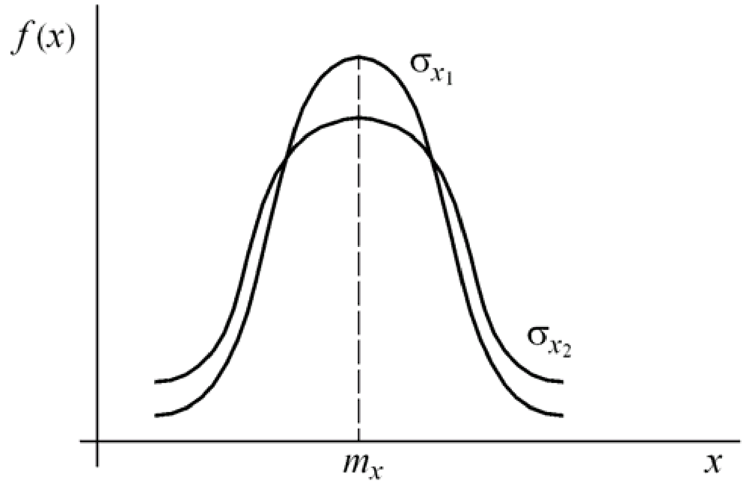
В. І. Клочко, А. А. Коломієць

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
Частина 2

Індивідуальна та самостійна робота студентів



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. І. Клочко, А. А. Коломієць

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Частина 2

Індивідуальна та самостійна робота студентів

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2018

УДК 519.2 (075)
К50

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 14 від 23.06.2016 р.)

Рецензенти:
Ф. М. Сохацький, доктор фізико-математичних наук, професор
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор

Клочко, В. І.

К50 Теорія ймовірностей. Частина 2. Індивідуальна та самостійна робота студентів : навчальний посібник / В. І. Клочко, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 72 с.

У посібнику розглянуто основні поняття й теореми теорії ймовірностей та статистики. Розглянуто достатню кількість прикладів, зокрема прикладного характеру. У нестандартній формі підібрано приклади для самостійної роботи студентів.

Посібник рекомендовано студентам та викладачам вищих навчальних закладів технічних спеціальностей.

УДК 519.2 (075)

© ВНТУ, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник призначено для студентів технічних університетів, що вивчають теорію ймовірностей з елементами математичної статистики.

На початку кожного розділу наведено короткі теоретичні відомості, формули, необхідні для самостійного розв'язування задач. Але це жодним чином не звільняє студентів від використання підручників, навчальних посібників або конспектів лекцій. Вивчення теорії ймовірностей обов'язково має супроводжуватись розв'язуванням задач, що є необхідним матеріалом для опанування теорією ймовірностей. За таких умов можна розвинути теоретико-імовірнісну інтуїцію фахівця, набути умінь будувати математичні моделі реальних явищ та процесів.

Розділи з математичної статистики ілюструють застосування ймовірнісних законів до різних статистичних моделей. Розглядаються найбільш поширені методи математичної статистики, розв'язуються задачі, що виникають у практичній діяльності фахівця.

У першому розділі доступно і на достатньому науковому рівні означено поняття стохастичного експерименту, простору елементарних подій, випадкової події, простору подій, статистичної ймовірності (відносної частоти) та ймовірності події, подано сучасний погляд на поняття ймовірність випадкової події.

У другому розділі розглядаються випадкові величини. Після основного теоретичного матеріалу, наводяться розв'язання типових прикладів та задач, далі формулюються завдання для самостійної роботи та поглиблення знань. Така побудова навчального матеріалу робить його доступним для самостійного вивчення.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. АЛГЕБРА ПОДІЙ ТА ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Простір елементарних подій. Випадкові події

Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає закономірності в масових випадкових явищах.

Одним із вихідних понять теорії ймовірностей є поняття *стохастичного експерименту.* Так називають експерименти (досліди, спостереження, процеси), результати яких заздалегідь не можна передбачити. Це залежить від багатьох обставин, яких ми або не знаємо, або не можемо врахувати.

Наприклад, при підкиданні грального кубика ми не можемо заздалегідь знати, яка із його граней виявиться зверху, бо це залежить від багатьох невідомих нам обставин (траєкторії руху руки при підкиданні, особливостей поверхні, на яку падає гральний кубик, положення кубика в момент кидання та ін.).

Стохастичний експеримент проводять за умови здійснення сукупності певних умов. Далі, замість того щоб говорити “сукупність умов здійснена”, будемо говорити коротко “*проведено випробування”*.

Результат стохастичного експерименту називають елементарною випадковою подією. Отже, *будь-який факт,* який в результаті стохастичного експерименту може відбутися або не відбутися, називають *випадковою подією.* Наведемо приклади випадкових подій: випадання п’ятірки при підкиданні грального кубика; відмова технічного пристрою за час T його роботи; спотворення повідомлення при передаванні його каналом зв’язку.

Таким чином, *випадкову подію будемо розглядати як результат випробування.*

Означення. *Множину певних можливих випадкових подій* деякого стохастичного експерименту називають *простором елементарних подій* і позначають великою грецькою буквою Ω (омега).

Будь-який елемент ω цієї множини є випадковою подією. В реальному експерименті *елементарним подіям* часто відповідають *взаємовиключні результати.* Для описання кожної конкретної задачі множина Ω вибирається відповідним чином. Наведемо приклади.

1. Експеримент – підкидання монети один раз. Результатами експерименту можуть бути: випадання монети гербом або цифрою догори. Отже, маємо такі елементарні події: ω_1 – випадання герба Г, ω_2 – випадання цифри Ц.

Зауважимо, що в цьому експерименті можливі й інші результати: монета зникла з поля зору, стала на ребро та ін. При математичному описанні цього експерименту такі результати є несуттєвими і їх не враховують.

Отже, $\Omega = \{\omega_1 \omega_2\}$ або Ω = {Г, Ц}. Кількість можливих результатів $n = 2$.

2. Експеримент − підкидання грального кубика один раз. Можливі результати: випадання на верхній грані кубика k очок, де k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Якщо такий результат позначити через ω_k, простір елементарних подій цього експерименту буде таким: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, а кількість можливих результатів n = 6.

3. Експеримент − підкидання монети тричі (або кидання трьох монет один раз). Простір елементарних подій буде таким:

Ω = {ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ}, що складається з восьми елементів (n = 8).

4. Експеримент − виконується постріл у плоску мішень. Якщо ввести прямокутну систему координат, то кожному результату ω {попадання в певну точку координатної площини} відповідає пара чисел x і y, що є координатами точки, тобто $\omega = (x,\ y)$. Отже, Ω − незчисленна множина.

5. Експеримент − кидання монети до появи герба. Можливі результати: поява герба; поява спочатку цифри, а потім герба; поява спочатку цифри два рази підряд, а потім герба і т. д. Отже, простір елементарних подій є зчисленною множиною: Ω = {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ,…}.

У реальному стохастичному експерименті, крім взаємовиключних результатів, можна вказати і багато інших. Усі вони називаються випадковими подіями (і перші, і останні).

Наприклад, у попередньому прикладі 3 (підкидання монети тричі) можна розглядати такі випадкові події: випадання двох гербів, випадання не менше двох цифр, тобто A = {ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ}, B= {ГЦЦ,ЦГЦ, ЦЦГ,ЦЦЦ}; у прикладі 2 (кидання кубика) можна розглядати випадкову подію C − випадання очок, кратних трьом, тобто $\{\omega_5,\ \omega_6\}$.

Як бачимо, ці випадкові події є частинами відповідного простору елементарних подій або, як кажуть в термінології множин, є підмножинами множини Ω.

Означення. *Випадковою подією,* що пов'язана з цим стохастичним експериментом, називають будь-яку *підмножину A* елементів *множини Ω − простору елементарних подій* такого експерименту.

Позначають випадкові події великими буквами латинського алфавіту, переважно першими: A, B, C, D, … або $A_1,\ A_2, ...,\ A_n$.

Умовно будемо говорити, що в результаті проведення експерименту настане випадкова подія A, якщо з'являться *деякі елементи* ω*, кожен з яких належить множині A*.

1.2 Алгебра випадкових подій. Види випадкових подій

Над випадковими подіями можна здійснювати такі ж операції як і над множинами. Нехай A і B − випадкові події, що можуть настати в результаті проведення стохастичного експерименту.

1. Означення. Сумою випадкових подій A і B називають випадкову подію, *що позначають символом $A \cup B$ або $A + B$, яка складається з* усіх елементарних подій, *що* належать хоча б одній із цих подій.

Отже, випадкова подія $A + B$ настає тоді і тільки тоді, коли настає хоча б одна із подій А або B, або обидві.

2. Означення. Добутком випадкових подій A і B називають випадкову подію, що позначають символом $A \cap B$ або AB, яка складається з усіх елементарних подій, що належать події A і події В.

Отже, випадкова подія AB настає тоді і тільки тоді, коли в результаті проведення експерименту настає і подія A, і подія B, тобто настають обидві події.

Наприклад, якщо випадкова подія A означає влучення в мішень при одному пострілі першим стрільцем, а B – влучення в цю мішень другим стрільцем, то випадкова подія AB означає, що обидва стрільці влучать в мішень, а випадкова подія $A + B$ означає, що в мішень влучить або перший стрілець, або другий стрілець, або обидва стрільці, тобто в мішені буде одна або дві пробоїни.

Приведемо ще один приклад. Розглянемо ділянку електричного кола, що складається із двох паралельно з'єднаних елементів. Нехай подія A – вихід із ладу першого елемента, B – вихід із ладу другого елемента. Тоді випадкова подія AB полягає в тому, що ділянка кола не працюватиме, бо обидва елементи вийдуть з ладу.

Цим діям над випадковими подіями можна дати геометричну інтерпретацію. Якщо простір елементарних подій Ω зобразити на площині прямокутником, а випадкову подію A – деякою областю, що лежить в цьому прямокутнику (так звані круги Ейлера), то випадкові події $A + B$ і AB будуть зображені відповідно заштрихованими областями (рис. 1.1 і рис. 1.2).

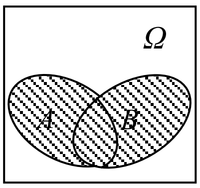


Рисунок 1.1

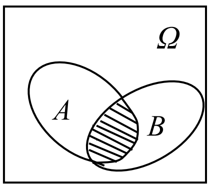


Рисунок 1.2

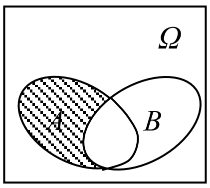


Рисунок 1.3

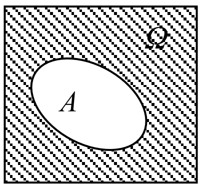


Рисунок 1.4

Зауваження. Поняття суми і добутку випадкових подій поширюються на довільну кількість випадкових подій або на послідовності випадкових подій, а саме: *сумою декількох випадкових подій* $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ називають випадкову подію $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, яка полягає в тому, що настане хоча б одна із них; добутком декількох випадкових подій $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ називають випадкову подію, яка полягає в сумісній появі всіх цих подій.

3. Означення. *Різницею випадкових подій A і B* називають *випадкову подію,* що складається із елементарних подій, які належать множині *A* і не *належать множині B,* і позначають символом $A \setminus B$.

Отже, випадкова подія $A \setminus B$ означає, що випадкова подія *A* настане, а випадкова подія *B* не настане в цьому експерименті. Ця подія зображена на рис. 1.3 (заштрихована область).

Введемо ще декілька понять, пов'язаних з випадковими подіями.

4. *Множину* Ω *– простір елементарних подій називають* ***вірогідною подією***. Це означає, що при кожному випробуванні експерименту ця випадкова подія настає всякий раз. Наприклад, при киданні грального кубика один раз випаде не більше десяти очок.

5. *Порожню підмножину простору елементарних подій називають* ***неможливою подією***. Це означає, що при будь-якому випробуванні експерименту ця випадкова подія ніколи не настане. Неможливу подію будемо позначати символом Ø. Наприклад, при підкиданні грального кубика один раз одночасне випадання двох і п'яти очок є неможлива подія.

6. ***Означення.*** *Різницю* $\Omega \setminus A$ *називають* ***доповненням*** *випадкової події A або* ***протилежною подією*** *до A і позначають символом* $\overline{A}$

Отже, протилежна подія $\overline{A}$ при випробуванні експерименту настає тоді і тільки тоді, коли випадкова подія A не настає. Це означає, що поява при випробуванні експерименту однієї з випадкових подій A або $\overline{A}$ унеможливлює появу іншої, тобто в цьому експерименті одночасна поява цих подій неможлива. Протилежну подію до A ще називають "не A ".

Наприклад, при киданні монети один раз випадковій події A{випадання герба} протилежною подією $\overline{A}$ є випадання цифри; а при підкиданні монети тричі випадковій події A {випадання хоча б одного герба} протилежною подією $\overline{A}$ є випадання трьох цифр, тобто ні разу не випаде герб.

7. Випадкові події *A* і *B* називають ***несумісними***, якщо AB = Ø. Це означає, що випадкова подія AB є неможливою, тобто одночасно їхня поява в цьому експерименті неможлива. Зокрема, випадкові події A і $\overline{A}$ є несумісні.

Якщо $AB \neq$ Ø, то випадкові події *A* і *B* називають ***сумісними***. Отже, дві події є ***сумісні,*** якщо поява однієї з них при випробуванні експерименту не виключає появу іншої, такі події можуть настати одночасно.

Наприклад, при підкиданні двох гральних кубиків один раз випадкові події A_3 із {випадання трьох очок на першому кубику} і B_3 {випадання п'яти очок на другому кубику} є події сумісні.

Зауваження 1. Безпосередньо з означень суми і добутку випадкових подій випливають такі рівності: $A + A = A$; $A \cdot A = A$, $A \cdot \overline{A} =$ Ø, $A + \overline{A} = \Omega$.

Зауваження 2. Для дій додавання і множення справедливі всі три закони математики:

а) комутативний або переставний: $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$;

б) асоціативний або сполучний: $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C A$;

в) дистрибутивний або розподільний: $(A + B) \cdot C = AC + B \cdot C$.

1.3 Частота випадкової події і її властивості

Нехай проводиться деякий стохастичний експеримент, тобто проводиться випробування і Ω – його простір елементарних подій. Будемо *повторювати* проведення цього експерименту *n* разів. Повторення цього експерименту *n* разів означає *вибір* певної послідовності $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ випадкових подій, що входять в Ω бо при кожному випробуванні настане певна випадкова подія.

Виберемо тепер певну довільну випадкову подію *A*, що пов'язана з цим експериментом, яка в результаті проведення цього експерименту може настати або не настати. Виділимо члени послідовності $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, які відповідають цій події *A,* тобто входять в підмножину *A.* Їхнє число позначимо через *m* або *m*(*A*). Це число *m*(*A*) означає *кількість випробувань, у яких настала випадкова подія A,* або *кількість появ події A в серії із n повторень цього експерименту.* Розглянемо відношення *m*(*A*)*/n,* яке буде визначати частоту події *A* в цій серії випробувань.

Означення. Частотою *випадкової події A в серії n повторень такого експерименту називають відношення кількості появ події A в цій серії до кількості всіх випробувань.*

Позначають частоту випадкової події *A* символом $\nu_n(A)$, ν (ню). Отже, за означенням

$$\nu_n(A) = m(A)/n, \tag{1.1}$$

де *n* – кількість всіх випробувань, *m(A)* – кількість появ події *A* в цих випробуваннях.

1. *Частота випадкової події є невід'ємне число, не більше 1, тобто*

$$0 \le \nu_n(A) \le 1.$$

Дійсно, оскільки випадкова подія *A* в серії із *n* випробувань може настати від 0 до *n* разів, то $0 \le m(A) \le n$. Тоді матимемо, що $0/n \le m(A)/n \le n/n$ або $0 \le m(A)/n \le 1$. Отже, $0 \le \nu_n(A) \le 1$.

2. *Частота вірогідної події дорівнює одиниці, тобто* $\nu_n(\Omega) = 1$.

Дійсно, в серії із *n* випробувань *імовірна подія* кожного разу настане, тому *m(A) = n,* а тоді $\nu_n(\Omega) = n/n = 1$.

3. *Частота неможливої події дорівнює нулю*.

Це очевидно, бо $m(A) = 0$.

При проведенні експерименту може статись, що настала не одна подія, а декілька випадкових подій. Як бути з частотою суми і добутку випадкових подій?

4. *Частота суми двох несумісних випадкових подій дорівнює сумі частот цих подій,* тобто $\nu_n(A+B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$, де $AB = \varnothing$.

Доведення. Нехай проведено *n* випробувань, у результаті яких випадкова подія A настала *m* разів, а випадкова подія B настала k разів. Тоді $\nu_n(A) = m/n$, $\nu_n(B) = k/n$. Оскільки випадкові події A і B несумісні, то їхня сума $A+B$ настала в цій серії випробувань $m+k$ разів. Тоді частота події $A+B$ дорівнюватиме $(m+k)/n$, тобто $\nu_n(A+B) = (m+k)/n$, звідси одержимо, що $\nu_n(A+B)=(m+k)/n=m/n+k/n=\nu_n(A)+\nu_n(B)$, що треба було довести.

Якщо випадкові події A і B сумісні, то при проведенні серії випробувань можна розглядати низку частот, а саме: а) частоту події A безвідносно до появи події B; б) частоту події B безвідносно до появи події A; в) частоту події A за умови, що подія B настала; г) частоту події B за умови, що подія A настала; д) частоту події AB.

Частоту випадкової події за умови, що інша подія настала, називають умовною частотою такої події і позначають символами $\nu_n(A/B)$, $\nu_n(B/A)$.

Отже, $\nu_n(A/B)$ означає умовну частоту події A за умови, що B настала, а $\nu_n(B/A)$ – це умовна частота події B за умови, що подія A настала.

5. *Частота добутку двох сумісних подій A і B дорівнює добутку частоти однієї із цих подій на умовну частоту іншої*, тобто

$$\nu_n(AB)=\nu_n(A)\nu_n(B/A) \text{ або } \nu_n(AB)=\nu_n(B)\nu_n(A/B).$$

Аналогічно, оскільки подія B настала в k випробуваннях, з них в l випробуваннях вона настала разом із подією A, то умовна частота події A за умови, що B настала, дорівнює $l/к$, тобто $\nu_n(A/B)=l/k$, $\nu_n(B)(A/B)=k/n\cdot l/k=l/k$.

Зауважимо, якщо $AB=\varnothing$, то $\nu_n(AB)=0$ (за властивістю 3).

Звернемо увагу на те, що частоту випадкової події можна визначити тільки після проведення такого експерименту, точніше *після серії повторних випробувань.* Очевидно, у *різних серіях n* випробувань, що проводяться при одних і тих же умовах, частота події *не залишається сталою, вона змінюється від серії до серії.* І тому частота випадкової події погано характеризує саму випадкову подію не лише у кожному випробуванні, а й у випробуваннях, що можуть бути проведеними.

Накопичений *досвід* переконує в тому, що за *необмеженого збільшення числа випробувань частоти випадкових подій стабілізуються навколо певної величини,* що не залежить ні від *n,* ні від вибору відповідної серії випробувань.

Число, навколо якого групуються частоти випадкової події при *необмеженому зростанні n,* виражає *об'єктивну можливість появи події* в цьому експерименті ще до *настання* самої події. Саме таке число дає *можливість прогнозувати появу випадкової події* в експерименті. Це число називають статистичною *ймовірністю випадкової події A* і позначають символом $P(A)$ (від першої букви слова "*probability*", що означає "ймовірність").

1.4 Класичне й статистичне означення ймовірності

Це поняття ймовірності випадкової події ґрунтується на понятті *рівноможливих подій, що утворюють повну групу подій*, і *понятті випадків.*

Дві і більше випадкові події називають ***рівноможливими,*** якщо *умови* їхньої *появи однакові* і немає підстав стверджувати, що яка-небудь із них в результаті експерименту має більше шансів настати, ніж інші.

Наприклад: а) при підкиданні грального кубика події A_k випадання k очок, де k – 1, 2, 3, 4, 5, 6, є рівноможливими; б) при киданні монети один раз випадання герба і випадання цифри є рівноможливі події; в) витягування з ящика будь-якої із k однакових деталей є рівноможливі події.

Декілька випадкових подій *утворюють повну групу подій,* якщо в результаті експерименту *обов'язково настане хоча б одна із них.*

Означення. *Рівноможливі несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають* **випадками** *або* **шансами.**

Відносно цієї випадкової події випадки діляться на *сприятливі* і *несприятливі. Сприятливими називають випадки, при яких ця подія настане; несприятливими називають випадки, при яких така подія не настане.*

Наприклад: а) при киданні грального кубика один раз події A {випадання непарного числа очок} сприяють три випадки: випадання 1, 3 і 5 очок, тому $P(A)=3/6=1/2$; а події B {випадання очок, кратних трьом} сприяють два випадки (випадання 3 і 6 очок), тому $P(B)=2/6=1/3$.

Розглянемо простір (множину) елементарних подій A_1, A_2, ... A_n при виконанні комплексу умов

$$P(A)=\frac{m(A)}{n}, \tag{1.2}$$

де $m(A)$ – кількість елементарних подій, сприятливих A;

n – кількість усіх можливих елементарних подій.

За *класичним* означенням, імовірність появи події шукають, не проводячи ніяких дослідів, виходячи з теоретичних міркувань.

На практиці часто доводиться мати справу зі *статистичною* ймовірністю. Її часто називають відносною частотою появи події і позначають

$$P(A)=\frac{m(A)}{n},$$

де $m(A)$ – кількість випробувань, у яких подія A з'явилась;

n – загальна кількість випробувань.

Означення (статистичне означення ймовірності). *Імовірністю випадкової події називають число, навколо якого групуються частоти цієї події при необмеженому збільшенні числа випробувань.*

Отже,

$$P(A)\approx \nu_n(A) \quad \text{або} \quad P(A)\approx m(A)/n. \tag{1.3}$$

Це так зване *статистичне означення ймовірності* випадкової події, бо опирається на реальні експерименти, у цьому його переваги над іншими, бо можна перевірити його правильність практикою. Але статистичне означення ймовірності має і недоліки, бо іноді проведення деяких експериментів економічно і матеріально є досить затратним. Тому є потреба іншого способу визначення ймовірності випадкової події до її настання, прогнозуючи можливість цього настання числом до проведення експерименту.

Означення (класичне означення ймовірності). *Імовірністю випадкової події A називають відношення числа випадків, що сприяють появі події A, до загального числа всіх випадків в даному експерименті.*

Якщо через n позначити число всіх випадків, а через $m(A)$ − число сприятливих події A випадків, то за означенням ймовірності

$$P(A) = m(A)/n \tag{1.4}$$

Це означення ймовірності випадкової події називають *класичним,* бо воно історично було першим означенням поняття ймовірності події в самий початковий період розвитку теорії ймовірностей. Важливою його *перевагою* є те, що *ймовірність випадкової* події можна *визначити заздалегідь* ще до проведення експерименту, що дає можливість спрогнозувати для себе певні висновки, провівши попередньо деякі обчислення. А *недоліки* цього способу визначення ймовірності події полягають в *обмеженості* його застосування (*тільки* для *рівноможливих результатів* і *простір елементарних подій Ω скінченний).*

Приклад 1. В урні 10 однакових кульок, серед яких 6 білих і 4 чорних. Навмання виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.

Розв'язування. Нехай A − випадкова подія, що означає появу білої кульки при вийманні. Очевидно, що результати цього експерименту є випадками, загальне число яких дорівнює 10, тобто n= 10, а число сприятливих цій події випадків дорівнює 6, тобто $m(A) = 6$. Тоді $P(A) = 6/10 = 3/5$.

Приклад 2. В урні 10 однакових кульок, серед яких 6 білих і 4 чорних. Навмання виймають дві кульки. Знайти ймовірність того, що ці кульки різного кольору.

Розв'язування. Нехай A − випадкова подія, яка полягає в тому, що дві вийняті кульки різного кольору. Треба визначити, скількома способами можна вийняти дві кульки із 10, тобто скількома способами можна утворювати пари різних кульок і скількома способами можна утворювати пари різного кольору. Почнемо з визначення кількості саме пар, які є сприятливими випадками події A. Оскільки кожну білу кульку можна спарувати з чорною 4 способами, бо чорних кульок 4, то всього таких пар буде в шість разів більше, бо є 6 білих кульок. Отже, $m(A) = 4 \cdot 6 = 24$. Число всіх випадків, тобто всіх можливих пар, можна обчислити так: одну кульку пари можна вибрати десятьма способами, а другу − дев'ятьма способами, тоді всього буде 10·9 = 90. Оскільки порядок у парі не має значення, бо пари кульок з номерами 1 і 2 та номерами 2 і 1 це не різні пари, а одна і та ж пара, то число всіх різних пар буде в два рази менше, тобто n = 45. Тоді ймовірність події A визначимо за формулою (1.3), а саме:

$$P(A) = 24/45 = 8/15$$

Приклад 3. Монета підкидається двічі. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випаде “герб”.

Розв’язування. Нехай випадкова подія A означає, що хоча б один раз, випаде “герб”. Для цього експерименту неважко скласти простір елементарних подій Ω = {ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}. Звідси видно, що число всіх випадків $n = 4$, а число випадків, що сприяють події A, дорівнює 3, тобто $m(A)=3$, бо A = {ГГ, ГЦ, ЦГ}; тоді $P(A)=m(A)/n=3/4$.

1.5 Елементи комбінаторики

При обчисленні ймовірності випадкової події часто доводиться обчислювати кількість груп (скінченних послідовностей) елементів, що задовольняють певні вимоги. Підрахунком такої кількості займається комбінаторика.

Означення. Перестановкою (the permutation) із n елементів називається будь-яка скінченна послідовність (***progression***), яка одержується в результаті упорядкування деякої скінченної множини, складеної з n елементів. Кількість всіх перестановок із n елементів позначається P_n. Це число дорівнює добутку всіх цілих чисел від 1 до n. Позначають:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\,.$$

Добуток n перших натуральних чисел прийнято позначати символом $n!$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n!$$

Символ $n!$ читають “ен факторіал”. Це слово походить від латинського *factor*, що означає “*множник*”. При n=1 у виразі $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$ залишається одне число 1. Тому приймається (як визначення), що 1!=1. При n=0 вираз $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$ немає змісту, з числа 0 існує одне переміщення, тому приймається, що 0!=1. Значить, $P_n=n!$ правильна формула $P_n = n\cdot P_{n-1}$.

Приклад. Якою кількістю способів можна розсадити 8 студентів в ряд з 8 місць:

$$\mathrm{P}_8 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320..$$

Нехай є множина *M,* яка складається з n різних елементів. Будь-яка підмножина множини M, яка містить k елементів (k = 0, 1, 2, ..., n), називається ***сполученням*** **(*combination*)** *або* ***комбінацією*** з цих n елементів по k елементів, якщо ці підмножини відрізняються хоча б одним елементом. Кількість різних сполучень із n елементів по k позначається C_n^k (combination від *лат.* combinare − сполучати). Іноді замість C_n^k пишуть $\binom{k}{n}$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1;\quad 0! = 1;\ C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1;\qquad C_0^0 = \frac{0!}{0!\cdot 0!} = 1\,.$$

Приклад. Скількома можливими способами можна вибрати з 15 людей делегацію в складі 3 осіб.

Розв'язання. Шукане число (кількість можливих вибірок) є числом сполучень із 15 по 3: $C_{15}^{3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=1365$.

Кожна впорядкована підмножина, яка містить k елементів такої множини з n елементів, називається ***розміщенням (accommodation)*** із n по k елементів. Таким чином, два різних розміщення із цих n елементів по k відрізняються один від одного або складом елементів, або порядком їхнього розміщення.

Приклад. Із трьох цифр 1, 2, 3 можна утворити такі розміщення по два: 1,2; 2,1; 1,3; 3,1; 2,3; 3,2. Кількість розміщень із n елементів по k позначається символом A_n^k (від *франц.* arrangement – розміщення). Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k дорівнює добутку k послідовних чисел, з яких найбільшим є n, тобто:

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1),\ \text{або}\ A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

Зведемо поняття розміщення, комбінації, розміщення з повторенням, комбінації з повторенням у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вибірка об’єму k з n елементів			
Вибірка без повторення		Вибірка з повторенням	
впорядкована	Невпорядкована	впорядкована	невпорядкована
$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	$\overline{A}_n^k=n^k$	$\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k$
Розміщення	*Комбінація*	*Розміщення з повторенням*	*Комбінація з повторенням*

Приклад. У класі 10 навчальних предметів і 5 різних уроків в день.

Скількома способами можна розподілити уроки в день?

Розв'язання.

Усі можливі розподіли уроків в день являють собою, очевидно, всі можливі розміщення з 10 елементів по 5; тому всіх способів розподілу має бути: $A_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30240$.

Приклад. Скільки є можливих способів для утворення дозору з трьох солдат та одного офіцера, якщо є 80 солдат і 3 офіцери?

Розв'язання.

З одним офіцером і 80 солдатами можна утворити дозор C_{80}^3 способами. З трьома офіцерами число способів буде в три рази більше, а саме $3\cdot C_{80}^3=246480$.

Приклад. Знайти число діагоналей опуклого десятикутника.

Розв'язання.

Вершини десятикутника утворюють сукупність 10 точок площини, з яких довільні три не лежать на одній прямій. З'єднуючи будь-яку пару цих точок відрізками одержимо: $C_{10}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ відрізків, 10 з яких є сторонами многокутника. Отже, діагоналей 35.

Приклад 4. У ящику міститься 10 однакових на вигляд деталей, серед яких 4 пофарбовані. Навмання взяли три деталі. Знайти ймовірність того, що взято пофарбовані деталі.

Розв'язування. Нехай випадкова подія *А* означає, що взяті деталі пофарбовані. Випадками є групи, складені з трьох деталей і відрізняються хоча б однією деталлю, а це є комбінації. Тоді число всіх випадків $n = C_{10}^3$, а число сприятливих цій події випадків $m(A) = C_4^3$, тому

$$P(A) = C_4^3 \ / \ C_{10}^3 = 4 / \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{30}.$$

***Приклад* 5.** Телефонний номер складається з шести цифр. Знайти ймовірність того, що всі цифри різні.

Розв'язування. Нехай випадкова подія *А* означає, що всі цифри номера різні. Число всіх шестизначних номерів (число всіх випадків) дорівнює 10^6. Сприятливі випадки – це групи по шість цифр в кожній, що відрізняються самими цифрами або порядком її розміщення (останнє важливе), а такі групи називають розміщеннями, тому $m(A) = A_{10}^6$. Тоді

$$P(A) = \frac{m}{n}; \ m = \frac{10!}{(10-6)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5; \ n = 10^6$$

$$P(A) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 / 10^6 = 0{,}1512.$$

1.6 Сумісні та несумісні події

Як зазначалося події A_1 та A_2 називаються несумісними, якщо поява однієї виключає появу іншої.

Теорема 1. Нехай мають місце випадкова подія A_1 з імовірністю $P(A_1)$ і подія A_2 з імовірністю $P(A_2)$. Події A_1 і A_2 несумісні. Тоді імовірність суми подій, тобто того, що відбудеться або подія A_1, або A_2, дорівнює сумі ймовірностей цих подій і обчислюється за формулою:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Дві події називаються ***протилежними (opposite)***, якщо вони несумісні і складають повну групу. Для довільної події *А* імовірність протилежної події $\overline{A}$ обчислюється за формулою $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці: $P(A) = p, P(\overline{A}) = q, p + q = 1$.

Теорема 2. Для суми сумісних подій має місце рівність:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для суми трьох сумісних подій має місце рівність:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Приклад. Імовірність попадання в деяку мішень при пострілі з першої гармати дорівнює $\frac{8}{10}$, при пострілі з другої гармати $\frac{7}{10}$. Знайти ймовірність поразки мішені при одночасному пострілі обох гармат. Мішень вражено, якщо буде хоча б одне попадання з будь-якої гармати. (Покажемо два різних розв'язання).

I. $P(A)=\frac{8}{10}; P(B)=\frac{7}{10}.$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{8}{10}+\frac{7}{10}-\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{80}{100}+\frac{70}{100}-\frac{56}{100}=\frac{94}{100}.$$

$P(A+B)$ – імовірність хоча б одного попадання.

II. Знайдемо імовірність D – жодного попадання:

$$P(D)=P(\overline{B})\cdot P(\overline{A})=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{10}.$$

Імовірність хоча б одного попадання:

$$P\left(\overline{D}\right)=P\left(A+B\right)=1-P\left(D\right)=1-\frac{6}{100}=\frac{94}{100}.$$

Означення 3. Імовірність події A, обчислена за умови, що мала місце інша подія B, називається ***умовною ймовірністю*** **(*conditional probability*)** події A і позначається $P_B(A)$.

Теорема 2. Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої, яка обчислена за умови, що перша мала місце:

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)\cdot P_A\left(B\right).$$

Приклад. На конвеєрі проходить 10 валиків, з них 5 конусних (*conical*), 7 еліптичних (*elliptic*). Робітник бере один валик, потім другий. Знайти ймовірність того, що перший з узятих валиків – конусний, а другий – еліптичний.

Розв'язання.

Імовірність того, що перший валик конусний $P(A)=\frac{3}{10}$. Імовірність того, що другий валик еліптичний (подія B), за умови, що перший конусний, є умовною імовірністю.

$$P_A(B)=\frac{7}{9}; P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

Або навпаки,

$$P(B)=\frac{7}{10};\ P_A(B)=\frac{3}{9};\ \ P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}.$$

Відповідь: $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{30}.$

Імовірність добутку декількох подій:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cdot A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}}(A_n).$$

Приклад 6. На двох автоматичних верстатах виготовляються однакові деталі, що надходять на спільний конвеєр. Відомо, що продуктивність першого верстата в два рази більша, ніж другого. Ймовірність виготовлення деталі вищої якості на першому верстаті дорівнює 0,96, а на другому – 0,93. Знайти ймовірності того, що навмання взята з конвеєра деталь виготовлена на відповідному верстаті і виявиться вищої якості.

Розв'язування. Нехай A_i – навмання взята з конвеєра деталь виготовлена на i-му верстаті, де i = 1, 2 , а B_i – взята деталь виявиться вищої якості. Оскільки $P(A)_1 = 2/3$, $P(A_2) = 1/3, P(B_1 / A_1) = 0{,}96$, $P(B_2 / A_2) = 0{,}93$, то $P(A_1 \cdot B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1 / A_1) = 2/3 \cdot 0{,}96 = 0{,}64$,

$P(B_1 / A_1) = P(A_2)P(B_2 / A_2) = 1/3 \cdot 0{,}93 = 0{,}31$.

***Приклад* 7.** В урні міститься 30 кульок, серед яких 5 червоних, 8 синіх, 6 зелених і 11 білих. Навмання виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що вийнята кулька кольорова, тобто не біла.

Розв'язування 1. Нехай випадкова подія A означає, що вийнята кулька кольорова. Це означає, що ця кулька або червона, або синя, або зелена. Введемо додаткові випадкові події: B – витягнута кулька червона, C – витягнута кулька синя, D – витягнута кулька зелена. Тоді для події A можна скласти таку алгебру: $A = B+C+D$, причому події B, C, D несумісні. Оскільки за класичним означенням $P(B) = 5/30$, $P(C) = 8/30$, $P(D) = 6/30$, то згідно з теоремою 1 будемо мати:

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D) = 5/30+8/30+6/30 = 19/30.$$

2. Укажемо спосіб розв'язування цієї задачі, перейшовши до протилежної події $\overline{A}$, яка означатиме, що витягнута кулька біла. Оскільки за класичним означенням $P(\overline{A}) = 11/30$, бо число сприятливих випадків події $\overline{A}$ дорівнює 11, то $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 11/30 = 19/30$.

3. Ймовірність події A можна знайти, користуючись класичним означенням. Оскільки число сприятливих події A випадків $m(A)$ = 5+8+6 = =19, то $P(A) = 19/30$.

Як бачимо, розв'язуючи цю задачу трьома способами, ми маємо один і той же результат.

Приклад 8. У ящику знаходиться 10 однакових деталей, серед яких 4 пофарбованих. Складальник навмання бере три деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна із взятих деталей пофарбована.

Розв'язування. Нехай подія A означає, що хоча б одна деталь пофарбована. Це означає, що одна деталь пофарбована, дві інші не пофарбовані, або дві деталі пофарбовані, а одна не пофарбована, або всі три деталі пофарбовані; алгебра цієї випадкової події складна. Перейдімо до протилежної випадкової події $\overline{A}$, яка означатиме, що жодна із деталей не пофарбована, тобто всі три деталі не пофарбовані. Ймовірність цієї події будемо шукати за класичним означенням. Очевидно, що випадками будуть комбінації, тоді загальне число випадків дорівнює числу комбінацій із 10 елементів по три, тобто $n = C_{10}^3$, а число випадків, що сприяють події $\overline{A}$, дорівнює число комбінацій із 6 елементів (не пофарбованих деталей), тобто $m(\overline{A}) = C_6^3$.

Отже, $P(\overline{A}) = m(\overline{A})/n = C_6^3 \cdot C_{10}^3 = 1/6$. Тоді $m(A) = 1 - P(\overline{A}) - 1 - 1/6 = 5/6$.

Приклад 9. У трьох ящиках міститься по 10 однакових на вигляд деталей, у першому з них 7 стандартних деталей, у другому – 9, у третьому – 8. З кожного ящика навмання витягують по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі три витягнуті деталі стандартні.

Розв'язування. Нехай випадкова подія A означає, що всі три витягнуті деталі стандартні. Введемо допоміжні події: A_1 {витягнута з першого ящика деталь стандартна}, A_2 {витягнута з другого ящика деталь стандартна}, A_3 {витягнута з третього ящика деталь стандартна}. Тоді, для випадкової події A матимемо таку алгебру: $A = A_1A_2A_3$. Очевидно, що випадкові події A_1, A_2 і A_3 незалежні в сукупності.

Оскільки $P(A_1) = P(A_2)P(A_2) = 9/10$, $P(A_3) = 8/10$, то

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 7/10 \cdot 9/10 \cdot 8/10 = 504/1000 \approx 0{,}5.$$

Приклад 10. В ящику міститься 10 однакових на вигляд деталей, серед яких 2 з дефектом. Навмання з ящика витягують три деталі. Знайти ймовірність того, що витягнуті деталі без дефектів.

Розв'язування. Випадкову подію, яка означає те, що витягнуті деталі без дефектів, позначимо через *А*. Щоб скласти алгебру цієї події введемо допоміжні події A_i – *і*-та витягнута деталь без дефектів, де i = 1, 2, 3. Тоді $A = A_1A_2A_3$, причому ці допоміжні події є залежними, тому $P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$. Оскільки за класичним означенням $P(A_1) = P(A_2/A_1) = 7/9$, $P(A_3/A_1A_2) = P(A_2/A_1)$, то $P(A_3/A_1A_2) = 8/10 \cdot 7/9 \cdot 6/8 = 7/15$.

Приклад 11. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. По мішені стріляють одиночними пострілами до першого попадання, після чого стрільбу припиняють. Знайти ймовірність того, що: а) буде зроблено три постріли; б) буде зроблено не більше трьох пострілів.

Розв'язування: а) Нехай випадкова подія *А* означає, що зроблено три постріли. Це означає, що попадання настане при третьому пострілі, а при перших двох пострілах будуть промахи. З метою скласти алгебру цієї події введемо допоміжні прості події A_i – попадання в мішень при *і*-му пострілі, де i = 1, 2, 3. Тоді $A = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Зауважимо, що ці події незалежні. Оскільки за умовою задачі $P(A_i) = 0{,}7$, то $P(A_i) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ при i = 1, 2, 3, тоді $P(A) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}063$.

б) Нехай випадкова подія *В* означає, що буде зроблено не більше трьох пострілів. Це означатиме, що попадання в мішень відбудеться або при першому пострілі, або при другому пострілі, або при третьому пострілі (при цьому при двох перших пострілах промахи), тоді

$$B = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 .$$

Оскільки випадкові події, що є доданками, несумісні, а випадкові події, що є множниками, незалежні, то за теоремою 1 і теоремою 2 будемо мати:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_1 A_2) \cdot P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = P(A_1) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) +$$

$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) = 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}973 .$$

Укажемо ще один спосіб розв'язування цієї задачі. Перейдемо до протилежної події $\overline{B}$, яка буде означати, що при трьох пострілах не буде жодного попадання, тоді $B = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$. Враховуючи те, що події $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$ незалежні, отримаємо, що $P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$ тоді $P(B) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$.

Результати розв'язування задачі 11(б) збіглися.

Приклад 12. Робітник обслуговує два автоматичні верстати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом певного часу *T* перший верстат не вимагатиме уваги робітника дорівнює 0,9, а другий – 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом часу *T* хоча б один із верстатів не вимагатиме уваги робітника.

Розв'язування. Нехай випадкова подія *A* полягає в тому, що хоча б один із верстатів не вимагатиме уваги робітника. Введемо допоміжні елементарні випадкові події: A_1 {перший верстат не вимагатиме уваги робітника}, A_2 {другий верстат не вимагатиме уваги робітника протягом цього часу}. Ці випадкові події *сумісні і відомі їхні ймовірності*: $P(A_1)$ = = 0,9; $P(A_2)$ = 0,8. За означенням суми випадкових подій маємо, що $A = A_1 + A_2$, тоді на підставі теореми 3 отримаємо:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}98 .$$

Вкажемо ще один спосіб розв'язування цієї задачі, розглянувши протилежну подію $\overline{A}$, яка полягає в тому, що обидва верстати вимагатимуть уваги *робітника* протягом цього часу. Оскільки $\overline{A} = \overline{A}_1$, то

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) + P(\overline{A}_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 \text{ , бо}$$

$$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1,\ P(\overline{A}_2) = 0{,}2 \text{ . Тоді}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}\ ) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

Зауважимо, що зручність цього методу (*перехід до протилежної події*) особливо проявляється у випадку, коли число верстатів більше двох.

1.7 Формула повної ймовірності

Припустимо, що в результаті проведення стохастичного експерименту деяка *випадкова подія A може настати разом з однією із n несумісних подій* H_1, H_2,.., H_n, *що утворюють повну групу.* Події H_1, H_2,.., H_n називають *гіпотезами.* Припустимо, що ймовірності всіх гіпотез відомі, при цьому має виконуватись рівність $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$, що слідує з наслідку теореми 1 додавання ймовірностей несумісних подій. Припустимо ще, що відомі всі умовні ймовірності події *A* за умови, що настала кожна із гіпотез, тобто відомі ймовірності $P(A/H_1),\ P(A_1/H_2),\ \dots\ P(A/H_n)$.

Тоді справедлива рівність.

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)P(A_1/H_2) + \dots + P(H_n)\cdot P(A/H_n)\ . \qquad (1.5)$$

Цю формулу називають *формулою повної ймовірності.*

Доведення. Оскільки випадкова подія *A* може настати разом з однією із *n несумісних* подій $H_1,\ H_2,\dots,\ H_n$, то для події *A* можна подати у вигляді суми подій: $A = AH_1 + AH_2 + \dots\ + AH_n$, де події, що є доданками цієї суми, несумісні. Тоді за теоремою 1 додавання ймовірностей несумісних подій будемо мати:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots\ + P(AH_n)\,.$$

Оскільки за аксіомою множення $P(AH_i) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)$, де *i* =1, 2,..., *n*, то з попередньої рівності матимемо:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)P(A_1/H_2) + \dots + P(H_n)\cdot P(A/H_n)\ .$$

Формулу (1.25), формулу повної ймовірності, записують в згорнутому вигляді так:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)\,.$$

Приклад 13. Прилад може працювати в двох режимах: нормальному і ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% всіх випадків роботи приладу, а ненормальний – у 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за деякий час *T* в нормальному режимі дорівнює 0,1, а в ненормальному режимі – 0,7. Знайти ймовірність виходу приладу із ладу за цей час.

Розв'язування. Нехай випадкова подія *A* означає вихід приладу із ладу. Введемо гіпотези: H_1 – прилад в нормальному режимі, H_2 – прилад працює в ненормальному режимі, ймовірність цих гіпотез легко визначити за класичним означенням, а саме:

$$P(H_1) = 800/100 = 0{,}8\ ,\ P(H_2) = 20/100 = 0{,}2\ ,$$

при цьому $P(H_1) + P(H_2) = 1$. За умовою задачі відомі умовні ймовірності події *A:* $P(A/H_1) = 0{,}1$, $P(A/H_2) = 0{,}7$.

Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}22\,.$$

1.8 Імовірність гіпотез. Формула Байєса

Припустимо, що проводиться деякий експеримент, у результаті якого може настати випадкова подія *A*, при цьому подія *A* може настати тільки разом з однією із *n* несумісних випадкових подій H_1, H_2, ..., H_n, що утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності цих гіпотез і умовні ймовірності події *A* за умови, що ці гіпотези настали. Припустимо тепер, що в результаті експерименту *випадкова подія A настала.* Треба *знайти ймовірності кожної із гіпотез за умови, що подія A настала;* іншими словами, треба перерахувати ймовірності гіпотез після того, як подія *A* настала.

Зауважимо, що ймовірність події *A* визначимо за формулою повної ймовірності. Скористаємось аксіомою множення і визначимо ймовірність добутку події *A* на гіпотезу H_i, будемо мати

$$P(A/H_i) = P(A)\cdot P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

звідки матимемо, що

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)},$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо використати формулу повної ймовірності, то отримаємо

$$P(A/H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}. \qquad (1.6)$$

Цю формулу називають *формулою Байєса,* вона дає можливість знайти умовні ймовірності гіпотез після того, як випадкова подія настала. Звернемо увагу на те, що *умовні ймовірності* гіпотез, взагалі кажучи, *будуть іншими,* ніж апріорні ймовірності (початкові, до проведення експерименту), але *сума всіх умовних ймовірностей гіпотез знову дорівнюватиме одиниці.*

Приклад 14. На пункт складання надходять деталі від трьох заводів: від першого заводу – 30% деталей від загальної кількості, від другого – 25%, від третього – 45%. Імовірності браку деталі для цих заводів відповідно дорівнюють 0,01, 0,03 і 0,02. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться бракованою.

Розв'язування. Нехай випадкова подія *A* означає, що взята навмання деталь виявиться бракованою. Ця деталь може належати одному із трьох заводів. Тому введемо такі гіпотези: H_1 – взята деталь виготовлена на першому заводі, H_2 – взята деталь виготовлена на другому заводі, H_3 – взята деталь виготовлена на третьому заводі. Ймовірності цих гіпотез відповідно будуть: $P(A/H_1) = 300/100 = 0{,}3$, $P(H_2) = 0{,}25$, $P(H_3) = 0{,}45$. Умовні ймовірності події *A* відомі, а саме: $P(A/H_1) = 0{,}01$; $P(A/H_1) = 0{,}03$; $P(A/H_3) = 0{,}2$. Тоді за формулою повної ймовірності матимемо, що

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right) = 0{,}3\cdot 0{,}01 + 0{,}25\cdot 0{,}03 + 0{,}45\cdot 0{,}02 = 0{,}0195.$$

Приклад 15. В умовах попередньої задачі (приклад 14) деталь, що взята навмання для складання, виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що ця деталь надійшла від другого заводу.

Розв'язування. Потрібно перерахувати ймовірність гіпотез H_2, після того, як настала подія A – взята для складання деталь виявилась бракованою, що можна зробити за допомогою формули Байєса. Оскільки $P(A) = 0{,}0195$, $P(H_2) = 0{,}25$, а $P(A/H_2) = 0{,}03$, то умовну ймовірність гіпотези H_2 (після появи події A) визначимо так:

$$P(A/H_2) = \left(P(H_2)\cdot P(A/H_2)\right)/P(A)\cdot$$

$$P(H_2/A) = (0{,}25\cdot 0{,}03)/0{,}0195\cdot = 0{,}385$$

Як бачимо, умовна ймовірність гіпотези H_2 збільшилась порівняно з апріорною ймовірністю.

Завдання для самостійної роботи до розділу 1

Простір елементарних подій

1. Стрілець двічі стріляє по мішені ; де A – попадання з першого разу, B – з другого. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що а) C – стрілець влучив у ціль хоча б один раз; б) $Д$ – стрілець влучив один раз.

2. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох блоків другого типу. Нехай події A_i (i=1, 2) – робочий i-й блок першого типу, B_j (j=1, 2,3) – робочий j-й блок другого типу. Прилад працює, якщо робочий хоча б один блок першого типу і не менше двох блоків другого типу. Виразити подію C, яка відображає роботу приладу, через вказані події.

3. В урні чотири кулі з номерами 1, 2, 3, 4. Випадковим чином виймають дві кулі. Укажіть простір елементарних подій даного експерименту.

Класичне означення ймовірності

1. Вісім осіб випадковим чином сідають за стіл. Знайти ймовірність того, що дві фіксованих особи A і B опиняться поряд.

2. Навмання взятий телефонний номер складається з шести цифр. Яка ймовірність того, що в ньому : а) всі цифри різні; б) всі цифри непарні.

3. У цеху працюють шість чоловіків та чотири жінки. За табельними номерами навмання відібрані сім осіб. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виявиться три жінки.

4. Яка ймовірність того, що чотиризначний номер випадково взятого автомобіля у великому місті : а) має дві цифри різні ; б) має лише однакові цифри?

Додавання та віднімання ймовірностей

1. Для підвищення надійності приладу він дублюється іншим аналогічним приладом. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) кожного приладу рівна p. При виході з ладу першого приладу відбувається моментальне переключення на другий (надійність перемикаючого приладу рівна а). Визначити надійність P системи.

2. Імовірність того, що в ціль влучено одним пострілом, рівна p_1, другим – p_2. Перший стрілець зробив 3 постріли, другий – 2. Визначити ймовірність того, що ціль не знищена.

3. Серед 25 екзаменаційних білетів 5 "щасливих". Два студенти по черзі беруть по одному білету. Знайти ймовірність того, що: а) перший студент взяв хороший білет; б) другий студент взяв хороший білет ; в) обоє взяли хороші білети.

4. Абонент забув останню цифру номера телефона і тому набирає її навмання. Визначити ймовірність того, що він додзвониться набираючи номер не більше ніж чотири рази.

Формула повної ймовірності і формула Байєса

1. Є дві партії виробів по 12 і 10 штук, причому в кожній партії один виріб бракований. Виріб, взятий навмання з першої партії, переклали в другу, після чого вибирають навмання виріб з другої партії. Визначити ймовірність того, що цей виріб не бракований.

2. Лиття болванок надходить з трьох заготівельних цехів 50% – з 1; 30% – з 11; 20% – з 111. При цьому матеріал цеху 1 має 0,8% браку, 11 – 0,6% браку, 111 – 0,4%. Знайти ймовірність того, що : а) навмання взята болванка не має дефектів; б) взята без дефектів болванка надійшла з першого цеху.

3. У піраміді шість гвинтівок, три з яких оснащені оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець знищить ціль з гвинтівки з оптичним прицілом рівна 0,9. Для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність рівна 0,7. Стрілець навмання взяв гвинтівку і, вистріливши один раз, влучив у ціль. Знайти ймовірність того, що він стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом.

4. У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому завод I постачає 50% виробів, II – 20%, III – 30%. Серед виробів заводу I – першосортних 20%, заводу II – 40%, III – 25%. Куплено один виріб. Він виявився першосортним. Визначити ймовірність того, що виріб виготовлений заводом II.

РОДІЛ 2
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

Поняття випадкової величини є одним з основних в теорії імовірностей та її застосуваннях. *Випадковими величинами (the random variables)*, наприклад, є число очок, що з'явилися при одноразовому підкиданні грального кубика; кількість атомів радія, що розпалися за цей проміжок часу; відхилення від номіналу деякого розміру деталі при правильно налагодженому технологічному процесі й т. д.

Таким чином, випадковою величиною називається змінна величина, яка у результаті досліду може приймати те чи інше числове значення.

Надалі будемо розглядати два типи випадкових величин – ***дискретні* (*discrete*)** і ***неперервні (continuous).***

Означення. Нехай задана функція $P(x)$, значення якої в кожній точці $x = x_i$ (i = 1, 2, … n) дорівнює імовірності того, що величина ξ прийме значення x_i $P(x_i) = P(\xi = x_i)$ Така випадкова величина ξ називається ***дискретною (перервною).***

Числова функція, визначена на просторі Ω елементарних подій $\{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$ називається випадковою величиною.

Функція *P(x)* називається ***законом розподілу ймовірностей випадкової величини*** або ***законом розподілу***. Така функція визначена в точках послідовності x_1, x_2, .., x_n, … .

У кожному з дослідів випадкова величина ξ приймає завжди яке-небудь значення з області її зміни, тому: $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)+\ldots=1$.

Закон розподілу ймовірностей випадкової величини дають у вигляді табл. 2.1, у якій

$$p_i = P(\xi = x_i)\,;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Таблиця 2.1

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(\xi_i = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Цю таблицю називають ***рядом розподілу (the number distribution)*** випадкової величини ξ.

2.1 Формула Бернуллі

Нехай проводиться *n* незалежних випробувань, у результаті кожного з яких може відбутись або не відбутись деяка подія A . Нехай у кожному випробуванні ймовірність появи A дорівнює $P(A) = p$ і ймовірність протилежної події рівна $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Визначимо ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться *m* разів в *n* випробуваннях. При цьому побачимо, що появи або непояви події A можуть чергуватись довільним чином. Умовимося записувати можливі результати випробувань у вигляді комбінації символів A і $\overline{A}$. Наприклад, запис $A\overline{AA}A$ означає, що в чотирьох випробуваннях подія A відбулась в 1-му і 4-му випадках і не відбулась в 2-му і 3-му випадках.

Кожну комбінацію, у яку A входить *m* разів і $\overline{A}$ входить *n-m* разів, назвемо сприятливою. Кількість сприятливих комбінацій дорівнює кількості *k* способів, якими можна вибирати *m* елементів із даних *n*; таким чином вона дорівнює числу сполучень із *n* елементів по *m*; тобто $k = C_n^m$. В іншій сприятливій комбінації B_i подія A зустрічається *m* разів, а подія $\overline{A}$ відбувається *n-m* разів, тільки в іншому порядку, ймовірність кожної з таких комбінацій також рівна $p^m q^{n-m}$.

$$P(B_1) = P(B_2) = ... = P(B_n) = p^m q^{n-m}.$$

Усі сприятливі комбінації є несумісними. На основі теореми додавання несумісних подій:

$$P_n(M) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_k) = kp^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m};$$

або

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \qquad (2.1)$$

Одержана формула є **формулою Бернуллі.**

Приклад 16. Два рівносильні шахісти грають в шахи. Що ймовірніше виграти: дві партії із чотирьох чи три партії із шести (нічиї до уваги не беруться)?

Розв'язування. Оскільки грають два рівносильні шахісти, то ймовірність виграшу, так само як і ймовірність програшу, дорівнює 1/2, до того ця ймовірність є сталою в кожній партії, тому можна застосувати формулу Бернуллі при визначенні відповідних ймовірностей виграти дві партії з чотирьох результативних та три партії з шести результативних. Щоб з'ясувати, яка із цих ймовірностей більша, знайдемо вказані ймовірності:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot (1/2)^2 P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}.$$

Оскільки $P_4(2) > P_6(3)$, то ймовірність виграти дві партії з чотирьох більша, ніж три партії з шести.

Приклад 17. Імовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях ця подія настане не більше трьох разів.

Розв'язування. Випадкова подія B {подія A настане не більше трьох разів в п'яти випробуваннях} означає, що подія A ні разу не настане або настане рівно один раз, або настане рівно два рази, або настане рівно три рази. Простішою є протилежна подія $\overline{B}$, яка полягає в тому, що подія A настане більше трьох разів в п'яти випробуваннях. Це означає детальніше, що подія A настане рівно 4 рази або рівно 5 разів в п'яти випробуваннях. Оскільки події несумірні, то

$$P(\overline{B}) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4 + C_5^5 \cdot 0{,}6^5 = 5 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6^5 = 0{,}337.$$

Тоді $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}337 = 0{,}663$.

Зауваження. При дослідженні багатьох питань потрібно обчислити ймовірність того, що подія A відбудеться "хоча б один раз". Ця ймовірність визначиться з рівності: $P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(m = 0) = 1 - q^n$.

Імовірність того, що подія відбудеться не менше, ніж k разів, визначиться за формулою:

$$P_n(m \geq k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \text{ або } P_n(m \geq k) = 1 - \sum_{m=k}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (2.2)$$

Відмічене **співвідношення (*ratio*)** дає можливість ввести для обчислення ймовірності можливого числа події A в серії із n незалежних випробувань так звану ***твірну функцію* (*produced function)***:

$$\psi_n(x) = (q + px)^n = q^n x^0 + C_n^1 p q^{n-1x} x + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} x^m + \ldots + p^n x^n .$$

Ця функція має таку властивість: коефіцієнт при x^m в записаному розкладі дорівнює ймовірності події A з'явитись рівно m разів в серії з n незалежних випробувань, які проводяться в змінних умовах. Так, наприклад, якщо ймовірність появи події в i-му випробуванні $P(A_i) = p_i$, а ймовірність непояви $P(\overline{A}) = 1 - p_i = q_i$, то ймовірність появи A в n випробуваннях рівно m разів дорівнює коефіцієнту при x^m в розкладі за степенями x твірної функції:

$$\psi_n(x) = (q_1 + p_1 x) \cdot (q_2 + p_2 x) \cdot \ldots \cdot (q_n + p_n x) \qquad (2.3)$$

Приклад. Чотири лучники незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в мішень для першого лучника рівна 0,8; для другого – 0,7; для третього – 0,6; для четвертого – 0,5. Знайти ймовірність того, що в мішені буде рівно дві пробоїни.

Розв'язання. Ймовірності попадання для лучників різні, тобто для розв'язування задачі використаємо твірну функцію. Згідно з умовою, твірна функція для цього прикладу має вигляд:

$$\psi_n(x) = (0{,}2 + 0{,}8x) \cdot (0{,}3 + 0{,}7x) \cdot (0{,}4 + 0{,}6x)(0{,}5 + 0{,}5x) =$$
$$= 0{,}012 + 0{,}106x + 0{,}32x^2 + 0{,}394x^3 + 0{,}168x^4.$$

Коефіцієнт при x^2 є шуканою ймовірністю, тобто $P_4(2) = 0.32$.

2.2 Біноміальний розподіл

Нехай проводиться N незалежних випробувань, у кожному з яких може настати випадкова подія A з імовірністю р або випадкова подія $\overline{A}$ з імовірністю $1-p$. Нехай випадкова величина X – це число появ події A в цих n незалежних випробуваннях. Закон розподілу, у якому ймовірності можливих значень випадкової величини визначаються за формулою Бернуллі, називають біноміальним законом. Ця назва пов'язана з тим, що загальний член відомої формули Бінома–Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^{n-1}a^{n-1}b + C_n^{n-2}a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-m}a^m b^{n-m} \ldots + b^n,$$

де C_n^m – число комбінацій з n по m.

Приклад 18. Скласти ряд розподілу числа народжень хлопчиків в сім'ї із чотирма дітьми, якщо вважати, що ймовірності народження хлопчика і дівчинки дорівнюють 1/2.

Розв'язування. Число народжень хлопчиків в сім'ї із чотирма дітьми є випадковою величиною *X*. Можливими її значеннями будуть: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4.$ Визначимо ймовірності цих можливих значень. Ймовірності P_1 і P_2 неважко визначити, використавши алгебру випадкових подій, а саме: $(X=0) = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$, $(X=4) = A_1A_2A_3A_4$, де через A позначено випадкову подію, яка полягає в тому, що i-та дитина в сім'ї є хлопчик, а $\overline{A}_i$ – i-та дитина дівчинка (не хлопчик). Тоді, оскільки $P(A_i) = 1/2,\quad P(\overline{A}_i) = 1/2,$ матимемо, що

$$p_1 = P(X=0) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/16;$$

$$p_5 = P(X=4) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/16.$$

Імовірності p_1, p_2, p_3, p_4 зручно визначати за формулою Бернуллі:

$$p_2 = P(X=1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot p \cdot (1-p)^3 = 4 \cdot 1/2 \cdot (1/2)^3 = 1/4;$$

$$p_3 = P(X=2) = P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = 6 \cdot (1/2)^2 \cdot (1/2)^2 = 6/16;$$

$$p_4 = P(X=3) = P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot (1-p) = 4 \cdot (1/2)^3 \cdot (1/2) = 4/16.$$

Зауважимо, що p_1 і p_3 можна було б визначити теж за формулою Бернуллі:

$$p_1 = P(X=0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot (1/2)^0 \cdot (1/2)^4 = (1/2)^4 = 1/16;$$

$$p_5 = P(X=4) = P_4(4) = C_4^4 \cdot (1/2)^4 \cdot (1/2)^0 = 1/16;$$

Оскільки $\sum\limits_{з=0}^{5} p_з = 1$, що свідчить про правильність обчислень, то ряд розподілу матиме вигляд

ξ	0	1	2	3	4
$P(\xi_з)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

З цієї таблиці видно, що *найімовірніше число* народження хлопчиків у сім'ї з чотирма дітьми дорівнює двом. Таким самим є найімовірніше число народження дівчаток в цій сім'ї.

Зауважимо, що *біноміальний розподіл залежить від двох параметрів*: *p і n.*

2.3 Найімовірніше число появи події при повторенні дослідів

Найімовірнішим числом (the most likely number) m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається число, для якого імовірність $P_n(m_0)$ перевищує або не менше імовірності кожного із інших можливих результатів випробувань, що обчислюється за формулою (2.1)

$$P_n(m_0) = C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0} = \frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} \cdot q^{n-m_0}.$$

Тоді за визначенням m_0 як найімовірнішого числа:

$$P_n(m_0) \geq P_n(m_0+1); \; P_n(m_0) \geq P_n(m_0-1).$$

На основі цих нерівностей за формулою Бернуллі одержимо:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \tag{2.4}$$

Перевірити самостійно.

Приклад. При даному технологічному процесі 85% всієї виготовленої продукції є продукцією вищого ґатунку. Знайти найімовірніше число виробів вищого ґатунку в партії зі 150 деталей.

Розв'язання.

За умовою n=150; p=0,85; q=1–0,85=0,15. Згідно з нерівністю (2.4) маємо:

$$150 \cdot 0{,}85 - 0.15 \leq m_0 \leq 150 \cdot 0{,}85 + 0.85.$$

$$127{,}35 \leq m_0 \leq 128{,}35.$$

Найімовірніше число виробів вищого ґатунку в партії зі 150 виробів становить 128.

Приклад. Визначити найімовірніше число збитих літаків в групі з 13 бомбардувальників, якщо літаки збивають незалежно один від одного. Імовірність поразки одного літака рівна 4/7.

Розв'язання.

За умовою n=13; p=4/7; q=3/7; $13 \cdot \frac{4}{7} - \frac{3}{7} \leq m_0 \leq 13 \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7}$, звідки $7 \leq m_0 \leq 8$, вісім – найбільш імовірне число збитих літаків.

Приклад. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число влучень в ціль з 8 пострілів і знайти відповідну імовірність. Порівняти із сусідніми значеннями.

Розв'язання.

n=8, p=0,6; q=0,4; np–q=8·0,6–0,4=4,4; np+p=8·0,6+0,6=5,4.

Найімовірніше число влучень $m_0 \in \lfloor 4{,}4;\ 5{,}4 \rfloor$ і, отже, $m_0 = 5$.

$$P_8(5) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^3 \approx 0.28;$$

$$P_8(6) = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot (0.6)^6 \cdot (0.4)^2 = 28 \cdot 0.046656 \cdot 0.16 \approx 0.21$$

$$P_8(4) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} (0{,}6)^4 (0{,}4)^4 = 70 \cdot 0{,}296 \cdot 0{,}0256 \approx 0{,}23.$$

2.4 Формула Пуассона. Розподіл Пуассона

На практиці зустрічаються випадкові події, які настають дуже рідко, тобто з дуже малою ймовірністю. Яким законом описуються ці рідкісні явища?

Нехай потрібно обчислити ймовірність $P_{m,n}$ появи події A при великій кількості випробувань n, наприклад, $P_{300,500}$. За формулою Бернуллі (2.1) $P_{300,500}=\frac{500!}{300!\cdot 200!}\cdot p^{300}\cdot q^{200}$. При цьому безпосереднє обчислення формулою Бернуллі технічно складне, особливо якщо врахувати, що самі p та q – дробові числа. Отже, зручніше було б використати прості наближені формули обчислення $P_{m,n}$ при достатньо великих n.

Нехай випадкова величина ξ може приймати довільне ціле невід’ємне значення. Формула Пуассона дає приблизне значення імовірності $P_n(m)$ в тому випадку, коли число випробувань n велике, а імовірність $p=P(A)$ в кожному з окремих випробувань є достатньо малою, оскільки добуток цих чисел $pn=\lambda$ є заданим числом, незалежним від n, а значить $p=\frac{\lambda}{n}$, досить мале.

Тоді
$$\lim_{n\to\infty} P_m(\lambda)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{2.5}$$

Цей закон дає можливість наближати біноміальний розподіл при великій кількості випробувань і малій імовірності події A в кожному випробуванні. Ця властивість закону дає йому назву “Закон рідкісних явищ”. Іншими словами, сума всіх ймовірностей дорівнює: $p_m=P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \text{де}\ \lambda=np,$ цей розподіл випадкової величини називають розподілом Пуассона, а дискретну випадкову величину називають розподіленою за законом Пуассона:

$$\sum_{m=0}^{\infty}P_k=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=e^0=1.$$

Закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу (*Binomial distribution*) $P_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, якщо одночасно число дослідів прямує до нескінченності, а ймовірність p – до нуля, причому їхній добуток зберігає стале значення $np=\lambda,\ p=\frac{\lambda}{n}$. У таблиці (додаток В) наведено значення функції Пуассона $P_m(\lambda)$.

Приклад 19. Пристрій складається з 2000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу будь-якого елемента протягом деякого часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що протягом цього часу вийдуть з ладу рівно три елементи.

Розв'язування. Оскільки n = 2000 є досить велике число, а $p = 0{,}002$, тобто досить мале число, то шукану ймовірність варто знаходити за формулою Пуассона (2.5). Визначивши параметр λ за формулою $\lambda = np = 2000 \cdot 0{,}002 = 4$, при $m = 3$ і $\lambda = 4$ будемо мати:

$$P_{2000}(3) = \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!} = \frac{64 \cdot e^{-4}}{6} \approx 0{,}195.$$

Приклад. На завод прибула партія деталей кількістю 1000 штук. Імовірність того, що деталь буде бракованою, дорівнює 0,001. Обчислити імовірності того, що:

1) бракованих деталей буде не більше однієї;
2) бракованих деталей буде 5.

Розв'язання.

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1,\ \lambda = \frac{N}{60},\ \text{тоді}$$

$$P_{1000}(0) \approx \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} \approx P_{1000}(1) \approx \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} \approx 0{,}3679;$$

$$\mathrm{P}_{1000}(0) \approx \frac{1^0 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{0!} \approx \mathrm{P}_{1000}(1) \approx \frac{1^1 \cdot \mathrm{e}^{-1}}{1!} \approx 0{,}3679;$$

$$P_{1000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} \approx 0{,}003;\ P_{1000}(0) + P_{1000}(1) \approx 0{,}7358.$$

Приклад. Нехай телефоністка в середньому за годину одержує N викликів, то ймовірність того, що протягом однієї хвилини вона одержує k викликів, виражається формулою Пуассона:

$$\lambda = \frac{N}{60}; \quad P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{N}{60}\right)^k e^{-\frac{N}{60}}.$$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!};\ (k = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots).$$

де λ – деяка додатна константа.

Кажуть, що випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона, якщо можливі значення випадкової величини ξ утворюють нескінченну послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.5 Геометричний розподіл

Випадкова величина X має геометричний розподіл, якщо її можливі значення 1, 2, … m, …, а ймовірності цих значень визначають за формулою $p_m = q^{m-1} \cdot p$, де $0 < p < 1$, $q = 1 - q$, $m = 1,\ 2, \ldots$

На практиці геометричний розподіл зустрічається, коли здійснюється ряд незалежних "спроб" досягти деякого результату, тобто до першого успіху, при цьому при кожній спробі результат досягається з ймовірністю *p*, тоді як *число q буде означати ймовірність "не успіху"* у такій спробі.

Якщо ж число X означає число "невдалих спроб", то її можливі значення 0, 1, 2, … *m*, … , а ймовірності цих значень визначаються за формулою

$$p_m = q^m \cdot p, \quad \text{де } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

2.6 Гіпергеометричний розподіл

Випадкова величина X з можливими значеннями 0, 1, 2…m має гіпергеометричний розподіл з параметрами *n, a, b, якщо ймовірності цих значень знаходяться за формулою*

$$p_m = P(X = m) = C_a^m C_b^{n-m} / C_{a+b}^n, \tag{2.7}$$

де m = 0, 1, 2, … a, при цьому вважають, що число комбінацій $C_k^r = 0$, якщо $r > k$.

2.7 Функція розподілу і многокутник розподілу дискретної випадкової величини

Функцію $P(x)$ можна подати у вигляді графіка (рис. 2.1). Для цього візьмемо прямокутну систему координат на площині. По горизонтальній осі будемо відкладати можливі значення випадкової величини ξ, а по вертикальній осі – значення функції $P(x_з) = P(\xi = x_з)$; якщо з'єднати точки цього графіка, то отримаємо фігуру, що називається ***многокутником розподілу*** **(*polygons sharing*).**

Розглянемо функцію $F(x)$, визначену на всій числовій осі *Ox.* Для кожного x значення $F(x)$ дорівнює ймовірності того, що дискретна випадкова величина ξ приймає значення менші x**.**

Тобто $F(x) = P(\xi < x)$.

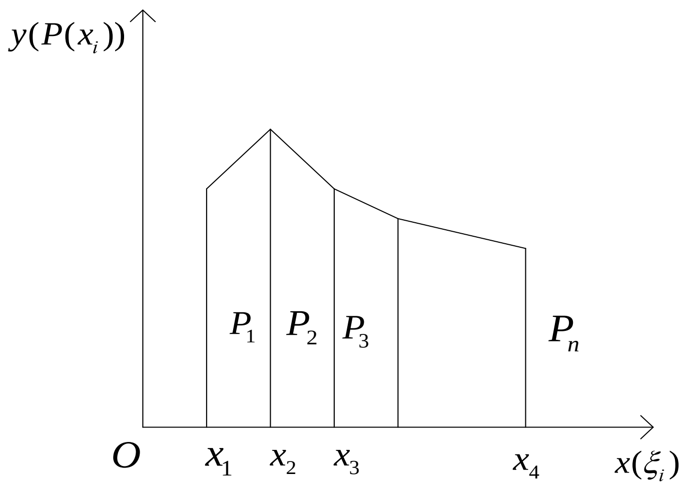


Рисунок 2.1

Ця функція називається ***функцією розподілу ймовірностей*** (*the probability distribution function)*, або ***функцією розподілу.***

Приклад 20.

Випадкова величина ξ – число очок, що випали при однократному киданні грального кубика.

Ряд розподілу має вигляд:

$\xi_з$	1	2	3	4	5	6
$P(\xi_з)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Знайти функцію розподілу $F(x)$. При $x \le 1$, $F(x) = 0$, тому що ξ не приймає значень менше 1

$$\text{якщо: } 1 < x \le 2, \text{ то } F(x) = p(\xi < 2) = p(\xi = 1) = \frac{1}{6};$$

$$2 < x \le 3, \text{ то } F(x) = p(\xi < 3) = p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

$$3 < x \le 4, \text{то } F(x) = p(\xi < 4) = p(\xi = 1) + p(\xi = 2) + p(\xi = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

Далі аналогічно:

$$4 < x \le 5; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$5 < x \le 6; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6};$$

$$6 < x; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

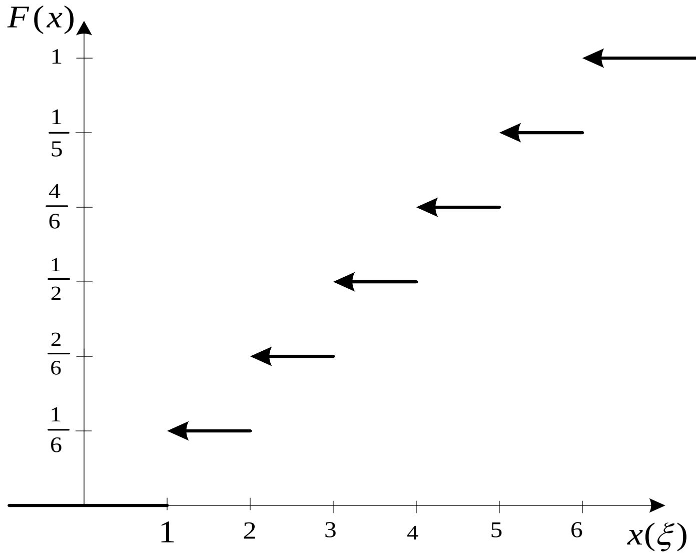


Рисунок 2.2

Приклад. Знайти функцію розподілу дискретної випадкової величини заданої рядом розподілу

X	–1	1	4
p	0,3	0,5	0,2

Розв'язування. При обчисленні значень функції $F(x)$ будемо користуватись її означенням. Напевне, її значення мають змінюватись при переході через можливі значення випадкової величини, тому будемо визначати $F(x)$ на проміжках, відокремлених можливими значеннями випадкової величини. При $x \le -1$ матимемо $F(x) = P(X < -1) = 0$, бо подія $(X < x)$ неможлива, оскільки жодне із трьох можливих значень не попадає на проміжок $(-\infty; -1]$; зокрема, $F(-1) = P(X < -1) = p(0) = 0$, тому правий кінець цього проміжку варто включати до нього. При $-1 < x \le 1$ *випадкова подія* $(X < x)$ рівносильна випадковій події $(X = -1)$, бо тільки можливе значення $x_1 = -1$ лежить лівіше вибраного x, тому

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0{,}3.$$

При $1 < x \le 4$ будемо мати, що випадкова подія $(X < x) = (X = -1)+(X = 1)$, тому що лівіше вибраного x знаходиться два із можливих значень $x_1 = -1$ і $x_1 = 1$. Випадкові події (Х = –1) і (X=1) несумісні за означенням випадкової величини, оскільки вона може прийняти те чи інше значення, але тільки одне.

Тоді $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$. При $x > 4$ лівіше вибраного значення x знаходяться всі три можливі значення, тому випадкова подія $(X < x)$ дорівнює сумі випадкових подій $(X = -1)$, $(X=1)$ і $(X = 4)$, які є несумісними. Тоді $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X \le -1) + P(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1$. Запишемо тепер вираз функції розподілу $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{при} \ x \le -1, \\ 0{,}3, \ \textit{при} \ -1 < x \le 1, \\ 0{,}8, \ \textit{при} \ 1 < x \le 4, \\ 1, \ \textit{при} \ x > 4. \end{cases}$$

і побудуємо її графік.

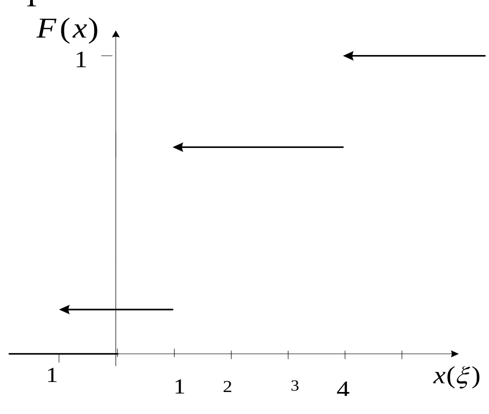


Рисунок 2.3

З графіка цієї функції видно, що $F(-\infty)=P(x)=0$, $F(+\infty)=1$, при зростанні x функція $F(x)$ не спадає, вона розривна в точках, що є можливими значеннями випадкової величини.

2.8 Числові характеристики випадкових величин

Математичним сподіванням (mathematical expectation) $M(\xi) = = M\xi$ ***дискретної випадкової величини*** ξ називається сума парних добутків всіх можливих значень випадкової величини на відповідні їм імовірності:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{n} x_i\ \rho_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots x_i p_i + \dots x_n p_{ї} \qquad (2.8)$$

причому $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

Приклад 21. Визначити математичне сподівання випадкової величини ξ – числа попадань при трьох пострілах, якщо імовірність попадання при кожному пострілі $p = 0,4$.

Розв'язання.

Випадкова величина може прийняти значення: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Складемо таблицю розподілу цієї випадкової величини. Імовірності цих значень знаходимо за схемою Бернуллі: $n = 3$; $p = 0,4$; $q = 0,6$.

$$\overline{M}\xi \to M\xi,\ n \to \infty.$$

$$\mathrm{P(x = 0) = C_3^0 \cdot 0,6^3 = 0,216;}$$

$$\mathrm{P(x = 1) = C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 = 0,432;}$$

$$\mathrm{P(x = 2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288;}$$

$$\mathrm{P(x = 3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 = 0,064.}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
ξ	0	1	2	3
$P(\xi = x\kappa)$	0,216	0,432	0,288	0,064

$$\sum_{k=0}^{3} P(\xi = x_k) = 1.$$

Математичне сподівання обчислюємо за формулою:

$M\xi = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2$; $M\xi$ – середнє арифметичне числа попадань.

Дисперсія випадкової величини є математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Випадкова величина $(\xi - M_\xi)^2$ має той же закон імовірності, що й ξ, тому

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{i-1}^{n}(x_i - M\xi)^2\, p_i \tag{2.9}$$

для дискретної випадкової величини. Розмірність дисперсії дорівнює квадрату розмірності випадкової величини.

Приклад 22. Проводиться 4 незалежних досліди, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю 0,4. Розглядається *випадкова величина X* – число появ події A в чотирьох дослідах. Побудувати ряд і функцію розподілу випадкової величини X. Знайти математичне сподівання $M(x)$ і дисперсію $D(x)$, середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання.

Випробувана величина X може набувати таких значень: x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3, x_5=4. Імовірність знайдемо за формулою:

$$P(x = k) = C_4^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$P_4(0) = C_4^0 \cdot (0{,}4)^0 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}1296$

$P_4(1) = C_4^1 \cdot (0{,}4)^1 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$

$P_4(2) = C_4^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}3456$

$P_4(3) = C_4^3 \cdot (0{,}4)^3 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}1536$

$P_4(4) = C_4^4 \cdot (0{,}4)^4 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}0256$

X	0	1	2	3	4
p	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Побудуємо функцію розподілу

при $x \le 0$ $F(x) = 0$
при $0 < x \le 1$ $F(x) = 0{,}1296$
при $1 < x \le 2$ $F(x) = 0{,}1296+0{,}3456 = 0{,}4752$
при $2 < x \le 3$ $F(x) = 0{,}4752+0{,}3456 = 0{,}8208$
при $3 < x \le 4$ $F(x) = 0{,}8208+0{,}1536 = 0{,}9744$
при $x > 4$ $F(x) =0{,}9744+0{,}0256 = 1$.

$M(x) = 0\cdot 0{,}1296 + 1\cdot 0{,}3456 + 2\cdot 0{,}3456 + 3\cdot 0{,}1536 + 4\cdot 0{,}0256 = 1{,}6$

$D(x) = \sum (x - M(x))^2 \cdot p_i$

$D(x) = (0-1{,}6)^2\cdot 0{,}1296 + (1-1{,}6)^2\cdot 0{,}3456 + (2-1{,}6)^2\cdot 0{,}3456 +$

$+ (3-1{,}6)^2\cdot 0{,}1536 + (4-1{,}6)^2\cdot 0{,}0256 = 0{,}96$

$\sigma(x) = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}9798$

Приклад. Пристрій складається з 50 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу будь-якого елемента за час проведення досліду дорівнює 0,08. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа елементів, що вийдуть з ладу за час проведення досліду.

Розв'язування.

Нехай X – число елементів, що вийдуть з ладу за час проведення досліду. Зрозуміло, що ця випадкова величина має біноміальний розподіл, оскільки імовірність відмови будь-якого елемента є стала і дорівнює 0,08, тобто p = 0,08. Застосуємо формули (2.8) і (2.9) при n = 50, p = 0,08 і $q = 1 - p = 0{,}92$, будемо мати:

$$M(X) = 50 \cdot 0{,}08 = 4, \quad D(X) = 50 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 = 3{,}68.$$

2.9 Неперервні випадкові величини

Крім дискретних випадкових величин, які приймають окремі числові значення і утворюють скінченну або нескінченну послідовність чисел, часто також зустрічаються випадкові величини, можливі значення яких *заповнюють деякий інтервал*, такі величини називаються ***неперервними випадковими величинами.*** Випадкова величина ξ називається ***неперервною*** (**continuous**), якщо для неї існує невід'ємна, кусково-неперервна функція $f(x)$, така, що для всіх $x \in (-\infty; \infty)$ виконується рівність:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \,, \qquad (2.10)$$

де $f(x) \ge 0$ і задовольняє умову $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Прикладом такої випадкової величини може бути відхилення від номіналу певного розміру деталі при правильно налагодженому процесі. Такі випадкові величини не можуть бути задані за допомогою закону розподілу ймовірностей $P(x)$, не можна кожному значенню поставити у відповідність імовірність.

Функція розподілу $F(x)$ задається аналогічно:

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Функція $F(x)$ задана для всіх $x \in (-\infty; \infty)$, і її значення в точці x рівне імовірності того, що випадкова величина прийме значення, менше x.

Функція $f(t)$ у формулі (2.10) називається ***щільністю (густиною)*** (***the density***) розподілу ймовірностей або коротко ***щільністю розподілу*** (***the density distribution***). Якщо $x_1 < x_2$, то одержимо:

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt. \qquad (2.11)$$

2.10 Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичним сподіванням $M\xi$ ***неперервної випадкової величини*** ξ *з* густиною розподілу *f(x)* називається число, яке визначається рівністю

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \,.$$

Дисперсія випадкової величини є математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Для неперервної випадкової величини дисперсія дорівнює:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx \,.$$

2.11 Рівномірний розподіл для неперервних випадкових величин

Розподіл імовірностей називають ***рівномірним***, якщо на інтервалі, до якого належать всі можливі значення випадкової величини, густина розподілу зберігає стале значення C при $x \in [a, в]$.

Оскільки всі можливі значення випадкової величини містяться на інтервалі $(a,\ b)$ і $f(x) = 0$ при $x < a$ і $x > в$, то має виконуватись співвідношення:

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad \text{або} \quad \int_a^b c dx = 1 \ \text{ і } \ c = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, густина ймовірності рівномірного розподілу, зображена на рис. 2.4 (а) аналітично запишеться:

$$f(x) = \begin{cases} 0, при x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} при a \le x \le b, \\ 0, при x > b. \end{cases}$$

Знайдемо функцію розподілу рівномірно розподіленої на *(a, b)* випадкової величини:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{X} f(x)dx \,.$$

1) Для $x < a$, $F(x) = \int_{-\infty}^{X} 0(x)dx = 0$;

2) Для $a \le x \le b$ $F(x) = \int_a^X f(x)dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$;

3) Для $x > b$ $F(x) = \int_{-\infty}^{a<x} 0dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^{+\infty} 0dx = 1.$

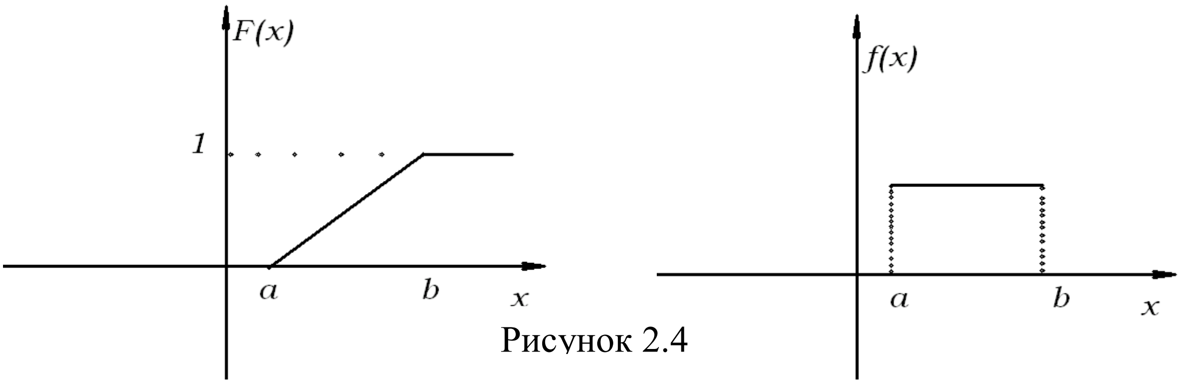


Рисунок 2.4

а) б)

На рис. 2.4 (б) зображено функцію розподілу рівномірно розподіленої на [*a, b*] випадкової величини.

Математичне сподівання дорівнює:

$$M\xi = \int_a^b \frac{xdx}{в-a} = \frac{1}{в-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Дисперсія:

$$D\xi = \frac{a^2+ba+b^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{1}{12}(4a^2+4ab+4b^2-3b^2-6ab-3a^2) =$$

$$= \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

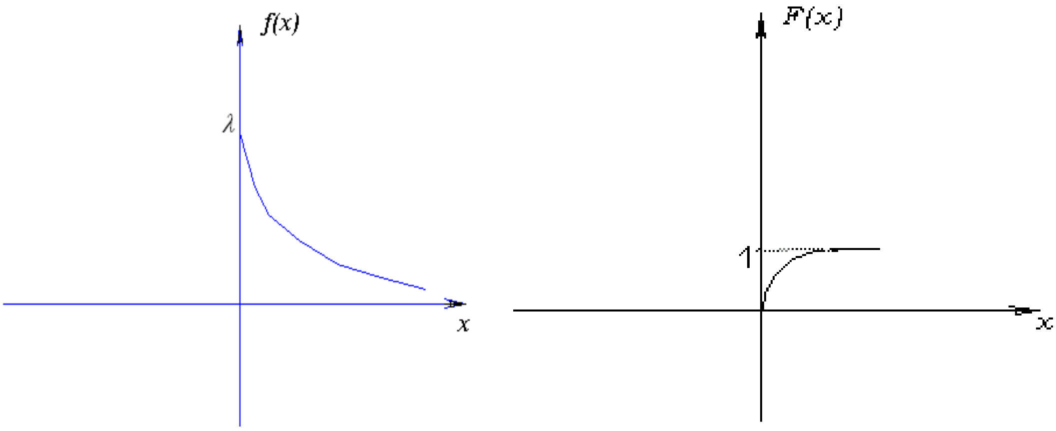
Середнє квадратичне відхилення: $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

2.12 Показниковий (експоненціальний) розподіл для н. в. в.

Показниковий розподіл (***експоненціальний розподіл***) – це розподіл неперервної випадкової величини ξ з параметром $\lambda > 0$, заданої законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \ при \ \ x < 0 \\ \lambda x^{-\lambda x}, \ \ при \ \ x \geq 0. \end{cases}$$

Графік щільності експоненціального розподілу зображено на (рис. 2.5, а, б)



а) б)

Рисунок 2.5

Функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} f(t)dt=-\int_{0}^{x}\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda}d(-t\lambda)=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}.$$

Математичне сподівання $M\xi=\frac{1}{\lambda}$. *Дисперсія* $D\xi=\frac{1}{\lambda^2}$.

Імовірність попадання а відрізок $[a,b]$.

$$P(a\le\xi\le b)=\int_{a}^{в} f(x)dx=\lambda\int_{a}^{b} e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_a^b=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda a}.$$

Експоненціальний розподіл використовується в теорії надійності.

Функція надійності $R(t)$ визначає імовірність безвідмовної роботи елемента за час t: $R(t)=exp[-\lambda t]$.

Приклад 23. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1-A/x, & x\ge 1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, щільність розподілу ймовірностей, ймовірність попадання випадкової величини на інтервал [3; 5]. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$.

Розв'язування. 1. Коефіцієнт A визначимо, використовуючи те, що функція розподілу $F(x)$ неперервна, зокрема скористаємось тим, що функція $F(x)$ неперервна в точці $x = 1$, а це означає, що виконується рівність $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=F(1)$. Визначимо праву і ліву частину цієї рівності.

$F(1)=1-A;\ \lim\limits_{x\to 1-0} F(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} 0=0.$ Тоді матимемо, що $1-A=0,$ звідки матимемо, $A=1$. Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1-1/x, & x\ge 1/x.\end{cases}$$

1. Щільність розподілу ймовірностей визначимо, користуючись формулою $f(x)=F'(x)$. Оскільки $(1-1/x)'=1/x^2$, будемо мати

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1/x^2, & x\geq 1.\end{cases}$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини знайдемо, користуючись формулою $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)$. Отримаємо:

$$P(3\leq X\leq 5)=F(5)-F(3)=1-1/5-(1-1/3)=2/15.$$

Графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$ зображенні на рис. 2.6 і 2.7 відповідно.

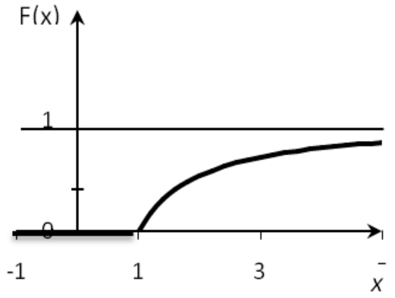


Рисунок 2.6

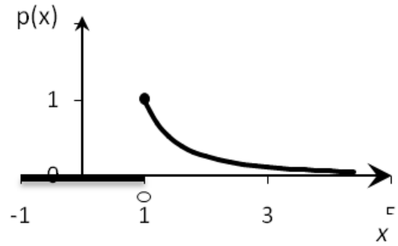


Рисунок 2.7

Приклад 24. Випадкова величина X задана щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}a\sin x, & при\ 0\leq x<\pi,\\ 0, & при\ 0<x\ i\ x>\pi.\end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $(0;\ \pi/3)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

Розв'язування. 1) Коефіцієнт a визначимо, користуючись відомою інтегральною властивістю щільності розподілу, а саме $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1.$

Оскільки,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{\pi}a\sin xdx+\int\limits_{\pi}^{+\infty}0dx=a\cdot\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx=-a\cos x\Big|_{0}^{\pi}=-a(\cos\pi-\cos 0)=2a,$$

То матимемо $2a=1$, звідки $a=1/2$. Отже,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & при\ 0\leq x<\pi,\\ 0, & при\ 0<x\ i\ x>\pi.\end{cases}$$

2) Функцію розподілу $F(x)$ визначимо на кожному із трьох проміжків за формулою $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$:

а) при $x<0$ маємо $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0;$

б) при $0\le x\le \pi$ маємо

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\sin tdt=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x=-\frac{1}{2}(\cos x-\cos 0)=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos x)$$

в) при $x>\pi$ маємо

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\sin tdt+\int\limits_{\pi}^{x} 0dt=-\frac{1}{2}\cdot\cos t\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\cdot(\cos\pi-\cos 0)=1.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}\cdot(1-\cos x), & 0\le x\le\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

3) $P\left(0<X<\frac{\pi}{3}\right)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} p(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx=\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3}\cos 0)=\frac{1}{4}$.

4. Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ зображені на рис. 2.8 і 2.9.

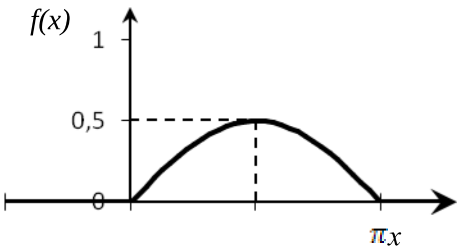


Рисунок 2.8

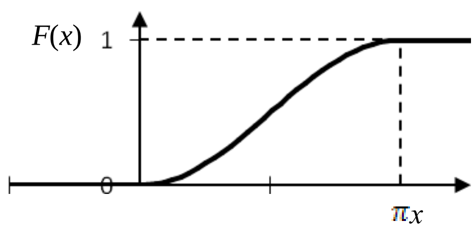


Рисунок 2.9

Приклад 25. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}ax^2, & при\ 0\le x<3,\\ 0, & при\ 0<x\ і\ x>3.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a і математичне сподівання випадкової величини.

Розв'язування. 1. За інтегральною властивістю щільності розподілу ймовірностей $p(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$ будемо мати $\int\limits_0^3 ax^2dx=\frac{ax^3}{3}\Big|_0^3=9a=1$.

Звідки $a=\frac{1}{9}$.

Отже, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & при\ 0\le x<3,\\ 0, & при\ 0<x\ і\ x>3.\end{cases}$

Знайдемо математичне сподівання цієї випадкової величини:

$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int\limits_0^3 x\left(\frac{1}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{9}\cdot\int\limits_0^3 x^3dx=9/4.$ Отже, $M(X)=2{,}25$.

2.13 Нормальний закон розподілу

Випадкова величина ξ нормально розподілена або підпорядковується закону розподілу Гаусса, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – довільне дійсне число, $\sigma > 0$.

Виходячи з такого визначення, функція розподілу може бути записана:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt\cdot$$

Графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої $x = a$.

За допомогою похідних можна показати, що функція $f(x)$ досягає максимуму при $x = a$, а її графік має точки перетину при $x_1=a+\sigma$ і $x_2=a-\sigma$ (рис. 2.10).

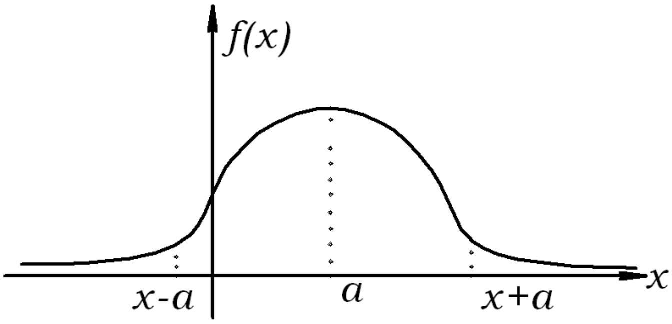


Рисунок 2.10

Знайдемо імовірність попадання величини ξ у заданий інтервал:

$$P(\alpha \le \xi \le \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) \qquad (2.12)$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Знайдемо імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина ξ відхиляється від параметра a за абсолютною величиною не більше, ніж на ε, тобто $P(|\xi - a| \le \varepsilon)$. Нерівність $|\xi - a| \le \varepsilon$ рівносильна нерівностям $a - \varepsilon \le \xi \le a + \varepsilon$. Беремо в рівності (2. 2) $x_1 = a - \varepsilon$, $x_2 = a + \varepsilon$ і одержимо:

$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = P(a - \varepsilon \le \xi \le a + \varepsilon) = \Phi(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Унаслідок того, що інтеграл ймовірностей непарна функція:

$$\Phi(-\frac{\varepsilon}{\sigma}) = -\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Тому

$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}). \qquad (2.13)$$

Приклад. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показання приладу округляють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде допущена похибка менша 0,04.

Розв'язування. Похибку округлення відліку можна вважати як рівномірно розподілену випадкову величину в проміжку між двома сусідніми поділками, тобто на проміжку довжиною 0,2, тоді її щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ = 1/0,2 = 5 при $x \in (0;\ 0{,}2)$ і $p(x) = 0$ при $x < 0$ і $x > 0{,}2$.

Те, що похибка округлення відліку не перевищує 0,04, означає, що випадкова величина X попадає на проміжок (0; 0,04) або на проміжок (0,016; 0,2) (відстань показання приладу від лівого або правого кінця не має перевищувати 0,04). Тоді шукана ймовірність обчислюється за формулою

$$P\big((0 < X < 0{,}04) + (0{,}16 < X < 0{,}2)\big) = \int_0^{0{,}04} 5dx + \int_{0{,}16}^{0{,}2} 5dx = 5(0{,}04 + 0{,}04) = 0{,}4.$$

Приклад. Похибка результатів вимірювання має нормальний закон розподілу з параметрами a = 0 і σ = 1 (так звана нормована випадкова величина). Знайти ймовірність того, що похибка вимірювання буде не більше 1,5 і не менше 0,5.

Розв'язування. Нехай X – похибка вимірювання. Треба знайти $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$.

Застосуємо формулу (2.2) при α = 0,5 і β = 1,5 (a = 0, σ = 1), будемо мати, що $P(0,5 < X < 1,5) = \Phi(1,5) - \Phi(0,5) = 0,4332 - 0,1915 = 0,2417$.

Завдання для самостійної роботи до розділу 2

Схема Бернуллі, найімовірніше число.

1. Імовірність появи події A в досліді рівна 1\4. Дослід повторили 8 разів незалежним чином. Знайти ймовірність того, що: а) подія A при цьому з’явиться не більше двох разів; б) подія A з’явиться більше чотирьох разів; чому рівне найбільш ймовірне число появ події A?

2. Нехай схожість пшениці становить 90%. Чому рівна ймовірність того, що з семи посіяних насінин зійдуть п’ять?

3. Імовірність виготовлення нестандартної деталі 0,015. Скільки деталей має бути в партії, щоб найімовірніше число стандартних деталей в ній було рівно 55?

4. Імовірність попадання в десятку при одному пострілі рівна 0,3. Скільки має бути виконано пострілів, щоб ймовірність якнайменше одного попадання в десятку була більше 0,9?

Закони розподілу

1. Проводиться 5 пострілів, з імовірністю попадання 0,8. Скласти ряд розподілу дискретної випадкової величини – кількості попадань. Побудувати ряд, функцію розподілу. Знайти числові характеристики.

2. Імовірність проростання зернини 0,8. Посіяли 6 зернин. Скласти ряд розподілу дискретної випадкової величини – проросли зернин. Знайти числові характеристики.

3. Імовірність того, що у підручнику буде знайдено помилку 0,03. Перевіряють 1000 підручників. Яка ймовірність того, що при перевірці буде знайдено 9 помилок?

4. Підручник видано тиражем 10 000 примірників. Імовірність того, що екземпляр підручника зброшурований неправильно, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що тираж містить 10 бракованих книг.

5. Задається випадкова величина X на інтервалі [5; 90]. Знайти ймовірність того, що випадкова величина прийме значення

а) з інтервалу [10; 35];

б) менше 60;

в) більше 40.

6. Випадкова величина X задана функцією густини ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{при } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{при } 0 < x \text{ і } x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a і математичне сподівання випадкової величини.

РОЗДІЛ 3
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Центральна гранична теорема теорії ймовірності (теорема Ляпунова) встановлює умови, за яких вказаний граничний закон є нормальним (О. М. Ляпунов (1857–1918) – видатний російський математик).

Теорема. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з математичними сподіваннями $M(\xi_i)=a$, дисперсіями $D(\xi_i)=\sigma_{\xi_i}{}^2$. Ці величини мають такі дві властивості:

1. Існує таке L, що для будь-якого i має місце нерівність $|\xi_i - M(\xi_i)| < L$, тобто всі значення випадкових величин, як то кажуть, рівномірно обмежені щодо їхніх математичних сподівань.

2. Сума $\sum_{i=1}^{n} \sigma i^2$ необмежено зростає при $n \to \infty$.

Тоді при досить великому n сума $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ має розподіл, близький до нормального (без доведення).

Нехай a і σ^2 — математичне сподівання і дисперсія випадкової величини

З теореми Ляпунова випадкова величина ξ для великих значень n має розподіл, близький до нормального, тобто має місце формула

$$P(x_1 < \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n < x_2) \approx \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \qquad (3.1)$$

де Φ – інтеграл імовірності.

3.1 Інтегральна і локальна теореми Лапласа (Муавра-Лапласа)

Теорема. Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність поява події A одна й та ж і рівна p ($p \neq 1,\ p \neq 0$). Нехай m – число появ події A в n вимірюваннях. Тоді для достатньо великих n випадкова величина m має розподіл, близький до нормального, з параметрами $a = M(m) = np$, $\sigma = \sqrt{D(m)} = \sqrt{npq}$.

Обчислимо ймовірність того, що випадкова величина m, тобто кількість появ події A в n випробуваннях, задовольняє нерівність $x_1 < m < x_2$, де x_1 і x_2 – дані числа. Оскільки, $\sigma = \sigma(m) = \sqrt{npq}$, то

$$P(x_1 < m < x_2) \approx \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

ІІ частина теореми (локальна теорема Лапласа)

$P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$ для достатньо великих n.

Функція $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2}$ – щільність нормального закону затабульована.

Приклад 26.

Знайти ймовірність того, що подія *A* з'явиться рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні рівна 0,25.

Розв'язання.

За умовою n = 243; k = 70, p = 0,25; q = 0,75. Оскільки n = 243 – достатньо велике число, скористаємося локальною теоремою Лапласа;

$$P_n(k=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x));\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}};$$

$$x=\frac{70-243\cdot 0,25}{\sqrt{243\cdot 0,25\cdot 0,75}}=\frac{9,25}{6,75}=1,37;$$

$$\varphi(1,37)=0,1561;$$

$$P_{243}(70)=\frac{1}{6,75}\cdot 0,1561=0,0231.$$

Знайдемо: $P(70<\xi<140)$;

$$\frac{140-60,75}{6,75}=11,08;\quad \frac{70-60,75}{6,75}=1,37.$$

$$P(70<\xi<140)\approx 0,5-0,4147\approx 0,0853.$$

$$P(55<\xi<65)\approx\Phi(\frac{65-60,75}{6,75})-\Phi(\frac{55-60,75}{6,75})\approx\Phi(0,68)+\Phi(0,95)=$$

$$=0,2517+0,3212=0,5729.$$

Приклад 27. Знайти ймовірність того, що в результаті 1000 підкидань монети число випадання герба буде знаходитися в інтервалі (475, 525).

Розв'язання.

p=0,5; n=1000. Отже, np=500, npq=250.

Вважаючи у формулі:

$$P(\alpha<\xi<\beta)\approx\Phi(\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}});\quad [P(|\xi-a|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})];$$

$$\alpha=475,\ \beta=525,$$

отримаємо

$$P(475<\xi<525)\approx\Phi(\frac{525-500}{\sqrt{250}})-\Phi(\frac{475-500}{\sqrt{250}})=$$

$$=2\Phi(\frac{25}{15,5})=2\Phi(1,5)=0,8854$$

Приклад 28. Завод випускає 90% виробів першого сорту і 10% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Знайти ймовірність того, що число виробів першого сорту опиниться в межах від 900 до 940.

Розв'язання.

Імовірність вибору виробів першого сорту p = 0,9, число дослідів n = 1000. Отже, np = 900, npq = 90.

Застосовуючи формулу

$$P(\alpha < \xi < \beta) \approx \Phi(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}), \qquad (3.1.1)$$

отримаємо

$$P(900 < \xi < 940) \approx \Phi(\frac{940-900}{\sqrt{90}}) - \Phi(\frac{900-900}{\sqrt{900}}) \approx \Phi(\frac{40}{3\cdot 3,01}) = 0,5 \ .$$

Формула (3.1) спрощується, якщо α менше, а β більше $M_\xi = np$ на одне і те ж число ε

$$P(np - \varepsilon < \xi < np + \varepsilon) = P(|\xi - np| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}) \ . \qquad (3.1.2)$$

Частота події $p^*(A) = \dfrac{m}{n}$ є випадковою величиною, математичне сподівання якої $M(\dfrac{m}{n}) = p$, а дисперсія $\dfrac{1}{n^2}D(m) = D(\dfrac{m}{n}) = \dfrac{qp}{n}$. Тому можемо записати:

$$P(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) \ . \qquad (3.2)$$

Приклад 29. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі рівна 0,7. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб з імовірністю, не меншою 0,96; можна було стверджувати, що відхилення частоти попадання в ціль від імовірності тієї ж події буде не більше 0,01?

Розв'язання.

Використовуючи формулу (3.2) при p = 0,7, q = 1–p=0,3, $\varepsilon = 0,01$ і $\Phi(t)$ = 0,96 отримаємо:

$$P(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon) = 2\Phi(0,01\sqrt{\frac{n}{0,21}}) = 0,96 \ .$$

$$0,01\sqrt{\frac{n}{0,21}} = 2,05; \quad n \approx 8825 .$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що число бракованих деталей в партії із 10 000 деталей з імовірністю браку 0,005 не буде перевищувати 70. Знайти ймовірність найімовірнішого числа бракованих деталей.

Розв'язування. Нехай X – число бракованих деталей. Треба знайти $P(\leq x \leq 70)$ Оскільки n = 10000 число досить велике, то закон розподілу випадкової величини X близький до нормального розподілу, тому можна скористуватись формулою (3.1.1) при α = 0, β = 70.

Враховуючи те, що $a = np$ і $\sigma = \sqrt{npq}$, при p = 0,005 і n = 10 000 матимемо, що np = 50, $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0{,}995} \approx 7$. Тоді

$$P(\leq x \leq 70) \approx \Phi\left(\frac{70-50}{7}\right) - \Phi\left(\frac{0-50}{7}\right) \approx \Phi(2{,}9) + \Phi(7{,}1) = 0{,}4981 + 0{,}5 = 0{,}0081 .$$

Оскільки найімовірніше число m_0 появ бракованих деталей – це математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини X (саме для цього значення щільність розподілу ймовірностей є найбільшою), то шукана ймовірність наближено дорівнює значенню щільності ймовірностей $p(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ нормального розподілу при $x = a = 50$, тоді отримаємо

$$P_{10000}(50) = 1/7\sqrt{2\pi \approx 0{,}06} .$$

Завдання для самостійної роботи до розділу 3

1. Іспит з першого разу складають 75% студентів. Знайти ймовірність того, що із 500 студентів іспит складуть: а) 250 студентів; б) не менше 300 студентів.

2. У кожному з 625 незалежних випробуваннях подія A відбувається з постійною ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться точно

   1) 400 разів;
   2) менше 500 і більше 450 разів;
   3) менше 300 разів;
   4) більше 550 разів.

3. Знайти ймовірність того, що число бракованих деталей в партії із 1000 деталей з імовірністю браку 0,001 не буде перевищувати 50. Знайти ймовірність найімовірнішого числа бракованих деталей.

4. Ймовірність появи події A в кожному незалежному експерименті дорівнює 0,8. Скільки потрібно здійснити експериментів, щоб з ймовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія A відбудеться не менше, ніж 75 разів?

5. Знайти приблизно ймовірність того, що під час 400 випробувань успіх настане рівно 104 рази, якщо ймовірність в кожному випробуванні дорівнює 0,3.

Завдання для індивідуальної роботи

Вибір коефіцієнтів V – номер варіанта, $A = V$, $B = A+2$, $H = A+B-1$

Задача 1.

Контролю підлягає $20(A+B)+15H$ виробів, серед яких $10B+H$ бракованих. Знайти ймовірність того, що взятий навмання вибір є а) бракованим; б) якісним; в) скільки якісних виробів можна чекати із $100(A+B+H)$ виробів?

Задача 2.

У ящику знаходиться $2A+3B+H$ різних предметів. З ящика навмання беруть один із предметів, реєструють і повертають назад в ящик. Дослід повторюють тричі. Знайти ймовірність того, що всі предмети в такій вибірці з поверненням будуть різні.

Задача 3.

Перевіряють партію готових виробів за двома ознаками (розмір і вага). Вироби, у яких розмір або вага менші за стандарт, бракують; вироби у яких розмір і вага більші ніж стандартні повертають на переробку; придатні вироби надходять споживачеві. Як побудувати простір елементарних подій у досліді, у якому перевіряється партія товару з $2A+4B+5H$ виробів? Яка кількість елементарних подій?

Задача 4.

В аудиторії знаходиться $10(A+B)+H$ студентів. Знайти імовірність того, що принаймні у H з них співпадають дні народження.

Задача 5.

Під час прийому масової продукції проводять вибіркових контроль: з партії, що складається з $100(A+B+H)$ виробів, беруть навмання $20(A+B+H)$, і коли виявляється у цій вибірці принаймні один виріб з дефектом, бракують або передають для суцільної перевірки всю партію. У партії $10(A+B+H)$ виробів з дефектами. Яка імовірність того, що принаймні один такий виріб потрапить у вибірку?

Задача 6.

$(A+B+H)$ гостей прийшли в капелюхах. Яка імовірність того, що повертаючись додому кожен з них одягне свого капелюха?

Задача 7. (A+B+H) книжок розставлені навмання на одній полиці. Знайти імовірність того, що певні A+H книжки стоятимуть поряд.

Задача 8.

У ліфт (6+A+B+H)-поверхового будинку на першому поверсі зайшли (2+A+H) людей. Кожен з них може вийти з різною імовірністю на кожному поверсі, починаючи з другого. Знайти імовірність того, що всі пасажири вийдуть: а) на різних поверхах; б) на одному і тому ж поверсі; в) на (B+H) поверсі; г) принаймні один вийде на (A+3B)-поверсі; д)ніхто не вийде на (A+3)-поверсі.

Задача 9.

Завод випускає масову продукцію. Якщо виріб, пропущений заводом протягом року виходить з ладу, його необхідно замінити запасним. Скільки потрібно запасних виробів, якщо протягом року продається 100(A+H)+250(B+H) виробів і у вибірковій вибірці з 20(A+H)+50(B+H) виробів протягом року вийшло з ладу 10(A+H)+5(B+H) виробів?

Задача 10. На будівельний майданчик з одного заводу завезли 1000(A+H) штук цегли, а з другого – 1000(B+H) штук. Перший завод дає (A+H)% бракованої продукції, а другий – (B+H)%. Знайти імовірність того, що навмання взята цегла не буде бракованою.

Задача 11.

Яка імовірність того, що при випадковому розміщенні в ряд карток розрізаної азбуки, на яких написані всі букви прізвища та імені студента, отримаємо прізвище та ім’я студента.

Задача 12.

У партії з 5(A+H)+10B виробів 2(A+H)+3B штук бракованих. Знайти імовірність того, що серед вибраних навмання (A+2H+B) виробів, рівно (A+B+2) буде бракованих.

Задача 13.

На відрізку [0; A+B+H] навмання вибрано два числа x і y. Знайти імовірність того, що ці числа задовольняють нерівність

$$x^2 \le (1+H)(A+B+H)y \le (1+H)(A+B+H).$$

Задача 14. Знайти імовірність того, що кинута навмання монета на площину більшого еліпса, попаде у фігуру

$$x^2 \le (1+H)(A+B+H)y \le (1+H)(A+B+H)$$

Задача 15.

Імовірність того, що деталь було нестандартною дорівнює 0,HAB. Знайти, яку кількість деталей потрібно взяти, щоб з імовірністю 0,A можна було стверджувати, що хоча б одна з них буде стандартною?

Задача 16.

На склад будівельних матеріалів зайшло A+B+H покупців. Імовірність того, що покупець зробить покупку, дорівнює 0,Н. Знайти ймовірність того, що B+1 покупці зроблять покупки.

Задача 17. На будівництво висотного будинку віконні рами постачають три фірми. Перша постачає 20%, друга – 30%, третя – 50%. Брак першої фірми становить (A+1)%, другої – (B+1)%, третьої – H%. Знайти імовірність того, що

1) взята навмання рама виявилась без дефектів;

2) взята навмання рама з дефектом, якій фірмі найбільш імовірною вона належить?

Задача 18.

У першій урні знаходиться (A+2H) білих і (B+2H) чорних куль, а в другій – (A+1) білих і (B+1) чорних куль. З першої урни до другої переклали 4 кулі, після чого з другої урни взяли (A+B) куль. Знайти імовірність того, що вони одного кольору.

Задача 19.

Установити найімовірніше число дощових днів у жовтні, якщо середнє число ясних днів у кожній декаді цього місяця дорівнює 6.

Задача 20.

Нові прилади при виготовленні досліджують на міцність вібрації різноманітні перевантаження. Припустимо, що імовірність p – критичного перевантаження для приладу при одиничному досліді дорівнює 0,4. Експериментатор вирішив провести три досліди з приладом. Відомо, що імовірність виходу з ладу приладу при одноразовому перевантаженні 0,2; при двократному – 0,5; при трикратному – 0,8. Знайти імовірність виходу з ладу приладу при трьох випробуваннях.

Задача 21.

Оптова база забезпечує (A+B+H) господарчих магазинів будівельними матеріалами. З кожного магазину може з'явитись заявка на наступний день з імовірністю $0,H$ незалежно від заявок інших магазинів. Знайти імовірність одержання:

1) (A+B) заявок в день;

2) не більше (A+B) заявок у день;

3) не менше (A+B) заявок у день.

Задача 22.

З гармати стріляють по групі з (A+B+H) танків. Імовірність того, що танк буде підбитий дорівнює $0,H$. Визначити найімовірніше число підбитих танків.

Задача 23.

Імовірність випуску свердла підвищеної крихкості дорівнює $0,0AB$. Свердла складають в коробки по 100 штук. Визначити імовірність того, що в коробці:

1) не буде свердел підвищеної крихкості;

2) число свердел підвищеної крихкості не перевищує H.

Задача 24. Імовірність влучення у мішень при одному пострілі дорівнює р=$0,H$. Яка ймовірність того, що при 10(A+B+H) пострілах по мішені буде рівно 2(B+H) влучень?

Задача 25.

У партії з 100(*A*+*B*+*H*) виробів є 10(*A*+*B*+*H*) виробів вищого ґатунку. Знайти імовірність того, що серед навмання взятих з цієї партії 10(*A*+*B*+*H*) виробів буде (*B*+*H*) виробів вищого ґатунку. (Обчислення зробити за формулами Бернуллі, Пуассона, Муавра-Лапласса і оцінити похибку обчислень).

Задача 29.

Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ (Hx^2+Bx)/5, & 0<x\le (A+B+H),\\ 1, & x>(A+B+H).\end{cases}$$

Знайти функцію щільності ймовірностей та побудувати графіки функцій щільності та розподілу ймовірностей; обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення; знайти $P(X<M(X))$ двома методами.

Задача 30.

Випадкова величина має щільність розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\cdot e^{-(A+B+H)x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Знайти 1) коефіцієнт *a*; *2)* математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення; 3) знайти функцію розподілу ймовірностей та побудувати графіки функцій щільності та розподілу ймовірностей; знайти

$P(X<M(X))$; 4) знайти $P(|X-M(X)|<3\sigma)$.

Задача 31.

Стандартне відхилення випадкової величини X $\sigma=(A+B+H)$ мм, *M(X)=10*(*A*+*B*+*H*) см, випадкова величина має нормальний закон розподілу. Знайти межі в яких з імовірністю *0,9HBA* варто очікувати значення випадкової величини *X*.

Задача 32.

X	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік. Значення параметрів обчислити таким чином:

R= остача(V/4)+2, V – номер варіанта.

$x_1=V+3,\ x_2=x_1+R,\ x_3=x_2+R,\ x_4=x_3+2R.$

$$p_1=\frac{1}{R+5},\ p_2=\frac{1}{R+4},\ p_3=\frac{41+33R+R^2-R^3}{(R+3)(R+4)},\ p_4=\frac{1}{R-8}$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Результат спостереження чи досліду називаємо
1) подією;
2) комбінацією;
3) перестановкою;
4) простором.

2. Перестановку обчислюємо за формулою
1) $P=\frac{m}{n}$;
2) $P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$;
3) $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$;
4) $A_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

3. Скількома можливими способами можна вибрати з 15 людей делегацію в складі 3 осіб?
1) 1365;
2) 304;
3) 75;
4) 2341.

4. Імовірність суми сумісних подій обчислюється за формулою:
1) $P_A(B_i)\equiv\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}$;
2) $P\left(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(A_2\right)\cdot P_{A_1\cdot A_2}\left(A_3\right)\cdot\ldots\cdot P_{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}}\left(A_n\right)$;
3) $P\left(AB\right)=P\left(A\right)\cdot P_A\left(B\right)$;
4) $P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$.

5. Наведена формула $P(m\geq k)=C_n^m p^m q^{n-m}$ є формулою
1) Пуассона;
2) Лапласа;
3) Бернуллі;

4) Байєса.

6. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює
1) 0;
2) 4;
3) 10;
4) 1.
7. Наведена формула $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A)$
є формулою
1) формулою добутку подій;
2) формулою повної імовірності;
3) формулою незалежних випробувань;
4) не має змісту.

8. Таблиця

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(x_1)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

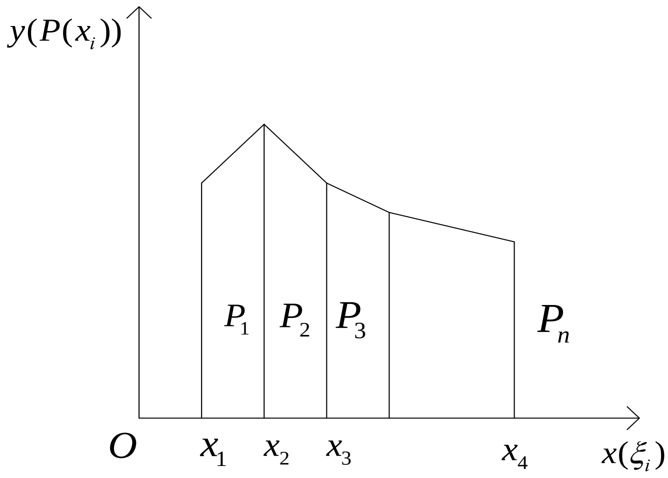
визначає
1) функцію розподілу;
2) закон розподілу;
3) повну ймовірність;
4) многокутник розподілу.

9. Наведена формула $np - q \le m_0 \le np + p$ є формулою
1) ймовірності;
2) найімовірнішої кількості появи події;
3) перестановки;
4) Муавра.

10. Визначити найбільш імовірне число збитих літаків в групі з 13 бомбардувальників, якщо літаки збивають незалежно один від одного. Імовірність поразки одного літака рівна 4/7.
1) один;
2) жодного;
3) три;
4) два.

11. Запишіть формулу Пуассона.

12. На рисунку зображено
1) многокутник розподілу;
2) функція розподілу;
3) щільність розподілу;
4) власна відповідь.



13. Сума парних добутків всіх можливих значень випадкової величини на відповідні їм імовірності називається:
1) щільністю розподілу;
2) математичне сподівання;
3) середнє квадратичне відхилення;
4) моментом першого порядку.

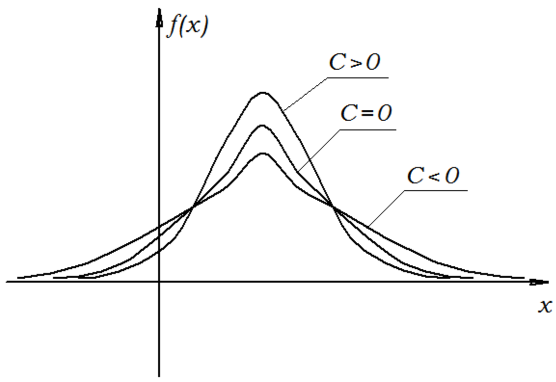
14. Задано закон розподілу $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a\le x\le b, \\ 0, & \text{при } x>b. \end{cases}$

Це:
1) показниковий розподіл;
2) геометричний розподіл;
3) гіпергеометричний.
4) рівномірний закон розподілу.

15. Наведена формула $M\xi=\sum_{i=1}^{n} x_i\ \rho_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_i p_i + \ldots x_n p_n$

є формулою
1) дисперсії;
2) повної ймовірності;
3) математичного сподівання;
4) перестановки.

16. На рисунку зображено криву нормального розподілу.
Показано залежність графіка від:
1) ексецу;
2) математичного сподівання;
3) дисперсії;
4) випадкової величини.



17. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б на один із білетів, якщо придбано 2 білети?
1) 0,098;
2) 1;
3) 8,1;
4) 0,7.

18. На іспиті з «Теорії ймовірностей» 24 білети. Студент знає 20 білетів. Він витягнув один білет і не знав його. Йому запропонували витягнути інший. Яка ймовірність того, що студент складе іспит?
1) 0,7;
2) 1,2;
3) 0,8;
4) 0,145.

19. Наведена формула $p_A(H_i) = \dfrac{p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)}{p(A)}$ описує теорему
1) Байєса;
2) Бернуллі;
3) Пуассона;
4) жодну.

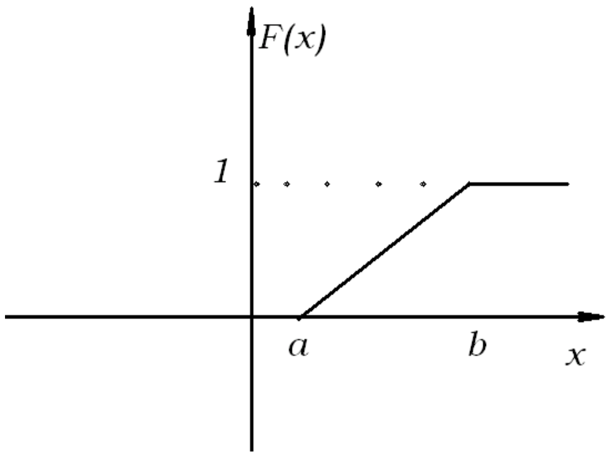
20. На завод прибула партія деталей кількістю 1000 штук. Імовірність того, що деталь буде бракованою, рівна 0,001. Імовірності того, що бракованих буде одна деталь:
1) 0,01;
2) $0{,}3679$;
3) 0,6;
4) 1, 3.

21. Значення в. в. ξ, при якому густина розподілу має найбільше значення, називається
1) математичним сподіванням;
2) медіаною;
3) модою;
4) дисперсією.

22. Математичне сподівання $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$ має вигляд для
1) нормального закону розподілу;
2) експоненціального розподілу;
3) гіпергеометричного;
4) рівномірного.

23. Інтеграл ймовірностей є
1) функція парна;
2) непарна;
3) ні парна, ні непарна;
4) визначити не можливо.

24. На рисунку зображено
1) інтегральну функцію рівномірного роз-поділу;
2) функцію щільності рівномірного розподілу;
3) інтегральну функцію показникового закону розподілу;
4) функцію щільності показникового закону розподілу.



25. Відношення числа випадків, що сприяють появі події А, до загального числа всіх випадків в даному експерименті називається
1) випадком,
2) ймовірністю випадкової події,
3) простором подій,
4) експериментом.

Відповіді до тестів

№ теста	Варіанти відповіді				№ теста	Варіанти відповіді			
	1	2	3	4		1	2	3	4
1	+				13		+		
2		+			14				+
3	+				15			+	
4		+			16	+			
5			+		17	+			
6				+	18			+	
7		+			19	+			
8		+			20		+		
9		+			21			+	
10				+	22		+		
11					23		+		
12	+				24	+			
					25		+		

Додаток А

Таблиця А.1

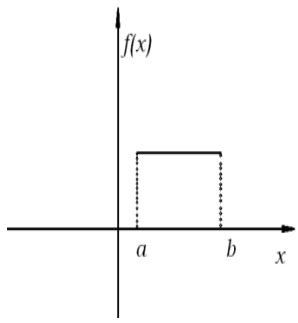
<table>
<tr>
<th>Назва закону

розподілу (неперервні випадкові величини), означення</th>
<th>Графічний вигляд функції розподілу F(x) та густини розподілу f(x)</th>
<th>Обчислення числових характеристик</th>
</tr>
<tr>
<td>Рівномірний розподіл

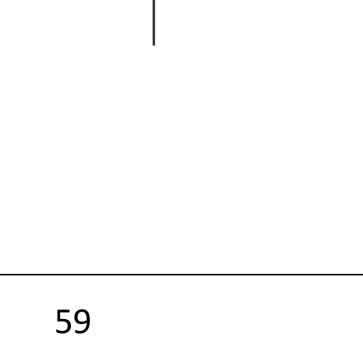
Розподіл імовірностей називають рівномірним, якщо на інтервалі, до якого належать всі можливі значення випадкової величини, густина розподілу зберігає стале значення C при $x \in [a, в]$.

Щільність ймовірності рівномірного розподілу, запишеться аналітично так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & при \quad a \le x \le b, \\ 0, & при \quad x > b. \end{cases}$$</td>
<td>Графік функції шільності (густини) розподілу



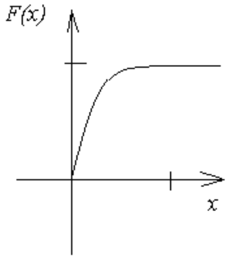
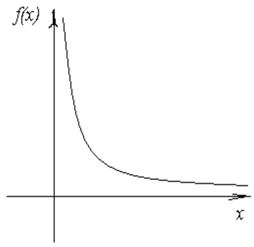
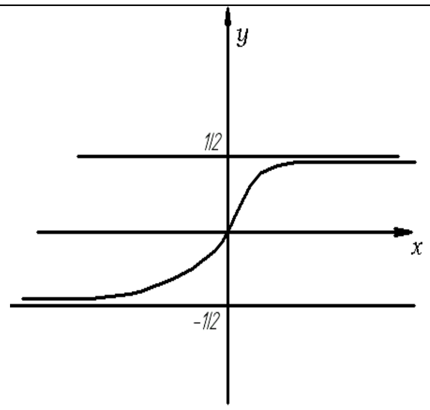
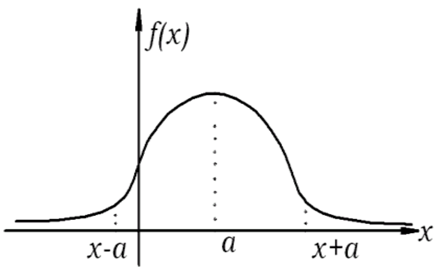
Графік інтегральної функції розподілу

</td>
<td>M
$$\xi = \int_a^b \frac{xdx}{в-a} = \frac{1}{в-a}$$
$$\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}$$
$$\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$
.

$D(\xi)=$
$$= \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$</td>
</tr>
</table>

Продовження таблиці А.1

Показниковий (експоненціальний) розподіл – це розподіл неперервної випадкової величини ξ з параметром $\lambda > 0$, заданий законом: $$f(x)=\begin{cases}0, \ при \ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, \ якщо \ x \ge 0.\end{cases}$$	 Графік функції щільності 	$M\xi=\frac{1}{\lambda}$ $D\xi=\frac{1}{\lambda^2}$ $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}$
Нормальний розподіл (закон Гаусса) Щільність розподілу має вигляд: $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$	 Інтегральна функція розподілу *F(x)*. 	Математичне сподівання для нормального закону $M\xi=a$, дисперсія $D\xi=\sigma^2$, σ – середнє квадратичне відхилення.

Додаток Б

Таблиця значень функції Лапласа (інтеграл ймовірності)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

Таблиця Б.1

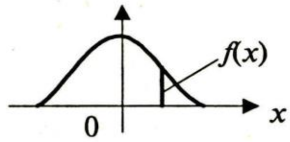
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,49	0,1879	0,98	0,3365	1,47	0,4292
0.01	0.0040	0.50	0.1915	0.99	0.3389	1.48	0.4306
0.02	0.0080	0.51	0.1950	1.00	0.3413	1.49	0.4319
0.03	0.0120	0.52	0.1985	1.01	0.3438	1.50	0.4332
0.04	0.0160	0.53	0.2019	1.02	0.3461	1.51	0.4345
0.05	0.0199	0.54	0.2054	1.03	0.3485	1.52	04357
0.06	0.0239	0.55	0.2088	1.04	0.3508	1.53	0.4370
0.07	0.0279	0.56	0.2123	1.05	0.3531	1.54	0.4382
0.08	0.0319	0.57	0.2157	1.06	0.3554	1.55	0.4394
0.09	0.0359	0.58	0.2190	1.07	0.3577	1.56	0.4406
0.10	0.0398	0.59	0.2224	1.08	0.3599	1.57	0.4418
0.11	0.0438	0.60	0.2257	1.09	0.3621	1.58	0.4429
0.12	0.0478	0.61	0.2291	1.10	0.3643	1.59	0.4441
0.13	0.0517	0.62	0.2324	1.11	0.3665	1.60	0.4452
0.14	0.0557	0.63	0.2357	1.12	0.3686	1.61	0.4463
0.15	0.0596	0.64	0.2389	1.13	0.3708	1.62	0.4474
0.16	0.0636	0.65	0.2422	1.14	0.3729	1.63	0.4484
0.17	0.0675	0.66	0.2454	1.15	0.3749	1.64	0.4495
0.18	0.0714	0.67	0.2486	1.16	0.3770	1.65	0.4505
0.19	0.0753	0.68	0.2517	1.17	0.3790	1.66	0.4515
0.20	0.0793	0.69	0.2549	1.18	0.3810	1.67	0.4525
0.21	0.0832	0.70	0.2580	1.19	0.3830	1.68	0.4535
0.22	0.0871	0.71	0.2611	1.20	0.3949	1.69	0.4545
0.23	0.0910	0.72	0.2642	1.21	0.3869	1.70	0.4554
0.24	0.0948	0.73	0.2673	1.22	0.3888	1.71	0.4564
0.25	0.0987	0.74	0.2703	1.23	0.3907	1.72	0.4573
0.26	0.1026	0.75	0.2734	1.24	0.3925	1.73	0.4582
0.27	0.1064	0.76	0.2764	1.25	0.3944	1.74	0.4591
0.28	0.1103	0.77	0.2794	1.26	0.3962	1.75	0.4599
0.29	0.1141	0.78	0.2823	1.27	0.3980	1.76	0.4608
0.30	0.1179	0.79	0.2852	1.28	0.3997	1.77	0.4616
0.31	0.1217	0.80	0.2881	1.29	0.4015	1.78	0.4625
0.32	0.1255	0.81	0.2910	1.30	0.4032	1.79	0.4633
0.33	0.1293	0.82	0.2939	1.31	0.4049	1.80	0.4641
0.34	0.1331	0.83	0.2967	1.32	0.4066	1.81	0.4649
0.35	0.1368	0.84	0.2995	1.33	0.4082	1.82	0.4656
0.36	0.1406	0.85	0.3023	1.34	0.4099	1.83	0.4664
0.37	0.1443	0.86	0.3051	1.35	0.4115	1.84	0.4671
0.38	0.1480	0.87	0.3078	1.36	0.4131	1.85	0.4678
0.39	0.1517	0.88	0.3106	1.37	0.4147	1.86	0.4686
0.40	0.1554	0.89	0.3133	1.38	0.4162	1.87	0.4693
0.41	0.1591	0.90	0.3159	1.39	0.4177	1.88	0.4699
0.42	0.1628	0.91	0.3186	1.40	0.4192	1.89	0.4706
0.43	0.1664	0.92	0.3212	1.41	0.4207	1.90	0.4713
0.44	0.1700	0.93	0.3238	1.42	0.4222	1.91	0.4719
0.45	0.1736	0.94	0.3264	1.43	0.4236	1.92	0.4726
0.46	0.1772	0.95	0.3289	1.44	0.4251	1.93	0.4732
0.47	0.1808	0.96	0.3315	1.45	0.4265	1.94	0.4738
0.48	0.1844	0.97	0.3340	1.46	0.4279	1.95	0.4744

Продовження таблиці Б.1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,96	0,4750	2,22	0,4868	2,54	0,4945	2,84	0,4977
1,97	0,4756	2,24	0,4875	2,56	0,4948	2,86	0,4979
1,98	0,4761	2,26	0,4881	2,58	0,4951	2,88	0,4980
1,99	0,4767	2,28	0,4887	2,60	0,4953	2,90	0,4981
2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,62	0,4956	2,92	0,4982
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,64	0,4959	2,94	0,4984
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,66	0,4961	2,96	0,4985
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,68	0,4963	2,98	0,4986
2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,70	0,4965	3,00	0,49865
2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,72	0,4967	3,20	0,49931
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,74	0,4969	3,40	0,49966
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,76	0,4971	3,60	0,499841
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,78	0,4973	3,80	0,499928
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,80	0,4974	4,00	0,499968
2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,82	0,4976	4,50	0,499997
		2,52	0,4941			5,00	0,500000

Додаток В

Значення функції Гаусса $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Значення функції Пуассона $P_m(\lambda) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

m \ λ	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0.0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0 0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ЛІТЕРАТУРА

1. Бєсов Л. М. Історія науки і техніки / Л. М. Бєсов. – 3-тє вид., переробл. і доп. – Харків : НТУ “ХПІ” , 2005. – 376 с.

2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей : учебник / Гнеденко Б. В. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 448 с.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа, 1979.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1977.

5. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е. И. Гурский. – М. : Высшая школа, 1971.

6. Майстров Л. Е. Теория вероятности. Исторический очерк / Майстров Л. Е. – М. : Наука, 1967.

7. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики / Бабак В. П., Білецький А. Я., Приставка О. П. – К. : КВІЦ, 2003. – 432 с.

8. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / Сеньо П. С. – Київ : Центр навчальної літератури, 2004.

9. Тичинська Л. М. Теорія ймовірностей. Ч. 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості : навчальний посібник / Л. М. Тичинська, А. А. Черепащук. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 112 с.

ГЛОСАРІЙ

Біноміальний розподіл – the binomial distribution
Випадковий – random
Випадкові величини – the random variables
Випадкові процеси – random processes
Гіпотези – the hypothesis
Густина (щільність) – the density
Густина розподілу – the density distribution
Двомірна випадкова величина – two-dimensional random variable
Дискретий – discrete
Дисперсія – the dispersion
Диференціальна функція розподілу – the differential distribution functiony
Добуток – the product
Достовірний – reliable
Дробові числа – floating point numbers
Еліптичний – elliptic
Залежний – dependent
Інтегральна функція розподілу – the integral distribution function
Ймовірність – the probability
Комбінаторика – the combinatorics
Конусний – conical
Математичним сподіванням – mathematical expectation
Многокутник розподілу – the polygons sharing
Множина елементарних подій – the set of elementary events
Найімовірніше число – the most likely number
Незалежний – independent
Неможливий – could not be random
Неперервний – the continuous
Несумісні події – the incompatible events
Нормальний закон розподілу – normal law of distribution
Перестановка – the permutation
Повна група подій – the complete group of events
Подія – the event
Послідовність – the progression
Приріст – the growth
Простір – space
Протилежний – opposite
Розміщення – an accommodation
Ряд розподілу – the number distribution
Середнє значення – an average
Середнє квадратичне відхилення – the mean square deviation
Співвідношення – ratio

Сполученням – combination
Сталий множник – the sustainable multiplier
Статистична ймовірність – the statistical probability
Статистичний ряд – the statistical series
Статистична сукупність – statistical combination
Степінь розсіювання – the power dissipation
Сума – the amount
Сумісні події – the compatible evenst
Твірна функція – produced feature
Фундаментальний закон – the fundamental laws
Функція розподілу – the distribution function
Функція розподілу ймовірностей – probability distribution function
Характеристика розсіювання – the characteristic scattering
Центр розподілу імовірності – the probability distribution center
Центрована випадкова величина – the centered random variable
Числові параметри – the number of parameters

ОПОРНІ ФОРМУЛИ

1. Частота випадкової події A

$$\nu_n(A)=\frac{m(A)}{n},$$

де n – кількість всіх випробувань; $m(A)$– кількість появ події A в цих випробуваннях.

2. Імовірність випадкової події A

$$P(A)=\frac{m(A)}{n},$$

де $m(A)$ – кількість випробувань, у яких подія A з'явилась; n –загальна кількість випробувань.

3. Розміщення, комбінація, перестановка.

Вибірка об'єму k з n елементів			
Вибірка без повторення		Вибірка з повторенням	
впорядкована	невпорядкована	впорядкована	невпорядкована
$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	$\overline{A}_n^k=n^k$	$\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k$
Розміщення	*Комбінація*	*Розміщення з повторенням*	*Комбінація з повторенням*

Якщо у формулі розміщення $n=k$, то отримаємо *перестановку*

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

4. Додавання несумісних подій $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)$.
5. Додавання сумісних подій $P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$.

6.Сума ймовірностей протилежних подій $P(A)+P(\overline{A})=1$

7. Формула повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)P(A_1/H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A/H_n)$$

або $$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i),$$ якщо $P(H_i)=1$.

8. Формула Байєса $P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$,

де

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)P(A_1/H_2) + ... + P(H_n)\cdot P(A/H_n) \quad .$$

9. Імовірність того, що подія з'явиться хоча б один раз

$$P_n(m \ge 1) = 1 - P_n(m = 0) = 1 - q^n$$

10. Імовірність того, що подія з'явиться не менше ніж *k* разів

$$P_n(m \ge k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{або} \quad P_n(m \ge k) = 1 - \sum_{m=k}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m} .$$

11. Формула Бернуллі

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} .$$

12. Твірна функція

$$P_n(m \ge k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{або} \quad P_n(m \ge k) = 1 - \sum_{m=k}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m} .$$

13. Найімовірніше число появи події при повторенні дослідів

$$np - q \le m_0 \le np + p .$$

14. Формула Пуассона

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \ \textit{де}\ \lambda = np,$$

15. Геометричний розподіл

$$p_m = q^{m-1} \cdot p .$$

16. Гіпергеометричний розподіл

$$p_m = P(X = m) = C_a^m C_b^{n-m} / C_{a+b}^n .$$

17. Математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \rho_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... x_i p_i + ... x_n p_n \text{, причому} \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \quad .$$

18. Математичним сподіванням Мξ неперервної випадкової величини

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx .$$

19. Дисперсія дискретної випадкової величини:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 P_i \ge 0 \ .$$

20. Дисперсія неперервної випадкової величини:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x) dx .$$

21. Нормальний закон розподілу $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $a = M_\xi$, $D_\xi = \sigma^2$.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt .$$

22. Імовірність попадання величини ξ у заданий інтервал (для нормального закону розподілу)

$$P(\alpha \le \xi \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) .$$

23. Імовірність допущення помилки, що менша заданого числа

$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

24. Показниковий (експоненціальний) розподіл $f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ \lambda x^{-\lambda x}, & при\ x \ge 0. \end{cases}$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad M\xi = \frac{1}{\lambda}, \qquad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

25. Рівномірний розподіл $f(x) = \begin{cases} 0, при x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} при a \le x \le b, \\ 0, при x > b. \end{cases}$ $M\xi = \dfrac{b+a}{2}$, $D\xi = \dfrac{(a-b)^2}{12}$.

26. Інтегральна теорема Лапласа (Муавра–Лапласа)

$$P(x_1 < m < x_2) \approx \Phi(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}) ,$$

де Φ – інтеграл імовірності $\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt$.

27. Локальна теорема Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{m-np}{\sqrt{npq}})^2} ,$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2}$ – щільність нормального закону (затабульована).

Навчальне видання

Клочко Віталій Іванович
Коломієць Альона Анатоліївна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Частина 2

Індивідуальна та самостійна робота студентів

Навчальний посібник

Рукопис оформлено: В. Клочко, А. Коломієць

Редактор О. Ткачук

Оригінал-макет виготовлено О. Ткачуком

Підписано до друку 03.04.2018 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 4,16.
Наклад 50 (1-й запуск 1–20). Зам. № 2018-070.

Видавець та виготовлювач
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.