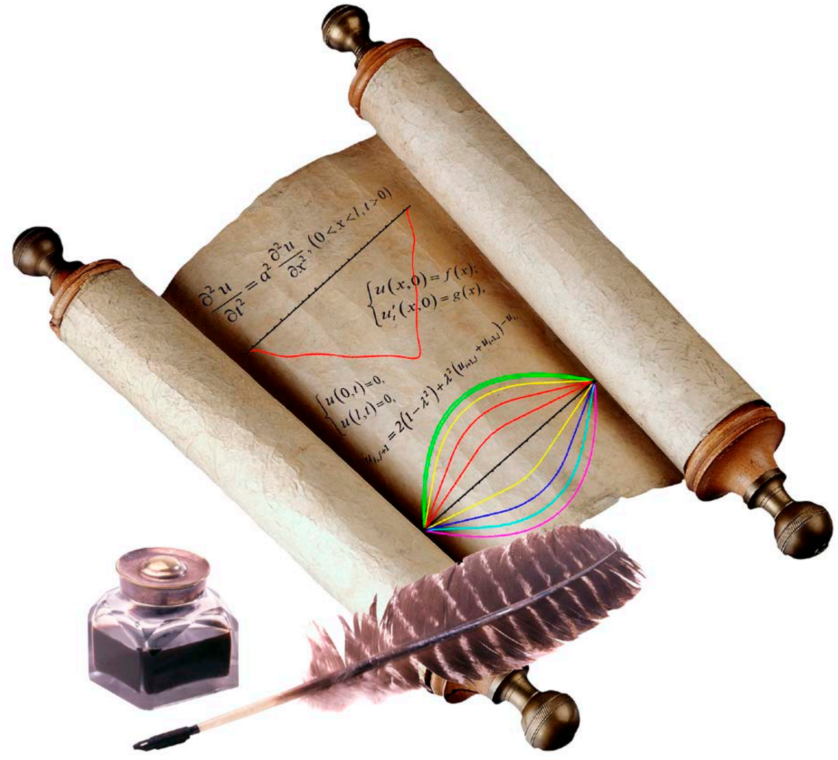
В. О. Краєвський, Н. В. Сачанюк-Кавецька

СПЕЦКУРС МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ
ТА ЇХ АНАЛІЗ В СИСТЕМІ MAPLE
ЧАСТИНА 1



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Краєвський, Н. В. Сачанюк-Кавецька

СПЕЦКУРС МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЇХ АНАЛІЗ В СИСТЕМІ MAPLE
ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 517.958(075)
ББК 22.161.6я73
К78

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 30 квітня 2015 р.)

Рецензенти:
О. В. Мельничук, доктор фізико-математичних наук, професор
Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор
І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор

Краєвський, В. О.
К78 Спецкурс математичного аналізу. Диференціальні рівняння з частинними похідними та їх аналіз в системі Maple. Частина 1 : навч. посіб. / В. О. Краєвський, Н. В. Сачанюк-Кавецька. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 112 с.

У посібнику наведено основні поняття й означення теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, викладено класифікацію та зведення до канонічного вигляду квазілінійних рівнянь. Розглянуто низку фізичних процесів, які призводять до диференціальних рівнянь із частинними похідними. Підібрано задачі для практичних занять та самостійної роботи студентів. Розглянуто можливість застосування математичного додатка Maple для розв’язання відповідних задач. Посібник розраховано для студентів технічних спеціальностей.

УДК 517.958(075)
ББК 22.161.6я73

ЗМІСТ

ВСТУП

У посібнику розглядається розділ математичного аналізу, який вивчає диференціальні рівняння з частинними похідними, що описують різні фізичні явища. Цей розділ математичного аналізу отримав назву «Математична фізика». Інтенсивне розроблення методів математичної фізики розпочалось після опублікування 1687 р. «Математичних начал натуральної філософії» І. Ньютона та було зумовлене дослідженням проблем всесвітнього тяжіння й теорії світла. Найвищі досягнення в розвитку методів класичної математичної фізики пов'язані з іменами Ж. Л. Лагранжа, Л. Ейлера, Ж. Л. Д'Аламбера, П. С. Лапласа, Д. Бернуллі, Ж. Фур'є, К. Ф. Гаусса, О. Л. Коші, Г. Рімана, М. В. Остроградського, О. М. Ляпунова, В. А. Стеклова та багатьох інших учених.

Методи математичної фізики застосовуються для розв'язання задач теплопровідності, дифузії, пружності, оптики, електродинаміки, газової динаміки, фізики плазми, теорії потенціалу, квантової фізики, теорії відносності та ін. Основними математичними засобами дослідження усіх цих задач є теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, наближені методи та обчислювальна математика.

Постійний розвиток математичної фізики зумовлений її тісним зв'язком із фундаментальними напрямками досліджень у суміжних областях природничих наук.

Посібник складається з двох частин. Перша частина – п'ять теоретичних розділів, де подані основні формули, теореми, означення, які підкріплюються великою кількістю прикладів. Визначено коло практичних задач, які призводять до диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема в термо- та гідродинаміці, теорії пружності, електротехніці тощо. Друга частина складається із двох розділів. Шостий розділ містить короткі теоретичні відомості та завдання, які необхідні для проведення практичних занять. Серед завдань цього розділу є завдання, виконання яких передбачає застосування інформаційних технологій. Зокрема, акцент зроблений на застосуванні математичного додатка Maple. У сьомому розділі подано 100 варіантів для контрольних робіт з кожної теми.

У посібнику вміщено значну кількість докладних розв'язань прикладів, що дає змогу використовувати їх для самостійного вивчення спецкурсу математичного аналізу, зокрема студентами заочної форми навчання.

1 КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1.1 Постановка задачі

Для розв'язання багатьох фізичних задач необхідно знайти ту чи іншу функціональну залежність, наприклад, залежність деякої фізичної величини від часу, від координат точки простору тощо. Безпосередньо визначити таку залежність буває складно або й неможливо. У такому разі ставиться задача: знайти зв'язок між шуканою функцією та її похідними, тобто скласти диференціальне рівняння, яке задовольняє ця функція.

Приклад. *Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища. Знайти закон зміни температури тіла залежно від часу.*

Розв'язання

Позначимо шукану функцію через $T = T(t)$. Отже, це є функція від однієї незалежної змінної. Відповідно швидкість зміни температури – це є перша похідна від даної функції за часом $\frac{dT}{dt}$. Згідно з умовою задачі, отримаємо

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_{н.с.}),$$

де k – коефіцієнт пропорційності;

$T_{н.с.}$ – температура навколишнього середовища. Тоді

$$\int \frac{dT}{T - T_{н.с.}} = k \int dt + C;$$

$$\ln\left|T - T_{н.с.}\right| = kt + C;$$

$$T = e^{kt+C} + T_{н.с.}.$$

Відповідь: $T = e^{kt+C} + T_{н.с.}$.

Якщо нам необхідно визначити розподілення температури у тілі, відповідно температура тоді залежить від часу, а також від координат точки тіла, яку ми розглядаємо. Тобто шукана функція залежить від двох або більшої кількості незалежних змінних. У даному випадку диференціальне рівняння складається з власне невідомої функції та її частинних похідних за незалежними змінними. Таке рівняння називають диференціальним рівнянням із частинними похідними.

1.2 Основні означення

Диференціальним рівнянням із частинними похідними називають рівняння, яке пов’язує незалежні змінні, їх функції та частинні похідні від цієї функції. Наприклад:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,\; y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

де u – шукана функція;

x, y, z – незалежні змінні.

Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називають порядком диференціального рівняння з частинними похідними.

Кількістю змінних диференціального рівняння називають кількість незалежних змінних.

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними такий:

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0. \qquad (1.1)$$

Диференціальне рівняння з частинними похідними (ДРЧП) називають лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та її частинних похідних.

Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними має такий загальний вигляд:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F, \qquad (1.2)$$

де $A=A(x,y)$, $B=B(x,y)$, ... , $F=F(x,y)$ – задані функції незалежних змінних x і y.

Якщо в рівнянні (1.2) $F(x,y)=0$, то таке диференціальне рівняння з частинними похідними називають лінійним однорідним. Якщо коефіцієнти A, B, C, D, E, G рівняння сталі, то рівняння (1.2) називають лінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називають квазілінійним, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Згідно з означенням загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними такий:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,. \qquad (1.3)$$

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називають будь-яку функцію, яка при підставленні в диференціальне рівняння, замість шуканої функції, перетворює його на тотожність за незалежними змінними.

Приклад. *Розглянемо рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f(y), \qquad (1.4)$$

де $f\left(y\right)$*– відома функція, а шукана функція* u *залежить від двох змінних* x *і* y.

Розв'язання

Усі функції $u\left(x,y\right)$*, які задовольняють рівняння (1.4), мають вигляд:*

$$u(x,y)=\int f(y)dy+\psi(x)\,, \qquad (1.5)$$

($\psi\left(x\right)$ *– довільна функція від (*x*). Це можна перевірити, продиференціювавши обидві частини рівності (1.5) за* y.

Розв'язок (1.5) рівняння (1.4) містить довільну функцію $\psi(x)$*. У цьому полягає докорінна відмінність розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку (1.4) від загального розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння* $\frac{du}{dy}=f\left(y\right)$*, який має вигляд* $u(y)=\int f(y)dy+C$ *і містить лише довільну сталу.*

Приклад. *Розв'язати диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

де $u=u\left(x,y\right)$.

Розв’язання

Враховуючи означення другої похідної $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$*, дане рівняння можна подати у вигляді* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$*. Такий запис рівняння дає змогу встановити, що* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *не залежить від y, тобто* $\frac{\partial u}{\partial y}=C_1$*, де* C_1 *– довільна величина, яка не залежить від* y*. Проте* C_1 *може залежати від* x*, оскільки шукана функція* u *за умовою залежить від двох змінних:* x *і* y*. Отже,* $\frac{\partial u}{\partial y}=C_1(x)$*, де* $C_1(x)$ *– довільна функція від* x*.*

Інтегруючи за y *цю рівність, знайдемо:* $u=C_1(x)y+C_2$*, де* C_2 *– величина, яка не залежить від* y*. З огляду на залежність* u *від* x *і* y *величина* C_2 *може бути функцією від* x*. Таким чином, розв’язок даного рівняння* $u=C_1(x)y+C_2(x)$ *містить дві довільні функції.*

У розглянутих прикладах ми мали справу з найпростішими диференціальними рівняннями із частинними похідними, розв’язки яких майже очевидні. Для розв’язання складніших диференціальних рівнянь із частинними похідними потрібні інші методи.

1.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння із частинними похідними першого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними, загальний вигляд якого такий:

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x}+X_2\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1.6}$$

де $u(x,y)$ – шукана функція;

X_1, X_2 – відомі функції незалежних змінних x і y.

Для відшукання розв’язку рівняння (1.6) розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{X_1}=\frac{dy}{X_2}. \tag{1.7}$$

Це рівняння запишемо відносно похідної:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X_2}{X_1}. \tag{1.8}$$

Нехай

$$\varphi(x, y) = C \tag{1.9}$$

– загальний розв'язок рівняння (1.7). Тоді функція $y(x)$ задана неявно. Її похідна обчислюється за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Підставивши вираз похідної у рівняння (1.8), отримаємо:

$$-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = \frac{X_2}{X_1};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}X_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}X_2 = 0. \tag{1.10}$$

Порівнюючи вирази (1.6) та (1.10), зауважимо, що рівняння (1.6) перетворюється на тотожність у разі підставлення функції $\varphi(x, y)$ замість $u(x, y)$. Отже, функція $\varphi(x, y)$ є розв'язком рівняння (1.6).

Висновок сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Якщо $\varphi(x, y) = C$ – загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (1.7), то функція $\varphi(x, y)$ є розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними (1.6).

Справедливе й обернене твердження: якщо $u = \varphi(x, y)$ – будь-який розв'язок рівняння (1.6), то $\varphi(x, y) = C$ – загальний розв'язок рівняння (1.7).

У результаті проведеного дослідження маємо правило: для того, щоб знайти розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними (1.6), потрібно скласти еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння (1.7) і визначити його загальний розв'язок $\varphi(x, y) = C$. Тоді $u = \varphi(x, y)$ буде розв'язком рівняння (1.6).

Приклад. *Розв'язати рівняння*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.11}$$

Розв'язання

Складаємо еквівалентне заданому рівнянню звичайне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Це рівняння з відокремленими змінними.

Інтегруючи його, отримаємо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1 ;$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C ;$$

$$\frac{y}{x} = C .$$

Звідси розв'язком рівняння (1.11) є функція $u - y / x$.

Неважко переконатись, якщо $u = \varphi(x, y)$ є розв'язком рівняння (1.6), то

$$u = F(\varphi(x, y)),$$

де F – будь-яка функція, також є розв'язком рівняння (1.6).

Можна показати, на чому ми не зупиняємося, що під час виконання деяких умов цією формулою виражається будь-який розв'язок рівняння (1.6). Звідси отримаємо ще одне правило інтегрування цього рівняння: для того, щоб знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними (1.6), потрібно скласти еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння (1.7) і визначити його загальний розв'язок $\varphi(x, y) = C$. Тоді

$$u = F(\varphi(x, y)),$$

де F – довільна функція, буде загальним розв'язком рівняння (1.6).

Таким чином, для рівняння (1.11) загальним розв'язком буде функція:

$$u = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

де F – довільна функція.

1.4 Класифікація квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними та зведення їх до канонічного вигляду

Згідно з класифікацією, яка введена в підрозділі 1.2, загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \tag{1.12}$$

Перейдемо в рівнянні (1.12) до нових незалежних змінних:

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y). \tag{1.13}$$

Вибір функцій $\xi=\varphi(x,y)$ і $\eta=\psi(x,y)$ будемо проводити з метою надання рівнянню (1.12) найпростішого (канонічного) вигляду.

Для цього, насамперед, необхідно визначити, як зміниться рівняння (1.12), якщо ми введемо нові незалежні змінні – ξ і η. Для відповіді на це запитання перетворимо усі частинні похідні функції u за незалежними змінними x і y, і запишемо їх через нові змінні ξ і η, використовуючи при цьому формули диференціювання складних функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}; \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}; \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\\+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y};\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\cdot \tag{1.18}$$

Підставивши вирази (1.14)–(1.18) у рівняння (1.12), отримаємо:

$$\bar{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F} = 0, \qquad (1.19)$$

де

$$\bar{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\bar{B} = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\bar{C} = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

а $\bar{F}$ не залежить від похідних другого порядку. Як бачимо, рівняння (1.19) є квазілінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними, тобто при переході до нових незалежних змінних тип диференціального рівняння не змінюється.

Очевидно, щоб надати диференціальному рівнянню (1.19) найпростішого вигляду, необхідно так підібрати функції $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$, щоб хоча б один з коефіцієнтів $\bar{A}$, $\bar{B}$ або $\bar{C}$ дорівнював би нулеві.

Розглянемо допоміжне рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0. \qquad (1.20)$$

Якщо $z = \varphi(x, y)$ є деякий частинний розв’язок рівняння (1.20), тоді при $\xi = \varphi(x, y)$ будемо мати $\bar{A} = 0$.

Отже, поставлена задача про вибір нових незалежних змінних, зв’язана з розв’язками рівняння (1.20). Мають місце такі дві теореми:

Теорема 1. Якщо $\varphi(x, y) = C$ є загальним розв’язком рівняння

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0, \qquad (1.21)$$

то функція $z = \varphi(x, y)$ задовольняє рівняння (1.20).

Теорема 2. Якщо $z=\varphi(x,y)$ є частинним розв'язком рівняння (1.20), то співвідношення

$$\varphi(x,y)=C,$$

де C – довільна стала, є загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння (1.21).

Оскільки нас більше цікавить, як шукати розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними (1.20), то доведемо першу теорему.

Запишемо рівняння (1.21) у звичайній формі, тобто через похідні:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=0.$$

Якщо $\varphi(x,y)=C$ є загальним розв'язком цього рівняння, то ми маємо неявну залежність y від x. Тоді похідна функції $y(x)$ обчислюється за формулою:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Підставимо її у звичайну форму запису диференціального рівняння (1.21), отримаємо:

$$A\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)^2+2B\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}+C=0.$$

Помножимо ліву та праву частини цього рівняння на $\left(\varphi'_y\right)^2$. Тоді отримаємо:

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0.$$

Порівнявши отримане співвідношення з диференціальним рівнянням (1.20), ми бачимо, що функція $z=\varphi(x,y)$ перетворює його на тотожність. Отже, $z=\varphi(x,y)$ є розв'язком даного диференціального рівняння. Теорему доведено.

Звичайне диференціальне рівняння $Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0$ називається рівнянням характеристик для диференціальних рівнянь із частинними похідними (1.12), а його загальні розв'язки називаються характеристиками диференціального рівняння (1.12).

Знайдемо розв'язки диференціального рівняння (1.21). Перейдемо до звичайної форми запису диференціального рівняння:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 .$$

Відносно похідної ми маємо квадратне рівняння, розв'язком якого будуть:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{A}; \tag{1.22}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{A}, \tag{1.23}$$

де

$$\Delta = B^2 - AC . \tag{1.24}$$

Знак підкореневого виразу Δ визначає тип диференціального рівняння з частинними похідними (1.12).

Якщо $\Delta > 0$ в деякій точці М, то диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) будемо називати *рівнянням гіперболічного типу.*

Якщо $\Delta = 0$, то диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) будемо називати *рівнянням параболічного типу*.

Якщо $\Delta < 0$, то диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) будемо називати *рівнянням еліптичного типу.*

Встановимо канонічний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними в кожному із цих трьох типів.

1. Для рівняння гіперболічного типу $\Delta > 0$, тому праві частини рівнянь (1.22) і (1.23) дійсні і різні. Тоді їх загальні розв'язки $\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$, визначають дві різні дійсні характеристики.

Тоді при перетвореннях $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$ рівняння (1.12) матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{1.25}$$

Це і є канонічний вигляд рівняння гіперболічного типу.

2. Для рівняння параболічного типу $\Delta = 0$, тоді диференціальні рівняння (1.22) і (1.23) збігаються і ми матимемо один інтеграл диференціального рівняння (1.21) $\varphi(x, y) = C$. Тоді $\xi = \varphi(x, y)$, а $\eta = \psi(x, y)$, де $\psi(x, y)$ – довільна функція, лінійно незалежна з функцією $\varphi(x, y)$. У такому разі матимемо, що $\overline{A} = 0$ і $\overline{B} = 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (1.26)$$

Це канонічний вигляд рівняння параболічного типу.

3. Для рівняння еліптичного типу $\Delta < 0$ праві частини рівнянь (1.22) і (1.23) є комплексні, тоді загальні розв’язки є комплексно-спряжені функції $\alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) = C$.

Тоді $\xi = \alpha(x, y)$ $\eta = \beta(x, y)$. У такому разі $\overline{A} = \overline{C}$ і $\overline{B} = 0$ і рівняння (1.12) матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (1.27)$$

Це і є канонічний вигляд рівняння еліптичного типу.

Отже, щоб звести диференціальне рівняння з частинними похідними (1.12) до канонічного вигляду, треба визначити тип рівняння, скласти його рівняння характеристик і знайти його загальний розв’язок. Виходячи з типу диференціального рівняння з частинними похідними, знайти відповідні формули $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

Приклад. *Звести до канонічного вигляду рівняння:*

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (1.28)$$

Розв’язання

Визначимо тип диференціального рівняння (1.28).

$$A = \frac{1}{x^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{y^2}.$$

Рівняння еліптичного типу:

$$\Delta = B^2 - AC = -\frac{1}{x^2 \cdot y^2} < 0.$$

Знайдемо характеристики диференціального рівняння (1.28):

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{x^2 i}{xy}, \quad ydy = \pm ixdx;$$

$$\int ydy = \pm i\int xdx + \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \pm i\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2};$$

$$y^2 \mp ix^2 = C;$$

$$\xi = y^2, \quad \eta = x^2.$$

Підставимо знайдені характеристики у вихідне рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 2x\right) = 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} +$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 2x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 2x\right) + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} = 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\left(4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{y^2}\left(4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) =$$

$$= 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} + 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \text{ канонічний вигляд рівняння.}$$

Запитання для самоперевірки

1. Яка основна відмінність між звичайними диференціальними рівняннями та диференціальними рівняннями із частинними похідними?
2. Що визначає кількість змінних диференціального рівняння із частинними похідними?

3. Як визначається порядок диференціального рівняння з частинними похідними?

5. Що є розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними?

6. Який загальний вигляд лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку?

7. Сформулюйте алгоритм пошуку частинного розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку.

8. Сформулюйте алгоритм пошуку загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку.

9. Який загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку із двома незалежними змінними?

10. Якого виду диференціальне рівняння отримаємо при заміні незалежних змінних у квазілінійному диференціальному рівнянні з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними?

11. Як класифікуються квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними?

12. Як визначаються характеристики та який канонічний вигляд квазілінійних диференціальних рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів?

2 ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

2.1 Основні рівняння математичної фізики

Теорія математичного моделювання за допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними й методи досліджень таких моделей є предметом розділу вищої математики, який називається «Рівняння математичної фізики».

Своєю назвою математична фізика завдячує тому, що рівняння з частинними похідними, які вивчає ця дисципліна, виникли з деяких задач фізики.

У наш час коло задач, які розв'язують методами математичної фізики, надзвичайно широке. До них належать багато задач гідромеханіки, теорії фільтрації, геофізики, теорії пружності, електродинаміки, теорії коливань, теплопровідності тощо. При цьому виявляється, що одне й те саме рівняння може описувати абсолютно різні за своєю природою явища й процеси. Тому під час досліджень багатьох задач потрібно порівняно небагато видів диференціальних рівнянь із частинними похідними. Ці рівняння часто називають основними рівняннями математичної фізики. До них належать:

• ***хвильове рівняння:***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t), \tag{2.1}$$

де a – сталий коефіцієнт;

f – задана функція своїх аргументів.

До розв'язання цього рівняння приходять при вивченні хвиль різних видів – пружних, звукових, електромагнітних тощо, а також інших коливальних явищ;

• ***рівняння теплопровідності:***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t). \tag{2.2}$$

До розв'язання цього рівняння приходять, вивчаючи процеси поширення тепла, явища дифузії, фільтрації тощо;

• ***рівняння Пуассона і Лапласа відповідно:***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x,y,z), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (2.4)$$

До розв'язання цих рівнянь приходять при вивченні стаціонарних (незалежних від часу) процесів поширення тепла, явищ стаціонарної дифузії, фільтрації тощо; потенціали поля тяжіння й стаціонарного електричного поля, у яких відсутні відповідно маси й електричні заряди, задовольняють рівняння Лапласа.

2.2 Рівняння коливання струни

Розглянемо натягнену струну, закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги, то вона коливатиметься. Побудуємо математичну модель цього процесу.

Моделюючи струну, нехтуватимемо її товщиною, вважаючи струну ниткою, а також силами, які виникають при її згинанні. Вважатимемо, що струна пружна – підлягає закону Гука: сила натягу струни прямо пропорційна її видовженню. Таким чином, моделлю струни є пружна й абсолютно гнучка нитка.

За основну величину, яка характеризуватиме процес коливання струни, вибираємо вектор зміщення точок струни від положення рівноваги.

Для простоти розглядатимемо так звані поперечні коливання, тобто такі, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині в напрямі, перпендикулярному до прямолінійного положення рівноваги струни. Якщо положення рівноваги взяти за вісь Ox, то процес характеризуватиметься однією скалярною величиною $u=u(x,t)$ – відхиленням від положення рівноваги точки струни з абсцисою x у момент часу t. При кожному фіксованому значенні t графік функції $u=u(x,t)$ даватиме форму струни в цей момент часу (рис. 2.1).

Розглянемо тільки малі коливання, тобто такі, при яких можна знехтувати величиною $(u'_x)^2$.

Виділимо довільну ділянку (x_1,x_2) струни (рис. 2.1), яка при коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t становить:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x'^2}\,dx\approx x_2-x_1.$$

Отже, за зроблених припущень, видовжування струни під час її малих коливань не відбувається. Тоді, згідно із законом Гука, натяг T у кожній точці струни не змінюється з часом.

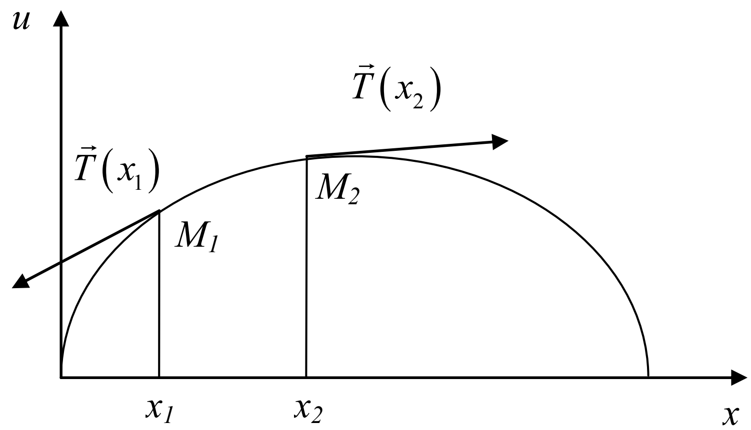


Рисунок 2.1 – Коливання струни: розрахункова схема

Знайдемо проекції на осі Ox і Ou сил натягу $\overline{T}(x_1)$, $\overline{T}(x_2)$, які діють на ділянку M_1M_2 і напрямлені по дотичних до струни в точках M_1 і M_2.

Позначимо через $\alpha(x)$ кут між додатним напрямом осі Ox і дотичною в точці з абсцисою x. Тоді

$$\begin{aligned} np_x\overline{T}(x_2) &= T(x_2)\cos\alpha(x_2), \\ np_x\overline{T}(x_1) &= -T(x_1)\cos\alpha(x_1); \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} np_u\overline{T}(x_2) &= T(x_2)\sin\alpha(x_2), \\ np_u\overline{T}(x_1) &= -T(x_1)\sin\alpha(x_1). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Враховуючи малу амплітуду коливань, можна замінити в цих співвідношеннях $\cos\alpha(x)$ і $\sin\alpha(x)$ величинами:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2}} \approx 1; \tag{2.7}$$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\ \alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}} \approx u_x'. \tag{2.8}$$

Відповідно до принципу Д'Аламбера, усі сили, які діють на ділянку струни M_1M_2, враховуючи сили інерції, мають урівноважуватися або, іншими словами, суми проекцій усіх цих сил на осі Ox і Ou мають дорівнювати нулю.

Спроектуємо суму всіх сил, що діють на ділянку M_1M_2 струни, на вісь Ox. Оскільки розглядаються лише поперечні коливання, то сили інерції і зовнішні сили, які діють на струну, напрямлені перпендикулярно до осі Ox.

Отже, їх проекція на вісь Ox дорівнює нулю. Тому, враховуючи тільки сили натягу, з (2.5), (2.7), відповідно до принципу Д'Аламбера, отримаємо:

$$T(x_2) - T(x_1) \approx 0. \qquad (2.9)$$

Звідси, з огляду на довільність x_1 і x_2, випливає, що натяг струни не залежить від x. Таким чином, можна вважати, що $T = T_0$ (T_0 – стала величина) для всіх x і t.

Розглянемо проекції всіх сил, які діють на ділянку M_1M_2 струни, на вісь Ou.

Поклавши в (2.6) $T(x_2) = T(x_1) = T_0$, з урахуванням (2.8), запишемо суму проекцій на вісь Ou сил натягу у вигляді:

$$Y = T_0\left[u'_x(x_2,t) - u'_x(x_1,t)\right].$$

Звідси, з огляду на те, що

$$u'_x(x_2,t) - u'_x(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

остаточно отримаємо:

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \qquad (2.10)$$

Позначимо через $p(x,t)$ щільність зовнішніх сил, які діють на струну паралельно осі Ou. Тоді проекція на вісь Ou зовнішніх сил, що діють на ділянку M_1M_2 струни, дорівнюватиме:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)\,dx. \qquad (2.11)$$

Нехай $\rho(x)$ – лінійна густина струни. Тоді сила інерції ділянки M_1M_2 струни становитиме:

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \qquad (2.12)$$

Прирівняємо за принципом Д'Аламбера до нуля суму проекцій сил (2.10)–(2.12) і отримаємо рівняння коливання елемента струни в інтегральній формі:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\left(x,t\right)\right]dx=0. \tag{2.13}$$

Для переходу до диференціального рівняння припустимо існування й неперервність других похідних від $u\left(x,t\right)$, функції $\rho(x)$ і $p(x,t)$ вважатимемо неперервними й застосуємо до (2.13) теорему про середнє в інтегральному численні:

$$\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\left(x,t\right)\right)\Bigg|_{x=x_0}\Delta x=0\,; \tag{2.14}$$

тут $x_0\in\left(x_1,x_2\right)$, $\Delta x=x_2-x_1$.

Скоротимо рівняння (2.14) на Δx і виконаємо в ньому граничний перехід $x_2\to x_1$. Враховуючи, що при $x_2\to x_1$ значення x_0 також прямуватиме до x_1 і значення x_1 є довільним, остаточно отримаємо:

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\left(x,t\right)=0$$

або

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p\left(x,t\right) \tag{2.15}$$

– шукане диференціальне рівняння коливання струни.

У випадку однорідної струни $\left(\rho=const\right)$ рівняння (2.15) зазвичай записується у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t\right), \tag{2.16}$$

де

$$a^2=\frac{T_0}{\rho},\qquad f\left(x,t\right)=\frac{p\left(x,t\right)}{\rho}.$$

Рівняння (2.16) при $f(x,t) \neq 0$ називають рівнянням вимушених коливань струни. При $f(x,t) = 0$ (зовнішні сили відсутні) приходимо до рівняння вільних коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.17}$$

До рівняння (2.16) приходять також при моделюванні багатьох інших хвильових процесів: поздовжніх коливань пружного стержня, крутильних коливань вала, коливання рідини й газу в тонкій трубці тощо. Усі ці хвильові процеси об'єднує те, що вони є одновимірними. Тому рівняння (2.16) називають також одновимірним хвильовим рівнянням.

2.3 Рівняння коливань мембрани

Мембраною називають натягнуту плівку, що вільно згинається.

Нехай у положенні рівноваги мембрана розташована в площині xOy і займає деяку область D, що обмежена замкненою кривою L. Далі припустимо, що мембрана перебуває під дією рівномірного натягу *T*, який прикладений до країв мембрани. Це означає, якщо провести лінію по мембрані в будь-якому напрямку, то сила взаємодії між двома частинами, що розділені елементами лінії, пропорційна довжині елемента й перпендикулярна його напрямку; величина сили, що діє на елемент ds лінії, дорівнюватиме Tds.

Будемо розглядати тільки поперечні коливання мембрани, за яких кожна її точка рухається перпендикулярно площині xOy, паралельно осі Ou. Тоді зміщення u точки $M(x,y)$ мембрани буде функцією координат x, y і часу t.

Розглядаючи далі тільки малі коливання мембрани, будемо вважати, що функція $u(x,y,t)$, а також її частинні похідні по x і y малі, так що їх квадратами та добутками можна знехтувати, порівняно із самими цими величинами.

Виділимо довільну ділянку σ мембрани, що обмежена у положенні рівноваги кривою l. Коли мембрана буде виведена з положення рівноваги, ця ділянка мембрани деформується в ділянку σ_1 поверхні мембрани, що обмежена просторовою кривою l_1. Площа ділянки σ_1 у момент часу t дорівнює:

$$\sigma_1 = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2}\, dx\, dy \approx \iint\limits_{\sigma} dx\, dy = \sigma. \tag{2.18}$$

Таким чином, за наших припущень, можна знехтувати зміною площі довільно взятої ділянки мембрани в процесі коливань і вважати, що будь-яка ділянка σ_1 мембрани буде перебувати під дією початкового натягу T.

Перейдемо до виводу рівняння поперечних коливань мембрани. Розглянемо довільну ділянку σ_1 мембрани. З боку іншої частини мембрани на цю ділянку діє спрямований по нормалі до контуру l_1 рівномірно розподілений натяг T, що лежить у дотичній площині до поверхні мембрани. Знайдемо проекцію на вісь Ou сил натягу, прикладених до кривої l_1, що обмежує ділянку σ_1 мембрани. Позначимо через ds_1 елемент дуги кривої l_1. На цей елемент діє натяг Tds_1. Косинус кута, утвореного вектором натягу T з віссю Ou, очевидно, рівний, згідно з нашими припущеннями, $\frac{\partial u}{\partial n}$, де n – напрямок зовнішньої нормалі до кривої l, що обмежує ділянку σ мембрани в положенні рівноваги (рис. 2.2). Звідси випливає, що проекція на вісь Ou сил натягу, які прикладені до елемента ds_1 контуру l_1, дорівнює:

$$T\frac{\partial u}{\partial n}ds_1. \tag{2.19}$$

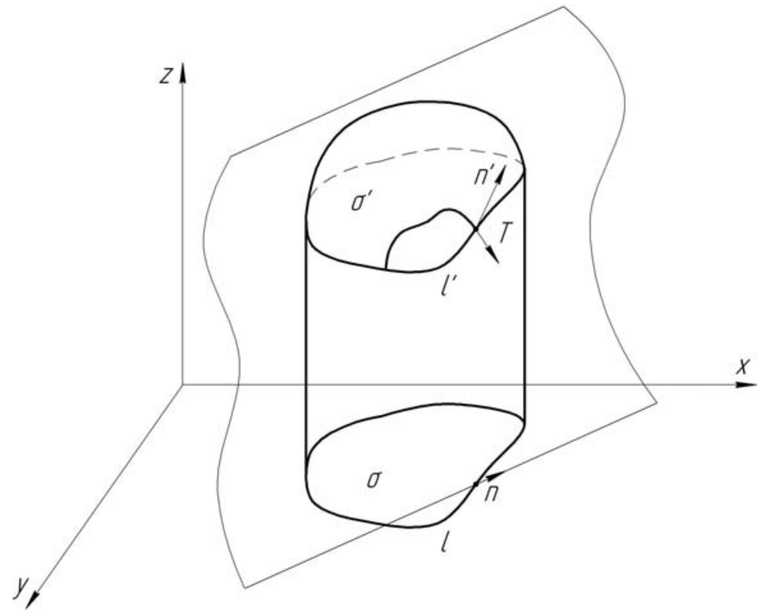


Рисунок 2.2 – Коливання мембрани: розрахункова схема

Отже, проекція на вісь Ou сил натягу, прикладених до всього контуру l', дорівнює:

$$T\int_{l_1}\frac{\partial u}{\partial n}ds_1. \tag{2.20}$$

Оскільки за малих коливань мембрани можна вважати $ds \approx ds_1$, то ми можемо в інтегралі (2.20) шлях інтегрування l_1 замінити на l. Тоді, застосовуючи формулу Гріна, отримаємо:

$$T\int_l \frac{\partial u}{\partial n}ds = T\iint_\sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy. \qquad (2.21)$$

Припустимо, що на мембрану паралельно осі Ou діє зовнішня сила $p(x,y,t)$, яка розраховується на одиницю площі. Тоді проекція на вісь Ou зовнішньої сили, що діє на ділянку σ_1 мембрани, буде дорівнювати:

$$\iint_\sigma p(x,y,t)\,dx\,dy. \qquad (2.22)$$

Сили (2.21) і (2.22) повинні в будь-який момент часу t урівноважуватися силами інерції ділянки σ_1 мембрани:

$$-\iint_\sigma \rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx\,dy, \qquad (2.23)$$

де $\rho(x,y)$ – поверхнева щільність мембрани.

Таким чином, ми отримаємо рівність:

$$\iint_\sigma \left[\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - p(x,y,t)\right]dx\,dy = 0. \qquad (2.24)$$

Звідки в силу довільності ділянки σ випливає, що

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x,y,t). \qquad (2.25)$$

Це диференціальне рівняння поперечних коливань мембрани.

У випадку однорідної мембрани $\rho = const$ рівняння малих коливань мембрани або двовимірне хвильове рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t). \qquad (2.26)$$

де

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(x,y,t) = \frac{p(x,y,t)}{\rho}. \qquad (2.27)$$

У загальному ж (тривимірному) випадку вивчення багатьох хвильових процесів приводить до тривимірного хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f\left(x, y, z, t\right) \tag{2.28}$$

Так, до рівняння (2.28) приводить математичне моделювання таких процесів: малих пружних коливань твердих тіл; коливань газу (звукові коливання); електромагнітних коливань тощо. Рівняння (2.16) і (2.26) є окремими випадками рівняння (2.28).

Якщо зовнішня сила відсутня, тобто $p\left(x, y, t\right) = 0$, то з (2.26) отримаємо рівняння вільних коливань однорідної мембрани:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{2.29}$$

2.4 Рівняння гідродинаміки

У гідродинаміці рідина або газ розглядається як суцільне середовище. Якщо, наприклад, говорять про зсув деякої частинки рідини, то при цьому йдеться не про зсув окремої молекули, а про зсув цілого елемента об'єму, що містить багато молекул, але розглянутого в гідродинаміці як точка.

Нехай рідина рухається зі швидкістю $\vec{v}\left(x, y, z, t\right)$, проекції якої на осі координат позначимо $v_x\left(x, y, z, t\right)$, $v_y\left(x, y, z, t\right)$, $v_z\left(x, y, z, t\right)$.

Підкреслимо, що $\vec{v}\left(x, y, z, t\right)$ є швидкість рідини в кожній даній точці $\left(x, y, z\right)$ простору в момент часу t, тобто ставиться до певних точок простору, а не до певних частинок рідини, що пересуваються згодом у просторі; те ж саме ставиться до термодинамічних величин $p\left(x, y, z, t\right)$, $\rho\left(x, y, z, t\right)$.

Якщо поле вектора швидкості $\vec{v}\left(x, y, z, t\right)$ відоме, то траєкторії окремих часток рідини будуть визначатися рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = v_x\left(x, y, z, t\right), \ \frac{dy}{dt} = v_y\left(x, y, z, t\right), \ \frac{dz}{dt} = v_z\left(x, y, z, t\right). \tag{2.30}$$

Звідси легко можна знайти прискорення частки рідини:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = \\ = \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \dfrac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}v_z, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}v_z, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + \dfrac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}v_z. \end{cases} \tag{2.31}$$

У кожний момент часу та у кожній точці рідина перебуває в деякому стані термодинамічної рівноваги, зумовленого тиском $p(x,y,z,t)$, щільністю $\rho(x,y,z,t)$, температурою $T(x,y,z,t)$, ентропією $S(x,y,z,t)$ і внутрішньою енергією $E(x,y,z,t)$. З термодинаміки відомо, що для кожного даного середовища незалежні тільки два з параметрів p, ρ, T, S і E. Величини p, T і E можна розглядати як функції від ρ і S.

Почнемо вивід основних гідродинамічних рівнянь із виводу рівняння, що виражає собою закон збереження речовини в гідродинаміці. Розглянемо деякий об’єм рідини V, обмежений поверхнею S. Якщо всередині об’єму V немає джерел і стоків, то зміна в одиницю часу маси рідини, що міститься усередині V, дорівнює потоку рідини через поверхню S:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = -\iint_S \rho v_n ds, \tag{2.32}$$

де v_n – проекція $\vec{v}(x,y,z,t)$ на зовнішню нормаль до поверхні S. Перетворюючи праву частину за формулою Остроградського й диференціюючи по t під знаком інтеграла в лівій частині, отримаємо:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iiint_V div\rho\vec{v}\, dV, \tag{2.33}$$

або

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\rho\vec{v}\right) dV = 0, \tag{2.34}$$

де

$$div\rho\vec{v} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}. \tag{2.35}$$

Оскільки остання рівність справедлива для будь-якого об'єму всередині рідини, то звідси випливає, що

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\rho \vec{v} = 0. \qquad (2.36)$$

Це рівняння називається рівнянням нерозривності.

Перейдемо тепер до виводу рівнянь руху ідеальної рідини.

Під ідеальною рідиною будемо розуміти таке суцільне середовище, у якому при виділенні деякого об'єму V, що обмежений поверхнею S, дія на нього іншої частини рідини може бути заміненою вектором сили, що спрямований в кожній точці поверхні S в бік внутрішньої нормалі. Позначимо величину цієї сили на одиницю площі (тиск) через $p(x, y, z, t)$.

Таким чином, рівнодіюча сил тиску, прикладених до поверхні S, дорівнює:

$$-\iint_S p\vec{n}dS, \qquad (2.37)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S. Згідно із формулою Остроградського, маємо:

$$-\iint_S p\vec{n}dS = -\iiint_V grad\ pdV. \qquad (2.38)$$

Нехай далі на рідину діє зовнішня сила $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$, розрахована на одиницю маси, так що рівнодіюча цих сил, прикладених до об'єму V, дорівнює:

$$\iiint_V \rho\vec{F}dV. \qquad (2.39)$$

Нарешті, рівнодіюча сил інерції, що діють на рідину в об'ємі V,

$$-\iiint_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dV, \qquad (2.40)$$

де $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ – вектор прискорення частинки рідини. Тут похідна $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ визначає не зміну швидкості рідини в даній нерухомій точці простору, а зміну швидкості певної частинки рідини, що пересувається в просторі.

Застосовуючи принцип Д'Аламбера, отримаємо:

$$\iiint\limits_V \left(\rho \vec{F} - \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - grad\ p \right) dV = 0. \tag{2.41}$$

Звідки в силу довільності об'єму V випливає, що

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\ p \tag{2.42}$$

або у скалярній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \dfrac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} v_z = F_x - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \dfrac{\partial v_y}{\partial z} v_z = F_y - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + \dfrac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \dfrac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} v_z = F_z - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \tag{2.43}$$

Це є рівняння руху ідеальної рідини у формі Эйлера.

Отже, для п'яти невідомих функцій v_x, v_y, v_z, ρ і p ми маємо всього чотири рівняння (2.36) і (2.43). Щоб отримати ще одне рівняння, будемо вважати, що рух рідини відбувається адіабатично. При адіабатичному русі ентропія кожної частинки рідини залишається постійною (хоча може змінюватися від частинки до частинки) під час переміщення останньої в просторі тобто $\frac{dS}{dt} = 0$, де повна похідна за часом означає зміну ентропії певної частинки рідини, що пересувається в просторі. Цю похідну можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} v_x + \frac{\partial S}{\partial y} v_y + \frac{\partial S}{\partial z} v_z = 0. \tag{2.44}$$

Це рівняння вказує на адіабатичність руху ідеальної рідини. В окремому випадку може виявитися, що в деякий початковий момент часу ентропія однакова у всіх точках рідини, тоді вона залишиться скрізь однаковою й незмінною з часом і під час подальшого руху рідини. У такому разі рівняння адіабатичності можна писати просто у вигляді:

$$S = S_0 = const. \tag{2.45}$$

Такий рух рідини називають ізентропічним. При цьому

$$p = f\left(\rho, S_0\right) = f\left(\rho\right). \tag{2.46}$$

Таким чином, ми маємо п'ять рівнянь: рівняння нерозривності (2.36), три рівняння руху ідеальної рідини (2.43) і рівняння (2.46). Ці рівняння складаються саме з п'яти невідомих функцій: v_x, v_y, v_z, ρ і p.

2.5 Рівняння звукових хвиль

Коливальний рух з малими амплітудами в рідині або газі, що стискається, називають звуковими хвилями. У кожному місці рідини у звуковій хвилі відбуваються почергові стиск і розрідження.

Через малість коливань у звуковій хвилі швидкість $\vec{v}$ у ній мала, тому в рівняннях Эйлера (2.43) можна знехтувати членами $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x\right)$ та ін. З тієї ж причини відносні зміни щільності й тиску в рідині теж малі. Позначимо

$$p = p_0 + \overline{p},\ \rho = \rho_0 + \overline{\rho}, \tag{2.47}$$

де ρ_0, p_0 – сталі рівноважні щільність і тиск рідини;

$\overline{\rho}$, $\overline{p}$ – їх зміни у звуковій хвилі ($\overline{\rho} \ll \rho_0$, $\overline{p} \ll p_0$);

$\overline{p}$ –звуковий тиск.

Рівняння нерозривності (2.36) при підстановці в нього (2.47) і нехтуванні малими величинами другого порядку ($\overline{\rho}$, $\overline{p}$, $\vec{v}$, $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x}$, $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$, … та ін. при цьому потрібно вважати малими величинами першого порядку) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \rho_0 div\vec{v} = 0, \tag{2.48}$$

або, вважаючи

$$s = \frac{\overline{\rho}}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \tag{2.49}$$

отримаємо

$$\frac{\partial s}{\partial t} + div\vec{v} = 0. \tag{2.50}$$

Рівняння Ейлера (2.43), вважаючи, що зовнішні сили відсутні, у тому ж наближенні зводяться до рівнянь:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x},\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y},\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \qquad (2.51)$$

або, у векторній формі,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} grad\ \overline{p}. \qquad (2.52)$$

Рівняння (2.50) і (2.52) містять невідомі функції $\vec{v}$, s та $\overline{p}$. Для виключення однієї з них використаємо рівняння (2.46), яке в тому ж наближенні можна записати у вигляді:

$$\overline{p} = f'(\rho_0)\overline{\rho} = \rho_0 f'(\rho_0)s. \qquad (2.53)$$

Підставляючи (2.53) у рівняння (2.52), отримаємо

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a^2 grad\, s = 0, \qquad (2.54)$$

де покладене $a^2 = f'(\rho_0)$, тому що для всіх рідин і газів, що зустрічаються в природі, при постійній ентропії, тиск зростає за зростання щільності, тобто $f'(\rho_0) > 0$.

Застосовуючи до рівняння (2.54) операцію дивергенції і переставляючи диференціювання по t з операцією дивергенції, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} div \vec{v} = -a^2 div\, grad\, s = -a^2 \Delta s, \qquad (2.55)$$

де

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}. \qquad (2.56)$$

Звертаючи увагу на рівняння (2.50), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right). \qquad (2.57)$$

Для тиску $\overline{p}$ і швидкості $\vec{v}$ також можна отримати хвильове рівняння вигляду (2.57).

Припустимо тепер, що в початковий момент існує потенціал швидкостей $u_0\left(x,y,z\right)$, тобто

$$\vec{v}\Big|_{t=0}=-grad\ u_0\left(x,y,z\right). \tag{2.58}$$

З рівняння (2.54) випливає, що

$$\vec{v}\left(x,y,z,t\right)=\vec{v}\Big|_{t=0}-a^2 grad\int_0^t s\,dt \tag{2.59}$$

або з (2.58),

$$\vec{v}=-grad\left[u_0\left(x,y,z\right)+a^2\int_0^t s\,dt\right]=-grad\,u\left(x,y,z,t\right), \tag{2.60}$$

яке означає, що існує потенціал швидкостей $u\left(x,y,z,t\right)$ у будь-який момент часу t:

$$u\left(x,y,z,t\right)=u_0\left(x,y,z\right)+a^2\int_0^t s\,dt. \tag{2.61}$$

Покажемо, що потенціал швидкостей $u\left(x,y,z,t\right)$ задовольняє хвильове рівняння. Насправді, диференціюючи вираз (2.61) два рази по t, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial s}{\partial t}. \tag{2.62}$$

З іншого боку, підставляючи (2.60) у рівняння (2.50), матимемо:

$$\frac{\partial s}{\partial t}=div\,grad\,u=\Delta u. \tag{2.63}$$

Порівнюючи (2.62) і (2.63), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{2.64}$$

Зауважимо, що знання потенціалу швидкостей $u\left(x,y,z,t\right)$ досить для визначення всього процесу руху рідини або газу, тому що

$$\vec{v}=-grad\,u,\ s=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},\ \overline{p}=\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.65}$$

2.6 Рівняння електричних коливань у проводах

Проходження проводом електричного струму характеризується силою струму I та напругою U, які є функціями положення точки x і часу t. Побудуємо рівняння, яке описує розподіл електричного струму в проводі.

Введемо такі позначення: R – опір на одиницю довжини; L – індуктивність проводу (коефіцієнт пропорційності, що зв'язує електрорушійну силу самоіндукції U_C зі швидкістю зміни струму, тобто $U_C = L\frac{\partial I}{\partial t}$); C – ємність проводу (коефіцієнт пропорційності між струмом зсуву $I_{зс}$ і швидкістю зміни напруги, тобто $I_{зс} = C\frac{\partial U}{\partial t}$); G – величина втрат кількості електрики внаслідок недосконалості ізоляції, розрахована на одиницю довжини (коефіцієнт пропорційності між струмом витоку $I_в$ і напругою, тобто $I_в = GU$).

Для складання диференціальних рівнянь, яким повинні задовольняти функції $U(x,t)$ і $I(x,t)$, виділимо ділянку проводу від точки з абсцисою x до точки з абсцисою $x+dx$. Якщо напруга і струм в точці x у момент часу t рівні, відповідно, $U(x,t)$ і $I(x,t)$, то в точці $x+dx$ у той же момент часу значення цих величин (з точністю до нескінченно малих вищих порядків порівняно з dx) будуть рівні $U+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)dx$ і $I+\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)dx$. Згідно із законами Кірхгофа, падіння напруги на даній ділянці викликатиметься втратою напруги в проводі, тобто величиною $RIdx$, і виникненням протидіючої електрорушійної сили самоіндукції. Тому

$$U-\left(U+\frac{\partial U}{\partial x}dx\right)=RIdx+L\frac{\partial I}{\partial t}dx, \tag{2.66}$$

тобто,

$$\frac{\partial U}{\partial x}+L\frac{\partial I}{\partial t}+RI=0. \tag{2.67}$$

Зміна струму на цій же ділянці зумовлена струмом витоку й струмом зсуву. Отже,

$$I-\left(I+\frac{\partial I}{\partial x}dx\right)=GUdx+C\frac{\partial U}{\partial t}dx, \tag{2.68}$$

звідки

$$\frac{\partial I}{\partial x}+C\frac{\partial U}{\partial t}+Gu=0. \tag{2.69}$$

Як наслідок отримали систему двох рівнянь з частинними похідними першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} + C\dfrac{\partial U}{\partial t} + GU = 0; \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + L\dfrac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \end{cases} \quad (2.70)$$

Виключимо змінну U з цієї системи рівнянь. Для цього продиференціюємо перше рівняння за x:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x} + G\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.71)$$

а друге за t:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} + L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + R\frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad (2.72)$$

помноживши його на C, отримаємо:

$$C\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} + CL\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + CR\frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (2.73)$$

Далі віднімемо від (2.71) рівняння (2.73) почленно, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - CL\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + G\frac{\partial U}{\partial x} - CR\frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (2.74)$$

З другого рівняння системи (2.70):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L\frac{\partial I}{\partial t} - RI. \quad (2.75)$$

Підставивши $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ в (2.74), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - CL\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - GL\frac{\partial I}{\partial t} - GRI - CR\frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad (2.76)$$

звідки

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \left(GL + CR\right)\frac{\partial I}{\partial t} + GRI. \quad (2.77)$$

Аналогічний вигляд матиме рівняння для напруги U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(GL + CR\right)\frac{\partial U}{\partial t} + GRU. \qquad (2.78)$$

Рівняння (2.77) і (2.78) є лінійними ДРЧП другого порядку.

Рівняння (2.77) і (2.78) називаються телеграфними рівняннями. Якщо нехтувати втратами через ізоляцію і якщо опір малий (тобто $G = 0$, $R = 0$), то рівняння (2.78) матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \qquad (2.79)$$

Отже, телеграфне рівняння (2.79) має вигляд рівняння вільних коливань струни (2.17), тобто є хвильовим рівнянням, де

$$a = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad (2.80)$$

2.7 Рівняння поширення тепла в ізотропному твердому тілі

Розглянемо тверде тіло, температура якого в точці $\left(x, y, z\right)$ у момент часу визначається функцією $u\left(x, y, z, t\right)$. Якщо різні частини тіла перебувають при різній температурі, то в тілі буде відбуватися рух тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих. Візьмемо деяку поверхню S усередині тіла й на ній малий елемент ΔS. За законом Фур'є кількість тепла ΔQ, що проходить через елемент ΔS за час Δt, пропорційна $\Delta t \Delta S$ і похідній $\frac{\partial u}{\partial n}$, тобто

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S \Delta t = -k \Delta S \Delta t\, grad_n u, \qquad (2.81)$$

де $k > 0$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності;

n – нормаль до елемента поверхні ΔS у напрямку руху тепла.

Будемо вважати, що тіло ізотропне відносно теплопровідності, тобто що коефіцієнт внутрішньої теплопровідності k залежить тільки від точки $\left(x, y, z\right)$ тіла й не залежить від напрямку нормалі поверхні S у цій точці.

Позначимо через q тепловий потік, тобто кількість тепла, що проходить через одиницю площі поверхні за одиницю часу. Тоді (2.81) можна записати у вигляді:

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}. \qquad (2.82)$$

Для виводу рівняння поширення тепла виділимо усередині тіла довільний об'єм V, обмежений гладкою замкненою поверхнею S, і розглянемо зміну кількості тепла в цьому об'ємі за проміжок часу (t_1,t_2). Очевидно, що через поверхню S за проміжок часу (t_1,t_2), згідно з формулою (2.81), входить кількість тепла, що дорівнює:

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dS, \tag{2.83}$$

де n – внутрішня нормаль до поверхні S.

Розглянемо елемент об'єму ΔV. На зміну температури цього об'єму на Δu за проміжок часу Δt потрібно затратити кількість тепла:

$$\Delta Q_2 = \left[u(x,y,z,t+\Delta t) - u(x,y,z,t)\right]\gamma(x,y,z)\rho(x,y,z)\Delta V, \tag{2.84}$$

де $\rho(x,y,z)$, $\gamma(x,y,z)$ – густина й теплоємність речовини. Таким чином, кількість тепла, необхідна для зміни температури об'єму V на $\Delta u = u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)$, дорівнює:

$$Q_2 = \iiint_V \left[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)\right]\gamma\rho\, dV, \tag{2.85}$$

або

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV, \tag{2.86}$$

тому що

$$u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt. \tag{2.87}$$

Припустимо, що усередині розглянутого тіла є джерела тепла. Позначимо через $F(x,y,z,t)$ щільність (кількість тепла, що поглинається або виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму тіла) теплових джерел. Тоді кількість тепла, що виділяється або поглинається в об'ємі V за проміжок часу (t_1,t_2), дорівнюватиме:

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x,y,z,t)dV. \tag{2.88}$$

Складемо тепер рівняння балансу тепла для виділеного об'єму V. Очевидно, що $Q_2 = Q_1 + Q_3$, тобто

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z) dV, \quad (2.89)$$

або, застосувавши формулу Остроградського до другого інтеграла, отримаємо:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left[\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - div\big(k\, grad\, u\big) - F(x, y, z, t) \right] dV = 0. \quad (2.90)$$

Оскільки підінтегральна функція неперервна, а об'єм V і проміжок часу (t_1, t_2) довільні, то для будь-якої точки (x, y, z) розглянутого тіла й для будь-якого моменту часу t повинно бути

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div\big(k\, grad\, u\big) + F(x, y, z, t), \quad (2.91)$$

або

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t). \quad (2.92)$$

Це рівняння називається рівнянням теплопровідності неоднорідного ізотропного тіла.

Якщо тіло однорідне, то γ, ρ і k – постійні й рівняння (2.92) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (2.93)$$

де

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \quad (2.94)$$

$$f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{\gamma\rho}. \quad (2.95)$$

В окремому випадку, коли температура залежить тільки від координат x, y і t, що, наприклад, має місце при поширенні тепла в дуже тонкій однорідній пластинці, рівняння (2.93) зводиться у таке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f\left(x, y, t\right). \tag{2.96}$$

Нарешті, для тонкого однорідного стержня рівняння теплопровідності матиме вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x, t\right). \tag{2.97}$$

Якщо в розглянутому однорідному тілі немає джерел тепла, тобто $F\left(x, y, z, t\right) = 0$, то з рівнянь (2.93), (2.96) і (2.97) отримаємо однорідні рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right); \tag{2.98}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \tag{2.99}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.100}$$

які описують явище поширення тепла в теплоізольованому ізотропному тілі, однорідній пластинці та однорідному стержні відповідно.

2.8 Задачі, що приводять до рівняння Лапласа і Пуассона

2.8.1 Стаціонарні теплові поля

Припустимо, що температура u в кожній точці усередині тіла встановилася, тобто вона не змінюється з часом. У результаті всередині тіла отримаємо стаціонарне теплове поле. Оскільки температура u не змінюється з часом t, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, а також теплові потоки, що надходять від джерел тепла, які діють всередині тіла, не залежать від часу. Якщо ввести позначення $F = -\frac{f}{a^2}$, то з рівнянь (2.93) і (2.96) отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=F\left(x,y,z\right); \qquad (2.101)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y\right). \qquad (2.102)$$

Ці рівняння називаються рівняннями Пуассона в просторі та на площині відповідно.

Якщо джерела чи стоки тепла всередині тіла відсутні, то ми отримаємо так звані рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0; \qquad (2.103)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (2.104)$$

у просторі та на площині відповідно.

2.8.2 Потенціальний рух нестисливої рідини

Розглянемо усталений рух нестисливої рідини. Нехай рух рідини невихровий або, інакше кажучи, потенціальний, тобто швидкість $\vec{v}\left(x,y,z\right)$ – потенціальний вектор:

$$\vec{v}=-grad\ \varphi. \qquad (2.105)$$

Для рідини, що не стискається, щільність ρ постійна, і з рівняння нерозривності (20) маємо:

$$div\,\vec{v}=0. \qquad (2.106)$$

Підставивши (2.105) у (2.106), отримаємо:

$$div\ grad\ \varphi=0 \qquad (2.107)$$

або

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0, \qquad (2.108)$$

тобто потенціал швидкості задовольняє рівняння Лапласа (2.108).

2.9 Задачі теорії пружності

2.9.1 Диференціальні рівняння рівноваги

Виділимо з тіла, що перебуває під дією зовнішніх сил, нескінченно малий паралелепіпед із гранями, що паралельні координатним площинам, і ребрами довжиною dx, dy і dz (рис. 2.3).

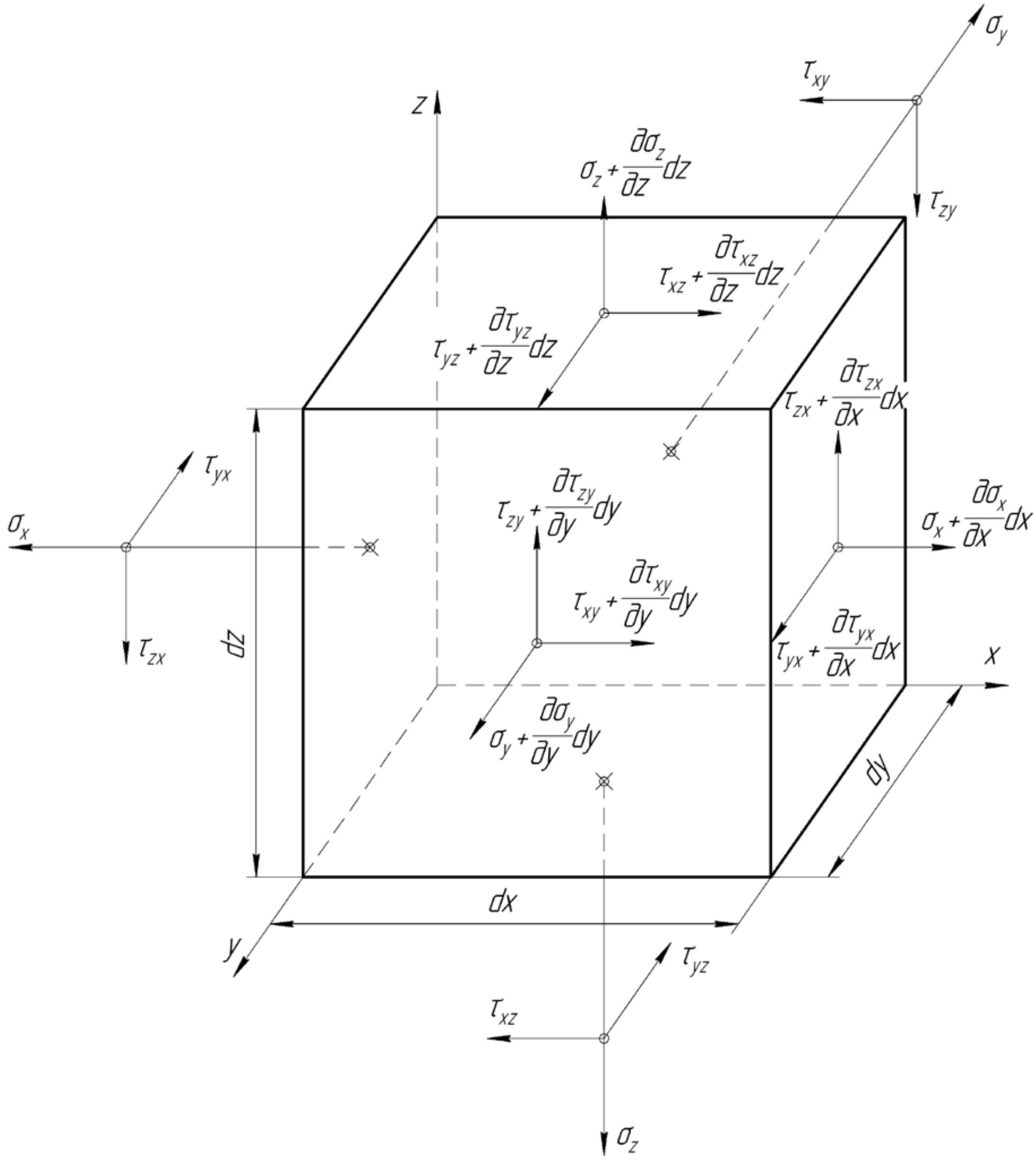


Рисунок 2.3 – Розподілення напружень

Встановимо залежність між складовими напружень, що діють на гранях цього паралелепіпеда. На кожній грані маємо три складові, які паралельні координатним осям. Усього на шести гранях отримаємо 18 складових напружень.

Складові напружень є функціями трьох координат. Тому, наприклад, нормальне напруження σ_x у точці з координатами x, y, z можна позначати $\sigma_x\left(x, y, z\right)$. У точці, що знаходиться від розглянутої на нескінченно малій відстані, напруження σ_x з точністю до нескінченно малих першого порядку може бути розкладене в ряд Тейлора:

$$\sigma_x\left(x+dx, y+dy, z+dz\right) = \sigma_x\left(x, y, z\right) + \frac{\partial\sigma_x\left(x, y, z\right)}{\partial x}dx + \\ + \frac{\partial\sigma_x\left(x, y, z\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial\sigma_x\left(x, y, z\right)}{\partial z}dz. \tag{2.109}$$

Для граней, що паралельні площині yOz, змінюється тільки координата x, а прирости $dy = dz = 0$. Тому на грані паралелепіпеда, що збігається з координатною площиною yOz, нормальне напруження позначене σ_x, а на паралельній грані, що знаходиться від першої на нескінченно малій відстані dx, нормальне напруження позначене $\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$. Аналогічно пов'язані напруження й на інших парах паралельних граней паралелепіпеда. Таким чином, з 18 складових напружень невідомими є лише дев'ять: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx}, τ_{xz}.

Крім напружень на паралелепіпед будуть діяти об'ємні сили. Позначимо проекції на координатні осі об'ємних сил, віднесених до одиниці об'єму тіла, X, Y та Z. Тоді складові об'ємних сил, що діють в об'ємі розглянутого паралелепіпеда будуть рівні $X\,dx\,dy\,dz$, $Y\,dx\,dy\,dz$, $Z\,dx\,dy\,dz$.

Для тіла, що перебуває в рівновазі, повинні задовольнятися шість рівнянь статики: три рівняння проекцій на координатні осі й три рівняння моментів щодо цих осей.

Розглянемо рівняння проекції на вісь x. На неї проектуються тільки сили, паралельні цій осі. Перемножуючи кожне напруження на площу грані, по якій воно діє, і переходячи таким чином від напруження до сил, у результаті проектування отримаємо:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz - \sigma_x dy\,dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dz\,dx - \\ -\tau_{xy}dz\,dx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}dz\right)dx\,dy - \tau_{xz}dx\,dy + X\,dx\,dy\,dz = 0. \tag{2.110}$$

Після розкриття дужок зведення подібних членів і ділення на об'єм $dV = dx\,dy\,dz$ остаточно знаходимо:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \tag{2.111}$$

Аналогічно можна скласти рівняння проекцій на осі y та z. Таким чином, отримаємо три диференціальні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \tag{2.112}$$

Переходимо до складання рівнянь моментів щодо координатних осей. Візьмемо, наприклад, рівняння моментів щодо осі y. Додавши моменти всіх сил щодо цієї осі, отримаємо:

$$\begin{gathered} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy\, dz \frac{dz}{2} - \sigma_x dy\, dz \frac{dz}{2} - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx\, dy \frac{dx}{2} + \\ + \sigma_z dx\, dy \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx\, dy\, dz - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) dx\, dy\, dz - \\ - \tau_{xy} dz\, dx \frac{dz}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dz\, dx \frac{dz}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \right) dz\, dx \frac{dx}{2} + \\ + \tau_{zy} dz\, dx \frac{dx}{2} + X dx\, dy\, dz \frac{dz}{2} - Z dx\, dy\, dz \frac{dx}{2} = 0. \end{gathered} \tag{2.113}$$

Звівши у виразі (2.113) подібні члени й відкинувши величини четвертого порядку малості після ділення на об’єм розглянутого паралелепіпеда, отримаємо:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}. \tag{2.114}$$

Складаючи рівняння моментів щодо осей z і x, отримаємо ще два аналогічні співвідношення. Таким чином, з рівнянь моментів випливають три рівності:

$$\begin{cases} \tau_{yx} = \tau_{xy}; \\ \tau_{zy} = \tau_{yz}; \\ \tau_{xz} = \tau_{zx}, \end{cases} \tag{2.115}$$

що визначають закон парності дотичних напружень: по двох взаємно перпендикулярним граням складові дотичних напружень, що перпендикулярні лінії перетину цих граней, рівні між собою.

Унаслідок парності дотичних напружень замість дев’яти невідомих складових напружень, що характеризують напружений стан у точці тіла, залишається тільки шість, і рівняння рівноваги набудуть вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \tag{2.116}$$

Для знаходження шести невідомих σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} маємо тільки три диференціальні рівняння рівноваги (2.116).

Отже, рівнянь статики недостатньо й завдання теорії пружності із визначення напружень у нескінченно малому обсязі є статично невизначеною. Відсутні рівняння можна отримати, розглядаючи деформації тіла й враховуючи його фізичні властивості.

2.9.2 Взаємозв’язок між деформаціями й переміщенням

Досліджуємо деформацію пружного тіла. Для її визначення необхідно порівняти положення точок тіла до й після прикладення навантаження. На рис. 2.4 показані тіло й точка A із координатами x, y, z. Під дією навантаження точка A перейде в нове положення A' із координатами x', y', z'. Вектор $\overrightarrow{AA'}$ називається вектором переміщення точки A.

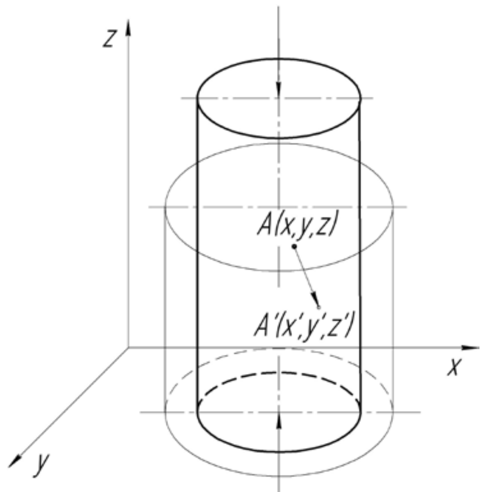


Рисунок 2.4 – Переміщення точки тіла, що деформується

Розрізняють два види переміщень: переміщення всього тіла як єдиного цілого без його деформування й переміщення, пов’язане з деформуванням тіла. Переміщення першого виду вивчаються в теоретичній механіці як переміщення абсолютно твердого тіла. У теорії пружності розглядаються тільки переміщення, пов’язані з деформуванням тіла.

Будемо вважати, що розглянуте тіло закріплене так, що не може переміщуватись як абсолютно тверде тіло. Позначимо проекції вектора переміщення точки A на координатні осі через u_x, u_y, u_z. Вони рівні різниці відповідних координат точок A та A':

$$u_x = x' - x; u_y = y' - y; u_z = z' - z \tag{2.117}$$

і є функціями координат

$$u_x = u_x(x, y, z); u_y = u_y(x, y, z); u_z = u_z(x, y, z). \tag{2.118}$$

Різниця у значеннях переміщень різних точок тіла спричиняє його деформування. Нескінченно малий паралелепіпед з ребрами dx, dy, dz вирізаний із пружного тіла біля довільної точки A і внаслідок різних переміщень його точок деформується так, що змінюється довжина його ребер і спотворюються початково прямі кути між гранями.

На рис. 2.5 зображено два ребра цього паралелепіпеда: ребро AB, яке паралельне осі x і ребро AC, яке паралельне осі z. Довжина ребра AB дорівнює dx, ребра AC – dz. Після деформування точки A, B та C займуть нові положення: A', B', C'. При цьому точка A отримає переміщення, складові якого у площині креслення рівні u_x і u_z. Точка B, що знаходиться від точки A на нескінченно малій відстані dx, отримає переміщення, складові якого будуть відрізнятись від складових переміщення точки A на нескінченно малу величину за рахунок зміни координати x:

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx; u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx. \tag{2.119}$$

Складові переміщення точки C будуть відрізнятись від складових переміщення точки A на нескінченно малу величину за рахунок зміни координати z:

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz; u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz. \tag{2.120}$$

Довжина проекції ребра AB на вісь x після деформування:

$$A'B'' = dx - u_x + u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx. \tag{2.121}$$

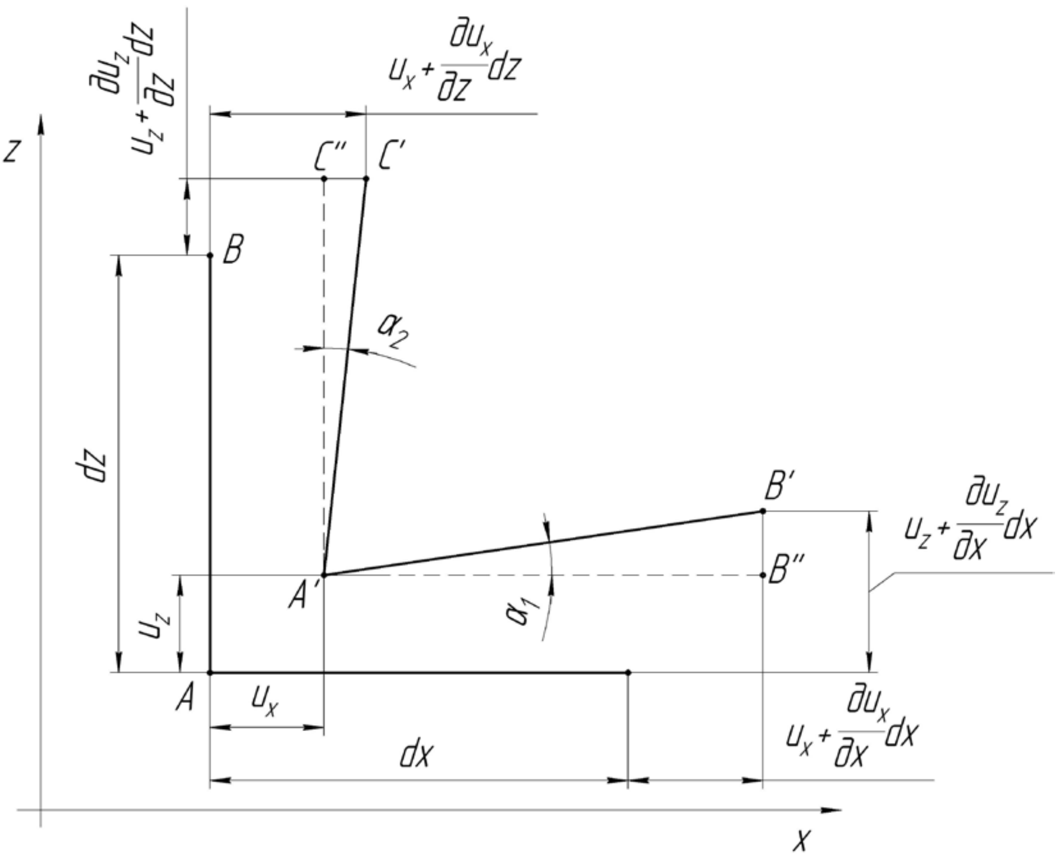


Рисунок 2.5 – Визначення лінійної та кутової деформації

Проекція абсолютного подовження ребра AB на вісь x:

$$\Delta AB = A'B'' - AB = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx. \qquad (2.122)$$

Відносне подовження уздовж осі x

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad (2.123)$$

називається лінійною деформацією у напрямку осі x.

Аналогічно отримаємо лінійні деформації у напрямках координатних осей y та z:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \qquad (2.124)$$

Отже, лінійна деформація в будь-якому напрямку дорівнює частинній похідній складової переміщення в цьому напрямку по змінній у тому ж напрямку.

Розглянемо зміни кутів між ребрами паралелепіпеда (див. рис. 2.5). Тангенс кута повороту ребра AB у площині xOz:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{u_z + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}dx - u_z}{dx\left(1 + \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right)} = \frac{\dfrac{\partial u_z}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}. \tag{2.125}$$

Обмежуючись розглядом лише малих деформацій, можна вважати $\operatorname{tg}\alpha_1 \approx \alpha_1$ та знехтувати лінійною деформацією через малість порівняно з одиницею. Тоді

$$\alpha_1 = \frac{\partial u_z}{\partial x}. \tag{2.126}$$

Аналогічно знаходимо кут повороту ребра AC у тій же площині:

$$\alpha_2 = \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \tag{2.127}$$

Кут зсуву в площині xOz, тобто викривлення прямого кута BAC, називається кутовою деформацією і визначається як сума кутів повороту ребер AB і AC:

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \tag{2.128}$$

Аналогічно знайдемо кутові деформації у двох інших координатних площинах:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \tag{2.129}$$

Отже, кутова деформація в будь-якій площині дорівнює сумі частинних похідних складових переміщення в цій площині по змінним у перпендикулярних напрямках.

Формули (2.123), (2.124), (2.128), (2.129) дають шість основних залежностей складових лінійних і кутових деформацій від складових переміщення:

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{gathered} \tag{2.130}$$

Ці геометричні співвідношення були виведені Коші й іноді називаються рівняннями Коші.

2.9.3 Рівняння нерозривності деформацій

Геометричні співвідношення Коші (2.130) пов'язують шість складових деформації ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} і три складові переміщення u_x, u_y, u_z. Якщо задано три складові переміщення, то шість складових деформації визначаються із цих рівнянь однозначно, тобто заданим трьом складовим переміщення відповідає єдина система шести складових деформації.

Якщо ж задано шість складових деформації, то для визначення трьох складових переміщення необхідно проінтегрувати шість диференціальних рівнянь (2.130) у частинних похідних. При довільному виборі складових деформації шість рівнянь із трьома невідомими не завжди можуть бути вирішені однозначно. Тому між шістьма складовими деформації повинні існувати певні залежності. Щоб вивести ці залежності, необхідно виключити складові переміщення з рівнянь (2.130). Перше з рівнянь (2.130) двічі продиференціюємо по y:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}, \tag{2.131}$$

а друге – двічі по x:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}. \tag{2.132}$$

Отримані результати складемо:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right). \tag{2.133}$$

Вираз, що стоїть у дужках, згідно з рівняннями (2.130), визначає кутову деформацію γ_{xy}. Тоді замість співвідношення (2.133) отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{2.134}$$

Аналогічно можна встановити залежність між деформаціями й у двох інших координатних площинах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{cases} \tag{2.135}$$

Рівняння (2.134) і (2.135) показують, якщо задано дві лінійні деформації у взаємно перпендикулярних напрямках, то кутову деформацію в площині цих лінійних деформацій не можна задати довільно.

Трьох рівнянь (2.134) і (2.135) виявляється недостатньо для забезпечення однозначності переміщень, тому що вони отримані диференціюванням. При диференціюванні порядок диференціального рівняння підвищується й можлива поява нових розв'язків, що не задовольняють початковому рівнянню. Щоб уникнути неприйнятних розв'язків, необхідно мати додаткові умови. Продиференціюємо три останні рівняння (2.130) таким способом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y\,\partial z} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z\,\partial x}; \\ \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z\,\partial x} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial y}; \\ \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y\,\partial z}. \end{cases} \tag{2.136}$$

Складемо два перші рядки й віднімемо третій:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u_y}{\partial z\,\partial x}. \tag{2.137}$$

Продиференціюємо цей вираз ще раз по y і, враховуючи, що

$$\frac{\partial^3 u_y}{\partial z\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}, \tag{2.138}$$

отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}. \tag{2.139}$$

Аналогічно можна отримати ще два рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}. \end{cases} \tag{2.140}$$

Ці рівняння вказують: якщо задано три кутові деформації у трьох взаємно перпендикулярних площинах, то лінійні деформації не можуть бути задані довільно.

Отже, отримано таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases} \qquad (2.141)$$

Необхідність існування отриманих залежностей можна обґрунтувати й геометричним шляхом. Уявимо собі тіло розрізаним на малі паралелепіпеди. Якщо кожний із цих паралелепіпедів матиме довільні деформації, то з окремих деформованих паралелепіпедів не можна знову скласти безперервне тверде тіло: у деяких точках після деформування виникнуть нескінченно малі розриви. Рівняння ж (2.141) встановлюють такі залежності між складовими деформації, при виконанні яких тіло й після деформування залишається суцільним, або безперервним. Тому рівняння (2.141) можна розглядати як наслідок зробленого раніше припущення про суцільність тіла. Вони називаються рівняннями нерозривності деформацій Сен-Венана.

Запитання для самоперевірки

1. Які диференціальні рівняння з частинними похідними належать до основних рівнянь математичної фізики?

2. Яка величина характеризує процес коливання струни?

3. Що називається струною? Згідно з яких фізичних законів будується одновимірне рівняння коливання струни?

4. Які коливання (вимушені або вільні) описує однорідне двовимірне хвильове рівняння?

5. Наведіть приклади процесів, які описує рівняння $u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f\left(x,t\right)$.

6. Що називається мембраною? Виведіть рівняння поперечних коливань мембрани.

7. Виведіть телеграфне рівняння.

8. Напишіть тривимірне хвильове рівняння.

9. Які фізичні передумови виведення рівняння поширення тепла в ізотропному твердому тілі?

10. Які диференціальні рівняння описують нестаціонарні теплові поля і як з них отримати рівняння, що описують стаціонарні теплові поля? До якого типу належать ці рівняння?

11. Поясніть з геометричних міркувань рівняння нерозривності деформацій Сен-Венана.

12. Які фізичні процеси описуються за допомогою рівнянь параболічного типу?

13. Які фізичні процеси описуються за допомогою рівнянь гіперболічного типу?

14. Які фізичні процеси описуються за допомогою рівнянь еліптичного типу?

3 ОСНОВНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

3.1 Метод характеристик

Для диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку неможливо вказати загальний розв'язок єдиного вигляду, але можна знайти його в окремих випадках.

Для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку загальні розв'язки іноді можна знайти безпосереднім інтегруванням їх канонічних форм. Такий метод знаходження загальних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними називають методом характеристик. За цим методом дане диференціальне рівняння з частинними похідними спочатку спрощується зведенням його до канонічного вигляду відповідною заміною незалежних змінних x і y на ξ і η. Якщо отримане канонічне рівняння настільки просте, що його можна розв'язати безпосереднім інтегруванням і знайти таким чином u як функцію ξ і η, то для знаходження загального розв'язку вихідного диференціального рівняння з частинними похідними необхідно у розв'язку $u = u(\xi, \eta)$ повернутися до старих незалежних змінних x і y.

Приклад. *Знайти загальний розв'язок рівняння:*

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.1}$$

Визначимо канонічний вигляд цього рівняння:

$$A = x^2,\ B = 0,\ C = -y^2.$$

Рівняння гіперболічного типу:

$$\Delta = B^2 - AC = x^2 \cdot y^2 > 0.$$

Знайдемо характеристики диференціального рівняння (3.1):

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \pm \int \frac{dx}{x} + C_1,$$

$$\ln|y| = \pm\ln|x| + \ln C \;\Rightarrow\; \begin{matrix} xy = C \\ \dfrac{y}{x} = C \end{matrix}$$

Отже,

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}\cdot$$

Підставимо знайдені характеристики у вихідне рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\left(y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) -$$

$$-y^2\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) = -4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$$

Канонічний вигляд рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = \frac{1}{2xy}\frac{\partial u}{\partial\eta} \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot$$

Для знаходження загального розв'язку цього рівняння позначимо $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = v$. *Тоді рівняння матиме вигляд:*

$$2\xi\frac{\partial v}{\partial\xi} - v = 0. \qquad (3.2)$$

У рівнянні (3.2) фігурує лише одна незалежна змінна (друга, η*, може розглядатись як параметр). Розв'язуючи це рівняння як звичайне (з невідомою функцією* v *і незалежною змінною* ξ*), отримаємо:*

$$\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int\frac{d\xi}{\xi} + C_1;$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|\xi| + \ln C;$$

$$v = C\sqrt{\xi},$$

де C – довільна величина, що не залежить від ξ, проте вона може залежати від η, яке ми зафіксували в процесі інтегрування рівняння.

Тому позначимо цю величину через $C(\eta)$:

$$v = C(\eta)\sqrt{\xi},$$

Враховуючи, що $v = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = C(\eta)\sqrt{\xi},$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності по η (під час інтегрування вважатимемо ξ сталою):

$$u = \sqrt{\xi}\int C(\eta)\,d\eta + C_1. \tag{3.3}$$

Довільна величина C_1 у (3.3) не залежить від η, але може залежати від ξ. Оскільки шукана функція u залежить від двох змінних ξ і η, позначимо цю величину $C(\xi)$. Крім того, унаслідок довільності підінтегральної функції $C(\eta)$ невизначений інтеграл $\int C(\eta)d\eta$ є також довільною функцією від η; позначимо цей інтеграл $C_2(\eta)$. Тоді (3.3) остаточно набуває вигляду:

$$u = C_1(\xi) + \sqrt{\xi}C_2(\eta).$$

Повертаючись до старих змінних x і y, отримаємо загальний розв'язок рівняння (3.1):

$$u = C_1(xy) + \sqrt{xy}C_2\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.4}$$

Тепер, взявши конкретні функції C_1 і C_2, з (3.4) можна отримати всі можливі частинні розв'язки вихідного рівняння. Наприклад, розв'язками рівняння (3.1) є функції:

$\left.\begin{array}{l} C_1 = z^2 + 2z \\ C_2 = \ln z \end{array}\right. \Rightarrow u = x^2y^2 + 2xy + \sqrt{xy}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ – *частинний розв'язок рівняння (3.1);*

$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = z \end{array}\right. \Rightarrow u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ – *також частинний розв'язок рівняння (3.1). Очевидно, що за допомогою виразу (3.4) можна побудувати безліч частинних розв'язків рівняння (3.1).*

Приклад. *Знайти загальний розв'язок рівняння:*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.5}$$

За допомогою заміни змінних $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$ *це рівняння зводиться до канонічного вигляду:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \tag{3.6}$$

Для розв'язання рівняння (3.6) проінтегруємо його двічі по η. *Оскільки шукана функція* u *залежить від двох змінних* ξ *і* η, *то отримаємо:*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = C_1(\xi),$$

$$u = C_1(\xi)\eta + C_2(\xi), \tag{3.7}$$

де C_1 *і* C_2 *– довільні функції від* ξ. *Для знаходження загального розв'язку вихідного рівняння (3.5) достатньо повернутися в (3.7) до старих змінних* x *і* y.

Наведені приклади є ілюстрацією того, що загальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку, якщо їх можна знайти, залежать не від двох довільних сталих (як у випадку звичайних диференціальних рівнянь другого порядку), а від двох довільних функцій.

Визначаючи ці функції відповідним чином, можна задовольнити ті чи інші додаткові умови, які супроводжують диференціальні рівняння з частинними похідними в задачах математичної фізики.

3.2 Метод відокремлення змінних (метод Фур'є)

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними x і y:

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+M\frac{\partial u}{\partial y}+Nu=\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u\right]+f(x,y), \qquad (3.8)$$

де $L(y)$, $M(y)$, $N(y)$ і $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ – неперервні функції при $0\le y\le y_0$ і $0\le x\le l$, причому $\rho(x)>0$, $p(x)>0$, $q(x)\ge 0$ і $\rho(x)$ обмежена.

Згідно з п. 1.4 за таких припущень щодо $\rho(x)$ і $p(x)$ тип рівняння (3.8) визначається знаком $L(y)$: якщо $L(y)>0$ – гіперболічний тип, $L(y)=0$ – параболічний і $L(y)<0$ – еліптичний.

Основні рівняння математичної фізики є окремими випадками рівняння (3.8). Так, якщо $p(x)=a^2$, $\rho(x)=1$, $q(x)=0$, то при $y\sim t$, $L=1$, $M=N=0$ рівняння (3.8) перетворюється на одновимірне хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t);$$

при $y\sim t$, $L=N=0$, $M=1$ – на одновимірне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t);$$

при $p(x)=-\rho(x)=const$, $L=1$, $M=N=0$, $f(x,y)=0$ – на двовимірне рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Розглянемо загальну схему методу відокремлення змінних (або методу Фур'є) при розв'язанні задач з однорідними рівняннями й крайовими умовами.

Нехай потрібно знайти функцію $u(x,y)$, яка при $0<x<l$, $0<y<y_0$ задовольняє однорідне рівняння:

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+M\frac{\partial u}{\partial y}+Nu=\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u\right], \tag{3.9}$$

однорідні крайові умови по змінній x:

$$\begin{cases}\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u\right)\right|_{x=0}=0;\\ \left.\left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\right|_{x=l}=0,\end{cases} \tag{3.10}$$

і неоднорідні умови по змінній y:
у разі, якщо рівняння (3.9) гіперболічного типу ($L>0$):

$$\begin{cases}u|_{y=0}=f(x);\\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=g(x),\end{cases} \tag{3.11}$$

параболічного типу ($L=0$):

$$u|_{y=0}=\varphi(x), \tag{3.12}$$

еліптичного типу ($L<0$):

$$\begin{cases}\left.\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_1 u\right)\right|_{y=0}=f(x);\\ \left.\left(\gamma_1\frac{\partial u}{\partial x}+\delta_1 u\right)\right|_{y=y_0}=g(x).\end{cases} \tag{3.13}$$

Сталі α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1, δ_1 задовольняють умови $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$, $\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$, $\gamma_1^2+\delta_1^2\neq 0$.

На першому етапі розв'язання задачі за методом Фур'є шукають розв'язки однорідного рівняння (3.9), які задовольняють однорідні умови (3.10), у вигляді добутку функцій:

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y). \tag{3.14}$$

Підставивши (3.14) у рівняння (3.9), отримаємо:

$$LXY'' + MXY' + NXY = \frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)X'\right)Y - q(x)XY\right]. \qquad (3.15)$$

Якщо цю рівність розділити на $X(x)Y(y)$, то в ній відокремляться змінні x і y:

$$\frac{L(y)Y''(y) + M(y)Y'(y) + N(y)Y(y)}{Y(y)} = \\ = \frac{\frac{d}{dx}\left(p(x)X'(x)\right) - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}. \qquad (3.16)$$

Ліва частина цієї тотожності не залежить від x, а права – від y, отже, рівність можлива тільки у випадку, якщо її ліва й права частини дорівнюватимуть сталій величині. Якщо позначити цю сталу λ, то з (3.16) отримаємо два звичайних диференціальних рівняння для визначення $X(x)$ і $Y(y)$:

$$L(y)Y'' + M(y)Y' + \left(N(y) + \lambda\right)Y = 0, \qquad (3.17)$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)X'\right) + \left(\lambda\rho(x) - q(x)\right)X = 0. \qquad (3.18)$$

Розв'язки (3.14) мають задовольняти крайові умови (3.10). Підставивши (3.14) у (3.10), отримаємо умови, які має задовольняти функція $X(x)$:

$$\begin{cases} \alpha X'(0) + \beta X(0) = 0; \\ \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0. \end{cases} \qquad (3.19)$$

Задачу знаходження розв'язків рівняння (3.18), що задовольняють крайові умови (3.19), називають крайовою задачею Штурма-Ліувілля. У цій задачі потрібно знайти значення параметра λ – так звані власні значення, за яких задача (3.18), (3.19) має ненульові розв'язки, а також знайти ці розв'язки – так звані власні функції.

Якщо $X^{(1)}(x,\lambda)$, $X^{(2)}(x,\lambda)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (3.18), то його загальний розв'язок записується у вигляді:

$$X(x) = C_1X^{(1)}(x,\lambda) + C_2X^{(2)}(x,\lambda). \qquad (3.20)$$

Сталі C_1, C_2 і параметр λ мають бути такими, щоб розв'язок (3.20) задовольняв крайові умови (3.19). Підставлення (3.20) у (3.19) дасть систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно C_1 і C_2. Для існування ненульового розв'язку цієї системи її визначник (він залежить від λ) має дорівнювати нулю. При розв'язанні отриманого рівняння знаходять власні значення параметра λ, при яких задача (3.20), (3.19) має ненульові розв'язки – власні функції.

Властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (3.20), (3.19):

1. Існує нескінченна множина власних значень $\{\lambda_n\}$, $n=1,2,...$ і відповідних їм власних функцій $\{X_n(x)\}$.

2. Усі власні значення дійсні й невід'ємні ($\lambda_n \geq 0$): для першої та третьої мішаних та крайових задач для рівняння (3.9) усі власні значення додатні, для другої мішаної чи крайової задачі з $q(x)=0$ власним значенням є $\lambda=0$.

3. Кожному власному значенню λ_n відповідає єдина (з точністю до сталого множника) власна функція $X_n(x)$, і навпаки.

4. Власні функції $X_n(x)$ і $X_k(x)$, які відповідають різним власним значенням λ_n і λ_k, ортогональні між собою з вагою $\rho(x)$ на інтервалі $0 \leq x \leq l$, тобто для будь-яких n і k $(n \neq k)$ виконується рівність:

$$\int_0^l \rho(x) X_n(x) X_k(x) dx = 0. \tag{3.21}$$

5. Будь-яку функцію $\Phi(x)$, яка є неперервною на відрізку $[0;l]$ разом зі своїми похідними першого й другого порядків і яка задовольняє крайові умови (3.19), можна розвинути в ряд Фур'є за системою власних функцій $\{X_n(x)\}$:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \tag{3.22}$$

який збігається абсолютно й рівномірно.

Для знаходження коефіцієнтів a_n ряд (3.22) потрібно помножити на $\rho(x) X_k(x)$, проінтегрувати в межах від 0 до l і використати умову ортогональності функцій із вагою $\rho(x)$:

$$a_n = \frac{\int_0^l \rho(x) \Phi(x) X_n(x) dx}{\int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx}. \tag{3.23}$$

Отже, при розв'язанні задачі (3.20), (3.19) знаходять значення параметра λ – власні значення $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ ,\ \lambda_n,\ \ldots$ і розв'язки – власні функції $X_1(x),\ X_2(x),\ X_n(x),\ \ldots$.

При $\lambda = \lambda_n$ рівняння (3.17) перетворюється на систему рівнянь:

$$LY_n'' + MY_n' + \big(N(y) + \lambda_n\big)Y_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots . \tag{3.24}$$

Якщо $Y_n^{(1)}(y)$ і $Y_n^{(2)}(y)$ – лінійно незалежні розв'язки цих рівнянь, то загальними розв'язками рівнянь (3.24) будуть:

$$Y_n(y) = A_n Y_n^{(1)}(y) + B_n Y_n^{(2)}(y),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{3.25}$$

де A_n і B_n – довільні сталі.

Знайдені розв'язки $X_n(x)$ і $Y_n(y)$ підставляються в (3.14):

$$u_n(x, y) = \Big(A_n Y_n^{(1)}(y) + B_n Y_n^{(2)}(y)\Big) X_n(x),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{3.26}$$

при цьому дістають розв'язки рівняння (3.9), які задовольняють крайові умови (3.10).

На другому етапі розв'язання задачі за методом Фур'є з розв'язків (3.26) складається нескінченний ряд:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n Y_n^{(1)}(y) + B_n Y_n^{(2)}(y)\Big) X_n(x). \tag{3.27}$$

У зв'язку з лінійністю й однорідністю рівняння (3.9) ряд (3.27), складений із його розв'язків, теж буде його розв'язком за умови рівномірної збіжності, а також рівномірної збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial u_n}{\partial y}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial u_n}{\partial x}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$. За таких умов сума ряду (3.27) задовольнятиме також лінійні й однорідні крайові умови (3.10), оскільки їх задовольняє кожен доданок цього ряду.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A_n і B_n необхідно, щоб функція (3.27) задовольняла заданим умовам (3.11)–(3.13) за змінною y.

Гіперболічний тип (**$L > 0$**). Якщо рівняння (3.9) гіперболічного типу, то функція (3.27) має задовольняти початкові умови (3.11). Підставлення (3.27) у (3.11) дає:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_nY_n^{(1)}(0)+B_nY_n^{(2)}(0)\right]X_n(x), \tag{3.28}$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left.\frac{dY_n^{(1)}}{dy}\right|_{y=0}+B_n\left.\frac{dY_n^{(2)}}{dy}\right|_{y=0}\right]X_n(x). \tag{3.29}$$

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють достатні умови для розвинення їх у ряди Фур'є за власними функціями $\{X_n(x)\}$, то вирази в квадратних дужках у правих частинах (3.28) і (3.29) дорівнюватимуть коефіцієнтам рядів Фур'є функцій $f(x)$ і $g(x)$ за функціями $\{X_n(x)\}$. Використання (3.23) дає:

$$A_nY_n^{(1)}(0)+B_nY_n^{(2)}(0)=\frac{\int_0^l \rho(x)f(x)X_n(x)dx}{\int_0^l \rho(x)X_n^2(x)dx}, \tag{3.30}$$

$$A_n\left.\frac{dY_n^{(1)}}{dy}\right|_{y=0}+B_n\left.\frac{dY_n^{(2)}}{dy}\right|_{y=0}=\frac{\int_0^l \rho(x)g(x)X_n(x)dx}{\int_0^l \rho(x)X_n^2(x)dx}. \tag{3.31}$$

Розв'язавши цю лінійну систему алгебраїчних рівнянь, знаходять A_n і B_n. Розв'язок задачі (3.9)–(3.11) дістають, підставивши A_n і B_n у (3.27).

Параболічний тип ($L=0$***).*** При розв'язанні задачі (3.9), (3.10), (3.12) рівняння (3.24), порівняно з попереднім випадком, набуває вигляду:

$$MY_n'+\left(N(y)+\lambda_n\right)Y_n=0,\ n=1,2,\dots . \tag{3.32}$$

Загальними розв'язками (3.32) будуть:

$$Y_n(y)=A_nY_n^{(1)}(y), \tag{3.33}$$

де $Y_n^{(1)}(y)=e^{-\int\frac{N(y)+\lambda_n}{M(y)}dy}$ – частинні розв'язки рівнянь (3.32);

A_n – довільні сталі.

Розв'язки (3.14) рівняння (3.9), які задовольняють крайові умови (3.10), у цьому разі записуються так:

$$u_n(x,y)=A_nY_n^{(1)}(y)X_n(x),\ n=1,2,\dots . \tag{3.34}$$

На другому етапі розв'язок задачі (3.9), (3.10), (3.12) за методом Фур'є шукають у вигляді нескінченного ряду, який складається з розв'язків (3.34):

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nY_n^{(1)}(y)X_n(x). \tag{3.35}$$

Для знаходження коефіцієнтів A_n необхідно, щоб (3.35) задовольняв початковій умові (3.12):

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nY_n^{(1)}(0)X_n(x). \tag{3.36}$$

За формулою (3.23):

$$A_n=\frac{\int_0^l\rho(x)\varphi(x)X_n(x)dx}{Y_n^{(1)}(0)\int_0^l\rho(x)X_n^2(x)dx}. \tag{3.37}$$

Підставивши ці коефіцієнти в (3.35), отримаємо розв'язок задачі (3.9), (3.10), (3.12).

Еліптичний тип ($L<0$***).*** Розв'язок рівняння (3.9), що задовольняє крайові умови (3.10), як і в гіперболічному випадку, знаходять у вигляді ряду (3.27). Вимога, щоб розв'язок (3.27) задовольняв ще й крайові умови (3.13) за змінною y, дає систему рівнянь, аналогічну (3.30), (3.31), з якої знаходять коефіцієнти A_n і B_n. Підставивши їх у (3.27), отримують розв'язок задачі (3.9), (3.10), (3.13).

Приклад. *Знайти розв'язок одновимірного хвильового рівняння:*

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\ \textit{при}\ 0<x<l,\ t>0, \tag{3.38}$$

який задовольняє крайові

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0\ \textit{при}\ t>0 \tag{3.39}$$

і початкові умови:

$$u(x,0)=f(x), u_t'(x,0)=g(x)\ \textit{при}\ 0<x<l. \tag{3.40}$$

На першому етапі розв'язання задачі методом Фур'є шукаємо розв'язки рівняння (3.38), які задовольняють умови (3.39), у вигляді добутку функцій:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.41}$$

Підставимо (3.41) у рівняння (3.38):

$$X(x)T''(t) = a^2 T(t) X''(x). \tag{3.42}$$

Для відокремлення змінних поділимо ліву й праву частини (3.42) на добуток:

$$\frac{1}{a^2 T(t)} T''(t) = \frac{1}{X(x)} X''(x). \tag{3.43}$$

Оскільки ліва частина тотожності (3.43) не залежить від x*, а права – від* t*, то ця рівність можлива лише у разі, якщо і ліва, і права її частини дорівнюють одній і тій самій сталій величині.*

Позначимо цю сталу через $-\lambda$*:*

$$\frac{1}{a^2 T(t)} T''(t) = \frac{1}{X(x)} X''(x) = -\lambda. \tag{3.44}$$

Звідси дістанемо два звичайних диференціальних рівняння для знаходження функцій $T(t)$ *і* $X(x)$*:*

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \tag{3.45}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{3.46}$$

Відокремимо змінні й у крайових умовах (3.39). Для цього підставимо (3.41) у (3.39):

$$X(0)T(t) = 0,\ X(l)T(t) = 0. \tag{3.47}$$

Із цих рівностей отримаємо:

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{3.48}$$

Припущення, що $T(t) = 0$*, приводить, згідно з (3.41), до нульового розв'язку* $u(x,t) = 0$*. Задача (3.46), (3.48) – це задача Штурма-Ліувілля –*

окремий випадок задачі (3.18), (3.19). У ній потрібно знайти такі значення числового параметра λ, що називаються власними, за яких задача (3.46), (3.48) має ненульові розв'язки, а також необхідно знайти ці розв'язки – власні функції.

Рівняння (3.46) – це звичайне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. За методом Ейлера його частинні розв'язки шукають так:

$$X(x) = e^{rx}. \tag{3.49}$$

Підставлення (3.49) у (3.46) дає змогу дістати характеристичне рівняння:

$$r^2 + \lambda = 0. \tag{3.50}$$

Оскільки (3.38)–(3.40) – це перша мішана задача, то за другою властивістю власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля її власні значення додатні, тобто в (3.50) $\lambda > 0$. Тому корені характеристичного рівняння (3.50) уявні: $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Загальний розв'язок рівняння (3.46) має вигляд:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{3.51}$$

Підставлення (3.51) у крайові умови (3.48) дає:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0; \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Однорідна система (3.52) має ненульові розв'язки лише тоді, коли її визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = \sin\sqrt{\lambda}l \tag{3.53}$$

дорівнює нулю. Звідси отримаємо рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ для знаходження власних значень:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots . \tag{3.54}$$

При $\lambda = \lambda_n$ *друге рівняння системи (3.52) збігається з першим, тому* $C_1 = 0$*, а* C_2 *– довільне. Із загальної теорії задачі Штурма-Ліувілля відомо, що її власні функції визначаються з точністю до довільного сталого множника. Без обмеження загальності візьмемо для зручності* $C_2 = 1$*; тоді з (3.51) з урахуванням (3.54) власні функції задачі (3.46), (3.48) мають вигляд:*

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x,\ n = 1, 2, \dots . \tag{3.55}$$

При $\lambda = \lambda_n$ *рівняння (3.45) перетворюється на систему рівнянь:*

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0,\ n = 1, 2, \dots . \tag{3.56}$$

Оскільки $\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 > 0$*, то загальні розв'язки цих рівнянь мають вигляд:*

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l}t, \tag{3.57}$$

де a_n*,* b_n *– довільні сталі.*

Підставивши функції (3.55) і (3.57) у (3.41), знаходимо нескінченну послідовність розв'язків рівняння (3.38), які задовольняють крайові умови (3.39):

$$u_n(x,t) = \sin\frac{\pi n x}{l}\left(a_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l}t\right),\ n = 1, 2, \dots . \tag{3.58}$$

На цьому завершується перший етап розв'язання задачі (3.38)–(3.40).

На другому етапі шукатимемо розв'язок рівняння (3.38), що задовольняє як крайові (3.39), так і початкові умови (3.40). Такий розв'язок за загальною схемою Фур'є будується у вигляді нескінченного ряду розв'язків (3.58):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{3.59}$$

Коефіцієнти a_n *і* b_n *ряду (3.59) мають бути такими, щоб рівномірно збігався сам ряд (3.59), а також ряди, які утворюються з (3.59) після дворазового диференціювання по* x *і* t*. У такому разі ряд задовольнятиме рівняння (3.38) і крайові умови (3.39), оскільки він складається із розв'язків рівняння (3.38), що задовольняють умови (3.39).*

Коефіцієнти a_n і b_n знаходять з умови, що ряд (3.59) має задовольняти початкові умови (3.40).

Згідно з першою умовою (3.40):

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot \tag{3.60}$$

Продиференціюємо ряд (3.59) за змінною t:

$$u_t'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}\left(-a_n\sin\frac{\pi na}{l}t+b_n\cos\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{3.61}$$

і, користуючись другою з умов (3.40), отримаємо:

$$g\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot \tag{3.62}$$

Якщо функції $f\left(x\right)$ і $g\left(x\right)$ розвиваються в ряди Фур'є в інтервалі $\left(0,l\right)$ за власними функціями $\left\{\sin\frac{\pi nx}{l}\right\}$ задачі Штурма-Ліувілля (3.46), (3.48), то з (3.60), (3.61) отримаємо a_n і b_n – коефіцієнти цих рядів. Згідно з (3.23) при $\rho\left(x\right)=1$:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^1 f\left(x\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \tag{3.63}$$

$$b_n\frac{\pi na}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l g\left(x\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{3.64}$$

З останньої рівності:

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l g\left(x\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{3.65}$$

Таким чином, розв'язок задачі (3.38)–(3.40) має вигляд нескінченного ряду (3.59) з коефіцієнтами a_n і b_n, які визначаються за формулами (3.63) і *(3.65).*

Запитання для самоперевірки

1. Що називається власною функцією задачі?
2. Що таке власне значення задачі?
3. Скільки власних функцій може відповідати даному власному значенню?
4. Виконайте процес відокремлення змінних у випадку хвильового рівняння малих поперечних коливань струни.

4 НАЙПРОСТІШІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

4.1 Етапи побудови математичної моделі

Досліджуючи фізичні явища (процеси) за допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними, вивчають не реальне явище (процес), а деяку його математичну модель, від якої вимагається збереження основних ознак розглядуваного явища (процесу); крім того, вона має бути досить простою, щоб її можна було вивчати існуючими математичними методами.

Можна виділити такі основні етапи побудови математичної моделі.

1. Вибір основної величини (або кількох величин), що характеризує явище (процес). Як правило, ця величина (позначимо її u) є функцією просторових координат (у випадку тривимірного простору – координат x, y, z) і часу t.

2. Виведення диференціального рівняння з частинними похідними відносно функції u на основі теоретичних передумов, за допомогою яких визначається модель.

3. Визначення додаткових співвідношень для функції u, які характеризують явище (процес), що моделюється; вони випливають із його фізичного змісту й дають змогу з нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними вибрати єдиний – саме той, що моделює дане явище (процес). Такими додатковими співвідношеннями найчастіше є *межові (крайові) умови*, котрі має задовольняти шукана функція u на межі області, у якій вивчається явище (процес), і *початкові умови*, що визначають функцію u в момент часу, з якого починається дослідження явища (процесу).

Сукупність диференціального рівняння з частинними похідними й додаткових умов (межових і початкових) становить математичне формулювання фізичної задачі й називається *задачею математичної фізики*.

Розрізняють три типи задач:

1. Задача Коші, у якій задано лише початкові умови.
2. Крайова задача, у якій задано лише крайові умови.
3. Мішана задача, у якій задано як крайові, так і початкові умови.

Природно, що основною проблемою теорії «Рівнянь математичної фізики» є знаходження розв'язку задачі математичної фізики у вигляді, зручному для практики. Знаючи цей розв'язок, можна дістати кількісну характеристику процесу в будь-якій точці середовища й у будь-який момент часу.

4.2 Математична модель процесу поширення тепла у стержні

Розглянемо однорідний стержень довжиною l, відносно якого зробимо такі припущення:

а) стержень виготовлено з одного однорідного матеріалу;

б) бічна поверхня стержня теплоізольована (тепло може розповсюджуватися лише вздовж осі стержня);

в) стержень настільки тонкий, що в будь-який момент часу температура в усіх точках кожного поперечного перерізу стержня однакова.

Якщо вісь стержня прийняти за вісь абсцис Ox (рис. 4.1), то температура u буде функцією координати x та часу t, тобто $u = u(x,t)$.

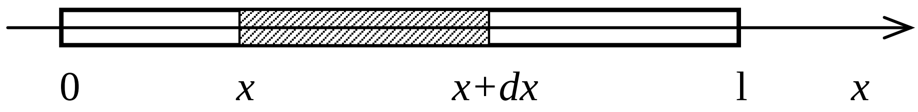


Рисунок 4.1 – Поширення тепла у стержні

З урахуванням усіх припущень, отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку параболічного типу (див. формулу (2.100):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.1}$$

Переходимо до останнього етапу побудови математичної моделі процесу поширення тепла у тонкому однорідному теплоізольованому стержні – визначення додаткових (крайових та початкових) умов, які дозволять із безлічі розв'язків диференціального рівняння (4.1) визначити один єдиний, що описує даний процес.

У нашому випадку краями є торцеві перерізи стержня, тобто поперечні перерізи стержня: $x = 0$ та $x = l$. Крайові умови показують, що відбувається на кінцях стержня в будь-який момент часу. Крайові умови можуть бути різних типів:

а) найпростіший випадок крайових умов той, коли кінці стержня підтримуються при сталій температурі:

$$u(0;t) = T_1,\ u(l;t) = T_2;$$

б) кінці стержня підтримуються при температурі, що залежить від часу:

$$u(0;t) = g_1(t),\ u(l;t) = g_2(t),$$

де $g_1(t)$ і $g_2(t)$ – задані функції;

в) більш загальними є крайові умови, за яких на торцевих перерізах відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона, відповідно до якого потік тепла через одиницю поверхні за одиницю часу пропорційний різниці температур тіла та навколишнього середовища, тобто дорівнює $h(u - \overline{u})$, де h – коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом теплообміну; u – температура кінця стержня; $\overline{u}$ – температура навколишнього середовища.

Початковою умовою є функція $\varphi(x)$, яка показує розподілення температури у стержні в початковий момент часу, тобто:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0<x<l.$$

4.2.1 Розв'язання однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

Постановка задачі

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності:

$$\text{(ДРЧП)} \ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \left(0<x<l, 0<t<\infty\right), \tag{4.2}$$

що задовольняє крайові умови:

$$\text{(КУ)} \ \begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0, \end{cases} \ \left(0<t<\infty\right); \tag{4.3}$$

і початкову умову:

$$\text{(ПУ)} \ u(x,0)=\varphi(x), \ (0<x<l), \tag{4.4}$$

де $\varphi(x)$ – задана неперервна функція, що має кусково-неперервну похідну.

Розв'язання задачі

Розв'язувати цю задачу будемо методом відокремлення змінних. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t), \tag{4.5}$$

де $X(x)$ – функція тільки змінної x;

$T(t)$ – функція лише змінної t.

Підставимо (4.5) у диференціальне рівняння (4.2). Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X(x)\cdot T'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)\cdot T(t),$$

то матимемо:

$$X(x)\cdot T'(t)=a^2\cdot X''(x)\cdot T(t).$$

Звідси, поділивши на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$, отримаємо:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \tag{4.6}$$

де $k = const$, оскільки x і t не залежать одне від одного, ліва частина рівності залежить лише від t, а права – лише від x. Звідси отримаємо два рівняння:

$$\begin{cases} T'(t) - ka^2 T(t) = 0, \\ X''(x) - kX(x) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Звернемо увагу на ту важливу обставину, що константа k повинна бути від'ємною, тобто $k < 0$. Якби k було додатним, тобто $k > 0$ то, з рівняння $\frac{T'(t)}{T(t)} = ka^2$ проінтегрувавши його за t, матимемо:

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \int ka^2 dt + \ln C; \ln T(t) = ka^2 t + \ln C.$$

Тоді $T(t) = C \cdot e^{ka^2 t}$, де C – довільна стала, буде загальним розв'язком. При $k > 0$ матимемо, що $\lim_{t \to \infty} T(t) = C \cdot \lim_{t \to \infty} e^{ka^2 t} = \infty$. Тоді при $t \to \infty$ отримаємо $u(x,t) = X(x)T(t) \to \infty$, а це суперечить тому, що в жодному поперечному перерізі стержня, тобто ні при жодному фіксованому x температура не може необмежено зростати за абсолютною величиною. Отже, константа $k < 0$. Позначимо її через $-\lambda^2$, тобто $k = -\lambda^2$ (у цьому випадку k буде від'ємним при $\forall \lambda \neq 0$). Тоді звичайні диференціальні рівняння запишуться так:

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \\ X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо ці рівняння. Загальним розв'язком першого з них є функція:

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}, \tag{4.8}$$

де C – довільна стала.

Друге з них є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння

$r^2+\lambda^2=0$ має чисто уявні корені $r_{1,2}=\pm\lambda i$; його фундаментальною системою розв'язків є функції $\cos\lambda x$ і $\sin\lambda x$, а загальним розв'язком є функція:

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x, \tag{4.9}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Тоді

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=Ce^{-\lambda^2a^2t}\left(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x\right)$$

або

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=e^{-\lambda^2a^2t}\left(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\right), \tag{4.10}$$

де A,B,λ – довільні числа, оскільки C_1,C_2,C – довільні сталі;

λ – теж деяке число, поки що довільне.

Отже, ми отримали нескінченну кількість функцій (4.10), які задовольняють ДРЧП (4.2).

Серед нескінченної множини розв'язків (4.10) даного рівняння виберемо ті, що задовольняють крайові умови (4.3). Якщо $x=0$, то

$$u(0,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\left(A\cos(\lambda\cdot 0)+B\sin(\lambda\cdot 0)\right)=0,$$

$$u(0,t)=Ae^{-\lambda^2a^2t}=0,$$

звідки

$$A=0.$$

Отже, $u(x,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\cdot B\sin\lambda x.$

При $x=l$ отримаємо:

$$u(l,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\cdot B\sin(\lambda l)=0.$$

Оскільки $B\neq 0$, то $\sin(\lambda l)=0$. Тоді $\lambda l=\pi n$, де $n\in Z$, $n\neq 0$, $\lambda\neq 0$, звідки:

$$\lambda=\frac{\pi n}{l}, \text{ де } n=\pm 1,\pm 2,\ \ldots$$

Отже, щоб задовольнити умову $u(l,t)=0$, необхідно, щоб числа λ приймали значення числової послідовності:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \tag{4.11}$$

де $n=1,2,3,...$

Тоді кожному натуральному n буде відповідати розв'язок ДРЧП (2.4), що задовольняє крайові умови, вигляду:

$$u_n(x,t) = B_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \ (n=1,2,...). \tag{4.12}$$

Отже, маємо послідовність функцій (4.12), що є частинними розв'язками задачі (4.2)–(4.3).

Оскільки рівняння (4.2) лінійне та однорідне, то сума частинних розв'язків рівняння теж задовольняє це рівняння та задані крайові умови (4.3), бо кожна із функцій (4.12) задовольняє ці умови.

Формально складемо функціональний ряд:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \tag{4.13}$$

де $u(x,t)$ є його сумою.

Сума цього ряду функція $u(x,t)$ теж задовольнятиме ДРЧП (4.2), бо кожен його член задовольняє рівняння (4.2) та крайові умови (4.3).

Підберемо коефіцієнти B_n ряду так, щоб функція $u(x,t)$, яка є сумою цього ряду, задовольняла початкову умову $u(x,0)=\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – задана неперервна кусково-диференційовна функція на проміжку $[0;l]$. При $t=0$, з рівності (4.13), маємо:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Оскільки $u(x,0)=\varphi(x)$, згідно з початковою умовою, то матимемо:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{4.14}$$

Оскільки функція $\varphi(x)$ неперервна на проміжку $[0;l]$ і має на ньому кусково-неперервні похідні, то продовживши її на симетричний проміжок $[-l;0]$ непарним способом, а потім за періодичністю на всю числову пряму змінної x, функція $\varphi(x)$ буде розкладена єдиним способом в ряд Фур'є за синусами, причому коефіцієнти цього ряду Фур'є визначатимуться за відомими формулами:

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,\ (n=1,2,3,...). \tag{4.15}$$

Висновок

Розв'язок першої крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності при нульових (однорідних) крайових умовах, а саме :

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \left(0<x<l, 0<t<\infty\right);$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0, \end{cases} \left(0<t<\infty\right);$$

$$\text{(ПУ)}\ u(x,0)=\varphi(x),\ (0<x<l)$$

знаходять у вигляді ряду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де $B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$ – коефіцієнти розкладання заданої функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є за синусами на $[-l;0]$.

Приклад. *Розв'язати рівняння* $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *при крайових умовах* $u(0,t)=u(8,t)=0$ *і початковій умові* $u(x,0) = \begin{cases} x/4, 0 \le x \le 4, \\ 8-x, 4<x\le 8. \end{cases}$

Розв'язання

За умовою $a=3$, $l=8$. *Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді ряду:*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

При $l = 8$

$$B_n = \frac{1}{4}\int_0^8 \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^4 \frac{x}{4}\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx + \int_4^8 (8-x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx\right).$$

Кожен з інтегралів знайдемо за формулою інтегрування за частинами:

$$\int_0^4 \frac{x}{4}\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx & v = -\frac{8}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{8x}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)\Bigg|_0^4 + \frac{8}{\pi n}\int_0^4 \cos\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx\right) = \frac{16\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 8\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)}{\pi^2 n^2};$$

$$\int_4^8 (8-x)\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right)dx = \frac{64\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 32\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 64\cdot\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2}.$$

Тоді

$$B_n = \frac{1}{4}\frac{16\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 8\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + 64\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 32\pi n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} -$$

$$-\frac{16\cdot\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} = \frac{20}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{6}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

Отже,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{20}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{6}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\cdot e^{-\left(\frac{3\pi n}{8}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{8}x\right).$$

4.2.2 Розв’язання неоднорідного рівняння теплопровідності при ненульових крайових умовах

Постановка задачі

Знайти розв’язок рівняння теплопровідності:

$$(\text{ДРЧП})\ \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ (0 < x < l, 0 < t < \infty), \tag{4.16}$$

що задовольняє крайові умови:

$$(\text{КУ})\ \begin{cases} u(0,t) = g_1(t), \\ u(l,t) = g_2(t), \end{cases} \ \left(0 < t < \infty\right); \tag{4.17}$$

і початкову умову:

$$(\text{ПУ})\ u(x,0) = \varphi(x),\ \ (0 < x < l). \tag{4.18}$$

Розв'язання задачі

Розв'язок шукають у вигляді:

$$u(x,t) = v(x,t) + g_1(t) + \left(g_2(t) - g_1(t)\right)\frac{x}{l}. \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) - g_1'(t) + \left(g_1'(t) - g_2'(t)\right)\frac{x}{l},$$

При $f_1(x,t) = f(x,t) - g_1'(t) + \left(g_1'(t) - g_2'(t)\right)\dfrac{x}{l}$ отримаємо:

$$(\text{ДРЧП})\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x,t), \tag{4.20}$$

$$(\text{КУ})\begin{cases} u(0,t) = v(0,t) + g_1(t) + \left(g_2(t) - g_1(t)\right)\dfrac{0}{l} = g_1(t) \Rightarrow v(0,t) = 0; \\ u(l,t) = v(l,t) + g_1(t) + \left(g_2(t) - g_1(t)\right)\dfrac{l}{l} = g_2(t) \Rightarrow v(l,t) = 0; \end{cases} \tag{4.21}$$

$$u(x,0) = v(x,0) + g_1(0) + \left(g_2(0) - g_1(0)\right)\frac{x}{l} = \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x,0) = \varphi(x) - g_1(0) + \left(g_1(0) - g_2(0)\right)\frac{x}{l}.$$

При $\varphi_1(x) = \varphi(x) - g_1(0) + \left(g_1(0) - g_2(0)\right)\dfrac{x}{l}$ отримаємо:

$$(\text{ПУ})\ v(x,0) = \varphi_1(x). \tag{4.22}$$

Ми звели вихідну задачу до розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (4.20) з нульовими крайовими умовами (4.21). Розв'язок цієї задачі знаходиться таким чином:

$$v(x,t) = s(x,t) + w(x,t), \tag{4.23}$$

$s(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial s}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \left(0 < x < l, 0 < t < \infty\right), \tag{4.24}$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} s(0,t) = 0, \\ s(l,t) = 0, \end{cases} \left(0 < t < \infty\right); \tag{4.25}$$

$$\text{(ПУ)}\ s(x,0) = \varphi_1(x),\ (0 < x < l). \tag{4.26}$$

$w(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(x,t), \left(0 < x < l, 0 < t < \infty\right), \tag{4.27}$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} w(0,t) = 0, \\ w(l,t) = 0, \end{cases} \left(0 < t < \infty\right); \tag{4.28}$$

$$\text{(ПУ)}\ w(x,0) = 0,\ (0 < x < l). \tag{4.29}$$

Перша з цих задач розв'язується вже відомим методом Фур'є відокремлення змінних. Розв'язок останньої задачі знаходиться у вигляді:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \tag{4.30}$$

де

$$T_n(t) = \int_0^t h_n(\tau) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau, \quad h_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x,t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$

Після знаходження $s(x,t)$ та $w(x,t)$ шукана функція $u(x,t)$ матиме вигляд:

$$u(x,t) = s(x,t) + w(x,t) + g_1(t) + \left(g_2(t) - g_1(t)\right)\frac{x}{l}. \tag{4.31}$$

4.3 Математична модель вільних коливань струни

4.3.1 Постановка мішаних задач і задачі Коші для хвильового рівняння

Хвильове рівняння як диференціальне рівняння з частинними похідними визначає нескінченну множину розв'язків. Тому для однозначного моделювання конкретного коливального процесу необхідно разом із хвильовим рівнянням розглянути додаткові умови, які б дали змогу виділити єдиний розв'язок рівняння, що описує цей процес. Для цього, як і при моделюванні нестаціонарних теплових процесів, використовують межові (крайові) й початкові умови, які характеризують коливальний процес, що моделюється.

Для задачі про поперечні коливання струни областю розв'язання одновимірного хвильового рівняння (2.16), яке моделює цей коливальний процес, є інтервал $(0,l)$ осі Ox, де l – довжина струни. Межами області розв'язання є точки $x=0$ і $x=l$. До математичного формулювання межових умов у цій задачі приводить той факт, що кінці струни закріплені нерухомо. Для шуканого зміщення $u=u(x;t)$ точок струни від положення рівноваги це приводить до крайових умов:

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0. \tag{4.32}$$

Процес коливання істотно залежить також від того, яким способом струна виводиться з рівноваги. Припускається, що це досягається тим, що в початковий момент часу $t=0$ усім точкам струни надаються деякі зміщення й швидкості:

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x); \\ u_t'(x,0)=g(x); \end{cases} \quad 0\le x\le l, \tag{4.33}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – задані функції.

Таким чином, фізична задача про коливання струни звелася до такої математичної задачі: знайти розв'язок рівняння (2.16) при $0\le x\le l$, $t\ge 0$, який задовольняє крайові умови (4.32) і початкові умови (4.33).

Основними типами крайових умов для одновимірного хвильового рівняння (2.16) у математичній фізиці є:

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t); \tag{4.34}$$

$$u_x'(0,t)=\nu_1(t),\ u_x'(l,t)=\nu_2(t); \tag{4.35}$$

$$u_x'(0,t)-h_1u(0,t)=\omega_1(t),\ u_x'(l,t)-h_2u(l,t)=\omega_2(t), \tag{4.36}$$

де μ, ν, ω – відомі функції;

h_1, h_2 – відомі додатні сталі.

Умови (4.34) справджуються у випадку, коли кінці об'єкта (струна, стержень) переміщуються за заданим законом; умови (4.35) – у випадку, коли до кінців прикладені задані сили; умови (4.36) – у випадку пружного закріплення кінців.

Для одновимірного хвильового рівняння відповідно до типу крайових умов ставляться три основні мішані задачі: знайти розв'язок рівняння (2.16) при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, який задовольняє одну з крайових умов (4.34)–(4.36) і початкові умови (4.33).

Комбінуючи різні типи крайових умов (4.34)–(4.36) на межах $x = 0$ і $x = l$ області розв'язання, можна отримати ще шість типів найпростіших крайових задач. Відомі також інші крайові умови, наприклад, нелінійні.

Для рівняння (2.16) можна поставити задачу Коші. Нехай струна досить довга, і нас цікавить коливання її точок, достатньо віддалених від її кінців, причому протягом малого інтервалу часу. У такому разі коливальний процес на кінцях струни не має суттєвого впливу, а тому його можна не враховувати; струну при цьому вважають нескінченною. Задача Коші ставиться так: знайти розв'язок рівняння (2.16) при $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, що задовольняє початкову умову:

$$u(x,0) = f(x), u_t'(x,0) = g(x), -\infty < x < \infty. \tag{4.37}$$

Таким чином, докладно розглянуто постановку мішаних задач і задачі Коші для хвильового рівняння у випадку однієї незалежної геометричної змінної x і часу t. Якщо кількість геометричних змінних $n > 1$, наприклад, $n = 3$, то перша, друга й третя мішані задачі для хвильового рівняння ставляться так: знайти розв'язок $u(x, y, z, t)$ рівняння (2.28) в області V, що задовольняє на межі S області V одну з крайових умов:

$$u\big|_S = \mu(x, y, z, t); \tag{4.38}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(x, y, z, t); \tag{4.39}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(x, y, z, t)u\right)\right|_S = \beta(x, y, z, t) \tag{4.40}$$

відповідно для першої, другої та третьої мішаних задач, і початкові умови

$$u\big|_{t=0} = f(x, y, z), u_t'\big|_{t=0} = g(x, y, z) \tag{4.41}$$

в області V.

Функції μ, ν, β, h, f, g в (4.38)–(4.41) – це відомі функції своїх аргументів.

Умови (4.33)–(4.36) для одновимірного хвильового рівняння є окремим випадком умов (4.38)–(4.41).

Задача Коші для тривимірного хвильового рівняння (2.28) ставиться аналогічно розглянутій задачі для рівняння (2.16): знайти функцію $u(x, y, z, t)$, яка в будь-якій точці простору задовольняє хвильове рівняння (2.28) при $t > 0$ і початкові умови (4.41).

Таким чином, область розв’язання задачі Коші для рівняння (2.28) – це весь простір.

4.3.2 Знаходження розв’язку математичної моделі коливання струни, що закріплена на кінцях

Постановка задачі

Знайти розв’язок рівняння коливання струни:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \left(0 < x < l,\ t > 0\right), \tag{4.42}$$

що задовольняє нульові крайові умови:

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \end{cases} (t > 0); \tag{4.43}$$

та початкові умови:

$$\text{(ПУ)}\ \begin{cases} u(x,0) = f(x); \\ u_t'(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{4.44}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – задані функції при $0 < x < l$.

Розв’язання задачі

Розв’язання вказаної крайової задачі розглянуто у прикладі до п. 3.2. У результаті шукана функція визначається за формулою:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n a}{l} t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l} t \right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

де

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\frac{\pi n}{l} x dx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l g(x) \sin\frac{\pi n}{l} x dx.$$

4.3.3 Знаходження розв'язку математичної моделі коливання необмеженої струни

Постановка задачі

Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння коливання необмеженої струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty. \tag{4.45}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x); \\ u_t'(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{4.46}$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – задані неперервні функції.

Розв'язання задачі

Оскільки країв у необмеженої струни немає, тому крайові умови відсутні. Знайдемо загальний розв'язок рівняння (4.45) методом характеристик. Зведемо рівняння (4.45) до канонічного вигляду, що містить лише мішану частинну похідну, записавши рівняння (4.45) у вигляді:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{4.47}$$

Тоді

$$A = a^2,\ B = 0,\ C = -1.$$

$\Delta = B^2 - AC = a^2 > 0$ – це рівняння гіперболічного типу. Характеристики знайдемо, розв'язавши диференціальні рівняння:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{B^2 \pm \sqrt{\Delta}}{A} = \frac{\pm 1}{a}. \tag{4.48}$$

У результаті отримаємо два загальні розв'язки диференціального рівняння (4.48):

$$x - at = C_1;$$

$$x + at = C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Перейдемо у диференціальному рівнянні (4.47) до нових незалежних змінних ξ і η за формулами:

$$\begin{cases} \xi = x - at; \\ \eta = x + at. \end{cases} \tag{4.49}$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -a, \ \frac{\partial \eta}{\partial t} = a,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0,$$

отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} =$$
$$= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Тоді рівняння (4.47) буде зведено до вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{4.50}$$

Рівняння (4.50) розв’язуємо двома послідовними інтегруваннями – спочатку за ξ, а потім за η:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\varphi(\eta),$$

де $\varphi(\eta)$ – довільна функція від η.

$$u(\xi,\eta)=\int\varphi(\eta)d\eta+\varphi_1(\xi),$$

де $\varphi_1(\xi)$ – довільна функція від ξ.

Позначимо $\varphi_2(\eta)=\int\varphi(\eta)d\eta$, тоді загальний розв'язок рівняння (4.50) запишеться так:

$$u(\xi,\eta)=\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\eta). \tag{4.51}$$

Повернемось до старих змінних x та t. Оскільки рівняння (4.50) рівносильне рівнянню (4.45), то в загальний розв'язок замість ξ та η підставимо вирази (4.49), і отримаємо:

$$u(x,t)=\varphi_1(x-at)+\varphi_2(x+at). \tag{4.52}$$

Це є загальний розв'язок рівняння (4.45), тут φ_1 та φ_2 є довільні функції своїх аргументів.

Знаючи, що функція (4.52) є загальним розв'язком рівняння (4.45), скористаємось початковими умовами (4.46) для того, щоб знайти конкретні вирази функцій φ_1 і φ_2 у формулі (4.52).

Для цього спочатку знайдемо частинну похідну за t функції (4.52) за правилом диференціювання складних функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\cdot\varphi_1'(x-at)+a\varphi_2'(x+at).$$

Тоді, при $t=0$, матимемо:

$$u(x,0)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x);$$

$$u_t'(x,0)=-a\varphi_1'(x)+a\varphi_2'(x).$$

Враховуючи початкові умови (4.46), матимемо:

$$\begin{cases}\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x);\\ -a\varphi_1'(x)+a\varphi_2'(x)=g(x).\end{cases} \tag{4.53}$$

Проінтегруємо друге з рівнянь у межах від x_0 до x:

$$-a\int_{x_0}^{x}\varphi_1'(z)dz+a\int_{x_0}^{x}\varphi_2'(z)dz=\int_{x_0}^{x}g(z)dz;$$

$$-a\varphi_1(z)\Big|_{x_0}^{x}+a\varphi_2(z)\Big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}g(z)dz+C;$$

$$-\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(z)dz+\frac{C}{a}.$$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases}\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x);\\ -\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz+\dfrac{C}{a},\end{cases}$$

отримаємо:

$$\begin{cases}\varphi_2(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz+\dfrac{C}{2a};\\ \varphi_1(x)=\dfrac{1}{2}f(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz-\dfrac{C}{2a}.\end{cases} \tag{4.54}$$

Тоді шуканий розв'язок:

$$u(x,t)=\varphi_1(x-at)+\varphi_2(x+at)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}g(z)dz+$$

$$+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}g(z)dz.$$

Отже,

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(z)dz. \tag{4.55}$$

Формула (4.55) називається формулою Д'Аламбера.

Висновок

Розв'язок задачі Коші для необмеженої струни:

$$\text{(ДРЧП)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty<x<\infty .$$

$$\text{(ПУ)}\quad \begin{cases} u(x,0)=f(x); \\ u_t'(x,0)=g(x), \end{cases}$$

шукається за формулою Д'Аламбера:

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(z)dz.$$

Приклад. *Розв'язати задачу* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty)$, *якщо* $u(x,0)=\sin 2x,\ u_t'(x,0)=0$.

Розв'язання

За умовою $a=2$, $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=0$.

Тоді

$$u(x,t)=\frac{\sin 2(x-3t)+\sin 2(x+3t)}{2}+0=\sin 2x\cos 3t.$$

Відповідь: $u(x,t)=\sin 2x\cos 3t.$

4.4 Диференціальні рівняння Пуассона і Лапласа

4.4.1 Оператор Лапласа (лапласіан)

Введемо оператор Лапласа в просторі

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial^2 z} \tag{4.56}$$

і на площині

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{4.57}$$

Тоді тривимірне (2.93) та двовимірне (2.96) рівняння теплопровідності запишемо так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t), \tag{4.58}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,t). \tag{4.59}$$

Скорочення запису диференціальних рівнянь – це не єдине і далеко не найважливіше використання оператора Лапласа (лапласіана). Він є узагальненням другої похідної функції однієї змінної на багатовимірний випадок і дозволяє оцінити значення функції через її значення у сусідніх точках.

1. Якщо $\Delta u > 0$ у точці M, то значення $u(M)$ у цій точці менше середнього значення функції в сусідніх точках. Під середнім значенням функції в сусідніх точках на площині розуміють середнє значення функції всередині круга з центром в точці M, у просторі – середнє значення функції всередині кулі з центром в точці M.

2. Якщо $\Delta u = 0$ у точці M, то $u(M)$ дорівнює середньому значенню функції в сусідніх точках.

3. Якщо $\Delta u < 0$ у точці M, то $u(M)$ більше середнього значення функції в сусідніх точках.

Цю властивість лапласіана легко зрозуміти, якщо виходити із основних рівнянь математичної фізики. Наприклад, згідно з рівнянням теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$, при $\Delta u(M) > 0$, врахувавши, що $a^2 > 0$, отримаємо $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_M > 0$. Остання нерівність показує, що в точці M внаслідок теплообміну із сусідніми точками відбувається зростання температури, а це можливо лише тоді, коли температура в точці M менша, ніж середня температура в сусідніх точках. Тобто значення функції u у точці M менше, ніж середнє значення цієї функції всередині круга (кулі) з центром у точці M. Якщо $\Delta u(M) < 0$, тоді $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_M < 0$. Тобто в точці M температура зменшується, а отже в точці M температура вища, ніж середня температура в сусідніх точках. І якщо $\Delta u(M) = 0$, то $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_M = 0$, тобто в точці M температура не змінюється, а це означає, що в точці M температура дорівнює середньому значенню температури в сусідніх точках.

4.4.2 Крайова задача для рівнянь Пуассона і Лапласа

Розглянемо деяку об'ємну область (чи область на площині), яка обмежена замкненою поверхнею (лінією) Γ, що є межею цієї області.

Нехай всередині цієї області температура u не залежить від зміни часу, тобто теплове поле стаціонарне.

Задача про розподіл температури $u(M)$ ставиться таким чином. Знайти функцію $u(M)$, що всередині тіла задовольняє рівняння $\Delta u = 0$ або $\Delta u = f$ і крайову умову, яка може бути взята в одному із виглядів:

а) $u = f_1$ на Г (це перша крайова задача), тобто $u\Big|_{\Gamma} = f_1$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Г (це друга крайова задача), тобто $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = f_2$, де $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – похідна за зовнішньою нормаллю до поверхні Г;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = h(u - f_3)$ на Г (це третя крайова задача), де f_1, f_2, f_3 – задані функції.

Першу крайову задачу називають *задачею Діріхле*, а другу крайову задачу називають *задачею Неймана*. Третя крайова задача називається мішаною задачею, а крайові умови називають *умовами Робена*.

4.4.3 Рівняння Лапласа в полярних координатах

Перехід від декартових координат x і y до полярних r і φ здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \text{ і } \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Знайдемо вираз $\Delta u = 0$ в полярних координатах, де $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot$

Для цього знайдемо вирази $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ та $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ через r і φ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}. \quad (4.61)$$

З формули $r^2 = x^2 + y^2$ маємо:

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi .$$

Отже,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi;$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi .$$

Тоді

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi .$$

З другої формули $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ маємо:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{r\cdot\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}.$$

Отже,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{r\cos\varphi}.$$

Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Знайдемо тепер частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \left(\cos\varphi\right)'_x = -\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\sin^2\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \left(\sin\varphi\right)'_y = \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{-\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}r - \dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi}{r^2} = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{-\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}r - \dfrac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi}{r^2} = \frac{-2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}.$$

Підставимо усі отримані похідні у рівняння Лапласа. Отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r} + \frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r}\right) +$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\right) + \qquad (4.62)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\frac{2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2} - \frac{2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Отже, рівняння Лапаласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ у полярних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \qquad (4.63)$$

4.4.4 Внутрішня задача Діріхле для круга

Постановка задачі

Знайти функцію u, що задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ усередині круга радіусом a і крайову умову $u\Big|_{\Gamma} = f$, де f – задана неперервна функція, а Г – коло, що є границею круга.

Розв'язання задачі

Будемо розв'язувати цю задачу в полярних координатах. *Рівняння Лапласа* матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ або } r^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi} = 0, \qquad (4.64)$$

де $0 \le r < a$ і $0 \le \varphi < 2\pi$, а крайову умову можна записати так:

$$u(a,\varphi) = f(\varphi),$$

де $f(\varphi)$ – задана неперервна функція.

Будемо розв'язувати цю задачу методом відокремлення змінних:

$$u = \Phi(\varphi) \cdot R(r). \qquad (4.65)$$

Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \Phi(\varphi) \cdot R'(r), \ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \Phi(\varphi) \cdot R''(r), \text{ а } \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \Phi''(\varphi) \cdot R(r),$$

то, підставляючи ці вирази в рівняння (4.64), отримаємо:

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r) + r\Phi(\varphi)R'(r) + \Phi''(\varphi)R(r) = 0.$$

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda^2. \qquad (4.66)$$

У результаті матимемо сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0, \\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda^2R(r) = 0. \end{cases} \qquad (4.67)$$

Перше із рівнянь має загальний розв'язок:

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi,$$

де A і B – довільні сталі.

Зауважимо, що при зміні кута φ на величину 2π однозначна функція $u(r,\varphi)$ повинна повернутися до свого попереднього значення, бо це буде одна і та ж точка (точки (r,φ) і $(r,\varphi+2\pi)$ – збігаються), тобто $u(r,\varphi+2\pi) = u(r,\varphi)$. Це означає, що функція $\Phi(\varphi)$ повинна задовольняти таку рівність $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$, тобто $\Phi(\varphi)$ є періодичною функцією кута φ з періодом 2π, а це можливо лише тоді, коли λ є число ціле, тобто $\lambda = n$. Зауважимо, що якби ми спільне відношення (4.66) прирівняли до додатного числа, то періодичного розв'язку не отримали б.

Отже, при n цілому маємо функцію:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \qquad (4.68)$$

Друге рівняння системи (4.67) називається *рівнянням Ейлера* і його розв’язок шукаємо за допомогою відомої підстановки

$$R(r) = r^m, \qquad (4.69)$$

де m – деяке число.

Підставимо функцію (4.69) у друге рівняння системи (4.67), отримаємо:

$$m(m-1)r^m + mr^m - \lambda^2 r^m = 0.$$

Звідси маємо:

$$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda.$$

Тоді при $m_1 = \lambda \Rightarrow R_1(r) = r^{\lambda}$, а при $m_2 = -\lambda \Rightarrow R_2(r) = r^{-\lambda}$. Загальний розв’язок рівняння (4.67):

$$R(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda},$$

де C і D – довільні сталі.

Оскільки $\lambda = n$, то для кожного n ми знайшли розв’язки другого рівняння (4.67):

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}. \qquad (4.70)$$

Підставляючи вирази (4.68) і (4.70) у (4.65), отримаємо:

$$u_n(r,\varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\cdot\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right). \qquad (4.71)$$

У випадку, коли $\lambda = 0$, система (4.67) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) = 0, \\ r^2 R''(r) + rR'(r) = 0. \end{cases}$$

а) $\Phi'(\varphi) = B_0 = const \quad \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = B_0\varphi + A_0$. Оскільки функція $\Phi(\varphi)$ періодична, то $B_0 = 0$. Отже, $\Phi(\varphi) = A_0$;

б) $r\left(rR''(r)+R'(r)\right)=0 \Rightarrow rR''(r)+R'(r)=0$.

Нехай $R'(r)=p(r)$, то $R''(r)=p'(r) \Rightarrow r\cdot p'(r)+p(r)=0$;

$$p'(r)=-\frac{p(r)}{r};$$

$$\ln|p|=-\ln|r|+\ln D_0;$$

$$p=\frac{D_0}{r} \Rightarrow R'(r)=\frac{D_0}{r};$$

$$R(r)=D_0\ln r+C_0 \quad (r>0).$$

Отже, $u_0=A_0\left(D_0\ln r+C_0\right)$.

Оскільки ми шукаємо скінченний розв'язок в крузі, то в центрі круга (при $r=0$) розв'язки повинні бути скінченними, тому повинно бути, що і $D_0=0$ і $B_0=0$ (бо $\ln r\to\infty$).

Отже, $u_0=C_0\cdot A_0$, позначимо його через $\frac{a_0}{2}$, тобто $u_0=\frac{a_0}{2}$,

$$u_n=\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\cdot C_n r^n=\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)r^n.$$

Оскільки рівняння Лапласа є однорідним, то його розв'язком буде функція:

$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)r^n, \tag{4.72}$$

де a_0, a_n, b_n – довільні сталі.

Підберемо тепер довільні сталі a_0, a_n, b_n так, щоб виконувалась крайова умова, а саме $u(a,\varphi)=f(\varphi)$. З рівності (4.72) при $r=a$ матимемо:

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)a^n. \tag{4.73}$$

А це означає, що функція $f(\varphi)$ розкладена в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi,\pi)$, бо період її повинен дорівнювати 2π. Розкладання *f(x)* у ряд Фур'є на $[-\pi,\pi]$ має вигляд:

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx\right),$$

де

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx;$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Тоді коефіцієнтами ряду Фур'є будуть числа $a_n\cdot a^n$ і $b_n\cdot a^n$, тобто

$$a_n\cdot a^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n\cdot a^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,$$

звідки

$$a_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Об'єднавши у формулі (4.72) множники $\frac{1}{a^n}$ з r^n, матимемо:

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi;$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi;$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Висновок
Розв’язком внутрішньої задачі Діріхле для круга буде така функція:

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot\left(A_n\cdot\cos n\varphi+B_n\cdot\sin n\varphi\right),$$

де

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Приклад. *Розв’язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u=0$ в крузі $r<1$, якщо $u(1,\varphi)=\varphi^2+\varphi$.*

Розв’язання

За умовою задачі $a=1$ і $f(\varphi)=\varphi^2+\varphi$. Знайдемо коефіцієнти ряду:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\varphi^3}{3}+\frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{2\cdot\pi^3}{3}\right)=\frac{2\cdot\pi^2}{3};$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\begin{vmatrix} u=\varphi^2+\varphi & du=(2\varphi+1)d\varphi \\ dv=\cos n\varphi d\varphi & v=\frac{1}{n}\sin n\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\varphi^2+\varphi}{n}\sin n\varphi\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)\sin n\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} u=2\varphi+1 & du=2d\varphi \\ dv=\sin n\varphi d\varphi & v=-\frac{1}{n}\cos n\varphi \end{vmatrix}=\frac{1}{\pi n}\left(\frac{2\varphi+1}{n}\cos n\varphi\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left((2\pi+1)\cos\pi n-(1-2\pi)\cos\pi n\right)=\frac{(-1)^n 4}{n^2};$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+\varphi)\sin n\varphi d\varphi = \frac{-2\pi n^2\cos(\pi n)}{\pi n^3} = \frac{-2\cdot(-1)^n}{n}.$$

Тоді

$$u(r,\varphi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \left(\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cdot\cos n\varphi - \frac{2\cdot(-1)^n}{n}\cdot\sin n\varphi\right).$$

Запитання для самоперевірки

1. Які основні етапи побудови математичної моделі фізичного процесу?
2. Із чим пов'язана наявність у формулюванні задач математичної фізики, окрім диференціальних рівнянь додаткових умов на шукану функцію? Наведіть приклад.
3. Які додаткові умови називаються початковими, а які крайовими?
4. Що називається задачею Коші? Для якого типу рівнянь ставиться задача Коші? Наведіть приклад.
5. Що називається крайовою задачею? Для якого типу рівнянь ставиться крайова задача? Наведіть приклади.
6. Що називається змішаною задачею? Для якого типу рівнянь ставиться змішана задача? Наведіть приклади.
7. Сформулюйте початкові та крайові умови для математичної моделі поширення тепла у стержні.
8. Складіть математичну модель процесу поширення тепла у стержні з нульовими крайовими умовами.
9. Які додаткові умови ставляться до хвильового рівняння?
10. Як визначаються характеристики одновимірного рівняння коливання струни?
11. Який канонічний вигляд одновимірного рівняння коливання струни?
12. Яка основна властивість оператора Лапласа (лапласіана)?

5 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

5.1 Скінченнорізницеві наближення

Запишемо ряд Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки $x = x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 + ...$$

або, якщо ввести позначення $x - x_0 = h$ ($x = x_0 + h$), дістанемо іншу форму запису ряду Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot h^3 + ...$$

Для довільного x ряд Тейлора матиме вигляд:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\cdot h^3 + ...$$

Якщо це розкладання обірвати на другому члені, то отримаємо:

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)\cdot h, \tag{5.1}$$

звідки матимемо:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Вираз, що стоїть у правій частині, називається *правою різницевою похідною*, яка наближає першу похідну функції.

Якщо в ряді Тейлора h замінити на $-h$, то отримаємо:

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}\cdot h^3 + ...$$

Обмежившись тільки двома першими членами, матимемо:

$$f(x - h) \approx f(x) - f'(x)\cdot h, \tag{5.2}$$

звідки

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Це наближення є *лівою різницевою похідною*.

Якщо відняти від рівності (5.1) рівність (5.2), то отримаємо:

$$f(x+h) - f(x-h) \approx 2f'(x) \cdot h,$$

звідки

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h}.$$

Вираз, що стоїть у правій частині, називається *центральною різницевою похідною*, що наближає першу похідну $f'(x)$.

Якщо в рядах Тейлора залишити на один член більше, то отримаємо наближені рівності:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2;$$

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2.$$

Додаючи почленно ці дві наближені рівності, отримаємо:

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2f(x) + f''(x) \cdot h^2,$$

звідки матимемо

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Ми отримали центральну різницеву похідну другого порядку для наближення другої похідної $f''(x)$.

Розповсюдимо тепер поняття різницевих похідних для наближення частинних похідних функції двох змінних $u(x,y)$. Запишемо ряд Тейлора для функції $u(x,y)$ за змінною x:

$$u(x+h,y) = u(x,y) + u'_x(x,y) \cdot h + \frac{u''_{xx}(x,y)}{2!} \cdot h^2 + \ldots;$$

$$u(x-h,y)=u(x,y)-u'_x(x,y)\cdot h+\frac{u''_{xx}(x,y)}{2!}\cdot h^2-...$$

Тоді матимемо:

$$u'_x(x,y)\approx\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h};$$

$$u'_x(x,y)\approx\frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h};$$

$$u'_x(x,y)\approx\frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2\cdot h};$$

$$u''_{xx}(x,y)\approx\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}.$$

Праві частини цих рівностей називаються відповідно правою та лівою різницевою похідною за x, центральними різницевими похідними за x першого та другого порядків. Аналогічно:

$$u'_y(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k};$$

$$u'_y(x,y)\approx\frac{u(x,y)-u(x,y-k)}{k};$$

$$u'_y(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-u(x,y-k)}{2\cdot k};$$

$$u''_{yy}(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)}{k^2}.$$

У правих частинах цих наближень записані відповідно права різницева, ліва різницева, центральна різницева похідні за змінною y.

5.2. Метод сіток для розв'язання задач математичної фізики

Ідея методу сіток або методу скінченних різниць для наближеного розв'язання задач для двовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. У плоскій області G, у якій шукається розв'язок, будується сіткова область G_h, що складається з однакових комірок. Вибір сіткової області G_h здійснюється залежно від конкретної задачі, але в усіх випадках контур Γ_h сіткової області G_h треба вибирати так, щоб він якомога краще наближав

контур Γ_h заданої області G. Сіткова область може складатися із квадратних, прямокутних, трикутних та інших комірок. Вибір основного розміру комірки h (кроку побудови сітки) визначає величину похибки заміні диференціального рівняння з частинними похідними різницевим рівнянням.

Точки перетину ліній, що утворюють сіткову область називаються *вузлами сітки*. Вузли сітки S_h називаються *сусідніми*, якщо вони віддалені один від одного в напрямі осі Ox або осі Oy на відстань, що дорівнює кроку сітки h.

Вузол A_h сітки S_h називається *внутрішнім*, якщо він належить області G, а всі чотири сусідні з ним вузли належать сітці S_h; у протилежному випадку вузол називається *межовим*. Внутрішні вузли будемо зарисовувати, а межові вузли будемо позначати зірочками. Межові вузли можуть належати області G, а можуть і не належати їй.

Межові вузли розрізняють двох типів: межовий вузол сітки S_h називається *вузлом першого роду*, якщо він має сусідній внутрішній вузол сітки; у протилежному випадку межовий вузол називається *вузлом другого роду*. Так, вузол B_h є межовим вузлом першого роду, а вузол C_h є межовим вузлом другого роду (рис. 5.1).

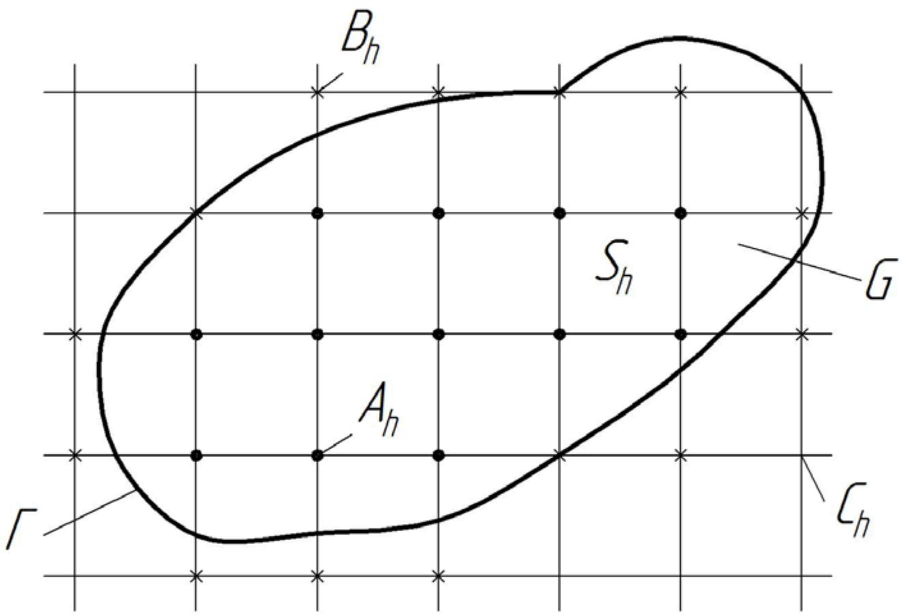


Рисунок 5.1 – Сіткова область

Внутрішні вузли та межові вузли першого роду називаються *розрахунковими точками*. Межові вузли другого роду не входять в обчислення, тому вони можуть бути відкинуті.

2. На основі заданих крайових та початкових умов визначається значення шуканого розв’язку в межових вузлах першого роду області G_h.

3. Дане диференціальне рівняння із частинними похідними замінюється у вузлах побудованої сітки відповідним скінченнорізницевим рівняннями.

Як наслідок можемо отримати або сукупність співвідношень, що дозволяють обчислити значення шуканої функції у вузлових точках на основі вже відомих значень у сусідніх точках, або систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв’язавши яку знайдемо числові значення шуканої функції.

При використанні скінченнорізницевої схеми важливим є *питання стійкості* такої схеми. Скінченнорізницева схема називається *стійкою*, якщо малі похибки, які допускаються в процесі розв’язання, згасають або залишаються малими при необмеженому зростанні номера рядка. У протилежному випадку схема називається *нестійкою*. Зрозуміло, що нестійку схему застосовувати недоцільно, оскільки неминучі незначні похибки, наприклад, похибки округлення, будуть приводити до результатів, що значно відрізняються від точного розв’язку.

Незважаючи на складність обчислення за неявними схемами (необхідно розв’язувати системи алгебраїчних рівнянь), перевага цих схем перед явними полягає в тому, що в неявних схемах крок сітки можна вибирати досить великим, не боючись, що схема буде нестійкою.

5.3 Метод сіток для задачі Діріхле

5.3.1 Рівняння Лапласа при скінченнорізницевих наближеннях

Замінимо частинні похідні, що входять у рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (5.3)$$

відповідними центральними різницевими похідними другого порядку. Як наслідок, отримаємо:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h^2}\big(u(x-h,y)-2u(x,y)+u(x+h,y)\big)+\\&+\frac{1}{k^2}\big(u(x,y-k)-2u(x,y)+u(x,y+k)\big)=0.\end{aligned} \qquad (5.4)$$

У разі, якщо $h=k$, тобто кроки вздовж осі Ox і Oy однакові, з рівняння (5.4) матимемо:

$$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)=0.$$

Розв’яжемо дане рівняння відносно $u(x,y)$. Тоді

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\big(u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)\big). \qquad (5.5)$$

Це і є рівняння Лапласа на площині при скінченнорізницевих наближеннях. Формула (5.5) дає можливість наближено знайти значення функції $u(x, y)$ у точці $A(x, y)$ як середнє її значення в сусідніх чотирьох точках $B(x-h, y)$, $C(x+h, y)$, $D(x, y+h)$ і $E(x, y-h)$.

5.3.2 Розв'язання задачі Діріхле методом сіток

Покажемо застосування методу сіток для побудови наближених розв'язків внутрішньої задачі Діріхле, а саме: знайдемо функцію $u(x, y)$, що задовольняє рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.6}$$

при (x, y) є G, і крайову умову:

$$u\big|_{\Gamma} = f . \tag{5.7}$$

Вибравши крок h квадратної клітинки, в області G побудуємо дві сім'ї прямих:

$$x = ih \text{ та } y = jh, \tag{5.8}$$

де i та j приймають цілі значення. Координати точок, що є вузлами сітки, можна визначити так:

$$\left[\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, \\ y_j &= y_0 + jh, \end{aligned}\right. \tag{5.9}$$

де $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Вузол (x_i, y_j) сітки S_h повинен або належати області G, або бути віддаленим від її межі Γ на відстань меншу, ніж h, де відстань вимірюється або горизонтально, або вертикально.

Тоді для кожної внутрішньої точки (x_i, y_j) сітки S_h скінченнорізницеве наближення (5.5) рівняння Лапласа запишеться так:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right). \tag{5.10}$$

Схема обчислення за формулою (5.10) показана на рис. 5.2.

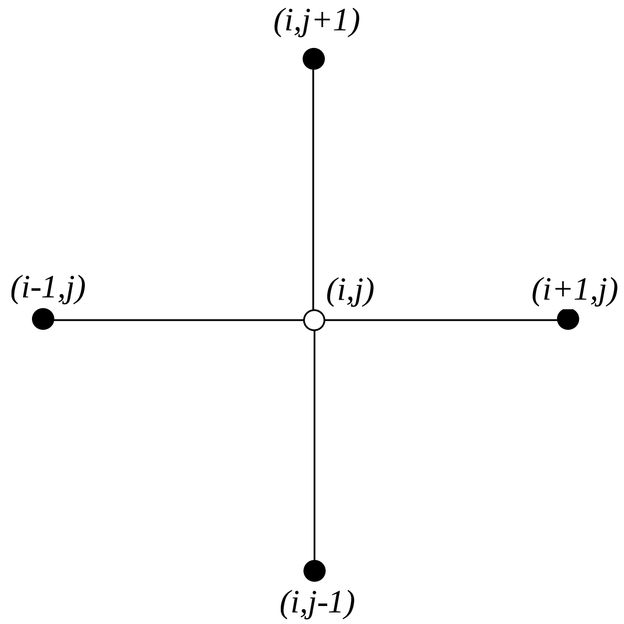


Рисунок 5.2 – Схема обчислення за формулою (5.10)

У межових вузлах першого роду B_h сітки S_h матимемо:

$$u\left(B_h\right) = u\left(B\right) = f\left(B\right), \tag{5.11}$$

де B – найближча до B_h точка межі Γ.

Отже, розв'язки u_{ij} наближаються середнім значенням розв'язку за чотирма сусідніми точками. Ми отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь (5.10). Ця система є неоднорідною, при цьому кількість невідомих, тобто кількість внутрішніх вузлів сітки, збігається з кількістю рівнянь. Отримана система завжди сумісна і має єдиний розв'язок. Розв'язавши систему, матимемо наближені значення функції u_{ij} у вузлах сіткової області G_h. Тим самим буде знайдено наближений чисельний розв'язок задачі Діріхле для області G_h.

5.4 Метод сіток для математичної моделі поширення тепла у стержні

Розглянемо математичну модель поширення тепла в однорідному теплоізольованому стержні довжиною l, а саме: знайдемо розв'язок рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \left(0 < x < l, t > 0\right),$$

якщо $u\left(0,t\right) = g_1\left(t\right)$, $u\left(l,t\right) = g_2\left(t\right)$ при $t > 0$, $u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$ при $0 \le x \le l$.

Приймемо $a=1$, тобто розглянемо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.12}$$

До такого вигляду завжди можна прийти, якщо ввести часову змінну за формулою $\tau=a^2 t$.

Будемо розв’язувати цю задачу методом сіток. У півсмузі $t>0$ і $0\le x\le l$ побудуємо прямокутну сітку:

$$\begin{cases} x=ih, \left(i=0,1,2,3,...,n\right); \\ y=ik, \left(j=0,1,2,3,...\right), \end{cases}$$

де $h=\dfrac{1}{n}$ (n ціле) – крок уздовж осі Ox;

k – крок уздовж осі Oy.

5.4.1. Явна різницева схема

Введемо позначення $x_i=ih$, $t_j=jk$, $u_{ij}=u\left(x_i,y_j\right)$. Замінимо в (5.12) похідні на скінченнорізницеві похідні:

– права скінченнорізницева похідна за t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u\left(x,t+k\right)-u\left(x,t\right)}{k};$$

– центральна скінченнорізницева похідна за x другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{u\left(x+h,t\right)-2u\left(x,t\right)+u\left(x-h,t\right)}{h^2}.$$

Тоді рівняння теплопровідності (5.12) у скінченних різницях матиме вигляд:

$$\frac{u\left(x,t+k\right)-u\left(x,t\right)}{k}\approx\frac{u\left(x+h,t\right)-2u\left(x,t\right)+u\left(x-h,t\right)}{h^2}. \tag{5.13}$$

Для внутрішнього вузла сітки $\left(x_i,y_j\right)$ це рівняння запишеться так:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{k}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2},$$

звідки маємо, що

$$u_{i,j+1}=u_{ij}+\frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}\right). \tag{5.14}$$

Якщо ввести позначення

$$\frac{k}{h^2}=\sigma, \tag{5.15}$$

то це рівняння запишеться так:

$$u_{i,j+1}=\sigma u_{i+1,j}+\left(1-2\sigma\right)u_{ij}+\sigma u_{i-1,j}. \tag{5.16}$$

З цієї формули видно, що, знаючи значення функції $u(x,t)$ у вузлах j-го рядка $t=jk$, можна обчислити значення функції $u(x,t)$ у точках наступного $(j+1)$-го рядка за схемою, яка показана на рис. 5.3.

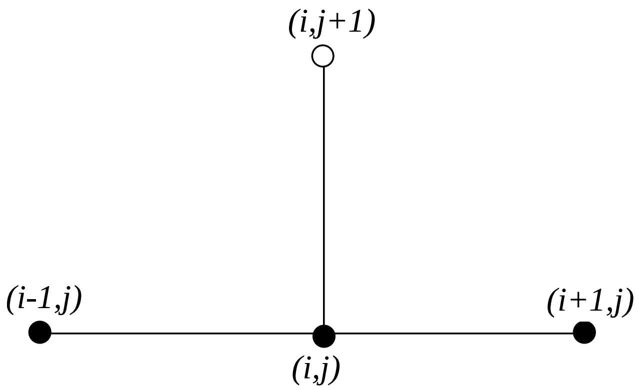


Рисунок 5.3 – Схема обчислення за формулою (5.16)

Отже, обчислення ведуться із використанням чотирьох сусідніх вузлів, причому $u_{i,j+1}$ отримуємо через значення функції (відомі) у трьох вузлах попереднього j-го рядка, тобто отримали явну схему обчислення.

Значення $u_{ij}=\left(x_i,t_j\right)$ обчислюють так. Спочатку обчислюють значення функції $u(x,t)$ у вузлах початкового рядка $t=0$, користуючись початковою умовою $u(x,0)=f(x)$; при $i=0,1,2,...,n$ матимемо $u_{i0}=u(x_i,0)=f(x_i)$. Користуючись крайовими умовами $u(0,t)=g_1(t)$ і $u(l,t)=g_2(t)$ для

$j=0, 1, 2, \ldots$ будемо мати $u_{0j}=g_1\left(t_j\right)$, $u_{nj}=g_2\left(t_j\right)$. Далі за формулою (5.16) послідовно обчислюємо значення функції $u\left(x,t\right)$ в усіх вузлах відповідно 1-го, 2-го, 3-го і т. д. рядків. Таким чином, знаходимо значення функції $u\left(x,t\right)$ в усіх вузлах вказаної півсмуги.

Явна схема (5.16) є стійкою, якщо $0<\sigma\le\frac{1}{2}$. При цьому найменша похибка схеми буде при $\sigma=\frac{1}{6}$. Якщо $\sigma=\frac{1}{6}$, то формула (5.16) набуде вигляду:

$$u_{i,\,j+1}=\frac{1}{6}\left(u_{i+1,\,j}+4u_{ij}+u_{i-1,\,j}\right). \qquad (5.17)$$

5.4.2 Неявна різницева схема

У рівнянні теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$ – замінимо лівою різницевою похідною за t, а саме: $\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u\left(x,t\right)-u\left(x,t-k\right)}{k}$.

Тоді рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ заміниться таким наближенням у скінченних різницях:

$$\frac{u\left(x,t+k\right)-u\left(x,t\right)}{k}=\frac{u\left(x+h,t\right)-2u\left(x,t\right)+u\left(x-h,t\right)}{h^2},$$

яке у вузлах запишеться так:

$$\frac{u_{ij}-u_{i,\,j-1}}{k}=\frac{u_{i+1,\,j}-2u_{ij}+u_{i-1,\,j}}{h^2}.$$

Звідси маємо, що

$$u_{ij}-u_{i,\,j-1}=\frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,\,j}-2u_{ij}+u_{i-1,\,j}\right),$$

вводячи позначення $\frac{k}{h^2}=\sigma$, матимемо:

$$u_{i,\,j-1}=-\sigma u_{i+1,\,j}+\left(1+2\sigma\right)u_{ij}-\sigma u_{i-1,\,j}. \qquad (5.18)$$

За цією формулою ми виразили значення функції $u(x,t)$ у вузлах $(j-1)$-го рядка сітки через значення цієї функції у вузлах наступного j-го рядка в трьох вузлах (x_{i+1},t_j), (x_i,t_j) і (x_{i-1},t_j) за схемою, що зображена на рис. 5.4.

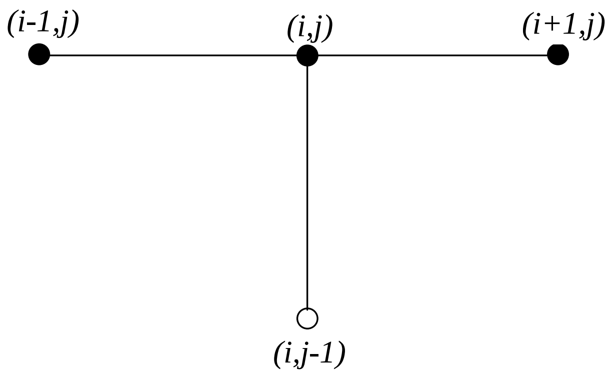


Рисунок 5.4 – Схема обчислення за формулою (5.18)

Визначивши за початковими умовами $u(x,0)=f(x)$ значення функції $u(x,t)$ у вузлах нульового рядка ($t=0$), тобто числа $u_{i0}=f(x_i)$ для $i=1,2,...,n$, а за (КУ) $u_{0j}=g_1(t_j)$, $u_{nj}=g_2(t_j)$ для $j=0,1,2,...$ складемо систему рівнянь (5.18) для $j=1$ при $i=1,2,...,n-1$. Розв'язавши цю систему $(n-1)$ рівнянь, визначивши цим самим значення функції $u(x,t)$ у $(n-1)$ вузлах 1-го ряду, перейдемо до складання системи рівнянь для 2-го ряду і т. д. У результаті послідовного складання і розв'язання систем рівнянь, ми визначимо значення функції в усіх внутрішніх вузлах сітки.

5.5 Метод сіток для математичної моделі вільних коливань струни

5.5.1 Рівняння вільних коливань струни при скінченнорізницевих наближеннях

Розглянемо рівняння вільних коливань однорідної струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } 0<x<l \text{ і } t\geq 0. \tag{5.19}$$

Будемо шукати його розв'язок при заданих крайових і початкових умовах, а саме:

$$\begin{cases} u(0,t)=g_1(t); \\ u(l,t)=g_2(t), \end{cases} \text{при } t\geq 0. \tag{5.20}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x); \\ u'_t(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{5.21}$$

де $f(x)$ і $\varphi(x)$ – задані функції при $0 \le x \le l$.

Припустимо, що $a = 1$, тоді рівняння (5.19) запишеться так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } 0 < x < l \text{ і } t \ge 0 \tag{5.22}$$

(цього легко можна досягти заміною $\tau = at$).

Розв'яжемо цю крайову задачу методом сіток. Як і у випадку рівнянь параболічного типу, побудуємо у півсмузі $0 \le x \le l$, $0 \le t \le \infty$ прямокутну сітку:

$$\begin{cases} x = ih, \ (i = 0,1,2,3,...,n); \\ y = ik, \ (j = 0,1,2,3,...), \end{cases}$$

вибравши $h = \dfrac{1}{n}$, де n – ціле число. Замінивши у вузлах сітки частинні похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ і $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що входять у рівняння (5.22), центральними різницевими похідними 2-го порядку за t і за x, отримаємо таке різницеве рівняння:

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}. \tag{5.23}$$

5.5.2 Явна різницева схема

У вузлах сітки рівняння (5.23) запишеться так:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \tag{5.24}$$

Введемо позначення

$$\lambda = \frac{k}{h}, \tag{5.25}$$

тоді з рівняння (5.24) матимемо:

$$u_{i,j+1} = 2\left(1 - \lambda^2\right) + \lambda^2\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1}. \tag{5.26}$$

Отже, значення функції $u(x,t)$ у вузлі $(i, j+1)$ обчислюється як середнє значення функції у вузлах двох попередніх рядків, тобто при обчисленні використовується схема, що показана на рис. 5.5.

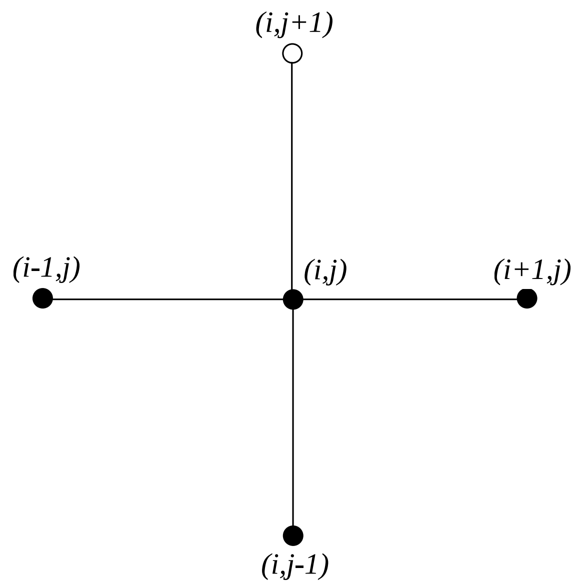


Рисунок 5.5 – Схема обчислення за формулою (5.26)

Для початку обчислень за формулою (5.26) необхідно знати значення функції $u(x,t)$ у вузлах двох попередніх рядків тоді, коли початкові умови (5.21) задають значення функції $u(x,t)$ лише на нульовому рядку $u_{i0} = f(x_i)$ для $i = 1, 2, ..., n-1$ (для $i = 0$ та $i = n$ використовуються крайові умови (5.20). Звідки взяти значення функції $u(x,t)$ ще на одному рядку?

Якщо використати другу з початкових умов $u_t'(x,0) = \varphi(x)$, то значення функції $u(x,t)$ можна визначити на фіктивному рядку з номером $j = -1$. Для цього замінимо частинну похідну $u_t'(x,t)$ лівою різницевою похідною за t за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x,t) - u(x,t-k)}{k}.$$

Тоді, враховуючи те, що $u_t'(x,0) = \varphi(x)$, при $j = 0$, матимемо:

$$u_{i,-1} = u_{i,0} - k\varphi(x_i),$$

де $i = 1, 2, ..., n$.

Крайові умови (5.20) використовуються для знаходження значень u_{oj} і u_{nj} для $j = 1, 2, ...$.

Знаючи значення функції $u(x,t)$ у вузлах рядків з номерами $j=0$ та $j=-1$, можна знайти значення функції у вузлах 1-го рядка $(j=1)$, користуючись формулами (5.26). Продовжуючи цей процес далі при $j=2$; $j=3$ і т. д., знаходять значення функції $u(x,t)$ в усіх вузлах сітки.

Зауваження. При $\lambda \le 1$ ця явна схема стійка, процес є збіжним, а крок по осі Ot вибирають за умови, що $k \le h$. При $\lambda > 1$ схема нестійка.

Запитання для самоперевірки

1. Запишіть скінченнорізницеві похідні першого та другого порядку.
2. Як записується рівняння Лапласа в скінченнорізницевих наближеннях?
3. Які основні ідеї розв'язання ДРЧП методом сіток?
4. Що називається вузлами сітки? Які вузли називаються сусідніми? Які вузли називаються внутрішніми?
5. Які межові вузли називаються межовими вузлами першого роду, а які – другого?
6. Які вузли є розрахунковими точками?
7. Який алгоритм розв'язання задачі Діріхле методом сіток?
8. Чим відрізняється явна схема методу сіток від неявної?
9. Як записати одновимірне рівняння теплопровідності в скінченнорізницевих наближеннях?
10. Яка основна формула використовується у явній схемі методу сіток під час розв'язання одновимірного рівняння теплопровідності? Яка формула використовується за неявної схемі?

ЛІТЕРАТУРА

1. Краєвський В. О. Спецкурс математичного аналізу : навч. посіб. / Краєвський В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 178 с.
2. Литвинюк В. П. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Литвинюк В. П. – Вінниця, ВДТУ, 2003. – 106 с.
3. Сачанюк-Кавецька Н. В. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 108 с.
4. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики : підручник / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К. : Либідь, 2006. – 424 с.
5. Кулініч Г. Л. Вища математика : підруч. : у 2-х кн. / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи. – 368 с.
6. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М : Наука, 1972. – 735 с.
7. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М. : Мир, 1985. – 384 с.
8. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. – М. : Наука, 1967. – 368 с.
9. Кошляков Н. С. Уравнение в частных производных математической физики / Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.
10. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
11. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука, 1989. – 616 с.
12. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарський А. А. – М. : Наука, 1982. – 272 с.
13. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
14. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / Михайлов В. П. – М. : Наука, 1983. – 391 с
15. Белевец П. С. Задачник практикум по методам математической физики / П. С. Белевец, И. Г. Кожух. – Минск: Вышэйша школа, 1989. – 274 с.
16. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции / Арсенин В. Я. – М. : Наука, 1974. – 432 с.

СЛОВНИК ТЕРМІНІВ

внутрішній вузол	internal node
вузол другого роду	node of the second sort
вузол першого роду	node of the first sort
вузол сітки	mesh node
гіперболічний	hyperbolic
двовимірний	two-dimensional
диференціал	differential
диференціальне рівняння	differential equation
диференціювання	differentiation
еліптичний	elliptic
загальний розв’язок	general solution
задача Діріхле	Dirichlet’s problem
задача Неймана	Neumann problem
інтеграл	integral
канонічний вигляд	canonical form
квазілінійний	quasilinear
кількість змінних	amount of variables
крайові умови	boundary conditions
лінійний	linear
математична фізика	mathematical physics
межовий вузол	boundary node
метод відокремлення змінних	method of separation of variable
метод сіток	net-point method
метод Фур’є	Fourier method
моделювання	modelling
неявна схема	implicit scheme
одновимірний	one-dimensional
однорідний	homogeneous
оператор Лапласа	Laplace operator
параболічний	parabolic
первісна	primitive
порядок диференціального рівняння	degree of a differential equation
похідна	derivative
початкові умови	entry conditions
рівняння вимушених коливань струни	equation of forced oscillationses of a string
рівняння вільних коливань струни	equation of free oscillations of a string

рівняння коливання мембрани	equation of oscillation of a diaphragm
рівняння Лапласа	Laplace equatione
рівняння Пуассона	Poisson equation
рівняння теплопровідності	heat conduction equation
рівняння характеристик	equation of characteristics
різницева похідна	difference derivation
розв’язок	solution
розрахункова точка	rated point
ряд Тейлора	Taylor series
ряд Фур’є	Fourier series
сіткова область	net domain
скінченнорізницеві наближення	finite-difference approximation
стійкість	stability
сусідній вузол	neighboring node
теплове поле	thermal field
тривимірний	three-dimensional
умови Робена	Roben’s conditions
функціональна залежність	functional association
функція	function
характеристики	characteristics
хвильове рівняння	wave equation
частинна похідна	partial derivative
частинний розв’язок	partial solution
явна схема	explicit scheme

Навчальне видання

Краєвський Володимир Олександрович
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна

СПЕЦКУРС МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЇХ АНАЛІЗ В СИСТЕМІ MAPLE
ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Редактори: І. Городенська
О. Ткачук

Оригінал-макет підготовлено В. Краєвським

Підписано до друку 24.01.2017 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 7,3.
Наклад 50 пр. Зам. № 2017-017.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.