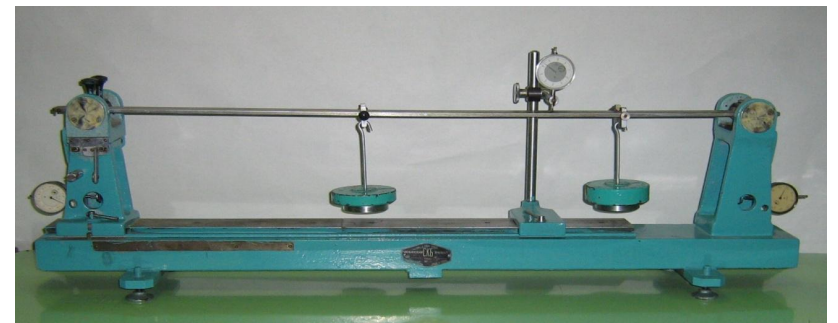


В. А. Огородніков, О. В. Грушко, Т. Ф. Архіпова

МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. А. Огородніков, О. В. Грушко, Т. Ф. Архіпова

МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

Лабораторний практикум

Вінниця
ВНТУ
2018

УДК 620.1(075)

О-39

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 31.05.2018 р.)

Рецензенти:

В. А. Тітов, доктор технічних наук, професор

В. А. Матвійчук, доктор технічних наук, професор

В. О. Федотов, кандидат технічних наук, професор

Огородніков, В. А.

О-39 **Механіка матеріалів і конструкцій : лабораторний практикум /**
Огородніков В. А., Грушко О. В., Архіпова Т. Ф. – Вінниця : ВНТУ,
2018. – 67 с.

У лабораторному практикумі наведено теоретичні положення та лабораторні роботи з курсу «Механіка матеріалів і конструкцій». Розглянуто експериментальну перевірку теоретичних висновків і розрахункових формул, описано конструкцію й роботу випробувальних машин та приладів.

УДК 620.1(075)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Лабораторна робота № 1. Визначення прогину балки при косому згині.....	5
Лабораторна робота № 2. Експериментальна перевірка теорем про взаємність робіт і переміщень	14
Лабораторна робота № 3. Визначення переміщення перерізу рами.....	18
Лабораторна робота № 4. Визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки	28
Лабораторна робота № 5. Визначення опорної реакції один раз статично невизначуваної рами.	36
Лабораторна робота № 6. Визначення критичної сили стиснутого стержня.....	41
Лабораторна робота № 7. Визначення прогину балки при ударному навантаженні.....	46
Лабораторна робота № 8. Дослідження критичної швидкості обертання вала	51
Лабораторна робота № 9. Дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності.....	57
ДОДАТОК А	61
ГЛОСАРІЙ	65
ЛІТЕРАТУРА.....	66

ВСТУП

Сучасні конструкції та їхні деталі настільки складні, що розрахувати їх на міцність, жорсткість і стійкість є досить проблематично, тому завдання лабораторного практикуму полягає в наочному експериментальному підтвердженні теоретичних передумов курсу Механіка матеріалів і конструкцій, в ознайомленні з деякими методами вивчення складного напружено-деформованого стану та методиками проведення найпростіших експериментів.

Студент має вміти здійснити експеримент і обробити отримані дані.

Основні вимоги під час експерименту:

- 1) продуманий вибір машин чи створення необхідної установки;
- 2) організація реєстрації показів приладів (машинний запис, осцилографування, фотографування, призначення спостерігача для запису і т. д.);
- 3) заходи, які охоплюють можливі помилки у показах приладів, неточності установлення зразків, приладів і т. д.;
- 4) ведення журналу запису показів.

Після проведення експерименту студенти складають звіт про виконану роботу, до якого входять: назва і мета роботи, ескіз установки, таблиця показників приладів, теоретичне обчислення обумовлених величин, відносна похибка проведення дослідження і висновки.

Під час проведення експерименту необхідно дотримуватися таких правил техніки безпеки:

- 1) до роботи на випробувальних машинах допускаються особи, які пройшли інструктаж з техніки безпеки;
- 2) випробування мають проводитися на справному устаткуванні;
- 3) перед початком випробувань необхідно перевірити:
 - надійність заземлення устаткування;
 - справність електропроводки, кінцевих вимикачів і кнопки «Стоп».

На рухомих частинах машини не має бути важких предметів, які не використовуються під час виконання роботи.

Забороняється:

- працювати на незаземленій машині;
- експлуатувати машину з відкритим приводом і відкритими дверима шафи;
- працювати без обмеження зони випробування;
- самовільно усувати будь-які несправності в електричній частині машини.

Після закінчення робіт необхідно відімкнути випробувальні машини й прилади від мережі електричного струму, упорядкувати робочі місця.

Між кутами β і φ існує залежність:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.2)$$

де φ – кут між головною віссю перерізу Y і напрямком навантаження;
 β – кут між головною віссю перерізу Y і напрямком повного прогину;
 I_z і I_y – моменти інерції перерізу.

З рис. 1.1 видно, що повний прогин f_T можна розкласти не тільки по головних осях Z і Y (складові f_z і f_y), але й по горизонтальному й вертикальному напрямках (f_e і f_g):

$$f_z = f_T \sin(\beta - \varphi); \quad (1.3)$$

$$f_g = f_T \cos(\beta - \varphi). \quad (1.4)$$

Положення нейтральної лінії може бути визначено за формулою:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.5)$$

де α – кут між нейтральною лінією і напрямком повного прогину.
Порівнюючи формули (1.2) і (1.3), записуємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta.$$

Отже, нейтральна лінія перпендикулярна до лінії повного прогину.

Опис установки

Загальний вигляд установки для визначення повних прогинів балки і їхніх напрямків при косому згині показано на рис. 1.2.



Рисунок 1.2 – Установка для визначення повних прогинів балки

Випробовується балка 1 (рис. 1.3, а), б) складного перерізу, яка одним кінцем защемлена в опорі 2 гвинтом 9. По довжині балки в довільному перерізі може бути прикладена зосереджена сила P під будь-яким кутом φ до однієї з головних осей інерції перерізу. Різне положення навантаження по довжині балки досягається за допомогою навантажувального пристрою.

Навантажувальний пристрій складається з кільця 3, що ковзає вздовж балки 1 і фіксується гвинтом 5, поворотного квадрата 4, до взаємно перпендикулярних граней якого підводяться рухомі ніжки індикаторів годинникового типу, гака 6, підвісу 7 і гир 8.

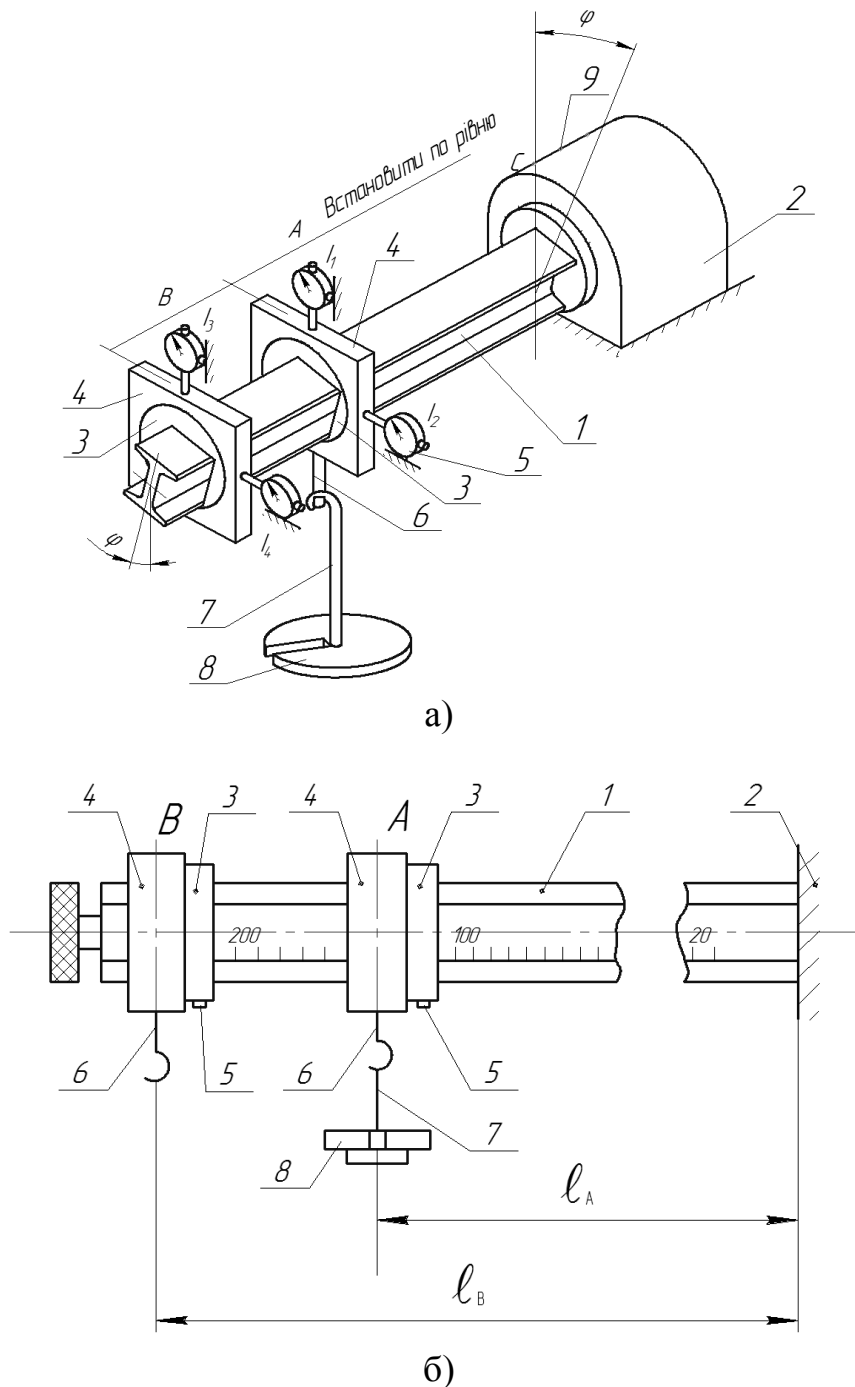


Рисунок 1.3 – Схема установки для визначення повних прогинів балки

Опора 1 (рис. 1.4) має на торці кутову шкалу з ціною поділки 15°. Конструкція опори дозволяє повертати балку 4 відносно осі x і фіксувати її положення за допомогою гвинта 3 під різними кутами відносно головних осей інерції перерізу балки. Мітка 3 має перебувати навпроти відповідної поділки на шкалі.

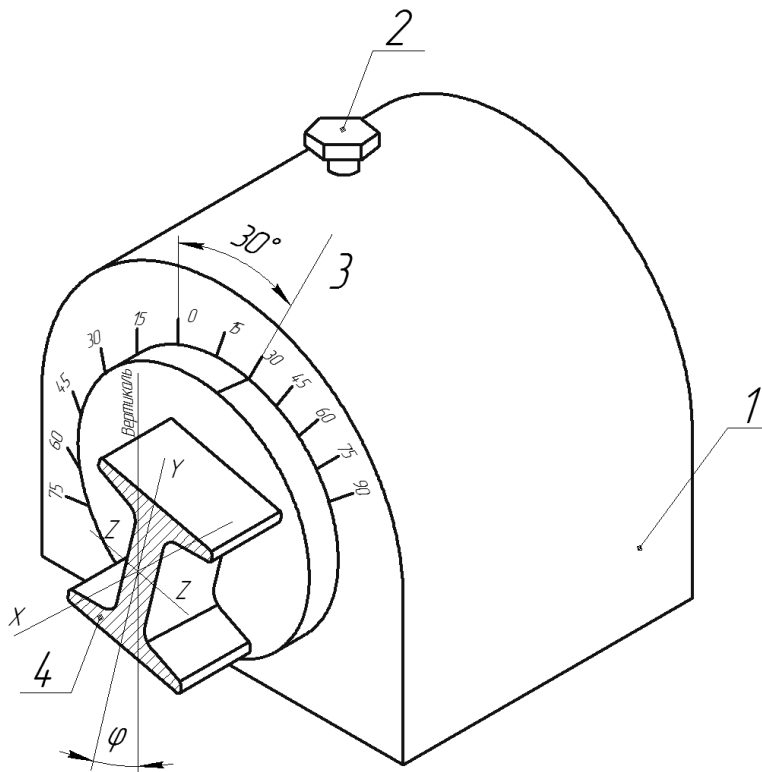


Рисунок 1.4 – Схема кріплення балки

Порядок виконання роботи

1. Установити відповідно до варіанта (табл. 1.1) балку з відповідним поперечним перерізом (рис. 1.5) в опорі так, щоб головна вісь Y балки була нахилена до вертикалі під кутом φ . Мітка 3 має перебувати навпроти відповідної поділки на шкалі опори (див. рис. 1.4).

Таблиця 1.1

Номер варіанта			P , Н	l_A , см	l_B , см	φ , град
Поперечний переріз балки						
I	II	III				
1	9	17	20	60	90	30
2	10	18	30	65	100	30
3	11	19	20	70	110	45
4	12	20	30	75	120	45
5	13	21	20	80	100	60
6	14	22	30	85	110	60
7	15	23	20	70	120	30
8	16	24	30	75	130	30

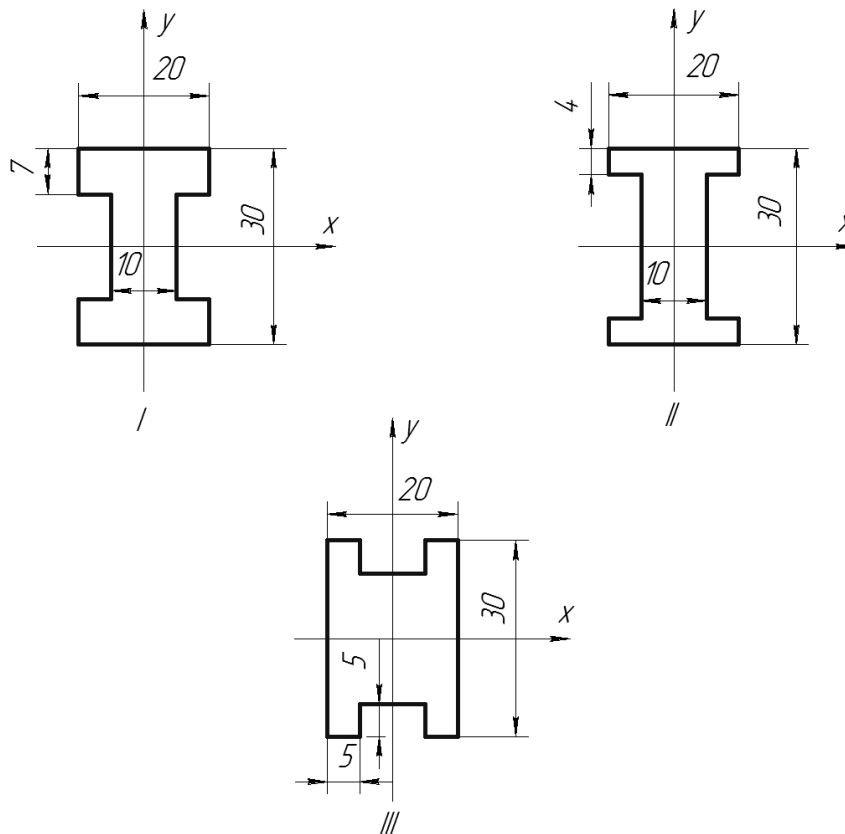


Рисунок 1.5 – Поперечний переріз балки
(I, II, III – номери схем балок)

2. Установити навантажувальні пристрої в перерізі A і B на відповідних відстанях l_A і l_B .
3. Закріпити квадрат 4 на кільці 3 так, щоб його верхня грань була строго горизонтальною.
4. Закріпити у центрі вертикальної й горизонтальної граней квадрата 4 стрілочні індикатори I_1 і I_2 у перерізі A та I_3 і I_4 у перерізі B (див. рис. 1.2) для виміру переміщень у вертикальному (f_e^A і f_e^B) і горизонтальному (f_s^A і f_s^B) напрямках.
5. Установити стрілки всіх індикаторів на нуль.
6. Завантажити без поштовхів підвіску навантажувального пристрою в перерізі A гирями на задану величину P .
7. Занести покази індикаторів I_1, I_2, I_3 і I_4 ($u_1; u_2; u_3; u_4$) у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Номер варіанта	$I_z, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	Покази індикаторів, мм								Переміщення, мм			
			u_1	u'_1	u_2	u'_2	u_3	u'_3	u_4	u'_4	f_E^A	f_T^A	f_E^B	f_T^B

8. Зняти навантаження і повторно завантажити без поштовхів підвіску навантажувального пристрою в перерізі A гирями на задану величину P .

9. Занести покази індикаторів I_1, I_2, I_3 і I_4 ($u'_1; u'_2; u'_3; u'_4$) у табл. 1.2.

10. Обчислити переміщення у вертикальному і горизонтальному напрямках:

$$f_6^A = \frac{u_1 + u'_1}{2}, f_6^B = \frac{u_3 + u'_3}{2},$$

$$f_2^A = \frac{u_2 + u'_2}{2}, f_2^B = \frac{u_4 + u'_4}{2}.$$

11. Обчислити і занести в табл. 1.2 експериментальні значення повних переміщень перерізів A і B за співвідношеннями:

$$f_E^A = \sqrt{(f_2^A)^2 + (f_6^A)^2};$$

$$f_E^B = \sqrt{(f_2^B)^2 + (f_6^B)^2}.$$

12. Обчислити і занести в табл. 1.2 значення моментів інерції перерізів I_z і I_y .

13. Обчислити теоретичні значення переміщень перерізів A і B у напрямку осі Z (f_z^A і f_z^B), напрямку осі Y (f_y^A і f_y^B).

Приклад. Визначимо переміщення в перерізах A та B при косому згині за методом Мора.

Вихідні дані: переріз балки № II (див. рис. 1.5); $P = 30 \text{ Н}$; $l_A = 0,8 \text{ м}$; $l_B = 1,0 \text{ м}$; $\varphi = 30^\circ$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Визначимо моменти інерції перерізу балки:

$$I_z = \frac{20 \cdot 30^3}{12} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 22^3}{12} = 36127 \text{ мм}^4 = 3,61 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_y = \frac{22 \cdot 10^3}{12} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 20^3}{12} = 7167 \text{ мм}^4 = 0,72 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Визначимо теоретичні значення переміщень у перерізі A у напрямку осей Z та Y . Для цього побудуємо епюри від дії зовнішнього навантаження та одиничної сили в напрямку осі Z (рис. 1.6, а) та напрямку осі Y (рис. 1.6, б).

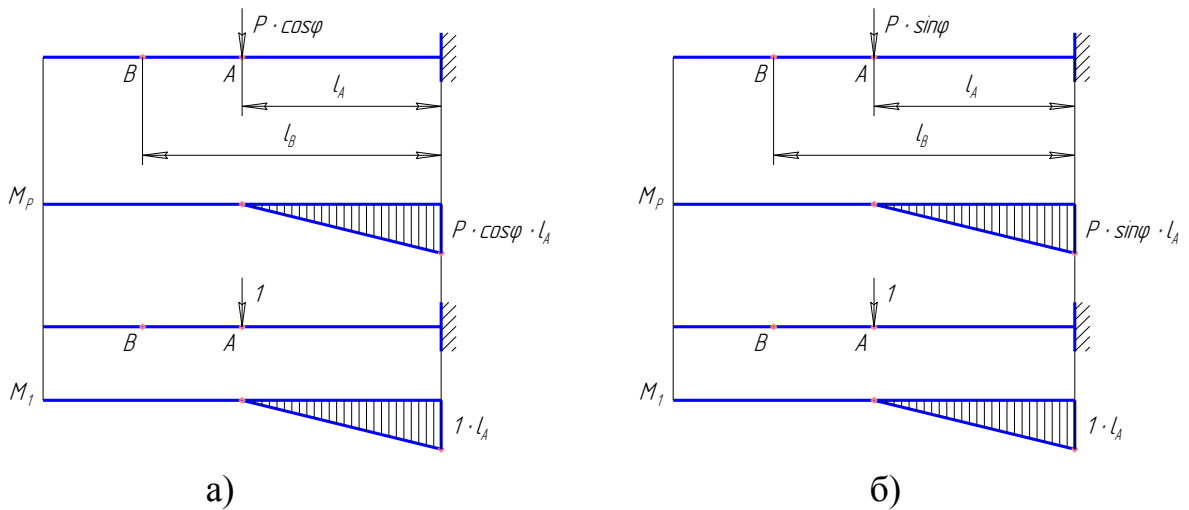


Рисунок 1.6 – Епюри для визначення переміщень у перерізі А

Визначимо теоретичні значення переміщень у перерізі В у напрямку осей Z та Y. Для цього побудуємо епюри від дії зовнішнього навантаження та одиничної сили в напрямку осі Z (рис. 1.7, а) та осі Y (рис. 1.7, б).

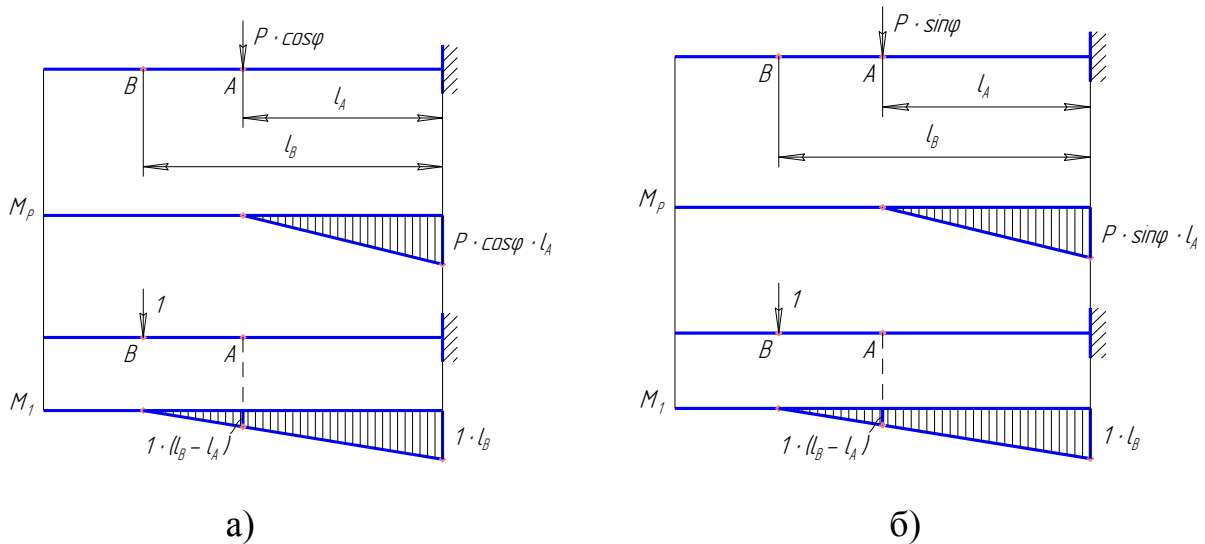


Рисунок 1.7 – Епюри для визначення переміщень у перерізі В

Теоретичне значення переміщення перерізу А в напрямку осі Y:

$$f_Y^T = \frac{1}{EI_Z} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot P \cos \varphi \cdot l_A \cdot l_A \cdot \frac{2}{3} l_A \right];$$

$$f_Y^T = \frac{P \cos \varphi \cdot l_A^3}{3EI_Z};$$

$$f_Y^T = \frac{30 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,8^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,61 \cdot 10^{-8}} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,59 \text{ мм}.$$

Теоретичне значення переміщення перерізу A в напрямку осі Z :

$$f_Z^T = \frac{1}{EI_Y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot P \sin \varphi \cdot l_A \cdot l_A \cdot \frac{2}{3} l_A \right];$$

$$f_Z^T = \frac{P \sin \varphi \cdot l_A^3}{3EI_Y};$$

$$f_Z^T = \frac{30 \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,8^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,72 \cdot 10^{-8}} = 1,70 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,70 \text{ мм}.$$

Теоретичне значення переміщення перерізу B у напрямку осі Y :

$$f_Y^T = \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l_A}{6} [0 + 2 \cdot P \cos \varphi \cdot l_A \cdot 1 \cdot l_B + P \cos \varphi \cdot l_A \cdot 1 \cdot (l_B - l_A)];$$

$$f_Y^T = \frac{P \cos \varphi \cdot l_A^2}{6EI_Z} \cdot (3l_B - l_A);$$

$$f_Y^T = \frac{30 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,8^2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,61 \cdot 10^{-8}} \cdot (3 \cdot 1 - 0,8) = 0,80 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,80 \text{ мм}.$$

Теоретичне значення переміщення перерізу B у напрямку осі Z :

$$f_Z^T = \frac{1}{EI_Y} \cdot \frac{l_A}{6} [0 + 2 \cdot P \sin \varphi \cdot l_A \cdot 1 \cdot l_B + P \sin \varphi \cdot l_A \cdot 1 \cdot (l_B - l_A)];$$

$$f_Z^T = \frac{P \sin \varphi \cdot l_A^2}{6EI_Y} \cdot (3l_B - l_A);$$

$$f_Z^T = \frac{30 \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,8^2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,72 \cdot 10^{-8}} \cdot (3 \cdot 1 - 0,8) = 2,32 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,32 \text{ мм}.$$

1. Обчислити і занести в табл. 1.2 теоретичні значення переміщень перерізів A і B (f_T^A і f_T^B) за (1.1):

$$f_T^A = \sqrt{(f_z^A)^2 + (f_y^A)^2};$$

$$f_T^B = \sqrt{(f_z^B)^2 + (f_y^B)^2}.$$

2. Визначити відносну похибку теоретичних обрахунків:

$$\Delta_A = \frac{|f_T^A - f_E^A|}{f_T^A} 100\% ;$$

$$\Delta_B = \frac{|f_T^B - f_E^B|}{f_T^B} 100\% .$$

3. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Дати означення косою згину, навести приклади.
2. Нормальні напруження при косому згині.
3. Як визначити нейтральну лінію при косому згині?
4. Взаємне розташування в поперечному перерізі нейтральної й силової ліній.
5. Як визначити повне переміщення при косому згині?
6. Побудувати епюри нормальних напружень при косому згині.
7. Записати умову міцності при косому згині.

Лабораторна робота № 2 Експериментальна перевірка теорем про взаємність робіт і переміщень

Мета роботи: перевірити дослідним шляхом теореми про взаємність робіт і переміщень.

Теоретичні відомості

Теорема про взаємність робіт безпосередньо впливає із принципу незалежності дії сил і застосовується до всіх пружних систем, для яких дійсний цей принцип.

Розглянемо консольну балку, схема якої зображена на рис. 2.1, а), до якої прикладена сила P_1 у точці A і сила P_2 у точці B . Визначимо роботу, що роблять сили P_1 і P_2 при прямому й зворотному порядку прикладення.

Прикладаємо спочатку в точці A силу P_1 (рис. 2.1, б). Ця сила виконає роботу $P_1\delta_{A_1}$, де δ_{A_1} – переміщення точки A у напрямку сили P_1 , викликаною силою P_1 . У точці B прикладаємо силу P_2 . Ця сила зробить роботу, що буде мати аналогічний вираз $P_2\delta_{B_2}$. Одночасно з P_2 виконає роботу й сила P_1 , оскільки при прикладанні сили P_2 відбудеться й переміщення точки A . Робота сили P_1 буде $P_1\delta_{A_2}$, де δ_{A_2} – переміщення точки A у напрямку сили P_1 під дією сили P_2 , що прикладена в точці B . У підсумку одержимо суму робіт при прямому порядку прикладення сил:

$$P_1\delta_{A_1} + P_2\delta_{B_2} + P_1\delta_{A_2}. \quad (2.1)$$

Спочатку прикладемо силу P_2 (рис. 4.1, в), а потім P_1 . Міркуючи аналогічно, знаходимо:

$$P_2\delta_{B_2} + P_1\delta_{A_1} + P_2\delta_{B_1}. \quad (2.2)$$

Прирівнюючи (2.1) і (2.2), знаходимо $P_1\delta_{A_2} = P_2\delta_{B_1}$.

Отриманий результат можна сформулювати так: робота першої сили на переміщенні точки її прикладення під дією другої сили дорівнює роботі другої сили на переміщенні точки її прикладення під дією першої сили. У цьому полягає теорема взаємності робіт (теорема Бетті).

Якщо $P_1 = P_2 = P_0$, то $\delta_{A_2} = \delta_{B_1}$ і теорему взаємності робіт трактують як теорему взаємності переміщень.

Переміщення точки A під дією сили, прикладеної в точці B , дорівнює переміщенню точки B під дією тієї ж сили, але прикладеної в точці A (теорема Максвелла).

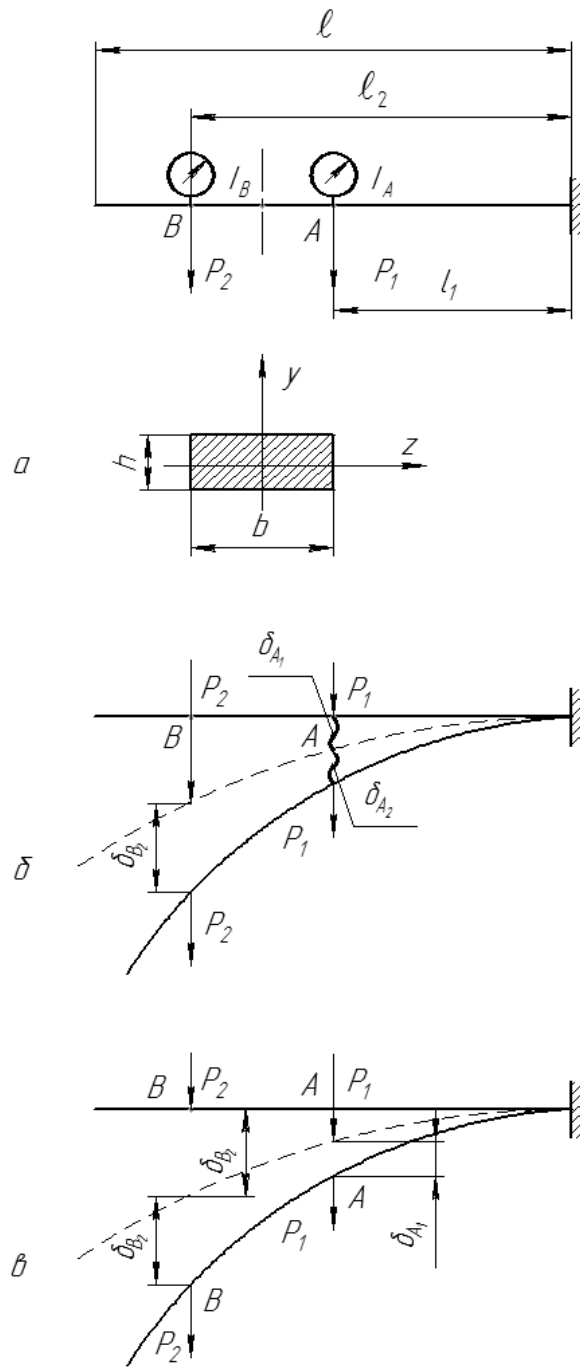


Рисунок 2.1 – Схеми навантаження консольної балки

Опис установки

Роботу виконують на установці, загальний вигляд якої показано на рис. 2.2. Установка складається з консольної балки довжиною l (див. рис. 2.1), затисненої з одного боку, двох індикаторів годинникового типу I_A і I_B , які встановлюють у точках A і B для вимірювання переміщень балки у вертикальному напрямку, і двох підвісів з набором вантажів. Навантаження балки виконується зосередженими силами P_1 і P_2 , що прикладають на відстані l_1 і l_2 від защемлення. Балка має прямокутний поперечний переріз із розмірами сторін $b = 50$ мм, $h = 9$ мм, матеріал балки – сталь Ст. 3.

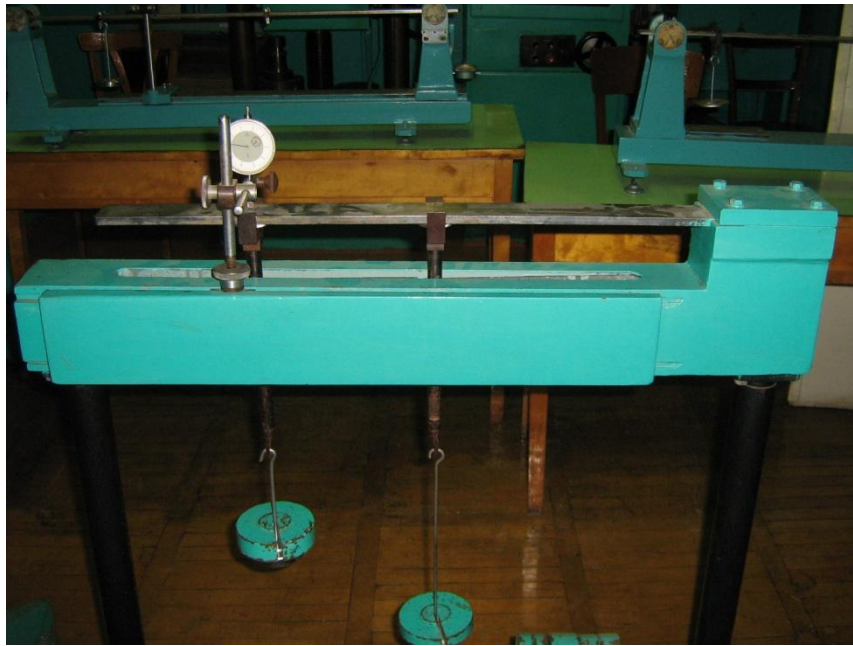


Рисунок 2.2 – Лабораторна установка

Порядок виконання роботи

1. Установити індикатори I_A і I_B на нуль.
2. Визначити відповідно до варіанта завдання (табл. 2.1) значення P_1 і P_2 .
3. Виконати прямий порядок прикладення сил P_1 і P_2 (див. рис. 2.1, б), визначити за індикатором I_A переміщення δ_{A_2} і роботу $A' = P_1 \delta_{A_2}$.
4. Виконати зворотний порядок прикладення сил P_1 і P_2 (див. рис. 2.1, в), визначити за індикатором I_B переміщення δ_{B_1} . Визначити роботу $A'' = P_2 \delta_{B_1}$.

Таблиця 2.1

Номер варіанта	l_1 , см	l_2 , см	P_1 , Н	P_2 , Н	P_0 , Н
1	30	40	40	20	10
2	40	50	30	20	10
3	30	60	40	10	20
4	40	55	30	10	20
5	30	50	40	15	30
6	40	60	30	15	30
7	25	40	40	10	15
8	25	50	30	20	15

5. Порівняти A' і A'' . Зробити висновок про справедливість теореми про взаємність робіт. Обчислити відносну похибку:

$$\Delta_A = \frac{A' - A''}{A_{cp}} \cdot 100\%, \quad (2.3)$$

де
$$A_{cp} = \frac{A' + A''}{2} \cdot 100\% . \quad (2.4)$$

6. Зняти навантаження P_1 і P_2 , установити індикатори I_A і I_B на нуль.

7. Навантажити балку силою P_0 в точці A і зняти покази індикатора I_B переміщення балки δ_{B_1} у перерізі B .

8. Навантажити балку тією ж силою P_0 у точці B і зняти покази індикатора I_A переміщення балки δ_{A_2} у точці A .

9. Порівняти результати δ_{B_1} і δ_{A_2} . Зробити висновок про справедливність теореми про взаємність переміщень. Визначити похибку:

$$\Delta_{\delta} = \frac{\delta_{B_1} - \delta_{A_2}}{\delta_{cp}} \cdot 100\% , \quad (2.5)$$

$$\delta_{cp} = \frac{\delta_{B_1} + \delta_{A_2}}{2} . \quad (2.6)$$

10. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему про взаємність робіт.
2. Для яких систем застосовуються теореми Бетті і Максвелла?
3. Що означають величини δ_{A_2} і δ_{B_1} ?
4. Як формулюється теорема про взаємність переміщень?
5. Де застосовується теорема про взаємність переміщень?

Лабораторна робота № 3 Визначення переміщення перерізу рами

Мета роботи: теоретично й експериментально визначити величину переміщення перерізу рами.

Теоретичні відомості

Найбільш універсальним методом визначення переміщення у балках, рамах і кривих брусів є метод Мора.

Послідовність визначення переміщення перерізу плоскої рами.

1. Розглядають спочатку плоску систему (раму), яка навантажена заданими зовнішніми силами. Для цієї системи будують епюру від дії зовнішнього навантаження M_p .

2. Будують допоміжну систему, яка навантажена лише однією одиничною силою $\bar{X} = 1$, прикладеної в точці, де треба визначити переміщення, у напрямі шуканого переміщення. Будують епюру від дії одиничної сили.

3. Обчислюють переміщення f за допомогою інтеграла Мора по ділянках у межах всієї системи:

$$f = \sum \int_s \frac{M_p M_1}{EI} ds, \quad (3.1)$$

де EI – жорсткість поперечного перерізу;

ds – довжина довільного елемента рами.

О. В. Верещагін запропонував графоаналітичний спосіб визначення інтеграла Мора, який має назву спосіб Верещагіна. Згідно з цим способом, інтеграл Мора дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розміщену під центром ваги епюри заданого зовнішнього навантаження (рис. 3.1).

Переміщення за способом Верещагіна виконується по ділянках за формулою:

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \eta_i}{EI}, \quad (3.2)$$

де ω_i – площа першої епюри i -тої ділянки;

η_i – ордината другої епюри i -тої ділянки під центром ваги відповідної площі;

n – кількість ділянок.

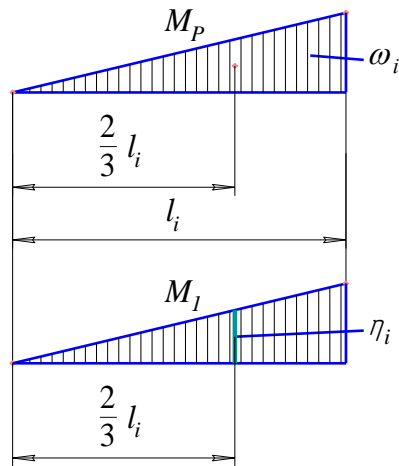


Рисунок 3.1 – Епюри від зовнішнього навантаження й одиничної сили

За способом Верещагіна можна множити площу будь-якої з них на ординату іншої під центром ваги першої. Якщо епюри на ділянці від зовнішнього навантаження й одиничної сили протилежні за знаком, то їхній добуток має знак «мінус».

Обчислення інтеграла Мора істотно спрощується, якщо епюри від зовнішнього навантаження й одиничної сили прямолінійні, тобто мають вигляд трапеції (рис. 3.2). У такому разі, відповідно до способу Верещагіна–Даркова:

$$f = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6} (2a_i c_i + 2b_i d_i + a_i d_i + b_i c_i), \quad (3.3)$$

де a_i , b_i , d_i та c_i – значення моментів з країв ділянок епюри.

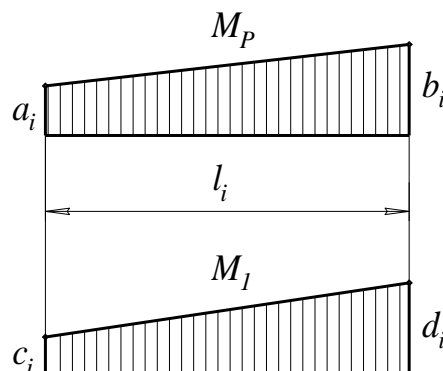


Рисунок 3.2 – Епюри від зовнішнього навантаження й одиничної сили

Якщо одна з епюр має вигляд «перекрученої» трапеції (рис. 3.3), формула (3.3) матиме вигляд:

$$f = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6} (2a_i c_i - 2b_i d_i + a_i d_i - b_i c_i).$$

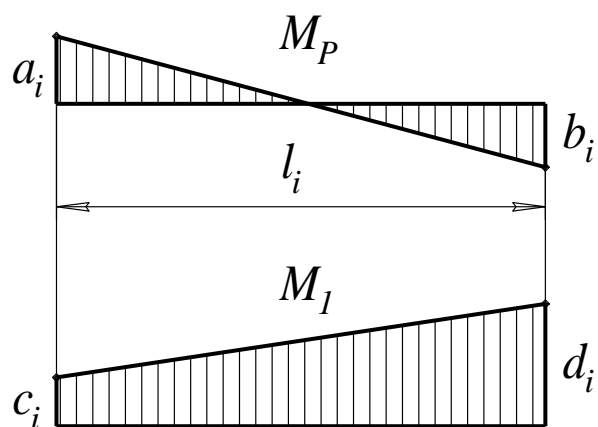


Рисунок 3.3 – Епюри від зовнішнього навантаження й одиничної сили

Опис установки

Загальний вигляд установки СМ-34 для визначення величини прогинів перерізу рами показано на рис. 3.4. Установка (рис. 3.5) складається зі сталюї рами 1 прямокутного поперечного перерізу, яка встановлена на двох шарнірних опорах 2 і 3. Опора 3 – нерухома, опора 2 – шарнірно-рухома.



Рисунок 3.4 – Установки СМ-34 для визначення величини прогинів перерізу рами

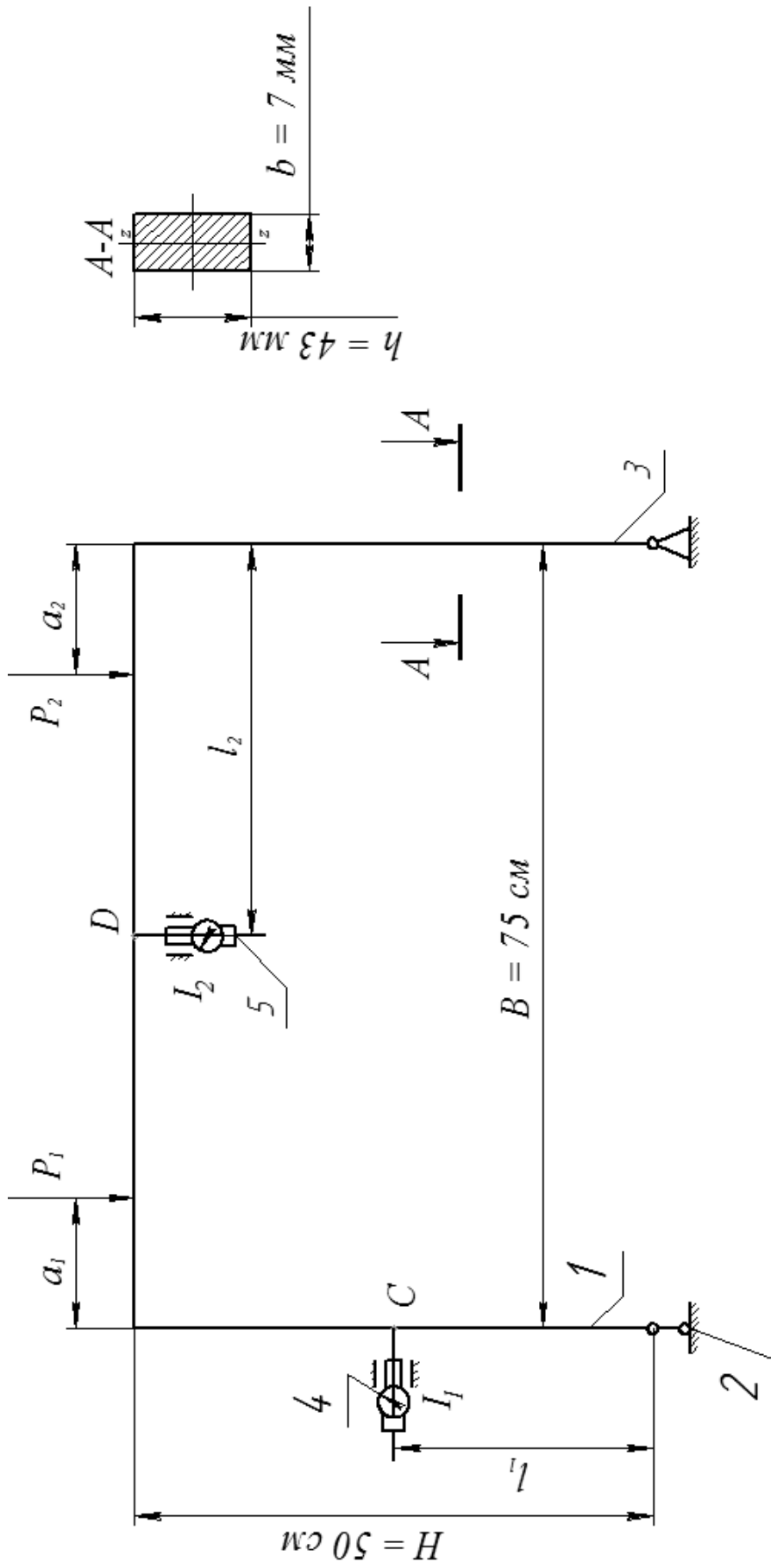


Рисунок 3.5 – Схема установки для визначення величини прогинів перерізу рами

Навантаження здійснюється за допомогою гирьових підвісів P_1 і P_2 , які можуть переміщуватися вздовж ригеля рами. Вимірювання вертикального переміщення здійснюється індикатором годинникового типу 4. Вимірювання горизонтальних переміщення здійснюється індикатором годинникового типу 5. Пристрій закріплення індикаторів дозволяє визначати переміщення в будь-якому перерізі рами. Ціна поділки індикаторів – 0,01 мм.

Порядок виконання роботи

1. Установити, згідно з варіантом (табл. 3.1), підвіси для вантажів P_1 та P_2 на відповідних відстанях a_1 і a_2 .

Таблиця 3.1

Номер варіанта	l_1 , см	l_2 , см	a_1 , см	a_2 , см	P_1 , Н	P_2 , Н
1	15	25	20	10	20	20
2	20	30	10	15	15	20
3	25	35	15	20	10	15
4	30	40	15	25	20	15
5	35	45	20	10	15	10
6	40	30	25	15	10	10
7	15	40	10	20	20	20
8	20	50	15	25	15	20

2. Установити стійку з індикатором I_1 для визначення переміщення перерізу рами в точці C на відстані l_1 .

3. Установити стійку з індикатором I_2 для визначення переміщення перерізу рами в точці D на відстані l_2 .

4. Установити стрілки індикаторів на нуль.

5. Установити вантажі P_1 та P_2 на відповідні підвіси.

6. Занести покази індикаторів I_1 і I_2 (u_1 ; u_2) у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Покази індикаторів, мм				Переміщення, мм			
I_1 ,		I_2 ,		f_E^C	f_T^C	f_E^D	f_T^D
u_1	u_1'	u_2	u_2'				

7. Зняти навантаження і повторно встановити вантажі P_1 та P_2 на відповідні підвіси.

8. Занести покази індикаторів I_1 і I_2 , I_3 і I_4 (u_1' ; u_2') у табл. 3.2.

9. Обчислити і занести в табл. 3.2 експериментальні значення переміщень перерізу рами в точках C і D :

$$f_E^C = \frac{u_1 + u_1'}{2}; \quad f_E^D = \frac{u_2 + u_2'}{2}.$$

10. Обчислити і занести в табл. 3.2 теоретичні значення переміщень перерізу рами в точках C і D (f_T^C і f_T^D).

Приклад. Визначимо переміщення перерізу рами в точках C і D за методом Мора.

Вихідні дані: $P_1 = 10 \text{ Н}$; $P_2 = 20 \text{ Н}$; $a_1 = 0,2 \text{ м}$; $a_2 = 0,3 \text{ м}$; $l_1 = 0,2 \text{ м}$; $l_2 = 0,4 \text{ м}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Визначимо реакції опор (рис. 3.6, а) від дії зовнішнього навантаження з рівнянь статики:

$$\sum M_A = 0; \quad -P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot (B - a_2) + R_B \cdot B = 0;$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot (B - a_2)}{B};$$

$$R_B = \frac{10 \cdot 0,2 + 20 \cdot (0,75 - 0,3)}{0,75} = 14,67 \text{ Н}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad P_1 \cdot (B - a_1) + P_2 \cdot a_2 - R_A \cdot B = 0;$$

$$R_A = \frac{P_1 \cdot (B - a_1) + P_2 \cdot a_2}{B};$$

$$R_A = \frac{10 \cdot (0,75 - 0,2) + 20 \cdot 0,3}{0,75} = 15,33 \text{ Н}.$$

Визначимо моменти M_1 , M_2 та M_D :

$$M_1 = R_A \cdot a_1 = 15,33 \cdot 0,2 = 3,07 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = R_B \cdot a_2 = 14,67 \cdot 0,3 = 4,4 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_D = R_B \cdot l_2 - P_2 \cdot (l_2 - a_2) = 14,67 \cdot 0,4 - 20 \cdot (0,4 - 0,3) = 3,87 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Побудуємо епюру M_p від дії зовнішнього навантаження (рис. 5.6, б).

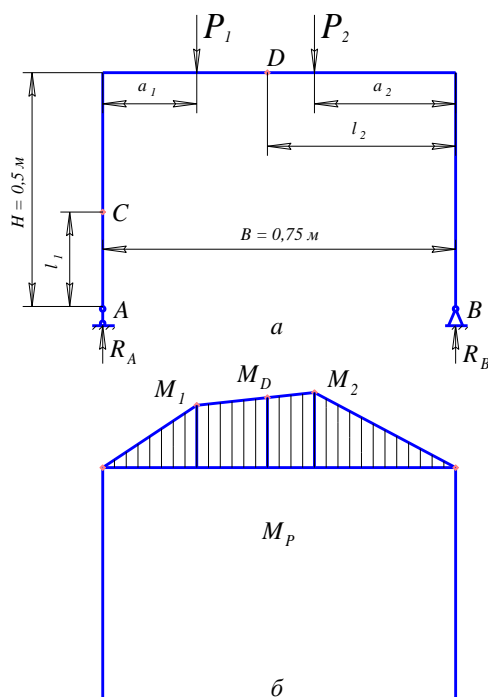


Рисунок 3.6 – Розрахункова схема (а)
і епюра від зовнішнього навантаження (б)

Визначимо реакції опори (рис. 5.7, а) від дії одиничної сили, прикладеної в точці С, із рівнянь статyki:

$$\sum M_A = 0; \quad -1 \cdot l_1 + V_B^I \cdot B = 0;$$

$$V_B^I = \frac{1 \cdot l_1}{B}; \quad V_B^I = \frac{1 \cdot 0,2}{0,75} = 0,27;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -1 \cdot l_1 + R_A^I \cdot B = 0;$$

$$R_A^I = \frac{1 \cdot l_1}{B}; \quad R_A^I = \frac{1 \cdot 0,2}{0,75} = 0,27;$$

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_B^I = 0; \quad H_B^I = 1.$$

Визначимо моменти M_1^I , M_2^I , M_A^I та M_B^I :

$$M_1^I = 1 \cdot (H - l_1) + R_A^I \cdot a_1 = 1 \cdot (0,5 - 0,2) + 0,27 \cdot 0,2 = 0,35 \text{ м};$$

$$M_2^I = H_B^I \cdot H + R_B^I \cdot a_2 = 1 \cdot 0,5 - 0,27 \cdot 0,3 = 0,42 \text{ м};$$

$$M_A^I = 1 \cdot (H - l_1) = 1 \cdot (0,5 - 0,2) = 0,3 \text{ м};$$

$$M_B^I = H_B^I \cdot H = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м}.$$

Побудуємо епюру M_1 від дії одиничної сили (рис. 5.7, б), прикладеної в точці С.

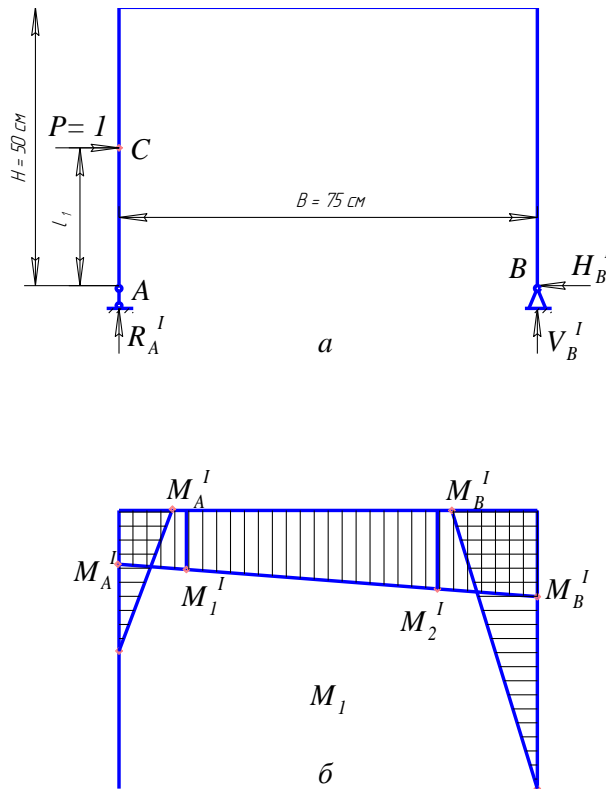


Рисунок 3.7 – Розрахункова схема (а)
і епюра від дії одиничної сили, прикладеної в точці С (б)

Визначимо реакції опор (рис. 3.8, а) від дії одиничної сили, прикладеної в точці D , із рівнянь статики:

$$\sum M_A = 0; \quad -1 \cdot (B - l_2) + R_B^{\text{II}} \cdot B = 0;$$

$$R_B^{\text{II}} = \frac{1 \cdot (B - l_2)}{B}; \quad R_B^{\text{II}} = \frac{1 \cdot (0,75 - 0,4)}{0,75} = 0,47;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -1 \cdot l_2 + R_A^{\text{II}} \cdot B = 0;$$

$$R_A^{\text{II}} = \frac{1 \cdot l_2}{B}; \quad R_A^{\text{II}} = \frac{1 \cdot 0,4}{0,75} = 0,53.$$

Визначимо моменти M_1^{II} , M_2^{II} та M_D^{II} :

$$M_1^{\text{II}} = R_A^{\text{II}} \cdot a_1 = 0,53 \cdot 0,2 = 0,11 \text{ м};$$

$$M_2^{\text{II}} = R_B^{\text{II}} \cdot a_2 = 0,47 \cdot 0,3 = 0,14 \text{ м};$$

$$M_D^{\text{II}} = R_B^{\text{II}} \cdot l_2 = 0,47 \cdot 0,4 = 0,19 \text{ м}.$$

Побудуємо епюру M_2 від дії одиничної сили (рис. 3.8, б), прикладеної в точці D .

Визначимо момент інерції для поперечного перерізу рами (див. рис. 3.5):

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_z = \frac{43 \cdot 7^3}{12} = 1229,08 \text{ мм}^4 = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4.$$

Визначимо переміщення в точці C :

$$f_C = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{a_1}{6} \cdot (0 + 2M_1 \cdot M_1^I + M_1 \cdot M_A^I + 0) +$$

$$+ \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{B - a_1 - a_2}{6} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + 2M_2 \cdot M_2^I + M_1 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_1^I) +$$

$$+ \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{a_2}{6} \cdot (2M_2 \cdot M_2^I + 0 + M_2 \cdot M_B^I + 0);$$

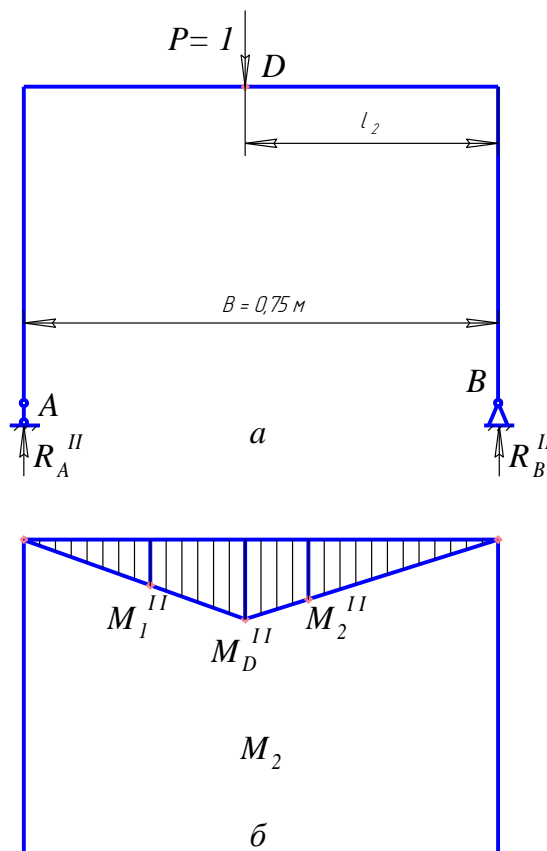


Рисунок 3.8 – Розрахункова схема (а) і епюра від дії одиничної сили, прикладеної в точці D (б)

$$f_C = \frac{a_1}{6EI_z} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + M_1 \cdot M_A^I) +$$

$$+ \frac{B - a_1 - a_2}{6EI_z} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + 2M_2 \cdot M_2^I + M_1 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_1^I) +$$

$$+ \frac{a_2}{6EI_z} \cdot (2M_2 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_B^I);$$

$$f_c = \frac{0,2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot (2 \cdot 3,07 \cdot 0,35 + 3,07 \cdot 0,3) +$$

$$+ \frac{0,75 - 0,2 - 0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot (2 \cdot 3,07 \cdot 0,35 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,42 + 3,07 \cdot 0,42 + 4,4 \cdot 0,35) +$$

$$+ \frac{0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot (2 \cdot 4,4 \cdot 0,42 + 4,4 \cdot 0,5) = 0,00294 \text{ м} = 2,94 \text{ мм}.$$

Визначимо переміщення в точці D :

$$f_D = \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_1}{6} \cdot (0 + 2M_1 \cdot M_1'' + 0 + 0) +$$

$$+ \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{B - a_1 - l_2}{6} \cdot (2M_1 \cdot M_1'' + 2M_D \cdot M_D'' + M_1 \cdot M_D'' + M_D \cdot M_1'') +$$

$$+ \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l_2 - a_2}{6} \cdot (2M_D \cdot M_D'' + 2M_2 \cdot M_2'' + M_D \cdot M_2'' + M_2 \cdot M_D'') +$$

$$+ \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_2}{6} \cdot (2M_2 \cdot M_2'' + 0 + 0 + 0);$$

$$f_D = \frac{0,2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 3,07 \cdot 0,11 + \frac{0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot 2 \cdot 4,4 \cdot 0,14 +$$

$$+ \frac{0,75 - 0,2 - 0,4}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot (2 \cdot 3,07 \cdot 0,11 + 2 \cdot 3,87 \cdot 0,19 + 3,07 \cdot 0,19 + 3,87 \cdot 0,11) +$$

$$+ \frac{0,4 - 0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1229,08 \cdot 10^{-12}} \cdot (2 \cdot 3,87 \cdot 0,19 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,14 + 3,87 \cdot 0,14 + 4,4 \cdot 0,19) =$$

$$= 0,0009 \text{ м} = 0,9 \text{ мм}.$$

11. Визначити відносну похибку теоретичних обрахунків:

$$\Delta_C = \frac{|f_T^C - f_E^C|}{f_A^C} 100\% ; \quad \Delta_D = \frac{|f_T^D - f_E^D|}{f_A^D} 100\%.$$

12. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Алгоритм розв'язання задач на визначення переміщення методом Мора.
2. Формула Мора для визначення переміщення.
3. Спосіб Верещагіна обчислення інтегралів Мора.
4. Визначення вантажного стану.
5. Визначення одиничного стану.

Лабораторна робота № 4

Визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки

Мета роботи: теоретично й експериментально визначити величину опорного моменту один раз статично невизначуваної балки.

Теоретичні відомості

Розглянемо балку (рис. 4.1), один кінець якої жорстко защемлений, а інший опирається на шарнірно-рухомому опорі.

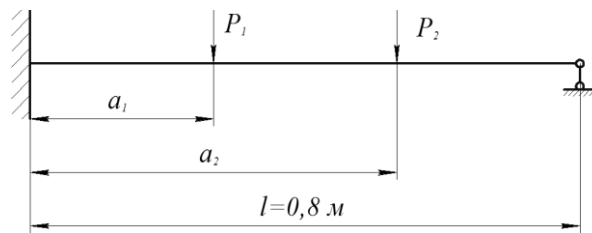


Рисунок 4.1 – Схема експериментальної установки

При дії на балку зовнішнього навантаження затиснення лівого кінця дає три реакції: вертикальну R_A і горизонтальну H_A реакції та опорний момент M_A (рис. 4.2). Шарнірно-рухома опора дає одну реакцію R_B .

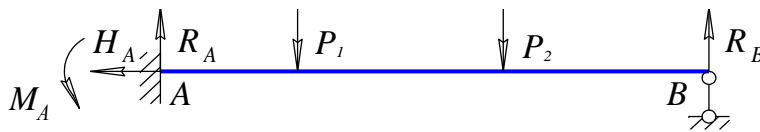


Рисунок 4.2 – Розрахункова схема

Для визначення реакцій можна скласти три умови рівноваги плоскої системи сил. З трьох рівнянь рівноваги чотири реакції (R_A , H_A , M_A , R_B) визначити не можна. Отже, зображена на рис. 4.2 балка один раз статично невизначувана.

Розглянемо етапи розрахунку статично невизначуваної системи.

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності, тобто кількість зайвих зв'язків або зайвих зусиль.

2. Усуваємо зайві зв'язки і замінюємо вихідну систему статично визначуваною, яку називають основною системою.

3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і зайвими невідомими зусиллями, що замінюють дію усунених зв'язків. Така система називається еквівалентною системою.

4. Складаємо рівняння переміщень, що виражають рівність нулю переміщень у напрямках зайвих невідомих. Розв'язуємо рівняння і визначаємо значення зайвих невідомих.

Наведена схема розрахунку має назву «метод сил», оскільки як основні невідомі обираються зусилля зайвих зв'язків.

Визначимо основну систему для один раз статично невизначуваної системи (див. рис. 4.2). Узявши як зайве зусилля опорний момент M_A , отримуємо основну систему у вигляді шарнірно опертої балки (рис. 4.3).

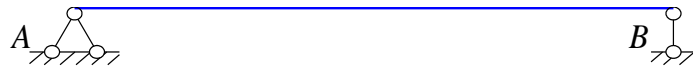


Рисунок 4.3 – Основна система

Завантажуємо основну систему заданим навантаженням та зайвим невідомим моментом $M_A = X_1$ і отримуємо еквівалентну систему (рис. 4.4).

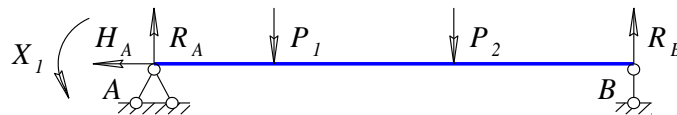


Рисунок 4.4 – Еквівалентна система

Рівняння для визначення невідомого опорного моменту X_1 має вигляд:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (4.1)$$

де δ_{11} – кут повороту перерізу A від моменту $\bar{X}_1 = 1$;

Δ_{1P} – кут повороту від заданого навантаження.

Для визначення Δ_{1P} та δ_{11} будують епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження M_P (рис. 4.5) і одиничного моменту M_1 (рис. 4.6).

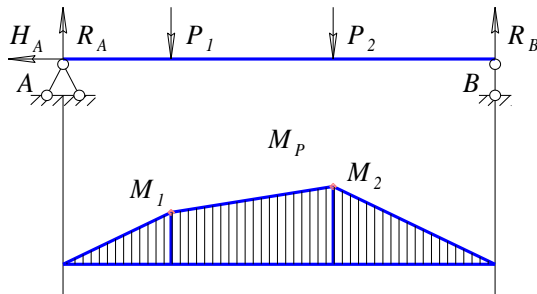


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема і епюра від зовнішнього навантаження

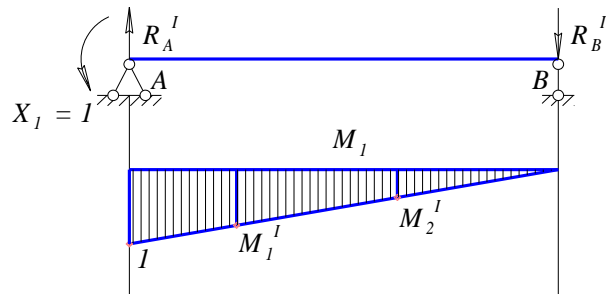


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема і епюра від дії одиничного моменту

Значення Δ_{1P} та δ_{11} можливо отримати, використовуючи спосіб Верещагіна або Верещагіна–Даркова.

Значення опорного моменту X_1 з рівняння (4.1):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (4.2)$$

Опис установки

Загальний вигляд установки для визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки показано на рис. 4.7.



Рисунок 4.7 – Установка для визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки

Установка (рис. 4.8) складається з таких основних частин: балки 1, основи 2, яка встановлена на чотирьох регульованих гвинтах-ніжках 3, рухомої 4 і нерухомої 5 стійок.

Балка прямокутного перерізу 3×40 мм виконана зі сталі марки Ст. 3. Балка опирається на шарнірні опори *A* і *B*, які відповідно розміщені на стійках 4 і 5. На лицьовій стороні балки нанесена шкала для зручності відліку плечей навантаження.

Навантаження зразка здійснюється за допомогою двох підвісок *b* з гирьовими підвісами 7, на які кладуть гирі 8. Підвіски переміщують уздовж балки вручну. За потреби підвіски можна зафіксувати за допомогою гвинта в будь-якій точці прольоту балки.

Рухома стійка 4 може переміщуватися по направляючій планці 9, яка прикріплена до основи 2 установки, що дозволяє змінювати довжину прольоту балки в межах від 650 до 800 мм.

Нерухома стійка 5 закріплена гвинтами до основи 2 і обладнана пристроєм, що дозволяє імітувати жорстке защемлення балки. Цей пристрій складається з горизонтально розташованого важеля 10 з протизагою 11. Важіль 10 з'єднаний з віссю шарнірної опори *A*. На важелі нанесена шкала.

На осі шарнірної опори *A* також закріплено стержень 12 для вимірювання кута повороту перерізу балки на опорі. Стержень має в нижній частині п'ятку, у яку впирається ніжка індикатора *I*.

При навантаженні балки її перерізу на опорі повертається на кут, величина якого реєструється за шкалою індикатора годинникового типу з ціною поділки 0,01 мм.

Переміщуючи протизагу 11 вздовж важеля 10, можна зрівноважити балку, тобто домогтися такого її стану, при якому кут повороту перерізу балки на опорі *A* буде дорівнювати нулю. Протизага 11 має вагу 10 Н.

Отримане таким чином жорстке защемлення опорного кінця балки характеризується опорним моментом, значення якого визначається моментом, що створюється протизагою важеля щодо осі опорного перерізу балки.

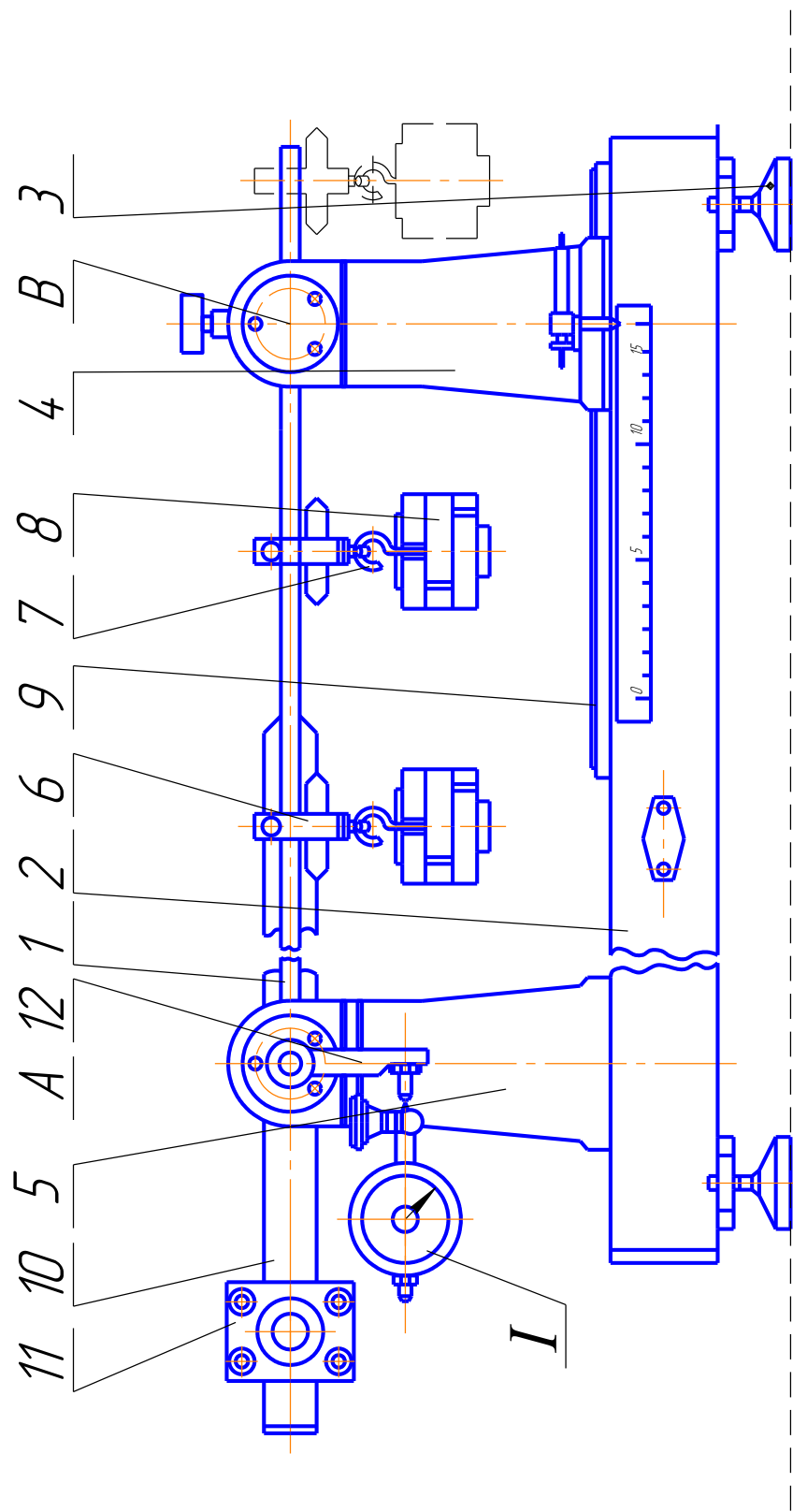


Рисунок 4.8 – Схема установки для визначення опорного моменту один раз статично невизначуваної балки

Порядок виконання роботи

1. Установити, згідно з варіантом (табл. 4.1), підвіси для вантажів P_1 та P_2 на відповідних відстанях a_1 і a_2 (див. рис. 4.1).

Таблиця 4.1

Розрахункові параметри	Номер варіанта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
P_1 , Н	10	15	20	25	10	15	20	25
P_2 , Н	25	20	15	10	20	25	15	10
a_1 , см	20	30	40	20	30	20	30	40
a_2 , см	40	60	60	50	60	40	60	60

2. Змістити протизвагу II до шарніру A і встановити стрілку індикатора I на нуль.

3. Навантажити балку відповідно до зазначеного варіанту.

4. Змістити протизвагу відносно осі опори A вліво на відстань c (рис. 4.9), за якої стрілка індикатора I повернеться у вихідне положення, тобто на нуль. За потреби на протизвагу можна покласти гирю вагою $5 \dots 10$ Н.

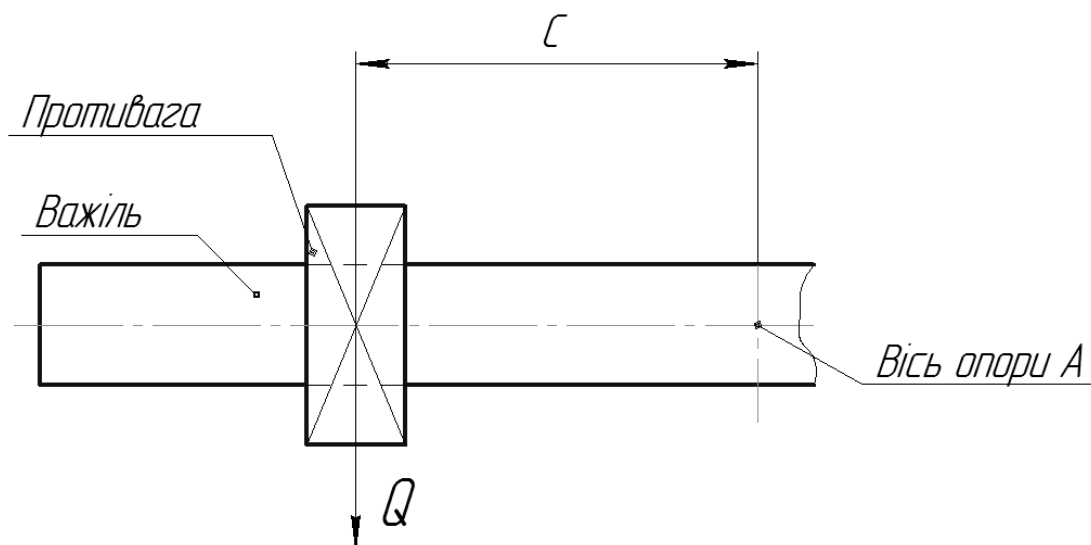


Рисунок 4.9 – Схема визначення опорного моменту

5. Визначити експериментальне значення опорного моменту M_E , що перешкоджає повороту перерізу балки на опорі A ,

$$M_E = Q \cdot c, \quad (4.3)$$

де Q – вага протизваги ($Q = 10 \dots 20$ Н);

c – відстань від осі опори A до протизваги Q .

6. Обчислити теоретичні значення опорного моменту M_T .

Приклад. Визначимо опорний момент M_T (рис. 4.10, а).

Вихідні дані: $P_1 = 10 \text{ Н}$; $P_2 = 20 \text{ Н}$; $a_1 = 0,2 \text{ м}$; $a_2 = 0,4 \text{ м}$.

Визначимо реакції опор (рис. 4.10, б) від дії зовнішнього навантаження із рівнянь статки:

$$\sum M_A = 0; \quad -P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + R_B \cdot l = 0;$$

$$R_B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l}; \quad R_B = \frac{10 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,4}{0,8} = 12,5 \text{ Н}.$$

$$\sum M_{\hat{A}} = 0; \quad -R_{\hat{A}} \cdot l + P_1 \cdot (l - a_1) + P_2 \cdot (l - a_2) = 0;$$

$$R_{\hat{A}} = \frac{P_1 \cdot (l - a_1) + P_2 \cdot (l - a_2)}{l};$$

$$R_A = \frac{10 \cdot (0,8 - 0,2) + 20 \cdot (0,8 - 0,4)}{0,8} = 17,5 \text{ Н}.$$

Визначимо реакції опор (рис. 4.10, в) від дії одиничного моменту із рівнянь рівноваги статки:

$$\sum M_B = 0; \quad 1 - R_A^I \cdot l = 0; \quad R_A^I = \frac{1}{l}; \quad R_A^I = \frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ м}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad 1 - R_B^I \cdot l = 0; \quad R_B^I = \frac{1}{l}; \quad R_B^I = \frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ м};$$

Визначимо моменти M_1 і M_2 :

$$M_1 = R_A \cdot a_1 = 17,5 \cdot 0,2 = 3,5 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_2^I = -R_B^I \cdot (l - a_2) = -1,25 \cdot (0,8 - 0,4) = 0,5 \text{ м}^2.$$

Визначимо моменти M_1^I і M_2^I :

$$M_1^I = -R_B^I \cdot (l - a_1) = -1,25 \cdot (0,8 - 0,2) = 0,75;$$

$$M_2^I = -R_B^I \cdot (l - a_2) = -1,25 \cdot (0,8 - 0,4) = 0,5.$$

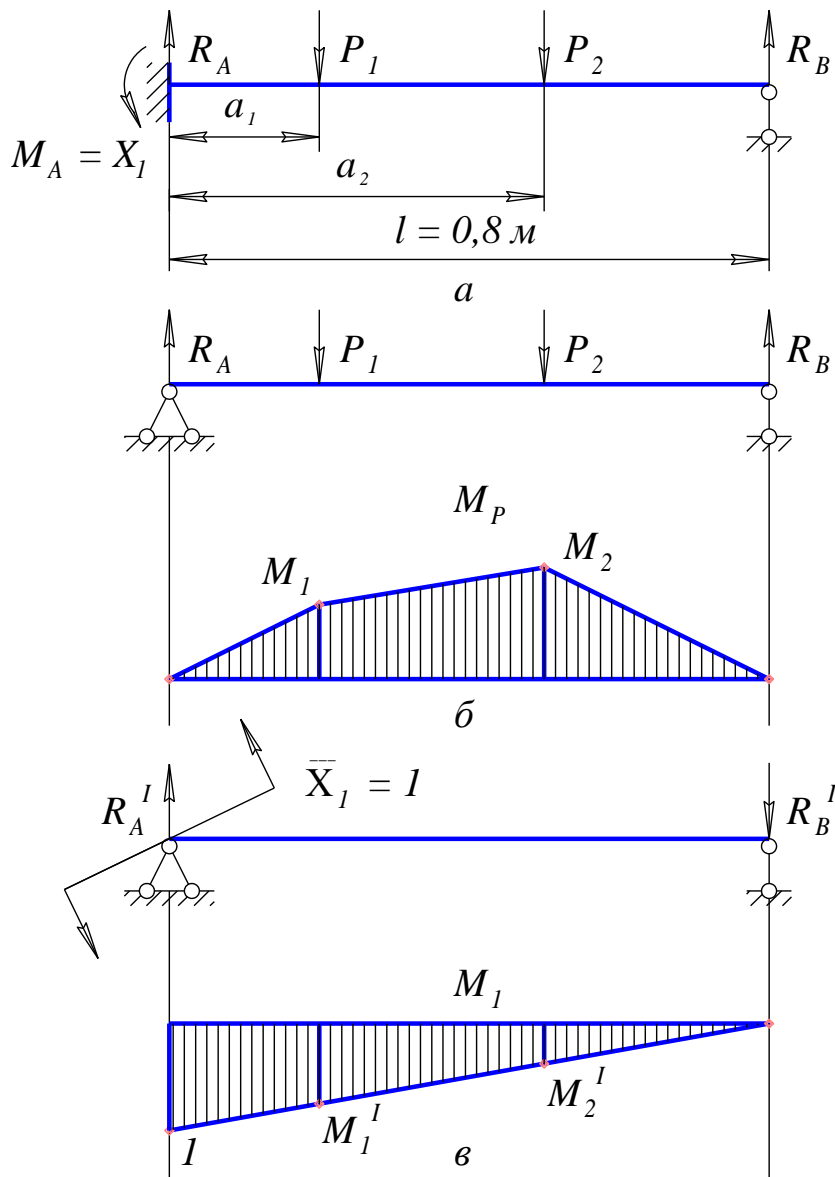


Рисунок 4.10 – Розрахункова схема (а), епюра від зовнішнього навантаження (б) і епюра від дії одиничного моменту (в)

Визначимо кут повороту перерізу A від моменту $\bar{X}_1 = 1$ за способом Верещагіна–Даркова:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l}{6} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 + 0);$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI_Z};$$

$$\delta_{11} = \frac{0,8}{3EI_Z} \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{м}}.$$

Визначимо кут повороту від заданого навантаження Δ_{1P} за способом Верещагіна–Даркова:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_1}{6} \cdot (0 + 2M_1 \cdot M_1^I + M_1 \cdot 1 + 0) - \\ & -\frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{a_2 - a_1}{6} \cdot (2M_1 \cdot M_1^I + 2M_2 \cdot M_2^I + M_1 \cdot M_2^I + M_2 \cdot M_1^I) - \\ & -\frac{1}{EI_Z} \cdot \frac{l - a_2}{6} \cdot (2M_2 \cdot M_2^I + 0 + 0 + 0); \\ \Delta_{1P} &= -\frac{0,2}{6EI_Z} \cdot (2 \cdot 3,5 \cdot 0,75 + 3,5 \cdot 1) - \\ & -\frac{0,4 - 0,2}{6EI_Z} \cdot (2 \cdot 3,5 \cdot 0,75 + 2 \cdot 5 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,75) - \\ & -\frac{0,8 - 0,4}{6EI_Z} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0,5 = -\frac{6,9}{6EI_Z}. \end{aligned}$$

Визначимо значення опорного моменту M_T за формулою (4.2):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}};$$

$$M_T = X_1 = -\frac{-6,9 \cdot 3EI_Z}{6EI_Z \cdot 0,8} = 4,313 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

7. Порівняти експериментальні й теоретичні значення опорного моменту. Визначити відносну похибку теоретичних обчислень.

$$\Delta = \frac{M_T - M_E}{M_E} 100\%.$$

8. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Які системи називаються статично невизначеними?
2. Що розуміється під зайвим невідомим?
3. Дати означення степеня статичної невизначеності.
4. Навести основні етапи розрахунку статично невизначеної системи.
5. Дати означення основної системи.
6. Дати означення еквівалентної системи.
7. Пояснити спосіб Верещагіна для визначення переміщень точок.
8. Записати канонічні рівняння методу сил.

Лабораторна робота № 5

Визначення опорної реакції один раз статично невизначуваної рами

Мета роботи: теоретично й експериментально визначити величину горизонтальної опорної реакції один раз статично невизначуваної рами.

Теоретичні відомості

Розглянемо найпростіший приклад один раз статично невизначуваної рами. На рис. 5.1 зображено раму, яка опирається на шарнірно-нерухомі опори A і B . При дії на раму зовнішнього навантаження в опорі A виникає дві реакції – вертикальна R_A і горизонтальна H_A реакції. В опорі B також виникає дві реакції – вертикальна R_B і горизонтальна H_B . Отже, рама один раз статично невизначувана і має одне зайве зусилля.

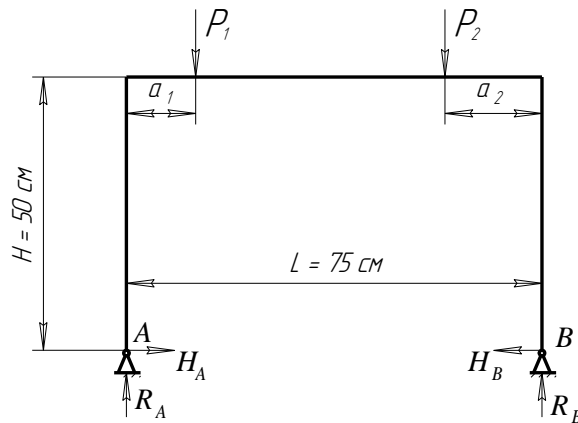


Рисунок 5.1 – Розрахункова схема

Приймаємо горизонтальну опорну реакцію, наприклад, H_A , яку потрібно визначити, зайвою. Усуваючи зайву реакцію, замінюємо вихідну систему статично визначуваною – основною системою OC (рис. 5.2, а).

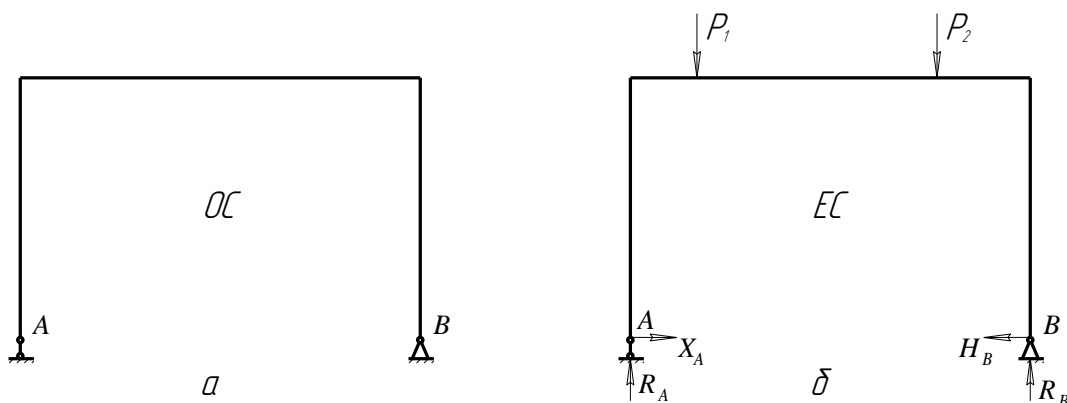


Рисунок 5.2 – Основна (а) і еквівалентна (б) системи

Навантажимо основну систему заданим навантаженням, а замість відкинутої опорної реакції H_A прикладемо невідому реакцію X_1 (рис. 5.2, б). Таким чином, отримуємо еквівалентну систему (ЕС).

Повне переміщення точки A основної системи (від заданого навантаження й зайвого невідомого зусилля) у напрямі X_1 , тобто у напрямі усуненого зв'язка, має дорівнювати нулю, оскільки в точці A вихідна система не має прогину. Рівняння переміщення точки A основної системи в напрямі X_1 для один раз статично невизначуваної системи має вигляд:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (5.1)$$

де δ_{11} – переміщення в напрямі X_1 від сили $\bar{X}_1 = 1$;

Δ_{1P} – переміщення від заданого навантаження.

Звідси шукана реакція:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = H_A. \quad (5.2)$$

Для визначення Δ_{1P} і δ_{11} побудуємо епюри M_p (рис. 5.3) і M_I (рис. 5.4). Значення Δ_{1P} і δ_{11} визначаємо за способом Верещагіна:

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} M_1 a_1 H + \frac{L - a_1 - a_2}{6} (2M_1 H + 2M_2 H + M_1 H + M_2 H) + \frac{1}{2} M_2 a_2 H \right);$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} H H \frac{2}{3} H + H L H + \frac{1}{2} H H \frac{2}{3} H \right).$$

Підставимо значення Δ_{1P} і δ_{11} в (5.2) – і остаточно знайдемо значення реакції X_1 .

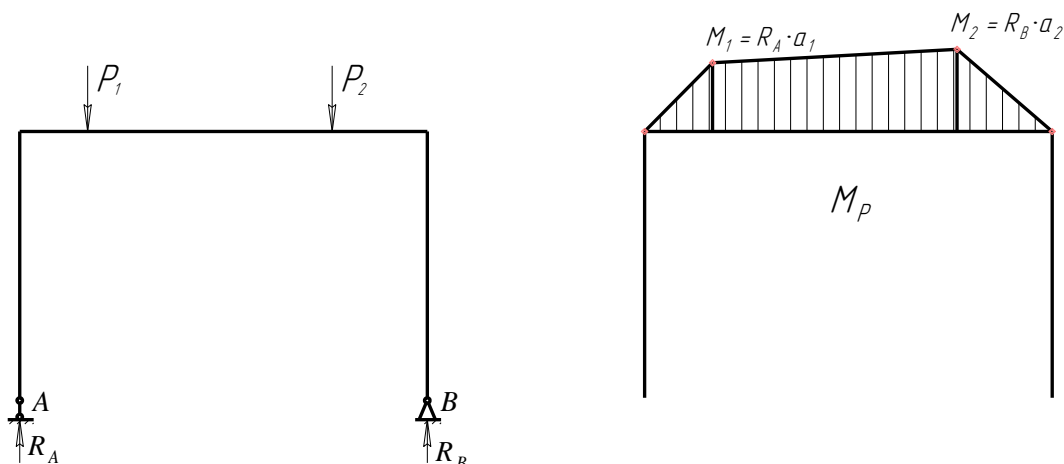


Рисунок 5.3 – Розрахункова схема й епюра від зовнішнього навантаження

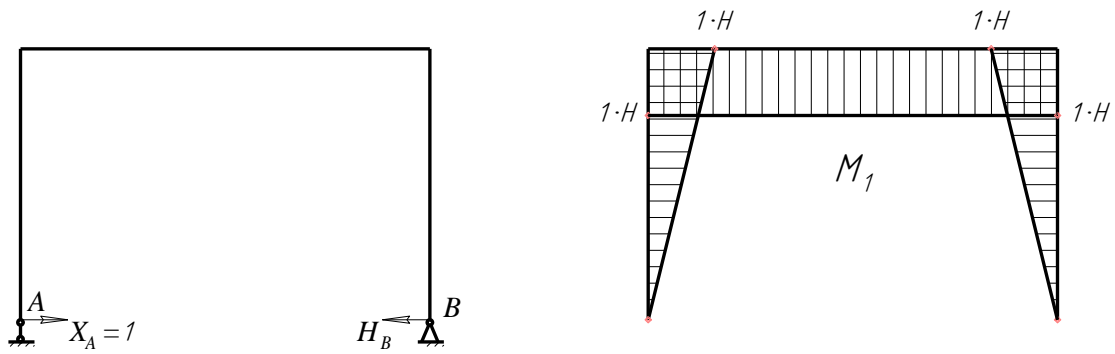


Рисунок 5.4 – Розрахункова схема й епюра від дії одиничного моменту

Опис установки

Загальний вигляд установки для визначення горизонтальної опорної реакції рами показано на рис. 5.5.

Установка складається з досліджуваної рами 1, яка опирається на шарнірно-рухому опору 2 і шарнірно-нерухому опору 8, стола 5 з двома колонами 6, двох гирьових підвісів 7, набору гир 9, індикатора годинникового типу 3 і пристрою 4, за допомогою якого визначаються величини горизонтальної опорної реакції опори 2.

Переріз рами 1 прямокутний з розміром $b=50$ мм і $h=7$ мм. Матеріал рами – сталь Ст. 3. Гирьові підвіси 7 можуть переміщуватися вздовж горизонтальної частини рами, чим можна задати їх положення a_1 і a_2 .

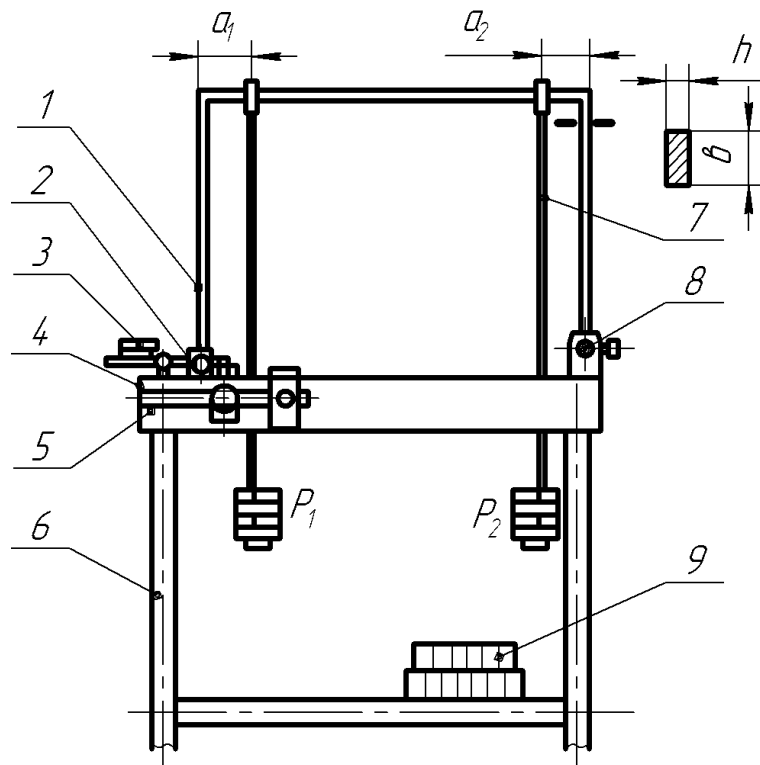


Рисунок 5.5 – Установка для визначення горизонтальної опорної реакції рами

Пристрій 4 (див. рис. 5.5), принципова схема якого зображена на рис. 5.6, складається з осі 3, що жорстко з'єднана з вертикальним важелем 2 і горизонтальним важелем 5, по якому можна переміщувати вантаж 4 вагою $Q = 10 \text{ Н}$. На лицьовій стороні горизонтального важеля нанесена шкала. Вертикальний важіль 2 з'єднаний з рухомою опорою 1. Довжина вертикального важеля $l_1 = 60 \text{ мм}$.

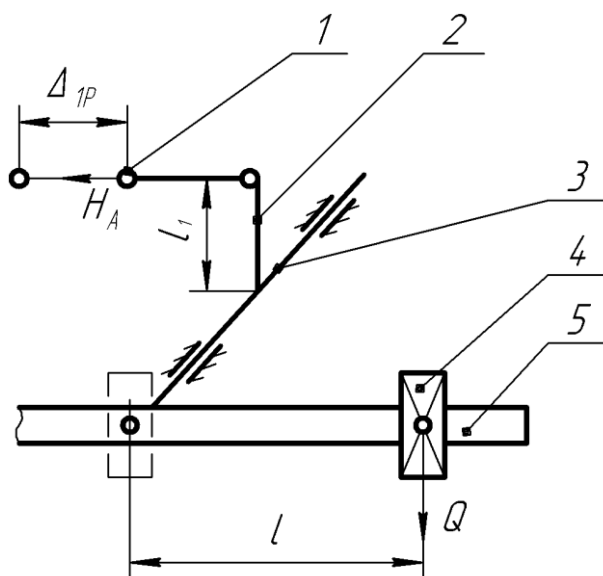


Рисунок 5.6 – Схема пристрою, за допомогою якого визначається величина горизонтальної опорної реакції опори

При навантаженні рами вантажами P_1 і P_2 рухома опора 1 (див. рис. 5.6) отримує горизонтальне переміщення Δ_{1p} . Це зміщення фіксується індикатором 3 (див. рис. 5.5). Переміщуючи вантаж 4 (див. рис. 5.6) вагою $Q = 10 \text{ Н}$ по горизонтальному важелю 5 вправо на відстань l_1 , можна повернути опору 1 у початкове положення, що імітує шарнірно-нерухому опору. Стрілка індикатора має повернутися у вихідне положення, тобто на нуль.

Величину горизонтальної опорної реакції H_A можна визначити з умови рівноваги сил відносно осі 3 (див. рис. 5.6):

$$H_A \cdot l_1 = Q \cdot l, \quad (5.3)$$

звідки

$$H_A = \frac{l_1}{l} Q. \quad (5.4)$$

У момент навантаження рами вантажами P_1 і P_2 противага має бути розташована на осі коливання (проти нульового поділу шкали, див. рис. 5.6).

Порядок виконання роботи

1. Установити, згідно з варіантом (табл. 5.1), гирьові підвіси для вантажів P_1 та P_2 на відповідних відстанях a_1 і a_2 .

Таблиця 5.1

Номер Варіанта	a_1 , см	a_2 , см	P_1 , Н	P_2 , Н
1	15	20	10	20
2	10	15	15	25
3	20	10	20	1,5
4	15	25	25	1,0
5	10	20	10	1,5
6	20	25	15	2,0
7	10	15	20	25
8	15	10	25	10

2. Установити противагу на нульову поділку шкали горизонтального важеля і вивести стрілку індикатора на нуль.

3. Установити задане навантаження P_1 і P_2 на гирьові підвіси.

4. Зафіксувати індикатором значення переміщення Δ_{1p} рухомої опори рами.

5. Перемістити вантаж Q вправо на відстань l_1 , при якій стрілка індикатора повернеться на нуль.

6. Визначити експериментальне значення горизонтальної опорної реакції H_A^E за формулою (5.4).

7. Обчислити теоретичне значення горизонтальної опорної реакції H_A^T за формулою (5.2).

8. Порівняти експериментальні й теоретичні значення горизонтальної опорної реакції. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta = \frac{H_A^T - H_A^E}{H_A^T} 100\% .$$

9. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Навести порядок розрахунку методом сил.

2. Що таке «основна» і «еквівалентна» системи?

3. Призначення основної та еквівалентної систем.

4. Суть канонічного рівняння.

5. Суть складових (членів) канонічного рівняння.

6. Який вигляд має дослідна установка для виконання роботи?

Лабораторна робота № 6

Визначення критичної сили стиснутого стержня

Мета роботи: теоретично й експериментально визначити величину критичної сили стиснутого стержня.

Теоретичні відомості

Для багатьох деталей машин, елементів конструкцій та споруд розрахунків на міцність і жорсткість буває недостатньо для того, щоб отримати повну уяву про їхню працездатність. Важливо також з'ясувати, чи є ця конструкція або її частина у стані стійкої рівноваги.

Під стійкістю розуміють властивість системи зберігати вихідний стан пружної рівноваги при дії зовнішніх сил.

В інженерній практиці зустрічаються випадки втрати стійкості при осьовому стиску прямолінійного стержня, довжина якого значно більша за розміри поперечного перерізу. Найменша сила, за якої стержень втрачає рівновагу (згинається), називається критичною силою і позначається $P_{кр}$.

Втрату стійкості стиснутого прямолінійного стержня називають повздовжнім згином через те, що під дією повздовжніх сил стержень значно викривиться. Поява повздовжнього згину становить небезпеку, оскільки при незначному збільшенні стискальної сили суттєво збільшуються прогини. Відповідно, пружна рівновага прямолінійного гнучкого стержня стійка, якщо стискальна сила P менша за критичну $P_{кр}$. Якщо $P = P_{кр}$, то рівновага нестійка: одночасно з прямолінійною формою стержня стає можливою і криволінійна форма за незначної зміни сили.

Критичну силу $P_{кр}$ для прямолінійного стержня із шарнірним зацмленням кінців (рис. 6.1) визначають за формулою Ейлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_{np}^2}, \quad (6.1)$$

де

$$l_{np} = \mu \cdot l, \quad (6.2)$$

E – модуль пружності;

I_{min} – найменший момент інерції перерізу;

l_{np} – приведена довжина стержня,

μ – коефіцієнт, який залежить від способу закріплення;

l – фактична довжина стержня.

Критична сила залежить не тільки від розмірів l_{np} , I_{min} і матеріалу E стержня, але і від способу його закріплення.

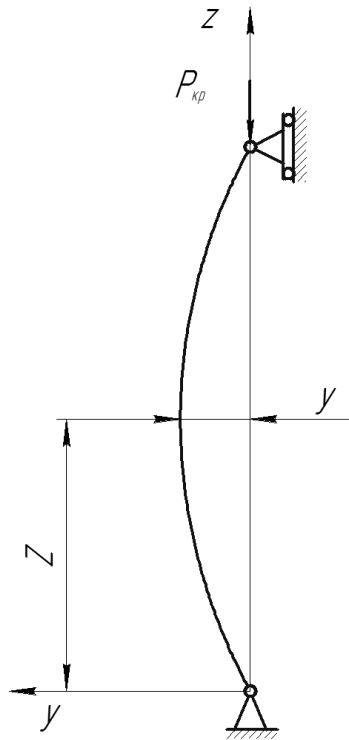


Рисунок 6.1 – Схема прямолінійного стержня із шарнірним зацмленням кінців

На рис. 6.2 показано декілька способів закріплення стержня і вказані відповідні їм значення коефіцієнта μ .

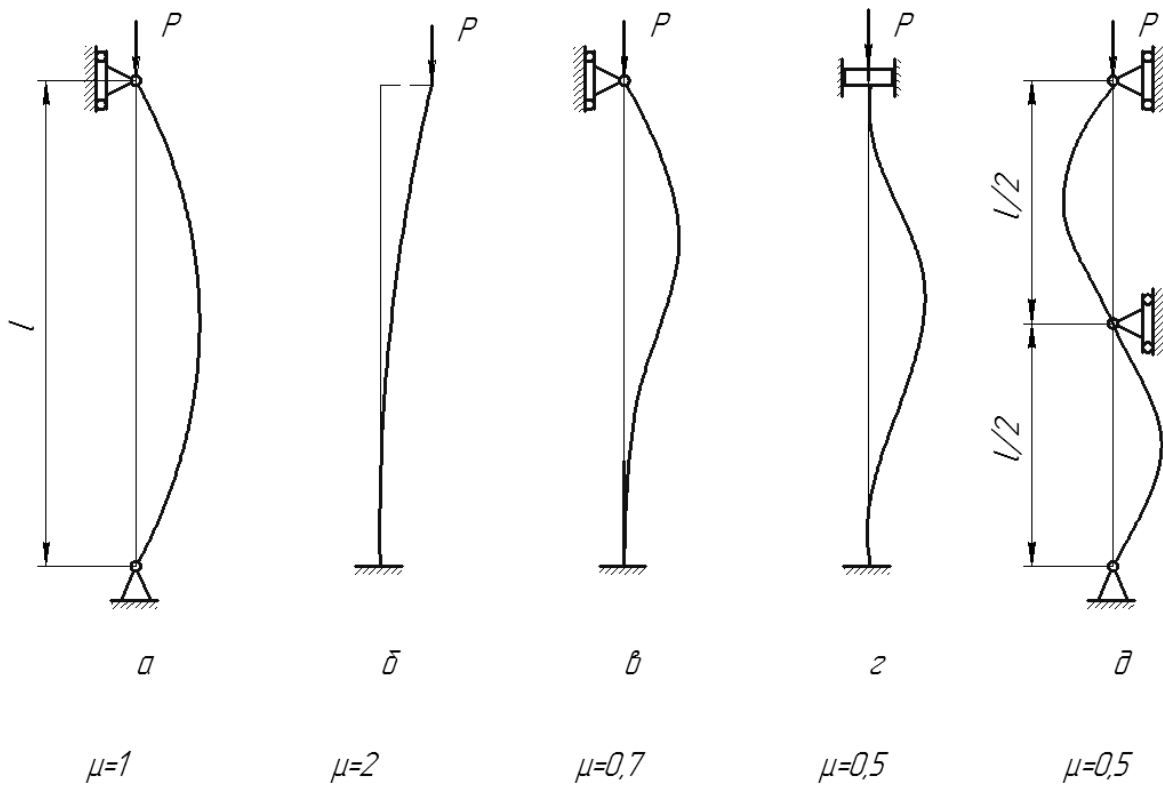


Рисунок 6.2 – Способи закріплення стержня

Формула (8.1) застосовується, якщо гнучкість стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ не менша за її граничне значення $\lambda_{np} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{nc}}}$, яке залежить від механічних властивостей матеріалу (тут $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – мінімальний радіус інерції перерізу стержня; σ_{nc} – границя пропорційності матеріалу). При гнучкості $\lambda < \lambda_{np}$ ця формула не застосовується, оскільки у волокнах стержня при його втраті стійкості напруження перевищуватимуть границю пропорційності – такі стержні можуть втрачати стійкість за наявності пластичних деформацій або одразу руйнуватись без викривлення.

Опис установки

Загальний вигляд експериментальної установки показаний на рис. 6.3. Експериментальна установка складається з корпусу 1 (рис. 6.4), який за допомогою двох гвинтів 7 кріпиться до нижньої плити преса ПМТ-125, при цьому необхідно забезпечити збіг осі досліджуваного стержня 3 й осі преса. Верхня частина стержня фіксується за допомогою матриці, прикріпленої до верхньої плити преса 6. На стояку 5 за допомогою стандартного приладу кріпиться індикатор, що дозволяє визначити прогин стержня при стиску.



Рисунок 6.3 – Експериментальна установка

Порядок виконання роботи

1. Прикріпити корпус 1 (рис. 6.4) експериментальної установки за допомогою гвинтів 7 до нижньої плити преса, забезпечити збіг осі досліджуваного стержня 3 і осі преса.

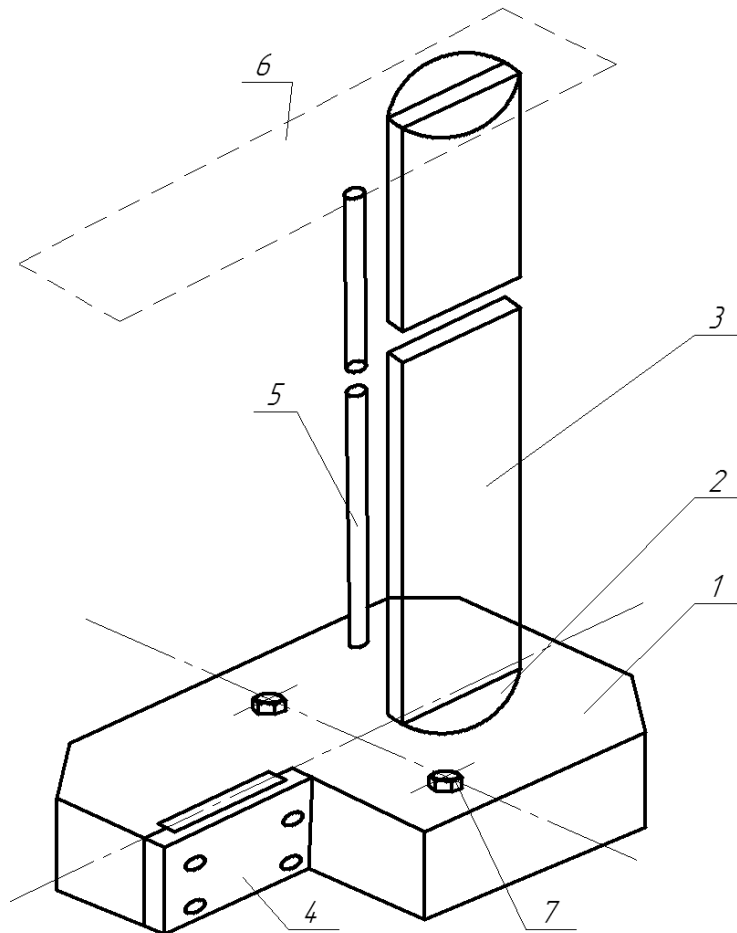


Рисунок 6.4 – Схема експериментальної установки

2. Закріпити індикатор (див. рис. 6.3) на стійці експериментальної установки на висоті $h \approx 0,4$ м. Ніжка індикатора має торкатися стержня.

3. Навантажити стержень. Навантаження виконують повільно і плавно. Безперервно слідкують за зростанням навантаження і показниками індикатора. Навантаження при різкому збільшенні прогину відповідає критичному значенню стисної сили. При досягненні критичної сили навантаження припиняють.

4. Занести результат спостереження, тобто експериментальне значення $P_{кр}^E$, у табл. 6.1.

5. Провести розрахунок значень $A, I_{min}, i_{min}, l_{np}, \lambda, P_{кр}^T$.

6. Занести результати значень $E, l, a \times b, A, I_{min}, i_{min}, \mu, l_{np}, \lambda, P_{кр}^T$ у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Показники	Результати спостереження й розрахунку
Матеріал	Сталь Ст. 3
Модуль пружності E , Мпа	
Довжина стержня l , см	
Розміри поперечного перерізу стержня $a \times b$, см	
Площа поперечного перерізу стержня A , см ²	
Мінімальний момент інерції перерізу стержня I_{min} , см ⁴	
Радіус інерції перерізу i_{min} , см	
Коефіцієнт зведення довжини μ	
Зведена довжина стержня l_{np} , см	
Гнучкість λ	
Значення критичної сили, Н: експериментальне $P_{кр}^T$ теоретичне $P_{кр}^E$	

7. Порівняти результати дослідження. Визначити відносну похибку:

$$\Delta = \frac{|P_{кр}^T - P_{кр}^E|}{P_{кр}^T} \cdot 100 \%$$

8. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Що розуміється під стійкістю?
2. У чому полягає явище втрати стійкості?
3. Навести приклади втрати стійкості з інженерної практики.
4. Що називається критичною силою?
5. Як розрахувати критичну силу?
6. Що називається гнучкістю стержня?
7. Що таке зведена довжина стержня, коефіцієнт зведення довжини?
8. За яких умов можливе використання формули Ейлера?

Лабораторна робота № 7

Визначення прогину балки при ударному навантаженні

Мета роботи: теоретично й експериментально визначити величину прогину балки при ударному навантаженні.

Теоретичні відомості

Розглянемо шарнірно оперту балку з прогоном l , яка зазнає посередині прогону удару від вантажу вагою P , що падає з висоти h . Прогин δ_d при ударному навантаженні, з урахуванням маси балки, визначається за формулою:

$$\delta_d = \delta_c + \sqrt{\delta_c^2 + \frac{2h\delta_c}{1 + k_{36} \frac{Q}{P}}}, \quad (7.1)$$

де δ_c – прогин балки при статичному навантаженні силою, що дорівнює вазі падаючого вантажу;

Q – вага балки;

k_{36} – коефіцієнт зведення маси балки до точки удару.

Формулу (7.1) можна подати у вигляді:

$$\delta_d = k_d \delta_c, \quad (7.2)$$

де k_d – коефіцієнт динамічності:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_c (1 + k_{36} \frac{Q}{P})}}, \quad (7.3)$$

При падінні вантажу на балку посередині прогону $k_{36} = \frac{17}{35}$.

Коефіцієнт динамічності без урахування зведеної маси балки має вигляд:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_c}}.$$

Опис установки

Загальний вигляд експериментальної установки показано на рис. 7.1. Установка (рис. 7.2) складається з таких основних частин: балки 5, яка оперта на стійки 3 і 13, основи 2 з регульованими гвинтами-ніжками 1, пульту управління 4, стійки 15 з індикатором годинникового типу 14 та штанги 7 з електромагнітом 10 і мікрометричним гвинтом 6.

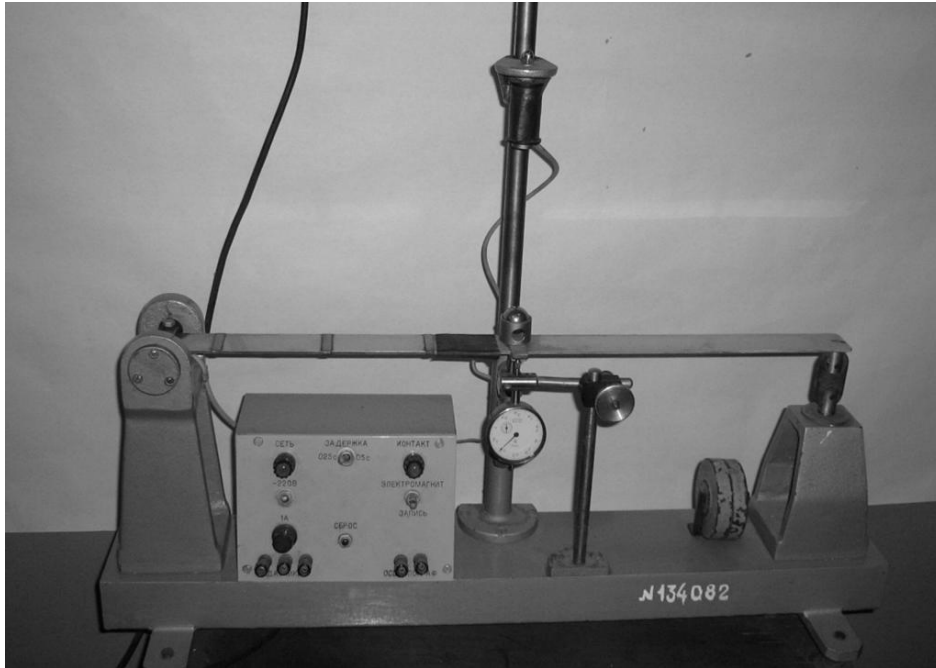


Рисунок 7.1 – Установка для визначення величини прогину балки при ударному навантаженні

Електромагніт 10 призначений для утримання падаючого вантажу 11 на потрібній висоті h . Як вантаж використовують кульку вагою $P = 0,67 \text{ Н}$. Електромагніт 10 установлений на кронштейні 9, який може переміщуватися вздовж штанги 7 з відліком величини переміщення за шкалою. Гвинт 8 призначений для надійної фіксації кронштейна з електромагнітом до штанги 7.

При знеструмленні електромагніта кулька падає на балку. Для попередження можливості відскоку кульки, балка оснащена спеціальним уловлювачем 12, внутрішня поверхня якого виконана конусом, щоб забезпечити заклинювання кульки, що впала.

Прогин балки при статичному навантаженні визначають за допомогою індикатора годинникового типу 15. Прогин балки при динамічному навантаженні визначають за допомогою мікрометричного гвинта 6.

Балка прямокутного перерізу (висота перерізу 3 мм, ширина перерізу 40 мм) виготовлена зі сталі марки 65Г. Вага балки $Q = 70 \text{ Н}$.

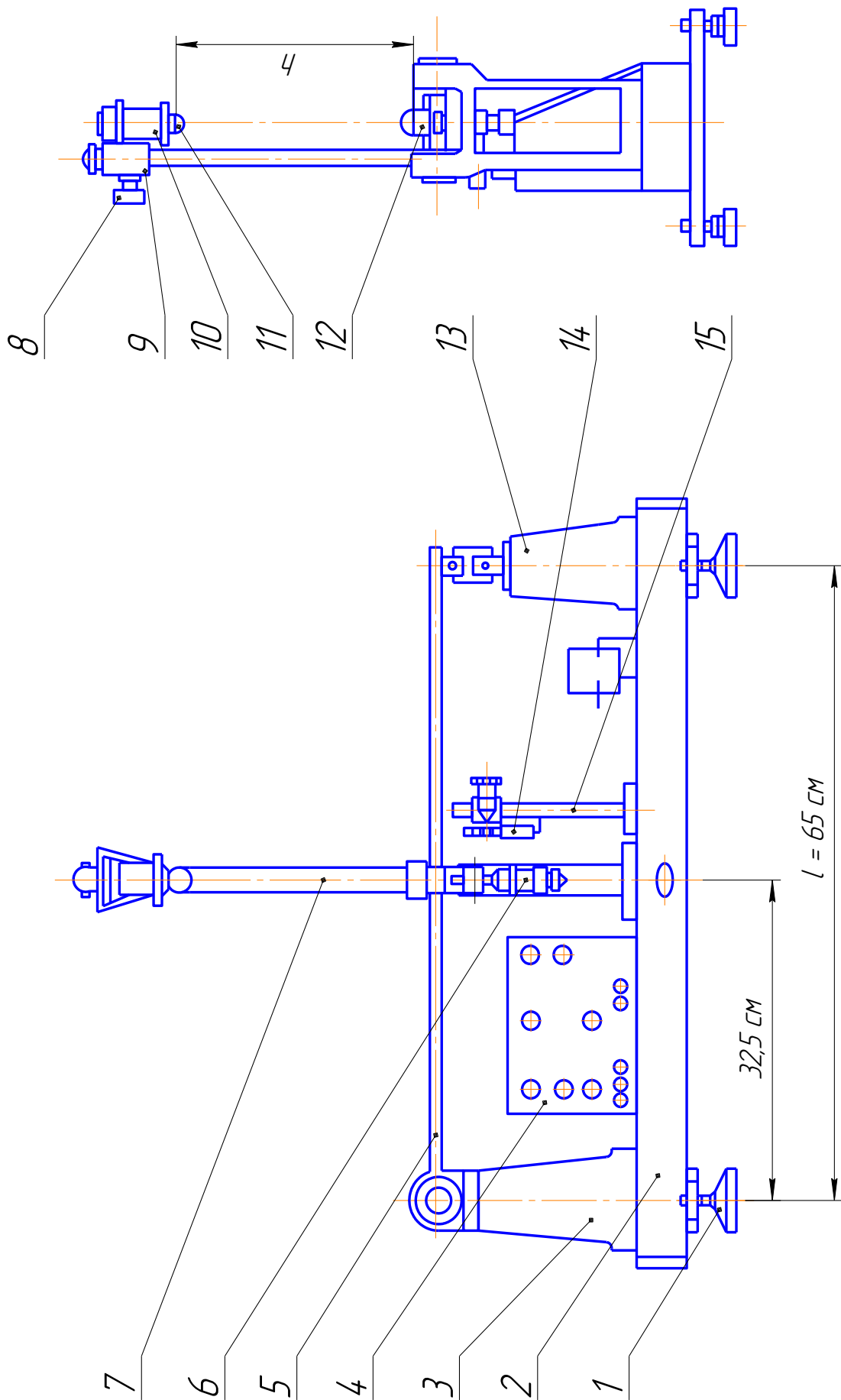


Рисунок 7.2 – Схема установки для визначення величини прогину балки при ударному навантаженні

Порядок виконання роботи

1. Закріпити кронштейн 9 (див. рис. 7.2) з електромагнітом 10 до штанги 7 для забезпечення падіння вантажу з висоти h , відповідно до варіанта (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Показник	Номер варіанта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
h , см	12	14	16	18	20	22	24	26

2. Визначити експериментальне значення прогину балки при статичному навантаженні δ_c^E . Для цього встановити на кронштейні 15 індикатор 14 так, щоб рухома його ніжка торкалась балки знизу. Установити стрілку індикатора на нуль. Потім обережно покласти кульку 11 в уловлювач 12. Балка під дією вантажу прогнеться. Занести покази індикатора у табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Висота h , см	Значення					
	експериментальні			теоретичні		
	δ_c^E , мм	δ_d^E , мм	k_d^E	δ_c^T , см	δ_d^T , см	k_d^T

3. Увімкнути пульт управління в мережу змінного струму напругою 220 В, частотою 50 Гц та увімкнути тумблер «220 В».

4. Поставити тумблер «Електромагніт–Запис» у положення «Електромагніт».

5. Піднести кульку 11 до електромагніта 10 та переконатися, що вона надійно тримається в гнізді сердечника електромагніта.

6. Поставити тумблер «Електромагніт–Запис» у положення «Запис». Кулька 11 під дією ваги має падати в уловлювач 12.

7. Визначити експериментально значення прогину балки при динамічному навантаженні δ_d^E . Прогин при динамічному навантаженні визначається за допомогою мікрометричного гвинта 6 з ціною поділки 0,01 мм після моменту контакту торця гвинта з прогнутою балкою 5 у момент удару кульки. Мікрометричний гвинт потрібно відрегулювати так, щоб при динамічному навантаженні балка не гальмувалась ним, а лише торкнулась. У такому разі загориться лампочка «Контакт», яка дає сигнал моменту контакту балки з мікрометричним гвинтом. Різниця першого і наступного показників (у момент удару) мікрометричного гвинта дає значення прогину балки при динамічному навантаженні δ_d^E . Занести значення δ_d^E у табл. 7.2.

8. Обчислити і занести в табл. 7.2 експериментальне значення коефіцієнта динамічності $k_D^E = \frac{\delta_D^E}{\delta_C^E}$.

9. Обчислити і занести в табл. 7.2 теоретичне значення прогину балки при статичному навантаженні δ_C^T :

$$\delta_C^T = \frac{Pl^3}{48EI_z},$$

де l – довжина балки;

E – модуль пружності матеріалу балки;

I_z – момент інерції площі поперечного перерізу балки.

10. Обчислити за формулою (7.3) і занести в табл. 7.2 теоретичне значення коефіцієнта динамічності k_D^T .

11. Обчислити за формулою (7.2) і занести в табл. 7.2 теоретичне значення прогину балки при динамічному навантаженні δ_D^T .

12. Порівняти експериментальні й теоретичні значення прогинів балки при статичному та ударному навантаженнях. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta_C = \frac{|\delta_C^T - \delta_C^E|}{\delta_C^T} 100\% ;$$

$$\Delta_D = \frac{|\delta_D^T - \delta_D^E|}{\delta_D^T} 100\% .$$

13. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. У чому полягає явище ударного навантаження?
2. Як визначити коефіцієнт динамічності при ударі?
3. Як визначити напруження при ударному навантаженні?
4. Як визначити переміщення при ударному навантаженні?
5. Розрахунок на удар при осьовій дії навантаження.
6. Як визначити напруження при скручувальному ударі?
7. Удар при згині. Як врахувати власну вагу балки?

Лабораторна робота № 8

Дослідження критичної швидкості обертання вала

Мета роботи: визначити теоретично і експериментально величину значення критичної частоти обертання вала.

Теоретичні відомості

Для того, щоб те чи інше тіло здатне було здійснювати коливання, воно має містити певну масу і пружність. Якщо пружне тіло (навантажена балка, скручений вал або деформована ресора) або пружна система була виведена з положення рівноваги якою-небудь сторонньою причиною (ударом або раптово прикладеною силою), то сила пружності цього тіла в новому положенні вже не зрівноважиться навантаженням і виникнуть коливання.

Колівання пружної системи характеризуються амплітудою A і частотою ω .

Амплітуда A – це максимальне відхилення механічної системи від положення рівноваги.

Частота коливань ω – це число повних коливань, які здійснюються за одиницю часу.

Знаючи частоту коливань, можна знайти період коливань T (час одного повного коливання) за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.1)$$

Величина, що обернена періоду коливань, визначає кількість коливань за одиницю часу (секунду) і має назву секундної частоти:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (8.2)$$

Прикладом пружної системи з одним ступенем вільності може бути горизонтально розміщений вал з одним диском (рис. 8.1). Відомо, що при певній частоті обертання вала, при якій робота вала стає динамічно нестійкою, настає так званий резонанс. При цьому можуть виникати великі поперечні коливання вала. Частота обертання вала, при якій настає резонанс, називається критичною.

Розглянемо обертання горизонтально розміщеного вала з одним диском вагою Q посередині (рис. 8.1). При визначенні критичної швидкості обертання вала його масою порівняно з масою диска знехтуємо.

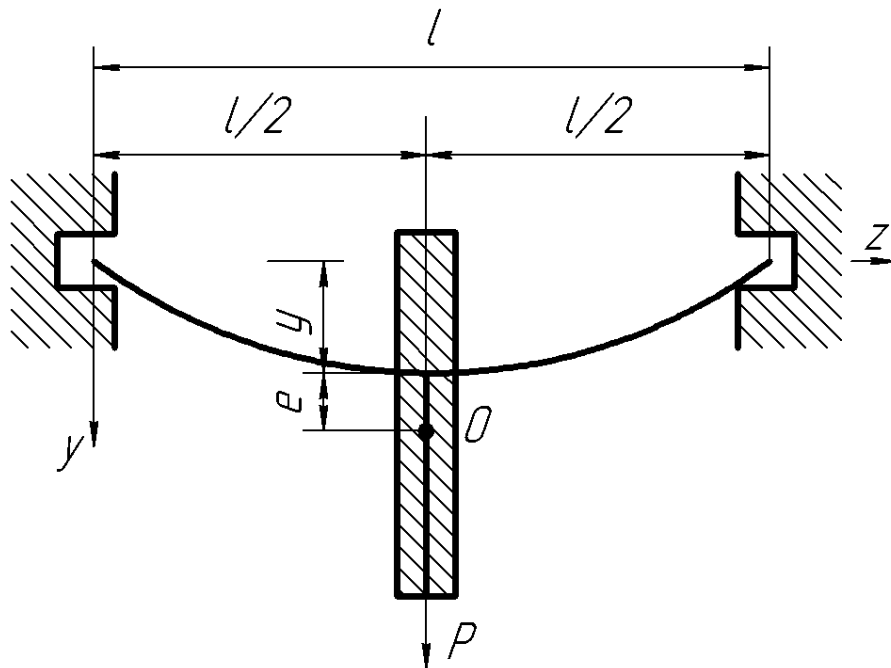


Рисунок 8.1 – Схема пружної системи з одним ступенем вільності

Припустимо, що центр ваги O диска розміщений на відстані e від його осі. При обертанні такої системи на вал буде діяти відцентрова сила, що спричиняє його згинання:

$$P = \frac{Q}{g} \omega^2 (e + y), \quad (8.3)$$

де Q – вага диска;

g – прискорення вільного падіння;

ω – кутова швидкість обертання вала;

e – ексцентриситет;

y – прогин вала в перерізі, де насаджений диск.

Реакція на опорах вала від дії відцентрової сили:

$$F = cy, \quad (8.4)$$

де c – згинальна жорсткість вала.

З умови рівноваги системи очевидно, що $P = F$. Підставляючи замість P вираз F отримуємо рівняння для визначення прогину y :

$$\frac{Q}{g} \omega^2 (e + y) = cy, \quad (8.5)$$

звідки

$$y = \frac{e}{\frac{cg}{Q\omega^2} - 1}. \quad (8.6)$$

Ураховуючи, що

$$\frac{cg}{Q} = \omega_g^2,$$

рівняння (10.6) запишемо так:

$$y = \frac{e}{\frac{\omega_g^2}{\omega^2} - 1}, \quad (8.7)$$

де ω_g – частота власних поперечних коливань системи.

З рівняння (8.7) видно, що прогин вала y швидко зростає при наближенні кутової швидкості обертання вала ω до частоти ω_g власних поперечних коливань вала з диском. Критична кутова швидкість обертання вала:

$$\omega_{кр} = \omega_g = \sqrt{\frac{cg}{Q}}. \quad (8.8)$$

Для вала постійного перерізу при розміщенні диска посередині між опорами (рис. 8.2) згинальна жорсткість вала c визначається за формулою:

$$c = \frac{48EI_z}{l^3}, \quad (8.9)$$

де E – модуль пружності матеріалу вала;

$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ – момент інерції вала;

l – довжина вала між опорами (див. рис. 8.1).

Підставляючи (8.9) у (8.8) отримуємо:

$$\omega_{кр} = \omega_g = \sqrt{\frac{48EI_z g}{Ql^3}}, \quad (8.10)$$

звідки

$$\omega_{кр} = \omega_g = \sqrt{\frac{g}{\delta_c}}, \quad (8.11)$$

де $\delta_C = \frac{Ql^3}{48EI_z}$ – статичний прогин вала в перерізі, де закріплений диск,

під дією ваги диска.

Відомо, що кутова швидкість обертання вала ω з частотою обертання вала n зв'язана такою залежністю:

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

звідки

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Критична частота обертання вала

$$n_{кр} = \frac{30\omega_{кр}}{\pi}. \quad (8.12)$$

Підставляючи (8.11) у (8.12) отримуємо

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_c}} \quad (8.13)$$

або

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{48EI_z g}{Ql^3}}. \quad (8.14)$$

Опис установки

Загальний вигляд установки показано на рис. 8.2. Установка складається з вала 1 (рис. 8.3) діаметром d , який встановлено на двох опорах 4. Відстань між опорами, тобто довжина вала, дорівнює l . На вал посередині насаджено диск 2 вагою Q . Вал з'єднується з валом електродвигуна 7 за допомогою муфти 3. Реостат 5 слугує для регулювання частоти обертання вала. Тахометр 6, який встановлений на вільному кінці вала 1, слугує для контролю частоти обертання вала.

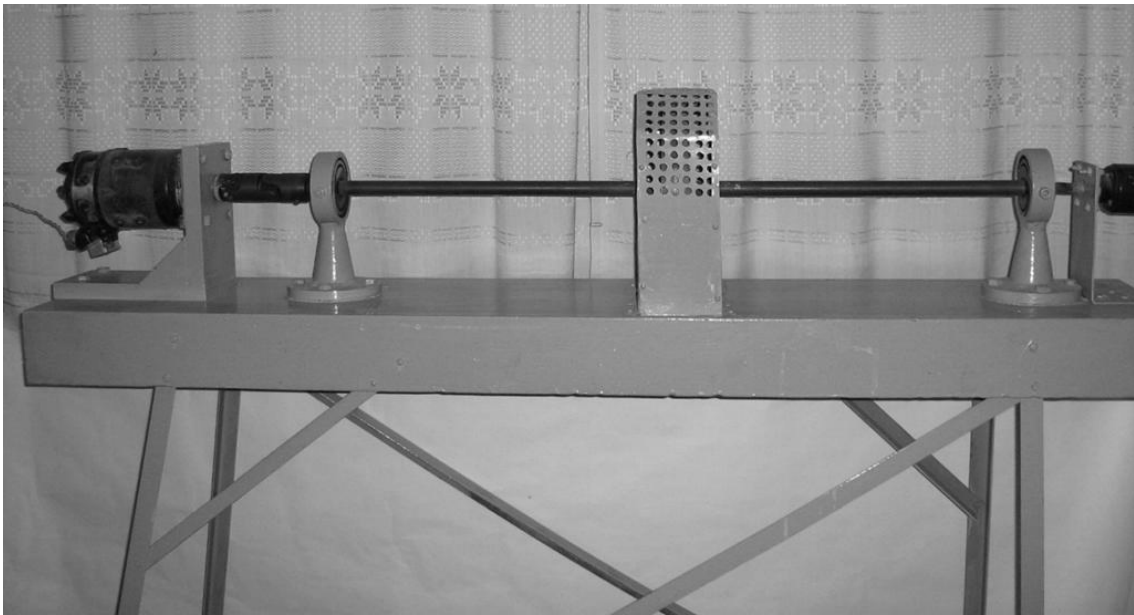


Рисунок 8.2 – Установка для визначення величини значення критичної частоти обертання вала

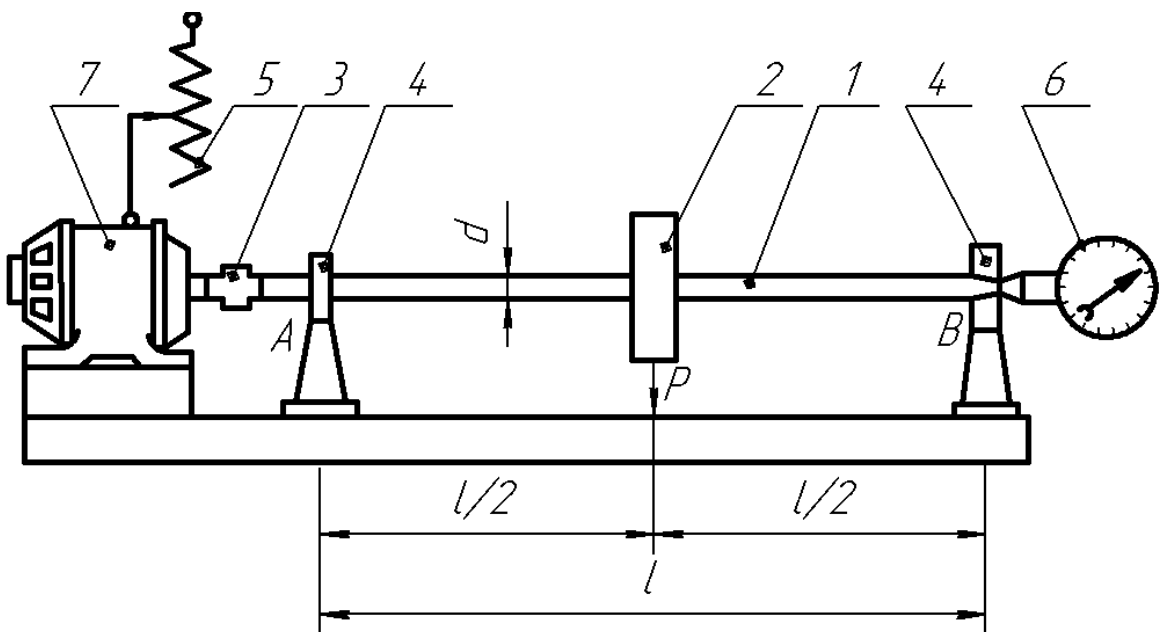


Рисунок 8.3 – Схема установки для визначення величини значення критичної частоти обертання вала

Реостатом 5 (рис. 8.3) поступово збільшують частоту обертання вала. При цьому вал, який працює без видимих поперечних коливань, починає коливатися. Коли частота обертання вала дорівнює частоті власних коливань вала з вантажем ($\omega = \omega_0$), амплітуда коливань досягає максимальної величини. З подальшим збільшенням числа обертів n (вище критичного) амплітуда коливань зменшується, і вал знову працює спокійно.

Порядок виконання роботи

1. Виміряти діаметр d і довжину вала l .
2. Обчислити за формулою (8.14) теоретичне значення критичної частоти обертання вала $n_{кр}^T$.
3. Увімкнути установку і за допомогою ручки реостата довести частоту обертання вала до критичного $n_{кр}^E$.
4. Зафіксувати тахометром при появі резонансу вала значення критичної частоти $n_{кр}^E$.
5. Зменшити частоту обертання вала до нуля і вимкнути установку.
6. Порівняти теоретичне й експериментальне значення критичної частоти обертання вала.
Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta = \frac{|n_{кр}^T - n_{кр}^E|}{n_{кр}^T} 100\% .$$

7. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Навести приклад пружної механічної системи.
2. Дати визначення характеристик коливань (амплітуда та частота).
3. Як визначається період коливань?
4. Класи коливальних процесів.
5. Типи можливих коливань.
6. Залежність між частотою і періодом коливань.
7. Частота власних коливань пружної системи.
8. Змушені коливання пружних систем з одним ступенем вільності.
9. Пояснити явище резонансу.

Лабораторна робота № 9

Дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Мета роботи: провести дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності.

Теоретичні відомості

При дії на пружну систему збурювальної сили можливий випадок співпадання частоти власних коливань системи ω_0 з частотою збурювальної сили, у результаті виникає явище резонансу.

Розглянемо пружну систему з одним ступенем вільності. Прикладом такої пружної системи може бути двоопорна балка довжиною l , на якій встановлено електродвигун на відстані a від лівої опори (рис. 9.1).

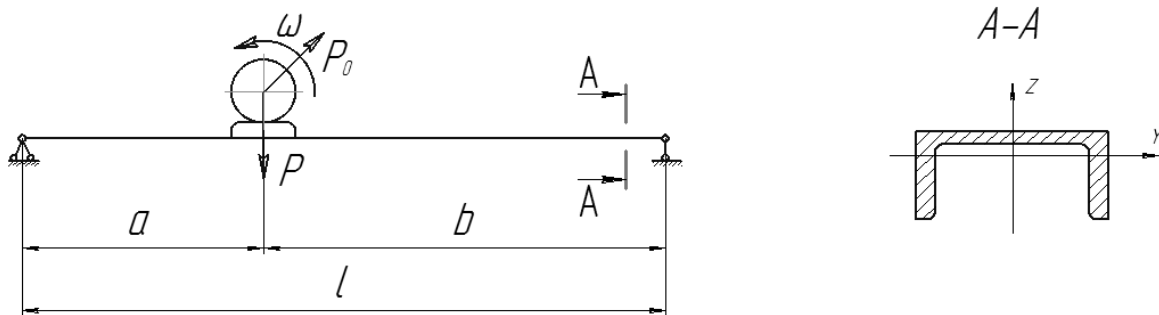


Рисунок 9.1 – Схема установки для дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Частоту власних коливань пружної системи з одним ступенем вільності, на яку діє збурювальна сила можна визначити за формулою:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_{36}}}, \quad (9.1)$$

де δ_{11} – переміщення в напрямі дії одиночної сили;

m_{36} – зведена маса пружної системи.

Зведена маса пружної системи визначається за формулою:

$$m_{36} = \frac{m + km_1}{g}, \quad (9.2)$$

де m – маса електродвигуна;

m_1 – маса балки;

k – коефіцієнт зведення маси балки до точки, де встановлений електродвигун.

Співвідношення (9.2) можна записати у вигляді

$$m_{зв} = \frac{P + kQ}{g}, \quad (9.3)$$

де P – вага електродвигуна;

Q – вага балки;

g – прискорення вільного падіння.

Коефіцієнт k для цієї пружної системи подано у табл. 9.1.

Таблиця 9.1

a/l	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	9,273	2,863	1,500	1,012	0,774	0,641	0,564	0,518	0,493	0,486

Для визначення δ_{11} будують епюру згинальних моментів від сили $\bar{P} = 1$ (рис. 9.2), яка прикладена у точці, де встановлений електродвигун.

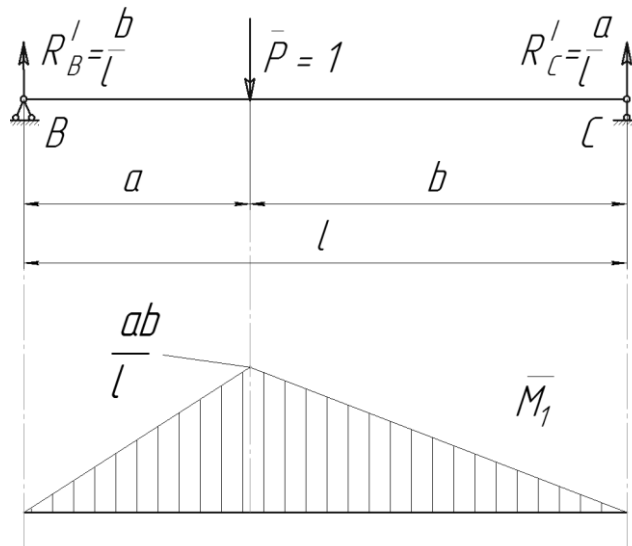


Рисунок 9.2 – Розрахункова схема і епюра від дії одиничної сили

Користуючись способом Верещагіна знайдемо переміщення від одиничного навантаження:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{1}{2} \frac{ab}{l} a \frac{2}{3} \frac{ab}{l} + \frac{1}{2} \frac{ab}{l} b \frac{2}{3} \frac{ab}{l} \right) = \frac{a^2 b^2}{3lEE_y}. \quad (9.4)$$

Підставляючи (9.3) і (9.4) в (9.1), отримаємо

$$\omega_0 = \frac{1}{ab} \sqrt{\frac{3lEE_y g}{P + kQ}}. \quad (9.5)$$

Кутова швидкість обертання вала ω з частотою обертання вала n зв'язана такою залежністю:

$$n = \frac{30\omega}{\pi}. \quad (9.6)$$

Опис установки

Загальний вигляд установки для дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності показано на рис. 9.3. Для проведення дослідження використовують балку (швелер № 12) довжиною $l = 2,5$ м, яка лежить на двох опорах, на яких закріплений на відстані a від лівої опори електродвигун з ексцентриком. Електродвигун постійного струму вмикають у мережу через автотрансформатор і випрямляч. Цим обладнанням можливо регулювати швидкість обертання електродвигуна в межах 0...2200 об/хв.

При обертанні ротора електродвигуна з насадженим на вал ексцентриком, напрям збурювальної сили P_O неперервно змінюється з кутовою частотою ω і, відповідно, її вертикальна складова викликає коливання балки у вертикальній площині. Амплітуда цих коливань значно збільшується в момент настання резонансу.



Рисунок 9.3 – Установка для дослідження коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Порядок виконання роботи

1. Установити електродвигун на заданій відстані a від лівої опори (див. рис 9.1) відповідно до варіанта (табл. 9.2).

Таблиця 9.2

Показник	Номер варіанта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a , м	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000	1,125	1,250

2. Увімкнути автотрансформатор у мережу змінного струму напругою 220 В, частотою 50 Гц. Збільшити плавно частоту обертання вала електродвигуна до настання резонансу пружної системи.

3. Зафіксувати значення критичної частоти обертання вала електродвигуна n' . Занести покази тахометра у табл. 9.3.

Таблиця 9.3

Частота обертання вала електродвигуна, об/хв			
n'	n''	$n_{кр}^E$	$n_{кр}^T$

4. Збільшити частоту обертання вала електродвигуна. Збільшення частоти обертання вала електродвигуна призводить до згасання коливань.

5. Зменшити плавно частоту обертання вала електродвигуна для повторного досягнення резонансу пружної системи.

6. Зафіксувати значення критичної частоти обертання вала електродвигуна n'' . Занести покази тахометра у табл. 9.3.

7. Зменшити частоту обертання вала електродвигуна до нуля і вимкнути автотрансформатор.

8. Обчислити і занести в табл. 9.3 експериментальне значення критичної частоти обертання вала $n_{кр}^E$

$$n_{кр}^E = \frac{n' + n''}{2}.$$

9. Обчислити за формулою (9.6) з урахуванням (9.5) і занести в табл. 9.3 теоретичне значення критичної частоти обертання вала $n_{кр}^T$.

10. Порівняти теоретичне й експериментальне значення критичної частоти обертання вала. Визначити відносну похибку проведення дослідження:

$$\Delta = \frac{|n_{кр}^T - n_{кр}^E|}{n_{кр}^T} 100\%.$$

11. Зробити висновки за результатами лабораторної роботи.

Контрольні запитання

1. Основні характеристики коливань (амплітуда і частота).
2. Які коливання називають власними?
3. Від яких характеристик пружної системи залежить частота власних коливань?
4. Пояснити явище резонансу.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	σ_{ϵ}	σ_m	τ_m	Відносне видовження δ , %, при $l=10d$	Ударна в'язкість $a_k \times 10^{-5}$ (Нм)/м ²	σ_{-1}^u	σ_{-1}^o	τ_{-1}^k		
	не менше					<i>МПа</i>				
	<i>МПа</i>									
10	340	210	140	31	24	16...22	12...15	8...12		
20	420	250	160	25	–	17...22	12...46	10...13		
25	460	280	–	23	9	19...25	–			
30	500	300	170	21	8	20...27	17...21			
35	540	320	190	20	7	22...30	17...22			
40	580	340	–	19	6	23...32	18...24			
45	610	360	220	16	5	25...34	19...25			
50	640	380	–	14	4	27...35	20...26			
55	660	390	–	13	–	–	–			
60	690	410	–	12	–	31...38	22...28			
20Г	460	280	–	24	–	–	–			
30Г	550	320	–	20	8	22...32	–			
50Г	660	400	–	13	4	29...36	–			
20Х	800	650	–	11	6	38	–			
40Х	1000	800	–	10	6	35...38	25			
45Х	1050	850	–	9	5	40...50	–			
30ХМ	950	750	–	11	8	31...41	37			
35ХМ	1000	850	390	12	8	47...51	–			
40ХН	1000	800	–	11	7	40	29			
50ХН	1100	900	–	9	5	55	–			
40ХФА	900	750	–	10	9	38...49	–			
38ХМЮА	1000	850	400	14	9	42...55	–			
12ХН3А	950	700	–	11	9	39...47	27...32			
20ХН3А	950	750	–	12	10	42...45	30...32			
30ХН3А	1000	800	–	10	8	52...70	–			
40ХНМА	1000	950	–	12	10	50...70	–			
30ХГСА	1100	850	–	10	5	51...54	50...54			

Таблиця А.2 – Модулі пружності та коефіцієнти Пуассона

Матеріал	Модуль пружності E , МПа	Модуль пружності G , МПа	Коефіцієнт Пуассона μ
Чавун сірий, білий	$(1,15\div 1,60)\cdot 10^5$	$4,5\cdot 10^4$	0,23...0,27
Ковкий чавун	$1,55\cdot 10^5$	–	–
Вуглецеві сталі.	$(2,0\div 2,1)\cdot 10^5$	$(8,0\div 8,1)\cdot 10^4$	0,24...0,28
Леговані сталі.	$(2,1\div 2,2)\cdot 10^5$	$(8,0\div 8,1)\cdot 10^4$	0,25...0,30
Мідь прокатна.	$1,1\cdot 10^5$	$4,0\cdot 10^4$	0,31...0,34
Мідь холоднотянута	$1,3\cdot 10^5$	$4,9\cdot 10^4$	–
Фосфориста бронза катана.	$1,15\cdot 10^5$	$4,2\cdot 10^4$	0,32...0,35
Латунь холоднотянута.	$(0,91\div 0,99)\cdot 10^5$	$(3,5\div 3,7)\cdot 10^4$	0,32...0,42
Корабельна латунь катана.. . . .	$1,0\cdot 10^5$	–	0,36
Алюміній катаний.	$0,69\cdot 10^5$	$(2,6\div 2,7)\cdot 10^4$	0,32...0,36
Цинк катаний.	$0,84\cdot 10^5$	$3,2\cdot 10^4$	0,27
Свинець.	$0,17\cdot 10^5$	$0,7\cdot 10^4$	0,42
Лід.	$0,1\cdot 10^5$	$(0,28\div 0,3)\cdot 10^4$	–
Скло.	$0,56\cdot 10^5$	$2,2\cdot 10^4$	0,25
Граніт.	$0,49\cdot 10^5$	–	–
Вапняк.	$0,42\cdot 10^5$	–	–
Мармур.	$0,56\cdot 10^5$	–	–
Дерево вздовж волокон.	$(0,1\div 0,12)\cdot 10^5$	$0,055\cdot 10^4$	–
Дерево поперек волокон.	$(0,05\div 0,1)\cdot 10^4$	–	–
Каучук.	$0,00008\cdot 10^5$	–	0,47
Текстоліт.	$(0,06\div 0,1)\cdot 10^5$	–	–
Гетинакс.	$(0,1\div 0,17)\cdot 10^5$	–	–
Бакеліт.	$43\cdot 10^5$	–	0,36

Таблиця А.3 – Співвідношення між числами твердості за Брінелем (НВ), Роквелом (HRC) та границею міцності (σ_{ϵ}) для сталей

Діаметр відбитка, мм	НВ, МПа	HRC	σ_{ϵ} (МПа) для сталей			
			вуглецевої	хромистої	хромо-нікелевої	хромо-молібденової
2,34	6880	65	2480	–	2340	2270
2,37	6700	64	2410	–	2280	2210
2,39	65,90	63	2370	–	2240	2180
2,42	6430	62	2310	–	2180	2120
2,45	6270	61	2260	2180	2130	2070
2,48	6110	60	2200	2130	2070	2020
2,51	5970	59	2140	2080	2020	1970
2,54	5820	58	2080	2030	1970	1920
2,57	5690	57	2050	2000	1940	1880
2,62	5470	55	1960	1910	1850	1800
2,71	5100	52	1830	1780	1730	1680
2,78	4850	50	1750	1700	1650	1600
2,85	4610	48	1650	1620	1560	1520
2,91	4410	46	1590	1540	1500	1450
2,98	4200	44	1510	1470	1430	1380
3,08	3930	42	1410	1370	1340	1300
3,14	3780	40	1360	1320	1280	1250
3,24	3540	38	1280	1240	1210	1170
3,34	3330	36	1200	1170	1130	1100
3,44	3130	34	1120	1090	1060	1030
3,52	2980	32	1070	1040	1020	980
3,62	2820	30	1020	980	960	930
3,70	2690	28	980	940	920	890
3,80	2550	26	920	890	860	840
3,90	2410	24	870	840	820	800
4,00	2290	22	820	800	780	760
4,10	2170	20	780	760	740	720
4,20	2070	18	740	720	700	680
4,26	2000	–	720	700	680	660
4,37	1900	–	680	670	650	630
4,48	1800	–	650	630	610	590
4,60	1700	–	610	590	580	560
4,74	1600	–	580	560	540	520
4,88	1500	–	540	520	510	500
5,05	1400	–	500	490	480	470
5,21	1300	–	470	450	440	430
5,42	1200	–	430	420	410	400
5,63	1100	–	400	390	380	370
5,83	1020	–	370	360	350	340

Таблиця А.4 – Значення коефіцієнта φ зниження основного допустимого напруження на стиск

Гнучкість $\lambda = \mu \cdot l / i_{\min}$	φ						
	Сталі Ст. 3 і Ст. 4	Сталь Ст. 5	Бетон		Дюралюміній	Сірий Чавун	Деревина
			важкий	легкий	Д16Т		
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	1,0	1,0	0,999	0,97	0,99
20	0,97	0,96	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,95	0,93	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,85	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,80	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,67	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,59	0,51	–	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,50	0,45	–	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	–	–	0,142	–	0,25
120	0,45	0,37	–	–	0,119	–	0,22
130	0,40	0,32	–	–	0,101	–	0,18
140	0,36	0,28	–	–	0,087	–	0,16
150	0,32	0,25	–	–	0,076	–	0,14
160	0,29	0,23	–	–	–	–	0,12
170	0,26	0,21	–	–	–	–	0,11
180	0,23	0,19	–	–	–	–	0,10
190	0,21	0,17	–	–	–	–	0,09
200	0,19	0,16	–	–	–	–	0,08

ГЛОСАРІЙ

Амплітуда коливань (**amplitude of vibrations**) – найбільший зсув пружної системи від положення статичної рівноваги.

Гнучкість стержня (**flexibility of a bar**) – здатність стержня зберігати стійкість при поздовжньому згині.

Деформація (**deformation**) – зміна форми й об'єму тіла під дією зовнішніх сил.

Епюра (**epюра**) – схематичне креслення або графік. Епюра показує розподіл величини (зусилля, напруження, деформації) при навантаженні на конструкцію.

Жорсткість (**stiffness**) – здатність тіла або конструкції чинити опір зовнішнім силам щодо деформації.

Косий згин (**slanting bend**) – вид деформації бруса, при якій силова площина не збігається ні з однією з головних центральних осей його поперечного перерізу.

Критична сила (**critical force**) – сила, що викликає поздовжній згин стержня.

Напруження (**stress**) – міра внутрішніх сил, що виникають при деформації матеріалу.

Позацентричний розтяг-стиск (**eccentric tension-compression**) – вид деформації, що виникає від дії на стрижень двох рівних і протилежно направлених поздовжніх сил, паралельних осі стержня.

Сила (**force**) – міра механічної дії.

Складний опір (**combined stress**) – деформація стержня, що виникає як результат декількох простих деформацій, що відбуваються одночасно: згин і розтяг, згин і кручення тощо.

Статично невизначена система (**statically indeterminate system**) – система, у якій кількість реакцій зв'язків більше трьох.

Стержень (**bar**) – конструктивний елемент, поперечні розміри якого малі, порівняно з довжиною.

Ударне навантаження (**impact load**) – навантаження, яке швидко змінюється.

ЛІТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Расчет на прочность деталей машин : справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1993 – 640 с.
2. Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989 – 624 с.
3. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / Огородников В. А. – К. : УМК ВО, 1989. – 152 с.
4. Огородніков В. А. Опір матеріалів з елементами теорії пластичності. Частина 1 : навч. посіб. / Огородніков В. А., Сивак І. О., Бабак М. В. – Вінниця : ВДТУ, 2001 – 100 с.
5. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Ч. 2 : лабораторний практикум / Огородніков В. А., Побережний М. І., Грушко О. В. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 89 с.
6. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. ; за ред. Г. С. Писаренка. – К. : Вища школа, 2004. – 655 с.
7. Опір матеріалів. Книга 2. Опір матеріалів : підручник / Ред. Д. В. Чернілевський. – К. : НМК ВО, 1992 – 272 с.
8. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. – К. : Наукова думка, 1975. – 704 с.
9. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / Феодосьев В. И. – М. : Наука, 1986. – 512 с.

Навчальне видання

**Огородніков Віталій Антонович
Грушко Олександр Володимирович
Архіпова Тетяна Федорівна**

МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

Лабораторний практикум

Рукопис оформила Т. Архіпова

Редактор О. Ткачук

Оригінал-макет підготував О. Ткачук

Підписано до друку 25.10.2018.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк.
Наклад 50 (1-й запуск 1–20) пр. Зам. № 2018-185.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.