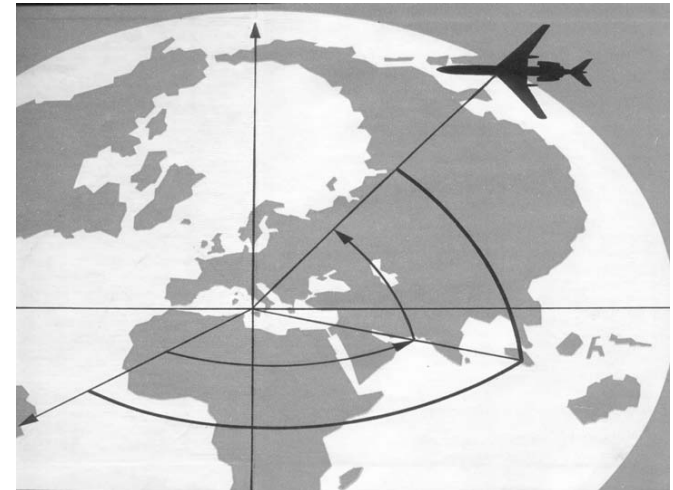


# **РАДІОТЕХНІЧНІ СИСТЕМИ**

## **(ОСНОВИ ПРОЕКТУВАННЯ. ЧАСТИНА 2)**



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**РАДІОТЕХНІЧНІ СИСТЕМИ**  
**(ОСНОВИ ПРОЕКТУВАННЯ. ЧАСТИНА 2)**

**Навчальний посібник**

Вінниця  
ВНТУ  
2018

УДК 621.396(075)  
P15

Автори:

**Кичак В. М., Воловик А. Ю, Шутило М. А., Червак О. П.**

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 30.03.2017 р.)

Рецензенти:

**В. С. Осадчук**, доктор технічних наук, професор

**С. М. Злепко**, доктор технічних наук, професор

**О. Б. Шарпан**, доктор технічних наук, професор

**Радіотехнічні системи (Основи проектування. Частина 2) : навч. посіб.** / В. М. Кичак, А. Ю. Воловик, М. А. Шутило, О. П. Червак. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 100 с.

В посібнику розглянуто питання аналізу та синтезу радіотехнічних пристроїв, систем та комплексів різного цільового призначення з використанням сучасних інформаційних технологій, визначено типові етапи проектування.

Посібник призначений для студентів спеціальності «Радіотехніка» всіх кваліфікаційних рівнів.

УДК 621.396(075)

# ЗМІСТ

## ЧАСТИНА ПЕРША

### ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

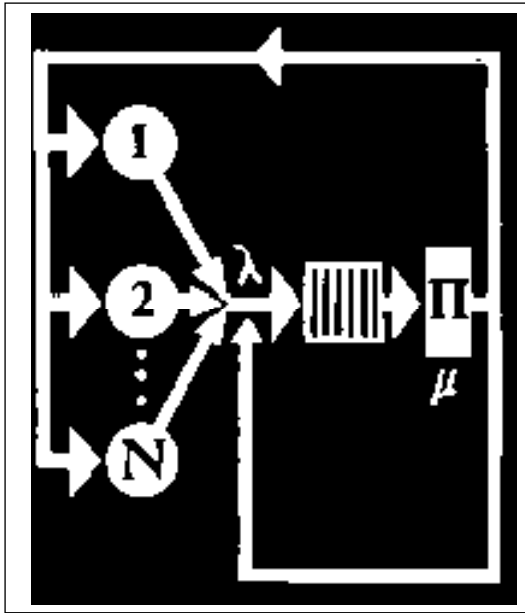
<b>1 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ БЕЗІНЕРЦІЙНИХ СИСТЕМАХ</b> .....	6
1.1 Методи аналізу детермінованих процесів .....	6
1.2 Нелінійні безінерційні перетворення випадкових процесів .....	10
1.3 Викиди випадкових процесів .....	16
<b>2 ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ У НЕЛІНІЙНИХ ІНЕРЦІЙНИХ СИСТЕМАХ</b> .....	19
2.1 Метод лінеаризації .....	19
2.2 Метод статистичної лінеаризації .....	20
2.3 Застосування рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова .....	23
2.4 Ймовірнісне моделювання радіотехнічних систем на електронних обчислювальних машинах .....	28
<b>3 МАТЕМАТИЧНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ</b> .....	30
3.1 Базові положення теорії прийняття статистичних рішень .....	30
3.2 Задачі виявлення та розпізнавання сигналів .....	32
3.3 Статистичні оцінки параметрів сигналів .....	34
3.4 Розрізнення сигналів та синтез сигналів оптимальної форми .....	40
3.5 Лінійна оптимальна фільтрація .....	43
3.6 Нелінійна оптимальна фільтрація при гауссовій апроксимації .....	46
3.7 Нелінійна оптимальна фільтрація марковських процесів .....	52

## ЧАСТИНА ДРУГА

### СУЧАСНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

<b>4 БАЗОВІ ПОНЯТТЯ СУЧАСНОЇ СИСТЕМОТЕХНІКИ</b> .....	57
4.1 Основні засади загальної теорії систем та системного підходу .....	57
4.2 Методи загальної теорії систем .....	64
<b>5 ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ</b> .....	66
5.1 Вступ .....	66
5.2 Математичні моделі випадкових сигналів та процесів .....	67
<b>6 ОПТИМАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ</b> .....	77

<b>7 НЕЛІНІЙНА ОПТИМАЛЬНА ФІЛЬТРАЦІЯ .....</b>	<b>88</b>
7.1 Постанова задачі.....	88
7.2 Нелінійне оцінювання за методом максимуму апостеріорної ймовірності.....	88
<b>ПІСЛЯМОВА .....</b>	<b>97</b>
<b>ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....</b>	<b>98</b>



# 1

## ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

- Математичні методи аналізу процесів у нелінійних безінерційних системах
- Випадкові процеси в нелінійних інерційних системах
- Математичний синтез оптимальних радіотехнічних систем

# 1 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ БЕЗІНЕРЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

## 1.1 Методи аналізу детермінованих процесів

Аналіз нелінійних систем становить великі труднощі навіть для детермінованих зовнішніх дій, і дотепер не існує єдиного математичного методу, придатного для дослідження будь-яких нелінійних систем при довільних режимах їх роботи. Кожний запропонований метод виявляється досить ефективним, як правило, лише для одного або декількох режимів роботи того чи іншого класу нелінійних систем. Виявляється, що у нелінійній системі, порівняно з лінійною, можливий додатковий режим – режим автоколивань. Тому при аналізі можна досліджувати стійкість станів спокою – режим рівноваги або режим усталених автоколивань, перехідні процеси при встановленні або зникненні автоколивань, вплив зовнішньої дії у режимі відсутності або наявності автоколивань.

Ще більш різноманітні радіотехнічні нелінійні системи. Сюди відносять усілякі автогенератори коливань синусоїдальної та спеціальної форми, помножувачі та подільники частоти, обмежники, випрямлячі, модулятори і демодулятори, електронні та електромеханічні реле і багато інших нелінійних елементів, пристроїв та систем у цілому. Окрім того, вплив нелінійних характеристик може бути істотним у таких елементах, пристроях і системах, які у нормальному режимі роботи вважалися лінійними. Порядок  $n$  диференціального рівняння, яке з достатньою повнотою описує нелінійну систему, також може суттєво відрізнятись – починаючи від  $n = 1$  і закінчуючи  $n = 10-30$  і більше. Відповідно до різноманіття типів нелінійних систем та режимів їх роботи нині відомо щонайменше декілька десятків різних методів досліджень. У цьому посібнику розглядається група найпоширеніших методів, які застосовуються до порівняно широких класів нелінійних систем, а саме:

- метод лінеаризації;
- метод гармонічної лінеаризації;
- метод малого параметра;
- метод осереднення;
- метод фазової площини;
- метод інтегральної апроксимації;
- метод математичного моделювання.

Через те, що більшість цих методів уже знайома читачеві з дисциплін, що викладалися раніше, то у цьому навчальному посібнику автор вважає доцільним обмежитись коротким оглядом вищеперерахованих методів з посиланнями на відповідну літературу.

**Метод лінеаризації** [6]. Цей метод оснований на тому, що при невеликих збуреннях систему можна вважати умовно лінійною відносно цих збурень і аналізувати її методами, розробленими для лінійних систем. Однак такий метод неприйнятний при великих збуреннях, а у деяких спеціальних випадках (наприклад, при нелінійних характеристиках типу зони нечутливості) і при малих збуреннях. Характерним прикладом застосування методу лінеаризації є дослідження стійкості стаціонарної системи «у малому», тобто при малих відхиленнях від стану рівноваги або періодичного колювання (автоколювання). При застосуванні цього методу отримують систему з  $n$  лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (або одного диференціального рівняння  $n$ -го порядку). Якщо коефіцієнти рівняння постійні, то питання про стійкість або нестійкість системи розв'язується шляхом застосування одного з методів аналізу стійкості лінійних стаціонарних систем (методу Рауса–Гурвіца, Найквіста та ін.). Іншим прикладом застосування методу лінеаризації є дослідження точності наведення на ціль керованого снаряду при малих рівнях завад та інших чинниках [6].

**Метод гармонічної лінеаризації** [16]. Цей метод базується на заміні нелінійного елемента лінійним елементом, еквівалентним за дією при гармонічному входному сигналі, тобто мають на увазі, що коефіцієнт передачі за першою гармонікою описується виразом

$$S_{cp} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}} = S_{cp} e^{j\varphi_{cp}},$$

де  $\dot{I}_1$  – комплексна амплітуда першої гармоніки колювання на виході нелінійного елемента, а  $\dot{U}$  – амплітуда синусоїдального колювання на його вході. Якщо  $U$  і  $\dot{I}_1$  мають, відповідно, розмірності напруги і струму, то величину  $S_{cp}$  називають середньою крутизною характеристики нелінійного елемента. Очевидно, що такий метод можна застосовувати лише у тому випадку, коли колювання у системі близькі до гармонічних, тобто дією вищих гармонічних складових, що виникають на виході нелінійного елемента, можна знехтувати унаслідок значного їх ослаблення наступними вузькосмуговими фільтрами. Оскільки при заміні нелінійного елемента його лінійним еквівалентом система, у цілому, стає лінійною, то її можна досліджувати кожним з методів, розроблених для лінійних систем. Але за рахунок того, що у розглянутому випадку колювання близькі до синусоїдальних, можливе додаткове спрощення аналізу лінеаризованої системи шляхом застосування методу повільно-мінливих комплексних обвідних. Це еквівалентно укороченню диференціальних або операторних рівнянь. У такому випадку метод гармонічної лінеаризації можна розглядати як реалізацію методу повільно-мінливих комплексних обвідних щодо нелінійних систем. Вперше метод гармонічної лінеаризації з'явився багато років тому щодо аналізу лампового генератора або регенератора і отримав назву квазілінійного методу. Пізніше він був поширений на системи автоматичного



регулювання і одержав найменування методу Гольдфарба (методу гармонічного балансу).

**Метод малого параметра** [17]. Основна ідея методу малого параметра полягає у такому. Припустимо, що диференціальне рівняння, яке описує поведінку системи, допускає таку форму опису, у якій права частина диференціального рівняння містить у вигляді множника деякий малий параметр  $\varepsilon$  такий, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  розв'язок відомий і дорівнює  $x_0(t)$ . Тоді при  $\varepsilon \neq 0$  розв'язок  $x(t)$  диференціального рівняння відшуковується у вигляді ряду за степенями цього малого параметра, тобто у вигляді

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (1.1)$$

Якщо обмежитися доданками зі степенем  $\varepsilon$  не вище першого, то отриманий розв'язок називається першим наближенням. При обліку доданка з  $\varepsilon^2$  одержують друге наближення і т. д. Якщо підставити вираз (1.1) у вищезгадане диференціальне рівняння та виконати низку перетворень, то можна отримати рівняння для визначення поправок першого наближення  $\varepsilon x_1(t)$ , другого наближення  $\varepsilon^2 x_2(t)$  і наближень більш високого порядку. Звичайно, друге наближення обчислити значно складніше, ніж перше; третє наближення ще важче і т. д. Однак у більшості випадків достатня точність досягається уже в результаті обчислення першого наближення. Нульове наближення  $x_0(t)$ , що має місце при  $\varepsilon=0$  називають номінальним розв'язком. Наприклад, у випадку системи другого порядку, її диференціальне рівняння часто вдається записати у вигляді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1.2)$$

а нульове наближення, що є розв'язком рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

має вигляд  $x_0(t) = A \sin \omega_0 t$ . Це і є номінальний розв'язок. Існують численні різновиди методу малого параметра: метод Пуанкаре, метод Ляпунова, метод Ван дер Поля, метод Н. М. Крилова, І. Н. Боголюбова та ін., які різняться вибором типу твірної системи та способами знаходження поправок першого наближення, другого наближення і т. д. Швидко і правильно вибрати твірне рівняння, тобто визначити, який саме параметр системи слід вибрати як малий параметр, як правило, вдається тільки для систем другого порядку, а в системах вищих порядків методи малого параметра значною мірою втрачають простоту і фізичну наочність. За досить загальних умов перше наближення  $x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$  збігається з розв'язком, отрима-

ним методом лінеаризації, а при врахуванні поправок другого наближення можна одержати більш точний розв'язок. Отже, методи малого параметра значно складніші за методи лінеаризації, але дозволяють у ряді випадків отримувати більш точні розв'язки і, зокрема, визначати межі застосування методу гармонічної лінеаризації.

**Метод осереднення** [1, 16]. При застосуванні методів малого параметра часто виникають істотні труднощі внаслідок того, що права частина диференціального рівняння (або праві частини системи диференціальних рівнянь), до якої як множник входить малий параметр  $\varepsilon$ , явно залежить від часу  $t$ . Наприклад,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right).$$

У цьому разі, з метою спрощення розв'язку задачі, застосовують метод осереднення, який оснований на тому, що права частина диференціального рівняння замінюється її середнім значенням, причому осереднення проводиться лише за змінною часу  $t$ . Фундаментальне обґрунтування методу осереднення та умов його застосування детально розглядалось у [16].

**Метод фазової площини** [1, 6]. Якщо процеси, що протікають у системі, повністю описуються заданням двох змінних  $x$  і  $y$ , то вони можуть бути відображені у декартовій координатній системі з осями  $x$  і  $y$ . При цьому площина  $(x, y)$  називається фазовою площиною, а кожна точка з точними координатами  $(x, y)$  – зображувальною точкою. Оскільки  $x$  і  $y$  є функціями часу, то з часом зображувальна точка описує у фазовій площині криву, яку прийнято називати фазовою траєкторією. Сукупність фазових траєкторій, що відповідають різним значенням початкових умов, називають фазовим портретом системи. Метод фазової площини знаходить широке застосування при дослідженні систем другого порядку. При цьому, якщо рівняння системи подано у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

то на осях координат відкладають змінні  $x$  і  $y = \frac{dx}{dt}$ . Дослідження поведінки фазових траєкторій дозволяє відповісти на важливі питання, розв'язок яких не може бути знайдений описаними вище наближеними методами, зокрема, виявити можливі види коливань у даній системі при різних значеннях початкових умов, а також оцінити стійкість станів рівноваги та періодичного руху при наявності великих збурень. Найбільш повний виклад методів дослідження фазових портретів систем другого порядку подано у [16]. Якщо система описується не двома, а трьома змінними (система третього порядку), то її поведінку можна розглядати у фазовому просторі  $(x, y, z)$ . При цьому фазовий портрет виявляється досить складним для побудови та

дослідження. Через це метод фазового простору отримав значно менший розвиток і менш поширений.

**Методи інтегральної апроксимації** [1, 9, 16]. Ці методи основані на такій апроксимації статичної вольт-амперної характеристики нелінійного елемента або ділянок цієї характеристики, за якої виявляється можливим знаходження точного аналітичного розв'язку диференціального рівняння, що описує поведінку системи. При цьому, якщо характеристику довелося розбивати на декілька ділянок, то проводиться «зшивання» отриманих розв'язків шляхом прирівнювання знайдених розв'язків і їх похідних (якщо вони існують) на границях сусідніх ділянок. Найпоширенішою є кусково-лінійна апроксимація, де кожній ділянці характеристики відповідає певне лінійне диференціальне рівняння, розв'язок якого знаходиться найбільш просто. Однак при збільшенні числа ділянок трудомісткість обчислень різко зростає. Тому цей метод застосовують звичайно лише в тих випадках, коли характеристика може бути розбита на невелике число ділянок, зокрема при дослідженні систем з релейними елементами,

**Математичне моделювання.** У багатьох випадках зробити досить детальне теоретичне дослідження нелінійної системи без допомоги обчислювальних машин не вдається і доводиться застосовувати математичне моделювання – зводити рівняння, що описують систему, до вигляду, зручного для розв'язування на цифровій або аналоговій обчислювальній машині, і робити необхідні дослідження за допомогою цієї машини. Більш докладно ці питання розглядаються в [5] щодо випадку, коли вхідні дії можуть містити не тільки детерміновані, але й випадкові складові.

## 1.2 Нелінійні безінерційні перетворення випадкових процесів

Розглянемо загальні методи визначення ймовірнісних характеристик випадкових процесів після нелінійного безінерційного перетворення. Оскільки значення процесу на виході нелінійного елемента  $\zeta(t)$  визначаються тільки значенням процесу на вході  $\xi(t)$  у той самий момент часу

$$\zeta(t) = f[\xi(t)],$$

то для визначення функції розподілу випадкового процесу на виході нелінійного елемента  $W_n(y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_n)$  досить мати функцію розподілу вхідного процесу  $W_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ . Далі потрібно використовувати відомі у теорії ймовірностей загальні формули заміни змінних у функціях розподілу та обчислення матриці перетворення Якобі [11]. Іноді ці обчислення можна спростити, якщо спочатку знаходити не самі функції розподілу, а їхні характеристичні функції. Потрібно зауважити, що визначення функцій розподілу процесу  $\zeta(t)$  є порівняно простим і зводиться до заміни змінних у  $W_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  та підрахунку якобіана перетворення тільки у тому випадку, коли нелінійне перетворення  $\zeta(t) = f[\xi(t)]$  є взаємно однозначним. Однак на практиці часто трапляється так, що обернена

функція  $f[\xi(t)]$  багатозначна або навіть нескінченнозначна, а іноді й зовсім не існує. Тоді визначення багатовимірних функцій розподілу стає досить громіздким, а в деяких випадках потребує застосування спеціальних математичних методів [17]. Після того як знайдено, щонайменше, двовимірний розподіл процесу на виході нелінійного елемента  $W_2(y_1, y_2, t_1, t_2)$  функцію моментів цього процесу можна, в принципі, визначати шляхом обчислення подвійного інтеграла

$$B_\zeta(t_1 t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 W_2(y_1, y_2, t_1, t_2) dy_1 dy_2.$$

Однак, якщо цікавляться тільки функціями моментів (а не розподілом ймовірностей) після нелінійного безінерційного перетворення, то простіше використовувати співвідношення, які встановлюють безпосередню залежність моментної функції процесу  $\zeta(t)$  від двовимірної функції розподілу процесу  $\xi(t)$  та характеристики нелінійності  $f[\xi(t)]$ :

$$B_\zeta(t_1 t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.3)$$

Є два загальні методи обчислення цього інтеграла: прямий метод і метод характеристичних функцій, а для нормальних випадкових процесів — метод похідних.

**Прямий метод.** Цей метод оснований на ортогональному розвиванні у ряд двовимірної щільності розподілу ймовірностей  $W_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$  процесу на вході нелінійного елемента. Припустимо, що  $W_1(x, t)$  — одновимірна функція розподілу, яка відповідає типу двомірної щільності розподілу ймовірностей  $W_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$  процесу на вході нелінійного елемента. Візьмемо  $W_1(x, t)$  як вагову функцію і збудуємо сукупність нормованих ортогональних поліномів  $Q_n(x, t)$ , які мають задовольняти умови ортогональності

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x, t) Q_n(x, t) Q_m(x, t) dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Тоді двовимірну функцію розподілу  $W_2(x_1, \dots, x_2, t_1, t_2)$  можна розвинути у подвійний ряд за цими ортогональними поліномами

$$W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = W_1(x_1, t_1) W_1(x_2, t_2) \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(t_1, t_2) Q_m(x_1, t_1) Q_n(x_2, t_2). \quad (1.4)$$

Коефіцієнти  $a_{mn}(t_1, t_2)$  можуть бути визначені шляхом перемноження обох частин (1.4) на  $Q_k(x_1, t_1)Q_l(x_2, t_2)$  та наступним інтегруванням з використанням умови ортогональності. Тоді

$$a_{mn}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) Q_m(x_1, t_1) Q_n(x_2, t_2) dx_1 dx_2.$$

У багатьох, практично важливих, випадках  $a_{mn} = 0$  при  $m \neq n$ . Для цього класу функцій розподілу вищенаведені формули спрощуються

$$\begin{aligned} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) &= W_1(x_1, t_1)W_1(x_2, t_2) \times \\ &\times \sum_{x_0}^{\infty} a_n(t_1, t_2) Q_n(x_1, t_1) Q_n(x_2, t_2). \\ a_n(t_1, t_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) Q_n(x_1, t_1) Q_n(x_2, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Наступна підстановка дозволяє розділити змінні інтегрування та приводить до остаточної формули

$$B_{\zeta}(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t_1) C_n(t_2) a_n(t_1, t_2);$$

де

$$C_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) Q_n(x, t) W_1(x, t) dx.$$

Важливо підкреслити, що коефіцієнти  $C_n(t)$  залежать тільки від типу характеристики нелінійності та одновимірного розподілу процесу на вході нелінійного елемента, у той час як функції  $a_n(t_1, t_2)$  не залежать від виду нелінійності і визначаються тільки двовимірним розподілом вхідного процесу. У практичних розрахунках функції  $a_n(t_1, t_2)$  бувають заздалегідь відомими і необхідно лише визначити  $C_n(t)$  відповідно до конкретного типу нелінійності. Наприклад, для нормального випадкового процесу, що являє собою адитивну суміш детермінованого процесу і нормального, стаціонарного шуму [11]

$$a_n(t_1, t_2) = \frac{1}{n!} R^n(t_2 - t_1),$$

де  $\sigma^2 R(\tau)$  – кореляційна функція шуму. У цьому випадку сукупність ортогональних поліномів  $Q_n(x, t)$  являє собою поліноми Ерміта.

**Метод характеристичних функцій** (контурних інтегралів). Цей метод оснований на тому, що характеристики деяких нелінійних елементів можна описувати за допомогою контурного інтеграла

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_c g(ju) e^{jxu} du, \quad (1.5)$$

де

$$g(ju) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jxu} dx.$$

Якщо підставити (1.5) в (1.3) та змінити порядок інтегрування, то приходимо до формули

$$B_{\zeta}(t_1 t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{c_1 c_2} g(ju_1) g(ju_2) \theta_2(u_1, u_2, t_1, t_2) du_1 du_2,$$

де  $\theta_2(\theta, u_2, t_1, t_2)$  – двовимірна характеристична функція процесу на вході нелінійного елемента. Розділення змінних у цьому виразі виконується шляхом розвинення функції  $\theta_2(u_1, u_2, t_1, t_2)$  у ряд. Не існує загальних рекомендацій про те, у яких випадках доцільніше використовувати саме прямий метод обчислення функції моментів, а у яких – метод контурних інтегралів. Обчислення коефіцієнтів розвинення у ряд залежно від статистичних властивостей процесу на вході нелінійного елемента або від типу нелінійності може виявитися простішим або одним, або іншим методом. Іноді використання методу контурних інтегралів для нестационарних процесів може виявитися більш привабливим, якщо надалі буде необхідне додаткове осереднення за часом для функції моментів вихідного процесу.

**Метод похідних.** Коли на вході нелінійного безінерційного елемента діє нормальний випадковий процес, є можливість дуже просто обчислити не функцію моментів процесу на виході нелінійного елемента, а похідні від цієї функції за функцією кореляції вхідного нормального процесу, після чого шукана функція моментів знаходиться шляхом елементарного інтегрування. Цей спосіб визначення функцій моментів після нелінійного перетворення, запропонований Прайсом [6], і є наслідком застосування методу характеристичних функцій до нормальних випадкових процесів. З огляду на важливість ролі нормальних випадкових процесів у різних прикладних дослідженнях, цей метод розглянемо більш докладно. Безпосереднє диференціювання кратного інтеграла від характеристичної функції нормального процесу  $\theta_2(u_1, u_2, t_1, t_2)$  за параметром  $R$  приводить до співвідношення

$$\frac{d^k B_{\xi}(\tau)}{dR^k(\tau)} = \frac{\sigma^{2k-2}}{2\pi\sqrt{(1-R^2(\tau))}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x_1) f^{(k)}(x_2) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2(1-R^2(\tau))} \left[ (x_1 - m_1)^2 - 2R(\tau)(x_1 - m_1)(x_2 - m_1) + (x_2 - m_1)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) лежить у основі розглянутого методу похідних. Якщо функція  $f(x)$  складена із фрагментів поліномів, то при деякому значенні  $k$  похідна  $f^{(k)}(x)$  буде дорівнює сумі дельта-функцій і обчислення інтеграла (1.6) стає елементарним, якщо скористатися фільтрувальною властивістю дельта-функції та її похідних [1]. Як ілюстрацію розглянемо один окремий вид нелінійного перетворення стаціонарного випадкового процесу, що становить особливий інтерес для радіотехнічних систем, які використовують для передавання інформації електромагнітні коливання високої частоти. Мова йде про подання вузькосмугових процесів у вигляді

$$\xi(t) = E(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)],$$

де  $E(t)$ ,  $\varphi(t)$  – обвідна і фаза процесу  $\xi(t)$ , причому моментні функції обвідної та фази повільно змінюються порівняно з  $\cos[\omega_0 t]$  (тобто їхні енергетичні спектри зосереджені у низькочастотній області). Функціональний зв'язок обвідної та фази з вхідним процесом задається співвідношеннями

$$E(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)},$$

$$\varphi(t) = \left[ \omega_0 t - \operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{\xi(t)} \right],$$

де  $\eta(t)$  – спряжений з  $\xi(t)$  процес, що є перетворенням Гільберта від  $\xi(t)$

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\xi(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Як видно з наведених формул, залежності обвідної і фази від першопочаткового процесу достатньо складні. Однак, оскільки вхідний процес є вузькосмуговим, то використовуючи цю властивість, його можна подати у вигляді суми двох квадратурних (ортогональних) складових

$$\xi(t) = A(t) \cos \omega_0 t + C(t) \sin \omega_0 t,$$

де  $A(t)$  і  $C(t)$  випадкові процеси, енергетичні спектри яких однакові і їх можна отримати шляхом зсуву вузькосмугового енергетичного спектра  $S(\omega)$  у область нижніх частот на величину  $\omega_0$ . Відповідно до теореми Хінчина–Вінера, моментна функція кожної із квадратурних складових отримується косинус-перетворенням Фур'є від  $S(\omega - \omega_0)$ , а взаємна моментна функція квадратурних складових – синус-перетворенням Фур'є від  $S(\omega - \omega_0)$ . Процес, спряжений з  $\xi(t)$ , також може бути вираженим через квадратурні складові

$$\eta(t) = A(t) \cos \omega_0 t - C(t) \sin \omega_0 t.$$

З цього випливає, що

$$E(t) = \sqrt{A^2(t) + C^2(t)},$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{C(t)}{A(t)}.$$

Якщо  $\xi(t)$  – нормальний вузькосмуговий стаціонарний випадковий процес, то випадкові процеси  $A(t)$ ,  $C(t)$  також нормальні. Використання вищеведених формул дозволяє отримати функції розподілу обвідної та фази випадкового процесу. Нехай  $W_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_n)$  – спільний розподіл значень  $A(t)$ ,  $C(t)$  у  $n$  моментах часу. Для того щоб знайти функції розподілу фази і обвідної, перейдемо у зазначеному спільному розподілі до полярної системи координат

$$x_k = r_k \cos \eta_k, \quad y_k = r_k \sin \eta_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Після такої заміни замість спільної функції розподілу від змінних  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  отримуємо  $2n$ -вимірну спільну функцію розподілу обвідної і фази залежно від нових змінних  $r_1, \dots, r_n, \eta_1, \dots, \eta_n$

$$\begin{aligned} & W_{2n}(r_1, \dots, r_n, \eta_1, \dots, \eta_n, t_1, \dots, t_n) = \\ & = D_n \times W_{2n}(r_1 \cos \eta_1, \dots, r_n \cos \eta_n, r_1 \sin \eta_1, \dots, r_n \sin \eta_n, t_1, \dots, t_n), \end{aligned} \quad (1.7)$$

де  $D_n$  – якобіан перетворення,  $D_n = \sum_{i=1}^n r_i$ . Функцію розподілу обвідної можна отримати шляхом  $n$ -кратного інтегрування цього розподілу за змінними  $\eta_1, \dots, \eta_n$

$$\begin{aligned} & W_{2n}(r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_n) = \\ & = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} W_{2n}(r_1, \dots, r_n, \eta_1, \dots, \eta_n, t_1, \dots, t_n) d\eta_1, \dots, d\eta_n, \quad r_i > 0. \end{aligned}$$

Функція розподілу фаз випадкового процесу отримується із (1.7) шляхом інтегруванням за змінними  $r_1, \dots, r_n$

$$\begin{aligned} & W_{2n}(\eta_1, \dots, \eta_n, t_1, \dots, t_n) = \\ & = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} W_{2n}(r_1, \dots, r_n, \eta_1, \dots, \eta_n, t_1, \dots, t_n) dr_1, \dots, dr_n, \quad |\eta_i| \leq \pi. \end{aligned}$$

Слід зауважити, що через дуже складну нелінійну функціональну залежність обвідної  $E(t)$  та фази  $\varphi(t)$  від  $\xi(t)$  використання формули (1.3) для визначення моментних функцій стає неможливим. Тому для визначення моментних функцій фази та обвідної спочатку доцільно за вищезазначеними формулами визначити двовимірні щільності розподілу ймовірностей, а потім обчислити відповідні моментні функції  $B_\zeta(t_1 t_2)$ , використовуючи загальні співвідношення (1.3). Так, наприклад, моментна функція обвідної нормального стаціонарного вузькосмугового випадкового процесу подається рядом



$$B_E(\tau) = \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 R_0^{2n}(\tau),$$

$$C_n = \int_0^{\infty} x^2 L_n^{(0)}(x^2/2) e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$R_0^2(\tau) = R_c^2(\tau) + R_s^2(\tau),$$

де  $\sigma^2$  – дисперсія вихідного процесу,  $\sigma^2 R_c^2(\tau)$  і  $\sigma^2 R_s^2(\tau)$  – функції кореляції та взаємної кореляції складових  $A(t)$  і  $C(t)$ ,  $L_n^{(0)}(y)$  – поліноми Лагерра.

Викладена вище методика визначення ймовірнісних характеристик фази та обвідної вузькосмугових випадкових процесів також дозволяє вирішувати і більш складні завдання. Наприклад, визначати розподіл ймовірностей похідних від обвідної  $E'(t)$  або миттєвої частоти  $\varphi(t)$ . Ці задачі розглядаються у роботах [1,16].

### 1.3 Викиди випадкових процесів

Для розв'язання дуже багатьох важливих практичних завдань необхідно знати функцію розподілу або числові характеристики тривалості викидів випадкового процесу  $\zeta(t)$ . Під *тривалістю викиду*  $\zeta_B$  розуміють відрізок часу, протягом якого  $\zeta(t)$  перевищує заданий граничний рівень  $x=x_0$ . Разом із цим, становить інтерес тривалість інтервалу між викидами  $\zeta_i$ , тобто відрізок часу, протягом якого  $\zeta(t)$  не перевищує заданий рівень  $x=x_0$ . Іноді замість розподілу тривалості викидів вивчають розподіл точок перетину цієї функції із заданою прямою. У більш загальному випадку може розглядатися задача про визначення розподілу точок перетину  $\xi(t)$  із заданою функцією  $f(t)$  або про тривалість викидів над нею. Подальшим розвитком таких завдань є задача про розподіл часу перебування випадкових процесів між двома рівнями (або функціями часу). Певний інтерес становить задача про розподіл ймовірностей тривалості інтервалу між фіксованим моментом часу, у якому випадковий процес набуває заданого значення, і моментом першого перетину цим процесом рівня  $x=x_0$  з певним знаком похідної (наприклад, перетин рівня знизу нагору). Через актуальність проблеми задача знаходження ймовірнісних характеристик викидів випадкових процесів тривалий час привертала та ще й досі привертає увагу математиків і інженерів. Райс [17] усередині минулого століття встановив загальний вираз для функції  $Q(\tau/x_0, t_0)$  розподілу тривалості викидів у вигляді повільно збіжного ряду, членами якого є інтеграли необмежено зростаючої кратності:

$$Q(\tau|x_0, t_0) = P(\xi_B > \tau|x_0, t_0) = 1 - \frac{1}{f_0(x_0, t_0)} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+t_1} \dots \int_{t_0}^{t_0+t_{r-1}} f_r(x_0, t_0, x_0, t_1, \dots, x_0, t_r) dt_1, \dots, dt_r; \quad (1.8)$$

де

$$f_r(x_0, t_0, x_0, t_1, \dots, x_0, t_r) =$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^0 |y, y_1 \dots y_r| W_{2(r+1)}(x_0, y, x_0, y_1 \dots x_0, y_r, t_0, t_1, \dots, t_r) dy_1 \dots dy_r dy;$$

$$f_0(x_0, t_0) = \int_0^\infty y W_2(x_0, y, t_0) dy,$$

де  $W_{2(r+1)}(\dots)$  – спільна щільність розподілу ймовірностей процесу і його похідної у моменти часу  $t_0, t_1, \dots, t_r$ . Формули, аналогічні (1.8), отримуються для розподілу тривалості інтервалів між викидами [11] і для щільності розподілу часу першого досягнення заданої границі [11, 17]. Обчислення навіть перших декількох членів ряду (1.8) наштовхується на важкоподоланні перешкоди, незважаючи на використання швидкодійних електронно-обчислювальних машин. Якщо обмежитись наближенням першого порядку, то вираз (1.8) дає розподіл, близький до дійсного тільки за малої тривалості викидів і не дає скільки-небудь правильної, навіть якісної, уяви про цей розподіл поза інтервалом малих значень тривалості.

Порівняно нескладний вигляд мають точні формули для середнього та дисперсії числа перетинів випадковим процесом заданого рівня  $x = x_0$ . Середнє число перетинів з додатною похідною на інтервалі  $(t, t+T)$  дорівнює

$$\bar{n}(x_0, t, T) = \int_0^{t+T} \int_0^\infty y W_2(x_0, y, t_1) dy dt_1, \quad (1.9)$$

а дисперсія числа зазначених перетинань

$$D(x_0, t, T) = \bar{n}(x_0, t, T) - \bar{n}^2(x_0, t, T) + \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} f_2(x_0, x_0, t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (1.10)$$

де

$$f_2(x_0, x_0, t_1, t_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty W_4(x_0, y_1, x_0, y_2, t_1, t_2) dy_1 dy_2.$$

Відносно просто обчислюється також середнє число максимумів (мінімумів) за одиницю часу стаціонарного випадкового процесу. Так, середнє число максимумів за одиницю часу, величина яких перевищує  $x_0$ , дорівнює

$$\mu_{max}(x_0) = \int_{x_0}^\infty \int_{-\infty}^0 |z| W_3(x, 0, z) dz dx,$$

де  $W_3(x, y, z)$  – тривимірна щільність розподілу ймовірностей процесу та його перших двох похідних у збіжні моменти часу.

Для ергодичних процесів відносно легко знаходяться середні тривалості викидів та інтервалів між ними

$$\mathcal{M}\{\xi_B\} = \frac{1-F_1(x_0)}{\lambda(x_0)}, \quad \mathcal{M}\{\xi_i\} = \frac{F_1(x_0)}{\lambda(x_0)},$$

де  $F_1(x_0)$  – одновимірна інтегральна функція розподілу процесу,  $\lambda(x) = (x_0)$  – середнє число перетинів за одиницю часу рівня  $x = x_0$  із заданим знаком похідної

$$\lambda(x_0) = \int_0^\infty y W_2(x_0, y) dy. \quad (1.11)$$

Останнім часом замість прагнення отримати придатні для практичних розрахунків точні формули дослідження функцій розподілу викидів іде як по шляху створення наближених методів визначення зазначених функцій, так і проведення широких експериментів з метою одержання емпіричних розподілів [1]. Ефективним методом наближеного визначення ймовірнісних характеристик викидів стаціонарних випадкових процесів є їх апроксимація стаціонарними випадковими послідовностями з використанням ймовірнісних характеристик викидів послідовностей як наближення до характеристик викидів вихідного процесу. Точність апроксимації визначається вибором інтервалу дискретизації випадкового процесу. Проілюструємо ідею цього методу на найпростішому прикладі, а саме заміною випадкового процесу однозв'язною послідовністю Маркова випадкових величин  $\xi_n$ . Імовірність перевищення граничного рівня серії із  $k$  значень послідовності  $\xi_n, \dots, \xi_{n+k}$  дорівнює

$$P_1(k) = P_\sim^{k-1}(1 - P_\sim), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

де  $P_\sim = P\{\xi_m > \frac{x_0}{\xi_{m-1}} > x_0\}$ .

Якщо інтервал дискретизації стаціонарного випадкового процесу  $\xi(t)$  дорівнює  $\tau_0$ , то

$$P_\sim = \frac{P\{\xi(t) > x_0, \xi(t+\tau_0) > x_0\}}{P\{\xi(t) > x_0\}} = \frac{\int_{x_0}^\infty \int_{x_0}^\infty W_2(x_1, x_2, \tau_0) dx_1 dx_2}{\int_{x_0}^\infty W_1(x) dx}. \quad (1.13)$$

Так, наприклад, для нормального випадкового процесу з нульовим середнім значенням і функцією кореляції  $R(\tau)$  при  $x_0 = 0$  з (1.13) випливає

$$P_\sim = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos R(\tau_0).$$

У цьому випадку з (1.12) одержуємо таку апроксимацію функції розподілу тривалості викидів над нульовим рівнем стаціонарного нормального випадкового процесу

$$P_1[(k-1)\tau_0 < \tau < k\tau_0] = \frac{1}{\pi^k} [\pi - \arccos R(\tau_0)]^{k-1} \arccos R(\tau_0).$$

Більш точна апроксимація виходить при використанні багатозв'язних моделей для апроксимувальної послідовності. Також метод успішно використовується і для наближеного обчислення розподілу часу першого досягнення границі [17].

## 2 ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ У НЕЛІНІЙНИХ ІНЕРЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

Аналітичне дослідження випадкових процесів у нелінійних інерційних системах (а всяка реальна система є інерційною) наштовхується на великі труднощі. Це пояснюється тим, що під час аналізування нелінійних систем необхідно визначати не тільки математичні сподівання та функції кореляції випадкових процесів, але й закони їх розподілу. Наявність же в системі інерційних ланок не дозволяє, у загальному випадку, знайти точний закон розподілу. Тому при аналітичному дослідженні випадкових процесів у нелінійних системах доводиться, як правило, застосовувати наближені методи, основані або на лінеаризації системи, або на припущенні, що процеси в системі мають нормальний закон розподілу або можуть уважатися процесами Маркова невисокого порядку. Деякі з методів, наприклад, розглянутий нижче метод статистичної лінеаризації, потребують одночасно як лінеаризації системи, так і припущення про нормальність законів розподілу. Найпоширенішими нині є такі методи аналізу нелінійних інерційних систем [6,17]:

- метод лінеаризації;
- метод статистичної лінеаризації;
- метод марковських процесів, оснований на використанні рівнянь Фоккера–Планка–Колмогорова.

Нижче подається коротка характеристика кожного із цих методів.

### 2.1 Метод лінеаризації

Припустимо, що розглядається динамічна система, яка містить коло зворотного зв'язку та складається із сукупності  $m$  нелінійних безінерційних елементів з характеристиками  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  та  $m$  лінійних інерційних ланок з передатними функціями  $K_1(s, t), \dots, K_m(s, t)$  (рис. 2.1).

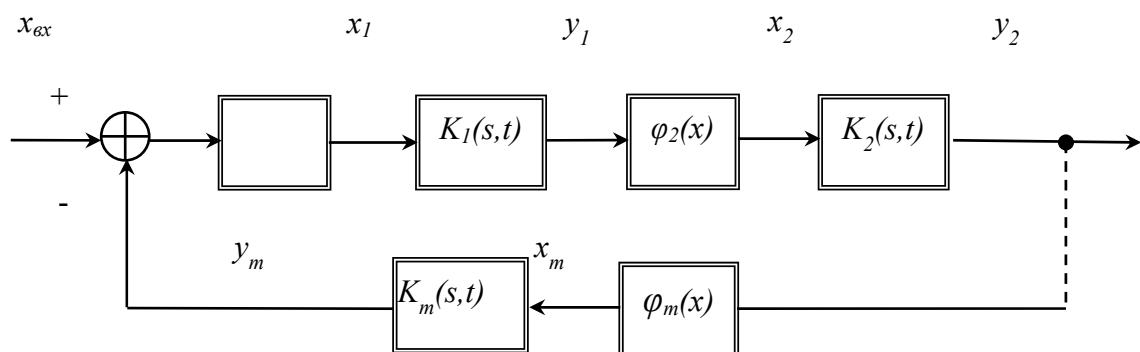


Рисунок 2.1 – Структурна схема нелінійної інерційної системи з колом зворотного зв'язку

Метод лінеаризації полягає в тому, що характеристика  $\varphi_i(x)$  кожного нелінійного елемента на своїй робочій ділянці апроксимується прямою лінією, що проходить через робочу точку і є дотичною у цій точці до реальної характеристики. При цьому система, у цілому, виявляється лінійною і може досліджуватися одним з методів, описаних у попередньому розділі. Очевидно, що метод лінеаризації доцільно застосовувати лише для порівняно невеликих відхилень від робочих точок, тобто при невеликій інтенсивності коливань. У деяких випадках, наприклад, за наявності на робочій ділянці зони нечутливості, цей метод неприйнятний навіть при досить-таки малих значеннях інтенсивності коливань.

## 2.2 Метод статистичної лінеаризації

Цей метод, як і попередній, оснований на заміні кожного нелінійного елемента системи відповідним лінійним еквівалентом. Однак метод статистичної лінеаризації застосовується лише у тих випадках, коли описана вище проста лінеаризація неприйнятна, наприклад, при великій інтенсивності коливань або при наявності на робочій ділянці зони нечутливості. Тому при заміні реального нелінійного елемента лінійним виходять із міркувань рівнозначності обох елементів у статистичному сенсі, тобто з погляду однаковості статистичних характеристик процесів на їхніх виходах.

Нехай процеси на вході та виході реального нелінійного елемента з характеристикою  $y=\varphi(x)$  є  $x(t)$  та  $y(t)$ , відповідно (рис. 2.2).



Рисунок 2.2 – Схема статистичної лінеаризації нелінійного елемента

При заміні цього елемента його лінійним еквівалентом намагаються забезпечити еквівалентність повних статистичних характеристик процесів  $z(t)$  та  $y(t)$ , тобто їхніх багатовимірних розподілів. Однак, очевидно, що ніяка лінійна система не може бути повністю еквівалентна нелінійній системі. Тому доводиться обмежуватися вимогою збігу не усіх, а лише деяких статистичних характеристик процесів  $z(t)$  і  $y(t)$ .

Найпоширенішими є такі критерії статистичної еквівалентності лінійного еквівалента та нелінійного елемента:

**1- й критерій.** Мають збігатися математичні сподівання і дисперсії процесів  $z(t)$  і  $y(t)$

$$\begin{aligned} \overline{z(t)} &= \overline{y(t)}, \\ \sigma_z^2(t) &= \sigma_y^2(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

**2-й критерій.** Середньоквадратичне відхилення процесу  $z(t)$  від  $y(t)$  має бути мінімальним:

$$\overline{[z(t) - y(t)]^2} = \min.$$

При використанні кожного із цих критеріїв передбачається, що лінійний еквівалент є лінійною безінерційною ланкою з коефіцієнтами передачі для детермінованої та флуктуаційної складових вхідного процесу  $x(t)$ , які відповідно дорівнюють  $k_0$  і  $k_1$ . Очевидно, що детермінована складова вхідного процесу збігається з його математичним сподіванням  $m = \overline{x(t)}$ , а флуктуаційна складова являє собою відцентрований випадковий процес

$$x^0(t) = x(t) - m(t).$$

Тому 
$$z(t) = k_0 m(t) + k_1 x^0(t). \quad (2.2)$$

Із співвідношень (2.1) – (2.2) неважко встановити, що при застосуванні першого критерію еквівалентності, параметри лінійного еквівалента визначаються такими виразами:

$$k_0 = \sqrt{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}; \quad k_1 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}}, \quad (2.3)$$

при цьому знак плюс перед радикалом береться у тих випадках, коли характеристика  $y=\varphi(x)$  у межах робочої ділянки зростає і знак мінус, якщо вона спадає.

При застосуванні другого критерію замість (2.3) виходить

$$k_0 = \sqrt{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}; \quad k_1 = \frac{\overline{x^0 y}}{\sigma_x^2}.$$

Надалі, заради стислості викладок, обмежимося розглядом співвідношень (2.3). Із цих співвідношень випливає, що для визначення параметрів  $k_0$  і  $k_1$  лінійного еквівалента необхідно знати математичні сподівання та дисперсії процесів на вході та виході нелінійного елемента. Оскільки,  $y=\varphi(x)$ , то

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\varphi(x)dx, \\ \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\varphi^2(x)dx - \bar{y}^2, \quad (2.4)$$

де  $W(x)$  – одновимірний закон розподілу процесу  $x(t)$  на вході нелінійного елемента. Припустимо, що параметри лінійних еквівалентів усіх нелінійних елементів системи (рис. 2.1) відомі. Тоді розрахунки математичних сподівань та кореляційних функцій, а отже і дисперсій процесів у будь-якій точці цієї системи не становлять труднощів принципового характеру, якщо система може вважатися стаціонарною. Дійсно, при заміні усіх нелі-

нійних елементів їхніми лінійними еквівалентами система у цілому, та усі її елементи виявляються лінійними. Тому, якщо подати процеси в усіх точках системи у вигляді суми їх математичних сподівань  $\overline{x_i(t)}$  та флуктуаційних (центрованих) складових  $x_i^0(t)$ , то можна виконувати аналіз системи незалежно, спочатку для математичних сподівань процесів, а потім для їхніх флуктуаційних складових, використовуючи при цьому значення коефіцієнтів передачі лінійних еквівалентів для математичних сподівань і для флуктуаційних складових, відповідно. При цьому підходить будь-який метод аналізу, прийнятний для аналізу лінійних систем. Як уже відзначалося, знаходження математичних сподівань та функцій кореляції у будь-яких точках лінійної стаціонарної системи не становить принципових труднощів. Однак, у випадку стаціонарної лінеаризованої системи є труднощі, причому принципового характеру, суть яких полягає у такому. За припущеннями параметри  $k_0$  і  $k_1$  кожного лінійного еквівалента відомі, тоді як у дійсності вони невідомі і для їхнього обчислення потрібне знання законів розподілу  $W_i(x)$  процесів на входах усіх нелінійних елементів. Але визначити закони розподілу процесів у різних точках інерційної системи, у загальному випадку, не вдається, навіть якщо ця система лінійна. Для подолання цих труднощів при застосуванні методу статистичної лінеаризації роблять ще одне припущення – процеси на входах усіх нелінійних елементів мають нормальний закон розподілу. При цьому необхідний для обчислення за формулами (2.4) одновимірний розподіл  $W(x)$  повністю визначається значеннями  $\bar{x}$  і  $\sigma_x^2$ , а саме

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp \left[ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (2.5)$$

і обчислення параметрів  $k_0$ ,  $k_1$  уже легко виконати. Проте, труднощі практичного характеру можуть бути істотними, якщо система має щонайменше один нелінійний елемент, але охоплений зворотним зв'язком. Дійсно, внаслідок наявності зворотного зв'язку значення математичного сподівання та дисперсії процесу на вході нелінійного елемента залежать від параметрів  $k_0$  і  $k_1$  його лінійного еквівалента:

$$\bar{x} = f_1(k_0, k_1), \quad \sigma_x^2 = f_2(k_0, k_1).$$

Параметри  $k_0$  і  $k_1$ , як це впливає зі співвідношень (2.3) – (2.5), залежать від  $\bar{x}$  і  $\sigma_x^2$

$$\begin{aligned} k_0 &= F_1(\bar{x}, \sigma_x^2), \\ k_1 &= F_2(\bar{x}, \sigma_x^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тому для знаходження параметрів  $k_0$  і  $k_1$  рівняння (2.6) необхідно розв'язувати спільно. Точний аналітичний розв'язок цих рівнянь вдається отримати лише у найпростіших, окремих випадках. У більш складних випадках вищезазначені рівняння виявляються трансцендентними, і їх розв'я-

зок знаходять графічно. У ще складніших випадках доводиться застосовувати методи послідовних наближень [11].

Незважаючи на те, що метод статистичної лінеаризації оснований на цілій низці порівняно грубих припущень і потребує, у багатьох випадках, трудомістких обчислень, він є на сьогодні єдиним методом, який дозволяє визначати характеристики випадкових процесів у суттєво нелінійній (де проста лінеаризація неприпустима) інерційній системі високого порядку ( $n > 2$ ) без застосування обчислювальних машин.

Однак, у деяких випадках припущення, на яких оснований метод статистичної лінеаризації, виявляються занадто грубими. Зокрема, цей метод не гарантує близькості спектра процесу на виході лінійного еквівалента до спектра на виході нелінійного елемента, наприклад, у [16] зазначається, що у випадку, коли спектр вхідного сигналу зосереджений, в основному, поблизу частоти  $\omega_0$ , а на виході нелінійного елемента увімкнено фільтр, що має резонанс на частоті  $2\omega_0$  або  $3\omega_0$  і т. д., то можуть виникати неприпустимі помилки. Тому зазвичай результати, отримані методом статистичної лінеаризації, намагаються надалі уточнювати більш строгими аналітичними методами (при  $n \leq 2$ ) або шляхом застосування математичного моделювання (при  $n > 2$ ).

### 2.3 Застосування рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова

При дослідженні процесів на виході нелінійних систем, які описують нелінійними диференціальними рівняннями, у деяких випадках може бути ефективно використаний математичний апарат теорії марковських процесів та дифузійних рівнянь. Проілюструємо це на прикладі нелінійного диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = f[\eta(t), \xi(t)], \quad (2.7)$$

де  $\eta(t)$  – випадковий процес на виході системи, а  $\xi(t)$  – випадковий процес на її вході. Математичний апарат марковських процесів можна застосовувати до рівняння (2.7) у тому випадку, коли час кореляції  $\tau_k$  вхідного процесу значно менший часу зміни  $T_{ex}$  вихідного процесу ( $\tau_k \ll T_{ex}$ ), який приблизно визначається виразом:

$$T_{вх} \sim \left[ \frac{\partial f}{\partial \eta} \right]^{-1}$$

За такої умови вихідний процес  $\eta(t)$  є приблизно марковським і описується дифузійними рівняннями при відповідному виборі коефіцієнтів  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$ . Ці коефіцієнти знаходять за допомогою формул [6]:

$$A(x, t) = \overline{f[x, \xi(t)]} + \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{\partial f[x, \xi(t)]}{\partial \eta} f[x, \xi(t + \tau)] - \frac{\partial f[x, \xi(t)]}{\partial \eta} \overline{f[x, \xi(t + \tau)]} \right\} d\tau;$$



$$B(x, t) = 2 \int_0^\infty \{ \overline{f[x, \xi(t)] f[x, \xi(t + \tau)]} - \overline{f[x, \xi(t)]} \overline{f[x, \xi(t + \tau)]} \} d\tau, \quad (2.8)$$

де значення  $x = \eta(t)$  у правій частині (2.8) вважаються невинпадковими.

До рівняння типу (2.7) зводиться, наприклад, нелінійне стохастичне рівняння, яке описує найпростішу модель системи автоматичного підстроювання частоти. Позначаючи через  $\varphi(t)$  розходження фаз керованого генератора і гармонічного сигналу керування, можна отримати рівняння

$$\dot{\varphi}(t) = \omega - \omega_0 - k[A_0 \sin \varphi(t) + \xi(t)], \quad (2.9)$$

де  $\omega_0$  – власна частота генератора;  $A_0, \omega$  – амплітуда та частота сигналу керування;  $k$  – деяка константа;  $\xi(t)$  – нормальний білий шум зі спектральною щільністю  $N_0$ . Обчислення за формулами (2.8) у випадку рівняння (2.9) проводяться відносно просто і приводять до таких коефіцієнтів дифузійного рівняння:

$$A(\varphi) = \omega - \omega_0 - kA_0 \sin \varphi, \quad B(\varphi) = k^2 N_0. \quad (2.10)$$

Застосування рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова дозволяє вирішувати такі задачі:

- знаходити одновимірний стаціонарний розподіл ймовірностей на вході нелінійних систем першого порядку;
- для процесу синхронізації генераторів за наявності завад, який пов'язаний з рівнянням (2.9), знаходити як стаціонарний розподіл за  $\varphi$ , так і відхилення від ідеального синхронного режиму, тобто підраховувати обумовлене завадами середнє число зривів синхронізації за точними формулами [11, 17];
- розглядати питання, пов'язані з досягненням меж, досліджувати стійкість різних систем за наявності завад, ймовірності зривів стеження за заданий час тощо, і при цьому можна користуватися як точними результатами, отриманими за допомогою оберненого рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова, так і наближеними формулами [11];
- застосовуючи більш складні методи (малого параметра або розв'язання у ряди), вирішувати низку інших задач, наприклад обчислення кореляційної функції на виході нелінійного пристрою; задач, пов'язаних з багатовимірними рівняннями тощо [11].

Проілюструємо сказане на прикладі розв'язання задачі про синхронізацію генераторів за наявності завад. Коефіцієнтам (2.10) відповідає рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\dot{W}(\varphi) = - \left[ \frac{\partial [(\omega - \omega_0 - kA_0 \sin \varphi) W(\varphi)]}{\partial \varphi} \right] + (1/2) k^2 N_0 \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (2.11)$$

Стаціонарний розподіл  $W_{\text{ст}}(\varphi)$  задовольняє умову  $\dot{W}(\varphi) = 0$  у силу справедливості рівняння

$$-\frac{\partial[(\omega-\omega_0-kA_0\sin\varphi)]W_{\text{ст}}(\varphi)}{\partial\varphi} + (1/2)k^2N_0\frac{\partial^2W_{\text{ст}}(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (2.12)$$

Інтегруючи останнє рівняння перший раз, отримуємо

$$(\omega - \omega_0 - kA_0\sin\varphi)W_{\text{ст}}(\varphi) - (1/2)k^2N_0\frac{\partial W_{\text{ст}}(\varphi)}{\partial\varphi} = C_1,$$

де константа  $C_1$  інтерпретується як потік ймовірності через перетин  $\varphi(t) = \text{const}$ . Коли б режим синхронізації був ідеальним, то потік ймовірності  $C_1$  був би нульовим. Ненульове значення  $C_1$  означає наявність ненульового значення середньої похідної

$$\bar{\dot{\varphi}} = 2\pi C_1. \quad (2.13)$$

Якщо виконати повторне інтегрування рівняння (2.11) та ввести другу сталу інтегрування  $C_2$ , то знаходимо

$$W_{\text{ст}}(\varphi) = e^{D\varphi + D_c\cos\varphi} \left[ C_2 - \frac{2C_1}{k^2N_0} \int_0^\varphi e^{-D\theta - D_c\cos\theta} d\theta \right], \quad (2.14)$$

де введено такі позначення

$$D = \frac{2(\omega - \omega_0)}{k^2N_0}, \quad D_c = \frac{2A_0}{kN_0}.$$

Сталі інтегрування  $C_1$ ,  $C_2$  відшуковуються шляхом задоволення умов періодичності та нормування до одиниці

$$W_{\text{ст}}(2\pi) = W_{\text{ст}}(0), \quad \int_0^{2\pi} W_{\text{ст}}(\varphi) d\varphi = 1.$$

Тим самим повністю розраховуються стаціонарна щільність розподілу ймовірностей (2.14) та обумовлений завадами зсув частоти (2.13). Після проведення обчислень, як показано в [11], останньому результату можна надати вигляд

$$\bar{\dot{\varphi}} = (\omega - \omega_0) \frac{\text{sh } \pi D}{\pi D} |I_{iD}(D_c)|^{-2},$$

де  $I_{iD}(D_c)$  — функція Бесселя уявного аргументу і уявного індексу.

Наостанок наведемо як приклад, відповідно до п. 3, розрахунки зривів процесу стеження для деякої системи автоматичного регулювання. Її структурна схема зображена на рис. 2.3. Нелінійний елемент має ділянки характеристики, які спадають; скажімо  $F(\eta)$  спадає при  $|\eta| > \eta_0$  і зростає при  $|\eta| < \eta_0$  та має властивість  $F(-\eta) = -F(\eta)$ . Система здійснює спостереження за флуктуаційним сигналом  $\zeta(t)$ .

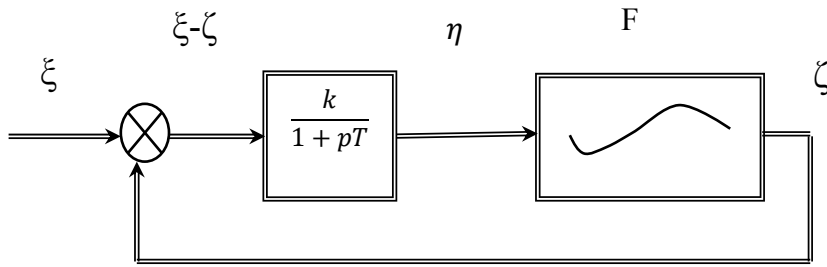


Рисунок 2.3 – Замкнена нелінійна система стеження

Зазначеній схемі відповідає рівняння

$$\eta = \frac{k}{1 + pT} (\xi - \zeta); \quad \zeta = F(\eta).$$

Якщо у цьому рівнянні позбавитись  $\zeta$ , то отримаємо рівняння

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{T}\eta + \frac{k}{T} [\xi(t) - F(\eta)],$$

яке є окремим випадком (2.7). За формулою (2.8) знаходимо коефіцієнти зносу та дифузії

$$A(x, t) = -\frac{x}{T} - \frac{k}{T} F(x;),$$

$$B(x, t) = \frac{k^2}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} d\tau, \quad \text{при } \overline{\xi(t)} = 0. \quad (2.15)$$

Нехай  $\pm x_1$  – точки, у яких коефіцієнт зносу  $A$  змінює знак:

$$A < 0 \quad \text{при } x = x_1, \quad 0 < x < x_1; \quad A > 0 \quad \text{при } -x_1 < x < 0.$$

Коли  $\eta(t)$  досягне значень  $\pm x_1$ , то у половині випадків точка  $\eta(t)$  повернеться у область  $|x| < x_1$ , а у половині випадків потрапить у область неповернення, тобто  $|x| > x_1$ , що відповідає зриву процесу стеження. Щоб знайти середню частоту  $\lambda$  зривів, потрібно обчислити середній час  $M$  досягнення меж  $\pm x_1$ , тоді

$$\lambda = \frac{1}{2M}. \quad (2.16)$$

Середній час  $M$  можна знайти, розглядаючи таке рівняння за нульових умов на межі:

$$W(\pm x_1, t, x_0, t_0) = 0.$$

Інший шлях полягає у знаходженні середнього часу досягнення меж із точки  $x_0$ , тобто функції

$$M(x_0) = - \int_{-t_0}^{\infty} (t - t_0) d \int_{-x_1}^{x_1} W(x, t, x_0, t_0) dx. \quad (2.17)$$

Оскільки коефіцієнти

$$A(x, t) = A(x), \quad B(x, t) = B(x)$$

не залежать від  $t$ , то можна вивести рівняння

$$\frac{1}{2} B(x_0) \frac{d^2 M(x_0)}{dx_0^2} + A(x_0) \frac{dM(x_0)}{dx_0} + 1 = 0, \quad (2.18)$$

яке потрібно розв'язувати за нульових граничних умов  $M(\pm x_1) = 0$ . Рівняння (2.18) є лінійним відносно  $\frac{dM(x_0)}{dx_0}$  і може бути розв'язане точно. Враховуючи симетрію функції  $M(x_0)$ , знаходимо його розв'язок із зазначеними умовами

$$M(x_0) = - \frac{2}{B} \int_{-x_1}^{x_1} dy \int_0^y e^{U(y)-U(z)} dz, \quad (2.19)$$

$$\left( \frac{dU(x)}{dx} = - \frac{2A(x)}{B} \right).$$

У припущенні, що зриви стеження відбуваються відносно рідко, результати виглядають особливо простими. При цьому формулу (2.16) можна записати:

$$\lambda = \frac{1}{2M(0)},$$

а моменти часу, за яких трапляються зриви стеження утворюють потік приблизно пуассонівський, тому ймовірність відсутності зриву за час  $t$  визначається формулою

$$P(t) = e^{\lambda t}.$$

Формула (2.19) при цьому значно спрощується. За умови, що величина коефіцієнта дифузії  $B$  відносно мала, будемо мати наближений результат

$$M(0) \approx \frac{2}{B} \int_{-x_1}^0 e^{U(y)} dy \int_{-x_1}^0 e^{-U(z)} dz. \quad (2.20)$$

Скориставшись розвиненням у ряд, отримуємо

$$U \approx U + \frac{1}{2} \ddot{U}(-x_1)(y + x_1)^2 = U(x_1) - \frac{\dot{A}(-x_1)}{B} (y + x_1)^2,$$

$$U(z) \approx U(0) + \frac{1}{2} \ddot{U}(0)z^2 = U(0) - \frac{\dot{A}(0)}{B} z^2.$$

У точках, де підінтегральні вирази максимальні, врахування виразів (2.16), (2.20) дає наближений результат для інтенсивності потоку Пуассона

$\lambda = \frac{1}{\pi} |\dot{A}(0)\dot{A}(x_1)|^{1/2} e^{U(0)-U(x_1)}$ . Методи отримання наближених результатів інших типів докладніше викладені у [17].

## 2.4 Ймовірнісне моделювання радіотехнічних систем на електронно-обчислювальних машинах

Низка проблем, пов'язаних з дослідженням та конструюванням радіотехнічних систем, розглянутих у попередніх розділах, часто не піддається точному аналітичному розв'язанню і потребує застосування чисельних методів. Так, підрахунок ймовірності виявлення сигналу, обчислення ефективності оцінок параметрів сигналу пов'язані з кратним інтегруванням по складних за конфігурацією областях, які виконуються за кубатурними формулами [5], навіть і з випадковими вузлами [5, 6]. Дослідження нелінійних замкнених систем потребує чисельного інтегрування диференціальних рівнянь [4]. При синтезі оптимальних систем доводиться використовувати ітераційні схеми мінімізації складних функціоналів. Якщо оперувати з чисто математичними об'єктами (інтеграл, система рівнянь), «класичні» чисельні методи часто приховують фізичний зміст розглянутих процесів і не мають явної системної інтерпретації проміжних етапів розрахунків, не дозволяють осмислити причини підсумкової поведінки системи. Більш глибокими, у цьому сенсі, виявляється метод прямого ймовірнісного моделювання [5, 6], який часто називають методом Монте–Карло. Він зводиться до генерації послідовності реалізацій вихідних випадкових процесів, функціонального (алгоритмічного) їх перетворення відповідно до заданої структури системи, що підлягає моделюванню і, нарешті, статистичної обробки послідовності реалізацій на виході системи.

Тут аналітичне дослідження математичної моделі замінюється експериментом з фізичною моделлю, відтвореною на цифровій або аналоговій обчислювальній машині. Навіть найпростіша схема моделювання, у більшості випадків, повністю відповідає схемі натурального експерименту з радіотехнічним пристроєм, наприклад: генератор стандартних сигналів замінюється генератором випадкових дій, досліджувана на стенді схема – відповідною програмою, вимірювальний прилад – програмою статистичної інтерпретації результатів. Враховуючи, що дорожнеча та унікальність сучасних радіотехнічних систем, найчастіше, виключають можливість повного натурального експерименту з макетом системи, залишається вважати, що моделювання є не тільки найбільш природним і наочним, але і єдиним універсальним засобом інженерних розрахунків радіотехнічних систем та комплексів [5].

Моделювання на аналогових ЕОМ є зручним, якщо досліджувана система описується звичайними диференціальними рівняннями і не містить розгалуженої логіки, а вимоги до точності розв'язку відносно невисокі, близько 1–3%. Паралельні процеси тут природно вписуються у структуру звичайної аналогової ЕОМ. Багаторазове повторення моделювання, необ-

хідне для дослідження нестационарних систем, реалізовується шляхом багаторазового повторення розв'язання за різних початкових умов [6]. Деякі специфічні труднощі виникають у тих випадках, коли ідеалізація досліджуваної системи вносить у її опис процеси, які фізично неможливо реалізувати, наприклад, білий шум. Як відомо, будь-який генератор шуму, що використовується у аналоговій ЕОМ, може дати шум із широким, але, власне кажучи, обмеженим спектром. При цьому виявляється [11], що для уникнення грубих помилок слід розуміти інтеграли від випадкових функцій, що входять у опис системи, так звані стохастичні інтеграли, у формі Р. Л. Стратоновича [17], але не в формі К. Іто, як це прийнято у багатьох теоретичних дослідженнях. Збільшення точності розв'язку завдань, зручних для моделювання на аналогових ЕОМ, досягається шляхом використання цифрових аналогів і гібридних машин [5], а також трансляції програм з аналогових на цифрові ЕОМ за допомогою спеціальних програм [6]. Суттєво більші труднощі виникають при моделюванні на однопрограмною цифровій ЕОМ процесів, що паралельно протікають у часі, наприклад, у багатофазних системах масового обслуговування. У цьому випадку необхідно здійснювати періодичний огляд усіх елементів моделі або впорядковувати ці елементи за часом чергової зміни кожного їхнього стану [5]. Стандартизацію цих операцій, у рамках різних систем автоматизації програмування, розглянуто, наприклад, у [6].

Найбільш важкою (хоч і неспецифічною для ймовірнісних завдань) є проблема побудови моделі, тобто проблема «розумного спрощення» опису досліджуваної системи. Рекомендації класичної теорії подібності [5] можуть принести користь при конструюванні порівняно простих (особливо аналогових) моделей. У складних випадках основну роль відіграє інтуїція дослідника, який керується лише евристичними, загальними принципами і класифікацією моделей [14]. Наведемо приклади цих загальних принципів:

- компроміс між повнотою моделі, трудомісткістю побудови моделі та складністю експериментування з нею;
- відповідність точності окремих елементів моделі та точності вихідних даних для моделювання;
- розбивка процесу моделювання на ряд незалежних етапів;
- точне відтворення одних частин системи, та спрощене – для інших;
- виключення окремих частин системи із заміною їх еквівалентними випадковими діями;
- створення послідовності моделей наростаючої складності з перевіркою збіжності результатів – метод Рунге.

Мабуть, однією з найближчих перспектив стандартизації та автоматизації процесу побудови моделі, що розглядається як окремий випадок процесу абстрагування, може бути евристичне програмування [5, 6].

## 3 МАТЕМАТИЧНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

### 3.1 Базові положення теорії прийняття статистичних рішень

Застосування математичних методів, що відносяться до загальної теорії оптимальних систем та математичного програмування, дозволяє знайти аналітично такі перетворення (алгоритми), які потрібно зробити над вхідними процесами та сигналами, щоб на виході системи отримати результати, найкращі у певному, строго зафіксованому сенсі. Після цього радіотехнічними пристроями, засобами автоматики або обчислювальної техніки залишається здійснити ці перетворення практично, найчастіше у формі перетворень електричних сигналів. Така система буде оптимальною. Звичайно, практичне здійснення зазначених математичних перетворень може виявитися не простою задачею, однак пов'язані із цим технічні труднощі у цьому навчальному посібнику не розглядаються. Не розглядаються також питання оцінення складності оптимальних алгоритмів-перетворень і вартості відповідних систем. При застосуванні математичного апарату для розв'язування інженерних задач, які можуть бути досить різноманітними, кожна задача має бути чітко формалізована. Із низки різноманітних інженерних вимог до системи потрібно сформулювати основний критерій оптимальності – фіксовану функцію втрати. Обраний критерій може бути комбінованим, тобто загальна функція втрат може складатися з елементарних функцій втрат або бути їх комбінацією. Відповідно до цього складові частини системи, оптимальної відносно комбінованого критерію, часто можна отримувати шляхом розгляду більш простих задач – оптимізації підсистеми за окремим елементарним критерієм. Окрім виду оптимальних перетворень, які визначають структуру оптимальної системи, становить інтерес відповідна до цих перетворень величина середніх втрат, що характеризує якісні показники синтезованої системи. Зважаючи на це, бажано мати математичні методи, що дозволяють обчислювати цю величину.

Спочатку стисло викладемо основні, базові положення простої однокрокової задачі прийняття статистичних рішень, яку можна розглядати як окрему частину загальної теорії оптимізації динамічних систем. Припустимо, що необхідно оцінити (виміряти, відтворити) невідому величину або декілька величин  $\theta$  за умови, що спостерігається інша випадкова величина або декілька величин  $y$ , функціонально пов'язаних з  $\theta$ . Процес спостереження  $y$  може являти собою спотворений завадами корисний (інформативний) сигнал  $S(\theta)$ , у якому «закодовано» інформаційний параметр (або параметри)  $\theta$ . Так, у низці радіотехнічних задач спостереженню підлягає адитивна суміш сигналу  $S(\theta)$  і шуму  $n(t)$ . Тут і надалі під  $y(t)$  та  $S(\theta, t)$  потрібно розуміти сукупність векторів заданої розмірності або реалізацій процесів  $y(t)$  та  $S(\theta, t)$  на певному часовому інтервалі.

Переважно процес спостережень описують математичною моделлю

$$y(t) = S(\theta, \varphi, t) + n(t),$$

де  $n(t)$  – адитивна завада;  $\theta$  – корисний, інформативний параметр;  $\varphi$  – супутній, неінформативний випадковий параметр, що заважає процесу спостереження. У низці випадків  $\theta, \varphi$  є функціями часу. Статистичний опис процесу спостережень  $y(t)$  будемо вважати заданим у вигляді умовного розподілу ймовірностей  $\mathcal{W}(y/\theta)$ . Якщо розподіл  $\mathcal{W}(y/\theta)$  розглядають як функцію від параметра  $\theta$ , то його називають функцією правдоподібності [3]. Потрібно знайти оптимальне перетворення (правило, алгоритм), який дозволяє на основі результатів спостережень за величиною  $y$  знаходити оптимальну оцінку  $\theta^*(y)$  невідомого інформативного параметра  $\theta$ . Критерій оптимальності пов'язують із функцією вартості  $C(\theta^*, \theta)$  (інакше – функцією збитків, втрат або штрафів). Тип її вибирається на підставі інженерних або інтуїтивних міркувань. Так, коли значення  $\theta^*$  має бути якнайближчим до дійсного значення  $\theta$ , то доцільно вибирати  $C(\theta^*, \theta)$  з мінімумом  $\theta^*$  поблизу точки  $\theta$  – істинного значення інформативного параметра, яке, до речі, невідоме. Конкретне значення  $C(\theta^*, \theta)$  при  $\theta^* = \theta^*(y)$  виявляється випадковим, тому якість системи потрібно визначати деякими середніми показниками. Осередненням  $C(\theta^*, \theta)$  при  $\theta^* = \theta^*(y)$  отримуємо умовний ризик

$$\mathcal{R}(\theta^*/\theta) = \int_{(y)} C[\theta^*(y), \theta] \mathcal{W}(y/\theta) dy. \quad (3.1)$$

Зазвичай, кращими правилами (алгоритмами) оцінювання інформативного параметра  $\theta^*(y)$  вважаються ті, які приводять до менших значень втрат  $\mathcal{R}(\theta^*/\theta)$ . Якщо деяке  $\theta^*(y)$  мінімізує  $\mathcal{R}(\theta^*/\theta)$  для усіх значень  $\theta$ , то таке правило (розв'язок) є оптимальним. Однак, у загальному випадку розв'язок, який доставляє мінімум  $\mathcal{R}(\theta^*/\theta)$ , буде різним при різних  $\theta$ . У цьому випадку вибір оптимального правила можна робити на основі різних підходів: байєсового, мінімаксного, Неймана–Пірсона та ін. Наприклад, у байєсовій теорії вважається заданим апіорний розподіл  $\mathcal{W}(\theta)$  невідомого інформативного параметра  $\theta$ , і тоді розглядається середній безумовний ризик, пов'язаний з вибраним правилом оцінювання

$$\mathcal{R}(\theta^*) = \int_{(\theta)} C(\theta^*, \theta) \mathcal{W}(\theta) d\theta = \int_{(\theta)} \int_{(y)} C[\theta^*(y), \theta] \mathcal{W}(\theta, y) d\theta dy. \quad (3.2)$$

Враховуючи, що  $\mathcal{W}(\theta, y) = \mathcal{W}(y) \mathcal{W}(\theta/y)$ , де  $\mathcal{W}(\theta/y)$  — апостеріорний розподіл параметра  $\theta$ , формула (3.2) може бути записана у вигляді

$$\mathcal{R}(\theta^*) = \int_{(y)} \mathcal{R}[\theta^*(y)/y] \mathcal{W}(y) dy, \quad (3.3)$$

де  $\mathcal{R}[\theta^*(y)/y] = \int_{(\theta)} C(\theta^*, \theta) \mathcal{W}(\theta/y) d\theta$  – умовний за  $y$  середній ризик.



Правило  $\theta^*(\mathbf{y})$ , яке мінімізує середній ризик (3.3), називають оптимальним байєсовим правилом або розв'язком. З формули (3.3) видно, що мінімізація по  $\mathbf{y}$  середнього ризику  $\mathcal{R}(\theta^*)$  зводиться до мінімізації по  $\theta$  виразу для умовного середнього унаслідок позитивності  $\mathcal{W}(\theta)$ :

$$\mathcal{R}[\theta^*(\mathbf{y})/\mathbf{y}] = \int_{(\theta)} C(\theta^*, \theta) \mathcal{W}\left(\frac{\theta}{\mathbf{y}}\right) d\theta, \quad (3.4)$$

$$\int_{(\theta)} C(\theta^*, \theta) \mathcal{W}(\theta/\mathbf{y}) d\theta = \min_{\theta^*}. \quad (3.5)$$

Задачу (3.5) часто можна розв'язати аналітично.

У деяких випадках апіорний розподіл  $\mathcal{W}(\theta)$  невідомого інформаційного параметра не можна вважати заданим. Тоді застосовують мінімаксний критерій, тобто мінімізують умовний ризик для найбільш несприятливого випадку, а саме – знаходять оптимальне мінімаксне правило оцінювання за умови

$$\min_{\theta^*} \max_{\theta} \mathcal{R}(\theta^*, \theta) = \max_{\theta} \mathcal{R}(\theta_{min}^*, \theta). \quad (3.6)$$

Мінімаксний критерій (3.6) дає оптимальний розв'язок лише для найгіршого випадку. Він рідше використовується у прикладних дослідженнях, ніж байєсовий критерій, тому що аналітичні дослідження тут пов'язані з більшими труднощами. Критерій Неймана–Пірсона буде розглянутий у наступному підрозділі, окрім того, низка подальших підрозділів містить приклади застосування, викладених вище, базових положень теорії прийняття статистичних рішень до різноманітних задач синтезу радіоелектронних пристроїв та систем.

### 3.2 Задачі виявлення та розпізнавання сигналів

Задача виявлення сигналу являє собою задачу прийняття рішення про наявність або відсутність сигналу за результатами спостережень вхідного процесу  $\mathbf{y}(t)$ . Якщо сигнал відсутній, то вхідний процес являє собою чисту заваду  $\mathbf{n}(t)$  із законом розподілу  $\mathcal{W}(\mathbf{y}/\mathbf{n})$ , який вважається апіорі відомим. Якщо у вхідному процесі присутній корисний сигнал з параметрами  $\theta$ , то цій ситуації відповідає закон розподілу  $\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta)$ . Введемо додатковий параметр  $\gamma$ , який дорівнює одиниці, якщо корисний сигнал присутній у вхідному процесі, і нулю, якщо відсутній. Тоді, увівши розширений параметр  $\eta = \{\gamma, \theta\}$ , можна звести задачу виявлення корисного сигналу до задачі прийняття статистичних рішень, описаної у попередньому підрозділі. Відповідно до прийнятих припущень значення  $\eta = 1$  відповідає ситуації, що корисний сигнал присутній в  $\mathbf{y}(t)$ , а  $\eta = 0$  – сигнал відсутній. Тоді сукупність значень  $\eta = 1, \gamma = 1$  відповідають правильному рішенню, так само як і  $\eta = 0, \gamma = 0$ . Введемо штрафи:  $A$  – за фіктивну тривогу (коли в дійсності сигнал відсутній) і  $B$  – за пропуск корисного сигналу (коли в дійсності він є), і відсутність штрафів за правильні розв'язки. Для цього випадку, функція штрафів може бути записана у такій аналітичній спосіб:

$$C(\theta, \gamma) = \begin{cases} A & \text{при } \gamma = 0, \eta = 1, \\ B & \text{при } \gamma = 1, \eta = 0, \\ 0 & \text{при } \gamma = \eta = 1, \text{ або } \gamma = \eta = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Якщо апіорі відомі: щільності розподілу ймовірностей параметра  $\mathcal{W}(\theta)$  та імовірності  $\mathcal{W}(\gamma)$  появи або відсутності сигналу, то можна застосовувати байєсове оптимальне правило прийняття статистичних рішень за методикою, викладеною у підрозділі 3.1.

Однак, часто буває так, що апіорні ймовірності  $\mathcal{W}(\gamma)$ , а також штрафи  $A, B$  вважаються не заданими або доцільно так вважати. Тоді можна використати правило прийняття статистичних рішень  $\gamma(\mathbf{y})$ , оптимальне за критерієм Неймана–Пірсона. У цьому разі, розглядаються ймовірності помилок двох типів: ймовірність  $P$  хибної тривоги та ймовірність  $I-D$  – пропуску сигналу. Оптимальне правило прийняття рішень мінімізує одну ймовірність помилки при зафіксованому (заданому) значенні іншої. Як показує теорія [3], і байєсовий, і мінімаксий критерії оптимальності приводять до однієї і тієї ж процедури у процесі обробки результатів спостережень вхідного процесу. Спочатку утворюється відношення правдоподібності

$$\Lambda(\mathbf{y}/\theta) = \frac{\mathcal{w}(\mathbf{y}/\theta)}{\mathcal{w}(\mathbf{y}/n)}. \quad (3.8)$$

При застосуванні байєсового критерію умовне відношення правдоподібності додатково усереднюють за параметром  $\theta$ , тобто знаходять

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \int_{(\theta)} \Lambda(\mathbf{y}/\theta) \mathcal{W}(\theta) d\theta. \quad (3.9)$$

Потім  $\Lambda(\mathbf{y})$  або будь-яка монотонна функція від  $\Lambda(\mathbf{y})$  порівнюється з деяким пороговим значенням  $K$ . При байєсовому підході величина порогу  $K$  однозначно виражається через апіорні імовірності  $\mathcal{W}(\gamma)$  і відношення штрафів  $A/B$ . Якщо ж використовується критерій Неймана–Пірсона, то поріг виражається через ймовірність хибної тривоги  $P$  або ймовірність правильного виявлення  $D$ . Залежність цих ймовірностей від  $K$  неважко отримати шляхом інтегрування:

$$\begin{aligned} D(K) &= \int_K^{\infty} P_{0,1}(\Lambda) d\Lambda, \\ F(K) &= \int_K^{\infty} P_{1,0}(\Lambda) d\Lambda, \end{aligned} \quad (3.10)$$

де  $P_{0,1}(\Lambda)$  – розподіл випадкової величини  $\Lambda$  при  $\gamma=0$  і  $\gamma=1$ , відповідно. Функції  $D(K), F(K)$  потрібно тлумачити як параметричне зображення залежності  $D$  від  $F$ , яку часто називають робочою характеристикою оптимального пристрою виявлення [2, 3].

Перейдемо до задачі розпізнавання сигналів. У найпростішому випадку ця задача зводиться до вибору однієї із двох або декількох альтернатив. Якщо можливі лише дві альтернативи і статистичні властивості сигналів

обох можливих типів відомі, то задача розпізнавання оптимально вирішується тими ж самими методами, що й задача виявлення. Власне кажучи, так само вирішується і задача багатоальтернативного байесового розпізнавання [3]. Значно складнішою стає ситуація у тих випадках, коли апріорні розподіли заздалегідь невідомі. У цих випадках доцільно проводити попереднє «навчання», наприклад, методом показів: одночасно вказується і значення вхідної величини  $y(t)$ , і тип сигналу  $\gamma$  (для вказання типу сигналу можна зберегти позначення  $\gamma = 0;1$ ). Процес «навчання» містить  $n$  показів, що дають сукупність значень  $\{y_1, \gamma_1, \dots, y_n, \gamma_n\}$ . Власне етап розпізнавання полягає у подачі на систему вхідної послідовності  $y(t)$ , тип сигналу у якій невідомий, а від системи – визначення цього типу. Шуканим є правило, що оцінює параметр  $\gamma$ , тобто

$$\gamma^* = \gamma [y_1, \gamma_1, \dots, y_n, \gamma_n]. \quad (3.11)$$

Для розв'язання цієї задачі можна використовувати різні методи. Якщо припустити, що тип розподілу  $P_\gamma(y)$  при обох значеннях  $\gamma$  відомий з точністю до параметрів  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , що мають рівномірний апріорний розподіл, тоді він може бути поданий у вигляді:

$$P_\gamma(y) = \text{const} \exp\{\sum_{i=1}^k \alpha_i(\gamma) \varphi_i(y) + \varphi_0(y)\}, \quad (3.12)$$

де функції  $\varphi_0(y), \dots, \varphi_k(y)$  задані (такий тип задання зручний для розв'язування задачі, причому конкретний вибір функцій  $\varphi_i(y)$  не є принциповим). У такому разі можна застосувати оптимальне байесове правило розпізнавання. При цьому як вхідну величину  $y(t)$  потрібно брати усю сукупність аргументів співвідношення (3.11), а як величини, що підлягають визначенню, – сукупність  $\alpha_1^\gamma, \dots, \alpha_k^\gamma, \gamma$ . Функцію втрат доцільно брати у вигляді (3.7), вважаючи її симетричною, тобто  $A=B$ . Не виникає принципових труднощів і для узагальнення наведених методів на випадок, коли  $\gamma$  може набувати довільного числа значень. Особливого дослідження заслуговує питання вибору сукупності істотних ознак, за якими повинно проводитись розпізнавання, тобто питання вибору системи функцій  $\varphi_i(y)$ . Принциповим є той факт, що за умови повноти цієї системи оптимальне правило розпізнавання, переважно, є незалежним від конкретного вибору зазначеної системи функцій [3, 6].

### 3.3 Статистичні оцінки параметрів сигналів

У цьому підрозділі розглянемо інший, окремий аспект теорії, викладеної у 3.1. Припустимо, що  $\theta$  являє собою один або декілька  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$  неперервних параметрів, тобто точку одновимірного або багатовимірного (коли  $k > 1$ ) простору. Таким же береться простір значень оцінок  $\theta^*$ . Оскі-

льки прагнуть досягти максимальної близькості між  $\theta^*$  і  $\theta$ , функцію вартості слід вибирати залежною лише від різниці аргументів

$$C(\theta^*, \theta) = C(\theta^* - \theta), \quad (3.13)$$

де  $C(\theta^*, \theta)$  – функція, що має один мінімум у початку координат.

Важливими окремими випадками є квадратична функція вартості

$$C(\theta^*, \theta) = (\theta^* - \theta)^2 \quad (3.14)$$

і проста функція вартості

$$C(\theta^*, \theta) = \text{const} - \delta(\theta^* - \theta), \quad (3.15)$$

які відповідають вимозі щодо мінімуму середнього квадрата похибки та максимуму апостеріорної щільності розподілу ймовірностей оцінюваного параметра, відповідно. Підставляючи (3.14) у формулу мінімального ризику, знаходимо рівняння для оптимальної оцінки

$$\theta^{*2} - 2\theta^* \int_{(\theta)} \theta \mathcal{W}(\theta/y) d\theta + \int_{(\theta)} \theta^2 \mathcal{W}(\theta/y) d\theta = \min_{\theta^*}.$$

Шляхом диференціювання знаходимо, що оптимальна оцінка у цьому випадку збігається з апостеріорним середнім значенням:

$$\theta^* = \theta^*(y) = \int_{(\theta)} \theta \mathcal{W}(\theta/y) d\theta = \mathcal{M}(\theta/y). \quad (3.16)$$

Середній ризик при цьому дорівнює дисперсії похибки

$$\mathcal{R}(\theta^*) = \int_{(\theta)} \int_{(y)} [\theta - \mathcal{M}(\theta/y)]^2 \mathcal{W}(\theta, y) d\theta dy. \quad (3.17)$$

Якщо в рівняння для середнього ризику підставити функцію (3.15), то воно набуде вигляду

$$\mathcal{W}(\theta/y)|_{\theta=\theta^*} \text{ или } \mathcal{W}(\theta)\mathcal{W}(y/\theta)|_{\theta=\theta^*} = \max_{\theta^*}, \quad (3.18)$$

тобто при функції вартості (3.15) оптимальна оцінка відповідає максимуму апостеріорної щільності розподілу ймовірностей оцінюваного параметра.

Іноді апріорний розподіл параметра  $\mathcal{W}(\theta)$  частково або повністю невідомий. При повній відсутності інформації для обчислення оцінки пропонується як апріорний брати рівномірний розподіл [3], вибір якого не потребує фіксації яких-небудь функцій або параметрів. При цьому максимізація (3.18) зводиться до максимізації функції правдоподібності

$$\mathcal{W}(y/\theta)|_{\theta=\theta^*} = \max_{\theta^*}. \quad (3.19)$$

У задачах прикладного характеру функція правдоподібності, як правило, має похідні, тобто умову екстремальності можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \mathcal{W}(y/\theta)|_{\theta=\theta^*} = 0. \quad (3.20)$$

Це рівняння, корінь якого забезпечує глобальний максимум, прийнято називати рівнянням *максимальної правдоподібності*.

У загальному випадку, оптимальна середньоквадратична оцінка (3.16) відрізняється від оцінок за максимумом апостеріорної ймовірності та максимуму правдоподібності. Однак у деяких випадках, а саме, коли  $\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta)$  і  $\mathcal{W}(\theta/\mathbf{y})$  – симетричні відносно деякої точки, то всі три критерії приводять до однієї і тієї ж оцінки  $\theta^*$ . Більше того, до тієї ж оцінки приводить будь-яка інша симетрична відносно початку координат функція вартості, що входить до (3.13). Якщо умова симетрії  $\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta)$  виконана не точно, то у багатьох практично важливих випадках вона виявляється виконаною приблизно. Коли рівень завад відносно малий або коли спостереження проводяться досить довгий час, функцію правдоподібності можна апроксимувати гаусовою кривою з достатньою для практичних потреб точністю

$$\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta) \approx \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_{\text{мп}}^*) \exp\left\{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_{\text{мп}}^*) (\theta - \theta_{\text{мп}}^*)^2\right\}, \quad (3.21)$$

де  $\theta_{\text{мп}}^* = \theta_{\text{мп}}^*(\mathbf{y})$  – оцінка за максимумом правдоподібності. Пояснимо цю можливість на конкретному прикладі.

**Приклад 1.** Нехай задана послідовність  $\{y_1, \dots, y_n\}$  незалежних спостережень так, що

$$\ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta) = \sum_{i=1}^n \ln \mathcal{W}_i(y_i/\theta).$$

Розвинемо цю функцію у ряд Тейлора навколо точки максимуму функції правдоподібності  $\theta_{\text{мп}}^*$ , тоді будемо мати

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta) = & \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_{\text{мп}}^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln \mathcal{W}_i(y_i/\theta_{\text{мп}}^*) (\theta - \theta_{\text{мп}}^*)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \ln \mathcal{W}_i(y_i/\theta_{\text{мп}}^*) (\theta - \theta_{\text{мп}}^*)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Отже, можна записати

$$\frac{\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta)}{\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_{\text{мп}}^*)} = \exp\left\{\frac{1}{2} A_2(n) (\theta - \theta_{\text{мп}}^*)^2\right\} \times \exp\left\{\frac{1}{6} A_3(n) (\theta - \theta_{\text{мп}}^*)^3\right\} \dots, \quad (3.23)$$

де

$$\begin{aligned} A_2(n) = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln \mathcal{W}_i(y_i/\theta_{\text{мп}}^*), \\ A_3(n) = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \ln \mathcal{W}_i(y_i/\theta_{\text{мп}}^*) \end{aligned} \quad (3.24)$$

асимптотично лінійно зростають із зростанням  $n$ .

Перший співмножник  $\exp\left\{-\frac{1}{2} A_2(n) (\theta - \theta_{\text{мп}}^*)^2\right\}$  у правій частині (3.23) помітно відрізняється від нуля лише у області, де

$$(\theta^* - \theta) \lesssim \frac{1}{\sqrt{A_2(n)}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

але у цій же області наступний член задовольняє нерівність

$$|A_3(n)(\theta - \theta_{\text{МП}}^*)^3| \lesssim \left| \frac{A_3(n)}{A^{3/2}_3(n)} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (3.25)$$

З тієї ж причини при великих  $n$  стають нехтовно малими й більш високого порядку члени розвинення. Якщо їх відкинути, то одержимо формулу (3.21).

Аналогічно можна аргументувати заміну функції правдоподібності гауссовою кривою (3.21) і у випадку, коли  $\mathbf{y}(t)$  являє собою реалізацію неперервного у часі процесу. Для припустимості цієї заміни важливо, щоб вирази у чисельнику та знаменнику

$$\frac{-\frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_{\text{МП}}^*)}{\left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_{\text{МП}}^*)\right]^{k/2}}, \quad k = 3, 4, \dots$$

були у середньому малими величинами. Ця умова виконується, коли відношення  $t/\tau_{\text{кор}}$  тривалості інтервалу спостереження до часу кореляції процесу  $\mathbf{y}(t)$  є значно більшим одиниці. Функція правдоподібності має симетрію відносно істинного значення параметра  $\theta$ . При досить великих  $n$  майже будь-який апріорний розподіл буде відносно широким, тобто постійним у області, де помітно відрізняється від нуля функція правдоподібності  $\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta)$ . Цілком логічно, що за таких умов оцінка за максимумом правдоподібності та будь-яка інша байєсова оцінка із симетричною функцією вартості будуть мало відрізнятися від апостеріорного середнього  $\mathcal{M}(\theta/\mathbf{y})$ . У цьому випадку має місце широко відома незалежність оптимальних оцінок від апріорного розподілу та від функції вартості [2, 6]. Це дозволяє при виборі того або іншого розподілу та критерію керуватися міркуваннями простоти та зручності.

Розглянемо детальніше випадок, коли апріорний розподіл  $\mathcal{W}(\theta)$  відсутній і байєсовими критеріями користуватись стає неможливо. У цьому разі, якість оцінювання доцільно характеризувати умовним ризиком. При квадратичній функції вартості отримаємо

$$\mathcal{R}(\theta^*, \theta) = \int_{(\mathbf{y})} [\theta^*(\mathbf{y}) - \theta]^2 \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta) d\mathbf{y}. \quad (3.26)$$

Оцінка  $\theta^*(\mathbf{y})$  називається незміщеною, якщо її математичне сподівання збігається з дійсним значенням оцінюваного параметра, тобто при будь-якому  $\theta$  має виконуватись умова

$$\int_{(\mathbf{y})} \theta^*(\mathbf{y}) \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta) d\mathbf{y} = \theta.$$

Для таких оцінок умовний ризик збігається з дисперсією оцінки

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}) = \int_{(\mathbf{y})} [\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{y}) - \int_{(\mathbf{y})} \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{y}) \mathcal{W}(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{y}]^2 \mathcal{W}(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{y}, \quad (3.27)$$

яка є важливою характеристикою оцінки.

Можна показати, що дисперсія (3.27) будь-якої незміщеної оцінки задовольняє нерівність Крамера–Рао [3, 6]:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta})},$$

де

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}) = - \int_{(\mathbf{y})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) \right] \mathcal{W}(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{y} \quad (3.28)$$

так звана інформаційна міра Фішера. Для найкращої оцінки, яку називають ефективною, виконується рівність

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (3.29)$$

Ефективна оцінка існує не завжди, а дослідження факту, що оцінка є ефективною часто являє собою складну задачу математичного характеру. Проте, якщо така оцінка все-таки існує, то вона може бути знайдена розв'язанням рівняння правдоподібності. Середнє значення другої похідної у виразі (3.28) є не що інше як коефіцієнт, який визначає кривизну параболи в (3.21). При рівномірному апіорному розподілі  $\boldsymbol{\theta}$  параболи в (3.21) відповідає гаусів апостеріорний розподіл параметра з дисперсією

$$\sigma = \left\{ \mathcal{M} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{\text{МП}}} \right\}^{-1}. \quad (3.30)$$

Ця формула свідчить про те, що друга похідна від логарифма функції правдоподібності характеризує апостеріорну похибку. Відповідно до (3.26), (3.28) середньоквадратичний розкид координати максимуму правдоподібності відносно дійсного значення параметра  $\boldsymbol{\theta}$  дорівнює середній ширині піка правдоподібності. Різниця лише у додатковому усередненні другої похідної. У багатовимірному випадку похідна  $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$  замінюється на матрицю других похідних, які після усереднення утворюють інформаційну матрицю Фішера [2, 3, 6] з елементами

$$I_{ij} = - \int_{(\mathbf{y})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_1, \dots, \theta_k) \right] \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_1, \dots, \theta_k) d\mathbf{y}. \quad (3.31)$$

Найкращі (ефективні) оцінки  $\boldsymbol{\theta}^*$  задовольняють рівності

$$\|\mathcal{M}\{[\theta_i^*(y) - \mathcal{M}[\theta_i^*(y)/\theta_1, \dots, \theta_k]][\theta_j^*(y) - \mathcal{M}[\theta_j^*(y)/\theta_1, \dots, \theta_k]]\}\| = \|I_{ij}\|^{-1}, \quad (3.32)$$

і за умови їх існування можуть бути знайдені спільним розв'язком рівнянь правдоподібності

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln \mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_1, \dots, \theta_k) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.33)$$

Співвідношення (3.32) характеризує якість оцінок  $\theta_i^*(y)$  і вони тим точніші, чим менші елементи матриці, що розташована у правій частині цього виразу. Щодо збільшення числа вимірювань  $n$ , то оцінки, зазвичай, мають деякі асимптотичні властивості, до яких відносять асимптотичну незміщеність та ефективність.

**Приклад 2.** Припустимо, що вимірюються параметри  $\theta$  сигналу  $S(t, \theta)$ , прийнятого на фоні білого шуму. Тоді при скалярному  $\theta$  мінімальна дисперсія згідно з (3.30) дорівнює

$$\sigma = \frac{N_0}{b(\theta)}, \quad b(\theta) = \left. \frac{\partial^2 \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \theta},$$

де  $\psi(\theta_1, \theta_2)$  – функція невизначеності (автокореляції) сигналу. Зокрема, коли  $\psi(\theta_1, \theta_2) = \psi(\theta_1 - \theta_2)$ , величина  $b$  від  $\theta$  не залежить. Точність тим вища, чим гостріша вершина функції невизначеності. Також, як і в інших прикладах, у випадку білого шуму інформаційна матриця Фішера дорівнює другим похідним від функції невизначеності, що поділені на величину спектральної потужності білого шуму  $N_0$ .

**Достатні статистики.** Коли процес спостереження  $\mathbf{y}(t)$  складається з великої кількості випадкових величин (є процесом на інтервалі великої тривалості), у теорії оцінок надзвичайно велику роль відіграє поняття достатньої статистики [17]. Це такі функції від  $\mathbf{y}(t)$   $X_i(\mathbf{y})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , за допомогою яких функція правдоподібності може бути подана у вигляді

$$\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta) = C(\mathbf{y})F[X_1(\mathbf{y}), \dots, X_n(\mathbf{y}); \theta], \quad (3.34)$$

де  $C$  не залежить від  $\theta$ , а співмножник  $F$  залежить від  $\mathbf{y}(t)$  тільки через  $X_1(\mathbf{y}), \dots, X_n(\mathbf{y})$ . Якщо  $\mathbf{y}(t)$  є процесом неперервним у часі, то  $X_1(\mathbf{y}), \dots, X_n(\mathbf{y})$ , і  $C(\mathbf{y})$  є функціоналами від  $\mathbf{y}$ , але  $F$ , і у цьому випадку, є функцією скінченного числа змінних.

У байєсовій теорії оцінювання від достатніх статистик необхідно, щоб в аналогічній формі виражався сукупний закон розподілу

$$\mathcal{W}(\mathbf{y}, \theta) = C(\mathbf{y})F[X_1(\mathbf{y}), \dots, X_n(\mathbf{y}); \theta].$$

Тоді, очевидно, що апостеріорний розподіл теж буде залежати від  $\mathbf{y}(t)$  тільки за посередництва  $X_1(\mathbf{y}), \dots, X_n(\mathbf{y})$ :



$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{y}) = \frac{F[X_1(\mathbf{y}), \dots, X_n(\mathbf{y}); \boldsymbol{\theta}]}{\int_{(\boldsymbol{\theta})} F[X_1(\mathbf{y}), \dots, X_n(\mathbf{y}); \boldsymbol{\theta}] d\boldsymbol{\theta}}.$$

Отже, функції  $X_i(\mathbf{y})$  будуть достатніми для обчислення апостеріорних характеристик, що коротко можна записати у вигляді

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{y}) = \mathbf{w}[\boldsymbol{\theta}/X(\mathbf{y})]. \quad (3.35)$$

Підставляючи (3.35) у рівняння для середнього ризику, легко побачити, що оптимальна процедура оцінювання залежить від  $\mathbf{y}(t)$  тільки через достатні статистики [3]:

$$\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\theta}^*[X(\mathbf{y})].$$

В небайєсовій теорії також можна обмежитися розглядом процедур типу  $\boldsymbol{\theta}^*[X(\mathbf{y})]$ . Оскільки число достатніх статистик, як правило, значно менше числа випадкових величин, що входять до складу  $\mathbf{y}$ , відшукувати функцію  $\boldsymbol{\theta}^*[X(\mathbf{y})]$  значно простіше, ніж безпосередньо функцію  $\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{y})$ . Тому достатніми статистиками дуже зручно користуватися, якщо вони існують.

**Приклад 3.** Нехай  $\theta$  є невідоме середнє значення гаусового розподілу із заданою дисперсією  $\sigma^2$ . При  $n$  незалежних вибірках із цього розподілу функція правдоподібності дорівнює

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= (2\pi)^{-n/2} \sigma^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 \right\} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \sigma^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right\} \exp \left\{ \frac{2\theta X(\mathbf{y}) - \theta^2 n}{2\sigma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

У виразі (3.36)  $X(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n y_i^2$  від  $\theta$  залежить лише друга експонента. Вираз (3.36) являє собою окремий випадок формули (3.34), причому  $X(\mathbf{y})$  виконує роль достатньої статистики. Оцінка за максимумом правдоподібності дорівнює  $\frac{X(\mathbf{y})}{n}$ , тобто дійсно має вигляд  $\boldsymbol{\theta}^*[X(\mathbf{y})]$ .

### 3.4 Розрізнення сигналів та синтез сигналів оптимальної форми

Існує декілька підходів до розв'язання задачі розрізнення сигналів [2, 3, 6]. Наприклад, один з них базується на теорії прийняття статистичних рішень і трактує розрізнення як спосіб зіставлення альтернатив про наявність або відсутність даного сигналу за наявності інших сигналів з близькими значеннями параметра  $\theta$ . Фактично розв'язується задача виявлення в ускладнених умовах, а саме, наявність суміжних завад, за структурою близьких до виявлюваного сигналу. Така постановка задачі приводить до порівняння з порогом коефіцієнта правдоподібності:

$$\Lambda = \frac{\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_1, \theta_2)}{\mathcal{W}(\mathbf{y}/\theta_2)}, \quad (3.37)$$

де  $\mathcal{W}(y/\theta_1, \theta_2)$  – умовна щільність розподілу ймовірностей спостережуваного вхідного процесу  $y(t) = S_1(t) + S_2(t) + n(t)$  за наявності корисного сигналу  $S_1(t)$  та суміжного з ним сигналу-завади  $S_2(t)$  і шуму  $n(t)$ ;  $\mathcal{W}(y/\theta_2)$  – відповідна щільність розподілу за наявності сигналу-завади  $S_2(t)$  та шуму  $n(t)$ .

Другий підхід до проблеми розрізнення сигналів опирається на відомі методи ортогоналізації функцій. Згідно з [3] оптимальний приймач детермінованого сигналу на фоні шуму є кореляційним. Розглянемо два сигнали  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$ . Побудувавши кореляційний приймач для першого з них, у загальному випадку одержимо ненульовий сигнал на виході приймача і при дії другого сигналу  $S_2(t)$ , якщо

$$\int_0^T S_1(t)S_2(t) dt \neq 0.$$

Проте «опорну напругу»  $S_1(t)$  у приймачі можна замінити на

$$S_1(t) - S_2(t) \sqrt{\rho_{12}} \psi_{12},$$

де

$$\rho_{12} = \int_0^T S_1^2(t) dt / \int_0^T S_2^2(t) dt$$

– відношення енергії сигналів;

$$\psi_{12} = \int_0^T S_1(t)S_2(t) dt / \sqrt{\int_0^T S_1^2(t) dt \int_0^T S_2^2(t) dt}$$

– нормований коефіцієнт взаємної кореляції двох сигналів.

При повній тотожності сигналів  $S_1(t) \equiv S_2(t)$  або їх пропорційності  $\psi_{12}$  згортається в одиницю, при повній відмінності сигналів або істотному взаємному часовому зсуві  $\psi_{12}=0$ . Тоді сигнал  $S_1(t)$  пройде (правда в дещо ослабленому вигляді) через новий приймач, а сигнал  $S_2(t)$  буде повністю заглушений.

Другий підхід неважко узагальнити й на ситуацію з декількома сигналами  $S_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  у шумах. При цьому передбачається, що оператор розрізнення містить лінійну частину, що виділяє сигнал  $S_0(t)$  і частину, яка виконує процедуру режекції відносно сигналів  $S_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Оператор лінійної частини підбирається так, щоб створити максимум відношення сигнал/шум за повної режекції усіх суміжних сигналів. Сигнали можуть бути флукуаційними та високочастотними. При цьому  $S_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  за-

мінються на коефіцієнти модуляції  $U(t, \theta_i)$ , а ступінь схожості сигналів описують через функцію невизначеності.

Незважаючи на відмінність у постановці задачі, обидва зазначені методи синтезу приводять до близьких результатів. В обох випадках приймач містить елементи заглушення суміжних сигналів. Але якщо з позиції теорії статистичних рішень заглушення здійснюється до оптимального рівня, що забезпечує, наприклад, найвищу ймовірність правильного виявлення при фіксованому рівні фальшивої тривоги, то при ортогоналізації режекція здійснюється повністю, що трохи погіршує якість приймання при  $\psi(\theta_0, \theta_i) \approx 1$ . Тим самим другий підхід не враховує наявності шуму, теоретично менш послідовний і гранично досяжної якості обробки не забезпечує. Проте, з іншої сторони, для користування ним не потрібно знати багатомірних розподілів миттєвих значень сигналів.

**Приклад 1.** Припустимо, що флюктуючий сигнал з коефіцієнтом модуляції  $U(t, \theta_1)$ , функцією невизначеності  $\psi_{12}(\theta_1 - \theta_2)$  і відношенням сигнал/шум  $\rho_1$  виділяється на фоні подібного сигналу з характеристиками  $U(t, \theta_2)$ ,  $\rho_2$  і шуму. Розподіл ймовірностей усіх компонентів вважаємо нормальним. Через наявність суміжного сигналу ефективне відношення сигнал/сумарна завада при виділенні першого сигналу виявляється меншим, порівняно з випадком наявності лише шуму, за величину

$$\rho_{\text{эф0}} = \rho - \frac{\rho_2}{1 + \rho_2} |\psi_{12}|^2$$

при оптимальному приймачі, що здійснює процедуру розрізнення, і за величину

$$\rho_{\text{эфр}} = \rho_1 [1 - |\psi_{12}|^2],$$

при приймачі, що забезпечує повну режекцію.

Результати як попередніх підрозділів, так і цього показують, що якісні показники процедур оцінювання та розрізнення багато у чому залежать від форми сигналів через функцію невизначеності. Так, найкращим з погляду процесу вимірювань за наявності шумів виявляється сигнал з найбільш гострою вершиною функції невизначеності, а з погляду розрізнення, крім того, ще й з найменшими бічними максимумами (викидами) цієї функції. Це дозволяє ставити задачу про вибір сигналу оптимальної форми, тобто крім оптимізації приймачів оптимізувати ще й передавальний тракт радіоелектронних систем.

Дійсно, для підвищення точності вимірювань потрібно, щоб

$$-\frac{\partial^2 \psi(\Delta)}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} = \max_{\psi}; \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.38)$$

а для поліпшення роздільної здатності можна, наприклад, додатково задати найменше значення найбільшого з побічних максимумів:

$$\max_{\Delta \neq 0} |\psi(\Delta)|^2 = \min_{\psi}. \quad (3.39)$$

Звідси отримуємо необхідний вигляд функції невизначеності, а по ній стане можливим визначати і сам сигнал. Проте, відразу ж слід зауважити, що загального та однозначного методу відновлення сигналу за його функцією невизначеності не існує. Більше того, відомо, що близьку за виглядом функцію невизначеності можуть мати зовсім різні сигнали. Тому, як правило, обмежуються оптимізацією сигналів деяких окремих типів (із частотною, фазо-ковою та ін. модуляціями), домагаючись виконання (3.39). Тут відома велика кількість результатів, опублікованих у різних науково-технічних журналах та літературних джерелах [11].

Іноді при синтезі сигналів трапляються обмеження принципового характеру. Наприклад, нехай двома параметрами сигналу є часова затримка  $\tau$  та частотний зсув  $\Omega$ :

$$U(t, \tau, \Omega) = U_0(t - \tau)e^{j\Omega t}, \quad (3.40)$$

де функція  $U_0(t)$  вважається повністю відомою. Відповідно до цього випадку функція невизначеності сигналів  $U(t, \tau, \Omega)$  і  $U(t, \tau + \Delta_\tau, \Omega + \Delta_\Omega)$  дорівнює

$$\psi(\Delta_\tau, \Delta_\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t)U_0^*(t + \Delta_\tau)e^{j\Delta_\Omega t} dt.$$

У роботі [6] доведено властивість цієї функції щодо збереження об'єму

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\Delta_\tau, \Delta_\Omega)|^2 d\Delta_\tau, d\Delta_\Omega = const.$$

Тим самим при синтезі, що опирається на співвідношення (3.38)–(3.39), стає неможливим стиснення  $\psi$  одразу в усіх напрямках. Можна говорити лише про збереження принципової невизначеності при одночасних вимірюваннях часової затримки та частотного зсуву, що й пояснює введення даного терміна.

### 3.5 Лінійна оптимальна фільтрація

У теорії лінійної оптимальної фільтрації заздалегідь обмежуються розглядом лише лінійних перетворень  $u = \gamma(y)$ . Зокрема, коли мають справу зі значеннями випадкової функції  $y(t)$  на інтервалі  $(a, b)$ ,  $u$  – скалярна випадкова величина, то зазначене перетворення має вигляд

$$u = \gamma(y) = \int_a^b h(t) y(t) dt, \quad (3.41)$$

де  $h(t)$  – деяка функція, яку необхідно знайти з міркувань оптимальності.

Якщо розглядається не скалярна оцінка  $u$ , а функція  $u(t)$ , то формулу (3.41) потрібно застосовувати при фіксованому значенні  $t = t_0$ , тобто це буде означати, що

$$u(t) = \int_a^b h(t_0, t) y(t) dt,$$

де  $h(t_0, t)$  – імпульсна характеристика лінійної системи.

Розглянемо оптимальне перетворення, що відповідає середньоквадратичному критерію, тобто функції втрат (3.32). Тепер уже не можна користуватися формулою (3.15), тому що перетворення, яке безпосередньо з неї випливає, може виявитися нелінійним, а слід мінімізувати ризик (3.2) за множиною лінійних перетворень (3.41).

Підставимо (3.14) і (3.41) в (3.2), тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(y) = & \mathcal{M}\{\theta^2\} - 2 \int_a^b h(t) \mathcal{M}\{[y(t), \theta]\} dt + \\ & + \int_a^b \int_a^b h(t) h(t') \mathcal{M}\{y(t) y(t')\} dt dt'. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Як результат мінімізації (3.42) за усіма можливими функціями  $h(t)$  одержуємо рівняння регресії

$$\int_a^b \mathcal{M}\{y(t) y(t')\} h(t') dt dt' = \mathcal{M}\{y(t), \theta\}, \quad (3.43)$$

з якого і визначається оптимальна функція  $h(t)$ . Середній ризик (3.42) для оптимального перетворення становить

$$\mathcal{R}(y) = \mathcal{M}\{\theta^2\} - \int_a^b h(t) \mathcal{M}\{[y(t), \theta]\} dt. \quad (3.44)$$

Корисно зазначити, що для знаходження оптимального лінійного перетворення виявилось достатнім знання лише других моментів вхідного процесу, а не їх багатовимірних розподілів.

Дискретний аналог рівняння (3.43) вдається безпосередньо розв'язати, якщо  $y(t)$  являє собою набір скінченного числа випадкових величин. При нескінченному числі величин та у розглянутому вище континуальному (неперервному) випадку його розв'язання ускладнюється. Наведемо окремі випадки такого розв'язання.

1. Інтервал спостереження нескінченний:  $a = -\infty, b = \infty$ , процес  $y(t)$  стаціонарний, так що

$$\mathcal{M}\{y(t) y(t')\} = R_{yy}(t - t').$$

Потрібно оцінити значення (у деякий момент часу  $t_0$ ) процесу  $\theta(t)$ , стаціонарно пов'язаного з  $y(t)$  так, що

$$\theta = \theta(t_0), \quad \mathcal{M}\{y(t), \theta\} = \mathcal{M}\{y(t), \theta(t_0)\} = R_{y\theta}(t - t_0).$$

Тоді рівняння (3.43) можна розв'язати, використовуючи апарат перетворень Фур'є [1]. Функція  $h(t) = h_0(t_0 - t)$  виявляється залежною лише від різниці  $t_0 - t = \tau$  і відповідна їй передатна функція лінійної системи дорівнює

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} h_0(\tau) d\tau = \frac{S_{\theta y}(\omega)}{S_{yy}(\omega)}, \quad (3.45)$$

де

$$S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{yy}(\tau) d\tau;$$

$$S_{\theta y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{\theta y}(\tau) d\tau. \quad (3.46)$$

Для середніх втрат згідно з (3.44) маємо формулу

$$\mathcal{R}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_{\theta\theta}(\omega) - |S_{\theta y}(\omega)|^2 / S_{yy}(\omega)] d\omega. \quad (3.47)$$

Така фільтрація у теорії прийняття статистичних рішень називається лінійною фільтрацією без урахування умови фізичної реалізації, тому що для оцінення значення  $\theta$  використовуються не тільки минулі  $t < t_0$  відносно моменту часу  $t_0$ , але й майбутні  $t > t_0$  значення спостережуваного сигналу. Отже, щоб виконати таке оцінювання, потрібно мати у своєму розпорядженні запис усього процесу спостереження  $y(t)$ .

2. Якщо спостережуваними величинами  $y(t)$  (до моменту  $t_0$  можна вважати лише значення  $y(t)$  у попередні моменти часу  $t < t_0$ , то це відповідає умові урахування фізичної реалізації. Тут, як і раніше, беремо  $\theta = \theta(t_0)$ ,  $a = -\infty$ , але  $b = t_0$ . Для стаціонарних процесів  $\theta(t)$ ,  $y(t)$ , відповідна до цього випадку, модифікація рівняння (3.43) називається рівнянням Вінера–Хопфа:

$$\int_0^{\infty} R_{yy}(\tau - \tau') h_0(\tau') d\tau' = R_{\theta y}(\tau), \quad \tau > 0. \quad (3.48)$$

Як його розв'язок, замість (3.47), маємо складнішу формулу

$$H = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[ \frac{S_{\theta y}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \right]_+ , \quad (3.49)$$

де  $\psi(j\omega)\psi(-j\omega) = S_{yy}(\omega)$  – спеціальне розвинення (факторизація) на співмножники з нулями та полюсами у верхній (перший співмножник) і в нижній (другий співмножник) півплощинах комплексної змінної  $\omega$ . Дужки [...] в (3.49) означають, що беруться ті складові розвинення на найпрос-

тіші дроби, які мають полюси у верхній півплощині. Факторизацію та операцію [...] можна також записувати у вигляді інтеграла. Однак у випадку раціональних спектральних функцій  $S_{yy}(\omega)$ ,  $S_{\theta y}(\omega)$  обчислення зручніше проводити, без інтегрування, шляхом розкладання функції  $S_{yy}(\omega)$  на елементарні співмножники, а функції  $S_{yy}(\omega)/\psi(-j\omega)$  – на найпростіші дроби. Наведений розв'язок був отриманий Вінером [2]. Відповідний дискретний аналог розв'язку (для стаціонарних послідовностей) був знайдений Колмогоровим [3].

3. У випадку скінченного інтервалу спостереження  $[a, b]$  розв'язок рівняння (3.48) може бути отриманий, якщо  $\theta(t)$ ,  $y(t)$  є стаціонарними процесами з раціональною спектральною щільністю. У випадку нестационарних процесів точний розв'язок можна знайти методами теорії умовних процесів, коли процеси  $\theta(t)$ ,  $y(t)$  зводяться до багатовимірного процесу Маркова. Запропоновані ще й інші точні або наближені методи розв'язання для низки окремих випадків [6, 17]. Усе вищезазначене безпосередньо поширюється і на випадок багатовимірних процесів  $\theta(t)$ ,  $y(t)$  та на випадок процесів у дискретному часі (випадкових послідовностей). Теорія лінійної фільтрації у радіотехнічних системах застосовується звичайно у тих випадках, коли завада є адитивною і незалежною, тобто спостережуваний процес є сумою  $y(t) = \theta(t) + n(t)$  корисного сигналу  $\theta(t)$  і статистично незалежної від нього завади – шуму  $n(t)$ . Зважаючи на незалежність, маємо при нульових середніх значеннях

$$\mathcal{M}\{y(t)y(t')\} = R_{\theta\theta}(t, t') + R_{nn}(t, t'),$$

$$\mathcal{M}\{y(t)\theta(t')\} = R_{\theta\theta}(t, t'),$$

де  $R_{\theta\theta}(t, t')$ ,  $R_{nn}(t, t')$  — кореляційні функції  $\theta(t)$  і  $n(t)$ , відповідно.

Рівняння регресії (3.43) при  $\theta = \theta(t_0)$  набуває вигляду

$$\int_a^b [R_{\theta\theta}(t, t') + R_{nn}(t, t')] h_0(t_0, t) dt' = R_{\theta\theta}(t, t_0), \quad (3.50)$$

у окремому випадку може бути  $b = t_0$ .

Важливо відзначити, що у низці випадків оптимальне перетворення  $\theta^* = \theta^*(y)$ , що знаходиться із більш загального співвідношення (3.5), виявляється лінійним, отже теорія лінійної фільтрації приводить до оптимального перетворення. Це має місце, коли спільний розподіл процесів  $\theta(t)$ ,  $y(t)$  гауссовий, а функція вартості є квадратичною.

### 3.6 Нелінійна оптимальна фільтрація при гауссовій апроксимації

У загальному випадку оптимальне байєсове перетворення, що описується формулою (3.5), є нелінійним. Якщо у цьому разі обмежитись лише класом лінійних перетворень, то це призведе до втрати оптимальності.

Окрім того, у низці випадків заздалегідь використовувати лише лінійні перетворення буває недоцільним або практично неприпустимим. Нелінійне оптимальне перетворення при спостереженні змінних у часі випадкових процесів за умови дії шумів має відшуковуватись методами оптимальної нелінійної фільтрації. Існує декілька підходів до проблеми нелінійної оптимальної фільтрації. Можна, наприклад, заздалегідь обмежитися деяким класом нелінійних перетворень і відшуковувати найкращі з них у заданому наперед класі [6]. При цьому отримують рівняння, які важко розв'язуються математично і залишається незрозумілим, наскільки оптимальне перетворення у даному класі близьке до оптимального перетворення, яке знаходиться без зазначених обмежень.

При інших підходах не вводяться обмеження на клас перетворень, але використовуються марковські властивості спостережуваних процесів, або накладається умова високої апостеріорної точності, що дозволяє застосувати гаусову апроксимацію багатовимірною апостеріорною розподілу і на певному етапі лінійні методи. При цьому підсумкове оптимальне перетворення, як видно буде з нижченаведеного, являє собою послідовність, що складається з нелінійного та лінійного перетворень. Дана теорія, яку називали квазілінійною, є, на відміну від марковської теорії, наближеною та асимптотичною, і у неявній формі використовує методи малого або великого параметра. У ролі великого параметра виступає відповідним чином підібране відношення сигнал/шум.

У варіанті дискретного часу вхідний (спостережуваний)  $\mathbf{y}(t)$  та вихідний (результат фільтрації)  $\boldsymbol{\theta}(t)$  процеси являють собою вектори. Нехай потрібно знайти оптимальну оцінку  $\boldsymbol{\theta}^*(y_1, \dots, y_n)$  останнього значення  $\theta_n$  процесу фільтрації. При високій апостеріорній точності (малій похибці вимірювань) конкретний вибір критерію оптимальності стає несуттєвим, і можна обмежитись критерієм середньоквадратичної похибки, який приводить до оптимального оператора у вигляді пошуку апостеріорного середнього. У цьому випадку його можна записати

$$\theta_n(y_1, \dots, y_n) = \frac{\int_n \theta_n \mathbf{w}_n(\theta_1, \dots, \theta_n) \mathbf{w}_n(y_1, \dots, y_n / \theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1, \dots, d\theta_n}{\int_n \mathbf{w}_n(\theta_1, \dots, \theta_n) \mathbf{w}_n(y_1, \dots, y_n / \theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1, \dots, d\theta_n}. \quad (3.51)$$

На величину інтегралів, що входять до (3.51) впливає, в основному, та область  $n$ -вимірному простору значень  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , де підінтегральна функція

$$\mathbf{w}_n(\theta_1, \dots, \theta_n) \mathbf{w}_n(y_1, \dots, y_n / \theta_1, \dots, \theta_n) \quad (3.52)$$

$(y_1, \dots, y_n)$  – фіксовані) набуває максимального значення. Виберемо деяку точку  $n$ -вимірному простору  $\mathbf{v}(v_1, \dots, v_n)$ , яка розташована поблизу точки максимуму функції (3.52). Спосіб вибору цієї точки буде пояснений надалі. Поблизу  $\mathbf{v}$  є можливість провести апроксимацію логарифма функції (3.52) квадратичною функцією (багатовимірною параболою):



$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\theta_1, \dots, \theta_n) \mathbf{W}_n(y_1, \dots, y_n / \theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1, \dots, d\theta_n &\approx \\ &\approx \mathbf{w}(v_1, \dots, v_n) \mathbf{W}_n(y_1, \dots, y_n / v_1, \dots, v_n) \times \\ &\times \exp\left\{ \sum_{y_1}^n (a_i^{(n)} + b_i^{(n)}) (\theta_i - v_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}^{(n)} + B_{ij}^{(n)}) (\theta_i - v_i) (\theta_j - v_j) \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

де

$$\begin{aligned} a_i^{(n)} &= \frac{\partial \ln \mathbf{W}_n(v_1, \dots, v_n)}{\partial \theta_i}, \quad b_i^{(n)} = \frac{\partial \ln \mathbf{W}_n(y_1, \dots, y_n / v_1, \dots, v_n)}{\partial \theta_i}, \\ A_{ij}^{(n)} &= -\frac{\partial^2 \ln \mathbf{W}_n(v_1, \dots, v_n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad B_{ij}^{(n)} = \frac{\partial^2 \ln \mathbf{W}_n(y_1, \dots, y_n / v_1, \dots, v_n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}. \end{aligned}$$

Якщо підставити (3.53) у (3.51) та виконати інтегрування, то отримаємо

$$\theta_n^* (y_1, \dots, y_n) = v_n + \sum_{j=1}^n C_{n_j}^{(n)} (a_j^{(n)} + b_j^{(n)}), \quad (3.54)$$

де  $C_{n_j}^{(n)}$  – елемент матриці, оберненої до  $\|A_{ij}^{(n)} + B_{ij}^{(n)}\|$ .

З практичної точки зору, зручно вибрати як координати  $n$ -вимірної точки  $\mathbf{v}$  значення оптимальних оцінок, знайдених на усіх кроках, що передували  $n$ -му, тобто:  $v_i = \theta_{i-1}^* (y_1, \dots, y_{i-1})$ ,  $v_1 = \theta_0^*$ ,  $i = 2, \dots, n$ , де  $\theta_0^*$  – початкове значення, що дорівнює, наприклад, апіорному середньому у початковий момент часу. Співвідношення

$$\theta_n^* = \theta_{n-1}^* + \sum_{j=1}^n C_{n_j}^{(n)} (a_j^{(n)} + b_j^{(n)}), \quad (3.55)$$

при  $a_j^{(n)}$ ,  $b_{ij}^{(n)}$ ,  $C_{n_j}^{(n)}$ , що визначаються похідними (3.53) у точці  $\mathbf{v} = \{\theta_0^*, \dots, \theta_{n-1}^*\}$  описує процедуру оптимальної нелінійної фільтрації.

Особливо прості результати отримуються із (3.55) у важливому окремому випадку, вивченому І. А. Большаковим та В. Г. Репіним [6]. У цьому разі апіорний розподіл передбачається гауссовим, так що

$$a_k^{(n)} = -\sum_{k=1}^n V_{ik}^{(n)} (\theta_{n-1}^* - m_k), \quad A_{kj}^{(n)} = V_{ij}^{(n)}, \quad (3.56)$$

де  $V_{ij}^{(n)}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) – елемент матриці, незалежний від  $\mathbf{v}$  і обернений до кореляційної матриці  $\|R(t_i t_j)\| = \|R_{ij}\|$  для інформаційного параметра  $\theta(t)$ ;  $m_i$  – апіорні середні значення  $\theta(t)$ . Передбачається, що супутні, неінформативні параметри та завади змінюються значно швидше, ніж вимірювана величина  $\theta(t)$ , так що

$$\mathbf{w}_n(y_1, \dots, y_n / v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{w}_i(y_i / \theta_i), \quad (3.57)$$

$$b_i^{(n)} = b_i, \quad B_{kj}^{(n)} = K_i \delta_{ij},$$

$$\text{де } b_i = \frac{\partial \ln \mathbf{w}_i(y_i / \theta_{i-1}^*)}{\partial \theta_i}, \quad K_i = - \frac{\partial^2 \ln \mathbf{w}_i(y_i / \theta_{i-1}^*)}{\partial \theta_i^2}. \quad (3.58)$$

Якщо підставити (3.56) – (3.57) в (3.55), то остаточно отримуємо

$$\theta_n^* = \sum_{j=1}^n C_{n_j}^{(n)} [b_j + K_j(\theta_{n-1}^* - m_j)] + m_n, \quad (3.59)$$

де  $C_{n_j}^{(n)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) задовольняє рівняння

$$C_{n_j}^{(n)} + \sum_{k=1}^n C_{n_k}^{(n)} K_k R_{kj} = R_{n_j}. \quad (3.60)$$

Знайдений вираз (3.59) описує алгоритм роботи замкненого оптимального фільтра-вимірювача з двома колами зворотного зв'язку (рис. 3.1).

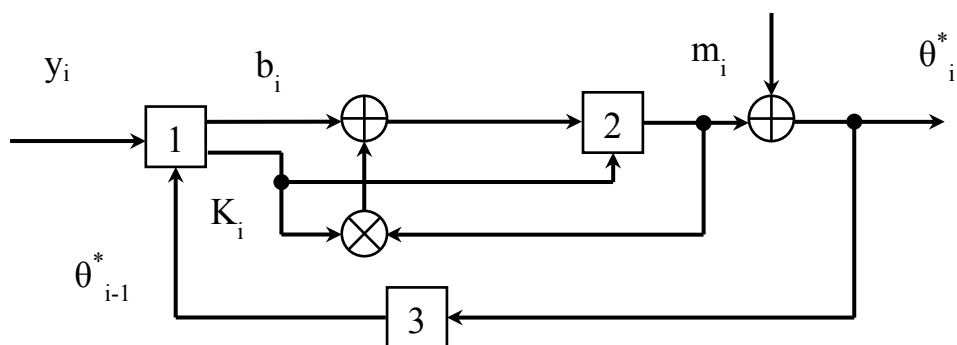


Рисунок 3.1– Структурна схема фільтра-вимірювача з двом колами зворотного зв'язку: 1– оптимальний нелінійний дискримінаатор; 2 – ланка згладжування; 3– лінія затримки

Окрім цього варіанта може бути побудований еквівалентний йому варіант з одним колом зворотного зв'язку. Щоб одержати відповідну формулу, потрібно записати рівняння, аналогічні (3.59) не тільки для цього кроку, а й для усіх попередніх кроків  $i = 1, \dots, n$  та розв'язати систему рівнянь відносно  $\theta_n^*$ . Це дає

$$\theta_i^* = \sum_{j=1}^n G_{ij} b_j + m_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.61)$$

де  $G_{ij}$  задовольняють рівняння

$$C^{(i)}_{ij} + \sum_{k=j}^n C^{(i)}_{ik} K_k G_{kj} = G_{ij}.$$

Схема фільтра-вимірювача, побудована згідно з (3.61), зображена на рис. 3.2.

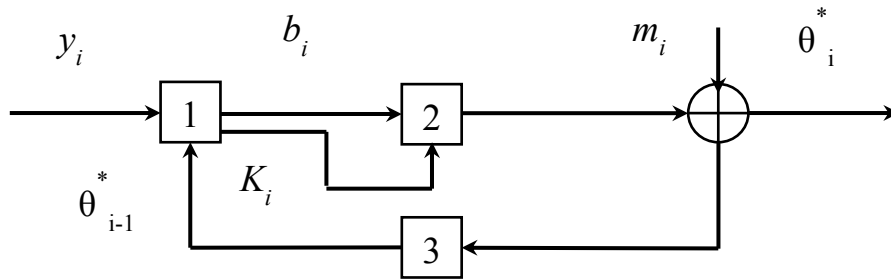


Рисунок 3.2– Структурна схема фільтра-вимірювача з одним колом зворотного зв'язку: 1– оптимальний нелінійний дискримінатор; 2 – ланка згладжування; 3– лінія затримки

Наведені схеми досить подібні до відомих у техніці і, зокрема, містять оптимальний дискримінатор, який виробляє величину  $b_i$ , що у середньому відповідає відхиленню значення  $\theta_{i-1}^*$  від дійсного значення  $\theta_i$ . Далі іде лінійне коло згладжування з реакцією  $G_{ij}$ , яке скеровується за допомогою функції  $K_i$ . Остання схема є показником точності  $i$ -го окремого виміру і створюється тим самим дискримінатором. Схема завершується суматором, у який вводиться апріорне середнє значення  $m_i$ . При невеликих варіаціях поточної точності можна замінити  $K_i$  на апріорне середнє значення цієї величини, тоді коло згладжування стає незалежними від вхідного процесу. У ланці 3 здійснюється затримка на період.

При переході до неперервного часу  $(t_i - t_{i-1}) = \Delta \rightarrow 0$  вводяться функції  $C(t, \tau), G(t, \tau), \theta^*(t), K(t), b(t)$ , такі, що

$$\left. \begin{aligned} C(t_i, t_j) = C_{ij}^{(i)}, \quad G(t_i, t_j) = G_{ij}, \quad \theta^*(t_n) = \theta_n^*, \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} K(t) dt = K_i, \quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(t) dt = b_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

У результаті маємо співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} \theta^*(t) = \int_a^t C(t, \tau) \{ b(\tau) + K(\tau) [\theta^*(\tau) - m(\tau)] \} d\tau + m(t), \\ C(t, \tau) + \int_a^t C(t, s) K(s) R(s, \tau) ds = R(t, \tau), \\ \theta^*(t) = \int_a^t G(t, \tau) b(\tau) d\tau + m(t), \\ C(t, \tau) + \int_\tau^t C(t, s) K(s) G(s, \tau) ds = G(t, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Апостеріорна похибка, яка характеризується дисперсією

$$\sigma^2 = \mathcal{M} \left\{ [\theta^*(t) - \theta(t)]^2 \right\},$$

для дискретного та неперервного часу визначається співвідношеннями

$$\sigma_{\text{вих}}^2(n) = \mathcal{M} \{ C_{nn}^{(n)}(y) \}, \quad \sigma_{\text{вих}}^2(t) = \mathcal{M} \{ C(t, t, y) \},$$

відповідно. Операція осереднення виконується по множині вхідних процесів. Важливо відзначити, що інерційна частина фільтра-вимірювача при гауссовому розподілі  $\theta$  є лінійною. Більше того, якщо позначити через  $h(t, \tau) = C(t, \tau)K(\tau)$ , то приходимо від (3.63) до рівняння фільтрації

$$\int_a^t h(t, s) \left[ \frac{\delta(s-\tau)}{K(s)} + R(s, \tau) \right] ds = R(t, \tau), \quad (3.64)$$

що збігається з (3.50), і характеризує виділення сигналу з функцією кореляції  $R(t, \tau)$  з нестационарного білого шуму, який має кореляційну функцію  $\delta(s - \tau)/K(s)$ . Проте, у вимірювачі є дискримінатор (3.58), як правило, нелінійний відносно  $y(t)$ , так що нелінійним виявляється і вимірювач. Потрібно зауважити, що вищезазначені оцінки  $\theta_i^*(y_1, \dots, y_i)$ , отримані на  $i$ -му кроці, надалі не уточнюються, хоча вони і впливають на вибір наступних оцінок. Точка  $\mathbf{v}$ , у якій проводиться розвинення (3.53), має перебувати поблизу максимуму виразу, що знаходиться у правій частині (3.53). Оскільки кожна координата  $\theta_i$  точки максимуму залежить від усіх  $y_1, \dots, y_n$ , тому більш обґрунтованим може бути інший вибір точки  $\mathbf{v}$ , ніж (3.54). Доцільно на кожному  $n$ -му кроці знаходити нові оцінки  $\theta_i^{*(n)}(y_1, \dots, y_n)$  усіх параметрів  $\{\theta_k\}$ , які залежать від усіх  $y_1, \dots, y_n$ . Саме тому як  $v_i$  беруть аналогічні оцінки попереднього кроку, вважаючи що

$$v_i = \theta_i^{*(n-1)}(y_1, \dots, y_{n-1}); \quad (3.65)$$

.....

$$v_n = \theta_{n-1}^{*(n-1)}(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

За аналогією з (3.54) – (3.55) будемо мати рекурентні перетворення

$$\theta_i^{*(n)}(y_1, \dots, y_n) = v_i + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(n)}(a_j^{(n)} + b_j^{(n)}), \quad (3.66)$$

у яких значення  $v_k$  визначаються співвідношеннями (3.65). Таким чином, отримана послідовність оцінок  $\theta_i^{*(n)}(y_1, \dots, y_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$  буде послідовністю більш точних оцінок. Ще точніші результати отримаємо, якщо підставимо  $v_i = \theta_i^{*(n)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  в (3.66) та проведемо лінеаризацію цих рівнянь щодо невідомих відхилень  $\theta_i^{*(n)} - \theta_i^{*(n-1)}$ , після чого отримані рівняння розв'язуються лінійними методами.

### 3.7 Нелінійна оптимальна фільтрація марковських процесів

Інші ефективні методи пошуку оптимальних нелінійних перетворень основані на застосуванні теорії умовних марковських процесів, яка була розроблена наприкінці 60-х років минулого століття Р. Л. Стратоновичем. Тут вважається, що процес спостереження  $y(t)$  разом з процесом, що підлягає фільтрації  $\theta(t)$ , є компонентами багатовимірного марковського процесу. Зупинимось на важливому окремому випадку, коли процес  $\theta(t)$ , сам по собі, є марковським процесом і має щільність розподілу ймовірності переходу  $p$ , яка допускає опис у неперервному часі рівнянням

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp(\theta), \quad (3.67)$$

де  $L$  – деякий диференціальний оператор. Метод оснований на розв'язку рівняння, яке задовольняють апостеріорні ймовірності

$$w_t(\theta)d\theta = P\{\theta(t) \in \theta, \theta + d\theta / y(\tau), \tau < t\}. \quad (3.68)$$

Вигляд цього рівняння задається теорією умовних марковських процесів. Зокрема, якщо час дискретний, а завада  $n(t)$  має у ці ж моменти незалежні відліки, то функція правдоподібності розпадається на добуток

$$P_n(y_1, \dots, y_n / \theta_1, \dots, \theta_n) = \prod_{i=1}^n P_i(y_i / \theta_i), \quad (3.69)$$

тобто зазначене рівняння має вигляд

$$w_{n+1}(\theta) = C_{n+1} P_{n+1}(y_{n+1} / \theta) \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\theta') p(\theta', \theta) d\theta', \quad (3.70)$$

де  $p$  – апіорна щільність розподілу ймовірності переходу за один крок;  $C_{n+1}$  – незалежна від  $\theta$  величина, обумовлена процесом нормування до одиниці  $\int_{-\infty}^{\infty} w_{n+1}(\theta) d\theta = 1$ . Таким чином, трансформація апостеріорного розподілу (3.70) за один крок визначається апіорними ймовірностями переходу та результатом спостереження  $y_{n+1}$  на поточний момент часу, який надає нову інформацію про значення  $\theta(t)$ . У тому випадку, коли час є неперервним, рівняння (3.70) замінюється на нелінійне диференціальне рівняння. Коли завада являє собою білий шум (або, у загальному випадку, змінюється значно швидше, ніж вимірювана величина), це рівняння має вигляд

$$\frac{\partial w_t(\theta)}{\partial t} = Lw_t(\theta) + [F(y, \theta, t) - \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \theta', t) w_t(\theta') d\theta'] w_t(\theta). \quad (3.71)$$

Тут  $L$  – лінійний диференціальний оператор, що входить до виразу (3.67), а  $F$  – функція, яка пов'язана з функцією правдоподібності на інтервалі  $(t_n, t_n + \Delta)$  співвідношенням

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta} F[y(s), \theta, s] ds = \ln P_{n+1}(y_{n+1}/\theta), \quad \Delta \rightarrow 0, \quad (3.72)$$

де  $\Delta$  береться більшим за інтервал кореляції завади.

Перший доданок  $Lw_t(\theta)$  в (3.71) впливає на апостеріорний розподіл, ведучи до його розширення за рахунок збільшення невизначеності через апіорі можливі переходи, другий, навпаки, сприяє його звуженню (зменшенню невизначеності) за рахунок надходження нової інформації. Рівняння нелінійної фільтрації (3.71) однаковою мірою справедливе як для одновимірного, так і багатовимірного марковського процесу. За винятком окремих випадків розв'язувати рівняння (3.70) або (3.71) аналітично не має потреби. Досить реалізувати радіотехнічну систему, що автоматично здійснює перетворення, які відповідають цим рівнянням. Вказана система являє собою найважливішу ланку оптимального нелінійного фільтра-вимірювача (рис. 3.1). Дійсно, оскільки співвідношення (3.5), (3.68) вважаються справедливими за будь-якого довільного критерію  $C(\theta, \theta^*)$ , то для знаходження оптимального значення оцінки  $\theta^*$  досить задовольнити вимогу

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\theta_t, \theta_t^*) w_t(\theta_t) d\theta_t = \min_{\theta_t^*}. \quad (3.73)$$

Ланка 2 (рис. 3.1), що відшукує мінімум (3.3), автоматично створює таку оцінку.

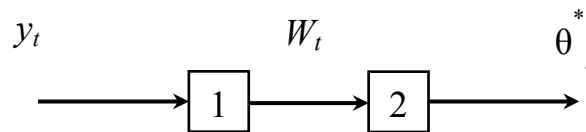


Рисунок 3.3 – Схема створення оптимальної оцінки

Коли  $\theta(t)$  є марковським процесом зі скінченним числом станів  $m$ , тоді ймовірності (3.68) утворюють скінченне число  $(m-1)$  функцій часу (сигналів) і рівняння (3.70) або (3.71) можуть моделюватися безпосередньо. Якщо марковський процес  $\theta(t)$  має нескінченне число станів, як, наприклад, дифузійний процес, що описується рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова, то виникає потреба попереднього квантування простору станів процесу  $\theta(t)$  або перехід від щільності розподілу  $w_t(\theta)$  до деяких параметрів  $\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , що замінюють цю щільність. Наприклад, можна шукати  $w_t(\theta)$  у вигляді

$$w_t(\theta) = \text{const} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \varphi_j(\theta) \right\}, \quad (3.74)$$

де  $\varphi_j$  – задана система функцій,  $i = 1, \dots, n$

Підставляючи (3.74) у (3.70) або (3.71), можна отримувати точні або наближені рівняння для  $\alpha_j(\alpha)$ . У варіанті неперервного часу вони будуть мати вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_j(t) = \Phi_j(\alpha), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.75)$$

де  $\Phi_j(\alpha)$  – відомі функції. Система цих рівнянь буде точною, якщо має місце точне розвинення у ряд за обраною системою функцій типу

$$\exp \{-\sum_j \alpha_j \varphi_j(\theta)\} L \exp \{\sum_j \alpha_j \varphi_j(\theta)\} + F\{y, \theta\} = \sum_j \Phi_j \varphi_j(\theta) + const \quad (3.76)$$

де  $\Phi_j$  – деякі коефіцієнти. У цьому разі рівняння (3.75) отримують шляхом підстановки (3.74) у рівняння (3.71), поділене на  $w_t$  та наступним прирівнюванням коефіцієнтів при різних функціях  $\varphi_j$ .

У низці випадків, коли апріорні переходи відсутні ( $L=0$ ), для переходу до скінченного числа точних рівнянь (3.75) досить виконати розвинення у ряд (3.76) тільки функції  $F(y, \theta)$  за скінченною системою функцій  $\varphi_j(\theta)$ . Якщо розвинення у ряд (3.76) здійснити не вдається, то шляхом вибору достатнього числа функцій  $\varphi_j(\theta)$ , можна добитися як завгодно малої похибки при переході від точного рівняння (3.71) до наближених (3.75). У тому разі, коли оператор  $L$  відповідає дифузійному процесу, де  $B$  не залежить від  $\theta$ ,  $A$  – лінійна функція  $\theta$ , а функція  $P$  є поліномом від  $\theta$  ступеня не вище другого, то у формулі (3.74) потрібно вибрати функції  $\varphi_1 = \theta$ ,  $\varphi_2 = \theta^2$ , що відповідає гауссовому закону розподілу ймовірностей. При цьому отримуються точні рівняння, відповідно до теорії оптимальної лінійної фільтрації.

За умови малої апостеріорної похибки, що описується дисперсією  $\sigma_t^2$ , у марковській теорії можна застосовувати асимптотичні методи гауссової апроксимації. При цьому апостеріорний розподіл приблизно вважається нормальним:

$$w_t(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp \left\{ -\frac{(\theta - m_t)^2}{2\sigma_t^2} \right\} \quad (3.77)$$

Вочевидь, це окремий випадок апроксимації (3.74) при  $n = 2$ ;  $\varphi_1(\theta) = \theta$ ,  $\varphi_2(\theta) = \theta^2$ . Якщо підставити (3.77) у (3.70) або (3.71) і застосувати процедуру, аналогічну тій, яка була застосована до багатовимірних розподілів, можна отримати рекурентні співвідношення, що показують як змінюється значення  $m_t$  апостеріорного середнього (його можна взяти за поточну оцінку  $\theta^*(\theta)$ ) та дисперсію  $\sigma_t^2$  вихідної похибки (результату фільтрації) із часом. У випадку одновимірного дифузійного марковського процесу  $\theta(t)$  і неперервного часу відповідні рівняння мають вигляд

$$\frac{dm_t}{dt} = A(m_t, t) + \sigma_t^2 b(t), \quad (3.78)$$

$$\frac{d\sigma_t^2}{dt} = B(m_t, t) - K(t)\sigma_t^4 + 2 \frac{\partial A(m_t, t)}{\partial m_t} \sigma_t^2, \quad (3.79)$$

$$b(t) = \frac{\partial F(y, \theta, t)}{\partial \theta}; \quad K(t) = -\frac{\partial^2 F(y, \theta, t)}{\partial \theta^2}.$$

Ці функції збігаються з тими, які входять до формул (3.63), (3.64) попереднього підрозділу. Функції ж  $A$ ,  $B$  є коефіцієнтами рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial w_t(\theta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta} [A(\theta, t)w_t(\theta)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [B(\theta, t)w_t(\theta)], \quad (3.80)$$

яке є у цьому випадку конкретизацією рівняння (3.67). У окремому випадку, коли функція  $[A(\theta, t)]$  є лінійною відносно  $\theta$ , а  $B(\theta, t)$  не залежить від  $\theta$  (при цьому марковський процес одночасно є гауссовим), рівняння (3.78), (3.79) описують метод пошуку оптимальної оцінки, яка точно збігається з методом, розглянутим у підрозділі 3.5. У загальному випадку ланки згладжування оптимального вимірювача є нелінійними, що ілюструється схемою (рис. 3.4), яка відповідає рівнянням (3.78), (3.79).

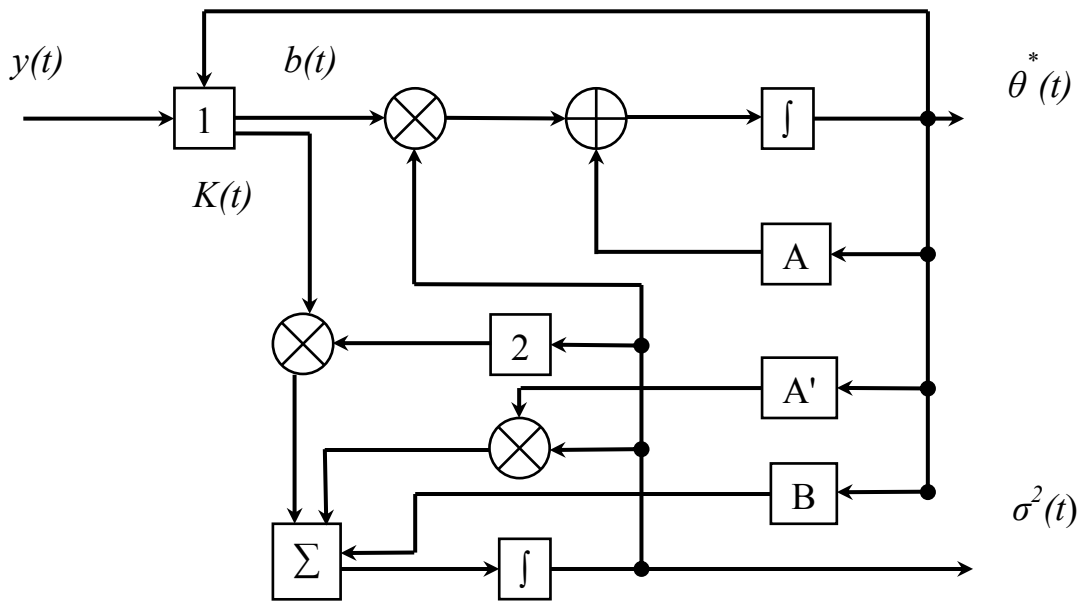
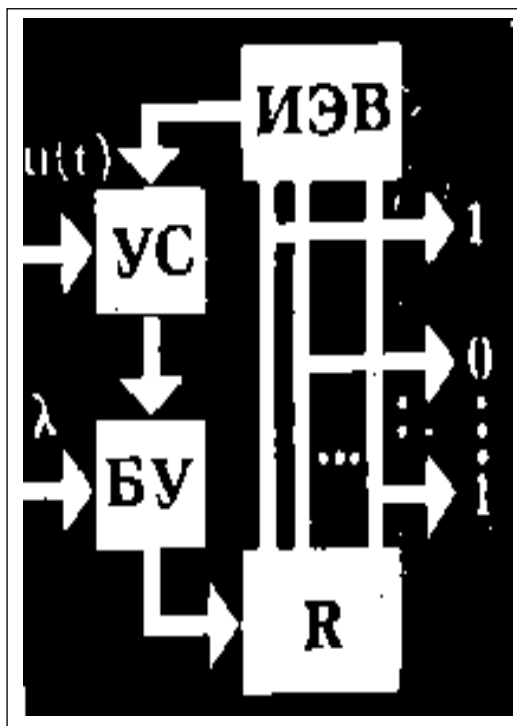


Рисунок 3.4 – Схема нелінійної фільтрації марковського процесу: 1 – оптимальний дискримінатор; 2 – блок піднесення до квадрата;  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  – нелінійні безінерційні блоки з характеристиками  $A(m_t, t)$ ,  $A'(m_t, t)$ ,  $B(m_t, t)$ .





## СУЧАСНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

- Базові поняття сучасної системотехніки
- Ймовірнісні моделі вимірюваних параметрів
- Оптимальне оцінювання параметрів
- Нелінійна оптимальна фільтрація

## 4 БАЗОВІ ПОНЯТТЯ СУЧАСНОЇ СИСТЕМОТЕХНІКИ

Існуючі нині методи аналізу та синтезу радіотехнічних систем умовно можуть бути розбиті на три основні групи.

*До першої групи* відносять операторні методи, що базуються на перетвореннях Фур'є, Лапласа або z-перетвореннях, на основі яких синтез систем виконується широко відомим методом проб та помилок.

*До другої групи* відносять методи, у яких для оцінення якості системи використовується інтегральна квадратична або середньоквадратична похибка. Ці дві групи методів лежать у основі класичної теорії радіотехнічних систем, основи якої уже було викладено у попередніх підрозділах цього навчального посібника.

Поява швидкодійних цифрових обчислювальних машин та пристроїв привела до майже революційних змін у методах аналізу та синтезу радіотехнічних систем [15]; з'ясувалась непридатність старих методів та і самого підходу до синтезу, тим самим був заданий потужний поштовх до розробки нового погляду на проблему синтезу та методів її розв'язування. Унаслідок цього для побудови оптимальної структури синтезованої системи потрібно було виконувати трудомісткі обчислення за певними алгоритмами або програмами з великою кількістю обмежень. Практична реалізація таких обчислень обов'язково передбачала всебічне застосування цифрових обчислювальних засобів. Ця *(третья) група* методів для характеристики систем використовує базові поняття сучасної системотехніки, зокрема поняття системи у сучасному тлумаченні, поняття стану, простору станів системи та змінної стану. Основна ідея цієї групи методів полягає у тому, що вибирається або створюється функціонал від функції змінних стану та вхідних дій, накладаються, з фізичних міркувань, обмеження на ці функції і за допомогою одного з методів варіаційного числення (динамічного програмування, принципу максимуму Понтрягіна або множників Лагранжа) визначається оптимальна стратегія, яка максимізує або мінімізує введений функціонал. Останніми роками цей підхід отримав загальне визнання і став основним методом синтезу сучасних радіотехнічних систем [19].

### 4.1 Основні засади загальної теорії систем та системного підходу

**Поняття системного підходу.** Системно-теоретичний підхід завжди являв собою невід'ємну частину методів, які використовувались у інженерній практиці. Це було пов'язано, головним чином, з тим, що на відміну від інших наукових дисциплін, суть роботи інженера полягає не в тому щоб відкривати нові функціональні зв'язки фізичної природи, а в тому щоб розробляти системи, які складаються з сукупності багатьох компонентів та заставити працювати їх як єдине ціле. Системно-теоретичний підхід

пов'язаний з макроскопічним описом природних явищ і використовує, як правило, тільки ті характеристики, які необхідні для побудови фізично коректної та роботоздатної системи. Прикладом системно-теоретичного мислення може слугувати діяльність інженера-електрика, який застосовує закони Ома, а не закони електродинаміки для розрахунків електричних кіл із зосередженими параметрами.

Науково-технічна революція 1960–1970 років та поява цифрових обчислювальних машин застали інженера в такому стані творчої діяльності, коли потреба у розвитку та формалізації системно-теоретичного підходу стала нагальною. Ті системи, які у подальшому були названі «великими системами» охоплювали усі аспекти інженерної науки і потребували розвитку певної абстрактної теорії, яку можна було б застосовувати до кожної інженерної дисципліни, не вдаючись у суть фізичних процесів. Математика дала формальний апарат для цієї нової наукової дисципліни, яка була названа загальною теорією систем або системотехнікою.

Для того щоб зрозуміти потенційні можливості загальної теорії систем та визначити сферу можливих застосувань доцільно дати означення базових понять, які використовує фахівець у галузі системотехніки. На відміну від інших випадків, такий підхід вкрай необхідний, оскільки ці означення мають бути функціональними і призначаються для вирішення нагальних проблем. Такі поняття досліджувались багатьма вченими, зокрема, основоположником загальної теорії систем Л. Берталанфі. Біля витоків теорії систем також були американські вчені Р. Калман, М. Месарович та вітчизняні – А. М. Колмогоров, В. М. Глушков, М. М. Мойсєєв. Загальна теорія систем сформувалася як науковий напрям на початку другої половини ХХ ст. Вагомий внесок у її становлення зробили К. Боулінг, Р. Жерар, А. Хол, В. Афанасьєв, І. Блауберг, П. Анохін, В. Садовський. Створене в 1954 р. у США «Товариство досліджень в області загальної теорії систем» започаткувало видання щорічника «General Systems». У 1959 р. був створений центр системних досліджень при Цейсівському технологічному інституті, а в 1963 р. – Інститут системних досліджень.

**Система як наукова категорія.** Один з найкращих способів пояснення основних ідей загальної теорії систем полягає в описі її базових та фундаментальних концепцій, наприклад «система», «стан системи», «змінна стану». Поняття «система» запроваджене Аристотелем (у перекладі з грецької означає ціле, складене з частин, об'єднання), який відзначив, що сума частин характеризується тим, що становище цих частин в системі не утворює відмінностей. Але там, де виникають такі відмінності, має місце ціле. Заради справедливості потрібно зауважити, що поняття «система» використовувалось і до Аристотеля. Спектр значень слова «система» у грецькій мові досить широкий: поєднання, організм, будова, організація, спілка, устрій, керівний орган. Багатозначність поняття «система» дозволяє визначити цим словом широке коло різноякісних явищ, які, проте, мають дещо спільне. Увібравши у себе сутність таких важливих понять, як

«порядок», «організація», «цілісність», вона (система) не зводиться повністю ні до одного з них і, за висловами багатьох вчених, поняття «система» стало певною мірою аксіоматичним. Таке поняття системи, як і будь-яке інше наукове поняття, є результатом логічного абстрагування і виступає як ідеальний об'єкт, який формується у свідомості (уяві) дослідника. У визначенні категорії «система» досить часто спостерігається намагання надати йому чіткість та конкретність, прив'язавши до певної галузі досліджень. Наприклад, французький філософ Кондільяк говорив про систему як про певний порядок розташування різних частин мистецтва або науки. Відомий філософ І. Кант стверджував, що система – це єдність різноманітних знань, які об'єднані однією ідеєю. Гегель підкреслив, що реальність має системний характер. Застосування системного світогляду сприяло видатним науковим відкриттям (Ч. Дарвін, Д. Менделєєв, В. Вернадський). Нині системний стиль мислення став панівним. Аналіз означення системи містять багато наукових праць з найрізноманітніших галузей – від філософії до ядерної фізики, від мистецтвознавства до технології виробництва, проте для початку доцільно підкреслити необхідність чіткого розмежування гносеологічного та онтологічного підходів до означення системи. Гносеологічний (пізнавальний) підхід є відображенням у свідомості людини (суб'єктивним образом) реального матеріального утворення (системи) з метою його пізнання. Онтологічний підхід відображає реально існуючий взаємозв'язок об'єктів матеріального світу. Існує величезна кількість термінологічних означень категорії «система». Наведемо найпоширеніші з них:

- система – цілісна взаємозалежна безліч об'єктів;
- система – цілісна безліч об'єктів (елементів), пов'язаних між собою взаємними відносинами;
- система – порядок (план, класифікація), згідно з яким розташовується група понять для утворення єдиного цілого;
- система – сукупність взаємозалежних, певним чином організованих і взаємодіючих елементів;
- система – організована безліч структурних елементів, що взаємопов'язані і виконують певні функції;
- система – сукупність взаємозалежних елементів, відособлена від середовища і взаємодіюча з ним як ціле.

Однак ці означення не є функціональними, оскільки не містять достатньої і конкретної математичної форми, необхідної для створення математичної моделі. Більш точно з математичної точки зору означення терміна «система» дано у роботі Л. А. Заде [19].

**Означення 1.** Система характеризується набором впорядкованих пар функцій часу, які являють собою її входи та виходи і визначають таким чином об'єкти абстрактного типу. Ці пари мають задовольняти таку умову: якщо будь-яка пара з цих пар належить системі, то системі на-

лежить також пара, отримана шляхом звуження початкової пари на меншу область визначення.

Таке означення характеризує будь-який абстрактний об'єкт, а також будь-яку систему їх співвідношенням «вхід–вихід» і не залежить від конкретних фізичних властивостей, притаманних відповідному процесу. Таким способом стає можливим досліджувати різноманітні системи у цілому виключно з точки зору співвідношень причинності між входом та виходом, що дозволяє однотипно розглядати велику кількість різних проблем. Для того щоб описати структуру системи у математичних термінах, необхідно ввести ще два додаткових означення.

**Означення 2.** *Поточний стан системи – це та мінімальна інформація про її минуле, яка необхідна для повного опису поведінки системи у майбутньому (тобто виходів систем) якщо поведінка її входів відома, починаючи з поточного моменту часу.*

**Означення 3.** *Змінна стану – це та залежна від часу математична змінна, яка повністю визначає стан системи у будь-який момент часу.*

Опираючись на ці аксіоми, систему можна описувати за допомогою інтегро-диференціальних рівнянь, які задають поведінку її станів або виходів у майбутні моменти часу, якщо задані або відомі поточний стан системи, минулі, поточні і майбутні входи системи. Такі системи називають *детермінованими*, а їх графічну та математичну модель позначають як на рис. 4.1.

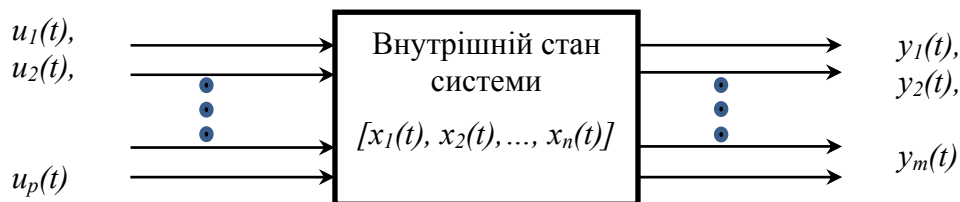


Рисунок 4.1– Опис системи в термінах змінних стану

Вхідні канали на цьому рисунку являють собою сукупність вхідних змінних або вхідних діянь  $u_i(t)$ , вихідні канали – сукупність вихідних змінних або реакцій системи  $y_i(t)$ , що дозволяють описати деякі аспекти поведінки системи, саме вони цікавлять спостерігача (дослідника) системи. Проміжні змінні або координати стану системи  $x_i(t)$  відносяться до вмісту «чорного ящика» і таким чином вони сховані та недоступні для безпосереднього спостереження. Для зручності оперування з багатовимірними величинами сукупність вхідних змінних подамо у вигляді вектора входу розмірності  $p$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}; \quad (4.1)$$

сукупність вихідних змінних – у вигляді вектора виходу розмірності  $m$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}; \quad (4.2)$$

сукупність змінних стану – у вигляді вектора стану розмірності  $n$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Відповідно до поняття векторного простору, множина усіх значень, які може прийняти вектор входу  $\mathbf{u}(t)$  у момент часу  $t$ , утворює *простір вхідних сигналів системи*. Аналогічно, множина усіх значень, яких може набути вектор виходу  $\mathbf{y}(t)$  у момент часу  $t$ , утворює *простір вихідних сигналів системи*, і множина усіх значень, яких може набути вектор стану системи  $\mathbf{x}(t)$  у момент часу  $t$ , утворюють *простір можливих станів системи*.

У будь-який момент часу  $t$  стан системи являє собою функцію від початкового стану системи  $\mathbf{x}(t_0)$  та вектора вхідного сигналу  $\mathbf{u}(t_0, t)$ , тобто

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)], \quad (4.4)$$

де  $\mathbf{F}$  – однозначна вектор-функція своїх аргументів.

Вектор виходу у будь-який момент часу  $t$  також являє собою деяку іншу вектор-функцію від функції входу  $\mathbf{u}(t_0, t)$  та вектора початкового стану системи  $\mathbf{x}(t_0)$  і може бути записаний у формі

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)]. \quad (4.5)$$

Рівняння (4.4–4.5) часто називають рівняннями стану системи. У тому разі, коли система може бути описана звичайними диференціальними рівняннями, (4.4–4.5) записують у загальній неявній формі

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t)], \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t)]. \quad (4.7)$$

Для систем, які являють собою кінцеві автомати, рівняння стану набувають вигляду

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(n-1); \mathbf{u}(n-1)], \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(n); \mathbf{u}(n)]. \quad (4.9)$$

Якщо система може бути описана лінійними диференціальними рівняннями, то рівняння поточного стану системи зводяться до виразу

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \quad (4.11)$$

де  $A(t)$  – матриця коефіцієнтів системи;  $B(t)$  – матриця комбінацій вхідних сигналів системи;  $C(t)$  – матриця виходів системи;  $D(t)$  – матриця обходу системи. Графічна модель системи, яка відповідає системі рівнянь (4.10–4.11), зображена на рис. 4.2. Виведення рівнянь стану системи, які повністю її характеризують, є початковим етапом аналізу та синтезу сучасних інформаційно-вимірювальних систем.

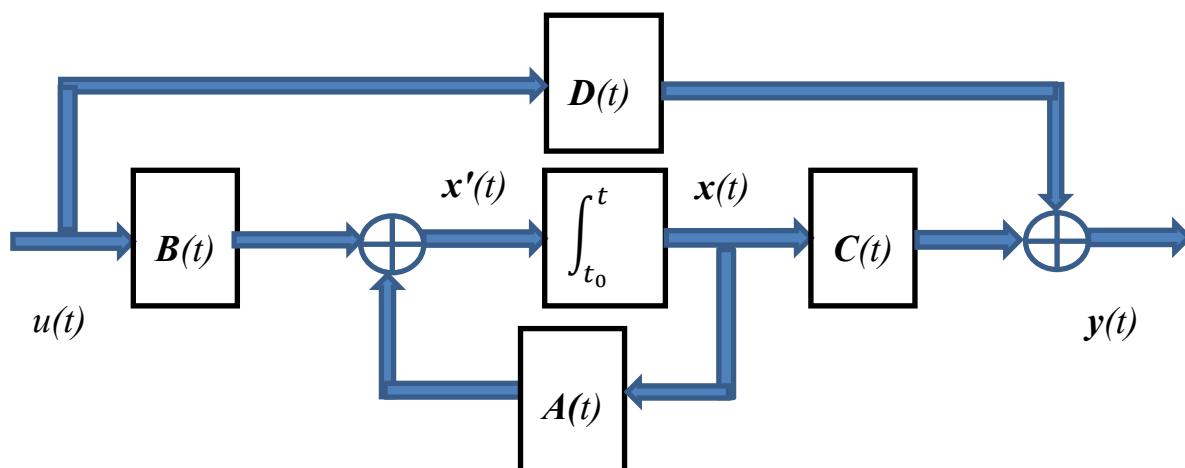


Рисунок 4. 2 – Подання математичної моделі системи в термінах змінних стану

У тому разі, коли можливі стани системи являють собою множину значень, заданих лише ймовірнісним розподілом, а входи є випадковими, то поведінку такої системи у майбутньому прийнято описувати лише з певною ймовірністю, її називають *стохастичною*.

Якщо опис системи містить невідомі параметри, а вхідні сигнали є стохастичними і якщо система з плином часу зменшує ступінь своєї невизначеності, то таку систему називають *навчальною*.

У тому разі, коли система проявляє такі інтелектуальні здібності як можливість прийняття складних рішень, планування тощо, то її називають системою з *елементами штучного інтелекту*.

Серед технічних систем різноманітного цільового призначення особливе місце займають *системи автоматичного керування*, які завжди являли собою невід'ємну частину загальної теорії систем. Приклади використання таких систем можна виявити навіть на ранніх етапах людської цивілізації. Сучасний етап розвитку систем автоматичного керування датується серединою ХХ століття і продовжується нині завдяки піонерським роботам таких видатних вчених і інженерів як Вінер, Боде, Нікольс, Найквіст, Калман, Ляпунов, Понтрягін, Попов, Фельдбаум та інші. Їх роботи склали єдину основу науки про керування, яка була втілена у найбільш визначних галузях сучасної техніки – від висадки людини на Місяць, вивчення космічного простору до керування біомедичними та біотехнічними пристроями з метою надання допомоги хворим та інвалідам. Задачі автоматичного керу-

вання розв'язувались у різний час за допомогою найрізноманітніших математичних методів, які при цьому отримували різні назви, залежно від певних міркувань їх авторів. Для того щоб звести ці методи до єдиної точки зору, Підкомітет стандартів Наукового співтовариства із систем керування Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) вважає за доцільним дати такі означення.

**Означення 4.** *Керування процесом являє собою таке втручання у перебіг процесу, яке забезпечує ефективне досягнення наміченої мети.*

Слова «ефективне досягнення» і «мета» тут використовуються у широкому розумінні і можуть означати, що виконуються деякі спеціальні умови, або можуть відповідати умовам оптимальності критерію якості у випадку оптимального керування. Перша спроба вирішити задачу керування відповідно до вищенаведеного означення полягала у використанні наперед розрахованої керівної дії, яка дозволяла досягнути поставленої мети. Такий спосіб керування назвали *розімкненим або програмним керуванням*. Наступний крок, який став революційним у галузі керування, був зроблений у процесі конструювання електронних підсилювачів. При цьому *фактичний* вихід системи порівнювався з *бажаним (заданим)* виходом, а їхня різниця використовувалась для керування системою. Такий метод керування отримав назву керування зі зворотним зв'язком і характеризується можливістю корегування керівної дії у темпі реального часу, що дозволило досягати наміченої мети без зовнішнього контролю за перебігом усього процесу. Такий підхід знаменував початок ери автоматизації і став визначальним для усіх сучасних технічних досягнень.

У подальшому введення поняття *критерію якості* (у вигляді функціонала), який містив у собі усі вимоги до системи, дозволило поставити і розв'язати задачу *оптимального керування*. Саме цей підхід отримав широке визнання завдяки своїй математичній елегантності та можливості застосування електронних обчислювальних машин для реалізації отриманих алгоритмів керування. Проте розвиток техніки, обумовлений розв'язком задач оптимального керування, поставив на порядок денний дослідження систем з більш складною структурою. Цей клас систем охарактеризувався необхідністю урахування у процесі керування непередбачуваного характеру вхідних дій та можливістю випадкових змін параметрів системи з наперед відомими статистичними характеристиками. Це привело до постановки задачі *стохастичного керування* (див. нижченаведене означення), оптимальний розв'язок якої є одним з найпотужніших сучасних методів дослідження динамічних систем.

**Означення 5.** *Задача стохастичного керування характеризується тим, що ступінь невизначеності, притаманний досліджуваному процесу, не може бути зменшений під час перебігу процесу за рахунок статистичної обробки результатів вимірювань вихідних сигналів.*

На сьогоднішній день уже утворився достатньо великий клас систем, якість роботи яких погіршується через зміну зовнішніх умов за межами



діапазону, де можлива їх компенсація за допомогою регулятора в колі зворотного зв'язку. Інші системи подібного типу неадекватно працюють через занадто ідеалізоване або неточне моделювання їхньої поведінки. У обох випадках труднощі, що з'явилися, можна пов'язати з наявністю невизначеності у описі системи або з недостатнім знанням сигналів, що діють на систему, статистичний опис яких наперед невідомий. Багато з таких систем можуть автоматично компенсувати відхилення своїх характеристик від номінальних за рахунок регулювання структури або параметрів, аналогічно тому, як конструктор рекомендує видозміну системи при отриманні додаткової інформації про її характеристики або поведінку. Цей новітній клас систем отримав назву *систем з самоорганізацією*. Проте методи їх досліджень виходять за межі цього навчального посібника.

## 4.2 Методи загальної теорії систем

Більшість актуальних задач, які становлять практичний інтерес, пов'язано з системами, число станів яких велике. Труднощі такого типу зустрічаються в енергетичних системах, традиційних системах зв'язку та телекомунікацій, а також в соціально-економічних, екологічних системах, системах керування міським господарством, охорони здоров'я, які уже не відносяться до сфери технічних наук. Методи системотехніки, мабуть, зможуть допомогти у розв'язку вищезгаданих проблем, якщо врахувати успіхи застосування системного підходу у великих та складних програмах, наприклад, авіакосмічних. При системно-теоретичному підході для кожної системи підбирають підходящу математичну модель (див. означення 1), яка не залежить від фізичної суті системи. Аналіз математичної моделі системи дозволяє передбачати її поведінку. На основі цих передбачених властивостей стає можливим вибір відповідної керівної дії та випробування її на моделі. Потім, знайдені на математичній моделі закони керування доцільно переносити на реальний об'єкт. Формально варіант цієї процедури може бути поданий такою схемою.

1. Моделювання процесу.
2. Математичний аналіз.
3. Математичний синтез.
4. Випробування керівних дій.
5. Проектування реальної системи.

При цьому потрібно зауважити, що тільки перший та останній пункти наведеної програми залежать від конкретних фізичних властивостей досліджуваного процесу. Останні три пункти можуть бути реалізовані за допомогою математичних методів та електронно-обчислювальної машини, що надає велику гнучкість запропонованому методу. Розглянемо більш детально опис усіх пунктів схеми.

**Моделювання** являє собою процес побудови математичної моделі досліджуваної фізичної системи. На етапі моделювання необхідна тісна

співпраця між експертом у цій конкретній галузі та фахівцем з теорії систем. Особливої уваги при моделюванні потребують системи, які містять невизначеності. У цьому випадку виконуються два етапи моделювання:

1. Структурна ідентифікація, яка містить у собі інтерпретацію відповідних фізичних законів.

2. Ідентифікація параметрів, суть якої полягає у визначенні значень функціональних параметрів системи.

**Математичний аналіз** являє собою процес вивчення зв'язку минулої, поточної та майбутньої поведінки системи із заданою структурою незалежно від її фізичної природи. Наприклад, для детермінованих систем можна обмежуватись аналізом відгуків на тестові входні сигнали. У випадку стохастичних систем доцільно скористатись методом оцінення станів. Для систем з високим рівнем невизначеності можна рекомендувати методи з самонавчанням. Оскільки процеси, що становлять практичний інтерес, як правило, характеризуються великою кількістю змінних станів, то для дослідження таких систем на сьогодні розроблено різноманітні аналітичні методи, наприклад: ієрархічні методи; методи декомпозиції; методи мереж та мережевих графіків; теоретичні методи навчання.

**Математичний синтез** пов'язаний з вибором таких законів керування системою, які зможуть забезпечити досягнення бажаних робочих характеристик системи, що і є у багатьох випадках основною метою інженерного дослідження. Попередньо проаналізовану математичну модель примушують працювати бажаним чином за допомогою зовнішнього регулятора, який можна вмикати у систему розімкненого керування або у коло зворотного зв'язку. Нижче наводяться найпоширеніші методи визначення керівної дії для динамічних систем: оптимізаційні методи математичного програмування; методи дослідження операцій; дослідження стійкості; методи стохастичного та дуального керування; методи керування з елементами самоорганізації, самонавчання та штучного інтелекту.

**Випробовування** керівних дій являє собою надзвичайно важливий етап системно-теоретичного підходу. Тут зазвичай перевіряють придатність розглянутих раніше процедур аналізу та синтезу. Потужні обчислювальні машини та комплекси суттєво спрощують етап апробації результатів синтезу. Найбільш поширені методи апробації передбачають: випробовування у зменшеному масштабі; моделювання на аналоговій або цифровій обчислювальній машині; проведення напівнатурного експерименту.

**Проектування реальної системи** пов'язано з використанням отриманої на математичній моделі інформації у початковій реальній задачі, що потребує, як зазначалося вище, обов'язкової співпраці між експертом у цій галузі та фахівцем з теорії систем. Цей етап системно-теоретичного підходу є завершальним.

## 5 ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ

### 5.1 Вступ

Одним з найбільш важливих розділів дисципліни «Радіотехнічні системи» є розділ, присвячений вимірюванню параметрів руху об'єктів. Як правило, об'єкти, що розглядаються, являють собою нелінійні динамічні системи, а похибки вимірювань та прикладені до об'єкта збурювання вважаються випадковими процесами. Тому задача оптимального проектування радіотехнічної системи за заданим критерієм якості є, фактично, задачею стохастичної теорії оптимального керування, яка ґрунтується на математичному апараті теорії статистичних рішень. Незважаючи на важливі результати, отримані за допомогою цієї теорії, практична реалізація одержаних алгоритмів керування нелійними системами наштовхується на суттєві труднощі, навіть при застосуванні сучасних мікро-ЕОМ [15]. Якщо ж об'єкт є лінійним і використовується квадратичний критерій якості, то можна отримати ефективні алгоритми розв'язання багатьох задач керування рухомими об'єктами. При цьому можна обмежуватись врахуванням лише кореляційних зв'язків між спостережуваними і керованими координатами, таку теорію часто називають кореляційною теорією оптимального керування та оцінювання.

Істотна перевага кореляційної теорії керування та оцінювання полягає у тому, що з її допомогою відносно просто вдається синтезувати та реалізувати безпосередньо алгоритм роботи керуючого пристрою. При квадратичному критерії якості та лінійному об'єкті керування задача кореляційної теорії оптимального керування на підставі теореми розділення розбивається на дві взаємозалежні задачі:

- побудови найкращих лінійних оцінок випадкових координат об'єкта – задачу оптимальної лінійної фільтрації;
- синтезу оптимального регулятора, який керує цими оцінками.

Такий поділ відповідає поділу апаратури системи радіокерування на вимірювальне обладнання, що визначає координати об'єкта, і систему автоматичного керування рухом об'єкта. Причому, ці задачі можна розв'язувати незалежно одну від одної, незважаючи на те, що вони пов'язані спільною метою [6,19].

Матеріал цього навчального посібника відноситься, головним чином, до першої названої задачі, і присвячений сучасним методам синтезу оптимальних вимірювальних підсистем у радіотехнічних системах. Відповідно до цього напрямку досліджень у наступних розділах викладені методи опису ймовірнісних моделей вимірювальних параметрів, методи розв'язку задач лінійної, нелінійної фільтрації векторних випадкових сигналів та процесів.

## 5.2 Математичні моделі випадкових сигналів та процесів

Значна кількість випадкових процесів, що підлягають подальшій обробці, може бути подана як результат розв'язків певних стохастичних диференціальних або різницевих рівнянь. Перевагою такого підходу є те, що він придатний для опису як стаціонарних, так і нестаціонарних, як лінійних, так і нелінійних випадкових процесів, сформованих нелінійними (у загальному випадку) радіотехнічними системами.

Диференціальні рівняння використовуються у тому випадку, коли процес описується у неперервному часі, різницеві – у дискретному часі. Можна розглядати дві еквівалентні форми запису диференціальних рівнянь: у вигляді диференціального рівняння  $n$ -го порядку або у вигляді  $n$ -вимірної системи диференціальних рівнянь першого порядку. Другий варіант запису системи стохастичних лінійних диференціальних рівнянь у векторній формі має вигляд

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\boldsymbol{\xi}(t), \quad (5.1)$$

де  $\mathbf{x}(t)$  – векторна функція (вектор стану), що описує випадковий процес,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix};$$

$[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  – складові процесу;  $\mathbf{A}$  – матриця розміром  $n \times n$ ,  $\boldsymbol{\xi}(t)$  – вектор білого шуму:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \dots \\ \xi_r(t) \end{bmatrix};$$

$[\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)]^T$  – некорельовані між собою «білі» шуми з одиничними спектральними густинами;  $\mathbf{G}(t)$  – матриця розміром  $n \times r$ . Рівняння (5.1) доповнюється вектором початкового значення  $\mathbf{x}(0)$ .

Векторне рівняння (5.1) легко складається за структурною схемою об'єкта або виглядом звичайного диференціального рівняння. Розглянемо приклади складання стохастичних диференціальних рівнянь.

### Приклад 5.1

Якщо на вхід  $RC$ -ланки надходить «білий» шум  $\boldsymbol{\xi}(t)$ , то для вихідної напруги  $u(t)$  можна скласти диференціальне рівняння

$$\mathbf{u}'(t) = \frac{1}{RC} \mathbf{u}(t) + \frac{1}{RC} \boldsymbol{\xi}(t).$$

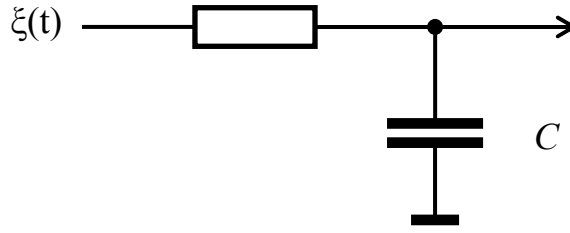


Рисунок 5.1– Структура  $RC$ -ланки

Обчислимо автокореляційну функцію такого процесу. Розв'язок лінійного диференціального рівняння подається загальновідомим виразом

$$u(t) = u(0)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \xi(t_1) dt_1,$$

При тривалому часі роботи можна вважати, що  $t \rightarrow \infty$  і

$$u(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \xi(t_1) dt_1.$$

Автокореляційна функція знаходиться шляхом усереднення за ансамблем реалізацій

$$\mathcal{M}[u(t)u(t')] = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \mathcal{M} \left\{ \int_0^t e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \xi(t_1) dt_1 \int_0^{t'} e^{-\frac{t'-t_2}{RC}} \xi(t_2) dt_2 \right\}$$

Вважаючи припустимою операцію заміни місцями знаків усереднення та інтегрування, одержуємо

$$\mathcal{M}[u(t)u(t')] = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\frac{t-t_1}{RC}} e^{-\frac{t'-t_2}{RC}} \mathcal{M}\{\xi(t_1) \xi(t_2)\} dt_1 dt_2.$$

Для білого шуму

$$\mathcal{M}\{\xi(t_1) \xi(t_2)\} = N\delta(t_1 - t_2).$$

Наявність дельта-функції у підінтегральному виразі дозволяє виконати інтегрування за однією змінною (наприклад  $t_2$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[u(t)u(t')] &= \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \int_0^{\min(t,t')} e^{-\frac{t+t'-2t_1}{RC}} N dt_1 = \frac{N}{RC^2} e^{-\frac{t+t'}{RC}} \int_0^{\min(t,t')} e^{\frac{2t_1}{RC}} dt_1 = \\ &= \frac{N}{2RC} e^{-\frac{t+t'}{RC}} \left( e^{\frac{2\min(t,t')}{RC}} - 1 \right) = \frac{N}{2RC} \left( e^{\left|-\frac{t-t'}{RC}\right|} - e^{-\frac{t+t'}{RC}} \right) \rightarrow_{t,t' \rightarrow \infty} \frac{N}{2RC} e^{-\frac{|t-t'|}{RC}}. \end{aligned}$$

Таким чином, дисперсія процесу  $u(t)$  в усталеному режимі дорівнює  $N/2RC$ , а автокореляційна функція має вигляд експоненти. Такий процес прийнято називати експоненційно корельованим.

### Приклад 5.2

Розглянемо диференціальне рівняння, що описує рух центра мас твердого тіла під дією випадкової сили  $f(t)$  типу «білий» шум. Прискорення маси твердого тіла  $a(t)$  визначається виразом

$$a = \frac{1}{m} f(t),$$

де  $m$  – маса. Враховуючи, що прискорення є першою похідною від швидкості  $v(t)$  та другою похідною від пройденого шляху  $s(t)$ , можна скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} s'(t) = v(t); \\ v'(t) = f(t)/m. \end{cases} \quad (5.2)$$

Систему рівнянь (5.2) можна записати у векторній формі:

$$\begin{bmatrix} s'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f(t). \quad (5.3)$$

Якщо ввести вектор стану  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$  і позначити матриці

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$ , тоді рівняння (5.3) можна записати у вигляді

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)f(t)$$

Відзначимо, що величини  $s(t)$ ,  $v(t)$  є інтегралами «білого» шуму і мають дисперсію, що наростає у часі. Таким чином, випадковий векторний процес у цьому прикладі є нестационарним процесом, який складно досліджувати спектральними методами.

### Приклад 5.3

Часто, у практичних задачах, прискорення об'єкта являє собою повільну флуктуаційну величину, яку важко і недоцільно описувати білим шумом. У подібних задачах прискорення можна зображати у вигляді експоненційно корельованого процесу зі сталою часу  $\tau$ . Модель з таким типом прискорення широко використовується для опису руху об'єктів, що маневрують, наприклад літаків.

Система диференціальних рівнянь, у цьому випадку, містить три рівняння: для дальності  $d(t)$ , швидкості  $v(t)$  та прискорення  $a(t)$

$$\begin{cases} d'(t) = v(t); \\ v'(t) = a(t); \\ a'(t) = (-1/\tau)a(t) + (1/\tau)\xi(t) \end{cases}$$

або у векторному записі

$$\begin{bmatrix} d'(t) \\ v'(t) \\ a'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\tau \end{bmatrix} \xi(t). \quad (5.4)$$

Вираз (5.4) можна звести до вигляду (5.1), якщо ввести такі позначення

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\tau \end{bmatrix}.$$

Рівняння (5.4) описує закон формування векторного випадкового процесу  $x(t)$ . Однак на практиці доступними для безпосереднього спостереження та вимірювання буває лише частина складових вектора  $x(t)$ . Тому необхідно описати процес вимірювань за допомогою рівняння спостережень. Для цього введемо  $m$ -вимірний вектор спостережень  $y(t)$ , причому  $m$  дорівнює числу наявних вимірювальних пристроїв. Тоді  $y(t)$  дорівнює

$$y(t) = H(t)x(t) + n(t), \quad (5.5)$$

де  $H$  – матриця спостережень розміром  $m \times n$ ,  $n(t)$  – вектор «білого» шуму спостережень, що описує похибки вимірювальних пристроїв.

Пояснимо складання рівняння спостережень на прикладі з літаком, що маневрує, вектор стану якого містить дальність, швидкість та прискорення і задається рівнянням (5.4). Вважаємо, що віддаль вимірюється радіодалькоміром, а швидкість – доплерівським вимірювачем.

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) + n_1(t) \\ v(t) + n_2(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix} = H(t)x(t) + n(t), \end{aligned}$$

де  $y_1(t), y_2(t)$  – результати вимірювань віддалі і швидкості, відповідно;  $n_1(t), n_2(t)$  – похибки вимірювань віддалі і швидкості, відповідно. Матриця  $H(t)$  може залежати від часу. Використання змінної матриці  $H(t)$ , дозволяє досліджувати вплив випадкових зникнень корисного сигналу на точність вимірювань координат об'єкта у системі радіокерування. Наприклад, якщо у розглянутому вище випадку, через 100 секунд раптово припиняється вимір віддалі, то

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{при } t \leq 100 \text{ с,}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{при } t > 100 \text{ с.}$$

Розглянемо формулювання задачі фільтрації векторного випадкового процесу. Задані рівняння (5.1) і (5.5), які описують формування векторного випадкового процесу  $x(t)$  і вектора вимірювань  $y(t)$

$$x'(t) = A(t)x(t) + G(t)\xi(t); \quad (5.6)$$

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t), \quad (5.7)$$

де  $A(t), G(t), H(t)$  – матриці, що цілком певним чином залежать від часу;  $\xi(t), v(t)$  – «білі» векторні шуми, що не залежать один від одного і мають нульові середні значення та наступні кореляційні матриці:

$$\mathcal{M}\{\xi(t_1) \xi(t_2)^T\} = I\delta(t_1 - t_2);$$

$$\mathcal{M}\{v(t_1) v(t_2)^T\} = R(t)\delta(t_1 - t_2);$$

де  $I$  – одинична матриця.

Передбачається, що  $x(t_0)$  для початкового моменту часу є заданою величиною. Проте, вона може бути й випадковою. В такому разі передбачається, що вона має нормальний розподіл з середнім значенням  $x_0 = x$  і кореляційною матрицею

$$P_0 = P.$$

Формування випадкових векторів  $x(t)$  і  $y(t)$  пояснюється на рис. 5.2. Схемні зв'язки відмічені напівжирними лініями тому, що по них передаються векторні величини.

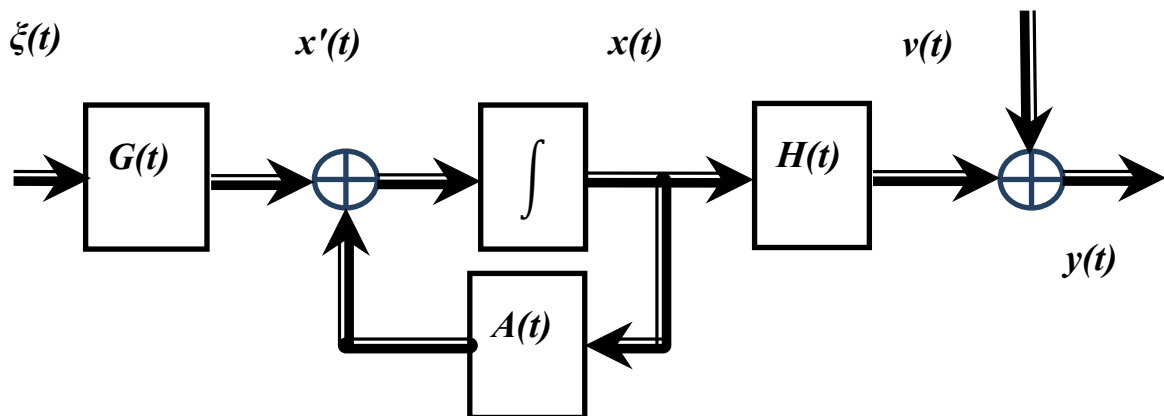


Рисунок 5.2 – Схема формування випадкових векторів  $x(t)$  і  $y(t)$

Задача оптимальної фільтрації полягає у тому, щоб на основі результатів спостережень  $y(t)$  побудувати оцінку  $x^*(t)$  з мінімальною середньоквадратичною похибкою.

Подання величин  $x$  і  $y$  неперервному часу  $t$  доцільно у тому випадку, якщо обробка сигналів виконується за допомогою аналогових пристроїв. При обробці інформації за допомогою цифрової ЕОМ введення інформації проводиться з певним тактовим інтервалом  $\Delta t$ , і безперервна величина  $y(t)$  замінюється послідовністю відліків  $y(1), y(2), \dots, y(k)$ .



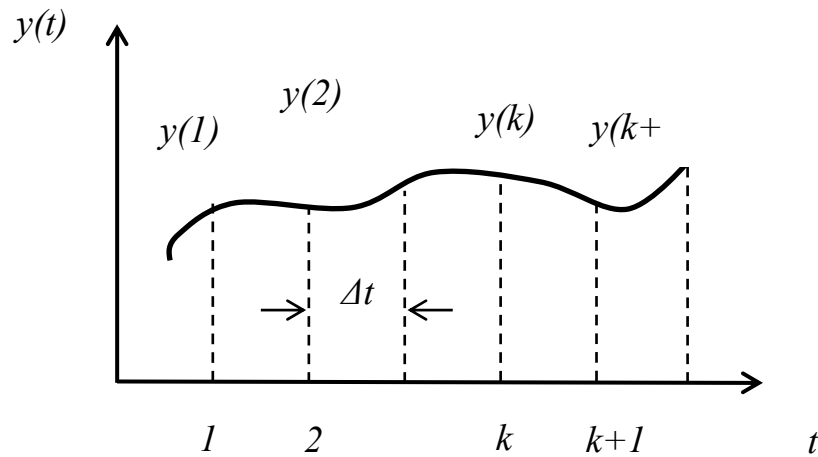


Рисунок 5.3 – Схема формування дискретних відліків

Рівняння руху реальних об'єктів звичайно задаються у вигляді системи диференціальних рівнянь, які визначають  $x(t)$  і  $y(t)$  у неперервному часі. Тому необхідний перехід від диференціального рівняння у неперервному часі до різницевого рівняння у дискретному часі. Цей перехід необхідний ще й тому, що різницеві рівняння розв'язуються чисельними методами набагато простіше, ніж диференціальні. Складемо систему різницевих рівняння у такий спосіб. Задамо початкове значення  $x(t_0)$  і розв'яжемо диференціальне рівняння (5.1) для  $t = t_1$ , одержимо  $x(1)$ , потім візьмемо за початкове значення величину  $x(1)$  і за допомогою цього ж диференціального рівняння знайдемо  $x(2)$  і т. д.

Розв'язок лінійного диференціального рівняння (5.1) знаходиться як лінійна комбінація розв'язків однорідного та неоднорідного диференціальних рівнянь. Однорідне рівняння у цьому випадку має вигляд

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad \text{при} \quad x(t_0) = x(0). \quad (5.8)$$

Розв'язок однорідного рівняння шукаємо у вигляді  $x(t) = Ce^{-A(t) \cdot t}$ , де  $C$  – довільна постійна величина,  $C = x(0)$ . Функцію  $e^{-A(t) \cdot t}$  прийнято називати матричною експонентою, і вона може бути обчислена шляхом розвинення експоненти у степеневий ряд. Якщо  $A(t)$  не залежить від часу і  $A(t) = A$  о можна знайти розв'язок однорідного рівняння за допомогою перетворення Лапласа. Перетворивши рівняння (5.8) за Лапласом, одержимо

$$px(p) - x(0) = Ax(p),$$

а потім знайдемо  $x = [pI - A]^{-1}x(0)$ . Якщо виконати обернене перетворення Лапласа, то отримаємо

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(0),$$

де  $\Phi(t, t_0) = e^{-A(t-t_0)}$  – перехідна матриця станів, її отримують шляхом оберненого перетворення Лапласа величини  $[pI - A]^{-1}$ .

Розв'язання неоднорідного рівняння (5.1) виконується так само, як і розв'язання одновимірною неоднорідного лінійного диференціального рівняння, але замість експоненти використовується перехідна матриця  $\Phi(t, t_0)$ :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(0) + w(0), \quad (5.9)$$

де 
$$w(0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) \xi(\tau) d\tau.$$

Величина  $w(0)$  є випадковою. Проаналізуємо її властивості. Слід підкреслити, що  $w(0)$  має нормальний розподіл, оскільки вона отримана шляхом лінійного перетворення (інтегрування) випадкового процесу з нормальним розподілом  $\xi$ . Обчислимо моменти величини  $w(0)$ . Оскільки  $\mathcal{M}\{\xi(t)\} = 0$ , то і  $\mathcal{M}\{w(0)\} = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{w(0) w(0)^T\} &= \mathcal{M}\left\{ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) \xi(\tau) d\tau \int_{t_0}^t \xi^T(\tau_1) G^T(\tau_1) \Phi^T(\tau_1, t) d\tau_1 \right\} \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) \mathcal{M}\{\xi(\tau) \xi^T(\tau_1)\} G^T(\tau_1) \Phi^T(\tau_1, t) d\tau d\tau_1. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Використовуючи властивість «білого» шуму  $\mathcal{M}\{\xi(\tau) \xi^T(\tau_1)\} = I\delta(\tau - \tau_1)$ , виконаємо у цьому виразі інтегрування за змінною  $\tau$ :

$$\mathcal{M}\{w(0) w^T(0)\} = Q(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) G^T(\tau) \Phi^T(\tau, t) d\tau.$$

Для визначення величини  $Q(t_0, t)$  необхідно задатися матрицями  $\Phi(t, \tau)$  і  $G(\tau)$ . Скориставшись рівнянням (5.9), можна скласти ланцюжок рівнянь, що пов'язують значення  $x(0), x(1), \dots, x(k)$ .

$$\begin{aligned} x(1) &= \Phi(t_0, t_1) x(0) + w(0); \\ x(2) &= \Phi(t_1, t_2) x(1) + w(1); \\ &\dots\dots\dots \\ x(k+1) &= \Phi(t_k, t_{k+1}) x(k) + w(k), \end{aligned} \quad (5.11)$$

де  $x(k) = x(t_k)$ ;  $w(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(\tau, t_{k+1}) G(\tau) d\tau.$

Можна показати, що величини  $w(k)$  і  $w(i)$  некорельовані при  $k \neq i$ , оскільки вони формуються з різних вибірок білого шуму  $\xi(t)$ . Випадкову величину  $w(k)$  називають «дискретним білим шумом». Зауважимо, що у ра-

зі, коли матриці  $\mathbf{A}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}$  і  $\mathbf{G}(\mathbf{t}) = \mathbf{G}$  не змінюються у часі, то матриці  $\Phi(t_0, t)$ ,  $\mathbf{Q}(t_0, t)$  залежать тільки від різниці  $(t-t_0)$ . Тому  $\Phi(t_k, t_{k+1}) = \Phi$ ,  $\mathbf{Q}(t_k, t_{k+1}) = \mathbf{Q}$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$  і рівняння (5.11) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \Phi \mathbf{x}(0) + \mathbf{w}(0); \\ \mathbf{x}(2) &= \Phi \mathbf{x}(1) + \mathbf{w}(1); \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \end{aligned} \quad (5.12)$$

де  $\mathcal{M}\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(i)\} = \mathbf{Q}\delta_{ki}$ . Звичайно обмежуються записом останнього рівняння з ланцюжка (5.12) і завдання  $\mathbf{x}(0)$ .

Процес вимірювань у дискретному часі описується рівнянням

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (5.13)$$

де  $\mathbf{H}(k)$  – матриця спостережень для  $k$ -го моменту часу;  $\mathbf{v}(k)$  – дискретний білий шум спостережень з нульовим середнім значенням та кореляційною матрицею  $\mathcal{M}\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(i)\} = \mathbf{R}(k)\delta(k-i)$ . Процес формування випадкового процесу і спостережень у дискретному часі пояснюється структурною схемою, наведеною на рис. 5.4.

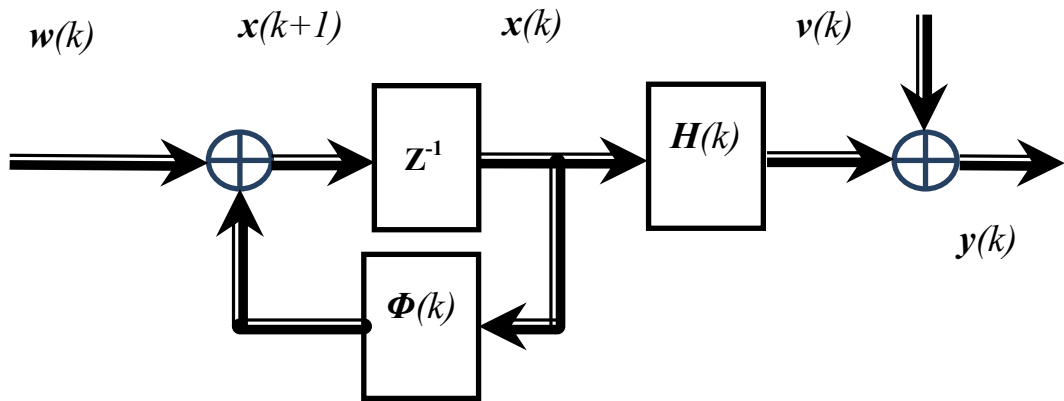


Рисунок 5.4 – Схема формування процесу спостережень у дискретному часі

На рисунку через  $Z^{-1}$  позначено елемент затримки, який запам'ятовує значення  $\mathbf{x}(k+1)$  на один тактовий інтервал  $\Delta t$ .

**Зауваження.** Випадковий процес називається простим марковським процесом або процесом без післядії, якщо для умовної багатовимірної щільності розподілу імовірності виконується співвідношення  $\mathbf{W}[\mathbf{x}(k)/\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(k-1)] = \mathbf{W}[\mathbf{x}(k)/\mathbf{x}(k-1)]$ . Випадкові процеси, що задаються диференціальними рівняннями типу (5.1) і різницеvim рівнянням (5.12), є марковськими випадковими процесами.

ми, оскільки значення процесу у будь-який момент часу визначається лише значенням процесу у попередньому моменті часу. Якщо шуми та початковий стан мають нормальний розподіл, то щільність розподілу ймовірності вектора стану  $\mathbf{x}(k)$  являє собою багатовимірний нормальний розподіл.

#### Приклад 5.4.

Задана система рівнянь, що описує рух твердого тіла з випадковим прискоренням

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\xi(t),$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{N} \end{bmatrix},$$

де  $N$  – спектральна щільність прискорення. Визначимо матрицю  $\Phi$  для цієї системи. Складемо матрицю  $[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ .

$$[p\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Обчислимо  $[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ .

$$[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = 1/p^2 \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p & 1/p^2 \\ 0 & 1/p \end{bmatrix}.$$

Виконуючи обернене перетворення Лапласа для інтервалу квантування часу  $\Delta t$ , одержимо

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначимо матрицю  $\mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(\tau, t_{k+1}) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(\tau, t_{k+1}) d\tau = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & t_{k+1} - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{k+1} - \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} t_{k+1} - \tau & t_{k+1} - \tau \\ t_{k+1} - \tau & 1 \end{bmatrix} N d\tau = N \begin{bmatrix} \Delta t^3 & \Delta t^2 \\ \Delta t^2 & \Delta t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Позначимо  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ , тоді диференціальне рівняння набуде вигляду

$$\begin{bmatrix} d(t) \\ v(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{N}\xi(t) \end{bmatrix}.$$

Схема, яка відповідає цьому диференціальному рівнянню, показана на рис. 5.5, а.

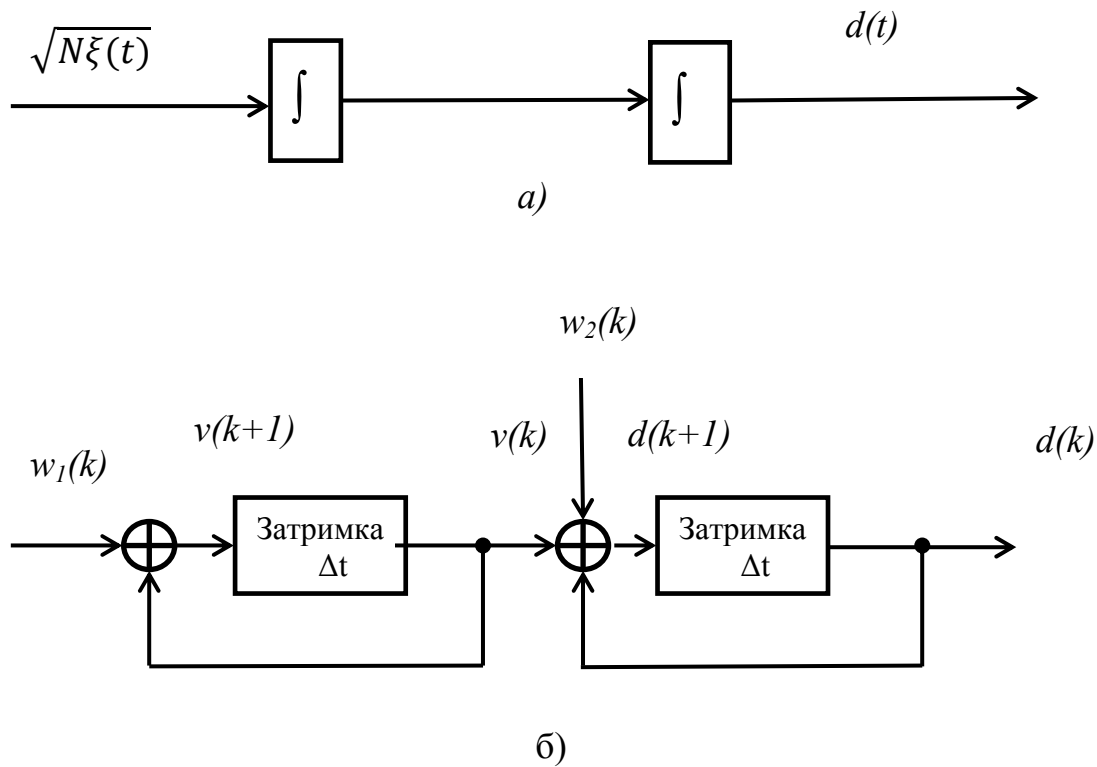


Рисунок 5.5 – Схема формування процесу з випадковим прискоренням

Тепер розглянемо систему різницевих рівнянь

$$\mathbf{x}(k + 1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k).$$

Враховуючи, що  $\mathbf{x}(k + 1) = \begin{bmatrix} d(k + 1) \\ v(k + 1) \end{bmatrix}$ , одержимо

$$\begin{bmatrix} d(k + 1) \\ v(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(k) + \Delta t v(k) + w_1(k) \\ v(k) + w_2(k) \end{bmatrix}.$$

Системі різницевих рівнянь відповідає схема, яка зображена на рис. 5.5, б.

## 6 ОПТИМАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ

Розглянемо розв'язок задачі фільтрації багатовимірного випадкового процесу, який описується у неперервному часі рівнянням (5.6). Процес вимірювання частини складових вектора  $x(t)$  описується рівнянням (5.7). Задача фільтрації полягає в отриманні найкращої оцінки вектора  $x^*(t)$  за результатами спостережень  $y(t)$ . За квадратичного критерію якості імпульсна реакція оптимального фільтра визначається відомим інтегральним рівнянням Вінера–Хопфа. Використовуючи це рівняння для векторного випадкового процесу, можна одержати диференціальне рівняння для найкращої оцінки:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = A(t)x^*(t) + K(t)[y(t) - H(t)x^*(t)]. \quad (6.1)$$

Реалізація алгоритму (6.1) може бути виконана у вигляді системи стеження.

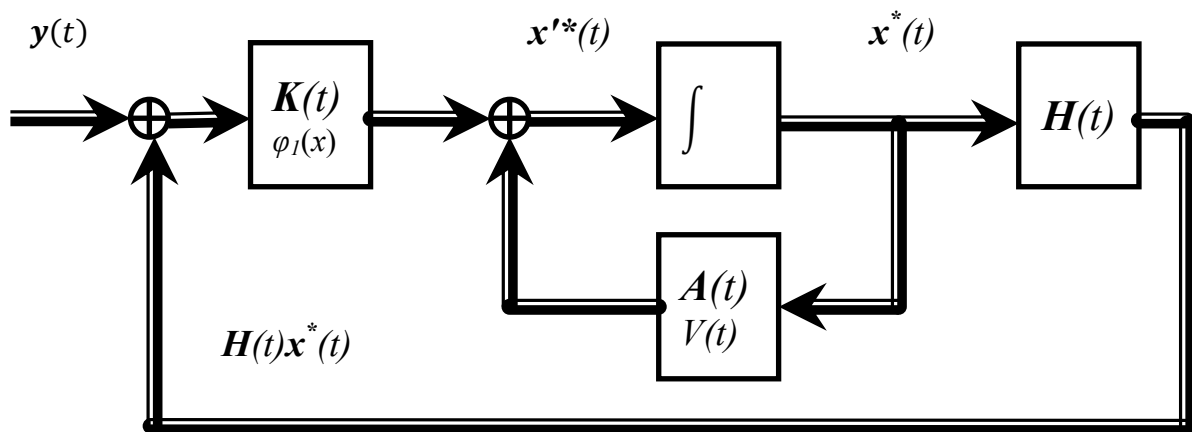


Рисунок 6.1 – Реалізація лінійного фільтра у неперервному часі

В оптимальній фільтрі виконується порівняння частини складових оцінки  $H(t)x^*(t)$  з вихідним сигналом  $y(t)$  і утворюється вектор сигналу похибки  $[y(t) - Hx^*(t)]$ . Ця величина потім подається до інтеграторів, які зберігають величину оцінки  $x^*(t)$ . Вага поправки визначається матричним коефіцієнтом підсилення  $K(t)$ . Величина матричного коефіцієнта підсилення  $K(t)$  залежить від дисперсії похибок оптимальної фільтрації і визначається таким виразом:

$$K(t) = P(t) H^T(t) R^{-1}(t) \quad (6.2)$$

де  $P(t) = E\{[x(t) - x^*(t)][x(t) - x^*(t)]^T\}$  є кореляційною матрицею похибок фільтрації, яка визначається матричним диференціальним рівнянням Ріккати:

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) - \\ -\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{G}^T(t) \quad (6.3)$$

з початковою умовою  $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}(0)$ . Диференціальне матричне рівняння (6.3) еквівалентне системі з  $n^2$  скалярних диференціальних рівнянь. Оскільки матриця  $\mathbf{P}(t)$  – симетрична, то у системі залишається лише  $(n^2+n)/2$  різних рівнянь. При  $n > 2$  розв'язок рівняння (6.3), як правило, виконується чисельними методами з використанням ЕОМ. У виразах (6.2) – (6.3) результати вимірювань  $y(t)$  не використовуються, тому розрахунок оптимального коефіцієнта передачі може бути виконаний заздалегідь за апріорними даними. Алгоритм, що визначається виразами (6.1), (6.2) і (6.3), прийнято називати алгоритмом фільтра Калмана. Алгоритм фільтрації у вигляді диференціального рівняння (6.3) цікавий з теоретичної точки зору, тому що його апаратна реалізація надзвичайно складна. На практиці алгоритм фільтра Калмана реалізують за допомогою цифрової ЕОМ. Однак є певна незручність через те, що числове розв'язування проводиться у дискретному часі. Тому при обробці сигналів в ЕОМ бажано сформулювати задачу фільтрації для дискретного часу.

Розглянемо задачу оптимальної лінійної фільтрації для дискретного часу. Передбачається, що випадковий процес є марковським і задається векторним різницеvim рівнянням

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (6.4)$$

де  $\mathbf{\Phi}(k)$  – перехідна матриця, у загальному випадку залежна від  $k$ ,  $\mathbf{w}(k)$  – дискретний «білий» шум з нульовим середнім значенням і заданою кореляційною матрицею  $\mathbf{Q}(k) = \mathbf{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)]$ ,  $\mathbf{x}(0)$  – наперед відома величина або відомі її статистичні характеристики  $\mathbf{E}[\mathbf{x}(0)]$  і  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}\{[\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)][\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)]^T\}$ .

Вимірюванню підлягає лише частина складових вектора стану  $\mathbf{x}(k)$  відповідно до рівняння

$$y(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + v(k), \quad (6.5)$$

де  $\mathbf{H}(k)$  – матриця спостережень;  $v(k)$  – дискретний «білий» шум з нульовим середнім значенням та заданою кореляційною матрицею  $\mathbf{R}(k) = \mathbf{E}[v(k)v^T(k)]$ . У теорії фільтрації випадкових процесів показано, що коли початкове значення  $\mathbf{x}(0)$  є детермінованою або випадковою величиною з нормальним розподілом, а шуми  $\mathbf{w}(k)$  і  $v(k)$  – гауссові, то найкраща оцінка вектора  $\mathbf{x}^*(k)$  у сенсі мінімуму середнього квадрата похибки є лінійною. Однак на практиці лінійну фільтрацію часто і успішно застосовують при розподілі початкового стану та завад, що відрізняються від нормального. В останньому випадку фільтр залишається оптимальним лише в класі лінійних фільтрів, а оптимальний фільтр у загальному випадку вияв-

ляється нелінійним. Для синтезу такого нелінійного фільтра потрібні дані про розподіли, які не завжди доступні проектувальникові. За відсутності цих апіорних відомостей лінійний фільтр з мінімальною середньоквадратичною похибкою залишається єдиним можливим розв'язком.

Побудуємо рекурентну лінійну оцінку з мінімальною дисперсією. Припустимо, що відомі оцінка  $\mathbf{x}^*(k)$  на  $k$ -му кроці та її кореляційна матриця похибок

$$\mathbf{P}(k) = E\{[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)][\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)]^T\},$$

і потрібно побудувати оптимальну оцінку на  $(k+1)$ -му кроці  $\mathbf{x}^*(k+1)$ . Доцільно розбити формування  $(k+1)$ -ї оцінки на два етапи – етап екстраполяції на  $(k+1)$ -й крок оцінки  $\mathbf{x}^*(k)$  і етап фільтрації, на якому екстрапольована оцінка корегується прийнятим сигналом  $\mathbf{y}(k+1)$ . Екстраполяція оцінки проводиться шляхом заміни значень  $\mathbf{x}(k)$  і  $\mathbf{w}(k)$  у виразі (6.4) їх оцінками  $\mathbf{x}^*(k)$ ,  $\mathbf{w}^*(k)$ . Екстрапольована оцінка  $\mathbf{x}^*(k+1/k)$  дорівнює

$$\mathbf{x}^*(k+1/k) = \Phi(k)\mathbf{x}^*(k/k) + \mathbf{w}^*(k).$$

Оскільки  $\mathbf{w}(k)$  являє собою дискретний «білий» шум, то його значення не можна передбачати на основі попередніх спостережень, а тому отримана оцінка дорівнює її математичному сподіванню. Враховуючи, що  $E[\mathbf{w}(k)] = 0$ , одержимо

$$\mathbf{x}^*(k+1/k) = \Phi(k)\mathbf{x}^*(k/k). \quad (6.6)$$

Користуючись виразами (6.4) і (6.6), визначимо значення похибки екстраполяції  $\mathbf{e}(k+1)$

$$\mathbf{e}(k+1) = [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)] = \Phi(k)\mathbf{e}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (6.7)$$

де  $\mathbf{e}(k) = [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k/k)]$  – похибка фільтрації на  $k$ -ому кроці. Визначимо середнє значення цієї похибки

$$E[\mathbf{e}(k+1)] = \Phi(k)E[\mathbf{e}(k)].$$

Якщо оцінка  $\mathbf{x}^*(k)$  була виконана так, що  $E[\mathbf{e}(k)] = 0$  (зсув оцінки відсутній), то екстраполяція так само не має зсуву і  $E[\mathbf{e}(k+1)] = 0$ . Тепер обчислимо кореляційну матрицю похибок екстраполяції  $\mathbf{P}(k+1/k)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1/k) &= E[\mathbf{e}(k+1)\mathbf{e}^T(k+1)] = \\ &= E[\Phi(k)\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\Phi^T(k) + \mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] = \Phi(k)\mathbf{P}(k/k)\Phi^T(k) + \mathbf{Q}(k). \end{aligned} \quad (6.8)$$

При обчисленні виразу (6.8) використовувалася умова відсутності кореля-



ції між шумом  $w(k)$  і похибкою  $e(k)$ , тому що  $e(k)$  залежить тільки від значень  $w(k-1)$ ,  $w(k-2)$ , ... .

Тепер розглянемо формування оптимальної оцінки на етапі фільтрації. Оскільки операція фільтрації лінійна, то оцінка дорівнює лінійній комбінації величин  $x^*(k+1/k)$  і  $y(k+1)$

$$x^*(k+1/k+1) = K_1 x^*(k+1/k) + K_2 y(k+1), \quad (6.9)$$

де  $K_1$ ,  $K_2$  постійні матричні коефіцієнти. Оптимальність оцінки забезпечується відповідним вибором коефіцієнтів. При виборі коефіцієнтів враховуються дві вимоги: умова відсутності зсуву оцінки та вимога мінімізації середнього квадрата похибки. Умова відсутності зсуву оцінки полягає в тому, щоб

$$E[x(k+1) - x(k+1/k+1)] = 0.$$

Користуючись рівняннями (6.4) та (6.9) можна отримати

$$\begin{aligned} E[x(k+1) - K_1 x^*(k+1/k) - K_2 y(k+1)] &= \\ = E\{[I - K_2 H(k+1)]x(k+1) - K_1 x^*(k+1/k)\}. \end{aligned}$$

За відсутності зсуву цей вираз має бути нульовим, а це можливо лише тоді, коли виконується умова

$$[I - K_2 H(k+1)]E\{x(k+1)\} = K_1 E\{x^*(k+1/k)\}.$$

Оскільки  $E\{x(k+1)\} = E\{x^*(k+1/k+1)\}$ , то  $K_1 = [I - K_2 H(k+1)]$ .

Таким чином, вираз (6.9) набуває вигляду

$$\begin{aligned} x^*(k+1/k+1) &= [I - K_2 H(k+1)]x^*(k+1/k) + K_2 y(k+1) = \\ &= x^*(k+1/k) + K_2 [y(k+1) - H(k+1)x^*(k+1/k)]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Оцінка, що надається виразом (6.10), не має зсуву при будь якому  $K_2$ . Тепер визначимо оптимальне значення матричного коефіцієнта підсилення  $K$ . Для цього обчислимо кореляційну матрицю похибок фільтрації  $P(k+1/k+1)$ , користуючись формулою (6.10):

$$\begin{aligned} P(k+1/k+1) &= \\ &= E\{[x(k+1) - x^*(k+1/k+1)][x(k) - x^*(k+1/kj+1)]^T\} = \\ &= [I - K_2 H(k+1)] P(k+1/k) [I - K_2 H(k+1)]^T + \\ &\quad + K_2 R(k+1) K_2^T. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Слід підкреслити, що виведення виразу (6.11) базувалося на припущенні відсутності кореляції між шумом  $v(k+1)$  та похибками екстраполяції  $e(k+1)$ . Оскільки похибка  $e(k+1)$  являє собою векторну величину, то виникає питання про вибір скалярної величини, яка б характеризувала величину вектора  $e(k+1)$ , тобто норму вектора  $e(k+1)$ . Найпростішим типом такої норми є сума квадратів складових вектора  $e(k+1)$ , яка чисельно дорівнює сліду кореляційної матриці, який позначимо через  $Sp P$ .

При оптимізації коефіцієнта  $K_2$  слід мінімізувати  $Sp P$ . Щоб знайти мінімум за  $K_2$ , необхідно обчислити градієнт за  $K_2$  від  $Sp P$  і знайти таке значення  $K_2$ , при якому градієнт би дорівнював нулю.

Розглянемо обчислення градієнта сліду квадратичної форми  $Sp K R K^T$ .

$$\text{Grad } [Sp K R K^T] = e_{11} \frac{\partial}{\partial K_{11}} Sp K R K^T + e_{12} \frac{\partial}{\partial K_{12}} Sp K R K^T + \dots + e_{1n} \frac{\partial}{\partial K_{1n}} Sp K R K^T,$$

где  $e_{ij}$  – одиничні вектори, що відповідають елементу  $K_{ij}$  матричного коефіцієнта підсилення. Виконавши диференціювання одного з доданків, з урахуванням симетрії матриці  $R$  одержимо:

$$e_{ij} \frac{\partial}{\partial K_{ij}} Sp K R K^T = 2 Sp \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{ij} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R K^T.$$

У такий спосіб обчислення градієнта квадратичної форми дає вираз

$$\text{Grad } [Sp K R K^T] = 2 Sp E R K^T,$$

де

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & \dots & e_{2n} \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix}.$$

Скориставшись таким правилом обчислення градієнта, знайдемо умову, при якій матричний коефіцієнт підсилення  $K(k+1)$  буде оптимальним:

$$2Sp E \{-H(k+1)P(k+1/k) [I - K_2(k+1)H(k+1)]^T + R(k+1)K_2^T(k+1)\} = 0.$$

Оскільки матриця  $E$  заповнена одиничними векторами, то рівність нулю може вийти лише за умови

$$-H(k+1)P(k+1/k) [I - K_2(k+1)H(k+1)]^T + R(k+1)K_2^T(k+1) = 0.$$

Після алгебраїчних викладок одержуємо

$$K_{2opt}(k+1) = K(k+1) =$$

$$= P(k+1/k) H^T(k+1) [H(k+1) P(k+1/k) H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}. \quad (6.12)$$

Відзначимо, що при  $K = K(k+1)$  вираз (6.11) для кореляційної матриці  $P$  може бути спрощений

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)] P(k+1/k). \quad (6.13)$$

Таким чином, остаточний вигляд оптимальної лінійної оцінки буде описуватись виразом:

$$x^*(k+1/k+1) = \Phi(k)x^*(k/k) + K(k+1)z(k+1), \quad (6.14)$$

де  $z(k+1) = y(k+1) - H(k+1)\Phi(k)x^*(k/k)$ ,  $x^*(0/0) = E[x(0)]$ .

Величина  $z(k+1)$  являє собою ту нову, додаткову інформацію, яка міститься у повідомленні  $y(k+1)$ . Саме з цієї причини процес  $z(k)$  називають «оновлювальним» процесом. Можна показати, що у оптимальному фільтрі величина  $z(k)$  являє собою «білий» дискретний шум. Для обчислення оцінки  $x^*(k/k)$  необхідно обчислити послідовність оптимальних коефіцієнтів підсилення  $K(k)$ . Для розрахунків цієї послідовності використовуються вирази (6.11), (6.12) і (6.13). Оскільки  $K(k)$  не залежить від результатів спостережень  $y(k)$ , то він може бути розрахований заздалегідь за апріорними даними. Алгоритм фільтрації, що описується формулами (6.14), (6.11)–(6.13), прийнято називається дискретним фільтром Калмана. Цей алгоритм зручний для розрахунків на ЕОМ, тому що формули для обчислення  $x^*(k/k)$  і  $P(k/k)$  є рекурентними і у пам'яті ЕОМ не потрібно зберігати їх попередні значення. Фільтр Калмана можна зображати у вигляді системи стеження (рис. 6.2).

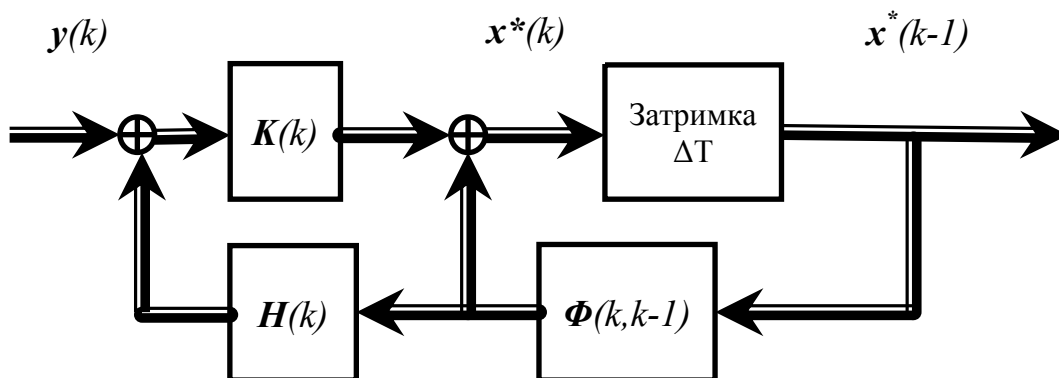


Рисунок 6.2 – Структура дискретного фільтра Калмана

Порівнюючи з моделлю формування сигналу можна відзначити, що структура фільтра визначається типом моделі випадкового процесу.

#### Приклад 6.1

Розглянемо приклад фільтрації випадкового процесу, заданого різницеvim рівнянням

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{12}(k) \\ w_{11}(k) \end{bmatrix},$$

причому вважаються відомими величини  $E[\mathbf{x}(0)]$ ,  $P(0/0)$ ,  $\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)]$ .

Рівняння спостережень має вигляд

$$y(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + n(k),$$

де  $\mathbf{H} = [1 \ 0]$ , і відомо, що  $\mathbf{R}(k) = E[n^2(k)]$ .

Вектор стану  $\mathbf{x}(k)$  можна розглядати як вектор, що описує рух об'єкта на віддаль  $d(k)$  зі швидкістю  $v(k)$ . Рівняння спостереження дає значення відліків віддалі  $y(k)$ .

Побудуємо оптимальний фільтр відповідно до виразів (6.6) і (6.14). Оцінка, екстрапольована на  $(k+1)$ -й інтервал часу, дорівнює

$$\mathbf{x}^*(k+1/k) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^*(k/k) \\ v^*(k/k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^*(k/k) + \Delta t v^*(k/k) \\ v^*(k/k) \end{bmatrix}.$$

Таким чином, значення  $d^*(k+1/k)$  отримується шляхом додавання поправки  $\Delta t v^*(k/k)$  до попереднього значення віддалі  $d^*(k/k)$ . Зміни оцінки швидкості  $v^*(k/k)$  при екстраполяції не відбувається, тому що в розглянутій задачі прискорення об'єкта є «білим» шумом і його екстрапольоване значення дорівнює нулю. Оцінка після обробки відліку віддалі  $y(k+1)$  дорівнює

$$\mathbf{x}^*(k+1/k+1) = \begin{bmatrix} d^*(k+1/k) + K_1 z(k+1) \\ v^*(k+1/k) + K_2 z(k+1) \end{bmatrix},$$

де  $z(k+1) = y(k+1) - \mathbf{H}\mathbf{x}^*(k+1/k) = y(k+1) - d^*(k+1/k)$ .

Схема оптимального фільтра показана на рис. 6.3. Ця схема відрізняється від розглянутої вище схеми (рис. 6.2) тим, що в ній розкриті векторні зв'язки.

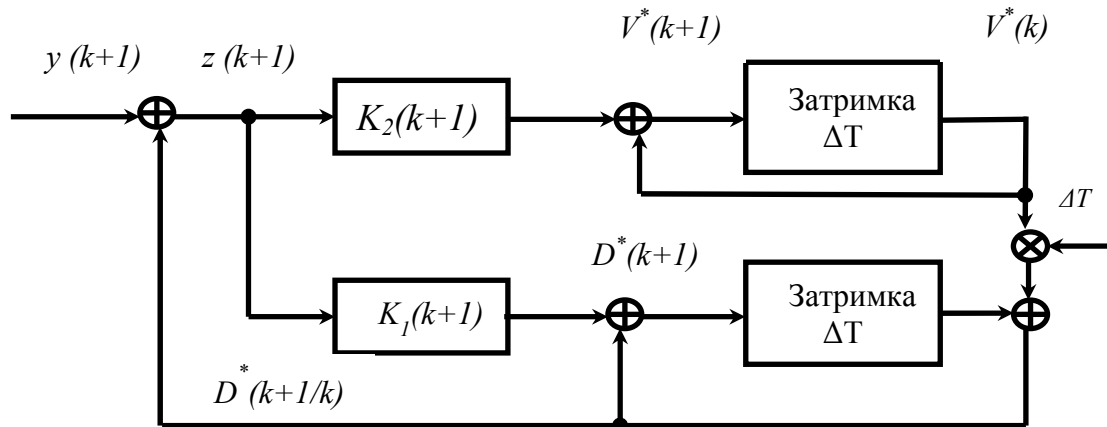


Рисунок 6.3– Структура дискретного фільтра для прикладу 6.1

Оптимальний фільтр можна розглядати як систему стеження з двома дискретними інтеграторами, які утворюються замкненими контурами з елементами затримки на інтервал дискретизації  $\Delta t$ . Дискретні інтегратори використовуються для зберігання оцінок швидкості  $v^*(k/k)$  і віддалі  $d^*(k/k)$ . Екстраполяція оцінки віддалі на  $(k+1)$ -й такт проводяться шляхом підсумовування поправки  $\Delta t v^*(k/k)$  до значення віддалі  $d^*(k/k)$ . Потім екстрапольовані значення віддалі порівнюються з результатами вимірювань віддалі  $y(k+1)$ , а їх різниця використовується для корегування значень  $d^*(k/k)$  і  $v^*(k/k)$ . Вага поправок визначається коефіцієнтами підсилення  $K_1(k+1)$  та  $K_2(k+1)$ , які залежать від кореляційної матриці похибок  $\mathbf{P}(k/k)$ . При великих похибках фільтрації коефіцієнти підсилення великі, і навпаки. Як правило, значення коефіцієнтів

підсилення зменшуються із часом, тому що помилки в усталеному є значно меншими, ніж на етапі введення в режим стеження. Покажемо як змінюються коефіцієнти підсилення на числовому прикладі. Припустимо, що задані величини  $d(0)$ ,  $v(0)$ ,

$$P(0/0) = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix}.$$

Величина  $\sigma_d^2$  є дисперсією початкової похибки вимірювань віддалі, яка визначається властивостями схеми пошуку сигналу за віддаллю. Величина  $\sigma_v^2$  за відсутності апріорних даних про швидкість визначається швидкістю руху об'єкта. Якщо швидкість руху має рівномірний розподіл у межах  $[-v_{max}, +v_{max}]$ , то  $\sigma_v^2 = (2/3) v_{max}^2$ .

Для спрощення розрахунків вважаємо, що  $Q(k) = 0$ ,  $R(k) = 0$ . Зауважимо, що рівняння (6.4) за прийнятих припущень описує рух з постійною початковою швидкістю  $v(0)$  з початкового стану  $d(0)$ . На першому такті з рівнянь (6.12) і (6.13) одержуємо

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 + \sigma_v^2 \Delta t^2 & \sigma_v^2 \Delta t \\ \sigma_v^2 \Delta t & \sigma_v^2 \end{bmatrix}; K(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sigma_v^2 \Delta t^2}{\sigma_d^2 + \sigma_v^2 \Delta t^2} \end{bmatrix}; P = [I - K(1)HP(1/0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_d^2 \sigma_v^2}{\sigma_d^2 + \sigma_v^2 \Delta t^2} \end{bmatrix}.$$

Відзначимо, що дисперсія похибки вимірювання віддалі дорівнює 0, оскільки вимірювання відбуваються без похибок. Продовжуючи обчислення далі, отримуємо

$$P(2/1) = \frac{\sigma_d^2 \sigma_v^2}{\sigma_d^2 + \sigma_v^2 \Delta t^2} \begin{bmatrix} \Delta t^2 & \Delta t \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix}.$$

Похибки екстраполяції на другому такті відмінні від нуля, тому що ще невідомо точне значення швидкості. Значення  $K(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta t^{-1} \end{bmatrix}$ ;  $P(2/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Таким чином, після приймання другого імпульсу сигналу стеження відбувається без похибок і  $K(3) = K(4) = \dots K(n) = 0$ . Більш детальне дослідження показує, що  $K(k) \rightarrow 0$ , якщо  $Q(k) = 0$  при  $R(k) \neq 0$ . Незважаючи на простоту розглянутого прикладу, слід зазначити, що у процесі розрахунків отримано систему зі змінними параметрами, яку важко спроектувати іншими, наприклад, частотними методами.

Поряд з рекурентними алгоритмами фільтрації, при обробленні інформації за допомогою цифрових ЕОМ використовуються також і нерекурентні алгоритми. Як приклад розглянемо алгоритм лінійного оцінювання, який оснований на методі найменших квадратів, і порівняємо його з методом фільтра Калмана. Припустимо, що є низка відліків деякої величини  $y(t_1)$ ,  $y(t_2)$ , ...,  $y(t_N)$ , зроблених при дії завад (див. рис. 6.4).

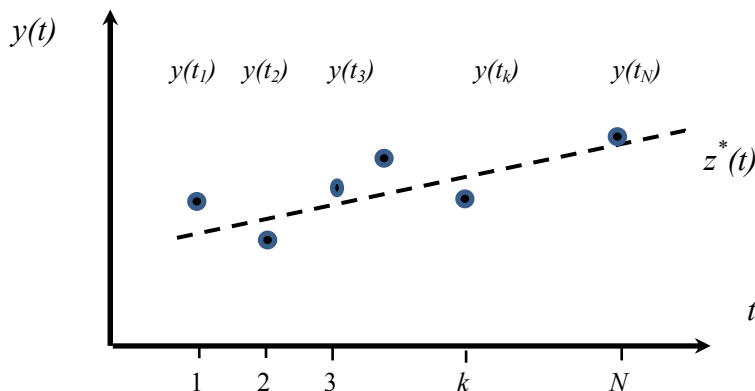


Рисунок 6.4 – Результати вимірювань з похибками

Дійсна траєкторія руху об'єкту  $z(t)$  являє собою є функцію часу, що містить низку невідомих параметрів. Наприклад, зміна координат у часі може описуватися поліномом з невідомими коефіцієнтами

$$z(t) = f(t, a_i) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m, \quad (6.15)$$

а результат вимірювання цієї величини в момент часу  $t_k$  дорівнює

$$y(t_k) = z(t_k) + v(k), \quad (6.16)$$

де  $v(k)$  – дискретний «білий» шум.

У задачі, що розглядається, потрібно визначити невідомі коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_m$  за результатами низки вимірювань  $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)$ . Для визначення  $(m+1)$  невідомих коефіцієнтів потрібна система, складена з  $(m+1)$  рівняння виду (6.16). Таким чином, при  $N = m+1$  можливе однозначне визначення коефіцієнтів. Однак на практиці становить інтерес розв'язок системи рівнянь при  $N \gg m$ , тому що при збільшенні числа відліків послаблюється вплив завад  $v(k)$ . При  $N \gg m$  однозначного розв'язку системи рівнянь не існує, проте можна знайти таку сукупність параметрів  $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*)$ , яка забезпечить найкращу оцінку  $z^*(t_k) = f(t_k, a_i^*)$  з позиції мінімуму середнього квадрата похибки

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y(t_i) - z^*(t_i)]^2.$$

Векторний запис цієї задачі має вигляд:

$$Y = TA + V, \quad (6.17)$$

$$\text{де } Y = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ \dots \\ y(t_N) \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} v(t_1) \\ \dots \\ v(t_N) \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^m \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N & \dots & t_N^m \end{bmatrix}.$$

Вектор похибок фільтрації дорівнює  $E = Y - Z^* = Y - TA^*$ ,

$$\text{де } A^* = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ \dots \\ a_m^* \end{bmatrix}; \quad Z^* = \begin{bmatrix} z^*(t_1) \\ z^*(t_2) \\ \dots \\ z^*(t_N) \end{bmatrix}.$$

Тоді сума квадратів похибок фільтрації становить

$$\sum_{i=1}^N [y(t_i) - z^*(t_i)]^2 = \mathbf{E}^T \mathbf{E}.$$

Знайдемо таке значення оцінки  $\mathbf{A}^*$ , при якому величина  $\mathbf{E}^T \mathbf{E}$  мінімальна. Для цього обчислимо  $\text{grad } \mathbf{E}^T \mathbf{E}$  і знайдемо значення  $\mathbf{A}^*$ , при якому градієнт буде дорівнювати нулю.

$$\text{grad}_{\mathbf{A}^*} \mathbf{E}^T \mathbf{E} = \text{grad}_{\mathbf{A}^*} \{[\mathbf{T}\mathbf{A}^* - \mathbf{Y}]^T [\mathbf{T}\mathbf{A}^* - \mathbf{Y}]\} = \mathbf{0}.$$

Виконавши обчислення градієнта, отримаємо умову

$$2\mathbf{T}^T [\mathbf{T}\mathbf{A}^* - \mathbf{Y}] = \mathbf{0}$$

і при неособливій матриці матимемо

$$\mathbf{A}^* = [\mathbf{T}^T \mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{Y}. \quad (6.18)$$

У виразі (6.18) матриця  $[\mathbf{T}^T \mathbf{T}]^{-1} \mathbf{T}^T$  обчислюється заздалегідь і зберігається у запам'ятовувальному пристрої. Вона визначає закон руху об'єкта й не залежить від апріорних даних про завади. Відсутність вимог до апріорних даних є істотною перевагою методу найменших квадратів.

Оцінка  $\mathbf{A}^*$  за допомогою формули (6.18) будується шляхом обробки усього масиву даних  $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)$ . Така процедура потребує значно більшого обсягу пам'яті порівняно з рекурентною формулою (6.14) для фільтра Калмана. Проте, виявляється, що і у випадку методу найменших квадратів на підставі виразу (6.18) можна побудувати рекурентну процедуру, у якій оцінка вектора  $\mathbf{A}^*(k+1)$  після приймання  $(k+1)$ -го сигналу обчислюється, виходячи з попереднього значення  $\mathbf{A}^*(k)$  і нового виміру  $y(k+1)$ . Порівняння рекурентного виразу для методу найменших квадратів і фільтра Калмана показує, що метод найменших квадратів може розглядатися як граничний випадок фільтра Калмана при  $\mathbf{P}(0) = [\infty]$  і  $\mathbf{Q}(k) = 0$ . Якщо матриця дисперсій початкового стану заповнена нескінченними елементами, то це означає, що початковий стан лежить у нескінченних межах, а апріорна інформація про нього абсолютно відсутня. Рівність  $\mathbf{Q}(k) = 0$  приводить до того, що випадковий процес  $\mathbf{x}(k)$  визначається лише випадковим вектором початкового стану  $\mathbf{x}(0)$ , що містить  $n$  випадкових чисел. Таким чином, вектор  $\mathbf{x}(k)$  може розглядатися як функція часу  $k$ , що містить випадкові коефіцієнти  $x_i(0), i = 1, 2, \dots, n$ .

При виконанні умов  $\mathbf{P}(0) = [\infty]$  і  $\mathbf{Q}(k) = 0$  виявляється, що значення матричного коефіцієнта підсилення  $\mathbf{K}(k+1)$  у рекурентній формулі залежать тільки від номера кроку  $k$  і не залежить від  $\mathbf{R}(k)$ . На підставі викладеного стає зрозумілим, чому метод найменших квадратів не потребує використання апріорних даних  $\mathbf{P}(0), \mathbf{Q}(k)$  і  $\mathbf{R}(k)$ .

## Приклад 6.2

Розглянемо обчислення коефіцієнта підсилення у рекурентному варіанті методу найменших квадратів для найпростішого прикладу. Шуканий параметр – постійна, але невідома випадкова величина  $a_0$ , яка вимірюється з випадковою похибкою  $\sigma^2$ . Обчислимо дисперсію похибки екстраполяції за формулою (6.13):

$$P(1/0) = P(0) + Q(1) = P(0) = \sigma_0^2.$$

Коефіцієнт підсилення за формулою (6.13) дорівнює

$$K(1) = P(1/0)K^T [H P(1/0) H^T + R]^{-1} = \sigma_0^2 (\sigma_0^2 + \sigma^2)^{-1}.$$

Якщо апріорні дані відсутні, то  $\sigma_0^2 \rightarrow \infty$  і  $K(1) = I$ ;

$$P(1/1) = [1 - K(1)] P(1/0) = \frac{\sigma_0^2 \sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2} \rightarrow \sigma^2.$$

На другому кроці  $P(2/1) = \sigma^2$ ,  $K(2) = 1/2$  і т. д. за правилом  $K(k) = 1/k$ .

На цьому прикладі видно, що  $K(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Це є наслідком того, що зміна параметра відсутня і  $Q(k) = 0$ . Якщо ж насправді параметр повільно змінюється, то при  $K(k) \rightarrow 0$  можуть виникати великі помилки, отже, на практиці слід обмежувати значення  $k$ .



## 7 НЕЛІНІЙНА ОПТИМАЛЬНА ФІЛЬТРАЦІЯ

### 7.1 Постановка задачі

Основи теорії нелінійної оптимальної фільтрації викладені у роботах [11, 17]. Для більш глибокого вивчення рекомендується [6]. В радіотехнічних системах вимірювальні параметри кодуються нелінійним чином, тому теорія лінійної фільтрації не може бути використана безпосередньо для проектування засобів обробки радіосигналів.

Розглянемо задачу нелінійної фільтрації випадкового процесу  $\mathbf{x}(k)$ , заданого векторними рівняннями

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (7.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{S}[\mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k). \quad (7.2)$$

Зміна параметра  $\mathbf{x}(k)$ , як і раніше, описується лінійним виразом, а спостережувана величина нелінійно залежить від  $\mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k)$ . Шуми  $\mathbf{w}(k)$  і  $\mathbf{v}(k)$  являють собою векторні гаусові «білі» шуми з відомими матрицями  $\mathbf{Q}(k)$  і  $\mathbf{R}(k)$  та нульовими середніми значеннями. Для вирішення задачі нелінійної фільтрації за допомогою гауссової статистики оцінюваної величини  $\mathbf{x}(k)$  доцільно застосовувати метод максимуму апостеріорної ймовірності [3]. Оцінювання виконується за допомогою рекурентного методу, на першому кроці слід побудувати апостеріорний розподіл ймовірності, виходячи з апіорного розподілу ймовірності початкового стану  $\mathbf{x}(0)$  та функції правдоподібності прийнятого сигналу  $\mathbf{y}(t)$ . Далі, на наступних кроках, як апіорний розподіл використовуються апостеріорні розподіли, отримані на минулих етапах.

### 7.2 Нелінійне оцінювання за методом максимуму апостеріорної ймовірності

Припустимо, що відома оцінка  $\mathbf{x}^*(k)$ , її розподіл  $\mathbf{W}[\mathbf{x}(k)]$  і на основі  $(k+1)$ -го вимірювання  $\mathbf{y}(k+1)$  потрібно побудувати оцінку  $\mathbf{x}^*(k+1)$ . Складемо вираз для апостеріорного розподілу  $\mathbf{W}[\mathbf{x}(k+1)/\mathbf{y}(k+1)]$  за правилом Байєса:

$$\mathbf{W}[\mathbf{x}(k+1)/\mathbf{y}(k+1)] = \frac{\mathbf{W}[\mathbf{x}(k+1)] \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]}{\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)]}, \quad (7.3)$$

де  $\mathbf{W}[\mathbf{x}(k+1)]$  – апіорний розподіл;  $\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]$  – функція правдоподібності;  $\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)]$  – розподіл сигналу  $\mathbf{y}(k+1)$ . Як апіорний розподіл  $\mathbf{W}[\mathbf{x}(k+1)]$  використовується розподіл оцінки  $\mathbf{x}^*(k)$ , екстрапольованої на один крок уперед. Припустимо, що апіорний розподіл являє собою багатовимірний нормальний розподіл з середнім значенням  $\mathbf{x}^*(k+1/k)$  та кореляційною матрицею  $\mathbf{P}(k+1/k)$ :

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}^*(k+1/k)] &= \frac{1}{(2\pi)^{0,5n} [\det \mathbf{P}(k+1/k)]^{0,5}} \times \\ &\times \exp \{-0,5[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]^T \mathbf{P}^{-1}(k+1/k) \times \\ &\quad \times [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]\}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Величина  $\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)]$  також являє собою багатовимірний розподіл, який безпосередньо від  $\mathbf{x}$  не залежить. Значення  $\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)]$  виконують роль нормувального множника і не впливають на розташування максимуму апостеріорного розподілу  $\mathbf{W}[\mathbf{x}(k+1)/\mathbf{y}(k+1)]$ . Тому надалі ця величина враховується у вигляді нормувального множника.

Функція правдоподібності  $\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]$ , у загальному випадку, має складну форму, але при високій точності вимірювань ця функція має гострий пік. Вершину цього піку з прийнятною точністю можна апроксимувати нормальним розподілом. Для виконання такої апроксимації запишемо функцію правдоподібності у вигляді:

$$\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)] = \exp\{\ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]\}.$$

Тепер проведемо розвинення цієї функції у степеневий ряд відносно точки екстраполяції  $\mathbf{x}^*(k+1/k)$ :

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)] &= \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}^*(k+1/k)] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(k+1/k)} [y_i(k+1) - y_i^*(k+1/k)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(k+1/k)} \cdot \\ &[y_i(k+1) - y_i^*(k+1/k)][y_j(k+1) - y_j^*(k+1/k)] + \dots, \end{aligned} \quad (7.5)$$

де  $y_i^*(k+1/k) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}^*(k+1/k)$  – екстрапольований результат вимірювань на  $(k+1)$ -й момент часу, а  $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}(k+1)$ .

Для скорочення записів введемо такі позначення:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(k+1/k)};$$

$$\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]; \quad z_i = \left. \frac{\partial \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(k+1/k)}.$$

В матричній формі вираз (7.5) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \ln W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)] &= \ln W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}^*(k+1/k)]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(k+1/k)} + \\ &+ \mathbf{z} \mathbf{H}(k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)] - 0,5 [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]^T \times \\ &\times \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{A} \mathbf{H}(k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Вираз (7.6) являє собою багатовимірну параболу

$$\exp\{\ln W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]\},$$

тому його можна розглядати як апроксимацію багатовимірного нормального розподілу багатовимірною параболою навколо максимального значення. Положення максимуму апостеріорного розподілу залежить від положення максимуму добутку  $W[\mathbf{x}(k+1)] W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)]$ . З виразів (7.4) та (7.6) отримуємо:

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}(k+1)] W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)] &= \\ &= \mathbf{K} \exp\{-0,5[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]^T \mathbf{P}^{-1}(k+1/k) + \\ &+ \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{A} \mathbf{H}(k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)] + \\ &+ \mathbf{z} \mathbf{H}(k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)], \end{aligned} \quad (7.7)$$

де  $\mathbf{K}$  – коефіцієнт, який не містить  $\mathbf{x}(k)$ .

Для заходження максимуму запишемо цей добуток у вигляді:

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_1 \exp\left\{-\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1)]^T \times \right. \\ &\times \mathbf{P}^{-1}(k+1/k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1)]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Такий запис зручний тим, що точка  $\mathbf{x}^*(k+1/k+1)$  є точкою максимуму. Для цього у виразі (7.7) віднімемо і додамо до кожного  $\mathbf{x}(k+1)$  величину  $\mathbf{x}^*(k+1/k+1)$ :

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}(k+1)] W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)] &= \\ &= \mathbf{K} \exp\left\{-\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1) + \mathbf{x}^*(k+1/k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]^T \times \right. \\ &\times \mathbf{P}(k+1/k+1)^{-1} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1) + \mathbf{x}^*(k+1/k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)] + \\ &+ \mathbf{z} \mathbf{H}(k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1) + \mathbf{x}^*(k+1/k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)], \end{aligned}$$

де  $\mathbf{P}(k+1/k+1) = [\mathbf{P}(k+1/k)^{-1} + \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{A} \mathbf{H}(k+1)]$ .

Слід зауважити, що  $[\mathbf{x}^*(k+1/k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]$  від змінної  $\mathbf{x}(k+1)$  не

залежать, і вирази з цим множником можна розглядати як постійні величини. Якщо виконати прості, проте досить громіздкі операції по зведенню подібних членів, то можна отримати вираз зведений до повного квадрату, що дає у підсумку:

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}[\mathbf{x}(k+1)]\mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}(k+1)] = \\ & = K_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1)]^T \mathbf{P}^{-1}(k+1/k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1)] - \right. \\ & \quad - [\mathbf{x}^*(k+1/k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]^T \mathbf{P}^{-1}(k+1/k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1)] + \\ & \quad \left. + \mathbf{zH}(k+1) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1)] \right\}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Порівнюючи вирази (7.8) і (7.9), можна зробити висновок, що вони збігаються за умови

$$\begin{aligned} & \{ -[\mathbf{x}^*(k+1/k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]^T \mathbf{P}^{-1}(k+1/k+1) + \\ & \quad + \mathbf{zH}(k+1) \} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k+1)] = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

У цьому випадку, величина  $\mathbf{x}^*(k+1/k+1)$  являє собою максимум апостеріорного розподілу. Таким чином, якщо виконується рівняння (7.10), то можна записати:

$$-[\mathbf{x}^*(k+1/k+1) - \mathbf{x}^*(k+1/k)]^T \mathbf{P}^{-1}(k+1/k+1) + \mathbf{zH}(k+1) = 0$$

і далі

$$\mathbf{x}^*(k+1/k+1) = \mathbf{x}^*(k+1/k) + \mathbf{P}(k+1/k+1)\mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{z}^T. \quad (7.11)$$

Вираз (7.11) дає структуру оптимальної оцінки. На основі попередніх вимірів обчислюється екстрапольоване значення оцінки  $\mathbf{x}^*(k+1/k)$  і до нього добавляється поправка, яка залежить від прийнятого повідомлення  $\mathbf{y}(k+1)$ . Вага поправки визначається множником  $\mathbf{P}(k+1/k+1)\mathbf{H}^T(k+1)$ , який залежить від дисперсій похибок фільтрації. Тепер залишилося визначити фізичний зміст величини  $\mathbf{z}$ . Для цього візьмемо один з елементів вектора  $z_i$  та розвинемо його у ряд відносно точного значення  $\mathbf{x}(k+1)$ :

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\partial}{\partial y_i} \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(k+1/k)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_i} \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}]|_{\mathbf{x}(k+1)} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \ln \mathbf{W}[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k+1)} [y_i^*(k+1/k) - y_i^*(k+1)], \end{aligned} \quad (7.12)$$

де  $y_i^*(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}(k+1)$ .

Для спрощення у виразі (7.12) будемо вважати, що при  $i \neq j$  усі змішані похідні дорівнюють 0. Це зауваження справедливе, якщо шуми  $v_i(k)$  у каналах спостереження не мають статистичного зв'язку. Пояснимо суть виразу (7.12) за допомогою графіків (рис. 7.1).

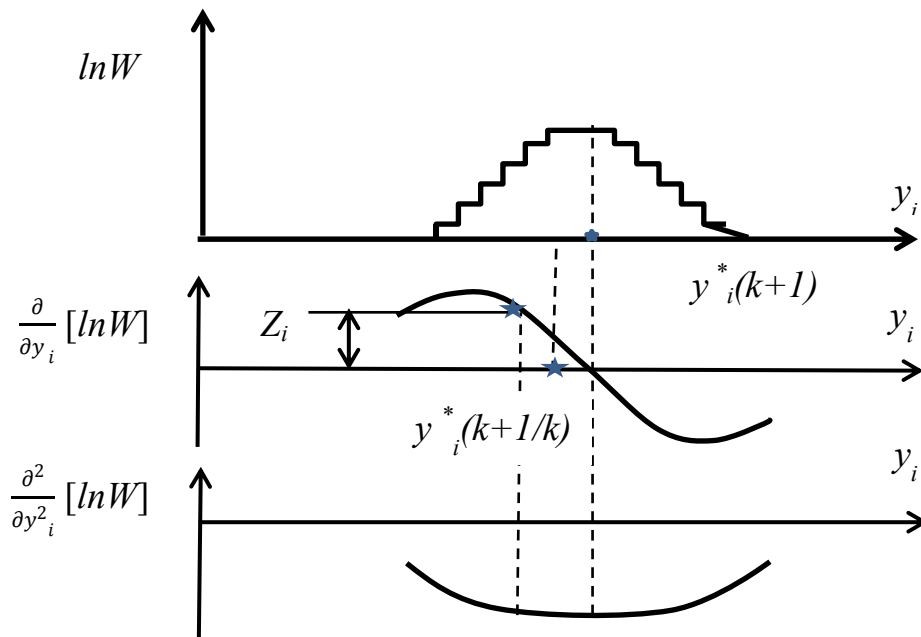


Рисунок 7.1– Ілюстрація фізичного змісту складової  $z_i$

Логарифм функції правдоподібності має максимум поряд з точним значенням  $y_i^*(k+1)$ . Відхилення максимуму від істинного значення зумовлене впливом завад. Перша похідна логарифма функції правдоподібності має поблизу від точного значення  $y_i^*(k+1)$  лінійну ділянку. На цій лінійній ділянці величину  $z_i$  можна подати як суму величин:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \ln W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k+1)} = \xi(k+1),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \ln W[\mathbf{y}(k+1)/\mathbf{x}]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k+1)} [y_i^*(k+1/k) - y_i^*(k+1)] = \\ = K_d [y_i^*(k+1/k) - y_i^*(k+1)]. \end{aligned}$$

Величина  $\xi(k+1)$  являє собою випадкову складову, тому що максимум функції правдоподібності зміщується відносно істинного значення випадковим чином. Оскільки шуми в моделі вимірювання  $v(k)$  «білі», то шум  $\xi(k+1)$  також білий. Складова

$$K_d [y_i^*(k+1/k) - y_i^*(k+1)]$$

являє собою корисний сигнал похибки, пов'язаний з відхиленням оцінки від істинного значення  $x(k+1)$ . Таким чином, величина  $z_i$  може розглядатися як вихідна напруга оптимального дискримінатора, що складається з суміші випадкової похибки та корисного сигналу. Крутизна характеристики дискримінатора  $K_d$  при малих похибках являє собою, практично, постійну величину. У загальному випадку крутизна характеристики оптимального дискримінатора залежить від рівня шуму. Із зростанням шуму функція правдоподібності розширюється і крутизна  $K_d$  зменшується [3].

Побудуємо відповідно до виразу (7.11) нелінійний оптимальний фільтр (рис. 7.2). Цей фільтр містить лінійну частину, яка складається з елемента затримки  $\Delta t$ , матриць  $\Phi(k)$  і  $H(k)$  та формує екстрапольоване значення оцінки  $y_i^*(k+1/k)$ . Нелінійні операції, що виконуються в оптимальному дискримінаторі, породжують величину  $z$ . Структура оптимального дискримінатора визначається видом функції повідомлення. Коефіцієнт передачі фільтра залежить від дисперсій похибок і дорівнює

$$P(k+1/k+1)H^T(k+1).$$

Методи нелінійної фільтрації виявляються ефективними при дослідженнях радіотехнічних систем стеження, наприклад, таких як далекоміри, кутоміри тощо. Метод максимуму апостеріорної ймовірності при лінійній моделі спостережень приводить до загальновідомого фільтра Калмана.

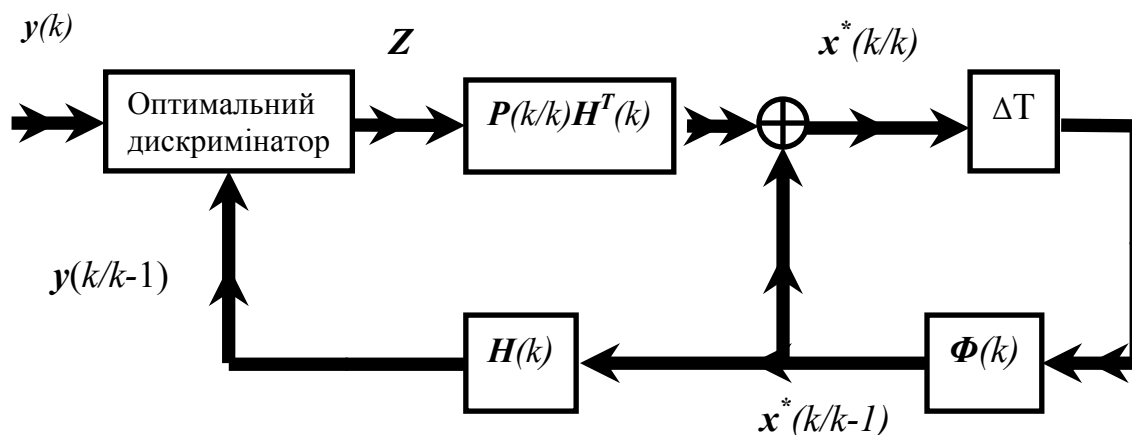


Рисунок 7.2– Структура нелінійного фільтра

Якщо спостереження описують виразом (7.8), то функція правдоподібності являє собою багатовимірний гауссів розподіл і дорівнює:

$$W[y(k+1)/x(k+1)] = \frac{1}{(2\pi)^{0,5m} \det^{0,5} |R(k)|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y(k+1) - H(k+1)x(k+1)]^T \times \right.$$

$$\times \mathbf{R}^{-1}(k)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}(k+1)]. \quad (7.13)$$

Обчислимо величини  $\mathbf{z}$  та  $\mathbf{A}$  з наведеного виразу (7.13):

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}^*(k+1/k)]; \quad \mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}.$$

Таким чином, оптимальна оцінка дорівнює:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1/k+1) &= \mathbf{x}^*(k+1/k) + \\ &+ \mathbf{P}(k+1)/k+1) \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{R}^{-1}(k+1) \times \\ &\times [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}^*(k+1/k)]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Покажемо, що  $\mathbf{P}(k+1)/k+1) \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{R}^{-1}(k+1)$  збігається з оптимальним коефіцієнтом передачі  $\mathbf{K}(k+1)$ . Для цього скористаємось лемою про обернення матриць, яка стверджує :

$$[\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}.$$

Безпосереднє застосування цієї леми завершує доказ:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(k+1)/k+1) \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{R}^{-1}(k+1) = \\ &= [\mathbf{P}^{-1}(k+1)/k+1) + \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{R}^{-1}(k+1) \mathbf{H}(k+1)]^{-1} \times \\ &\quad \times \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{R}^{-1}(k+1) = \\ &= \mathbf{P}(k+1)/k+1) \mathbf{H}^T(k+1) [\mathbf{H}(k+1) \mathbf{P}(k+1)/k+1) \mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1}. \end{aligned}$$

У заключній частині розділу розглянемо приклад застосування нелінійної фільтрації у практичній задачі.

### Приклад 7.1

Задано модель зміни віддалі  $d(k)$  та швидкості  $v(k)$

$$\begin{bmatrix} d(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix}$$

з відомими значеннями  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{P}(0)$ ,  $\mathbf{Q}(k)$ . Вимірювання віддалі виконується радіолокаційним способом. Приймається такий тип сигналу:

$$y(t, k) = U \left( t - \frac{d(k)}{0,5C} \right) \cos(\omega t) + n(t),$$

де  $U$  – закон модуляції імпульсу сигналу (рис. 7.3, а);  $\omega$  – носійна частота;  $n(t)$  – «білий» шум, який має задану спектральну щільність  $N$ . Прийнятий сигнал має затримку, яка пов'язана з віддаллю  $d(k)$  і яку потрібно вимірювати оптимальним чином. При імпульсному випромінюванні сигналу вимірювання віддалі стає дискретним, а дискретний час

$k$  відповідає  $k$ -ому імпульсному сигналу. Для «білого» шуму функція розподілу ймовірностей дорівнює

$$W[n(t)] = K \exp\left\{-\frac{1}{N} \int_0^T n^2(t) dt\right\},$$

де  $(0, T)$  – інтервал спостереження.

Для випадку, який розглядається, функція правдоподібності визначається виразом

$$W[y(t, k/d)] = K \exp\left\{-\frac{1}{N} \int_0^{T_n} [y(t, k) - u\left(t - \frac{2d}{c}\right)]^2 dt\right\},$$

де  $T_n$  – період повторення імпульсного сигналу.

Обчислимо похідну від логарифма функції правдоподібності у точці  $d^*(k + 1/k)$ :

$$z = \frac{1}{N} \int_0^{T_n} 2 \left[ y(t, k) - u\left(t - \frac{2d}{c}\right) \right] \frac{d}{dt} u\left(t - \frac{2d}{c}\right) dt \Big|_{d=d^*(k+1/k)} =$$

$$= \frac{2}{N} \int_0^{T_n} u\left(t - \frac{2d^*(k+1/k)}{c}\right) \left[ y(t, k) - u\left(t - \frac{2d^*(k+1/k)}{c}\right) \right] \frac{d}{dt} dt.$$

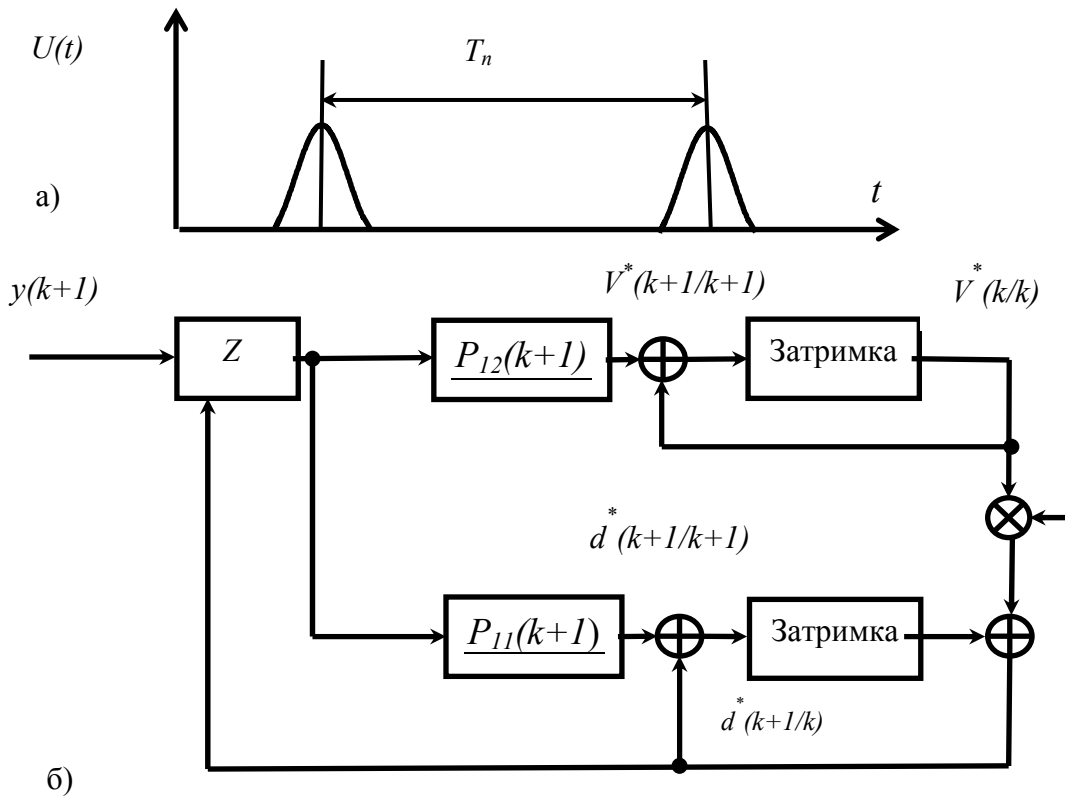


Рисунок 7.3– Структура нелінійного фільтра для прикладу 7.1

Якщо  $u$  являє собою симетричну функцію, то площа добутку

$$\left[ \frac{d}{dt} u\left(t - \frac{2d}{c}\right) \right] \times u\left(t - \frac{2d}{c}\right) \text{ дорівнює нулю, і}$$

$$z = \frac{2}{N} \int_0^{T_n} \frac{d}{dt} \left[ u\left(t - \frac{2d^*(k+1/k)}{c}\right) \right] y(t, k) dt.$$

Таким чином, у оптимальному дискримінаторі прийнятий сигнал  $y(t, k)$  домножається



на похідну  $\frac{d}{dt} \left[ u \left( t - \frac{2d^*(k+1/k)}{c} \right) \right]$ , часове положення якої залежить від екстрапольованої оцінки  $d^*(k + 1/k)$ . Результат множення інтегрується і дає значення сигналу похибки. Структура оптимального фільтра відрізняється від лінійного випадку тим, що пристрій віднімання замінено оптимальним дискримінатором, який і виконує нелінійну обробку сигналу (рис. 7.3, б). Практична реалізація оптимальних фільтрів може виконуватися двома шляхами – апаратним або алгоритмічним. У першому випадку фільтр реалізується у вигляді системи стеження, як правило – цифрової. У другому випадку алгоритми фільтрації програмуються у цифровій спеціалізованій обчислювальній машині.

Розглянемо приклад апаратної реалізації далекоміра. Відстежувальний далекомір (рис. 7.4) складається з цифрового дискримінатора, інтеграторів швидкості та віддалі, пристроїв корегування, суматора та схеми цифрової затримки. Операція оптимального розрізнення виконується у цифровому дискримінаторі, котрий виробляє послідовність імпульсів, число яких пропорційне сигналу похибки. Одночасно дискримінатор формує знак сигналу похибки. Імпульси сигналу похибки через корегувальні подільники потрапляють до лічильників інтеграторів швидкості та віддалі. Коефіцієнти поділу лічильників встановлюються відповідно до значень оптимального коефіцієнта підсилення та можуть змінюватися у часі. Екстраполяція значень віддалі виконується шляхом періодичного додання числа до лічильника інтегратора віддалі, яке відповідає значенню швидкості. Екстрапольоване значення оцінки віддалі надходить до схеми затримки, яка виробляє селекторний строб-імпульс для дискримінатора. У дискримінаторі положення імпульсного сигналу приймача порівнюється з часовим положенням строб-імпульсу і потім формується напруга сигналу похибки, яка надалі перетворюється у цифрову форму.

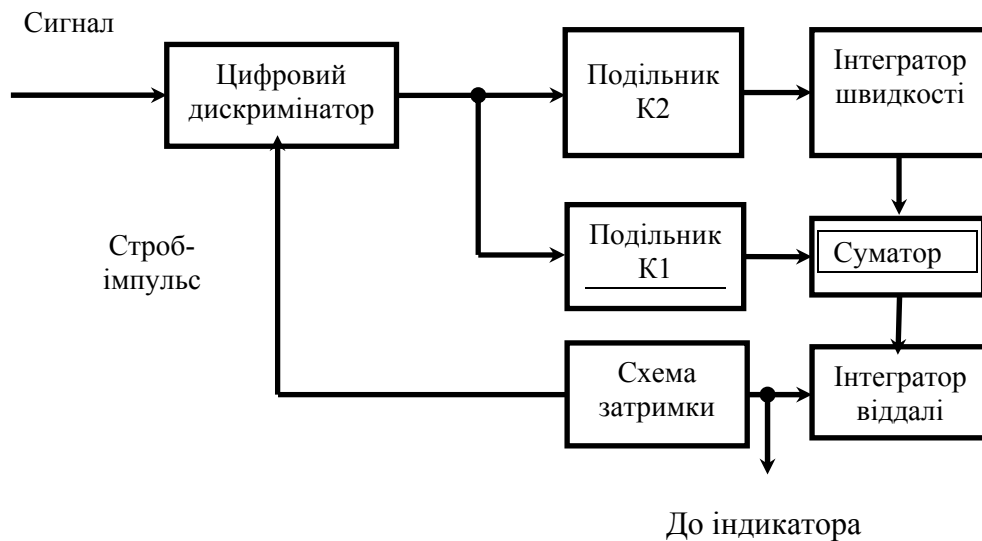


Рисунок 7.4 – Приклад апаратної реалізації цифрового далекоміра у режимі стеження

## ПІСЛЯМОВА

Як міг переконатися читач, увесь вміст цього навчального посібника підкреслює необхідність всебічного розгляду цілої сукупності проблем, які виникають у процесі проектування радіотехнічних систем різного цільового призначення, тим паче при проектуванні радіотехнічних комплексів. При використанні системного підходу проектувальник повинен мати чітку уяву про призначення системи та умов її експлуатації, тому що саме вони визначають вибір принципу роботи, тактико-технічні характеристики та структуру системи. Раціональний вибір принципу роботи та структури системи не може бути обґрунтовано вибраний без глибоких знань існуючої елементної бази та перспектив її розвитку. Проектувальник повинен уважно стежити за новітніми досягненнями у галузі теорії аналізу та синтезу сучасних радіотехнічних систем і ураховувати їх у процесі розв'язку конкретних радіотехнічних задач. Використання мікропроцесорної техніки, оптичних методів обробки сигналів, а також засобів функціональної мікроелектроніки дозволило суттєво покращити технічні характеристики радіотехнічних систем.

Радіоінженер повинен уміло застосовувати методи оптимізації складних систем, ні в якому разі не нехтувати можливостями евристичних методів оцінювання та фізичного експерименту, широко застосовувати методи математичного моделювання та систем автоматизованого проектування. На усіх етапах проектування пильно стежити за вимогами надійності та економічності виробництва і експлуатації. Оскільки у сучасній радіотехніці арсенал доступних методів та засобів безперервно поповнюється за рахунок останніх досягнень у багатьох суміжних галузях науки і техніки, то це формує надзвичайно високі вимоги до освітнянського рівня сучасного радіоінженера. У цьому сенсі дисципліна «Радіотехнічні системи» відіграє особливу роль, об'єднуючи в єдину систему знання, отримані студентом протягом усього процесу навчання.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / Баскаков С. И. — М. : Высшая школа, 2005. — 464 с.
2. Ширман Я. Д. Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория / Ширман Я. Д. — М. : Радиотехника, 2007. — 512 с.
3. Радиотехнические системы : учебник для студ. высш. учеб. заведений / [ Ю. М. Казаринов, Ю. А. Коломенский, Ю. П. Гришин и др.]. ; под ред. Ю. М. Казаринова. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 592 с.
4. Гуткин Л. С. Проектирование радиосистем и радиоустройств / Гуткин Л. С. — М. : Радио и связь, 1986. — 472 с.
5. Трухин М. П. Математическое моделирование радиотехнических устройств и систем / Трухин М. П. — Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 2014. — 192 с.
6. Информационные технологии в радиотехнических системах : учеб. пособие / [ В. А. Васин, И. Б. Власов, Д. Д. Дмитриев и др.]. ; под ред. И. Б. Федорова. — [ 3-е изд.]. — М. : Изд-во МГТУ им. И. Э. Баумана, 2004. — 774 с.
7. Гинзбург В. М. Голография. Методы и аппаратура / В. М. Гинзбург, Б. М. Степанов. — М. : Сов. Радио, 1974. — 376 с.
8. Перунов Ю. М. Зарубежные радиоэлектронные средства. Кн.4. Элементная база / Ю. М. Перунов, В. В. Мацукевич, А. А. Васильев. — М. : Радиотехника, 2010. — 400 с.
9. Анри Анго. Математика для электро- и радиоинженеров / Анри Анго. — М. : Наука, 1967. — 780 с.
10. Чердынцев В. А. Радиотехнические системы / Чердынцев В. А. — Минск : Вышэйшая школа, 1988. — 369 с.
11. Тихонов В. И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В. И. Тихонов, Н. К. Кульман. — М. : Сов. Радио, 1975. — 704 с.
12. Никольский Б. А. Основы радиотехнических систем / Никольский Б. А. — Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. — 469 с.
13. Браммер Ю. А. Радиотехнические устройства и элементы радиосистем / Браммер Ю. А., Каплун В. А., Лохова С. П. — М. : Высшая школа, 2005. — 296 с.
14. Основные направления теории проектирования радиосистем / Гуткин Л. С. // Радиотехника. — 1976. — № 5. — С. 2—6.
15. Гришин Ю. П. Микропроцессоры в радиотехнических системах / Гришин Ю. П., Казаринов Ю. М., Катиков В. М. — М. : Радио и Связь, 1982. — 280 с.
16. Волощук Ю. І. Сигнали та процеси в радіотехніці / Волощук Ю. І. — Х. : Компанія СМІТ, 2003. — 580 с.

17. Тихонов В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем : уч. пособие для вузов / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. — М. : Радио и связь, 1991. — 608 с.

18. Гуд Г. Х. Системотехника: / Г. Х. Гуд, Р. Э. Макол. — М. : Сов. Радио, 1962. — 383 с.

19. Заде Л. Теория линейных систем. Метод пространства состояний / Л. Заде, Ч. Дезоер. — М. : Наука, 1970. — 704 с.

20. Бакулев П. А. Радионавигационные системы / П. А. Бакулев, А. А. Сосновский. — М. : Радиотехника, 2005. — 224 с.

21. Мельников Ю. П. Радиотехническая разведка. Методы оценки эффективности местоопределения источников излучения / Ю. П. Мельников, С. В. Попов. — М. : Радиотехника, 2008. — 432 с.

*Навчальне видання*

**Кичак Василь Мартинович  
Воловик Андрій Юрійович  
Шутило Микола Артемович  
Червак Оксана Петрівна**

**РАДІОТЕХНІЧНІ СИСТЕМИ  
(ОСНОВИ ПРОЕКТУВАННЯ. ЧАСТИНА 2)**

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено А. Воловиком

Підписано до друку 26.12.2017.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 5,75.  
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2018-007.

Видавець та виготовлювач  
інформаційний редакційно-видавничий центр.  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
Тел. (0432) 65-18-06.  
press.vntu.edu.ua;  
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.