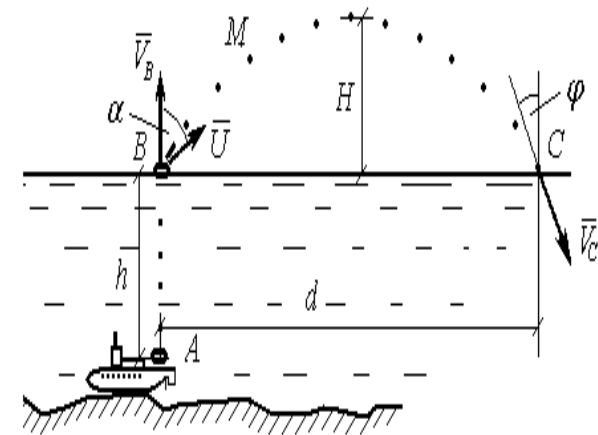


ПРАКТИКУМ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
СТУДЕНТІВ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.
ДИНАМІКА. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Федотов, І. В. Віштак

**ПРАКТИКУМ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
СТУДЕНТІВ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.
ДИНАМІКА. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА**

Практикум

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 531.1
Ф39

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки (протокол № 6 від 27 грудня 2018 р.)

Рецензенти:

В. А. Матвійчук, доктор технічних наук, професор

О. В. Грушко, доктор технічних наук, професор

Г. С. Ратушняк, кандидат технічних наук, професор

Федотов, В. О.

Ф39 Практикум для самостійної практичної роботи студентів з теоретичної механіки. Динаміка. Аналітична механіка / В. О. Федотов, І. В. Віштак. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 109 с.

В практикумі для самостійної практичної роботи студентів з теоретичної механіки (розділи «Динаміка» і «Аналітична механіка») наведені методики розв'язання задач на динаміку точки, принцип Лагранжа, загальні теореми динаміки, принцип Д'Аламбера, загальне рівняння динаміки (принцип Д'Аламбера-Лагранжа) та рівняння Лагранжа 2-го роду і сім комплектів завдань для індивідуальної практичної роботи та поточного контролю знань студентів на практичних заняттях з динаміки точки та тіла. Кожний комплект має 30 однотипних задач.

Практикум призначений для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

УДК 531.1

© ВНТУ, 2019

Зміст

1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИНАМІКИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ	5
2 ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ ТА ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ НА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТТЯХ.....	6
2.1 Дослідження руху невільної матеріальної точки	6
2.1.1 Методика дослідження руху матеріальної точки під дією постійних сил.....	6
2.1.2 Методика дослідження руху матеріальної точки під дією сил, залежних від часу	9
2.1.3 Задачі на динаміку точки.....	14
2.2 Теорема про зміну головного вектора кількості руху.....	24
2.2.1 Методика використання теореми про зміну головного вектора кількості руху для дослідження матеріальної системи	24
2.2.2 Задачі на дослідження руху точки під дією пружних сил	28
2.3 Теорема про рух центра мас матеріальної системи.....	38
2.3.1 Методика використання теореми про рух центра мас для визначення переміщення тіл	38
2.3.2 Задачі на теорему про рух центра мас для визначення переміщення тіл	40
2.4 Використання загальних (основних) теорем, принципів та рівнянь динаміки для дослідження поступального та обертального рухів тіла.....	47
2.4.1 Методика дослідження матеріальної системи з використанням теореми про зміну кінетичного моменту	47
2.4.2 Методика дослідження матеріальної системи з використанням теорему про зміну кінетичної енергії.....	52
2.4.3 Методика дослідження матеріальної системи з використанням загального рівняння динаміки.....	55
2.4.4 Задачі на використання загальних (основних) теорем, принципів та рівнянь динаміки для дослідження поступального та обертального рухів тіла.....	59

2.5 Використання теореми про зміну кінетичної енергії системи та рівняння Лагранжа 2-го роду для дослідження матеріальної системи	66
2.5.1 Методика дослідження матеріальної системи з використанням теореми про зміну кінетичної енергії.....	66
2.5.2 Методика дослідження матеріальної системи з використанням рівняння Лагранжа 2-го роду	71
2.5.3 Задачі на використання теореми про зміну кінетичної енергії системи та рівняння Лагранжа 2-го роду для дослідження матеріальної системи.....	76
2.6 Принцип Д'Аламбера для матеріальної системи	84
2.6.1 Використання принципу Д'Аламбера для дослідження матеріальної системи	84
2.6.2 Задачі на принцип Д'Аламбера для матеріальної системи.....	88
2.7 Визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа).....	98
2.7.1 Методика визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа)	98
2.7.2 Задачі на визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа)	100
Список літератури	108

1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИНАМІКИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Студент має переходити до розв'язання задач тільки після засвоєння основних теоретичних положень динаміки та аналітичної механіки:

- Диференціальні рівняння руху невіЛЬНОї матеріальної точки в проекції на декартові та натуральні осі координат;
- Методи інтегрування диференціальних рівнянь руху точки;
- Маса матеріальної системи, центр мас, швидкість та прискорення центра мас;
- Зовнішні та внутрішні сили матеріальної системи;
- Міри руху точки та матеріальної системи: головний вектор кількості руху системи та кількості руху точки, кінетична енергія точки та системи, момент кількості руху точки та кінетичний момент системи;
- Потенціальна енергія системи;
- Робота та потужність сили, робота сили пружності, ваги, моменту сили;
- Теорема про зміну головного вектора кількості руху матеріальної системи та її наслідки;
- Теорема про рух центра мас матеріальної системи та її наслідки;
- Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи;
- Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки;
- Головний вектор сил інерції матеріальної системи;
- Головний момент сил інерції матеріальної системи;
- Сили інерції при різних формах руху тіла;
- Метод кінетостатики для матеріальної системи;
- Узагальнені координати та сили;
- Віртуальні або можливі переміщення точок та тіл;
- Ідеальні в'язі;
- Принцип Лагранжа або принцип можливих переміщень;
- Принцип Д'Аламбера-Лагранжа або загальне рівняння динаміки;
- Рівняння Лагранжа 2-го роду.

Після засвоєння методики розв'язання задач з відповідних тем на практичних заняттях і розібравшись з прикладами з даної теми в підручниках [1, 2], навчальних посібниках [3–6, 8, 10], конспекті лекцій [9], збірнику задач [7] або зошиті з практичних занять студент приступає до самостійної роботи в аудиторії під керівництвом викладача. Кожен студент розв'язує задачу згідно з варіантом (номер студента в журналі викладача). Основна трудність, з якою студенти зустрічаються з самого початку при розв'язанні задач, – це набуття самостійних навичок в схематизації механічних явищ і вміння конкретні фізичні задачі подавати в абстрактній математичній формі.

При самостійному розв'язанні задачі спочатку необхідно обміркувати план всього розв'язання та встановити які рівняння, принципи, теореми необхідно використати для оптимального розв'язання задачі. Рисунки та розрахункові схеми до задач потрібно виконувати акуратно і, бажано, притримуючись масштабу, оскільки недбало зроблені креслення досить часто приводять до помилок.

2 ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ ТА ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ НА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТТЯХ

2.1 Дослідження руху невільної матеріальної точки

2.1.1 Методика дослідження руху матеріальної точки під дією постійних сил

Матеріальна точка m рухається під дією сили \vec{F} на ділянці AB (рис. 2.1). Знайти час τ руху точки, відстань DC , якщо: $m = 5$ кг, $V_A = 3$ м/с, $F = 30$ Н, $d = 4$ м, $AB = 11$ м.

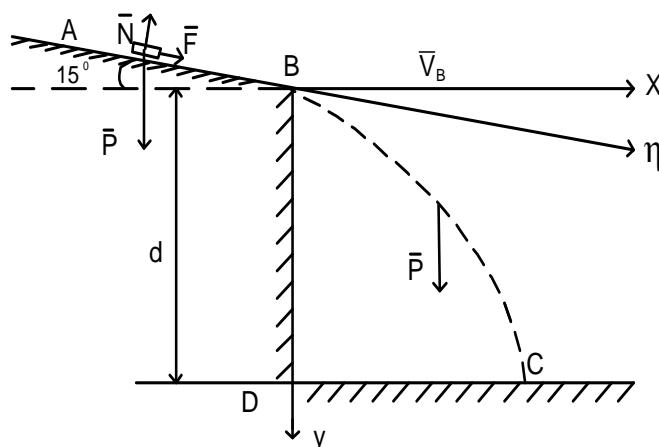


Рисунок 2.1

Точка на ділянці AB рухається під дією сили ваги P та сили F . Запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекціях на вісь η .

$$m\ddot{\eta} = F + P\sin 15^\circ,$$

$$\ddot{\eta} = \frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ.$$

При $t=0$; $\eta = V_A$; $\dot{\eta} = 0$;
 При $t=\tau$; $\eta = V_B$; $\dot{\eta} = AB$.

Інтегруємо диференціальне рівняння руху точки.

$$\frac{d\dot{n}}{dt} = \frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^{\circ},$$

$$\int_{V_0}^{\dot{n}} d\dot{n} = \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^{\circ} \right) \int_0^t dt,$$

$$\dot{n} - V_A = \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^{\circ} \right) \cdot t,$$

$$\dot{n} - V_A = \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^{\circ} \right) \cdot t,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^{\circ} \right) t,$$

$$\int_0^{AB} d\eta = \int_0^{\tau} V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^{\circ} \right) t \cdot dt,$$

$$AB = V_A \cdot \tau + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^{\circ} \right) \frac{\tau^2}{2},$$

або

$$4,27 \cdot \tau^2 + 3\tau - 11 = 0,$$

Звідки:

$$\tau_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 11 \cdot 4,27}}{2 \cdot 4,27} = \frac{-3 \pm 14}{8,57}.$$

Оскільки $\tau \geq 0$, то час руху точки на ділянці АВ: $\tau = 1,28$ с.

Визначимо швидкість точки в пункті В.

$$V_B = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^{\circ} \right) \cdot \tau = 3 + \left(\frac{30}{6} + 9,81 \cdot 0,2588 \right) \cdot 1,28,$$

$$V_B = 19,93 \text{ м/с}.$$

Розглянемо рух точки на ділянці ВС (див. рис. 2.1)

$$m\ddot{x} = 0; \quad \ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = P; \quad \ddot{y} = g.$$

При $t=0$:

$$\dot{x} = V_B \cdot \cos 15^{\circ};$$

$$\dot{y} = V_B \cdot \sin 15^{\circ};$$

$$x = 0, y = 0.$$

При $t = t_1$; $y = d$; $x = DC$.

Інтегруємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g; \quad \int_{V_B \cdot \sin 15^0}^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_0^t g dt;$$

$$y = V_B \cdot \sin 15^0 + gt;$$

$$\frac{dy}{dt} = V_b \cdot \sin 15^0 + gt;$$

$$\int_0^d dy = \int_0^{t_1} V_B \cdot \sin 15^0 \cdot dt + \int_0^{t_1} gt \cdot dt;$$

$$d = V_B \cdot \sin 15^0 \cdot t_1 + g \frac{t_1^2}{2}.$$

Підставляючи дані, отримаємо:

$$4.95 t_1^2 + 5.158 t_1 - 4 = 0.$$

$$\text{Тоді } t_{1,2} = \frac{-5.18 \pm \sqrt{5.18^2 + 4 \cdot 4.95}}{2 \cdot 4.905}; \quad \text{Звідки } t_1 = 0.52 \text{ с.}$$

З рівняння $\ddot{x} = 0$, та початкових умов маємо: $\dot{x} = V_B \cdot \cos 15^0 = 19.25$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 19.25,$$

$$\int_0^{BC} d\dot{x} = 19.25 \int_0^{t_1} dt,$$

$$BC = 19.25 \cdot t_1 = 19.25 \cdot 0.52 = 10 \text{ м.}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 19.25,$$

$$\int_0^{BC} d\dot{x} = 19.25 \int_0^{t_1} dt,$$

$$BC = 19.25 \cdot t_1 = 19.25 \cdot 0.52 = 10 \text{ м.}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 19.25,$$

$$\int_0^{BC} d\dot{x} = 19.25 \int_0^{t_1} dt,$$

$$BC = 19.25 \cdot t_1 = 19.25 \cdot 0.52 = 10 \text{ м.}$$

2.1.2 Методика дослідження руху матеріальної точки під дією сил, залежних від часу Невільна матеріальна точка масою m (рис. 2.2) рухається протягом τ с. по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,25$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти і побудувати траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкості в точці B, якщо початкова швидкість точки $v_0 = 0,5$ м/с; $\tau = 2$ с; $d = 2,0$ м.

На невиліну матеріальну точку масою m , що рухається по похилій шорсткій поверхні OA (рис. 2.2), діє сила $\vec{F} = 6m(1 + 2t)$ Н. Із швидкістю \overline{v}_A точка залишає поверхню OA. На ділянці AB точка переміщується в середовищі з опором, сила якого $\vec{R} = -18m \cdot \vec{v}$ Н.

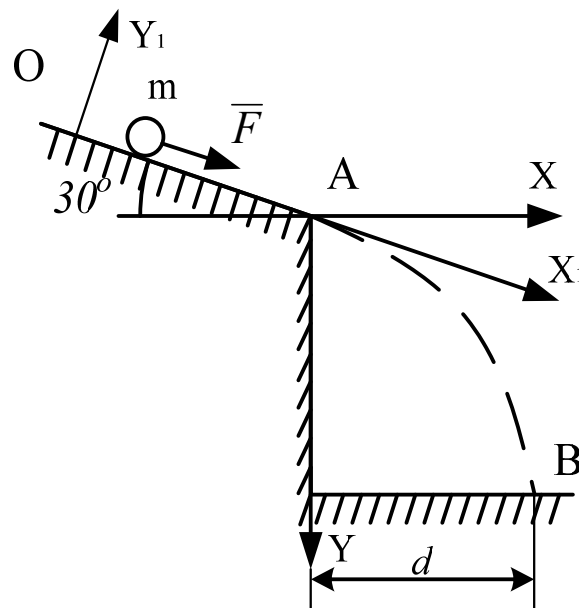


Рисунок 2.2

Розв’язання. Точка масою m на ділянці OA переміщується під дією сил: ваги, сили, нормальної реакції шорсткої поверхні та сили тертя (рис. 2.3).

Запишемо закон руху точки на ділянці OA

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} + \vec{F}$$

в проекціях на осі X_1 та Y_1 .

$$m\ddot{x} = F - F_{mp} + P\sin 30^\circ. \quad (2.1)$$

$$m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ. \quad (2.2)$$

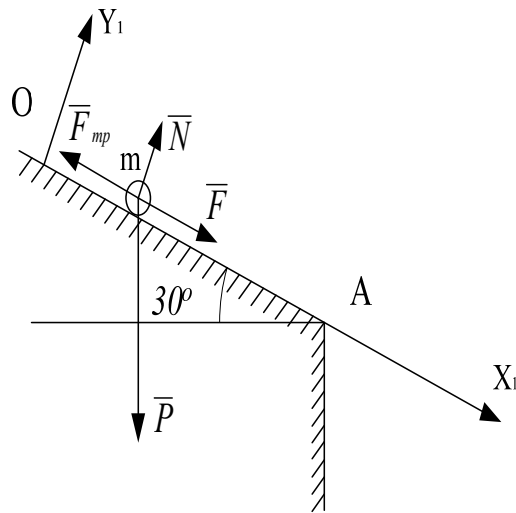


Рисунок 2.3

Силу тертя знайдемо за законом Амонтона-Кулона, який при переміщенні точки з невеликою швидкістю запишеться так

$$F_{mp} = f \cdot N. \quad (2.3)$$

Оскільки точка рухається по прямій ОА, то $\ddot{y} = 0$ і з рівняння (2.2) отримаємо

$$N = P \cos 30^\circ, \quad (2.4)$$

де $P = mg$.

Диференціальне рівняння (2.1), враховуючи (2.3) та (2.4) і значення сили F , набуває вигляду

$$m\ddot{x}_1 = 6m(1+2t) - fmg \cos 30^\circ + mg \sin 30^\circ.$$

Або

$$\ddot{x}_1 = 12t + 8,78. \quad (2.5)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (2.5) при початкових умовах: $t=0$, $\dot{x}_{10} = v_0 = 0.5 \text{ м/с}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}_1}{dt} &= 12t + 8,78, \\ \int_{0.5}^{\dot{x}} d\dot{x}_1 &= \int_0^t 12t \cdot dt + \int_0^t 8,78 \cdot dt, \\ \dot{x} &= 0.5 + 8,78t + 6t^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Відстань OA точка проходить за τ с, і її швидкість v_A в точці A знаходимо за формулою (2.6) при $t_1 = \tau$

$$v_A = 0,5 + 8,78 \cdot \tau + 6\tau^2,$$

$$v_A = 42,06 \text{ м/с}.$$

На ділянці АВ (рис. 2.4) точка рухається під дією сили ваги \bar{P} та сили опору \bar{R} , що направлена в сторону, протилежну напрямку швидкості точки.

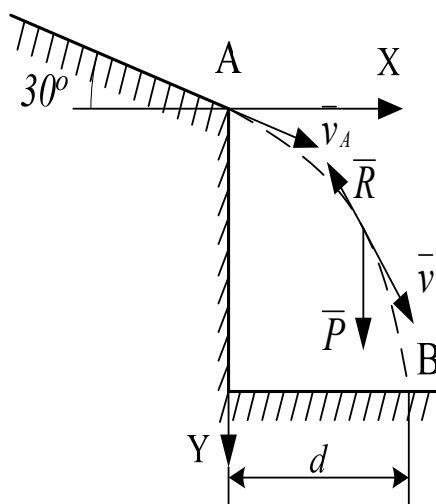


Рисунок 2.4

Запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекціях на осі X та Y.

$$m\ddot{x} = R_x, \quad (2.7)$$

$$m\ddot{y} = P + R_y. \quad (2.8)$$

де $R_x = (-18m\bar{v})_x = -18m\dot{x}$, $R_y = (-18m\bar{v})_y = -18m\dot{y}$, $P = mg$.

Тоді

$$m\ddot{x} = -18m\dot{x}.$$

$$m\ddot{y} = mg - 18m\dot{y}.$$

Або

$$\ddot{x} = -18\dot{x}. \quad (2.9)$$

$$\ddot{y} = g - 18\dot{y}. \quad (2.10)$$

При $t=0;$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= v_A \cdot \cos 30^\circ, x_0 = 0; \\ \dot{y}_0 &= v_A \cdot \sin 30^\circ, y_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Оскільки $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$, то в диференціальних рівняннях (2.9) та (2.10), розподіляючи змінні, отримаємо

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -18dt,$$

$$\frac{d\dot{y}}{g - 18\dot{y}} = dt.$$

Інтегруючи рівняння (2.11) при початкових умовах, знаходимо

$$\ln \dot{x} - \ln(v_A \cos 30^\circ) = -18t, \quad \ln\left(\frac{\dot{x}}{v_A \cos 30^\circ}\right) = -18t.$$

$$\ln(g - 18\dot{y}) - \ln(g - 18v_A \sin 30^\circ) = -18t, \quad \ln\left(\frac{g - 18\dot{y}}{g - 18v_A \sin 30^\circ}\right) = -18t.$$

Або

$$\dot{x} = v_A e^{-18t} \cos 30^\circ. \quad (2.12)$$

$$\dot{y} = \frac{g}{18} + (v_A \sin 30^\circ - \frac{g}{18})e^{-18t}. \quad (2.13)$$

Інтегруємо рівняння (2.12) та (2.13) при початкових умовах (2.11).

$$x = \frac{v_A}{18}(1 - e^{-18t})\cos 30^\circ.$$

$$y = \frac{g}{18}t + \frac{1}{18}\left(v_A \sin 30^\circ - \frac{g}{18}\right)(1 - e^{-18t}).$$

Або

$$x = 2,02(1 - e^{-18t}). \quad (2.14)$$

$$y = 0,545t + 1,17(1 - e^{-18t}). \quad (2.15)$$

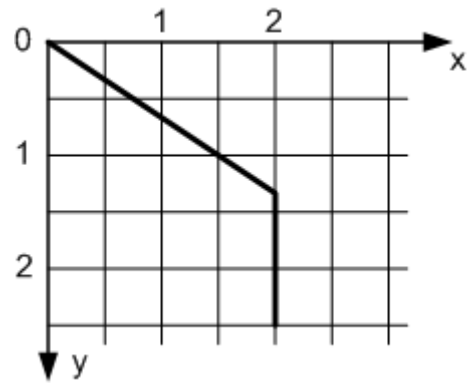
Із рівнянь (2.14) та (2.15) знаходимо рівняння траєкторії руху точки на ділянці АВ.

$$y = 0,055 \ln\left(\frac{2,02}{2,02 - x}\right) + 0,58x. \quad (2.16)$$

Будуємо траєкторію руху точки (рис. 2.5, б), використовуючи рівняння (2.16) (рис. 2.5, а) або формули (2.14) та (2.15).

t	X	y	y/x
0,1	1,686	1,03	0,61
0,3	2,011	1,33	0,66
0,7	2,02	1,55	0,77
1	2,02	1,72	0,85
1,5	2,02	1,99	0,98
2	2,02	2,26	1,12

а)



б)

Рисунок 2.5

Знайдемо швидкість точки v_B . При $t_2=T$, $x_T=d$; тоді з рівняння (2.14) визначаємо час T руху точки на ділянці АВ.

$$d = 2,02(1 - e^{-18T}),$$

$$T = \frac{1}{18} \ln\left(\frac{2,02}{2,02-d}\right) = 0,26 \text{ с}.$$

На підставі рівнянь (2.12) та (2.13) визначаємо проєкції швидкості $\overline{v_B}$ по осі X та Y ($t_2 = T$).

$$v_{BX} = v_A e^{-18T} \cos 30^\circ = 0,35 \text{ м/с}.$$

$$v_{BY} = \frac{g}{18} + \left(v_A \sin 30^\circ - \frac{g}{18}\right) e^{-18T} = 0,74 \text{ м/с}.$$

Швидкість точки $\overline{v_B}$ в пункті В ділянки АВ

$$v_B = \sqrt{v_{BX}^2 + v_{BY}^2},$$

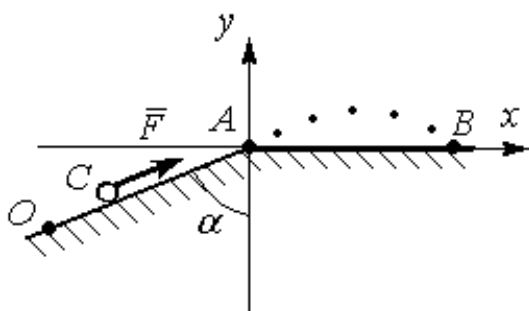
$$v_B = \sqrt{0,35^2 + 0,74^2} = 0,82 \text{ м/с}.$$

На ділянці АВ швидкість точки зменшилась від $v_A=42,06 \text{ м/с}$ до $v_B=0,82 \text{ м/с}$, тобто в $n = \frac{v_A}{v_B} = 51,3$ раз за рахунок сили \overline{R} опору.

Відповідь: $y = 0,055 \ln\left(\frac{2,02}{2,02-x}\right) + 0,58x$, $v_B = 0,82 \text{ м/с}$.

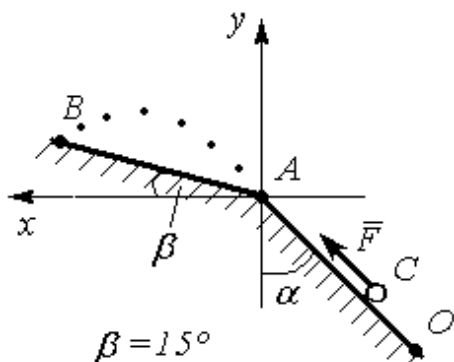
2.1.3 Задачі на динаміку точки

Задача № 1



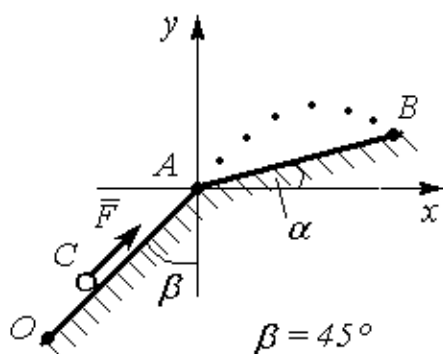
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $\tau = 1$ с, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 2



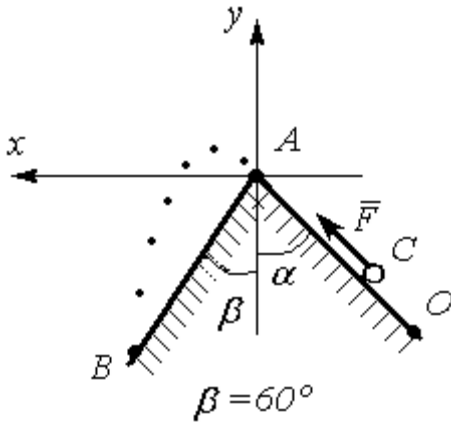
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 35 \cdot m$ Н, $OA = 1$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 3



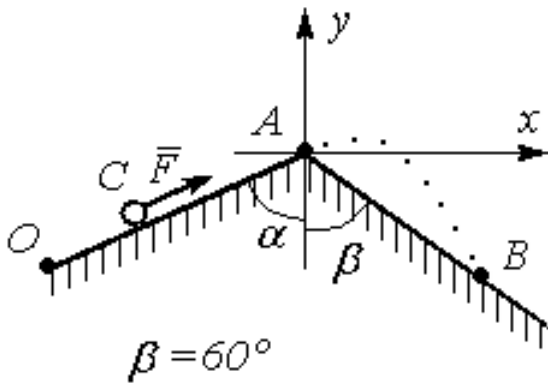
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 15^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $\tau = 2$ с, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 4



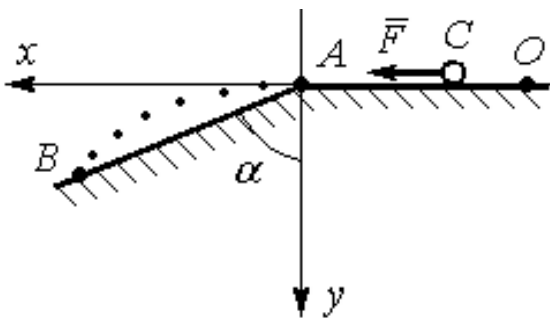
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 15 \cdot m$ Н, $OA = 5$ м, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 5



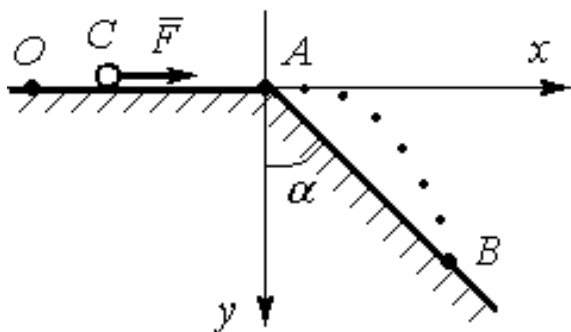
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $\tau = 2$ с, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 6



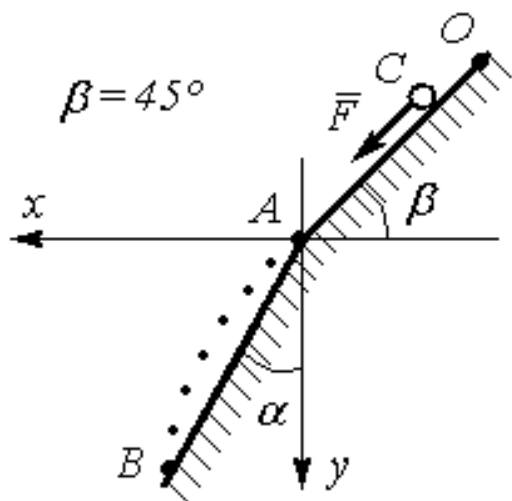
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 1$ м/с.

Задача № 7



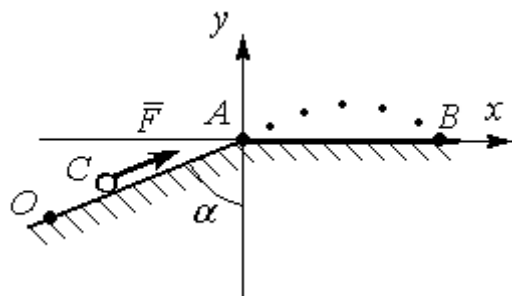
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f=0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 15 \cdot m$, $\tau = 5$ с, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 8



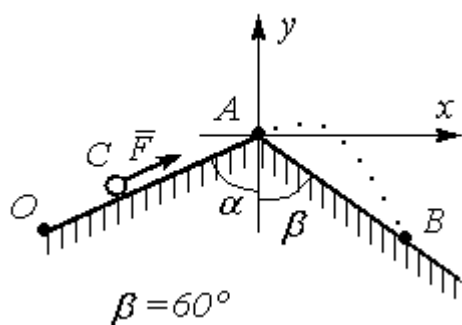
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f=0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 15$ м, $v_0 = 0$ м/с.

Задача № 9



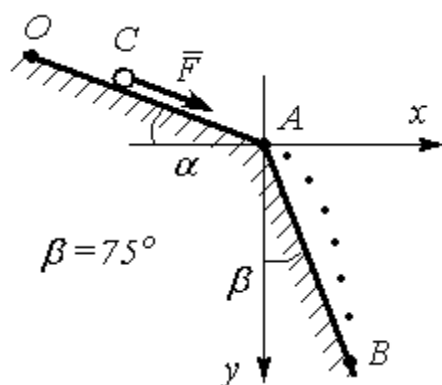
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f=0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $\tau = 3$ с, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 10



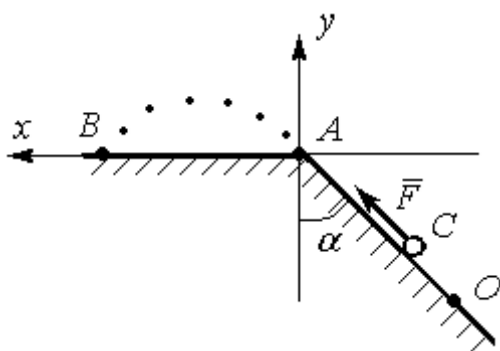
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 11



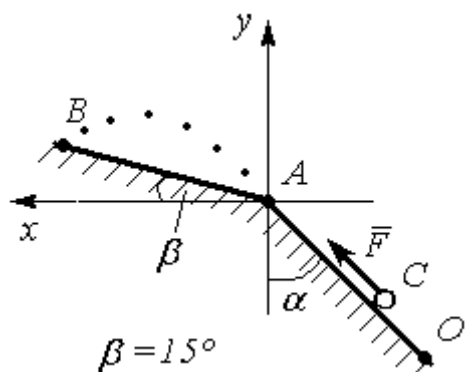
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 0^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $\tau = 6$ с, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 12



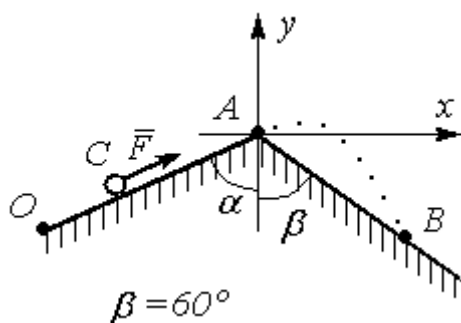
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 35 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 13



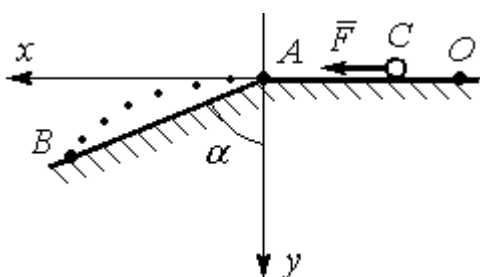
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $\tau = 2$ с, $v_0 = 10$ м/с.

Задача № 14



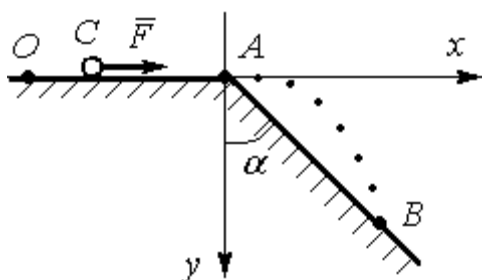
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 5$ м, $v_0 = 10$ м/с.

Задача № 15



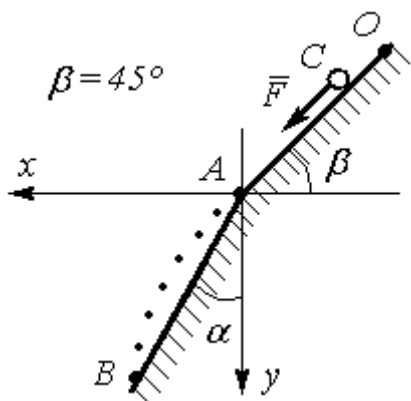
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $\tau = 3$ с, $v_0 = 5$ м/с.

Задача №16



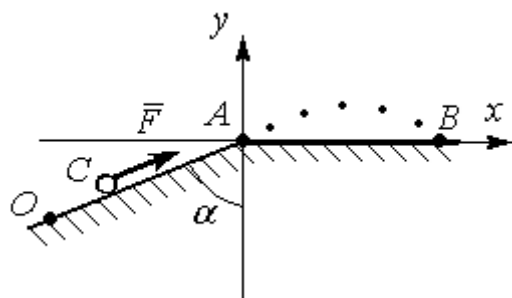
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 5$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Задача №17



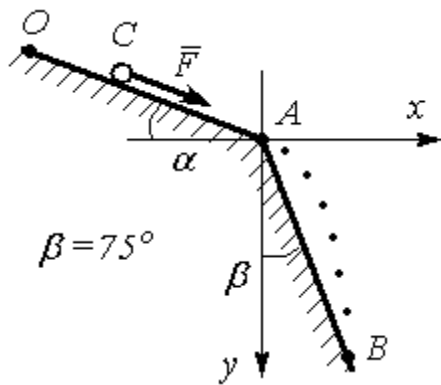
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 15^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $\tau = 4$ с, $v_0 = 1$ м/с.

Задача №18



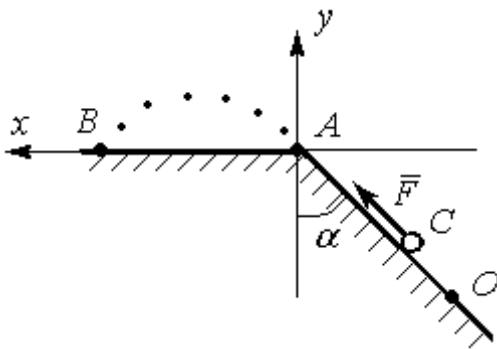
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 19



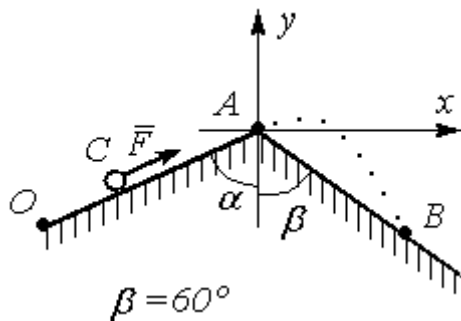
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 0^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $\tau = 4$ с, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 20



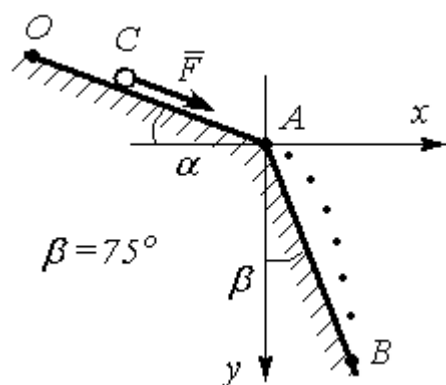
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 35 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 21



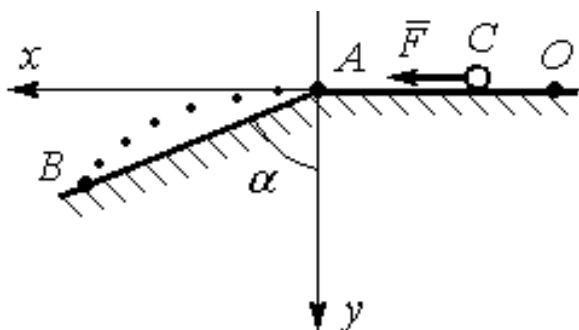
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 15 \cdot m$ Н, $\tau = 1$ с, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 22



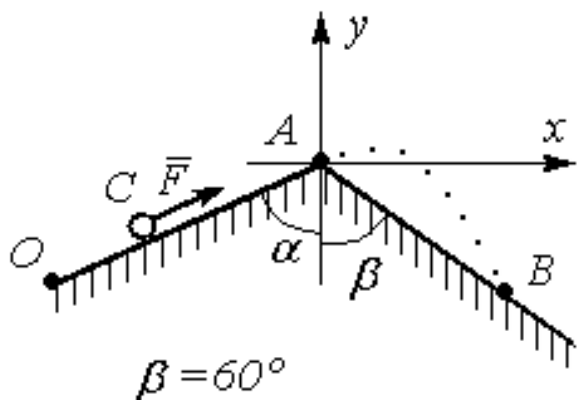
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 0^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 23



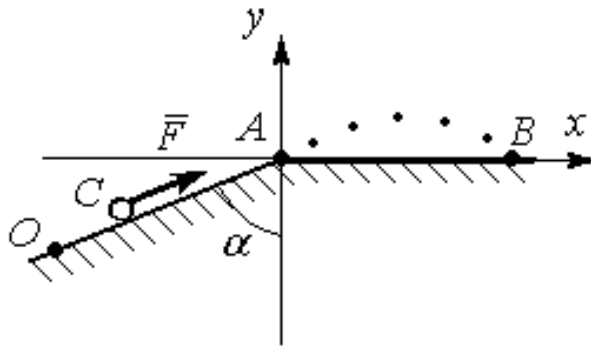
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $v_0 = 15$ м/с, $\tau = 1$ с.

Задача № 24



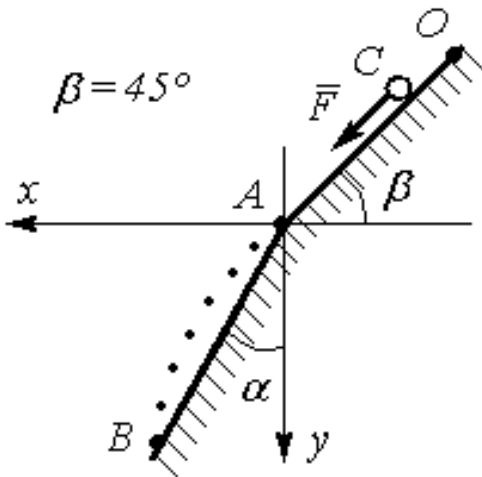
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 25



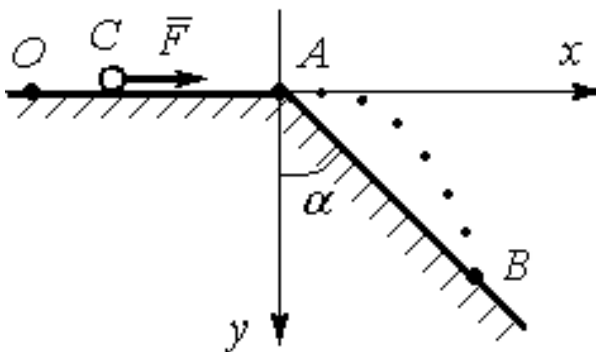
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $\tau = 2$ с, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 26



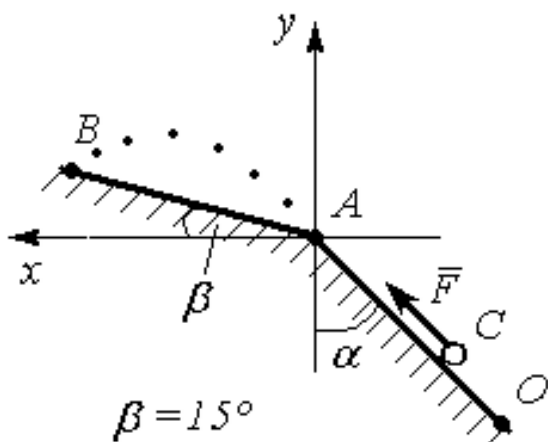
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 15$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 27



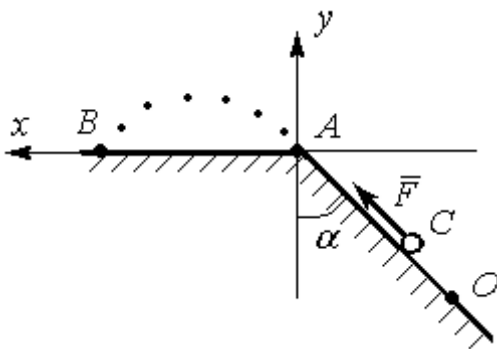
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $\tau = 10$ с, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 28



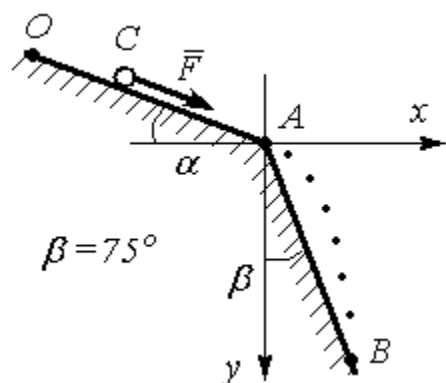
Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 30^\circ$, $F = 25 \cdot m$ Н, $OA = 10$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Задача № 29



Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо $\alpha = 60^\circ$, $F = 15 \cdot m$ Н, $\tau = 5$ с, $v_0 = 15$ м/с.

Задача № 30



Невільна матеріальна точка масою m рухається протягом τ с по шорсткій поверхні OA (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$). В пункті A матеріальна точка зі швидкістю \overline{v}_A залишає поверхню OA і через T_c падає в точку B ділянки AB із швидкістю \overline{v}_B . Знайти траєкторію руху точки на ділянці AB та її швидкість в точці B , якщо: $\alpha = 0^\circ$, $F = 5 \cdot m$ Н, $OA = 5$ м, $v_0 = 5$ м/с.

2.2 Теорема про зміну головного вектора кількості руху

2.2.1 Методика використання теореми про зміну головного вектора кількості руху для дослідження матеріальної системи

Система тіл (рис. 2.6), до якої входить електродвигун 1 масою $m_2 = 20$ кг, однорідний стержень 2 масою $m_2 = 2$ кг та довжиною $\ell = 0,4$ м, матеріальна точка масою $m_A = 0,5$ кг, яка знаходиться в точці А ($OA = 2/3 \cdot \ell$).

Система пружин жорсткістю $C_1 = 2 \cdot 10^3$ Н/м, $C_2 = 3 \cdot 10^3$ Н/м та $C_3 = 4 \cdot 10^3$ Н/м знаходиться у стані статичної рівноваги.

В деякий момент часу точку О зміщують із положення рівноваги ввєрх на $x_0 = 2$ см і надають швидкість $v_0 = 3$ м/с вертикально вниз. Одночасно ротор електродвигуна починає обертатись із постійною кутовою швидкістю $\omega = 1/2 \cdot \rho$ (ρ – частота збурювальної сили) навколо горизонтальної осі.

Знайти закон та побудувати графік (при $t \geq 2 \cdot T$, де T – період) руху центра мас (точка О) електродвигуна.

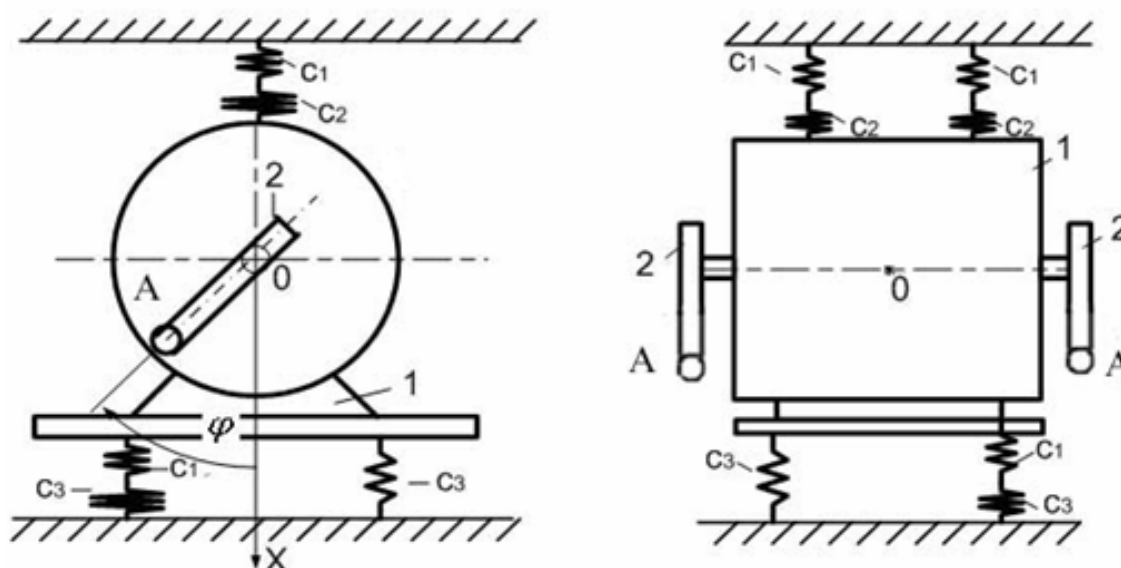


Рисунок 2.6

Розв'язання. Систему пружин замінюємо однією еквівалентною пружиною жорсткістю C .

$$C = 2C_{12} + 2C_3 + 2C_{13} = \left(2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{4}{3} \right) \cdot 10^3 = 13,07 \cdot 10^3 \frac{H}{m},$$

$$\text{де } C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 1,2 \cdot 10^3 \frac{H}{m},$$

$$C_{13} = C_1 \cdot C_3 / (C_1 + C_3) = 2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3) = 4/3 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

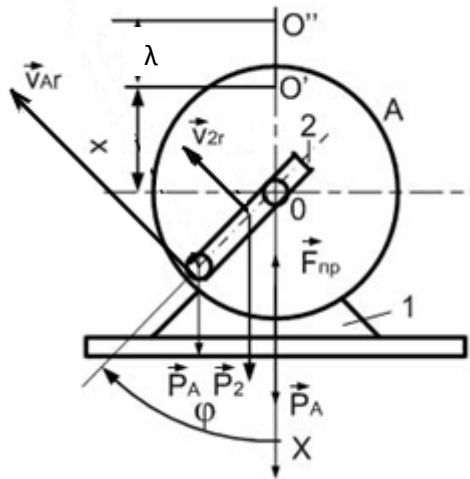


Рисунок 2.7

Розглянемо рух невідільної системи тіл (див. рис. 2.6): електродвигуна 1, двох однорідних стержнів 2, двох матеріальних точок А. Центр мас O електродвигуна зміщений із положення статичної рівноваги O' на величину x (рис. 2.2), а стержні 2 повернулися на кут φ навколо горизонтальної осі O . Дію в'язі (пружину жорсткістю C) замінюємо реакцією в'язі – силою F_{np} . Оскільки в точці O'' деформація пружин дорівнює нулю, то

$$F_{np} = C(x + \lambda), \quad (2.17)$$

де λ – статична деформація пружин, яка знаходиться за формулою

$$\lambda = (P_1 + 2P_2 + 2P_A) / C,$$

де P_1, P_2, P_A – вага, відповідно, тіл 1, 2 та матеріальної точки А. Кутова швидкість обертання ротора

$$\omega = \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{m_1 + 2m_2 + 2m_A}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13,07 \cdot 10^3}{20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5}} = 11,43 \frac{1}{c},$$

оскільки при явищі резонансу частота збудовальної сили p дорівнює власній частоті коливань системи $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (m – маса системи).

Для дослідження руху корпусу електродвигуна (рис. 2.7) використаємо теорему про зміну головного вектора кількості руху системи в проекції на вісь x .

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x^e, \quad (2.18)$$

$$\text{де } F_x^e = P_1 + 2P_2 + 2P_A - F_{np}, \quad P_1 = m_1g, \quad P_2 = m_2g, \quad P_A = m_Ag. \quad (2.19)$$

Проекція Q_x головного вектора кількості руху системи на вісь x

$$Q_x = m_1 \dot{x} + 2m_2 V_{2x} + 2m_A V_{Ax}. \quad (2.20)$$

Використовуючи теорему додавання швидкостей, отримаємо проекцію швидкості точки A і швидкості центра мас тіл 2 на вісь x (див. рис. 2.7).

$$V_{Ax} = \dot{x} + (\bar{V}_{Ar})_x = \dot{x} - \frac{2}{3}l\omega \sin \omega t, \quad (2.21)$$

$$V_{2x} = \dot{x} + (\bar{V}_{2r})_x = \dot{x} - \frac{1}{6}l\omega \sin \omega t,$$

де $\varphi = \omega \cdot t$.

Тепер формула (2.20), враховуючи (2.21), запишеться так:

$$Q_x = \dot{x}(m_1 + 2m_2 + 2m_A) - \left(\frac{1}{3}m_2 + \frac{4}{3}m_A\right)l\omega \sin \omega t. \quad (2.22)$$

Підставляючи значення Q_x (2.22) та F_x^e (2.19) в теорему (2.18), отримаємо диференціальне рівняння

$$\ddot{x}(m_1 + 2m_2 + 2m_A) + cx = \left(\frac{1}{3}m_2 + \frac{4}{3}m_A\right)l\omega^2 \cos \omega t.$$

$$\text{Або } \ddot{x} + k^2 x = h_0 \cos \omega t, \quad (2.23)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m_1 + 2m_2 + 2m_A} = \frac{13,07 \cdot 10^3}{20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5} = 522,8 \frac{1}{c^2},$$

$$h_0 = \frac{(m_2 + 4m_A)l\omega^2}{3(m_1 + 2m_2 + 2m_A)} = \frac{(2 + 4 \cdot 0,5) \cdot 0,4 \cdot 11,43^2}{3(20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,5)} = 2,79 \frac{m}{c^2}.$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.23) складається з загального розв'язку однорідного диференціального рівняння $\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0$, а саме:

$$x_1 = B_1 \cos kt + B_2 \sin kt \quad (2.24)$$

та частинного розв'язку x_2 неоднорідного диференціального рівняння (2.23), який будемо шукати у вигляді

$$x_2 = B_3 \cos \omega t. \quad (2.25)$$

Із (2.23), враховуючи (2.25), знаходимо B_3

$$-\omega^2 B_3 \cos \omega t + k^2 B_3 \cos \omega t = h_0 \cos \omega t,$$

$$B_3 = \frac{h_0}{k^2 - \omega_2^2} = \frac{2.79}{522,8 - 130,6} = 0.007.$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.23)

$$x = x_1 + x_2 = B_1 \cos(22,86t) + B_2 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t). \quad (2.26)$$

Постійні інтегрування B_1 та B_2 визначимо з початкових умов:

$$\text{при } t = 0; \quad x_0 = -0,02 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2.27)$$

Швидкість V точки O (див. рис. 2.7)

$$V = \dot{x} = -22,86 B_1 \sin(22,86t) + 22,86 B_2 \cos(22,86t) - 0,08 \sin(11,43t). \quad (2.28)$$

Із рівнянь (2.26), (2.28) та початкових умов (2.27) знаходимо постійні інтегрування B_1 та B_2 .

$$-0,02 = B_1 + 0,007, \quad 3 = 22,86 B_2, \quad B_2 = 0,13 \text{ м}; \quad B_1 = -0,027 \text{ м}.$$

Тепер рівняння (2.26) руху точки O електродвигуна запишеться як

$$x = -0,027 \cos(22,86t) + 0,13 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t). \quad (2.28)$$

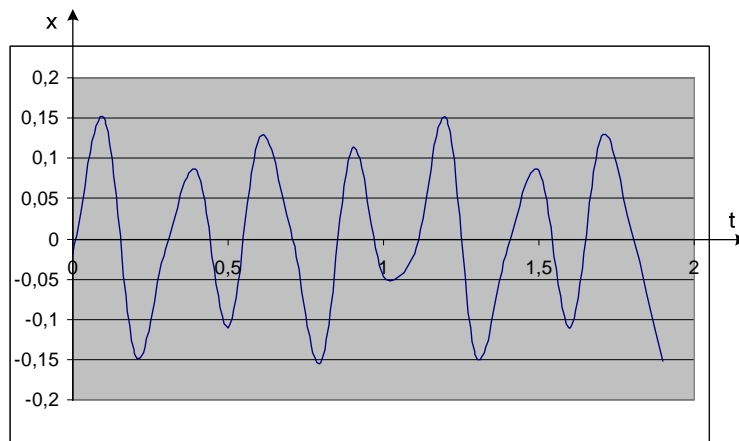


Рисунок 2.8

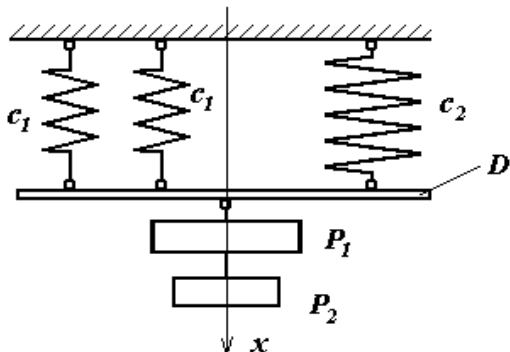
На рис. 2.8 наведено графік, отриманий на підставі формули (2.28), руху точки O корпусу електродвигуна.

Відповідь: $x = -0,027 \cos(22,86t) + 0,13 \sin(22,86t) + 0,007 \cos(11,43t)$.

2.2.2 Задачі на дослідження руху точки під дією пружних сил

Задача № 1

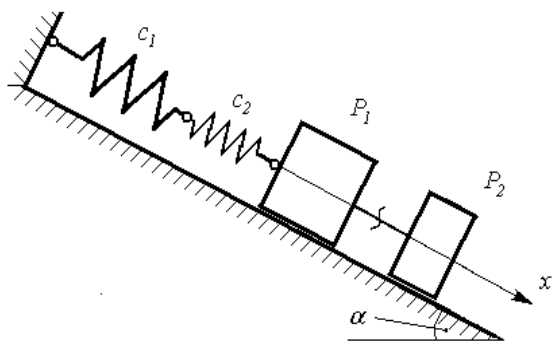
До жорсткого невагомого стержня D , який підвішений до трьох вертикальних пружин жорсткостями c_1 і c_2 , прикріплено вантаж P_1 , а до нього вантаж P_2 . В початковий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 і надають вантажу P_1 початкову швидкість V_0 , направлену по вертикалі вниз.



Вважаючи, що стержень D переміщується поступально, знайти рівняння руху вантажу P_1 , якщо $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 6$ кг, $c_1 = 20$ Н/м, $c_2 = 30$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с.

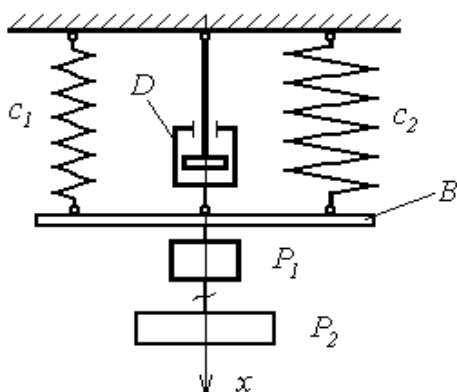
Задача № 2

На похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом, розміщені два вантажі P_1 і P_2 , що прикріплені до двох з'єднаних послідовно пружин жорсткостями c_1 і c_2 . В деякий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 і надають йому в напрямку осі x початкову швидкість V_0 , після чого він рухається по похилій площині. Знайти рівняння руху вантажу P_1 , якщо $m_1 = 6$ кг, $m_2 = 5$ кг, $c_1 = 10$ Н/м, $c_2 = 20$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с.

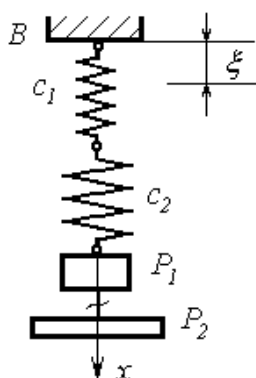


Задача № 3

До невагомого стержня B , який прикріплено до двох пружин жорсткостями c_1 , c_2 і демпфера D , підвішені вантажі P_1 і P_2 масами m_1 , m_2 відповідно. В деякий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 і надають йому початкову швидкість V_0 вниз. Визначити рівняння руху вантажу P_1 , якщо стержень B рухається поступально, а демпфер D створює силу опору, яка пропорційна швидкості $R = \mu V$. При розрахунках прийняти: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг, $c_1 = 10$ Н/м, $c_2 = 20$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с, $\mu = 4$ Н·с/м.



Задача № 4

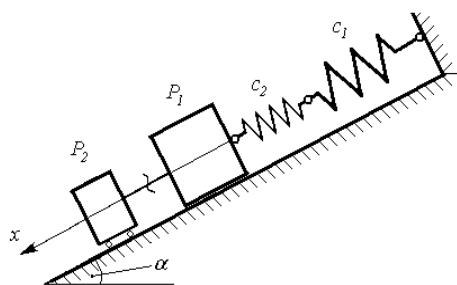


До вертикального повзуну B прикріплено послідовно дві пружини жорсткостями c_1 і c_2 , а до них підвішені вантажі P_1 і P_2 масами m_1 і m_2 , відповідно. В деякий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 , при цьому вантаж P_1 отримує швидкість V_0 , а повзун B починає виконувати вертикальний рух за законом

$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \sin(p_2 t)$$

Визначити рівняння руху вантажу P_1 якщо $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, $c_1 = 100$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м, $V_0 = -0,1$ м/с, $H_1 = 0$, $H_2 = 0,2$ м, $p_2 = 2$ 1/с.

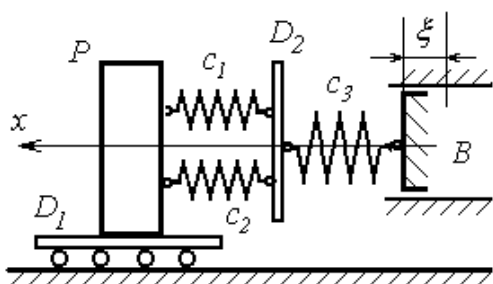
Задача № 5



На похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з горизонтом, знаходиться вантаж P_1 , що прикріплений до двох з'єднаних послідовно пружин жорсткостями c_1 і c_2 . В деякий момент часу до вантажу P_1 миттєво приєднують вантаж P_2 і надають їм обом початкову

швидкість V_0 , після чого вони рухаються по площині. Знайти рівняння руху вантажів P_1 і P_2 , якщо $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, $c_1 = 100$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с.

Задача № 6



На горизонтальну платформу D_1 помістили вантаж P масою m , який приєднали до системи пружин жорсткостями c_1 , c_2 і c_3 , причому на пружину жорсткістю c_3 діє в горизонтальному напрямку повзун B . В деякий момент часу вантажу P надають початкову швидкість V_0 , а

повзун B починає виконувати рух за законом

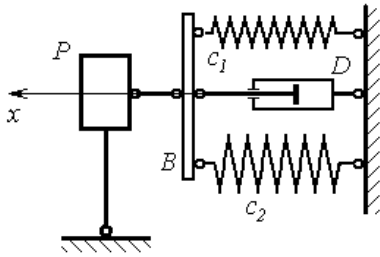
$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \sin(p_2 t)$$

Визначити рівняння руху вантажу P і побудувати графік залежності координати від часу, якщо тіла D_1 і D_2 вважаються невагомими, рухаються поступально, а тертя відсутнє.

При розрахунках прийняти $m = 10$ кг, $c_1 = 100$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м, $c_3 = 300$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с, $H_1 = 0,1$ м, $H_2 = 0$, $p_1 = 2$ с⁻¹.

Задача № 7

Тіло P масою m приєднано до горизонтальних пружин (жорсткостями c_1, c_2) і демпфера D (за допомогою невагомго стержня B). При русі тіла

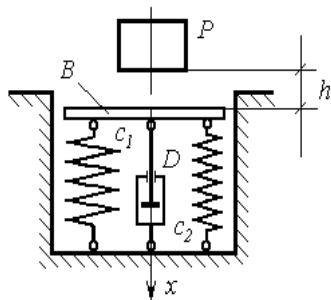


P демпфер створює силу опору R , яка має напрямок, протилежний швидкості V і описується залежністю $R = \mu V$, де μ – коефіцієнт в'язкості рідини, яка міститься в демпфері. В початковий момент часу тілу P надають початкову швидкість V_0 і зміщення x_0 , після чого воно виконує рух вздовж

горизонтальної осі x .

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо стержень B рухається поступально, відхилення від положення рівноваги малі і горизонтальні. При розрахунках прийняти $m = 10$ кг, $c_1 = 1000$ Н/м, $c_2 = 2000$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с, $x_0 = 0,2$ м, $\mu = 140$ Н·с/м.

Задача № 8



Тіло P масою m падає з висоти h на горизонтальну невагому платформу B , яка опирається на пружини (жорсткостями c_1, c_2) і демпфер D . На висоті h тілу P надають початкову швидкість U в напрямку вертикалі, і воно падає до зустрічі з платформою B . При русі тіла P разом з платформою демпфер створює

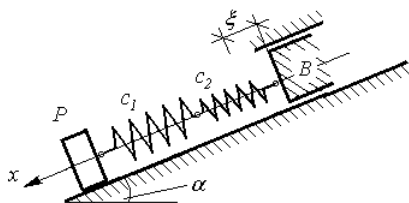
силу опору R , яка має напрямок, протилежний швидкості V , і описується залежністю $R = \mu V$, де μ – коефіцієнт в'язкості рідини, яка міститься в демпфері.

Визначити рівняння руху тіла P , якщо платформа B рухається поступально, а удар тіла P до платформи B абсолютно непружний.

При розрахунках прийняти $m = 20$ кг, $c_1 = 800$ Н/м, $c_2 = 1000$ Н/м, $h = 0,3$ м, $U = 0,2$ м/с, $\mu = 1000$ Н·с/м.

Задача № 9

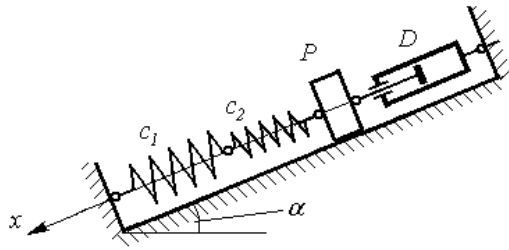
На похилій площині з кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту розташований вантаж P масою m , який закріплено до нижнього кінця послідовно з'єднаних пружин c_1 і c_2 , а до верхнього кінця пружин прикріплено повзун B . Система знаходиться в положенні статичної рівноваги. В деякий момент часу повзун B починає вздовж похилої площини рух за законом



$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \cos(p_2 t)$$

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо $m = 4$ кг, $c_1 = 10$ Н/м, $c_2 = 20$ Н/м, $H_1 = 0$, $H_2 = 0,2$ м, $p_2 = 2$ с⁻¹.

Задача № 10



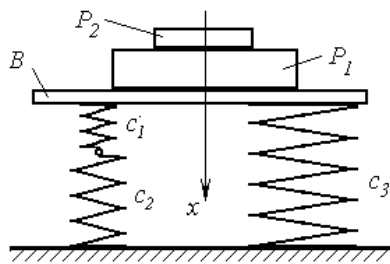
На похилій площині з кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту розташований вантаж P масою m , який закріплено до верхнього кінця послідовно з'єднаних пружин c_1 і c_2 і до демпфера D . Система знаходиться в положенні статичної рівноваги.

При русі тіла демпфер D створює силу опору, залежну від швидкості ($R = \mu V$). В початковий момент часу вантажу P надають початкове зміщення x_0 і початкову швидкість V_0 , після чого воно рухається вздовж осі x .

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо $c_1 = 1800$ Н/м, $c_2 = 2000$ Н/м, $m = 10$ кг, $V_0 = 0,2$ м/с, $x_0 = 0,1$ м, $\mu = 100$ Н·с/м.

Задача № 11

Два вантажі P_1 і P_2 масами, відповідно, m_1 і m_2 , знаходяться на невагомій платформі B , яка підтримується системою пружин жорсткостями c_1 , c_2 і c_3 . Маси вантажів P_1 і P_2 складають відношення: $m_1/m_2 = n$, а при вільних коливаннях вказаних вантажів циклічна частота дорівнює k . В положенні статичної рівноваги платформа B зміщена на λ_{cm} .



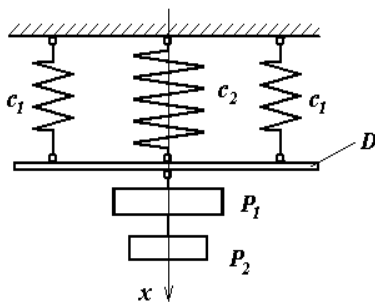
В початковий момент часу вантаж P_2 знімають, при цьому вантаж P_1 набуває початкову швидкість V_0 у вертикальному напрямку. Знайти рівняння коливального руху вантажу P_1 , якщо платформа B рухається поступально, а опором середовища нехтуємо.

При розрахунках прийняти $n = 2$, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 2000$ Н/м, $c_3 = 3000$ Н/м, $V_0 = 1$ м/с, $\lambda_{cm} = 0,1$ м, $k = 10$ с⁻¹.

рухається поступально, а опором середовища нехтуємо.

При розрахунках прийняти $n = 2$, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 2000$ Н/м, $c_3 = 3000$ Н/м, $V_0 = 1$ м/с, $\lambda_{cm} = 0,1$ м, $k = 10$ с⁻¹.

Задача № 12



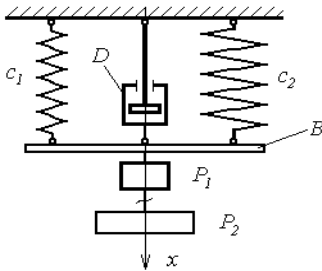
До жорсткого невагомого стержня D , який підвішений до трьох вертикальних пружин жорсткостями c_1 і c_2 , прикріплено вантаж P_1 . В початковий момент часу до вантажу P_1 миттєво приєднують вантаж P_2 і надають системі вантажів P_1 і P_2 початкову швидкість V_0 , направлену по вертикалі вниз. Вважаючи, що стержень D переміщується

поступально, знайти рівняння руху вантажів P_1 і P_2 як одної точки.

При розрахунках прийняти: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, $c_1 = 60$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м, $V_0 = 0,5$ м/с, $k = 10$ с⁻¹.

Задача № 13

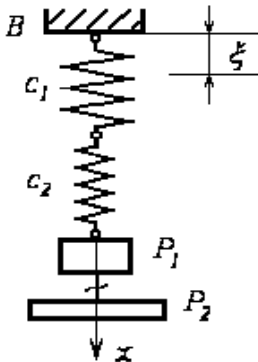
До невагомому стержню B , який прикріплено до двох пружин (жорсткостями c_1, c_2) і демпфера D , підвішений вантаж P_1 масою m_1 . В деякий момент часу до вантажу P_1 миттєво приєднують вантаж P_2 масою m_2 так, що вантажі P_1, P_2 набувають початкову швидкість V_0 . Визначити рівняння руху вантажів P_1 і P_2 , побудувати графік залежності координати від часу, якщо стержень B рухається поступально, а демпфер D створює силу опору, яка пропорційна швидкості $R = \mu V$.



При розрахунках прийняти: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг, $c_1 = 20$ Н/м, $c_2 = 10$ Н/м, $V_0 = -0,5$ м/с, $\mu = 5$ Н·с/м.

Задача № 14

До вертикального повзуна B прикріплено пружини (жорсткостями c_1 і c_2), а до них підвішений вантаж P_1 масою m_1 . В деякий момент часу до вантажу P_1 приєднують вантаж P_2 масою m_2 , а повзун B починає виконувати вертикальний рух за законом



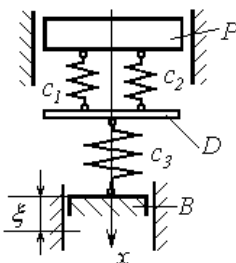
$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \cos(p_2 t).$$

Визначити рівняння руху вантажів P_1, P_2 як одного тіла, якщо їх початкова швидкість V_0 .

При розрахунках прийняти: $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 2$ кг, $c_1 = 560$ Н/м, $c_2 = 120$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с, $k = 10$ с⁻¹, $H_1 = 0$, $H_2 = 0,2$ м, $p_2 = 2$ с⁻¹.

Задача № 15

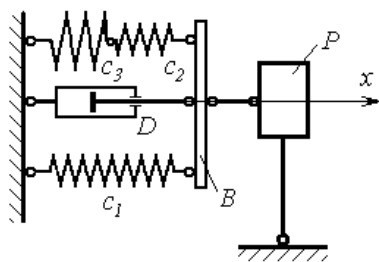
На невагомому платформі D , яка опирається на систему пружин жорсткостями c_1, c_2 і c_3 , помістили вантаж P масою m , (причому пружина жорсткістю c_3 підтримується повзуном B). В деякий момент часу вантажу P надають початкову швидкість V_0 , а повзун B починає виконувати вертикальний рух за законом



$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \sin(p_2 t).$$

Визначити рівняння руху вантажу P від часу, якщо в початковий момент часу система знаходилась в положенні статичної рівноваги; платформа D рухається поступально, а тертя відсутнє. При розрахунках прийняти: $m = 5$ кг, $c_1 = 60$ Н/м, $c_2 = 120$ Н/м, $c_3 = 220$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с, $k = 10$ с⁻¹, $H_1 = 0,3$ м, $H_2 = 0$, $p_1 = 2$ с⁻¹.

Задача № 16

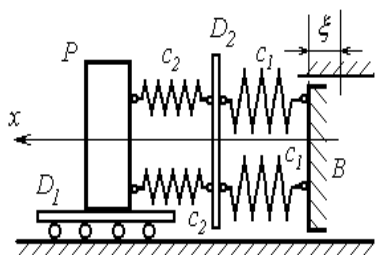


Тіло P масою m приєднано до горизонтальних пружин жорсткостями c_1, c_2, c_3 і демпфера D за допомогою невагомго стержня B , як показано на рис. При русі тіла P демпфер створює силу опору R , яка має напрямок протилежний до швидкості V і описується залежністю $R = \mu V$, де μ коефіцієнт в'язкості рідини, яка міститься в демпфері. В

початковий момент часу тілу P надають початкової швидкості V_0 і зміщення x_0 , після чого воно виконує рух вздовж горизонтальної осі x .

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо стержень B рухається поступально, а відхилення від положення рівноваги малі і горизонтальні. При розрахунках прийняти: $m = 15$ кг, $c_1 = 60$ Н/м, $c_2 = 120$ Н/м, $c_3 = 220$ Н/м, $V_0 = -0,1$ м/с, $x_0 = 0,2$ м, $\mu = 5$ Н·с/м.

Задача № 17



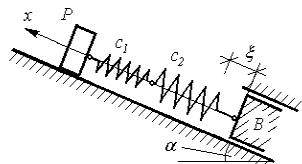
На горизонтальну платформу D_1 помістили тіло P масою m , яке приєднали до системи пружин жорсткостями c_1 і c_2 , причому на пружини жорсткістю c_1 діє в горизонтальному напрямку повзун B . В деякий момент часу тілу P надають початкову швидкість V_0 , а повзун B починає виконувати рух за законом

$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \sin(p_2 t).$$

Визначити рівняння руху тіла P і побудувати графік залежності координати від часу, якщо тіла D_1 і D_2 вважаються невагомими, рухаються поступально, а тертя відсутнє.

При розрахунках прийняти: $m = 25$ кг, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 120$ Н/м, $V_0 = -0,5$ м/с, $H_1 = 0,1$ м, $H_2 = 0$, $p_1 = 4$ с⁻¹.

Задача № 18

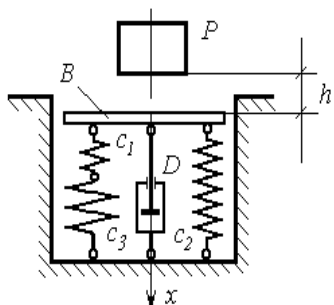


На похилій площині з кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту розташований вантаж P масою m , який закріплено до верхнього кінця послідовно з'єднаних пружин c_1 і c_2 , а до нижнього кінця пружин прикріплено повзун B . Система знаходиться в положенні статичної рівноваги. В деякий момент часу повзун B починає вздовж похилої площини рух за законом

$$\xi = H_1 \cdot \cos(p_1 t) + H_2 \cdot \sin(p_2 t).$$

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо $m = 5$ кг, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 1200$ Н/м, $H_2 = 0,3$ м, $H_1 = 0$, $p_2 = 2$ с⁻¹.

Задача № 19



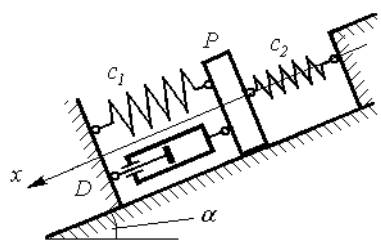
Тіло P масою m падає з висоти h на горизонтальну невагому платформу B , яка опирається на пружини (жорсткостями c_1, c_2, c_3) і демпфер D . На висоті h тілу P надають початкову швидкість U в напрямку вертикалі, і воно падає до зустрічі з платформою B . При русі тіла P разом з платформою демпфер створює силу опору R , яка має напрямок протилежний швидкості V і описується залежністю $R = \mu V$, де μ – коефіцієнт в'язкості рідини, яка міститься в демпфері.

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо платформа B рухається поступально, а удар тіла P у платформу B абсолютно непружний.

При розрахунках прийняти: $m = 15$ кг, $c_1 = 60$ Н/м, $c_2 = 120$ Н/м, $c_3 = 220$ Н/м, $U = 0,1$ м/с, $h = 0,2$ м, $\mu = 5$ Н·с/м.

Задача № 20

На похилій площині з кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту розташований вантаж P масою m , який закріплено до двох пружин жорсткостями c_1 і c_2 і до демпфера D . Система знаходиться в положенні статичної рівноваги. При русі тіла демпфер D створює силу опору $R = \mu V$, залежну від швидкості. В початковий момент часу тілу P надають початкове зміщення x_0 і початкову швидкість V_0 , після чого воно рухається вздовж осі x .

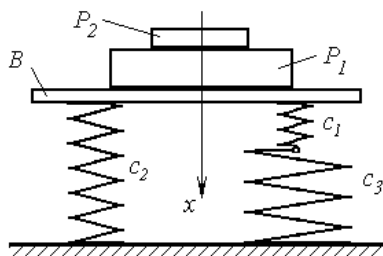


Визначити рівняння руху вантажу P , якщо:

$m = 10$ кг, $c_1 = 260$ Н/м, $c_2 = 120$ Н/м, $V_0 = 1$ м/с, $x_0 = 0,2$ м, $\mu = 15$ Н·с/м.

Задача № 21

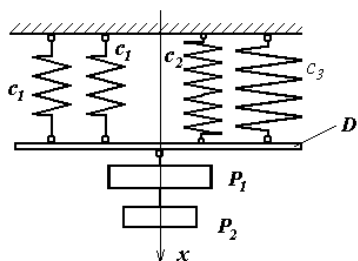
Вантаж P_1 знаходиться на невагомій платформі B , яка підтримується системою пружин жорсткостями c_1, c_2 і c_3 . При вільних коливаннях вантажу P_1 циклічна частота дорівнює k , а в положенні статичної рівноваги платформа B зміщена на λ_{cm} .



В початковий момент часу на вантаж P_1 кладуть вантаж P_2 , при цьому вони набувають початкову швидкість V_0 у вертикальному напрямку. Маси вантажів P_1 і P_2 складають відношення $m_2/m_1 = n$. Знайти рівняння коливального руху вантажів P_1 і P_2 як одного тіла, якщо платформа B рухається поступально, а опором середовища нехтуємо.

При розрахунках прийняти: $n = 2$, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м, $c_3 = 300$ Н/м, $V_0 = 1$ м/с, $\lambda_{cm} = 0,1$ м, $k = 20$ с⁻¹.

Задача № 22

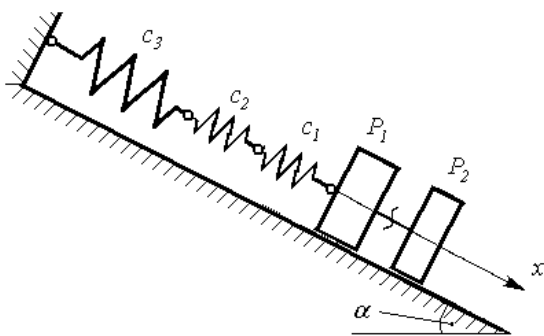


До жорсткого невагомго стержня D , підв'язаного до чотирьох вертикальних пружин жорсткостями c_1 , c_2 і c_3 прикріплено вантаж P_1 , а до нього вантаж P_2 . В початковий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 і надають вантажу P_1 початкову швидкість V_0 ,

направлену по вертикалі.

Вважаючи, що стержень D переміщується поступально, знайти рівняння руху вантажу P_1 , якщо $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $c_1 = 100$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м, $c_3 = 300$ Н/м, $V_0 = 0,1$ м/с.

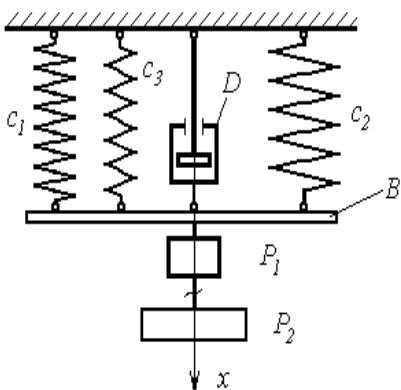
Задача № 23



На похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з горизонтом, розміщені два вантажі P_1 і P_2 , що прикріплені до системи пружин жорсткостями c_1 , c_2 і c_3 . В деякий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 і надають йому початкову швидкість V_0 , після чого він рухається по

площині, де тертя відсутнє. Знайти рівняння руху вантажу P_1 , якщо $m_1 = 12$ кг, $m_2 = 2$ кг, $c_1 = 1200$ Н/м, $c_2 = 2000$ Н/м, $c_3 = 3000$ Н/м, $V_0 = 1$ м/с.

Задача № 24

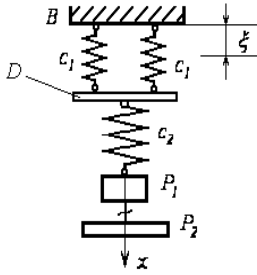


До невагомго стержня B , прикріпленого до трьох пружин (жорсткостями c_1 , c_2 , c_3) і демпфера D , підв'язані вантажі P_1 і P_2 масами m_1 , m_2 , відповідно. В деякий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 і надають йому початкову швидкість V_0 . Визначити рівняння руху вантажу P_1 , побудувати графік залежності координати від часу, якщо стержень B рухається

поступально, а демпфер D створює силу опору $R = \mu V$, яка пропорційна швидкості.

При розрахунках прийняти: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 20$ кг, $c_1 = 360$ Н/м, $c_2 = 220$ Н/м, $c_3 = 240$ Н/м, $V_0 = 1$ м/с, $\mu = 15$ Н·с/м.

Задача № 25

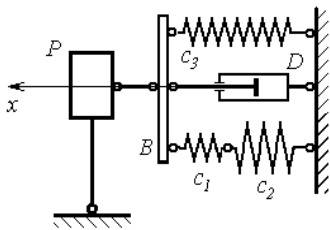


До вертикального повзуна B прикріплено систему з трьох пружин жорсткостями c_1 і c_2 , а до неї підвішені вантажі P_1 і P_2 масами m_1 і m_2 . В деякий момент часу вантаж P_2 миттєво від'єднують від вантажу P_1 , при цьому вантаж P_1 отримує швидкість V_0 , а повзун B починає виконувати вертикальний рух за законом

$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \sin(p_2 t).$$

Визначити рівняння руху вантажу P_1 і побудувати графік залежності координати від часу. Масою стержня D нехтуємо. При розрахунках прийняти: $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 10$ кг, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 1200$ Н/м, $c_3 = 220$ Н/м, $V_0 = 1$ м/с, $H_1 = 0,2$ м, $H_2 = 0$, $p_1 = 2$ с⁻¹.

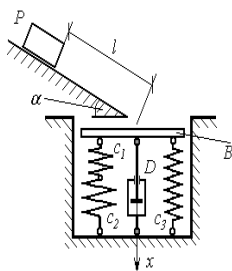
Задача № 26



Тіло P масою m приєднано до горизонтальних пружин (жорсткостями c_1 , c_2 , c_3) і демпфера D за допомогою невагомого стержня B . При русі тіла P демпфер створює силу опору R , яка має напрямок протилежний швидкості V і описується залежністю $R^0 = \mu V$, де μ – коефіцієнт в'язкості рідини, яка міститься в демпфері. В початковий момент часу тілу P надають початкову швидкість V_0 і зміщення x_0 , після чого воно виконує рух вздовж горизонтальної осі x . Визначити рівняння руху тіла P і побудувати графік залежності координати від часу, якщо стержень B рухається поступально, відхилення від положення рівноваги малі і горизонтальні.

При розрахунках прийняти: $m = 25$ кг, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 1200$ Н/м, $c_3 = 800$ Н/м, $V_0 = -0,5$ м/с, $x_0 = 0,1$ м, $\mu = 15$ Н·с/м.

Задача № 27

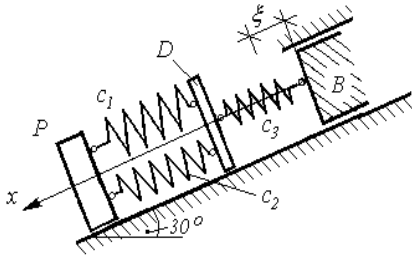


Тіло P масою m ковзає по похилій гладенькій площині з кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту, потім падає на невагому платформу B , яка опирається на пружини (жорсткостями c_1 , c_2 , c_3) і демпфер D . На початку руху тілу P надають початкову швидкість U в напрямку площини, і воно до дотику з платформою B проходить шлях l . При русі тіла P разом з платформою демпфер D створює силу опору R , яка має протилежний швидкості V напрямком і описується залежністю $R = \mu V$, де μ – коефіцієнт в'язкості рідини, яка міститься в демпфері.

Визначити рівняння руху тіла P , якщо платформа B рухається поступально, а удар тіла P до платформи B абсолютно непружний.

При розрахунках прийняти: $m = 25$ кг, $l = 2$ м, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 1200$ Н/м, $c_3 = 800$ Н/м, $U = 0,5$ м/с, $\mu = 150$ Н·с/м.

Задача № 28



На похилій площині з кутом 30° до горизонту розташований вантаж P масою m , який закріплено до нижнього кінця системи пружин c_1 , c_2 і c_3 , а до верхнього кінця пружин прикріплено повзун B . Система знаходиться в положенні статичної рівноваги. В деякий момент часу повзун B

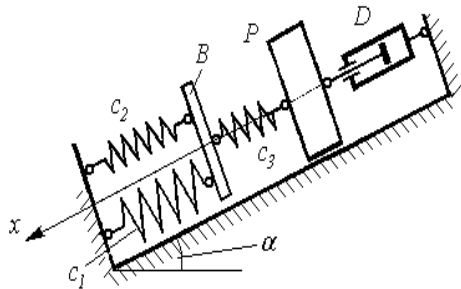
починає вздовж похилої площини рух за законом

$$\xi = H_1 \cdot \sin(p_1 t) + H_2 \cdot \cos(p_2 t).$$

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо тертя відсутнє, а масою пластини D , яка рухається поступально, нехтуємо.

При розрахунках прийняти: $m = 15$ кг, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 1200$ Н/м, $c_3 = 800$ Н/м, $H_2 = 0,1$ м, $H_1 = 0$, $p_2 = 2$ с $^{-1}$.

Задача № 29



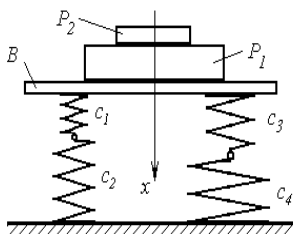
На похилій площині з кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту розташований вантаж P масою m , який закріплено до верхнього кінця системи пружин c_1 , c_2 , c_3 і до демпфера D . Система знаходиться в положенні статичної рівноваги. При русі тіла демпфер D створює залежну від

швидкості силу опору $R = \mu V$. В початковий момент часу тілу P надають початкове зміщення x_0 і початкову швидкість V_0 , після чого воно рухається вздовж осі x .

Визначити рівняння руху вантажу P , якщо тертя відсутнє, а масою тіла B , яке рухається поступально, нехтуємо.

При розрахунках прийняти: $m = 25$ кг, $c_1 = 640$ Н/м, $c_2 = 1200$ Н/м, $c_3 = 800$ Н/м, $V_0 = 0,5$ м/с, $x_0 = 0,1$ м, $\mu = 15$ Н·с/м.

Задача № 30



Два вантажі P_1 і P_2 масами m_1 і m_2 , відповідно, знаходяться на невагомій платформі B , яка підтримується системою пружин жорсткостями c_1 , c_2 , c_3 і c_4 . Маси вантажів P_1 і P_2 складають відношення: $m_1/m_2 = n$, а при вільних коливаннях вказаних вантажів циклічна частота дорівнює k . В положенні статичної рівноваги платформа B

зміщена на λ_{cm} . В початковий момент часу вантаж P_2 знімають, при цьому вантаж P_1 набуває початкову швидкість V_0 в вертикальному напрямку. Знайти рівняння коливного руху вантажу P_1 , якщо платформа B рухається поступально, а опором середовища нехтуємо.

При розрахунках прийняти: $n = 2$, $c_1 = 600$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м, $c_3 = 300$ Н/м, $c_4 = 1300$ Н/м, $V_0 = 2$ м/с, $\lambda_{cm} = 0,1$ м, $k = 10$ с $^{-1}$.

2.3 Теорема про рух центра мас матеріальної системи

2.3.1 Методика використання теореми про рух центра мас для визначення переміщення тіл

По похилій площині (рис. 2.9) призми 1 масою $m_1 = 10$ кг спускається вантаж 2 ($m_2 = 6$ кг), який тягне за допомогою невагомий нитки вантаж 3 масою $m_3 = 4$ кг.

Знайти переміщення призми 1 по гладенькій горизонтальній площині, якщо тіло m_2 опустилось по похилій площині на $S = 0,5$ м.

Розв'язання. Покажемо зовнішні сили, які прикладені до матеріальної системи, що складається з призми 1 та тіл 2, 3. Такими силами є: $P_1 = m_1g$ – сила ваги призми, $P_2 = m_2g$ і $P_3 = m_3g$ – ваги, відповідно, другого та третього вантажів, N – реакція гладенької горизонтальної поверхні.

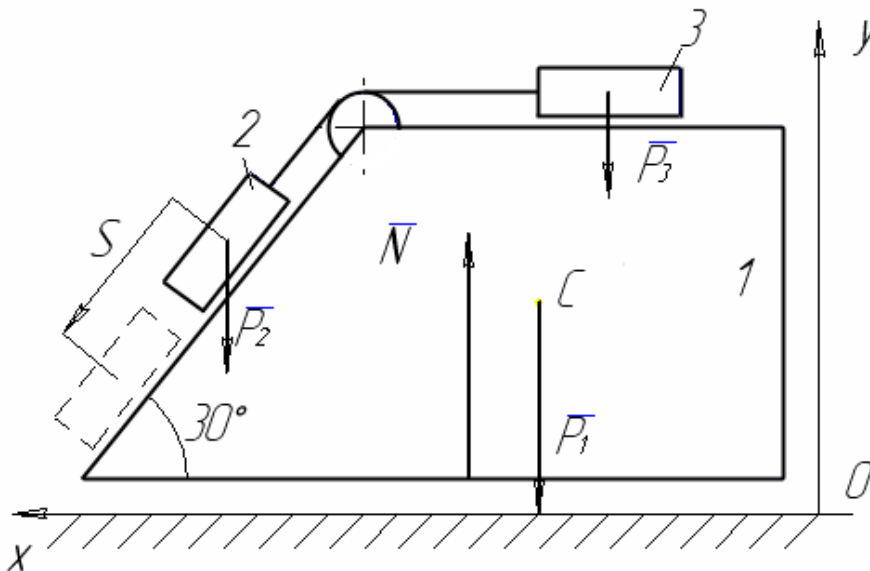


Рисунок 2.9

Запишемо теорему про рух центра мас матеріальної системи в проєкціях на вісь x

$$M\ddot{x}_c = F_x^e, \quad (2.29)$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$,

F_x^e – проєкція головного вектора зовнішніх сил на вісь X .

Оскільки $F_x^e = 0$, то $M\ddot{x}_c = 0$. Тоді $M\dot{x}_c = C_1$.

В початковий момент часу система знаходилась у спокої і тому $C_1 = 0$.
Із формули (2.29) маємо

$$Mx_C = C_2.$$

Таким чином, координата X_C центра мас матеріальної системи залишається сталою незалежно від переміщень тіл, що входять у систему.

Визначимо положення центра мас системи в початковий момент часу

$$X_C = \frac{\sum_{k=2}^n m_k \cdot x_k}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}. \quad (2.30)$$

Якщо вантаж 2 переміститься на величину ΔX_2 , то тіло 3 – на ΔX_3 , а призма 1 – на ΔX_1 і положення X_C центра мас знайдемо за формулою

$$X_C = \frac{m_1(x_1 + \Delta x_1) + m_2(x_2 + \Delta x_2) + m_3(x_3 + \Delta x_3)}{M}. \quad (2.31)$$

Враховуючи (2.30), із формули (2.31) отримаємо

$$m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0. \quad (2.32)$$

Переміщення ΔX_2 та ΔX_3 складається з відносного по призмі і переносного разом із призмою.

$$\Delta x_2 = S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1,$$

$$\Delta x_3 = S + \Delta x_1.$$

Тепер із формули (2.32) знаходимо переміщення призми.

$$10 \cdot \Delta x_1 + 6(S \cdot \cos 30^\circ + \Delta x_1) + 4(S + \Delta x_1) = 0,$$

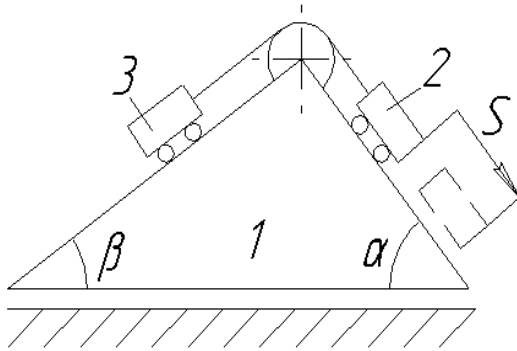
$$\Delta x_1 = -\frac{(6 \cdot \cos 30^\circ + 4)S}{10 + 6 + 4} = -0,229 \text{ м.}$$

Знак «мінус» вказує на те, що призма 1 перемістилася в протилежну додатному напрямку осі x сторону.

Відповідь: призма 1 перемістилась вправо на 0,229 м.

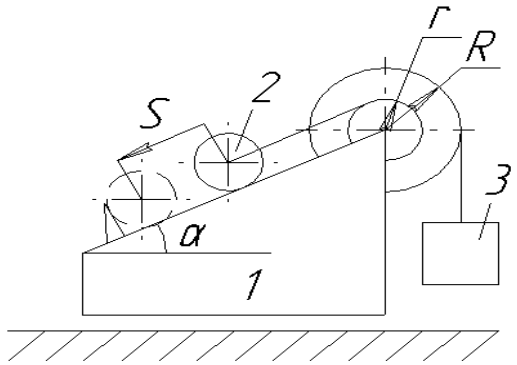
2.3.2 Задачі на теорему про рух центра мас для визначення переміщення тіл

Задача № 1



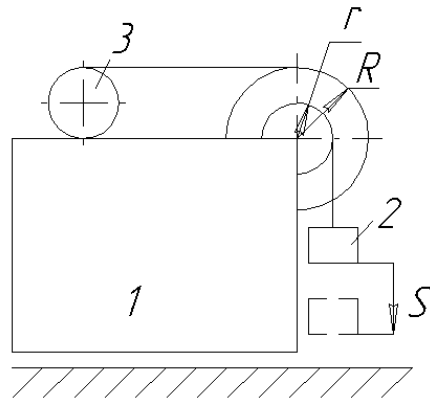
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 10$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 4$ кг перемістився на відстань $S = 0,2$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $m_3 = 2$ кг.

Задача № 2



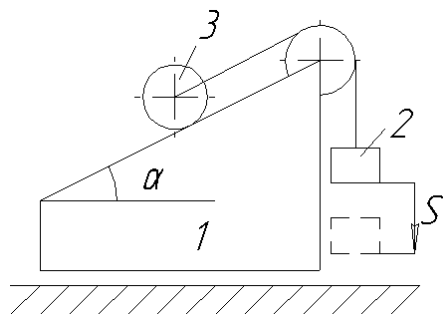
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг перемістився на відстань $S = 0,3$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 30^\circ$; $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 3



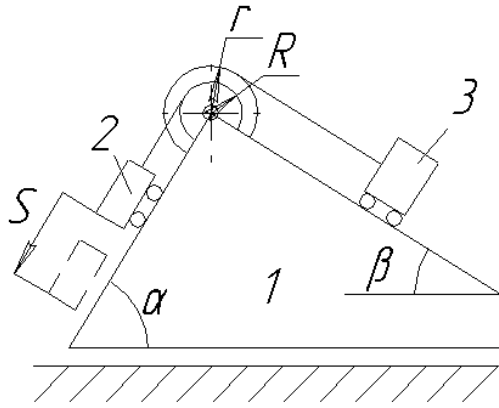
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 40$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 20$ кг опустився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $r = 0,1$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 4



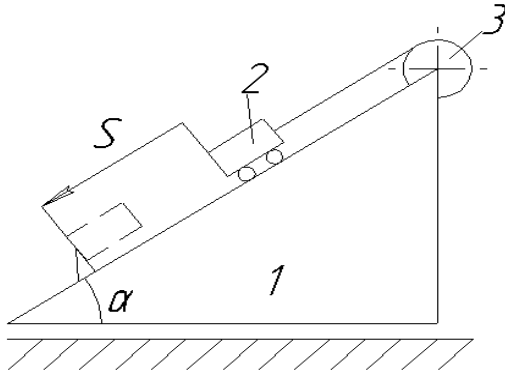
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 10$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг опустився на відстань $S = 0,3$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 60^\circ$; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 5



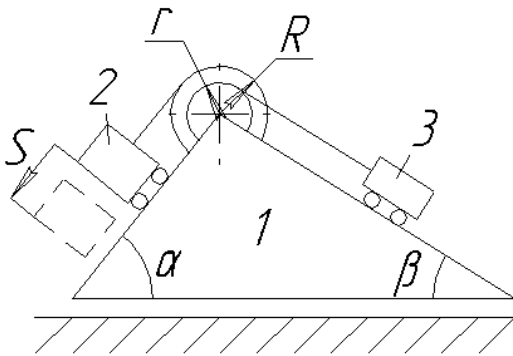
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 120$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 60$ кг перемістився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 20$ кг.

Задача № 6



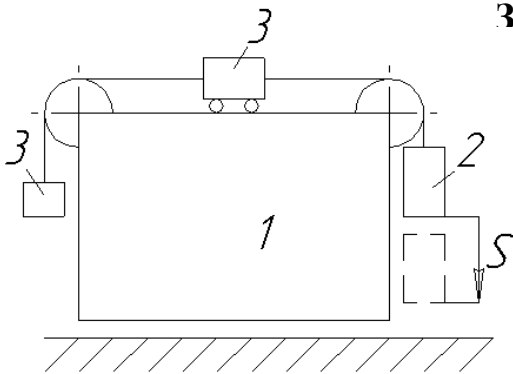
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг перемістився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 30^\circ$; $m_3 = 120$ кг.

Задача № 7



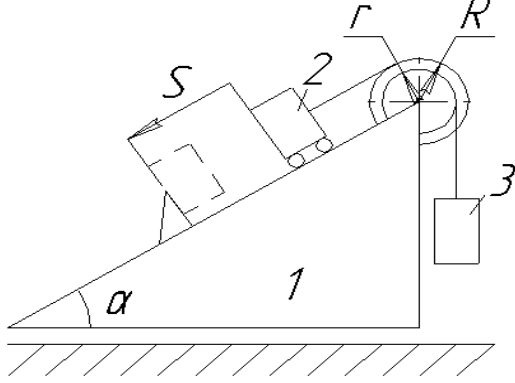
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг перемістився на відстань $S = 0,3$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $r = 0,1$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 8



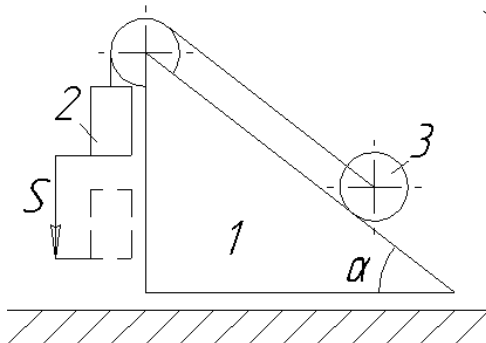
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 200$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 100$ кг опустився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $m_3 = 12$ кг.

Задача № 9



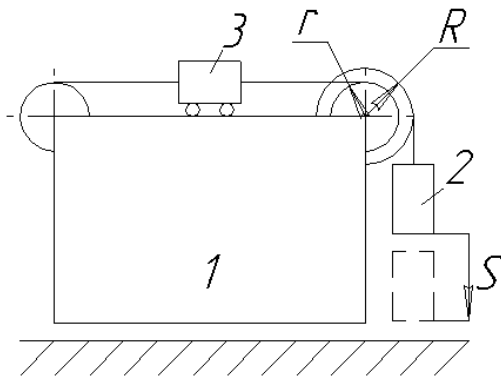
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг перемістився на відстань $S = 0,3$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 30^\circ$; $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 10



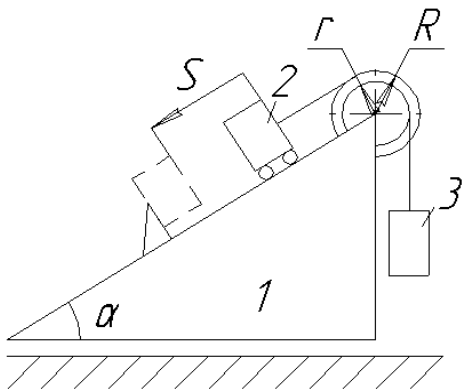
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 10$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 8$ кг опустився на відстань $S = 0,2$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 60^\circ$; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 11



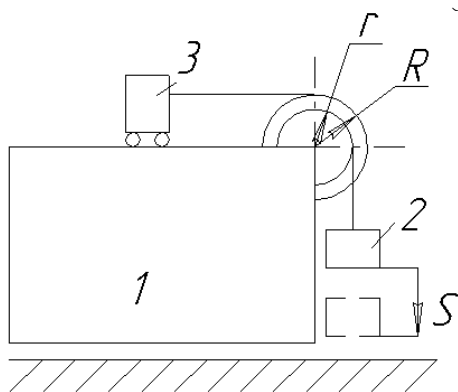
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг опустився на відстань $S = 0,3$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 30^\circ$; $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 12



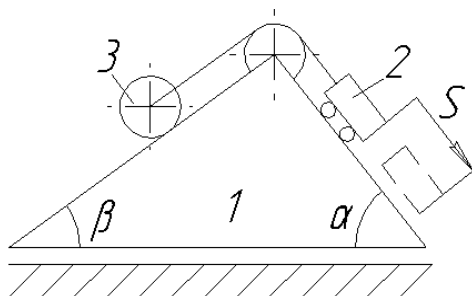
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 60$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 40$ кг перемістився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 30^\circ$; $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 13



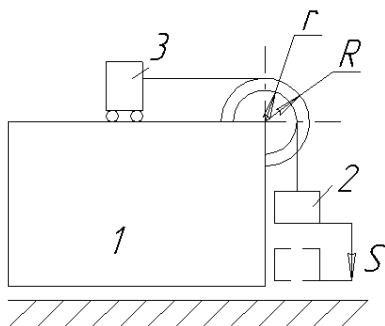
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 80$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 50$ кг опустився на відстань $S = 0,3$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $r = 0,1$ м; $R = 0,2$ м; $m_3 = 20$ кг.

Задача № 14



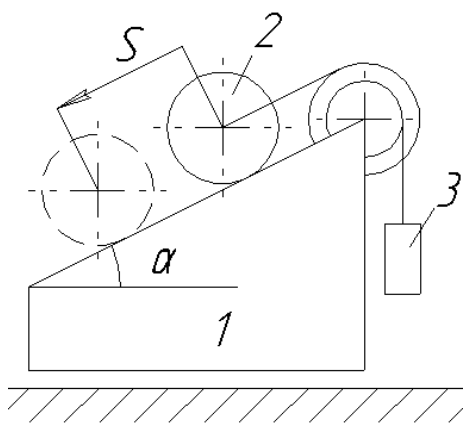
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг перемістився на відстань $S = 0,2$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 60^0$; $\beta = 30^0$; $m_3 = 10$ кг.

Задача № 15



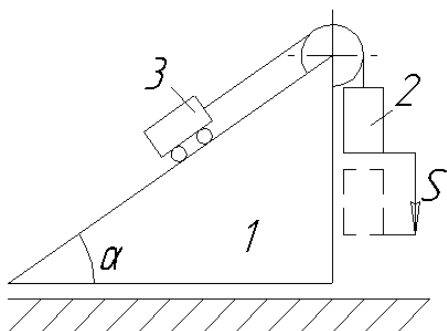
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 120$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 80$ кг опустився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 40$ кг.

Задача № 16



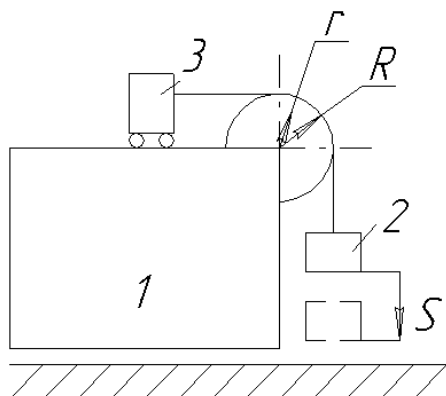
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 200$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 120$ кг перемістився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 30^0$; $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 60$ кг.

Задача № 17



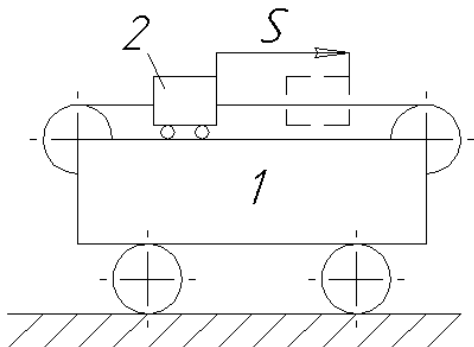
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 10$ кг опустився на відстань $S = 0,3$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $\alpha = 30^\circ$; $m_3 = 12$ кг.

Задача № 18



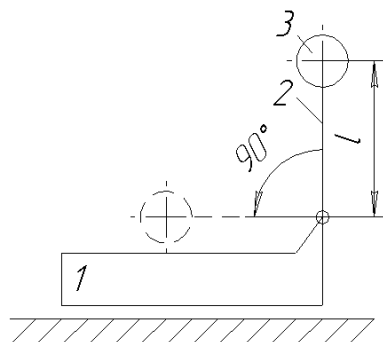
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 120$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 80$ кг опустився на відстань $S = 0,1$ м відносно призми 1. Матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $r = 0,2$ м; $R = 0,3$ м; $m_3 = 60$ кг.

Задача № 19



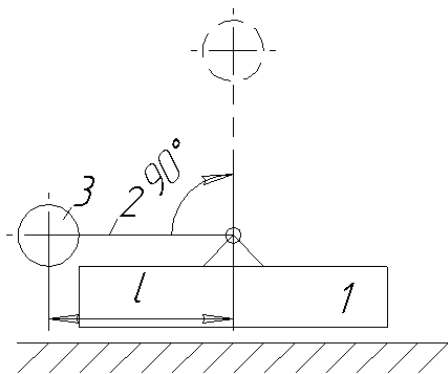
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 60$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо центр мас тіла 2 масою $m_2 = 40$ кг перемістився на відстань $S = 0,2$ м відносно призми 1. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої.

Задача № 20



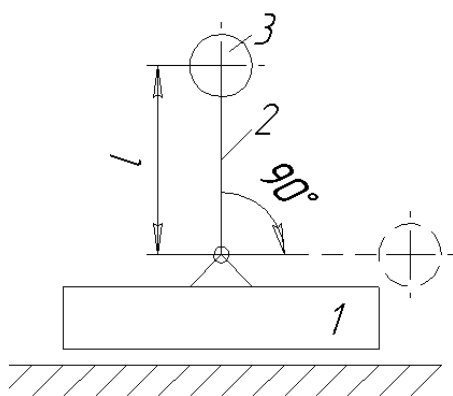
Визначити переміщення призми 1 масою $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 10$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $m_3 = 12$ кг, $l = 0,2$ м.

Задача № 21



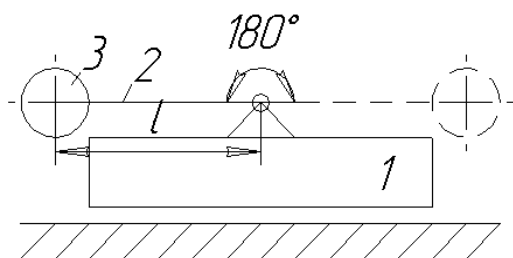
Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 30$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 20$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $m_3 = 20$ кг, $l = 0,4$ м.

Задача № 22



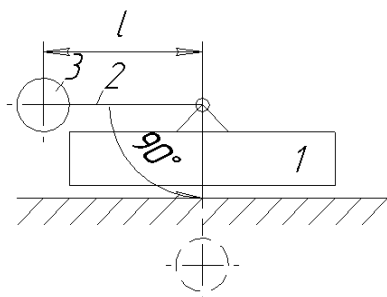
Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 15$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $m = 10$ кг, $l = 0,3$ м.

Задача № 23



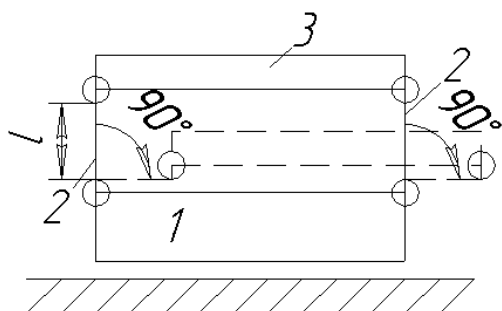
Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 60$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 20$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $m_3 = 30$ кг, $l = 0,2$ м.

Задача № 24



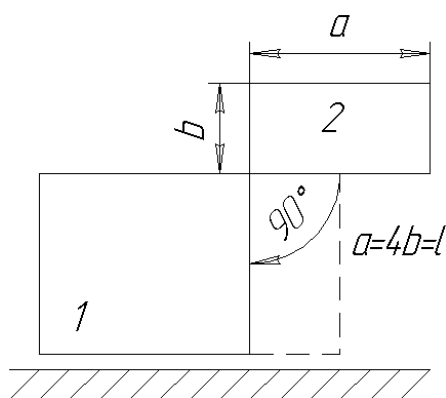
Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 30$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 10$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $m_3 = 20$ кг, $l = 0,2$ м.

Задача № 25



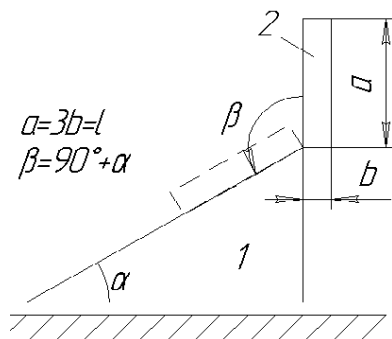
Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 10$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $m_3 = 15$ кг, $l = 0,1$ м.

Задача № 26



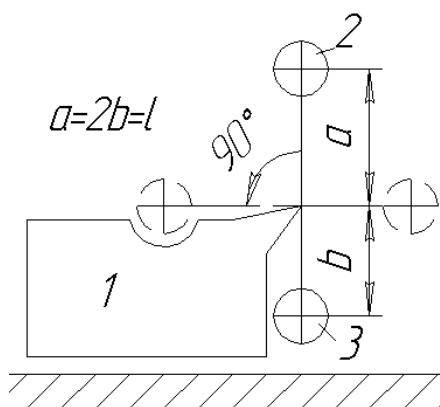
Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 60$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 20$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $a = 0,3$ м; $b = 0,1$ м.

Задача № 27

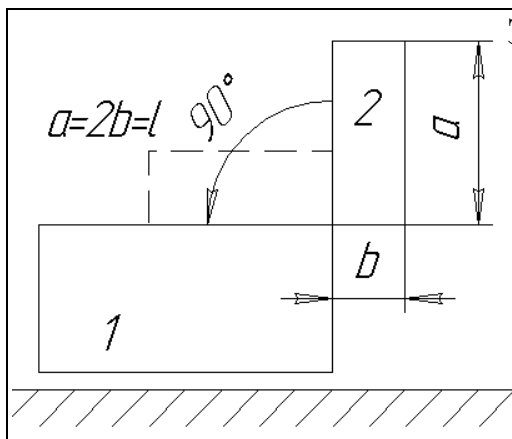


Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 20$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 10$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $\alpha = 30^\circ$, $l = 0,3$ м.

Задача № 28

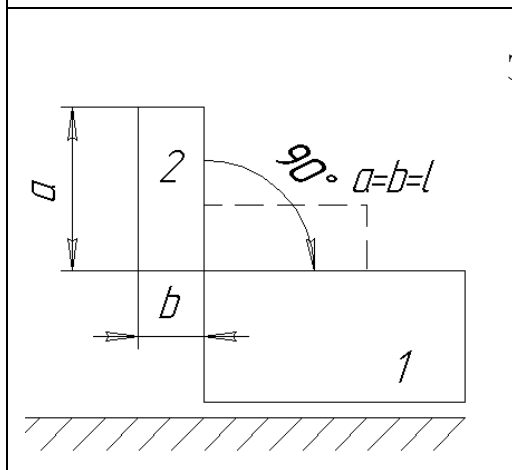


Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 60$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 20$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти: $m_3 = 10$ кг, $l = 0,4$ м.



Задача № 29

Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 200$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 100$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $l = 0,2$ м.



Задача № 30

Визначити переміщення призми 1 $m_1 = 220$ кг по горизонтальній гладенькій поверхні, якщо тіло 2 масою $m_2 = 50$ кг повернулося на заданий кут навколо горизонтальної осі. В початковий момент часу матеріальна система знаходиться у спокої. При розрахунках прийняти, що $l = 0,4$ м.

2.4 Використання загальних (основних) теорем, принципів і рівнянь динаміки для дослідження поступального та обертального рухів тіла

2.4.1 Методика дослідження матеріальної системи з використанням теорем про зміну кінетичного моменту

Матеріальна система (рис. 2.10) починає рухатись із стану спокою під дією моменту M , що прикладається до тіла 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя ковзання f . В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3, натяг S_5 у веденій 5 та ведучій 4 (S_4) частинах паса (прийняти $S_4 = 2S_5$), зусилля в точці контакту тіл 1 та 2, реакції в'язей циліндричних (нерухомих) шарнірів тіл 1, 2 та 3.

Прийняти: $R_1 = 0,25$ м; $R_2 = 0,45$ м; $r_2 = 0,15$ м; $i_2 = 0,4$ м; $L = 0,7$ м; $m_1 = 0,5$ кг; $m_2 = 5$ кг; $m_3 = 4$ кг; $M = 3t^3$ НМ; $t_1 = 2$ с; $f = 0,4$.

Розв'язання. Розглянемо окремо рух кожного тіла матеріальної системи (рис. 2.10).

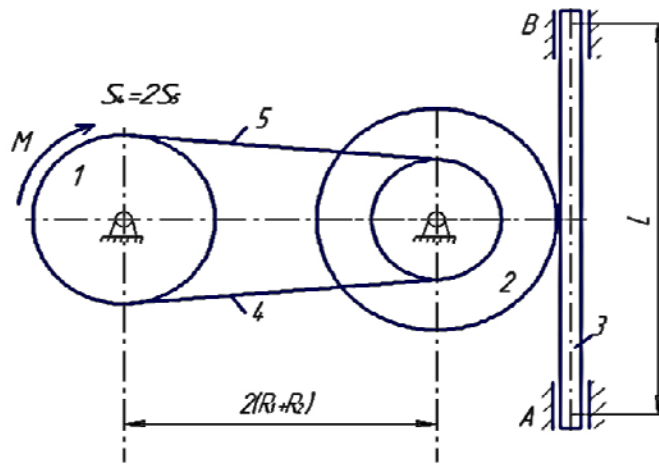


Рисунок 2.10

Визначення прискорення тіла 3

Однорідне тіло l обертається навколо горизонтальної осі під дією моменту M (рис. 2.11) і до нього прикладені зовнішні сили: сила тяжіння $P_1 = m_1g$; реакції циліндричного шарніра X_1 та Y_1 , зусилля у ланках паса S_5 та S_4 .

Запишемо диференціальне рівняння обертання тіла l навколо нерухомої осі Z .

$$I_{Z1}\ddot{\phi}_1 = M + S_5R_1 - S_4 \cdot R_1. \quad (2.33)$$

Необхідно врахувати, що момент сили або пари сил буде додатним, якщо він діє у напрямку руху тіла. Так, у рівнянні (2.33) момент сили S_5 та пари сил з моментом M беремо з додатним знаком, а момент сили S_4 – з від'ємним.

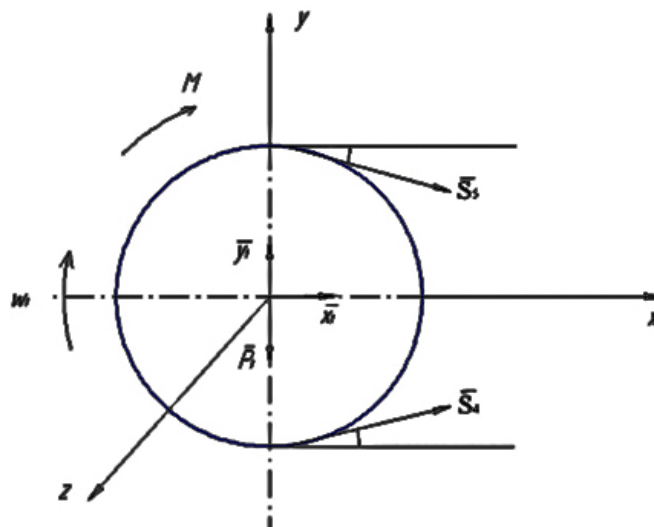


Рисунок 2.11

Момент інерції тіла I відносно осі z

$$I_{z1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \quad (2.34)$$

На тіло 2 (рис. 2.12) під час руху діють зовнішні сили: сила тяжіння $P_2 = m_2 g$, реакції нерухомого шарніра X_2 та Y_2 , зусилля у ланках паса S'_5 та S'_4 , реакції тіла 1 – S_2 та N_2 .

У диференціальному рівнянні руху тіла 2 (рис. 2.12) навколо горизонтальної осі z

$$I_{z2} \cdot \ddot{\varphi}_2 = -S'_5 r_2 + S'_4 r_2 - S_2 R_2 \quad (2.35)$$

сили $S'_5 = S_5$ та $S'_4 = S_4$, а момент інерції тіла 2 відносно осі z знайдемо через радіус інерції i_2

$$I_{i_2} = m_2 i_2^2 \quad (2.36)$$

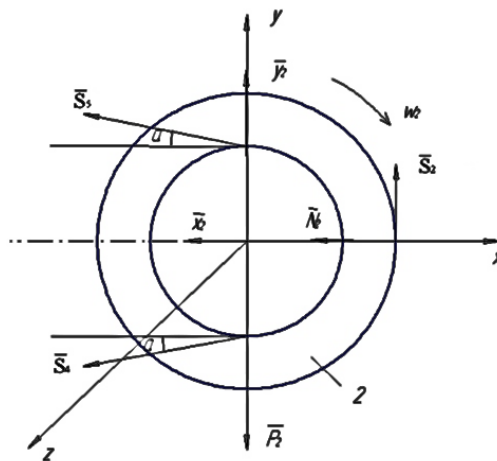


Рисунок 2.12

Для тіла 3 (рис. 2.13), що переміщується під дією сили тяжіння $P_3 = m_3 g$, реакції нерухомих шарнірів N_A та N_B , реакції S'_2 та N'_2 тіла 2, запишемо теорему про рух центра мас в проєкціях на вісь y (вісь y направляєється в сторону руху тіла 3)

$$m_3 \ddot{\varphi}_3 = P_3 + S'_2 \quad (2.37)$$

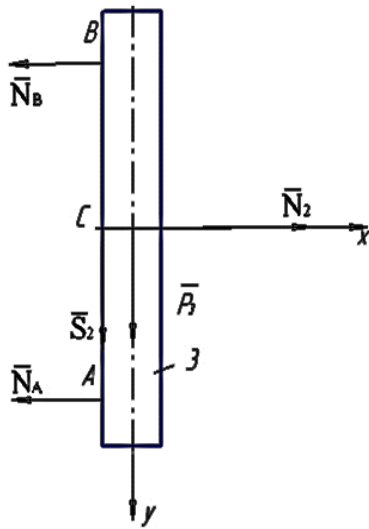
Звичайно $S'_2 = S_2$.

Якщо диференціальні рівняння (2.33), (2.35) і 2.37) розглянути з кінематичними співвідношеннями

$$\ddot{y}_3 = \ddot{\varphi}_2 R_2, \quad \ddot{\varphi}_2 r_2 = \ddot{\varphi}_1 R_1, \quad (2.38)$$

то отримаємо п'ять рівнянь з невідомими $\ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_2, \varphi_1, S_5, S_2 (S_4 = 2S_5)$.

Розв'язуючи систему рівнянь (2.33), (2.35), (2.37), (2.38), і, враховуючи (2.34) та (2.36), маємо



$$S_5 = \frac{M}{R_1} - \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2}{R_2} \ddot{y}_3,$$

$$S_2 = m_3 (\ddot{y}_3 - g),$$

$$\ddot{Y}_3 = \frac{M \cdot r_2 + m_3 R_1 R_2 \cdot g}{R_1 (m_2 \frac{i_2^2}{R_2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2} + m_3 R_2)}.$$

Рисунок 2.13

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо

$$\ddot{Y}_3 = 4,92 + 0,5t^3,$$

$$S_2 = 4y_3^3 - 39,24 \ddot{y}_3,$$

$$S_5 = 12t^3 - 0,083 \ddot{y}_3.$$

При $t_1 = 2$ с, $\ddot{y}_3 = 8,92 \frac{M}{c^2}$, $S_5 = 95,26$ н, $S_2 = -3,6$ н.

Визначення реакцій в'язей циліндричних шарнірів та зусиль між тілами

Для тіл 1 та 2 запишемо теорему про рух центра мас в проекціях на осі x та y .

Тіло 1 (див. рис. 2.11)

$$m_1 \ddot{x}_{C1} = x_1 + S_4 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha, \quad (2.39)$$

$$m_1 \ddot{y}_{C1} = y_1 + S_4 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - P_1.$$

Тіло 2 (див. рис. 2.12)

$$\begin{aligned}
m_2 \ddot{x}_{C2} &= -x_2 - N_2 - S'_5 \cos \alpha - S'_4 \cos \alpha, \\
m_2 \ddot{y}_{C2} &= y_2 - P_2 + S_2 + S'_5 \sin \alpha - S_4 \sin \alpha.
\end{aligned}
\tag{2.40}$$

Для тіла 3 (рис. 2.13) в проекціях на вісь x

$$m_3 \ddot{x}_{C3} = N'_2 - N_B - N_A. \tag{2.41}$$

В рівняннях (2.39)– (2.41) $\ddot{x}_{C1} = \ddot{y}_{C1} = \ddot{x}_{C2} = \ddot{y}_{C2} = \ddot{x}_{C3} = 0$ оскільки центри мас тіл 1, 2 знаходяться на нерухомих осях обертання тіл, а координати X_{C3} тіла 3 є сталою величиною.

Отримали систему п'яти рівнянь

$$\begin{aligned}
x_1 + (S_4 + S_5) \cos \alpha &= 0, \\
y_1 + (S_4 - S_5) \sin \alpha - P_1 &= 0, \\
x_2 + N_2 + (S_4 + S_5) \cos \alpha &= 0, \\
y_2 - P_2 + S_2 + (S_5 - S_4) \sin \alpha &= 0, \\
N_2 - N_B - N_A &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.42}$$

в якій сім невідомих величин: $x_1, y_1, x_2, y_2, N_2, N_B, N_A$.

Додаткові два рівняння отримаємо, використовуючи закон Амонтона-Кулона

$$S_2 = fN_2 \tag{2.43}$$

та диференціальне рівняння обертального руху тіла 3 навколо осі z , що проходить через центр мас C (див. рис. 2.13) тіла 3

$$I_{C3} \ddot{\gamma}_3 = N_B \cdot \frac{AB}{2} - N_A \frac{AB}{2}. \tag{2.44}$$

Тіло 3 рухається поступально і тому $\ddot{\gamma}_3 = 0$. Таким чином, із (2.44) маємо

$$N_B = N_A. \tag{2.45}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.38), (2.41) і (2.45), отримаємо

$$\begin{aligned}
x_1 &= -(S_4 + S_5) \cos \alpha, \\
y_1 &= m_1 g - (S_4 - S_5) \sin \alpha, \\
x_2 &= -N_2 - (S_4 + S_5) \cdot \cos \alpha, \\
y_2 &= m_2 g - S_2 + (S_4 - S_5) \sin \alpha, \\
N_2 &= \frac{S_2}{f}, N_B = N_A = \frac{S_2}{2f} \\
\operatorname{de} \sin \alpha &= \frac{R_1 - r_2}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0.071, \\
\cos \alpha &= \frac{2(R_1 + R_2)}{\sqrt{4(R_1 + R_2)^2 + (R_1 - r_2)^2}} = 0.997. \\
\text{При } e_1 &= 2c, \\
y_1 &= -1,86H; \\
x_1 &= -284,92H; \\
y_2 &= 59,41H; \\
x_2 &= -293,92H; \\
N_2 &= 9H; \\
N_B = N_A &= 4,5H.
\end{aligned}$$

Визначення прискорення точок та кутових прискорень тіл за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи

Матеріальна система (див. рис. 2.10–2.14) приводиться в рух моментом M . Знайти прискорення тіла 3 та кутові прискорення тіл в момент часу $t = t_1$.

Масами пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Однорідний диск 1 та ступінчатий шків 2 обертаються навколо горизонтальних осей.

Де m_1, m_2, m_3 – маси тіл 1, 2 та 3; R_1, R_2, r_2 – розміри тіл 1 та 2; i_2 – радіус інерції тіла 2 відносно горизонтальної осі.

2.4.2 Методика дослідження матеріальної системи з використанням теореми про зміну кінетичної енергії

Матеріальна система (рис. 2.14) рухається під дією моменту M , що діє на тіло 1. Осі тіла 1 та 2 горизонтальні. В точках контакту тіл та паса ковзання відсутнє. Масою тіла знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3 та кутові прискорення тіл 1 та 2 якщо: $R_1 = 0,25$ м; $R_2 = 0,45$ м; $r_2 = 0,15$ м; $i_2 = 0,4$ м; $l = 0,7$ м; $m_1 = 0,5$ кг; $m_2 = 0,5$ кг; $m_3 = 4$ кг; $M = 3t^3$ Нм; $t_2 = 2$ с.

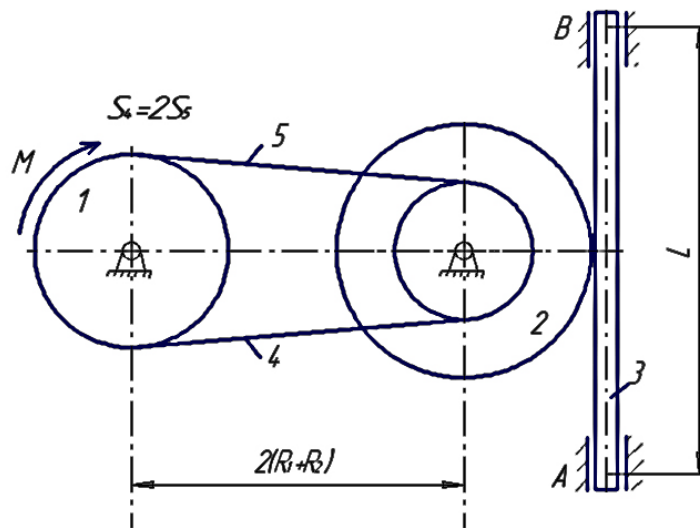


Рисунок 2.14

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис. 2.14) використаємо теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (2.46)$$

де T – кінетична енергія системи, N^e – потужність зовнішніх сил системи, N^i – потужність внутрішніх сил системи, $N^i = 0$ – тіла тверді, а пас абсолютно гнучкий та нерозтяжний.

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії тіл, що входять в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Тіла 1 та 2 обертаються навколо нерухомих горизонтальних осей і їх кінетична енергія знаходиться за формулами:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2, T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad (2.47)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_2 = m_2 i_2^2$ – моменти інерції відповідно тіл 1 та 2, ω_1, ω_2 – кутові швидкості тіл.

Тіло 3 переміщується поступально зі швидкістю V_3 , тоді

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2. \quad (2.48)$$

Взаємозв'язок між кінематичними характеристиками руху тіл (рис. 2.15)

$$\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}, \quad \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{R_1} = V_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}. \quad (2.49)$$

Запишемо кінетичну енергію системи, враховуючи (2.47), (2.48) та (2.49) як функцію швидкості V_3 тіла 3

$$T = \frac{V_3^2}{4R_2^2} (m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2). \quad (2.50)$$

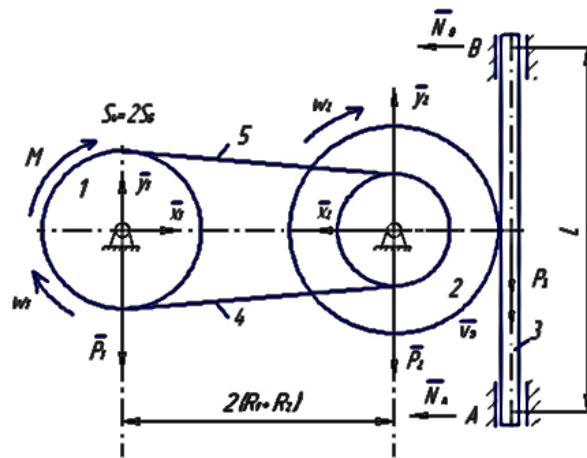


Рисунок 2.15

Знайдемо потужність зовнішніх сил (рис. 2.15) матеріальної системи: сили тяжіння $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $P_3 = m_3 g$ моменту M ; реакції в'язей нерухомих (циліндричних) шарнірів $X_1, Y_1, X_2, Y_2, N_A, N_B$.

Потужність сил $X_1, Y_1, P_1, X_2, Y_2, P_2, N_A$ і N_B дорівнює нулю, тому що точки прикладення сил не переміщуються. Тоді потужність N^e зовнішніх сил буде складатися з потужності моменту M та сили тяжіння тіла 3 – P_3 .

$$N^e = N(M) + N(\bar{P}_3),$$

$$\text{де } N(M) = M \cdot \omega_1 = MV_3 \frac{r_2}{R_1 R_2},$$

$$N(\bar{P}_3) = P_3 \cdot V_3 = m_3 g V_3.$$

$$\text{Або} \quad N^e = V_3 (m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}). \quad (2.51)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи (2.46) з урахуванням (2.50) та (2.51) запишеться:

$$\frac{1}{4R_2^2} (m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2) \frac{dV_3^2}{dt} = V_3 (m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}).$$

$$\text{Оскільки } \frac{dV_3^2}{dt} = 2V_3 \cdot a_3, \text{ то } a_3 = \frac{4R_2^2 (m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2})}{m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2}. \quad (2.52)$$

Кутові прискорення тіл

$$\dot{\phi} = \frac{a_3}{R_2}, \quad \ddot{\phi}_1 = a_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}.$$

Підставляючи дані умови задачі, отримаємо:

$$a_3 = (4,93 + 0,50 t^3) M/c,$$

$$\ddot{\phi}_2 = (10,96 + 1,11 t^3) \frac{1}{c^2},$$

$$\ddot{\phi}_1 = (6,57 + 0,67 t^3) \frac{1}{c^2}.$$

$$\text{При } t_1 = 2 \text{ с } \quad a_3 = 8,93 M/c^2, \quad \ddot{\phi}_2 = 19,84 \frac{1}{c^2}, \quad \ddot{\phi}_1 = 11,9 \frac{1}{c^2}.$$

2.4.3 Методика дослідження матеріальної системи з використанням загального рівняння динаміки

Матеріальна система (рис. 2.16) починає рухатись із стану спокою під дією моменту M , що прикладається до тіла 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя ковзання f . В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3, натяги S_5 у веденій 5 та S_4 ведучій 4 частинах паса (прийняти $S_4 = 2S_5$) і зусилля в точці контакту тіл 1 та 2 при $t = t_1$.

Прийняти: $R_1 = 0,25$ м; $R_2 = 0,45$ м; $r_2 = 0,15$ м; $i_2 = 0,4$ м; $L = 0,7$ м; $m_1 = 0,5$ кг; $m_2 = 5$ кг; $m_3 = 4$ кг; $M = 3 t^3$ НМ; $t_1 = 2$ с; $f = 0,4$.

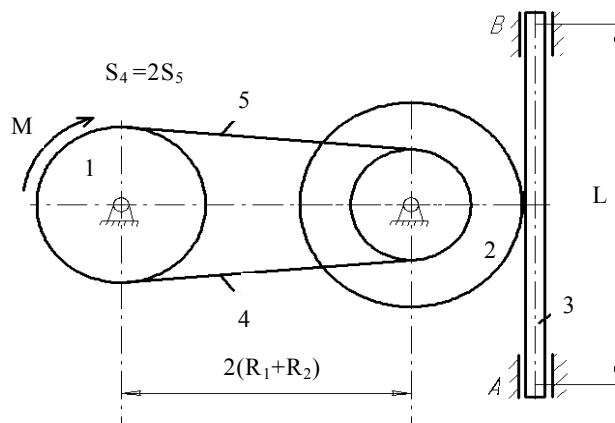


Рисунок 2.16

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис. 2.16) застосуємо загальне рівняння динаміки.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{iH} \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (2.53)$$

Визначення прискорення тіла 3

Однорідне тіло 1 обертається навколо горизонтальної осі під дією моменту M (рис. 2.17) з кутовим прискоренням ε_1 . Рух від тіла 1 до тіла 2 передається пасом, прискорення точок якого на прямолінійних ділянках \bar{a}_n .

$$a_n = \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 r_2. \quad (2.54)$$

Для того, щоб рух матеріальної системи відбувався без ударів, прискорення тіла 3 \bar{a}_3 має дорівнювати дотичному прискоренню точок тіла 2, що знаходиться на відстані R_2 від осі обертання.

$$a_3 = \varepsilon_2 R_2. \quad (2.55)$$

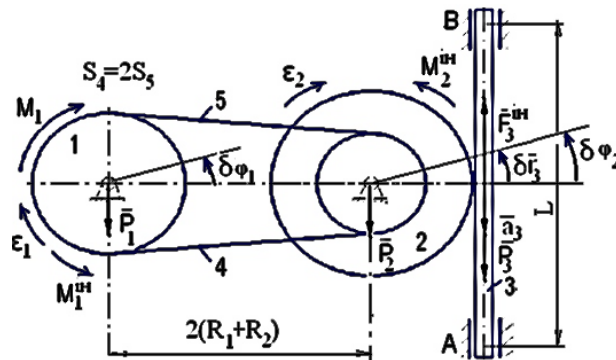


Рисунок 2.17

До матеріальної системи (рис. 2.17) прикладені активні сили: момент M , вага $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, ($\bar{P}_1 = m_1 g, \bar{P}_2 = m_2 g, \bar{P}_3 = m_3 g$) відповідно тіл 1, 2 та 3. Центр мас тіл 1 та 2 знаходиться на осі обертання, тому головні вектори сил інерції тіл 1 та 2 дорівнюють нулю. Головні моменти сил інерції тіла 1 M_1^{iH} та 2 M_2^{iH} направлені протилежно кутовим прискоренням тіл ε_1 та ε_2 .

$$M_1^{iH} = I_1 \varepsilon_1, \quad M_2^{iH} = I_2 \varepsilon_2, \quad (2.56)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_2 = m_2 i_2^2$ – моменти інерції тіл 1 та 2 відносно осі обертання.

Головний вектор сил інерції $\bar{F}_3^{\text{ін}}$ тіла 3 направлений в протилежну сторону прискорення \bar{a}_3 (рис. 2.17).

$$\bar{F}_3^{\text{ін}} = m_3 a_3. \quad (2.57)$$

Якщо тіло 3 віртуально перемістити $\delta \bar{r}_3$, то тіло 2 повернеться на кут $\delta \varphi_2$, а тіло 1 – на кут $\delta \varphi_1$ (рис. 2.17).

Знайдемо взаємозв'язок між віртуальними переміщеннями тіл системи.

$$\begin{aligned} \delta r_3 &= \delta \varphi_2 R_2, \\ \delta \varphi_2 r_2 &= \delta \varphi_1 R_1. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Запишемо загальне рівняння динаміки (2.53) для системи сил, прикладеної до досліджуваної матеріальної системи (рис. 2.17).

$$-P_3 \cdot \delta r_3 + F_3^{\text{ін}} \cdot \delta r_3 + M_2^{\text{ін}} \cdot \delta \varphi_2 + M_1^{\text{ін}} \cdot \delta \varphi_1 - M \cdot \delta \varphi_1 = 0 \quad (2.59)$$

Або, враховуючи (2.54)–(2.58),

$$-m_3 g \delta r_3 + m_3 a_3 \delta r_3 + m_2 i_2^2 a_3 \frac{1}{R_2^2} \delta r_3 + \frac{1}{2} m_1 R_1^2 a_3 \frac{r_2^2}{R_2^2 R_1^2} \delta r_3 - M \frac{r_2}{R_2 R_1} \delta r_3 = 0.$$

Оскільки $\delta r_3 \neq 0$, то маємо

$$-m_3 g + m_3 a_3 + m_2 i_2^2 a_3 \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{2} m_1 R_1^2 a_3 \frac{r_2^2}{R_2^2 R_1^2} - M \frac{r_2}{R_2 R_1} = 0.$$

Звідки знаходимо прискорення a_3 тіла 3.

$$a_3 = \frac{m_3 g + M \frac{r_2}{R_2 R_1}}{m_3 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2}}. \quad (2.60)$$

Підставляючи дані умови задачі, отримуємо

$$a_3 = 4,92 + 0,5t^3. \quad (2.61)$$

$$\text{При } t_1 = 2\text{с, } a_3 = 8,92 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Визначення натягу в пасажі і зусилля між тілами

Розглянемо рух тіла 3. Сили \bar{N}_2 та \bar{S}_2 , з якими тіло 2 діє на тіло 3, віднесемо до активних сил (рис. 2.18).

Надаємо тілу 3 віртуальне переміщення $\delta\bar{r}_3$ і знаходимо роботу активних сил \bar{P}_3 , \bar{S}_2 , \bar{N}_2 та сил інерції \bar{F}_3^{iH} на цьому переміщенні (рис. 2.17).

$$-P_3 \cdot \delta r_3 - S_2 \cdot \delta r_3 + F_3^{iH} \cdot \delta r_3 = 0$$

Оскільки $\delta\bar{r}_3 \neq 0$, тоді

$$-P_3 - S_2 + F_3^{iH} = 0.$$

Звідки, враховуючи (2.57), знаходимо

$$S_2 = m_3(4.92 + 0.5t^3) - m_3g.$$

При $t_1 = 2$ с, $S_2 = -3,6$ Н.

За законом Амонтона-Кулона $S_2 = |fN_2|$, тоді

$$N_2 = \left| \frac{S_2}{f} \right|. \quad \text{При } t_1 = 2 \text{ с, } N_2 = 9 \text{ Н.}$$

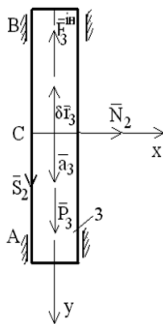


Рисунок 2.18

Для визначення зусиль в пасажі розглянемо рух тіла 2 (рис. 2.19).

Реакції в'язей \bar{S}'_2 , \bar{N}'_2 , \bar{S}_5 , \bar{S}_4 відносимо до активних сил. Причому

$$\bar{S}'_2 = -\bar{S}_2, \quad \bar{N}'_2 = -\bar{N}_2.$$

Головний момент сил інерції тіла 2 M_2^{iH} направлений в протилежну від кутового прискорення ε_2 тіла (рис. 2.19). Надаємо тілу 2 віртуальне переміщення $\delta\varphi_2$ і запишемо загальне рівняння динаміки (2.53)

$$S'_2 R_2 \cdot \delta\varphi_2 + M_2^{iH} \cdot \delta\varphi_2 + S_5 r_2 \cdot \delta\varphi_2 - S_4 r_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

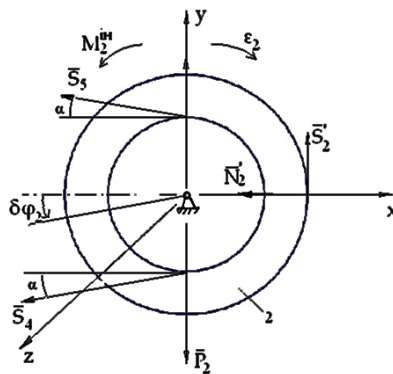


Рисунок 2.19

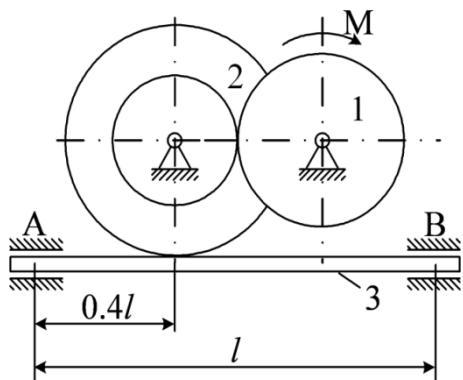
Враховуючи, що $\delta\varphi_2 \neq 0$ і $S_4 = 2S_5$, знаходимо $S_5 = 12t^3 - 0,083a_3$.

При $t_1 = 2$ с $S_5 = 95,26$ Н, $S_4 = 190,52$ Н.

Відповідь: $a_3 = 8,92$ м/с², $S_2 = -3,6$ Н, $N_2 = 9$ Н, $S_4 = 2 \cdot S_5 = 190,52$ Н.

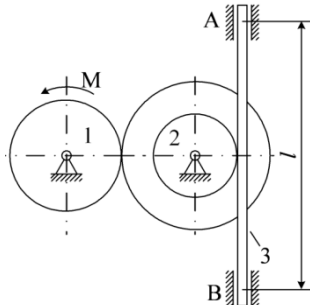
2.4.4 Задачі на використання загальних (основних) теорем, принципів і рівнянь динаміки для дослідження поступального та обертового рухів тіла

Задача № 1



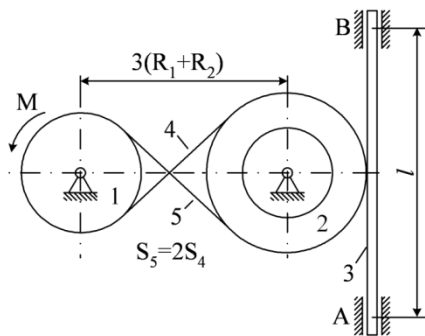
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,1$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 2



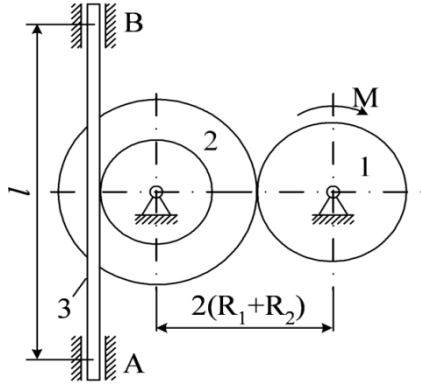
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (5+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,3$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 3



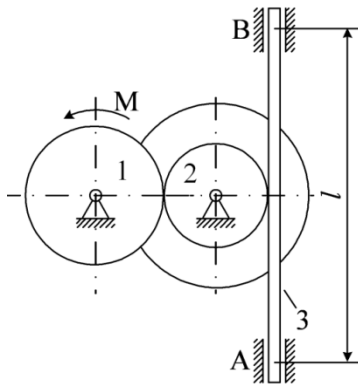
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (8+t^2)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 6$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 4



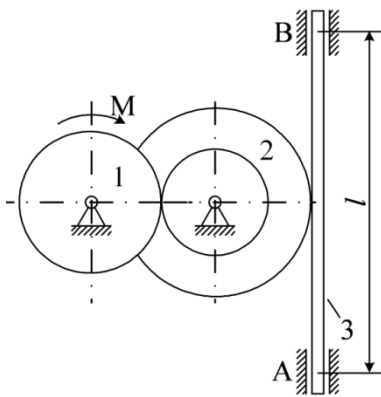
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M=(5+3\cdot t)\text{Н}\cdot\text{м}$. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2\text{ с}$. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4\text{ м}$; $R_1 = 0,3\text{ м}$; $r_2 = 0,2\text{ м}$; $i_2 = 0,3\text{ м}$; $l = 0,4\text{ м}$; $m_1 = 10\text{ кг}$; $m_2 = 6\text{ кг}$; $m_3 = 3\text{ кг}$.

Задача № 5



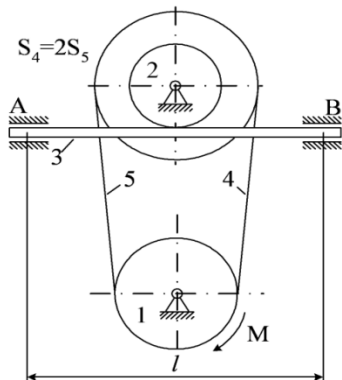
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+t)\text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2\text{ с}$. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4\text{ м}$; $R_1 = 0,3\text{ м}$; $r_2 = 0,2\text{ м}$; $i_2 = 0,3\text{ м}$; $l = 0,4\text{ м}$; $m_1 = 1\text{ кг}$; $m_2 = 2\text{ кг}$; $m_3 = 3\text{ кг}$.

Задача № 6



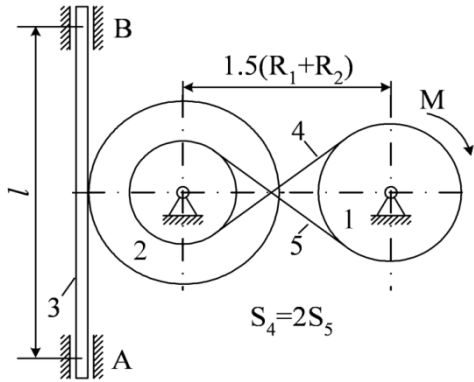
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (16+3\cdot t^2)\text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2\text{ с}$. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4\text{ м}$; $R_1 = 0,1\text{ м}$; $r_2 = 0,2\text{ м}$; $i_2 = 0,3\text{ м}$; $l = 0,4\text{ м}$; $m_1 = 3\text{ кг}$; $m_2 = 6\text{ кг}$; $m_3 = 3\text{ кг}$.

Задача № 7



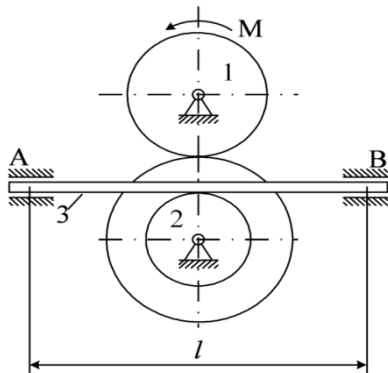
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (16+3\cdot t)\text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1\text{ с}$. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4\text{ м}$; $R_1 = 0,3\text{ м}$; $r_2 = 0,2\text{ м}$; $i_2 = 0,3\text{ м}$; $l = 0,4\text{ м}$; $m_1 = 10\text{ кг}$; $m_2 = 16\text{ кг}$; $m_3 = 30\text{ кг}$.

Задача № 8



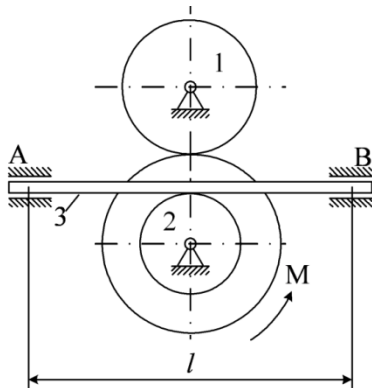
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (7+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 9



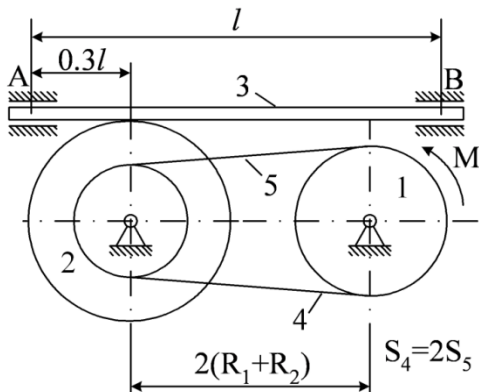
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (5 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 10



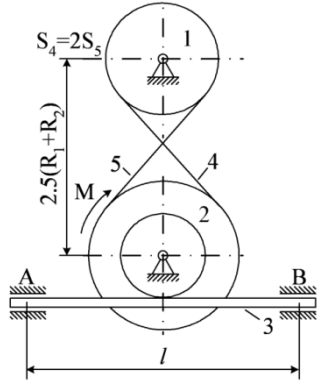
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (4+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 6$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 11



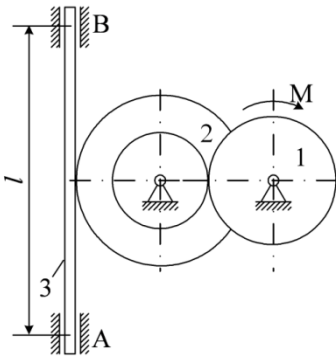
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 6$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 12



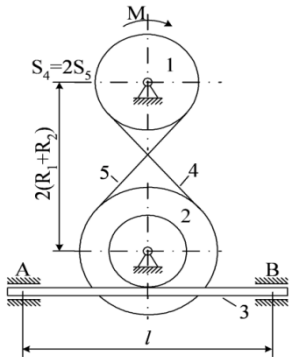
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (8 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 13



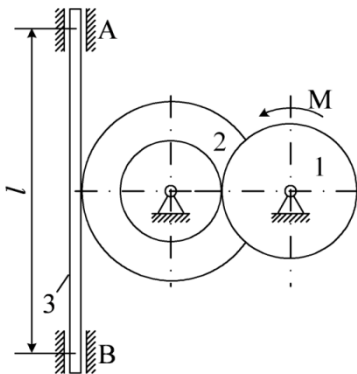
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10 + 3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2^0 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1^0 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 14



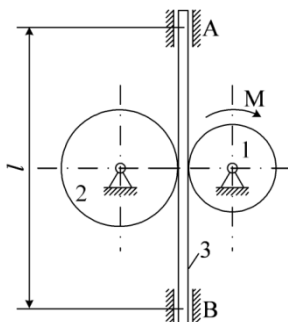
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (2 + 3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 15



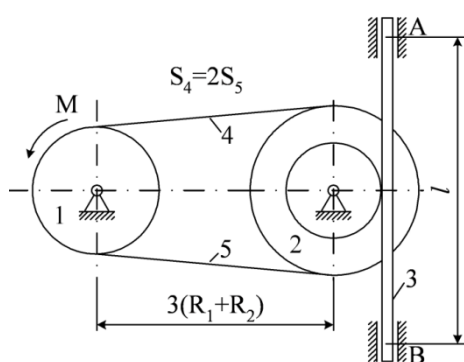
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (160 + 3 \cdot t^3)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,3$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,1$ м; $i_2^0 = 0,2$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2^0 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 16



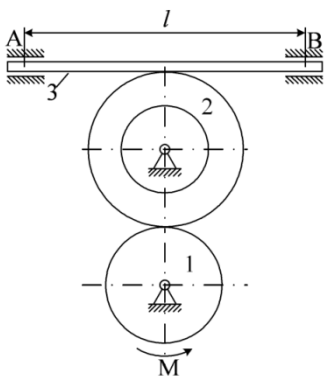
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,3$ м; $R_1 = 0,1$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 3$ кг.

Задача № 17



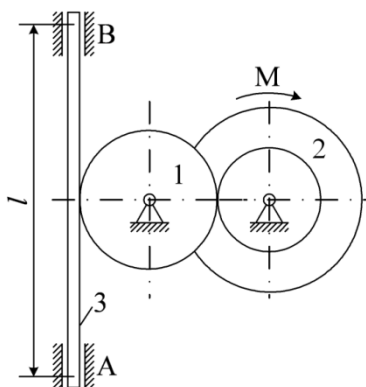
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (200+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2^0=0,3^0$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2^0=16^0$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 18



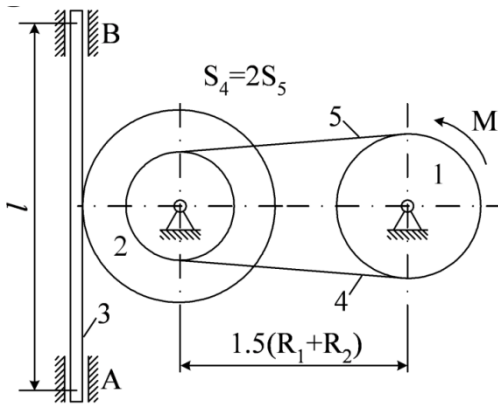
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,1$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 19



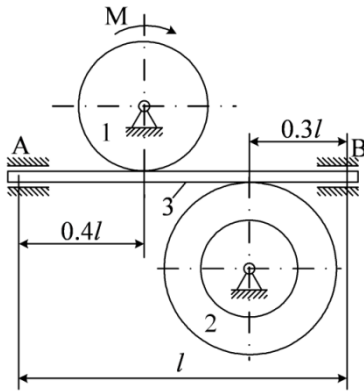
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (1+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0=0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 3$ кг.

Задача № 20



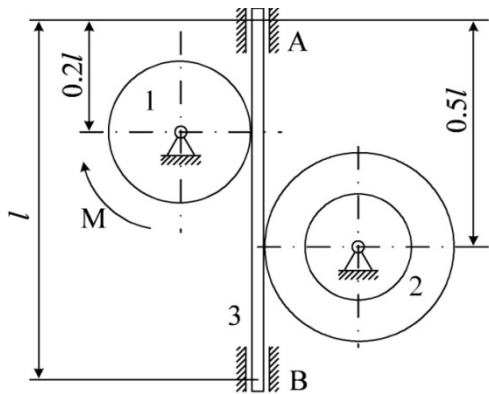
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 21



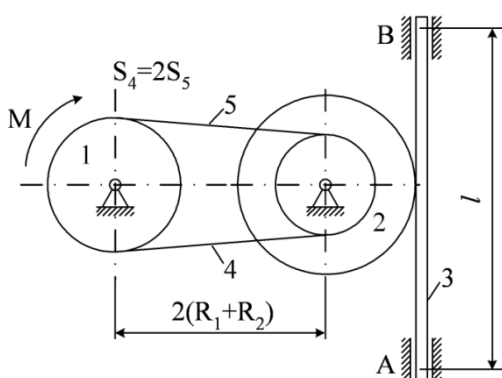
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t^2)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 300$ кг.

Задача № 22



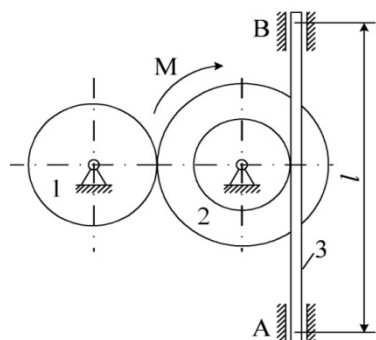
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (16+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,1$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 3$ кг.

Задача № 23



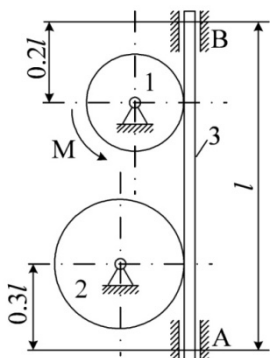
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = 3 \cdot t$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 24



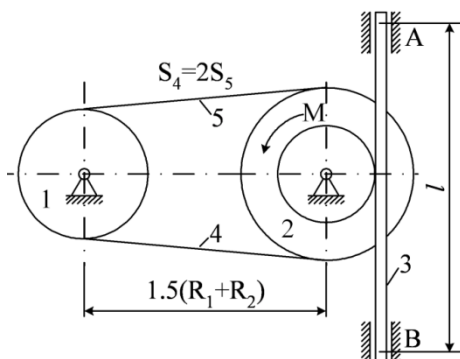
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (1+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 16$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 25



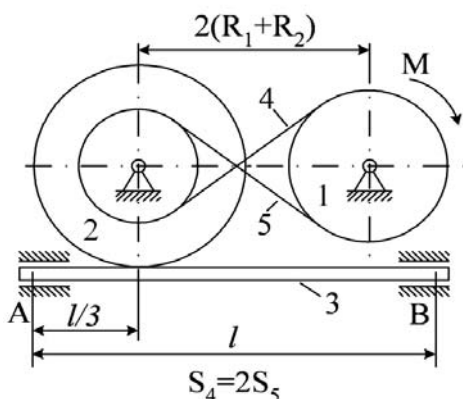
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,2$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 3$ кг.

Задача № 26



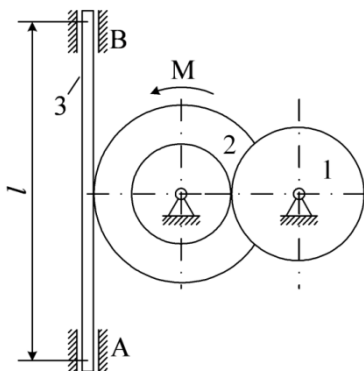
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (80+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 15$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 27



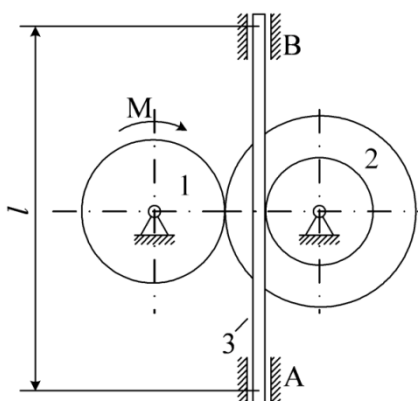
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 15$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 28



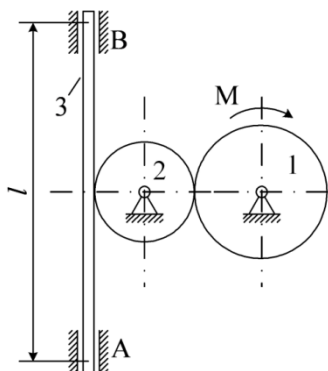
Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+7 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 1$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,3$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 3$ кг.

Задача № 29



Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 30



Матеріальна система приводиться в рух моментом $M = (10+3 \cdot t)$ Н·м. Знайти прискорення тіла 3, натяг пасів, зусилля між тілами, реакції в'язей в момент часу $t_1 = 2$ с. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Коефіцієнт тертя ковзання $f^0 = 0,2$. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $R_1 = 0,1$ м; $l = 0,4$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 3$ кг.

2.5 Використання теореми про зміну кінетичної енергії системи та рівняння Лагранжа 2-го роду для дослідження матеріальної системи

2.5.1 Методика дослідження матеріальної системи з використанням теореми про зміну кінетичної енергії

Визначити прискорення та швидкість центра мас тіла 1 у момент часу, коли він пройде шлях S_1 , якщо матеріальна система (рис. 2.20) починає рухатися зі стану спокою. Масами шнурів знехтувати. Тіла 1 та 3 рухаються без ковзання. Дано: $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 1$ кг; $R_2 = 0,4$ м;

$r_2 = 0,3 \text{ м}; R_3 = 0,3 \text{ м}; r_3 = 0,2 \text{ м}; \rho_2 = 0,35 \text{ м}; \rho_3 = 0,25 \text{ м}; \alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ;$
 $S_1 = 0,4 \text{ м}.$

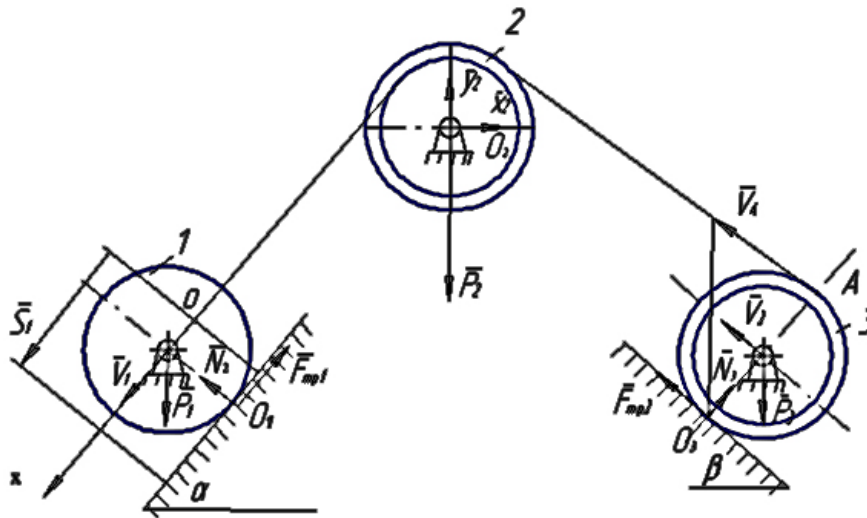


Рисунок 2.20

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис. 2.20) застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі.

$$\frac{dT}{dt} = \sum N^e + \sum N^i, \quad (2.62)$$

де T – кінетична енергія системи при $0 < x \leq S_1$; $\sum N^i$ та $\sum N^e$ – сума потужностей внутрішніх і зовнішніх сил системи. Матеріальна система (рис. 2.20) складається з твердих тіл та нерозтяжних шнурів, тоді

$$\sum N^i = 0, \quad (2.63)$$

і диференціальне рівняння (2.62) набуває вигляду

$$\frac{dT}{dt} = \sum N^e. \quad (2.64)$$

Знайдемо кінематичні співвідношення між швидкостями точок, кутовими швидкостями тіл, записавши їх через швидкість V_1 центра мас тіла 1.

Кутова швидкість тіла 1, враховуючи, що миттєвий центр швидкості тіла 1 знаходиться в точці O_1 (див. рис. 2.20)

$$\omega_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad (2.65)$$

де R_1 – радіус однорідного суцільного диска (тіла) 1.

Кутова швидкість тіла 2

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}. \quad (2.66)$$

Швидкість точки A , враховуючи, що тіла 2 та 3 з'єднані нерозтяжним шнуром,

$$V_A = \omega_2 \cdot R_2. \quad (2.67)$$

Оскільки точка O_3 – миттєвий центр швидкості тіла 3, то

$$V_A = \omega_3 \cdot 2R_3. \quad (2.68)$$

Із (2.67) та (2.68) визначаємо кутову швидкість тіла 3

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{2R_3} = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}. \quad (2.69)$$

Швидкість V_3 центра мас тіла 3

$$V_3 = \omega_3 \cdot R_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}. \quad (2.70)$$

Знайдемо переміщення центра мас тіла 3.

Оскільки
$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}, \quad V_3 = \frac{dS_3}{dt} \quad (2.71)$$

і, враховуючи (2.70), отримаємо

$$\frac{dS_3}{dt} = \frac{dS_1}{dt} \cdot \frac{R_2}{2r_2},$$

або
$$dS_3 = \frac{R_2}{2r_2} \cdot dS_1. \quad (2.72)$$

При $t = 0$, $S_1 = 0$, та $S_3 = 0$ і після інтегрування (2.72) маємо

$$S_3 = S_1 \cdot \frac{R_2}{2r_2}. \quad (2.73)$$

Знайдемо кінетичну енергію матеріальної системи як суму кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3.

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2.74)$$

Кінетична енергія тіла 1, що рухається плоскопаралельно,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2,$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$ – момент інерції тіла 1 відносно центральної осі. Тоді, враховуючи (2.74),

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \cdot \frac{V_1^2}{R_1^2} = \frac{3}{4} m_1 V_1^2. \quad (2.75)$$

Тіло 2 обертається навколо горизонтальної осі, кінетична енергія знаходиться за формулою

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2.$$

де $I_2 = m_2 \rho_2^2$ – момент інерції тіла 2 відносно головної центральної осі, ω_2 – кутова швидкість тіла 2 (2.66). Тоді

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_1^2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2}. \quad (2.76)$$

Кінетична енергія тіла 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2,$$

де $I_3 = m_3 \rho_3^2$ – момент інерції тіла 3 відносно головної центральної осі,

$$\omega_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}$$

$V_3 = \omega_3 \cdot R_3$ – швидкість центра мас тіла 3.

$$T_3 = \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \cdot \frac{R_2^2 \cdot \rho_3^2}{r_2^2 R_3^2}. \quad (2.77)$$

Тепер кінетичну енергію (2.74) системи, враховуючи (2.75)–(2.77), визначимо за формулою

$$T = V_1^2 \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) \right). \quad (2.78)$$

Потужність зовнішніх сил, під дією яких рухається матеріальна система (див. рис. 2.20) розраховуємо за формулою

$$\sum N^e = N(\bar{P}_1) + N(\bar{P}_3),$$

де $N(\bar{P}_1) = P_1 \cdot V_1 \cdot \sin \alpha$; $N(\bar{P}_3) = -P_3 V_3 \cdot \sin \beta$; $P_1 = m_1 g$; $P_3 = m_3 g$.

Тоді, враховуючи (2.70) $V_3 = V_1 \frac{r_2}{2r_2}$, отримаємо

$$\sum N^e = V_1 (m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R}{2r_2} \sin \beta) \cdot g. \quad (2.79)$$

Підставляючи (2.78) і (2.79) в (2.64), маємо

$$\left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) \right) \cdot \frac{dV_1^2}{dt} = V_1 (m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta) \cdot g. \quad (2.80)$$

Оскільки $\frac{dV_1^2}{dt} = 2V_1 \cdot a_1$ (a_1 – прискорення центра мас тіла 1), то

$$a_1 = \sqrt{\frac{m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta}{\frac{3}{2} m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{4} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right)}} \cdot g$$

Або, підставляючи дані умови задачі,

$$a_1 = \sqrt{\frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0.4}{2 \cdot 0.3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0.35^2}{0.3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0.4^2}{0.3^2} \left(1 + \frac{0.25^2}{0.3^2} \right)}} \cdot 9.81 = 1,5 \frac{m}{c^2}$$

Знайдемо швидкість центра мас тіла 1.

Рівняння (2.80) запишемо у вигляді

$$\left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) \right) \cdot dV_1^2 = g (m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta) \cdot V_1 \cdot dt. \quad (2.81)$$

При $t = 0$, $V_{10} = 0$, $S_{10} = 0$.

При $t = \tau$, $V_{1\tau} = V_1$, $S_{1\tau} = S_1$, (2.82)

де τ – час, за який центр мас тіла 1 пройде шлях S_1 .

Інтегруючи рівняння (2.81) за умовами (2.82), визначаємо швидкість центра мас тіла 1 за час τ .

$$V_1 = \sqrt{\frac{S_1 g (m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta)}{\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right)}}$$

Або, підставляючи числові дані, отримаємо

$$V_1 = \sqrt{\frac{0.4 \cdot 9.81(10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0.4}{2 \cdot 0.3} \sin 45^\circ)}{\frac{3}{4} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0.35^2}{0.3^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{0.4^2}{0.3^2} (1 + \frac{0.25^2}{0.3})}} = 1,3 \frac{m}{c}.$$

Відповідь: $a_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$; $V_1 = 1,3 \text{ м/с}$.

2.5.2 Методика дослідження матеріальної системи з використанням рівняння Лагранжа 2-го роду

Знайти прискорення та швидкість центра мас тіла 1 (див. рис. 2.20), коли він пройде відстань S_1 , якщо матеріальна система починає рухатися зі стану спокою. Масою тросів знехтувати. Тіла 1 та 3 переміщуються без ковзання. Прийняти: $m_1 = 10 \text{ кг}$; $m_2 = 2 \text{ кг}$; $m_3 = 1 \text{ кг}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $r_3 = 0,2 \text{ м}$; $\rho_2 = 0,3 \text{ м}$; $\rho_3 = 0,25$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $S_1 = 0,4 \text{ м}$.

Розв'язання. Положення тіл системи (рис. 2.21) визначаємо узагальненою координатою x .

Для дослідження руху матеріальної системи застосуємо рівняння Лагранжа 2-го роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad (2.83)$$

де x – узагальнена координата;

$\dot{x} = V_1$ – узагальнена швидкість;

Q_x – узагальнена сила;

$T = T_1 + T_2 + T_3$ – кінетична енергія системи;

T_i ($i = 1, 2, 3$) – кінетична енергія відповідно 1, 2 та 3 тіл.

Знайдемо кінематичні співвідношення між швидкостями точок, кутовими швидкостями тіл, записавши їх через швидкість V_1 центра мас тіла 1.

Кутова швидкість тіла 1, враховуючи, що миттєвий центр швидкості тіла 1 знаходиться в точці O_1 (рис. 2.21):

$$\omega_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad (2.84)$$

де R_1 – радіус однорідного суцільного диска (тіла) 1.

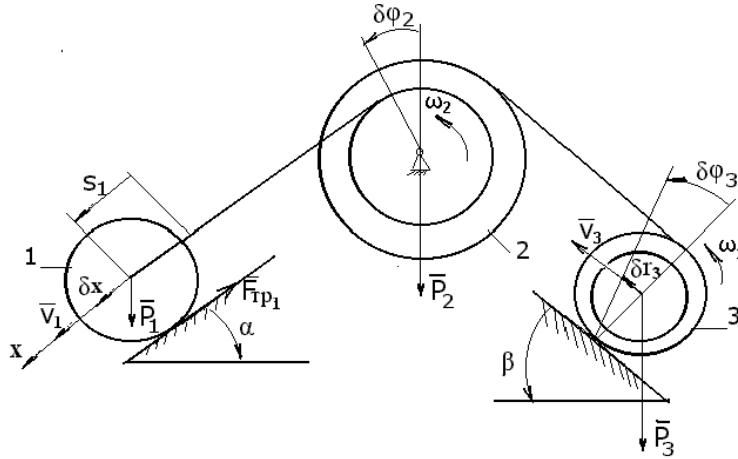


Рисунок 2.21

Кутова швидкість тіла 2

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} \dots \quad (2.85)$$

Швидкість точки А, враховуючи, що тіла 2 та 3 з'єднані нерозтяжним шнуром, визначається за формулою

$$V_A = \omega_2 R_2. \quad (2.86)$$

Оскільки точка O_3 – миттєвий центр швидкості тіла 3, то

$$V_A = \omega_3 2R_3. \quad (2.87)$$

Із (2.86) та (2.87) визначаємо кутову швидкість тіла 3

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{2R_3} = V_1 \frac{R_2}{2r_2 R_3}. \quad (2.88)$$

Швидкість V_3 центра мас тіла 3

$$V_3 = \omega_3 R_3 = V_1 \frac{R_2}{2r_2}. \quad (2.89)$$

Знайдемо переміщення центра мас тіла 3.

Оскільки
$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}, \quad V_3 = \frac{dS_3}{dt}, \quad (2.90)$$

то, враховуючи (2.89), отримаємо

$$\frac{dS_3}{dt} = \frac{dS_1}{dt} \cdot \frac{R_2}{2r_2}, \quad \text{або} \quad dS_3 = \frac{R_2}{2r_2} \cdot dS_1. \quad (2.91)$$

При $t = 0$, $S_1 = 0$ та $S_3 = 0$ і після інтегрування (2.91) маємо

$$S_3 = S_1 \cdot \frac{R_2}{2r_2}. \quad (2.92)$$

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2 та 3

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2.93)$$

Кінетична енергія тіла 1, що рухається плоскопаралельно

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2,$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$ – момент інерції тіла 1 відносно центральної осі. Тоді, враховуючи (2.84),

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \frac{V_1^2}{R_1^2} = \frac{3}{4} m_1 V_1^2. \quad (2.94)$$

Тіло 2 обертається навколо горизонтальної осі і кінетична енергія знаходиться за формулою

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

де $I_2 = \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2$ – момент інерції тіла 2 відносно головної центральної осі;
 ω_2 – кутова швидкість тіла 2 (2.85).

Тоді
$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_1^2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2}. \quad (2.95)$$

Кінетична енергія тіла 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

де $I_3 = m_3 \rho_3^2$ – момент інерції тіла 3 відносно головної центральної осі;
 ω_3 – кутова швидкість тіла 3 (5.26);
 $V_3 = \omega_3 R_3$ – швидкість центра мас тіла 3.

Тоді

$$T_3 = \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 V_1^2 \frac{R_2^2 \rho_3^2}{r_2^2 R_3^2}. \quad (2.96)$$

Тепер кінетичну енергію (2.93) системи, враховуючи (2.94)–(2.96), визначимо за формулою

$$T = V_1^2 \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{8} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right) \right),$$

або
$$T = \frac{1}{2} m_{36} V_1^2, \quad (2.97)$$

де $m_{36} = \frac{3}{2} m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{4} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \left(1 + \frac{\rho_3^2}{R_3^2} \right)$ – зведена маса системи.

Знайдемо ліву частину рівняння (2.83)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_{36} V.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m_{36} a_1, \quad (2.99)$$

де $a_1 = \frac{dV_1}{dt}$.

Узагальнену силу Q_x знайдемо за формулою:

$$Q_x = \frac{\sum \delta A}{\delta x}, \quad (2.100)$$

де $\sum \delta A$ – сума віртуальних робіт активних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ і $\bar{F}_{mp,1}$ (див. рис. 2.21), δx – варіація узагальненої координати x .

Віртуальна робота активних сил

$$\sum \delta A = P_1 \cdot \delta x \sin \alpha - P_3 \cdot \delta r_3 \sin \beta, \quad (2.101)$$

де $P_1 = m_1 g$, $P_3 = m_3 g$, $\delta r_3 = \delta x \frac{R_2}{2r_2}$.

Тепер
$$\sum \delta A = g \left(m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta \right) \cdot \delta x. \quad (2.102)$$

Тоді з формули (2.100), враховуючи (2.102), отримаємо

$$Q_x = g \left(m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta \right). \quad (2.103)$$

Рівняння Лагранжа 2-го роду (2.83) при врахуванні (2.98), (2.99) і (2.103) набуває вигляду

$$m_{36} a_1 = g \left(m_1 \sin \alpha - m_3 \frac{R_2}{2r_2} \sin \beta \right),$$

звідки

$$a_1 = \frac{g}{m_{36}} \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right). \quad (2.104)$$

Або, підставляючи дані умови задачі,

$$a_1 = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0,4}{2 \cdot 0,3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0,35^2}{0,3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0,4^2}{0,3^2} \left(1 + \frac{0,25^2}{0,3^2} \right)} \cdot 9,81 = 2,41 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки $a_1 = \frac{dV_1}{dt} \cdot \frac{dS_1}{dS_1} = V_1 \cdot \frac{dV_1}{dS_1}$, то з формули (2.97) знаходимо швидкість

V_1 :

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{S_1 \cdot g \left(m_1 \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot \frac{R_2}{2r_2} \cdot \sin \beta \right)}{m_{36}}}.$$

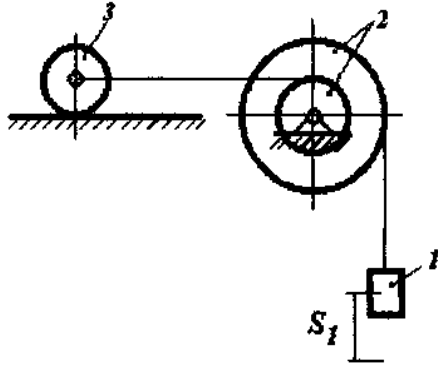
Підставляючи числові дані, отримаємо

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{10 \cdot \sin 30^\circ - 1 \cdot \frac{0,4}{2 \cdot 0,3} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{3}{2} \cdot 10 + 2 \cdot \frac{0,35^2}{0,3^2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{0,4^2}{0,3^2} \left(1 + \frac{0,25^2}{0,3^2} \right)}} = 1,3 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $a_1 = 2,41 \text{ м/с}^2$, $V_1 = 1,3 \text{ м/с}$.

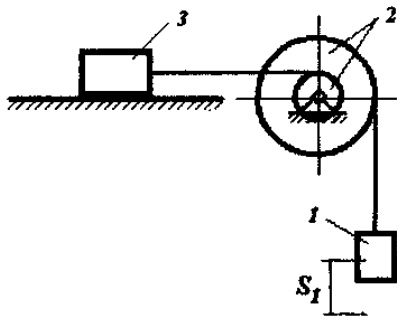
2.5.3 Задачі на використання теореми про зміну кінетичної енергії системи та рівняння Лагранжа 2-го роду для дослідження матеріальної системи

Задача № 1



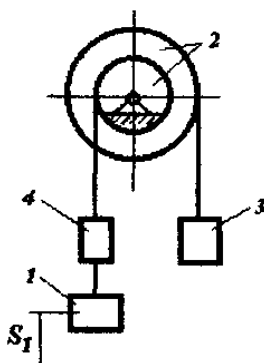
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 3 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 2



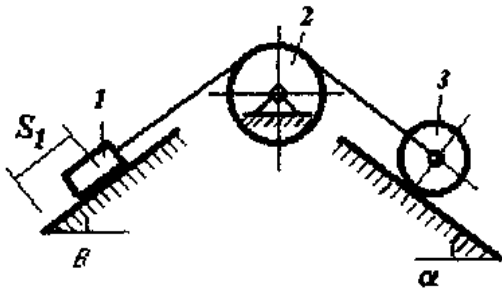
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг.

Задача № 3



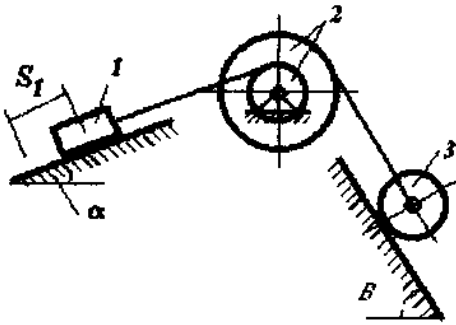
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 30$ кг.

Задача № 4



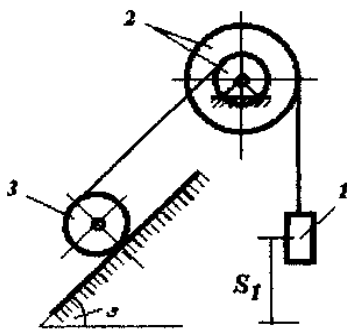
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 3 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $m_1 = 50$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Задача № 5



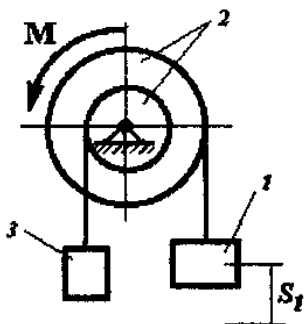
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 120$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Задача № 6



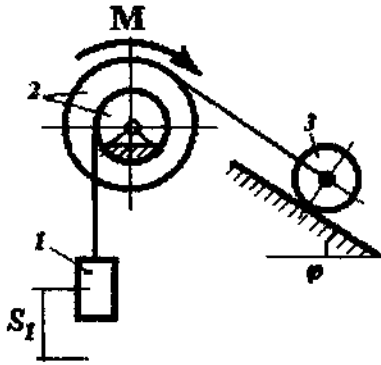
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 3 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $\beta = 60^\circ$.

Задача № 7



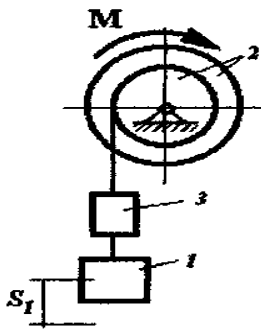
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $M = 100$ Н·м.

Задача № 8



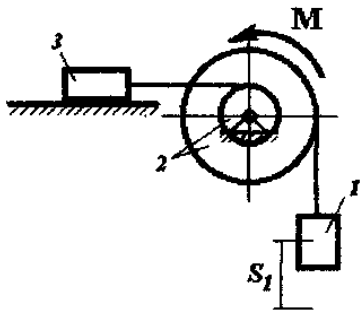
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 3 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $M = 10$ Н·м; $\varphi = 30^\circ$.

Задача № 9



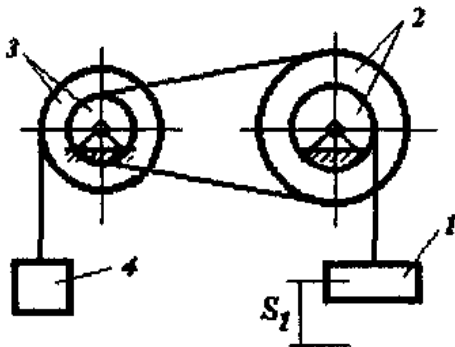
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 5$ кг; $M = 10$ Н·м.

Задача № 10



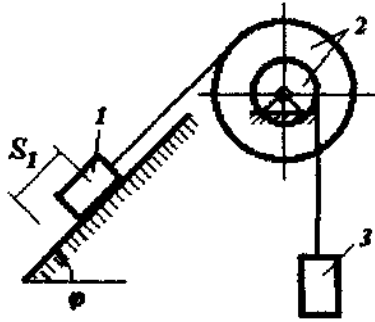
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 20$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 5$ кг; $M = 30$ Н·м.

Задача № 11



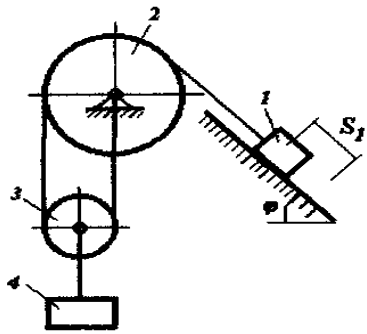
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,3$ м; $r_3 = 0,15$ м; $i_3 = 0,2$ м; $m_1 = 120$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 30$ кг.

Задача № 12



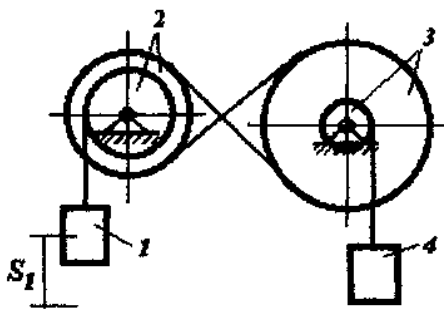
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 10$ кг; $\varphi = 60^\circ$.

Задача № 13



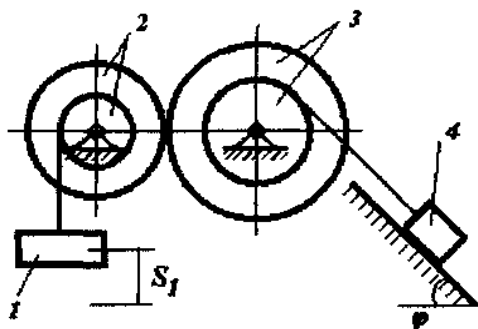
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 10$ кг; $m_4 = 5$ кг; $\varphi = 60^\circ$.

Задача № 14



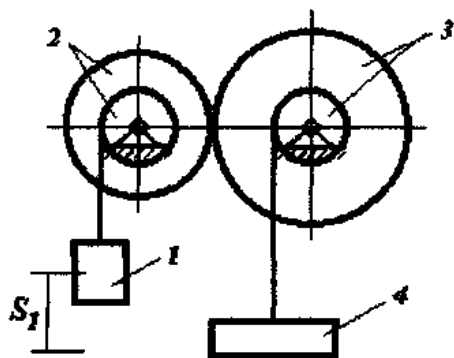
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,6$ м; $r_3 = 0,2$ м; $i_3 = 0,4$ м; $m_1 = 120$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 30$ кг.

Задача № 15



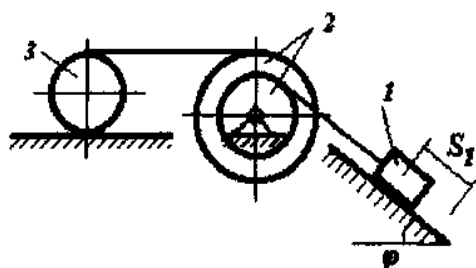
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,6$ м; $r_3 = 0,3$ м; $i_3 = 0,4$ м; $m_1 = 120$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 30$ кг; $\varphi = 60^\circ$.

Задача № 16



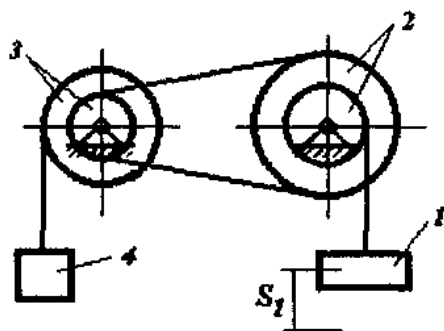
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2^{\circ} = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_3^{\circ} = 0,4$ м; $r_3 = 0,1$ м; $i_3 = 0,3$ м; $m_1^{\circ} = 100$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 30$ кг.

Задача № 17



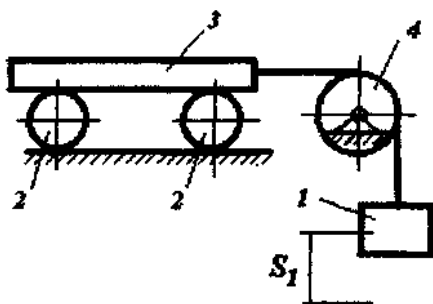
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 3 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2^{\circ} = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1^{\circ} = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 10$ кг; $\varphi^{\circ} = 45^{\circ}$.

Задача № 18



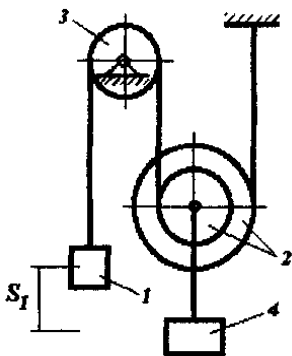
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2^{\circ} = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_3^{\circ} = 0,2$ м; $r_3 = 0,1$ м; $i_3 = 0,1$ м; $m_1^{\circ} = 100$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 30$ кг.

Задача № 19



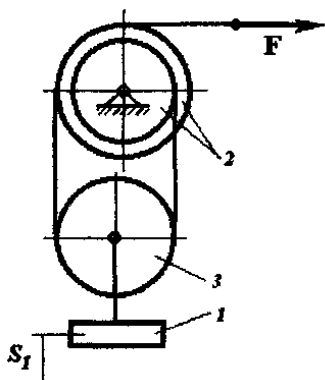
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідні тіла 2 котяться без ковзання. Дані для розрахунку: $m_1^{\circ} = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 100$ кг; $m_4^{\circ} = 5$ кг.

Задача № 20



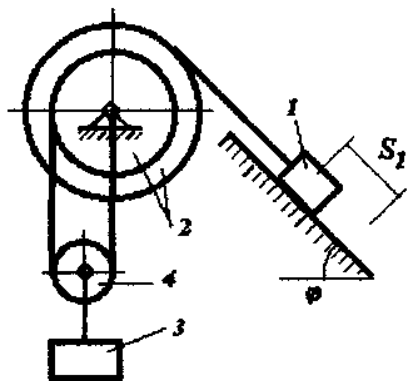
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2^0 = 0,3$ м; $r_2^0 = 0,2$ м; $i_2^0 = 0,3$ м; $m_1^0 = 100$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4^0 = 30$ кг.

Задача № 21



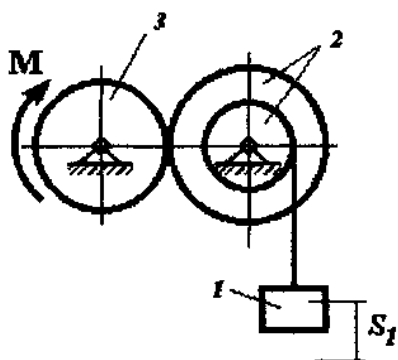
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2^0 = 0,5$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,4$ м; $m_1^0 = 100$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $F^0 = 40$ Н.

Задача № 22



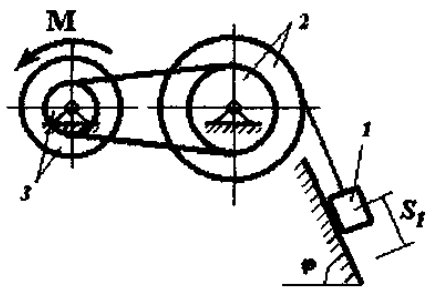
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2^0 = 0,5$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1^0 = 100$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 10$ кг; $m_4^0 = 15$ кг; $\varphi = 45^\circ$.

Задача № 23



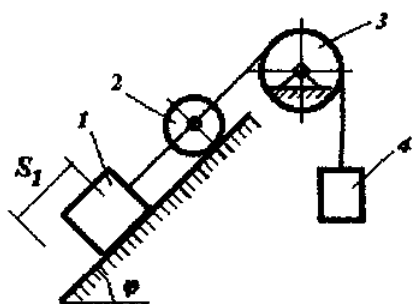
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_3^0 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3^0 = 30$ кг; $M = 10$ Н·м.

Задача № 24



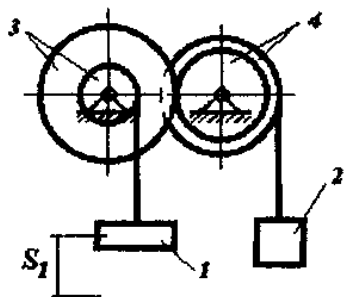
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,3$ м; $r_3 = 0,15$ м; $i_3 = 0,2$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $M = 10$ Н·м; $\varphi = 30^\circ$.

Задача № 25



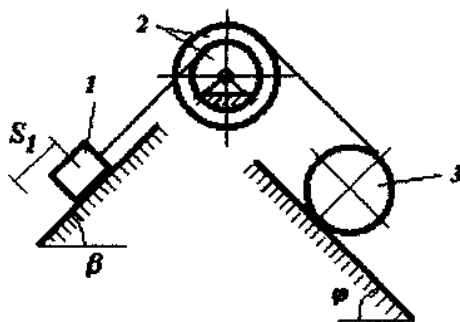
Матеріальна система рухається із стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 2 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $\varphi = 60^\circ$.

Задача № 26



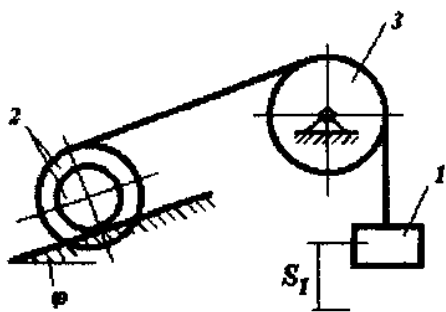
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,3$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $R_4 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $i_2 = 0,3$ м; $R_4 = 0,4$ м; $r_3 = 0,1$ м; $i_3 = 0,2$ м; $m_1 = 100$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 30$ кг.

Задача № 27



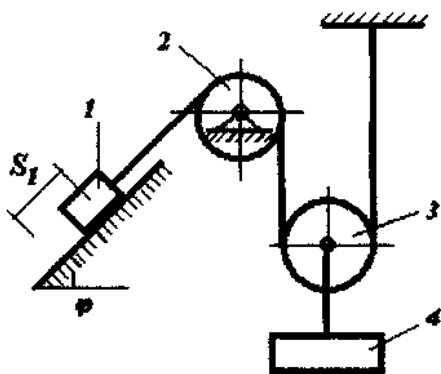
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 3 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $\varphi = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Задача № 28



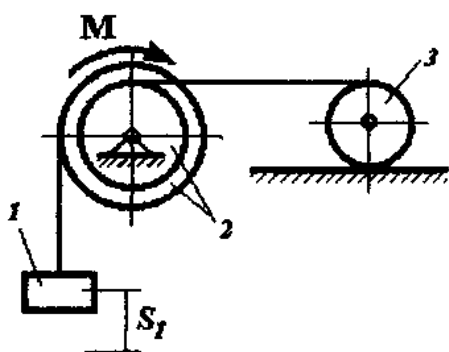
Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 2 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $\varphi = 30^\circ$.

Задача № 29



Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,1$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Дані для розрахунку: $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $m_4 = 10$ кг; $\varphi = 60^\circ$.

Задача № 30



Матеріальна система рухається зі стану спокою. Знайти прискорення та швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях $S_1 = 0,2$ м. Масами шнурів, силами опору в шарнірах знехтувати. Однорідне тіло 3 котиться без ковзання. Дані для розрахунку: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $i_2 = 0,3$ м; $m_1 = 60$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 30$ кг; $M = 10$ Н·м; $\varphi = 30^\circ$.

2.6 Принцип Д'Аламбера для матеріальної системи

2.6.1 Використання принципу Д'Аламбера для дослідження матеріальної системи

Вантаж 1 (рис. 2.22) тросом з'єднаний з центром мас рухомого блока 3, який приводиться в рух пасом, один кінець якого закріплений в точці C , а другий перекинутий через нерухомий блок 4 і зафіксований на барабані 2 масою m_2 , що приводиться в рух електродвигуном з моментом M . Знайти реакції жорсткого заземлення A однорідної балки AB довжиною l і вагою P . Масою блока 4, троса та паса знехтувати. Маса електродвигуна m_d , момент інерції ротора – I_p . Тіло 3 – однорідний диск, а маса барабана 2 розподілена по ободу радіуса R_2 .

Дані для розрахунку: $m_1 = 300$ кг; $I_p = 0,25$ кг·м²; $m_3 = 10$ кг; $m_2 = 15$ кг; $m_d = 35$ кг; $P = 250$ Н; $l = 1$ м; $R_2 = 0,2$ м; $M = 320$ Н·м; $\alpha = 30^\circ$.

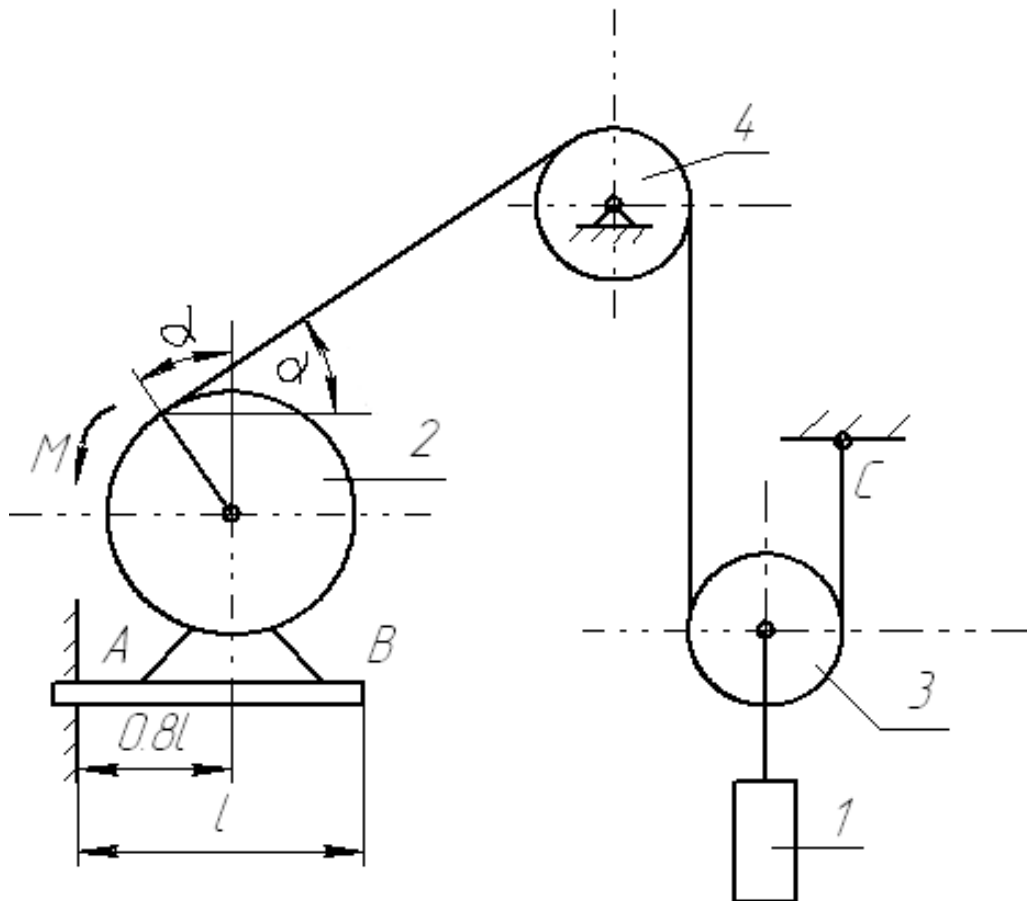


Рисунок 2.22

Розв'язування. Розглянемо матеріальну систему, що складається з балки, електродвигуна і барабана 2 (рис. 2.23).

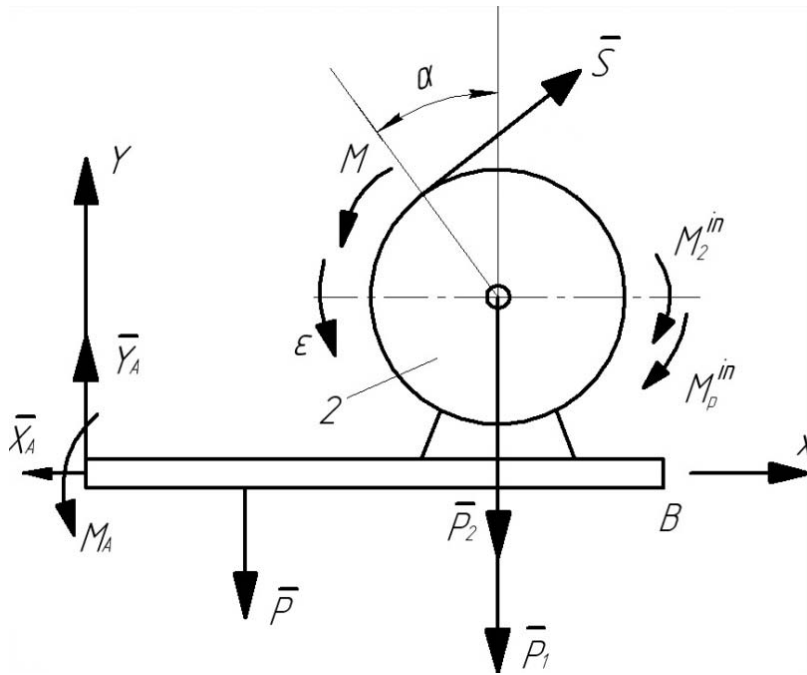


Рисунок 2.23

Запишемо принцип Д'Аламбера для плоскої довільної системи сил в проекціях на осі x та y .

$$F_x + R_x + F_x^{in} = 0,$$

$$F_y + R_y + F_y^{in} = 0, \quad (2.105)$$

$$M_A^F + M_A^R + M_A^{in} = 0.$$

Рівняння (2.105) для механічної системи (див. рис. 2.23) записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} -X_A + S \cos \alpha &= 0, \\ Y_A - P - P_D - P_2 + S \sin \alpha &= 0, \\ M_A - 0,5P - 0,8(P_1 + P_D) + M - M_2^{in} - M_p^{in} - (1,2 + \cos \alpha)R_2 S \cos \alpha + \\ &+ (0,8l - R_2 \sin \alpha)S \sin \alpha = 0, \end{aligned} \quad (2.106)$$

де S – реакція паса, $M_2^{in} = I_2 \varepsilon$ – головний момент сил інерції барабана;

ε – кутове прискорення ротора електродвигуна та барабана;

$M_p^{in} = I_p \varepsilon$ – головний момент сил інерції ротора електродвигуна;

X_A, Y_A, M_A – реакції жорсткого защемлення;

$P_D = m_D g$; $P_2 = m_2 g$.

В трьох рівняннях (2.106) п'ять невідомих: $X_A, Y_A, M_A, \varepsilon, S$. Додаткові рівняння отримаємо, якщо використаємо принцип Д'Аламбера для визначення моментів сил відносно точки K (рис. 2.24) та точки D (рис. 2.25).

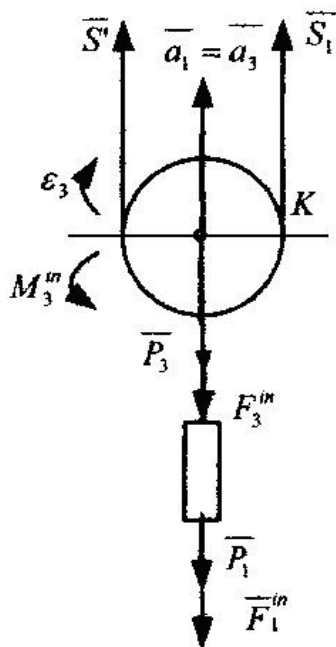


Рисунок 2.24

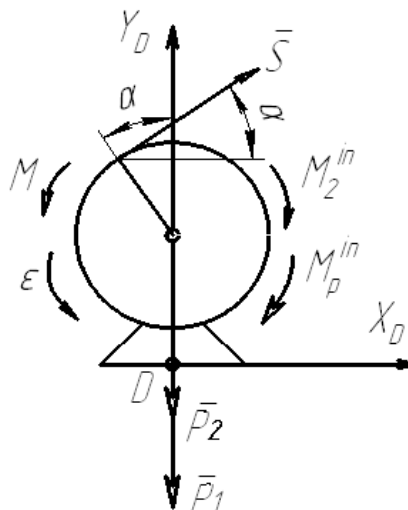


Рисунок 2.25

Рівняння рівноваги блока 3

$$M_K^F + M_K^R + M_K^{in} = 0 \text{ (рис. 6.3),}$$

$$-2S' \cdot R_3 + M_3^{in} + R_3(P_1 + P_3 + F_1^{in} + F_3^{in}) = 0, \quad (2.107)$$

де $S' = S$, R_3 – радіус шківa 3, $P_3 = m_3 g$, $P_1 = m_1 g$, $F_1^{in} = m_1 a_1$, $F_3^{in} = m_3 a_3$, $M_3^{in} = I_3 \varepsilon_3$, $I_3 = \frac{m_3}{2} R_3^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon \frac{R_2}{2R_3}$, $a_3 = a_1 = \frac{1}{2} \varepsilon R_2$.

З врахуванням значень складових формули (2.107), маємо

$$-8S + \varepsilon R_2 (3m_3 + 2m_1) + 4g(m_1 + m_3) = 0. \quad (2.108)$$

Рівняння рівноваги електромотора (див. рис. 2.25)

$$M_D^F + M_D^R + M_D^{in} = 0,$$

$$M - M_2^{si} - M_p^{si} - (1,2 + \cos \alpha) R_2 S \cos \alpha + (0,8l - R_2 \sin \alpha) S \sin \alpha = 0, \quad (2.109)$$

де X_D, Y_D – реакції в'язі балки AB в точці D , $M_2^{in} = m_2 R_2^2$, $M_p^{in} = I_p \varepsilon$.

Після елементарних перетворень рівняння (2.109) має вигляд

$$M - m_2 R_2^2 \varepsilon - I_p \varepsilon - (1,2 + \cos \alpha) S R_2 \cos \alpha - S R_2 \sin^2 \alpha = 0. \quad (2.110)$$

Із рівнянь (2.108) і (2.110) визначаємо натяг паса S

$$S = \frac{M R_2 (3m_3 + 2m_1) + 4(m_1 + m_3)(m_2 R_2^2 + I_p)g}{8(m_2 R_2^2 + I_p) + R_2^2 (1 + 1,2 \cos \alpha)(3m_3 + 2m_1)}. \quad (2.111)$$

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо

$$S = \frac{320 \cdot 0,2 \cdot 630 + 4 \cdot 310 \cdot (15 \cdot 0,04 + 0,25) \cdot 9,81}{8 \cdot (15 \cdot 0,04 + 0,25) + 0,04(1 + 1,2 \cdot 0,8660) \cdot 630} = 870,6 \text{ (H)}.$$

Враховуючи значення S , з рівняння (2.110) знаходимо кутове прискорення ротора електродвигуна та барабана

$$\varepsilon = \frac{M - S R_2 (1,2 \cos \alpha + 1)}{m_2 R_2^2 + I_p} = \frac{320 - 870,6 \cdot 0,2 \cdot (1 + 1,2 \cdot 0,866)}{15 \cdot 0,04 + 0,25} = -41,25 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

Величину сил X_A, Y_A і реактивний момент M_A визначаємо з рівнянь рівноваги (2.106)

$$X_A = 870,6 \cdot 0,866 = 753,94 \text{ (H)};$$

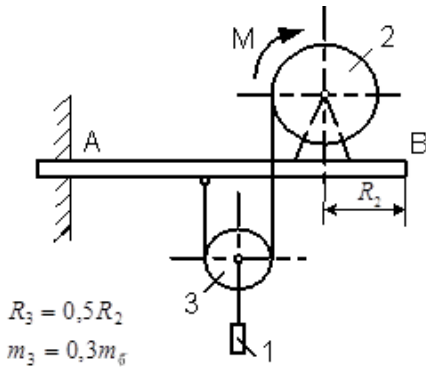
$$Y_A = P + P_D + P_2 - S \cdot \sin \alpha = 250 + (35 + 15) \cdot 9,81 - 870,6 \cdot 0,5 = 305,2 \text{ (H)};$$

$$M_A = 0,5 \cdot P + (m_2 + m_D) \cdot g \cdot 0,8 - M + m_2 \cdot R_2^2 \cdot \varepsilon + S \cdot R_2 + S \cdot (1,2 \cdot R_2 \cdot \cos \alpha - 0,8 \cdot \sin \beta) = 169,16 \text{ (H} \cdot \text{м)}.$$

Відповідь: $X_A = 753,94 \text{ H}$; $Y_A = 305,2 \text{ H}$; $M_A = 169,16 \text{ H} \cdot \text{м}$.

2.6.2 Задачі на принцип Д'Аламбера для матеріальної системи

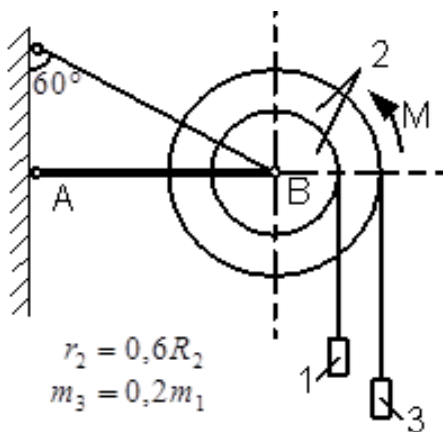
Задача № 1



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,2 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

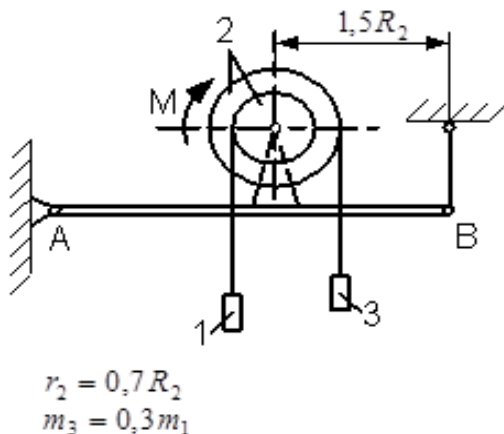
Задача № 2



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 50 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

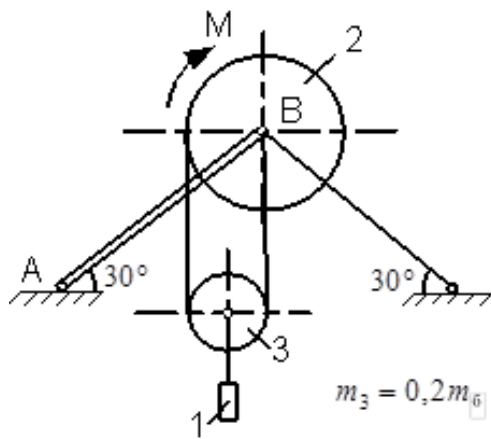
Задача № 3



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,2 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

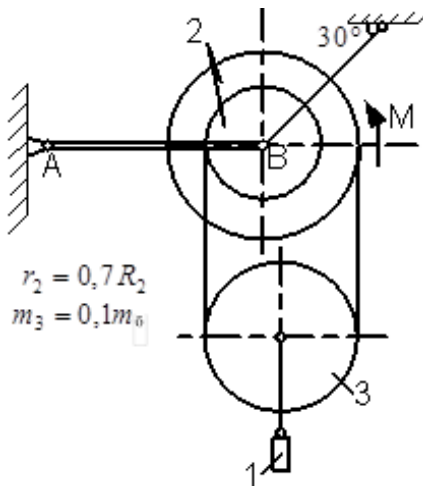
Задача № 4



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 50 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

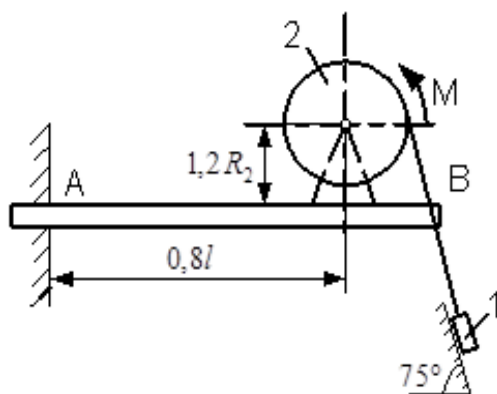
Задача № 5



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

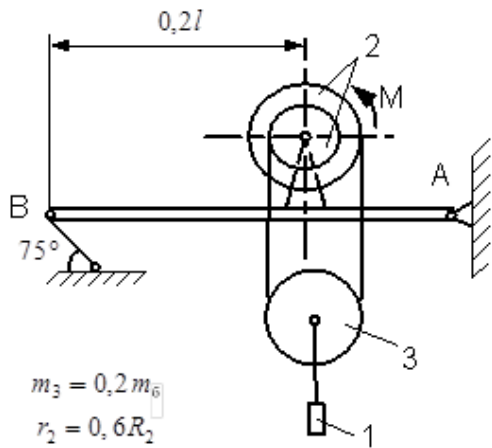
Задача № 6



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 800 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 300 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,2 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

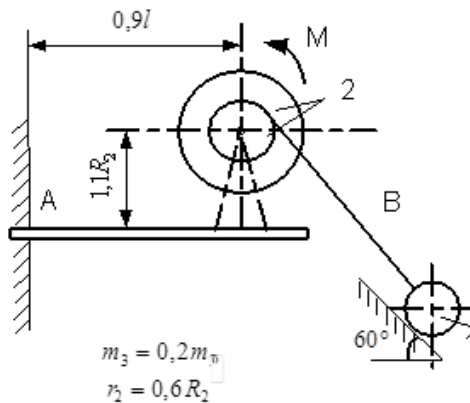
Задача № 7



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

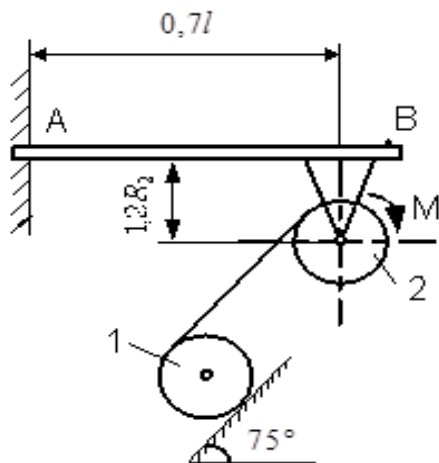
Задача № 8



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,4 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

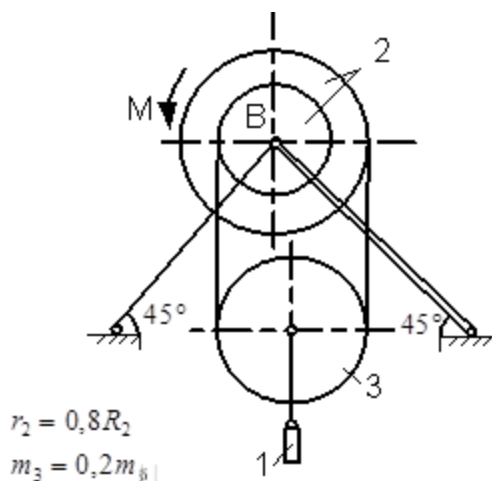
Задача № 9



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

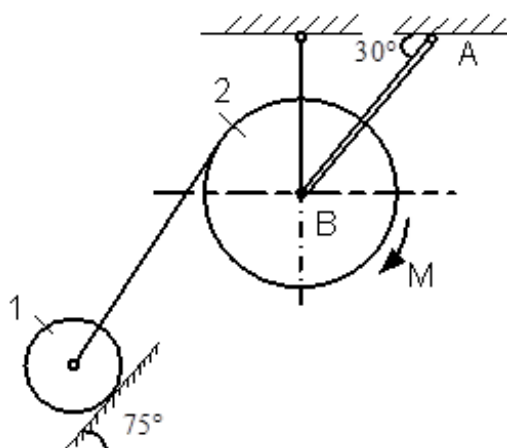
Задача № 10



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_д = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

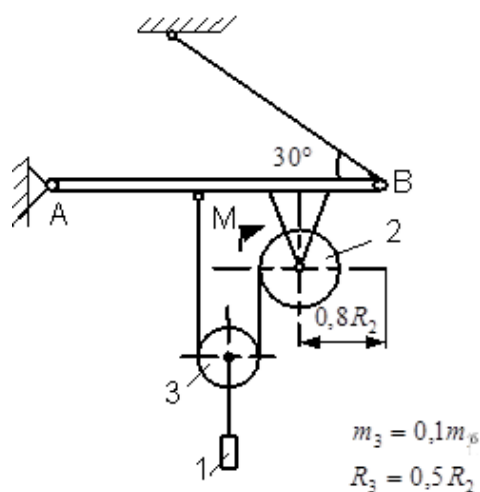
Задача № 11



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,8 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_д = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 20 \text{ кг}$.

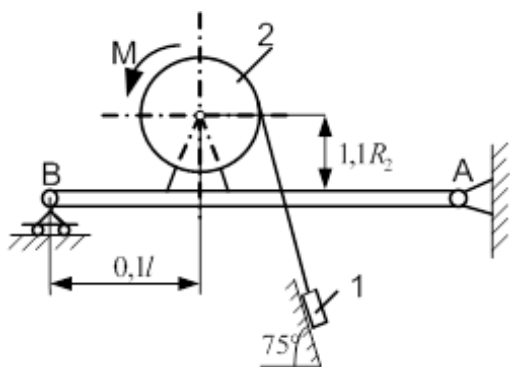
Задача № 12



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_д = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

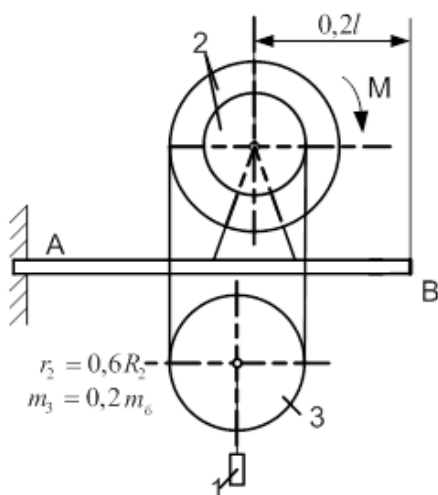
Задача № 13



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна;
 $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна;
 $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

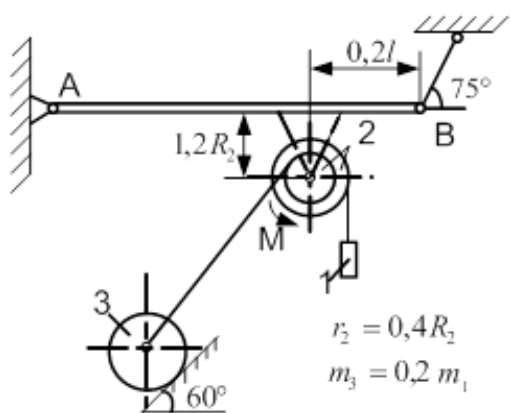
Задача № 14



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 350 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна;
 $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна;
 $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

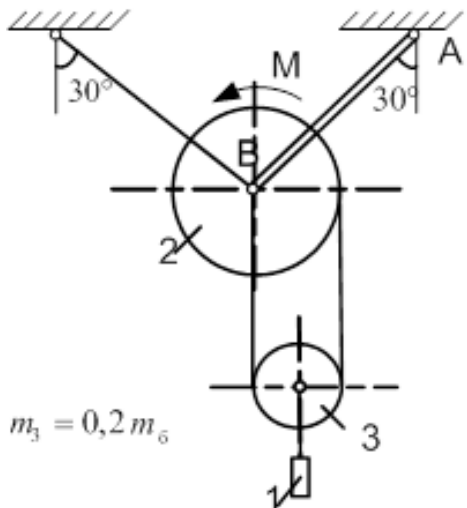
Задача № 15



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна;
 $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна;
 $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

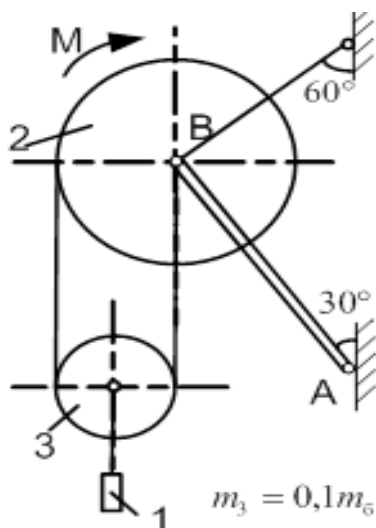
Задача № 16



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,4 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

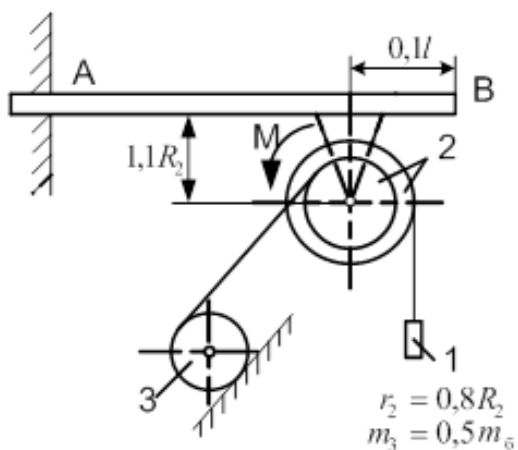
Задача № 17



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

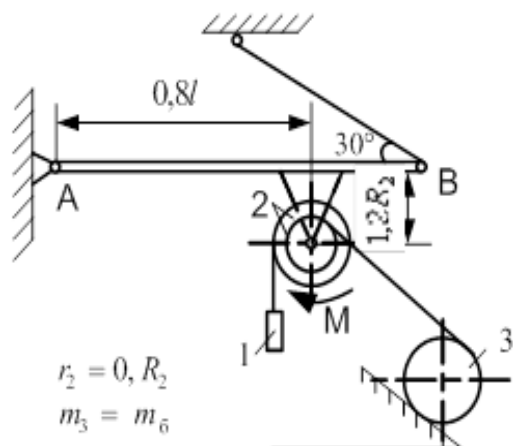
Задача № 18



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

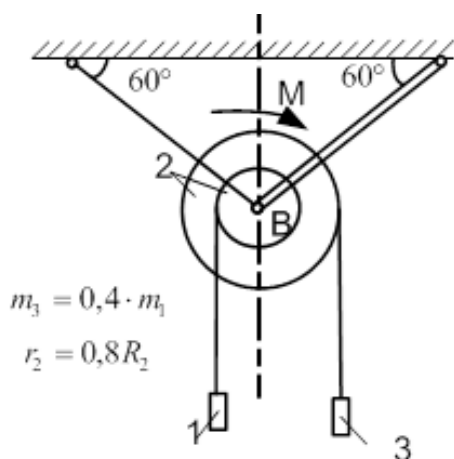
Задача № 19



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

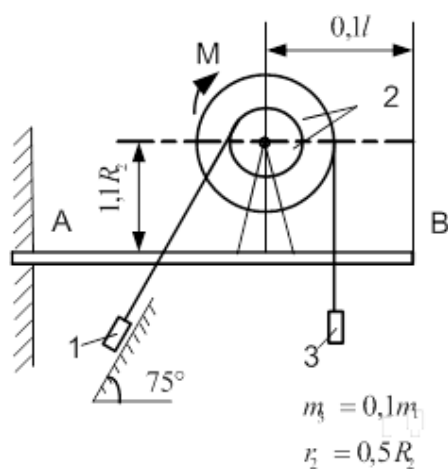
Задача № 20



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 300 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

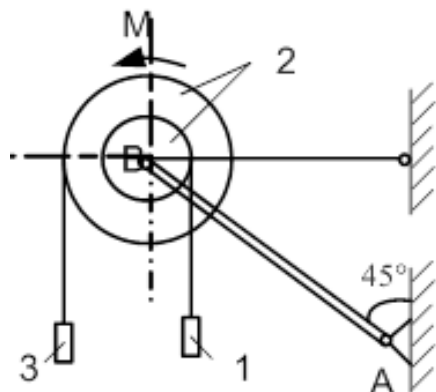
Задача № 21



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 800 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 500 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 600 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

Задача № 22



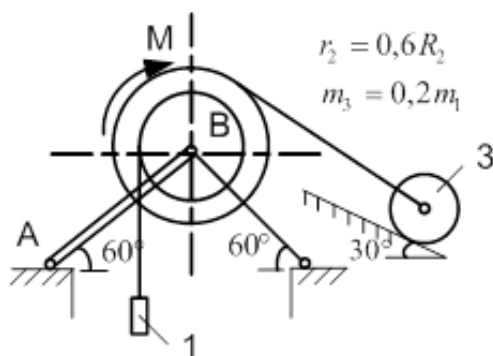
$$r_2 = 0,8R_2$$

$$m_3 = 0,2m_1$$

Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 300 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

Задача № 23



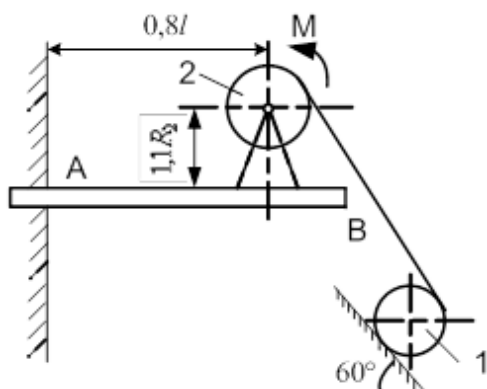
$$r_2 = 0,6R_2$$

$$m_3 = 0,2m_1$$

Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,4 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

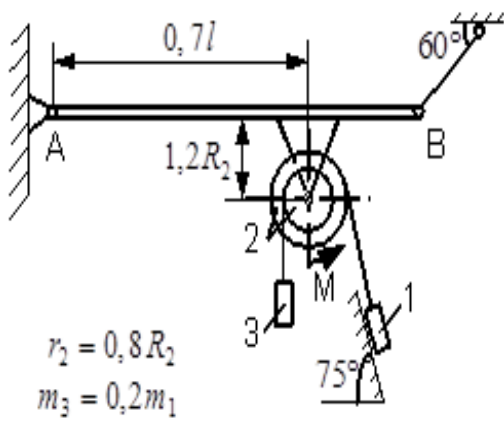
Задача № 24



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

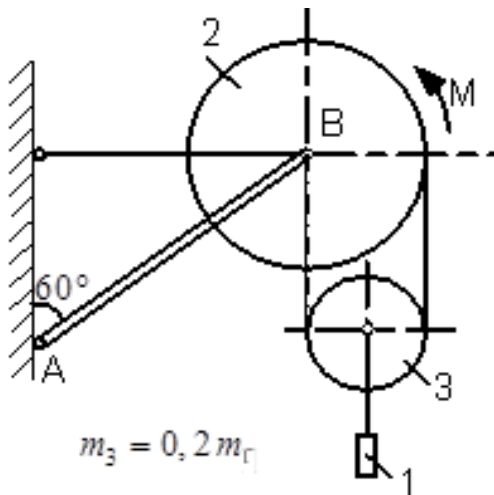
Задача № 25



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

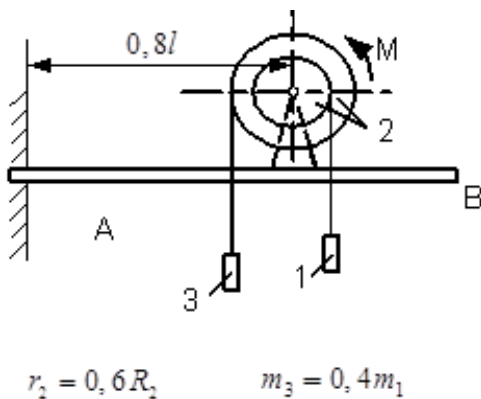
Задача № 26



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

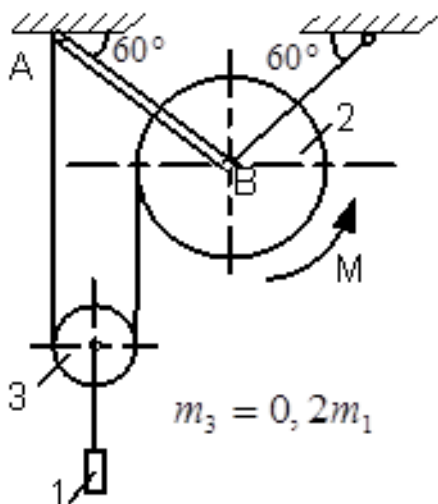
Задача № 27



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

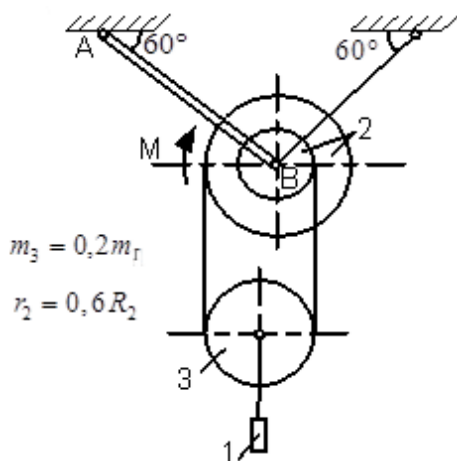
Задача № 28



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,1 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_D = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

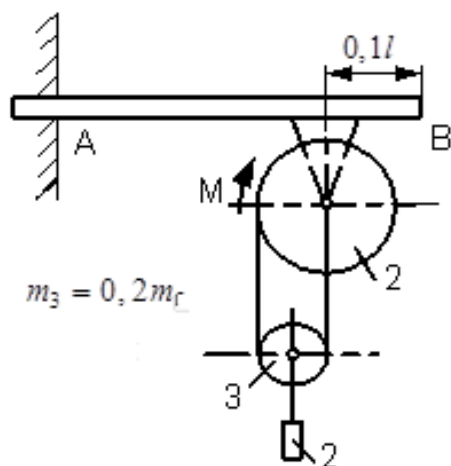
Задача № 29



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,4 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_D = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

Задача № 30



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить в рух барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіуса $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_D = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

2.7 Визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа)

2.7.1 Методика визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа)

Плоский механізм, що зображений на рисунку 2.26, знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту M . Знайти силу F , якщо сила \bar{P} перпендикулярна до горизонтальної лінії OD . В остаточних розрахунках прийняти, що $OA = R = 1,2$ м, $OB = r = 0,8$ м, $M = 2$ кН·м, $P = 10$ кН, $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 15^\circ$.

Розв'язання. Застосовуємо принцип віртуальних переміщень.

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{(a)} = 0. \quad (2.112)$$

Надаємо точкам механізму можливі переміщення, які не порушують умов ідеальних в'язей. Якщо стержень OB повернеться навколо осі O на малий кут $\delta\varphi$, то точки A і B набувають лінійних переміщень δS_A і δS_B , відповідно. Переміщення зображаємо на рис. 2.27. Можливе переміщення для точки D – δS_D .

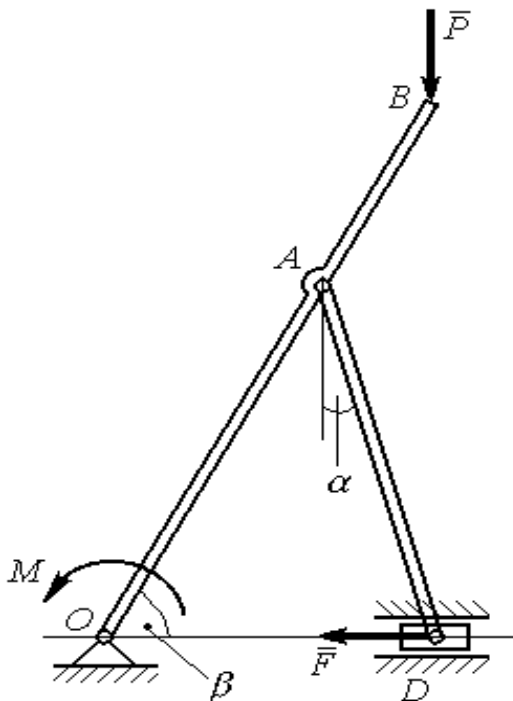


Рисунок 2.26

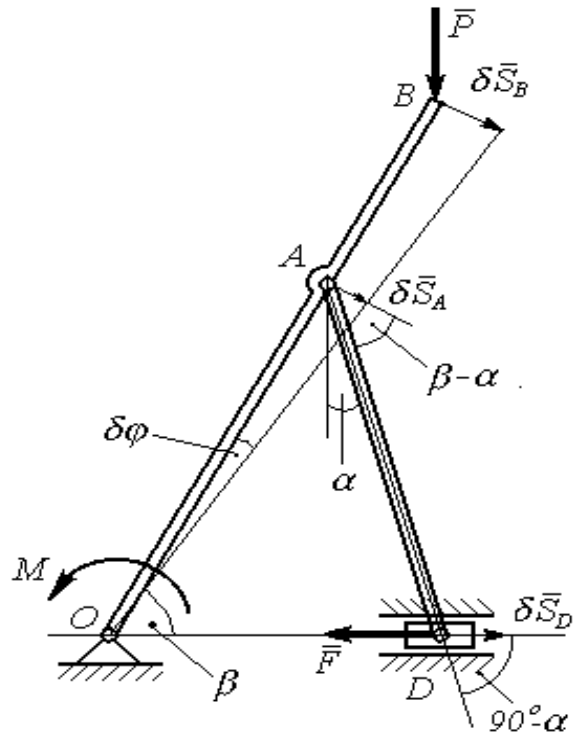


Рисунок 2.27

Згідно з принципом віртуальних переміщень (2.112) запишемо суму віртуальних робіт для силових навантажень M , P і F .

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{(a)} = -M \cdot \delta \varphi + P \cdot \delta S_B \cdot \cos \beta - F \cdot \delta S_D = 0. \quad (2.113)$$

Встановимо залежність між переміщеннями і виразимо $\delta \varphi$, δS_B і δS_D через δS_A .

$$\text{Для ланки } OB \delta \phi = \frac{\delta S_A}{OA} = \frac{\delta S_B}{OB}.$$

Для ланки AD на основі того, що проекції переміщень на вісь, що проходить через точки A і D , буде: $\delta S_A \cdot \cos(\beta - \alpha) = \delta S_D \cdot \sin \alpha$.

$$\text{Тому } \delta \phi = \frac{\delta S_A}{OA}; \quad \delta S_B = \frac{OB}{OA} \cdot \delta S_A; \quad \delta S_D = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \delta S_A. \quad (2.114)$$

Підставляємо переміщення (2.114) в рівняння (2.113)

$$-M \frac{\delta S_A}{OA} + P \frac{OB}{OA} \delta S_A \cos \beta - F \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \delta S_A = 0.$$

Переміщення $\delta S_A \neq 0$, тому після скорочення на δS_A і спрощення отримаємо

$$F = \frac{(P \cdot OB \cdot \cos \beta - M) \sin \alpha}{OA \cdot \cos(\beta - \alpha)} = \frac{(P \cdot r \cdot \cos \beta - M) \sin \alpha}{R \cdot \cos(\beta - \alpha)}. \quad (2.115)$$

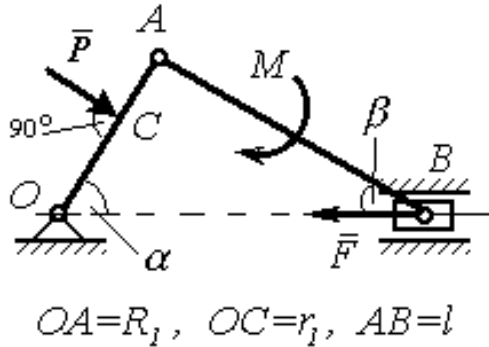
Підставляємо дані

$$F = \frac{(10 \cdot 0,8 \cdot \cos 60^\circ - 2) \sin 15^\circ}{1,2 \cdot \cos(45^\circ)} = \frac{(10 \cdot 0,8 \cdot 0,5 - 2) 0,2588}{1,2 \cdot 0,707} = 0,61 \text{ кН}.$$

Відповідь: $F = 0,61 \text{ кН}$.

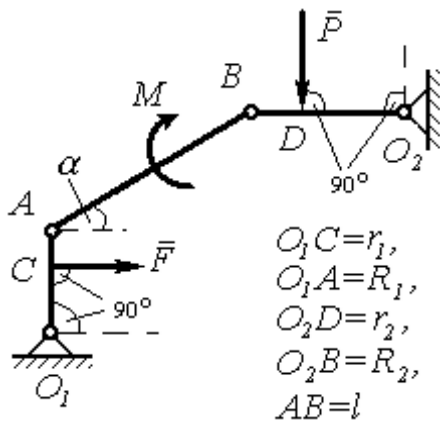
2.7.2 Задачі на визначення реакцій в'язей врівноваженого плоского механізму за допомогою принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа)

Задача № 1



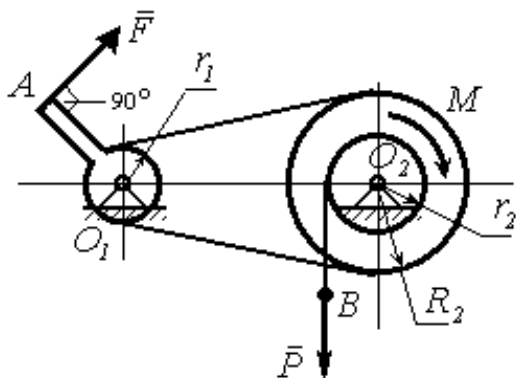
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,4 \text{ м}$; $r_1 = 0,3 \text{ м}$; $P = 80 \text{ Н}$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Задача № 2



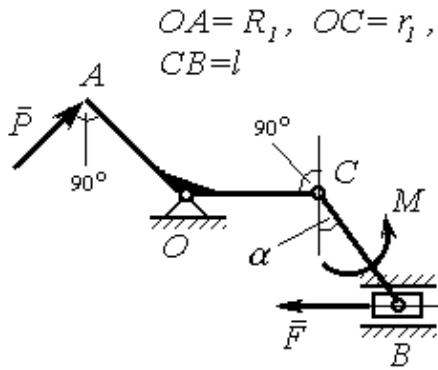
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 60 \text{ Н}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 3



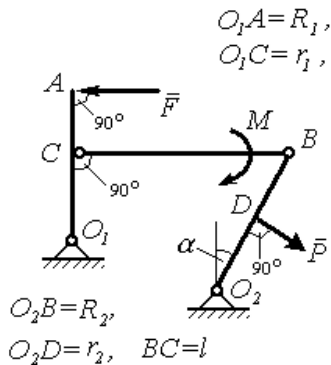
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $O_1A = 0,5 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 40 \text{ Н}$.

Задача № 4



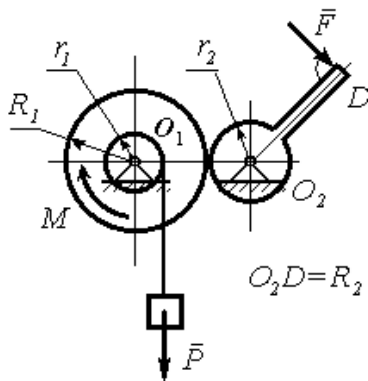
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P}, \bar{F} і моменту $M = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}; r_1 = 0,2 \text{ м}; P = 80 \text{ Н}; l = 0,5 \text{ м}; \alpha = 30^\circ$.

Задача № 5



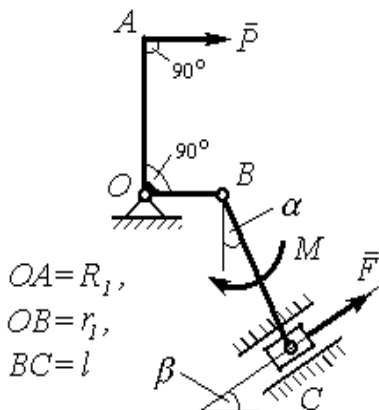
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P}, \bar{F} і моменту $M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}; r_1 = 0,2 \text{ м}; R_2 = 0,4 \text{ м}; r_2 = 0,3 \text{ м}; P = 60 \text{ Н}; l = 0,5 \text{ м}; \alpha = 30^\circ$.

Задача № 6



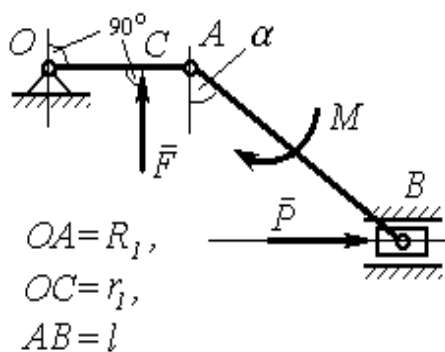
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P}, \bar{F} і моменту $M = 50 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}; r_1 = 0,2 \text{ м}; R_2 = 0,4 \text{ м}; r_2 = 0,3 \text{ м}; P = 100 \text{ Н}; \alpha = 30^\circ$.

Задача № 7



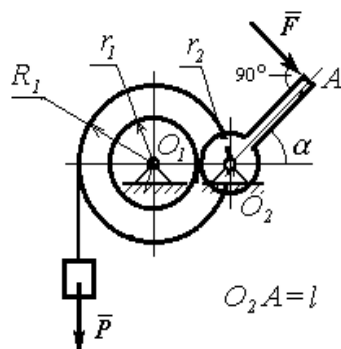
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P}, \bar{F} і моменту $M = 130 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,4 \text{ м}; r_1 = 0,2 \text{ м}; P = 260 \text{ Н}; l = 0,5 \text{ м}; \alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ$.

Задача № 8



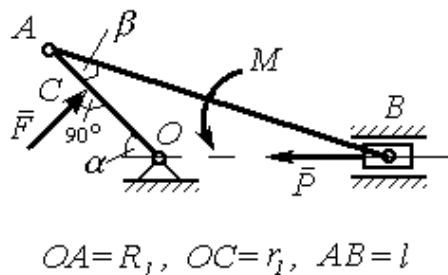
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 50$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м; $P = 80$ Н; $l = 0,6$ м; $\alpha = 45^\circ$.

Задача № 9



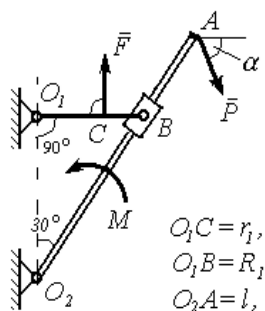
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 300$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,1$ м; $P = 600$ Н; $l = 0,5$ м; $\alpha = 60^\circ$.

Задача № 10



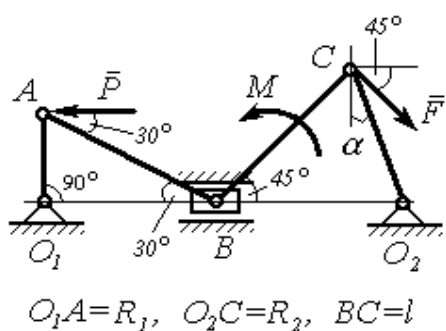
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 600$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $P = 800$ Н; $l = 0,6$ м; $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 11



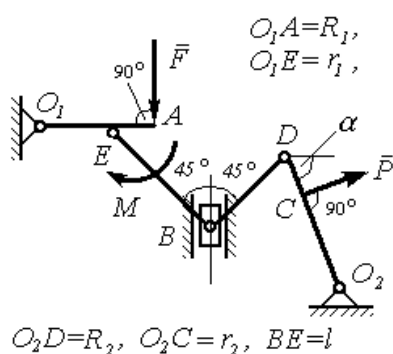
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 30$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м; $P = 60$ Н; $l = 0,5$ м; $\alpha = 60^\circ$.

Задача № 12



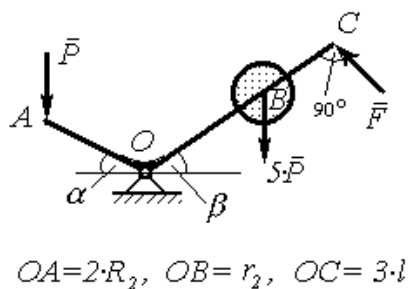
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $P = 700 \text{ Н}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 13



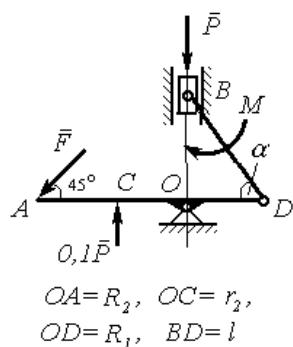
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 600 \text{ Н}$; $l = 0,4 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$.

Задача № 14



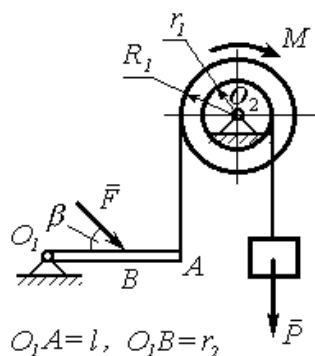
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 7000 \text{ Н}$; $l = 0,3 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$.

Задача № 15



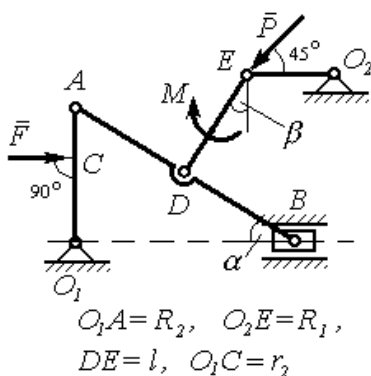
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 80 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,15 \text{ м}$; $P = 600 \text{ Н}$; $l = 0,4 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$.

Задача № 16



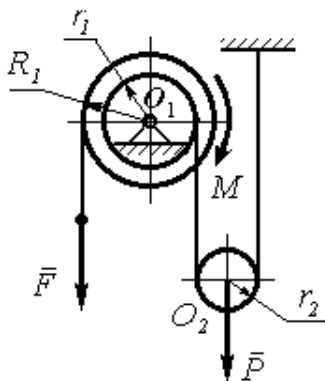
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 900 \text{ Н}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\beta = 30^\circ$.

Задача № 17



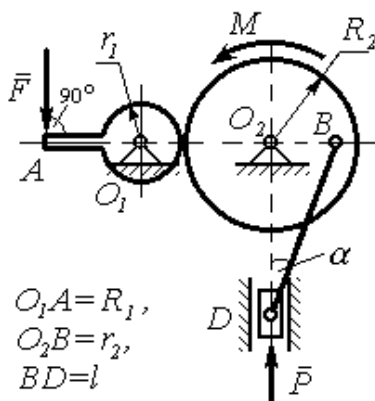
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 60 \text{ Н}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Задача № 18



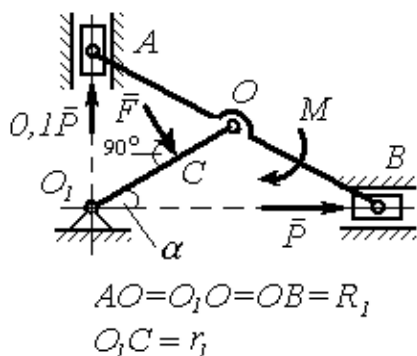
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 4000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 6000 \text{ Н}$.

Задача № 19



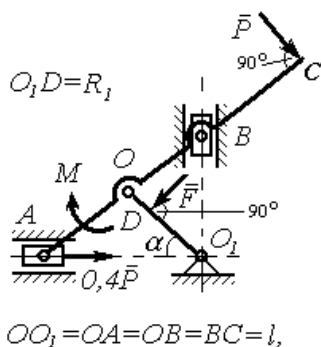
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 4000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,4 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 9000 \text{ Н}$; $l = 0,6 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 20



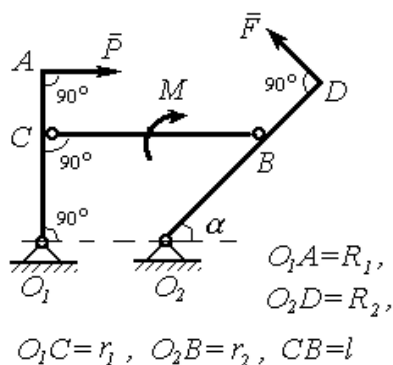
Плоский механизм находится в равновесии под действием сил \bar{P} , \bar{F} и момента $M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найти силу F , если ланки механизма — идеальными твердыми телами, а трения нет. В окончательных расчетах принять: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $P = 60 \text{ Н}$; $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 21



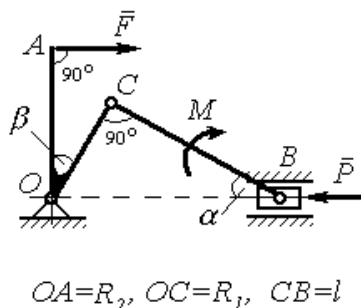
Плоский механизм находится в равновесии под действием сил \bar{P} , \bar{F} и момента $M = 2000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найти силу F , если ланки механизма — идеальными твердыми телами, а трения нет. В окончательных расчетах принять: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $P = 4000 \text{ Н}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\alpha = 45^\circ$.

Задача № 22



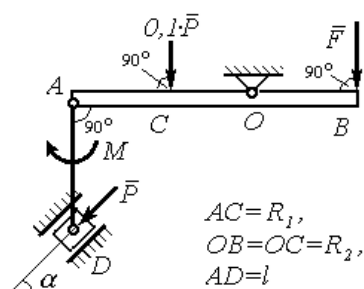
Плоский механизм находится в равновесии под действием сил \bar{P} , \bar{F} и момента $M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найти силу F , если ланки механизма — идеальными твердыми телами, а трения нет. В окончательных расчетах принять: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $r_1 = 0,2 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $r_2 = 0,3 \text{ м}$; $P = 60 \text{ Н}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$.

Задача № 23



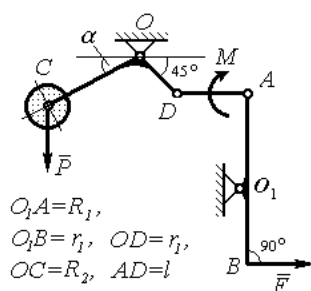
Плоский механизм находится в равновесии под действием сил \bar{P} , \bar{F} и момента $M = 90 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найти силу F , если ланки механизма — идеальными твердыми телами, а трения нет. В окончательных расчетах принять: $R_1 = 0,3 \text{ м}$; $R_2 = 0,4 \text{ м}$; $P = 160 \text{ Н}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Задача № 24



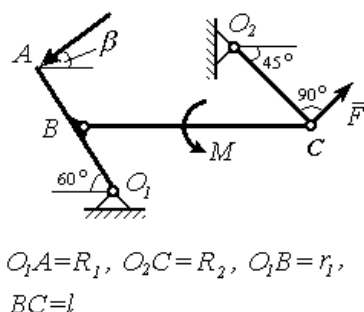
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 90$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $R_2 = 0,4$ м; $P = 200$ Н; $l = 0,5$ м; $\alpha = 60^\circ$.

Задача № 25



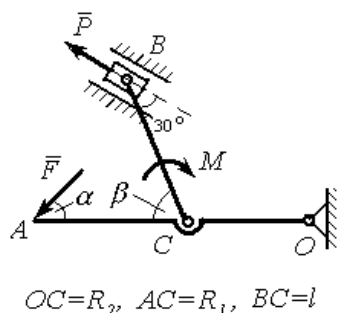
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 30$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $P = 60$ Н; $l = 0,2$ м; $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 26



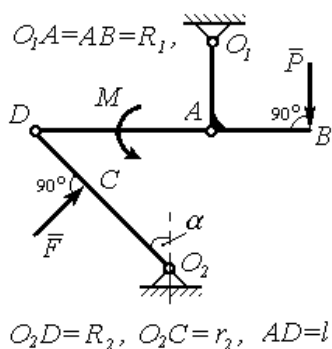
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 300$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,4$ м; $r_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,3$ м; $P = 600$ Н; $l = 0,5$ м; $\beta = 30^\circ$.

Задача № 27



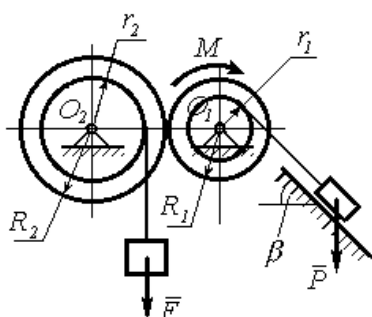
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \bar{P} , \bar{F} і моменту $M = 500$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $R_2 = 0,4$ м; $P = 1000$ Н; $l = 0,5$ м; $\beta = 60^\circ$; $\alpha = 45^\circ$.

Задача № 28



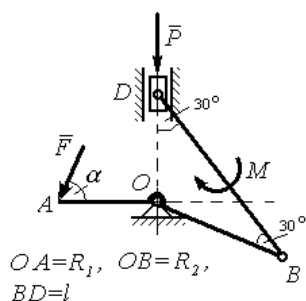
Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \overline{P} , \overline{F} і моменту $M = 900$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,6$ м; $r_2 = 0,4$ м; $P = 6000$ Н; $l = 0,5$ м; $\alpha = 45^\circ$.

Задача № 29



Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \overline{P} , \overline{F} і моменту $M = 1000$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $r_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $P = 7000$ Н; $\beta = 45^\circ$.

Задача № 30



Плоский механізм знаходиться в рівновазі під дією сил \overline{P} , \overline{F} і моменту $M = 3000$ Н·м. Знайти силу F , якщо ланки механізму є ідеальними твердими тілами, а тертя відсутнє. В остаточних розрахунках прийняти: $R_1 = 0,3$ м; $R_2 = 0,5$ м; $P = 9000$ Н; $l = 0,8$ м; $\alpha = 60^\circ$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М. А. Теоретична механіка : [підручник] / Павловський М. А. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Теоретична механіка : підр. для студ. вищ. навч. техн. закл. / Кол. авторів; за заг. ред. І. В. Кузьо – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
3. Видмиш А. А. Теоретична механіка. Динаміка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навчальний посібник / Видмиш А. А., Приятельчук В. О., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 143 с.
4. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Динаміка матеріальної системи. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навчальний посібник / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 85 с.
5. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Динаміка точки. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : збірник завдань / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 100 с.
6. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Аналітична механіка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : збірник завдань / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 71 с.
7. Теоретична механіка : збірник задач / [О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.]. ; за ред. М. А. Павловського. – К. : Техніка, 2007. – 400 с.
8. Огородніков В. А. Теоретична механіка. Динаміка. Організація самостійної роботи студентів : навчальний посібник / В. А. Огородніков, В. О. Федотов, О. В. Грушко, А. В. Губанов. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 120 с.
9. Огородніков В. А. Теоретична механіка Динаміка / Огородніков В. А., Федотов В. О., Кириця І. Ю. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 84 с.
10. Федотов В. О. Аналітична динаміка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навчальний посібник / В. О. Федотов, О. Д. Панкевич. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 125 с.

Навчальне видання

**Федотов Валерій Олександрович
Віштак Інна Вікторівна**

**ПРАКТИКУМ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
СТУДЕНТІВ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.
ДИНАМІКА. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА**

Практикум

Рукопис оформив *В. О. Федотов*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовив *О. Ткачук*

Підписано до друку 13.02.2019.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 6,54.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2019-027.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.