 1.211 \times 10^{-7}$$

Для цього моменту часу графіки прямої, зворотної та сумарної хвиль миттєвих напруг і струмів уздовж лінії у функції відстані від її кінця наведено на рис. 12.6 і рис. 12.7.

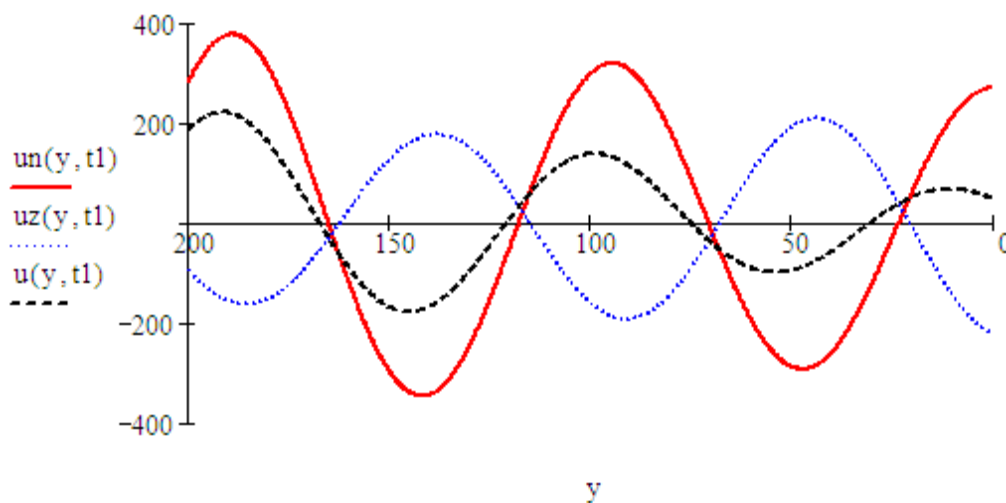


Рисунок 12.6

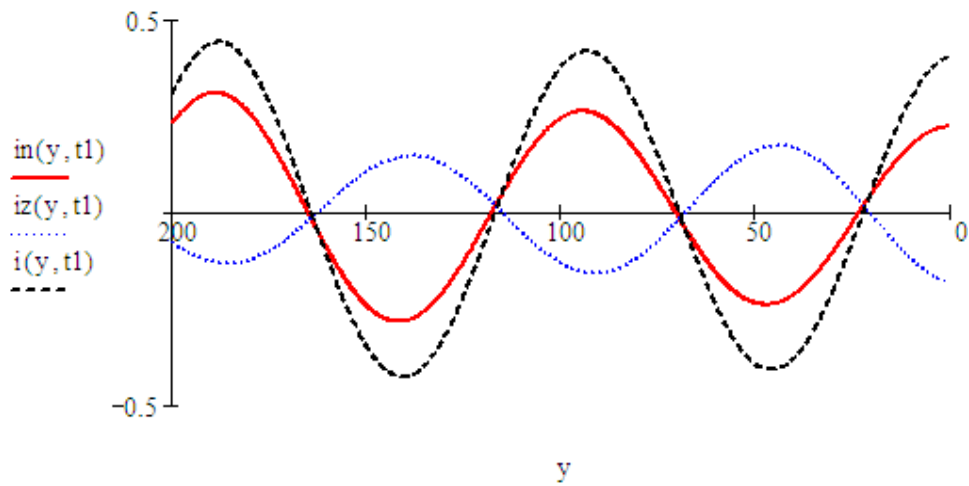


Рисунок 12.7

У межах аналізу усталеного синусоїдного режиму в довгій лінії побудуємо графіки розподілу діючих значень напруги  $U(y)$  і струму  $I(y)$  уздовж довгої лінії. Для цього задамо функції їхніх комплексів діючих значень.

$$U(y) := B1 \cdot e^{\gamma \cdot y} + B2 \cdot e^{-\gamma \cdot y} \quad I(y) := \frac{B1}{Z_c} \cdot e^{\gamma \cdot y} - \frac{B2}{Z_c} \cdot e^{-\gamma \cdot y}$$

Графіки  $U = |U(y)|$  та  $I = |I(y)|$  наведено на рис. 12.8 та на рис. 12.9.

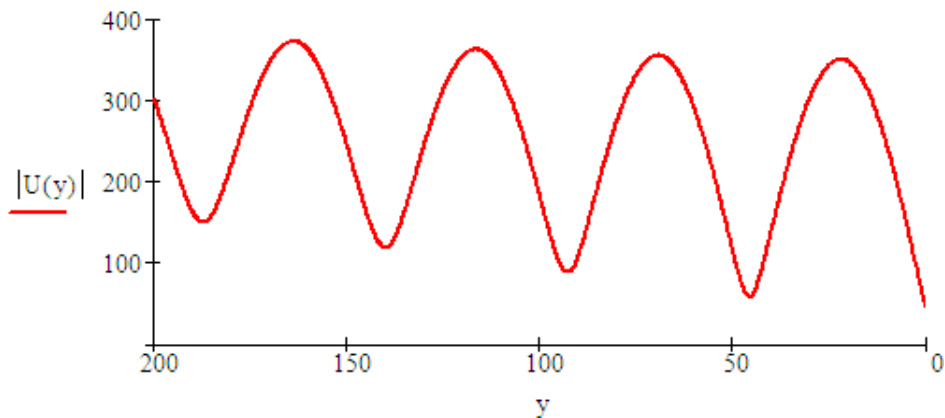


Рисунок 12.8

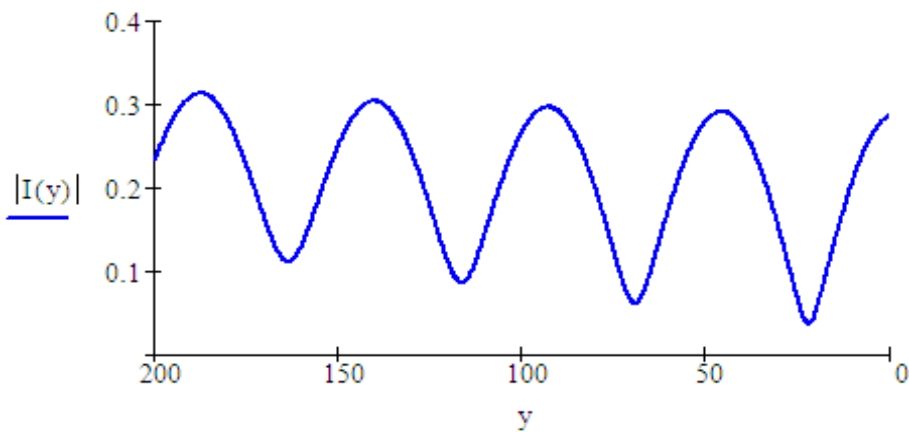


Рисунок 12.9



## 12.6 Лінія без спотворень

Під час передавання двопровідною лінією зі складною частотною структурою сигнал зазнає амплітудних та фазових спотворень. Це пояснюється тим, що гармонічні складові, які входять до спектра напруги чи струму, за різних частот матимуть різні коефіцієнти згасання та фазові швидкості.

Для того, щоб амплітудні спотворення були відсутніми, необхідно, щоб коефіцієнт згасання був величиною сталою і не залежав від частоти ( $\alpha = const$ ). Подібним чином можна позбутися і фазових спотворень за умови, якщо зробити незалежними від частоти фазові швидкості всіх спектральних гармонік напруги або струму ( $v = const$ ).

З огляду на це, визначимо ті умови, яким має відповідати однорідна лінія, щоб електричні сигнали в ній не зазнавали спотворень.

Коефіцієнт поширення  $\underline{\gamma}$  дорівнює:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)}$$

або після нескладних перетворень

$$\underline{\gamma} = \sqrt{r_0 g_0 \left(1 + j\omega \frac{L_0}{r_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{g_0}\right)}.$$

Якщо виконати умову

$$\frac{L_0}{r_0} = \frac{C_0}{g_0}, \quad (12.31)$$

то  $\underline{\gamma} = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}$ , тобто коефіцієнт згасання буде дорівнювати  $\alpha = \sqrt{r_0 g_0}$  і від частоти, як бачимо зі співвідношення, не залежатиме. Для фазового ж коефіцієнта  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$  навпаки: існуватиме лінійна залежність від  $\omega$ , через що фазова швидкість  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ , як випливає

із формули, позбудеться залежності від частоти.

Лінія, параметри якої задовольняють умову (12.31), називається *лінією без спотворень* (*line without distortions*).

Хвильовий опір  $\underline{Z}_C$  лінії без спотворень має суто активний характер і не залежить від частоти:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (12.32)$$

Як для повітряних, так і для кабельних ліній передачі сигналів відношення  $\frac{L_0}{r_0}$ , зазвичай, у декілька разів є меншим, ніж відношення  $\frac{C_0}{g_0}$ . І хоча, на перший погляд, змінити ситуацію і досягти рівності (12.31) загалом можна (для цього потрібно лише штучно змінити відповідним чином один чи декілька із первинних параметрів лінії), однак така зміна є або технічно складною, або, насамперед, породжує низку інших проблем.

Так, наприклад, для зменшення параметра  $r_0$  необхідно збільшувати діаметр проводів, що призводить до додаткових витрат матеріалів та істотного збільшення вартості лінії. Збільшення ж провідності  $g_0$  спричиняє зростання коефіцієнта згасання сигналів. Не можна також і зменшувати ємність  $C_0$ , бо це ускладнює конструкцію лінії і, знову ж таки, збільшує її вартість.

Найкращим способом наближення первинних параметрів до виконання умови (12.31) є штучне збільшення індуктивності лінії за допомогою увімкнення в лінію через деякі фіксовані інтервали індуктивних котушок. Хоча і тут з'являються певні ускладнення, оскільки збільшення індуктивності  $L_0$  призводить до зменшення фазової швидкості, а це неприпустимо для ліній інформації, що передають сигнали на великі відстані, тому часто в лініях дальнього зв'язку застосовують спеціальні корегувальні пристрої.

Потрібно зауважити, що співвідношення (12.31) є необхідною, але все ж таки недостатньою умовою для неспотвореного передавання сигналів.

Не менш важливим є створення узгодженого режиму роботи лінії одночасно у всьому частотному діапазоні сигналу.

Так, наприклад, навіть якщо умова (12.31) і виконуватиметься, але в цей час  $\underline{Z}_n \neq \underline{Z}_C$ , то сигнал безпосередньо передаватиметься лінією без спотворення, проте в її кінці спостерігатиметься явище відбиття цього сигналу від неузгодженого навантаження з утворенням зворотної хвилі.

Коефіцієнт відбиття  $\underline{N}$  буде різним для різних спектральних складових сигналу, оскільки його модуль і аргумент залежні від частоти. Це призведе до спотворення зворотної хвилі напруги і струму, що утворюють віддзеркалений сигнал у самій точці їхнього відбиття, тобто в кінці лінії.

Це, насамперед, спотворить і сам сигнал, оскільки напруга або струм, що існують, є результатом накладання їхніх прямих та зворотних хвиль як в будь-якій точці лінії, так і зокрема на її навантаженні.

Таким чином, підводячи підсумок, сформулюємо умови, які мають бути виконані для безпечного передавання інформаційних сигналів довгими лініями:

- а) коефіцієнт згасання двопровідної лінії не повинен залежати від частоти;
- б) усі спектральні гармоніки мають рухатися вздовж лінії з однаковими фазовими швидкостями;
- в) у лінії потрібно створити узгоджений режим роботи у всьому частотному діапазоні сигналу.

## 12.7 Лінія без втрат

У сучасних лініях зв'язку та комп'ютерних мережах, які характеризуються дуже високими частотами сигналів, існують співвідношення:

$$r_0 \ll \omega L_0, \quad g_0 \ll \omega C_0, \quad (12.33)$$

що дозволяє не враховувати їх під час проведення аналізу електричного кола.

Розглянемо та проаналізуємо лінію, для якої  $r_0 \approx 0$ ,  $g_0 \approx 0$ .

У цьому випадку коефіцієнт поширення набуде вигляду:

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L_0 C_0}, \quad (12.34)$$

і відповідно коефіцієнт згасання та фазовий коефіцієнт дорівнюватимуть:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}; \quad (12.35)$$

хвильовий опір:

$$\underline{Z}_C = r_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad (12.36)$$

а фазова швидкість:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (12.37)$$

Таким чином, у цій лінії будуть відсутніми згасання і втрати активної потужності. Таку лінію називають *лінією без втрат (line loss-free)*.

Окрім того, фазова швидкість та коефіцієнт згасання ( $\alpha = 0$ ) не залежать від частоти. Це означає, що в лінії також будуть відсутніми як фазові, так і амплітудні спотворення, тому лінія без втрат водночас є і лінією без спотворень. Хвильовий опір такої лінії є дійсним і не залежить від частоти.

Зважаючи на те, що гіперболічні функції від уявного аргументу перетворюються на тригонометричні функції:  $sh j\beta x = j \sin \beta x$ ,  $ch j\beta x = \cos \beta x$ ; рівняння для комплексів діючих значень напруги й струму в будь-якій точці лінії набувають вигляду:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j\underline{Z}_C \underline{I}_2 \sin \beta y, \quad (12.38)$$

$$\underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y. \quad (12.39)$$

Тоді вхідний опір лінії без втрат:

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H + j\underline{Z}_C \operatorname{tg} \beta l}{\underline{Z}_C + j\underline{Z}_H \operatorname{tg} \beta l}.$$

Режим у лінії без втрат залежить як від властивостей самої лінії, так і від навантаження на її кінці.

За узгодженого навантаження  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_C$  напруга і струм в лінії, згідно з (12.38), (12.39) та зважаючи на закон Ома  $\underline{Z}_C \underline{I}_2 = \underline{U}_2$ , дорівнюватимуть:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{U}_2 \sin \beta y = \underline{U}_2 e^{j\beta y}, \quad (12.40)$$

$$\underline{I} = j \underline{I}_2 \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos(\beta y) = \underline{I}_2 e^{j\beta y}. \quad (12.41)$$

Як бачимо зі співвідношень, в узгодженому режимі зворотні хвилі напруги і струму відсутні, коефіцієнт відбиття дорівнює нулю ( $\underline{N} = 0$ ), і вся потужність падаючої хвилі поглинається навантаженням.

Задамо початкову фазу напруги в кінці лінії такою, що дорівнює нулю ( $\underline{U}_2 = U_2$ ), тоді миттєві значення напруги і струму прямої хвилі:

$$u(y, t) = U_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta y), \quad (12.42)$$

$$i(y, t) = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta y), \quad (12.43)$$

тобто напруга і струм уздовж лінії в будь-який момент часу змінюються за синусоїдним законом без згасання (рис. 12.10).

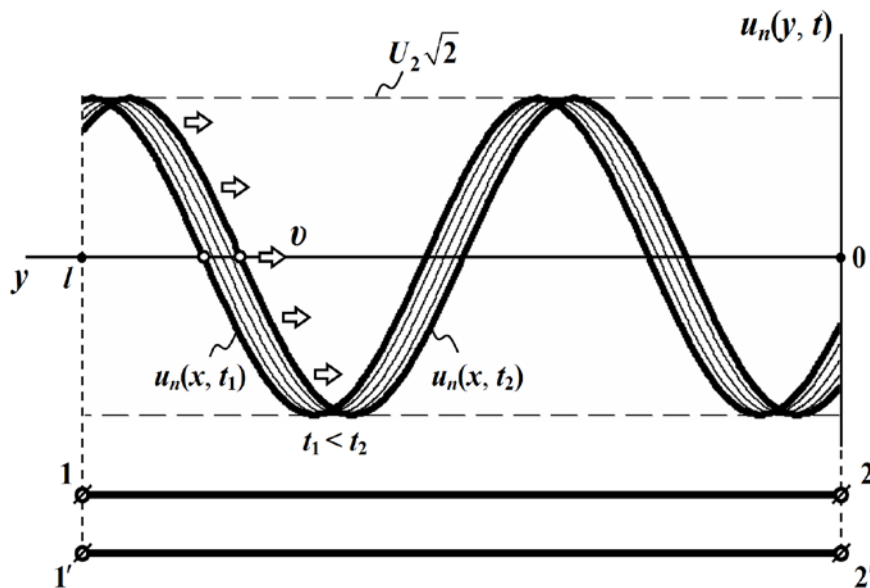


Рисунок 12.10

Оскільки амплітуди напруги і струму вздовж лінії не згасають і зворотна хвиля відсутня, то їхні діючі значення не залежатимуть від відстані  $y$  і будуть постійними вздовж усієї лінії для будь-якого моменту часу.

Вхідний опір узгодженої лінії без втрат не залежить від довжини лінії і дорівнює хвильовому опору  $\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C$ . Оскільки хвильовий опір лінії без втрат є суто активним, то лінія без втрат з узгодженим навантаженням є активним навантаженням для генератора.

Режим роботи, що з'являється в узгодженій лінії без втрат, часто називають режимом *бігучих хвиль* (*running wave*).

Переваги цього режиму такі:

а) за відсутності зворотної хвилі вся потужність поглинається навантаженням, інакше б частина потужності прямої хвилі поверталася б до джерела з відбитою хвилею;

б) генератор працює на сталий активний опір, який не залежить ні від довжини лінії, ні від робочої частоти;

в) оскільки для будь-якої реальної лінії властиві втрати, які в неузгодженому режимі виникають під час прямого та зворотного руху хвиль, то втрати в узгодженій лінії за суто активного хвильового опору будуть мінімальними.

### ***Лінія без втрат у режимах холостого ходу та короткого замикання***

1. За *холостого ходу* опір навантаження  $\underline{Z}_n = \infty$  і коефіцієнт відбиття  $\underline{N} = 1$ . Це означає, що амплітуди зворотної і прямої хвиль у режимі холостого ходу є однаковими.

Через те, що вихідний струм  $\underline{I}_2 = 0$ , рівняння (12.38), (12.39) за такої умови набувають вигляду:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y, \quad \underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta y.$$

Якщо задати початкову фазу напруги в кінці лінії такою, що дорівнює нулю, тобто  $\underline{U}_2 = U_2$ , то миттєві значення напруги і струму дорівнюватимуть:

$$u(y,t) = U_{2m} \cos \beta y \sin \omega t, \quad i(y,t) = \frac{U_{2m}}{Z_C} \sin \beta y \cos \omega t.$$

Виразимо коефіцієнт фази  $\beta$  через довжину хвилі  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ , тоді для миттєвих напруги і струму отримаємо:

$$u(y,t) = U_{2m} \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \omega t, \quad i(y,t) = \frac{U_{2m}}{Z_C} \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \omega t. \quad (12.44)$$

Дослідимо зміну напруги і струму в різних точках лінії залежно від часу. Так, у кінці лінії  $y = 0$ ,  $\sin \frac{2\pi y}{\lambda} = 0$  і струм у будь-який момент часу дорівнюватиме нулю.

Унаслідок періодичності теж ж саме можна сказати і про інші точки довгої лінії, для яких  $y = k \frac{\lambda}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , тобто миттєвий струм завжди дорівнюватиме нулю також і в точках кратних довжині півхвилі.

Напряга в кінці лінії змінюватиметься за синусоїдним законом з максимальною амплітудою  $U_{2m}$ , оскільки при  $y = 0$   $\cos \frac{2\pi y}{\lambda} = 1$ .

Для всіх інших точок, координати  $y$  яких належать відрізку  $0 < y < \frac{\lambda}{4}$ , значення функції косинуса  $\cos \frac{2\pi y}{\lambda} < 1$ , а функції синуса  $0 < \sin \frac{2\pi y}{\lambda} < 1$ . Тому амплітуди синусоїдних і напруги, і струму в цих точках будуть меншими від максимально можливих  $U_{2m}$  та  $I_{2m} = \frac{U_{2m}}{Z_C}$ .

Якщо ж  $y = \frac{\lambda}{4}$ , то миттєва вихідна напруга  $u\left(\frac{\lambda}{4}, t\right)$  у будь-який момент часу дорівнюватиме нулю, а струм за такої просторової координати змінюватиметься за синусоїдним законом з максимальною амплітудою  $I_{2m}$ .

На рис. 12.11 показано графіки зміни напруги і струму вздовж лінії за різних, але послідовних моментів часу  $t$ , зокрема:  $t_0, t_1$  та  $t_2$ , де  $t_0 < t_1 < t_2$ .

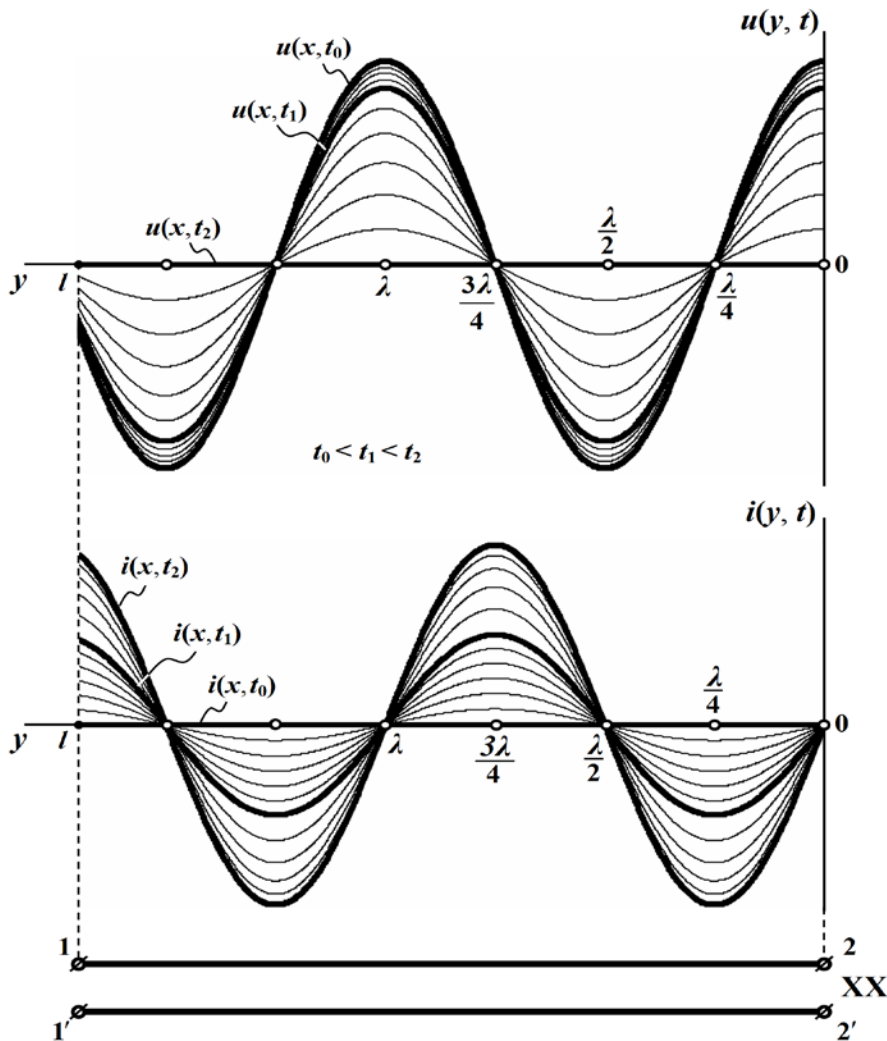


Рисунок 12.11

Так, у момент часу  $t_0$ , для якого, наприклад,  $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$ , функції синуса і косинуса набувають таких значень:  $\sin \omega t_0 = 1$ ,  $\cos \omega t_0 = 0$ . Тому в цей фіксований момент часу напруга вздовж лінії змінюватиметься за синусоїдним законом і з максимально можливою амплітудою  $U_{2m}$ , а струм у цей час в усіх точках лінії дорівнюватиме нулю.

Для іншого ж моменту часу  $t_1 > t_0$ , для якого  $\omega t_1 = \frac{2\pi}{3}$ , значення функцій синуса і косинуса становитимуть:  $\sin \omega t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \omega t_1 = -0,5$ . Тому напруга вздовж лінії також буде синусоїдною, однак величина амплітуди в усіх точках довгої лінії вже буде меншою, аніж  $U_{2m}$  у  $\left(\sin \omega t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  разів. Амплітуда синусоїдного струму в цей фіксований момент часу  $t_1$  становитиме половину  $\frac{U_{2m}}{2Z_C}$  від максимально можливої.

На ділянці лінії  $0 < y < \frac{\lambda}{2}$  цей струм набуватиме від'ємних значень.

Для наступного моменту часу  $t_2 > t_1$  за умови  $\omega t_2 = \pi$  напруга в усіх точках лінії дорівнюватиме нулю, а струм в цей момент часу змінюватиметься зі зміною координати  $y$  за синусоїдним законом і з максимально можливою амплітудою  $I_{2m} = \frac{U_{2m}}{Z_C}$ .

Аналогічно можна побудувати графіки зміни миттєвих напруги і струму вздовж лінії й для наступних фіксованих моментів часу  $t_3$  і  $t_4$ , де  $t_2 < t_3 < t_4$ .

Таким чином, згідно з аналізом, в усіх точках лінії миттєві напруга  $u(y, t)$  і струм  $i(y, t)$  змінюватимуться залежно від часу  $t$  за синусоїдним законом, але з різними амплітудами. Останні залежать від розташування точки спостереження – від значення  $y$ .

Точки лінії, де амплітуда (напруги або струму) є найбільшою, називають *пучностями (видугами)*, а де вона дорівнює нулю – *вузлами*.

Так, точки лінії з координатами  $y = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ , у яких амплітуда синусоїдної напруги набуває максимального значення зі своїх можливих, є пучностями напруги, а точки з координатами  $y = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$  – її вузли, оскільки амплітуда напруги в цих точках (як і сама напруга) дорівнюють нулю.

На рис. 12.12 показано графік розподілу діючих значень напруги і струму вздовж лінії. З цього рисунка видно, що вузли напруги збігаються з пучностями струму, і навпаки.

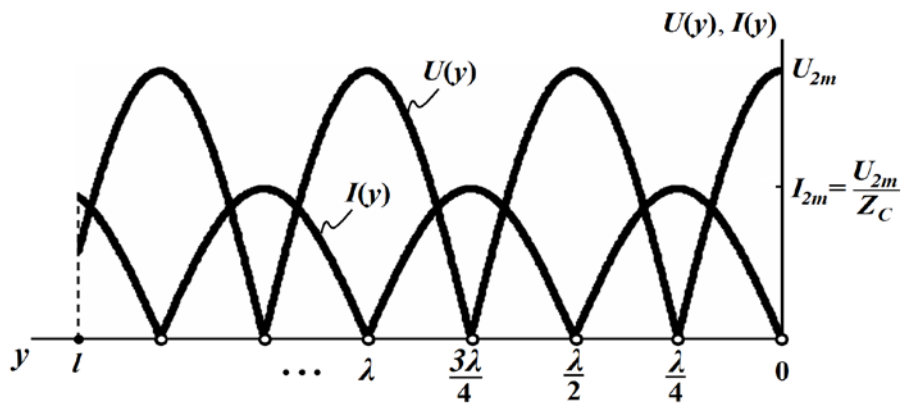


Рисунок 12.12

Такий режим роботи двопровідної лінії називають режимом *стоячих хвиль* (*standing wave*), тобто таких електромагнітних хвиль, які не здійснюють спрямованого руху вздовж лінії і відносно неї перебувають у стані спокою. У такому ж стані перебуває і електромагнітна енергія цих хвиль, тобто у випадку стоячої хвилі передавання енергії вздовж лінії не відбуватиметься. Це пояснюється тим, що, по-перше, споживач енергії відсутній, а, по-друге, ця двопровідна лінія є лінією без втрат. Оскільки коефіцієнт відбиття  $\underline{N} = 1$ , то стоячі хвилі можна уявляти як результат накладання однакових падаючої і відбитої хвиль, що рухаються в протилежних напрямках.

Незважаючи на відсутність спрямованого руху електромагнітної енергії, у самій лінії, а точніше – у просторі між її проводами, відбувається процес обміну енергією між електричним та магнітним полями. Це відбувається періодично на кожній ділянці лінії, що знаходиться між вузлами напруги і струму, тобто на відрізок довжиною  $\frac{\lambda}{4}$ .

Так, коли напруга досягає в усіх точках лінії своїх найбільших значень, наприклад, у момент часу  $t_0$ , а струм у цей час дорівнює нулю, то весь запас електромагнітної енергії буде зосереджено в електричному полі. Коли ж напруга спадає до нуля (наприклад, у момент часу  $t_2$ ), а струм уздовж лінії набуває максимальних, із своїх можливих, значень, то електромагнітна енергія буде зосереджена виключно в магнітному полі, створеному цим струмом.

2. У разі *короткого замикання* опір навантаження ( $\underline{Z}_H = 0$ ) і вихідна напруга дорівнюють нулю  $\underline{U}_2 = 0$ . Тоді рівняння (12.38), (12.39) набувають вигляду:

$$\underline{U} = j\underline{Z}_C \underline{I}_2 \sin \beta y, \quad \underline{I} = \underline{I}_2 \cos \beta y.$$

Задамо початкову фазу напруги в кінці лінії такою, що дорівнює нулю. Це означає, що  $\underline{I}_2 = I_2$ . За таких умов миттєві значення напруги і струму будуть:

$$u(y,t) = I_{2m} Z_C \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \omega t, \quad i(y,t) = I_{2m} \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \omega t. \quad (12.45)$$



На рис. 12.13 наведено графіки зміни цих напруги і струму вздовж лінії за різних послідовних моментів часу  $t$ , зокрема:  $t_0, t_1$  та  $t_2$ , де  $t_0 < t_1 < t_2$ .

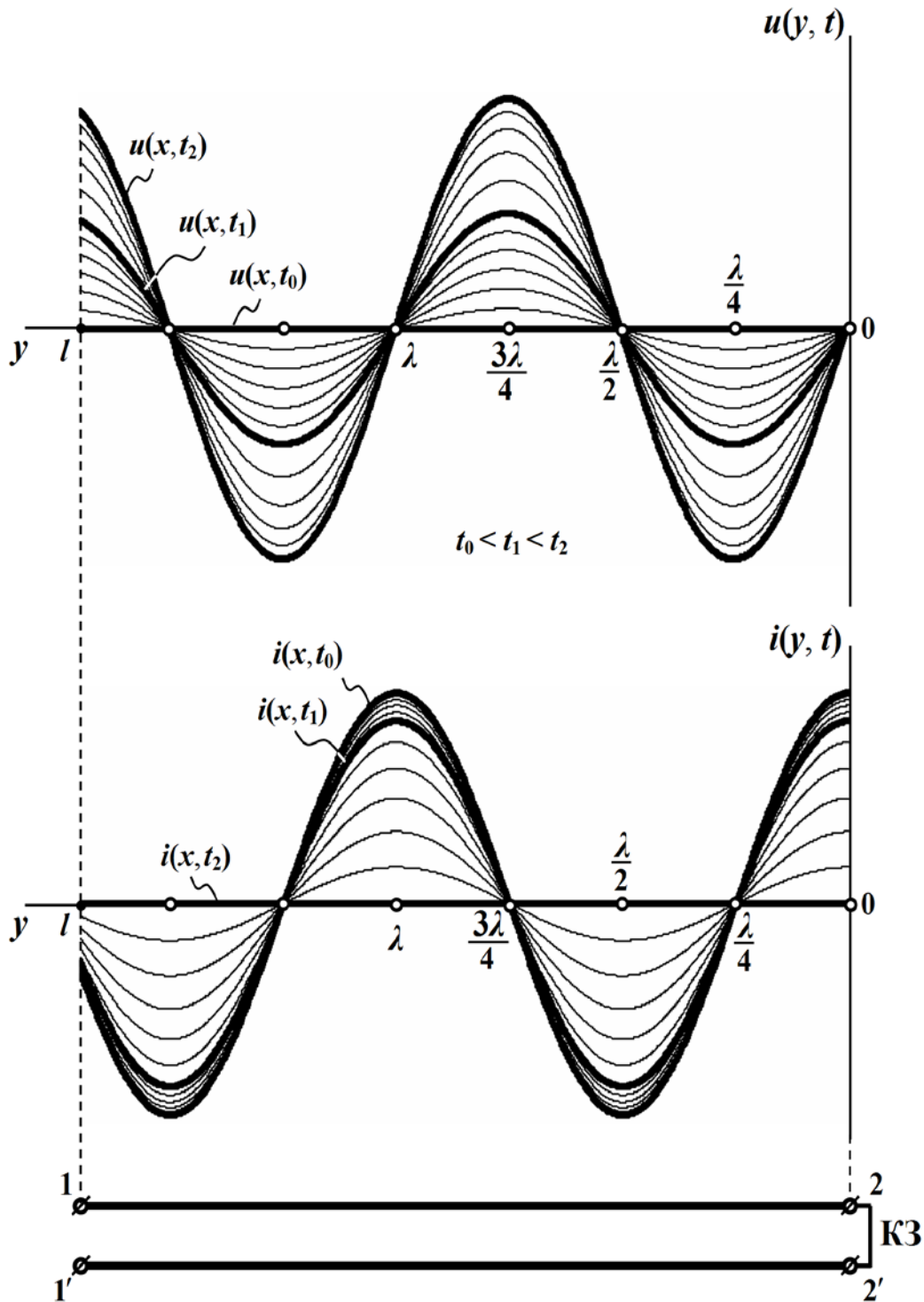


Рисунок 12.13

Якщо провести аналіз цих рівнянь подібно до того, як це було зроблено в попередньому випадку із режимом холостого ходу, то неважко дійти того ж висновку: під час короткого замикання в лінії створюється режим стоячих хвиль.

Однак при цьому в режимі короткого замикання в кінці лінії стояча хвиля напруги матиме не пучність, а вузол  $u(0,t)=0$ , а миттєвий струм  $i(0,t)$  навпаки: замість вузла утворить пучність.

Тобто, вузли і пучності напруги за короткого замикання відповідно збігатимуться з вузлами і пучностями струму при холостому ході, а вузли і пучності струму – з вузлами і пучностями напруги в цих режимах.

На рис. 12.14 наведено графіки розподілу діючих значень напруги і струму вздовж лінії, що побудовані в одній системі координат.

Коефіцієнт відбиття під час короткого замикання дорівнює  $\underline{N} = -1$ , тому амплітуди прямої і зворотної хвиль у цьому режимі є однаковими.

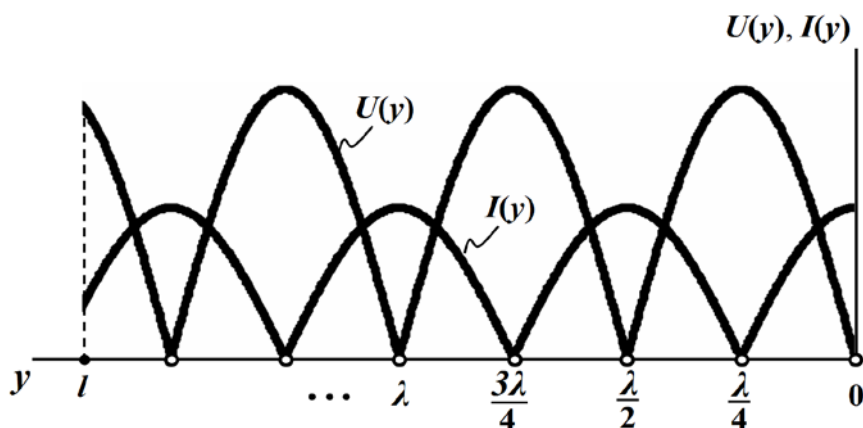


Рисунок 12.14

3. Визначимо вхідний опір лінії в довільній її точці на відстані  $y$  від кінця лінії.

Для режиму холостого ходу вхідний опір у комплексній формі має вигляд:

$$\underline{Z}_{xx}(y) = \frac{U}{I} = -jZ_C \operatorname{ctg} \beta y = -jZ_C \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} y. \quad (12.46)$$

Для лінії без втрат її хвильовий опір  $\underline{Z}_C$  є суто активним, тому вхідний опір цієї лінії незалежно від її довжини буде завжди реактивним  $\underline{Z}_{xx}(y) = jX_{xx}(y)$  і дорівнюватиме  $X_{xx}(y) = -Z_C \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} y$ .

На рис. 12.15 показано графік зміни реактивного опору  $X_{xx}$  відрізка лінії без втрат, що перебуває в режимі холостого ходу залежно від його довжини. Як видно з рис. 12.15, якщо довжина лінії  $0 < l < \frac{\lambda}{4}$ , то вхідний опір  $\underline{Z}_{xx}$  розімкненої на кінці лінії без втрат має ємнісний характер ( $X_{xx} < 0$ ) і зменшується зі збільшенням довжини лінії та наближенням її до  $\frac{\lambda}{4}$ . При  $l = \frac{\lambda}{4}$  вхідний опір лінії дорівнює нулю. Подальше збільшення

довжини лінії  $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$  призведе до зміни характеру реактивного вхідного опору з ємнісного на індуктивний ( $X_{xx} > 0$ ) та до його зростання. Коли ж довжина лінії дорівнюватиме половині довжини хвилі ( $l = \frac{\lambda}{2}$ ), вхідний опір лінії стане нескінченно великим.

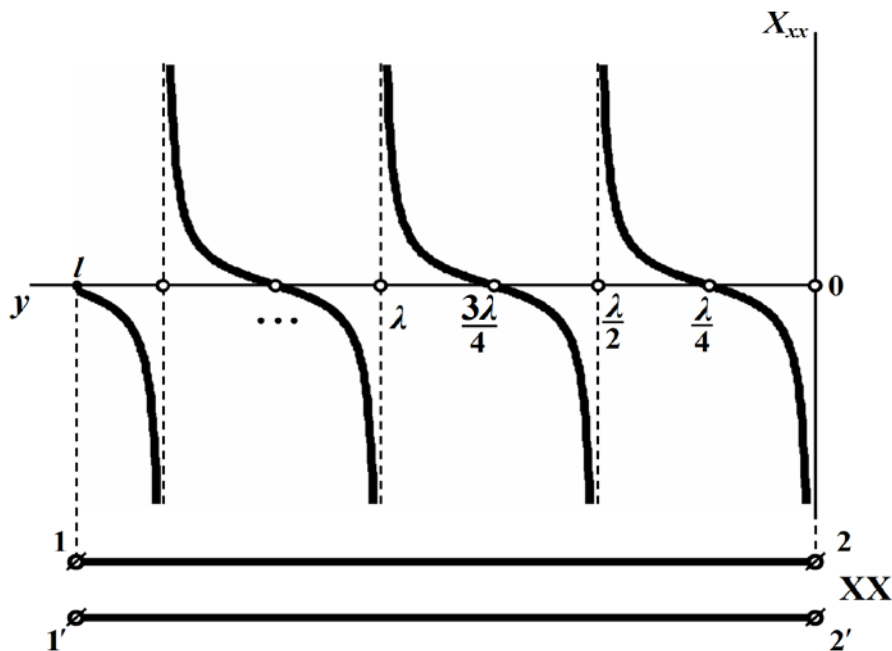


Рисунок 12.15

4. Для короткозамкненої лінії без втрат довільної довжини  $y$  її вхідний опір дорівнює:

$$\underline{Z}_{кз}(y) = \frac{U}{I} = jZ_C \operatorname{tg} \beta y = jZ_C \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} y, \quad (12.47)$$

і також має суто реактивний характер.

На рис. 12.16 показано графік зміни реактивного опору  $X_{кз}$  деякого короткозамкненого відрізка лінії без втрат залежно від його довжини:

$$X_{кз}(y) = Z_C \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} y.$$

З рис. 12.16 видно, якщо довжина лінії знаходиться у межах  $0 < l < \frac{\lambda}{4}$ , то її вхідний реактивний опір має індуктивний характер ( $X_{кз} > 0$ ) і необмежено зростає зі збільшенням довжини, коли ж  $l = \frac{\lambda}{4}$ , вхідний опір лінії стає нескінченно великим. За умови  $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$  вхідний опір має ємнісний характер ( $X_{кз} < 0$ ).

Таким чином, вхідний опір короткозамкненої на кінці лінії без втрат, як і розімкненої, є суто реактивними і залежно від довжини лінії може мати або ємнісний, або індуктивний характер та набувати будь-яких числових значень у проміжку від нуля до нескінченності.

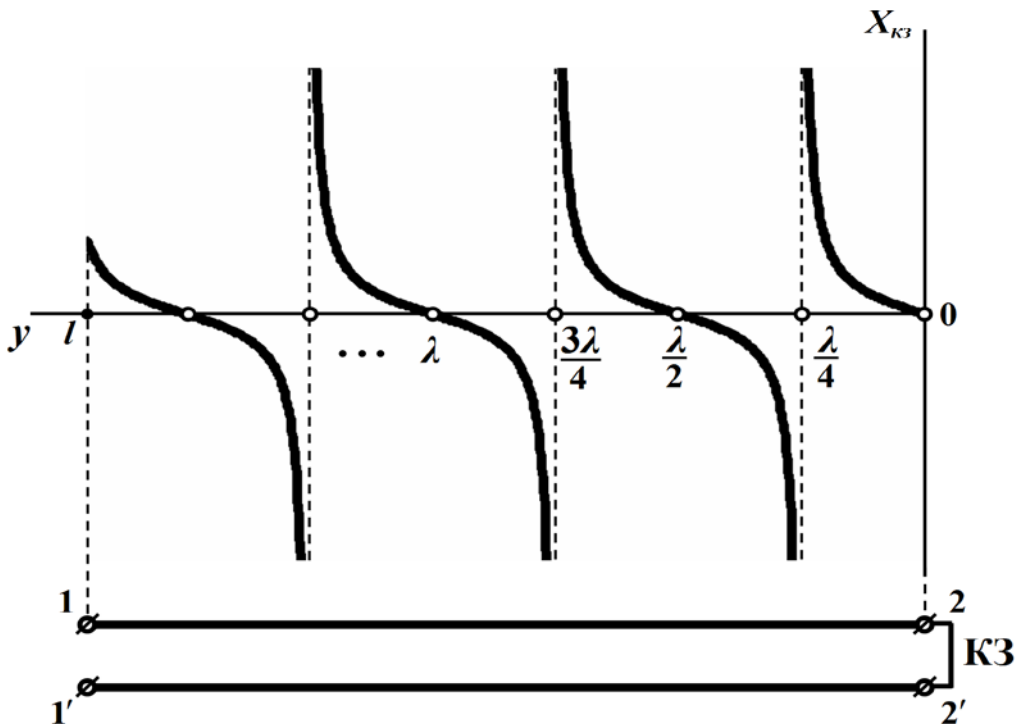


Рисунок 12.16

**Реактивно навантажена лінія без втрат**

Для побудови графіків розподілу діючих значень напруги, струму або вхідного опору вздовж лінії доцільно реактивне навантаження замінити відрізком короткозамкненої або розімкненої лінії без втрат, вхідний опір якої, як було показано вище, має також суто реактивний характер і залежить від довжини цього відрізка. Така заміна дозволяє на підставі розглянутих раніше виразів і графіків для розімкненої чи короткозамкненої лінії без втрат одразу побудувати необхідні криві розподілу для основної лінії.

Розглянемо це спочатку на прикладі для ємнісного навантаження, а потім і для індуктивного.

1. Припустимо, що лінія без втрат навантажена ємнісним опором  $\underline{Z}_2$  (рис. 12.17, а):

$$\underline{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C_2} = -jX_2.$$

Замінімо зосереджену ємність відрізком *розімкненої* на кінці лінії без втрат, що має такий же ємнісний вхідний опір, як і сама ємність (рис. 12.17, б).

Для цього необхідно, щоб довжина відрізка  $l'$ , як впливає з попереднього підрозділу (див. рис. 12.15), знаходилася в межах  $0 < l' < \frac{\lambda}{4}$ , оскільки саме за такої довжини вхідний опір розімкненої лінії матиме ємнісний характер і його величина змінюватиметься в межах від нуля до нескінченності.

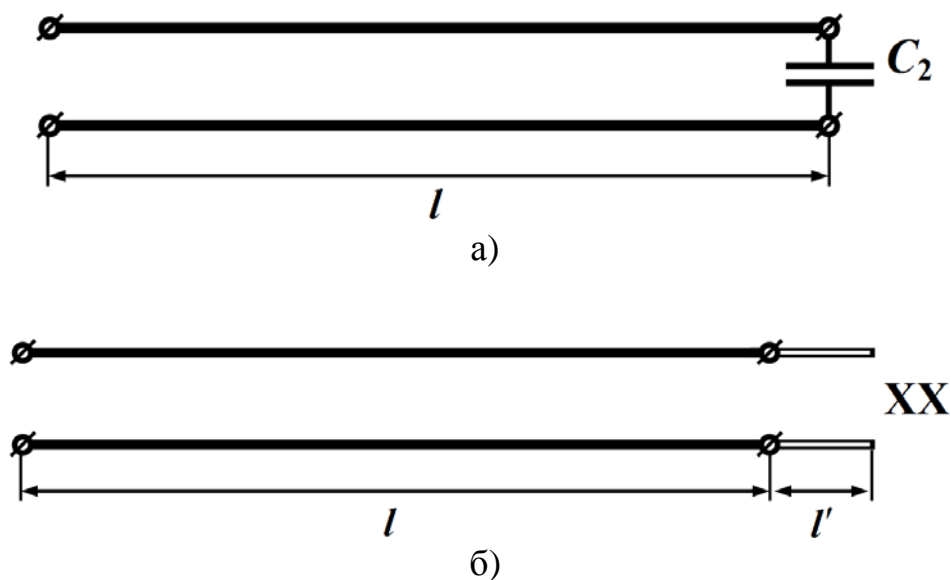


Рисунок 12.17

Як видно з рис. 12.15, завжди можна підібрати необхідну довжину відрізка розімкненої лінії (у нашому випадку – це  $l'$ ), вхідний опір якого дорівнюватиме  $Z_2$ .

Для визначення  $l'$  складемо рівняння  $-j\frac{1}{\omega C_2} = -jZ_C \operatorname{ctg}(\beta l')$ , звідки:

$$l' = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcctg} \left( \frac{1}{Z_C \omega C_2} \right), \quad (12.48)$$

де  $Z_C$  – хвильовий опір еквівалентного відрізка лінії без втрат, яким і заміщуємо ємність  $C_2$ .

Наразі за допомогою розглянутих у попередньому підрозділі виразів і графіків для розімкненої лінії без втрат побудуємо криві розподілу діючих значень напруги  $U(y)$ , струму  $I(y)$  і вхідного опору  $X_{\text{ex}}(y)$  основної лінії (рис. 12.18). Ці побудови водночас демонструють і методику розрахунку таких ліній. Навантажена на ємнісний опір лінія в кінці не має ані пучностей, ані вузлів, що знаходить своє підтвердження у рисунках.

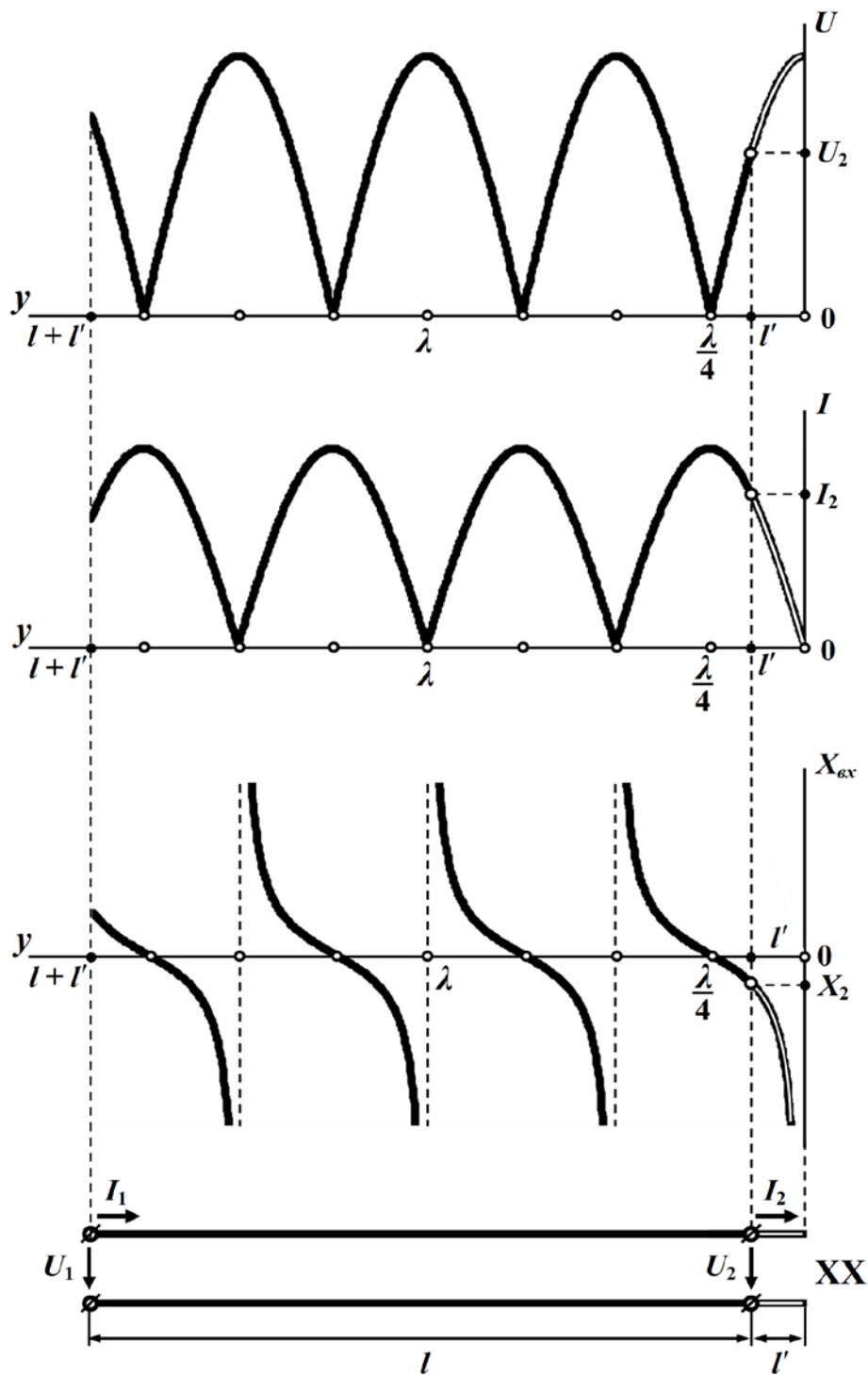


Рисунок 12.18

Зосереджену ємність  $C_2$  можна також еквівалентно замінити і *короткозамкненим* відрізком лінії без втрат, але за цієї умови (див. рис. 12.16) довжина цього відрізка має знаходитися в межах  $\frac{\lambda}{4} < l' < \frac{\lambda}{2}$ .

2. У випадку, якщо лінія буде навантажена на індуктивність  $L_2$ , то останню можна еквівалентно замінити відрізком *короткозамкненої* лінії з довжиною  $l'$ , яку визначаємо з умови, тобто  $\omega L_2 = Z_C \operatorname{tg}(\beta l')$ .

Тоді

$$l' = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega L_2}{Z_C} \right). \quad (12.49)$$

Як видно з рис. 12.16, для забезпечення індуктивного опору довжина короткозамкненого відрізка лінії має знаходитися в межах  $0 < l' < \frac{\lambda}{4}$ .

Зосереджену індуктивність  $L_2$  можна замінити і відрізком розімкненої на кінці лінії без втрат, однак за цієї умови, як доводить рис. 12.15, довжина відрізка має перебувати в межах  $\frac{\lambda}{4} < l' < \frac{\lambda}{2}$ .

Лінія, що навантажена на індуктивний опір, хоча і перебуває в режимі стоячих хвиль, однак, ані пучностей, ані вузлів у кінці лінії не має.

### ***Деякі приклади використання відрізків довгих ліній***

*Відрізки довгих ліній як елементи резонансного кола.*

Вище було показано, що вхідний опір розімкнених чи короткозамкнених ліній без втрат є суто реактивним – індуктивним або ємнісним залежно від довжини. Це дозволяє застосовувати відрізки довгих ліній там, де використання зосереджених котушок індуктивності або конденсаторів унаслідок певних конструкційних особливостей, наприклад, у діапазоні занадто високих частот, є не завжди зручним або ж неможливим узагалі.

У цьому разі довжину відрізка лінії, що застосовується як індуктивність або ємність, вибирають мінімальною: зазвичай такою, що не перевищує четвертої частини довжини хвилі  $0 < l' < \frac{\lambda}{4}$ . Так, відрізок, який імітує індуктивність, має бути короткозамкненим і відповідної довжини, а ємність – відрізком, розімкненим на кінці.

Розглянемо приклад.

Якої довжини потрібно взяти короткозамкнену лінію без втрат з первинними параметрами  $L_0 = 1,36$  мкГн/м,  $C_0 = 8,17$  пФ/м, щоб послідовний коливальний контур з ємністю  $C = 4,5$  пФ на частоті  $f = 120$  МГц працював би в резонансному режимі?

Відомо, що для послідовного контуру умовою резонансу є співвідношення  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ , тому індуктивність має дорівнювати  $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$ .

Унаслідок умови еквівалентності вхідний опір короткозамкненої лінії без втрат  $\underline{Z}_{\text{вх}} = jZ_C \operatorname{tg}(\beta l')$  має дорівнювати опору індуктивності, тобто

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = j\omega_0 L = \frac{j}{\omega_0 C}.$$

Хвильовий опір лінії:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Тоді  $tg(\beta l') = \frac{Z_{ex}}{jZ_C} = \frac{\sqrt{C_0}}{\omega_0 C \sqrt{L_0}}$ , звідки  $\beta l' = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{C_0}}{\omega_0 C \sqrt{L_0}}\right)$ , а оскільки фазовий коефіцієнт  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ , то довжина короткозамкненої лінії

$$l' = \frac{\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{C_0}}{\omega_0 C \sqrt{L_0}}\right)}{\omega_0 \sqrt{L_0 C_0}}.$$

Розрахунок виконаємо в середовищі MathCAD.

$$f_0 := 120 \cdot 10^6 \quad L_0 := 1.36 \cdot 10^{-6} \quad C_0 := 8.17 \cdot 10^{-12} \quad C := 4.5 \cdot 10^{-12}$$

$$\omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f_0 \quad l := \frac{\text{atan}\left(\frac{\sqrt{C_0}}{\omega_0 \cdot C \cdot \sqrt{L_0}}\right)}{\omega_0 \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}} \quad l = 0.249$$

Таким чином, довжина відрізка лінії 0,249 м.

*Кріплення ліній передач, що працюють за надвисоких робочих частот.*

Вхідний опір відрізка короткозамкненої лінії без втрат довжиною у чверть хвилі є нескінченно великим. Якщо навіть і врахувати втрати в такій лінії, то її вхідний опір хоча вже і буде скінченним, але, як і раніше, матиме дуже велике значення.

Цю властивість використовують для закріплення проводів ліній передач у діапазоні надвисоких частот. Якщо лінії передач у цьому діапазоні підвішувати на звичайні ізолятори, то це призведе до великих втрат і створить додаткове витікання струму. Тому часто, замість звичайних ізоляторів, для закріплення проводів ліній передач використовують так звані *металеві ізолятори*, що є чвертьхвильовими відрізками короткозамкнених ліній, на які опираються проводи лінії.

Через свій великий вхідний опір такі відрізки практично не впливають на режим передавання енергії основною лінією.

### Контрольні запитання

1. Які параметри однорідної лінії називають первинними?
2. Які параметри однорідної лінії називають вторинними?
3. Що називають хвильовим опором лінії?
4. Що називають фазовою швидкістю хвилі?
5. Що називають коефіцієнтом поширення?
6. Що називають коефіцієнтом відбиття?
7. Яка умова існування лінії без спотворень?
8. Що називають лінією без втрат?
9. Як визначається фазова швидкість для лінії без спотворень?
10. Як визначається хвильовий опір для лінії без втрат?
11. У яких випадках в однорідній лінії виникають стоячі хвилі?
12. У якому випадку короткозамкнену лінію без втрат можна використати як ізолятор?
13. Що таке пучності та вузли стоячої хвилі?



## ЛІТЕРАТУРА

### *Основна*

1. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / [Карпов Ю. О., Кацев С. Ш., Кухарчук В. В. та ін.] ; під ред. проф. Ю. О. Карпова. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

2. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підруч. / [Карпов Ю. О., Кацев С. Ш., Кухарчук В. В. та ін.] ; під ред. проф. Ю. О. Карпова. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 527 с.

### *Рекомендована*

1. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання лінійних електричних кіл : навчальний посібник / Карпов Ю. О., Кацев С. Ш., Кухарчук В. В. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 213 с.

2. Кацев С. Ш. Комп'ютерне моделювання електричних кіл : лабораторний практикум / Кацев С. Ш., Мад'яров В. Г., Говор І. К. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 89 с.

## СЛОВНИК ІНШОМОВНИХ ТЕРМІНІВ

активний опір	active resistance
активна потужність	active power
амплітудне значення	peak value
амплітудно-частотний спектр	peak-frequency spectrum
амплітудно-частотна характеристика	peak-frequency characteristic
бігуча хвиля	running wave
векторна діаграма	vector diagramme
відбита хвиля	reflected wave
вільна складова	free component
вітка	branch
власний опір контуру	own resistance of a contour
власна провідність вузла	own conductivity of knot
вольт-амперна характеристика	voltamperes characteristic
вузлові струми	knots currents
вузол	knot
гармоніка	harmonic
джерело напруги	voltage source
джерело струму	current source
діюче значення змінного струму	operating value of an alternating current
диференціальний опір	differential resistance
довга лінія	long line
довжина хвилі	length of a wave

другий закон Кірхгофа	second law of Kirhgof
електричне коло	electric circuit
електричний опір	electric resistance
ємність	capacity
ємнісний опір	capacitance
закони комутації	laws of switching
закон Ома	the Ohm law
залежні початкові умови	dependent entry conditions
зворотне перетворення Лапласа	return transformation of Laplace
зворотне перетворення Фур'є	return transformation of Fure
індуктивність	inductance
індуктивний опір	inductive resistance
інтеграл Дюамеля	integral of Djuamel
коефіцієнт амплітуди	amplitude factor
коефіцієнт згасання	attenuation factor
коефіцієнт нелінійних спотворень	factor of nonlinear distor- tions
коефіцієнт поширення	distribution factor
коефіцієнт спотворення коло із зосередженими параметрами	factor of distortion circuit with the concentrat- ed parametres
коло із розподіленими параметрами	circuit with the distributed parametres
комутація	switching
контур	contour
контурна е.р.с.	contours electromotive power

кут зсуву фаз	angle of shift of phases
кутова (циклічна) частота	cyclic frequency
лінійний елемент	linear element
лінійне коло	linear circuit
лінія без втрат	line lost-free
лінія без спотворень	line without distortions
магнітна індукція	magnetic induction
магнітне коло	magnetic circuit
магнітний потік	magnetic stream
метод вузлових потенціалів	method of knots potentials
метод вхідного опору	method of entrance resistance
метод контурних струмів	method of contours cur- rents
миттєве значення струму	instant value of a current
напруженість магнітного поля	intensity of a magnetic field
незалежні початкові умови	independent entry condi- tions
нелінійний елемент	nonlinear element
нелінійне коло	nonlinear circuit
хвиля, що падає	falling wave
паралельне з'єднання опорів	parallel connection resistance
передатна характеристика	transfer characteristics
перехідний процес	transient
перехідна характеристика кола	transitive characteristic of circuit
період	period

періодичний змінний струм	periodic alternating current
перший закон Кірхгофа	first law of Kirhgof
петля гістерезису	hysteresis loop
повний комплексний опір	full complex resistance
повна комплексна потужність	full complex power
повна комплексна провідність	full complex conductivity
повний опір	full resistance
повна потужність	full power
послідовне з'єднання опорів	consecutive connection resistance
потужність спотворення	power of distortion
початкова фаза	initial phase
примусова складова	forced component
провідність	conductivity
пряме перетворення Фур'є	direct transformation of Fure
реактивний опір	reactive resistance
реактивна потужність	reactive power
резистор	resistor
резонанс напруг	resonance of voltage
резонанс струмів	resonance of current
синусоїдний струм	sinusoidal current
спектральна густина вхідного сигналу	spectral density of entrance signal
спільний опір контурів	joint resistance of contours
спільна провідність вузлів	joint conductivity of knots
стала передачі	transfer constant

стала часу перехідного процесу	constant of time of transient
статичний опір	static resistance
стояча хвиля	standing wave
телеграфні рівняння	cable equations
фаза коливань	phase of fluctuations
фазовий коефіцієнт	phase factor
фазова швидкість	phase speed
фазочастотний спектр	phase frequency spectrum
фазочастотна характеристика	phase frequency characteristic
функція Хевісайда	function of Heaviside
характеристичний опір	characteristic resistance
характеристична провідність	characteristic conductivity
хвильова діаграма	wave diagramme
хвильовий опір	wave resistance
частота	frequency
чотириполосник	two-port network

*Навчальне видання*

**Кацев Самоїл Шулімович**

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ**

**Конспект лекцій**

Редактор О. Ткачук

Оригінал-макет підготував С. Кацев

Підписано до друку 20.02.2017 р.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 8,7.  
Наклад 50 пр. Зам. № 2017-030.

Вінницький національний технічний університет,  
навчально-методичний відділ ВНТУ,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, к. 2201.  
Тел. (0432) 59-87-36.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-87-38.  
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.