В. А. Петрук, О. П. Прозор

ВИЩА МАТЕМАТИКА
З ПРИКЛАДНИМИ ЗАДАЧАМИ. ЧАСТИНА 1

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. А. Петрук, О. П. Прозор

ВИЩА МАТЕМАТИКА
З ПРИКЛАДНИМИ ЗАДАЧАМИ. ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2018

УДК 51(075)
П31

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 31.05.2018 р.)

Рецензенти:
Р. С. Гуревич, доктор педагогічних наук, професор,
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор,
О. М. Васілевський, доктор технічних наук, професор.

Петрук, В. А.

П31 Вища математика з прикладними задачами. Частина 1 / В. А. Петрук, О. П. Прозор. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 171 с.

В навчальному посібнику наведено теоретичні відомості з тем вищої математики: елементи лінійної алгебри, векторна алгебра, елементи аналітичної геометрії, елементи математичного аналізу, функції багатьох змінних. Наводяться зразки виконання типових задач, надається 30 варіантів завдань для самостійної роботи студентів, подано варіанти прикладних задач для інтерактивних занять.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ всіх форм навчання.

УДК 51(075)

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник призначений, в першу чергу, для студентів технічних спеціальностей, але може бути корисним і для студентів інших спеціальностей, які в тому чи іншому обсязі вивчають математику. Він містить в собі теоретичний матеріал з тем вищої математики: «Елементи лінійної алгебри», «Векторна алгебра», «Елементи аналітичної геометрії», «Елементи математичного аналізу», «Функції багатьох змінних».

Теоретичні відомості, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються прикладами розв'язань типових задач і задач прикладного характеру. Після теоретичної частини подано завдання для самостійної роботи з кожної теми, які мають два рівня складності. Перший – розрахований на набуття студентами навичок розв'язування звичайних традиційних задач. Другий – на набуття вмінь використання отриманих знань для розв'язування прикладних задач.

Навчальний посібник можна використовувати для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, типових розрахунків студентами денної форми навчання та при виконанні контрольних робіт студентами заочної форми навчання.

Автори сподіваються, що даний навчальний посібник буде корисним як студентам, які прагнуть одержати знання з вищої математики, так і викладачам для проведення занять та організації самостійної роботи студентів.

1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Часто доводиться використовувати ті чи інші дані у вигляді прямокутних таблиць. Так, наприклад, якщо три заводи випускають чотири види продукції, то звіт за рік може бути поданий у вигляді матриці − таблиці даних 3×4. Матричний запис систем лінійних рівнянь в європейській науці почали використовувати з XIX ст., хоча цей запис був відомий ще давньокитайським математикам II ст. до н.е.

1.1 Матриці та дії над ними

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків однакової довжини (або n стовпців однакової довжини). Матриця записується у вигляді: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

або $A=\left(a_{ij}\right)$, де a_{ij} – елементи матриці A, $i=\overline{1,m}$ – номер рядка, $j=\overline{1,n}$ – номер стовпця. A називають матрицею розміру $m{\times}n$ і пишуть $A_{m\times n}$.

Матриці позначаються великими літерами латинського алфавіту: *A*, *B*, *C*. Елементи матриць – a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} . Крім позначення матриці дужками ( ) зустрічаються також позначення [ ], або || ||.

Матриці називаються ***рівними***, якщо рівні їх розміри та відповідні елементи. Тобто *A*=*B*, якщо $a_{ij}=b_{ij}$, наприклад: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Матрицю розміру $m\times 1$ називають ***матриця-стовпець***, а матрицю розміру $1\times n$ − ***матриця-рядок.***

Матрицю, у якої число рядків дорівнює числу стовпців називають ***квадратною матрицею***. Квадратну матрицю розміру $n\times n$ називають ***матрицею*** n **-го порядку**: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Елементи квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ (розташовані з лівого верхнього кута до правого нижнього) утворюють ***головну діагональ матриці***, а елементи, розташовані вздовж діагоналі з нижнього лівого кута до верхнього правого, утворюють ***побічну діагональ***.

Квадратна матриця, елементи якої, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, нулі, називається ***діагональною***.

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається ***одиничною***. Позначається літерою E. Наприклад, $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ − одинична матриця 3-го порядку.

Квадратна матриця називається ***трикутною***, якщо всі елементи, розташовані по одну сторону від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається ***нульовою***. Позначається літерою O. Має вигляд − $O=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}$.

Множення матриці на число

Добутком довільної ***матриці*** $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ ***на число*** α називається матриця $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ така, що $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$).

Приклад 1. $2\cdot\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\10&14\end{pmatrix}$.

Алгебраїчна сума матриць

Сумою двох матриць $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ і $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ називається матриця $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ така, що $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$).

Приклад 2. Знайти $A+B$: $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&1&4\end{pmatrix}$ та $B_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-3&0\end{pmatrix}$.

Розв'язання. $\left(A+B\right)_{2\times3}=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&-2&4\end{pmatrix}$.

Приклад 3. Два заводи випускають вироби M, N, P вищої, першої, другої категорій якості. Кількість виробів, випущених кожним заводом за кожною категорією, задано таблицею:

Категорія якості	Готові вироби, випущені					
	I завод			II завод		
	M	N	P	M	N	P
Вища	150	40	320	280	300	450
Перша	100	130	175	120	150	170
Друга	25	15	20	30	20	18

Знайти загальний випуск виробів за вказаними категоріями якості.

Розв'язання. Кількість виробів, випущених першим заводом, можна розглядати як елементи матриці A, другим заводом – як матриці B.

Тобто загальну кількість виробів за вказаними категоріями можна розглядати як елементи матриці C, тоді:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 150 & 40 & 320 \\ 100 & 130 & 175 \\ 25 & 15 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 280 & 300 & 450 \\ 120 & 150 & 170 \\ 30 & 20 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 & 340 & 770 \\ 220 & 280 & 345 \\ 55 & 35 & 38 \end{pmatrix}.$$

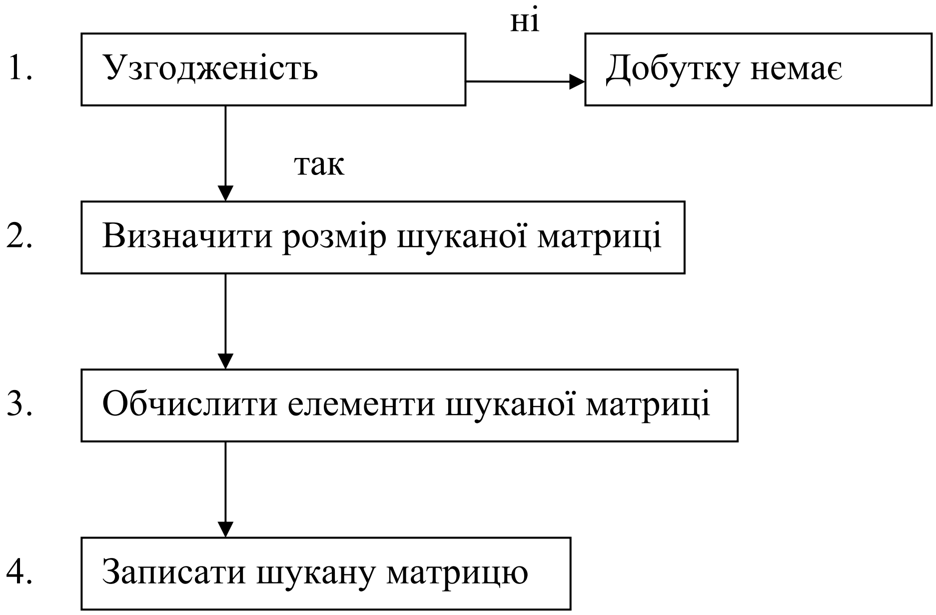
Множення матриці на матрицю

Матриці називаються ***узгодженими***, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці: $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$. Операцію множення матриць розглядають тільки для узгоджених матриць.

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ ***на матрицю*** $B = \left(b_{ij}\right)_{p\times n}$ називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ розміру $m\times n$, кожен елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B.

Добуток двох матриць в загальному випадку не є комутативним. Якщо змінити порядок матриць-множників може виявитись, що множення двох матриць неможливе. Для двох квадратних матриць одного і того ж порядку множення можливе, але і в цьому випадку, як правило, $AB \neq BA$. Прикладом комутативності двох матриць є квадратна і одинична матриці одного і того ж порядку.

Алгоритм множення матриць



Приклад 4. Для матриць $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ знайти $C=AB$.

Розв'язання. $A_{2\times3}$, $B_{3\times2}$ – узгоджені, тоді $C_{2\times2}$.

$$C=\begin{pmatrix}2\cdot3+1\cdot1+3\cdot3 & 2\cdot6+1\cdot2+3\cdot1\\ 4\cdot3+0\cdot1+1\cdot3 & 4\cdot6+0\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 17\\ 15 & 25\end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Для $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 6 & 5 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ знайти AB, BA (*Самостійно)*.

Приклад 6. Відповідно до програми будівельно-локальних робіт буде збудовано об'єктів: 1) в галузі x_1 – 10 одиниць об'єктів типу I і 15 одиниць типу II; 2) в галузі x_2 – 20 одиниць об'єктів типу III; 3) в галузі x_3 – 100 одиниць об'єктів типу IV. Визначити витрати будівельних матеріалів за видами p і g в кожній галузі, якщо норми витрат матеріалів (у відповідних одиницях) наведено в таблиці:

Тип об'єкта	Норма витрат матеріалів	
	p	*g*
I	2	15
II	10	20
III	10	100
IV	5	500

Розв'язання. Позначимо матрицю початкових даних за об'єктами будівництва через: $A=\begin{pmatrix}10 & 15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 100\end{pmatrix}$.

Тоді матриця норм витрат матеріалів: $B=\begin{pmatrix}2 & 15\\ 10 & 20\\ 10 & 100\\ 5 & 500\end{pmatrix}$.

Матриця витрат матеріалів $P=AB$:

$$P=\begin{pmatrix}10 & 15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 100\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 15\\ 10 & 20\\ 10 & 100\\ 5 & 500\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 10\cdot 2+15\cdot 10+0\cdot 10+0\cdot 5 & 10\cdot 15+15\cdot 20+0\cdot 100+0\cdot 500 \\ 0\cdot 2+0\cdot 10+20\cdot 10+0\cdot 5 & 0\cdot 15+0\cdot 20+20\cdot 100+0\cdot 500 \\ 0\cdot 2+0\cdot 10+0\cdot 10+100\cdot 5 & 0\cdot 15+0\cdot 20+0\cdot 100+100\cdot 500 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 170 & 450 \\ 200 & 2000 \\ 500 & 50000 \end{pmatrix}$$

Відповідь. Витрати матеріалу p в галузях x_1, x_2, x_3 складають відповідно: 170, 200, 500, а витрати матеріалу g відповідно: 450, 2000, 50000 одиниць.

Приклад *7.* Розрахувати заробітну плату при виготовленні різних виробів, використовуючи дані, вказані в наведених таблицях:

Вироби	Витрати робочого часу на кожному робочому місці				
	1	2	3	4	5
A	2	1	4	5	0
B	1	4	2	5	2
C	0	1	0	3	4

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	0	4	2
L	0	2	4
M	5	1	0

Робоче місце	Погодинна заробітна плата у гривнях
1	1,25
2	1,50
3	1,40
4	1,40
5	1,25

Розв'язання. Запишемо данні таблиць в матричній формі:

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 1{,}50 \\ 1{,}40 \\ 1{,}40 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця Y задає лінійну залежність між величиною заробітної плати і витратами робочого часу на кожному робочому місці, а матриця P – між затратами часу на кожному робочому місці і випуском виробів, то тоді добуток PY задає лінійну залежність між випуском виробів і величиною заробітної плати.

Матриця Q визначає кількість виробів у кожному замовленні, отже, добуток $X = Q(PY)$ визначає величину заробітної плати, яка потрібна на виконання кожного замовлення:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 99,60 \\ 81,90 \\ 102,55 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: заробітна плата за замовлення K складає 99,60 грн, за замовлення L – 81,90 грн, за замовлення M – 102,55 грн.

Транспонування матриць

Матрицю A^T називають ***транспонованою*** відносно матриці A, якщо вона утворена шляхом заміни рядків на стовпці в матриці A: якщо $A = \left(a_{ij}\right)$, то $A^T = \left(a_{ji}\right)$.

Приклад 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Властивості дій над матрицями

1. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$.
2. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$.
3. $\alpha \cdot \left(\beta \cdot A\right) = \left(\alpha \cdot \beta\right) \cdot A$.
4. $A + B = B + A$.
5. $\alpha \cdot \left(A + B\right) = \alpha \cdot B + \alpha \cdot A$.
6. $\left(\alpha + \beta\right) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.
7. $A + O = O + A = A$.
8. $\left(\alpha \cdot A\right) \cdot B = \alpha \cdot \left(A \cdot B\right) = A \cdot \left(\alpha \cdot B\right)$.
9. $\left(A \cdot B\right) \cdot C = A \cdot \left(B \cdot C\right)$.
10. $A \cdot \left(B + C\right) = A \cdot B + A \cdot C$; $\left(A + B\right) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
11. $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Самостійно за означенням довести одну з них.

1.2 Визначники матриць другого порядку

Визначник – це числова характеристика квадратної матриці. Квадратній матриці другого порядку можна поставити у відповідність число $\Delta = \left|A\right| = \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$, яке називається її ***визначником (детермінантом)***.

Позначають визначник: $|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 12 - 6 = 6$.

Властивості визначників матриць другого порядку

1. $|A^T| = |A|$

Доведення. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$. $|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Наслідок. Будь-яка властивість рядків визначника має місце і для його стовпців.

2. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) матриці дорівнюють нулю, то визначник цієї матриці дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

3. Якщо елементи одного рядка (стовпця) матриці дорівнюють відповідно елементам другого рядка (стовпця), то визначник цієї матриці дорівнює нулю.

4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

5. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) матриці помножити на одне і те ж саме число «k», то визначник матриці зміниться в «k» разів:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6. Якщо елементи деякого рядка матриці пропорційні елементам іншого рядка цієї ж матриці, то її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Нехай дано визначники двох матриць другого порядку, в яких, відповідно, два стовпці збіглися, а два – різні:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Сума цих визначників дорівнює визначнику матриці другого порядку, в якій вказаний стовпець складається з суми відповідних елементів цих стовпців:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Дійсно: $\Delta = a_{22}\cdot\left(a_{11}+b_{11}\right) - a_{12}\cdot\left(a_{21}+b_{21}\right) = a_{22}a_{11} + a_{22}b_{11} - a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} =$
$= \left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}\right) + \left(a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21}\right) = \Delta_1 + \Delta_2$.

8. Якщо до елементів деякого рядка матриці додати відповідно елементи другого рядка матриці, помножені на одне і те ж число «k», то визначник матриці не зміниться.

Доведення.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

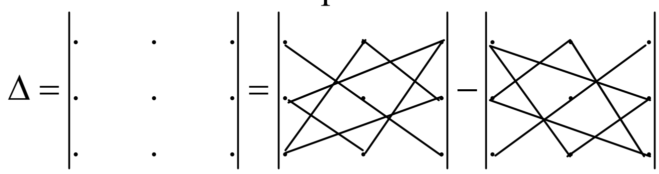
9. $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$. *(Довести самостійно).*

1.3 Визначники матриць третього порядку

Визначником матриці третього порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Для обчислення визначника третього порядку користуються правилом трикутника, яке схематично можна зобразити так:



Обчислення визначника третього порядку за правилом трикутника спростив Саррюс, який запропонував для зручності записати два перших стовпця за третім і обчислювати елементи у трикутниках за напрямком прямих. Правило Саррюса:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Приклад 1 *(Самостійно).* Показати, що визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$.

Зауваження. Всі властивості (1–9) визначників другого порядку, справедливі і для визначників третього порядку.

Мінором M_{ij} ***елемента*** a_{ij} визначника матриці A n-го порядку, називається визначник $(n-1)$-го порядку, одержаний із визначника матриці A шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Мінор першого порядку можна одержати з визначника матриці другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow M_{21} = a_{12}.$$

Мінор другого порядку можна отримати з визначника матриці третього порядку, наприклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням (або ад'юнктом) A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема 1 (Розкладання). Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Проілюструємо і доведемо дану теорему на прикладі визначника третього порядку:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Доведення.

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = |A|.$$

Що і треба було довести.

Приклад 2. Обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка. Перевірити розкладанням за елементами другого рядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. $|A| = 2 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 29$

Теорема 2 (*Анулювання*). Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) визначника на відповідні алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Проілюструємо і доведемо дану теорему на прикладі визначника третього порядку. Візьмемо для доведення, наприклад, елементи третього рядка та алгебраїчні доповнення елементів першого рядка.

Доведення. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{33}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$= a_{31}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{32}a_{23} - a_{32}a_{21}a_{33} + a_{32}a_{31}a_{23} + a_{33}a_{21}a_{32} - a_{33}a_{31}a_{22} = 0$.

Правила обчислення визначників третього порядку:

1. Правило трикутника (Саррюса).
2. Правило розкладання за елементами рядка (стовпця), теорема 1.
3. Метод занулення (властивість 8 та теорема розкладання).

Приклад 3. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ методом занулення.

Розв'язання. Накопичуємо «0» в 1-му стовпці: елементи 3-го рядка помножимо на «-2» і додаємо до елементів 1-го рядка; елементи 3-го рядка помножимо на «2» і додаємо до елементів 2-го рядка.

Одержимо: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Розкладемо визначник за елементами 1-го стовпця: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 29$.

1.4 Визначники матриць n-го порядку (n $\geq$ 4)

Визначником матриці n-го порядку називається число, яке знаходиться як сума добутків елементів i-го рядка (j-го стовпця) на їх алгебраїчні доповнення $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)$.

Зауваження: 1. Всі властивості визначників другого порядку справедливі і для визначників n-го порядку. 2. Визначники n-го порядку обчислюються за означенням з попереднім зануленням рядка або стовпця. 3. Правило трикутника справедливе тільки для визначників третього порядку.

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Виберемо для перетворення другий рядок. Накопичуємо «0» в 1-му стовпці: 1) елементи 2-го рядка помножимо на «-3» і додамо до елементів 1-го рядка; 2) елементи 2-го рядка множимо на «-5» і додамо до елементів 3-го рядка; 3) елементи 2-го рядка множимо на «-4» і додамо до елементів 4-го рядка. Одержимо: $\begin{vmatrix} 0 & 10 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 16 & -8 & -12 \\ 0 & 13 & -13 & -14 \end{vmatrix}$.

Розкладемо визначник за елементами 1-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 16 & -8 & -12 \\ 0 & 13 & -13 & -14 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 16 & -8 & -12 \\ 13 & -13 & -14 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 10 & -3 & -5 \\ 16 & -8 & -12 \\ 13 & -13 & -14 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 10 & -3 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 13 & -13 & -14 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 10 & -3 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 16 & -8 & -12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 10 & -3 & -5 \\ 16 & -8 & -12 \\ 13 & -13 & -14 \end{vmatrix}.$$

Маємо визначник 3-го порядку. Обчислимо його за правилом трикутника:

$$-\begin{vmatrix} 10 & -3 & -5 \\ 16 & -8 & -12 \\ 13 & -13 & -14 \end{vmatrix} = -\big(10\cdot(-8)\cdot(-14)+13\cdot(-3)\cdot(-12)+(-5)\cdot16\cdot(-13)-\big(13\cdot(-8)\cdot(-5)+$$

$$+10\cdot(-13)\cdot(-12)+(-14)\cdot16\cdot(-3)\big)\big) = -(-124) = 124.$$

1.5 Обернена матриця

Нехай дано квадратну матрицю A. ***Оберненою матрицею*** A^{-1} до матриці A називається матриця того ж порядку, яка задовольняє умову $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, де E – одинична матриця того ж порядку що й A.

Виродженою називається матриця, визначник якої дорівнює нулю. Якщо визначник матриці не дорівнює нулю, то матриця називається ***невиродженою***.

Теорема 1 (*Існування та обчислення оберненої матриці*). Якщо матриця A n-го порядку невироджена, тобто $|A|\neq 0$, то існує обернена до неї матриця:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

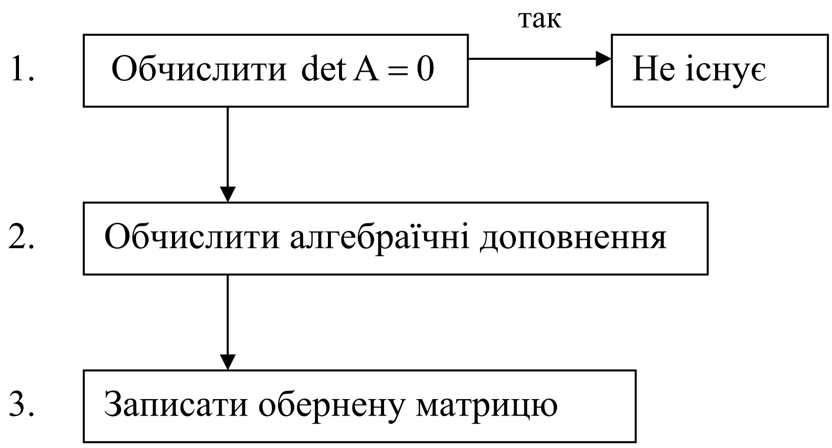
Доведення. За означенням оберненої матриці маємо: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\dots+a_{n1}A_{n1} & a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\dots+a_{n2}A_{n1} & \dots & a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\dots+a_{nn}A_{n1} \\ a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+\dots+a_{n1}A_{n2} & a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+\dots+a_{n2}A_{n2} & \dots & a_{1n}A_{12}+a_{2n}A_{22}+\dots+a_{nn}A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}A_{1n}+a_{21}A_{2n}+\dots+a_{n1}A_{nn} & a_{12}A_{1n}+a_{22}A_{2n}+\dots+a_{n2}A_{nn} & \dots & a_{1n}A_{1n}+a_{2n}A_{2n}+\dots+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$. Теорему доведено.

Алгоритм знаходження оберненої матриці



Приклад 1. Дано $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти A^{-1}.

Розв'язання. Перевіримо чи матриця невироджена:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 105 + 210 + 36 - 75 - 196 - 54 = 26 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 27,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 26, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -40,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17.$$

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -6 & 27 \\ 26 & 6 & -40 \\ -13 & 2 & 17 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. (*Самостійно*). Дано $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Знайти A^{-1}.

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{42} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 18 & 5 \\ 9 & -6 & 3 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

1.6 Невироджені системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

Система $\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$ $\qquad (1.1)$

називається ***невиродженою***, якщо визначник матриці A відмінний від нуля $\Delta = |A| \neq 0$, де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Матриця A, складена з коефіцієнтів при невідомих в системі (1.1), називається ***матрицею системи***.

Матриця, складена з елементів матриці системи та стовпця вільних коефіцієнтів системи (1.1), називається ***розширеною***:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Систему (1.1) можна записати в матричному вигляді $A \cdot X = B$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи (1.1) називається n значень невідомих $x_i = c_i$, $i = \overline{1,n}$, при підстановці яких усі рівняння системи перетворюються в правильні числові рівності.

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона немає жодного розв'язку. Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має більше одного розв'язку. Кожен розв'язок системи називається ***частинним розв'язком*** системи. Сукупність всіх частинних розв'язків називається ***загальним розв'язком***.

Розв'язати систему означає з'ясувати чи система є сумісною, якщо так, то знайти її загальний розв'язок.

Методи розв'язування невироджених систем лінійних рівнянь

1 Метод Крамера

Теорема. Якщо визначник системи (1.1) $\Delta \neq 0$, то ця система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами: $x_i = \Delta x_i / \Delta$, $i = \overline{1,n}$, де Δx_i – визначник, одержаний із Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних коефіцієнтів системи.

Доведення. Нехай $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – розв'язок системи (1.1). Щоб визначити x_1, множимо перше рівняння системи на A_{11}, друге – на A_{21} і так далі та додаємо всі рівняння:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \,\big|\cdot A_{11}, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \,\big|\cdot A_{21}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \,\big|\cdot A_{n1}. \end{cases}$$

$\left(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ldots+a_{n1}A_{n1}\right)\cdot x_1+\left(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\ldots+a_{n2}A_{n1}\right)\cdot x_2+\ldots+\left(a_{1n}A_{11}+\right.$
$\left.+a_{2n}A_{21}\ldots+a_{nn}A_{n1}\right)\cdot x_n=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}=\Delta x_1$.

Використовуючи теореми розкладання та анулювання одержимо:

$$\Delta\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=\Delta x_1.\ \text{Отже,}\ x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}.$$

Аналогічно помножимо систему (1.1) на A_{1j}, $A_{2j},\ldots,$ A_{nj}, додаючи рівняння системи, одержимо:

$$\Delta\cdot x_j=\Delta x_j\ \Rightarrow\ x_j=\frac{\Delta x_j}{\Delta},\quad j=\overline{1,n}.$$ Теорему доведено.

Приклад 1. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=1,\\ \qquad 2x_2+x_3=-2,\\ 3x_1+x_2+2x_3=3.\end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо Δ, Δx_1, Δx_2, Δx_3.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}=8+3+0-(6+2+0)=3.$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв’язок. Δx_1 утворюється шляхом заміни 1-го стовпця визначника Δ стовпцем вільних коефіцієнтів: $\Delta x_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}=4+3-2-(6+1-4)=2$. Таким чином, $x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{2}{3}$.

Аналогічно Δx_2 – заміна 2-го стовпця стовпцем вільних коефіцієнтів системи: $\Delta x_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&-2&1\\3&3&2\end{vmatrix}=-8+3+0-(-6+6+0)=-5$. Таким чином, $x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{-5}{3}$.

Аналогічно Δx_3 – заміна 3-го стовпця стовпцем вільних коефіцієнтів системи: $\Delta x_3=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&2&-2\\3&1&3\end{vmatrix}=12-6+0-(6-4+0)=4$. Таким чином, $x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{4}{3}$.

Відповідь: $\left(\frac{2}{3},\frac{-5}{3},\frac{4}{3}\right)$.

2 Метод Гаусса

У випадку, коли система лінійних рівнянь має велику кількість невідомих, через громіздкі обчислення користуватися формулами Крамера незручно. Одним з найбільш універсальних методів розв’язування систем лінійних рівнянь є метод Гаусса, який полягає у поступовому вилученні невідомих.

Процес розв'язування систем лінійних рівнянь за методом Гаусса складається з двох етапів. На першому етапі розширена матриця системи зводиться до ступінчатого вигляду. На другому етапі відбувається послідовне знаходження невідомих із цієї ступінчатої системи.

Більшість існуючих чисельних методів розв'язування задач лінійного програмування використовують метод Жордана-Гаусса, що є модифікацією методу Гаусса. Метод Жордана-Гаусса (метод повно вилучення невідомих) полягає у зведенні матриці системи до одиничної матриці.

Він ґрунтується на елементарних перетвореннях системи лінійних рівнянь: а) рівняння системи можна множити на число, відмінне від нуля, і додавати до будь-якого іншого рівняння; б) рівняння системи можна міняти місцями.

Покажемо дію методу на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи та перетворимо її.

1. На місці елемента a_{11} має бути 1, цей елемент вважається головним. Його можна отримати, якщо поміняти місцями рядки або стовпці системи, при цьому потрібно зафіксувати місце змінних x_i. У даному прикладі поміняємо місцями перший та другий стовпці матриці системи. Отже, на першому місці знаходитиметься x_2, на другому – x_1, на третьому – x_3.

2. У випадку, коли пункт 1 виконати неможливо, ділимо елементи 1-го рядка на a_{11}.

3. Записуємо матрицю, перетворюючи її елементи: 1-й стовпець занулюємо і зберігаємо елементи рядка, в якому міститься головний елемент, інші перераховуємо за правилом чотирикутника (як визначник 2-го порядку, але завжди починаючи з головного елемента). Для прикладу, на місці елемента a_{22} замість «0» запишемо «-4», оскільки, $1\cdot 0 - 2\cdot 2 = -4$ і т. д.

Після перетворення за a_{11}, аналогічно утворюємо 1 на місці елемента a_{22}, але елементи 1-го стовпця залишаємо незмінними до кінця перетворення. Після отримання 1 на місці a_{22}, стовпець занулюємо, а рядок з головним елементом зберігаємо, решту перераховуємо, починаючи з головного елемента. Наприклад, $a_{13} : 1\cdot 1 - 2\cdot 1 = -1$.

Аналогічно утворюємо 1 на місці елемента a_{33}. Таким чином, в кінці в стовпці вільних коефіцієнтів отримуємо значення x_1, x_2, x_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&2&1&-2\\3&1&2&3\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&0&1&-2\\1&3&2&3\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{c|cc|c}1&2&1&1\\\hline 0&-4&-1&-4\\0&1&1&2\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&4&1&4\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c}1&0&-1&-3\\0&1&1&2\\\hline 0&0&-3&-4\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-3\\0&1&1&2\\0&0&1&4/3\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5/3\\0&1&0&2/3\\0&0&1&4/3\end{array}\right).$$

Відповідь: $x_1 = \dfrac{2}{3}$; $x_2 = \dfrac{-5}{3}$; $x_3 = \dfrac{4}{3}$.

3 Матричний метод

Теорема. Якщо система (1.1) невироджена, то існує розв'язок системи, який можна знайти за формулою $X = A^{-1} \cdot B$.

Доведення. Запишемо систему (1.1) в матричному вигляді $A \cdot X = B$, помножимо зліва на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\quad \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B;\quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B;\quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Теорему доведено.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді $X = A^{-1} \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тоді $X = A^{-1} \cdot B$. Знайдемо A^{-1}. $|\mathrm{A}| = \Delta = 3$ (див. приклад 1).

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Маємо $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Тоді, розв'язок системи лінійних рівнянь знайдемо як:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\3&1&-2\\-6&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\cdot1-1\cdot(-2)-1\cdot3\\3\cdot1+1\cdot(-2)-2\cdot3\\-6\cdot1+1\cdot(-2)+4\cdot3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}.$

1.7 Довільні системи лінійних рівнянь

Розглянемо прямокутну матрицю $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

Якщо матриця A ненульова, то знайдеться таке ціле додатне число r, що виконуватимуться такі дві умови: 1) матриця A містить мінор r-го порядку, відмінний від нуля; 2) будь-який мінор $(r+1)$-го порядку і вище (якщо такі мінори існують) дорівнює нулеві. Число r, що задовольняє умови 1) і 2), називається ***рангом матриці*** A. Іншими словами, рангом матриці A називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то ранг такої матриці також дорівнює нулю.

Будь-який, відмінний від нуля мінор матриці, порядок якого дорівнює рангу цієї матриці, називається ***базисним мінором матриці***. У матриці може бути декілька базисних мінорів. Рядки і стовпці базисного мінора називаються відповідно ***базисними рядками*** і ***базисними стовпцями***.

Ранг матриці позначимо через $r(\mathrm{A})$. Якщо $r(A)=r(B)$, то матриці A і B називаються ***еквівалентними***.

Якщо в матриці будь-який рядок може бути поданий у вигляді суми інших паралельних йому рядків, помножених відповідно на числа α_1,α_2, $\dots$, α_n, то кажуть, що даний рядок є ***лінійною комбінацією*** вказаних рядків.

L – паралельних рядків матриці називаються ***лінійно залежними***, якщо хоча б один з них є лінійною комбінацією решти. В протилежному випадку вони ***лінійно незалежні***.

Теорема 1 (*Про базисний мінор*). Базисні рядки (стовпці) матриці лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) матриці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).

Перетворення матриці, які не змінюють її ранг, називають елементарними. Елементарними перетвореннями є: 1) заміна рядків стовпцями і навпаки; 2) перестановка рядків матриці; 3) закреслення рядка матриці, всі елементи якого дорівнюють нулю; 4) множення будь-якого рядка на число, відмінне від нуля; 5) додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка.

При обчисленні рангу матриці можна використовувати елементарні перетворення, метод зведення матриці до трапецієвидної форми та інші.

Приклад 1. Знайти ранги нижченаведених матриць:

$$1.\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3\\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків: $r(A)=3$.

$$2.\ A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\quad |A|=0\ \Rightarrow\ M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0\ \Rightarrow\ r(A)=2.$$

Теорема 2 (*Кронекера-Капеллі*). Для сумісності системи

$$\begin{cases}a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1,\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m\end{cases}\qquad(1.2)$$

необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай система (1.2) сумісна і λ_1, $\lambda_2,\ldots,$ λ_n – один із її розв'язків. Покажемо, що $r(A)=r(A')$, де A – матриця системи, A' – розширена матриця системи. Підставимо λ_1, $\lambda_2,\ldots,$ λ_n в систему (1.2):

$$\begin{cases}a_{11}\cdot \lambda_1+a_{12}\cdot \lambda_2+\ldots+a_{1n}\cdot \lambda_n=b_1,\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\\ a_{m1}\cdot \lambda_1+a_{m2}\cdot \lambda_2+\ldots+a_{mn}\cdot \lambda_n=b_m.\end{cases}\qquad(1.3)$$

Виконаємо над матрицею A' елементарні перетворення: до останнього стовпця додаємо перший стовпець, помножений на $(-\lambda_1)$, другий – на $(-\lambda_2)$,..., n-ий – на $(-\lambda_n)$. Тоді, враховуючи (1.3), одержимо:

$$A'\to A''=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0\end{array}\right).$$

Ранг не зміниться $r(A')=r(A'')$.

2. Достатність. Нехай матриці A і A' мають однаковий ранг $r(A)=r(A')=r$. Покажемо, що система (1.2) сумісна. Можна припустити, що відмінний від нуля визначник Δ порядку r знаходиться в лівому верхньому кутку як матриці A, так і A', тобто: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тоді r рядків матриць A та A' лінійно незалежні, а кожен із решти рядків може бути поданий як лінійна комбінація перших r рядків. Це означає, що останні $m-r$ рядків системи є наслідками «r» перших. Тому їх можна відкинути, і дана система буде рівносильною системі:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{r1}\cdot x_1 + a_{r2}\cdot x_2 + \ldots + a_{rn}\cdot x_n = b_r. \end{cases} \tag{1.4}$$

Можливі два випадки:

1) $r = n$, тобто число рівнянь системи дорівнює числу невідомих, причому визначник Δ цієї системи $\Delta \neq 0$. Система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера;

2) $r < n$, тобто число рівнянь системи менше числа невідомих, тоді система має безліч розв'язків.

Приклад 2. Довести сумісність та знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

Зробимо нижче головної діагоналі нулі:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = 2$.

Маємо систему: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$

Виразимо x_1 і x_2 через x_3 і x_4: $\begin{cases} x_1 = -3 - x_4 + 2\left(2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4\right), \\ x_2 = \frac{10}{5} + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4. \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = 2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4, \\ x_3, x_4 \in R. \end{cases}$

Приклад 3. Дослідити на сумісність систему: $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до трапецієвидної форми:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$r(A) = 2 \neq r(A') = 3$. Отже, система несумісна.

1.8 Однорідні системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Цю систему назвемо ***однорідною***. Вона завжди сумісна, оскільки ранг розширеної матриці системи дорівнює матриці системи $r(A) = r(A')$, і вона має тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема 1. Для того, щоб система (1.5) мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг її матриці був менший за число невідомих.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай r – ранг матриці системи, n – число невідомих. Оскільки ранг не може перевищувати розмір матриці, то $r \leq n$. Нехай

$r = n$, тоді один із мінорів розміру $n \times n$ відмінний від нуля. Тому система має один розв'язок $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0,\ \Delta_i = 0,\ \Delta \neq 0$ − тривіальний. Інших, крім тривіальних, розв'язків немає.

2. Достатність. Якщо $r < n$, то (1.5) є невизначеною системою, тобто має безліч розв'язків, в тому числі і безліч ненульових розв'язків. Теорему доведено.

Теорема 2. Для того, щоб однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник $\Delta = 0$.

Доведення. Умова $\Delta = 0$ є необхідною, оскільки, якщо $\Delta = 0$, система має єдиний нульовий розв'язок. Ця умова і є достатньою: якщо $\Delta = 0$, то ранг $r < n$ і система має нескінченну множину ненульових розв'язків. Теорему доведено.

Приклад 1. Розв'язати систему: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. $|A| = -3 \neq 0 \ \Rightarrow \ r(A) = 3$.

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад 2. Розв'язати систему: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$, $n = 3$, $r < n$. Отже, система має безліч розв'язків.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_2 - 10x_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - 4x_3, \\ x_2 = \dfrac{10}{7}x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7}x_3 - 4x_3, \\ x_2 = \dfrac{10}{7}x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-18}{7}x_3, \\ x_2 = \dfrac{10}{7}x_3, \\ x_3 \in R. \end{cases}$$

1.9 Прикладні технічні задачі з лінійної алгебри

В електротехніці для визначення необхідності певних елементів, пов'язаних кількісним співвідношенням, використовується табличний метод, який полягає у знаходженні коефіцієнтів для кожного елемента.

Приклад 1. Нехай є таблиця кількісних елементів:

Блок 1	$2X_1$	$4X_2$	$3X_3$	19
Блок 2	$3X_1$	$4X_2$	X_3	14
Блок 3	$2X_1$	X_2	$5X_3$	19
	R	C	VD	шт.

Необхідно знайти кількість елементів для кожного блока.

Розв'язання. Складемо систему рівнянь: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 19, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 19. \end{cases}$.

Розширена матриця системи: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 19 \\ 3 & 4 & 1 & 14 \\ 2 & 1 & 5 & 19 \end{array}\right)$

Розв'яжемо її за методом Крамера:
$\Delta = -29,\ \Delta x_1 = -29,\ \Delta x_2 = -58,\ \Delta x_3 = -87$. Тоді $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

Відповідь: розв'язком є кількісна таблиця:

Блок 1	2	8	9	19
Блок 2	3	8	3	14
Блок 3	2	2	15	19
	7	18	27	шт.

Розв'язування систем лінійних рівнянь застосовується також для розрахунку складних електричних схем з використанням законів Кірхгофа:

I закон – алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю.

II закон – алгебраїчна сума спадів напруг у замкнутому контурі дорівнює сумі ЕРС.

Приклад 2. Дано електричну схему (рис. 1.1). $E_1 = 2$ В, $R_1 = 4$ Ом, $E_2 = 4$ В, $R_2 = 6$ Ом, $E_3 = 6$ В, $R_3 = 8$ Ом. Знайти: I_1, I_2, I_3.

Розв'язання. Визначаємо кількість вузлів N і складаємо $(N-1)$ рівняння за першим законом. У вузлі обираємо напрям струмів і напрям обходу контуру.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ E_1 - R_1 I_2 - R_2 I_3 - E_2 = 0, \\ R_3 I_1 - E_3 + E_2 + R_2 I_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ 2 - 4I_2 - 6I_3 - 4 = 0, \\ 8I_1 - 6 + 4 + 6I_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ -4I_2 - 6I_3 = 2, \\ 8I_1 + 6I_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за методом Крамера.

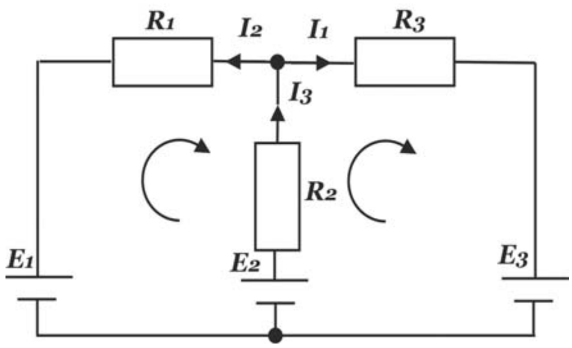


Рисунок 1.1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -6 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -104 \qquad \Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 40 \qquad \Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Відповідь: $I_1 = \frac{32}{104} \approx 0,308A$, $I_2 = -\frac{40}{104} \approx -0,385A$, $I_3 = -\frac{8}{104} \approx -0,077A$.

Значного поширення в радіотехніці отримав розрахунок кіл методом чотириполюсника.

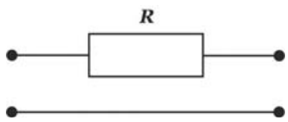
Чотириполюсник – це електричне коло, що має 4 точки підключення. Як правило, дві точки це вхід, дві інші – вихід. Кожен чотириполюсник має свою передавальну матрицю. Так, чотириполюсник, зображений на рис. 1.2, має передавальну матрицю

$$P = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а чотириполюсник, зображений на рис. 1.3, передавальну матрицю

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

При каскадному з'єднанні чотириполюсників їх передавальні матриці перемножуються. Це дає можливість знаходити передавальні матриці складних чотириполюсників, розділяючи їх на найпростіші.



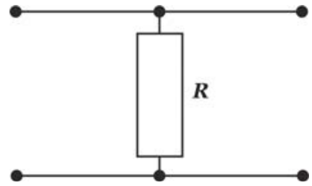


Рисунок 1.2 Рисунок 1.3

Приклад 3. Знайти передавальну матрицю чотириполюсника, зображеного на рис. 1.4.

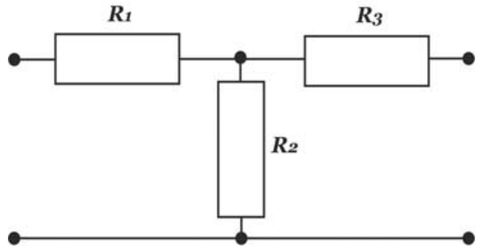


Рисунок 1.4

Розв'язання. $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{R_1}{R_2} & R_1 + R_3 + \dfrac{R_1 R_3}{R_2} \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 + \dfrac{R_3}{R_2} \end{pmatrix}.$$

Одержали шукану передавальну матрицю.

Тести для самоперевірки

1. Матрицею третього порядку називається:

а) визначник; б) таблиця з трьох елементів;

в) дев'ять чисел; г) прямокутна таблиця з дев'яти елементів.

2. Нульова матриця – це матриця:

а) у якої є хоча б один нуль;

б) всі елементи головної діагоналі якої нулі;

в) всі елементи якої нулі;

г) у якої є стовпець (рядок) нулів.

3. Яке з висловлень є хибним?

а) $A+B=B+A$ – сума матриць комутативна;

б) додавати можна матриці лише одного розміру;

в) додавати можна лише квадратні матриці;

г) додавання до даної матриці нульової не змінює дану матрицю.

4. Множення двох матриць передбачає:

а) множення елементів рядків першої на елементи стовпців другої і додавання їх;

б) множення відповідних елементів матриць;

в) множення елементів рядків першої на елементи стовпців другої;

г) множення елементів рядків першої на елементи рядків другої.

5. Транспонування матриці – це:

а) перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці;

б) зміна знаків елементів матриці;

в) зміна елементів головної і побічної діагоналей матриці;

г) заміна рядків на стовпці матриці.

6. Визначник – це

а) числова характеристика матриці;

б) матриця, задана в прямокутних дужках;

в) числова характеристика квадратної матриці;

г) число $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

7. Для матриці не існує оберненої, якщо:

а) визначник даної матриці дорівнює нулю;

б) елементи головної діагоналі даної матриці нулі;

в) вона є невиродженою;

г) вона є квадратною.

8. Елементами оберненої матриці є

а) мінори; в) алгебраїчні доповнення; б) мажори;

г) визначники нижчого порядку, ніж порядок визначника даної матриці.

9. Рангом матриці називається

а) кількість ненульових елементів матриці;

б) найбільший порядок ненульового мінора даної матриці;

в) найбільший порядок нульового мінора даної матриці;

г) кількість лінійно залежних рядків.

10. Якщо визначник матриці системи лінійних рівнянь дорівнює нулю, то

а) матриця системи є невиродженою;

б) система має безліч розв’язків;

в) систему слід розв’язувати матричним методом;

г) потрібно перевірити систему на сумісність.

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Одним із фундаментальних понять сучасної математики є вектор. Наочно вектор можна уявити у вигляді напрямленого відрізка, хоча правильніше говорити про цілий клас напрямлених відрізків, паралельних між собою, які мають однакову довжину і однаковий напрям. Вектори застосовуються в класичній механіці Галілея – Ньютона (у сучасному викладі), теорії відносності, квантовій фізиці, математичній економіці і багатьох інших розділах природознавства, не кажучи вже про застосування векторів в різних галузях математики.

2.1 Векторний простір. Поняття вектора. Види векторів

Величини, які виражаються тільки числом, називаються ***скалярними***. Прикладами скалярних величин є довжина, маса, робота тощо. Векторна величина залежить від двох елементів різної природи: алгебраїчного – числа, що вимірює довжину (модуль) вектора, і геометричного – напряму вектора. Величини, що крім числового значення характеризуються ще і напрямком, називаються ***векторними*** величинами. Наприклад, сила, швидкість, прискорення. Векторна величина геометрично зображається вектором. ***Геометричним вектором*** (далі вектором) називається напрямлений відрізок (рис. 2.1).

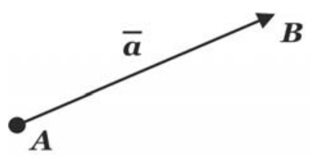


Рисунок 2.1

Довжину відрізка AB називають ***довжиною***, або ***модулем*** вектора $|\overrightarrow{AB}|$. Довжину відрізка $\vec{a}$ позначають $|\vec{a}|$. Якщо початок та кінець вектора збігаються, то такий вектор називається ***нуль-вектором***, його довжина дорівнює нулю, а напрямок вважається довільним.

Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони розташовані на одній або на паралельних прямих $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Колінеарні вектори, які мають один і той же напрям, називаються ***співнапрямленими*** ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), навпаки – ***протилежно напрямленими*** $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними*** ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо один із них можна отримати з іншого паралельним перенесенням, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$, а їх величини дорівнюють одна одній $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Вектори називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

2.2 Лінійні операції над векторами

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання, віднімання і множення вектора на число.

Додавання векторів

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, причому початок $\vec{b}$ виходить з кінця $\vec{a}$.

Сумою кількох векторів називається вектор, початок якого збігається з початком першого, а кінець – з кінцем останнього, причому початок кожного наступного вектора є кінцем попереднього.

Суму двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знаходити за правилом трикутника або за правилом паралелограма: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2.2).

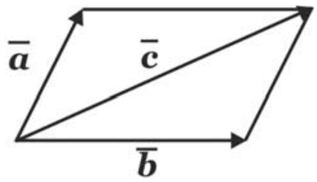


Рисунок 2.2

Сума трьох некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ знаходиться за правилом паралелепіпеда: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (рис. 2.3).

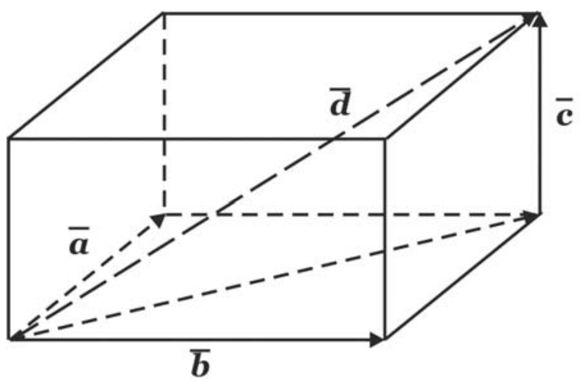


Рисунок 2.3

Операція додавання векторів підпорядкована таким властивостям:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативний закон).
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (асоціативний закон).

3. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує вектор $\vec{a}'$ такий, що $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$ ($\vec{0}$ – нульовий вектор), а $\vec{a}'$ – вектор, протилежний вектору $\vec{a}$.

Віднімання векторів

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (зведених до спільного початку) називається вектор, напрямлений з кінця від'ємника (вектора $\vec{b}$) в кінець зменшуваного ($\vec{a}$): $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ (рис. 2.4).

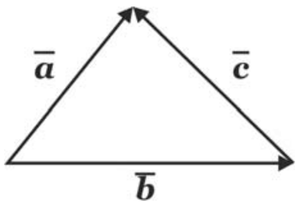


Рисунок 2.4

Множення вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на дійсне число*** m називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови: 1) довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює добутку довжини $\vec{a}$ на модуль числа m; 2) якщо $m > 0$, то $\vec{a}$ і $\vec{c}$ співнапрямлені, якщо $m < 0$, то $\vec{a}$ і $\vec{c}$ протилежно напрямлені.

На рисунку 2.5 вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}_1$ співнапрямлені, $\vec{a}$ і $\vec{c}_2$ протилежно напрямлені.

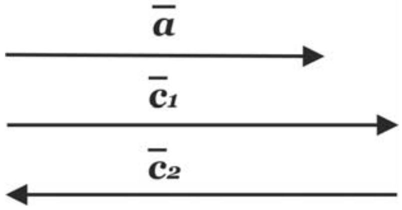


Рисунок 2.5

Операція множення вектора на число підпорядкована таким властивостям:

1. $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$, $\vec{a} \cdot 0 = 0$.
2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
3. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$.
4. $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

2.3 Орт вектора. Умова колінеарності

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називається ***ортом (одиничним вектором)***. ***Ортом ненульового вектора*** $\vec{a}$ називається вектор $\vec{a}_0$, модуль якого дорівнює одиниці, а напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$: $\vec{a}_0 \uparrow\uparrow \vec{a}$.

Справедлива рівність: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$, $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Теорема (*Умова колінеарності 2-х векторів*). Для того, щоб два вектори були колінеарні, необхідно і достатньо, щоб один із них дорівнював добутку деякого числа на інший вектор.

Нехай деяка пряма l утворює з осями координат кути α, β, γ (рис. 2.6).

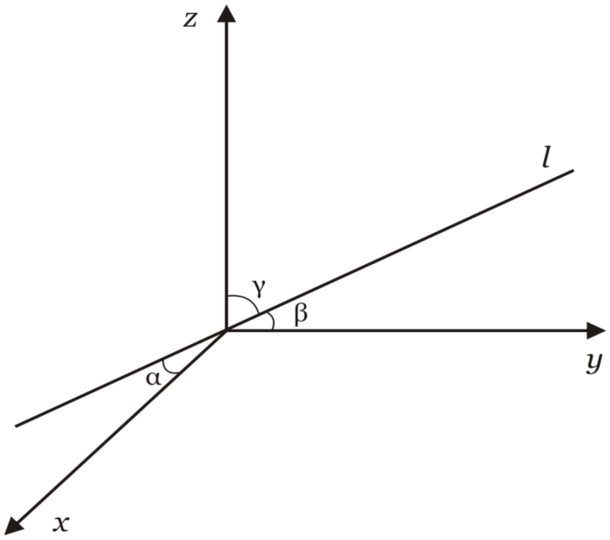


Рисунок 2.6

Напрямними косинусами прямої l (або напрямку l) називаються косинуси цих кутів ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$). Якщо напрямок заданий одиничним вектором $\vec{a}_0$, то напрямні косинуси є його координатами $\vec{a}_0 = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$. Напрямні косинуси пов'язані між собою співвідношенням: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2.4 Лінійна залежність та незалежність векторів

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$ називається вираз $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – будь-які дійсні числа.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$ називаються ***лінійно залежними***, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (одночасно не всі рівні нулю), що виконується рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Якщо дана рівність справедлива лише за умови $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то вектори називаються ***лінійно незалежними***.

Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$ лінійно залежні і, наприклад, $\alpha_n \neq 0$, тоді $\vec{a}_n = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_n}\vec{a}_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_n}\vec{a}_2 - \ldots - \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\vec{a}_{n-1}$ тобто, $\vec{a}_n$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_{n-1}$. Таким чином, якщо вектори лінійно залежні, то хоча б один із них лінійно виражається через решту векторів.

Геометрично: $\vec{a}_3 = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2$ (рис. 2.7).

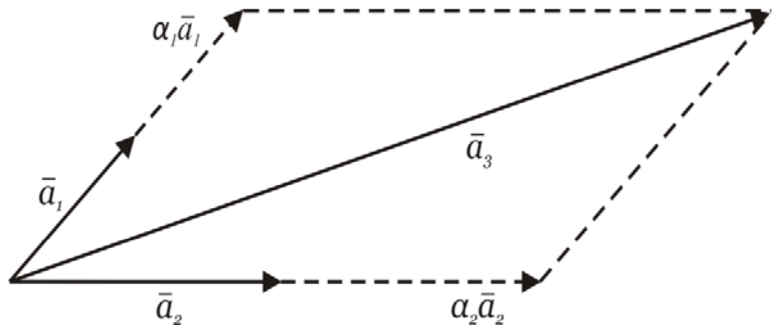


Рисунок 2.7

Теорема 1 *(Про лінійну залежність 2-х векторів)*. Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай два вектори $\vec{a},\vec{b}$ лінійно залежні. Тоді існують числа α,β такі, що $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ і хоча б одне з них, наприклад, $\beta\neq 0$. Тоді $\vec{b}=-\dfrac{\alpha}{\beta}\vec{a}$. За умовою колінеарності двох векторів вектори $\vec{a},\vec{b}$ колінеарні.

2. Достатність. Нехай вектори $\vec{a},\vec{b}$ колінеарні. Тоді існує число α таке, що $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ або $\alpha\vec{b}+(-1)\cdot\vec{a}=\vec{0}$, а це і означає, що вектори $\vec{a},\vec{b}$ лінійно залежні. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо вектори $\vec{a},\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні.

Теорема 2 (*Про лінійну залежність 3-х векторів*). Три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лінійно залежні. Тоді знайдуться числа α, β, γ такі, що $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ і хоча б одне з них, наприклад, γ відмінне від нуля. Тоді $\vec{c}=-\dfrac{\alpha}{\gamma}\vec{a}-\dfrac{\beta}{\gamma}\vec{b}$. Але якщо всі три вектори мають спільний початок, то вектор $\vec{c}$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$. А це означає, що всі три вектори лежать в одній площині, тобто компланарні.

2. Достатність. Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні. Покажемо, що вони лінійно залежні. Не розглядаємо випадок, коли серед векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є пара колінеарних векторів. Оскільки пара колінеарних векторів є лінійно залежною, то і вся трійка векторів буде лінійно залежною. Будемо вважати, що серед $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ немає колінеарної пари векторів. Перенесемо всі три вектори в одну площину таким чином, щоб вони мали спільний початок точку O (рис. 2.8).

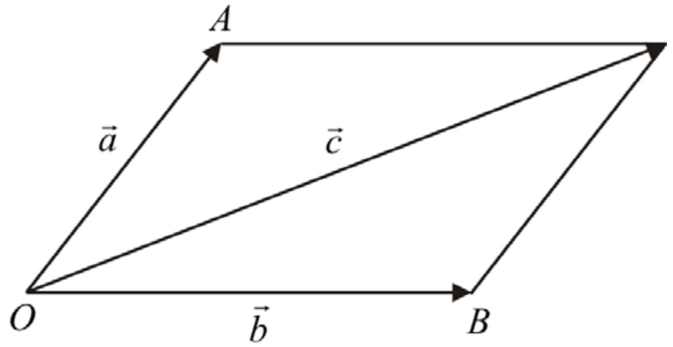


Рисунок 2.8

З кінця вектора $\vec{c}$ проведемо дві прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді $\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Вектор $\overrightarrow{OA}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, а вектор $\overrightarrow{OB}$ колінеарний вектору $\vec{b}$, то $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \beta\vec{b}$. Отже $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ або $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$. А це означає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо три вектори некомпланарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Чотири вектори в тривимірному лінійному просторі лінійно залежні завжди.

Теорема 3. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, а вектори $\vec{a}, \vec{b}$ неколінеарні, то існують єдині числа α, β такі, що вектор $\vec{c}$ можна лінійно виразити через вектори єдиним способом: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Доведення. Доведемо існування. Розглянемо два випадки:

1. Нехай вектори $\vec{b}, \vec{c}$ колінеарні, тоді, знайдеться таке число β, що $\vec{c} = \beta\vec{b}$. Таким чином, $\vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + \beta\vec{b}$.

2. Нехай дані компланарні вектори попарно неколінеарні. За теоремою 2 вектори лінійно залежні а, отже, знайдуться числа α, β, γ такі, що $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Для $\gamma = -1$ маємо: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$, тобто, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Доведемо єдиність. Нехай існує інша пара чисел $\alpha_1 \neq \alpha$, $\beta_1 \neq \beta$ така, що $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$. Тоді $\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha)\vec{a} = (\beta - \beta_1)\vec{b} \Rightarrow$ $\vec{a} = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha}\vec{b}$, отже, $\vec{a}, \vec{b}$ колінеарні, а це суперечить умові теореми. Хіба, що $\frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} = 0$, тобто $\beta - \beta_1 = 0$, $\beta_1 = \beta$. Аналогічно $\alpha_1 = \alpha$. Теорему доведено.

Теорема 4. Якщо три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні, то будь-який вектор $\vec{d}$ можна лінійно виразити через $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, притому єдиним способом: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}$.

2.5 Базис і координати вектора

Умова колінеарності двох векторів та теореми 3,4 підрозділу 2.4 стверджують, що будь-який вектор прямої, площини, простору можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації, відповідно, одного, двох чи трьох лінійно незалежних векторів. Саме тому пряму, площину та простір називають, відповідно, одно-, дво- та тривимірним векторним простором.

Множину найрізноманітніших систем $(x_1, x_2, ..., x_n)$ дійсних чисел, для яких визначено операції додавання і множення на дійсне число, називають ***n-вимірним дійсним простором*** і позначають через R_n. Кожну таку систему чисел назвемо точкою або вектором R_n. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – координати точки (вектора) або компоненти вектора.

Векторний простір називається ***n-вимірним***, якщо в ньому існує лінійно незалежна система з n векторів, а будь-які $n+1$ вектори утворюють лінійно залежно систему.

Базисом n***-вимірного векторного простору*** називається довільна впорядкована лінійно незалежна система із n векторів цього простору.

З означення випливає, що у векторному просторі існує безліч базисів. Базисом називають ще впорядковану максимально лінійно незалежну систему векторів у просторі. Слово «максимально» означає, що до системи базисних векторів неможливо приєднати жодного вектора простору так, щоб система залишалась лінійно незалежною.

З теорем попередніх підрозділів випливає, що 1) будь-яка трійка некомпланарних векторів утворює базис у просторі; 2) будь-яка пара неколінеарних векторів площини утворює базис у цій площині.

Теорема 1. Кожен вектор $\vec{a}$ лінійного n-вимірного простору можна подати єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\vec{a} = \alpha_1\vec{l}_1 + \alpha_2\vec{l}_2 + ... + \alpha_n\vec{l}_n$.

Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називаються ***координатами вектора*** $\vec{a}$ в базисі $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$, тобто $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Властивості координат вектора

Нехай $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.

1. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$.
2. $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n)$.
3. $\vec{a} \pm \vec{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, ..., \alpha_n \pm \beta_n)$.
4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = ... = \alpha_n/\beta_n$.

Доведемо 2.

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\vec{l}_1 + \alpha_2\vec{l}_2 + ... + \alpha_n\vec{l}_n) = (\alpha_1\lambda\vec{l}_1 + \alpha_2\lambda\vec{l}_2 + ... + \alpha_n\lambda\vec{l}_n) \to (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n).$$

2.6 Проекція вектора на вісь

Числовою віссю або ***віссю*** називається пряма, на якій вибрано початкову точку (початок), додатний напрям (вказується на рисунках стрілкою) та одиничний відрізок (одиницю масштабу).

Проекцією точки A ***на пряму*** l називається точка A', в якій пряма l перетинається з площиною перпендикулярною до l, що проходить через точку A. Задамо напрямлену пряму l та вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ***на напрямлену пряму*** l називається вектор $\overrightarrow{A'B'}$, де A', B' – відповідно, проекції точок A і B на пряму l: $A'B' = np_L AB$ (рис. 2.9).

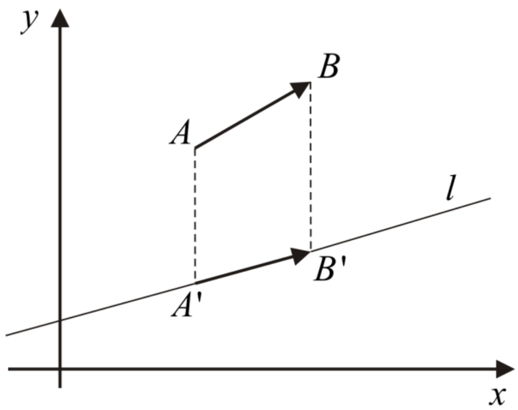


Рисунок 2.9

Числовою проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на напрямлену пряму l називається добуток $|\vec{a}|$ на косинус кута між $\vec{a}$ і напрямом l:

$$np_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a}, l}\right).$$

Властивості проекцій

1. $np_L\vec{a} = 0$, якщо $|\vec{a}| = 0$, або $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

2. $np_L(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot np_L\vec{a}$.

3. $np_L\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_L\vec{a} + np_L\vec{b}$.

4. $np_L(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n) = \alpha_1 np_L\vec{a}_1 + \alpha_2 np_L\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n np_L\vec{a}_n$.

Доведемо 2. Нехай $\lambda > 0$, тоді $np_L(\lambda \cdot \vec{a}) = |\lambda\vec{a}| \cdot \cos\alpha = \lambda|\vec{a}| \cdot \cos\alpha = \lambda np_L\vec{a}$. Нехай $\lambda < 0$, тоді $np_L(\lambda \cdot \vec{a}) = -\lambda|\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \alpha) = \lambda|\vec{a}| \cdot \cos\alpha = \lambda np_L\vec{a}$. Що і треба було довести.

2.7 Декартові координати вектора та точки

Розглянемо прямокутну систему координат в просторі $Oxyz$. На кожній осі виберемо одиничний вектор, напрям якого збігається з додатним напрямком осей $Ox-\vec{i}$, $Oy-\vec{j}$, $Oz-\vec{k}$, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Ці три взаємно перпендикулярні вектори називаються ***ортами***. Оскільки вони некомпланарні, то утворюють базис, який називається ***декартовим ортогональним базисом***.

Розглянемо в просторі вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$. Через кінець вектора $\overrightarrow{OM}$ проведемо площини, паралельні координатним площинам, отримаємо паралелепіпед, однією із діагоналей якого є $\vec{a}$ (рис. 2.10).

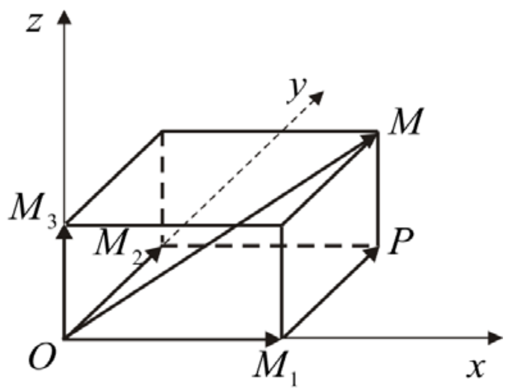


Рисунок 2.10

За означенням суми декількох векторів маємо: $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{PM}$, але $\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM_3}$, таким чином $\vec{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$. Вектори $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$ є складовими векторами $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ по осях OX, OY, OZ, але $\overrightarrow{OM_1}=np_{OX}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2}=np_{OY}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3}=np_{OZ}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}$. Позначимо проекції $\overrightarrow{OM}$ на координатні осі відповідно a_x, a_y, a_z. Тоді: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

Нехай точка M має координати (x,y,z). Напрямлений відрізок OM називається ***радіус-вектором*** точки M тобто $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, тоді проекції вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ на осі $a_x=x$, $a_y=y$, $a_z=z$ і $\vec{a}=(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ – ***декартові координати вектора*** $\vec{a}$.

Напрямні косинуси

Позначимо через α, β, γ кути нахилу вектора $\vec{a}$ до осей Ox, Oy, Oz. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають ***напрямними косинусами*** вектора $\vec{a}$. Скориставшись означенням числової проекції, одержимо:

$$a_x = np_{OX}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};$$

$$a_y = np_{OY}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};$$

$$a_z = np_{OZ}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Таким чином, будь-який вектор $\vec{a}$ має орт: $\vec{a}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$.

2.8 Ділення відрізка в даному відношенні

Поділити відрізок M_1M_2 (рис. 2.11) в даному відношенні $\lambda > 0$ означає: на даному відрізку знайти таку точку M, для якої виконується рівність: $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ або $M_1M = \lambda MM_2$.

Рисунок 2.11

Нехай дано точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо координати точки $M(x, y, z)$. Скористаємось рівністю $M_1M = \lambda MM_2$:

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = \lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j} + \lambda(z_2 - z)\vec{k}, \text{ тоді}$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Виразивши з кожної рівності невідомі, одержимо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо точка M середина відрізка M_1M_2, тобто $\lambda = 1$, то одержимо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 1. Горизонтальна балка довжиною 3 м і масою 80 кг вільно лежить своїми кінцями на двох рухомих опорах A і B (рис. 2.12). На якій відстані від кінця A потрібно розмістити вантаж масою 200 кг, щоб тиск на опору B дорівнював 1100 Н.

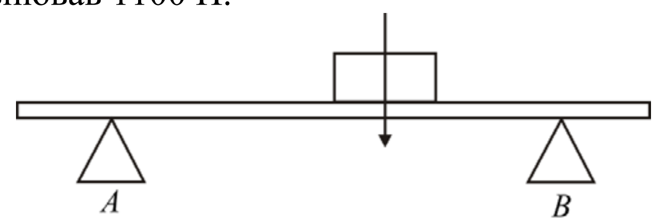


Рисунок 2.12

Розв'язання. Маса балки 80 кг складає 784 Н. На опору діє половина ваги балки. Тобто 392 Н. Вага масою 200 кг діє на балку силою 1960 Н. На частину опори B повинно припадати 1100 – 392 = 708 Н, а на частину опори A – інші 1252 Н. Прийнявши точку A за початок координат (рис. 2.12), ділимо відрізок у відношенні $\lambda = \dfrac{708}{1252} \approx 0{,}56.$

Тоді: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \approx \dfrac{0 + 0{,}56 \cdot 3}{1 + 0{,}56} \approx 1{,}07 м$

Таким чином, щоб тиск на опору B дорівнював 1100 Н, необхідно вантаж масою 200 кг розмістити на відстані 1,07 м від опори A.

2.9 Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Оскільки $|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = пр_{\vec{a}}\vec{b}$ і $|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = пр_{\vec{b}}\vec{a}$, то скалярний добуток за іншим означенням: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\, пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\, пр_{\vec{b}}\vec{a}$. Виразивши з останньої рівності проекції, одержимо формули: $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}$ чи $пр_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Фізичний зміст скалярного добутку: робота постійної сили $\vec{F}$ з переміщення точки на прямолінійній ділянці: $A = \vec{F}\vec{s}$, де $\vec{s}$ – вектор переміщення.

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \cdot \vec{b}$.
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ при $\vec{a} \neq 0, \quad \vec{b} \neq 0$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$.

Зауваження: 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, якщо $\vec{a}$ – ненульовий вектор і $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, якщо $\vec{a}$ – нульовий вектор; 2) $\sqrt{\vec{a}^2} \neq \vec{a}$, а $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$.

6. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

7. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Властивості 1–5 дають змогу при скалярному множенні виконувати дії почленно, не зважаючи при цьому на порядок і місцезнаходження числових множників. Властивість 6 вказує на спосіб обчислення скалярного добутку за декартовими координатами векторів – скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

Наслідок 1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1),\ \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ є рівність: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Наслідок 2. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходиться за формулою

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

2.10 Векторний добуток векторів

Упорядкована трійка некомпланарних векторів називається ***правою***, якщо найкоротший поворот від 1-го вектора до 2-го з кінця 3-го здійснюється проти руху годинникової стрілки. Якщо за годинниковою стрілкою, то трійка векторів називається ***лівою***.

На рисунку 2.13 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права трійка, $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ – ліва.

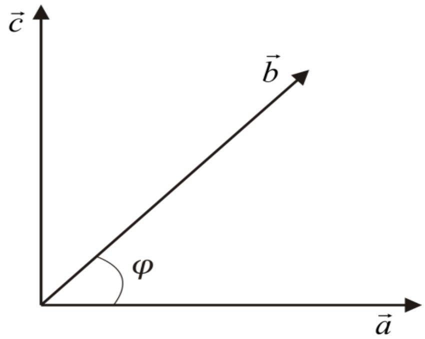


Рисунок 2.13

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови: 1) вектор $\vec{c} \perp$ до $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 2) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку; 3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Позначають векторний добуток: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ або $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \vec{c}$.

Геометричний зміст: векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – це вектор, модуль якого дорівнює площі паралелограма побудованого на цих векторах як на сторонах $S = |\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

Зауваження. Із означення векторного добутку випливає те, що для колінеарності двох ненульових векторів необхідно і достатньо, щоб їхній векторний добуток дорівнював нулю.

Фізичний зміст векторного добутку: якщо сила $\vec{F}$ діє на точку M, то момент цієї сили $m_A\left(\vec{F}\right)$ відносно точки A дорівнює векторному добутку векторів $\vec{F}$ і $\overline{AM}$: $m_A\left(\vec{F}\right) = \overline{AM} \times \vec{F}$ (рис. 2.14). Момент відносно початку координат точки O $m_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M.

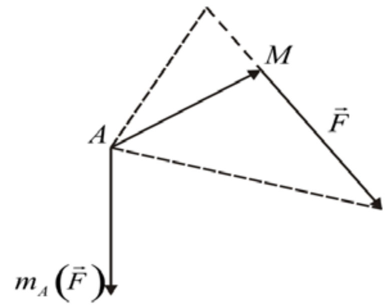


Рисунок 2.14

Також за допомогою векторного добутку знаходиться швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, тобто: $\vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості, $\vec{r}$ – радіус-вектор даної точки.

Властивості векторного добутку

З означення векторного добутку випливає ряд властивостей. Основні з них такі.

1. Векторний добуток змінює свій знак на протилежний при перестановці співмножників: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2. Скалярні множники можна винести за знак векторного добутку:
$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}).$$
3. Векторне множення підпорядковане дистрибутивному закону:
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$
4. Векторний добуток вектора самого на себе дорівнює нулю: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
5. Якщо $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ то $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Доведемо 5.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \times \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \times \vec{i} +$$
$$+ y_1y_2\vec{j} \times \vec{j} + y_1z_2\vec{j} \times \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \times \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \times \vec{k} = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} +$$
$$+ z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Наслідок. Якщо два вектори $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ колінеарні, то їх координати пропорційні $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

2.11 Мішаний добуток трьох векторів

Добуток $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$ називається ***векторно-скалярним***, або ***мішаним*** добутком трьох векторів і позначається $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Теорема 1. Якщо $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $\vec{c}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Доведення. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Геометричний зміст: модуль мішаного добутку векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах:

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

$V=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$ – об’єм піраміди, побудованої на цих векторах як на ребрах.

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток не змінюється при циклічному переставленні співмножників: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$.
2. Мішаний добуток змінює знак на протилежний при переставленні двох будь-яких множників: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.
3. Скалярні множники можна винести за знак мішаного добутку:
$$\left(\alpha\vec{a}\right)\left(\beta\vec{b}\right)\left(\gamma\vec{c}\right)=\left(\alpha\beta\gamma\right)\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$
4. Мішаний добуток дистрибутивний відносно додавання:
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Теорема 2 (*Умова компланарності трьох векторів*). Для того, щоб три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ були компланарні, необхідно і достатньо щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Доведення

1. Необхідність. Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні, тобто $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лежать в одній площині. Тоді вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\perp\vec{b}$. Цей вектор перпендикулярний площині, в якій розташовані ці вектори, а, отже, і перпендикулярний вектору $\vec{c}$, тому $\vec{d}\vec{c}=0$.

2. Достатність. Нехай $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$. Якби $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ були некомпланарні, то на цих векторах можна було б побудувати паралелепіпед, об'ємом $V\neq 0$. Але об'єм паралелепіпіда $V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$ і $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=0$. Отже, вони компланарні.

Приклад. Показати, що $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні: $\vec{a}(-1,3,2)$, $\vec{b}(2,-3,-4)$, $\vec{c}(-3,12,6)$.

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток векторів:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=-1\cdot(-3)\cdot 6+3\cdot(-4)\cdot(-3)+2\cdot 12\cdot 2-(-3\cdot(-3)\cdot 2+$$

$$+12\cdot(-4)\cdot(-1)+2\cdot 3\cdot 6)=0.$$

Мішаний добуток дорівнює нулю. Отже, вектори компланарні.

Тести для самоперевірки

1. Вектори колінеарні, якщо вони

а) мають рівні довжини;

б) лежать в одній площині;

в) розташовані на одній чи на паралельних прямих;

г) лінійно незалежні.

2. Вкажіть хибне продовження висловлення: «Якщо три вектори компланарні, то ...»

а) об'єм піраміди, побудованої на цих векторах, є додатним числом;

б) визначник, складений з координат цих векторів, дорівнює нулю;

в) вони лежать в одній площині;

г) їх мішаний добуток дорівнює нулю.

3. Знайдіть довжину вектора $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$, де $\vec{a}=(4,2,9)$, $\vec{b}=(5,0,3)$.

а) 1; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{135}$; г) $5\sqrt{5}$.

4. Декартовий ортогональний базис − це

а) сукупність трьох довільних векторів;

б) сукупність трьох взаємно перпендикулярних векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ з довільною довжиною;

в) сукупність трьох некомпланарних векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;

г) сукупність трьох взаємно перпендикулярних одиничних векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

5. Якщо $A(-2,-3,-2)$ і $B(2,-4,0)$, то $\overline{AB}$ має координати

а) $(0,-7,-2)$; б) $(0,7,2)$; в) $(4,-1,2)$; г) $(-4,1,-2)$.

6. ***Геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів*** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *:*

а) вектор, модуль якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах;

б) об’єм піраміди, побудованої на цих векторах як на сторонах;

в) об’єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на сторонах;

г) вектор, модуль якого дорівнює площі трикутника, побудованого на цих векторах як на сторонах.

7. Якщо $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні, то* $\vec{a}\vec{b}$ *дорівнює*

а) $|\vec{a}||\vec{b}|$; б) 1; в) 0; г) -1.

8. *Який кут утворюють одиничні вектори* $\vec{m}$ *і* $\vec{n}$*, якщо відомо, що вектори* $\vec{a}=2\vec{n}+\vec{m}$ *і* $\vec{b}=-4\vec{n}+5\vec{m}$ *взаємно перпендикулярні?*

а) 150°; б) 60°; в) 120°; г) 30°.

9. Яка з властивостей не є властивістю векторного добутку?

а) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$; б) $\vec{a}\times\vec{a}=0$;

в) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$; г) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$.

10. Продовжити речення: «Для того, щоб вектори були компланарні, необхідно і достатньо, щоб їх ...»

а) векторний добуток дорівнював нулю;

б) скалярний добуток дорівнював нулю;

в) мішаний добуток дорівнював нулю;

г) правильно все вищеперераховане.

3 ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Розділ математики, який займається вивченням властивостей геометричних об'єктів засобами алгебри методом координат, називається аналітичною геометрією. Згідно з цим методом, кожному геометричному об'єкту ставиться у відповідність деяке рівняння, яке пов'язує координати фігури чи тіла. Методи аналітичної геометрії застосовують до фігур на площині, до поверхонь в просторі, а також допускають узагальнення на простори більшого числа розмірностей.

3.1 Пряма на площині

Множина точок площини, яка підпорядкована певним геометричним властивостям, утворює лінію. ***Рівнянням лінії*** на площині називається рівняння, яке задовольняють координати кожної точки даної лінії і не задовольняють координати будь-якої іншої точки, що не належить даній лінії. Довільну точку будемо називати ***біжучою*** або **змінною точкою**. Найпростішою з ліній є пряма. Різним способам задання прямої відповідають різні види її рівняння в декартовій (прямокутній) системі координат.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Задамо на площині прямокутну систему координат і пряму l, непаралельну Ox і Oy (рис. 3.1):

$$y = kx + b, \tag{3.1}$$

де $k = tg\varphi$ – кутовий коефіцієнт, а b – відрізок, який відтинає l на осі Oy.

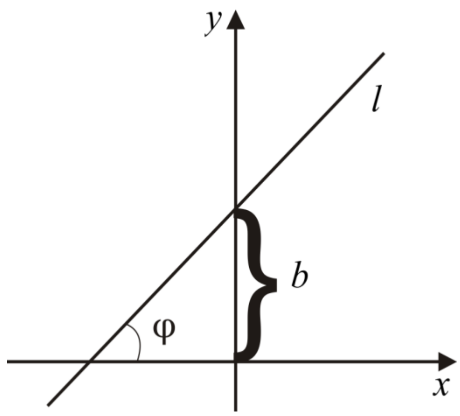


Рисунок 3.1

Якщо пряма вертикальна ($\varphi = 90^\circ$, $tg 90^\circ$ – не існує), то її рівняння матиме вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину прямої з віссю Ox. Якщо пряма паралельна осі Ox ($\varphi = 0^\circ$, $tg 0^\circ = 0$), то $y = b$ – горизонтальна пряма. Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння (3.1) має вигляд $y = kx$.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі

Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і має кутовий коефіцієнт k. Рівняння цієї прямої матиме вигляд (3.1), де b – поки що невідома величина. Оскільки пряма проходить через точку M_1, то її координати задовольняють рівняння прямої: $y_1 = kx_1 + b$. Звідси $b = y_1 - kx_1$. Підставимо значення b в рівняння (3.1): $y = kx + y_1 - kx_1$. Згрупувавши невідомі, одержимо шукане рівняння:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3.2}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Відомо, що через дві точки, які не збігаються, можна провести пряму і до того ж тільки одну. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Рівняння прямої, що проходить через точку M_1 має вигляд (3.2), де k поки що невідомий коефіцієнт. Оскільки пряма проходить через точку $M_2(x_2, y_2)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння (3.2): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

Виразимо k з останьої рівності: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Підставимо знайдене значення k в рівняння (3.2): $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Відокремивши змінні, одержимо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3.3}$$

Вважається, що в рівнянні (3.3) $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$. Можливий випадок, коли $x_2 - x_1 = 0$ ($y_2 - y_1 = 0$), тоді рівняння (3.3) матиме вигляд:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0}\right).$$

Незважаючи на недоречність цієї рівності, такий запис є коректним. Якщо звільнитись від знаменників, одержимо: $x - x_1 = 0$ – пряма, паралельна осі Oy ($y - y_1 = 0$ – пряма, паралельна осі Ox).

Кут між двома прямими

Нехай дано дві прямі l_1 та l_2 (рис. 3.2), що визначаються, відповідно, рівняннями $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$. Позначимо через φ_1 і φ_2 кути, які утворюють прямі з додатним напрямом осі Ox. Знайдемо кут φ між даними прямими:

$$\varphi = \pi - \varphi_1 - (\pi - \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 tg\varphi_1}.$$

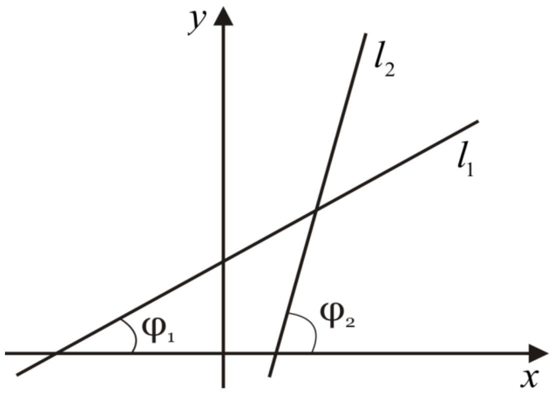


Рисунок 3.2

Перейдемо до кутових коефіцієнтів: $$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right| \qquad (3.4)$$

Якщо прямі паралельні $l_2 \parallel l_1$, то $tg\varphi = 0$ і з (3.4) випливає: $k_2 = k_1$.

Якщо прямі перпендикулярні $l_2 \perp l_1$, то $\varphi = 90^\circ$ і $tg\varphi \to \infty$. Тому з (3.4) випливає $1 + k_2 k_1 = 0$, тобто $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Загальне рівняння прямої на площині

Рівняння прямої – це рівняння першого степеня відносно змінних x і y. В загальному вигляді рівняння прямої на площині записується так:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (3.5)$$

де A, B, C – довільні числа, причому A і B одночасно не дорівнюють нулю. При $B \neq 0$ рівняння (3.5) рівносильне рівнянню $y = kx + b$, де $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

Рівняння (3.5) називають ***загальним рівнянням прямої*** на площині.

Теорема 1. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярний до прямої, заданої рівнянням (3.5).

Доведення. Нехай точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ будь-які точки прямої (3.5) (рис. 3.3).

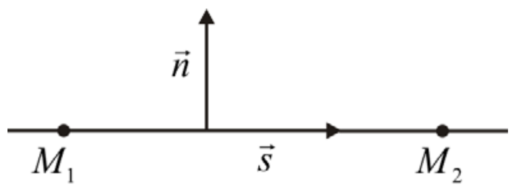


Рисунок 3.3

Це означає, що мають місце рівності: $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$.

Віднявши ці дві рівності, одержимо: $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$.

З останньої рівності випливає, що вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярний до вектора $\vec{s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Оскільки вектор $\vec{s}$ лежить на прямій (3.5), то теорему доведено.

Вектор $\vec{n}$ називається ***нормальним вектором прямої***, а вектор $\vec{s}$ – ***напрямним вектором прямої***.

Наслідки. 1. Якщо дано дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, де $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$, відповідно, – нормальні вектори цих прямих, то кут між ними знаходять із формули

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (3.6)$$

2. Якщо дві прямі задані загальними рівняннями, то умовою їх перпендикулярності є рівність: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

3. Умовою паралельності двох прямих є рівність: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Зауваження. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (3.5) можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ де } a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}. \qquad (3.7)$$

Рівняння (3.7) називається рівнянням прямої у відрізках. Така назва рівняння пов'язана з тим, що пряма перетинає осі Ox і Oy, відповідно, в точках $(a, 0)$, $(0, b)$ і відсікає на осях відрізки довжиною $|a|$ і $|b|$.

Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань від деякої точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, заданої рівнянням (3.5), тобто відстань $d = |M_0K|$ (рис. 3.4).

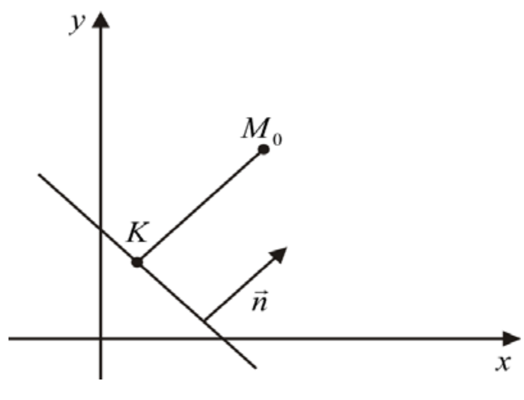


Рисунок 3.4

Нехай точка $K(x,y)$ – проекція точки M_0 на дану пряму.

Тоді $\overrightarrow{M_0K} = (x - x_0, y - y_0)$. Але вектори $\overrightarrow{M_0K}$ і $\vec{n}$ колінеарні. Тому:

$$\left|\overrightarrow{M_0K} \cdot \vec{n}\right| = \left|\left|\overrightarrow{M_0K}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\left(\overrightarrow{M_0K}, \hat{\vec{n}}\right)\right| \text{ або}$$

$$\left|(x - x_0)A + (y - y_0)B\right| = \left|Ax + By - Ax_0 - By_0\right| = \left|\overrightarrow{M_0K}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0^\circ = d|\vec{n}|.$$

Враховуючи, що $Ax + By + C = 0$, маємо: $\left|-Ax_0 - By_0 - C\right| = d\sqrt{A^2 + B^2}$ або $\left|Ax_0 + By_0 + C\right| = d\sqrt{A^2 + B^2}$.

Тоді формула відстані від точки M_0 до прямої (3.5) має вигляд:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3.8}$$

Приклад 1. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $(2,-3)$ і має кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{3}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.2):

$$y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 2), \qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - 3, \qquad y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Відповідь: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$.

Приклад 2. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат перпендикулярно до прямої AB: $A(-3,2)$ і $B(1,-1)$.

Роз'вязання. Знайдемо рівняння прямої AB: $\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y+1}{2+1}$, $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{3}$. Запишемо дане рівняння у вигляді (3.1): $3(x-1) = -4(y+1)$, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Кутовий коефіцієнт прямої AB $k_{AB} = -\frac{3}{4}$. З умови перпендикулярності прямих кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k = \frac{4}{3}$. Скориставшись формулою (3.2), одержимо рівняння шуканої прямої: $y - 0 = \frac{4}{3}(x - 0)$.

Відповідь: $y = \frac{4}{3}x$.

Приклад 3. В трикутнику ABC обчислити довжину висоти, проведеної з вершини A на сторону BC, якщо $A(2,3)$, $B(-1,2)$, $C(1,-1)$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння сторони BC: $\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+1}{2+1}$, $3x-3=-2y-2$, $3x+2y-1=0$.

Тоді відстань від точки A до прямої BC знайдемо за формулою (3.8):

$$d=\frac{\left|3\cdot2+2\cdot3-1\right|}{\sqrt{4+9}}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Відповідь: $d=\frac{11}{\sqrt{13}}$.

3.2 Площина в просторі

Загальне рівняння площини

Введемо в просторі декартову систему координат $Oxyz$. Запишемо загальне рівняння площини α в просторі. Нехай маємо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\alpha$ і деякий вектор $\vec{n}\left(A,B,C\right)$, перпендикулярний до площини α (рис. 3.5).

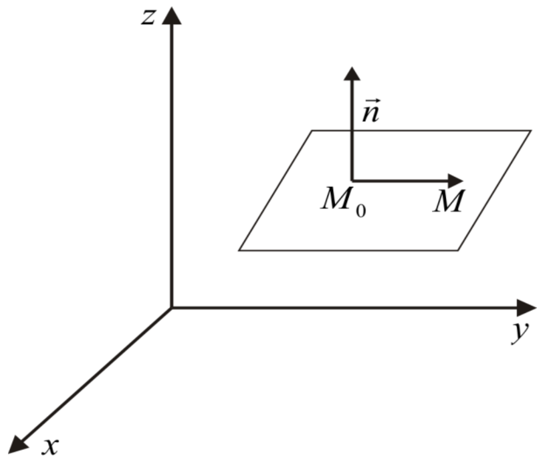


Рисунок 3.5

Нехай $M(x,y,z)$ – біжуча точка площини. Тоді вектори $\vec{n}\left(A,B,C\right)$ і $\overrightarrow{M_0M}=\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right)$ перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто:

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0. \qquad (3.9)$$

Розкриємо дужки в (3.9): $Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0$. Позначивши $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, одержимо:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3.10)$$

Рівняння (3.10) називається ***загальним рівнянням площини***.

Теорема 1. Якщо деяка площина задана рівнянням (3.10), то вектор $\vec{n}\left(A,B,C\right)$ перпендикулярний до цієї площини.

Доведення. Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежать в площині (3.10). Це означає, що: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$ $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$ $Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$. Віднявши першу і другу та першу і третю рівності, одержимо:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$
$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

А це означає, що вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ та $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, які лежать у площині (3.10). Проте M_1, M_2, M_3 – довільні точки площини, отже, вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярний до площини, що визначається рівнянням (3.10). Теорему доведено.

Зауваження. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ рівняння (3.10) рівносильне рівнянню

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ де } a = \frac{-D}{A},\ b = \frac{-D}{B},\ c = \frac{-D}{C}. \tag{3.11}$$

Рівняння (3.11) називають ***рівнянням площини у відрізках***, яка перетинає осі: Ox – в $(a, 0, 0)$, Oy – в $(0, b, 0)$, Oz – в $(0, 0, c)$.

Частинні випадки загального рівняння площини

1. Якщо $D = 0$, то рівняння (3.10) набирає вигляду $Ax + By + Cz = 0$ – площина проходить через початок координат.
2. Якщо $C = 0$, то рівняння (3.10) набирає вигляду $Ax + By + D = 0$ – площина паралельна осі Oz. Аналогічно, якщо $B = 0$, то осі Oy, якщо $A = 0$, то осі Ox.
3. Якщо $C = D = 0$, то рівняння (3.10) набирає вигляду $Ax + By = 0$ – площина проходить через початок координат паралельно осі Oz. Аналогічно, якщо $B = D = 0$ – осі Oy, якщо $A = D = 0$ – осі Ox.
4. Якщо $A = B = 0$, то рівняння (3.10) набирає вигляду $Cz + D = 0$ – плошина паралельна площині Oxy. Аналогічно, якщо $A = C = 0$ – площині Oxz, якщо $B = C = 0$ – площині Oyz.
5. Якщо $A = B = D = 0$, то рівняння (3.10) набирає вигляду $Cz = 0$, тобто, $z = 0$ – рівняння плошини Oxy. Аналогічно, якщо $A = C = D = 0$, то $y = 0$ – рівняння площини Oxz, якщо $B = C = D = 0$, то $x = 0$ – рівняння площини Oyz.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини (3.10) обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.12}$$

Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай площина α проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій (рис. 3.6).

Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ цієї площини та знайдемо вектори:

$$\overrightarrow{M_1M} = \left(x - x_1, y - y_1, z - z_1\right),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \left(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\right).$$

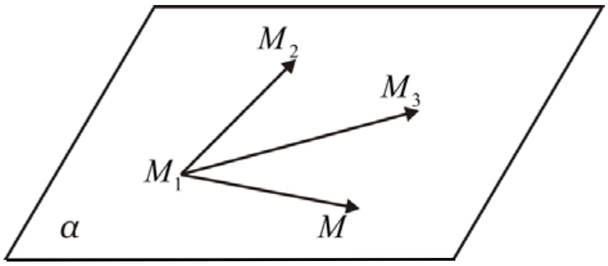


Рисунок 3.6

Ці вектори компланарні, тому їх мішаний добуток дорівнює нулю $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, тобто:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.13)$$

Рівняння (3.13) – ***рівняння площини в просторі, задане трьома точками.***

Кутові співвідношення

Кут між площинами дорівнює куту між нормальними векторами цих площин. Нехай одна площина задана рівнянням $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1\left(A_1, B_1, C_1\right)$, а інша – $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2\left(A_2, B_2, C_2\right)$, то кут φ між ними знаходимо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3.14)$$

Із співвідношення (3.14) випливає, що рівність $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ є умовою перпендикулярності двох площин; а рівність $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ – умовою паралельності двох площин.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1\left(-2,1,4\right)$ паралельно площині $3x + 2y - 7z + 8 = 0$.

Розв'язання. Нормальний вектор даної площини: $\vec{n}(3,2,-7)$ є нормальним вектором і шуканої площини. Тому $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$, де $M(x,y,z)$ довільна точка шуканої площини. Маємо: $3(x+2)+2(y-1)-7(z-4)=0$.

Відповідь: $3x+2y-7z+32=0$.

3.3 Пряма в просторі

Загальні рівняння прямої в просторі

Пряма в просторі є множиною всіх точок, що належать кожній із двох площин, які перетинаються. Якщо ці площини задані рівняннями $F(x,y,z)=0$ і $G(x,y,z)=0$, то лінія їх перетину визначається системою рівнянь: $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

Пряма в просторі є лінією перетину двох площин, тому аналітично її можна задати системою:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Векторне та параметричні рівняння прямої

Положення прямої в просторі цілком визначається, якщо задати будь-яку її фіксовану точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та вектор $\vec{s}$, паралельний цій прямій. Вектор $\vec{s}$ називається ***напрямним вектором прямої***, якщо він лежить на ній або їй паралельний.

Нехай пряма l задана точкою M_1 та вектором $\vec{s}(m,n,p)$. Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x,y,z)$ (рис. 3.7).

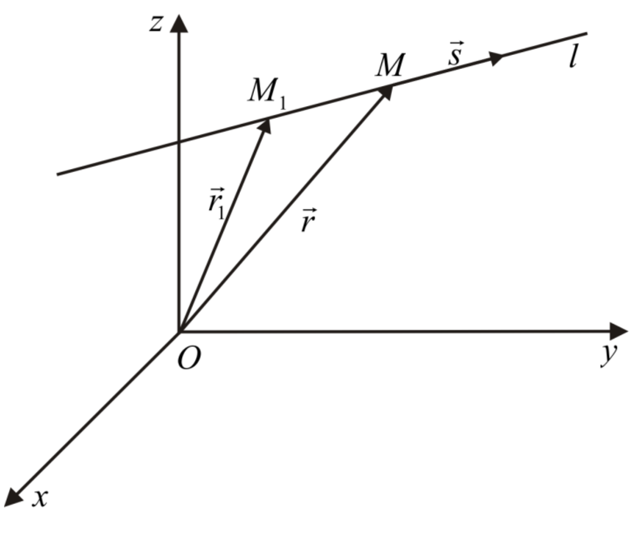


Рисунок 3.7

Позначимо радіус-вектори точок M_1 і M відповідно через $\vec{r}_1$ і $\vec{r}$. Тоді вектори пов'язані співвідношенням $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$ або $\vec{r} = \vec{r}_1 + \overrightarrow{M_1M}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_1M}$ лежить на прямій l, то він паралельний вектору $\vec{s}$ і має місце рівність $\overrightarrow{M_1M} = t\vec{s}$, де $t \in (-\infty, \infty)$ – параметр, який набирає різних значень залежно від положення точки M на прямій. Таким чином, маємо:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s}. \tag{3.16}$$

Рівняння (3.16) називається ***векторним рівнянням прямої***. Перейдемо в рівнянні (3.16) до координатного розкладу:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad \vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \qquad t\vec{s} = tm\vec{i} + tn\vec{j} + tp\vec{k}.$$

Тоді: $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s} = (x_1 + mt)\vec{i} + (y_1 + nt)\vec{j} + (z_1 + tp)\vec{k}$. Дана рівність еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt. \end{cases} \tag{3.17}$$

Рівняння (3.17) є ***параметричними рівняннями прямої*** в просторі.

Канонічне рівняння прямої

Нехай маємо напрямний вектор $\vec{s}(m, n, p)$ і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямої l. Візьмемо на прямій будь-яку точку $M(x, y, z)$ (рис. 3.8).

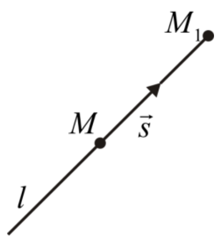


Рисунок 3.8

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{s}$ – колінеарні, тому їх координати пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \tag{3.18}$$

Рівняння (3.18) називається ***канонічним рівнянням прямої*** в просторі.

Канонічне рівняння прямої можна отримати, знаючи координати двох точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ цієї прямої, оскільки за напрямний вектор можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \vec{s}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3.19}$$

Рівняння (3.19) називається ***рівнянням прямої, що проходить через дві точки***.

Канонічне рівняння прямої можна отримати з параметричних рівнянь шляхом вилучення параметра t: $t = \frac{x - x_1}{m}$, $t = \frac{y - y_1}{n}$, $t = \frac{z - z_1}{p}$.

Часто доводиться переходити від загальних рівнянь прямої до її канонічного рівняння. У такому випадку найпростіше знайти які-небудь два розв'язки системи (3.15), а потім скористатись формулою (3.19). Або, щоб перейти від загальних рівнянь прямої до іншого вигляду, можна знайти точку, що належить цій прямій, та напрямний вектор $\vec{s}$. Оскільки пряма перпендикулярна до нормальних векторів площин $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ та $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, перетином яких вона є, то $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Кутові співвідношення

Знаючи напрямні вектори прямих $l_1 - \vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$, $l_2 - \vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$, можна знайти кут φ між ними (рис 3.9):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{3.20}$$

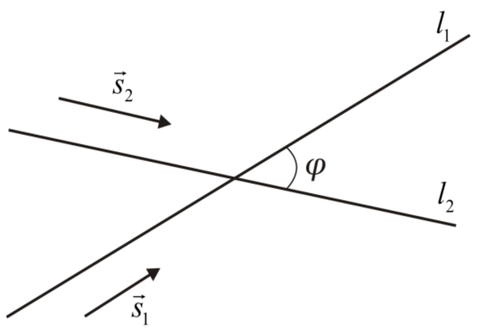


Рисунок 3.9

Із співвідношення (3.20) випливає, що рівність $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ є умовою перпендикулярності прямих, а рівність $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ – паралельності прямих.

Нехай маємо площину α і пряму l (рис. 3.10). Позначимо через φ кут між прямою і площиною. Тоді $\left(90^\circ - \varphi\right)$ – кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}(m, n, p)$ і нормальним вектором площини $\vec{n}\left(A, B, C\right)$. Даний кут ми можемо знайти з означення скалярного добутку векторів:

$$\cos\left(90^\circ - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{3.21}$$

Із співвідношення (3.21) випливає, що рівність $Am + Bn + Cp = 0$ є умовою перпендикулярності векторів $\vec{s}$ і $\vec{n}$, а, отже, паралельності прямої l і площини α; а рівність $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$ – відповідно, перпендикулярності l і α.

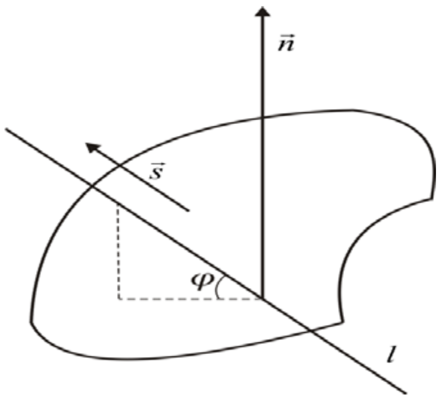


Рисунок 3.10

Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої l, напрямним вектором якої є вектор $\vec{s}(m, n, p)$. Візьмемо на прямій будь-яку точку $M(x, y, z)$ (рис. 3.11). Розглянемо паралелограм MM_0BA, побудований на векторах $\overrightarrow{MM_0}$ і $\vec{s}$. Його площа дорівнює: $S = d \cdot |\vec{s}| = \left|\vec{s} \times \overrightarrow{MM_0}\right|$. Тому шукану відстань d можна знайти з рівності:

$$d = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{MM_0}\right|}{|\vec{s}|}. \tag{3.22}$$

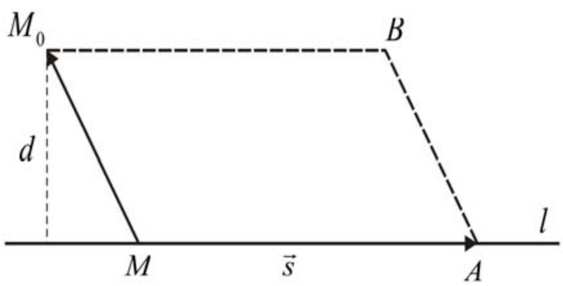


Рисунок 3.11

Приклад 1. Знайти координати двох точок прямої $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 3y - z + 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо координати першої точки, для цього надамо одній зі змінних значення, наприклад, $z = 0$. За такої умови одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} x+y=3, \\ x-3y=-5. \end{cases}$ Розв'язавши систему, матимемо: $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$ Отже, $M_1(1,2,0)$.

Аналогічно знайдемо координати іншої точки:

$x=0$ $\begin{cases} z+y=3, \\ -3y-z=-5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1, \\ z=2. \end{cases}$ $M_2(0,1,2)$.

Відповідь: $M_1(1,2,0)$, $M_2(0,1,2)$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x-3y-z+4=0. \end{cases}$, що проходить через точку $M(6,-2,0)$.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої $\vec{s}$. Нормальні вектори площин, перетином яких є дана пряма, $\vec{n}_1(2,-3,1)$ та $\vec{n}_2(1,-3,-1)$. Тоді:

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=3\left(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)\cdot$$

Скориставшись формулою (3.18), одержимо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}.$$

Приклад 3. Скласти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x-3y-z+4=0, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо координати двох точок даної прямої:

$$\begin{cases} z=0 \\ 2x+3y=0, \\ x-3y=-4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}, \\ y=\dfrac{8}{9}, \\ z=0. \end{cases} \qquad M_1\left(-\frac{4}{3},\frac{8}{9},0\right).$$

$$\begin{cases} z=4, \\ 2x+3y=-4, \\ x=3y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}, \\ y=-\dfrac{4}{9}, \\ z=4 \end{cases} \qquad M_2\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{9},4\right).$$

Напрямний вектор прямої $\vec{s}=\overrightarrow{M_2M_1}=\left(0,\frac{4}{3},-4\right)$.

Використавши формулу (3.18), одержимо: $\dfrac{x+\frac{4}{3}}{0}=\dfrac{y-\frac{8}{9}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{z-0}{-4}$.

Приклад 4. Знайти відстань від точки $M_0\left(1,-1,2\right)$ до прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{MM_0}$, де $M\left(1,0,2\right)$ точка даної прямої: $\overrightarrow{MM_0}=\left(0,-1,0\right)$. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=\left(2,-1,3\right)$, його модуль – $\left|\vec{s}\right|=\sqrt{14}$. Тоді векторний добуток векторів $\overrightarrow{MM_0}$ і $\vec{s}$ дорівнює:

$$\vec{s}\times\overrightarrow{MM_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=3\vec{i}-2\vec{k}.$$

Підставивши дані в (3.22), одержимо: $d=\dfrac{\left|3\vec{i}-2\vec{k}\right|}{\sqrt{14}}=\sqrt{\dfrac{13}{14}}$.

3.4 Криві другого порядку

Кривими другого порядку називаються криві, загальне рівняння яких має вигляд

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (3.23)$$

Коефіцієнти в рівнянні (3.23) – дійсні числа, причому A, B, C одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Рівняння (3.23) визначає на площині коло, еліпс, гіперболу чи параболу.

Коло

Найпростішою кривою другого порядку є коло. Крива другого порядку (3.23) є ***колом***, якщо виконуються умови: коефіцієнти при квадратах змінних координат x^2 і y^2 рівні між собою ($A=C$); відсутній член, що містить добуток xy змінних координат ($B=0$).

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=r^2. \qquad (3.24)$$

В рівнянні (3.24) $C(x_0,y_0)$ – центр кола, r – радіус кола. Якщо $x_0=y_0=0$, центр кола збігається з початком координат і рівняння (3.24) набирає вигляду:

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (3.25)$$

Еліпс

Крива другого порядку (3.23) називається ***еліпсом***, якщо коефіцієнти A і C мають однакові знаки, тобто $A \cdot C > 0$ і $B = 0$:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1, \tag{3.26}$$

де $C(c,d)$ – центр еліпса, a, b – півосі еліпса. Рівняння (3.26) називають ***канонічним рівнянням еліпса***.

Якщо $c = d = 0$, то центр еліпса знаходиться в точці $O(0,0)$ (рис. 3.12), і рівняння (3.26) набирає вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.27}$$

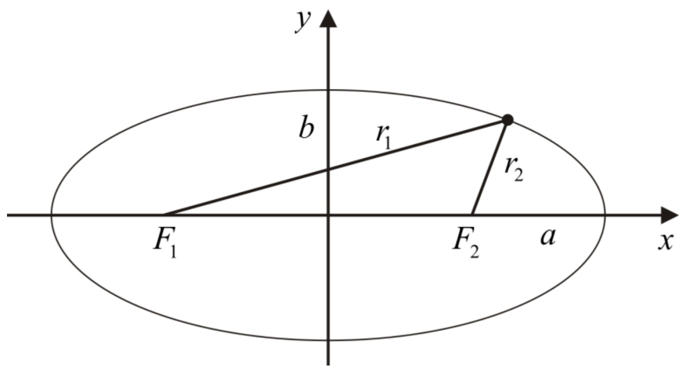


Рисунок 3.12

Точки $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, ($a > b$) називаються ***фокусами еліпса***. Відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $0 \le \varepsilon \le 1$ називається ***ексцентриситетом еліпса***. При збільшенні ε, тобто, при наближенні до одиниці, відношення півосей еліпса $\dfrac{b}{a}$ зменшується, а еліпс розтягується вздовж осі Ox. Якщо $F_1 = F_2$, тобто, $c = 0$, $a = b$ маємо рівняння кола.

Теорема 1 *(Характеристична властивість еліпса)*. Нехай r_1 – відстань від довільної точки (x, y) еліпса до лівого фокуса, r_2 – до правого фокуса. Тоді має місце рівність: $r_1 + r_2 = 2a$.

Доведення. З рівняння еліпса маємо: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$.

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{cx}{a}\right| = |a + \varepsilon x|.$$

Аналогічно $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = |a - \varepsilon x|$.

З рівняння еліпса випливає: $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow |x| \le a$. Оскільки $0 \le \varepsilon \le 1$ та $|x| \le a$, то $r_1 = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x$ і $r_2 = |a - \varepsilon x| = a - \varepsilon x$. Тоді $r_1 + r_2 = 2a$. Теорему доведено.

Гіпербола

Крива другого порядку (3.23) називається ***гіперболою***, якщо коефіцієнти A і C мають різні знаки, тобто $A \cdot C < 0$, відсутній член, що містить добуток змінних координат, $B = 0$:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1. \qquad (3.28)$$

Рівняння (3.28) називають ***канонічним рівнянням гіперболи***.

Якщо $c = d = 0$ (рис. 3.13), то рівняння (3.28) набирає вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.29)$$

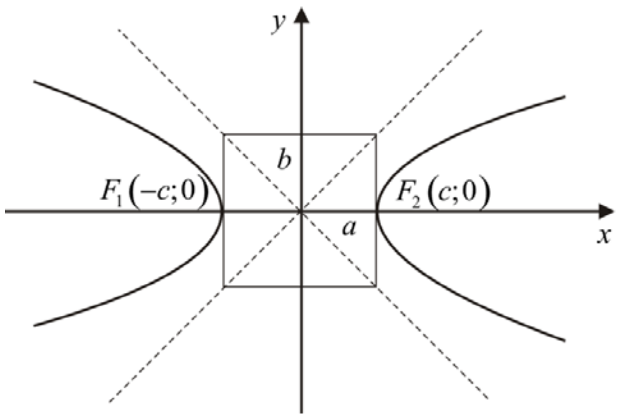


Рисунок 3.13

Точки $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, називаються ***фокусами гіперболи.*** Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$, де $1 \le \varepsilon < +\infty$, називається ***ексцентриситетом гіперболи.***

Теорема 2 *(Характеристична властивість гіперболи)*. Для будь-якої точки (x, y) гіперболи абсолютна величина різниці її фокальних радіусів стала і дорівнює $2a$: $|r_1 - r_2| = 2a$.

Доведення. З урахуванням рівняння гіперболи маємо: $y^2 = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right)$.

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right) + 2cx + c^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 2cx + \dfrac{c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\left(a + \dfrac{cx}{a}\right)^2} = \left|a + \dfrac{cx}{a}\right| = |a + \varepsilon x| = \begin{cases} a + \varepsilon x, & x > 0, \\ -a - \varepsilon x, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо: $r_2 = \begin{cases} -a + \varepsilon x, & x > 0, \\ a - \varepsilon x, & x < 0. \end{cases}$

Звідси: $r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & x > 0, \\ -2a, & x < 0, \end{cases}$ або $|r_1 - r_2| = 2a$. Що і треба було довести.

Гіпербола має асимптоти $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Парабола

Крива другого порядку (3.23) називається ***параболою***, якщо коефіцієнти $A \cdot C = 0$ і $A^2 + C^2 \neq 0$, $B = 0$, $D \neq 0$:

$$\left(y - y_0\right)^2 = 2p\left(x - x_0\right) \qquad (3.30)$$

В рівнянні (3.30) точка $\left(x_0, y_0\right)$ – вершина параболи, p ($p > 0$) – параметр параболи, пряма $y = y_0$ – вісь симетрії параболи. Рівняння (3.30) називають ***канонічним рівнянням параболи***. Якщо поміняти місцями вісь симетрії $x = x_0$, то канонічне рівняння параболи матиме вигляд:

$$\left(x - x_0\right)^2 = 2p\left(y - y_0\right) \qquad (3.31)$$

За умови $x_0 = y_0 = 0$ рівняння (3.30) набирає вигляду (рис. 3.14):

$$y^2 = 2px. \qquad (3.32)$$

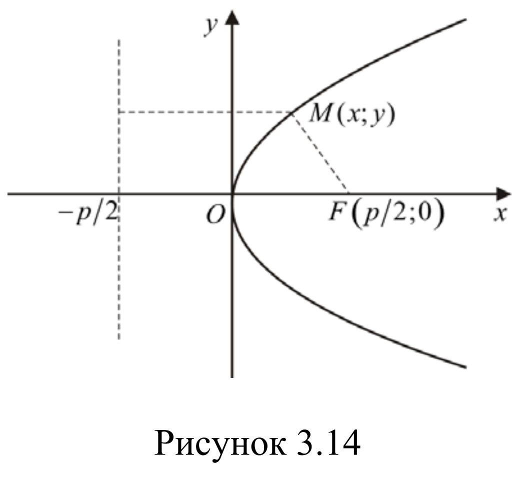


Рисунок 3.14

Для параболи (3.31) вісь симетрії – вісь Ox. Точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус параболи. Пряма $x=-\frac{p}{2}$ називається ***директрисою*** параболи.

Теорема 3 *(Характеристична властивість параболи)*. Відстань від будь-якої точки параболи до фокуса дорівнює відстані від цієї точки до директриси, тобто $r=x+\frac{p}{2}$.

Доведення. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка параболи, а r – відстань від цієї точки до фокуса. Тоді

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{x^2+\frac{p^2}{4}+px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}.$$

А це і є відстань від точки M до директриси. Теорему доведено.

3.5 Полярна система координат

Візьмемо на площині точку O, яку назовемо ***полюсом***. Проведемо з полюса напрямлену півпряму Ox – ***полярну вісь***, тоді довільна точка площини матиме координати $M(\rho,\varphi)$, де ρ – ***полярний радіус***, що з'єднує полюс з точкою, а φ – ***полярний кут*** (рис. 3.15). Полярний радіус і полярний кут є ***полярними координатами*** точки M. Для одержання всіх точок площини достатньо обмежити полярний кут φ проміжком $[0,2\pi)$, а полярний радіус ρ – $[0,+\infty)$. При цьому, якщо кут $\varphi>0$, то обхід проти руху годинникової стрілки, якщо $\varphi<0$ – за годинниковою стрілкою. З'ясуємо зв'язок між полярними і декартовими координатами. Для цього сумістимо початок координат системи Oxy з полюсом O, а полярну вісь – з додатною віссю Ox. Нехай x і y – декартові координати точки M, а ρ і φ – її полярні координати.

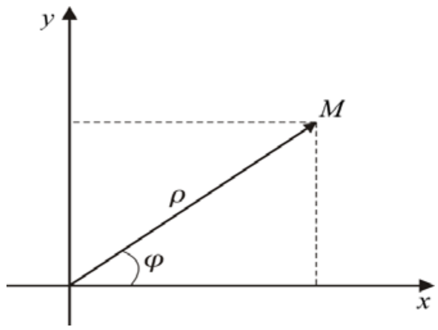


Рисунок 3.15

З рисунка видно, що декартові координати точки M виражаються через полярні координати точки формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{3.33}$$

Полярні координати точки M виражаються через її декартові координати формулами:

$$tg\varphi = \frac{y}{x}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3.34}$$

Зауваження. Кожній парі чисел (ρ, φ) відповідає єдина точка площини, але кожній точці площини – не єдина пара чисел. Наприклад, (ρ, φ), $(\rho, \varphi + 2\pi)$ відповідає одна і та ж точка.

3.6 Параметричні рівняння лінії

Лінію на площині можна задати у вигляді системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{3.35}$$

де x та y – координати довільної точки $M(x, y)$, яка належить даній лінії, а t – параметр. Параметр t визначає положення точки M на площині. Якщо параметр змінюється, то точка переміщається, описуючи дану лінію. Такий спосіб задання називається параметричним, а рівняння (3.35) – параметричними рівняннями лінії.

Розглянемо параметричне рівняння кола, коло $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 3.16).

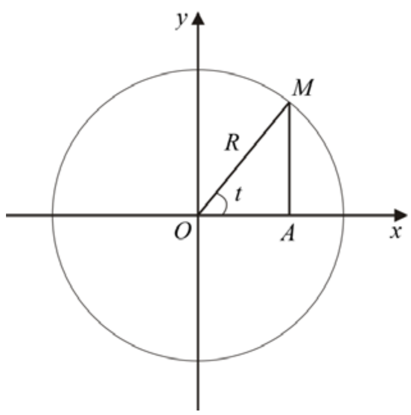


Рисунок 3.16

В трикутнику ΔOAM : $\angle MOA = t$, $AO = OM \cdot \cos t$, $AM = OM \cdot \sin t$.
Оскільки $AO = x$, $AM = y$, $OM = r$, то рівняння кола

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t. \end{cases}$$

Приклад 1. Побудувати криву $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання

Надамо параметру t значень і знайдемо координати точок, що відповідають цим значенням:

$$t = 0 \to (0,0); \quad t = \frac{\pi}{2} \to \left(\frac{a(\pi - 2)}{2}, a \right); \quad t = \pi \to (\pi a, 2a); \quad t = 2\pi \to (2\pi a, 0).$$

Надаючи надалі значень параметру з проміжку $[0, 2\pi)$, одержимо вітку циклоїди (рис. 3.22).

Задання деяких кривих другого та третього порядків в полярній та параметричній формі

1. Коло (див. рис. 3.16): $x^2 + y^2 = r^2$; $\rho = r$; $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{cases}$.

2. Еліпс (див. рис. 3.12): $\rho = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}$; $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$.

3. Лемніската Бернуллі (рис. 3.17): $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$; $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$.

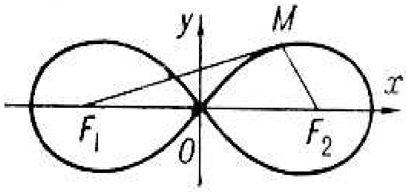


Рисунок 3.17

4. Декартів лист (рис. 3.18): $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$; $\rho = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$

.

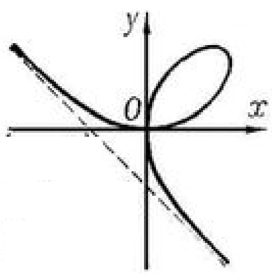


Рисунок 3.18

5. Астроїда (рис. 3.19): $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$; $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t,\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$

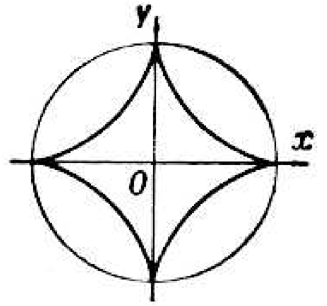


Рисунок 3.19

6. Троянди (рис. 3.20): $\rho = a\cos n\varphi$, $\rho = a\sin n\varphi$, при $n=2k+1$ (непарному) – n пелюсток; при $n=2k$ (парному) – $2n$ пелюсток.

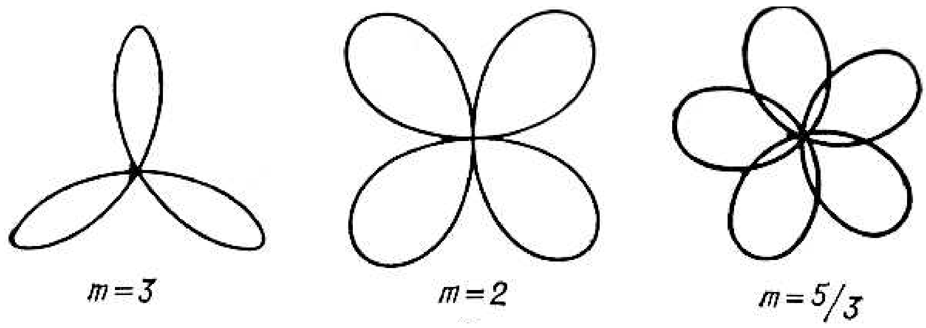


Рисунок 3.20

7. Кардіоїда: $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$, $a>0$ (рис. 3.21). Інші варіанти кардіоїди $\rho=2a(1-\cos\varphi)$, $\rho=2a(1+\sin\varphi)$, $\rho=2a(1-\sin\varphi)$.

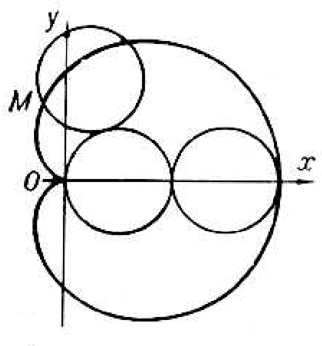


Рисунок 3.21

8. Циклоїда (рис. 3.22): $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t),\ t\in R. \end{cases}$

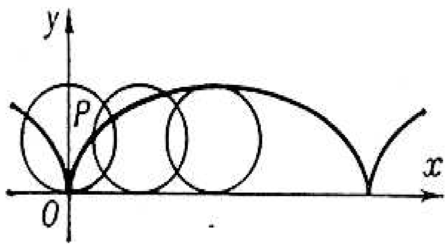


Рисунок 3.22

9. Архімедова спіраль (рис. 3.23): $\rho = a\varphi, \quad a > 0$

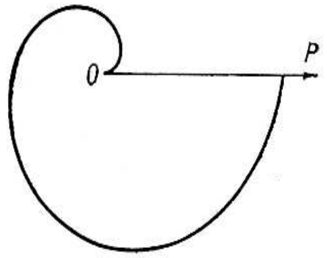


Рисунок 3.23

3.7 Поверхні другого порядку

Сфера

Сферою радіуса R називається множина всіх точок простору, відстань від кожної точки якої до даної точки (центра) дорівнює R (рис. 3.24).

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \tag{3.36}$$

де (x_0, y_0, z_0) – центр сфери. При $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ рівняння (3.36) набирає вигляду $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

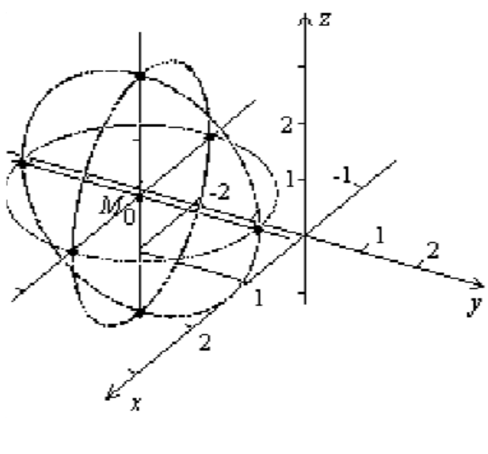


Рисунок 3.24

Циліндричні поверхні

Циліндрична поверхня – це множина прямих (твірних) простору, паралельних заданому напрямку і таких, що проходять через певну лінію (напрямна).

До циліндричних поверхонь належать: еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 3.25); круговий циліндр $x^2+y^2=R^2$ (рис. 3.26); параболічний циліндр $y^2=2px$ (рис. 3.27), $y^2=2pz$ (рис. 3.28), $z^2=2py$ (рис. 3.29); гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 3.30), $\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 3.31).

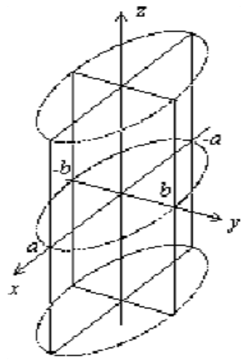


Рисунок 3.25

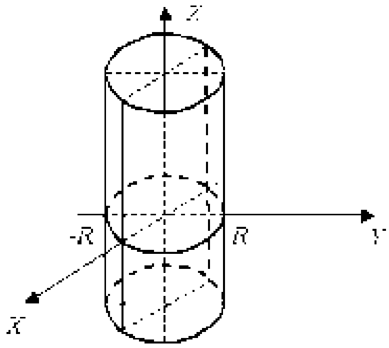


Рисунок 3.26

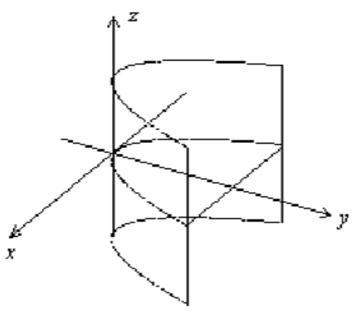


Рисунок 3.27

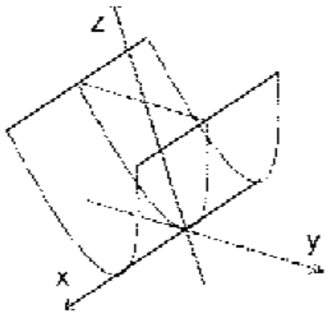


Рисунок 3.28

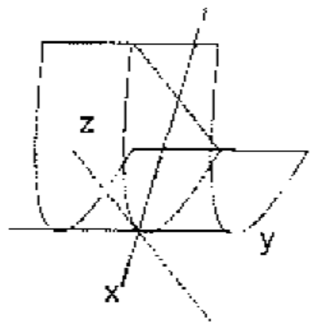


Рисунок 3.29

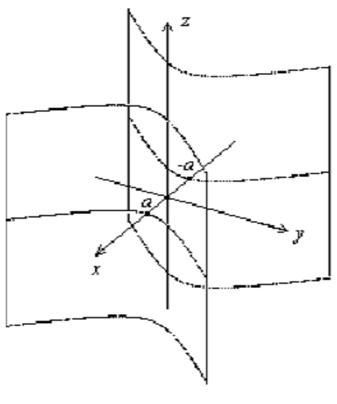


Рисунок 3.30

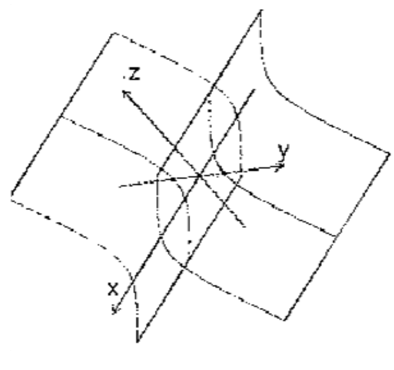


Рисунок 3.31

Конічні поверхні

Поверхня, яка складається з усіх прямих, що перетинають дану лінію l і проходять через дану точку, P називається ***конічною***. До конічних поверхонь належать: еліптичний конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис. 3.32), круговий конус $x^2+y^2-z^2=0$.

Поверхні обертання

Пове́рхня обертання – поверхня, утворена при обертанні навколо прямої (осі обертання) довільної лінії (твірної).

До поверхонь обертання належать: еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.33); двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 3.34); однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.35); параболоїд $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (рис. 3.36); гіперболічний параболоїд $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ (рис. 3.37).

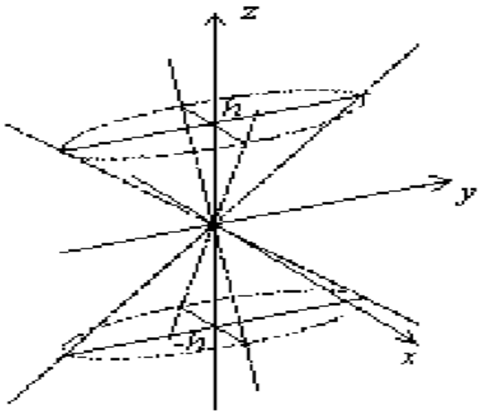


Рисунок 3.32

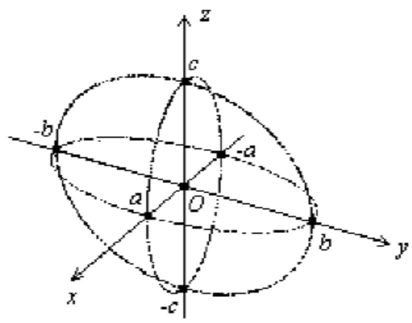


Рисунок 3.33

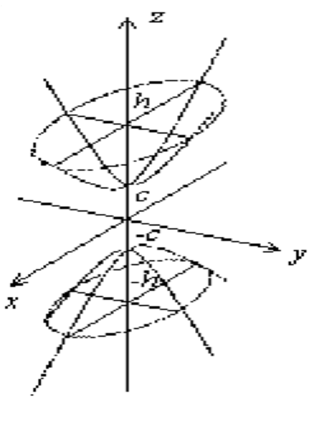


Рисунок 3.34

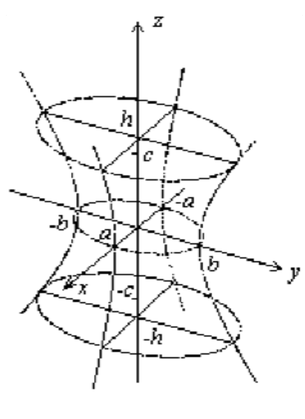


Рисунок 3.35

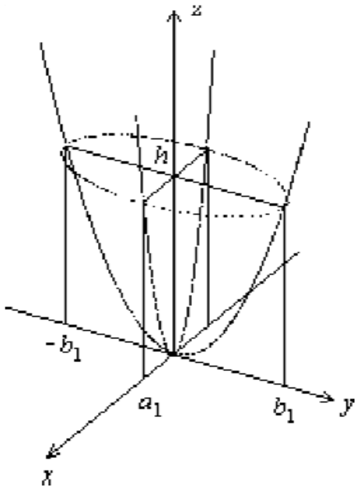


Рисунок 3.36

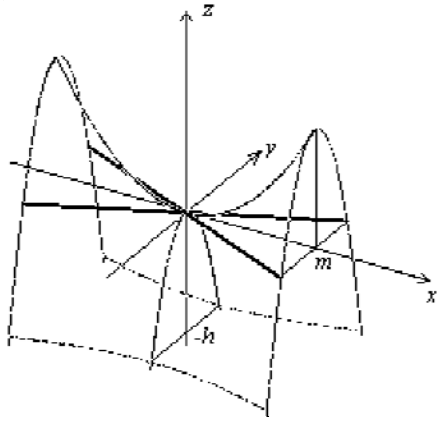


Рисунок 3.37

Приклад 1. Сегментна арка має форму дуги кола (рис. 3.38). Скласти рівняння цього кола, знайти його центр та радіус, якщо прогін арки $L = MN = 20$, а її підйом, тобто відношення її висоти до довжини, $\dfrac{d}{L} = \dfrac{1}{4}$.

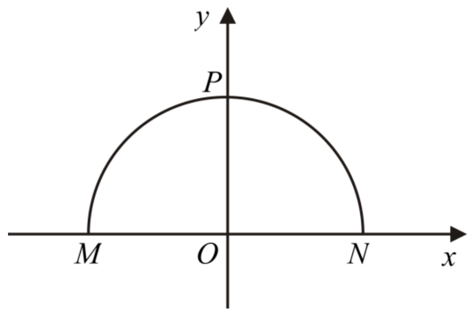


Рисунок 3.38

Розв'язання. Знайдемо з умови $d = 5$. В обраній системі координат точки M, N, P мають, відповідно, координати $(-10{,}0)$, $(10{,}0)$, $(0{,}5)$. Оскільки арка симетрична відносно осі Oy, центр шуканого кола лежить на Oy. Запишемо рівняння кола: $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

З умови, що коло проходить через точки M і P, складемо систему: $\begin{cases} 100 + y_0^2 = R^2 \\ (5 - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$. Розв'язавши її, одержимо $R = 12{,}5$, $y_0 = -7{,}5$. Таким чином, центром кола є точка $C(0,-7{,}5)$, а його радіус $R = 12{,}5$.

Рівняння шуканого кола: $x^2 + (y_0 + 7{,}5)^2 = 156{,}25$.

Приклад 2. Кривошип OA обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 10$ град/с та приводить в рух повзун B за допомогою шатуна AB, причому $OA = AB = 80$ см (рис. 3.39). Скласти рівняння траєкторії середньої точки M шатуна та зобразити її (траєкторію).

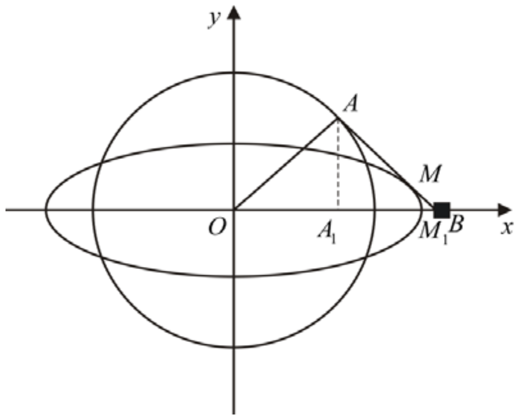


Рисунок 3.39

Розв'язання. Скориставшись рисунком знаходимо: $x = OM_1 = OA_1 + A_1M_1$
З ΔOAA_1: $OA_1 = OA\cos\varphi$. $A_1M_1 = AM\cos\varphi = \frac{1}{2}OA\cos\varphi$.

Тоді: $x = \frac{3}{2}OA\cos\varphi = 120\cos\varphi$, $y = MM_1 = MB\sin\varphi = \frac{1}{2}OA\sin\varphi = 40\sin\varphi$.

Оскільки кутова швидкість кривошипа OA стала, то $\varphi = \omega t = 10t$ і $\begin{cases} x = 120\cos 10t, \\ y = 40\sin 10t, \end{cases}$ де t – час. Одержані рівняння є параметричними рівняннями траєкторії точки M. Вилучивши параметр t, матимемо канонічне рівняння траєкторії: $\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$. Це еліпс, де $a = 120$ і $b = 40$.

Тести для самоперевірки

1. Загальне рівняння прямої на площині має вигляд
а) $Ax + By + C = 0$, де $\vec{n}(A,B)$ − напрямний вектор прямої;
б) $Ax + By + C = 0$, де $\vec{n}(A,B)$ − нормальний вектор прямої;
в) $y = Ax + B$, де $\vec{n}(A,B)$ − напрямний вектор прямої;
г) $y = Ax + B$, де $\vec{n}(A,B)$ − нормальний вектор прямої.

2. Рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1,2)$, $B(2,1)$ має вигляд

а) $x + 3y - 5 = 0$; б) $y = x + 5$; в) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$;

г) правильна відповідь записана в пунктах а) і в).

3. Вказати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2,5)$ паралельно прямій $3x - 4y + 15 = 0$.

а) $4x - 3y + 7 = 0$; б) $3x - 4y + 14 = 0$;
в) $-3x - 4y + 26 = 0$; г) $-4x + 3y - 7 = 0$.

4. Кут між прямими $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ *і* $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$ *визначається за формулою:*

а) $\sin\varphi = m_1m_2 + n_1n_2$;　б) $\cos\varphi = \dfrac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$;

в) $\sin\varphi = \dfrac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$;　г) $\cos\varphi = m_1m_2 + n_1n_2$.

5. Якщо прямі l_1 *і* l_2 *паралельні, то їх кутові коефіцієнти*

а) $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;　б) $k_1 = k_2$;　в) $k_1 = -k_2$;　г) $k_1 = \dfrac{1}{k_2}$.

6. Рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ *і вектор* $\vec{n}(A, B, C)$ *– це*

а) рівняння площини у просторі і її нормальний вектор;
б) рівняння площини у просторі і її напрямний вектор;
в) рівняння прямої у просторі і її нормальний вектор;
г) рівняння прямої у просторі і її напрямний вектор.

7. Кут між прямою $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ *і площиною* $Ax + By + Cz + D = 0$ *визначають з виразу*

а) $\cos\varphi = \dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$;　б) $\cos\varphi = Am + Bn + Cp$;

в) $\cos\varphi = \dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$;　г) $\sin\varphi = Am + Bn + Cp$.

8. Проекція A' *точки* $A(1,3,-1)$ *на площину* $x - y + 3z - 6 = 0$*:*

а) $A'(1,1,2)$;　б) $A'(9,3,0)$;　в) $A'(2,2,2)$;　г) $A'(3,0,1)$.

9. Вкажіть назву поверхні, що задана рівнянням $z = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$.

а) конус;　б) еліптичний параболоїд;
в) гіперболічний параболоїд;　г) еліпсоїд.

10. Записати рівняння лінії $\rho = \dfrac{3}{1-2\cos\varphi}$ *в прямокутній системі координат.*

а) $\dfrac{(x+2)^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$;　б) $\dfrac{(x+2)^2}{1} + \dfrac{y^2}{3} = 1$;

в) $\dfrac{(x-2)^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$;　г) $\dfrac{(x-2)^2}{1} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

4 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В природі, техніці зустрічаються процеси, закони, явища, які можна описати функціями. Матаналіз – це частина математики, в якій функції вивчаються методом нескінченно малих. Сам термін – скорочення від «Аналіз нескінченно малих».

4.1 Функція однієї змінної

Величина y називається ***функцією*** від величини x, якщо за певним правилом f кожному значенню величини x відповідає єдине цілком визначене значення величини y; x називають ***аргументом*** або ***незалежною змінною***, y – ***залежною змінною***.

Областю визначення функції називається множина всіх значень, які може набувати незалежна змінна x. Позначають $D(f)$. ***Областю значень функції*** називається множина всіх значень, які може набувати залежна змінна y. Позначають $E(f)$.

Способи задання функції: 1) аналітичний ($y = f(x)$); 2) табличний; 3) графічний.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ площини Oxy, координати яких пов'язані даною функціональною залежністю (рис. 4.1).

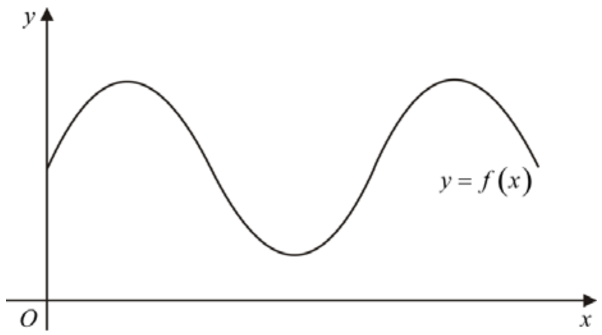


Рисунок 4.1

Якщо кожному значенню x відповідає одне значення y, то $y = f(x)$ називають ***однозначною функцією*** (наприклад, $y = \sin x$); якщо хоча б деяким значенням x відповідає декілька або нескінченна множина значень змінної y, то $y = f(x)$ називають ***багатозначною функцією*** ($y = \arcsin x$).

Якщо для будь-яких значень $x_1, x_2 \in D(f)$, де $x_1 < x_2$ виконується $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція $y = f(x)$ ***монотонно зростає***; якщо $f(x_1) < f(x_2)$ – ***строго монотонно зростає***; якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$ – ***монотонно спадає***; якщо $f(x_1) > f(x_2)$ – ***строго монотонно спадає***.

Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо для кожного $x \in D(f)$ має місце $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$. Якщо виконується $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$ для кожного $x \in D(f)$, то функція $y = f(x)$ є ***непарною***. Якщо не виконується жодна з умов, то функція $y = f(x)$ ***ні парна, ні непарна***.

Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує відмінне від нуля число T таке, що для всіх значень $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x+T) = f(x)$. Число T називається ***періодом функції***.

Основні елементарні функції

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$ (рис. 4.2–4.4).

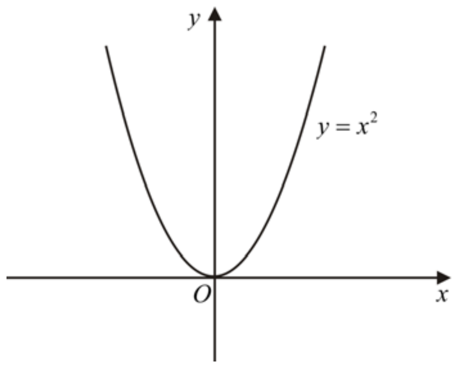


Рисунок 4.2

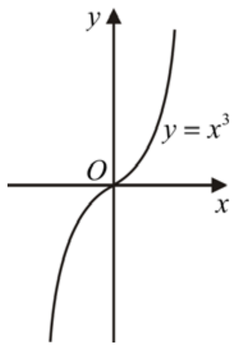


Рисунок 4.3

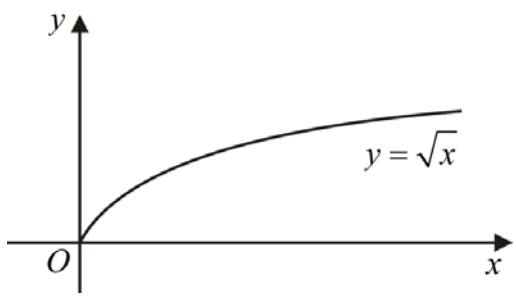


Рисунок 4.4

2. Показникова $y = a^x$ (рис. 4.5–4.6).

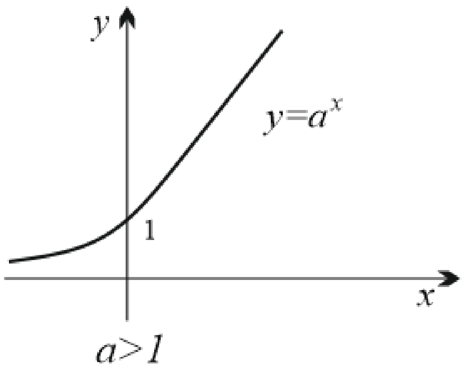


Рисунок 4.5

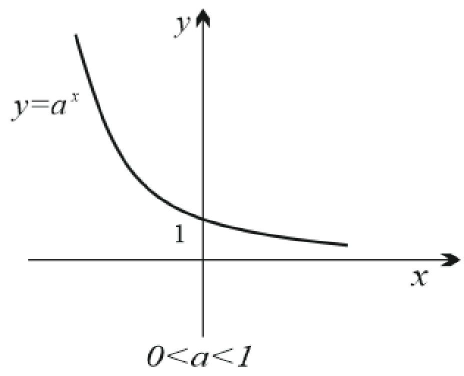


Рисунок 4.6

3. Логарифмічна $y = \log_a x$ (рис. 4.7–4.8).

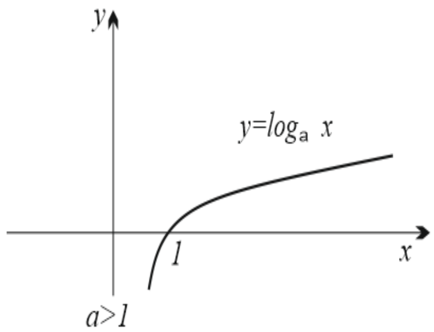


Рисунок 4.7

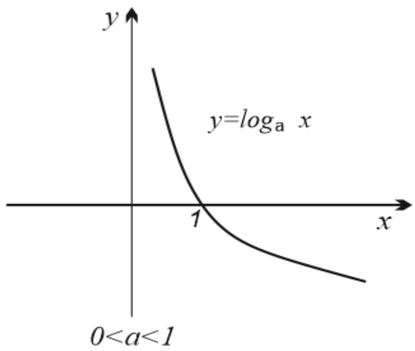


Рисунок 4.8

4. Тригонометричні:
1 $y = \sin x$ (рис. 4.9)

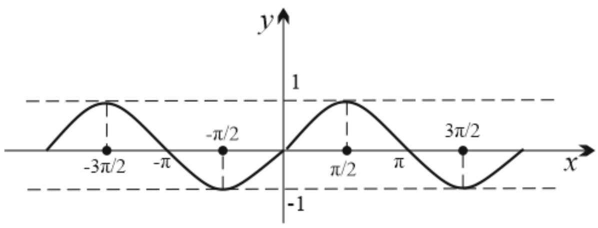


Рисунок 4.9

2. $y = \cos x$ (рис. 4.10).

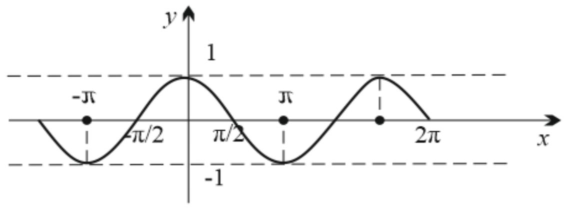
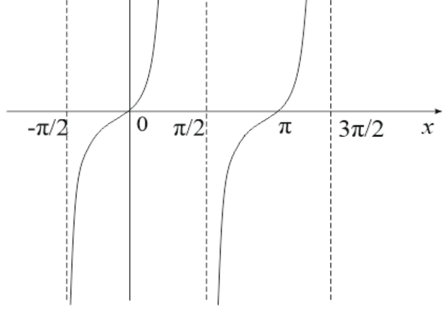


Рисунок 4.10

3. $y = tgx$ (рис. 4.11).
4. $y = ctgx$ (рис. 4.12).



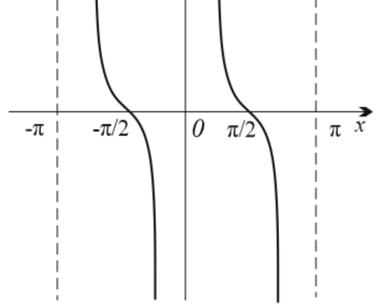


Рисунок 4.11 Рисунок 4.12

Взаємообернені функції

Нехай дано функцію $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, тоді $y = \varphi(x)$ або $x = \varphi(y)$ є ***взаємооберненою*** відносно $y = f(x)$. Графіки взаємообернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (бісектриси першого і третього координатних кутів) (рис. 4.13).

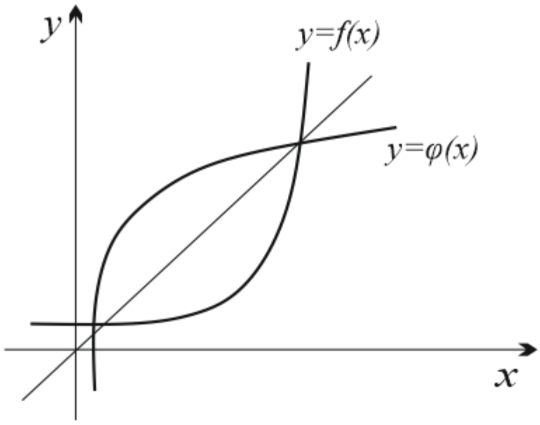


Рисунок 4.13

Наприклад, для функції $y = 2x$ оберненою є $x = \dfrac{1}{2}y$.

Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$ (рис. 4.14), $y = \arccos x$ (рис. 4.15), $y = \mathrm{arc}\,tgx$ (рис. 4.16), $y = \mathrm{arc}\,ctgx$ (рис. 4.17).

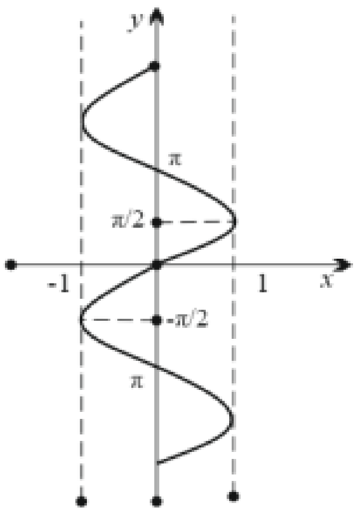


Рисунок 4.14

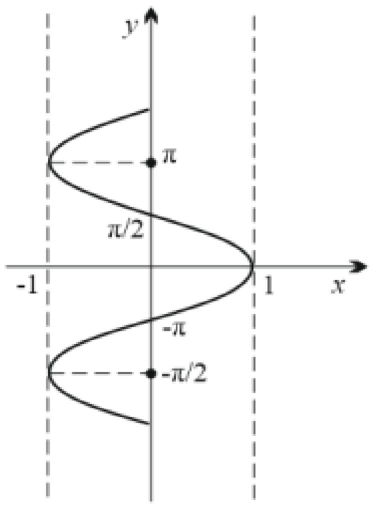


Рисунок 4.15

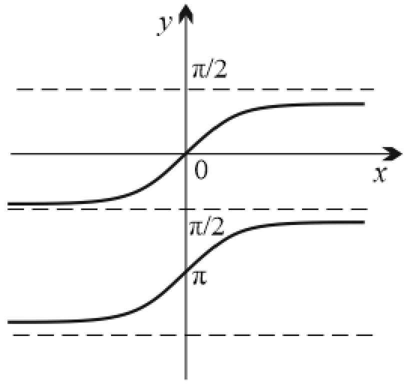


Рисунок 4.16

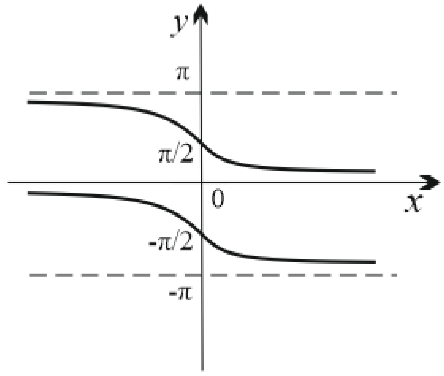


Рисунок 4.17

Складна функція (суперпозиція функції)

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині D, а функція $u = \varphi(x)$ – на множині D_1, причому для будь-яких $x \in D_1$ відповідне значення $u = \varphi(x) \in D$. Тоді на множині D_1 визначена функція $y = f(\varphi(x))$, яка називається ***складною функцією*** від x (суперпозицією даних функцій).

Наприклад, $y = \sin u$, де $u = x^2$ і $y = \sin x^2$.

Неявна функція

Функція називається ***явною***, якщо вона задана формулою, права частина якої не містить залежної змінної, і ***неявною***, якщо вона задана рівнянням (4.1), яке не розв'язане відносно y.

$$F(x, y) = 0 \tag{4.1}$$

Не будь-яке рівняння (4.1) визначає неявну функцію. Наприклад, $y = x^2$ – явна функція, а $x^2 + y^2 + 1 = 0$ в області дійсних чисел функцію не визначає.

Елементарні функції

Функція $y = f(x)$ називається ***елементарною***, якщо вона може мати вигляд одного аналітичного виразу з кінцевим числом арифметичних дій над основними елементарними функціями.

З означення випливає, що елементарні функції – це функції, задані аналітично. Наприклад, $y = ctgx^2 + \sqrt{x+4} - 5$ – елементарна функція. $y = |x|$ – не є елементарною функцією, оскільки операція знаходження модуля не належить до арифметичних дії.

До елементарних функцій належать:

а) раціональні $y = P_n(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;

б) дробово-раціональні $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени;

в) гіперболічні функції:

$shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ – функція непарна, монотонно зростаюча, графік (рис. 4.19) симетричний відносно початку координат;

$chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – функція на проміжку $\left(-\infty,0\right]$ монотонно спадає, а на проміжку $\left[0,+\infty\right)$ монотонно зростає, графік (рис. 4.20) симетричний відносно осі Oy;

$thx=\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ – функція монотонно зростає, графік (рис. 4.21) симетричний відносно початку координат;

$cthx=\dfrac{chx}{shx}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ – функція на проміжку $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ монотонно спадає, графік (рис. 4. 22) симетричний відносно початку координат.

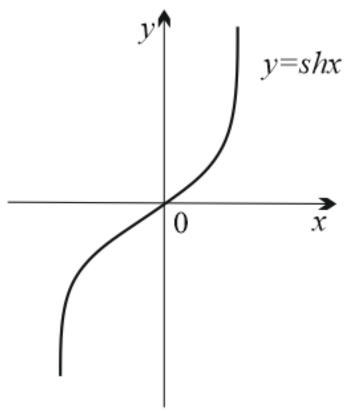


Рисунок 4.19

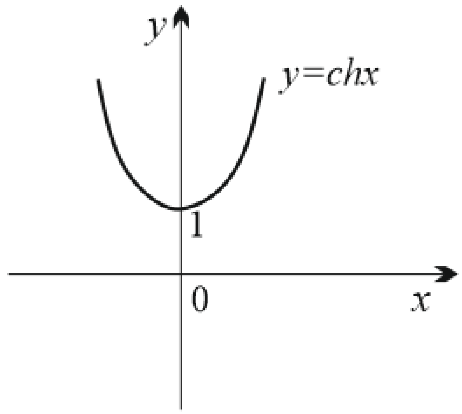


Рисунок 4.20

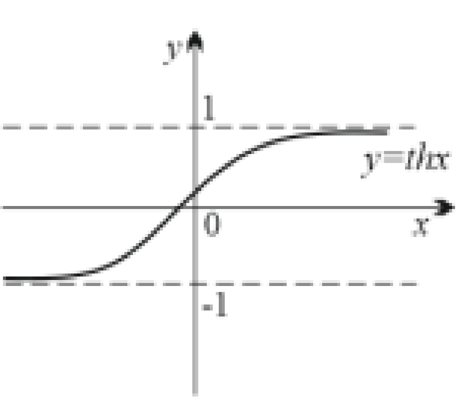


Рисунок 4.21

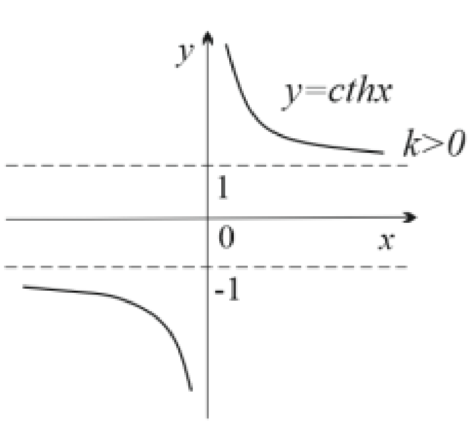


Рисунок 4.22

4.2 Поняття числової послідовності. Границя числової послідовності

Числова функція $y = f(n)$, де n – натуральне число, називається ***послідовністю***; $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$, …, $y_n = f(n)$ називаються ***членами послідовності***; $y_n = f(n)$ – ***загальним членом послідовності***. Послідовність можна розглядати як функцію, областю визначення якої є множина натуральних чисел. Послідовність визначається формулою, тобто законом, згідно з яким установлюється спосіб відповідності заданих чисел послідовним натуральним числам. Послідовність $y = f(n)$ із загальним членом x_n позначають так: $f(n) = \{x_n\}$.

Способи задання послідовності: 1) аналітично $y = f(n)$; 2) кількома першими членами $y_1, y_2, y_3, ...$; 3) рекурентним способом, за допомогою правил, за якими можна обчислити наступний член через попередній (наприклад, $y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2}$).

Послідовність називається ***зростаючою***, якщо при збільшенні натуральних значень n члени послідовності збільшуються, якщо зменшуються, то її називають ***спадною***.

Послідовність називається ***монотонно зростаючою (спадною)***, якщо $a_{n+1} \ge a_n$ ($a_{n+1} \le a_n$).

Число a називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує натуральне число N таке, що для всіх значень $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Записують: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Зауважимо, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Це означає, що число x_n належить інтервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Такий інтервал називається ***ε-околом точки*** a.

Означення границі послідовності можна перефразува таким чином: число a називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо в будь-який ε-окіл числа a потрапляють всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, яким би вузьким цей окіл не був. Поза ε-околом може бути скінченне число членів даної послідовності. Номер N в означенні границі числової послідовності, взагалі кажучи, залежить від ε: $N = N(\varepsilon)$.

Послідовність $\{x_n\}$, називається ***обмеженою зверху (знизу)*** якщо існує таке число k, що для $\forall n \in N$ виконується нерівність $x_n \le k$ $(x_n \ge k)$.

Послідовність $\{x_n\}$, називається ***обмеженою***, якщо існує таке число $k > 0$, що для $\forall n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \le k$.

Послідовність, яка має границю, називається ***збіжною***, в протилежному випадку – ***розбіжною***.

Властивості числових послідовностей

1. Якщо послідовність має границю, то тільки одну.

Доведення. Нехай число a – границя послідовності $\{x_n\}$. Доведемо, що будь-яке інше число $a \neq b$ не може бути границею $\{x_n\}$. Для цього візьмемо ε-околи точок a і b настільки малими, щоб вони не перетинались, наприклад, $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$. Оскільки a границя послідовності $\{x_n\}$, то поза інтервалом $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$, зокрема в інтервалі $(b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)$, міститься скінченна множина точок послідовності. Отже, число b не може бути границею послідовності $\{x_n\}$.

2. Будь-яка збіжна послідовність обмежена.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – збіжна і a – її границя. Візьмемо $\varepsilon > 0$, для якого знайдеться натуральне число N таке, що для довільного $n > N$ має місце нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Тоді $|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$. Візьмемо найбільше з чисел $|x_1|$, $|x_2|$, …, $|x_n|$, $|a| + \varepsilon$ і позначимо через k, тоді для довільного n маємо $|x_n| \le k$, а це означає обмеженість послідовності.

3. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ і $a_n \le b_n$ для $\forall n \in N$, то $a \le b$.

4. Про охоплену послідовність або теорема «про двох міліціонерів». Нехай виконується нерівність $a_n \le c_n \le b_n$. Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ збіжні, причому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, то послідовність $\{c_n\}$ також збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

5. Якщо послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ збіжні, то послідовність $\{a_n + b_n\}$ також збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$ Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N_1 такий, що для всіх $n > N_1$ буде справедлива нерівність $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно знайдеться номер N_2 такий, що для всіх $n > N_2$ буде справедлива нерівність $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді для будь-якого $n > N$ одночасно виконуватимуться обидві нерівності.

Тому матимемо: $|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Це означає, що послідовність $\{a_n + b_n\}$ збіжна і має місце рівність $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

6. Якщо послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ збіжні, то послідовність $\{a_n - b_n\}$ збіжна і має місце рівність $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

7. Якщо послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ збіжні, то послідовність $\{a_n \cdot b_n\}$ збіжна і має місце рівність $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

8. Якщо послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ збіжні, причому $b_n \neq 0 \ \ \forall n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ збіжна і має місце рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

9. Границя сталої дорівнює сталій: $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$. Сталий множник виноситься за знак границі: $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

10. Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю (теорема Больцано-Вейєрштрасса).

З властивості (10) випливає важлива властивість системи вкладених відрізків.

Лема Кантора. Нехай задано послідовність відрізків $\sigma_n = [a_n, b_n]$, $n = 1,2,3,...$, вкладених один в одного, довжини яких наближаються до нуля: $\sigma_n = b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді існує точка, причому єдина, що належить всім відрізкам σ_n.

Ця лема виражає властивість неперервності множини дійсних чисел чи властивість повноти числової прямої (суцільне заповнення цієї прямої дійсними числами).

Не будь-яка числова послідовність має границю. Властивість (10) є ознакою існування границі числової послідовності.

Застосування цієї ознаки покажемо на прикладі послідовності $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ та доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Доведення. Скористаємося формулою бінома Ньютона:

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$ де C_n^k – число комбінацій $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Із рівності випливає, що зі збільшенням n число доданків правої частини збільшується. При збільшенні n число $\dfrac{1}{n}$ зменшується, і величини $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$,… зростають, тому послідовність $\{x_n\}$ зростаюча, при цьому $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 2$. Покажемо, що вона обмежена. Замінимо кожну дужку рівності на 1, одержимо $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$.

Підсилимо рівність, замінивши 3, 4, 5, … на 2. Одержимо:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

За формулою суми геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2$$

$$x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1+2=3.$$

Таким чином, послідовність обмежена, причому для $\forall n \in N$ виконується $2 < \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

За ознакою збіжності послідовності вона має границю. Ця границя позначається літерою e: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

4.3 Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Послідовність $\{x_n\}$, границя якої дорівнює нулю, називається ***нескінченно малою***.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| < \varepsilon$.

Властивості нескінченно малих

1. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ нескінченно малі послідовності. Доведемо, що послідовність $\{a_n + b_n\}$ також нескінченно мала. Нехай для $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N_1, починаючи з якого матиме місце $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$; номер N_2, починаючи з якого $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Візьмемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді для всіх $n > N$ будуть одночасно виконуватись нерівності: $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. $|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. А це означає, що послідовність $\{a_n + b_n\}$ нескінченно мала.

2. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність є нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – обмежена послідовність, $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність. Доведемо що $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ нескінченно мала.

З обмеженості $\{x_n\}$ випливає, що існує таке число $A > 0$, що $x_n \le A$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала, то для $\forall \varepsilon > 0$ і $\frac{\varepsilon}{A} > 0$ знайдеться номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Тоді при $n > N$ маємо: $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$.

Отже, $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ нескінченно мала.

3. Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Доведення. Нехай $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі послідовності. Доведемо, що $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ нескінченно мала послідовність.

Оскільки $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала послідовність, то для $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться номер N_1 такий, що має місце $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всіх $n > N_1$. Оскільки $\{\beta_n\}$ нескінченно мала послідовність, то для $\varepsilon = 1$ знайдеться N_2 такий, що $|\beta_n| < \varepsilon = 1$ для всіх $n > N_2$. Візьмемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Для $n > N$ маємо: $|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$. А це означає, що $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ нескінченно мала послідовність.

З властивостей випливає, що сума, добуток будь-якого числа нескінченно малих послідовностей є послідовність нескінченно мала.

Теорема. Для того, щоб послідовність $\{a_n\}$ мала границю a, необхідно і достатньо, щоб її можна було подати у вигляді $a_n = a + \alpha_n$, де α_n – нескінченно мала.

Послідовність $\{\beta_n\}$ називається ***нескінченно великою***, якщо для кожного $M > 0$, знайдеться номер N такий, що для всіх $n > N$ має місце $|\beta_n| > M$, при цьому записують: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$.

Якщо послідовність $\{a_n\}$ має границю, а $\{b_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то їх відношення $\frac{a_n}{b_n}$ прямує до нуля. Якщо послідовність $\{a_n\}$ має границю, а $\{b_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то їх відношення $\frac{a_n}{b_n}$ прямує до нескінченності.

Невизначені вирази

Вираз $\dfrac{a_n}{b_n}$ при $a_n \to 0$, при $b_n \to 0$ є невизначеністю виду $\dfrac{0}{0}$; якщо $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$; якщо $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, маємо невизначеність $\dfrac{0}{\infty}$. Є невизначеності $(\infty - \infty)$, 1^{∞}, 0^{∞} тощо.

4.4 Границя функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки a, за винятком, можливо, самої точки.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Геометричний зміст границі функції (рис. 4.23): точки графіка функції $y = f(x)$ лежать всередині смуги шириною 2ε, обмеженої прямими $y = A + \varepsilon$ і $y = A - \varepsilon$. Величина δ залежить від ε, тому записують $\delta(\varepsilon)$.

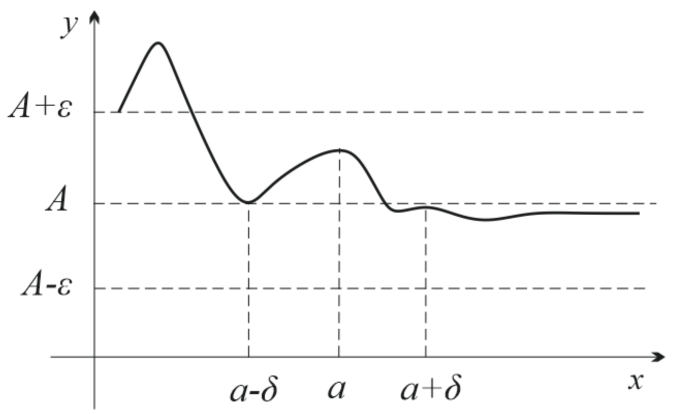


Рисунок 4.23

Приклад 1. Показати, що $\lim_{x \to 1}(5x - 2) = 3$.

Розв'язання. Задамо ε та знайдемо $\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - 1| < \delta$, виконується нерівність:

$$|(5x-2)-3| < \varepsilon, \qquad |5x - 5| < \varepsilon, \qquad 5|x-1| < \varepsilon, \qquad |x-1| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon).$$

Якщо $\varepsilon = 0{,}1$; то $\delta = \dfrac{0{,}1}{5} = 0{,}02$.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $M(\varepsilon) > 0$, що як тільки $|x| > M$ виконується $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Приклад 2. Показати, що $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1} = 1$.

Розв'язання. За означенням $\left| \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$. З умови $|x| > M$ випливає нерівність $x^2 > M^2$.

$$\left| \frac{x^2 + 4 - x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| = \left| \frac{3}{x^2 + 1} \right| = \frac{3}{x^2 + 1} < \frac{3}{M^2 + 1} < \frac{3}{M^2} = \varepsilon. \text{ Тобто, } M = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Односторонні границі

Якщо функція $y = f(x) \to A$ при $x \to a$ так, що x приймає тільки значення більші за a, тобто $x > a$ (рис. 4.24), то пишуть $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ і число A називають ***границею функції в точці*** a ***справа*** або ***правосторонньою границею функції***. Якщо x приймає тільки значення менші за a, тобто $x < a$ (рис. 4.25), то пишуть $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ і число A називають ***границею функції в точці*** a ***зліва*** або ***лівосторонньою границею функції***.

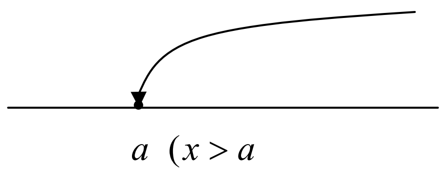


Рисунок 4.24

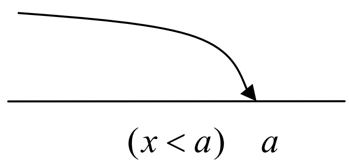


Рисунок 4.25

Теорема. Границя функції $y = f(x)$ в точці a існує тоді і тільки тоді, коли існує ліво- та правостороння границі функції, і вони рівні між собою:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = k.$$

Приклад 3. Знайти границю функції в точці $x = 0$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 0-0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+0} x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-0} x^2 = \lim\limits_{x \to 0+0} x = 0$ – границя існує і дорівнює нулю.

Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою*** в околі точки a, якщо існує таке $M > 0$, що $|f(x)| \le M$ для всіх x з цього околу.

Властивості границь функції

1. Якщо функція $y = f(x)$ має границю в точці a, то ця границя єдина.

2. Якщо функція $y = f(x)$ визначена в околі точки a і має в цій точці скінченну границю, то вона обмежена в деякому околі цієї точки.

3. Якщо $f_1(x) \le f_2(x)$ для всіх x з деякого околу точки a, окрім, можливо, самої цієї точки і кожна з функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці a має границю, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \le \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$.

4. Якщо $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$ для всіх x з деякого околу точки a, окрім, можливо, самої цієї точки і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

5. Якщо функції $f(x)$, $g(x)$ визначені для всіх x з деякого околу точки a, окрім, можливо, самої цієї точки та існує $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то має місце:

а) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\big(Cf(x)\big) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$; $\qquad \lim\limits_{x\to a} C = C$;

г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$.

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$.

Доведемо 2-гу властивість. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, наприклад $\varepsilon = 1$, знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх $x \ne a$, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x) - A| < 1$.

Зауваживши, що $|f(x) - A| \ge |f(x)| - |A|$, одержимо $|f(x)| < 1 + |A|$. Нехай $M = \max\{1 + |A|, |f(x_0)|\}$. В кожній точці x інтервалу $(a - \delta, a + \delta)$ матимемо $|f(x)| \le M$, а це означає, що функція обмежена.

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - 3x + 2\right) = \left(\lim\limits_{x\to 1} x\right)^2 - 3\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$

4.5 Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $f(x)$ є ***нескінченно мала***, а якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $f(x)$ – ***нескінченно велика***.

Як і для послідовностей, має місце твердження: якщо функція нескінченно мала при $x \to a$ і $f(x) \ne 0$ для будь-яких $x \ne a$ з будь-якого околу точки a, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно велика при $x \to a$ і навпаки.

Теорема (*Зв'язок границі функції і нескінченно малої*). Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to a$ необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ дорівнювала сумі числа A і $\alpha(x)$, де $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Доведення.

1. Необхідність.

Дійсно, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то, вважаючи $f(x) - A = \alpha(x)$, одержимо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - A = A - A = 0$, тобто $\alpha(x)$ – нескінченно мала. Звідси: $f(x) = A + \alpha(x)$.

2. Достатність.

Якщо $f(x) = A + \alpha(x)$ і $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ – нескінченно мала, то маємо: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A + \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = A + 0 = A$.

Порівняння нескінченно малих

Розглянемо дві функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, які задані в деякому околі $u(x_0)$ (рис. 4.26), за винятком, можливо, самої точки x_0, яка може бути скінченною або нескінченною. Нехай $\beta(x) \neq 0$ в околі $u(x_0)$.

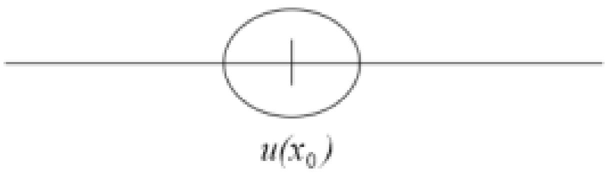


Рисунок 4.26

Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються ***нескінченно малими одного і того ж порядку малості*** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$. Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою функцією більш високого порядку малості***, ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. І ***нескінченно малою функцією більш низького порядку малості***, ніж $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються ***непорівнюваними*** нескінченно малими функціями при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує. Функції $\alpha(x)$ та

$\beta(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$ називаються ***еквівалентними***, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, тобто $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таблиця еквівалентності нескінченно малих функцій

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	5. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
2. $tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6. $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln b$
3. $arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7. $\ln\big(\alpha(x)+1\big) \sim \alpha(x)$
4. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	8. $\big(\alpha(x)+1\big)^p - 1 \sim p\alpha(x)$

Приклад 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{tg3x} = \begin{Bmatrix} \sin 2x \sim 2x \\ tg3x \sim 3x \end{Bmatrix} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

Властивості нескінченно малих функцій

1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.
2. Добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.
3. Добуток нескінченно малої функції на обмежену є функція нескінченно мала.

4.6 Чудові границі

Перша чудова границя

Часто при обчисленні границь тригонометричних функцій користуються границею, яку називають першою чудовою границею

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доведемо цю рівність. Розглянемо дугу кола радіуса $R = 1$, з центральним кутом x $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ (рис. 4.27). На рисунку $OA = 1$, $MK = \sin x$, дуга MA чисельно дорівнює центральному куту x, $AT = tgx$.

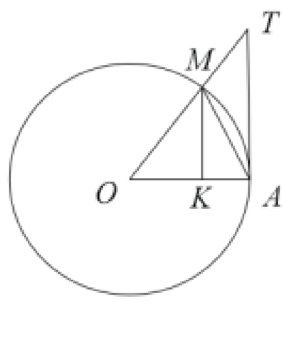


Рисунок 4.27

Очевидно, що $S_{\Delta OAM} < S_{сектора\ OAM} < S_{\Delta OAT}$. Перейдемо до відповідних геометричних формул: $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$. Поділивши нерівності на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, одержимо $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ або $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Оскільки $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ і $\lim_{x \to 0} 1 = 1$, то, за властивістю границь (границя проміжної функції), $\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Нехай $x < 0$, маємо $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, де $-x > 0$, тому $\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Враховуючи, рівність односторонніх границь, маємо $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Що і потрібно було довести.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$.

Друга чудова границя

Раніше ми з'ясували (див. підрозділ 4.2), що границя числової послідовності $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$ дорівнює e. Доведемо, що до числа e прямує і функція $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$, $x \in R$: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Нехай $x \to +\infty$. Значення x знаходиться в проміжку $n \le x < n+1$, де $n = [x]$ − ціла частина x, звідси маємо:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n},$$

$$\text{тому } \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

При $x \to +\infty$, $n \to \infty$, враховуючи границю числової послідовності, одержимо: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

За властивістю проміжної функції границі, маємо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Нехай $x\to-\infty$. Зробимо підстановку $x=-y$, тоді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\times$$

$$\times\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

В обох випадках при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Якщо зробити підстановку $\frac{1}{x}=t$ ($t\to 0$ при $x\to\infty$) маємо

$$\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e.$$

Приклад 1.Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}\cdot\frac{4}{x-2}\cdot x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{4x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-2}}=e^{4}$.

Правила розкриття невизначених виразів:

$\frac{\infty}{\infty}\to$ ділення чисельника та знаменника на найвищий степінь x^{n}.

$\frac{0}{0}\to$скоротити чисельник та знаменник на $\left(x-a\right)$ при $x\to a$:

1) перетворенням виразів чисельника та знаменника;
2) множенням на спряжене до знаменника чи чисельника дробу;
3) використанням таблиці еквівалентності нескінченно малих функцій;
4) використання першої чудової границі.

$1^{\infty}\to$ використання другої чудової границі.

Всі інші невизначеності перетворюються в ці три основні.

4.7 Неперервність функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому її околі.

Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною*** в точці x_0, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(x_0\right)$.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною зліва*** в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f\left(x_0\right)$ і ***неперервною справа***, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f\left(x_0\right)$.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною на будь-якому інтервалі*** $\left(a,b\right)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною на відрізку*** $\left[a,b\right]$, якщо вона неперервна на інтервалі $\left(a,b\right)$ і в точці $x = a$ неперервна справа, а в точці $x = b$ − зліва.

Властивості функцій, неперервних в точці та на проміжку

Властивості неперервних в точці і на проміжку функцій випливають безпосередньо з властивостей границь функції.

1. Сума і добуток скінченного числа неперервних функцій є функція неперервна.
2. Частка двох функцій, неперервних в точці x_0, є функція неперервна в цій точці за умови, що значення функції в знаменнику в цій точці не дорівнює нулю.
3. Якщо функція неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$.
4. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $\left[a,b\right]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків, то на $\left[a,b\right]$ знайдеться хоча б одна точка, в якій функція дорівнює нулю.
5. Якщо функція неперервна на $\left[a,b\right]$, то на цьому відрізку вона досягає свого найбільшого і найменшого значення.
6. Якщо функція неперервна на відрізку, то вона обмежена на цьому відрізку.

З означення випливає необхідність виконання трьох умов неперервності функції: 1) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому її околі; 2) функція має границю при $x \to x_0$; 3) границя функції в цій точці дорівнює значенню функції в цій точці.

Класифікація точок розриву функції

Точки, в яких порушується неперервність функції, називають ***точками розриву*** цієї функції. Якщо x_0 – точка розриву функції $y = f(x)$, то не виконується принаймні одна з умов неперервності функції, а саме: 1) в точці x_0 функція не визначена; 2) не існує границя функції при $x \to x_0$; 3) границя існує, але вона не дорівнює значенню функції в точці x_0.

Точка розриву функції $y = f(x)$ називається ***точкою розриву 1-го роду***, якщо функція має скінченні границі зліва та справа $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f\left(x\right) = A_1$

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A_2$. При цьому: 1) якщо $A_1 = A_2 \neq f(x_0)$, то точка x_0 називається точкою ***розриву усувного типу***; 2) якщо $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 − ***точка скінченного розриву (стрибок).***

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має лише скінченне число точок розриву 1-го роду, то її називають ***кусково-неперервною***.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності, маємо ***розрив 2-го роду***.

Наприклад, функція $y = \dfrac{x}{x-4}$ в точці $x = 4$ має розрив 2-го роду, а для функції $y = \dfrac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ − точка розриву усувного типу.

4.8 Похідна функції

Нехай задана функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) (рис. 4.28).

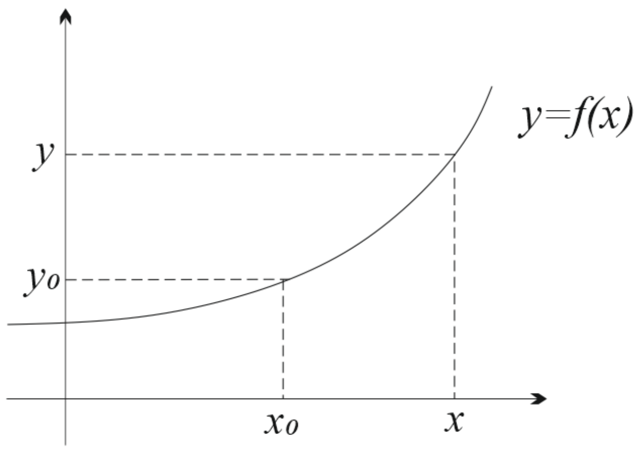


Рисунок 4.28

Візьмемо довільне значення x_0 з інтервалу та надамо йому деякого приросту Δx. Нове значення аргументу: $x = x_0 + \Delta x$. Тоді $\Delta x = x - x_0$. Знайдемо приріст функції $\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx в цій точці, якщо $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ або } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Функція $y = f(x)$, яка має похідну в кожній точці інтервалу (a,b), називається ***диференційовною*** на цьому інтервалі, а операція знаходження похідної функції – ***диференціюванням***.

Дотичною є пряма, яка займає граничне положення січної.

Розглянемо графік функції $y = f(x)$, яка має в точці $M_0(x_0, y_0)$ невертикальну дотичну l_1 (рис. 4.29).

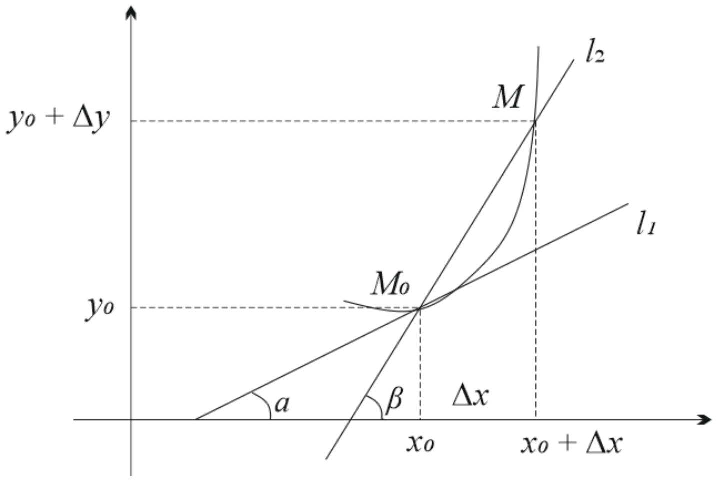


Рисунок 4.29

Знайдемо кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$, для цього проведемо через точку M_0 січну M_0M, де $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Її кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = tg\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$, $M \to M_0$ і січна l_2 необмежено наближається до дотичної l_1, тобто, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha$, тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 дорівнює значенню похідної цієї функції в точці x_0: $k = f'(x_0)$.

Якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $f'(x)$ на $[a,b]$, то функція $y = f(x)$ називається ***гладкою*** на цьому проміжку.

Функція $y = f(x)$, похідна якої $f'(x)$ має тільки скінченне число точок розриву I-го роду, на даному проміжку $[a,b]$, називається ***кусково-гладкою*** на цьому проміжку.

Теорема. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона в ній неперервна.

З теореми випливає, що в точках розриву функція не має похідної. Проте обернене твердження неправильне. Тобто, з того, що в деякій точці функція неперервна, ще не випливає, що в цій точці вона диференційовна.

4.9 Правила диференціювання функцій

Теорема 1. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ диференційовні в даній точці x, то в ній диференційовна і їх сума, до того ж: $(u+v)' = u' + v'$.

Доведення. Розглянемо функцію $y = f(x) = u(x) + v(x)$. Приросту Δx відповідає приріст $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x) =$ $= (u(x+\Delta x) - u(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v$.

Тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$.

Зауваження. Аналогічно $(u - v)' = u' - v'$.

Теорема 2. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ диференційовні в даній точці x, то в ній диференційовний добуток і має місце: $(uv)' = u'v + uv'$.

Доведення. Нехай x має приріст Δx, тоді функція $y = uv$ відповідно має прирости Δy, Δu, Δv, причому:

$$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - uv = \Delta uv + \Delta vu + \Delta u \Delta v, \text{ тоді}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u'v + uv' + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = u'v + uv'.$$

Наслідок. $(cu)' = c(u)'$, де $c = const$.

Теорема 3. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$, диференційовні в деякій точці x та $v(x) \neq 0$, то в цій точці диференційовна і частка: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Доведення. Нехай Δx приріст аргументу, а Δu та Δv відповідні прирости функцій. Функція $y = \dfrac{u}{v}$ матиме приріст: $\Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{\Delta uv - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}$.

Тоді: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta uv - u\Delta v}{(v + \Delta v)v\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{\Delta uv}{\Delta x} - \dfrac{u\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + \Delta vv} = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Похідна складеної функції

Теорема 4. Нехай $y = q(x)$, $x \in (a,b)$ має похідну в точці $x_0 \in (a,b)$, а $z = \varphi(y)$ має похідну в точці $y_0 = q(x_0)$. Тоді $z(x) = \varphi(q(x))$ має похідну в точці x_0 до того ж: $z'(x_0) = \varphi'(y_0) \cdot q'(x_0)$.

Доведення. Якщо $z(x)=\varphi(q(x))$ має похідну, то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(q(x))-\varphi(q(x_0))}{x-x_0}=z'(x_0)$.

$$z'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(q(x))-\varphi(q(x_0))}{q(x)-q(x_0)}\cdot\frac{q(x)-q(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(q(x))-\varphi(q(x_0))}{q(x)-q(x_0)}\times$$

$\times\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{q(x)-q(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(y_0)\cdot q'(x_0)$. Що і потрібно було довести.

Таблиця похідних

$c'=0$ | $x'=1$

$(u^n)'=u'\cdot nu^{n-1}$ | $(a^u)'=a^u\cdot u'\ln a$

$(e^u)'=e^u u'$ | $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(\sin u)'=u'\cos u$ | $(\cos u)'=-u'\sin u$

$(tgu)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ | $(ctgu)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(arctgu)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $(arcctgu)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

$(shu)'=u'chu$ | $(chu)'=u'shu$

$(thu)'=\dfrac{u'}{ch^2u}$ | $(cthu)'=-\dfrac{u'}{sh^2u}$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ | $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

Похідна оберненої, неявної функцій та функції, заданої параметрично

Теорема 5. Якщо для функції $y=f(x)$ існує обернена функція $x=\varphi(y)$, яка в точці y має похідну $\varphi'(y)$, відмінну від нуля, то в відповідній точці x функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Доведення. Нехай Δy − аргумент y, тоді $\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$. Оскільки $y=f(x)$ монотонна, то $\Delta x\neq 0\to\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1\Big/\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Але $x=\varphi(y)$ неперервна, то $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$. Тоді: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}1\Big/\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$. Тобто, $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Нехай функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $x = x(t)$ і $y = y(t)$ диференційовні в околі точки t, причому $x(t) \neq 0$. Похідна даної функції: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \div \dfrac{dx}{dt}$, тобто $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = t^4 + 2t, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо похідні $x'(t) = 4t^3 + 2$, $y'(t) = 2e^{2t}$. Тоді, $y'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{4t^3 + 2}$.

Нехай функція задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$. Для того, щоб знайти похідну даної функції, необхідно продиференціювати обидві частини цього рівняння за x і з отриманого рівняння виразити $y'(x)$.

Приклад 2. Знайти похідну функції заданої неявно $x^2 - \ln y - x^2 e^y = 0$.

Розв'язання. $\left(x^2 - \ln y - x^2 e^y\right)' = 0$; $\quad 2x - \dfrac{y'}{y} - 2xe^y - x^2 e^y y' = 0$;

$y'\left(-\dfrac{1}{y} - x^2 e^y\right) = -2x + 2xe^y$; $\quad y' = \dfrac{2x(e^y - 1)y}{-1 - x^2 ye^y}$; $\quad y' = \dfrac{2xy(1 - e^y)}{1 + x^2 ye^y}$.

Інколи для знаходження похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати. А потім результат продиференціювати. Таку операцію називають ***логарифмічним диференціюванням***. Існують функції, які розв'язуються тільки логарифмічним диференціюванням. До них належить так звана степенево-показникова функція $y = u^v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \left(5x^2 + 1\right)^{\cos 4x}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівності:

$\ln y = \ln\left(5x^2 + 1\right)^{\cos 4x}$; $\quad \ln y = (\cos 4x)\ln\left(5x^2 + 1\right)$. Продиференціюємо обидві частини рівності: $(\ln y)' = \left((\cos 4x)\ln\left(5x^2 + 1\right)\right)'$.

$$\frac{y'}{y} = -4\sin 4x \cdot \ln\left(5x^2 + 1\right) + \cos 4x \cdot \frac{10x}{5x^2 + 1}.$$

Виразимо y': $y' = \left(-4\sin 4x \cdot \ln\left(5x^2 + 1\right) + \cos 4x \cdot \dfrac{10x}{5x^2 + 1}\right)y$;

$$y' = \left(-4\sin 4x \cdot \ln\left(5x^2 + 1\right) + \frac{10x\cos 4x}{5x^2 + 1}\right)\left(5x^2 + 1\right)^{\cos 4x}.$$

4.10 Рівняння дотичної та нормалі до кривої

Розглянемо лінію $y=f\left(x\right)$. На ній візьмемо точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$ (рис. 4.30). Запишемо рівняння дотичної, що проходить через точку M_0 і не паралельна осі Oy. Рівняння прямої з даним кутовим коефіцієнтом k, що проходить через точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$, має вигляд: $y_0-y=k\left(x-x_0\right)$. Кутовий коефіцієнт в заданій точці $k=f'\left(x_0\right)$. Підставивши в рівняння, одержимо рівняння дотичної $y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

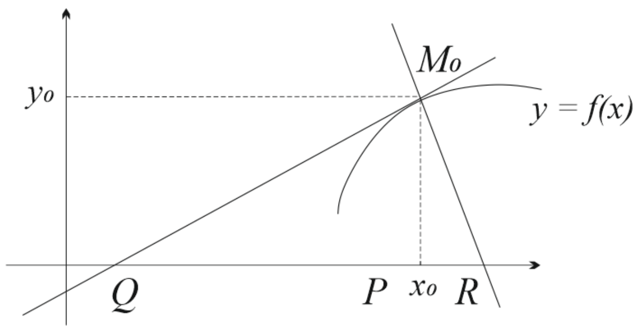


Рисунок 4.30

Нормаллю до кривої в даній точці називається пряма, що проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної.

Скориставшись умовою перпендикулярності $k_n=-\dfrac{1}{k_d}=-\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}$, одержимо рівняння нормалі $y-y_0=-\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)$.

Довжина відрізка QM_0 дотичної називається ***довжиною дотичної***. Проекція цього відрізка на вісь Ox – QP називається ***піддотичною***. Довжина RM_0 називається ***довжиною нормалі***, а проекція RP називається ***піднормаллю***.

4.11 Похідні вищих порядків

Похідна $y'=f'\left(x\right)$ функції $y=f\left(x\right)$ називається похідною ***першого порядку.*** Похідна від похідної першого порядку, якщо вона існує, називається ***похідною другого порядку*** або ***другою похідною***:

$$y''=\left(f'(x)\right)'=f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогічно похідна третього порядку: $y'''=\left(f''(x)\right)'=\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}=\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Похідні порядку вище першого називаються ***похідними вищих порядків.***

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначаються римськими цифрами: $IV, V, ...$ або числами в дужках $(n-1)$, (n).

Фізичний зміст похідної другого порядку – прискорення прямолінійного руху за час t: $v'(t) = (s'(t))' = s''(t) = a(t)$.

Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $x = x(t)$ і $y = y(t)$, то її похідна другого порядку знаходиться за формулою:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

4.12 Поняття диференціала функції однієї змінної

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x \in [a, b]$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$. Відповідно до теореми про зв'язок границі функції і нескінченно малої: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, тоді $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

Добуток $f'(x)\Delta x$ називається ***головною частиною приросту*** функції $\Delta f(x)$. ***Диференціалом функції*** $y = f(x)$ в точці x називається головна частина її приросту, що дорівнює добутку похідної функції на приріст аргументу. Записують $df(x)$ або dy: $dy = f'(x)\Delta x$.

Оскільки $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x$, тобто $dx \approx \Delta x$ маємо $dy = f'(x)dx$.

Геометричний зміст диференціала. Нехай дано функцію $y = f(x)$. MK – дотична (рис. 4.31).

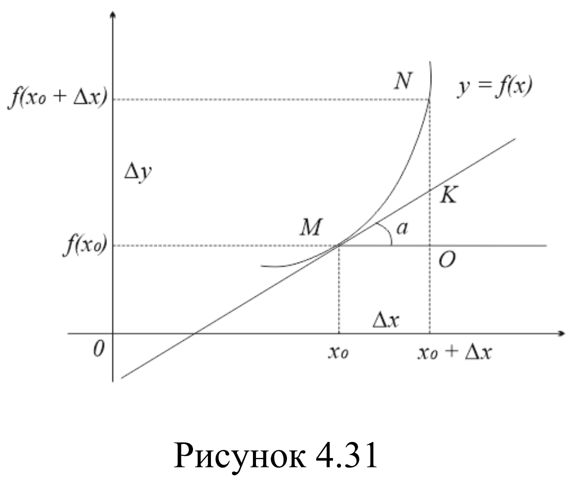


Рисунок 4.31

З ΔMKO маємо $KO = MOtg\alpha$. Але $MO = \Delta x$, $tg\alpha = f'(x_0)$. $KO = f'(x_0)\Delta x = dy$. Таким чином диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної.

Зауваження. $dy \neq \Delta y$, $KO \neq NO$, але при малих Δx, $\Delta y \approx dy$.

Застосування диференціала до наближених обчислень

$\Delta y = f'(x)\Delta x \quad \Rightarrow \quad f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$.

$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$ – формула наближеного обчислення значення функції.

Абсолютною похибкою Δ наближеної величини x називається модуль різниці між її точним значенням a та наближеним: $\Delta = |a - x|$.

Відносною похибкою δ називають: $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$.

Диференціали вищих порядків

Диференціал від диференціала першого порядку називають ***диференціалом другого порядку***: $d^2y = d(dy)$ $\qquad d^2y = f''(x)dx^2$.

Аналогічно, диференціал n-го порядку: $d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)dx^n$.

Формули і властивості похідної справедливі і для диференціала. Але для диференціала $n > 1$ порядку вони мають зміст коли x незалежна змінна. Для складеної функції ці формули не виконуються. Дійсно: $d^2y = d(dy) = d(\varphi'(z)dz) = dzd(\varphi'(z)) + \varphi'(z)d(dz) = \varphi''(z)dzdz + \varphi'(z)d^2z$.

$d^2y = \varphi''(z)dz^2 + \varphi'(z)d^2z$. Тобто, у випадку складеної функції з'являється другий доданок.

4.13 Деякі теореми про диференційовні функції. Правило Лопіталя

Теорема Ферма. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і приймає в деякій точці $x = c \in (a,b)$ найбільше чи найменше значення. Тоді, якщо в точці $x = c$ існує похідна цієї функції, то вона дорівнює нулю.

Доведення. Нехай в точці $x = c$ функція приймає найбільше значення $f(c) = M$ на інтервалі (a,b) (рис. 4.32). Покажемо, що $f'(c) = 0$.

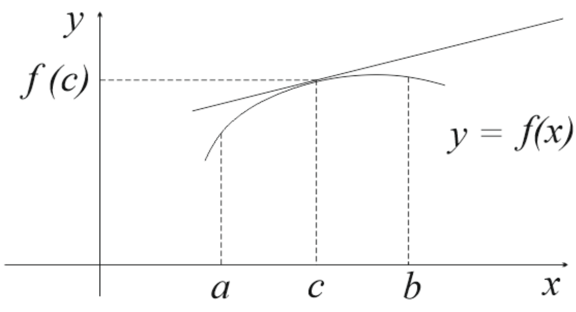


Рисунок 4.32

За означенням $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. Оскільки в точці c значення найбільше, то звідси випливає, що $f(c)\geq f(c+\Delta x)$ і $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$. Розглянемо два випадки:

1. Якщо $\Delta x>0$, то $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$ і $f'(c)\leq 0$.

2. Якщо $\Delta x<0$, то $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$ і $f'(c)\geq 0$.

Отже, маємо систему $\begin{cases} f'(c)\leq 0, \\ f'(c)\geq 0, \end{cases}$ для якої $f'(c)=0$ є єдиним розв'язком. Аналогічно доводимо для випадку, коли функція в точці $x=c$ на інтервалі (a,b) приймає найменше значення. Теорему доведено.

Теорема Ролля. Якщо $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ та диференційовна на інтервалі (a,b) і на кінцях відрізка приймає рівні значення $f(a)=f(b)$, то знайдеться точка $x=c\in(a,b)$ така, що $f'(c)=0$.

Доведення. Оскільки функція неперервна на відрізку, то за властивістю (5) підрозділу 4.7, вона досягає свого найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку. Позначимо їх відповідно через M і m. Розглянемо два випадки:

1. Нехай $M=m$. Тоді $M\leq f(x)\leq M$, тобто функція є сталою на відрізку $[a,b]$. Тому $f'(x)=0$ для всіх точок інтервалу (a,b).

2. Нехай $M\neq m$. Тоді функція в точці $x=c$ інтервалу приймає принаймні одне із значень M чи m. Оскільки $f(a)=f(b)$, то не може бути M одночасно значенням $y=f(x)$ на одному кінці, а m − на іншому кінці відрізка $[a,b]$.

Нехай $M=f(c)$, $a<c<b$. Тоді, за теоремою Ферма, в цій точці існує похідна і вона дорівнює нулю. Що і потрібно було довести.

Теорема Лагранжа. Якщо $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ та диференційовна на інтервалі (a,b), то існує така точка $x=c\in(a,b)$, що має місце рівність $f(a)-f(b)=f'(c)(b-a)$.

Доведення. Введемо допоміжну функцію $F(x)$, визначивши її на відрізку $[a,b]$ рівністю $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ця функція задовольняє умови теореми Ролля (неперервна на $[a,b]$, диференційовна на (a,b), $F(a)=F(b)=0$, тобто приймає рівні значення на кінцях), тоді існує така точка $x=c\in(a,b)$, що: $F'(c)=0$.

Знайдемо похідну $F(x)$: $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Знайдемо значення похідної в точці c: $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Перетворивши останню рівність, одержимо $f(a)-f(b)=f'(c)(b-a)$.

Геометричний зміст теореми Лагранжа. На (a,b) існує точка M, в якій дотична до графіка функції $y=f(x)$ паралельна січній AB (рис. 4.33).

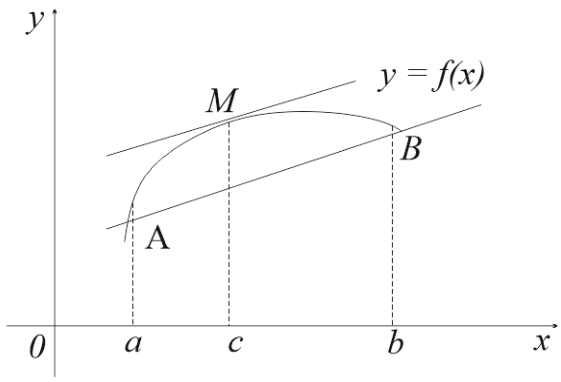


Рисунок 4.33

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, диференційовні на інтервалі (a,b), причому $\varphi(x)\neq 0$ для $x\in(a,b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що виконується рівність:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Лагранжа є частинним випадком теореми Коші, достатньо в останній взяти $\varphi(x)=x$.

В теоремах Ролля, Коші, Лагранжа мова йде про існування деякої «середньої» точки, для якої виконується та чи інша рівність. Тому їх називають теоремами про середнє диференціального числення.

Правило Лопіталя

Теорема (*Правило Лопіталя розкриття невизначеностей*). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ такі, що 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ чи $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\infty$; 2) мають похідні першого порядку $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ в деякому околі точки a, окрім, можливо, самої точки a; 3) існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Тоді існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ і має місце рівність $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Сутність цього правила полягає в тому, що, маючи невизначеності типу $\frac{0}{0}$ чи $\frac{\infty}{\infty}$, обчислення границі відношення функцій зводиться до обчислення границі відношення їх похідних, що, в більшості випадків, простіше. Іноді для обчислення границі правило Лопіталя доводиться застосовувати послідовно кілька разів.

Приклад 1. Знайти похідну $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin 7x\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7\cos 7x}{1}=\frac{7\cdot 1}{1}=7$.

4.14 Застосування похідної до дослідження та побудови графіка функції

Інтервал монотонності

Теорема 1 (*Необхідна умова*). Якщо функція $y=f\left(x\right)$ диференційовна і зростає (спадає) на інтервалі $\left(a,b\right)$, то $f'\left(x\right)\geq 0$ $\left(f'\left(x\right)\leq 0\right)$ для будь-якого $x\in\left(a,b\right)$.

Теорема 2 (*Достатня умова*). Якщо $y=f\left(x\right)$ неперервна на $\left[a,b\right]$ і в кожній точці $\left(a,b\right)$ має додатну (від'ємну) похідну, то ця функція строго зростає (спадає) на $\left[a,b\right]$.

Екстремуми функцій

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають ***критичними***.

Точка $x_0\in D(f)$ називається ***точкою min (max)*** функції $y=f\left(x\right)$, якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для $\forall x\in\delta$ виконується нерівність: $f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)$ $\left(f\left(x\right)\leq f\left(x_0\right)\right)$. Точки *max* та *min* називаються ***точками екстремуму***.

Теорема 3 (*Необхідна умова існування екстремуму*). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $y=f\left(x\right)$ і в цій точці існує похідна $f'\left(x_0\right)$, то вона дорівнює нулю.

Теорема 4 (*Достатня умова екстремуму*). Якщо функція $y=f\left(x\right)$ неперервна в деякому околі критичної точки x_0 (за винятком, можливо, самої точки x_0) і при переході через цю точку похідна $f'\left(x\right)$ змінює знак з «+» на «–», то x_0 точка максимуму, а у випадку з «–» на «+» – мінімуму.

Теорема 5. Якщо в точці x_0 перша похідна дорівнює нулю $f'(x_0)=0$, а друга похідна існує і відмінна від нуля, то, якщо $f''(x_0)<0$, маємо *max*, якщо $f''(x_0)>0$ – *min*.

Опуклість та вгнутість кривої

Розглянемо на площині криву, яка є графіком однозначної диференційовної функції $y=f(x)$. Кажуть, що крива опукла вверх (рис. 4.34) на (a,b), якщо всі точки кривої лежать нижче будь-якої її дотичної на цьому інтервалі, і опукла вниз (вгнута) (рис. 4.35) на (a,b), якщо всі її точки на цьому інтервалі лежать вище будь-якої її дотичної.

Теорема 6. Якщо в усіх точках інтервалу (a,b) друга похідна функції $y=f(x)$ від'ємна (додатна) $f''(x)<0$ $\left(f''(x)>0\right)$, то крива $y=f(x)$ на цьому інтервалі опукла (вгнута).

Точка, що відділяє опуклу частину неперервної кривої від вгнутої, називається ***точкою перегину***.

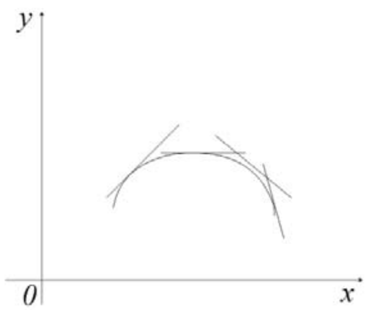


Рисунок 4.34

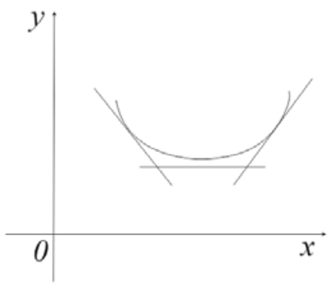


Рисунок 4.35

Теорема 7. Якщо друга похідна функції $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то точка кривої з абсцисою $x=x_0$ є точкою перегину.

Асимптоти

Пряма l називається ***асимптотою*** кривої, якщо відстань δ від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M в нескінченність прямує до нуля (рис. 4.36–4.37). Розрізняють асимптоти: вертикальні (паралельні осі Oy) і похилі (непаралельні осі Oy).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то пряма $x=x_0$ є ***вертикальною асимптотою*** кривої. Вертикальні асимптоти існують в точках розриву 2-го роду.

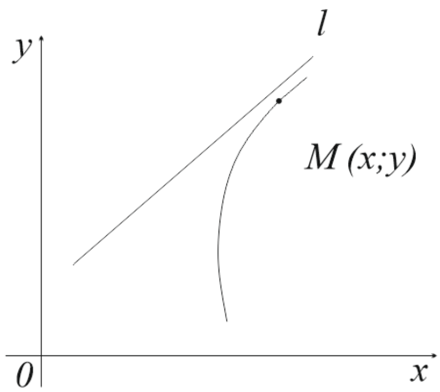


Рисунок 4.36

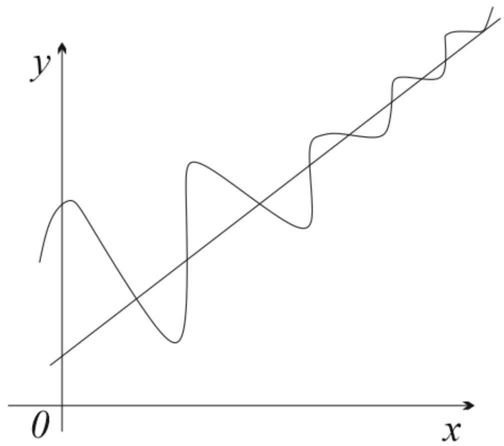


Рисунок 4.37

Похилі асимптоти задаються рівнянням $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right)$. Якщо коефіцієнт $k = 0$, похила асимптота перетворюється в ***горизонтальну***: $y = b$.

Загальний план дослідження функції та побудова її графіка

1. Знайти область визначення.
2. Дослідити на парність/непарність.
3. Дослідити на періодичність.
4. Знайти точки перетину з осями координат.
5. Дослідити на асимптоти: а) вертикальні; б) похилі.
6. Дослідити на екстремуми, проміжки монотонності функції.
7. Дослідити на точки перегину. Проміжки опуклості функції.
8. Побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.
2. Дослідимо на парність: $y(-x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{-x + 2}$ – функція ні парна, ні непарна.
3. Функція неперіодична.
4. $y(0) = \dfrac{3}{2}$. Точка перетину з Oy, $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$. Точок перетину з Ox немає.
5. Дослідимо на асимптоти:

а) $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = +\infty$ $x = -2$ вертикальна асимптота;

б) $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x(x+2)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x} = 1$;

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-2x+3}{x+2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x+3}{x+2} = -4 .$$

$y = x - 4$ − похила асимптота.

6. Дослідимо на екстремуми, проміжки монотонності функції:

$$y' = \left(\frac{x^2-2x+3}{x+2} \right)' = \frac{(2x-2)(x+2) - \left(x^2-2x+3\right)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-7}{(x+2)^2} .$$

$y' = 0$; $x^2 + 4x - 7 = 0$; $D = 4^2 - 4(-7) = 44$

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{44}}{2} = -2-\sqrt{11}$; $f(x_1) \approx -12{,}6$; $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{44}}{2} = -2+\sqrt{11}$; $f(x_2) \approx 0{,}63$.

На проміжку $\left(-\infty, -2-\sqrt{11}\right)$ $f'(x) > 0$ функція зростає; на проміжку $\left(-2-\sqrt{11}, -2\right) \cup \left(-2, -2+\sqrt{11}\right)$ $f'(x) < 0$ функція спадає; на $\left(-2+\sqrt{11}, +\infty\right)$ $f'(x) > 0$ − функція зростає.

7. Дослідимо на точки перегину, проміжки опуклості функції:

$$y'' = \left(\frac{x^2+4x-7}{(x+2)^2} \right)' = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)\left(x^2+4x-7\right)}{(x+2)^4} = \frac{22}{(x+2)^3} .$$

$y'' \neq 0$ − точок перегину немає. На проміжку $(-\infty, -2)$ $f'(x) < 0$ функція опукла; на проміжку $(-2, +\infty)$ $f'(x) > 0$ функція вгнута.

8. Графік функції зображено на рис. 4.38. Може, забрати 8?

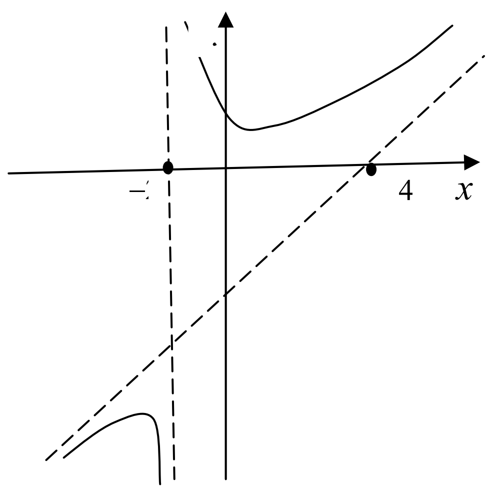


Рисунок 4.38

4.15 Формула Тейлора

Нехай функція $y = f(x)$ має всі похідні до $(n-1)$-го порядку включно на деякому проміжку, що містить точку $x = a$. Знайдемо многочлен $y = P_n(x)$ степеня не вище n значення якого в точці $x = a$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в цій точці.

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{4.1}$$

Нехай $P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n$. (4.2)

Невизначені коефіцієнти $c_0, c_1, \ldots, c_n$ виберемо так, щоб виконувалась (4.1). Знайдемо похідні:

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3\cdot c_2(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \tag{4.3}$$

Підставляючи $x = a$ в (4.2) і (4.3) одержимо:

$P_n(a) = f(a) = c_0$;

$P_n'(a) = f'(a) = c_1$; $c_1 = f'(a)$;

$P_n''(a) = f''(a) = 2c_2 = (2!)c_2$; $\quad c_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$;

$P_n'''(a) = f'''(a) = 3\cdot 2c_3 = (3!)c_3$; $c_3 = \dfrac{f'''(a)}{3!}$;

…

$P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2c_n = (n!)c_n$. $\quad c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{(n)!}$

Підставляючи ці значення в (4.2) отримаємо:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n.$$

Позначимо через $R_n(x)$ різницю значення даної функції $f(x)$ та побудованого многочлена $P_n(x)$: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Тоді $f(x) = R_n(x) + P_n(x)$ або в розгорнутому вигляді:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{4.4}$$

Вираз $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n$, де $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$, називають ***залишковим членом в формі Лагранжа.***

Формула (4.4) називається ***формулою Тейлора*** для функції $y = f(x)$.

Якщо $a = 0$ маємо ***формулу Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}x^n+R_n(x).$$

Розклад за формулою Маклорена деяких елементарних функцій

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+R_n(x)$.

2. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n(x)$.

3. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_n(x)$.

4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n(x)$.

Тести для самоперевірки

1. Продовжте означення: величина y називається функцією від величини x, якщо за певним правилом f

а) для кожного значення величини x існує значення величини y;

б) значенню величини x відповідає значення величини y;

в) кожному значенню величини x відповідає єдине цілком визначене значення величини y;

г) кожному значенню величини x відповідає хоча б одне значення величини y.

2. Вкажіть хибне висловлення:

а) якщо послідовність збіжна, то вона обмежена;

б) будь-яка збіжна послідовність має принаймні одну границю;

в) якщо послідовність монотонно зростає і обмежена зверху, то вона має границю;

г) послідовність, яка має границю, є збіжною.

3. Яка з властивостей не є властивістю границі функції?

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

в) якщо існує $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to a}C=0$.

4. Вкажіть границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x-5}{1-x^2}$.

а) 3; б) -3; в) 0; г) ∞.

5. Вкажіть границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{4x^4-3x+5}}$.

а) 0; б) ∞; в) 1; г) $\dfrac{1}{2}$.

6. Вкажіть правильне продовження фрази: точка $x=3$ *функції* $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$ є точкою…

а) розриву 1-го роду − стрибком;
б) розриву 2-го роду;
в) в якій функція неперервна;
г) розриву 1-го роду усувного типу.

7. Вкажіть кутовий коефіцієнт дотичної в точці $M(0,1)$ *до лінії* $y=4x^2-10x+13$.

а) -10; б) 13; в) 7; г) -2.

8. Вкажіть похідну функції $tg\dfrac{y}{x}=5x$.

а) $y'=5x\cos^2\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$; б) $y'=5\cos^2\dfrac{y}{x}+y$;

в) $y'=5\cos^2\dfrac{y}{x}$; г) $y'=\dfrac{5x}{1+25x^2}$.

9. Вкажіть $\dfrac{dy}{dx}$ *для функції* $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$.

а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-3\sin t}{4\sin 2t}$; б) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin 2t}{-\sin t}$;

в) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-3\sin t}{4\sin 2t}$; г) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{8}{3}\cos t$.

10.Дослідити на екстремум функцію $y=\ln\left(9-x^2\right)$.

а) $x=0-\min$; б) $x=-3-\min,\quad x=3-\max$;

в) $x=0-\max$; г) екстремумів немає.

11.Знайти прискорення точки, яка рухається за законом $s=A\sin(\omega t+\varphi)$.

а) $a=\omega s$; б) $a=\omega^2 s$; в) $a=A\omega^2 s$; г) $a=-\omega^2 s$.

12.Вкажіть вертикальну асимптоту функції $y=(x-1)e^{3x+1}$.

а) $y=1$; б) $x=1$;

в) $x=-\dfrac{1}{3}$; г) вертикальних асимптот немає.

5 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функції однієї змінної не охоплюють всіх залежностей, що існують в природі. Тому існує потреба розширити відоме поняття функціональної залежності та ввести поняття функції багатьох змінних.

5.1 Границя та неперервність функції багатьох змінних

Функція, залежна від двох та більше змінних, називається ***функцією багатьох змінних (ФБЗ)*** $f(x,y)$, $f(x,y,z)$, $f(x,y,z,t)$.

Областю визначення ФБЗ є множина точок M, для яких функція $f(M)$ визначена. Позначається $D = D(f)$.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Функція визначена для всіх значень змінних x, y таких, що підкореневий вираз є невід'ємним: $4 - x^2 - y^2 \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 4$. Область визначення цієї функції – множина точок всередині кола з центром в початку координат і радіусом $r = 2$ (рис. 5.1).

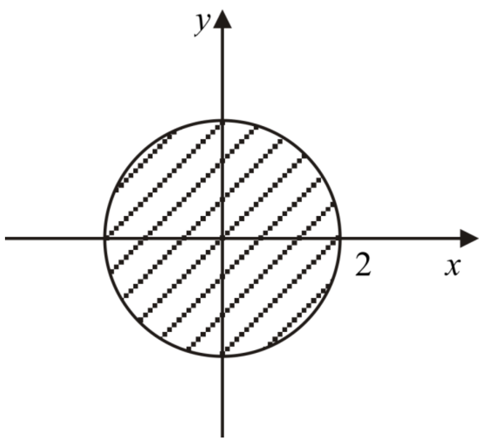


Рисунок 5.1

Лінією рівня функції $u = f(x,y)$ називається лінія $f(x,y) = c$, в площині xOy, в точках якої функція зберігає стале значення $u = c$.

Приклад 2. Побудувати лінії рівня функцій $u = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Надамо u декількох значень константи: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2 \ldots$

Одержимо сукупність концентричних кіл з центрами в початку координат, які відрізняються радіусами (рис. 5.2).

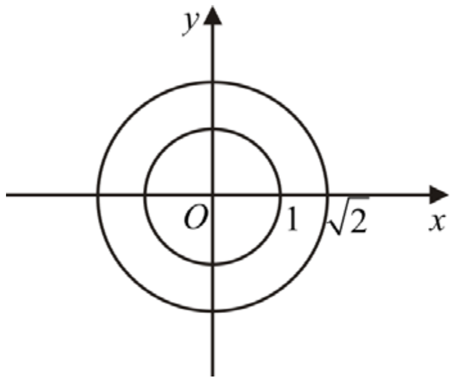


Рисунок 5.2

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається поверхня $f(x, y, z) = c$, в точках якої функція зберігає стале значення $u = c$.

Приклад 3. Побудувати поверхні рівня функції $u = \dfrac{x+y+z}{3}$.

Надамо u кількох значень константи: $\dfrac{x+y+z}{3} = 1$, $\dfrac{x+y+z}{3} = 2$. Одержимо сукупність площин, що відсікають на координатних осях відрізки довжиною $3c$ (рис. 5.3).

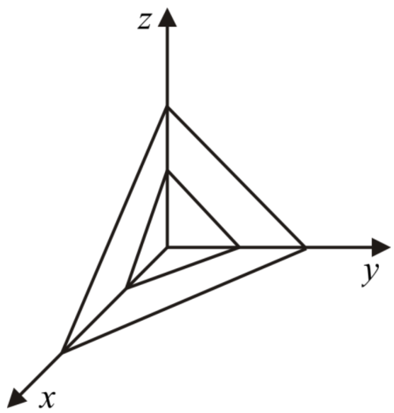


Рисунок 5.3

Далі будемо розглядати функцію двох змінних, оскільки всі найважливіші факти теорії функції багатьох змінних можна спостерігати вже для функції двох змінних. До того ж, для функції двох змінних можна навести наочну геометричну інтерпретацію.

Функцію $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in D(f)$, можна розглядати як функцію точки $M(x, y)$ координатної площини xOy. Областю визначення функції двох змінних може бути як вся площина, так і її частина, обмежена кількома лініями. Лінію, що обмежує область, називають ***межею області***. Точки області, що не лежать на межі, називаються ***внутрішніми***. Область, яка складається тільки з внутрішніх точок, називається ***відкритою***. Область з приєднаною до неї межею, називається ***замкнутою*** і позначається $\overline{D}$.

Введемо поняття околу точки. δ ***-околом точки*** $M_0(x_0, y_0)$ є множина усіх точок $M(x, y)$, які задовольняють нерівність $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ або $|MM_0| < \delta$ (рис. 5.4).

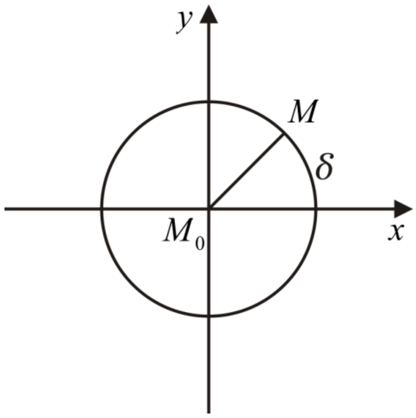


Рисунок 5.4

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, можливо, за винятком самої цієї точки. Розглянемо послідовність точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, …, $M_n(x_n, y_n)$, яку позначимо символом $\{M_n\}$. Послідовність точок $\{M_n\}$ називається ***збіжною до точки*** M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|MM_0| < \delta$. При цьому точку M_0 називають ***границею послідовності*** $\{M_n\}$ і записують так:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0 .$$

Число A називається ***границею функції*** $f(M)$ в точці M_0, якщо для довільної послідовності точок $\{M_n\}$ відповідна послідовність значень функції збігається до числа A. При цьому пишуть:

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = A, \ \lim_{M\to M_0} f(M) = A, \ \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A .$$

Вважається, що точка M може рухатися до точки M_0 за будь-яким законом чи напрямком і всі відповідні граничні значення існують і дорівнюють числу A.

Всі теореми і властивості границі функції однієї змінної справедливі для функції багатьох змінних.

Функція $f(M)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо виконується рівність $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. Функція $f(M)$ називається ***неперервною на множині***, якщо вона неперервна в будь-якій точці цієї множини.

5.2 Диференціювання функцій багатьох змінних

Розглянемо функцію $z = f\left(x,y\right)$, визначену в деякому околі точки $M\left(x,y\right)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y сталою, так, щоб точка $\left(x+\Delta x,y\right)$ належала заданому околу. Величина $\Delta_x z = f\left(x+\Delta x,y\right) - f\left(x,y\right)$ називається ***частинним приростом функції*** $f\left(x,y\right)$ ***за змінною*** x. Аналогічно, надавши приросту змінній y, залишаючи сталою змінну x, одержимо $\Delta_y z = f\left(x,y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right)$ − ***частинний приріст функції*** $f\left(x,y\right)$ ***за змінною*** y.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$, то вона називається ***частинною похідною функції*** $f\left(x,y\right)$ ***в точці*** $M\left(x,y\right)$ ***за змінною*** x і позначається: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x,y)$, z'_x.

Аналогічно границя $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}$ − ***частинна похідна функції*** $f\left(x,y\right)$ ***за*** y, яка позначається: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $f'_y(x,y)$, z'_y.

Якщо існує частинна похідна за x від функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, то її називають ***частинною похідною другого порядку від функції*** $f\left(x,y\right)$ ***за змінною*** x і позначають $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f''_{xx}:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ або } f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x .$$

Аналогічно частинна похідна другого порядку від функції $f\left(x,y\right)$ за змінною y: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ або $f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y$.

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ за змінною y, то цю похідну називають ***мішаною частинною похідною другого порядку від функції*** $f(x,y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ або f''_{xy}: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Для мішаної частинної похідної другого порядку від функції $f(x,y)$ має місце рівність: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Приклад 1. Для функції $z = x^2 y + 2xy + \ln(x+y)$ перевірити виконання $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Розв'язання: $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y + 2xy + \ln(x+y)\right)'_x = 2xy + 2y + \frac{1}{x+y}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2xy + 2y + \frac{1}{x+y}\right)'_y = 2x + 2 - \frac{1}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y + 2xy + \ln(x+y)\right)'_y = x^2 + 2x + \frac{1}{x+y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x+y}\right)'_x = 2x + 2 - \frac{1}{(x+y)^2}.$$ Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Похідна складеної функції $z = f(x,y)$, яка має неперервні частинні похідні за змінними x, y в деякому околі точки $M(x,y)$, де $x = \phi(t)$, $y = \varphi(t)$, обчислюється за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Приклад 2. Обчислити похідну функції $u = e^{x+2\sin y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$.

Розв'язання. $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+2\sin y} \cdot 1$; $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+2\sin y} \cdot 2\cos y$; $\frac{dx}{dt} = e^t$; $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$;

$$\frac{du}{dt} = e^{x+2\sin y} \cdot e^t + e^{x+2\sin y} \cdot 2\cos y \cdot \frac{1}{t} = e^{e^t + 2\sin(\ln t)}\left(e^t + \frac{2\cos(\ln t)}{t}\right).$$

Якщо функція $z = f(x,y)$, де $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, складена функція незалежних змінних u, v, то її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$ обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Геометричний зміст частинної похідної

Рівняння $z = f(x, y)$ задає поверхню у просторі. Нехай $A(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ – точка поверхні (рис. 5.5). Проведемо через неї площину, паралельну площині xOz і перпендикулярну до осі Oy. Рівняння площини $y = y_0$. У перетині з поверхнею одержимо криву, яка проходить через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ і належить поверхні. В площині $y = y_0$ крива має рівняння: $z = f(x, y_0)$.

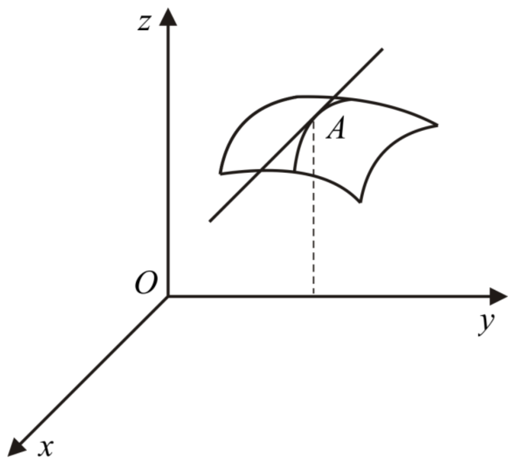


Рисунок 5.5

Геометричний зміст похідної функції однієї змінної $f'_x(x_0, y_0) = k$, тобто, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $z = f(x, y_0)$ в точці дотику A. Аналогічно, провівши площину паралельну yOz і перпендикулярну до Ox, рівняння якої $x = x_0$, одержимо криву $z = f(x_0, y)$ і $f'_y(x_0, y_0) = k$ – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $z = f(x_0, y)$ в точці дотику A.

Таким чином, частинні похідні першого порядку від $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) є кутовими коефіцієнтами дотичних ліній перетину поверхні площинами, паралельними координатним площинам yOz, xOz, що проходять через точку $A(x_0, y_0, z_0)$.

5.3 Диференційовність і диференціал функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Виберемо прирости Δx і Δy так, щоб точка $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ належала розглядуваному околу. Знайдемо повний приріст функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***диференційовною*** в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст можна подати у вигляді:

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + f_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + f_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (5.1)$$

де a і b – деякі, залежні від Δx, Δy, числа, а f_1 і f_2 – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ функції.

Сума перших двох доданків $a\Delta x + b\Delta y$ в рівності (5.1) називається ***головною лінійною частиною приросту функції*** в точці $M(x, y)$.

Головна частина приросту функції $z = f(x, y)$, лінійна відносно Δx і Δy, називається ***повним диференціалом функції*** і позначається dz:

$$dz = a\Delta x + b\Delta y.$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вона має частинні похідні за x і y в даній точці, а коефіцієнти a і b в головній лінійній частині приросту обчислюються за формулами:

$$a = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad b = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці, отже, має місце $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + f_1\Delta x + f_2\Delta y$. Нехай $\Delta y = 0$.

Тоді: $\Delta z = a\Delta x + f_1\Delta x$, $\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ поділимо рівність на Δx і знайдемо границю частки, при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x + f_1\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (a + f_1) = a.$$

Тобто $\frac{\partial z}{\partial x} = a$. Аналогічно, розглянувши $\Delta x = 0$, одержимо $\frac{\partial z}{\partial y} = b$.

Теорема (*Достатня умова диференціювання*). Якщо функція двох змінних $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки (x, y) неперервні частинні похідні першого порядку за змінними x та y, то повний диференціал функції в цій точці існує і обчислюється за формулою:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy. \qquad (5.2)$$

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції $z = x^3 - y^3 + 4xy$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 - y^3 + 4xy\right)' = 3x^2 + 4y$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 - y^3 + 4xy\right)' = -3y^2 + 4x.$$

Відповідь. $dz = (3x^2 + 4y)dx + (4x - 3y^2)dy$.

Рівність (5.2) використовується для наближеного обчислення значень функції. При достатньо малих $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ має місце $dz \approx \Delta z$. Нехай $z = f(x, y)$, тоді $z(M) = z(M_0) + dz$, тобто:

$$z(M) = z(M_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \Delta y. \qquad (5.3)$$

Приклад 2. Обчислити наближено значення функції $z = x^2 + 3xy + y^2$ в точці A(1,96, 2,03).

Розв'язання. Застосуємо формулу (5.3). Маємо $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = -0{,}03$, $A_0(2,2)$. Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці A_0:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A_0} = \left.(2x + 3y)\right|_{A_0} = 10, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A_0} = \left.(3x + 2y)\right|_{A_0} = 10.$$

Значення функції в точці: $z(A_0) = 4 + 12 + 4 = 20$.

Наближене значення функції в точці A:

$z(A) = 20 + 10 \cdot 0{,}04 + 10(-0{,}03) = 20 + 0{,}4 - 0{,}3 = 20{,}1$.

Знайдемо точне значення функції в точці A:

$z(A) = 3{,}8416 + 11{,}9364 + 4{,}1209 = 19{,}8989$.

Абсолютна похибка: $\Delta = \left| z(A) - z(A_0) \right| = 0{,}2011$.

Відносна похибка: $\delta = \dfrac{\Delta}{z(A)} \approx 0{,}01$.

5.4 Екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякій області D і точка $(a,b) \in D$. Функція $z = f(x,y)$ має ***максимум в точці*** (a,b), якщо значення $f(a,b)$ більше значення функції в будь-яких точках з деякого околу точки (a,b), тобто $f(x,y) < f(a,b)$, і ***мінімум***, якщо $f(x,y) > f(a,b)$.

Теорема 1 (*Необхідна умова екстремуму*). Функція $z = f(x,y)$ має екстремум лише в тих точках, де її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$ або не існують.

Точки, в яких частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, називаються ***стаціонарними***. Стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна частинна похідна не існує, називають ***критичними точками***. В критичних точках функція може мати екстремум, а може і не мати.

Теорема 2 (*Достатня умова екстремуму*). Якщо $z = f(x,y)$ має в околі стаціонарної точки (x_0, y_0) неперервні похідні до другого порядку включно і виконується умова $\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2 > 0$, то в цій точці функція має екстремум. Якщо $\left[\begin{array}{l} f''_{xx}(x_0,y_0) < 0, \\ f''_{yy}(x_0,y_0) < 0 \end{array}\right.$, то маємо максимум, якщо $\left[\begin{array}{l} f''_{xx}(x_0,y_0) > 0, \\ f''_{yy}(x_0,y_0) > 0 \end{array}\right.$ – мінімум.

При $\Delta < 0$ – екстремуму немає, при $\Delta = 0$ екстремум може бути, а може і не бути, потрібно провести додаткові дослідження.

Введемо позначення $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, тоді $\Delta = A \cdot C - B^2$.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 2y^2 + x$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки: $\begin{cases} z'_x = 2x + 1 = 0, \\ z'_y = 4y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}, \\ y = 0. \end{cases}$

Таким чином, точка $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ − стаціонарна точка.

Знайдемо частинні похідні другого порядку і їх значення в стаціонарній точці: $A = z''_{xx} = 2$, $C = z''_{yy} = 4$, $B = z''_{xy} = 0$.

Тоді $\Delta = 2 \cdot 4 - 0^2 > 0$ − функція має екстремум в цій точці. $A > 0$ − це мінімум.

Отже, $z_{\min} = z\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.

Екстремум за умовою

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ називається екстремум цієї функції, який досягається за умови, що змінні x, y пов'язані рівнянням $g(x, y) = 0$ (рівняння зв'язку).

Складемо допоміжну функцію $u = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, де λ деяке число. Цю функцію називають функцією Лагранжа, а число λ − множником Лагранжа. Тоді необхідні умови умовного екстремуму мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f'_x + \lambda g'_x(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = f'_y + \lambda g'_y(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

З цієї системи знаходять стаціонарну точку (x, y, λ) функції $u = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ при наявності зв'язку $g(x, y) = 0$. Для встановлення характеру умовного екстремуму потрібно з'ясувати достатні умови екстремуму при наявності зв'язку. Аналогічно до екстремуму в точці, достатні умови екстремуму при наявності зв'язку шукають за формулою $\Delta = A \cdot C - B^2$, якщо $\Delta > 0$ екстремум є, якщо $\Delta < 0$ екстремуму немає, якщо $\Delta = 0$ екстремум може бути, а може і не бути.

Приклад 2. Знайти екстремум $z = x^2 + y^2$, якщо x та y задані рівнянням $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Розв'язання. Складемо допоміжну функцію $u = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1\right)$.

Знайдемо стаціонарну точку: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \frac{1}{4}\lambda = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \frac{1}{3}\lambda = 0, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{8}\lambda, \\ y = -\frac{1}{6}\lambda, \\ \left(-\frac{1}{32} - \frac{1}{18}\right)\lambda = 1; \end{cases}$

$\frac{-32-18}{32\cdot 18}\lambda = 1$; $\frac{-50}{32\cdot 18}\lambda = 1$; $\lambda = -\frac{32\cdot 18}{50} = -11{,}52$;

$x = -\frac{1}{8}\left(-11{,}52\right) = 1{,}44$; $y = -\frac{1}{6}\left(-11{,}52\right) = 1{,}92$.

Маємо стаціонарну точку (1,44, 1,92). Знайдемо $\Delta = A\cdot C - B^2$: $z''_{xx} = 2$; $z''_{yy} = 2$; $z''_{xy} = 0$. $\Delta = 2\cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$, $z''_{xx} > 0$.

Отже, маємо мінімум $z\left(1{,}44,\, 1{,}92\right) = 1{,}44^2 + 1{,}92^2 = 5{,}76$.

Пошук найбільшого та найменшого значень функції в замкненій області

Алгоритм пошуку найбільшого та найменшого значень функції

1. Знайти стаціонарні точки, які належать даній області.
2. Обчислити значення функції в них.
3. Знайти найбільше та найменше значення функції на лініях, що обмежують область.
4. Вибрати серед них найбільше і найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в області D: $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки: $\begin{cases} z'_x = 2x + 1 = 0, \\ z'_y = 6y - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

Стаціонарна точка $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ не належить області D.

Знайдемо найбільше та найменше значення функції на лініях, що обмежують область. На лінії $x = 1$ функція має вигляд $z = 3y^2 + 2 - y$, $y \in [0,1]$.

$z'_y = 6y - 1 = 0$, $y = \dfrac{1}{6}$. Маємо точку $\left(1, \dfrac{1}{6}\right)$. $z\left(1, \dfrac{1}{6}\right) = 1 + \dfrac{3}{36} + 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{23}{12}$.
На кінцях інтервалу $z(1,1) = 3$, $z(1,0) = 2$.

На лінії $y = 1$ функція має вигляд $z = x^2 + 3 + x - 1 = x^2 + x + 2$, $x \in [0,1]$.
$z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{2}$. Маємо точку $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, яка не належить області D.
На кінцях інтервалу $z(0,1) = 2$, $z(1,1) = 3$.

На лінії $x = 1 - y$ функція має вигляд $z = (1-y)^2 + 3y^2 - 2y + 1$.

$z'_y = -2(1-y) + 6y - 2 = 0$, $8y = 4$, $y = \dfrac{1}{2}$, $x = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Маємо точку $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. $z\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$.

Отже, найменшого значення $z = 1$ функція набуває всередині області D в точці $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, а найбільшого значення $z = 3$ функція набуває в точці $(1,1)$, що лежить на межі області D.

5.5 Дотична площина та нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні $z = f(x, y)$ в точці M називається площина, яка містить всі дотичні до кривих, проведених на поверхні через точку M.

Якщо поверхня задана рівнянням $f(x, y, z) = 0$, то рівняння дотичної площини в точці $M(x_0, y_0)$ до поверхні має вигляд:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M (y - y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M (z - z_0) = 0. \tag{5.5}$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то рівняння (5.5) набуває вигляду:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0) - (z - z_0) = 0. \tag{5.6}$$

Нормаль до поверхні – це пряма, яка проходить через точку дотику і перпендикулярна до дотичної площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то канонічне рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_M} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{5.7}$$

Якщо поверхня задана рівнянням $f(x,y,z)=0$, то канонічне рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M}. \tag{5.8}$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі в точці $M(1,1,1)$ до площини $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$.

Розв'язання. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=(2x-2y-1)\Big|_M=-1$; $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=(-2x+2y+2)\Big|_M=2$.

Рівняння дотичної площини: $-(x-1)+2(y-1)-(z-1)=0$; $x-2y+z=0$.

Рівняння нормалі: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

Тести для самоперевірки

1. Знайти область визначення функції $z=\sqrt{y^2-2x+4}$.

а) всі точки площини, які знаходяться всередині параболи $y^2=2\left(x-2\right)$, не охоплюючи точок самої параболи;

б) всі точки площини, які знаходяться всередині параболи $y^2=2\left(x-2\right)$, охоплюючи і точки самої параболи;

в) всі точки площини, які знаходяться поза параболою $y^2=2\left(x-2\right)$, не охоплюючи точок самої параболи;

г) всі точки площини, які знаходяться поза параболою $y^2=2\left(x-2\right)$, охоплюючи також точки самої параболи.

2. Знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ *від функції* $z=\frac{y}{x^2-y^2}$.

а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{\left(x^2-y^2\right)^2}$; в) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$; г) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{\left(x^2-y^2\right)^2}$.

3. Знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$ *від функції* $z=e^{xy}$.

а) $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}=ye^{xy}$; в) $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}$; г) $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y}$.

4. Знайти частинну похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *від функції* $z=\sin\left(x+ay\right)$.

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\sin\left(x+ay\right)$; б) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-a^2\sin\left(x+ay\right)$;

в) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin(x+ay)$; г) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin(x+ay)$.

5. Знайти частинну похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *від функції* $z=\cos y+(y-x)\sin y$.

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=(y-x)\cos y$; б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\cos y-(y-x)\sin y$;

в) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-\cos y$; г) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-\sin y$.

6. Знайти частинну похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *від функції* $z=xe^{\frac{y}{x}}$.

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$; б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$; в) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}$; г) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}}$.

7. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2-xy+z=-5$ *в точці* $M_0(1,-2,1)$.

а) $x-2y+z-7=0$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$;

б) $4x-y+z-7=0$, $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$;

в) $4x-y+z+7=0$, $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$;

г) $x-2y+z+7=0$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

8. Якщо в околі стаціонарної точки (x,y) *функція має неперервні похідні другого порядку і мають місце умови*

$\Delta=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2>0$, $\left[\begin{array}{l} f''_{xx}(x_0,y_0)<0, \\ f''_{yy}(x_0,y_0)<0 \end{array}\right.$, *то*

а) точка (x,y) − точка мінімуму;

б) точка (x,y) − точка максимуму;

в) функція в цій точці немає екстремуму;

г) потрібні додаткові дослідження для визначення характеру точки.

6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

6.1 Елементи лінійної алгебри

6.1.1 Знайти добуток матриць:

1. $\begin{bmatrix} 13 & 16 & 15 \\ 11 & 20 & 17 \\ 12 & 14 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & 17 & 15 \\ 14 & 12 & 17 \\ 16 & 18 & 18 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 12 & 4 & -14 \\ 17 & 18 & 19 \\ 11 & 10 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -20 & 2 \\ 9 & 13 & 12 \\ 15 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 15 & 17 & -19 \\ 4 & -15 & 1 \\ 6 & 14 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 12 & 17 \\ 15 & 10 & 11 \\ 21 & 13 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 6 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ -7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 6 & 3 & 9 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \\ 5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & -7 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -6 & -7 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 7 & 12 & 6 \\ 13 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 & 2 & 6 \\ 17 & 2 & 6 \\ 8 & 14 & 7 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 3 & 18 & 7 \\ 4 & 22 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 17 & 9 \\ 12 & 14 & 8 \\ 6 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 3 & 15 & -7 \\ -1 & 18 & 4 \\ 19 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -18 & 5 \\ 6 & 3 & 11 \\ 17 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 11 & 7 & 4 \\ 3 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 \\ 4 & 7 & 0 \\ -12 & 8 & 11 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -6 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix}-2 & 2 & 5\\ 5 & -4 & 1\\ -2 & 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 6 & 2\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 5 & 7\end{bmatrix}$ 20. $\begin{bmatrix}2 & -6 & 4\\ 7 & -2 & -2\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 4 & 6 & 9\\ 1 & 1 & -6\end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 8 & 6 & 4\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\ 7 & 0 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ 22. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 4 & 6 & 9\\ 1 & 1 & -6\end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 7\\ 4 & -2 & 6\\ 8 & 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 7 & 4\\ 9 & 9 & 1\\ 11 & 2 & 7\end{bmatrix}$ 24. $\begin{bmatrix}5 & 9 & -1\\ 7 & 7 & 8\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7 & 3\\ 0 & 4 & 8\\ 8 & 6 & 1\end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix}2 & 4 & 8\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 8 & 7\\ 4 & 6 & 9\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 5\\ 5 & -4 & 1\\ 2 & 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6 & 0\\ 8 & 4 & 6\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 4 & 7 & 6\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6 & 9\\ -12 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$ 28. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 7 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 0 & 5\\ 12 & -6 & 4\\ 1 & 5 & -8\end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 6 & 0 & 8\\ 1 & 1 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25 & 6 & 8\\ -15 & 2 & 9\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ 30. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 7\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 12 & 13\\ 16 & 10 & -5\\ 2 & 3 & 7\end{bmatrix}$

6.1.2 Знайти обернену матрицю та перевірити, що $A^{-1}A = E$:

1. $\begin{bmatrix}1 & 8 & 1\\ 3 & 6 & 5\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}7 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 8 & 4 & 8\end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix}7 & 1 & 4\\ 8 & 3 & 4\\ 4 & 8 & 2\end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix}3 & 6 & 7\\ 8 & 1 & 5\\ 5 & 1 & 1\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}8 & 1 & 5\\ 2 & 6 & 7\\ 6 & 4 & 9\end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix}1 & 5 & 6\\ 7 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix}8 & 6 & 9\\ 1 & 5 & 7\\ 2 & 6 & 4\end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix}1 & 6 & -5\\ 3 & 1 & -6\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix}5 & 8 & 6\\ 3 & 5 & 4\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix}3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 1\\ 7 & 8 & 4\end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 7 & 1 & 1\\ 8 & 4 & 7\end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix}5 & 5 & 2\\ 3 & 6 & 4\\ 3 & 7 & 3\end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 7 & 6 & 8\\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 8\\ 6 & 5 & 8\\ 4 & 1 & 9\end{bmatrix}$ 15. $\begin{bmatrix}1 & 6 & 5\\ 4 & 3 & 3\\ 1 & 9 & 8\end{bmatrix}$ 16. $\begin{bmatrix}2 & 6 & 1\\ 5 & 4 & 8\\ 7 & 6 & 3\end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ 19. $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ 20. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ 22. $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ 23. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 \\ 7 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ 24. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 9 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 27. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 28. $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ 30. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

6.1.3 Розв'язати систему лінійних рівнянь методами Крамера, Гауса та матричним:

1. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 38, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 = 45, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 34. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 60, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 = 67, \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 35. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 103, \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 57, \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 76. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 56, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 49, \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 43. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 70, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 64, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 94. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 58, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 35, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 74. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 66, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 62, \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 68. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 66, \\ 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 75, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 21. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 74, \\ 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 43, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 51. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 46, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 37. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 32, \\ 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 106, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = 59. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 99, \\ 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 172, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 72. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 53, \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 86, \\ 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 88. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 45, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 43, \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 72. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 49, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 59, \\ 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 80. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1+2x_2+7x_3=58, \\ 4x_1+6x_2+3x_3=49, \\ 2x_1+6x_2+x_3=33. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 4x_1+8x_2+6x_3=88, \\ 2x_1+4x_2+7x_3=76, \\ 3x_1+x_2+6x_3=58. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1+4x_2+8x_3=65, \\ 6x_1+7x_2+4x_3=68, \\ 5x_1+8x_2+9x_3=98. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=28, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=61, \\ 7x_1+8x_2+8x_3=94. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 7x_1+5x_2=65, \\ x_1+6x_2+4x_3=57, \\ 3x_1+4x_2+7x_3=67. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 11x_1+2x_2+8x_3=86, \\ 7x_1+12x_2+6x_3=104, \\ 13x_1+4x_2+9x_3=105. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 15x_1+2x_2+6x_3=67, \\ 17x_1+2x_2+6x_3=69, \\ 8x_1+14x_2+7x_3=92. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 8x_1+4x_2+12x_3=84, \\ 3x_1+18x_2+7x_3=105, \\ 4x_1+22x_2+8x_3=128. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 7x_1+17x_2+9x_3=73, \\ 2x_1+14x_2+8x_3=50, \\ 6x_1+7x_2+11x_3=54. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 18x_1+11x_2+7x_3=161, \\ 12x_1+6x_2+8x_3=130, \\ 4x_1+3x_2+11x_3=113. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 4x_1+16x_2+5x_3=73, \\ 5x_1+6x_2+12x_3=41, \\ x_1+14x_2+x_3=58. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 3x_1+15x_2+7x_3=52, \\ x_1+18x_2+4x_3=37, \\ 19x_1+3x_2+3x_3=72. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1+18x_2+5x_3=137, \\ 6x_1+3x_2+11x_3=120, \\ 17x_1+2x_2+8x_3=99. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 11x_1+7x_2+4x_3=84, \\ 3x_1+12x_2+8x_3=118, \\ 14x_1+6x_2+9x_3=109. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 12x_1+8x_2+6x_3=116, \\ 4x_1+7x_3=48, \\ 12x_1+8x_2+11x_3=136. \end{cases}$

6.1.4 Знайти всі розв’язки системи лінійних рівнянь:

1. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=3, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ -x_1-2x_2+x_3=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=2, \\ 2x_1+4x_2-4x_3=2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2-2x_3=-2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=1, \\ 2x_1-2x_2-x_3=3, \\ x_1-x_2=2. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3=1, \\ x_1-2x_2+3x_3=2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=1, \\ -x_1+2x_2+2x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=1, \\ -x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2-2x_3=-3. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=3, \\ -x_1+x_2-2x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+x_3=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=-3, \\ x_1+2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1-3x_2+x_3=-1. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x_1+x_2-3x_3=4, \\ -2x_1+x_2+x_3=-1, \\ x_1+2x_2-2x_3=3. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1+2x_2-2x_3=1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x_1+x_2-3x_3=5, \\ 2x_1-2x_2+x_3=-2, \\ x_1-x_2-2x_3=3. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ -2x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+3x_2+3x_3=3. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} -4x_1-3x_2=-5, \\ 3x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+2x_2-x_3=3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

6.1.5 За даними таблиці кількісних співвідношень знайти кількість елементів для кожного блоку:

1.

БЛОК	$2X_1$	$4X_2$	$8X_3$	34
БЛОК	$3X_1$	$2X_2$	X_3	10
БЛОК	X_1	X_2	$7X_3$	24

2.

БЛОК	$5X_1$	$9X_2$	X_3	146
БЛОК	$7X_1$	$7X_2$	$8X_3$	159
БЛОК	X_1	$3X_2$	$2X_3$	55

3.

БЛОК	X_1	X_2	$7X_3$	51
БЛОК	$4X_1$	$2X_2$	$6X_3$	64
БЛОК	$8X_1$	$7X_2$	X_3	74

4.

БЛОК	$3X_1$	$2X_2$	$4X_3$	19
БЛОК	$7X_1$	X_2	X_3	24
БЛОК	$2X_1$	$4X_2$	$6X_3$	22

5.

БЛОК	$2X_1$	X_2	$8X_3$	21
БЛОК	$7X_1$	X_2	X_3	17
БЛОК	$4X_1$	$9X_2$	$6X_3$	29

6.

БЛОК	$4X_1$	$5X_2$	X_3	35
БЛОК	$2X_1$	$6X_2$	$6X_3$	32
БЛОК	$7X_1$	$4X_2$	$9X_3$	71

7.

БЛОК	$2X_1$	$7X_2$	$9X_3$	73
БЛОК	$8X_1$	$6X_2$	X_3	55
БЛОК	X_1	$4X_2$	$3X_3$	35

8.

БЛОК	X_1	$4X_2$	$3X_3$	26
БЛОК	$2X_1$	$4X_2$	$4X_3$	36
БЛОК	$4X_1$	X_2	$3X_3$	35

9.

БЛОК	X_1	0	$4X_3$	44
БЛОК	$2X_1$	$9X_2$	$6X_3$	133
БЛОК	$4X_1$	$6X_2$	$9X_3$	155

10.

БЛОК	$2X_1$	$4X_2$	$2X_3$	16
БЛОК	$7X_1$	0	$6X_3$	38
БЛОК	$4X_1$	$7X_2$	$6X_3$	39

11.

БЛОК	$2X_1$	$2X_2$	X_3	24
БЛОК	$3X_1$	$4X_2$	$7X_3$	85
БЛОК	$6X_1$	$7X_2$	$9X_3$	125

12.

БЛОК	X_1	$4X_2$	$7X_3$	87
БЛОК	$7X_1$	$8X_2$	$7X_3$	155
БЛОК	$4X_1$	$5X_2$	X_3	71

13.

БЛОК	$6X_1$	$5X_2$	X_3	55
БЛОК	$2X_1$	X_2	$7X_3$	71
БЛОК	$7X_1$	0	$9X_3$	121

14.

БЛОК	$3X_1$	$8X_2$	$4X_3$	49
БЛОК	X_1	$7X_2$	$8X_3$	74
БЛОК	$4X_1$	X_2	$3X_3$	37

15.

БЛОК	$2X_1$	$2X_2$	$5X_3$	47
БЛОК	$5X_1$	$4X_2$	X_3	33
БЛОК	$2X_1$	X_2	$7X_3$	57

16.

БЛОК	$2X_1$	$6X_2$	$4X_3$	40
БЛОК	$7X_1$	$2X_2$	$2X_3$	30
БЛОК	$3X_1$	$4X_2$	$2X_3$	26

17.

БЛОК	$3X_1$	$7X_2$	$4X_3$	115
БЛОК	$9X_1$	$9X_2$	X_3	160
БЛОК	$11X_1$	$2X_2$	$7X_3$	155

18.

БЛОК	$2X_1$	$6X_2$	$8X_3$	48
БЛОК	X_1	$7X_2$	$9X_3$	48
БЛОК	$2X_1$	$2X_2$	X_3	16

19.

БЛОК	X_1	$2X_2$	X_3	12
БЛОК	$8X_1$	$4X_2$	$6X_3$	68
БЛОК	$5X_1$	$5X_2$	$5X_3$	55

20.

БЛОК	X_1	$8X_2$	$7X_3$	86
БЛОК	$4X_1$	$6X_2$	$9X_3$	100
БЛОК	$2X_1$	X_2	X_3	19

21.

БЛОК	$8X_1$	$6X_2$	X_3	25
БЛОК	0	$4X_2$	$8X_3$	28
БЛОК	$2X_1$	$7X_2$	$3X_3$	20

22.

БЛОК	$8X_1$	$2X_2$	$3X_3$	45
БЛОК	$4X_1$	$8X_2$	$7X_3$	117
БЛОК	X_1	X_2	$2X_3$	23

23.

БЛОК	$5X_1$	$3X_2$	$7X_3$	59
БЛОК	$7X_1$	$2X_2$	$6X_3$	70
БЛОК	X_1	$4X_2$	X_3	25

24.

БЛОК	X_1	$4X_2$	$8X_3$	35
БЛОК	$8X_1$	$4X_2$	X_3	49
БЛОК	X_1	$7X_2$	$6X_3$	51

25.

БЛОК	$5X_1$	$6X_2$	0	49
БЛОК	$8X_1$	$4X_2$	$6X_3$	62
БЛОК	$3X_1$	X_2	X_3	20

26.

БЛОК	$2X_1$	$7X_2$	$9X_3$	127
БЛОК	X_1	$9X_2$	X_3	83
БЛОК	$4X_1$	$7X_2$	$3X_3$	93

27.

БЛОК	$5X_1$	$4X_2$	$6X_3$	42
БЛОК	$2X_1$	0	$9X_3$	22
БЛОК	X_1	$7X_2$	$3X_3$	43

28.

БЛОК	$2X_1$	$7X_2$	$4X_3$	41
БЛОК	$5X_1$	$6X_2$	$8X_3$	79
БЛОК	$3X_1$	$2X_2$	X_3	23

29.

БЛОК	$8X_1$	$4X_2$	$8X_3$	68
БЛОК	$5X_1$	$4X_2$	$7X_3$	56
БЛОК	$6X_1$	$2X_2$	$6X_3$	50

30.

БЛОК	$8X_1$	$6X_2$	$2X_3$	36
БЛОК	$2X_1$	$4X_2$	$6X_3$	30
БЛОК	X_1	$5X_2$	$7X_3$	35

6.2 Векторна алгебра

6.2.1 Перевірити колінеарність векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, які побудовані за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1. $\vec{a}=(1,-2,3)$, $\vec{b}=(3,0,-1)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$.
2. $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(-2,3,5)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$.
3. $\vec{a}=(-2,4,1)$, $\vec{b}=(1,-2,7)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$.
4. $\vec{a}=(1,2,-3)$, $\vec{b}=(2,-1,-1)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$.
5. $\vec{a}=(3,5,4)$, $\vec{b}=(5,9,7)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.
6. $\vec{a}=(1,4,-2)$, $\vec{b}=(1,1,-1)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}$.
7. $\vec{a}=(1,-2,5)$, $\vec{b}=(3,-1,0)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
8. $\vec{a}=(3,4,-1)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
9. $\vec{a}=(-2,-3,-2)$, $\vec{b}=(1,0,5)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-9\vec{b}$, $\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}$.
10. $\vec{a}=(-1,4,2)$, $\vec{b}=(3,-2,6)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$.
11. $\vec{a}=(5,0,-1)$, $\vec{b}=(7,2,3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$.
12. $\vec{a}=(0,3,-2)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-5\vec{b}$.
13. $\vec{a}=(-2,7,-1)$, $\vec{b}=(-3,5,2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.
14. $\vec{a}=(3,7,0)$, $\vec{b}=(1,-3,4)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
15. $\vec{a}=(-1,2,-1)$, $\vec{b}=(2,-7,1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$.
16. $\vec{a}=(7,9,-2)$, $\vec{b}=(5,4,3)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}$.
17. $\vec{a}=(5,0,-2)$, $\vec{b}=(6,4,3)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}$.
18. $\vec{a}=(8,3,-1)$, $\vec{b}=(4,1,3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}$.
19. $\vec{a}=(1,-1,6)$, $\vec{b}=(5,7,10)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
20. $\vec{a}=(1,-2,4)$, $\vec{b}=(7,3,5)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
21. $\vec{a}=(3,7,0)$, $\vec{b}=(4,6,-1)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}$.
22. $\vec{a}=(2,-1,4)$, $\vec{b}=(3,-7,-6)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.
23. $\vec{a}=(5,-1,-2)$, $\vec{b}=(6,0,7)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-6\vec{a}$.

24. $\vec{a}=(-9,5,3)$, $\vec{b}=(7,1,-2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$.

25. $\vec{a}=(4,2,9)$, $\vec{b}=(0,-1,3)$, $\vec{c}_1=4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}-3\vec{b}$.

26. $\vec{a}=(2,-1,6)$, $\vec{b}=(-1,3,8)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}$.

27. $\vec{a}=(5,0,8)$, $\vec{b}=(-3,1,7)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c}_2=12\vec{b}-9\vec{a}$.

28. $\vec{a}=(-1,3,4)$, $\vec{b}=(2,-1,0)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$.

29. $\vec{a}=(4,2,-7)$, $\vec{b}=(5,0,-3)$, $\vec{c}_1=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-2\vec{a}$.

30. $\vec{a}=(2,0,-5)$, $\vec{b}=(1,-3,4)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}-2\vec{b}$.

6.2.2 Перевірити компланарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1. $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(-1,0,-1)$, $\vec{c}=(2,2,2)$.
2. $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(2,3,4)$, $\vec{c}=(3,1,-1)$.
3. $\vec{a}=(1,5,2)$, $\vec{b}=(-1,1,-1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$.
4. $\vec{a}=(1,-1,-3)$, $\vec{b}=(3,2,1)$, $\vec{c}=(2,3,4)$.
5. $\vec{a}=(3,3,1)$, $\vec{b}=(-1,-2,1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$.
6. $\vec{a}=(3,1,-1)$, $\vec{b}=(-2,-1,0)$, $\vec{c}=(5,2,-1)$.
7. $\vec{a}=(4,3,1)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$, $\vec{c}=(2,2,2)$.
8. $\vec{a}=(4,3,1)$, $\vec{b}=(6,7,4)$, $\vec{c}=(2,0,-1)$.
9. $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(1,-3,-7)$, $\vec{c}=(1,2,3)$.
10. $\vec{a}=(1,7,2)$, $\vec{b}=(-2,0,-1)$, $\vec{c}=(2,2,1)$.
11. $\vec{a}=(1,-2,6)$, $\vec{b}=(1,0,1)$, $\vec{c}=(2,-6,17)$.
12. $\vec{a}=(6,3,4)$, $\vec{b}=(-1,-2,-1)$, $\vec{c}=(2,1,2)$.
13. $\vec{a}=(7,3,4)$, $\vec{b}=(-1,-2,-1)$, $\vec{c}=(4,2,4)$.
14. $\vec{a}=(2,3,2)$, $\vec{b}=(4,7,5)$, $\vec{c}=(2,0,1)$.
15. $\vec{a}=(5,3,4)$, $\vec{b}=(-1,0,-1)$, $\vec{c}=(4,2,4)$.
16. $\vec{a}=(3,10,5)$, $\vec{b}=(-2,-2,-2)$, $\vec{c}=(2,4,3)$.
17. $\vec{a}=(-2,-4,-3)$, $\vec{b}=(4,3,1)$, $\vec{c}=(6,7,4)$.
18. $\vec{a}=(3,1,-1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$, $\vec{c}=(8,3,-2)$.
19. $\vec{a}=(4,2,2)$, $\vec{b}=(-3,-3,-3)$, $\vec{c}=(2,1,2)$.
20. $\vec{a}=(4,1,2)$, $\vec{b}=(9,2,5)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$.
21. $\vec{a}=(5,3,4)$, $\vec{b}=(4,3,3)$, $\vec{c}=(9,-7,-4)$.

22. $\vec{a}=(3,4,2)$, $\vec{b}=(1,1,0)$, $\vec{c}=(8,11,6)$.

23. $\vec{a}=(4,-1,-6)$, $\vec{b}=(1,-3,-7)$, $\vec{c}=(2,-1,-4)$.

24. $\vec{a}=(3,1,0)$, $\vec{b}=(-5,-4,-5)$, $\vec{c}=(4,2,4)$.

25. $\vec{a}=(3,0,3)$, $\vec{b}=(8,1,6)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$.

26. $\vec{a}=(1,-1,4)$, $\vec{b}=(1,0,3)$, $\vec{c}=(1,-3,8)$.

27. $\vec{a}=(6,3,4)$, $\vec{b}=(-1,-2,-1)$, $\vec{c}=(2;1;2)$.

28. $\vec{a}=(4,1,1)$, $\vec{b}=(-9,-4,-9)$, $\vec{c}=(6,2,6)$.

29. $\vec{a}=(-3,3,3)$, $\vec{b}=(-4,7,6)$, $\vec{c}=(3,0,-1)$.

30. $\vec{a}=(-7,10,-5)$, $\vec{b}=(0,-2,-1)$, $\vec{c}=(-2,4,-1)$.

6.2.3 За даними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $|\vec{m}|$, $|\vec{n}|$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})$ знайти $пр_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{a}\times\vec{b}|$:

1. $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

2. $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=2$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

3. $\vec{a}=-\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=-\dfrac{\pi}{6}$.

4. $\vec{a}=-2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$, $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=3$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=-\dfrac{\pi}{6}$.

5. $\vec{a}=4\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=-\vec{m}+2\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=2$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

6. $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}$, $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=-\dfrac{\pi}{3}$.

7. $\vec{a}=3\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

8. $\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=-\dfrac{\pi}{6}$.

9. $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=-\dfrac{\pi}{6}$.

10. $\vec{a}=2\vec{m}-3\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\pi}{6}$.

11. $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

12. $\vec{a}=-2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=3\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=-\dfrac{\pi}{3}$.

13. $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

14. $\vec{a} = -4\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = -\frac{\pi}{6}$.

15. $\vec{a} = -5\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

16. $\vec{a} = \vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$.

17. $\vec{a} = -\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

18. $\vec{a} = 2\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = -\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

19. $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

20. $\vec{a} = -\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

21. $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = -\frac{\pi}{3}$.

22. $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -\vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

23. $\vec{a} = -2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$.

24. $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

25. $\vec{a} = -\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = -\frac{\pi}{3}$.

26. $\vec{a} = 3\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

27. $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = -\frac{\pi}{3}$.

28. $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

29. $\vec{a} = -2\vec{m} + 7\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = -\frac{\pi}{6}$.

30. $\vec{a} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

6.2.4 В піраміді з вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 обчислити: об'єм; площу грані $A_1A_2A_3$; довжину висоти, яка опущена з A_4 на $A_1A_2A_3$; кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3.

1. $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$, $A_4(-4,6,-3)$
2. $A_1(-4,2,6)$, $A_2(2,-3,0)$, $A_3(-10,5,8)$, $A_4(-5,2,-4)$.
3. $A_1(7,2,6)$, $A_2(7,-1,-2)$, $A_3(3,3,1)$, $A_4(-4,2,1)$.
4. $A_1(2,1,4)$, $A_2(-1,5,-2)$, $A_3(3,3,1)$, $A_4(-6,-3,6)$.
5. $A_1(-1,-5,2)$, $A_2(-6,0,-3)$, $A_3(3,6,-3)$, $A_4(-10,6,7)$.
6. $A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$.
7. $A_1(5,2,0)$, $A_2(2,5,0)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(-1,1,1)$.
8. $A_1(2,-1,-2)$, $A_2(1,2,1)$, $A_3(5,0,-6)$, $A_4(-10,9,-7)$.
9. $A_1(-2,0,-4)$, $A_2(-1,7,1)$, $A_3(4,-8,-4)$, $A_4(1,-4,6)$.
10. $A_1(14,4,5)$, $A_2(-5,-3,2)$, $A_3(-2,-6,-3)$, $A_4(-2,2,-1)$.
11. $A_1(1,2,0)$, $A_2(3,0,-3)$, $A_3(5,2,6)$, $A_4(8,4,-9)$.
12. $A_1(2,-1,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(-4,2,5)$.
13. $A_1(1,1,2)$, $A_2(-1,1,3)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,0,-2)$.
14. $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(7,5,-3)$.
15. $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(5,9,-8)$.
16. $A_1(1,5,-7)$, $A_2(-3,6,3)$, $A_3(-2,7,3)$, $A_4(-4,8,-12)$.
17. $A_1(-3,4,-7)$, $A_2(1,5,4)$, $A_3(-5,-2,0)$, $A_4(2,5,4)$.
18. $A_1(-1,2,-3)$, $A_2(4,-1,0)$, $A_3(2,1,-2)$, $A_4(3,4,5)$.
19. $A_1(4,-1,3)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(0,5,1)$, $A_4(3,2,-6)$.
20. $A_1(1,-1,1)$, $A_2(-2,0,3)$, $A_3(2,1,-1)$, $A_4(2,-2,-4)$.
21. $A_1(1,2,0)$, $A_2(1,-1,2)$, $A_3(0,1,-1)$, $A_4(-3,0,1)$.
22. $A_1(1,0,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(2,-2,1)$, $A_4(2,1,0)$.
23. $A_1(1,2,-3)$, $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$.
24. $A_1(3,10,-1)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(-6,0,-3)$, $A_4(1,-1,2)$.
25. $A_1(-1,2,4)$, $A_2(-1,-2,-4)$, $A_3(3,0,-1)$, $A_4(7,-3,1)$.
26. $A_1(0,-3,1)$, $A_2(-4,1,2)$, $A_3(2,-1,5)$, $A_4(3,1,-4)$.
27. $A_1(1,3,0)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(3,0,1)$, $A_4(-4,3,5)$.
28. $A_1(-2,-1,-1)$, $A_2(0,3,2)$, $A_3(3,1,-4)$, $A_4(-4,7,3)$.
29. $A_1(-3,-5,6)$, $A_2(2,1,-4)$, $A_3(0,-3,-1)$, $A_4(-5,2,-8)$.
30. $A_1(2,-4,-3)$, $A_2(5,-6,0)$, $A_3(-1,3,-3)$, $A_4(-10,-8,7)$.

6.3 Елементи аналітичної геометрії

6.3.1 Знайти кут між прямими:

1. $y=-x-1, \quad y=3-9x.$
2. $y=4-2x, \quad y=3x-6.$
3. $y=x+7, \quad y=1-5x.$
4. $y=1-3x, \quad y=-6x+7.$
5. $y=1-9x, \quad y=4-3x.$
6. $y=3x+2, \quad y=5-x.$
7. $y=3-9x, \quad y=1-2x.$
8. $y=8-x, \quad y=3-5x.$
9. $y=1-4x, \quad y=8x+2.$
10. $y=x+8, \quad y=4x-1.$
11. $y=4-3x, \quad y=2x-1.$
12. $y=9-x, \quad y=2-3x.$
13. $y=4x+3, \quad y=x-2.$
14. $y=3-6x, \quad y=1-2x.$
15. $y=-4x-3, \quad y=x+1.$
16. $y=6x+1, \quad y=5-x.$
17. $y=x+1, \quad y=2x+5.$
18. $y=2x-5, \quad y=x+3.$
19. $y=3-2x, \quad y=5-4x.$
20. $y=2x+5, \quad y=4-3x.$
21. $y=5x+4, \quad y=-4x-1.$
22. $y=3-2x, \quad y=x+5.$
23. $y=1-6x, \quad y=2x-3.$
24. $y=8-x, \quad y=2x-5.$
25. $y=-6x-7, \quad y=x-2.$
26. $y=x+8, \quad y=2-4x.$
27. $y=x+2, \quad y=2x-4.$
28. $y=6-3x, \quad y=8x-2.$
29. $y=2x+4, \quad y=1-5x.$
30. $y=-3x-6, \quad y=2-x.$

6.3.2 Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до прямої:

1. $M_0(1,1,2),\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}.$
2. $M_0(-1,2,2),\ \frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}.$
3. $M_0(1,-1,2),\ \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$
4. $M_0(1,1,-2),\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}.$
5. $M_0(1,-1,2),\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}.$
6. $M_0(-1,-1,2),\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}.$
7. $M_0(-1,-1,2),\ \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$
8. $M_0(-1,1,2),\ \frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}.$
9. $M_0(2,1,1),\ \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}.$
10. $M_0(1,5,0),\ \frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{7}.$
11. $M_0(2,1,-1),\ \frac{x}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{2}.$
12. $M_0(2,-1,1),\ \frac{x}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-2}.$
13. $M_0(1,2,3),\ \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}.$
14. $M_0(-1,2,3),\ \frac{x}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}.$
15. $M_0(1,-2,3),\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}.$
16. $M_0(1,2,-3),\ \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}.$
17. $M_0(1,-2,-3),\ \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{2}.$
18. $M_0(1,-3,2),\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{1}.$

19. $M_0(1,-3,-2),\ \frac{x}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{-1}.$ 20. $M_0(0,1,2),\ \frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}.$

21. $M_0(1,0,2),\ \frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$ 22. $M_0(2,0,1),\ \frac{x}{-3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-2}.$

23. $M_0(2,4,-3),\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}.$ 24. $M_0(2,-1,1),\ \frac{x}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-2}.$

25. $M_0(2,-1,-1),\ \frac{x}{-1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3}.$ 26. $M_0(1,3,2),\ \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}.$

27. $M_0(2,1,3),\ \frac{x}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{-3}.$ 28. $M_0(3,-2,1),\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{-2}.$

29. $M_0(-3,1,2),\ \frac{x+2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{2}.$ 30. $M_0(2,-1,3),\ \frac{x-5}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{-1}.$

6.3.3 Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3:

1. $M_1(-3,4,-7),\quad M_2(1,5,-4),\quad M_3(-5,-2,0),\quad M_0(-12,-7,-1).$
2. $M_1(-1,2,-3),\quad M_2(4,-1,0),\quad M_3(2,1,-2),\quad M_0(1,-6,-5).$
3. $M_1(-3,-1,1),\quad M_2(9,1,-2),\quad M_3(3,-5,4),\quad M_0(-7,0,-1).$
4. $M_1(1,-1,1),\quad M_2(-2,0,3),\quad M_3(2,1,-1),\quad M_0(-2,4,2).$
5. $M_1(1,2,0),\quad M_2(1,-2,2),\quad M_3(0,1,-1),\quad M_0(2,1,-4).$
6. $M_1(1,0,2),\quad M_2(1,2,-1),\quad M_3(2,-2,1),\quad M_0(-5,-9,1).$
7. $M_1(1,-2,3),\quad M_2(1,0,1),\quad M_3(-2,-1,6),\quad M_0(3,-2,9).$
8. $M_1(3,10,-1),\quad M_2(-2,3,5),\quad M_3(-6,0,-3),\quad M_0(-6,7,-10).$
9. $M_1(-1,2,4),\quad M_2(-1,-2,-4),\quad M_3(3,0,-1),\quad M_0(-2,3,5).$
10. $M_1(0,-3,1),\quad M_2(1,-2,3),\quad M_3(2,-1,6),\quad M_0(-3,4,-5).$
11. $M_1(1,3,0),\quad M_2(4,-1,2),\quad M_3(3,0,1),\quad M_0(4,3,0).$
12. $M_1(-2,-1,-1),\quad M_2(0,3,2),\quad M_3(3,1,-4),\quad M_0(-21,20,-16).$
13. $M_1(-3,-5,5),\quad M_2(2,1,-4),\quad M_3(3,1,-4),\quad M_0(3,6,8).$
14. $M_1(2,-4,-3),\quad M_2(5,-6,0),\quad M_3(-1,3,-3),\quad M_0(-2,-10,8).$
15. $M_1(1,-1,2),\quad M_2(2,1,2),\quad M_3(1,1,4),\quad M_0(-3,2,7).$
16. $M_1(1,3,6),\quad M_2(2,2,1),\quad M_3(-1,0,1),\quad M_0(5,-4,5).$
17. $M_1(-4,2,6),\quad M_2(2,-3,0),\quad M_3(-10,5,8),\quad M_0(12,1,8).$
18. $M_1(7,2,4),\quad M_2(7,-1,-2),\quad M_3(-5,-2,-1),\quad M_0(10,1,8).$
19. $M_1(2,1,4),\quad M_2(3,5,-2),\quad M_3(-7,-3,2),\quad M_0(-3,1,8).$
20. $M_1(-1,-5,2),\quad M_2(-6,0,-3),\quad M_3(3,6,-3),\quad M_0(10,-8,-7).$
21. $M_1(0,-1,-1),\quad M_2(-2,3,5),\quad M_3(1,-5,-9),\quad M_0(-4,-13,6).$
22. $M_1(5,2,0),\quad M_2(2,5,0),\quad M_3(1,2,4),\quad M_0(-3,-6,-8).$

23. $M_1(2,-1,-2)$, $M_2(1,2,1)$, $M_3(5,0,-6)$, $M_0(14,-3,7)$.
24. $M_1(-2,0,-4)$, $M_2(-1,7,1)$, $M_3(4,-8,-4)$, $M_0(-6,5,5)$.
25. $M_1(14,4,5)$, $M_2(-5,-3,2)$, $M_3(-2,-6,-3)$, $M_0(-1,-8,7)$.
26. $M_1(1,2,0)$, $M_2(3,0,-3)$, $M_3(5,2,6)$, $M_0(-13,-8,16)$.
27. $M_1(2,-1,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-5,3,7)$.
28. $M_1(1,1,2)$, $M_2(-1,1,3)$, $M_3(2,-2,4)$, $M_0(2,3,8)$.
29. $M_1(2,3,1)$, $M_2(4,1,-2)$, $M_3(6,3,7)$, $M_0(-5,-4,8)$.
30. $M_1(1,1,-1)$, $M_2(2,3,1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-3,-7,6)$.

6.3.4 Знайти рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{BC}$:

1. $A(1,0,-2)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,-3,2)$.
2. $A(-1,3,4)$, $B(-1,5,0)$, $C(2,6,1)$.
3. $A(4,-2,0)$, $B(1,-1,5)$, $C(-2,-1,3)$.
4. $A(-8,0,7)$, $B(-3,2,4)$, $C(-1,4,5)$.
5. $A(7,-5,1)$, $B(5,-1,3)$, $C(3,0,-4)$.
6. $A(-3,5,-2)$, $B(-4,0,3)$, $C(-3,2,5)$.
7. $A(1,-1,8)$, $B(-4,-3,10)$, $C(-1,-1,7)$.
8. $A(-2,0,-5)$, $B(2,7,-3)$, $C(1,10,-1)$.
9. $A(1,9,-4)$, $B(5,7,1)$, $C(3,5,0)$.
10. $A(-7,0,3)$, $B(1,-5,-4)$, $C(2,-3,0)$.
11. $A(0,-3,5)$, $B(-7,2,6)$, $C(-3,2,4)$.
12. $A(5,-1,2)$, $B(2,-4,3)$, $C(4,-1,3)$.
13. $A(-3,7,2)$, $B(3,5,1)$, $C(4,5,3)$.
14. $A(0,-2,8)$, $B(4,3,2)$, $C(1,4,3)$.
15. $A(1,-1,5)$, $B(0,7,8)$, $C(-1,3,8)$.
16. $A(-10,0,9)$, $B(12,4,11)$, $C(8,5,15)$.
17. $A(3,-3,-6)$, $B(1,9,-5)$, $C(6,6,-4)$.
18. $A(2,1,7)$, $B(9,0,2)$, $C(9,2,3)$.
19. $A(-7,1,-4)$, $B(8,11,-3)$, $C(9,9,-1)$.
20. $A(1,0,-6)$, $B(-7,2,1)$, $C(-9,6,1)$.
21. $A(-3,1,0)$, $B(6,3,3)$, $C(9,4,-2)$.

22. $A(-4,-2,5),\quad B(3,-3,7),\quad C(9,3,-7).$
23. $A(0,-8,10),\quad B(-5,5,7),\quad C(-8,0,4).$
24. $A(1,-5,2),\quad B(6,-2,1),\quad C(2,-2,-2).$
25. $A(0,7,-9),\quad B(-1,8,-11),\quad C(-4,3,-12).$
26. $A(-3,-1,7),\quad B(0,2,-6),\quad C(2,3,-5).$
27. $A(5,3,-1),\quad B(0,0,-3),\quad C(5,-1,0).$
28. $A(-1,2,-2),\quad B(13,14,1),\quad C(14,15,2).$
29. $A(7,-5,0),\quad B(8,3,-1),\quad C(8,5,1).$
30. $A(-3,6,4),\quad B(8,-3,5),\quad C(10,-3,7).$

6.4 Елементи математичного аналізу

6.4.1 Побудувати графіки функції шляхом елементарних перетворень:

1. $y=3-e^{x+1}$; $\quad y=\dfrac{x}{x+1}$; $\quad y=\dfrac{1}{2}\sin(3x+1)$.
2. $y=-e^{2-x}$; $\quad y=\dfrac{x-1}{x+1}$; $\quad y=2\sin(2x+1)$.
3. $y=1-e^{2-x}$; $\quad y=\dfrac{x+3}{x-1}$; $\quad y=1+\sin(3x-2)$.
4. $y=1-e^{x-1}$; $\quad y=\dfrac{x-2}{x+2}$; $\quad y=-3\sin(x-2)$.
5. $y=-2+e^{x+3}$; $\quad y=\dfrac{x-3}{x+1}$; $\quad y=2-3\sin(2x+1)$.
6. $y=3-e^{2-x}$; $\quad y=\dfrac{x}{x+4}$; $\quad y=5\sin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$.
7. $y=2e^{x+2}$; $\quad y=\dfrac{x}{2x+1}$; $\quad y=\dfrac{3}{2}\cos(2x-1)$.
8. $y=-1-e^{2x+1}$; $\quad y=\dfrac{-x}{x+3}$; $\quad y=2\cos\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$.
9. $y=e^{\frac{x}{2}+1}$; $\quad y=\dfrac{1-x}{x-2}$; $\quad y=2\cos\left(\dfrac{x}{2}-2\right)$.
10. $y=-3+e^{\frac{x}{2}+1}$; $\quad y=\dfrac{2x}{x+2}$; $\quad y=-3\cos(2x+1)$.
11. $y=-3+e^{\frac{x}{2}+1}$; $\quad y=\dfrac{2x}{x+2}$; $\quad y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$.

12. $y=1-e^{\frac{x}{2}+2}$; $y=\dfrac{2-x}{3x-1}$; $y=\sin(2x-3)$.

13. $y=2-e^{1-x}$; $y=\dfrac{x}{3x-1}$; $y=5\sin\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$.

14. $y=1+e^{1-2x}$; $y=\dfrac{-3x}{2x+4}$; $y=3\sin\left(\dfrac{x}{3}-3\right)$.

15. $y=3-e^{x+4}$; $y=\dfrac{3+x}{4-x}$; $y=\cos\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$.

16. $y=4+e^{1-2x}$; $y=\dfrac{x}{3x-2}$; $y=\sin\left(\dfrac{2x}{3}+1\right)$.

17. $y=2e^{1-3x}$; $y=\dfrac{-3x}{2x+1}$; $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

18. $y=-2+e^{4-x}$; $y=\dfrac{2x+1}{3x-4}$; $y=2\cos(3x+2)$.

19. $y=-1+e^{2+2x}$; $y=\dfrac{x-2}{3x+1}$; $y=-3\sin(2x-1)$.

20. $y=-3e^{\frac{x}{2}-1}$; $y=\dfrac{3x}{2x+4}$; $y=2\cos(2x+3)$.

21. $y=1-2e^{4-2x}$; $y=\dfrac{2-3x}{2x+3}$; $y=-4\cos\left(\dfrac{x}{3}+4\right)$.

22. $y=2-e^{-\frac{x}{2}}$; $y=\dfrac{2x}{2x-5}$; $y=-3\cos\left(\dfrac{x}{2}-2\right)$.

23. $y=2+3e^{4-2x}$; $y=\dfrac{x+1}{4x-2}$; $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$.

24. $y=1+2^{2-x}$; $y=\dfrac{2-x}{2x+3}$; $y=5\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\right)$.

25. $y=-2+3^{x-1}$; $y=\dfrac{2x}{x+5}$; $y=-3\sin\left(\dfrac{x}{3}-1\right)$.

26. $y=-3+e^{4-3x}$; $y=\dfrac{x-4}{2x+5}$; $y=-5\sin\left(\dfrac{x}{3}-2\right)$.

27. $y=-4+e^{2x-1}$; $y=\dfrac{3x}{5x-1}$; $y=5\sin(3x+2)$.

28. $y=2-e^{4-3x}$; $y=\dfrac{2x}{x+2}$; $y=\dfrac{1}{3}\cos(3x+2)$.

29. $y=-e^{3-x}$; $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$; $y=3\sin(2x+1)$.

30. $y=1-e^{2+x}$; $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$; $y=1+\cos(3x+1)$.

6.4.2 Знайти границі нижченаведених функцій:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{3x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+3x-4}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x}$;

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln x-\ln(x-1)\right]$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x-\sin2x}{3x}$;

$\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{x}{3x+3}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin5x}-1}{\ln(1+2x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-4x)}{9^x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+8}+x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln x-\ln(x+1)\right]$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2+2x-4}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x-\sin4x}{3x}$; $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{x}{2x+2}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin6x}-1}{\ln(1+3x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^x-1}{4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{\sqrt{4x^4+5x^3}}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$; $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2x^2}$;

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x-2)-\ln x\right]$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{2x}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{2x^2+x+4}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{2x^2}$;

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{3x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left[\ln(2x+1)-\ln x\right]$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{3x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{32x^5-x^8}}{e^{5x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x}\right)^{2x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{3x}{x-2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{9x^2-x+3}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x-1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{arctg}3x}{\ln(1-2x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln x-\ln(2x-1)\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{6x^2}$; $\lim\limits_{x\to -1}(x+2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x+5}{3x^4-7x+1}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^2-x+2}-\sqrt{5x^2+2x-1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{5x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 5x}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{3x}$; $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{x-2}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{x+5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+3x-4}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^3-x}$;

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\ln(x-1)-\ln(x+2)\right]$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{2x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{3x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{x-2}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{4x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+3}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x+\cos 2x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{2-x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-1}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+3x)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$; $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{3x-2}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{4x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+5}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+2}-\sqrt{4x^2+2x+5}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{2x+5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{e^{2x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-1}{4x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{2x-1}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left[\ln(x+2)-\ln(x-1)\right]$; $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3x-4}{x-1}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16x^4-x^8}}{e^{8x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$; $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+5x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{2x-4}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$; $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{x-3}{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3+2x}}{4x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+4x-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2-3x-1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{e^{\sin x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x}$; $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5x-3}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2^x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-1}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{4-x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x+x^2-4}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+5)-\ln x\right]$;

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{8x}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-3x+1}{\sqrt{4x^6+2x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3+1}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{5-x}-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4-x^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3\sin^2\frac{x}{2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-3}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{2x+\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^3+x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10-x}-3}{2x-2}$;

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\left[\ln x-\ln(4x+3)\right]$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt[3]{x}}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\sin^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{4x}-1}{3x}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sqrt{x+4}-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\ln(2x-1)-\ln x\right]$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{3x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\mathrm{tg}3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{5x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+14}}{3x+5}$; $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-10x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(3x+2)-\ln x\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{1-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2}{\sin^2\frac{x}{4}}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+5)^2 x}{5x^3+2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(3x+4)-\ln(x-1)\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\arcsin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{4-x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9^x-1}{3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{x+1}$.

18. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{3x}}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3-8}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 6x}-1}{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2+8}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left[\ln(4x-1)-\ln x\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\mathrm{tg}x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+2}}{4x+1}$; $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+x-12}{x^2+4x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(5x-1)\left[\ln x-\ln(x-2)\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[6]{x}-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{2^x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\mathrm{tg}2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1-3x}{4x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+3x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{3x}$, $a>0$, $a\neq1$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{2x^2+x^3}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)\left[\ln x-\ln(2x-3)\right]$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{3\sin^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-5x)}{6x}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+2}{\sqrt{4x^8+2x^2+4}}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3-16x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{3\operatorname{tg}^2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(5x-3)-\ln x\right]$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x}\right)^{2x+1}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{e^{x-1}-1}$; $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{2}{x-3}}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x}{2x^2-9x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-x}{2x^2+3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln x-\ln(6x-1)\right]$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3^x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{2-x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-5}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{1-\cos x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{e^{x^2}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{3}{x+1}}$.

23. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+1}{\sqrt{x^4-x+2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x-1)-\ln(3x+2)\right]$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3x+1)}{\operatorname{tg}4x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^2-5}\right)$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-1}{2x-2}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin2x}{\sin3x}+\sin7x\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{x-1}$; $\lim\limits_{x\to-2}(3+x)^{\frac{5}{x+2}}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos7x}{3\sin^2 2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^4 4x}{e^x-1}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-3}(4+x)^{\frac{6}{x+3}}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+x-3}}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-1}$;

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^3-8}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{\sin^3 3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(7x+3)-\ln x\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{8^x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{x+3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{x(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3x+6}{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2x}{3x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{e^x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{arctg}x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2-8}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{2x^2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln x-\ln(8x+2)\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-x}{2x^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^2+x-1}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+6}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$;

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x-4)-\ln(x+3)\right]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\operatorname{arctg}x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{2x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+3x-1}}{\sqrt{20x^2+3}}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{8^x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2x+1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{3\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{e^{6x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln x-\ln(5x+6)\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$.

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x+2}-\dfrac{2x^2-1}{x-2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(3x+5)-\ln x\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 9x}{2\sin^2 x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{\operatorname{arctg}5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2x+1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x}\right)^{5-2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4x)}{9^x-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^3+x+3}$; $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)\left[\ln x-\ln(x-1)\right]$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{4x}-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-9}\right)$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin 8x}{\operatorname{tg}5x}$; $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{x+3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+8x)}{3^x-1}$.

6.4.3 Дослідити функцію на неперервність. У випадку розриву визначити характер точки розриву та схематично побудувати графік функції.

1. $y=\dfrac{-6}{(x+3)^2}$; $y=e^{\frac{1}{x+2}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x-2}$; $y=\begin{cases}x+4,\ x<-1\\ x^2+2,\ -1\le x\le1\\ 2x,\ x>1.\end{cases}$

2. $y=\dfrac{3}{(x+1)^2}$; $y=2^{\frac{1}{3-x}}$; $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$; $y=\begin{cases}-x,\ x\le0\\ -(x-1)^2,\ 0<x\le2\\ x-3,\ x>2.\end{cases}$

3. $y=\dfrac{5}{(x-2)^2}$; $y=3^{\frac{1}{x+1}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x}$; $y=\begin{cases}x+2,\ x\le-1\\ x^2+1,\ -1<x\le1\\ 3-x,\ x>1.\end{cases}$

4. $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}$; $y=e^{\frac{1}{x-2}}$; $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; $y=\begin{cases}\cos x,\ x\le0\\ x^2+1,\ 0<x\le1\\ x,\ x>1.\end{cases}$

5. $y=\dfrac{-1}{(x+2)^2}$; $y=4^{\frac{1}{x-1}}$; $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; $y=\begin{cases}-x,\ x\le0\\ x^2,\ 0<x\le2\\ x+1,\ x>2.\end{cases}$

6. $y=\dfrac{3}{(x-3)^2}$; $y=5^{\frac{1}{x-3}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x-1}$; $y=\begin{cases}-x,\ x\le0\\ \sin x,\ 0<x\le\pi\\ x-2,\ x>\pi.\end{cases}$

7. $y=\dfrac{4}{(x+1)^2}$; $y=2^{\frac{1}{x+2}}$; $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+2}$; $y=\begin{cases}-(x+1),\ x\le-1\\ (x+1)^2,-1<x\le0\\ x,\ x>0.\end{cases}$

8. $y=\dfrac{-3}{(x+5)^2}$; $y=3^{\frac{1}{2x-1}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{x+1}$; $y=\begin{cases}-x^2, x\le 0\\ \operatorname{tg}x, 0<x\le \pi/4\\ 2, x>\pi/4.\end{cases}$

9. $y=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$; $y=e^{\frac{1}{6-x}}$; $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$; $y=\begin{cases}-2x, x\le 0\\ \sqrt{x}, 0<x\le 4\\ 1, x>4.\end{cases}$

10. $y=\dfrac{-5}{(x+3)^2}$; $y=6^{\frac{1}{3-x}}$; $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$; $y=\begin{cases}-2x, x\le 0\\ x^2, 0<x\le 4\\ 2, x>4.\end{cases}$

11. $y=\dfrac{1}{(x-5)^2}$; $y=2^{\frac{1}{2-x}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x-2}$; $y=\begin{cases}\sin x, x\le 0\\ \dfrac{1}{2}x,\ 0<x\le 2\\ 3, x>2.\end{cases}$

12. $y=\dfrac{2}{(x-4)^2}$; $y=5^{\frac{1}{1-x}}$; $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$; $y=\begin{cases}x^2,\ x\le 1\\ 2x,\ 1<x\le 2\\ 1, x>2.\end{cases}$

13. $y=\dfrac{4}{(x+2)^2}$; $y=4^{\frac{1}{4-x}}$; $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; $y=\begin{cases}x^2+1, x\le 1\\ 2x,\ 1<x\le 3\\ x+2, x>3.\end{cases}$

14. $y=\dfrac{-1}{(x-4)^2}$; $y=3^{\frac{1}{2-x}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{x+2}$; $y=\begin{cases}-x, x\le -1\\ -2x^2+3, -1<x\le 1\\ x-1, x>1.\end{cases}$

15. $y=\dfrac{3}{(x+4)^2}$; $y=e^{\frac{1}{3-x}}$; $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$; $y=\begin{cases}x-3, x\le 0\\ x+1, 0<x\le 4\\ 3+\sqrt{x}, x>4.\end{cases}$

16. $y=\dfrac{6}{(x+1)^2}$; $y=2^{\frac{1}{x-3}}$; $y=\dfrac{x^3+8}{x+2}$; $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\le 0\\ 0, 0<x\le 2\\ x-2, x>2.\end{cases}$

17. $y=\dfrac{5}{(x-1)^2}$; $y=7^{\frac{1}{x-2}}$; $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$; $y=\begin{cases}2x^2, x\le 0\\ x, 0<x\le 1\\ 2, x>1.\end{cases}$

18. $y=\dfrac{2}{(x-6)^2}$; $y=9^{\frac{1}{1-x}}$; $y=\dfrac{x^3+1}{x+4}$; $y=\begin{cases}\sin x, x\le 0\\ x, 0<x\le 2\\ 0, x>2.\end{cases}$

19. $y=\dfrac{6}{(x-3)^2}$; $y=e^{\frac{1}{8-x}}$; $y=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$; $y=\begin{cases}x-1, x\le 0\\ x^2, 0<x\le 2\\ 2x, x>2.\end{cases}$

20. $y=\dfrac{7}{(x+1)^2}$; $y=4^{\frac{1}{x+2}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x+2}$; $y=\begin{cases}\cos x, x\le \pi/2\\ 0, \pi/2<x\le \pi\\ x, x>\pi.\end{cases}$

21. $y=\dfrac{4}{(x+5)^2}$; $y=7^{\frac{1}{x+1}}$; $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$; $y=\begin{cases}0, x\le 0\\ \operatorname{tg} x, 0<x\le \pi/2\\ x, x>\pi/2.\end{cases}$

22. $y=\dfrac{3}{(x+6)^2}$; $y=10^{\frac{1}{x+2}}$; $y=\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$; $y=\begin{cases}3x+1, x<0\\ x^2+1, 0\le x<1\\ 0, x\ge 1.\end{cases}$

23. $y=\dfrac{-7}{(x-2)^2}$; $y=9^{\frac{1}{x-3}}$; $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{1-x}$; $y=\begin{cases}-x, x\le 0\\ x^2, 0<x\le 2\\ x+1, x>2.\end{cases}$

24. $y=\dfrac{6}{(x-4)^2}$; $y=3^{\frac{1}{1-x}}$; $y=\dfrac{x^3-x}{x-1}$; $y=\begin{cases}2, x\le -\pi/4\\ \operatorname{tg} x, -\pi/4<x<0\\ 3x,\ x\ge 0.\end{cases}$

25. $y=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$; $y=6^{\frac{1}{x+2}}$; $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; $y=\begin{cases}0, x<-2\\ \sqrt{x+2}, -2\le x<2\\ x+1, x\ge 2.\end{cases}$

26. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$; $y=2^{\frac{1}{3-x}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x+3}$; $y=\begin{cases}-0{,}5x,\ x<0\\ x^2+1, 0\le x<1\\ 2, x\ge 1.\end{cases}$

27. $y=\dfrac{2}{(x-7)^2}$; $y=5^{\frac{1}{4-x}}$; $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$; $y=\begin{cases} x-2, x<-1 \\ -x^2, -1\le x<1 \\ x,\ x\ge 1. \end{cases}$

28. $y=\dfrac{-3}{(x+6)^2}$; $y=4^{\frac{1}{x+3}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^3-4x}{x-2}$; $y=\begin{cases} x-1,\ x\le 0 \\ -\cos x, 0<x\le\pi \\ 3,\ x>\pi. \end{cases}$

29. $y=\dfrac{-5}{(x+7)^2}$; $y=3^{\frac{1}{8-x}}$; $y=\dfrac{x^2-5x-6}{x+1}$; $y=\begin{cases} -0{,}5x,\ x\le 0 \\ \sin x, 0<x\le 3\pi/2 \\ 2,\ x>3\pi/2. \end{cases}$

30. $y=\dfrac{4}{(x-1)^2}$; $y=6^{\frac{1}{4+x}}$; $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x-3}$; $y=\begin{cases} 2,\ x\le -1 \\ 3-x^2,\ -1<x\le 1 \\ x,\ x>1. \end{cases}$

6.4.4 Знайти похідну y' наступних функцій:

1. $y=8x^5 4^{-2x^2}$; $y=\dfrac{\operatorname{arctg}(3-2x)}{3-4x^4}$; $y=\dfrac{4-3x}{\sqrt[5]{x-1}}$; $y=\ln\left(5x-e^{-x^2}\right)$;

$y=2^{\ln 7x}(1-6x)$; $y=\operatorname{arctg}\ln\left(e^{5x}+4\right)$; $y=\cos^5(3-2x)$;

$y=\arcsin\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$; $y=(\sin 5x)^{\sqrt{x}}$; $(y+1)\ln 3-x\ln y=0$.

2. $y=5x^3 4^{1-x^8}$; $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\left(3x-4x^3\right)}{\sqrt{x}-7}$; $y=\dfrac{4-3x^2}{\sqrt{5x^3-4}}$; $y=\ln\left(x+3^{5-3\sqrt{x}}\right)$;

$y=\arccos\ln\left(4+e^{\sqrt{3-x^2}}\right)$; $y=2^{\ln(4+3x)}x^5$; $y=(3\operatorname{tg}x)^{2+\sqrt{x}}$;

$y=\arcsin^4\left(3-\dfrac{4}{x^2}\right)$; $y=\sin^7(5-3x)$; $\cos\left(x^2-5y\right)+\dfrac{x+3}{y}=4$.

3. $y=\sqrt[3]{x^2}e^{5-2x^3}$; $y=\dfrac{2x+4x^3}{\sqrt{x^2-7x}}$; $y=\dfrac{\sin\left(5x+4x^2\right)}{3-x^3}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{5+x^2}+1\right)$;

$y=2^{\arcsin(\sqrt{x}+2)}x^4$; $y=\sin^4\left(e^{3x^2}-x^2\right)$; $y=\operatorname{tg}^7(5-2x)$;

$y=(\arccos 3x)^{1+\sqrt[3]{x}}$; $y=\operatorname{arctg}\ln\left(e^{\sqrt[3]{3x^2+x}}-1\right)$; $\ln\left(x^3-7y\right)+\dfrac{y}{2x}=1$.

4. $y=\dfrac{5-x}{\cos\left(2-3x^3\right)}$; $y=\left(1-2x^2\right)3^{2x}+1$; $y=\dfrac{2+5x^4}{\sqrt{3-2x}}$; $y=(2x-4)e^{\sin 5x}$;

$y=\arccos^4\left(2-x^2\right)$; $y=\ln\left(5x+\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y=\operatorname{arctg}^4\left(e^{7x}+2\right)$;

$y=\operatorname{tg}\ln\left(e^{-\sqrt{x}}+1\right)$; $y=\left(3+x^2\right)^{\sqrt{x}}$; $\cos\left(x^3+y\right)+\dfrac{y}{2x}=4.$

5. $y=(2+3x)e^{3x-x^2}+\sqrt{7}$; $y=\dfrac{\arcsin\left(3+\sqrt{3x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$; $y=\ln\dfrac{1}{3x+\sqrt[3]{1+x}}$;

$y=\operatorname{arctg}^7 5x$; $y=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^5-2x^3}$; $y=\left(2-x^3\right)3^{\sin(2+x)}$; $y=\cos\ln\left(\sqrt[3]{2x}-\dfrac{5}{x}\right)$;

$y=\sin^3\left(e^{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x}\right)$; $y=(\cos 2x)^{1+\sqrt{x}}$; $\ln\left(x^3+2y^2\right)+5x=1.$

6. $y=\left(1+x^2\right)2^{1-\sqrt{x}}$; $y=\dfrac{3-7x}{1+2\sin x}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3+2x}$; $y=\operatorname{arctg}^5(2+x)$;

$y=\ln\left(\sqrt[3]{2+4x}-x\right)$; $y=2x^4e^{\cos 5x}$; $y=\sin\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{x}-1\right)$;

$y=\left(2-4x^2\right)^{\cos 2x}$; $x^3\arccos 5x-y^4=3.$

7. $y=(5-2x)3^{x^2}-2$; $y=\dfrac{\sin\left(x-7x^2\right)}{4+2x}$; $y=\dfrac{2x-x^2}{\sqrt[3]{x}-x}$; $y=\ln\sin\left(3-5^{\sqrt[5]{x}}\right)$;

$y=\sin^4\left(e^{1-x}+3\right)$; $y=\ln\left(4x-\sqrt[3]{x^2-x}\right)$; $y=\operatorname{arctg}^6(3-x)$;

$y=x^3\left(3-7^x\right)$; $y=(\operatorname{tg}8x)^{3+x^2}$; $\dfrac{3x}{y^2}-5\operatorname{arctg}(xy)=0.$

8. $y=7xe^{x^3+5}$; $y=\dfrac{\operatorname{arctg}(5+3x)}{x^2-3}$; $y=\dfrac{4-3x^3}{\sqrt{8x^2+x}}$; $y=\operatorname{arctg}^4 5x$;

$y=\sin^9\left(4-e^{-\sqrt{x}}\right)$; $y=\arccos\ln\left(4+3\sqrt{x}\right)$; $y=(1-x)^4e^{\cos\sqrt{5x}}$;

$y=\cos^3\left(3-x^2\right)$; $y=(5x-\cos 2x)^{x^2}$; $\sin(x-5y)+x^3(1-y)=0.$

9. $y=\left(3+x^3\right)e^{5x}+\ln 3$; $y=\dfrac{\operatorname{tg}(7-3x)}{4-2x^2}$; $y=\ln^4\left(4-e^{2-x}\right)$;

$y=\sin^9\left(2-3x^2\right)$; $y=\dfrac{\cos\sqrt{3x-5}}{\sqrt[3]{7x}+3x}$; $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt[6]{7-x^2+3x}}$; $y=x^3 7^{\arcsin(5-x)}$;

$y=\ln\cos\left(5x+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)$; $y=\left(\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{x}\right)\right)^{x-1}$; $y=\left(1-x^3\right)e^{x-y}.$

10. $y=(x+7)e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}$; $y=\dfrac{2-3x^3}{\sqrt[4]{2x^3}}$; $y=\dfrac{2-3x^3}{\mathrm{tg}(3+2x)}$; $y=x^3 5^{\cos(3-x)}$;

$y=\ln\left(\sqrt[3]{2-x^3}+x\right)$; $y=\arcsin\ln\left(e^{3-x}+\dfrac{1}{x}\right)$; $y=\cos^7\left(e^{-\sqrt{x}}-5x\right)$;

$y=\sin^3\left(6+3^{-\sqrt{x}}\right)$; $y=\left(\mathrm{ctg}(2-x)\right)^{3x}$; $\sqrt{y}(x+1)-(y-2x)=0$.

11. $y=(x+1)^2 2x+\pi$; $y=\dfrac{2x}{\cos 3x+1}$; $y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^2-7}$; $y=3xe^{\cos 5x}$;

$y=\ln\left(5x+\sqrt{1+x}\right)$; $y=\cos\ln\left(3-3^{-x^2}\right)$; $y=\arcsin^5 8x$; $y=\sin^8\left(3-\sqrt[3]{x}\right)$;

$y=x^{\sin 6x}$; $(x+1)\sin 2y-\dfrac{y}{x}=4$.

12. $y=8x^3 3^{x-2}+\pi$; $y=\dfrac{5-x}{\sin 3x-1}$; $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{1-4x}$; $y=\mathrm{arctg}^5(4+3x)$;

$y=\cos^3\left(7-e^{-2x}\right)$; $y=\ln\sin\left(3-e^{5x}\right)$; $y=2x^2e^{\cos(3x-2)}$; $y=\cos^3\left(x-\sqrt[4]{x}\right)$;

$y=(x-1)^{\cos x}$; $y\mathrm{tg}(xy)-e^x=3$.

13. $y=2xe^{3x+x^2}+5$; $y=\dfrac{6-x}{\sin 7x+3}$; $y=\dfrac{\sqrt{2-x^3}}{7+5x}$; $y=\ln^8\dfrac{1}{e^{-x^2}+7}$;

$y=3x^2 2^{\sin(3-x)}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{5+x^2}-7x\right)$; $y=\arccos^8 15x$; $y=\sin^5\left(3e^x-7x\right)$;

$y=(x+9)^{\cos 7x}$; $\cos(2x-3y)+\dfrac{2x}{y}=0$.

14. $y=\left(5-x^2\right)e^{\sqrt{2x}}-4$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4-7x^2}}{3x+8}$; $y=\ln\left(3x-\dfrac{2}{x+1}\right)$; $y=\dfrac{3-x^2}{\cos 7x-4}$

$y=\left(5-x^2\right)e^{\sin(3-x)}$; $y=\mathrm{arctg}\ln\left(-\dfrac{3}{\sqrt{x}}-2x\right)$; $y=\sin^3\left(e^{5x}-3\right)$;

$y=(\mathrm{tg}5x)^{3-\sqrt{x}}$; $y=\arcsin^4(3-x)$; $\cos(3x-y)-\sqrt[3]{2y}=0$.

15. $y=(3+2x)5^{x^3}-\sqrt{8}$; $y=\dfrac{\sin(3+2x)}{3(x-1)^2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{3+2x}}{(x-1)^2-7}$; $y=\arccos^5 2x$;

$y=(3x-7)^3e^{\arcsin 5x}$; $y=\ln\left(12x+\sqrt[3]{x^3+4}\right)$; $y=\sin^5\left(\sqrt{2x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$;

$y=(\mathrm{tg}8x)^{3+x^2}$; $y=\ln\cos\left(5-e^{-\sqrt{x}}\right)$; $\dfrac{x^2}{2y}+\mathrm{arctg}(x+y)=1$.

16. $y=(2-3x)8^{-x^3}-\sin 1$; $\quad y=\dfrac{\sin(3-4x)}{5x^2}$; $\quad y=\dfrac{\sqrt[3]{3-2x}}{x^2-4}$; $\quad y=x^3e^{\sin 7x}$;

$y=\ln\left(5x-7\sqrt{x^3+3}\right)$; $\quad y=\ln\cos\left(1-e^{\frac{5}{\sqrt{x}}}\right)$; $\quad y=\arccos^5(1-6x)$;

$y=(\operatorname{tg}3x)^{5x-x^3}$; $\ y=\sin^5\left(\sqrt{5x}-\dfrac{7}{x^2}\right)$; $\ \dfrac{x^2}{1-y}+\operatorname{arctg}y=4.$

17. $y=(9+3x)e^{5-3x^2}$; $\quad y=\dfrac{5x+9}{\arcsin(4+3x)}$; $\quad y=\ln\dfrac{1}{(3x-4)\sqrt{5+6x}}$;

$y=\dfrac{\sqrt{4-7x^2}}{5-x^3}$; $\quad y=\operatorname{arctg}\ln\left(e^{\frac{-5}{x}}+4\right)$; $\quad y=\left(7-x^3\right)e^{\arccos(3x-1)}$;

$y=\sin^3\left(e^{\sqrt{x}}\right)$; $\ y=\arcsin^7(1-8x)$; $\ y=(5x-\sin 2x)^{3x}$; $\ \cos(x-y)+\dfrac{x^4}{y^2}=4.$

18. $y=(4-7x)e^{5x}+\sin 3$; $\quad y=\dfrac{\cos(2-4x)-9}{3x^5}$; $\quad y=\ln\left(5x^2-\sqrt[7]{3-2x}\right)$;

$y=\left(1-x^3\right)e^{\operatorname{arctg}5x}$; $\ y=\dfrac{\sqrt{x^4-7}}{5x+2}$; $\ y=\ln\arccos\left(3+7\sqrt{x}\right)$; $\ y=\sin^8(3-7x)$;

$y=\ln^6\left(3+3e^{-2x}\right)$; $\ y=x^{\ln(3-x)}$; $\ y^3e^{xy}+\cos x=2.$

19. $y=\sin^8(8+7x)$; $\quad y=\dfrac{3-x^2}{4-9\cos^5(x-3)}$; $\quad y=\ln^7\left(5-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$;

$y=(x-3)^2 4^{x^2}$; $\ y=\dfrac{3+12x}{1-9x^4}$; $\ y=\cos\operatorname{tg}\left(\sqrt{3x}-x^5\right)$; $\ y=\arcsin\sqrt{4+12x}$;

$y=(x-4)e^{\sin 5x}$; $\ y=(4+2x)^{\cos 7x}$; $\ (x-1)\arcsin y+xy=0.$

20. $y=7x^8e^{3-x^5}+\pi^3$; $\quad y=\dfrac{\arcsin\left(4-5x^3\right)}{4-8x}$; $\quad y=\ln\dfrac{1}{x^3+\sqrt{3x^2-7}}$;

$y=\left(4-x^3\right)2^{\cos 8x}$; $\ y=\dfrac{5x^2}{\sqrt{4+3x^5}}$; $\ y=\sin\ln\left(\sqrt[6]{x^2}-3x^3\right)$; $\ y=\sin^9\left(e^{3x}-x^3\right)$;

$y=\arccos^6(1-5x)$; $\ y=(3-4x)^{\cos 7x}$; $\ \cos(y-12x)-\dfrac{3-x}{y}=4.$

21. $y=\left(3+x^2\right)\left(e^{\sqrt[4]{x}}+3\right)$; $\ y=\dfrac{5-4x}{\cos 2x+7}$; $\ y=\dfrac{\sqrt[3]{1+5x^2}}{7x+8}$; $\ y=\ln\left(5x-4\sqrt{x}\right)$;

$y=\left(5+x^4\right)e^{\sin(3-7x)}$; $\quad y=\operatorname{arctg}\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+5x\right)$; $\quad y=\sin^4\left(e^{1-x}+3\right)$;

$y=(\operatorname{tg}3x)^{1-5\sqrt{x}}$; $\ y=\arcsin^7(3-5x)$; $\ \cos\left(3x^2-y\right)+\sqrt{y}=0.$

22. $y=x^5 2^{3x}+4$; $y=\dfrac{5x+3}{\cos 2x-2}$; $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{x^2+7x}$; $y=\ln\left(8x-\sqrt{1-3x}\right)$;
$y=4xe^{\cos 9x}$; $y=\arcsin^{15} 2x$; $y=\sin^6\left(1-\sqrt{x}\right)$; $y=\arcsin\ln^2\left(e^{3x}+4\right)$;
$y=(3x)^{\sin 4x}$; $(y+1)\sin 5y+x^6=2$.

23. $y=4x^7 3^{5+2x}-\sqrt{3}$; $y=\dfrac{5+4x}{\sin 7x-8}$; $y=\dfrac{\sqrt{1-7x^4}}{5+9x}$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{1+2x^2}-4\right)$;
$y=3(1-x)^2 e^{-\cos x^2}$; $y=\ln\sin\left(1-e^{-3x}\right)$; $y=\operatorname{arctg}^4(2+5x)$;
$y=\cos^6\left(4+e^{3-x}\right)$; $y=(3-x)^{\cos x}$; $y\operatorname{tg}(y+x)+e^x=1$.

24. $y=(2+8x)e^{-3x}-\ln 7$; $y=\dfrac{\arcsin\left(3+4x^2\right)}{3-2x}$; $y=\left(3-x^2\right)2^{\cos(3-2x)}$;
$y=\dfrac{3x^2+7}{\sqrt{2x+x^2}}$; $y=\ln\dfrac{1}{2x-\sqrt{1-x^2}}$; $y=\sin\ln\left(\dfrac{1}{x-1}+\sqrt[3]{x}\right)$; $y=x^{\cos(3-4x)}$;
$y=\arccos^2 3x$; $y=\sin^4\left(e^{3x}-x^2\right)$; $\cos(y-x)-\dfrac{y}{x}=1$.

25. $y=(5+3x)5^{1-x^2}+3$; $y=\dfrac{\sin(3-8x)}{1-5x^2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{2-4x}}{x^2-2x}$; $y=\ln\cos\left(2-\sqrt{x}\right)$;
$y=\ln\left(5x-\sqrt{x^2+4}\right)$; $y=\arccos^6 2x$; $y=\sin^6\left(\sqrt[3]{x}-x^2\right)$; $y=x^2 e^{\arcsin 3x}$;
$y=(\operatorname{tg}4x)^{3+x^2}$; $\dfrac{y^2}{x}-\operatorname{arctg}y=7$.

26. $y=(2x-4)e^{2-5x^2}-4$; $y=\dfrac{2x+4}{\arcsin(2-3x)}$; $y=\arcsin^3(7-x)$;
$y=\dfrac{\sqrt{3-4x^2}}{5-3x^2}$; $y=\operatorname{arctg}\left(e^{\sqrt[3]{x^2}}\right)$; $y=\left(4-x^2\right)e^{\arccos 5x}$; $y=\sin^6\left(3+e^{5x}\right)$;
$y=\ln\cos\left(4x-x^2\right)$; $y=(3x-\sin 2x)^x$; $y^2x^3-y^5=4$.

27. $y=(2-7x)e^{1-5x}-\ln 7$; $y=\dfrac{\cos(2+4x)+1}{x^2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^6-1}}{5-3x}$;
$y=\sin^3(1-7x^2)$; $y=\ln\arccos\left(3-\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y=\ln\left(x-\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)$;
$y=x^{\ln\left(3-7^x\right)}$; $y=x^4 e^{\operatorname{arctg}(5-2x)}$; $y=\ln^5\left(4+e^{1-6x}\right)$; $(1-y)^2 e^{xy}-\cos x=3$.

28. $y=(x-1)^3 4^x-\ln 2$; $y=\dfrac{1-7x^2}{1-2\cos 3x}$; $y=\dfrac{3-2x}{\sqrt[3]{3+5x}}$; $y=(3-x)^2 e^{\sin 5x}$;
$y=\ln\left(\sqrt{3+5x^2}-2x\right)$; $y=\cos\operatorname{tg}\left(x-\sqrt[3]{x^2}\right)$; $y=\operatorname{arctg}^7(3+2x)$;
$y=(5-2x)^{\cos 5x}$; $y=\arcsin^6\left(1-\sqrt{x}\right)$; $y^3+(x+1)y=2$.

29. $y = x^5 e^{3+\sqrt{x}}$; $y = \dfrac{\cos(5-4x)}{7-x^8}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{(2-x)^2}}{(x+8)^4}$; $y = \ln\left(\sqrt[3]{5-2x} - x\right)$;
$y = x^9 2^{\mathrm{tg}6x}$; $y = \arccos\ln\left(e^{1-x} - x^2\right)$; $y = \mathrm{arctg}^3(1+x^4)$;
$y = \sin^4\left(1-\sqrt{x-1}\right)$; $y = (\arcsin(2-x))^{x^2}$; $(y-4)\sqrt[3]{x} + \cos 5y = 3$.

30. $y = 5xe^{-x^2} - 7$; $y = \dfrac{3x-1}{\sin 5x - 4}$; $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x-3}$; $y = \sin\ln\left(3+e^{3x}\right)$;
$y = \ln\cos\left(1-e^{3x^2}\right)$; $y = \ln\left(x^2 - \sqrt{5x^2-1}\right)$; $y = \cos^4\left(1-2\sqrt{x}\right)$; $y = x^{\mathrm{tg}5x}$;
$y = \mathrm{arctg}^6(3-x)$; $x^5 \sin 6y + y = 1$.

6.4.5 Дослідити функцію та побудувати її графік:

1. $y = \dfrac{3x^2}{x^3+6}$; $y = 2xe^x - 1$.
2. $y = \dfrac{x^2+1}{2x+1}$; $y = (3-x)e^{-x} + 3$.
3. $y = \dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$; $y = (3x+1)e^{-x} + 2$.
4. $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$; $y = (1-x)e^{-x} + 1$.
5. $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; $y = (2x+1)e^x - 1$.
6. $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$; $y = (6-3x)e^{2x} + 2$.
7. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; $y = 3xe^{-x} + 1$.
8. $y = \dfrac{-x^2}{(x-2)^2}$; $y = (5x-2)e^{-x} + 3$.
9. $y = \dfrac{x}{x^3-2}$; $y = (2x-1)e^{2x} + 3$.
10. $y = \dfrac{4x^3}{x^3-1}$; $y = (4-2x)e^x - 2$.
11. $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x}$; $y = (x+3)e^{-2x} + 1$.
12. $y = \dfrac{x+3}{x^3}$; $y = -xe^x + 2$.
13. $y = \dfrac{4x^3+5}{x}$; $y = (2x+5)e^{2x} + 1$.
14. $y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$; $y = (1-x)e^x + 1$.
15. $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$; $y = (x+1)e^{-x} + 3$.
16. $y = \dfrac{x}{2-x^3}$; $y = (2x+3)e^x + 2$.
17. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$; $y = (x-3)e^{-2x} + 4$.
18. $y = \dfrac{4x^3}{x^3-1}$; $y = 2xe^{-x} - 1$.
19. $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; $y = (2x-1)e^{-x} - 2$.
20. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; $y = (x-2)e^{2x} - 3$.
21. $y = \dfrac{-x}{x^3+3}$; $y = (2x-3)e^{-3x} + 1$.
22. $y = \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$; $y = -xe^{2x} + 2$.
23. $y = \dfrac{x}{x^3-4}$; $y = (5-2x)e^{-x} + 3$.
24. $y = \dfrac{x-2}{(x+1)^2}$; $y = (2x+4)e^x - 1$.
25. $y = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$; $y = (2x-3)e^{-x} + 3$.
26. $y = \dfrac{3x}{3+x^2}$; $y = (x+2)e^{3x} + 2$.

27. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; $y=2xe^x-1$.

28. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; $y=(1-2x)e^x+2$.

29. $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$; $y=(x-2)e^{-3x}-2$.

30. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; $y=(5x+2)e^{2x}-1$.

6.5 Функції багатьох змінних

6.5.1 Знайти всі частинні похідні 1-го і 2-го порядків нижченаведених функцій:

1. $z=4x^3+3x^2y+3xy^3-y^3$.
2. $z=\ln\operatorname{tg}(x+y)$.
3. $z=xy+\sin(x+y)$.
4. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.
5. $z=x\sin xy+y\cos xy$.
6. $z=x^2\ln(x+y)$.
7. $z=\sin(x+\cos y)$.
8. $z=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.
9. $z=\cos(ax+e^y)$.
10. $z=2^{\frac{x}{y}}-\ln y$.
11. $z=x^2y^3e^{x+y}$.
12. $z=\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.
13. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{2xy}{1-x^2}$.
14. $z=e^x\ln(x+y)$.
15. $z=\arcsin xy$.
16. $z=y^{\ln x}$.
17. $z=\ln(e^x+e^y)$.
18. $z=\ln\sqrt{x^2+y^4}$.
19. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.
20. $z=\sin(x^2+y^2)$.
21. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.
22. $z=e^{xy(x^2+y^2)}$.
23. $z=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{x}$.
24. $z=e^{\frac{x}{y}}-e^{-y}$.
25. $z=x^2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.
26. $z=e^{3x^2+2y^2}$.
27. $z=4xe^{x+2y}$.
28. $z=e^{-x^2+2\cos y}$.
29. $z=y^2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.
30. $z=\sqrt{y}x^y$.

6.5.2 Перевірити, чи для даної функції виконується дане співвідношення:

1. $z=xe^{\frac{y}{x}}$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

2. $z=\sqrt{x^4+y^4+x^2y^2}$, $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

3. $z=e^{-x}\cos(y+x)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. $z=\ln(1+\cos xy)$, $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

5. $u=\dfrac{1}{y}\Big[(ax+y)^3+\ln(x+y)\Big]$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{a^2}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$.

6. $u=\left(\dfrac{x}{x+y}+ye^{x+y}\right)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

7. $z=y\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{3}}$, $\qquad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

8. $u=x\ln(x+z)-z$, де $z^2=x^2+y^2$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x+z}$.

9. $z=\dfrac{y}{y^2-a^2x^2}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

10. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

11. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

12. $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

13. $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

14. $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

15. $z=(1+x)^3e^y$, $\qquad z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

16. $z=\cos x+y\sin x$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\partial z}{\partial y}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

17. $u=\ln\dfrac{1}{z}$, де $z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

18. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

19. $z = e^{xy}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

20. $z = e^{-x-3y} \sin(x+3y)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

21. $z = xe^{\frac{y}{x}} + \ln\dfrac{y}{x}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

22. $z = \dfrac{\sin(x-y)}{x}$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

23. $z = e^{\frac{y}{x}}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

24. $z = e^{xy}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

25. $z = x^y$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

26. $z = xe^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0$.

27. $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0$.

28. $u = xy + \sqrt{xy} \cdot 2^{\frac{y}{x}}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

29. $u = \dfrac{1}{x - at} + \cos^2(x+at)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

30. $z = \cos(x+y^2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6.5.3 Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці M_0.

1. $x^2 + 2z^2 = 9$, $M_0(1,1,2)$.
2. $y^2 = z + 2$, $M_0(2,1,-1)$.
3. $x^2 = 3z$, $M_0(-3,1,3)$.
4. $5z^2 - 4y^2 = 1$, $M_0(2,1,1)$.
5. $3z^2 + x = 4$, $M_0(1,-2,1)$.
6. $z = 4x^2 - 9y^2$, $M_0(1,1,-5)$.
7. $x = 2y^2 + 3z^2$, $M_0(5,1,1)$.
8. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $M_0(3,4,5)$.
9. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$, $M_0(1,-1,1)$.
10. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $M_0(1,-1,1)$.
11. $z = 1 + x^2 + y^2$, $M_0(1,1,3)$.
12. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $M_0(2,2,3)$.
13. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1,0,0)$.
14. $z = \sin x \cos x$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.
15. $z = 2x^2 - 4y^2$, $M_0(2,1,4)$.
16. $z = xy$, $M_0(1,1,1)$.

17. $z=\dfrac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$, $M_0(a,a,-a)$.
18. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0\left(4,4,\dfrac{\pi}{4}\right)$.
19. $z=3y^2$, $M_0(1,1,3)$.
20. $y^2=z^2(x-1)$, $M_0(2,1,1)$.
21. $z=x^2+y^2$, $M_0(1,-2,5)$.
22. $x+2y^3-4z^2=-1$, $M_0(1,1,1)$.
23. $x^2+2y^2+z^2=9$, $M_0\left(2,1,\sqrt{3}\right)$.
24. $x^2+2y^2+3z^2=21, M_0\left(3\sqrt{2},0,1\right)$.
25. $x^2+y^2-z^2=2$, $M_0(1,1,0)$.
26. $x^2+y^2-3z=3$, $M_0(0,0,-1)$.
27. $x^3+y^2+z^3+xyz=2, M_0(1,2,-1)$.
28. $x+2y-\ln z=-4$, $M_0(2,-3,1)$.
29. $x^2+2y^2+z^2=9$, $M_0\left(2,1,\sqrt{3}\right)$.
30. $x^2-xy-8x+z=-5$, $M_0(2,-3,1)$.

6.5.4 Знайти точки екстремуму даної функції:

1. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.
2. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.
3. $z=x^3+y^3-3xy$.
4. $z=x^3+y^3-6xy$.
5. $z=x^2+xy+y^2-13x-11y+7$.
6. $z=x^3+y^3-30xy$.
7. $z=xy^2(1-x-y)$.
8. $z=x^3+y^3-15xy$
9. $z=4-\left(x^2+y^2\right)$.
10. $z=(x-1)^2-2y^2$.
11. $z=(x-1)^2+2y^2$.
12. $z=x^3y^2(6-x-y), (x>0, y>0)$.
13. $z=x^2+y^2+xy-2x-y$.
14. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.
15. $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$.
16. $z=x^3y^2(12-x-y)$.
17. $z=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.
18. $z=x^2+y^2-6xy-39x+19y+20$.
19. $z=x^2+2xy-4x+8y$.
20. $z=x^2y(4-x-y)$.
21. $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$.
22. $z=x^2-3xy+y^2-y+2x$.
23. $z=x^2-xy+y^2-2x+4y$.
24. $z=2x^2-xy+y^2-2y-x$.
25. $z=x^2-4xy+2y^2+6x-2y$.
26. $z=2x^2-6xy+2y^2-2x-4y$.
27. $z=3x^2-8xy+y^2+8x-4y$.
28. $z=x^2-4xy-4y^2+4x-6x$.
29. $z=x^2-xy+4y^2-4y+6x$.
30. $z=x^2+4xy-y^2-2y+x$.

7 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАНЯТЬ

1. Два заводи випускають вироби M, N, P вищої, першої та другої категорій якості. Кількість виробів, випущених кожним заводом за кожною категорією, характеризується нижченаведеною таблицею.

Категорія якості	Готові вироби					
	Перший завод			Другий завод		
	M	N	P	M	N	P
Вища	a_1	b_1	c_1	d_1	l_1	k_1
Перша	a_2	b_2	c_2	d_2	l_2	k_2
Друга	a_3	b_3	c_3	d_3	l_3	k_3

Знайти загальний випуск виробів за вказаними категоріями якості. На скільки зміниться загальний випуск виробів за вказаними категоріями якості, якщо перший завод зменшить випуск виробів P за всіма категоріями якості в 2 рази, а другий – збільшить випуск виробів M у 3 рази? Дані для розв'язування взяти в таблиці 7.1.

2. Завод випускає вироби чотирьох типів. Причому виробляється:
1) в цеху X_1 a одиниць виробів I типу та b одиниць II типу;
2) в цеху X_2 c одиниць виробів III типу;
3) в цеху X_3 d одиниць IV типу.

Визначити витрати матеріалів p та q в кожному цеху, якщо норми матеріалів (у відповідних одиницях) наведено в такій таблиці:

Тип виробу	Норми витрат матеріалів	
	p	q
I	p_1	q_1
II	p_2	q_2
III	p_3	q_3
IV	p_4	q_4

Дані для розв'язування взяти в таблиці 7.2.

3. При складанні виробів різних типів деталі надходять з цехів X_1, X_2, X_3 в кількості, відповідно, K_1, K_2, K_3. Визначити число робітників чотирьох професій, необхідних для виконання цих робіт, якщо норми витрат праці робітників для кожної професії наведено в поданій нижче таблиці (дані для розв'язування взяти з табл. 7.1).

Цех	Норми витрат праці за професіями			
	I	II	III	IV
X_1	a_1	b_1	c_1	d_1
X_2	a_2	b_2	c_2	d_2
X_3	a_3	b_3	c_3	d_3

4. У деяких галузях господарства заплановано побудувати об'єкти чотирьох типів. Будівельний об'єм завдань за кожним із типів такий: I − a, II − b, III − c, IV − d. Визначити об'єм будівельно-монтажних робіт трьох комплексів M, N, P, що виконуються при будівництві цих об'єктів, якщо величини кожного виду робіт на 1 м завдань залежно від типу об'єкта наведено в таблиці (дані для розв'язування взяти в табл. 7.1 та табл. 7.2).

Тип об'єкта	Величини робіт		
	M	N	P
I	c_1	c_2	c_3
II	d_1	d_2	d_3
III	l_1	l_2	l_3
IV	k_1	k_2	k_3

5. Для виробництва виробів M, N необхідні вузли D_1 та D_2, для виготовлення яких, в свою чергу, необхідні деталі C_1, C_2, C_3.

Виріб	Кількість вузлів		Вузол	Кількість деталей		
	D_1	D_2		C_1	C_2	C_3
M	d_1	d_2	D_1	a_1	a_2	a_3
N	d_3	d_4	D_2	c_1	c_2	c_3

Визначити кількість деталей, необхідних для виробництва одного виробу кожного виду. Дані взяти в табл. 7.1, вважати $d_4 = 11$.

6. Розрахувати заробітну плату, яка припадає на кожне замовлення для виготовлення різних виробів, якщо відомо такі дані:

1) витрати робочого часу в годинах на кожне робоче місце і на кожен виріб наведено в поданій нижче таблиці;

Виріб	Витрати				
	1	2	3	4	5
M	d_1	l_1	k_1	p_1	q_1
N	d_2	l_2	k_2	p_2	q_2
P	d_3	l_3	k_3	p_3	q_3

2) кількість виробів у кожному замовлені, шт.:

Замовлення	Кількість виробів		
	M	N	P
A	a_1	b_1	c_1
B	a_2	b_2	c_2
C	a_3	b_3	c_3

3) погодинна заробітна плата кожного робочого місця, грн:

Робоче місце	Погодинна зарплата
1	d_1
2	d_2
3	d_3
4	p_1
5	p_2

Дані для розв'язування взяти з таблиць 7.1 і 7.2.

7. Для виготовлення деталей чотирьох видів X_i витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються в умовних одиницях

Ресурси	Витрати на одну деталь кожного виду			
	1	2	3	4
Матеріали	a	b	c	d
Робоча сила	p_1	p_2	p_3	p_4
Електроенергія	q_1	q_2	q_3	q_4

а) обчислити загальні витрати матеріалів y_1, робочої сили y_2 та електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості деталей кожного типу, якщо $X_1 = 5$, $X_2 = 2$, $X_3 = 7$, $X_4 = 1$; б) знаючи загальні витрати матеріалів y_1, робочої сили y_2 та електроенергії y_3 (з розв'язку пункту а) і витрати на одну деталь кожного виду, визначити кількість X_i деталей кожного виду.

Дані для розв'язування взяти з таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Дані для розв’язування задач 1–7

№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	l_1	l_2	l_3	k_1	k_2	k_3
1	3	5	11	3	2	8	4	6	2	1	2	1	3	2	15	10	14	2
2	5	8	2	15	1	2	10	16	4	4	3	2	5	20	4	1	0	11
3	6	3	4	17	4	5	8	2	20	2	4	3	11	11	8	7	12	2
4	11	13	6	2	0	1	6	12	2	1	1	2	3	13	10	20	1	3
5	8	11	15	1	3	4	12	4	8	5	3	1	2	6	13	6	4	12
6	9	6	19	0	1	15	4	8	10	3	1	4	8	2	4	12	8	8
7	13	24	26	0	3	3	2	10	18	0	2	3	4	0	26	16	16	2
8	4	16	17	4	2	1	0	20	4	3	0	1	6	1	0	2	20	19
9	1	23	4	10	1	7	20	6	12	2	3	1	2	6	3	8	14	10
10	16	2	8	7	1	5	16	4	14	4	3	5	12	3	7	8	1	0
11	23	7	2	5	3	4	14	8	10	1	5	2	8	2	2	1	1	2
12	2	14	0	12	1	4	8	16	20	3	2	5	2	8	10	5	6	2
13	14	8	1	6	1	1	4	26	22	2	3	5	15	11	18	16	1	8
14	12	11	3	9	8	6	6	10	10	1	4	2	1	15	4	4	1	12
15	7	20	5	2	2	5	10	14	8	2	4	3	2	1	16	14	4	17
16	3	13	3	5	1	3	2	16	12	6	2	0	10	3	17	23	12	11
17	20	15	2	11	2	3	12	8	24	4	3	1	16	4	4	7	11	12
18	15	0	12	3	3	4	20	4	18	2	6	3	4	12	2	2	3	1
19	19	2	14	6	4	3	10	6	10	3	5	6	6	4	1	5	9	3
20	2	19	10	0	2	2	8	12	20	1	6	5	3	8	0	3	8	1
21	0	27	12	8	0	5	6	22	6	2	3	4	4	9	20	4	6	4
22	17	11	12	1	3	1	4	14	10	4	5	3	17	6	4	14	6	14
23	19	3	4	13	1	1	12	6	4	1	5	6	4	19	1	8	10	10
24	27	1	7	23	2	4	2	12	8	6	5	1	5	0	23	10	7	7
25	7	0	2	21	3	1	16	10	2	2	1	0	8	1	4	2	20	0

Таблиця 7.2 – Дані для розв'язування задач 1–7

№	a	b	c	d	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	q_3	q_4
1	10	4	7	11	1	2	4	5	1	6	3	6
2	15	5	3	16	3	6	5	4	3	1	6	1
3	12	6	10	5	5	1	3	3	5	2	2	2
4	14	3	12	9	2	2	6	6	2	1	1	2
5	16	10	5	24	4	1	2	1	4	3	4	4
6	8	19	9	10	3	3	1	2	3	4	2	6
7	11	2	20	12	2	4	4	2	2	4	5	5
8	7	17	4	11	5	4	2	4	5	2	6	3
9	20	5	11	4	4	2	5	6	1	1	2	2
10	18	10	3	5	3	1	6	5	3	2	3	4
11	17	4	8	20	6	2	2	3	4	6	6	3
12	12	7	10	16	1	3	3	2	11	1	4	4
13	14	9	16	11	2	1	4	4	2	5	6	2
14	9	16	2	8	6	5	4	6	6	5	5	5
15	5	17	6	13	4	5	6	4	4	4	4	4
16	3	18	12	9	1	4	5	2	1	2	2	1
17	17	10	5	12	3	2	4	5	3	2	3	1
18	13	12	10	7	2	3	2	4	2	4	4	1
19	19	3	20	3	3	4	3	1	5	3	5	5
20	16	8	9	20	4	5	4	3	4	6	1	4
21	4	20	11	10	5	6	5	1	5	1	1	4
22	10	11	5	5	6	1	6	5	6	3	2	3
23	5	24	12	18	1	3	1	6	1	4	3	4
24	3	16	9	5	3	4	3	4	2	1	5	5
25	20	7	11	6	4	2	4	3	4	3	2	4

8. Перевезення вантажу з пункту A в пункт B, який знаходиться на відстані S_1 км, коштує P_1 грн., а в пункт C, який знаходиться на відстані S_2 км, коштує P_2 грн. Визначити залежність вартості перевезення Y від відстані X, якщо вартість є лінійна функція відстані (якість доріг при цьому не враховується).

Таблиця 7.3 – Дані для розв'язування задачі 8

№	S_1	S_2	P_1	P_2	№	S_1	S_2	P_1	P_2
1	50	250	100	200	14	55	125	95	150
2	70	300	150	250	15	60	210	90	185
3	80	200	120	180	16	70	250	100	220
4	65	130	120	210	17	65	100	100	190
5	40	150	75	100	18	80	150	150	220
6	90	210	180	160	19	75	100	145	200
7	60	180	90	150	20	90	200	170	350
8	75	200	150	230	21	110	250	200	400
9	85	250	140	220	22	95	210	200	330
10	95	200	160	180	23	100	300	160	410
11	100	350	180	330	24	105	310	175	450
12	105	300	200	310	25	85	260	180	390
13	110	400	250	350					

9. Світловий промінь, рівняння якого $y = ax + b$, падає на скляну пластинку товщиною 1 см. Показник заломлення скла дорівнює 2. Знайти рівняння променя в пластинці і на виході з неї, довжину шляху, який пройшов промінь всередині пластинки, та зміщення променя при виході з пластинки (за вісь абсцис взяти проекцію променя на поверхні пластинки, за вісь ординат – нормаль до поверхні).

Таблиця 7.4 – Дані для розв'язування задачі 9

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	1	1	6	1	-1	11	2	1	16	-1	1	21	0,5	1
2	1	2	7	1	-2	12	2	2	17	-1	2	22	1,5	2
3	1	3	8	1	-3	13	2	2	18	-1	3	23	1,5	3
4	1	4	9	1	-4	14	2	4	19	-1	4	24	0,5	2
5	1	5	10	1	-5	15	2	5	20	-1	5	25	1	0,5

10. Між пунктами A і B проходить шосейна дорога. На плані місцевості ці пункти мають координати $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. Завод $C(x_3, y_3)$ в цій же системі координат потрібно з'єднати найкоротшим шляхом з шосе. Знайти на шосе точку входження в нього дороги та її довжину. Дані для розв'язування наведено в таблиці 7.5.

Таблиця 7.5 Дані для розв'язування задачі 10

№	A	B	C	№	A	B	C
1	$(-3,3)$	$(4,6)$	$(3,1)$	13	$(-3,-2)$	$(5,4)$	$(4,-3)$
2	$(-4,6)$	$(2,8)$	$(-1,1)$	14	$(-3,2)$	$(9,-3)$	$(7,5)$
3	$(-3,2)$	$(5,7)$	$(1,8)$	15	$(-5,3)$	$(5,7)$	$(2,0)$
4	$(-5,3)$	$(6,5)$	$(3,-3)$	16	$(6,6)$	$(2,-5)$	$(-1,3)$
5	$(2,2)$	$(10,5)$	$(5,7)$	17	$(-4,3)$	$(3,6)$	$(-5,5)$
6	$(2,3)$	$(9,-3)$	$(8,2)$	18	$(2,-5)$	$(9,-4)$	$(5,0)$
7	$(2,-1)$	$(12,2)$	$(10,-5)$	19	$(-6,-5)$	$(2,11)$	$(0,-3)$
8	$(6,5)$	$(9,-3)$	$(2,-1)$	20	$(-6,-5)$	$(7,-3)$	$(1,1)$
9	$(2,-3)$	$(11,2)$	$(4,5)$	21	$(-7,-4)$	$(5,3)$	$(-3,7)$
10	$(-3,2)$	$(6,6)$	$(3,-3)$	22	$(-7,-3)$	$(2,-10)$	$(-2,-3)$
11	$(-4,-2)$	$(2,-5)$	$(2,2)$	23	$(0,-6)$	$(8,-2)$	$(1,3)$
12	$(-3,-4)$	$(4,0)$	$(-1,3)$	24	$(-6,2)$	$(2,-6)$	$(3,3)$

11. Перевірити перпендикулярність граней AB і BC, зображених на рисунку 7.1, який виконаний за розмірами деталей, поданих в таблиці 7.6.

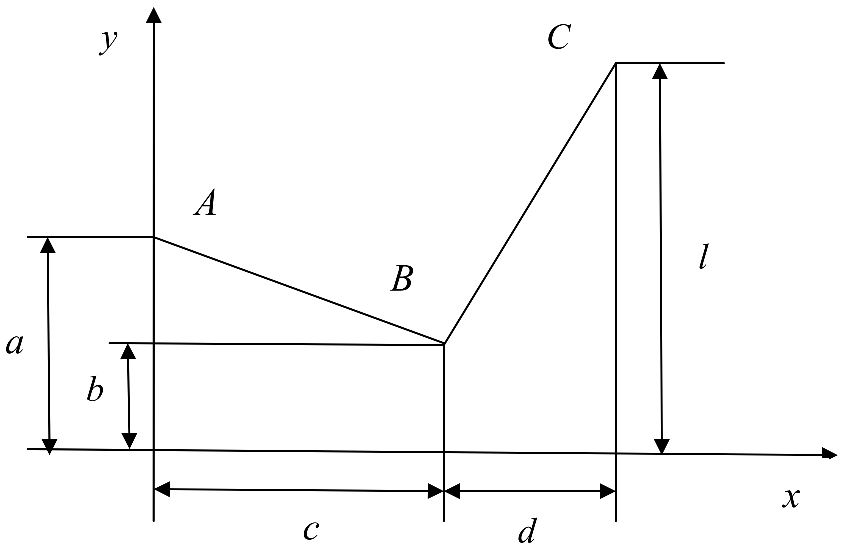


Рисунок 7.1

Таблиця 7.6 – Дані для розв’язування задачі 11

№	*a*	*b*	*c*	*d*	*l*	№	*a*	*b*	*c*	*d*	*l*
1	50	20	10	30	30	14	50	10	50	30	50
2	60	40	20	40	60	15	50	40	10	30	80
3	50	30	20	30	60	16	60	40	30	50	110
4	50	20	30	20	40	17	100	70	50	30	110
5	40	20	20	30	50	18	80	50	50	30	90
6	70	40	40	20	60	19	110	90	40	20	130
7	60	30	30	20	50	20	110	80	60	20	110
8	70	40	30	30	70	21	100	60	60	20	90
9	30	10	30	40	70	22	70	40	50	30	70
10	80	60	30	40	120	23	130	110	50	10	130
11	110	90	50	20	120	24	100	60	70	30	90
12	80	40	50	40	100	25	80	40	70	20	60
13	110	70	70	20	100						

12. Необхідно відновити межі квадратної ділянки землі за трьома стовпами, які збереглися: один – в центрі ділянки і по одному на двох протилежних межах. Скласти рівняння прямих, які відображають межі ділянки, якщо на плані координати стовпів $M(x_1, y_1)$ – в центрі, $A(x_2, y_2)$, $B(x_3, y_3)$ – по сторонах. Зробити рисунок.

Таблиця 7.7 – Дані для розв'язування задачі 12

№	M	A	B	№	M	A	B
1	$(4,4)$	$(9,5)$	$(4,-2)$	13	$(-3,-2)$	$(4,4)$	$(4,4)$
2	$(2,4)$	$(5,5)$	$(2,0)$	14	$(0,2)$	$(-5,5)$	$(-2,4)$
3	$(4,6)$	$(6,8)$	$(3,3)$	15	$(-2,0)$	$(-8,2)$	$(-4,2)$
4	$(4,2)$	$(7,3)$	$(3,-1)$	16	$(9,1)$	$(5,-3)$	$(6,0)$
5	$(6,4)$	$(8,6)$	$(6,0)$	17	$(7,-1)$	$(2,-4)$	$(4,-2)$
6	$(-2,-2)$	$(-6,0)$	$(1,5)$	18	$(0,-6)$	$(3,-1)$	$(2,-4)$
7	$(0,-2)$	$(-2,0)$	$(2,-4)$	19	$(1,3)$	$(-2,8)$	$(0,-6)$
8	$(-2,0)$	$(-6,0)$	$(-1,-1)$	20	$(3,4)$	$(4,3)$	$(4,2)$
9	$(-4,-2)$	$(-7,-1)$	$(-4,-6)$	21	$(8,1)$	$(2,-1)$	$(4,1)$
10	$(-2,-4)$	$(-1,-1)$	$(-2,-8)$	22	$(3,-2)$	$(-3,-7)$	$(-1,-3)$
11	$(4,2)$	$(8,5)$	$(2,-3)$	23	$(2,-1)$	$(-1,-6)$	$(0,-3)$
12	$(4,1)$	$(6,4)$	$(1,0)$	24	$(2,5)$	$(-4,-3)$	$(0,1)$

13. Матеріальна точка M рухалася під дією деякої сили по колу $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ проти годинникової стрілки. Дія сили закінчилась у момент, коли положення точки M визначалося координатами (x, y). Скласти рівняння траєкторії руху точки M, після припинення дії сили.

Таблиця 7.8 – Дані для розв'язування задачі 13

№	a	b	c	(x,y)	№	a	b	c	(x,y)
1	-10	6	9	$(5,2)$	13	10	6	9	$(-8,-7)$
2	-10	6	9	$(-5,2)$	14	-10	6	9	$(8,-7)$
3	-10	6	9	$(2,1)$	15	10	6	9	$(-9,-6)$
4	-10	6	9	$(-2,1)$	16	-10	6	9	$(9,-6)$
5	-10	6	9	$(9,0)$	17	10	6	9	$(-2,-7)$
6	-10	6	9	$(-9,0)$	18	8	-4	4	$(-4,6)$
7	-10	6	9	$(10,-3)$	19	-10	6	9	$(2,-7)$
8	-10	6	9	$(-10,-3)$	20	8	-4	4	$(-8,2)$
9	-10	6	9	$(0,-3)$	21	10	6	9	$(-8,1)$
10	-10	6	9	$(-1,-6)$	22	-10	6	9	$(8,1)$
11	-10	6	9	$(1,-6)$	23	10	6	9	$(0,-3)$
12	-10	6	9	$(-5,-8)$	24	8	-4	4	$(-4,-2)$

14. Точка M рухалася по колу $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 18 = 0$, потім зірвалась з нього і, вільно рухаючись, перетнула вісь OY в точці $A(x, y)$. Визначити точку кола, з якої зірвалась матеріальна точка M.

Таблиця 7.9 – Дані для розв'язування задачі 14

№	(x,y)	№	(x,y)	№	(x,y)	№	(x,y)	№	(x,y)
1	$(0,8)$	6	$(0,13)$	11	$(0,18)$	16	$(0,-12)$	21	$(0,-17)$
2	$(0,9)$	7	$(0,14)$	12	$(0,-8)$	17	$(0,-13)$	22	$(0,-18)$
3	$(0,10)$	8	$(0,15)$	13	$(0,-9)$	18	$(0,-14)$	23	$(0,-19)$
4	$(0,11)$	9	$(0,16)$	14	$(0,-10)$	19	$(0,-15)$	24	$(0,19)$
5	$(0,12)$	10	$(0,17)$	15	$(0,-11)$	20	$(0,-16)$	25	$(0,20)$

15. На прямолінійній ділянці залізниці знаходяться станції A і B, відстань між якими 4 км. З заводу N, який знаходиться біля станції B, вантаж можна доставляти на станцію A, або по шосе до станції B, а звідти залізницею до A, або безпосередньо по прямій автотранспортом на станцію A. Залізничний тариф (ціна перевезення 1т вантажу на 1км) складає m (грн.), навантаження-розвантаження k (грн.) за 1т, тариф автотранспортом – n (грн.) ($n > m$). Визначити зону впливу станції B, тобто зону, по якій дешевше доставляти вантаж автотранспортом, а там залізницею. Дані для розв'язування наведено в таблиці 7.10.

Таблиця 7.10 – Дані для розв'язування задачі 15

№	k	m	n	l	№	k	m	n	l
1	5	3	10	180	13	3	4	10	190
2	2	5	15	220	14	5	8	14	200
3	3	8	20	240	15	6	9	16	340
4	6	10	18	150	16	10	12	20	260
5	9	15	24	210	17	12	15	25	280
6	7	12	26	230	18	8	10	15	310
7	7	6	12	200	19	4	5	10	360
8	9	9	14	160	20	5	7	12	170
9	4	10	16	250	21	8	16	11	380
10	6	8	18	320	22	7	8	13	170
11	10	15	22	330	23	6	10	17	210
12	2	16	24	350	24	4	12	19	320

16. Кривошип OA обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = a$ (рад/с) і примушує рухатись повзун B за допомогою шатуна AB. Причому $OA = AB = b$ (см) (рис. 7.2). Скласти рівняння траєкторії середньої точки M шатуна і зобразити цю траєкторію. Дані для розв'язування наведено в таблиці 7.11.

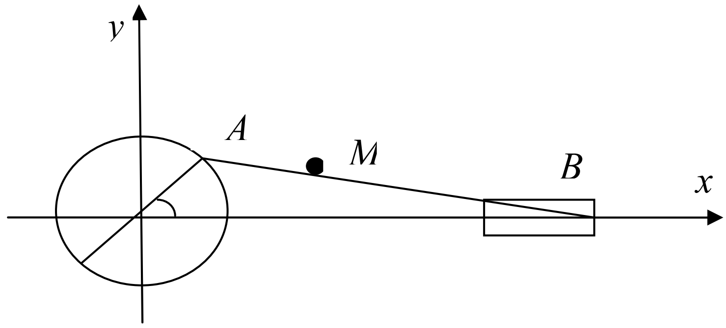


Рисунок 7.2

Таблиця 7.11 – Дані для розв’язування задачі 16

№	*a*	*b*	№	*a*	*b*	№	*a*	*b*
1	10	60	8	12	105	15	30	240
2	5	80	9	16	160	16	35	250
3	15	90	10	17	170	17	33	260
4	20	100	11	6	180	18	21	270
5	25	110	12	9	190	19	23	280
6	8	120	13	14	200	20	26	290
7	7	115	14	18	210	21	28	300

17. Арка мосту має форму параболи, вершина якої ділить її навпіл. П’ять вертикальних стояків, рівновіддалених один від одного і 4 розкоси надають арці необхідної жорсткості. Скласти рівняння дуги арки, прийнявши за вісь абсцис прогін мосту, за вісь ординат – його вісь симетрії (рис. 7.3). Знайти довжини стояків і розкосів, якщо відомо, що прогін мосту становить $2l$, а висота підйому арки – d. Дані для розв’язування наведено в таблиці 7.12.

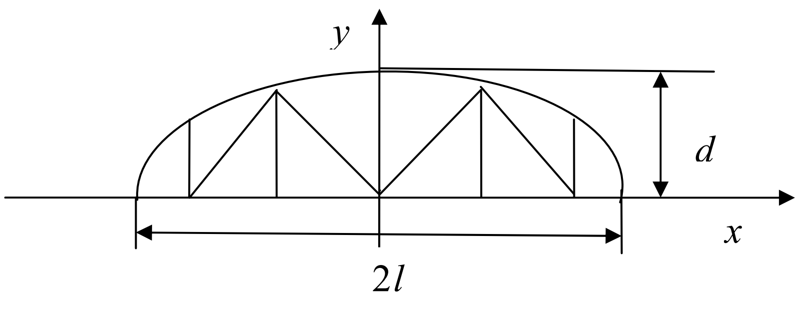


Рисунок 7.3

Таблиця 7.12 – Дані для розв’язування задачі 17

№	*d*	2*l*	№	*d*	2*l*	№	*d*	2*l*
1	20	100	10	21	140	19	24	140
2	25	110	11	17	132	20	10	120
3	30	120	12	18	124	21	16	130
4	18	112	13	13	126	22	19	140
5	15	105	14	11	106	23	23	125
6	16	116	15	12	114	24	21	110
7	10	96	16	15	130	25	22	100
8	12	108	17	20	135			
9	22	126	18	25	145			

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 175 с.
2. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 428 с.
3. Волков Ю. І. Лінійна алгебра / Ю. І. Волков, В. Д. Найко. – Вінниця : ВПІ, 1990. – 92 с.
4. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах у 3-х томах / Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. – Київ : Знання, 2012. – 470 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М. : Высш. шк., 1986. – 304 с.
6. Дубовик В. П. Вища математика : навчальний посібник ч. 1, 2, 3 / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво «А. С. К.», 2010. – 648 с.
7. Краснов М. Л. Вся высшая математика : учебник. Т. 4 / [Краснов М. Л., Кисилев А. И., Макаренко Г. И. и др.]. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 352 с.
8. Кручкович Г. И. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Г. И. Кручкович, Г. М. Мордасов и др. – М. : Высшая школа, 1970. – 512 с.
9. Петрук В. А. Вища математика з прикладними задачами для ігрових занять / Петрук В. А. – Вінниця : ВДТУ, 2000. – С. 15–52.
10. Петрук В. А. Збірник завдань з вищої математики. Частина 1. / Петрук В. А., Кашканова Г. Г., Хом'юк І. В. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 110 с.
11. Петрук В. А. Вища математика з прикладними задачами для ігрових занять / Петрук В. А. – Вінниця : «Універсум–Вінниця», 2006. – 118 с.
12. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. И. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1993. – 480 с.

Навчальне видання

Петрук Віра Андріївна
Прозор Олена Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА З ПРИКЛАДНИМИ ЗАДАЧАМИ
Частина1

Навчальний посібник

Рукопис оформлено В. Прозор

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет виготував О. Ткачук

Підписано до друку 07.09.2018.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 10,26.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2018-153.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.