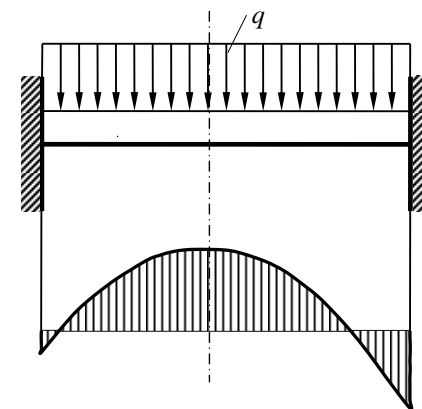


В. А. Огородніков, О. В. Грушко, Т. Ф. Архіпова

# МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**В. А. Огородніков, О. В. Грушко, Т. Ф. Архіпова**

# **МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ**

**Навчальний посібник**

Вінниця  
ВНТУ  
2018

УДК 621.9: 621.774

О-39

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 31.05.2018 р.)

Рецензенти:

**В. А. Тітов**, доктор технічних наук, професор

**В. А. Матвійчук**, доктор технічних наук, професор

**В. О. Федотов**, кандидат технічних наук, професор

**Огородніков, В. А.**

О-39      **Механіка матеріалів і конструкцій** : навчальний посібник / Огородніков В. А., Грушко О. В., Архіпова Т. Ф. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 91 с.

Навчальний посібник призначено для вивчення дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій» студентами спеціальностей: 131 – Прикладна механіка; 132 – Матеріалознавство; 133 – Галузеве машинобудування; 255 – Озброєння та військова техніка факультету машинобудування та транспорту.

У навчальному посібнику викладено короткі теоретичні відомості курсу «Механіка матеріалів і конструкцій» і наведено приклади щодо виконання контрольних робіт та розрахунково-графічних завдань.

**УДК 621.9: 621.774**

© ВНТУ, 2018

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 МЕТА І ЗМІСТ КУРСУ «МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ» .....	6
2 ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ПАСПОРТ МАТЕРІАЛУ .....	9
2.1 Крива течії матеріалу .....	9
2.2 Порядок виконання завдання .....	12
2.3 Діаграма пластичності матеріалу .....	12
2.4 Порядок побудови діаграм пластичності .....	14
Контрольні запитання .....	14
3 ТОНКІ ПЛАСТИНКИ ТА ОБОЛОНКИ .....	15
3.1 Безмоментна теорія оболонок.....	15
3.1.1 Розрахунки осесиметричних оболонок за безмоментною теорією .....	16
3.2 Знаходження напружень та переміщень у круглих пластинках .....	20
3.3 Розрахунок пластин за межами пружності.....	23
3.4 Контрольна робота № 1. Приклад розрахунку циліндричної посудини (оболонки) .....	24
3.5 Контрольна робота № 2. Розрахунок пластин.....	27
Контрольні запитання .....	29
4 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ. ФЕНОМЕНОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МІЦНОСТІ ТА ДЕФОРМІВНОСТІ .....	30
4.1 Тензор напружень .....	30
4.2 Головні напруження і головні площадки .....	32
4.3 Шаровий тензор і девіатор напружень .....	33
4.4 Диференціальні рівняння рівноваги .....	35
4.5 Плоский напружений стан .....	37
4.6 Розрахункове завдання з прикладом розрахунку: напружений стан у точці .....	38
Контрольні запитання .....	44
5 РОЗРАХУНКИ ЗА МЕЖАМИ ПРУЖНОСТІ.....	45
5.1 Розрахунки за межами пружності в умовах розтягу-стиску статично невизначених систем.....	45
5.2 Граничний стан при крученні вала за межами пружності .....	48

5.3	Граничний стан балок при згині за межами пружності .....	49
5.4	Приклади розрахунків за межами пружності. Контрольна робота.....	51
	Контрольні питання.....	54
6	РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНА РОБОТА .....	55
6.1	Розрахунок вала на витривалість при згині та крученні.....	55
6.2	Приклад виконання розрахунково-графічного завдання.....	57
6.3	Обчислення коефіцієнта запасу.....	61
	Контрольні запитання .....	62
7	РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ.....	63
7.1	Основні теоретичні відомості .....	63
7.1.1	Загальні поняття.....	63
7.1.2	Види динамічних навантажень .....	63
7.1.3	Постійне динамічне навантаження .....	63
7.1.4	Ударне навантаження.....	64
7.1.5	Повторно-змінне навантаження. Коливання .....	67
7.1.5.1	Поздовжні і поперечні коливання.....	68
7.1.5.2	Крутильні коливання.....	68
7.2	Розрахунково-графічне завдання «Розрахунок балки при ударному навантаженні» .....	69
7.3	Розрахунок упорного підшипника .....	75
	Контрольні запитання .....	76
	ЛІТЕРАТУРА.....	77
	Додаток А Титульна сторінка РГЗ.....	78
	Додаток Б Розмірності величин .....	79
	Додаток В Експериментальні дані для побудови кривої течії .....	80
	Додаток Г Експериментальні дані для побудови діаграми пластичності .....	88
	Додаток Д Значення коефіцієнтів концентрації напружень при згині та крученні.....	90

## ВСТУП

Охоплюючи весь світ, тенденція підвищення якості стосується, насамперед, машинобудівної продукції. У зв'язку із розширенням мережі спеціальностей, в основу яких покладено інформаційні технології, стрімко зростає роль дисциплін міцнісного циклу, за допомогою яких оцінюють міцність, жорсткість і стійкість матеріалів. Поява нових конструкцій машин аграрного напрямку, автомобілебудування й інших галузей машинобудівного виробництва спричинила необхідність діагностування як матеріалів, з яких вони виготовлені, так і самих конструкцій, з погляду їхньої якості, надійності, міцності, жорсткості та стійкості.

Навчальний посібник призначено, головним чином, для студентів машинобудівних спеціальностей 131 – Прикладна механіка, 132 – Матеріалознавство, 133 – Галузеве машинобудування, а також магістрів, аспірантів що навчаються за спеціальностями: «Матеріалознавство в машинобудуванні», «Обробка металів тиском», «Діагностика матеріалів і конструкцій».

Матеріали навчального посібника викладені за розділами: розрахунки за межами пружності; експериментальна механіка машин; динамічні навантаження; тонкостінні оболонки; повторно-змінні навантаження; теорія напруженого стану; розрахунок пластин у пружній площині, а також за межами пружності, які мало описані у традиційних курсах міцнісного циклу. Це пов'язано, перш за все, не тільки з інтересами авторів, але і з необхідністю дати студентам глибші сучасні знання про механічні властивості матеріалів за межами пружності, уміння формувати за допомогою експериментальної механіки машин технологічний паспорт матеріалу.

# 1 МЕТА І ЗМІСТ КУРСУ «МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ»

Вирішення сучасних складних проблем міцності деталей машин та елементів конструкцій, які працюють в екстремальних умовах, потребують залучення знань, що ґрунтуються на великій кількості дисциплін, в основу яких покладені розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість. Це дозволяє на стадії проектування нової техніки обґрунтовано знизити матеріаломісткість конструкції в зонах підвищеної термосилової навантаженості (зонах концентрації напружень), а також оптимізувати процес проектування технологічних процесів формоутворення.

Вирішення проблеми підвищення ресурсу та надійності машин з одночасним зниженням їхньої металоємності можливо тільки за наявності висококваліфікованих інженерних кадрів, які досконало володіють сучасними методами розрахунку на міцність, жорсткість, стійкість, у тому числі і при змінних навантаженнях.

Дисципліна «Механіка матеріалів і конструкцій» формує у студентів знання з методів розв'язку актуальних інженерних задач по несучій спроможності багато навантажених елементів конструкції та технологічних проблем формоутворення сучасного машинобудування.

Вивчаючи названу дисципліну, студент має знати основні теоретичні та експериментальні методи досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкції за межами пружності та з урахуванням довготривалості їхньої експлуатації в умовах термосилового навантаження (деформування). При цьому він має мати навички з розв'язку актуальних конструкторських і технологічних задач, які виникають в інженерній практиці на стадії проектування виробів нової техніки, що працюють в екстремальних умовах з метою обґрунтованого зменшення їхньої матеріаломісткості за достатньої експлуатаційної надійності.

Мета та головне завдання курсу «Механіка матеріалів і конструкцій» – показати студентам сфери та форми застосування багатьох теоретичних знань, що здобуті раніше з опору матеріалів, матеріалознавства та технології конструкційних матеріалів, навчити застосовувати ці знання для розв'язання конкретних практичних задач. У процесі навчання студент здобуває знання із сучасних досліджень у галузі феноменологічних принципів, які покладені в основу розрахунків елементів конструкцій на міцність, жорсткість, стійкість, вміння самостійного пошуку доцільних підходів щодо аналізу критеріїв працездатності деталей, які розраховуються, та складання розрахункових схем. Навчитися ефективно використовувати необхідний математичний апарат, обчислювальну техніку та прилади у дослідженнях з феноменологічної міцності, а також розв'язувати практичні задачі, що пов'язані з розрахунками виробів на міцність, жорсткість і стійкість.

Метою викладання частин курсу «Механіка матеріалів і конструкцій» «Фізичні основи міцності» та «Механіка руйнувань» є набування студентами: знань закономірностей фізичних основ міцності та механіки руйнування матеріалів і елементів конструкцій; уміння проводити оцінювання міцності матеріалів та елементів конструкцій з урахуванням наявних дефектів (дислокацій, тріщин тощо); навичок у вирішенні проблем міцності, які пов'язані з наявністю дефектів у металі.

Зміст дисципліни – основи методів розрахунків на міцність та довговічність при пружно-пластичному деформуванні та умовах повзучості; сучасні теореми та закони теорії пластичності; векторне зображення процесу навантаження в точці тіла, що деформується; основні феноменологічні теорії пластичності; основні методи розв'язання крайових задач; сучасні моделі твердого деформованого тіла; руйнування матеріалів при повзучості.

Зміст розділу «Феноменологічні основи міцності та деформує мості» дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій»: ідеалізація структури і фізико-механічних властивостей матеріалів як основи феноменологічного підходу до методології розрахунків; сучасні моделі тіл, що деформуються; класичні критерії міцності при складному напруженому стані; критерії Кулона-Мора, Чужинського-Ягна, Міролюбова, Баландіна; теорія Фрідмана-Давіденкова; критерії деформуємості при великих пластичних деформаціях (критерії Смірнова-Аляєва, Колмогорова, Деля, Огороднікова). Приклади використання моделей властивостей і критеріїв міцності та деформуємості наведено в розрахунках.

Курс «Механіка матеріалів і конструкцій» базується на знаннях, які здобуті студентом при вивченні загальної фізики, вищої математики, інженерної графіки, теоретичної механіки, опору матеріалів та інших курсів. Але на відміну від інших спецкурсів, у яких розглядаються теоретичні основи розрахунків напружено-деформованого стану елементів конструкції, методологія та відповідні алгоритми, цей курс передбачає вивчення загальних підходів формулювання рівнянь стану з урахуванням моделей структури і властивостей матеріалу, що прийняті заздалегідь і науково обгрунтовані. Тут на першому плані постають питання, що пов'язані з обгрунтуванням вибору критеріїв несучої здатності елементів конструкцій у зв'язку з характером навантаження та особливостями їхньої експлуатації. Окремі розділи присвячені питанням оцінки довготривалості конструкцій, впливу нестационарності режиму механічних навантажень. Теоретичні положення ілюструються прикладами з історії техніки та сучасного досвіду розрахункових робіт, а також виконанням конкретних розрахунків. Усі розділи «Механіки матеріалів і конструкцій» викладено з позицій провідної ролі інженера у забезпеченні високих техніко-економічних показників, що проектуються.

Міцність матеріалу конструкції має фізичну основу, як і всі інші механічні властивості матеріалів. Фахівець, який добре володіє дисципліною



«Механіка матеріалів і конструкцій», мусить знати глибокі фізичні основи міцності, причини, які призводять до зниження і руйнування конструкційних матеріалів, зокрема в результаті виникнення і розвитку тріщин. Тому ці питання розглядаються в частинах дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій», які мають назву «Фізичні основи міцності» та «Механіка руйнувань». Матеріал цих частин базується на раніше засвоєних дисциплінах: математиці, фізиці, матеріалознавстві, теорії пружності, теорії пластичності та повзучості.

Курс «Механіка матеріалів і конструкцій» опирається на дисципліни «Вища математика», «Фізика» (розділ «Механіка»), «Теоретична механіка», теорія пластичності, матеріалознавство.

Програмою курсу передбачено: лекції, лабораторний практикум, практичні роботи, розрахунково-графічні роботи, самостійна робота, поточний контроль, іспит.

## 2 ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ПАСПОРТ МАТЕРІАЛУ

### 2.1 Крива течії матеріалу

При проектуванні операцій пластичного формоутворення деталей з листових матеріалів і прогнозуванні руйнування металів з допомогою САПР, використовується кінцево-елементний підхід, що потребує інформацію про характер кривих течії в області великих деформацій [1–7]. Крім того, криві течії необхідні для проектування операцій обробки металів тиском. Оскільки експериментально такі залежності одержати практично неможливо, то більшість досліджень в цій галузі зводиться до екстраполяції кривих течії в область великих деформацій з використанням поширених в обробці тиском рівнянь апроксимації.

У теорії обробки металів тиском часто застосовують рівняння кривої течії Свіфта або М. М. Малініна [3]:

$$\sigma_u = A(e + \varepsilon_u)^n; \quad (2.1)$$

$$\sigma_u = A\varepsilon_u^n, \quad (2.2)$$

де  $\sigma_u$  – інтенсивність напружень,  $\varepsilon_u$  – інтенсивність деформацій,  $A$ ,  $n$  – коефіцієнти апроксимації кривої течії матеріалу.

Наведена крива в координатах  $\sigma_u$  – інтенсивність напружень,  $\varepsilon_u$  – інтенсивність деформацій не залежить від виду навантаження і виду напруженого стану, вона визначається лише властивостями матеріалу (гіпотеза про єдину криву течії).

Експериментальні дані для побудови кривої течії можуть бути одержані за допомогою випробувань матеріалів на осьовий стиск. Як вихідні приймаємо значення інтенсивності напружень, що можуть бути розраховані за формулами (2.3) або (2.4):

$$\sigma_u = \frac{4P}{\pi d_i^2}; \quad (2.3)$$

$$\sigma_u = \frac{4P}{\pi d_0^2 \frac{h_0}{h_i}}, \quad (2.4)$$

де  $d_0$  і  $d_i$  – діаметри зразка до і в процесі осадження;  $h_0$ ,  $h_i$  – висота зразка до і в процесі осадження.

Крім того, інтенсивність деформацій розраховується за формулою [3]

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}, \quad (2.5)$$

де  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , – головні деформації.

В умовах одноосного стиску інтенсивність деформацій розраховується за формулами:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = 2 \ln \frac{d_0}{d_i}; \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = \ln \frac{A_0}{A_i}; \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 = \ln \frac{H_0}{H_i}, \quad (2.8)$$

де  $d_0, A_0, H_0, d_i, A_i, H_i$  – діаметр, площа і висота зразка до і в процесі осадження.

Таким чином, як експериментальні дані використовують  $\sigma_u$  і  $\varepsilon_u$  (див. додаток В), отримані для сталі 38Х2МЮА, 30Х3МФА. Експериментальні дані для отримання кривих течії взяті у власних роботах [1, 8, 13, 14, 16] або в роботах [2, 4, 5].

Нехай ми бажаємо апроксимувати криву течії формулою (2.2).

Прологарифмуємо вираз

$$\ln \sigma_u = \ln A + n \cdot \ln \varepsilon_u \quad (2.9)$$

знайдемо показник  $n$

$$n = \frac{\ln \sigma_u - \ln A}{\ln \varepsilon_u}. \quad (2.10)$$

Оберемо 5–6 експериментальних даних і знайдемо середнє значення  $n_{cp}$

$$n_{cp} = \frac{n_i}{5 \div 6}. \quad (2.11)$$

Варто відмітити, що коефіцієнт  $A$  в формулі (2.2) має фізичний зміст:  $A$  дорівнює інтенсивності напружень  $\sigma_u$  при  $\varepsilon_u = 1$ , отже, взявши два близьких значення  $\sigma_u$  і  $\varepsilon_u$ , що їм відповідає, знаходимо  $n$ . Для ізотропного матеріалу  $n$  також має фізичний зміст. Показник степеня  $n$  у формулі (2.2) дорівнює  $\varepsilon_u$  при досягненні максимального навантаження  $P_{max}$  на умовній діаграмі розтягу матеріалу (див. рис. 2.1).

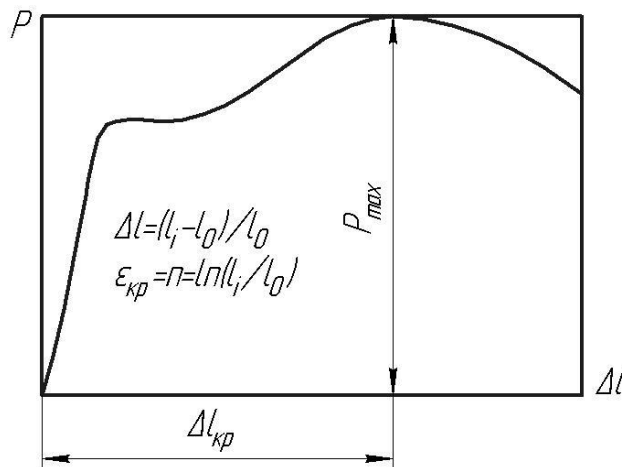


Рисунок 2.1 – Умовна діаграма розтягу дослідного матеріалу

На рис. 2.2 зображено криві течії сталей 38Х2МЮА і 30Х3МФА, побудовані за експериментальними даними на осьовий стиск циліндричних зразків зі змащенням торців [14]. Суцільною лінією показано апроксимацію кривої течії за формулою (2.2).

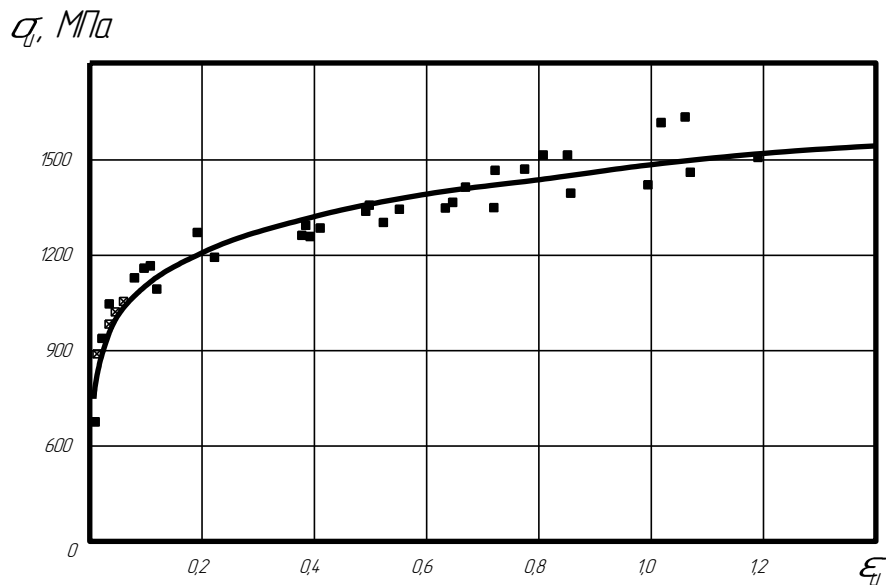


Рисунок 2.2 – Крива течії сталі 38Х2МЮА після термообробки (■ – експериментальні дані випробувань на стиск, ☒ – експериментальні дані випробувань на розтяг, — – апроксимація згідно з рівнянням  $\sigma_u = A \varepsilon_u^n$ ,  $A=(1488 \pm 1,6)\text{МПа}$ ,  $n=(0,131 \pm 0,009)$  [14]

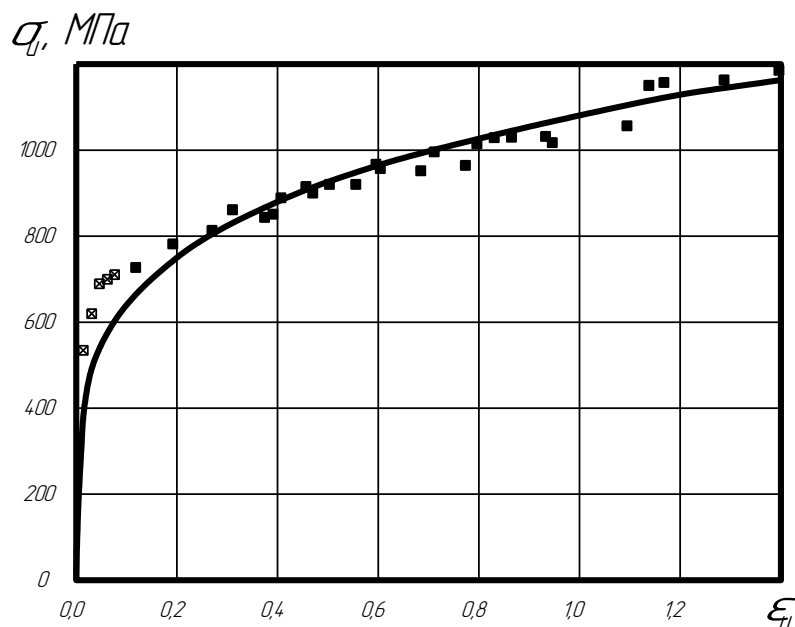


Рисунок 2.3 – Крива течії сталі 30Х3МФА у стані постачання (■ – експериментальні дані випробувань на стиск, ☒ – експериментальні дані випробувань на розтяг, — – апроксимація згідно з рівнянням  $\sigma_u = A \varepsilon_u^n$ ,  $\sigma_u = A \varepsilon_u^n$ ,  $A=(1081 \pm 0.92)\text{МПа}$ ,  $n=(0.227 \pm 0.013)$  [14]

## 2.2 Порядок виконання завдання

1. На міліметровому папері у масштабі зображується графік у координатах  $\sigma_u$ , МПа,  $\varepsilon_u$  – безрозмірна величина, причому  $(\varepsilon_u)_{\max}=1$ , а  $\sigma_u$  при  $\varepsilon_u=1$  прирівнюється до величини  $A$ .
2. Розраховується величина « $n$ » як середнє 5÷6 даних (додаток В), за формулою (2.10).
3. Суцільною лінією проводиться апроксимуюча крива за формулою (2.2).
4. Формулюється надпис під графіком «Крива течії сталі 30Х3МФА,  $A=1081$ ,  $n=0,23$ ».

## 2.3 Діаграма пластичності матеріалу

Діаграма пластичності [1, 4, 5] відображає залежність пластичності, мірою якої є гранична до руйнування накопичена інтенсивність деформацій, від показника напруженого стану

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{3\sigma}{\sigma_u}, \quad (2.12)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження,  $\sigma_u$  – інтенсивність напружень,  $\sigma$  – гідростатичний тиск. Показник  $\eta$  характеризує схему напруженого стану і відображає залежність пластичності від відносного гідростатичного тиску.

Під пластичністю тут розуміємо, як вже було зазначено раніше, накопичену інтенсивність деформацій до моменту руйнування

$$\varepsilon_p = \int_0^{\tau_p} \varepsilon_i d\tau. \quad (2.13)$$

У теорії деформуємісті металів без руйнування діаграма пластичності в наведених координатах є важливою механічною характеристикою матеріалу  $\varepsilon_p = f(\eta)$  (рис. 2.4).

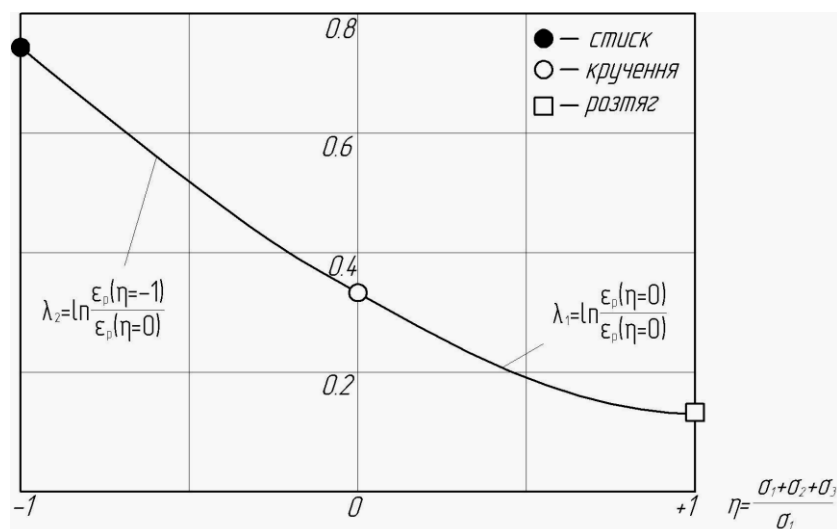


Рисунок 2.4 – Діаграма пластичності

Діаграма будується за результатами випробувань стандартних циліндричних зразків на розтяг [1, 2, 3–7]. Показник напруженого стану знаходимо за формулою

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1} = 1, \quad (2.14)$$

оскільки  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_u = \sigma_1$ .

В умовах зсуву (кручення) показник напруженого стану  $\eta = 0$ , оскільки  $\sigma_1 = +\tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ , а отже,

$$\eta = \frac{\tau - \tau}{\sigma_u} = 0. \quad (2.15)$$

При стиску  $\eta = -1$ ,  $\sigma_1 = -\sigma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$\eta = \frac{-\sigma_1 + 0}{\sigma_1} = -1. \quad (2.16)$$

В умовах розтягу

$$\varepsilon_{p(\eta=1)} = 2 \ln \frac{d_0}{d_{uu}}. \quad (2.17)$$

В умовах зсуву

$$\varepsilon_{p(\eta=0)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_p}{\sqrt{3}}, \quad (2.18)$$

де  $\alpha$  – кут зсуву між повздовжньою віссю закручування зразка і дотичною до гвинтової лінії поблизу зламу (рис. 2.5).

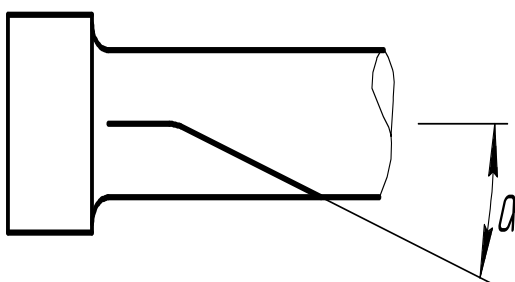


Рисунок 2.5 – Вид зламу закрученого до руйнування зразка

На рис. 2.4 зображено експериментальні точки, нанесені на діаграму пластичності, яку можна апроксимувати за допомогою формули В. А. Огороднікова [13]

$$\varepsilon_p(\eta) = \varepsilon_p(\eta=0) \exp(-\lambda_i \eta), \quad (2.19)$$

де  $\varepsilon_p(\eta)$  – гранична деформація при будь-якому показнику  $\eta$ ,  $\varepsilon_p(\eta=0)$  – гранична деформація при зсуві:

$$\lambda_1 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=0)}{\varepsilon_p(\eta=1)}; \quad (2.20)$$

$$\lambda_2 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=-1)}{\varepsilon_p(\eta=0)}, \quad (2.21)$$

тут  $\lambda_1$  – чутливість пластичності до зміни показника напруженого стану у області  $1 \geq \eta \geq 0$ ,  $\lambda_2$  – чутливість пластичності до зміни показника напруженого стану в області  $0 \geq \eta \geq -1$ .

Задаючись різними значеннями  $\eta$ , розраховуємо за формулою (2.19) значення  $\varepsilon_p$  і відкладаємо на діаграмі пластичності. На рис. 2.4 зображено побудовану таким чином діаграму пластичності сталі 38Х2МЮА.

## 2.4 Порядок побудови діаграм пластичності

1. На міліметровому папері для побудови діаграми пластичності наносять експериментальні точки: розтягу – «□», зсуву – «○», стиску – «●» (див. додаток Г).
2. Розраховують коефіцієнти  $\lambda_i$  для свого матеріалу (додаток В), у якій експериментальні дані взяті з власних робіт [1, 8, 13, 14] або запозичені із робіт [2, 4, 5].
3. За формулою (2.19) розраховуємо  $\varepsilon_p(\eta)$  для показників  $\eta = -0,75$ ;  $\eta = -0,5$ ;  $\eta = -0,25$ . При цьому у формулу (2.19) підставляємо  $\lambda_2$ .
4. За формулою (2.19) розраховуємо  $\varepsilon_p(\eta)$  для показників  $\eta = 0,75$ ;  $\eta = 0,5$ ;  $\eta = 0,25$ . При цьому у формулу (2.19) підставляємо  $\lambda_1$ .
5. Суцільною лінією показуємо діаграму пластичності, апроксимовану формулою (2.19).

### Контрольні запитання

1. Як будується крива течії матеріалу?
2. Як виконується апроксимація кривої течії, який фізичний зміст коефіцієнтів апроксимації?
3. Що називають діаграмою пластичності матеріалу?
4. Як розраховують показники напруженого стану для різних видів деформації?
5. Що розуміють під поняттям «пластичність»?
6. Як будується діаграма пластичності матеріалу?
7. Як виконується апроксимація діаграми пластичності?

## 3 ТОНКІ ПЛАСТИНКИ ТА ОБОЛОНКИ

### 3.1 Безмоментна теорія оболонок

Оболонка – це тверде тіло, обмежене криволінійними поверхнями. Якщо відстань між цими поверхнями (товщина) невелика, порівняно з іншими розмірами, то оболонку називають тонкостінною. До таких випадків відносять оболонки із співвідношенням товщини і радіусів кривини  $h/R \leq 1/20$ . Наприклад, резервуари, парові котли, корпуси ракет, літака, корабля, шкаралупа яйця, морська черепашка, череп голови та інше.

Пластинкою називають тверде тіло, обмежене плоскими поверхнями, відстань між якими (товщина) значно менша за розміри в площині тіла. Пластинки також можуть бути сталої або змінної товщини.

Залежно від форми зовнішнього обрису пластинки відносять до прямокутних, круглих, еліптичних тощо.

Теорія розрахунку пластинок і оболонок дуже складна. В інженерних застосуваннях найпоширеніша так звана технічна теорія пластинок і оболонок. Ця теорія опирається на припущення, запропоновані Кірхгофом і Лявим.

1. Прямолінійний матеріальний елемент, перпендикулярний до середньої поверхні оболонки, залишається перпендикулярний до неї і після деформування. Це припущення називають принципом прямих нормалей.

2. Напруження, перпендикулярні до середньої поверхні, дуже малі. Це припущення тотожне твердженню, що шари оболонки, паралельні середній поверхні й не тиснуть один на одного.

3. Змінення довжини перпендикулярно до середньої поверхні елемента дуже мале. Розраховуються оболонки за безмоментною і моментною теоріями.

Безмоментна теорія оболонок базується на припущенні про рівномірний розподіл напружень по товщині. Це означає, що гнучких моментів немає, і оболонка працює лише на розтяг чи на стиск. Такий розподіл напружень можливий за умов, коли оболонка є тілом обертання, вона не має різних переходів і жорстких закріплень, навантаження розподілене симетрично відносно осі обертання, скупчених сил немає. Якщо ці умови не виконуються, то напруження буде «моментним» тобто оболонка має згин. У цьому разі точніші результати дає застосування моментної теорії, яка, крім розтягу і стиску, враховує і згин.



### 3.1.1 Розрахунки осесиметричних оболонок за безмоментною теорією

Геометричне місце точок, яке поділяє оболонку по товщині навпіл, називають середньою поверхнею. Ця поверхня для оболонки відіграє приблизно таку ж роль, як і поздовжня вісь для стержня.

Під осесиметричними розуміють оболонки, середня поверхня яких є оболонкою обертання (рис. 3.1).

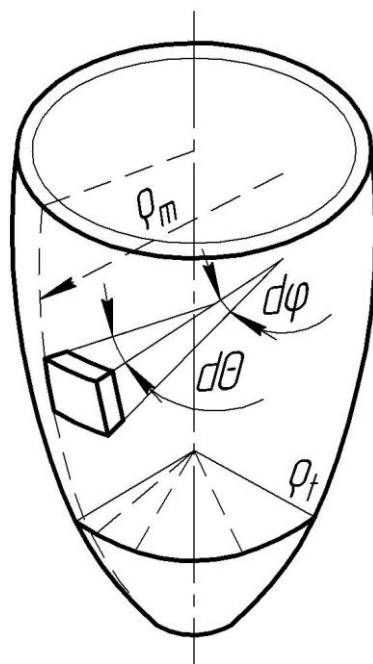


Рисунок 3.1 – Осесиметрична оболонка обертання

У такому разі в радіальному напрямку також маємо осьову симетрію. У цьому разі похідні всіх геометричних характеристик, зусиль, напружень і переміщень оболонки за полярним кутом дорівнюють нулю. Задача стає визначеною, тобто відшукується функція одного незалежного змінного, наприклад, зміною радіуса чи висоти.

Переріз оболонки площиною, яка проходить через вісь симетрії (рис. 3.1), має назву меридіонального перерізу.

Лінія перерізу меридіанної площини із середньою поверхнею – меридіан – становить собою твірну, обертанням якої навколо осі оболонки окреслюється середня поверхня.

Через  $\rho_m$  позначено радіус кривизни меридіана (змінний по висоті – як показано на рис. 3.1), і через  $\rho_t$  – радіус кривини середньої поверхні.

Оболонки обертання найпростіше розрахувати, якщо вважати розподіл напружень по товщині рівномірним. Це можливо за відсутності згинаючих моментів, зосереджених сил, різних переходів і жорстких закріплень. Виконання цих умов дає змогу застосувати безмоментну теорію оболонок, до розгляду якої зараз переходимо.

Для оболонок, які розглянуті, приймаємо схему плоского напруженого стану (рис. 3.2)  $\sigma_t \neq 0$ ,  $\sigma_m \neq 0$ ,  $\sigma_p = 0$ .

Напруження  $\sigma_m, \sigma_t$  пов'язані між собою таким чином

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{t}. \quad (3.1)$$

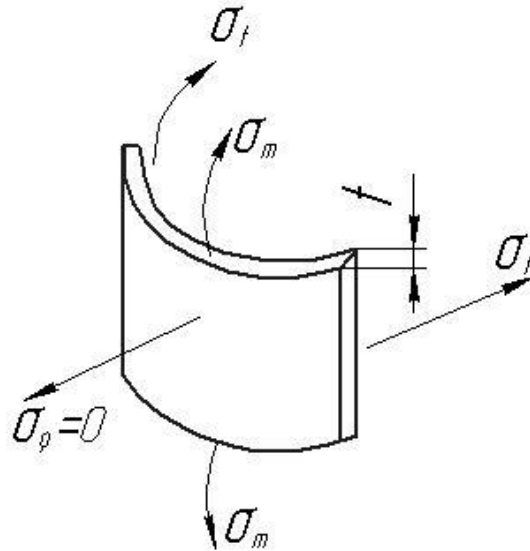


Рисунок 3.2 – Плоский напружений стан осесиметричної оболонки

Залежність (3.1) уперше вивів Лаплас. У рівнянні Лапласа додатне напруження відповідає розтягу, а від'ємне напруження – стиску, якщо радіуси кривини брати зі знаком плюс для випуклої оболонки і мінус – для вигнутої. Внутрішній тиск «q» при виведенні рівняння (3.1) вважався додатним.

Зовнішній тиск необхідно підставляти в (3.1) зі знаком мінус. Відзначимо що напруження  $\sigma_m$  і  $\sigma_t$  мають порядок  $\frac{qR}{t}$ , нормальні до поверхні оболонки напруження  $\sigma = -q$ . Оскільки характерний радіус кривини оболонки  $(\rho_t, \rho_m) \gg t$ , то  $(\sigma_t, \sigma_m) \gg \sigma$ . Тому напруженням  $\sigma$  можна знехтувати порівняно з  $\sigma_t$  і  $\sigma_m$  і вважати напруження в оболонках плоским. Для записування умов міцності необхідно застосовувати один з критеріїв міцності. Допустиме значення напруження необхідно зменшити для врахування можливої корозії і щоб надати оболонці більшої жорсткості.

Рівняння Лапласа містить два невідомих напруження. Щоб визначити їх, потрібне ще одне рівняння. Його можна скласти, умовно відтинаючи від оболонки одну її частину і складаючи рівняння рівноваги для залишеної частини.

Площина перерізу є перпендикулярною до осі обертання, при цьому стінка оболонки перетинається перпендикулярно до меридіана (рис. 3.3). Відкидати зручніше ту частину, на якій є опорні в'язі. Відокремлена нижня частина оболонки зрівноважена силою тиску  $q\pi R^2$  на поверхні рідини, вагою  $Q$  рідини та вагою самої оболонки нижче перерізу і внутрішніми зусиллями, загальне значення яких дорівнює  $2\pi R t \sigma_m$ .

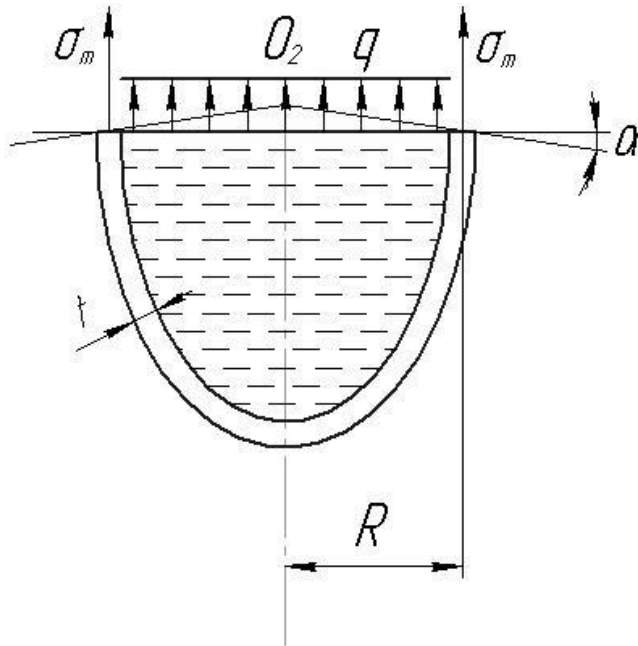


Рисунок 3.3 – Розсічена площина осесиметричної оболонки

Проектуючи вказані сили на вісь оболонки, одержимо

$$2\pi R t \sigma_m \cos \alpha = q\pi R^2 + Q, \quad (3.2)$$

звідки

$$\sigma_m = qR/2t \cos \alpha + Q/2\pi R t \cos \alpha. \quad (3.3)$$

Тиск  $q$  рідини густиною  $\rho$  на глибині  $z$  від поверхні дорівнює  $z\rho$ . Після визначення  $\sigma_m$  напруження  $\sigma_t$  визначають із (3.1)

$$\sigma_t = q\rho_t/h - \sigma_m\rho_t/\rho_m = \rho_t\left(\frac{q}{t} - \frac{\sigma_m}{\rho_m}\right). \quad (3.4)$$

При навантаженні оболонки рівномірним внутрішнім тиском, із (3.4) впливає співвідношення

$$\sigma_m = q\rho_t/2t, \quad (3.5)$$

де

$$\rho_t = \frac{R}{\cos \alpha},$$

і далі

$$\sigma_t = \rho_t \left( q/t - \frac{\sigma_m}{2t\rho_m} \right) = \left( 2 - \frac{\rho_t}{\rho_m} \right) \frac{q\rho_t}{2t}. \quad (3.6)$$

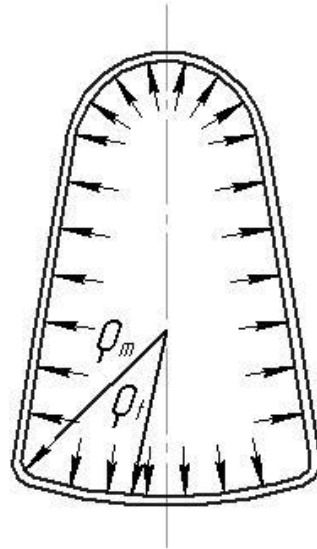


Рисунок 3.4 – Оболонка з перерізом однозв'язного обрису

Звідси випливає, що при  $\rho_t > 2\rho_m$  тангенціальне (кругове) напруження  $\sigma_t$  стає стискуючим. Це необхідно мати на увазі, бо в разі дії стискуючих напружень може статися втрата стійкості початкової форми, і на оболонці з'являться складки.

Для циліндричної оболонки (рис. 3.5)  $\rho_t = R$ ;  $\rho_m = \infty$ , тоді напруження:

$$\sigma_m = \frac{qR}{2t}; \quad \sigma_t = \frac{qR}{t} \quad (3.7)$$

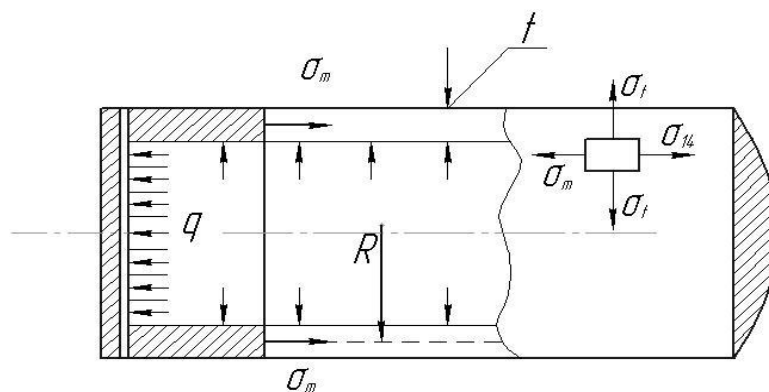


Рисунок 3.5 – Циліндрична оболонка

Для кульової оболонки (рис. 3.6)  $\rho_t = \rho_m = R$  і відповідно

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{qR}{2t}. \quad (3.8)$$

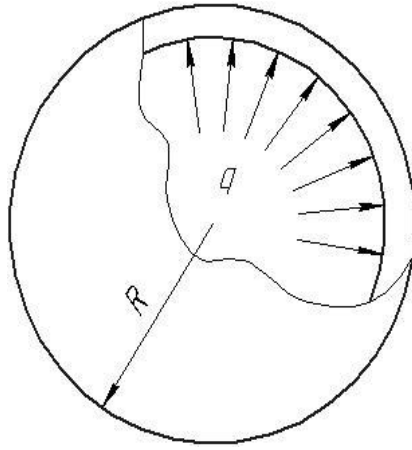


Рисунок 3.6 – Кульова оболонка

З формул (3.7) і (3.8) видно, що за однакового тиску, радіусу і товщини найбільше нормальне напруження в кульовій оболонці вдвоє менше порівняно з циліндричною. Отже, з погляду економічності, форма кулі є найдоцільнішою для оболонок, які зазнають дії внутрішнього тиску. Але з технологічних міркувань оболонки роблять циліндричної форми і з днищами різної форми: кульової, еліпсоїдної чи коробкової (яка складається з частини кулі і частини торцевої поверхні). Напруження в циліндричній частині резервуара визначають за формулою (3.7) незалежно від форми днища, у кульовому днищі за формулою (3.8).

### 3.2 Знаходження напружень та переміщень у круглих пластинках

Радіальні напруження у круглих пластинках будуть рівні:

$$\sigma_r = \frac{EZ}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\mu_r}{D}; \quad (3.9)$$

$$\sigma_t = \frac{EZ}{1 - \mu^2} \cdot \frac{M_t}{D}, \quad (3.10)$$

де  $D$  – коефіцієнт жорсткості

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (3.11)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $t$  – товщина оболонки,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $Z$  – координата,  $\mu_r$ ,  $M_t$  – моменти.

Підставимо вираз  $D$  (3.11), знаходимо

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{t^3} z, \quad (3.12)$$

$$\sigma_t = \frac{12M_t}{t^3} z. \quad (3.13)$$

Максимальні напруження мають місце при  $z = \pm \frac{t}{2}$ , тому

$$\sigma_1^{\max} = \pm \frac{6M_r}{t^2}. \quad (3.14)$$

$$\sigma_1^{\max} t = \pm 6M_r/t. \quad (3.15)$$

На рис. 3.7 наведено схеми затиснутої круглої пластини (а) та шарнірно закріпленої пластини (б)

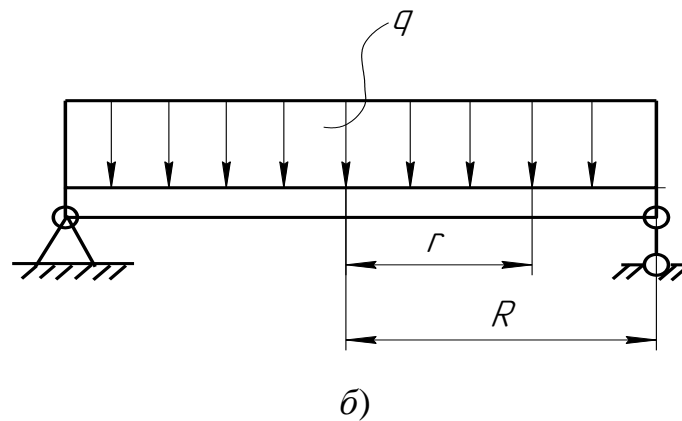
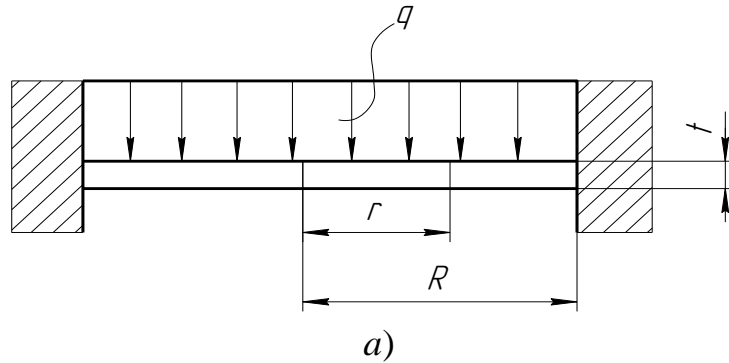


Рисунок 3.7 – Схема навантаження круглої пластини:  
а) пластина затиснена; б) пластина шарнірно закріплена

У цьому випадку значення моментів  $M_z$ ,  $M_t$  для варіанта а можна знайти за формулами:

$$M_r = \frac{q}{16} [R^2(1 + \mu) - r^2(3 + \mu)]; \quad (3.16)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [R^2(1 + \mu) - r^2(1 + 3\mu)]. \quad (3.17)$$

Прогин

$$\omega = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2)^2. \quad (3.18)$$

У випадку закріплення б

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16} (3 + \mu)(R^2 - r^2) \\ M_t &= \frac{q}{16} (3 + \mu) \left( R^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (3.19)$$

Вираз для переміщень має вигляд

$$\omega = \frac{q}{16D} \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{S + \mu}{1 + \mu} \cdot R^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} R^2 r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right]. \quad (3.20)$$

Згідно з виразом (3.19) будемо епюру згинаючих моментів (рис. 3.8).

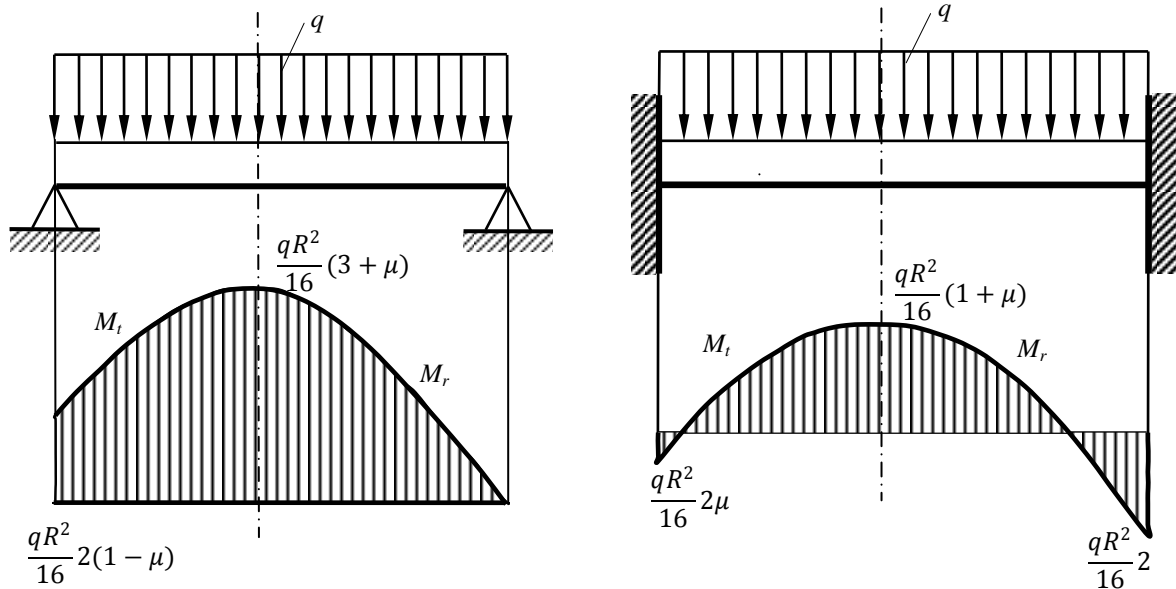


Рисунок 3.8 – Епюри згинаючих моментів

У випадку зміщеного контуру найбільше напруження розтягу виникає на верхній поверхні навколо контуру згідно з формулою:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{2qR^2}{16t_2} \cdot 6; \quad \sigma_2 = \sigma_t = \frac{2\mu qR^2}{16} \cdot \frac{6}{t^2}, \quad (3.21)$$

де  $\sigma_3 = 0$ .

Еквівалентне напруження

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - K \sigma_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{qR^2}{t^2}. \quad (3.22)$$

У випадку шарнірно-опертого контуру найбільші напруження розтягу виникають в центрі у нижній поверхні пластини:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3 + \mu}{16} \cdot \frac{qR^2}{t^2} \cdot 6, \quad \sigma_3 = 0; \quad (3.23)$$

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - K \sigma_3 = \frac{3}{8} (3 + \mu) \cdot \frac{qR^2}{t^2} \leq \sigma_r. \quad (3.24)$$

Найбільші прогини, згідно з виразом (3.18) і (3.20) у випадках а та б:

$$a) \omega_{max} = \frac{qR^4}{64D}; \quad (3.25)$$

$$б) \omega_{\max} = \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{qR^4}{64D}. \quad (3.26)$$

### 3.3 Розрахунок пластин за межами пружності

Нехай пластина за варіантом *a*) деформується за межами пружності. Граничне навантаження [3]

$$q_{zp} = 11,3 \frac{M_T}{R^2} = 11,3 \frac{\sigma_T t^2}{4R^2}. \quad (3.27)$$

Відповідно до даних [8], у формулу (3.27) введемо коефіцієнт  $\beta$  замість 11,3, так як за межами пружності цей коефіцієнт залежить від товщини пластини.

Тоді формула (3.27) має вигляд

$$q_{zp} = \frac{\beta \sigma_u(\varepsilon_u) t^2}{4R^2}, \quad (3.28)$$

де  $\sigma_u$  – інтенсивність напружень, яка залежить від  $\varepsilon_u$ . Величину  $\varepsilon_u$  визначимо за формулою

$$\varepsilon_u = \alpha \frac{\omega^2}{R^2}, \quad (3.29)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт, який залежить від товщини металу пластини.

У роботі [8] значення  $\alpha$  визначається як

$$\alpha = Dt_0^n, \quad (3.20)$$

де  $D = 0,96$ ,  $n = 0,2$ .

Коефіцієнт  $\beta$  у формулі (3.28) залежить від товщини пластин і знаходиться за допомогою рис. 3.9.

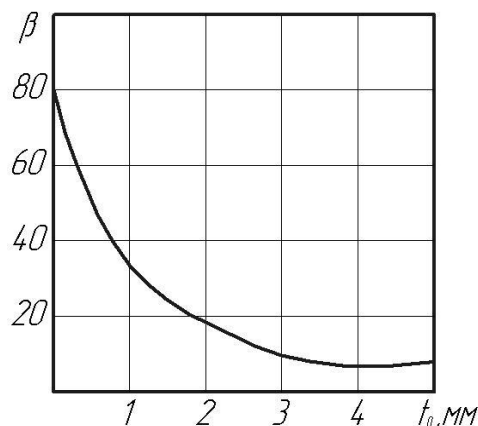


Рисунок 3.9 – Знаходження коефіцієнта  $\beta$  у формулі (3.28), залежно від товщини пластини

Таким чином, при розрахунку круглих пластин за межами пружності у формулу (3.27) підставимо залежність  $\sigma_u(\varepsilon_u)$ , величину  $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$ , де  $\varepsilon_u$  знайдено за (3.29).



### 3.4 Контрольна робота № 1

#### Приклад розрахунку циліндричної посудини (оболонки)

Днище циліндричної посудини закріплюють або за допомогою привареного фланця (рис. 3.10, а), або приварюють до циліндричного корпусу (рис. 3.10, б). Матеріал днища знайти в табл. 3.1, там же наведено дані  $R$ ,  $t$ ,  $\sigma_T$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,30$ . Знайти:

1. Граничне навантаження днища  $q_{cp}$  для двох варіантів б і в.
2. Для знайденого граничного навантаження  $q_{cp}$  знайти товщину оболонки  $h$ , якщо матеріал оболонки такий же, як у днища, для двох варіантів закріплення днища б і в.
3. Знайти максимальний прогин днища при заданому  $q_{cp}$  для двох варіантів прикріплення днища б і в.

*Дано:* матеріал – сталь вуглецева;  $\sigma_T = 300$  МПа; коефіцієнт запасу  $n = 2,5$ ; модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ ;  $R = 200$  мм;  $t = 10$  мм.

*Розв'язок.* Складемо розрахункові схеми. У першому випадку жорсткість днища не набагато перевищує жорсткість циліндричного корпусу. Це унеможливує лінійне і кутове переміщення зовнішнього контуру днища, тобто закріплення можна вважати жорстким (рис. 3.10, б).

У другому випадку зовнішній контур днища під дією тиску може повертатися разом з корпусом на деякий кут. Тому за розрахункову схему днища можна взяти пластинку, шарнірно оперту зовнішнім контуром і обмежену сталим тиском (рис. 3.10, в).

Варіант а.

$$q_{cp} = \frac{4t^2 \sigma_T}{3R^2 n} = \frac{4 \cdot 1^2 \cdot 3000}{3 \cdot 20^2 \cdot 2,5} = 4 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2},$$

тут  $t$  в см.,  $[\sigma] - \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ ,  $R$  - см – відповідь -  $\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ .

Другий варіант –  $t$  – м,  $\sigma_T$  - МПа,  $R$  - м – відповідь – МПа.

$$q_{cp} = \frac{4 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{3 \cdot 0,2^2 \cdot 2,5} = 0,4 \text{ МПа}$$

Варіант б.

$$\sigma_{екв} = \frac{3qR^2(3 + \mu)}{8t^2} \leq [\sigma],$$

звідки  $q_{cp} \leq \frac{8 \cdot t^2 \cdot \sigma_T}{n \cdot 3R^2(3 + \mu)} = \frac{8 \cdot 1^2 \cdot 3000}{2,5 \cdot 3 \cdot 20^2(3 + 0,3)} = 2,42 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} = 0,242 \text{ МПа},$

або  $q_{cp} = \frac{8 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{2,5 \cdot 3 \cdot 0,2^2 \cdot 3,3} = 0,242 \text{ МПа}.$

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до виконання розрахунку пластин

№ з/п	$R$ , см	$t$ , см	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$A$ , МПа	$n$	Примітка
1	10	0,2	450	825	0,19	Сталь 45
2	9	0,3	560	1480	0,18	P18
3	12	0,28	157	757	0,19	Сталь 20
4	14	0,35	320	900	0,27	Ст. 3
5	15	0,39	325	760	0,22	Сталь 20
6	5	0,1	440	950	0,15	Сталь 35
7	9	0,15	750	1250	0,10	Сталь 40X
8	11	0,16	350	1380	0,23	08ГСЮФ
9	12	0,18	300	1000	0,19	08КП
10	8	0,19	310	1450	0,25	X18H9T
11	7	0,22	271	786	0,18	13M5A
12	10	0,23	650	2275	0,17	XH70BMTЮ
13	5	0,22	525	2350	0,16	XH77TЮP
14	4,5	0,093	235	292	0,2	Д16АМ
15	4,8	0,11	300	1000	0,19	Сталь 08кп
16	4,9	0,155	300	1600	0,19	Сталь 45
17	5,0	0,165	400	800	0,21	03 ХГЮ
18	5,2	0,185	300	800	0,18	Сталь 10
19	5,5	0,23	290	760	0,18	Сталь 08кп
20	5	0,5	480	1320	0,6	P12
21	5,5	0,45	680	1250	0,10	40X
22	6	0,40	400	957	0,157	Сталь 35
23	6,5	0,35	300	1010	0,34	08КП
24	7	0,30	375	1500	0,28	У8А
25	7,5	0,25	390	780	0,20	13M5A
26	8,5	0,20	442	1000	0,20	ШХ-15
27	9	0,15	320	900	0,27	Ст. 3
28	9,5	0,17	365	1015	0,16	Сталь 45
29	10	0,18	255	760	0,22	Сталь 20
30	10,5	0,19	390	830	0,20	фольксваген
31	11	0,20	495	1200	0,19	30X3MФА
32	11,5	0,25	421	912	0,11	51XФА
33	12	0,26	235	292	0,20	Д16АМ
34	5,2	0,28	400	800	0,21	03ХГЮ
35	5,25	0,29	310	1450	0,25	X18H9T
36	5,5	0,30	300	800	0,18	Сталь 10
37	6	0,32	271	786	0,18	13M5A
38	6,5	0,35	350	1380	0,23	08 ГСЮФ
39	7	0,38	502	920	0,21	30ХГСА
40	7,5	0,39	230	1300	0,21	У8А
41	8	0,4	500	1200	0,2	38X2MЮA
42	8,5	0,45	421	912	0,22	51XФА
43	9	0,46	442	1000	0,20	ШХ15
44	9,5	0,47	271	786	0,21	13M5A
45	10,5	0,48	525	2350	0,17	XH77TЮP
46	10	0,49	320	900	0,27	Ст. 3
47	10,5	0,52	350	1380	0,23	08ГСЮФ

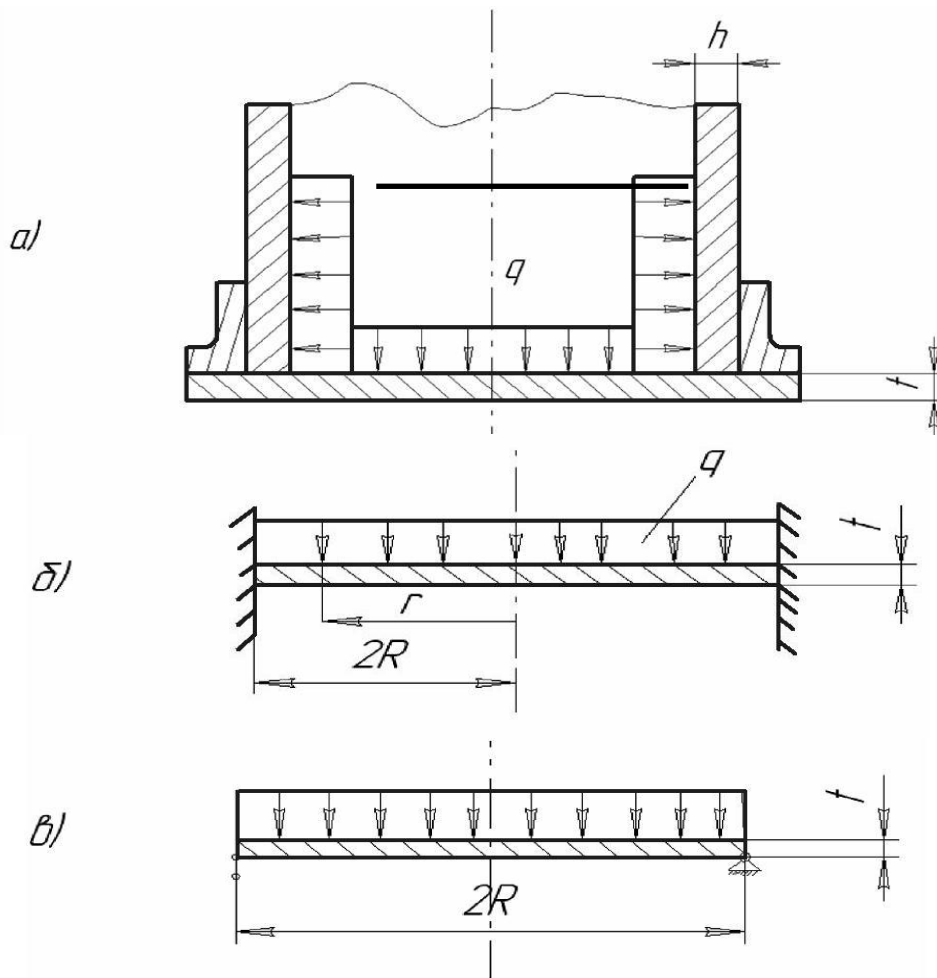


Рисунок 3.10 – Приклад розрахунку оболонки сумісно з пластиною

Визначимо при розрахованому  $q_{ep}$  товщину циліндричної оболонки.

Варіант а.

$$\sigma_{екв} = \frac{qR}{h} \leq [\sigma],$$

$$h \geq \frac{nqR}{\sigma_T} = \frac{4 \cdot 200 \cdot 2,5}{3000} = 0,67 \text{ см} = 6,7 \text{ мм} = 0,00067 \text{ м}.$$

або  $q$ , МПа,  $R$ , м

$$h \geq \frac{0,4 \cdot 0,2 \cdot 2,5}{300} = 0,00067 \text{ м} = 6,7 \text{ мм}$$

Варіант б.

$$h \geq \frac{nqR}{\sigma_T} = \frac{2,42 \cdot 200 \cdot 2,5}{3000} = 0,4 \text{ см} = 4 \text{ мм} = 0,0004 \text{ м}$$

Або  $q$ , МПа,  $R$ , м

$$h \geq \frac{0,242 \cdot 0,2 \cdot 2,5}{300} = 0,0004 \text{ м}$$

Максимальний прогин днища при знайденому  $q_{ep}$  для двох варіантів прикріплення днища а і б.

Варіант а.

Знаходимо коефіцієнт жорсткості по (3.11)

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1^3}{12(1-0,3^2)} = 183150,$$

або

$$D = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1^3}{12(1-0,3^2)} = 0,0183150.$$

Прогин знаходимо за формулою (3.25)

$$\omega_{\max} = \frac{qR^4}{64D} = \frac{4 \cdot 20^4}{64 \cdot 183150} = 0,0005 \text{ м} = 0,05 \text{ см} = 0,5 \text{ мм}.$$

Варіант б.

Знаходимо прогин за формулою (3.26)

$$\omega_{\max} = \frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qR^4}{64D} = \frac{(5+0,3)}{(1+0,3)} \cdot 0,0005 = 0,002 \text{ м} = 2 \text{ мм}.$$

Допустимий прогин  $[\omega]$  прийнятий  $[\omega] = \frac{t}{5} = \frac{10 \text{ мм}}{5} = 2 \text{ мм},$

$\omega_{\max} \leq [\omega]$ . Умова жорсткості виконується.

### 3.5 Контрольна робота № 2

#### Розрахунок пластин

Пластина защемлена по контуру (рис. 3.11, а). У табл. 3.1 наведено дані:  $R, t, \sigma_T, E, \mu = 0,30$ . Модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ .

Матеріал зміцнюється за законом  $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$ . Коефіцієнти  $A$  і  $n$  наведено у табл. 3.1.

Пластина шарнірно оперта (рис. 3.11, б). У табл. наведено дані:  $R, t, \sigma_T, E, \mu$ . Модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ . Матеріал зміцнюється за законом  $\sigma_u = A\varepsilon_u^n$ . Коефіцієнти  $A$  і  $n$  наведено в табл. 3.1.

1. Знайти для двох варіантів  $q_{ep}$  у пружній області. При визначеному  $q_{ep}$  знайти максимальний прогин для двох варіантів а і б.
2. Знайти  $q_{ep}$  за межами пружності для варіанти а, коли прогин пластини  $\omega_{\max} = 5t$ .

Нехай  $t = 10 \text{ мм}, R = 200 \text{ мм}, \sigma_T = 300 \text{ МПа}, n = 2,5, \mu = 0,3,$   
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, A = 900 \text{ МПа}, n = 0,27$ .

Варіант а.

$$q_{cp} = \frac{4t^2 \sigma_T}{3R^2 n} = \frac{4 \cdot 1^2 \cdot 3000}{3 \cdot 20^2 \cdot 2,5} = 4 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2},$$

$$q_{cp} = \frac{4 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{3 \cdot 0,2^2 \cdot 2,5} = 0,4 \text{ МПа.}$$

Варіант б.

$$q_{cp} \leq \frac{8 \cdot t^2 \cdot \sigma_T}{n \cdot 3R^2 (3 + \mu)} = \frac{8 \cdot 1^2 \cdot 3000}{2,5 \cdot 3 \cdot 20^2 (3 + 0,3)} = 2,42 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} = 0,242 \text{ МПа,}$$

або

$$q_{cp} = \frac{8 \cdot 0,01^2 \cdot 300}{2,5 \cdot 3 \cdot 0,2^2 \cdot 3,3} = 0,242 \text{ МПа.}$$

Нехай пластина деформується за межами пружності, коли

$$\omega_{\max} = 5t = 5 \cdot 1 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м.}$$

Знаходимо  $q_{cp}$  за формулою (3.28)

$$q_{cp} = \beta \frac{\sigma_u (\varepsilon_u) t^2}{4R^2},$$

де  $\beta = 10$  див. рис. 3.3.

$\varepsilon_u$  знаходимо за формулою (3.29), або  $\sigma_u = A \varepsilon_u^n$

$$\varepsilon_u = \alpha \frac{\omega^2}{R^2} = 1,52 \frac{5^2}{20^2} = 0,095,$$

де  $\alpha$  знаходимо за формулою (3.30)

$$\alpha = Dt_0^n = 0,96 \cdot 10^{0,2} = 1,52.$$

Інтенсивність напружень (див. формулу 2.2)

$$\sigma_u = A \varepsilon_u^n = 900 \cdot 0,095^{0,27} = 477 \text{ МПа,}$$

$$q_{cp} = 10 \frac{477 \cdot 0,01^2}{4 \cdot 0,2^2} = 2,98 \text{ МПа.}$$

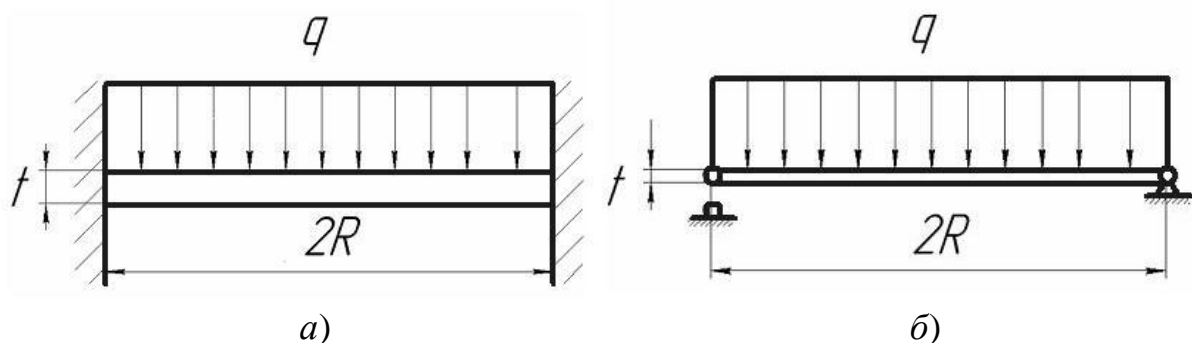


Рисунок 3.11 – Схема навантаження:

а) кругла пластина защемлена; б) кругла пластина шарнірно закріплена

## Контрольні запитання

1. Що називають оболонкою?
2. Що називають пластинкою?
3. Які припущення запропоновані Кірхгофом і Лявом стосовно теорії пластинок і оболонок?
4. На якому припущенні базується безмоментна теорія оболонок?
5. Що називають серединною поверхнею, осесиметричною оболонкою, меридіональним перерізом?
6. Яку залежність вивів Лаплас для оболонок з урахуванням плоского напруження стану?
7. Який порядок рішення рівняння Лапласа?
8. Як визначаються напруження для циліндричної оболонки?
9. Як визначаються напруження для кульової оболонки?
10. Як визначаються напруження у круглих пластинках?
11. Як визначаються переміщення у круглих пластинках?
12. Як розраховуються пластинки за межами пружності?

## 4 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ. ФЕНОМЕНОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МІЦНОСТІ ТА ДЕФОРМІВНОСТІ

### 4.1 Тензор напружень

Одне з основних завдань механіки деформівного твердого тіла – аналіз напруженого стану. Напружений стан навколо точки характеризується тензором другого рангу. Слово тензор перекладається як напруження (tension – англ.). Введення Ейнштейном тензорного числення спонукало механіків одними з перших застосувати узагальнене поняття вектора тензора до аналізу напруженого стану у точці.

Напруження – інтенсивність внутрішніх сил, тобто внутрішня сила, яка прикладається на одиницю площі.

Напружений стан у точці характеризується тензором напруження другого рангу, компоненти якого в декартовій системі координат позначаються таким чином

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Компоненти тензора напружень, або напруження  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  (надалі –  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ), направлені по нормалях майданчиків, перпендикулярних відповідно до координатних осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 4.1), називаються *нормальними*. Вони викликають деформацію розтягу або стиску. Деформації розтягу, які мають напрямок від вказаних майданчиків, вважають *додатними*. Напруження  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  називаються *дотичними*. Вони викликають зсуви по відповідних осях  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ . Наприклад,  $\tau_{yz}$  – дотичне напруження, яке діє на майданчики перпендикулярно до осі  $y$  і направлене уздовж осі  $z$ .

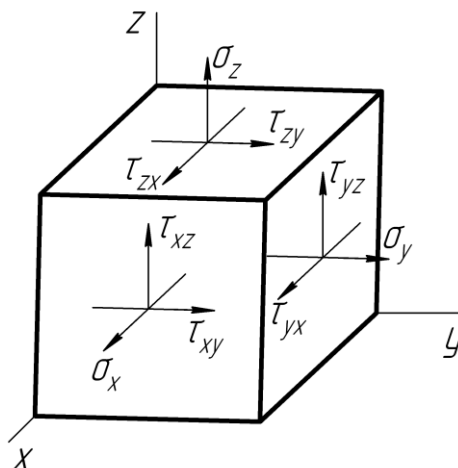


Рисунок 4.1 – Позначення напружень у декартовій системі координат

Дотичні напруження вважаються додатними, якщо їм відповідає зменшення кута між волокнами, до деформації, направленої вздовж координатних осей, вказаних в індексах (рис. 4.2). На рис. 4.1 всі напруження додатні.

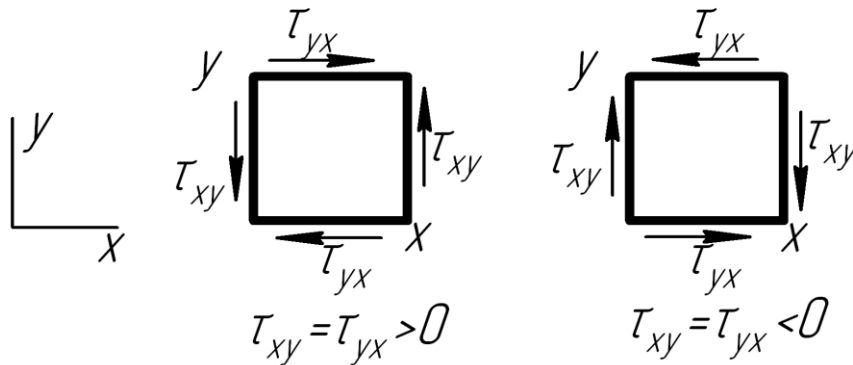


Рисунок 4.2 – До визначення правила знаків дотичних напружень

Якщо розглянути умову рівноваги куба, на гранях якого діють напруження, можна довести справедливості закону парності дотичних напружень. Так, згідно з рис. 4.1, сума моментів усіх сил щодо ребра, що збігається з віссю  $z$ , дорівнює нулю. Тоді на видимій грані куба діє сила  $\tau_{xy} dy dz$ , плече цієї сили  $dx$ ; на перпендикулярній грані –  $\tau_{yx} dx dz$ , плече цієї сили  $dy$ .

Остаточно одержимо

$$\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0.$$

Отже,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

На поверхні тіла напруження задовольняють рівнянням Коші

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \mu_x + \tau_{xy} \mu_y + \tau_{xz} \mu_z &= P_x, \\ \tau_{yx} \mu_x + \sigma_y \mu_y + \tau_{yz} \mu_z &= P_y, \\ \tau_{zx} \mu_x + \tau_{zy} \mu_z + \sigma_z \mu_z &= P_z, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

де  $P_x, P_y, P_z$  – проекції поверхневого навантаження, віднесеного до одиниці площі, на координатні осі;  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  – направляючі косинуси нормалі до поверхні.

Якщо  $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$  – напруження в системі координат  $x, y, z$ , а  $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$  – напруження у системі координат  $x', y', z'$ , і якщо  $C_{xx} = \cos(xx')$ ,  $C_{xy} = \cos(xy')$  і т. д. (зазначимо, що перший індекс при  $C$  указує вісь «нештрихованої», а другої – «штрихованої» системи координат), то справедливі такі формули перетворення напруження при перетворенні координат:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x C_{xx} C_{xx} + \tau_{xy} C_{xy} C_{yx} + \dots + \sigma_z C_{zx} C_{zx}, \\ \tau'_{xy} &= \sigma_x C_{xx} C_{xy} + \tau_{xy} C_{xy} C_{yy} + \dots + \sigma_z C_{zx} C_{zy}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Ці формули підлягають такій закономірності. У правій частині маємо дев'ять доданків, одним із співмножників яких є одне з дев'яти напружень



в «нештрихованій» системі координат  $x, y, z$ . Якщо позначення нормально-го напруження подумки доповнити ще одним індексом, наприклад  $\sigma_{y(y)}$  (таке позначення зрозуміле, оскільки  $\sigma_y$  – напруження, що діє на майданчик, перпендикулярне до осі  $y$ , і направлене вздовж осі  $x$ ), то співмножник отримуємо у вигляді двох  $C$  з такими індексами. У першого  $C$  перший індекс аналогічний першому індексу напруження у «не штрихованій» системі координат, а другий – першому індексу напруження у «штрихованій» системі координат. У другого  $C$  перший індекс такий самий як другий індекс у напруження в «не штрихованій» системі координат, а другий індекс такий самий як другий індекс напруження у «штрихованій» системі координат.

## 4.2 Головні напруження і головні площадки

Головними називаються майданчики, на які не діють дотичні напруження. Нормальні напруження, що діють на цих майданчиках, називаються головними напруженнями. Напрями нормалей до головних майданчиків називають головними напрямками тензора напружень, а суміщені з ними осі – головними осями цього тензора.

Головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  визначають розв'язанням рівняння

$$\sigma_e^3 - I_1 \sigma_e^2 - I_2 \sigma_e - I_3 = 0, \quad (4.3)$$

де  $I_1, I_2, I_3$  – головні інваріанти тензора напружень. Вони таким чином виражаються через напруження:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Направляючі косинуси першого головного напрямку, тобто напрямку, вздовж якого діє  $\sigma_1, v_x^I, v_y^I, v_z^I$ , знаходять із системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) v_x^I + \tau_{xy} v_y^I + \tau_{xz} v_z^I &= 0; \\ \tau_{yx} v_x^I + (\sigma_y - \sigma_1) v_y^I + \tau_{yz} v_z^I &= 0; \\ \tau_{zx} v_x^I + \tau_{zy} v_y^I + (\sigma_z - \sigma_1) v_z^I &= 0; \\ (v_x^I)^2 + (v_y^I)^2 + (v_z^I)^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

З перших трьох рівнянь (4.5) незалежні тільки два. Аналогічно визначаються направляючі косинуси двох інших головних напрямків. Якщо  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ , то головні напрями визначаються однозначно і виявляються

взаємно ортогональними.

Одне з головних напружень є найбільшим, а одне – найменшим із усього нормального напруження, що діє на майданчиках, які проходять через певну напружену точку.

На майданчик, нормаль до якого перпендикулярна одному з головних напрямів і рівнонахилена до двох інших головних напрямів, діє головне дотичне напруження. Так, на майданчик, нормаль до якого перпендикулярна першому головному напрямку і рівнонахилена до другого і третього головних напрямів, діють головні дотичні напруження, рівні по модулю

$$\tau_1 = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right|.$$

Аналогічно визначаються два інших головних дотичних напруження:

$$\tau_2 = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|, \quad \tau_3 = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|.$$

Якщо  $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \sigma_3$ , то найбільше дотичне напруження діє на майданчик, рівнонахилене до майданчиків, на які діють головні напруження  $\sigma_1, \sigma_3$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

### 4.3 Шаровий тензор і девіатор напружень

Величину

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (4.6)$$

називають середнім нормальним напруженням, або гідростатичним тиском. Гідростатичний тиск – величина інваріантна до перетворення координат (вона пропорційна першому головному інваріанту тензора напружень).

Тензор з компонентами

$$\begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

називають кульовим тензором. Легко переконатися в тому, що компоненти цього тензора не змінюються при перетворенні координат. Дійсно, якщо в системі координат  $x, y, z$  цей тензор подається у вигляді (4.7), тоді в системі координат  $x', y', z'$  маємо

$$\sigma_{x'} = \sigma C_{xx}^2 + \sigma C_{yx}^2 + \sigma C_{zx}^2 = \sigma,$$

оскільки згідно з теоремою косинусів

$$C_{xx}^2 + C_{yx}^2 + C_{zx}^2 = 1.$$

Далі

$$\sigma'_{xy} = \sigma C_{xx} C_{xy} + \sigma C_{yx} C_{yy} + \sigma C_{zx} C_{zy} = 0,$$

оскільки  $C_{xx} C_{xy} + C_{yx} C_{yy} + C_{zx} C_{zy} = 0$  силу перпендикулярності  $x'$  і  $y'$ .

Тензор з компонентами

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix},$$

що позначаються надалі

$$\begin{vmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{vmatrix},$$

називають девіатором напружень.

У головних осях тензора напружень згортаються в нуль дотичні напруження, а отже, змішані компоненти девіатора напружень. Через це головні напрями тензора і девіатора напружень збігаються. Якщо  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження, то головні компоненти девіатора напружень запишуться у вигляді

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma, \quad S_2 = \sigma_2 - \sigma, \quad S_3 = \sigma_3 - \sigma.$$

Перший головний інваріант девіатора напружень

$$I'_1 = S_x + S_y + S_z = \sigma_x - \sigma + \sigma_y - \sigma + \sigma_z - \sigma = 0. \quad (4.8)$$

Тут врахована рівність (4.6). Другий головний інваріант

$$I'_2 = -S_x - S_y - S_{yz} - S_z S_x + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2.$$

Використовуючи рівність (4.8), одержуємо

$$\begin{aligned} -S_x S_y - S_y S_z - S_z S_x &= -S_x(-S_x - S_z) - S_y(-S_x - S_y) - S_z(-S_y - S_z) = \\ &= S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x, \end{aligned}$$

звідки

$$-S_x S_y - S_y S_z - S_z S_x = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2).$$

Із закону парності дотичних напружень виходить

$$S_{xy}^2 = \frac{1}{2}(S_{xy}^2 + S_{yx}^2), \quad S_{yz}^2 = \frac{1}{2}(S_{yz}^2 + S_{zy}^2). \quad (4.9)$$

Таким чином,

$$I'_2 = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + \dots + S_{zx}^2 + S_{zx}^2). \quad (4.10)$$

Далі

$$S_x = \sigma_x - \sigma = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z).$$

Аналогічно визначаємо  $S_y, S_z$ . Підставивши ці співвідношення в рівність (4.9), одержуємо такі вирази другого інваріанта девіатора напружень

$$\begin{aligned}
I'_2 &= \frac{1}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x - \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\
&= \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2.
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

У теорії пластичності важливу роль відіграють характеристики напруженого стану, пропорційні квадратному кореню з другого інваріанта девіатора напружень. Це, насамперед, інтенсивність напружень

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= \sqrt{3I'_2} = \sqrt{\frac{3}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + S_{xz}^2 + S_{yz}^2 + S_{xy}^2)} = \\
&= \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]^{1/2} = \\
&= \frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]^{1/2},
\end{aligned}
\tag{4.12}$$

та інтенсивність дотичних напружень

$$K = \sqrt{I'_2} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{3}}. \tag{4.13}$$

*Розглянемо два приклади.*

При розтягу однорідного стержня постійного перерізу вздовж його осі  $x$  від нуля відмінне тільки нормальне напруження  $\sigma_x$  і через це гідростатичний тиск  $\sigma = \frac{\sigma_x}{3}$ , інтенсивність напружень  $\sigma_u = \sigma_x$ , інтенсивність дотичних напружень  $K = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}$ .

При крученні круглого стержня і відповідному виборі координат  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ , а решта напружень дорівнює нулю. Тому в цьому разі гідростатичний тиск  $\sigma = 0$ , інтенсивність напружень  $\sigma_u = \sqrt{3} \cdot \tau_u$ , інтенсивність дотичних напружень  $K = \tau_u$ .

#### 4.4 Диференціальні рівняння рівноваги

Розглянемо рівновагу нескінченно малого паралелепіпеда, три ребра якого  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  суміщені відповідно з осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  прямокутної декартової системи координат (рис. 4.3). На невидимих гранях цього паралелепіпеда діють усереднені по них напруження  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ . Визначимо напруження на видимих гранях. Нагадаємо, що якщо деяка функція координат  $f(x, y, z)$  має в точці А значення  $f_A$ , то в нескінченно близькій до А точці В значення цієї функції

$$f_B = f_A + \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz,$$

де  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  – проекції відрізка А, В на координатні осі, а приватні похідні  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{df}{dy}$ ,  $\frac{df}{dz}$  визначені в точці А.

У цьому випадку напруження є функціями координат, і якщо на майданчик, що співпадає з координатною площиною  $x=0$ , діють напруження  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ , то на паралельній та віддаленій від нього відстані  $dx$  діють напруження:

$$\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx; \quad \tau_{xy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} dx; \quad \tau_{xz} + \frac{d\tau_{xz}}{dx} dx.$$

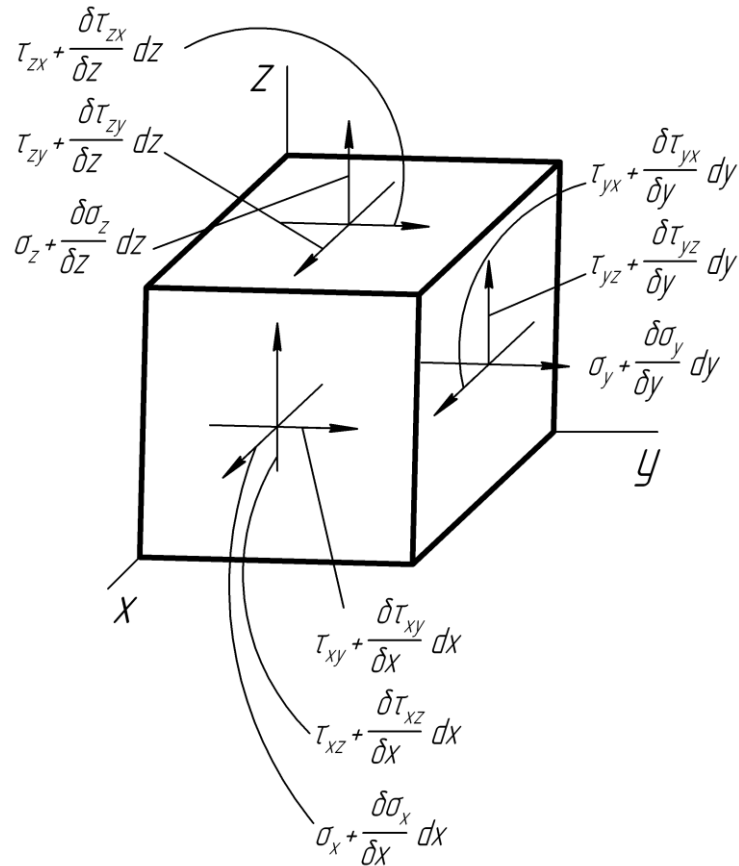


Рисунок 4.3 – До виведення диференціальних рівнянь рівноваги

Аналогічно, на видимій площадці, паралельній координатній площині  $Y = 0$  і віддаленого від неї на відстані  $dy$ , діють напруження:

$$\sigma_y + \frac{d\sigma_y}{dy} dy, \quad \tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} dy, \quad \tau_{yz} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} dy.$$

На рис. 4.3 наведено вирази напружень на гранях паралелепіпеда.

Запишемо тепер умови рівноваги виділеного елемента. Проектуючи всі сили, що діють на нього, на вісь  $x$ , одержуємо

$$-\sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left( \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) dy dz +$$

$$+ \left( \tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} dy \right) dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} dz \right) dx dy = 0$$

або

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0. \quad (4.14)$$

Аналогічно, проектуючи сили, що діють на елемент, на осі  $y, z$ , одержуємо ще два рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} &= 0, \\ \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ці рівняння називають диференціальними рівняннями рівноваги.

Прирівнявши до нуля суми моментів усіх сил навколо координатних осей, одержуємо закон парності дотичних напружень.

Таким чином, зміна напружень за об'ємом тіла не може бути довільною. Якщо тіло знаходиться у рівновазі, ця зміна не має суперечити рівнянням (4.15).

#### 4.5 Плоский напружений стан

Напружений стан у точці називається плоским, якщо одне з головних напружень дорівнює нулю. При плоскому напруженому стані через напружену точку проходить майданчик, на який не діє напруження. Сумістимо вісь  $z$  з нормаллю до цього майданчика, тоді

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0.$$

Плоский напружений стан можна зобразити схемою, наведеною на рис. 4.4.

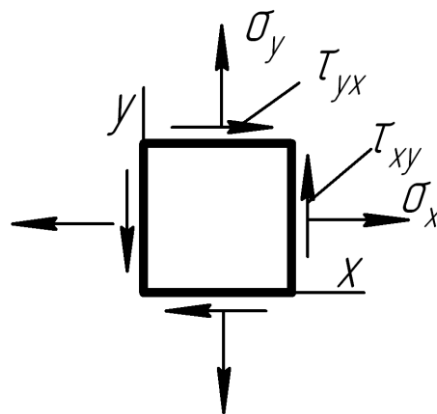


Рисунок 4.4 – Схема елемента, що знаходиться в умовах плоского напруженого стану

Якщо  $\sigma_3=0$ , то два інших головних напруження визначають таким чином

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (4.16)$$

Кут  $\alpha$  між нормаллю до головного майданчика, на який діє напруження  $\sigma_1$ , і віссю  $x$ , знаходять з рівняння

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.17)$$

Якщо відомі напруження  $\sigma_x, \tau_{xy}$  у системі осей  $x, y$ , то в системі  $x', y'$ , в якій кут між осями  $x'$  і  $x$  рівний  $\beta$ , напруження визначаються рівностями, які виходять із (4.2):

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x \cos^2 \beta + \tau_{xy} \sin^2 \beta + \sigma_y \sin^2 \beta, \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy} \cos^2 \beta + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin^2 \beta, \\ \sigma'_y &= \sigma_x \sin^2 \beta - \tau_{xy} \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

При плоскому напруженому стані гідростатичний тиск

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y),$$

інтенсивність напружень

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}. \quad (4.19)$$

Напружений стан тіла називається плоским, якщо в будь-якому його перерізі, перпендикулярному до деякого напрямку  $z$ , відсутні напруження. У кожній точці такого тіла напружений стан є плоским. Рівності ( $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0$ ) справедливі по всьому об'єму тіла. Тому диференціальні рівняння рівноваги при плоскому напруженому стані тіла пишуться у вигляді

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} = 0, \quad \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} = 0. \quad (4.20)$$

#### 4.6 Розрахункове завдання з прикладом розрахунку: напружений стан у точці [13]

Розрахуємо напружений стан елемента, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану (рис. 4.5). Дано компоненти тензора напружень у декартовій системі координат:  $\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \sigma_{zz}; \tau_{zx}; \tau_{yx}; \tau_{zy}$ , а направляючі косинуси довільно орієнтованого майданчика –  $l_\mu, m_\mu, n_\mu$ . Потрібно визначити напруження на вказаному майданчику:  $P_\mu$  – номінальне;  $\sigma_\mu$  – нормальне;  $\tau_\mu$  – дотичне;  $\sigma_0$  – середнє, знайти інваріанти тензора напружень, головні напруження і положення головних майданчиків (обчислити направляючі косинуси нормалей до головних майданчиків), обчислити інтенсивність напружень  $\sigma_u$  і показники напруженого стану  $\eta_1 = \frac{3\sigma_0}{\sigma_u}$ ,

$\eta_2 = \frac{\sqrt[3]{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}}{\sigma_u}$ , а також вид напруженого стану, параметр Надаї-Лоде

$$\eta'_2 = \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

Усі початкові дані наведено в табл. 4.1 і на рис. 4.5 (варіант 25). Знаки дотичних напружень визначені за табл. 4.1, а нормальні напруження – за рис. 4.5.

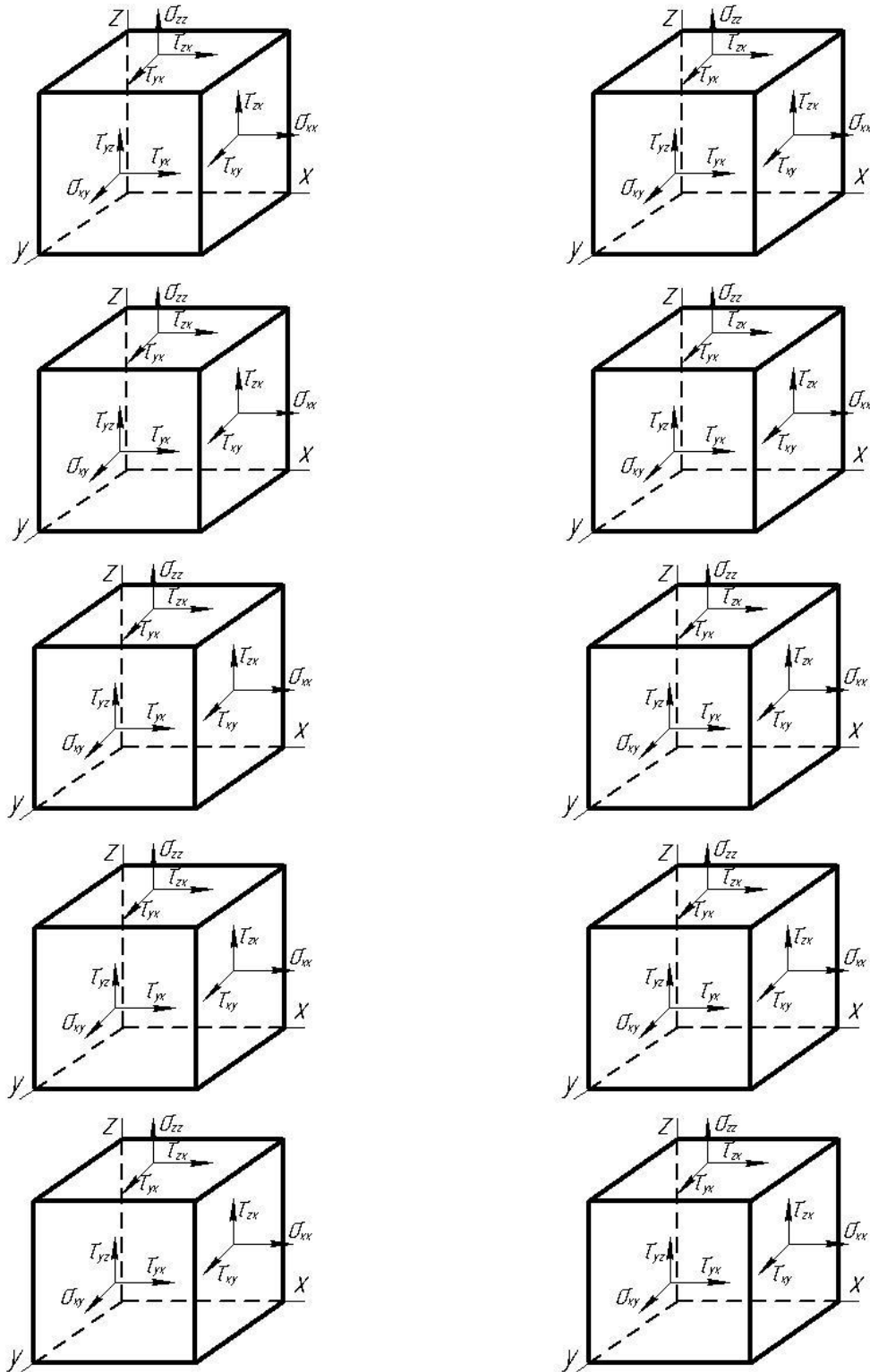


Рисунок 4.5 – Схема елемента, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану



Розв'язок.

1. Компоненти тензора напружень на майданчику  $\mu$  згідно з (4.1):

$$p_x^\mu = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 500 \frac{1}{2} + 500 \frac{1}{2} + 800 \frac{1}{\sqrt{2}} = 1066 \text{ кгс/см}^2;$$

$$p_y^\mu = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 500 \frac{1}{2} + 0 \frac{1}{2} - 700 \frac{1}{\sqrt{2}} = -245 \text{ кгс/см}^2;$$

$$p_z^\mu = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = 800 \frac{1}{2} - 700 \frac{1}{2} - 300 \frac{1}{\sqrt{2}} = -162 \text{ кгс/см}^2.$$

Повне напруження на майданчику  $\mu$

$$p_\mu = \sqrt{(p_x^\mu)^2 + (p_y^\mu)^2 + (p_z^\mu)^2} = \sqrt{1066^2 + 245^2 + 162^2} = 1105 \text{ кгс/см}^2.$$

Нормальне напруження на майданчику

$$\begin{aligned} \sigma_\mu &= \sigma_x l_\mu^2 + \sigma_y m_\mu^2 + \sigma_z n_\mu^2 + 2\tau_{xy} l_\mu m_\mu + 2\tau_{yz} m_\mu n_\mu + 2\tau_{zx} n_\mu l_\mu = \\ &= 500 \frac{1}{2} + 0 \frac{1}{4} - 300 \frac{1}{4} + 2 \cdot 500 \frac{1}{4} - 2 \cdot 700 \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2 \cdot 800 \frac{1}{2\sqrt{2}} = 296 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

Таблиця 4.1 – Початкові дані для розрахунку напруженого стану

Номер варіанта	$\sigma_x$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_y$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_z$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\tau_{zx}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\tau_{yx}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\tau_{zy}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$l_\mu$	$m_\mu$	$n_\mu$
01	600	+200	500	200	-100	100	0,50	0,50	0,710
02	600	400	300	50	200	-100	0,32	0,25	0,914
03	100	700	300	200	100	50	0,15	0,22	0,973
04	500	400	+300	+500	400	50	0,548	0,632	0,548
05	100	800	400	30	-50	-100	0,125	0,350	0,936
06	400	700	100	100	100	100	0,320	0,250	0,914
07	400	600	400	50	60	170	0,380	0,150	0,913
08	400	400	200	200	100	50	0,000	0,200	0,980
09	400	300	600	+50	-50	-100	0,050	0,330	0,943
10	400	200	400	+100	-50	-200	0,250	0,150	0,956
11	300	800	200	+50	-70	-100	0,120	0,135	0,983
12	300	700	300	100	50	100	0,500	0,500	0,870
13	300	200	500	80	100	50	0,390	0,500	0,780
14	200	500	200	100	150	100	0,200	0,500	0,887
15	200	300	400	80	90	60	0,400	0,500	0,768
16	100	+300	300	+80	-100	50	0,300	0,400	0,866
17	200	300	600	35	40	100	0,350	0,250	0,900
18	300	500	400	200	150	-200	0,400	0,500	0,768
19	400	+500	300	+50	100	75	0,150	0,220	0,964
20	500	500	600	100	200	-100	0,220	0,120	0,968
21	600	400	-500	50	80	100	0,400	0,400	0,825
22	700	300	-400	100	-50	-200	0,600	0,510	0,624
23	800	200	200	75	20	-50	0,130	0,33	0,934
24	200	600	+400	+75	-50	100	0,100	0,600	0,794
25	500	0	300	800	500	-700	0,5	0,5	0,71

Дотичні напруження на майданчику  $\mu$

$$\tau_{\mu} = \sqrt{p_{\mu}^2 - \sigma_{\mu}^2} = \sqrt{1105^2 - 296^2} = 1065 \text{ кгс/см}^2.$$

2. Середнє напруження

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{500 + 0 - 300}{3} = 66,7 \text{ кгс/см}^2.$$

Октаедричне дотичне напруження

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(500 - 0)^2 + (0 - 300)^2 + (-300 - 500)^2 + 6(500^2 + 700^2 + 800^2)} = \\ &= 1014 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

3. Тензор напружень

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 500 & 500 & 800 \\ 500 & 0 & -700 \\ -800 & -700 & -300 \end{Bmatrix}.$$

Розкладемо тензор напружень на сферичний і тензор діватора напружень

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} 66,7 & 0 & 0 \\ 0 & 66,7 & 0 \\ 0 & 0 & 66,7 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 433,3 & 500 & 800 \\ 500 & -66,7 & -700 \\ -800 & -700 & -367 \end{Bmatrix}.$$

Сферичний тензор. Тензор діватора.

4. Інваріанти тензора напружень:

$$I_1(T_{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 500 + 0 - 300 = 200 \text{ кгс/см}^2 = 0,2 \text{ Тс/см}^2.$$

$$I_2(T_{\sigma}) = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 =$$

$$= -0,5 \cdot 0 - (-0,3) \cdot 0 - (-0,3) \cdot 0,5 + 0,5^2 + 0,7^2 + 0,8^2 = 1,53 \text{ Тс}^2 / \text{см}^4.$$

$$I_3(T_{\sigma}) = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{xy}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$0,5 \cdot 0 \cdot (-0,3) + 2 \cdot 0,5 \cdot (-0,7) \cdot 0,8 - 0,5(0,7)^2 - 0 \cdot 0,8^2 =$$

$$= (-300) \cdot 0,5^2 = 0,73 \text{ Тс}^3 / \text{см}^6.$$

5. Головні напруження згідно з кубічним рівнянням:

$$\sigma^3 - I_1(T_{\sigma})\sigma^2 - I_2(T_{\sigma})\sigma - I_3(T_{\sigma}) = 0.$$

Кубічне рівняння приводимо до вигляду

$$\sigma^3 + a\sigma^2 + b\sigma + c = 0,$$

$$\text{де } \sigma = y - \frac{a}{3}; \quad a = I_1(T_{\sigma}); \quad b = -I_2(T_{\sigma}); \quad c = -I_3(T_{\sigma}).$$

Запишемо кубічне рівняння у вигляді  $y^3 + Py + q = 0$ , де введено нові коефіцієнти

$$P = -\frac{a^2}{2} + e = -\frac{I_1^2(T_\sigma)}{3} - I_2(T_\sigma) = -\frac{0,2^2}{3} - 1,53 = -1,54 \quad Tc^2 / cm^4,$$

$$q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{ae}{3} + c = 2\left(-\frac{I_1(T_\sigma)}{3}\right)^3 - \frac{-I_1(T_\sigma)(-I_2(T_\sigma))}{3} - I_3(T_\sigma) =$$

$$= -2\left(\frac{-0,2}{3}\right)^3 - \frac{0,2 \cdot 1,53}{3} + 0,73 = 0,627 \quad Tc^3 / cm^6.$$

Рівняння має три дійсні корені лише у разі  $Q < 0$

$$Q = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1,54}{3}\right)^3 + \left(\frac{0,627}{2}\right)^2 = -0,038 < 0.$$

Ці корені набувають значення  $Y_{1,2,3} = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\gamma + 2\pi k}{3}$ , де

$$k = 0, 1, 2, \quad r = \sqrt{\frac{P^3}{27}} = \sqrt{0,136} = 0,369,$$

$$\cos \gamma = -\frac{q}{2r} = -\frac{0,627}{2 \cdot 0,369} = -0,85,$$

$$\gamma = 148,2^\circ, \quad 2\sqrt[3]{r} = 2\sqrt[3]{0,369} = 1,43.$$

Знаходимо значення коренів:

$$k = 0, \quad y_1 = 1,43 \cos \frac{148,2}{3} = 1,43 \cdot 0,65 = 0,93;$$

$$k = 1, \quad y_2 = 1,43 \cos \frac{148,2 + 2 \cdot 180}{3} = 1,43 \cdot (-0,984) = -1,41;$$

$$k = 2, \quad y_3 = 1,43 \cos \frac{148,2 + 2 \cdot 2 \cdot 180}{3} = 1,43 \cdot 0,332 = 0,475.$$

Остаточні головні напруження:

$$\sigma_1 = y_1 - \frac{a}{3} = 0,92 + 0,067 = 996 \quad кгс / см^2;$$

$$\sigma_2 = y_2 - \frac{a}{3} = 0,475 + 0,067 = 541 \quad кгс / см^2;$$

$$\sigma_3 = y_3 - \frac{a}{3} = -1,407 + 0,067 = -1340 \quad кгс / см^2.$$

Для контролю правильності рішення кубічного рівняння використаємо інваріантність коефіцієнтів  $I_1(T_\sigma)$ ,  $I_2(T_\sigma)$ ,  $I_3(T_\sigma)$ :

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 996 + 541 - 1340 = 0,197 \quad Tc / cm^2;$$

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 =$$

$$= -0,996 \cdot 0,541 - 0,541(-1,34) - (1,34) \cdot 0,996 = 1,52 \text{ Тс}^2 / \text{см}^4;$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0,541 \cdot 0,996(-1,34) = -0,722 \text{ Тс}^3 / \text{см}^6.$$

Розходження між  $I_1(T_\sigma)$ ,  $I_2(T_\sigma)$ ,  $I_3(T_\sigma)$ , розрахованими по головних напруженнях і по напруженнях у декартовій системі координат  $x, y, z$ , відповідно становлять:

$$\varepsilon_1 = \frac{200 - 197}{200} \cdot 100\% = 1,5\%;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{153 - 152}{153} \cdot 100\% = 0,65\%;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{0,73 - 0,72}{0,73} \cdot 100\% = 1,1\%.$$

6. Для визначення положення головних майданчиків, тобто для вираження направляючих косинусів нормалей до головних майданчиків  $l, m, n$ , відповідну систему однорідних рівнянь зручно подати у вигляді:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \frac{l}{n} - \tau_{xy} \frac{m}{n} &= -\tau_{xy}; \\ \tau_{xy} \frac{l}{n} + (\sigma_y - \sigma) \frac{m}{n} &= -\tau_{yz}; \\ \tau_{zx} \frac{l}{n} + \tau_{zy} \frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

а відношення між квадратами направляючих косинусів – у вигляді

$$\left(\frac{l}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2}. \quad (4.22)$$

Оскільки з трьох рівнянь системи лише два рівняння незалежні, то визначивши  $\frac{l}{n}, \frac{m}{n}$  з рішення двох рівнянь, третє рівняння використовуємо

для контролю знайдених відношень  $\frac{l}{n}, \frac{m}{n}$ . Після чого зі співвідношення (4.22) знаходимо  $n$ , а потім  $l$  і  $m$ .

У наведеному прикладі:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0,5 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0,3 \text{ тс/см}^2; \quad \tau_{zx} = 0,8 \text{ тс/см}^2; \quad \tau_{yz} = 0,5 \text{ тс/см}^2; \\ \tau_{xy} &= 0,7 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_1 = 0,996 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_2 = 0,541 \text{ тс/см}^2; \quad \sigma_3 = -1,34 \text{ тс/см}^2. \end{aligned}$$

Для розв'язання (4.21) застосуємо детермінантний спосіб розв'язання системи алгебраїчних рівнянь у вигляді:

$$a_1x_1 + b_1y_1 = 0; \quad a_2x_2 + b_2y_2 = c_2, \quad (4.23)$$

$$\text{де } x_1 = \frac{l_1}{m_1}, \quad y_1 = \frac{m_1}{n_1}.$$

У цьому разі:

$$a_1 = 0,5 - 0,996 = -0,496; \quad \epsilon_1 = 0,5; \quad a_2 = 0,5; \quad \epsilon_2 = 0,996;$$

$$D_0 = c_1 \epsilon_2 - a_2 \epsilon_1 = 4,961(-9,96) - 51 - 5 = -24,4;$$

$$D_1 = c_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 c_2 = 8(-9,96) - (-5) \cdot 7 = -44,68;$$

$$D_2 = a_1 c_2 - c_1 a_2 = 4,96 \cdot 7 - 8 \cdot 5 = -5,28.$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{44,68}{24,4} = 1,83;$$

Тоді:

$$y_1 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{5,28}{24,4} = 0,216.$$

Із рівняння (4.21) знаходимо  $n$ :

$$1 + 1,83^2 + 0,216^2 = \frac{1}{n^2}; \quad n_1 = \pm 0,477; \quad \arccos n_1 = 61,51^\circ;$$

$$l_1 = 0,873; \quad \arccos l_1 = 29,2^\circ; \quad m_1 = 0,103; \quad \arccos m_1 = 84,1^\circ.$$

Розраховуємо інтенсивність напружень

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = 2151 \text{ кгс/см}^2.$$

Показники напруженого стану:

$$\eta_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_u} = \frac{996 + 541 - 1340}{2151} = 0,0916;$$

$$\eta_2'' = \frac{\sqrt[3]{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}}{\sigma_u} = \frac{\sqrt[3]{996 \cdot 541 \cdot (-1340)}}{2151} = -0,42;$$

$$\eta_2' = \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2 \cdot 541 - 996 + 1340}{996 + 1340} = 0,8.$$

### Контрольні запитання

1. Що називають тензором напружень?
2. Які є компоненти тензора напружень другого рангу?
3. Що виражає закон парності дотичних напружень?
4. Що називають інваріантами тензора напружень?
5. Як визначаються головні напруження?
6. Що називають гідростатичним тиском?
7. Що називають девіатором напружень?
8. Як визначаються перший, другий та третій інваріанти девіатора напружень?
9. Як записується формула для визначення інтенсивності напружень?
10. Як записується формула для визначення інтенсивності дотичних напружень?
11. Який вигляд мають диференціальні рівняння рівноваги?
12. Що називають плоским напруженим станом?
13. Який порядок розрахунку напруженого стану елемента, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану?

## 5 РОЗРАХУНКИ ЗА МЕЖАМИ ПРУЖНОСТІ

### 5.1 Розрахунки за межами пружності в умовах розтягу-стиску статично-невизначених систем

Нехай статично невизначена система (рис. 5.1) розтягується від зовнішньої сили  $P$ .

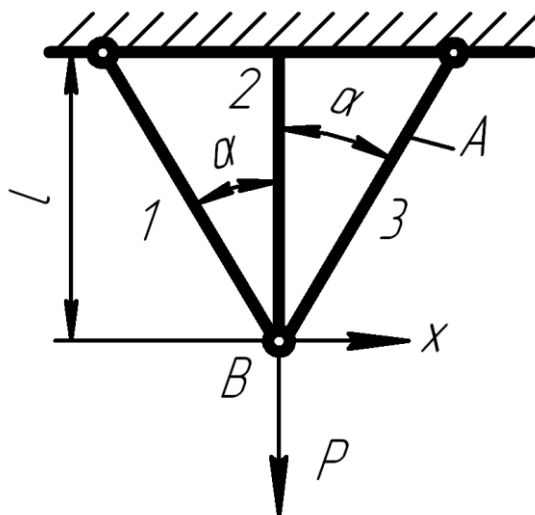


Рисунок 5.1 – Статично-невизначена система

При розв'язанні системи для знаходження внутрішніх сил  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  застосовуємо рівняння статки  $\sum F(x) = 0$  (рис. 5.2),

$$N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0, \quad (5.1)$$

звідки  $N_1 = N_3$ ,

$$\sum F(y) = 0, \quad (5.2)$$

$$N_2 + 2N_1 \cos \alpha = P. \quad (5.3)$$

Кінематика (рис. 5.3)

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \cos \alpha. \quad (5.4)$$

Фізика (закон Гука)

$$\frac{N_1 l_1 \cdot EA}{EA \cdot N_2 l_2} = \cos \alpha, \quad (5.5)$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \cos \alpha. \quad (5.6)$$

Одержимо

$$N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad (5.7)$$

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (5.8)$$

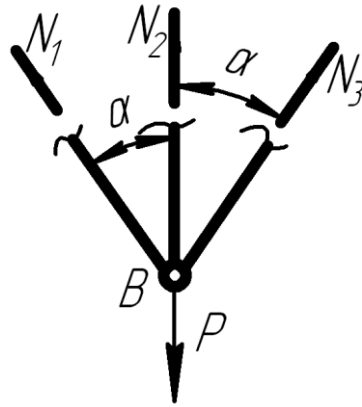


Рисунок 5.2

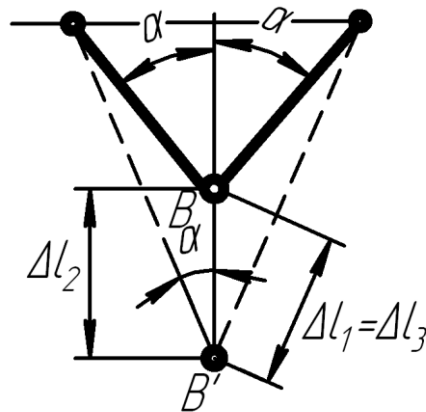


Рисунок 5.3

Граничну силу  $P$  знаходимо з умови  $N_2 > N_1 = N_3$ , одержимо

$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{A} \leq \sigma_T, \quad (5.9)$$

тоді  $P_{zp} \leq \sigma_T A (1 + 2 \cos^3 \alpha)$ .

Нехай  $\alpha = 30^\circ$ , довжина стержня  $l = 1$  м, границя текучості  $\sigma_T = 200$  МПа, площа стержнів  $A = 2$  см<sup>2</sup>, тоді гранична сила

$$P_{cp}^{[\sigma]} \leq 2000 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} (1 + 2 \cos^3 30^\circ) = 14445 \text{ кГ} = 144450 \text{ Н.}$$

Нехай стержні виготовлені з ідеально пластичного матеріалу, який не зміцнюється  $\sigma_T = const$ . Тоді буде ситуація, коли при зростанні сили  $P$  у стержнях 1, 2, 3 виникає відома внутрішня сила  $\sigma_T A$  (див. рис. 5.4). Система стає статично визначеною. Тоді

$$P_{zp} \leq 2\sigma_T A \cos \alpha + \sigma_T A = \sigma_T A (1 + 2 \cos \alpha). \quad (5.10)$$

Підставивши вихідні дані, одержимо

$$P_{cp}^{[P]} \leq 2000 \frac{\pi \cdot 2^2}{4} (1 + 2 \cos 30^\circ) = 17166 \text{ кГ} = 171660 \text{ Н.}$$

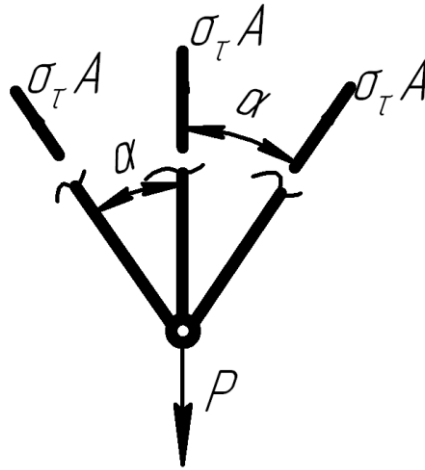


Рисунок 5.4

Таким чином, розрахунок по допустимих навантаженнях відрізняється від розрахунку по допустимих напруженнях

$$\frac{P_{zp}^{[\sigma]}}{P_{zp}^{[P]}} = \frac{17166}{14445} = 1,19.$$

Економія металу при цьому становить 19%.

Якщо стержні виготовили із матеріалу, який зміцнюється за законом кривої течії, при цьому апроксимація кривої течії має вигляд  $\sigma_i = A^* \varepsilon_i^n$ . Коефіцієнти апроксимації кривої течії  $A^* = 200$  МПа,  $n = 0,22$ . Тоді у формулу (5.10) необхідно підставити не  $\sigma_T = const = 2000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ , а величину напруження текучості, яке залежить від величини напруження деформації  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ . Таким чином, граничне навантаження буде залежати від величини інтенсивності деформації [8].

Нехай у нашому випадку стержень 2 видовжується на величину  $\Delta l = 5$  мм, тоді інтенсивність деформацій у стержні 2 дорівнює

$$\varepsilon_i = \ln \frac{l_i}{l_0} = \ln \frac{100,5}{100} = 0,00499, \quad (5.11)$$

а інтенсивність напружень

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^n = 8000 \cdot 0,00499^{0,22} = 2492 \text{ кг/см}^2 = 249 \text{ МПа}.$$

Підставивши значення напруження текучості у формулу (5.10), одержимо величину граничної сили для матеріалу, який зміцнюється

$$P'_{zp}^{[P]} = \sigma_i(\varepsilon_i) \cdot (1 + 2 \cos \alpha) \cdot A = 2492(1 + 2 \cos 30^\circ) \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 21389 \text{ кг}.$$

Отже, маємо економію металу 48%

$$\frac{P'_{zp}^{[P]}}{P_{zp}^{[\sigma]}} = \frac{21389}{14445} = 1,48.$$

$A^*$  – коефіцієнт апроксимації (не площа).



## 5.2 Граничний стан при крученні вала за межами пружності

При крученні вала дотичні напруження в його поперечних перерізах розподілені за лінійним законом [рис. 5.5], максимального значення ці напруження досягають у точках контуру

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}.$$

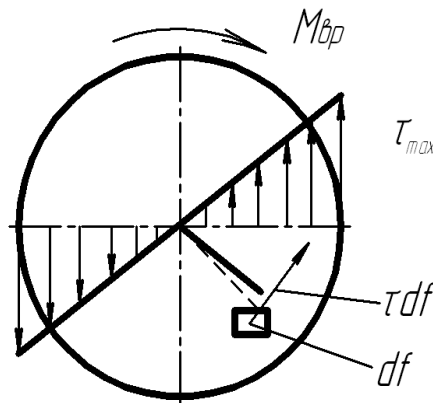


Рисунок 5.5

Отже, матеріал усередині вала недовантажений.

При зростанні крутного моменту до  $M_{кр}^T$  напруження в точках контуру перерізу досягнуть межі текучості, а в середині вал знаходитиметься у пружному стані.

При подальшому зростанні крутного моменту напруження у внутрішніх точках бруса також досягнуть межі текучості.

На рис. 5.6, б зображено епюру дотичного напруження для випадку, коли частина поперечного перерізу охоплена пластичною областю (матеріал «тече», пластична хвиля охоплює верхню частину перерізу). При цьому внутрішня область знаходиться у пружному стані.

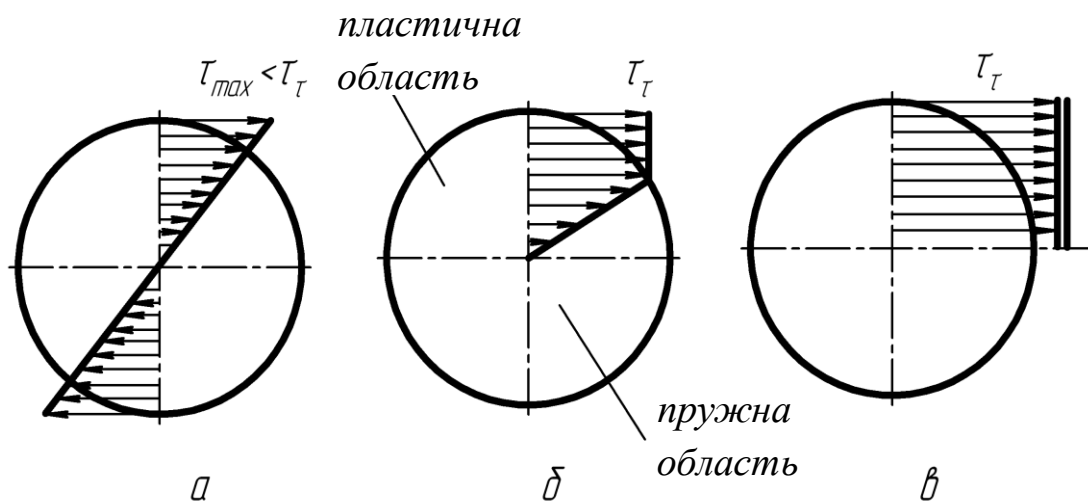


Рисунок 5.6

При подальшому збільшенні крутного моменту досягається такий стан, коли пружна зона зникне і по всьому перерізі напруження стануть рівні межі текучості (рис. 5.6, в). Це буде повне вичерпання несучої здатності вала. Обчислимо граничний крутний момент по допущеному напруженню і навантаженню.

По допустимому напруженню

$$M_{\sigma}^{[ep]} = \tau_{max} \cdot W_p = \tau_{max} \cdot \frac{\pi d^3}{16}. \quad (5.12)$$

По допустимому навантаженню

$$M_{\tau}^{[p]} = \int_F \tau_T \rho dF = \tau_T \int_0^{d/2} \rho 2\pi r dr = \tau_T \frac{\pi d^3}{12} = \tau_T W_p^*, \quad (5.13)$$

де  $W_p^*$  – пластичний полярний момент опору поперечного перерізу.

Для кільцевого поперечного перерізу

$$W_p^* = \frac{\pi D^3}{12} (1 - \alpha^4) \quad \text{де } \alpha = \frac{d}{D}. \quad (5.14)$$

При розрахунку по допустимому напруженню небезпечний стан виникає, коли дотичні напруження досягають на поверхні значення  $\tau_T$ , тоді

$$M_{\sigma}^{[ep]} = \tau_{max} \cdot W_p. \quad (5.15)$$

Граничний крутний момент відповідний виникненню текучості в усіх точках поперечного перерізу буде рівним

$$M_{\tau}^{[p]} = \tau_T W_p. \quad (5.16)$$

Таким чином,

$$\frac{M_{\tau}^{[p]}}{M_{\sigma}^{[ep]}} = \frac{W_p^*}{W_p} = \frac{\frac{\pi D^3}{12} (1 - \alpha^4)}{\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)}. \quad (5.17)$$

Це відношення прагне до одиниці у міру зменшення товщини стінки. Максимальним воно стає для суцільного перерізу

$$\frac{M_{\tau}^{[p]}}{M_{\sigma}^{[ep]}} = \frac{\frac{\pi D^3}{12}}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{4}{3}, \quad (5.18)$$

тобто розрахунок по допустимих навантаженнях сприяє або економії металу на 33%, або збільшенню граничного крутного моменту. Усі висновки виконано для ідеально-пластичного матеріалу.

### 5.3 Граничний стан балок при згині за межами пружності

При розрахунку на згин балки з пластичного матеріалу по допустимому напруженню, небезпечним вважається стан конструкції, за якого в крайніх точках небезпечного перерізу нормальні напруження досягають межі текучості (для симетричного поперечного перерізу (рис. 5.7, а). Елю-

ру нормального напруження показано на рис. 5.7, б. При збільшенні навантаження, що діє на балку, а отже, і згинаючого моменту, який виникає в небезпечному поперечному перерізі, текучість охоплюватиме все більшу частину перерізу; для деякої стадії навантаження еюра нормального напруження матиме вигляд, зображений на рис. 5.7, в. В усіх точках зони перерізу напруження рівні напруженню текучості  $\sigma_T$  (якщо відсутнє зміцнення). Для частини перерізу, що працює пружно, напруження лінійно залежить від координати  $y$ .

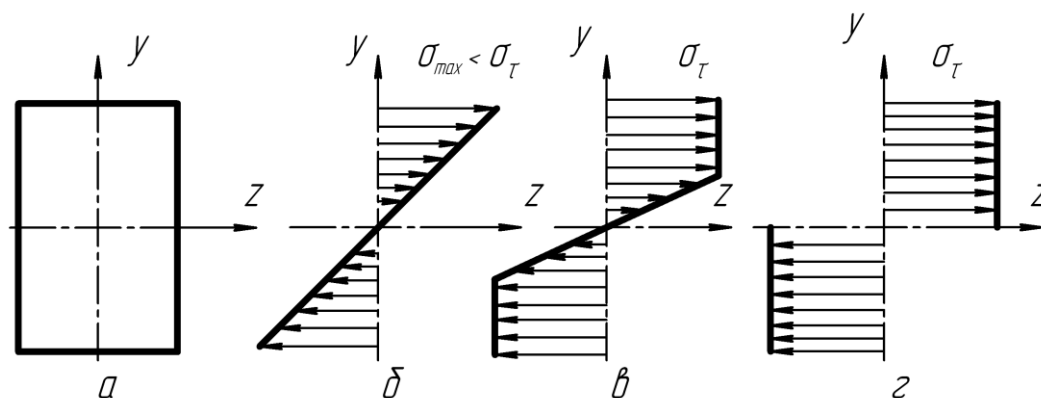


Рисунок 5.7

Несуча здатність балки буде вичерпана, коли в усіх точках небезпечного перерізу нормальні напруження досягають межі текучості (рис. 5.7, г). Відповідний згинаючий момент буде граничним  $M_{cp}$ .

Виникнення повної текучості в деякому поперечному перерізі балки можна порівняти з утворенням у цьому перерізі «пластичного» шарніра, який дозволяє при постійному граничному навантаженні частинам балки, розділеним цим шарніром, вільно обертатися один з одним.

Граничний згинаючий момент визначають за формулою

$$M_{cp} = \sigma_T \cdot W_z^*, \quad (5.23)$$

де  $W_z^*$  – пластичний момент опору поперечного перерізу балки.

При симетричному поперечному перерізі балки

$$W_z^* = 2S_{max}, \quad (5.24)$$

де  $S_{max}$  – статичний момент половини перерізу щодо нейтральної осі. Наприклад, для прямокутного перерізу шириною  $b$  і висотою  $h$

$$W_z^* = 2 \left( \frac{bh}{2} \frac{h}{4} \right) = \frac{bh^2}{4}. \quad (5.25)$$

При несиметричному поперечному перерізі (рис. 5.8) нейтральна вісь за наявності напруження текучості по всьому перерізу ділить його на дві рівновеликі частини (положення нейтральної осі у пружній і пластичній стадіях не збігається). Пластичний момент опору визначають за формулою

$$W_z^* = S_1 + S_2, \quad (5.26)$$

де  $S_1 + S_2$  – статичні моменти напівперерізів щодо нейтральної осі.

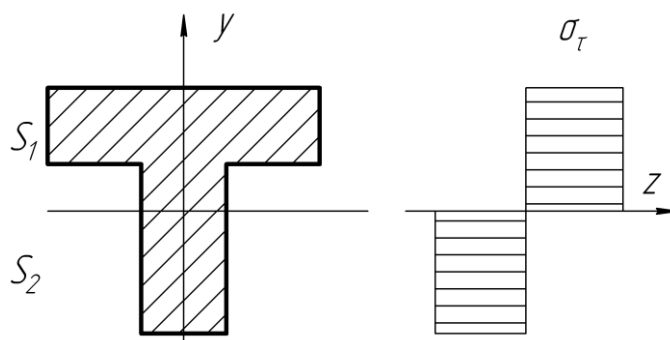


Рисунок 5.8

Граничний згинаючий момент при розрахунку по допустимих напруженнях

$$M_{zp}^{[\sigma]} = \sigma_T W_z. \quad (5.27)$$

Відношення цих моментів за двома методиками розрахунку

$$\alpha = \frac{M_{zp}^{[P]}}{M_{zp}^{\sigma}} = \frac{W_z^*}{W_z}. \quad (5.28)$$

Значення цього відношення, очевидно, визначається лише формою поперечного перерізу. Так, для прямокутного перерізу  $\alpha = 1,5$ ; для прокатних двотаврів при вигині у площині найбільшої жорсткості в середньому  $\alpha = 1,15$ .

## 5.4 Приклади розрахунків за межами пружності

### Контрольна робота

*Приклад.*

Визначити за способом граничних навантажень необхідний діаметр вала (рис. 5.9), якщо для матеріалу вала  $\tau_T = 1600 \text{ кг/см}^2$  необхідний коефіцієнт запасу  $[n] = 2$ .

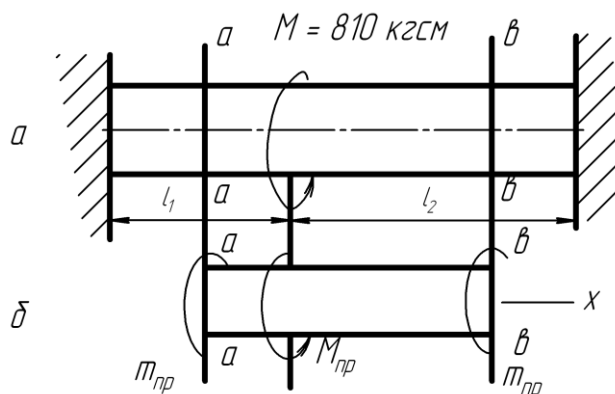


Рисунок 5.9

*Рішення.*

У граничному стані у всіх поперечних перерізах обох ділянок вала крутні моменти досягають граничного значення  $m_{zp}$ . Двома перерізами  $a-a$  і  $b-b$  виділимо частину вала (рис. 5.9). У стані граничної рівноваги на відсічену частину діє зовнішній момент  $M_{zp}$  і моменти  $m_{zp}$ , замінюючи дію відкинутої частини вала.

Умова рівноваги виділеної частини вала

$$M_{zp} = 2m_{zp} = 2 \frac{\pi d^3}{12} \tau_T = \frac{\pi d^3}{6} \tau_T. \quad (5.19)$$

Момент, що допускається

$$[M] = \frac{M_{zp}}{[n]} = \frac{\pi d^3 \tau_T}{6 \cdot 2} = \frac{\pi d^3}{12} \tau_T. \quad (5.20)$$

Звідки

$$d = \sqrt[3]{\frac{12[M]}{\pi \tau_T}}. \quad (5.21)$$

За умовою міцності момент  $M$ , прикладений до вала, дорівнює моменту, що допускається, тобто  $[M] = M = 8 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{см}$ , отже,

$$d = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 8 \cdot 10^5}{3,14 \cdot 1600}} = 12,4 \text{ см}. \quad (5.22)$$

При рішенні цієї задачі за способом граничних навантажень відношення довжин учасників  $e_1:e_2$  не має значення. Застосовуючи спосіб напруження, що допускається, це відношення має істотне значення: значення моменту, що допускається, буде найбільшим при  $e_1 - e_2$ .

*Приклад.*

Визначити інтенсивність рівномірно розподіленого допустимого навантаження для балки, наведеної на рис. 5.10. Межа текучості матеріалу балки  $\sigma_T = 2300 \text{ кг/см}^2$ , необхідний коефіцієнт запасу  $[n] = 1,6$ .

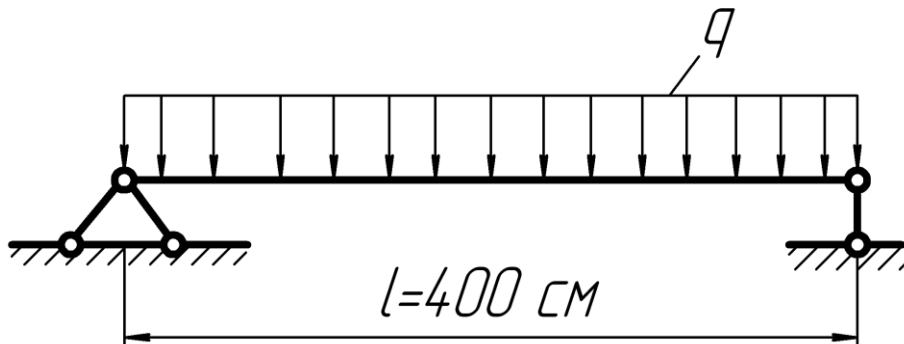


Рисунок 5.10

*Рішення.*

Визначимо положення нейтральної осі поперечного перерізу за умови, що вона ділить поперечний переріз на дві рівновеликі частини (у граничному стані). Площа стінки більша площі полиці, і отже, нейтральна вісь перетинає стінку. Відстань нейтральної осі від внутрішньої грані полиці  $y_0$ ,  $F_1 = F_2$  (рис. 5.11).

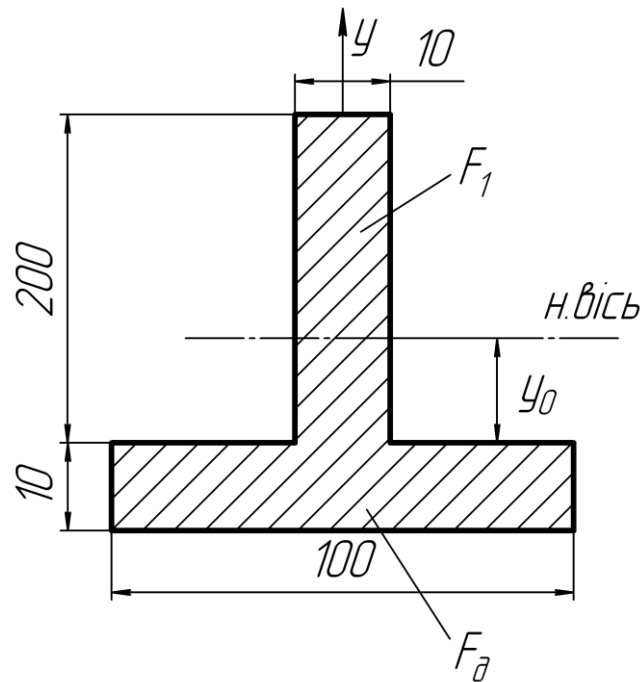


Рисунок 5.11

$$10 \cdot 1 + 1y_0 = 1(20 + y_0),$$

звідки  $y_0 = 5$  см.

Статичні моменти напівперерізів щодо нейтральної осі:

$$S_1 = 1 \cdot 15 \frac{15}{2} = 112,5 \text{ см}^3;$$

$$S_2 = 10 \cdot 1 \cdot 5,5 + 1 \cdot 5 \cdot 2,5 = 67,5 = 112,5 \text{ см}^3.$$

Пластичний момент опору поперечного перерізу

$$W_z^* = S_1 + S_2 = 112,5 + 67,5 = 180 \text{ см}^3.$$

Граничний згинаючий момент

$$M_{ep} = \sigma_T W_z^* = 2300 \cdot 180 = 414 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Допущений згинаючий момент

$$[M] = \frac{M_{ep}}{[n]} = \frac{414 \cdot 10^3}{1,6} = 258,8 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Найбільший згинаючий момент виникає у перерізі посередині прольоту

$$M_{\max} = \frac{qe^2}{8}.$$

Прирівнюючи максимальний згинаючий момент до допустимого моменту, одержуємо

$$\frac{[q]e^2}{8} = [M],$$

звідки

$$[q] = \frac{8[M]}{e^2} = \frac{8 \cdot 258,8 \cdot 10^3}{400^2} = 12,94 \text{ кг/см}^2.$$

### **Контрольні запитання**

1. Який принцип розрахунку статично-невизначеної системи?
2. Який вигляд має еюра дотичних напружень при крученні валу?
3. Як розраховується граничний крутний момент по допустимому напруженню?
4. Як розраховується граничний крутний момент по допустимих навантаженнях?
5. Чому дорівнює граничний крутний момент?
6. Який вигляд мають еюри нормального напруження при вигині балки для різних величин навантажень?
7. Як визначається граничний згинаючий момент?
8. Як визначається пластичний момент опору?
9. Який порядок визначення необхідного діаметра вала за способом граничних навантажень?
10. Яким є порядок визначення інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження?

## 6 РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНА РОБОТА

### 6.1 Розрахунок вала на витривалість при згині та крученні

*Вихідні дані.* Ступінчатий вал обертається на двох шарикопідшипниках (рис 6.1), на вал діє сила  $P$  та циклічні крутні моменти  $T$  з коефіцієнтом асиметрії

$$r = \frac{M_{min}}{M_{max}}; M_{max} = P \cdot a$$

Якість поверхні характеризується величиною шорсткості.

Потрібно:

1. Показати розрахункову схему вала.
2. Побудувати епюри згинальних моментів та визначити небезпечні перерізи.
3. Розрахувати згинаючі моменти в небезпечних перерізах.
4. З умови міцності при згині і крученні визначити  $[P]$  (допустиму величину сили  $P$ ).
5. Розрахувати коефіцієнт запасу вала.

Дані взяті з табл. 6.1.

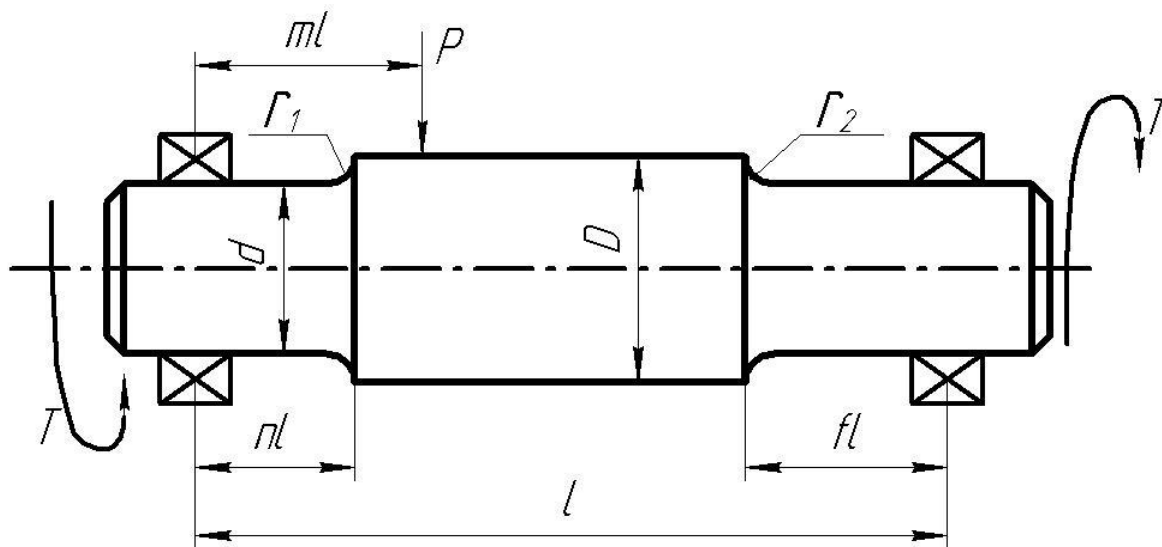


Рисунок 6.1



Таблиця 6.1 – Вихідні дані для виконання РГЗ

№ рядка	Матеріал	$l$	$a$	$M$	$n$	$f$	$D$			$r_1$	$r_2$	$[n_\sigma]$ $[n_\tau]$	$r$	Шорсткість $R_a$ , мм
							$D$	$D$	$D$					
		см					мм							
0	Сталь 35	85	25	0,44	0,32	0,39	42	98	2	2	9	2,2	-0,7	1,25
1	Сталь 30	80	20	0,42	0,34	0,40	41	80	1	1	10	2,1	-0,8	2,3
2	Сталь 10	95	35	0,48	0,34	0,39	43	74	4	4	7	2,4	-0,6	0,32
3	Сталь 45	90	30	0,46	0,33	0,38	38	76	3	3	8	2,3	-0,4	0,16
4	Сталь 50	105	45	0,52	0,30	0,36	46	70	6	6	4	2,7	-0,3	2,5
5	30ХМ	100	40	0,50	0,35	0,34	45	72	3	3	3	2,8	0,4	1,26
6	40Х	115	55	0,56	0,38	0,37	48	66	9	9	3	2,9	0,5	0,32
7	12ХН3А	110	50	0,54	0,37	0,33	47	68	10	10	3	2,6	0,4	0,63
8	30ХГСА	125	65	0,48	0,40	0,31	50	62	10	10	1	3,0	0,7	0,16
9	40ХНМА	120	60	0,58	0,39	0,32	49	64	9	9	2	2,9	0,6	0,32

## 6.2 Приклад виконання розрахунково-графічного завдання

*Вихідні дані:* матеріал – сталь 40ХН;

$l = 120 \text{ см}; a = 50 \text{ см}; m = 0,52; n = 0,35; f = 0,30; d = 45 \text{ мм}; D = 70 \text{ мм}; r_1 = 9 \text{ мм}; r_2 = 5 \text{ мм}; [n_\sigma] = 2,5; r = -0,4; \text{ Шорсткість } R_a = 0,32.$

*Розв'язок*

Показники статичної і циклічної міцності сталі 40ХН (див. додатки В, Г)  
 $\sigma_{\text{міц}} = 1000 \text{ МПа}; \sigma_{0,2} = 800 \text{ МПа}; \tau_{0,2} = 390 \text{ МПа}; \sigma_{-1} = 400 \text{ МПа}; \tau_{-1} = 240 \text{ МПа};$   
 $\psi_n = 0,15; \psi_\tau = 0,075.$

1. Знаходимо максимальну і мінімальну величини крутних моментів:

$$M_{\text{max}} = P \cdot a = P \cdot 50 \text{ см}; M_{\text{min}} = r \cdot M_{\text{max}} = (-0,4) \cdot 50 = -20P \text{ см}.$$

2. Креслимо розрахункову схему вала згідно з вихідними даними (рис. 6.1).

3. Будуємо епюри згинаючих моментів і визначаємо небезпечні перерізи вала.

4. Визначаємо опорні реакції (рис. 6.1).

$$V_B = \frac{0,52 \cdot 120 \cdot P}{120} = 0,52P;$$

$$\sum M_B = 0 \quad V_A = 120 - P \cdot (57,6) = 0.$$

$$V_A = \frac{P \cdot 57,6}{120} = 0,48P.$$

*Перевірка:*

$$\sum Y = 0, \quad V_A - P + V_B = 0; \quad 0,48P + 0,52P - P = 0.$$

5. Визначаємо згинаючі моменти у характерних перерізах:

$$M_A = 0; M_C = V_A \cdot 62,4 = 0,48 \cdot P \cdot 62,4 = 30P \text{ см}.$$

Будуємо епюру  $M$  (рис. 6.1). Крутні моменти по довжині вала однакові. Тому небезпечні перерізи визначаємо, орієнтуючись на розрахункову схему вала і епюру згинаючих моментів (рис. 6.2). Такими є перерізи  $C$  і  $E$ , тому що за наявності концентраторів напружень у вигляді ступінчастої зміни діаметрів тут діють згинальні моменти, близькі до максимального.

6. Обчислення згинаючих моментів у небезпечних перерізах.

Переріз  $C$ :

$$M_C = V_A \cdot 35 = 0,48P \cdot 35 = 16,8P \text{ см}.$$

Переріз  $E$ :

$$M_E = V_B \cdot 40 = 0,52P \cdot 40 = 20,8P \text{ см}.$$

7. Визначимо  $[P]$ . Знаходимо  $[P]_C$  і  $[P]_E$  – величини допустимої сили для кожного перерізу. Менша з них і буде  $[P]$ .

I. Переріз C.

Знаходимо  $[P]_\sigma^C$  – допустиму величину сили  $P$  з умови міцності при згинанні.

$$n_\sigma \geq [n_\sigma] \quad (6.1)$$

Нормальне напруження в небезпечній точці перерізу при обертанні вала змінюється за симетричним циклом. Тому коефіцієнт запасу обчислимо за формулою

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\omega} \cdot \sigma_a} \quad (6.2)$$

$$\text{Амплітудне напруження } \sigma_a = \sigma_{\max} = \frac{M}{W}.$$

Осьовий момент опору перерізу вала

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4,5^3}{32} = 8,95 \text{ см}^3. \text{ Тоді}$$

$$\sigma_a^C = \frac{MC}{W} = \frac{16,8P}{8,95} = 1,89P \cdot \frac{1}{\text{см}^2}.$$

Загальний коефіцієнт зниження границі витривалості деталі при симетричному циклі знайдемо за формулою:

$$K_{\sigma\omega} = \frac{K_\sigma}{\beta \varepsilon_\sigma} \quad (6.3)$$

При  $\frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56$ :  $\frac{r^C}{d} = \frac{r_1}{d} = \frac{9}{45} = 0,2$  і  $\sigma_M = 1000 \text{ МПа}$  коефіцієнти концентрації напружень  $K_\sigma^C = 1,38$ ;  $K_\tau^C = 1,24$  (див. додаток Д)  $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0,755$  (див. додаток Е). При шорсткості  $R_a 0,32 \frac{1}{\beta} = 1$  (додаток Ж)

$$K_{\sigma\omega}^C = \frac{1,38 \cdot 1}{0,755} = 1,83; K_{\omega}^C = \frac{1,24 \cdot 1}{0,755} = 1,64$$

із (6.1) і (6.2) одержимо:

$$\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\omega}^C \sigma_a^C} \geq [n_\sigma] = \frac{400}{1,83 \cdot 1,89P/10^2} \geq 2,5 \quad [P]_\sigma^C = \frac{400 \cdot 10^2}{1,83 \cdot 1,89 \cdot 2,5} = 4626 \text{ Н}. \quad (6.5)$$

$$\text{Розмірність: } \sigma_{-1} - \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}, \sigma_a^C = \frac{P}{\text{мм}^2}.$$

II Знаходимо  $[P]_r^C$  – допустиму величину сили  $P$  з умови міцності при крученні

$$n_\tau \geq [n_\tau]$$

Матеріал у небезпечній точці сприймає асиметричний цикл дотичних напружень. Тому визначимо допустиме значення сили  $[P]_{\tau(r)}^C$  з умови втомної міцності і сили  $[P]_{\tau(r)}^C$ . Записуємо умову втомної міцності  $n_{\tau(r)} \geq [n_\tau]$ . Визначаємо коефіцієнт запасу  $n_{\tau(r)}$  по відношенню до границі витривалості. Для цього обчислюємо добуток  $\rho \cdot K_\omega^C$ . Характеристика

$$\rho = \frac{\tau_a}{\tau_C}:$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_{кр\max}}{W_p} - \frac{M_{кр\min}}{W_p} \right); \quad (6.6)$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_{кр\max}}{W_p} + \frac{M_{кр\min}}{W_p} \right).$$

Полярний момент опору перерізу вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W = 2 \cdot 8,946 = 17,9 \text{ см}^3 \quad (6.7)$$

$$\tau_a = \frac{M_{кр\max} - M_{кр\min}}{2W_p} = \frac{(50 - (-20))P}{2 \cdot 17,9} = 1,96 P / \text{см}^2. \quad (6.8)$$

$$\tau_C = \frac{(50 - 20)P}{2 \cdot 17,9} = 0,84 P / \text{см}^2; \quad (6.9)$$

$$\rho = \frac{1,96P}{0,84P} = 2,33. \quad (6.10)$$

так як величина добутку  $\rho \cdot K_\omega^C = 2,33 \cdot 1,64 > 1$ , то для обчислення коефіцієнта запасу використовуємо формулу (6.11). Тоді

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_\omega^C \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_C} \geq [n_\tau] = \frac{240}{1,64 \left( \frac{1,96P}{10^2} \right) + 0,075 \left( \frac{0,84P}{10^2} \right)} \geq 2,5 \quad (6.11)$$

$$[P]_{\tau(r)}^C = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84)2,5} = 2970 \text{ Н}. \quad (6.12)$$

Розмірність:  $\tau_{-1}$  - Н/мм<sup>2</sup>;  $\tau_a, \tau_C$  - P/мм<sup>2</sup>.

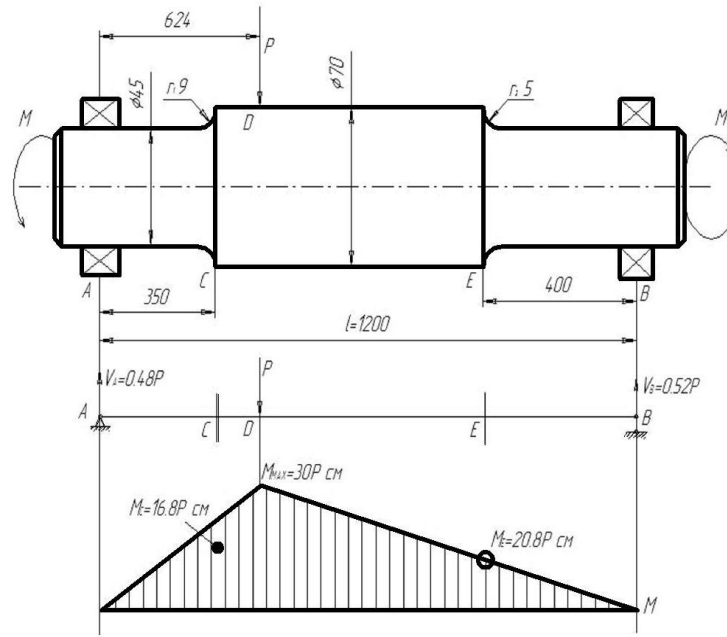


Рисунок 6.3 – Розрахункова схема вала  
Знаходження  $[P]_{\tau(T)}^L$ .

Записуємо умову статичної міцності

$$n_{\tau(T)} \geq [n_{\tau}]. \quad (6.13)$$

Коефіцієнт запасу по відношенню до границі текучості обчислюємо за формулою

$$n_{\tau(T)} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}}, \quad (6.14)$$

де 
$$\tau_{\max} = \tau_a + \tau_c = (1,956 + 0,838) \frac{P}{\text{см}^2} = 2,9 \frac{P}{\text{см}^2} \quad (6.15)$$

Враховуючи (6.13 - 6.15), одержимо

$$\frac{\tau_T}{\tau_{\max}} \geq [n_{\tau}] \Rightarrow \frac{390}{2,90/10^2} \geq 2,5 \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^{\omega} = \frac{390 \cdot 10^2}{2,9 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(T)}^{\omega} = 5390 \text{ Н}.$$

З порівняння величин

$$[P]_{\sigma}^{\omega} = 3720 \text{ Н}, \quad [P]_{\tau(r)}^{\omega} = 2970 \text{ Н}, \quad [P]_{\tau(T)}^{\omega} = 5390 \text{ Н}.$$

Робимо висновок, що для перерізу  $L$  допустима величина сили  $[P]^L = 2970 \text{ Н}$ .

Переріз E.

1. Знаходимо  $[P]_{\sigma}^E$

$$\sigma_a^E = \sigma_{\max}^E = \frac{M_E}{W} = \frac{20,8P}{8,95} = 2,32 \frac{P}{\text{см}^2}.$$

Визначаємо коефіцієнти  $K_{\sigma D}^E$  і  $K_{\tau D}^E$ .

При  $\frac{D}{d} = \frac{70}{45} = 1,56$ ,  $\frac{r^E}{d} = \frac{r_2}{d} = \frac{5}{45} = 0,11$  і  $\sigma_E = 1000 \text{ МПа}$ ,

$$K_{\sigma}^E = 1,62, \quad K_{\tau}^E = 436, \quad \varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\tau} = 0,76; \quad 1/\beta = 1.$$

$$\text{Тоді } K_{\sigma_d}^E = \frac{1,62}{0,76} = 2,15; K_{\tau_d}^E = \frac{1,36 \cdot 1}{0,76} = 1,8$$

$$\frac{\sigma - 1}{K_{\sigma}^E \sigma_a^E} \geq [n_{\sigma}] = \frac{400}{2,15(1,79P/10^2)} \geq 2,5 \Rightarrow [P]_{\sigma}^E = \frac{400 \cdot 10^2}{2,15 \cdot 1,79 \cdot 2,5} \Rightarrow [P]_{\sigma}^E = 4160H$$

$$\text{Розмірність } \sigma_{-1} - H / \text{мм}^2, \sigma_a^E - \frac{P}{\text{мм}^2}.$$

Обчислюємо  $[P]_{\tau}^E$  при асиметричному крученні.

Критерій  $\rho \cdot K_{\tau_d}^E = 2,33 \cdot 1,8 > 1$ , і коефіцієнт запасу по відношенню до границі витривалості обчислюємо за формулою

$$n_{\tau(r)} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau_d}^E \cdot \tau_a^E + \psi_{\tau} \cdot \tau_c} \geq [n_{\tau}] \Rightarrow \frac{240}{1,8(\frac{1,961}{10^2}) + 0,0075(\frac{0,841}{10^2})} \geq 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,8 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84)2,5} \Rightarrow [P]_{\tau(r)}^E = 2680H.$$

Амплітудні  $\tau_a$  і середні  $\tau_c$  напруження в перерізах  $L$  і  $E$  однакові.

Тому

$$[P]_{\tau(r)}^E = [P]_{\tau(r)}^L = 5340H.$$

Як видно з порівняння  $[P]_{\sigma}^E$ ,  $[P]_{\tau(r)}^E$  і  $[P]_{\tau(r)}^L$ , для перерізу  $E$  допустима величина сили  $[P]^E = 2680H$ .

Отже, допустима величина сили  $P$  для вала визначається міцністю втоми матеріалу в небезпечній точці перерізу  $E$ .

$$[P] = [P]^E = 2680H.$$

### 6.3 Обчислення коефіцієнта запасу міцності

При плоскому напруженому стані коефіцієнт запасу визначають за формулою

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (6.16)$$

Обчислюємо  $n$  для кожного ймовірно небезпечного перерізу. Менша величина є коефіцієнтом запасу вала.

Коефіцієнт запасу  $n_{\sigma}$  по нормальному напруженню обчислюється в небезпечній точці перерізів  $L$  і  $E$ .

*Переріз  $L$*

$$n_{\sigma}^L = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma_d}^L \cdot \sigma_a^L}, \quad (6.17)$$

$$\sigma_a^L = 1,88 \cdot [P] / \text{см}^2 = \frac{1,88 \cdot 2680}{10^2} \cdot \frac{H}{\text{мм}^2} = 50,4 \text{ МПа.}$$

Тоді

$$n_\sigma^L = \frac{400}{1,83 \cdot 50,4} \Rightarrow n_\sigma^L = 4,34,$$

$$n_\tau^L = \frac{\tau_{-1}}{K_{\sigma D}^L \cdot \tau_a + \psi_\tau \tau_a} = \frac{240 \cdot 10^2}{(1,64 \cdot 1,96 + 0,075 \cdot 0,84) 2680} \Rightarrow n_\tau^L = 2,74,$$

$$n_L = \frac{n_\sigma^L \cdot n_\tau^L}{\sqrt{(n_\sigma^L)^2 + (n_\tau^L)^2}} = \frac{4,34 \cdot 2,74}{\sqrt{4,34^2 + 2,74^2}} \Rightarrow n_L = 2,3.$$

Переріз  $E$

$$n_\sigma^E = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}^E \cdot \sigma_a^E}, \quad (6.18)$$

$$\sigma_a^E = 1,79 [P] / \text{см}^2 = \frac{1,79 \cdot 2680}{10^2} \frac{H}{\text{мм}^2} = 48 \text{ МПа.}$$

Тоді

$$n_\sigma^E = \frac{400}{48 \cdot 2,3} \Rightarrow n_\sigma^E = 3,6.$$

Оскільки величина  $[P]$  визначена з умови міцності матеріалу в небезпечній точці перерізу  $E$  при крученні, то

$$n_\tau^E = [n_\tau] = 2,5; \quad n_E = \frac{n_\sigma^E n_\tau^E}{\sqrt{(n_\sigma^E)^2 + (n_\tau^E)^2}} = \frac{3,6 \cdot 2,5}{\sqrt{3,6^2 + 2,5^2}} \Rightarrow n_\sigma = 2,05.$$

Значить, коефіцієнт запасу вала

$$n = n_E = 2,05.$$

Відповідь:  $[P] = 2680 \text{ Н}$ ;  $n = 2,05$ .

### Контрольні запитання

1. Який порядок розрахунку ваги на витривалість при вигині та крученні?
2. Як знаходяться максимальні й мінімальні величини крутних моментів?
3. Як визначаються небезпечні перерізи?
4. Як визначається амплітудне навантаження?
5. Як знаходиться полярний момент опору перерізу вала?
6. Як обчислюється коефіцієнт запасу міцності?
7. Як визначається величина допустимого зусилля?

## 7 РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ НА ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ

### 7.1 Основні теоретичні відомості

#### 7.1.1 Загальні поняття

Навантаження, спричинене силами інерції, називають динамічним.

Динамічне внутрішнє зусилля  $S_d$ , напруження  $\sigma_d$ ,  $\tau_y$ , деформацію (переміщення)  $\Delta_y$  можна подати у вигляді двох складових: одна залежить від статичної дії зовнішніх сил, а друга – від сил інерції

$$\left. \begin{aligned} S_y &= S_{cm} + S_i \\ \sigma_y &= \sigma_{cm} + \sigma_i \\ \Delta_y &= \Delta_{cm} + \Delta_i \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Постійну складову ( $S_{cm}, \sigma_{cm}, \Delta_{cm}$ ) визначають звичайним способом, залежно від виду деформації. Спосіб визначення складової, спричиненої силами інерції ( $S_i, \sigma_i, \Delta_i$ ), залежить від виду динамічного навантаження.

#### 7.1.2 Види динамічних навантажень

У динаміці та міцності машин розрізняють три види навантажень:

- 1) постійне;
- 2) ударне;
- 3) повторно-змінне.

#### 7.1.3 Постійне динамічне навантаження

До цього класу задач належать задачі динаміки, у яких прискорення – величина стала.

При визначенні динамічного внутрішнього зусилля  $S_y$  використовують принцип Д'Аламбера. За цим принципом рухоме тіло можна розглядати у стані миттєвої рівноваги, якщо до нього прикласти, крім зовнішніх сил, силу інерції.

Силу інерції направляють протилежно прискоренню. Її величину знаходять за формулами:

$$\left. \begin{aligned} dF_i &= dm \cdot a = \rho dV \cdot a = (\gamma / g) dV \cdot a \\ \text{або} \\ F_i &= m a = \rho V \cdot a = (\gamma / g) V \cdot a \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

якщо кожна точка має однакове прискорення.

У формулах (7.2)  $m$  – маса,  $V$  – об'єм,  $a$  – прискорення,  $g$  – прискорення сили земного тяжіння,  $\rho$  – густина матеріалу,  $\gamma$  – питома вага матеріалу.

При розрахунку стержневих систем зручно користуватись поняттям інтенсивності сили інерції, або погонної сили інерції (сила на одиницю довжини)



$$q_i = \frac{dF_i}{dl} = \rho A \cdot a = (\gamma / g) \cdot A \cdot a, \quad (7.3)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу стержня.

У випадку вертикального підйому вантажу з прискоренням  $a$  динамічні параметри можна визначити за допомогою коефіцієнта динамічності  $K_\delta$

$$\left. \begin{aligned} S_\delta &= S_{cm} \cdot K_\delta \\ \sigma_y &= \sigma_{cm} \cdot K_\delta \\ \Delta_y &= \Delta_{cm} \cdot K_\delta \end{aligned} \right\}, \quad (7.4)$$

де

$$K_\delta = 1 \pm a / g \quad (7.5)$$

Знак «+» у (7.5) – підйом вантажу, знак «-» у (7.5) – рух вантажу донизу.

#### 7.1.4 Ударне навантаження

Прискорення і сила інерції тіла, що спричиняє удар, зростають не змінюючи напрямку, від нуля до кінцевого значення.

Удар може бути поздовжнім (рис. 7.1, а), поперечним (рис. 7.1, б), крутним (рис. 7.1, в, стержень АВ).

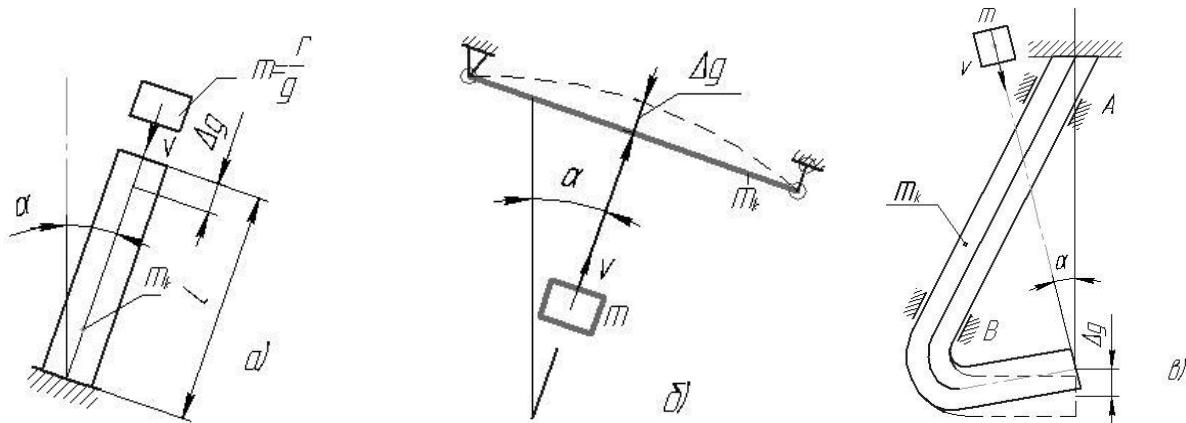


Рисунок 7.1 – Ударне навантаження:

а) – поздовжній удар; б) – поперечний удар; в) – скручуючий удар

В опори матеріалів використовують наближену теорію удару, за допомогою якої визначають максимальні значення напружень  $\sigma_g$ ,  $\tau_g$  і переміщень  $\Delta_g$ .

Динамічні напруження і переміщення визначають за формулами:

$$\sigma_g = \sigma_{cm} \cdot K_g, \quad (7.6)$$

$$\tau_g = \tau_{cm} \cdot K_g, \quad (7.6)$$

$$\Delta_g = \Delta_{cm} \cdot K_g. \quad (7.7)$$

У загальному випадку коефіцієнт динамічності можна визначити за формулами:

$$K_g = \pm \cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{2K}{mg\Delta cm \left( I + \beta \frac{mk}{m} \right)}}; \quad (7.8)$$

або

$$K_g = \pm \cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{V^2}{g\Delta cm \left( I + \beta \frac{mk}{m} \right)}}; \quad (7.9)$$

де  $\alpha$  – кут між вертикаллю і напрямком удару; знак «+» перед  $\cos \alpha$  ставлять при ударі зверху вниз, «-» при ударі знизу вгору;  $K = \frac{mv^2}{2}$  – кінематична енергія ударяючого тіла в момент дотику;  $V$  – швидкість ударяючого тіла в момент дотику;  $m$  – маса ударяючого тіла;  $m_k$  – маса конструкції, що сприймає удар;  $\beta$  – коефіцієнт приведення маси конструкції до точки удару.

Для окремих випадків величину коефіцієнта  $\beta$  вказано на рис. 7.2.

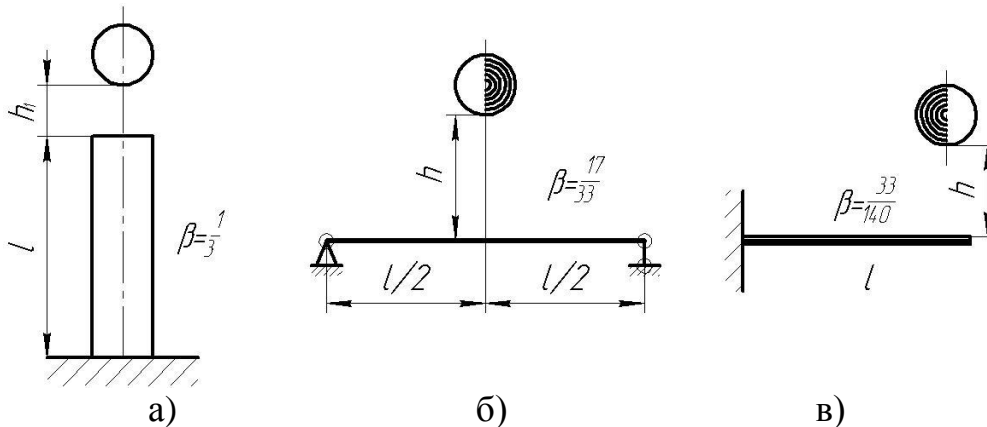


Рисунок 7.2 – Коефіцієнт  $\beta$  для окремих випадків удару

Якщо маса конструкції зосереджена в точці удару, то  $\rho = 1$ . Для попередніх і наближених розрахунків в багатьох випадках масу конструкції  $m_k$  можна не враховувати. У такому разі значення коефіцієнтів динамічності можна визначати за формулами:

1. Вертикальний удар:  $\alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2 \alpha = 1$ ;

$$K_d = \pm 1 + \sqrt{1 + \frac{2K}{m\gamma\Delta_{cm}}}; \quad (7.10)$$

або

$$K_d = \pm 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{cn}}}. \quad (7.11)$$

2. Удар вільно падаючим тілом:  $V^2 = 2gh$ ;

$$K_{\delta} = 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\Delta_{cm}}} . \quad (7.12)$$

3. Горизонтальний удар:  $\alpha = 90^{\circ} \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2 \alpha = 0$ ;

$$K_{\delta} = \sqrt{\frac{2K}{mg\Delta_{cm}}} , \quad (7.13)$$

або

$$K_{\delta} = \frac{V}{\sqrt{g \cdot \Delta_{cm}}} . \quad (7.14)$$

Максимальні динамічні переміщення і силу інерції у випадку горизонтального удару можна визначити за формулами:

$$\Delta_{\delta} = \sqrt{2\delta K} ; \quad (7.15)$$

$$F_{\delta} = \sqrt{\frac{2K}{\delta}} , \quad (7.16)$$

де  $\delta = \delta_{11}$  – податливість конструкції в напрямку удару (переміщення від статично прикладеної в точці удару одиничної сили  $F^0 = 1$ ).

4. Крутний удар обертовим тілом.

Динамічний кут повороту  $\gamma_{\delta}$  і скручуючий момент  $M_{\delta}$  маховика  $M$  при раптовому гальмуванні шківів  $Ш$  (рис. 7.3) можна обчислити за формулами:

$$\gamma_{\delta} = \sqrt{2\delta K} ; \quad (7.17)$$

$$M_{\delta} = \sqrt{\frac{2K}{\sigma}} , \quad (7.18)$$

де  $\sigma = \sigma_{II}$  кут повороту від одиничного крутного моменту  $m^0 = 1$ , статично прикладеного в місці кріплення маховика;  $K$  – кінетична енергія маховика.

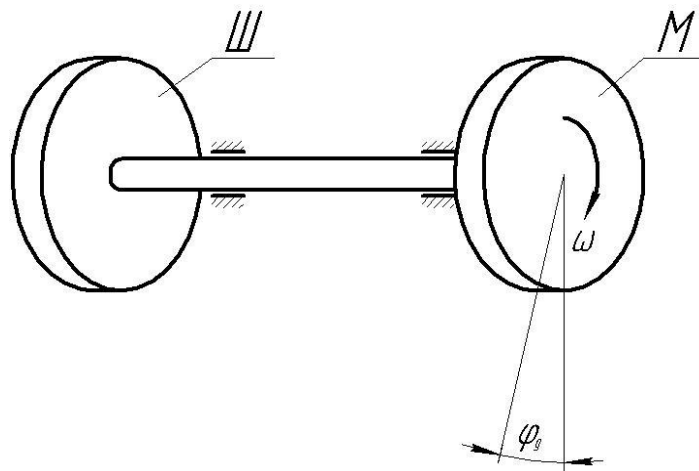


Рисунок 7.3

### 7.1.5 Повторно-змінне навантаження. Коливання

Повторно-змінне динамічне навантаження спричиняється позацентровою силою при обертанні тіла навколо осі, що не проходить через центр мас тіла.

На рис. 7.4 показано позацентрову силу  $H$ , що виникає при обертанні незбалансованого ротора електродвигуна.

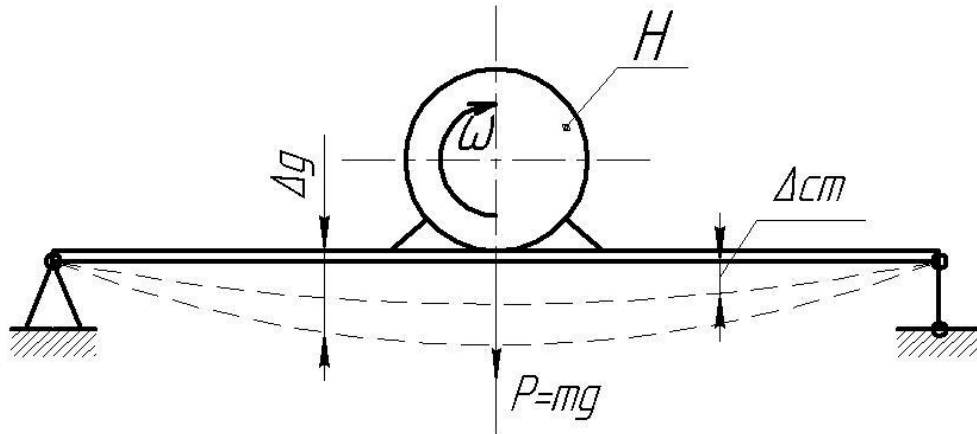


Рисунок 7.4

У напрямку дії ваги  $P = mg$  двигуна складова сила  $H$  змінюється за гармонічним законом

$$H(t) = H \cos \omega t, \quad (7.19)$$

де  $t$  – час;  $H$  і  $\omega$  – амплітуда і частота збурювальної сили.

Під дією збурювальної сили відбуваються вимушені коливання механічної системи.

Вирішальний вплив на величину напружень  $\sigma_i$  і переміщень  $\Delta_i$ , спричинених збурюючою силою, має співвідношення частот вимушених  $\omega$  і власних  $\omega_0$  коливань.

Власні коливання відбуваються під дією сил інерції і сил пружності після усунення причини, що вивела систему з рівноваги.

При визначенні частоти  $\omega_0$  власних коливань розрахункову схему, як і при ударі, обирають у вигляді системи з одним ступенем вільності. Масу  $m_k$  конструкції приводять до центра мас  $m$  вантажу.

В інженерній практиці зустрічаються дві основні задачі:

- 1) відстройка конструкції від резонансу;
- 2) знаходження максимальних переміщень і напружень.

Запобігання резонансу вважається досягнутим, якщо відношення частот вимушених і власних коливань знаходиться поза областю резонансу

$$0,7 \leq \omega / \omega_0 \leq 1,3. \quad (7.20)$$

### 7.1.5.1 Поздовжні і поперечні коливання

Частоту власних поздовжніх і поперечних коливань системи «конструкція – вантаж» розраховують за формулою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta_m \left(1 + \beta \frac{m_K}{m}\right)}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm} \left(1 + \beta \frac{m_K}{m}\right)}}, \quad (7.21)$$

де  $\delta = \delta_1$  – переміщення від одиничної сили  $F^0=1$  статично прикладеної в центрі мас у напрямку коливань;  $m$  – маса вантажу;  $m_K$  – маса конструкції;  $\beta$  – коефіцієнт приведення маси конструкції до центра мас (рис. 7.2);  $\Delta_{cm}$  – статичне переміщення центру мас від ваги  $P$  вантажу.

Якщо масою  $m_K$  конструкції можна знехтувати, то формула (6.23) набуває вигляду

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}. \quad (7.22)$$

Найбільше динамічне переміщення в напрямку дії сили тяжіння вантажу обчислюють за (6.4)  $\Delta_\delta = \Delta_{cm} \cdot K_\delta$ , де  $\Delta_{cm}$  – переміщення від статичної сили, що дорівнює вазі  $P$  вантажу.

Коефіцієнт динамічності

$$K_\delta = 1 + \frac{H}{P} \eta, \quad (7.23)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт наростання коливань.

При виконанні умови (6.20) запобігання резонансу

$$\eta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}. \quad (7.24)$$

Коефіцієнт наростання коливань завжди додатній. Найбільше динамічне напруження за (7.4)  $\sigma_\delta = \sigma_{cm} \cdot K_\delta$ , де  $\sigma_{cm}$  – найбільше статичне напруження в конструкції від статичної дії ваги  $P$  вантажу.

### 7.1.5.2 Крутильні коливання

Частота власних крутильних коливань системи «вал-маховик» (рис. 7.5)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta \cdot I_M}} = \sqrt{\frac{\sigma I_P}{l \cdot I_M}}, \quad (7.25)$$

де  $\delta = \delta_\Pi$  – переміщення (кут повороту) від одиничного моменту  $m^0 = 1$  статично прикладеного в місці кріплення маховика;  $I_M$  – момент інерції маси маховика.

За наявності збурювальної сили скручуючого моменту, величина якого змінюється за гармонічним законом  $T(t) = T \cos \omega t$ , максимальний ди-

намічний крутний момент і кут повороту маховика можна обчислити за формулами:

$$M_{кр} = T \cdot \eta; \quad (7.26)$$

$$\gamma_{\delta} = \gamma \cdot \eta, \quad (7.27)$$

де  $T$  – амплітудне значення збурювальної сили (моменту);  $\gamma$  – кут повороту від моменту  $T$ .

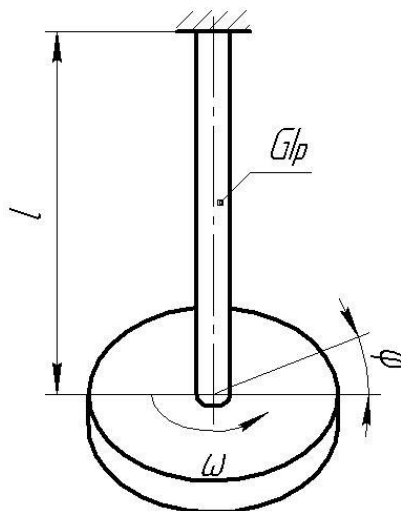


Рисунок 7.5

Коефіцієнт наростання коливань  $\eta$  при виконанні умови запобігання резонансу обчислюється за (7.24).

## 7.2 Розрахунково-графічне завдання «Розрахунок балки при ударному навантаженні»

Зміст РГЗ.

На балку двотаврового поперечного перерізу, що закріплена за допомогою шарнірних опор, з висоти  $h$  падає вантаж  $P$ .

Необхідно:

1. Знайти найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі балки при статичній дії вантажу  $P$ .
2. Знайти максимальне динамічне напруження при ударі.
3. Знайти максимальне динамічне напруження при падінні вантажу на балку у випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори з податливістю  $\alpha$  (податливість – це переміщення, що припадає на одиницю сили).

Варіанти схем балок показано на рис. 7.6. Необхідні дані взяти з табл. 7.1. У розрахунках прийняти модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, або  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Вагою балки знехтувати.

Приклад виконання РГЗ-6.1.

Вихідні дані: схема (рис. 7.6); двотавр № 30 а,  $l=2,5\text{м}$ ;  $P=1,3\text{кН}$  (130кг);  $h=0,15\text{м}$ ;  $\alpha=0,025\text{ м/кН}$ .

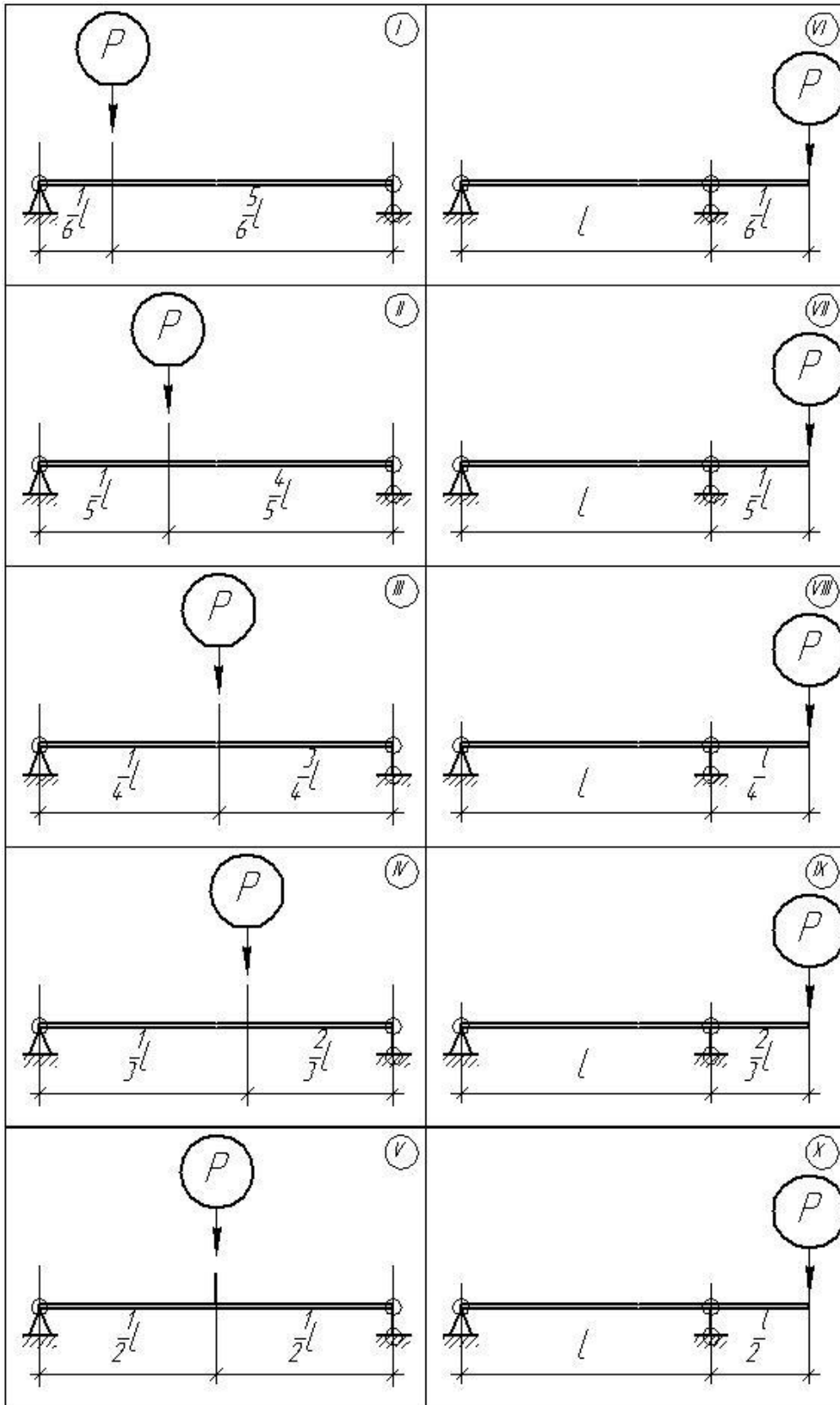


Рисунок 7.6. Варіанти розрахункових схем для РГЗ 6.2

Таблиця 7.1 – Дані для РГЗ 7.2

№ варіанта	№ Схеми	№ Двотавра	$l$ , м	$P$ , кН	$h$ , м	$\alpha$ , м/кН
0	I	30	2	0,5	0,25	0,025
1	II	24	5	1,0	0,50	0,02
2	III	20а	2,5	1,5	0,30	0,023
3	IV	22а	3,0	2,0	0,7	0,027
4	V	24а	3,5	0,75	0,6	0,028
5	VI	27	3,5	0,80	0,55	0,03
6	VII	30	4,0	0,9	0,70	0,027
7	VIII	27а	3,5	1,25	0,65	0,029
8	IX	30а	4,0	1,28	0,35	0,03
9	X	27	1,75	1,2	0,4	0,035

*Розв'язок:*

1. Знаходимо найбільше нормальне напруження в небезпечному перерізі балки при статичному навантаженні

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_z}.$$

За таблицями сортаменту двотавра № 30 а,  $W_z = 518 \text{ см}^3$ . Максимальний згинаючий момент у перерізі С.

Знаходимо реакції з умов рівноваги та побудуємо епюру М (рис. 7.7).

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot l - P \cdot \frac{1}{5}l = 0 \Rightarrow R_H = 0,2P.$$

$$\sum M_A = 0, R_B l - P \frac{4}{5}l = 0 \Rightarrow R_B = 0,8P.$$



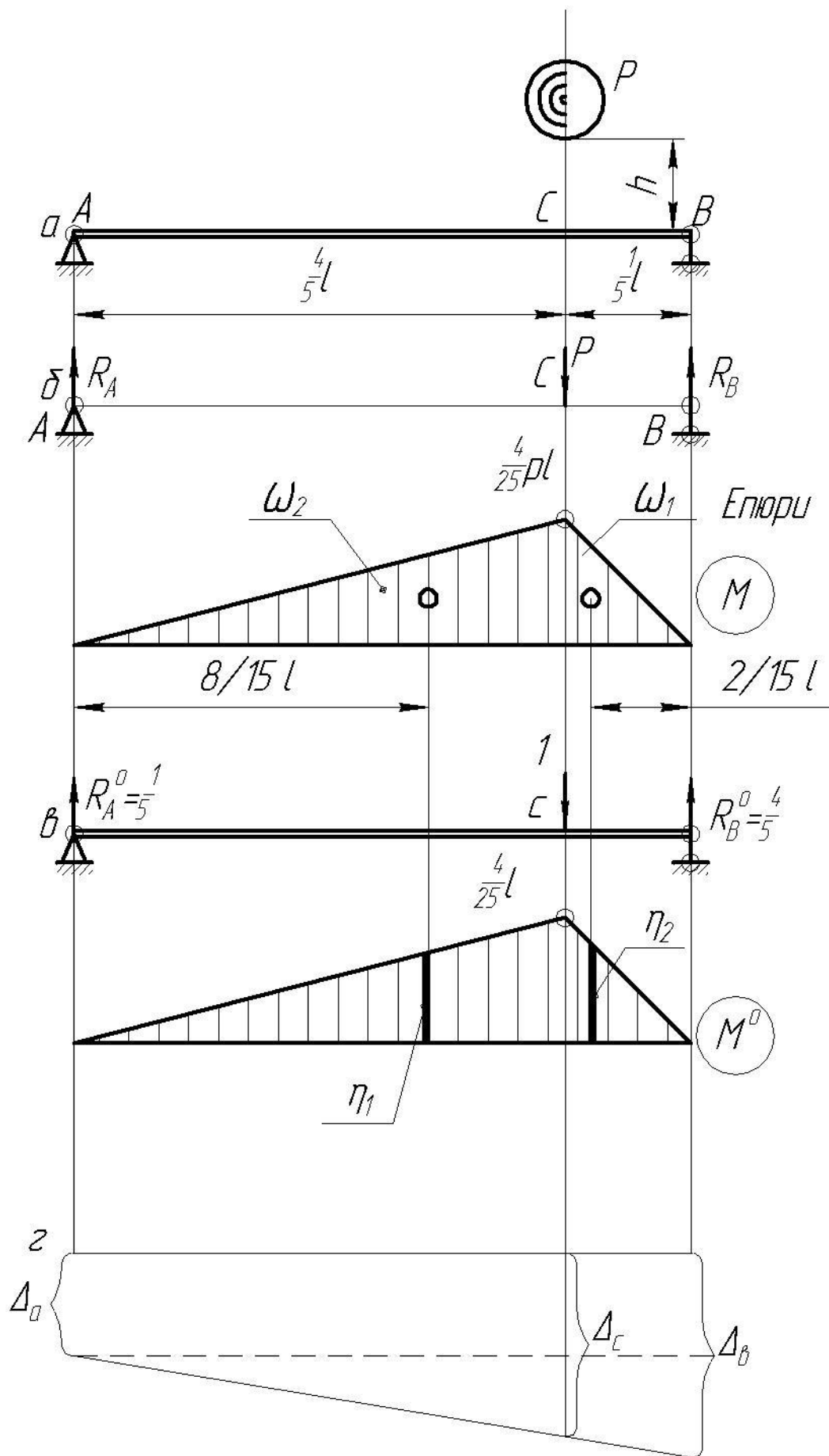


Рисунок 7.7

Перевірка:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B = P; 0,2P + 0,8P = P.$$

Епюра  $M$  на ділянках лінійна, з переломом у точці  $C$ .

$$M_c = R_{AH} \cdot \frac{4}{5}l = 0,2P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5}P \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}Pl$$

$$M_{\max} = \frac{4}{25} \cdot Pl = \frac{4}{25} \cdot 1300 \cdot 2,5 = 520 \text{ НМ} = 0,52 \text{ кНм}.$$

Максимальне напруження:

$$\sigma_{\max}^{cm} \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{520}{518 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ МПа}.$$

1. Знаходимо максимальне напруження при ударі по балці з жорсткими опорами.

Коефіцієнт динамічності

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cn}}}$$

Переміщення точки удару від статично прикладеної сили (прогин перерізу  $C$ ) визначаємо методом Мора за правилом Верещагіна. Будуємо епюру одиничних сил  $M^0$  (див. рис. 7.7,  $z$ ).

Реакції від дії одиничної сили  $F^0$  знаходимо так, як від дії сили  $P$ :

$$R_A^0 = 0,2F^0 = 1/5 = 0,2;$$

$$R_B^0 = 0,8F^0 = 4/5 = 0,8.$$

Ордината епюри  $M^0$  у точці  $C$

$$M_c^0 = R_H^0 \cdot \frac{4}{5}l = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}l = \frac{4}{25}l = 0,4 \text{ м}.$$

Переміщення

$$\Delta_{cm} = \sum \frac{\omega_i y_i}{EI} = \frac{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2}{EI},$$

де  $\omega_1, \omega_2$  – площі епюри  $M$ :

$$\omega_1 = \frac{4}{25}Pl \cdot \frac{4}{5}l \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EI};$$

$$\omega_2 = \frac{4}{25}Pl \cdot \frac{1}{5}l \cdot \frac{1}{2EI} = \frac{2}{50}Pl^2 \cdot \frac{1}{EI}.$$

$\eta_1, \eta_2$  – ординати одиничної епюри під центром ваги відповідної вантажної площі

$$\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15}l = \frac{8}{75}l.$$

Таким чином,

$$\Delta_{cm} = \frac{8}{125} \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{8}{75} l + \frac{2}{50} \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{8}{75} l = \frac{Pl^3}{EI} (0,00683 + 0,00423) = 0,0111 \frac{Pl^3}{EI}.$$

Статичне переміщення

$$\Delta_c = 0,0111 \frac{Pl^3}{EI} = 0,0111 \cdot \frac{130 \cdot 250^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 7780} = 0,00145 \text{ см} = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Коефіцієнт динамічності

$$K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5}}} = 146.$$

Максимальне динамічне напруження

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = 146 \cdot 1,0 = 146 \text{ МПа}.$$

2. Знайдемо максимальне динамічне напруження для випадку, коли на опорах вмонтовано амортизатори.

Задача відрізняється величиною коефіцієнта динамічності:

$$\sigma_{\max}^\delta = \sigma_{\max}^{cm} \cdot K_\delta';$$

$$K_\delta' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}'}}.$$

Статичне переміщення точки удару визначаємо з урахуванням податливості опор

$$\Delta_{cm}' = \Delta_{cm} + \Delta_c,$$

де  $\Delta_{cm}$  – переміщення точки  $C$ , спричинене деформацією компенсаторів.

З рис. (7.7 з):

$$\Delta_c = \Delta_A + \frac{4}{5}(\Delta_B - \Delta_A);$$

$$\Delta_A = \alpha R_A = 0,025 \cdot 0,26 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta_B = \alpha R_B = 0,025 \cdot 1,04 = 26 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta_c = 6,5 \cdot 10^{-3} + \frac{4}{5}(26 \cdot 10^{-3} - 6,5 \cdot 10^{-3}) = 22,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Коефіцієнт динамічності

$$K_\delta' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,15}{1,45 \cdot 10^{-5} + 22,1 \cdot 10^{-3}}} = 4,82.$$

Максимальні динамічні напруження:

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}'} = 4,82 \cdot 1 = 4,82 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{дин}}}{\sigma_{\max}^{\text{дин}'}} = \frac{146}{4,82} = 30,3.$$

Таким чином, використання амортизаторів зменшує величину максимальних напружень при ударі в 30,3 раза.

### 7.3 Розрахунок упорного підшипника

Підшипник стиснутий силою  $P$  (табл. 7.2). Знайти площу контакту, а також розрахувати на міцність.

Матеріал – хромиста сталь.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Таблиця 7.2 – Вихідні дані для розрахунку упорного підшипника

№ варіанта	$P$ , кг	Коефіцієнт нерівномірності навантаження	Допустиме контактне напруження $[\sigma]_k$ , МПа	Кількість кульок	$d_k$ , мм
0	640	0,8	3500	20	15
1	700	0,75	4000	18	20
2	600	0,9	5000	20	18
3	750	0,7	3700	16	16
4	675	0,85	3900	20	15
5	725	0,8	3500	22	15
6	1000	0,78	4500	20	10
7	925	0,8	5500	22	15
8	900	0,8	6000	20	15
9	910	0,75	5500	20	20
10	928	0,8	3500	20	18
11	950	0,8	5520	20	15
12	975	0,8	3950	20	15
13	926	0,75	4250	23	15
14	675	0,8	3750	20	20
15	775	0,85	5200	20	15

*Приклад розрахунку.*

$P = 640$  кг,  $d = 15$  мм,  $[\sigma]_r = 3500$  МПа,  $n = 0,8$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  
 $i = 20$  шт.

1. Знаходимо силу на один шарик

$$P_1 = \frac{P}{0,8 \cdot i} = \frac{640}{0,8 \cdot 20} = 40 \text{ кг} = 400 \text{ Н.}$$

2. У точці «к» слід контакту

$$a = 0,883 \sqrt{\frac{2PR}{E}} = 0,883 \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 0,75}{2,1 \cdot 10^6}} = 0,017 \text{ см.}$$

$$E_2 = E_1 = E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

3. Найбільше напруження на контактній поверхні

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \frac{1,5 \cdot 40}{\pi \cdot 0,017^2} = 26570 \text{ кг/см}^2 = 2657 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k, 2657 \text{ МПа} \leq 3500 \text{ МПа.}$$

Умова міцності виконується.

### Контрольні запитання

1. Яке навантаження називають динамічним?
2. Які є види динамічних навантажень?
3. У чому полягає принцип Д'Аламбера для визначення внутрішнього зусилля?
4. Як визначається сила інерції при динамічному навантаженні?
5. Який вигляд має вираз для визначення інтенсивності сили інерції?
6. Як визначаються динамічні параметри при постійних динамічних навантаженнях?
7. Які розрізняють напрямки ударного навантаження?
8. За якими формулами визначаються динамічні напруження і переміщення?
9. Як визначається коефіцієнт динамічності в загальному випадку?
10. Як визначається коефіцієнт динамічності при вертикальному ударі?
11. Як визначається коефіцієнт динамічності при ударі вільно падаючим тілом?
12. Як визначається коефіцієнт динамічності при горизонтальному ударі?
13. Як визначаються максимальні динамічні переміщення і сила інерції у випадку горизонтального удару?
14. За якими співвідношеннями можна обчислити динамічний кут повороту і скручуючий момент маховика?
15. Чим спричиняється повторно-змінне динамічне навантаження?
16. За якою формулою обчислюють частоту власних повздовжніх і поперечних коливань системи «конструкція-вантаж»?
17. За якою формулою обчислюють частоту власних крутильних коливань системи «вал – маховик»?
18. Який порядок розрахунку балки при ударному навантаженні?
19. Який порядок розрахунку упорного підшипника?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением. – К. : Вища школа, 1983. – 175 с.
2. Dell G.D. Yeliseyev V. V. and other. CAD system for the elastic – medium shaping of pipe-line parts // Jour of materials. Processing Technology. – 1992. – V. 35. – P. 191–198.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.
4. Колмогоров В. Л. Напряжения. Деформация. Разрушение. – М. : Металлургия, 1970. – 230 с.
5. Дель Г. Д. Технологическая механика. – М. : Машиностроение, 1978. – 174 с.
6. Кроха В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
7. Третьяков А. В. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением : справочник / А. В. Третьяков, В. И. Зюзин – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Металлургия. – 1973. – 224 с.
8. Огородников В. А. Энергия. Деформации. Разрушение. (Задачи автотехнических экспертиз) : монография / Огородников В. А., Киселев В. Б., Сивак И. О. – Винница : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 204 с.
9. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / Феодосьев В. И. – Главная редакция физико-математических лит-ры изд-ва «Наука», 1970. – 544 с.
10. Корнілов О. А. Опір матеріалів : підручник / Корнілов О. А. – К. : Логос, 2002. – 562 с.
11. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук. думка, 1988. – 736 с.
12. Ковтун В. В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи : навч. посіб. / Ковтун В. В., Павлов В. С., Дорофеев О. А. – Львів : Афіша, 2002. – 280 с.
13. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении : учебное пособие / Огородников В. А. – К. : УМК ВО, 1989. – 152 с.
14. Огородников В. А. О технологическом паспорте материала заготовок поршня с шатуном аксиально-роторного поршневого насоса // В. А. Огородников, В. И. Музычук, А. В. Грушко / Промислова гідрравліка і пневматика. – 2004. – № 4. – С. 86–92.
15. Ковтун В. В. Опір матеріалів. Прилади, задачі, розрахункові роботи : навчальний посібник / Ковтун В. В., Павлов В. С., Дорофеев О. А. – Хмельницький : ТУП, 1999. – 280 с.
16. Огороднікова В. А. Механіка процесів холодного формозмінювання з однотипними схемами механізму деформації / Огороднікова В. А., Музычук В. І., Нахайчук О. В. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – 179 с.

**ДОДАТОК А**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ ТА  
ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

# **РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ ЗАВДАННЯ**

з дисципліни  
«МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ»

Виконав: ст. гр. ГМ-16 б

Іванков Р. В.

Перевірив: д.т.н., проф.

Огородніков В. А.

**ВІННИЦЯ – 2018**

## ДОДАТОК Б

### Розмірності величин

Напруження – Па (паскаль),  $1\text{Па} = \frac{1\text{Н}}{\text{м}^2}$ ;

МПа (мегапаскаль),  $1\text{МПа} = \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 10^3 \text{кПа} = 10^6 \text{Па} = \frac{1\text{Н}}{\text{мм}^2} = 10^{-1} \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ .

Наприклад, модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа} = 2 \cdot 10^6 \text{кг/см}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{кг/мм}^2$ .

Енергія – 1 Дж (джоуль) = 0,1 кгм = 10 кгсм.

10 Дж = 1 кгм = 100 кгсм.

Момент – 1 кНм = 0,1 тм =  $10^4$  кгсм.

1 Нм = 0,1 кгм = 10 кгсм.

Сила – 1 Н (ньютон) = 0,1 кг.

1 кН = 0,1 тонна = 100 кг.

Розподіл навантаження – 1 Н/м = 0,1 кг/м.

1 кН/м = 0,1 т/м = 1 кг/см.

**Примітка.** Поряд із системою одиниць вимірювання СІ у технічній літературі також зустрічається система одиниць МКГС, тому в деяких випадках застосовуються обидві системи.



## ДОДАТОК В

Таблиця В.1 – Експериментальні дані для побудови кривої течії  $\sigma_i = f(\varepsilon_s)$

№ з/п	Марка матеріалу	Інтенсивність напружень $\sigma_i$ , МПа	Інтенсивність деформацій $\varepsilon_i$	Коефіцієнти апроксимації	
				<i>A</i>	<i>n</i>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
1	Сталь 08КП	300	0,00	1000	0,31
		400	0,25		
		450	0,05		
		520	0,10		
		580	0,20		
		650	0,30		
		720	0,40		
		780	0,50		
		860	0,60		
		900	0,70		
		950	0,80		
		980	0,90		
		1000	1,00		
2	Сталь 45	450	0,00	840	0,19
		540	0,05		
		590	0,10		
		650	0,20		
		700	0,30		
		750	0,40		
		780	0,50		
		800	0,60		
		810	0,70		
		820	0,80		
		830	0,90		
		840	1,00		
		3	VOLKSWAGEN		
200	0,025				
400	0,050				
540	0,10				
590	0,20				
650	0,30				
700	0,40				
730	0,50				
760	0,60				
790	0,70				
810	0,80				
830	0,90				
840	1,00				

Продовження таблиці В.1

1	2	3	4	5	6
4	ЛС 59-1	5,6	0,00	892	0,43
		248	0,05		
		331	0,10		
		438	0,20		
		528	0,30		
		600	0,40		
		672	0,50		
		718	0,60		
		758	0,70		
		804	0,80		
		854	0,90		
		890	1,00		
5	Сталь 20	400	0,00	810	0,205
		438	0,05		
		505	0,10		
		583	0,20		
		633	0,30		
		673	0,40		
		703	0,50		
		729	0,60		
		753	0,70		
		774	0,80		
		793	0,90		
		810	1,00		
6	Сталь 10	380	0,00	720	0,21
		384	0,05		
		444	0,10		
		704	0,20		
		559	0,30		
		594	0,40		
		622	0,50		
		647	0,60		
		668	0,70		
		687	0,80		
		704	0,90		
		720	1,00		
7	03ХСЮ	400	0,00	930	0,20
		445	0,025		
		511	0,050		
		587	0,100		
		614	0,105		
		636	0,150		
		674	0,20		
		705	0,25		
		730	0,30		
		774	0,40		
		809	0,50		
		840	0,60		
		866	0,70		
		889	0,80		
911	0,90				
930	1,00				

## Продовження таблиці В.1

1	2	3	4	5	6
8	13М5А	320	0,00	780	
		430	0,05		
		500	0,10		
		560	0,20		
		605	0,30		
		650	0,40		
		680	0,50		
		705	0,60		
		735	0,70		
		745	0,80		
		760	0,90		
		780	1,00		
		9	Х18ХГСА		
605	0,05				
732	0,10				
880	0,20				
1002	0,30				
1092	0,40				
1168	0,50				
1181	0,60				
1208	0,70				
1223	0,80				
1236	0,90				
1450	1,00				
10	30ХГСА			502	0,00
		686	0,05		
		736	0,10		
		776	0,20		
		818	0,30		
		847	0,40		
		868	0,50		
		878	0,60		
		882	0,70		
		892	0,80		
		901	0,90		
		920	1,00		
		11	51ХФА	421	0,00
607	0,05				
671	0,10				
752	0,20				
791	0,30				
831	0,40				
852	0,50				
872	0,60				
886	0,70				
893	0,80				
902	0,90				
915	1,00				

Продовження таблиці В.1

1	2	3	4	5	6
12	15X	242	001	800	
		277	0,015		
		307	0,02		
		359	0,03		
		454	0,04		
		515	0,0715		
		564	0,10		
		623	0,18		
		656	0,24		
		735	0,38		
		773	0,554		
		782	0,70		
		800	1,00		
13	08XГCЮФ	350	0,00	1380	0,23
		440	0,05		
		500	0,10		
		350	0,15		
		600	0,20		
		700	0,30		
		800	0,40		
		900	0,50		
		1000	0,60		
		1080	0,70		
		1150	0,80		
		1300	0,90		
		1380	1,00		
14	Сталь 35	440	0,00	950	0,15
		600	0,05		
		680	0,10		
		750	0,20		
		800	0,30		
		820	0,40		
		850	0,50		
		870	0,60		
		890	0,70		
		900	0,80		
		920	0,90		
		940	1,00		
		950	1,10		
		960	1,20		
		970	1,30		
		990	1,40		
		1000	1,50		
15	08XΠO	400	0,00	1000	
		455	0,05		
		525	0,10		
		575	0,15		
		620	0,20		
		700	0,30		
		750	0,40		
		790	0,50		
		800	0,60		
		860	0,70		
		900	0,80		
		950	0,90		
		1000	1,00		

Продовження таблиці В.1

1	2	3	4	5	6				
16	ХН77ТЮР	525	0,00	2350					
		1400	0,10						
		1625	0,20						
		1775	0,30						
		1900	0,40						
		200	0,50						
		2100	0,60						
		2175	0,70						
		2225	0,80						
		2300	0,90						
		2350	1,00						
		17	ОТ-4			400	0,00	535	
						408	0,10		
415	0,20								
420	0,30								
430	0,40								
440	0,50								
450	0,60								
510	0,70								
520	0,80								
530	0,90								
535	1,00								
18	Р6М5			560	0,00	1480			
		1120	0,20						
		1180	0,40						
		1300	0,60						
		1360	0,80						
		1480	1,00						
19	ХН70ВМТЮ	650	0,00						
		1175	0,10						
		1425	0,20						
		1600	0,30						
		1750	0,40						
		1850	0,50						
		1975	0,60						
		2050	0,70						
		2125	0,80						
		2200	0,90						
		2275	1,00						
20	Л60	00	0,00						
		100	0,10						
		200	0,20						
		300	0,30						
		375	0,40						
		475	0,50						
		550	0,60						
		600	0,70						
		700	0,80						
		775	0,90						
		850	1,00						

## Продовження таблиці В.1

1	2	3	4	5	6
21	В95	200	0,00		
		275	0,10		
		300	0,20		
		325	0,30		
		325	0,40		
		350	0,50		
		350	0,60		
		375	0,70		
		375	0,80		
		375	0,90		
		375	1,00		
22	АД1	75	0,00		
		100	0,10		
		100	0,20		
		100	0,30		
		100	0,40		
		125	0,50		
		125	0,60		
		125	0,70		
		125	0,80		
		150	0,90		
		150	1,00		
23	ШХ15	442	0,00		
		800	0,10		
		880	0,20		
		910	0,30		
		960	0,40		
		1000	0,50		
24	Ст.3	471	0,00		
		671	0,10		
		800	0,20		
		842	0,30		
		861	0,40		
		900	0,50		
		914	0,60		
25	Мідь М1	50	0,00		
		166	0,10		
		243	0,20		
		300	0,30		
		333	0,40		
		360	0,50		
		366	0,60		
26	08ГСЮФ	275	0,00		
		500	0,10		
		605	0,20		
		700	0,30		
		800	0,40		
		900	0,50		
		995	0,60		
		1400	0,70		

Продовження таблиці В.1

1	2	3	4	5	6
27	4X13	230	0,00		
		907	0,10		
		1061	0,20		
		1107	0,30		
		1123	0,40		
		1138	0,50		
		1153	0,60		
28	40X	628	0,00		
		986	0,10		
		1057	0,20		
		1100	0,30		
		1143	0,40		
		1171	0,50		
		1186	0,60		
		1200	0,70		
		1214	0,80		
		1228	0,90		
		1257	1,00		
29	W62	00	0,00		0,2
		4700	0,10		
		5800	0,20		
		6400	0,30		
		6900	0,40		
		7300	0,50		
		7600	0,60		
		7900	0,70		
		8100	0,80		
		8200	0,90		
		8300	1,00		
30	P12	480	0,00		
		1040	0,10		
		1040	0,20		
		1040	0,30		
		1140	0,40		
		1140	0,50		
		1220	0,60		
		1220	0,70		
		1280	0,80		
		1280	0,90		
		1320	1,00		
31	4X14H14B2M	425	0,00		
		900	0,10		
		1075	0,20		
		1200	0,30		
		1300	0,40		
		1400	0,50		
		1475	0,60		
		1550	0,70		
		1600	0,80		
		1650	0,90		
		1725	1,00		

## Продовження таблиці В.1

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
32	12X18H9T	350	0,00		
		750	0,10		
		950	0,20		
		1100	0,30		
		1200	0,40		
		1300	0,50		
		1400	0,60		
		1475	0,70		
		1550	0,80		
		1600	0,90		
		1650	1,00		
33	40XHMA	800	0,00		
		950	0,10		
		1000	0,20		
		1050	0,30		
		1050	0,40		
		1075	0,50		
		1100	0,60		
		1100	0,70		
		1125	0,80		
		1125	0,90		
		1150	1,00		
34	BT14	525	0,00		
		1400	0,10		
		1625	0,30		
		1775	0,40		
		1900	0,50		
		2000	0,60		
		2100	0,70		
		2175	0,80		
		2225	0,90		
		2350	1,00		



## ДОДАТОК Г

Таблиця Г.1 – Експериментальні дані для побудови діаграми пластичності

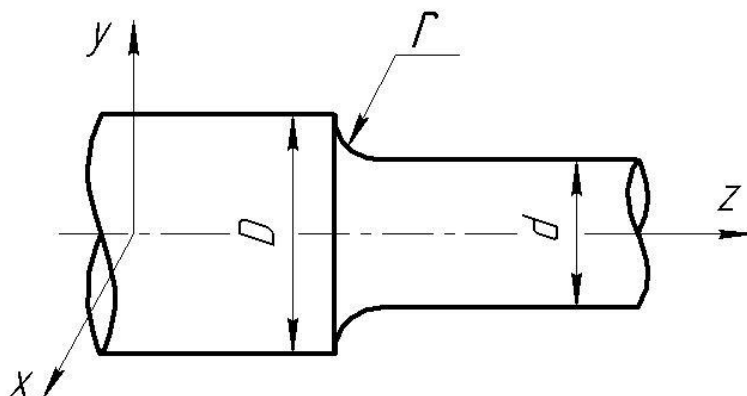
№	Марка матеріалу	Дані для побудови діаграми пластичності				Коефіцієнти чутливості пластичності до показника $\eta$	
		$e_p(\eta=1)$	$e_p(\eta=0)$	$e_p(\eta=-1)$	$\lambda_1 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=0)}{\varepsilon_p(\eta=1)}$	$\lambda_2 = \ln \frac{\varepsilon_p(\eta=-1)}{\varepsilon_p(\eta=0)}$	
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	
1.	ВТ-1	0,64	1,15	2,9	0,58	0,92	
2.	Р12	0,17	0,55	1,9	1,17	1,236	
3.	Р6М5	0,23	0,46	0,95	0,69	0,72	
4.	20-А	1	1,3	1,7	0,26	0,25	
5.	АМГ-2	1,05	1,57	2,25	0,4	0,35	
6.	ВТ14	0,15	0,64	1,3	1,45	0,7	
7.	Р18	0,03	0,37	1,16	2,5	1,14	
8.	Р9	0,1	0,48	1,2	1,56	0,91	
9.	40ХН2МА	0,48	0,76	1,52	0,45	0,69	
10.	Сталь 40	0,09	0,37	$\infty$	1,4	$\infty$	
11.	ОГ-4	0,35	0,75	1,6	0,762	0,757	
12.	40Х	0,08	0,86	1,5	2,37	0,556	
13.	30ХМА	0,31	0,48	2,0	0,43	1,42	
14.	Сталь 35	0,2	0,53	1,63	0,97	1,1	
15.	О8КП	0,355	0,5	0,7	0,342	0,336	
16.	У8А	0,03	0,39	1,2	2,56	1,12	
17.	13М5-А	0,28	0,38	0,9	0,305	0,862	
18.	ХН70ВМТЮ	0,38	0,68	1,1	0,58	0,481	
19.	ХН77ТЮР	0,29	0,62	0,96	0,76	0,437	

Продовження таблиці Г.1

1	2	3	4	5	6	7
20.	ЛС59-1	0,4	0,55	0,65	0,318	0,176
21.	ШХ-15	0,2	0,52	1,8	2,6	1,24
22.	Д-1	0,3	0,47	0,5	0,2	0,3
23.	30ХГСА	0,75	1,05	1,45	0,33	0,32
24.	Ст 3	0,25	0,36	∞	0,365	∞
25.	Сталь 10	0,3	0,67	2,67	0,803	1,38
26.	40Х13	0,35	0,84	3,3	0,875	1,37
27.	АВ	1,25	2,25	3,5	0,59	0,44
28.	ЛС62	0,45	1,1	1,5	0,894	0,31
29.	Сталь 45	0,15	0,4	1,1	0,981	1,01
30.	Д16Т	0,08	0,42	0,9	1,66	0,762
31.	Х18Н9Т	0,38	0,76	1,6	0,693	0,744
32.	Сталь 20	0,32	0,62	1,23	0,66	0,685
33.	АМГ5В	0,735	1,0	1,25	0,31	0,223
34.	Д16	0,875	1,25	1,625	0,36	0,262
35.	Сталь 35	0,25	0,534	1,63	0,76	1,12
36.	Л62	0,4	0,59	1,75	0,39	1,09
37.	У8А (2 партія)	0,255	0,39	1,2	0,425	1,12
38.	Д16 (2 партія)	0,10	0,41	1,5	1,46	1,30
39.	Сталь 20 (2 партія)	0,3	0,65	1,25	0,773	0,654
40.	Сталь 10 (2 партія)	0,32	0,65	1,42	0,710	0,780
41.	Сталь 38Х2МЮА	0,55	0,75	1,30	0,30	0,551
42.	Сталь 38Х2МЮА термооброблена	0,485	0,74	1,00	0,42	0,30
43.	Сталь 30Х3МФА	0,74	0,85	1,13	0,14	0,28
44.	Сталь 30Х3МФА термооброблена	0,74	0,85	1,13	0,11	0,92

## ДОДАТОК Д

Значення коефіцієнтів концентрації напружень при згині та крученні



$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$$

D/d	r/d	Коефіцієнт концентрації напружень при згині $K_G$ $\sigma_M, \text{МПа}$			Коефіцієнт концентрації напружень при крученні $K_\tau$ $\sigma_M, \text{МПа}$		
		$\leq 500$	800	$\geq 1000$	$\leq 500$	800	$\geq 1000$
1,05	0,02	1,70	1,88	2,05	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,48	1,57	1,63	1,15	1,18	1,20
	0,10	1,28	1,33	1,36	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,20	1,23	1,25	1,06	1,08	1,09
	0,2	1,16	1,20	1,22	1,05	1,06	1,07
1,1	0,02	2,00	2,24	2,47	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,64	1,70	1,75	1,25	1,28	1,30
	0,10	1,37	1,42	1,45	1,12	1,16	1,18
	0,15	1,27	1,31	1,34	1,09	1,12	1,14
	0,20	1,20	1,24	1,27	1,06	1,08	1,10
1,25	0,02	2,12	2,68	3,10	1,64	1,73	1,80
	0,05	1,81	1,97	2,10	1,40	1,45	1,48
	0,10	1,47	1,54	1,60	1,20	1,27	1,32
	0,15	1,36	1,40	1,43	1,15	1,20	1,24
	0,20	1,30	1,32	4,34	1,09	1,13	1,16
1,5	0,02	2,42	-	-	1,76	1,97	2,14
	0,05	1,91	2,06	2,20	1,48	1,56	1,62
	0,10	1,53	1,61	1,67	1,24	1,32	1,38
	0,15	1,38	1,44	1,48	1,19	1,25	1,29
	0,20	1,33	1,36	1,38	1,10	1,18	1,24

*Навчальне видання*

**Огородніков Віталій Антонович,  
Грушко Олександр Володимирович,  
Архіпова Тетяна Федорівна**

# **МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ**

**Навчальний посібник**

Рукопис оформив В. Огородніков

Редактор О. Ткачук

Оригінал-макет підготував О. Ткачук

Підписано до друку 08.10.2018.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 5,46.  
Наклад 50 (1-й запуск 1–20) пр. Зам. № 2018-174.

Видавець та виготовлювач  
Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
Тел. (0432) 65-18-06.  
**press.vntu.edu.ua;**  
*E-mail:* kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.