С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 1
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Клочко

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА 1
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2020

УДК [512.64(075.8)
К43…

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 3 від 31.10.2019 р.).

Рецензенти:
О. І. Матяш, доктор педагогічних наук, професор
В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор
В. Д. Дереч, кандидат математичних наук, професор

Кирилащук, С. А.
К43 Вища математика. Частина 1. Індивідуальні завдання : навчальний посібник / Кирилащук С. А., Бондаренко З. В., Клочко В. І. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 93 с.

Навчальний посібник охоплює матеріал з лінійної алгебри та аналітичної геометрії Кожен розділ посібника містить необхідний теоретичний матеріал (визначення, формули, теореми) і велику кількість детально розібраних прикладів, а також задачі для індивідуального опрацювання.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК [512.64(075.8)

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
ПЗ-1 ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Теоретичні відомості

1. Складену з чисел прямокутну таблицю, що містить m рядків і n стовпців, називають **матрицею** розмірності $(m\times n)$. Числа, з яких складається матриця, називають **елементами матриці**. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту, а їх елементи – малими літерами з подвійним індексом. Наприклад, a_{ij} – позначення елемента матриці А, який розміщений на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпця цієї матриці. Окремі рядки матриці позначають великими літерами латинського алфавіту з індексами: A_1 – перший, A_2 – другий, ..., A_n – n-й рядок матриці A.

2. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців і ця кількість дорівнює n, то таку матрицю називають **квадратною матрицею** n-го порядку.

3. У квадратній матриці n-го порядку елементи з однаковими індексами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ утворюють **головну діагональ матриці**.

4. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то її називають **нульовою матрицею** і позначають літерою О.

5. Якщо в квадратній матриці n-го порядку всі елементи, що утворюють головну діагональ, дорівнюють одиниці, а решта – нулю, то таку матрицю називають **одиничною матрицею** n-го порядку і позначають літерою E . Наприклад.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{— одинична матриця третього порядку.}$$

6. Якщо в деякій матриці A розмірністю $(m\times n)$ записати всі її рядки стовпцями, зберігаючи порядок, тобто, перший рядок записати першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т. д., то отриману матрицю розмірністю $(n\times m)$ позначають A^T і називають **транспонованою** до матриці A. Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^T=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. **Сумою (різницею) двох матриць** A та B однакової розмірності називають матрицю C тієї ж розмірності, кожен елемент якої є сумою (різницею) відповідних елементів матриць A та B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$.

Приклад 1.Знайти суму і різницю матриць A та B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -9 & -2 & 9 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриці A та B мають однакову розмірність (2×3), тому їх можна додавати і віднімати, причому в результаті отримаємо матриці, розмірність яких теж (2×3). Отже,

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 7+(-9) & -1+(-2) & 5+9 \\ -4+4 & 2+3 & 7+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 14 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix} 7-(-9) & -1-(-2) & 5-9 \\ -4-4 & 2-3 & 7-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 1 & -4 \\ -8 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. **Добутком числа b на матрицю** A розмірністю $(m\times n)$ називають матрицю bA тією ж розмірностю, кожен елемент якої є добутком числа b на відповідний елемент матриці A.

Приклад 2. Знайти матрицю $(-3A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & -0 & 9 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки матриця A має розмірність (2×3), то матриця $(-3A)$ теж матиме розмірність (2×3). Отже,

$$-3A=\begin{pmatrix} -3\cdot4 & -3\cdot(-1) & -3\cdot5 \\ -3\cdot(-3) & -3\cdot2 & -3\cdot7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 3 & -15 \\ 9 & -6 & -21 \end{pmatrix}.$$

9. **Добутком матриці** A розмірністю $(m\times n)$ **на матрицю** B розмірністю $(n\times k)$ називають таку матрицю C розмірністю $(m\times k)$, кожен елемент c_{ij} якої дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B, тобто для кожного елемента матриці C виконується рівність $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$.

Приклад 3. Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Перевіримо, чи можна перемножувати дані матриці. Їх розмірності (2×3) та (3×2)**.** Кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Отже, дані матриці можна перемножувати. Розмірність добутку AB (2×2), тому що добуток матиме стільки рядків, скільки рядків має матриця A, і стільки стовпців, скільки стовпців має матриця B. Отже,

$$AB=\begin{pmatrix} 5\cdot0+2\cdot7+(-4)\cdot(-9) & 5\cdot1+2\cdot4+(-4)\cdot1 \\ 1\cdot0+2\cdot7+0\cdot(-9) & 1\cdot1+2\cdot4+0\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 50 & 9 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$$

10. **Властивості операцій над матрицями.**

Якщо a, b – числа, а A, B, C – матриці, то:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $O + A = A + O = A$;

3) $A + B = B + A$; 4) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

5) $a \cdot (A + B) = aA + aB$; 6) $(a + b) \cdot A = aA + bA$;

7) $0 \cdot A = A \cdot 0 = O$; 8) $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$;

9) $a \cdot O = O$; 10) $a \cdot (AB) = (aA)B$;

11) $bA = Ab$; 12) $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$;

13) $(A + B) \cdot C = AC + BC$; 14) $A(B + C) = AB + AC$;

15) $AO = OA = O$; 16) $AE = EA = A$;

17) рівність AB = BA справедлива не завжди.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Дано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) $A + B$; б) $A - B$; в) $2A - 3B$;

г) $A \cdot C$; д) $A \cdot B$; е) $A \cdot B^T$;

ж) $C \cdot A$; и) $A^T \cdot B$; к) $B^T \cdot A$.

Відповідь:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 7 & -17 & 12 \\ 0 & 5 & -19 \end{pmatrix}$;

г) не існує; д) не існує; е) $\begin{pmatrix} -20 & 23 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} -3 & 13 & -11 \\ 13 & -5 & 0 \\ 8 & -2 & -1 \\ 9 & -11 & 7 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 11 \\ 6 & -13 & 13 \\ -7 & 11 & -16 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -7 \\ 3 & -13 & 11 \\ 11 & 13 & -16 \end{pmatrix}$.

№ 2. Розв’язати матричні рівняння (знайти матрицю X):

а) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$;

б) $2X-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $8X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}\cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 6 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + X = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -2 & -13 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & -4 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 3.Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перевірити для цих матриць справедливість рівностей:
а) $A + C = C + A$; б) $AB = BA$;
в) $A+(B-C) = (A + B) - C$; г) $B\cdot(A + C) = AB - CB$;
д) $A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$; е) $(A - B)\cdot C = AC - BC$;
ж) $A\cdot(B-C)=AB-AC$; и) $(A + C)\cdot B = BA + BC$.

Вказівка: *для доведення* ***рівності*** *матриць потрібно показати рівність* ***усіх*** *відповідних елементів, а для того, щоб довести, що дві матриці* ***не рівні*** *між собою, досить показати, що* ***хоча б один*** *елемент однієї матриці не дорівнює відповідному елементу другої матриці.*

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ №1-1**; умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 26.

ПЗ-2. ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. МІНОР. АЛГЕБРАЇЧНЕ ДОПОВНЕННЯ. ТЕОРЕМА РОЗКЛАДАННЯ. ТЕОРЕМА АНУЛЮВАННЯ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ.

Теоретичні відомості

1. Нехай дано квадратну матрицю другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Визначником другого порядку називають число, яке позначають одним із символів:

$\det A$; ΔA; $|A|$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\det(A_1, A_2)$,

і обчислюють за формулою:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}. \tag{1}$$

Інколи замість терміна «визначник» вживають термін «детермінант».

2. Для запам'ятовування формули (1) користуються таким **мнемонічним правилом:**

а) перемножують між собою пари елементів, які з'єднані однією лінією *(див. схему);*

б) від першого добутку віднімають другий.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Нехай дано матрицю третього порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Визначником третього порядку називають число, яке позначають одним із символів:

$\det A$; ΔA; $|A|$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\det(A_1, A_2, A_3)$,

і обчислюють за формулою:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \tag{2}$$

4. Для запам'ятовування формули (2) користуються так званим **правилом трикутників:**

а) перемножують між собою кожні три елементи, з'єднані однією прямою чи замкненою ламаною лінією *(див. схему);*

б) додають між собою добутки, отримані з однієї схеми;

в) від числа, отриманого за першою схемою, віднімають число, отримане за другою схемою.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Для запам'ятовування формули (2) користуються ще й таким **мнемонічним правилом:**

а) до цієї матриці дописують ще раз її перший та другий стовпці *(див. схему);*

б) перемножують між собою кожні три елементи, з'єднані однією лінією;

в) додають між собою добутки, отримані з однієї схеми;

г) від числа, отриманого за першою схемою, віднімають число, отримане за другою схемою.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Приклад 1. Знайти визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Розв'язання. За формулою (1) матимемо:

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 6 \cdot (-3) = -4 + 18 = 14.$

Приклад 2. Знайти визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв 'язання. За формулою (2) матимемо:

detA$= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-1) + (-2)\cdot 4\cdot 3 + 3\cdot(-4)\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 - (-2)\cdot(-4)\cdot(-1) - 2\cdot 4\cdot 2 = = -10 - 24 - 24 - 45 + 8 - 16 = -111.$

6. Властивості визначників.

1. **detA=detA$^{\mathbf{T}}$**. Звідси випливає, що будь-яка властивість, що справедлива для рядків визначника, справедлива і для його стовпців.

2. Визначник, що містить рядок, **всі елементи якого дорівнюють нулю**, теж дорівнює нулю.

3. Визначник, що містить **два однакові рядки**, дорівнює нулю.
4. Якщо **поміняти місцями будь-які два сусідні рядки**, то знак визначника зміниться на протилежний.
5. **Спільний множник елементів одного рядка** можна винести за знак визначника.
6. Визначник не зміниться, якщо **до елементів одного рядка додати елементи іншого рядка, помножені на довільне однакове число**.

7. Мінором елемента a_{ij} квадратної матриці А n-го порядку називають визначник квадратної матриці (n-1)-го порядку, отриманої з матриці А викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця (рядка і стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}). Позначають мінор елемента a_{ij} символом M_{ij}.

8. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці А називають мінор цього елемента, помножений на коефіцієнт $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} – M_{ij} .$$

Приклад 3. Знайти мінор M_{23} та алгебраїчне доповнення A_{23} матриці

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо квадратну матрицю В 2-го порядку, викресливши 2-й рядок і 3-й стовпець у матриці А.

$$B=\begin{pmatrix} 6 & -2 & \cancel{3} \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ 3 & -5 & \cancel{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

За формулою (1) знайдемо визначник матриці В. Це й буде шуканий мінор:

$$M_{23}=\det B=\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 6\times(-5) - (-2)\times 3 = -24$$

За означенням алгебраїчного доповнення:

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = (-1)^5\cdot M_{23} = (-1)\times(-24) = 24$$

Приклад 4 . Знайти мінор M_{21} та алгебраїчне доповнення A_{21} матриці

$$A=\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Викресливши в матриці А 2-й рядок і 1-й стовпець, отримаємо шуканий мінор:

$$M_{21}=\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7.$$

За означенням алгебраїчного доповнення:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^{3}\cdot M_{21}=(-1)\cdot(-7)=-7.$$

9. Теорема розкладання. Величина визначника дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого його рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Приклад 5. Знайти визначник $\det A=\begin{vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання. За теоремою розкладання матимемо:

$$\det A = 3\cdot A_{13} + 4\cdot A_{23} + (-1)\cdot A_{33}. \qquad (3)$$

Знайдемо потрібні алгебраїчні доповнення:

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=(-4)\cdot 2-5\cdot 3=-8-15=-23;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-\ (3\cdot 2-\ (-6)\cdot 3)=-\ (6+18)=-24;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-\ (-6)\cdot(-4)=15-24=-9.$$

Підставивши отримані значення в рівність (3), одержимо шуканий результат:

$$\det A = 3\cdot(-23) + 4\cdot(-24) + (-1)\cdot(-9) = -156.$$

Теорема розкладання дає можливість обчислювати **визначники будь-якого порядку.** Дійсно, за цією теоремою визначник n-го порядку можна подати через алгебраїчні доповнення його елементів, тобто через визначники (n-1)-го порядку, а кожен з них, також, через визначники (n-2)-го порядку і т. д. — аж до визначників третього порядку, обчислити які вже не важко.

10. **Теорема анулювання**. Сума попарних добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (або стовпця) цієї матриці дорівнює нулю.

11. Матрицю A^{-1} називають **оберненою до матриці** А, якщо виконується рівність

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E.$$

12. Квадратну матрицю називають **невиродженою або неособливою**, якщо її визначник не дорівнює нулю.

13. Для будь-якої невиродженої матриці **існує єдина** обернена матриця.

14. Квадратну матрицю Ã, кожен елемент якої є алгебраїчним доповненням відповідного елемента матриці A, називають **сполучною** або **доповняльною матрицею** матриці A.

15. Матрицю A^{-1}, **обернену до матриці** A, знаходять за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де A_{ij}— алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A. Формулу (4) можна записати так:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\tilde{A})^{T}, \tag{5}$$

де Ã — доповняльна матриця матриці A.

***Приклад** 6*. Знайти A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Виконати перевірку.

Розв'язання. За формулою (1):

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 = 18 \neq 0.$$

Визначник не дорівнює нулю, тому ця матриця невироджена і для неї існує обернена матриця.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = 4$; $A_{12} = (-1) \cdot 3 = -3$;

$A_{21} = (-1) \cdot 2 = -2$; $A_{22} = 6$.

Сполучна матриця:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

За формулою (5) матимемо:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. Знайдемо добуток матриць A^{-1} та A**:**

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 \cdot 6 - 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \\ -3 \cdot 6 + 6 \cdot 3 & -3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ми отримали одиничну матрицю, отже, A^{-1} знайдено правильно.

Приклад 7. Знайти A^{-1} та виконати перевірку, якщо

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За формулою (2):

$$\det A=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}=-3+0+18-9-0-12=-6 \neq 0.$$

Визначник не дорівнює нулю, тому ця матриця не вироджена, для неї існує обернена матриця.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3; \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3; \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2; \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=4; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=9; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=9; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-15;$$

За формулою (4) матимемо:

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 & 9 \\ -3 & 4 & 9 \\ 3 & -6 & -15 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & -9 \\ 3 & -4 & -9 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. Знайдемо добуток матриць A^{-1} та A**:**

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & -9 \\ 3 & -4 & -9 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\cdot1-2\cdot3-9\cdot(-1) & 3\cdot4-2\cdot(-3)-9\cdot2 & 3\cdot3-2\cdot0-9\cdot1 \\ 3\cdot1-4\cdot3-9\cdot(-1) & 3\cdot4-4\cdot(-3)-9\cdot2 & 3\cdot3-4\cdot0-9\cdot1 \\ -3\cdot1+6\cdot3+15\cdot(-1) & -3\cdot4+6\cdot(-3)+15\cdot2 & -3\cdot3+6\cdot0+15\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

Ми отримали одиничну матрицю, отже, A^{-1} знайдено правильно.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Знайти визначники матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Вказівка: е) *попередньо за знак визначника винести спільний множник елементів третього стовпця матриці.*

Відповідь: а) $\Delta = 11$; б) $\Delta = -2$; в) $\Delta = -7$;
г) $\Delta = -40$; д) $\Delta = -1$; е) $\Delta = 2 \cdot 21 = 42$.

№ 2. Відомо, що A — квадратна матриця 3-го порядку, а B – квадратна матриця 2-го порядку, причому $\det A = 5$, а $\det B = 3$.

Знайти:
а) $\Delta = \det(2A)$; б) $\Delta = \det(-5B)$; в) $\Delta = \det(-3A)$.

Відповідь: а) $\Delta = 40$; б) $\Delta = 75$; в) $\Delta = -135$.

№ 3. Дано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

1) знайти визначник матриці A безпосереднім обчисленням і розкладанням його за елементами 2-го рядка, порівняти результати;

2) знайти визначник матриці B безпосереднім обчисленням і розкладанням його за елементами 3-го стовпця, порівняти результати;

3) використовуючи знайдені алгебраїчні доповнення, перевірити для матриць A і B виконання теореми анулювання;

4) перевірити виконання рівностей:
а) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$;
б) $\det(A + B) = \det A + \det B$;
в) $\det(A^{T}) = \det A$.

Відповідь: $\det A = -30$; $\det B = 35$.

№ 4. Знайти матриці, обернені до заданих, і виконати перевірку:

а) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: ------а) $-\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 17 & -11 \\ 11 & -16 & 13 \\ 8 & -10 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

№ 5. Обчислити визначники матриць:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Вказівки: а) *виконуючи лінійні операції над рядками матриці, утворити в одному рядку три нулі, а потім розкласти визначник за елементами цього рядка (можна зробити це зі стовпцями);*

б) *виконуючи лінійні операції над рядками матриці, можна утворити рядок, всі елементи якого дорівнюють нулю, а потім скористатися властивостями визначників (див. п. 6(2)); можна так само використати стовпці матриці.*

Відповідь: а) $\Delta = -87$; б) $\Delta = 0$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 1 - 2;** умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 26.

ПЗ-3. МАТРИЧНИЙ ЗАПИС СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА. МЕТОД ЖОРДАНО-ГАУССА

Теоретичні відомості

Систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ an_1x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

можна записати у вигляді матричної рівності

$$A \cdot X = B, \tag{1}$$

де A — квадратна матриця n-го порядку, складена з коефіцієнтів при невідомих (її називають матрицею системи);

X – матриця розмірності $(n \times 1)$, складена з невідомих;

B – матриця розмірності $(n \times 1)$, складена з вільних членів. Тобто:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix};$$

Розв'язати систему – означає знайти такі значення невідомих x_1, $x_2, \ldots, x_n$, які одночасно перетворюють в істинні рівності всі рівняння системи. Це те ж саме, що й знайти невідому матрицю X, яка перетворює в істинну рівність матричне рівняння (1).

Систему лінійних рівнянь називають **невиродженою,** якщо матриця системи невироджена, тобто det A $\neq 0$.

Невироджена система лінійних рівнянь **має єдиний розв'язок**.

Розв'язок невиродженої системи лінійних рівнянь, записаної у вигляді матричного рівняння (1), знаходять за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{2}$$

де A^{-1} — матриця, обернена до матриці A .

Приклад *1.* Записати в матричній формі і розв'язати за допомогою оберненої матриці систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{4x + 2y - 10z = 10,} \\ \boldsymbol{x - 3y + 3z = 4,} \\ \boldsymbol{-2x + y + z = -5.} \end{cases} \tag{3}$$

Розв'язання. Запишемо систему (3) у вигляді матричної рівності

$$A \cdot X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{10} \\ \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{-5} \end{pmatrix};$$

Визначник матриці A

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12-12-10+60-12-2=12 \neq 0,$$

тому система рівнянь невироджена і має єдиний розв'язок.

Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до матриці А. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці А *(див. ПЗ-2, п. 7, 8)*:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-6;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-7;\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-12;\ A_{22}=\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-16;\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-8$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=-24;\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-22;\ A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-14.$$

Тоді *(див. ПЗ-2, п. 15)* матриця, обернена до матриці А, така:

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} -6 & -12 & -24 \\ -7 & -16 & -22 \\ -5 & -8 & -14 \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 12 & 24 \\ 7 & 16 & 22 \\ 5 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Підставивши А і В в формулу (2), отримаємо:

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 12 & 24 \\ 7 & 16 & 22 \\ 5 & 8 & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{6\cdot 10+12\cdot 4+24\cdot(-5)} \\ \mathbf{7\cdot 10+16\cdot 4+22\cdot(-5)} \\ \mathbf{5\cdot 10+8\cdot 4+14\cdot(-5)} \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{-12} \\ \mathbf{24} \\ \mathbf{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}\ \text{або}\ \begin{cases} \boldsymbol{x=1}, \\ \boldsymbol{y=-2}, \\ \boldsymbol{z=-1}. \end{cases}$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення змінних в усі рівняння системи (3):

$$\begin{cases} 2\cdot 1-2-5\cdot(-1) = 5, \\ 1-3\cdot(-2)+3\cdot(-1)=4, \\ -2\cdot 1-2-1=5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 4=4, \\ -5=-5. \end{cases}$$

Отримані рівності істинні, тому систему розв'язано правильно.

Нехай систему лінійних рівнянь (1) записано у вигляді матричної рівності (2). Позначимо:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Утворимо визначник Δ_1, замінивши у визначнику Δ перший стовпець на стовпець вільних членів (матрицю В), тобто:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно, замінюючи на стовпець вільних членів послідовно 2-й, 3-й, ... ,n-й стовпці визначника Δ, утворимо визначники $\Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n$.

Розв'язок системи лінійних рівнянь знаходять за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \ldots ; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{4}$$

які називають **формулами Крамера.**

Зауваження. *Формули Крамера можна застосовувати для розв'язування лише для невироджених систем лінійних рівнянь (необхідно, щоб виконувалась умова* $\Delta = \det A \neq 0$).

Приклад *2.* За формулами Крамера розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 10z = 10, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці цієї системи рівнянь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 10 + 60 - 12 - 2 = 12 \neq 0$$

$\Delta \neq 0$, тому система рівнянь невироджена і її можна розв'язувати за формулами Крамера.

Замінюючи послідовно стовпці визначника Δ на стовпець вільних членів, утворимо і обчислимо такі визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 & -10 \\ 4 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -30 - 30 - 40 + 150 - 30 - 8 = 12;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 16-60+50-80+60-10=-24;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 60-16+10-60-16+10=-12.$$

За формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{12}{12}=1; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-24}{12}=-2; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-12}{12}=-1.$$

Отже, шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \ \ 1}, \\ \boldsymbol{y = -2}, \\ \boldsymbol{z = -1}. \end{cases}$$

Перевірка. *Див. приклад 1.*

Систему лінійних рівнянь можна записувати у вигляді **розширеної матриці:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} & \boldsymbol{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} & \boldsymbol{b_n} \end{array}\right). \tag{5}$$

Нехай систему лінійних рівнянь записано у вигляді розширеної матриці (5). Розв'язання цієї системи рівнянь **методом Гаусса** складається з двох частин:

1) **прямий хід**: розширену матрицю (5) шляхом послідовного виконання лінійних операцій над її рядкам (тобто послідовного виконання операції додавання до одного рядка матриці іншого рядка, помноженого на певне число) зводять до вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a'_{12}} & \boldsymbol{a'_{13}} & \cdots & \boldsymbol{a'_{1n}} & \boldsymbol{b'_1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a'_{23}} & \cdots & \boldsymbol{a'_{2n}} & \boldsymbol{b'_2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \cdots & \boldsymbol{a'_{3n}} & \boldsymbol{b'_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{b'_n} \end{array}\right) \tag{6}$$

2) **обернений хід**: від розширеної матриці (6) переходять до відповідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1} \\ \boldsymbol{x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2} \\ \boldsymbol{x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \boldsymbol{x_n = b'_n} \end{cases} \tag{7}$$

Останнє рівняння системи (7) дає значення змінної x_n; підставляючи це значення в передостаннє рівняння знаходять x_{n-1}; продовжуючи цей процес, поступово знаходять значення всіх невідомих.

Метод Жордана-Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь полягає в тому, що прямий хід методу Гаусса продовжують до тих пір, поки розширена матриця (5) системи рівнянь не набуде вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{b''_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{b''_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{b''_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \boldsymbol{b''_n} \end{array}\right) \tag{8}$$

В розширеній матриці (8) ліворуч від вертикальної лінії записано одиничну матрицю, а в останньому стовпці − розв'язок системи рівнянь.

Зауваження. *Методи Гаусса та Жордана–Гаусса зручно застосовувати тоді, коли в системі рівнянь велика кількість невідомих і застосування інших методів веде до дуже громіздких обчислень. Методи Гаусса та Жордана–Гаусса можна застосовувати для розв'язування* ***вироджених*** *систем лінійних рівнянь.*

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y - 5z = 5,} \\ \boldsymbol{x - 3y + 3z = 4,} \\ \boldsymbol{-2x + y + z = -5.} \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Потрібно зробити так, щоб на місці елемента a_{11} знаходилась одиниця. Для цього поміняємо місцями перший і другий рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Утворимо нулі на місці елементів a_{21} та a_{31}. Для цього помножимо перший рядок на (-2) і додамо його до другого рядка; помножимо перший рядок на 2 і додамо його до третього рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \; 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -3\cdot(-2)+1 & -3\cdot(-2)-5 & 4\cdot(-2)+5 \\ 0 & -3\cdot 2+1 & 3\cdot 2+1 & 4\cdot 2-5 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -11 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

Утворимо одиницю на місці елемента a_{22}. Для цього помножимо другий рядок на (-2), а третій рядок – на (-3) і додамо їх. Отриману суму залишимо на місці другого рядка, а третій рядок залишимо без змін:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -11 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

Утворимо нуль на місці елемента a_{32}. Для цього помножимо другий рядок на 5 і додамо його до третього рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 5 \\ \\ \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right).$$

Помноживши третій рядок на $\frac{1}{12}$, утворимо одиницю на місці елемента a_{33}:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right)_{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Прямий хід методу Гаусса завершено. Запишемо систему рівнянь, яка відповідає отриманій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 4, \\ \quad\;\; y + z = -3, \\ \qquad\quad z = -1. \end{cases}$$

З третього рівняння $z = -1$. Підставимо це значення в друге рівняння і знайдемо у:

$$y - 1 = -3,$$
$$y = -2.$$

Підставимо знайдені значення у та z в перше рівняння і знайдемо х:

$$x - 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = 4,$$
$$x = 1.$$

Отже, шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = -1. \end{cases}$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення змінних в усі рівняння системи :

$$\begin{cases} 2\cdot 1 - 2 - 5\cdot(-1) = 5, \\ 1 - 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = 4, \\ -2\cdot 1 - 2 - 1 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 4 = 4, \\ -5 = -5. \end{cases}$$

Отримані рівності істинні, тому систему розв'язано правильно.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана–Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 5, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5\,. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Виконуючи лінійні операції над рядками цієї матриці *(див. приклад 3)*, матимемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} -2 \quad 2 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -11 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2 \\ 3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -11 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 5 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{12} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Утворимо нулі на місці елементів a_{23} та a_{13}. Для цього помножимо третій рядок на (-1) і додамо його до другого рядка; помножимо третій рядок на (-3) і додамо його до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -1 \quad -3 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Утворимо нуль на місці елемента a_{13}. Для цього помножимо другий рядок на 3 і додамо його до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Ліворуч від вертикальної лінії утворилася одинична матриця, тому праворуч — шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = -1. \end{cases}$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення змінних в усі рівняння системи :

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 2 - 5 \cdot (-1) = 5, \\ 1 - 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 4, \\ -2 \cdot 1 - 2 - 1 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 4 = 4, \\ -5 = -5. \end{cases}$$

Отримані рівності істинні, тому систему розв'язано правильно.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Записати задані системи лінійних рівнянь у матричній формі і розв'язати їх за допомогою оберненої матриці:

а) $\begin{cases} 4x + 6y = 2, \\ 3x - y = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 6y = 4, \\ 4x - 6y = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x + 3y - z = 2, \\ 3x - y + z = -5 \quad , \\ 2x + 3y - \mathbf{4z} = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1, \\ x - 2y + 4z = 2, \\ \mathbf{3}x + 2y + 3z = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 3, \\ 2x + 4y + 3z = 4, \\ 5x + 2y - 2г = -1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + 2y - z = -4, \\ x - 2y + 3z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3. \end{cases}$

Відповідь: а)$(-1;\ 1)$; б)$(2;\ -1)$; в)$(-1;\ 2;\ 0)$; г)$(0;\ 1;\ 1)$; д)$(1; -1;\ 2)$; е)$(-2; 1; 2)$.

№ 2. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \mathbf{5}x + 4y = -\mathbf{7}, \\ x - 3y = -9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - 2z = 7, \\ 2x + 3z = 0, \\ 3x + 6y + 4z = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y + 3z = 2, \\ 2x - y + 5z = 3. \end{cases}$

Відповідь: а) $(2; -1)$; б) $(-3; 2)$; в) $(3; 0; -2)$; г) $(-1; 0; 1)$.

№ 3. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x + 10y = -2, \\ \mathbf{3}x + \mathbf{7}y = \mathbf{5}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 1, \\ 3x + 2y - 5z = 3, \\ 2x + 4y - 3z = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - \mathbf{3}y + \mathbf{3z} - \mathbf{2}к = \mathbf{0}, \\ 3x + 2y + 3z + 4к = 3, \\ x + 3y - 5г + 3к = 4, \\ 2x - 2y + \mathbf{5z} - 5к = 3. \end{cases}$

Відповідь: а) $(4; -1)$; б) $(2; 1; 1)$; в) $(1; 2; 0; -1)$.

№ 4. Розв'язати задані системи лінійних рівнянь методом Жордана–Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 3y = 3, \\ 2x - 5y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2, \\ x - 2y + 4z = 3 \\ -2x + 2y + 3z = l; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \mathbf{3}\boldsymbol{x} + 4y - 3z + 4к = 7, \\ x + 2y + 5z + 2k = 3, \\ 4x + 3y - 4z + 2k = 5, \\ 3x + 2y + 7z = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 7y + 3z + 2к = 3, \\ 3x + 4y - z + 5k = 3, \\ 2x + 5y - 3z + 4k = 1, \\ x + 5y - 2z + 4k = 4. \end{cases}$

Відповідь: а) $(-3; -2)$; б) $(3; 2; 1)$; в) $(1; -1; 0; 2)$; г) $(-2; 0; 1; 2)$.

№ 5. Три КСП продавали свою продукцію державі за однаковими цінами. КСП «Перемога» продало 550 т пшениці, 4800 т цукрових буряків і 300 т ячменю за 307 тисяч гривень; КСП«Прогрес» **-** 500 т пшениці, 5000 т цукрових буряків і 600 т ячменю за 344 тисячі гривень; КСП «Зоряне» – 500 т пшениці, 4500 т цукрових буряків і 400 т ячменю за 301 тисячу гривень.

Скласти математичну модель ситуації у вигляді системи лінійних рівнянь і, розв'язавши її, знайти ціни на вказану сільськогосподарську продукцію.

Відповідь: ціна:
на пшеницю — 220 гривень за тонну;
на цукрові буряки — 30 гривень за тонну;
на ячмінь — 140 гривень за тонну.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 1-3;** умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 27.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

ІЗ № 1-1

Дано матриці A, B та C. Потрібно:

1) знайти: а) $A + C^т$, б) $2C-3A$, в) AC, г) CA, д) CB, е) $B-CB$;
2) розв'язати рівняння $AB + X=3B$ (знайти матрицю X).

ІЗ№ 1-2

Дано матриці A і C. Знайти:

1) detA методом безпосереднього обчислення;
2) M_{32} матриці A ;
3) A_{21} матриці C;
4) detC, розклавши його за елементами другого стовпця;
5) $\det A^т$, розклавши його за елементами третього рядка;
6) C^{-1} (виконати перевірку).

ІЗ № 1-3

Дано матриці A та B. Нехай $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Розв'язати систему лінійних рівнянь, записану в матричній формі $AX = B$:

1) за допомогою оберненої матриці:
2) за формулами Крамера;

3) методом Гаусса;
4) методом Жордана-Гаусса.

1. $A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 4\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}24\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & -2 & -4\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -3\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ 5\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 6\\ -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ -3\\ -9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & -4 & 2\\ 4 & -3 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 5 & 6 & -4\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 8\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -4 & 9\\ 8 & 2 & -5\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -5 & 4\\ 2 & 7 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ -5\\ 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3\\ 8 & 4 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -3\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5\\ -5\\ -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 3 & -1\\ 2 & 7 & 1\\ 2 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 9\\ -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 6 & 2 & -1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 8 & 5 & 0\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 5 & -2\\ 5 & 9 & -4\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7\\ -5\\ -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2\\ 6 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -5\\ 2 & 7 & -1\\ 2 & -7 & 2\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ -5\\ -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 6 & -2 & 1\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 8\\ -2\end{pmatrix}$, $C=\left(\begin{pmatrix}2 & -2 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.\right)$.

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 2\\ -6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 6 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ -3\\ -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 6\\ 4 & 3 & -5\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ -9\\ 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\ 1 & 3 & 4\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -5\\ 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 5 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 3 & -2 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -5\\ 3 & -3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-9\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 0 & -2\\ 3 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & -1\\ 2 & -3 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ 0 & 4 & -3\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 6 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 5\\ -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\ 7 & -1 & 5\\ 4 & 5 & -4\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5\\ 5 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -3\\ 5 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 1

ІЗ № 1-1

Дано матриці A, B та C. Потрібно:

1) знайти: а) $A + C^{т}$, б) $2C-3A$, в) AC,
г) CA, д) CB, е) $B-CB$;

2) розв'язати рівняння $AB + X = 3B$ (знайти матрицю X)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

а) Транспонуємо матрицю C , тобто замінимо її рядки стовпцями, зберігаючи порядок *(див. ПЗ-1, п.6)*. Матимемо:

$$C^{т}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$

За правилом додавання матриць *(див. ПЗ-1, п. 7):*

$$A+C^{т}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+1 & 2+1 & -3+0\\ 2-1 & -1+0 & 4-1\\ 3+2 & 1-3 & -1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 1 & -1 & 3\\ 5 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

б) За правилом множення матриці на число *(див. ПЗ-1, п. 8)*знаходимо:

$$2C = 2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2 & -1\cdot 2 & 2\cdot 2\\ 1\cdot 2 & 0\cdot 2 & -3\cdot 2\\ 0\cdot 2 & -1\cdot 2 & 6\cdot 2\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -6\\ 0 & -2 & 12\end{pmatrix};$$

$$-3A = -3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ -6 & 3 & -12\\ -9 & -3 & 3\end{pmatrix};$$

За правилом додавання матриць *(див. ПЗ-1, п.* 7):

$$2C - 3A = 2C + (-3A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -6 & 3 & -12 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3 & -2+6 & 4+9 \\ 2-6 & 0+3 & -6-12 \\ 0-9 & -2-3 & 12+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 13 \\ -4 & 3 & -18 \\ -9 & -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

в) Матриці A і C мають розмірність (3×3), тому їх можна перемножувати (кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці C). Добуток цих матриць теж матиме розмірність (3×3) (*див. ПЗ-1, п. 9).* За правилом множення матриць знаходимо:

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 - 3\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 - 3\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) - 3\cdot 6 \\ 2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 4\cdot 0 & 2\cdot(-1) - 1\cdot 0 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 2 - 1\cdot(-3) + 4\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 1\cdot(-3) - 1\cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -22 \\ 1 & -6 & 31 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

г) Аналогічно розв'язанню попереднього пункту знаходимо:

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -9 \\ -8 & -1 & 0 \\ 16 & 7 & -10 \end{pmatrix}.$$

д) Матриці C і B мають розмірності (3×3) та (1×1), тому їх можна перемножувати (кількість стовпців матриці C дорівнює кількості рядків матриці B). Добуток цих матриць матиме розмірність(3×1), оскільки він містить стільки рядків, скільки й матриця C, і стільки стовпців, скільки має матриця B *(див. ПЗ-1, п 9).*

За правилами множення матриць знаходимо:

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 1\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 5 - 3\cdot 2 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 5 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

е) Використавши знайдену в попередньому пункті матрицю CB, за правилами множення матриці на число знаходимо:

$$-CB = -1\cdot CB = -1\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Матриці В і $(-CB)$ однакової розмірності, тому їх можна додавати. Матимемо:

$$B-CB=B+(-CB) = \begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-1\\5-6\\2+7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\9\end{pmatrix}.$$

$$AB + X = 3B, \text{ тому } \quad X=3B-AB.$$

Користуючись правилами виконання операцій над матрицями, знайдемо:

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\2 & -1 & 4\\3 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 5-3\cdot 2\\2\cdot 0-1\cdot 5+4\cdot 2\\3\cdot 0+1\cdot 5-1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}.$$

$$3B = 3\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\15\\6\end{pmatrix}.$$

Тоді шуканий розв'язок рівняння:

$$X= 3B-AB=\begin{pmatrix}0\\15\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-4\\15-3\\6-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\12\\3\end{pmatrix}.$$

ІЗ № 1–2

Див. приклади, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2:

1) ***приклад 2;***
2), 3) ***приклад 3;***
4), 5) ***приклад 5;***
6) ***приклад* 7.**

ІЗ № 1-3

Див. приклади, розглянуті в теоретичних відомостях до ПЗ-2:

1) ***приклад 1 ;***
2) ***приклад 2 ;***
3) ***приклад 3 ;***
4) ***приклад 4 .***

РОЗДІЛ 2

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

ПЗ-1. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА. ВИДИ ВЕКТОРІВ. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. БАЗИС СИСТЕМИ ВЕКТОРІВ. ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

Теоретичні відомості

1. Вектором називають напрямлений відрізок. Позначають вектори одним із символів $\overrightarrow{AB}$, **CD,** $\vec{a}$, **b.** Якщо точка A є початком вектора, а точка B — його кінцем, то такий вектор позначають $\overrightarrow{AB}$ або **AB.**

2. Довжину напрямленого відрізка називають **довжиною вектора** або **модулем вектора** і позначають одним із символів $|\overrightarrow{AB}|$, **|CD|,** $|\vec{a}|$, **|b|.**

3. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **рівні** між собою тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову довжину і однаковий напрям. В такому випадку записують $\vec{a}=\vec{b}$.

4. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають **нульовим вектором** і позначають одним із символів: $\vec{\mathbf{0}}$,**0,** $\overrightarrow{AA}$, **AA**. Очевидно, що $|\vec{\mathbf{0}}|=0$.

5. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однаковий напрям, то їх називають **співнапрямленими** і позначають цей факт так: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Кут між співнапрямленими векторами дорівнює 0°. Вважають, що нульовий вектор співнапрямлений з будь-яким іншим вектором.

6. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають протилежний напрям, то їх називають **протилежно напрямленими** і позначають цей факт так: $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° .

7. Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають **колінеарними** і позначають $\vec{a}\,||\,\vec{b}$. Очевидно, що $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ або $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

8. Вектори, які лежать на одній площині або на паралельних площинах, називають **компланарними**. Очевидно, що **будь-які два вектори – компланарні**.

9. Добутком вектора $\vec{a}$ **на скаляр (число)** $\boldsymbol{\alpha}$ називають вектор $\boldsymbol{\alpha\vec{a}}$ *(рис. 1)*, який задовольняє такі умови:

1) якщо $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$, то $\boldsymbol{\alpha\vec{a}}\uparrow\uparrow\vec{a}$;
2) якщо $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$, то $\boldsymbol{\alpha\vec{a}}\uparrow\uparrow\vec{a}$;
3) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|\cdot|\vec{a}|$.

10. Вектор $-\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}$ називають **протилежним** вектору $\vec{a}$ *(рис. 1*). Очевидно, що $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

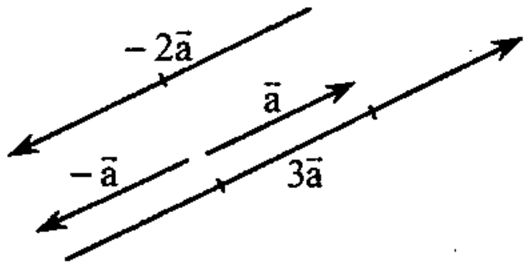
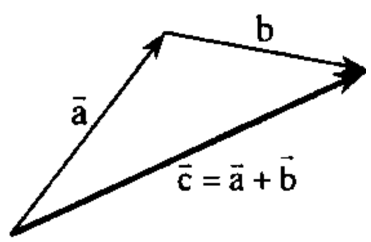


Рисунок 1

11. Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{\mathbf{c}} = \vec{a} + \vec{\mathbf{b}}$, який знаходять одним із таких методів:

1) **метод трикутника**, який полягає в тому, що вектор $\vec{b}$ відкладають від кінця вектора $\vec{a}$ *(рис. 2*), тоді початок вектора $\vec{\mathbf{c}}$ збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$;

2) **метод паралелограма**, який полягає в тому, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладають від однієї точки *(рис. 3),* тоді вектор $\vec{\mathbf{c}}$ починається в тій самій точці і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах.



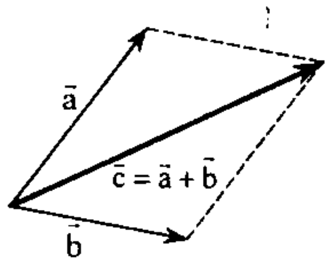


Рисунок 2 Рисунок 3

12. **Різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$, метод побудови якого полягає в тому, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладають від однієї точки *(рис. 4).* Тоді початок вектора $\vec{\mathbf{c}}$ збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а його кінець – з кінцем вектора $\vec{a}$.

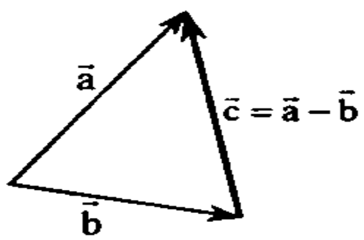


Рисунок 4

13. Якщо $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ — вектори, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — скалярні величини (числа), то вектор $\vec{k} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$ називають **лінійною комбінацією векторів** $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

14. Систему векторів $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають **лінійно незалежною**, якщо їх лінійна комбінація дорівнює $\vec{0}$ **лише** за умови, що $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$.

15. Систему векторів $\vec{a}_1\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають **лінійно залежною**, якщо існує така їх лінійна комбінація, яка дорівнює $\vec{0}$ і при цьому **хоч одне** з чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не дорівнює нулю.

16. Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

17. Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

18. **Базисом** системи **векторів** називають таку лінійно незалежну множину векторів, у якій кожен вектор системи можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів цієї множини.

19. **Розкласти вектор за векторами базису** означає подати його у вигляді лінійної комбінації векторів базису. Кожен вектор системи можна розкласти за векторами базису єдиним способом.

20. Якщо вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_к$ утворюють базис деякої системи векторів і $\vec{a} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_k\vec{e}_k$, то впорядковану множину чисел називають **координатами** вектора $\vec{a}$ в цьому базисі і позначають $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_k)$.

21. Базисом множини всіх векторів, що лежать на одній прямій, може бути будь-який ненульовий вектор, що лежить на цій прямій.

22. Базисом множини всіх векторів площини може бути будь-яка пара неколінеарних векторів цієї площини.

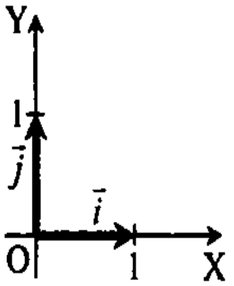


Рисунок 5

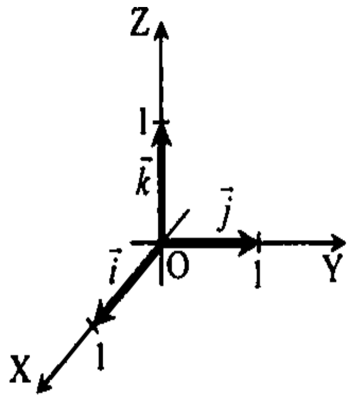


Рисунок 6

Надалі ми користуватимемось **прямокутним декартовим базисом**, який утворюють два взаємно перпендикулярні одиничні вектори *(рис.* 5) Вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$ часто називають **ортами**, а утворений ними базис – **ортонормованим базисом векторів площини.**

23. Базисом множини всіх векторів тривимірного простору може бути будь-яка трійка некомпланарних векторів цього простору. Надалі ми користуватимемось прямокутним декартовим базисом, який утворюють три взаємно перпендикулярні одиничні вектори ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) *(рис. 6)*. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ часто називають **ортами**, а утворений ними базис – **ортонормованим базисом векторів тривимірного простору.**

24. Якщо $\vec{a} = x\vec{\boldsymbol{i}} + y\vec{\boldsymbol{j}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$, то впорядковану трійку чисел (x y; z) називають координатами вектора $\vec{a}$ в ортонормованому базисі і записують $\vec{a}$ = (x; y; z).

25. Якщо в прямокутній декартовій системі координат $A(x_A, y_A; z_A)$ і $B(x_в; y_в; z_в)$ то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A,\ z_B - z_A). \tag{1}$$

26. Якщо $\vec{a}$ = (x; y; z), то:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + \boldsymbol{z}^2}; \tag{2}$$

$$\vec{a} = (\alpha x;\ \alpha x; \alpha z). \tag{3}$$

27. Якщо $\vec{a} = (x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$ і $\vec{b} = (x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$, то:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_{\vec{a}} + x_{\vec{b}};\ y_{\vec{a}} + y_{\vec{b}}; z_{\vec{a}} + z_{\vec{b}}); \tag{4}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_{\vec{a}} - x_{\vec{b}};\ y_{\vec{a}} - y_{\vec{b}}; z_{\vec{a}} - z_{\vec{b}}); \tag{5}$$

$$\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \frac{x_{\vec{a}}}{x_{\vec{b}}} = \frac{y_{\vec{a}}}{y_{\vec{b}}} = \frac{z_{\vec{a}}}{z_{\vec{b}}}. \tag{6}$$

Приклад *1.* Дано координати точок: A(3; − 1; 2), B(2; 1; 4), C(−1; 3; −2), D(1; −1; −6). Потрібно знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ та їх модулі;

б) координати векторів $-3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$;

2) встановити, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

Розв'язання

1)

а) за формулою (1) знаходимо:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) = (2-3;\ 1-\ (-1); 4-2)$,

$\overrightarrow{AB} = (-1;\ 2;\ 2)$;

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A;\ y_C - y_A,\ z_C - z_A) = (-1-3;\ 3-\ (-1);\ -2-2)$,

$\overrightarrow{AC} = (-4;\ 4;\ -4)$;

$\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C;\ y_D - y_C,\ z_D - z_C) = (1-\ (-1);\ -1-3;\ -6-\ (-2))$, $\overrightarrow{CD} = (2;\ -4;\ -4)$.

За формулою (2) знаходимо: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AB}} + y^2_{\overrightarrow{AB}} + z^2_{\overrightarrow{AB}}} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$ лін. од.

Аналогічно:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16 + 16} = 4\sqrt{3}$ лін. од.;

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$ лін. од.

б) За формулою (3) знаходимо:

$-3\overrightarrow{AB} = (-3x_{\overrightarrow{AB}};\ 3y_{\overrightarrow{AB}};\ -3z_{\overrightarrow{AB}}) = (-3\cdot(-1); -3\cdot 2; -3\cdot 2)$;

$-3\overrightarrow{AB} = (3; -6; -6)$.

За формулою (4) матимемо:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{AC}};\ y_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{AC}};\ z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{AC}}) = (-1+(-4); 2 + 4; 2 + (-4)) = = (-5; 6; -2)$.

За формулою (5) знаходимо:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (x_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{CD}};\ y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{CD}};\ z_{\overrightarrow{AC}} - z_{\overrightarrow{CD}}) =$$
$$= (-4-2; 4-(-4); -4-(-4)) = (-6; 8; 0).$$

2) Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ пропорційні

$$\frac{x_{\overrightarrow{CD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{2}{-1} = \frac{y_{\overrightarrow{CD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-4}{2} = \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-4}{2} = -2,$$

тому ці вектори колінеарні *(див. п. 27, формула (6))*.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Перевірити аналітично і геометрично векторні рівності

а) $\vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; б) $\vec{a} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$.

№ 2. В трикутнику ABC сторону AB точками M та N поділили на три рівні частини: AM = MN = NB. Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Відповідь : $\overrightarrow{CM} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

№ 3. Точка M – точка перетину медіан грані ABC трикутної піраміди ABCD, Знайти вектор $\overrightarrow{DM}$, якщо $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Відповідь: $\overrightarrow{DM} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

№ 4. Дано три компланарні одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, причому $\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}) = 30°$ і $\angle(\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}) = 60°$ (кути відкладають проти годинникової стрілки). Побудувати вектор $\vec{p} = \vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} - 3\vec{c}$ і знайти його модуль.

Вказівка : *в ламаній, побудованій з векторів* $\vec{\mathbf{a}}$, $2\vec{\mathbf{b}}$ *та* $3\vec{c}$, *продовжити першу ланку до перетину з третьою*

Відповідь: $|\vec{p}| = \sqrt{2\sqrt{3} + 8}$ лін. од.

№ 5. Дано координати точок: A(2; 1; 0), B(3; −1;2), C (13; 3; 10), D(0; 1; 4).

Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ та їх модулі;

б) координати вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\mathbf{AC}}-2\overrightarrow{\mathbf{AD}}+3\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ і $2\overrightarrow{CD}$

Відповідь: а) $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $|\overrightarrow{AB}|=3$ лін. од.;

$\overrightarrow{AC}=(11;2;10)$, $|\overrightarrow{AC}|=15$ лін. од.;

$\overrightarrow{\mathbf{AD}}=(-2;0;4)$, $|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{5}$ лін.од.;

б) (20; 8; 16).

№ 6. Дано координати трьох послідовних вершин паралелограма A(1; −2; 3), B(3; 2; 1), C(6; 4; 4). Знайти його четверту вершину.

Відповідь: D(4; 0; 6)

№7. Відомо координати двох вершин паралелограма ABCD: A(1; 2; −2) та B(3; −4; 1). Діагоналі паралелограма перетинаються в точці O(5; 4; 3). Знайти координати вершин C та D.

Відповідь: C(9; 6; 8), D(7; 12; 5).

№ 8. У правильному шестикутнику ABCDEF $\overrightarrow{AB}=\vec{\mathbf{a}}$ і $\overrightarrow{AF}=\vec{\mathbf{b}}$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{AE}$ в базисі, утвореному векторами $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$.

Відповідь: у базисі: $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$: $\overrightarrow{AC}=(2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;2)$, $\overrightarrow{AE}=(1;2)$.

№ 9. Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам.

Вказівка: *розглянути цей відрізок як вектор і виразити його через вектори, що збігаються зі сторонами трапеції.*

№ 10. При яких значеннях α і β будуть колінеарними вектори $\vec{\mathbf{a}}=(-2;3;\alpha)$ і $\vec{\mathbf{b}}=(\beta;-6;2)$?

Відповідь: $\alpha=-1$; $\beta=4$.

№ 11. На площині дано три точки A(5; 1), B(−1; −2) і C(−7; 5). В початку координат прикладено сили $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$. Побудувати рівнодійну (суму) $\overrightarrow{OM}$ цих сил і знайти її величину (модуль).

Відповідь: $|\overrightarrow{OM}|=5$од.

№ 12. Дано вектори $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(\mathbf{-1};\mathbf{3};\mathbf{2})$, $\vec{c}=(7;-3;5)$ і $\vec{d}=(-6;10;3)$. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, утворюють базис у просторі і знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Вказівка: а) *щоб довести, що три вектори утворюють базис у просторі, досить довести їх лінійну незалежність. Для цього потрібно показати, що визначник, складений з координат цих векторів, не дорівнює нулю.*

б) *Записати розклад вектора* $\vec{d}$ *за векторами* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *з невідомими коефіцієнтами окремо для кожної координати і розв'язати отриману систему рівнянь.*

Відповідь: $\vec{d}=(2;1;-1)$ в базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 2-1;** умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 46.

ПЗ - 2. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ОЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ВЕКТОРІВ. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВЕКТОР. КУТ МІЖ ВЕКТОРАМИ

Теоретичні відомості

1. **Скалярним добутком** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, (позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$) називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}). \tag{1}$$

2. **Фізичний зміст скалярного добутку**. Якщо $\vec{f}$ – вектор сили, а $\vec{s}$ – вектор переміщення, то скалярний добуток $\vec{f}\cdot\vec{s}$ – робота сили $\vec{f}$ при переміщенні на вектор $\vec{s}$.

3. **Властивості скалярного добутку**

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$; 4) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$;

5) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha\,(\overrightarrow{\vec{a}\cdot\vec{b}})$; 6) $\vec{a}\cdot\vec{a}=(|\vec{a}|)^2$.

4. **Ознака перпендикулярності векторів**. Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю. Тобто, якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, то

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \tag{2}$$

5. **Проекцією** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ (позначають $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$) називають число, яке дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) \tag{3}$$

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначають за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \tag{4}$$

6. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ визначають за формулою:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \quad (5)$$

7. Якщо $\vec{a} = (x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$ і $\vec{b} = (x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_{\vec{a}}\cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}\cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}}\cdot z_{\vec{b}}); \quad (6)$$

$$пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_{\vec{a}}\cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}\cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}}\cdot z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{b}}^2 + y_{\vec{b}}^2 + z_{\vec{b}}^2}}; \quad (7)$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{x_{\vec{a}}\cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}\cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}}\cdot z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{a}}^2 + y_{\vec{a}}^2 + z_{\vec{a}}^2}\cdot\sqrt{x_{\vec{b}}^2 + y_{\vec{b}}^2 + z_{\vec{b}}^2}}. \quad (8)$$

Приклад 1. Дано вектори $\vec{a} = (-2;\ 8;\ 2)$, $\vec{b} = (11;\ -2;\ 10)$. Знайти:

а) скалярний добуток векторів;

б) проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;

в) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. а) За формулою (6) знаходимо:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_{\vec{a}}\cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}\cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}}\cdot z_{\vec{b}}) = -2\cdot 11 + 8\cdot(-2) + 2\cdot 10 = -18.$

Скориставшись формулою (7), отримаємо:

$$пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_{\vec{a}}\cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}\cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}}\cdot z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{b}}^2 + y_{\vec{b}}^2 + z_{\vec{b}}^2}} = \frac{-18}{\sqrt{11^2 + (-2)^2 + 10^2}} = \frac{-18}{\sqrt{121+4+100}} = \frac{-18}{\sqrt{225}} = -\frac{-18}{15} = = -1{,}2$$

в) За формулою (8) знаходимо:

$$\cos\frac{-18}{\sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 2^2\cdot\sqrt{225}}} = \frac{-18}{\sqrt{72}\cdot 15} = \frac{-18}{6\sqrt{2}\cdot 15} = \frac{-1}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{10} = -0{,}1\cdot\sqrt{2}.$$

З отриманої рівності знаходимо:

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos(-0{,}1\cdot\sqrt{2}).$$

Приклад 2. При якому значенні $\boldsymbol{\alpha}$ будуть перпендикулярними вектори $\vec{\mathbf{a}} = (-2;\ 3;\ \boldsymbol{\alpha})$ і $\vec{\mathbf{b}} = (4;\ \boldsymbol{\alpha};\ -7)$?

Розв'язання. За формулою (6) знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_{\vec{a}}\cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}\cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}}\cdot z_{\vec{b}} = \mathbf{4\alpha} + 3\boldsymbol{\alpha} - 28 = \mathbf{7\alpha} - 28.$$

За ознакою перпендикулярності векторів:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{7\alpha} - 28 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{7\alpha} = 28 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{4}.$$

Отже, вектори будуть перпендикулярними при $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{4}$.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Обчислити значення виразу

$(2\vec{\imath}-\vec{\jmath})\cdot\vec{\jmath}+(\vec{\jmath}-2\vec{k})\cdot\vec{\boldsymbol{k}}+(\vec{\imath}-2\vec{k})\cdot(\vec{\imath}-2\vec{k})$.

Відповідь:2.

№ 2. Обчислити значення виразу $(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$, якщо відомо, що $|a|$= 2 лін. од., $|\mathbf{b}|$= 3 лін. од. і $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Відповідь:13.

№ 3. Знайти кути трикутника з вершинами A(2; -1; 3), B(1; 1; 1) і C(0; 0; 5).

Відповідь:$\angle$A=90°, $\angle$B = $\angle$C = 45°.

№ 4. Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ і$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, якщо c = (1; I; 2), $\vec{b}$ = (1; -1; 4).

Відповідь: $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$; $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

№ 5. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$= (2;1;0) і $\vec{b}$= (0; -2;1) як на сторонах.

Відповідь: φ = 90°.

№ 6. Довести, що гострий кут між діагоналями прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою:

$$\varphi=\arccos\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

№ 7. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$ та $\vec{b}=\vec{e}_1-2\,\vec{e}_2$ як на сторонах, якщо $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ – одиничні вектори, кут між якими становить 60°.

Вказівка: *скористатися властивістю скалярного добутку (див. п. 3(6)).*

Відповідь: $d_1=|d_1|=\sqrt{13}$= лін. од., $d_2=|d_2|=\sqrt{7}$ лін. од.

№ 8. Знайти вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$= (1; 1; 2) і $\vec{b}$ = (2; 1; 1) і має модуль $\sqrt{11}$ лінійних одиниць.

Вказівка: *надати шуканому вектору три невідомі координати; для їх визначення скласти і розв'язати систему трьох рівнянь (два рівняння скласти, виходячи з ознаки перпендикулярності векторів, а третє $-$з формули для обчислення модуля вектора).*

Відповідь: $\vec{c}_1$=(1; -3;1); $\vec{c}_2$ = (-1; 3; -1) .

№ 9. У трикутнику ABC відомо довжини двох сторін AB = 2 лін. од., AC = 4 лін. од. і кут між ними $\angle$BAC = 60°. Знайти кут між медіаною AM і стороною AB цього трикутника

Вказівка: *скористатися векторною рівністю* $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

Відповідь: $\varphi=\arccos\frac{2\cdot\sqrt{7}}{7}$

№ 10. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{d}_1=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ і $\vec{d}_2=5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|$= 1 лін. од., $|\vec{b}|$= 2 лін. од., $|\vec{c}|$= 3 лін. од., $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{c})=\angle(\vec{b},\vec{c})=60°$.

Відповідь: $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$=547.

№ 11. При якому значенні $\boldsymbol{\alpha}$ будуть перпендикулярними вектори $\vec{a} = (1;\ \boldsymbol{\alpha};\ -2)$ і $\vec{b} = (-1;\ 3;\ \boldsymbol{\alpha})$?

Відповідь: $\boldsymbol{\alpha} = 1$.

№ 12. Очищення русла зрошувального каналу відбувається таким чином: очисний пристрій по дну каналу тягнуть за допомогою тросів два однакові трактори, які рухаються протилежними берегами каналу паралельно до його русла.

Кути між тросом кожного трактора і напрямком руху очисного пристрою однакові і дорівнюють 30°. Кожен трактор діє на пристрій з силою 30 кН. Знайти роботу, яку виконав кожен трактор, якщо очищено 100 погонних метрів каналу.

Вказівка: *скористатися означенням скалярного добутку та його фізичним змістом.*

Відповідь: $A = 1500 \cdot \sqrt{3}$кДж =2 598076 Дж.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **13 № 2-2**; умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 47.

ПЗ - 3. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ОЗНАКА КОЛІНЕАРНОСТІ ВЕКТОРІВ. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ОЗНАКА КОМПЛАНАРНОСТІ ВЕКТОРІВ

Теоретичні відомості

1. **Векторним добутком векторів** $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (позначають $\vec{a} \times \vec{b}$) називають вектор $\vec{c}$ *(рис.* 7), який задовольняє такі три умови:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$;

3) вектор $\vec{c}$ має такий напрям, що коли відкласти вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ від однієї точки і дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ буде виконуватись проти годинникової стрілки (це означає, що трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є правою).

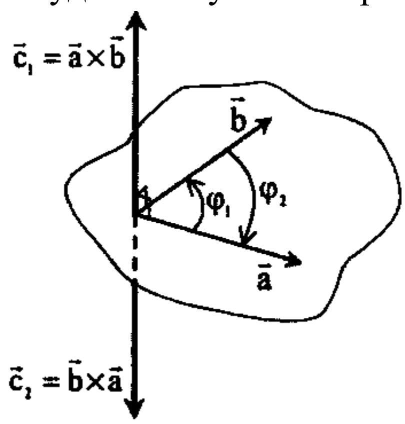


Рисунок 7

2. **Ознака колінеарності векторів**

Два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору. Тобто

$$\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}. \qquad (1)$$

3. **Властивості векторного добутку:**

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b})$; 2) $\vec{a} \times \vec{0} = ;\vec{0}$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times c = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$; 4) $(\vec{a} - \vec{b}) \times c = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$;

5) $(\alpha\vec{a}) \times (\beta\vec{b}) = a\beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$; 6) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

4. Для векторів прямокутного декартового базису виконуються рівності:

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \overrightarrow{k,} \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}. \qquad (2)$$

5. Модуль вектора чисельно дорівнює **площі паралелограма**, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

6. Якщо $\vec{a} = (x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$ і $\vec{b} = (x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_{\vec{a}} & y_{\vec{a}} & z_{\vec{a}} \\ x_{\vec{b}} & y_{\vec{b}} & z_{\vec{b}} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Якщо отриманий визначник розкласти за елементами першого рядка *(див. Розділ 1, ПЗ-2, п. 9, приклад 5*), то формула (3) набуде вигляду:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_{\vec{a}} & z_{\vec{a}} \\ y_{\vec{b}} & z_{\vec{b}} \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_{\vec{a}} & z_{\vec{a}} \\ x_{\vec{b}} & z_{\vec{b}} \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_{\vec{a}} & y_{\vec{a}} \\ x_{\vec{b}} & y_{\vec{b}} \end{vmatrix} \cdot \vec{k}. \qquad (4)$$

Приклад 1. Знайти площу трикутника АВС, якщо $\overrightarrow{AB} = (4;\ -2;\ 5)$, $\overrightarrow{AC} = (2;\ 3;\ -4)$.

Розв'язання. Шукана площа дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах, а площа цього паралелограма *(див. п. 5)* дорівнює $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Тому:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \qquad (5)$$

За формулами (3), (4) та правилом обчислення визначників другого порядку *(див. Розділ 1, ПЗ-2, п. 1, 2)* знаходимо:

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}}\\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-$$

$$-\begin{vmatrix}4 & 5\\ 2 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=-7\vec{i}+26\vec{j}+16\vec{k}.$$

Знайдемо модуль отриманого вектора *(див. ПЗ-1, п. 26, рівність (2)*:

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+26^2+16^2}=\sqrt{49+676+256}=3\cdot\sqrt{109}.$$

Підставивши це значення в рівність (5), одержимо:

$$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{109}=1{,}5\cdot\sqrt{109}\ \text{кв. од.}$$

7. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (позначають $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$) називають число, яке дорівнює векторному добутку двох перших векторів, помноженому скалярно на третій вектор. Тобто:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}. \qquad (6)$$

8**. Ознака компланарності векторів.** Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

9. **Властивості мішаного добутку векторів**:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$; 3) $(\alpha\vec{a})(\beta\vec{b})(\gamma\vec{c})=\alpha\beta\gamma(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;

4) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}$; 5) $(\vec{a}-\vec{b})\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{b}-\vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

10**.** Модуль мішаного добутку векторів чисельно дорівнює **об'єму паралелепіпеда**, побудованого на цих векторах як на ребрах.

11**.** Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ як на ребрах, знаходять за формулою:

$$V=\frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{6}. \qquad (7)$$

12. Якщо $\vec{a}=(x_{\vec{a}};\ y_{\vec{a}};\ z_{\vec{a}})$, $\vec{b}=(x_{\vec{b}};\ y_{\vec{b}};\ z_{\vec{b}})$, $\vec{c}=(x_{\vec{c}};\ y_{\vec{c}};\ z_{\vec{c}})$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_{\vec{a}} & y_{\vec{a}} & z_{\vec{a}}\\ x_{\vec{b}} & y_{\vec{b}} & z_{\vec{b}}\\ x_{\vec{c}} & y_{\vec{c}} & z_{\vec{c}}\end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти об'єм трикутної піраміди ABCD, якщо відомо, що $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(3;1;1)$ і $\overrightarrow{A\mathbf{D}}=(2;-1;0)$.

Розв'язання*.* Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. За формулою (8) та правилами обчислення визначників 3-го порядку *(див. Розділ 1, ПЗ-2, п. 3-5)* отримаємо:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-4-3-2-2-0=-11.$$

Підставивши знайдене значення у формулу (7), одержимо шуканий об'єм:

$$V=\frac{|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|}{6}=\frac{|-11|}{6}=\frac{11}{6}\text{ куб. од.}$$

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Обчислити значення виразу

$2(\vec{j}\times\vec{k})\cdot\vec{i}+3\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+4(\vec{i}\times\vec{j})\cdot\vec{\boldsymbol{k}}$.

Відповідь: 3.

№ 2. Довести: а) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{b}$;

б) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{b}$.

№ 3. Знайти площу трикутника з вершинами A(7; 3; 4), B(1; 0; 6) і C(4; –5;–2).

Відповідь: S = 24,5 кв. од.

№ 4. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ та $3\vec{a}+2\vec{b}$ як на сторонах, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$ лін од., $\angle(\vec{a},\vec{b})=45°$.

Відповідь: $S=50\sqrt{2}$ кв. од.

№ 5. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ і $\vec{b}=2\vec{e}_1+e_2$ як на сторонах, якщо $\vec{e}_1$ та e_2 – одиничні вектори, що утворюють кут 30°.

Відповідь: S= 1,5 кв. од.

№ 6. Довести, що точки A(2; − 1; − 2), B(1; 2; 1), C(2; 3; 0), D(5; 0; −6) лежать на одній площині.

Вказівка: *показати, що вектори* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *та* $\overrightarrow{AD}$ *компланарні, тобто їх мішаний добуток дорівнює нулю.*

№ 7. Довести, що вектори $\vec{a}=(-1;3;2)$, $\vec{b}=(2;-3;-4)$ і $\vec{c}=(-3;12;6)$ компланарні і розкласти вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Відповідь: $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$.

№ 8. Дано координати вершин трикутної піраміди OABC: O(0; 0; 0), A(5; 2; 0), B(2; 5; 0), C(1; 2; 4). Знайти:

1) площу грані ABC ;
2) об'єм піраміди OABC;
3) висоту OM піраміди OABC.

Вказівка: *для* 3) *скористатися формулою для обчислення об'єму піраміди, відомою з шкільного курсу геометрії*

Відповідь: 1) $S=6\sqrt{3}$ кв. од.; 2) V = 14 куб. од.; 3) $OM=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ лін. од.

№ 9. Довести, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на діагоналях граней заданого паралелепіпеда, дорівнює подвоєному об'єму заданого паралелепіпеда.

Вказівка: *показати, що за умови, коли об'єм заданого паралелепіпеда* $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, *то об'єм шуканого паралелепіпеда*

$$\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)(\vec{a}+\vec{c})\right|;$$

порівняти модулі цих мішаних добутків.

№ 10. Знайти об'єм паралелепіпеда $OABCO_1 A_1 B_1C_1$, в якому дано координати трьох вершин нижньої основи O(0; 0; 0), A(2; − 3; 0), C(3; 2; 0) і однієї вершини верхньої основи B_1 (3; 0; 4) (вершина B_1 лежить на ребрі BB_1, протилежному до ребра OO_1).

Вказівка: *знайти вектор* $\overrightarrow{OO_1}$ *з очевидної рівності* $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO_1}$, *а після цього обчислити об'єм заданого паралелепіпеда (див. п. 10).*

Відповідь: V = 52 куб. од.

№ 11. Знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, якщо відомо, що ці вектори лежать на бісектрисах координатних кутів і модуль кожного з них дорівнює 2 лін. од.

Вказівка: *знайти координати векторів* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ *і* $\overrightarrow{OC}$*; після цього обчислити об'єм піраміди (див. п. 11).*

Відповідь: $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ куб. од.

№ 12. Показати, що вектори $\vec{a} = (1; 1; \alpha)$, $\vec{b} = (1; 1; \alpha + 1)$ і $\vec{c} = (1; -1; \alpha)$ не будуть компланарними при жодному значенні α.

Вказівка: *показати, що рівняння* $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ *не має розв'язків.*

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 2-3**; умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 47.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2–1

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD. Знайти:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ та їх модулі;
2) координати векторів: а) $-2\overrightarrow{AB}$,

   б) $2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;
3) довжину медіани DM грані DBC;
4) координати вектора $\vec{a} = 2\overrightarrow{DM}$ в базисі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

ІЗ № 2-2

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD. Знайти:

1) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$;
2) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
3) величину ∠A грані ABC.

З'ясувати, чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

ІЗ № 2-3

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD. Знайти:

1) площу грані ABC;
2) об'єм піраміди ABCD;
3) відстань від точки D до грані ABC.

1. A(-3; 4;-3),	B(-2; 2;-1),	C(8; 6; 7),	D (5; 8; 5).
2. A(-2;-3; 2),	B(-1;-5; 4),	C(9;-1; 12),	D (6; 1; 10).
3. A(-4; 5; - 5),	B(-3; 3; - 3),	C(7; 7; 5),	D (4; 9; 3).
4. A(2;-1;-4),	B(3;-3;-2),	C(13;1;6),	D (10; 3; 4).
5. A(-8; 3;-1),	B(-7; 1; 1),	C(3; 5; 9),	D(0; 7; 7).
6. A(3;1;-2),	B(4;-1; 0),	C(14; 3; 8),	D(11; 5; 6).
7. A(0; 2;-10),	B(1; 0;-8),	C(11;4;0),	D(8; 6;-2).
8. A(-1;-2;-8),	B(0;-4;-6),	C(10; 0; 2),	D(7; 2; 0).
9. A(1;-4;0),	B(2;-6; 2),	C(12;-2; 10),	D(9; 0; 8).
10. A(-5; 0; 1),	B(-4; - 2; 3),	C(6; 2; 11),	D(3; 4; 9).
11. A(4;-2; 5),	B(8; 2; 3),	C(6; 9;-5),	D(4; 0; 6).
12. A(3; 3;-3),	B(7; 7;-5),	C(5; 14;-13),	D(3; 5;-2).
13. A(-2; 0;-2),	B(2; 4;-4),	C(0;11;-12),	D(-2;2;-1).
14. A(0;4;3),	B(4; 8; 1),	C(2; 15;-7),	D(0; 6; 4).
15. A(-4; 2;-1),	B(0; 6;-3),	C(-2; 13;-11),	D(-4; 4; 0).
16. A(-1; 1;-5),	B(3; 5;-7),	C(1; 12;-15),	D(-1;3;-4).
17. A(-3;-6; 2),	B(1;-2; 0),	C(-1; 5;-8),	D(-3;-4;3).
18. A(1;-4; 0),	B(5;0;-2),	C(3; 7;-10),	D(1;-2; 1).
19. A(5;-1;-4),	B(9; 3;-6),	C(7; 10;-14),	D(5; 1;-3).
20. A(2;-3; 1),	B(6; 1;-1),	C(4; 8;-9),	D(2;-1; 2).
21. A(-5; 2;-3),	B(-4; 4;-5),	C(6; 12; -1),	D(3; 10; 1).
22. A(-1;-4;-1),	B(0;-2;-3),	C(10; 6; 1),	D(7; 4; 3).
23. A(0;-2; 1),	B(1; 0;-1),	C(11; 8; 3),	D(8; 6; 5).
24. A(-2;-1; 8),	B(-4;0;6),	C(0; 10;-2),	D(2; 7; 0).
25. A(-2; 1; 0),	B(-1;3;-2),	C(9;11;2),	D(6; 9; 4).
26. A(1;-3; 3),	B(5;-5; 7),	C(3;-13; 14),	D(1;-2;5).
27. A(3;3;4),	B(7;1;8),	C(5;-7; 15),	D(3; 4; 6).
28. A(2;-5; 1),	B(6;-7;5),	C(4;-15; 12),	D(2;-4;3).
29. A(4; 0;-4),	B(8;-2; 0),	C(6;-10; 7),	D(4;1;-2).
30. A(-3; 2; 4).	B(1;6;2).	C(8; 4;-6),	D(-1; 2; 5).

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
І ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ РОЗДІЛУ 2

ІЗ № 2–1

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD:
A(4; −1;3), B(−2; 1; 0), C(0; −5; 1), D (3;2; −6).
Знайти:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ та їх модулі;
2) координати векторів: а) $-2\overrightarrow{AB}$, б) $2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;
3) довжину медіани DM грані DBC;
4) координати вектора $\vec{a} = 2\overrightarrow{DM}$ у базисі $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

Розв'язання

1) За формулою (1) *(див. ПЗ-І)* знаходимо:
$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A; y_B-y_A, z_B-z_A)= (-2-4;\ 1-(-1);\ 0-3)$,
$\overrightarrow{AB} = (-6; 2; -3)$.
Аналогічно:
$\overrightarrow{AC} = (0-4;\ -5-(-1);\ 1-3) = (-4;\ -4;\ -2)$;
$\overrightarrow{AD} = (3-4; 2-(-1);\ -6-3) = (-1;\ 3;\ -9)$.
За формулою (2) (*див. ПЗ-1)*знаходимо:
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AB}} + y^2_{\overrightarrow{AB}} + z^2_{\overrightarrow{AB}}} = \sqrt{(-6)^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{36+4+9} =$$
$= \sqrt{49} = 7$ лін. од.
Аналогічно:
$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ лін. од.;
$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-1)^2+3^2+(-9)^2} = \sqrt{1+9+81} = \sqrt{91}$ лін. од.

2)
а) За формулою (3) (*див. ПЗ-1*) знаходимо:
$$-2\overrightarrow{AB} = (-2x_{\overrightarrow{AB}}; -2y_{\overrightarrow{AB}}; -2z_{\overrightarrow{AB}}) = (-2\cdot(-6); (-2)\cdot 2; (-2)\cdot -3);$$
$$-2\overrightarrow{AB} = (12; -4; 6).$$
б) За формулами (3), (4) і (5) (*див. ПЗ-1*) матимемо:
$$2AC + 3AD - AB =$$
$$= (2x_{\overrightarrow{AC}} + 3x_{\overrightarrow{AD}} - x_{\overrightarrow{AB}}; -2y_{\overrightarrow{AC}} + 3y_{\overrightarrow{AD}} - y_{\overrightarrow{AB}}; 2z_{\overrightarrow{AC}} + 3z_{\overrightarrow{AD}} - z_{\overrightarrow{AB}}) =$$
$$= (2\cdot(-4) + 3\cdot(-1)—(-6);\ 2\cdot(-4) + 3\cdot 3 - 2;$$
$$2\ \cdot(-2) + 3\cdot(-9) - (-3) = (-8-3+6;\ -8+9-2;\ -4-27+3)$$
$$== (-5;\ -1;\ -28).$$
3) Якщо DM — медіана трикутника DBC (рис. 8), то очевидно, що справедлива рівність:

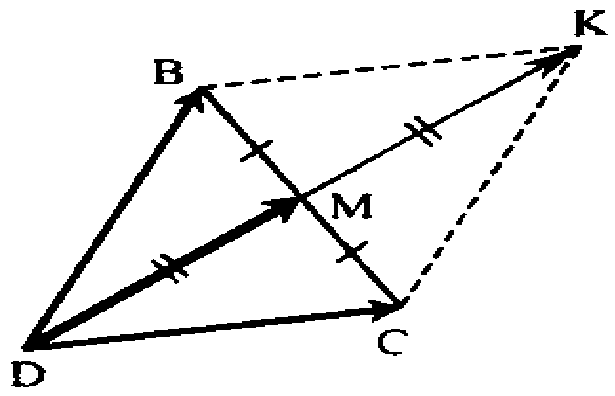


Рисунок 8

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$ за формулою (1) (*див. ПЗ-1*):

$$\boldsymbol{\overrightarrow{DB}} = (\mathbf{3} - (-\mathbf{2}); \mathbf{2} - \mathbf{1}; -\mathbf{6} - \mathbf{0}) = (\mathbf{5}; \mathbf{1}; -6);$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{DC}} = (\mathbf{3} - \mathbf{0}; \mathbf{2} - (-5); -6 - \mathbf{1}) = (\mathbf{3}; \mathbf{7}; -7).$$

За формулою (4) ***(див. ПЗ-1)*** знаходимо:

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = (5 + 3;\ 1 + 7; -6 + (-7)) = (8; 8; -13).$$

За формулою (3) ***(див. ПЗ-1)*** отримаємо:

$$\overrightarrow{DM} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DK} = (4;\ 4;\ -6{,}5).$$

4) З міркувань, наведених у попередньому пункті, випливає:

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DK} = (8; 8; -13).$$

Нехай у базисі $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$

$$\vec{a} = (x;\ y;\ z).$$

Це означає, що

$$a = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} + z \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Записавши цю рівність окремо для кожної координати, отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -6x - 4y - z = 8, \\ 2x - 4y + 3z = 8, \\ -3x - 2y - 9z = -13. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь одним із відомих нам методів *(див. Розділ 1, ПЗ-3, п. 5, 6, 9, 10, приклади 1 – 4)* і знайдемо:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \\ z = 2. \end{cases}$$

Отже, $\vec{a} = (-1;\ -1; 2)$ у базисі $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$.

ІЗ № 2-2

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD:
A(4; −1; 3), B(−2; 1; 0), C(0; −5; 1), D (3; 2; −6).
Знайти:

1) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$;
2) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
3) cos ∠A грані ABC.

З'ясувати, чи перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

Розв'язання

1) У попередньому завданні було знайдено $\overrightarrow{AC} = (-4;\ -4;\ -2)$ і $\overrightarrow{AD}\,(-1;\ 3;\ -9)$.

За формулою (6) *(див. ПЗ-2)*знаходимо:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AC}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AC}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}} + z_{\overrightarrow{AC}}\cdot z_{\overrightarrow{AD}} =$$
$$= -4\cdot(-1) + (-4)\cdot 3 + (-2)\cdot(-9) = 4 - 12 + 18 == 10.$$

2) У попередньому завданні було знайдено:
$\overrightarrow{AB} = (-6;\ 2;\ -3)$, $\overrightarrow{AD} = (-1;\ 3;\ -9)$ і $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 7$ лін. од.

За формулою (6) *(див. ПЗ-2)*знаходимо:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}} + z_{\overrightarrow{AB}}\cdot z_{\overrightarrow{AD}} =$$
$$= -6\cdot(-1) + 2\cdot 3 + (-3)\cdot(-9) == 6 + 6 + 27 = 39.$$

За формулою (4) *(див. ПЗ-2)* і знайденим вище матимемо:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{39}{7}.$$

ут A грані ABC утворюють вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, координати і модулі яких було знайдено у попередньому завданні. Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AC}} + z_{\overrightarrow{AB}}\cdot z_{\overrightarrow{AC}}$$
$$= -6\cdot(-4) + 2\cdot(-4) + (-3)\cdot(-2) = 24 - 8 + 6 == 22.$$

За формулою (5) *(див. ПЗ-2)* та знайденим вище матимемо:

$$\boldsymbol{cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{22}{7\cdot 6} = \frac{11}{21}}.$$

Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ було знайдено у попередньому завданні. Обчислимо їх скалярний добуток:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{DC}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{DC}} + z_{\overrightarrow{AB}}\cdot z_{\overrightarrow{DC}} == -6\cdot 3 + 2\cdot 7 +$
$+(-3)\cdot(-7)$ = 18 + 14 + 21 = 17.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}= 17 \neq 0$, тому за ознакою перпендикулярності векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ не перпендикулярні.

ІЗ № 2-3

Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD:
A(4; −1; 3), B(−2; 1; 0), C(0; −5; 1), D(3; 2; −6).
Знайти:
1) площу грані ABC;
2) об'єм піраміди ABCD;
3) відстань від точки D до грані ABC.

Розв'язання

1) У попередніх завданнях було знайдено: $\overrightarrow{AB} = (-6;\ 2;\ -3)$ і $\overrightarrow{AC} = (-4;\ -4;\ -2)$. За формулами (3) і (4) *(див. ПЗ-5)* обчислимо координати векторного добутку цих векторів:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}}\\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 2 & -3\\ -4 & -4 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{i} -$$
$$-\begin{vmatrix}-6 & -3\\ -4 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{j} +\begin{vmatrix}-6 & 2\\ -4 & -4\end{vmatrix}\cdot\vec{k} = -16\vec{i} -0\vec{j}+32\vec{k}.$$

За формулою (2) *(див. ПЗ-2)*знайдемо модуль отриманого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|= \sqrt{(-16)^2+(0)^2+32^2} =$$
$$= 18\cdot\sqrt{2^2+2^2+1} = 16\cdot\sqrt{5} \text{ лін. од}$$

Підставимо знайдене значення у формулу (5) *(див. ПЗ-3)* і отримаємо площу грані ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{16\cdot\sqrt{5}}{2}= 8\cdot\sqrt{5}\text{ кв. од.}$$

2) Піраміда ABCD побудована на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$, координати яких було знайдено в попередніх завданнях. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (8) *(див. ПЗ-3):*

$$\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix}x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}}\\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}}\\ x_{\overrightarrow{AD}} & y_{\overrightarrow{AD}} & z_{\overrightarrow{AD}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-6 & 2 & -3\\ -4 & -4 & -2\\ -1 & 3 & -9\end{vmatrix}=$$
$$= -216+4+36+12-36-72=-272.$$

Підставивши знайдене значення в формулу (7) *(див ПЗ-3),* одержимо шуканий об'єм:

$$\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = \frac{|-272|}{6} = \frac{272}{6} = \frac{136}{3}\text{ куб. од.}$$

3) Якщо вважати грань ABC основою піраміди ABCD, то шукана відстань від точки D до грані ABC буде висотою піраміди. Тоді, як відомо, об'єм піраміди обчислюється за формулою:

4)

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot h_D,$$

де V_{ABCD} – об'єм піраміди ABCD;

S_{ABC} – площа грані ABC;

h_D – висота піраміди, опущена з точки D (шукана відстань).

З цієї формули випливає:

$$h_D=\frac{3\cdot V_{ABCD}}{S_{ABC}}.$$

Підставивши знайдені вище V_{ABCD}та S_{ABC}, матимемо:

$$h_D=\frac{3\cdot\frac{136}{3}}{8\cdot\sqrt{5}}=\frac{17}{\sqrt{5}} \text{ лін. од.}$$

Отже, відстань від точки D до грані ABC дорівнює $\frac{17}{\sqrt{5}}$ лін. од.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ПЗ-1. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ. ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ. РІВНЯННЯ ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ. РІВНЯННЯ КОЛА. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Теоретичні відомості

1. **Відстань між точками** $A(x_A;y_A)$ і $B(x_B;y_B)$ обчислюється за формулою:

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}. \tag{1}$$

Зокрема, відстань від точки $A(x_A;y_A)$до початку координат – точки $O(0;0)$ – обчислюється за формулою:

$$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}. \tag{2}$$

2. Якщо для точок A, B та M виконується умова:

$$\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\overrightarrow{MB}, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{\lambda} \neq -1$ — деяке число, то кажуть, що точка M **ділить відрізок** AB **у відношенні $\boldsymbol{\lambda}$.**

Очевидно, що при $\boldsymbol{\lambda} = 1$, точка M – **середина відрізка** AB**.**

Якщо $\boldsymbol{\lambda} < 0$, то точка M лежить не на відрізку AB, а на його продовженні; тоді кажуть, що точка M ділить відрізок AB **зовнішнім чином**.

3. Нехай $A(x_A;y_A)$ і $B(x_B;y_B)$. **Координати точки** $M(x_M;y_M)$, **що ділить відрізок** AB **у відношенні $\boldsymbol{\lambda}$**, обчислюються за формулами:

$$x_M = \frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}; \quad y_M = \frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda}. \tag{4}$$

Якщо M – **середина відрізка** AB (тобто $\boldsymbol{\lambda} = 1$), то формули (4) матимуть вигляд:

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A+y_B}{2}. \tag{5}$$

Приклад 1. Дано координати точок $A(-1;\ 2)$ і $B(3;\ 4)$. Знайти:

1) довжину відрізка AB ;
2) координати точки M , що ділить відрізок AB у відношенні $\boldsymbol{\lambda}$, якщо:
а) $\boldsymbol{\lambda_1}$= 3 ; б) $\boldsymbol{\lambda_2}$=-2; в) $\boldsymbol{\lambda_3}$=1; г) $\boldsymbol{\lambda_4}$=0.

Виконати рисунок.

Розв'язання

1) Підставивши координати точок A і B у формулу (1), знайдемо довжину відрізка AB:

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\big(3-(-1)\big)^2 + (4+2)^2} =$$
$$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\cdot\sqrt{5} \text{ лін. од.}$$

2) Підставляючи у формулу (4) координати точок A та B і відповідні значення $\boldsymbol{\lambda}$, знайдемо:

а) $x_{M_1} = \frac{x_A+\lambda_1\cdot x_B}{1+\lambda_1} = \frac{-1+3\cdot 3}{1+3} = \frac{8}{4} = 2.$

Отже, M(2; 3,5) ділить відрізок AB у відношенні $\boldsymbol{\lambda_1} = 3$.

б) $x_{M_2} = \frac{x_A+\lambda_2\cdot x_B}{1+\lambda_2} = \frac{-1+(-2)\cdot 3}{1+(-2)} = \frac{-7}{-1} = 7.$

Отже, M_2(7; 6) ділить відрізок AB у відношенні $\boldsymbol{\lambda_2} = -2$. Ця точка ділить відрізок AB зовнішнім чином.

в) $\boldsymbol{\lambda_2} = 1$, тому точка M_3 – середина відрізка AB. В такому разі скористаємось формулами (5):

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$
$$y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Отже, $M_3(1;\,3)$ – середина відрізка AB. Ця точка ділить відрізок AB у відношенні $\boldsymbol{\lambda_3}$= 1.

г) Оскільки $\boldsymbol{\lambda_4}$= 0, то рівність (3) матиме вигляд: $\overrightarrow{AM_4} = 0 \cdot \overrightarrow{M_4B} = \vec{0}$. Це означає, що точки A і M_4 збігаються. Отже, точка $M_4(-1;\,2)$ ділить відрізок AB у відношенні $\boldsymbol{\lambda_4}$= 0.

Такий самий результат можна отримати, скориставшись формулами (4). В декартовій системі координат будуємо відрізок AB і точки, що ділять його в заданих відношеннях (*рис. 9*).

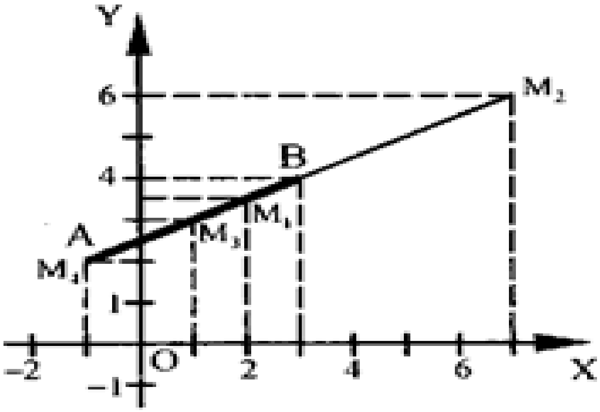


Рисунок 9

4. **Рівнянням лінії** на координатній площині називають рівняння відносно змінних x та y, яке задовольняє координати будь-якої точки цієї лінії.

5. **Рівняння кола** з центром у точці $O(x_0;\,y_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{6}$$

Зокрема, **рівняння кола** з радіусом R і **центром в початку координат** має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{7}$$

***Приклад** 2.* Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 29 = 0$.

Розв'язання

Згрупуємо доданки, які містять однакові змінні, і доповнимо отримані вирази до повних квадратів. Матимемо:

$$(x^2 + 8x) + (y^2 - 4y) - 18 = 0,$$
$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) - 16 - 4 - 29 = 0,$$
$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 49,$$
$$(x - (-4))^2 + (y - 2)^2 = 7^2.$$

Порівнюючи отримане рівняння і рівняння (6), встановимо, що радіус шуканого кола R= 7 лін. од., а центр $O(-4;\,2)$.

6. Будь-яке рівняння першого степеня відносно змінних x та y є рівнянням прямої на площині. Будь-яка пряма на площині задається рівнянням першого степеня відносно змінних x та y.

7. **Нормальним вектором прямої** називають вектор $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ перпендикулярний до цієї прямої (*рис. 10*).

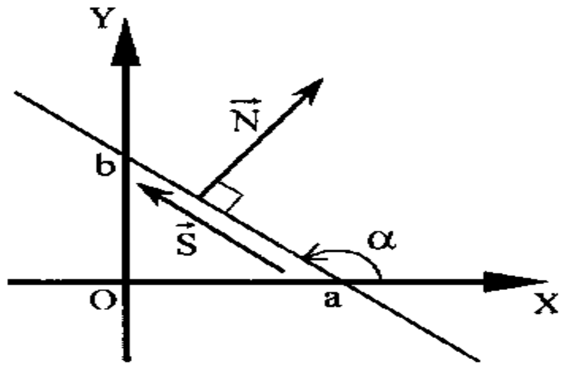


Рисунок 10

8. **Напрямним вектором прямої** називають вектор $\vec{\mathrm{S}}$, паралельний цій прямій (*рис. 10*).

9. Кут α між прямою і додатним напрямком осі OX, відкладений проти годинникової стрілки, називають **кутом нахилу прямої** до осі OX (*рис. 10*).

10. **Кутовим коефіцієнтом прямої** називають тангенс кута нахилу прямої до осі OX , тобто $\mathrm{k} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

11. Ординату **b** точки перетину прямої з віссю OY називають **початковою ординатою** або відрізком, який відтинає пряма на осі OY. Абсцису **a** точки перетину прямої з віссю OX називають відрізком, який відтинає пряма на осі OX (*рис. 10*).

12. **Загальне рівняння прямої** має вигляд:

$$\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0, \tag{8}$$

де A, B — координати нормального вектора прямої.

13. **Рівняння прямої, що проходить через задану точку** $\mathrm{M_0(x_0;\ y_0)}$ **перпендикулярно до заданого вектора** $\overrightarrow{\mathrm{N}} = (\mathrm{A};\ \mathrm{B})$, має вигляд:

$$\mathrm{A(x - x_0)} + \mathrm{B(y - y_0)} = 0. \tag{9}$$

14. **Рівняння прямої, що проходить через задану точку** $\mathrm{M_0(x_0;\ y_0)}$ **паралельно до заданого вектора** $\overrightarrow{S} = (l;\ m)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}\,. \tag{10}$$

Це рівняння називають ще **канонічним рівнянням прямої.**

14. **Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд**:

$$y = kx + b, \tag{11}$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої; b – її початкова ордината.

15. **Рівняння прямої у відрізках** має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{12}$$

де a і b — відрізки, які відтинає пряма на осях координат.

16. **Рівняння прямої, що проходить через задану точку** $M_0(x_0;\ y_0)$ в **заданому напрямку**, має вигляд:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0), \tag{13}$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої.

17. **Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки** $M_1(x_1;\ y_1)$і $M_2(x_2;\ y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{14}$$

Зауваження. *Під час використання рівняння* (14) *може трапитись, що, наприклад,* $x_2 = x_1$. *Тоді рівняння матиме вигляд.*

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Незважаючи на абсурдність, таке рівняння є цілком справедливим;від нього можна легко перейти до рівняння:$x = x_1$, *яке задає пряму, паралельну до осі* OY.

Приклад 3. Дано координати вершин чотирикутника ABCD: $A(-3;-1), B(2;\ 5), C(7;4), D(\ 4;-1)$. Знайти точку перетину його діагоналей. Виконати рисунок.

Розв'язання

Складемо рівняння прямих AC і BD. Для цього підставимо координати відповідних точок у рівняння (14):

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A}, \qquad \frac{x - x_B}{x_D - x_B} = \frac{y - y_B}{y_D - y_B},$$

$$\frac{x - (-3)}{7 - (-3)} = \frac{y - (-1)}{4 - (-1)}, \qquad \frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - 5}{-1 - 5},$$

$$\frac{x + 3}{10} = \frac{y + 1}{5}, \qquad \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 5}{-6},$$

$$\frac{x + 3}{2} = y + 1, \qquad x - 2 = \frac{y - 5}{-3},$$

$$x + 3 = 2y + 2, \qquad -3x + 6 = y - 5,$$

$$x - 2y + 1 = 0.3 \qquad x + y - 11 = 0.$$

Отже, $x - 2y + 1 = 0$ – рівняння діагоналі AC; $3x + y - 11 = 0$ – рівняння діагоналі BD.

P – точка перетину діагоналей чотирикутника, яка лежить на обох цих прямих, тому її координати задовольняють обидва знайдені рівняння. Це означає, що координати точки P будуть розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 3x + y - 11 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y - 1, \\ 3 \cdot (2y - 1) + y - 11 = 0: \end{cases}$$

$$6y - 3 + y - 11 = 0,$$

$$7y = 14,$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

Отже, P(3; 2) – точка перетину діагоналей чотирикутника ABCD. У прямокутній системі координат будуємо заданий чотирикутник і його діагоналі *(рис. 11)*

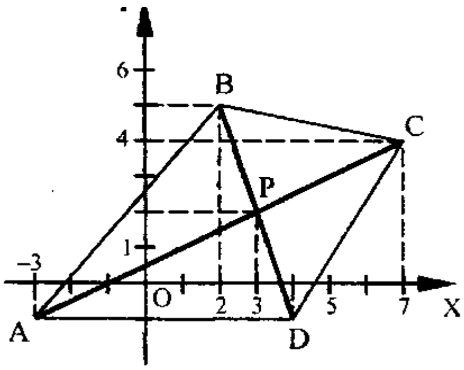


Рисунок 11

Приклад 4. Пряму задано загальним рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$.

Знайти:

1) нормальний вектор прямої;
2) кутовий коефіцієнт прямої;
3) кут нахилу прямої до осі OX ;
4) рівняння прямої у відрізках;
5) канонічне рівняння прямої;
6) напрямний вектор прямої.

Виконати рисунок.

Розв'язання

1) Порівнявши задане рівняння прямої з рівнянням (8), встановимо, що нормальним вектором цієї прямої буде вектор

$$\vec{N} = (3; -5),$$

оскільки його координати дорівнюють коефіцієнтам при змінних у загальному рівнянні прямої.

2) Розв'язавши відносно у задане рівняння, зведемо його до такого вигляду (11):

$$3x - 5y + 15 = 0,$$
$$5y = 3x + 15,$$
$$y = 0{,}6x + 3.$$

Як видно з рівняння (11), коефіцієнт при x дорівнює кутовому коефіцієнту прямої. Отже, шуканий кутовий коефіцієнт k = 0,6.

3) За означенням кутового коефіцієнта, він дорівнює тангенсу шуканого кута α, кута нахилу прямої до осі OX . Тобто $\operatorname{tg}\alpha = k$. Підставивши в цю рівність знайдене вище значення k = 0,6, знайдемо:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}0{,}6 = 0{,}54 \text{ рад}.$$

4) Перенесемо вільний член заданого рівняння в праву частину рівності і поділимо на нього обидві частини рівняння. Отримаємо шукане рівняння прямої у відрізках:

5)

$$3x - 5y = -15,$$
$$\frac{3x}{-15} - \frac{5y}{-15} = 1,$$
$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

З цього рівняння видно, що задана пряма відтинає на осях координат відрізки $a = -5$ і $b = 3$, тобто проходить через точки $A(-5;\ 0)$ і $B(0;\ 3)$.

6) Виконаємо алгебраїчні перетворення заданого рівняння:

$$3x - 5y + 15 = 0,$$
$$3x = 5y - 15,$$
$$\frac{3x}{15} = \frac{5y - 15}{15},$$
$$\frac{x}{5} = \frac{y - 3}{3}$$

Ми отримали шукане канонічне рівняння заданої прямої.

7) Порівнюючи знайдене вище канонічне рівняння прямої з рівнянням (10), знайдемо координати шуканого напрямного вектора заданої прямої:

$$\vec{S} = (5;\ 3).$$

У прямокутній системі координат будуємо задану пряму, її нормальний і напрямний вектори (*рис. 12*).

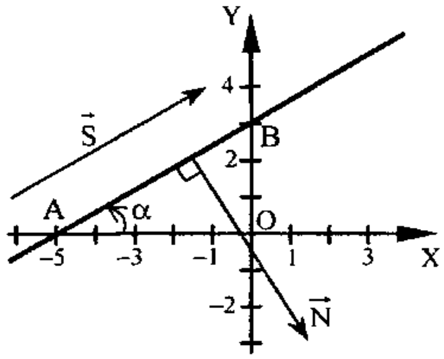


Рисунок 12

Завдання для роботи в аудиторії

Зауваження. *Всі завдання до розділу 3 потрібно виконувати методами аналітичної геометрії, а не векторної алгебри.*

№ 1. Дано координати точок $A(-7;\ 0)$ і $B(\ 0;\ 1)$. Побудувати точки A_1 і B_1, симетричні до точок A і B відносно прямої y = x. Обчислити периметр трапеції ABB_1A_1. Знайти координати точок перетину сторін трапеції з прямою y = x .

Вказівка. 1) *При симетрії відносно прямої* y = x *координати точки міняються місцями.*

2) *Точка перетину сторони отриманої трапеції з прямою* y = x *є серединою цієї сторони.*

Відповідь: P = $18\sqrt{2}$ лін. од.; $A_0(-3{,}5;-3{,}5)$, $B_0(0{,}5;0{,}5)$.

№ 2. Дано координати точок $A(-2;\ 1)$ і $B(3;\ 6)$. Знайти координати точки M, що ділить відрізок AB у відношенні λ, якщо:

а) $\lambda = 1{,}5$; б) $\lambda = -1{,}5$; в) $\lambda = 1$; г) $\lambda = -1$;

д) $\lambda = 0{,}2$; е) $\lambda = 2$; ж) $\lambda = -2$; и) $\lambda = -3$.

Виконати рисунок.

Відповідь: а) (1; 4) ; б) (13; 16); в) (0,5; 3,5); г) не існує;
д)$\left(-\frac{7}{6};\frac{11}{6}\right)$; е)$\left(\frac{4}{3};\frac{13}{3}\right)$; ж) (8; 11); и) (6,5; 8,5).

№ 3. Знайти довжини медіан трикутника з вершинами A(0; 0), B(8; 0), C(0; 6). Виконати рисунок.

Відповідь: $AA_1 = 5$ лін. од., $BB_1 = \sqrt{73}$ лін. од., $CC_1 = 2\sqrt{13}$ лін. од.

№4. Трикутник ABC – рівнобедрений $AC = BC = 5$ лін. од. Знайти координати точки C, якщо $A(-1;\ 2)$ і $B(6;\ 1)$. Виконати рисунок.

Відповідь : задача має два розв'язки: $C_1(3;\ 5), C_2(2;-2)$.

№ 5. Знайти рівняння кола, яке проходить через точки $A(\ 5;\ -1)$, $B(-2;\ 6)$ і $C(\ 2;\ 8)$. Вказати координати центра і радіус кола. Виконати рисунок.

Відповідь: $(x-2)^2+(y-3)^2=25$; $O_1(2;3)$; $R=5$ лін. од.

№ 6. Знайти центри і радіуси кіл, заданих рівняннями:

а) $x^2+y^2-10x+6y+30=0$; б) $x^2+y^2+2x-4y-11=0$;

в) $x^2+y^2+4x+8y+11=0$; г) $x^2+y^2+6x=0$.

Відповідь: а) $O_1(5;-3)$, $R=2$ лін. од.; б) $O_1(-1;2)$, $R=4$ лін. од.;

в) $O_1(-2;-4)$, $R=3$ лін. од.; г) $O_1(-3;0)$, $R=3$ лін. од.

№ 7. Скласти рівняння прямої,

а) що відтинає на осі Oy відрізок $b=3$ і утворює кут 120° з додатним напрямком осі Ox ;

б) що проходить через точку A(1; 2) і має кутовий коефіцієнт k = 2 ;

в) що проходить через точки $B(2;-1)$ і $C(-4;8)$;

г) що відтинає на осях Ox і Oy відрізки $a=6$ і $b=-3$;

д) що проходить через точку $D(-2;-3)$і перпендикулярна до вектора $\vec{N}=(1;-2)$;

е) що проходить через точку $E(3;-2)$ і паралельна до вектора $\vec{S}=(2;-1)$.

Знайдені рівняння звести до вигляду загального рівняння прямої. Виконати рисунок.

Відповідь: а) $\sqrt{3}\cdot x+y-3=0$; б) $2x-y=0$;

в) $3x+2y-4=0$; г) $x-2y-6=0$;

д) $x-2y-4=0$; е) $x+2y+1=0$.

№ 8. Дано загальні рівняння прямих. Знайти рівняння цих прямих у відрізках. Знайти кутові коефіцієнти прямих. Виконати рисунок.

а) $2x-3y-6=0$; б) $3x+y-3=0$;

в) $10x+2y-5=0$; г) $8x-5y-10=0$.

Вказівка. *Для знаходження кутового коефіцієнта прямої, заданої рівнянням у відрізках, можна скористатися рівністю* $k=\frac{b}{a}$, *доведення якої пропонуємо виконати самостійно.*

Відповідь:

а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$, $k=\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$, $k=-3$;

в) $\frac{x}{0,5}+\frac{y}{2,5}=1$, $k=-5$; г) $\frac{x}{1,25}+\frac{y}{-2}=1$, $k=1,6$.

№ 9. Рівнобедрена трапеція з основами 8 лін. од. і 2 лін. од. має гострий кут 45°. Скласти рівняння прямих, що містять сторони трапеції, взявши за вісь Ox більшу основу трапеції, а за вісь Oy – вісь симетрії трапеції. Виконати рисунок.

Відповідь: $x+y-4=0$, $x-y+4=0$, $y=0$, $y=3$.

№ 10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4;6)$ і утворює з осями координат трикутник площею 6 квадратних одиниць. Виконати рисунок.

Відповідь: два розв'язки: $3x+y+6=0$ і $3x+4y-12=0$.

№ 11. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осях координат однакові відрізки. Відомо, що довжина відрізка цієї прямої (він міститься між осями координат) дорівнює $5\sqrt{2}$ лін. од. Виконати рисунок.

Відповідь: два розв'язки: $x + y - 5 = 0$ і $x + y + 5 = 0$.

№ 12. Скласти рівняння прямих, які паралельні осям координат і проходять через точку $A(-3;\ 4)$. Виконати рисунок.

Відповідь: $x + 3 = 0$ і $y - 4 = 0$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 3-1**; умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 78.

ПЗ-2. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМИХ. КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

Теоретичні відомості

1. Відстань від точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямої, заданої рівнянням Ax + By + C = 0 , обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax\ +\ By\ +\ C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 1. Знайти відстані від точок $M(-2;\ 3)$ і $K(\ 1;\ 2)$ до прямої AB, заданої рівнянням $2x + y - 4\ =\ 0$. Виконати рисунок.

Розв'язання

1) Підставивши координати точки M і коефіцієнти з рівняння прямої AB у формулу (1), матимемо:

$$d_M = \frac{|2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-4 + 3 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} == \sqrt{5}\ \text{лін. од.}$$

Отже, шукана відстань d_M від точки M до прямої AB дорівнює $\sqrt{5}$ лінійних одиниць (*рис. 13*).

2) Підставивши координати точки K і коефіцієнти з рівняння прямої AB у формулу (1), знайдемо:

$$d_M = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 2 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{5}} =\ 0\ \text{лін. од.}$$

Отже, шукана відстань d_K від точки K до прямої AB дорівнює 0 лінійних одиниць. Це означає, що точка K лежить на прямій AB (*рис. 13*).

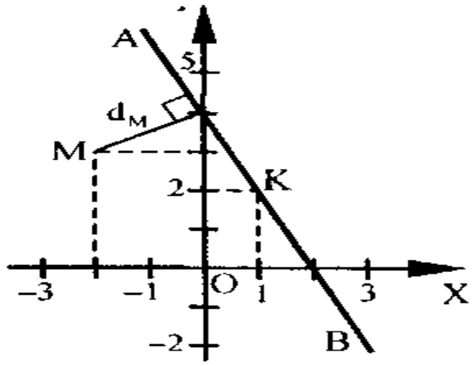


Рисунок 13

2. Кут між прямими з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 знаходять за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

***Приклад** 2.* Знайти кут між прямими, заданими рівняннями:

$x + 3y + 2 = 0$ та $x + y - 5 = 0$.

Розв'язання. Розв'язавши відносно у рівняння заданих прямих, зведемо кожне з них до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом *(див. ПЗ-1, п. 15, формула (11):*

1) $x + 3y + 2 = 0,$

$$3y = -x - 2,$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}. \quad (3)$$

2) $x + y - 5 = 0,$

$$y = -x + 5. \quad (4)$$

Кутові коефіцієнти заданих прямих дорівнюють коефіцієнтам при x та у рівняннях (3) і (4), тобто:

$$k_1 = -\frac{1}{3}, \quad k_2 = -1.$$

Підставивши знайдені значення k_1і k_2у формулу (2), знайдемо тангенс шуканого кута:

$$tg\varphi = \left|\frac{-1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-1)}\right| = \left|\frac{-1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}\right| = \left|\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right| = |-0{,}5| = 0{,}5.$$

Отже, кут між заданими прямими $\varphi = \text{arctg}0{,}5 \approx 0{,}463$ рад.

3. Умови паралельності прямих

а) Прямі з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$k_1 = k_2. \qquad (5)$$

б) Прямі, задані рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (6)$$

4. Умови перпендикулярності прямих

а) Прямі з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \qquad (7)$$

б) Прямі, задані рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \qquad (8)$$

Приклад 3. Пряму АВ задано рівнянням $x - 2y + 4 = 0$. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 1)$:

а) паралельно до прямої АВ ;

б) перпендикулярно до прямої АВ.

Виконати рисунок.

Розв'язання

Розв'язавши відносно у рівняння прямої АВ, зведемо його до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом *(див. ПЗ-1, п. 15, формула (11):*

$$x - 2y + 4 = 0,$$

$$2y = x + 4,$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2. \qquad (9)$$

Кутовий коефіцієнт прямої АВ дорівнює коефіцієнту при х в рівнянні (9), тобто:

$$k_{AB} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

а) Нехай МК – шукана пряма. За умовою задачі МК || АВ, тому за умовою паралельності прямих *(див. п. 3(а)* матимемо:

$$k_{MK} = k_{AB} = 0{,}5 .$$

Підставивши координати точки М і знайдене значення кутового коефіцієнта прямої МК у рівняння прямої, що проходить через цю точку в заданому напрямку *(див. ПЗ-1, п. І7, рівність (13),* отримаємо шукане рівняння прямої МК *(рис. 14):*

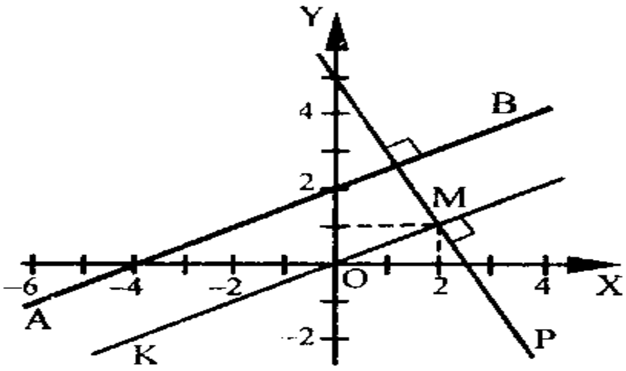


Рисунок 14

$$y-y_M=k_{MK}\cdot(x-x_M),$$
$$y-1 = 0{,}5\cdot(x-2),$$
$$2y-2 = x-2,$$
$$x-2y = 0\ .$$

б) Нехай MP *(рис. 14)* – шукана пряма. Відомо, що MP⊥AB, тому за умовою перпендикулярності прямих (*див. п. 4(а), рівність (7)* матимемо:

$$k_{MP}= -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{0{,}5} = -2.$$

Підставивши координати точки M і знайдене значення кутового коефіцієнта прямої MP у рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку (*див. ПЗ-1, п. 17, рівність (13),* отримаємо шукане рівняння прямої MP:

$$y-y_M=k_{MK}\cdot(x-x_M),$$
$$y-1 = -2\cdot(x-2),$$
$$y -1 = -2x + 4,$$
$$2x + y-5 = 0.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Зауваження. *Всі завдання до розділу 3 потрібно виконувати за допомогою методів аналітичної геометрії, а не векторної алгебри.*

№ 1. Серед прямих, заданих рівняннями:

1) $3x–2y + 7 = 0$, 2) $6x + 4y–5 = 0$, 3) $2x–3y–6 = 0$, 4) $6x–4y–9 = 0$, знайти пари паралельних і пари перпендикулярних між собою прямих. Довести це. Виконати рисунок.

Відповідь: прямі 1) і 4) – паралельні; 2) і 3) – перпендикулярні.

№ 2. Дано координати вершин трикутника: A(3; 4), B(–2;–1), C(4; —7). Знайти величини його кутів і довжину висоти CD.

Вказівка. *Довжина висоти CD дорівнює відстані від точки* C *до прямої* AB.

Відповідь: $\angle A= 1{,}2$; $\angle B= 90°$; $\angle C=\mathrm{arctg}\frac{5}{6}$; $CD = 6\sqrt{2}$ лін. од.

№ 3. Дано рівняння сторін трикутника: $x+3y-7=0$ – сторони AB, $4x-y-2=0$ – сторони BC, $6x+8y-35=0$ – сторони AC. Знайти довжину висоти BD цього трикутника.

Вказівка. *Довжина висоти* BD *дорівнює відстані від точки* B *(точки перетину прямих* AB і BC*) до прямої* AC.

Відповідь: BD = 1,3 лін. од.

№ 4. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $x+3y=0$ і проходить через точку M перетину прямих $5x-4y-0=0$ та $x+y+2=0$. Виконати рисунок.

Відповідь: $x+3y+2=0$.

№ 5. Скласти рівняння прямих, які перпендикулярні до прямої $15x+8y=0$ і лежать на відстані 4 лінійні одиниці від точки A(4; –2). Виконати рисунок.

Відповідь: $8x-15y+6=0$ та $8x-15y-130=0$

№ 6. Знайти відстань між паралельними прямими

$3x+y-3\sqrt{10}=0$ та $6x+2y+5\sqrt{10}=0.$

Вказівка. *Вибрати на одній прямій довільну точку (наприклад, точку з абсцисою $x=0$) і знайти відстань від цієї точки до другої прямої.*

Відповідь: d= 5,5 лін. од..

№ 7. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими

$$x+y-5=0 \quad \text{та} \quad 7x-y-19=0.$$

Виконати рисунок.

Вказівка. *Скористатися тим, що кожна точка бісектриси рівновіддалена від сторін кута. Знайти відстані від точки* M(x; y) *до кожної з заданих прямих і прирівняти ці відстані Отримані рівності будуть шуканими рівняннями бісектрис.*

Відповідь: $3x+y-11=0$ та $x-3y+3=0.$

№ 8. Дано координати двох вершин трикутника ABC : $A(-3;\ -5)$ і $B(4;\ 2)$. Знайти координати третьої вершини трикутника, якщо його висоти перетинаються у точці $M(-3;-1)$. Виконати рисунок.

Відповідь: $C(-6;2)$.

№ 9. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку M(5; 1) і утворюють з прямою $2x+y-4=0$ кут $\varphi=45°$. Виконати рисунок.

Відповідь: $x+3y-8=0$ та $3x-y-14=0.$

№ 10. Скласти рівняння висот трикутника, якщо відомо рівняння його сторін: $5x-3y-14=0,\ 3x-5y+14=0,\ x+y-6=0.$ Виконати рисунок.

Відповідь: $5x+3y-26=0{,}3x+5y-26=0$ та $x-y=0.$

№ 11. Знайти відстань від точки $M(2;-1)$ до прямої, яка відтинає на осях Ox і Oy відрізки a = 8 і b = 6 лінійних одиниць, відповідно. Виконати рисунок.

Відповідь: $d_M=$ 4,4 лін. од.

№ 12. Знайти кути трикутника, сторони якого задано рівняннями $x + y - 4 = 0$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$. Виконати рисунок.

Відповідь: $\angle A = \angle B = \mathrm{arctg}2$; $\angle C = \mathrm{arctg}\frac{4}{3}$.

№ 13. Точки A(1; 2) та C(3; 6) є протилежними вершинами квадрата ABCD. Знайти координати двох інших вершин. Виконати рисунок.

Відповідь: B(0; 5), D(4; 3).

№ 14. Відомо координати вершини A(2; 2) трикутника і рівняння двох його висот: $x + y - 2 = 0$ та $9x - 3y - 4 = 0$. Скласти рівняння сторін трикутника. Виконати рисунок.

Відповідь: $x + 3y - 8 = 0, y - x = 0, 7x + 5y - 8 = 0$.

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 2-3;** умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 78.

ПЗ - 3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ: ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

Теоретичні відомості

1. Кривими другого порядку називають лінії, які у прямокутній декартовій системі координат на площині задаються рівняннями другого степеня відносно змінних x та y. Вище ми вже розглядали один тип кривих другого порядку – **коло** *(див. ПЗ-1, п.5).*

2. Еліпсом називають лінію, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

де a і b – сталі, причому $a > b > 0$. Рівняння (1) називають **канонічним рівнянням еліпса**.

3. Про еліпс, який задано рівнянням (1), кажуть, що він займає **стандартне положення відносно осей координат** *(рис. 15).* Надалі ми розглядатимемо лише таке розміщення еліпса. У стандартному положенні еліпс **симетричний відносно осей координат.**

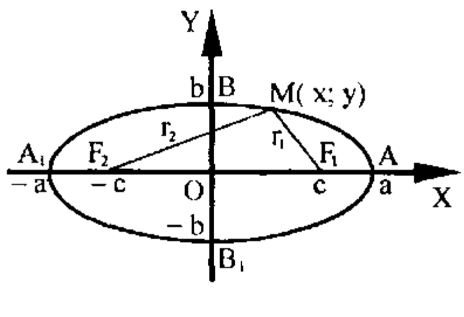


Рисунок 15

4. За формою еліпс є деформованим (стиснутим до осі Ox) колом. Коло – частинний випадок еліпса. Дійсно, якщо a = b, то рівняння (1) набуває вигляду:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{2}$$

і є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом R = a лінійних одиниць *(див. ПЗ-1, п. 5).*

5. Число a називають **великою**, а число b – **малою піввіссю еліпса**. Великою і малою віссю еліпса називають відповідно числа 2a і 2b.

6. Точки A(a; 0), A(−a; 0), B(0; b), B(0; −b) називають **вершинами еліпса** *(див. рис. 15).* Точки $F_1(c;\ 0)$ і $F_2(-c;\ 0)$, де

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{3}$$

називають **фокусами еліпса** *(рис. 15).* Число c називають **фокусною відстанню еліпса.**

7 Якщо еліпс набуває форми кола, тобто a = b , то c = 0 і фокуси еліпса «збігаються», стають центром цього кола.

8. Ексцентриситетом еліпса називають число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4}$$

де a – велика піввісь еліпса, c – його фокусна відстань.

9. З означення еліпса і формул (3) та (4) випливає, що ексцентриситет еліпса задовольняє умову $0 \le \varepsilon < 1$. За величиною ε можна робити висновки про форму еліпса:

а) якщо ε наближається до нуля, то еліпс набуває форми, близької до кола;

б) якщо ε= 0, то еліпс є колом;

в) якщо ε наближається до одиниці, то еліпс набуває більш розтягнутої вздовж осі Ox форми.

10. Відстані від точки M, що лежить на еліпсі, до його фокусів називають **фокальними радіус-векторами** цієї точки і позначають $\mathrm{M}F_1 = r_1$ та $\mathrm{M}F_2 = r_2$ *(див. рис. 15).*

11. Фокальні радіус-вектори точки M(x; y), яка лежить на еліпсі *(див. рис. 15)* обчислюються за формулами:

$$r_1 = a - \varepsilon x_M, \qquad r_2 = a + \varepsilon x_M. \tag{5}$$

де a – велика піввісь еліпса, ε – його ексцентриситет.

12 Характеристична властивість еліпса. Сума відстаней від будь-якої точки еліпса до його фокусів є сталою величиною і дорівнює 2a (великій осі еліпса), тобто для будь-якої точки еліпса:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{6}$$

З характеристичної властивості еліпса випливає спосіб його механічної побудови. Якщо відоме розташування фокусів еліпса і його велика вісь 2a, то для побудови еліпса потрібно взяти нитку довжиною 2a, закріпити її кінці у фокусах еліпса, вставити в прогин нитки олівець і, натягнувши нитку, описати цим олівцем криву. Це і буде шуканий еліпс.

Приклад 1. У еліпса, який займає стандартне положення відносно осей координат і проходить через точку $M\left(2;\ \sqrt{3}\right)$, велика піввісь удвічі більша, ніж його мала піввісь. Знайти:

1) півосі еліпса і його канонічне рівняння;
2) фокусну відстань і координати фокусів еліпса;
3) ексцентриситет еліпса;
4) фокальні радіус-вектори точки M;
5) виконати рисунок.

Розв'язання

1) Шукане канонічне рівняння еліпса має вигляд рівняння (1). За умовою задачі a = 2b, тобто $a^2 = 4b^2$, тоді шукане рівняння еліпса матиме вигляд:

$$\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Точка M лежить на еліпсі, тому її координати мають задовольняти рівняння цього еліпса. Підставимо координати точки M у рівняння (7) і знайдемо b (малу піввісь еліпса):

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{3}{b^2} = 1,$$
$$4 + 12 = 4b^2,$$
$$4b^2 = 16,$$
$$b^2 = 4,$$
$$b = 2.$$

Велика піввісь еліпса $a = 2b = 4$. Підставивши знайдені півосі еліпса в рівняння (1), отримаємо шукане канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{8}$$

2) Підставивши у формулу (3) знайдені вище півосі еліпса, обчислимо c (фокусну відстань еліпса):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Фокусами еліпса (*див. п. 7*) будуть точки

$$F_1(2 \cdot \sqrt{3};\ 0) \quad \text{та} \quad F_2(-2 \cdot \sqrt{3};\ 0).$$

3) Підставивши значення a і c у формулу (4), знайдемо ε (ексцентриситет еліпса):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4) Знайдемо фокальні радіус-вектори точки M, підставивши її абсцису $x_M = 2$ і знайдені раніше значення a та ε у формули (5):

$$r_1 = MF_1 = a - \varepsilon x_M = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4 - \sqrt{3}\ \text{лін. од.};$$

$$r_2 = MF_2 = a + \varepsilon x_M = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4 + \sqrt{3}\ \text{лін. од.}$$

На координатній площині побудуємо вершини заданого еліпса (точки з координатами (4; 0), (−4; 0), (0; 2) та (0; −2)) і точку $M(2; \sqrt{3})$. Через побудовані точки проведемо еліпс (*рис. 16*)

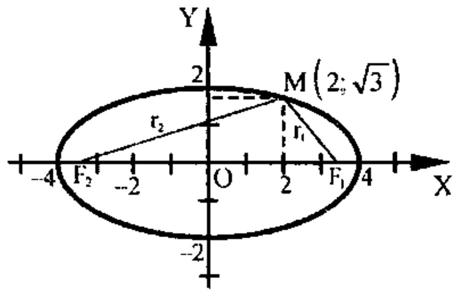


Рисунок 16

13. Гіперболою називають лінію, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{9}$$

де a>0 і b>0 – сталі. Рівняння (9) називають **канонічним рівнянням гіперболи**.

14. Про гіперболу, яку задано рівнянням (9), кажуть, що вона займає стандартне положення відносно осей координат*(рис. 17)*.

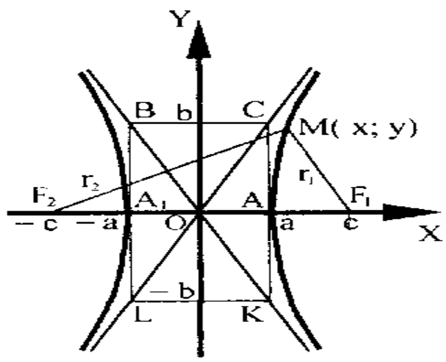


Рисунок 17

15. Надалі ми розглядатимемо лише таке розміщення гіперболи. У стандартному положенні гіпербола симетрична відносно осей координат. Вона не перетинає вісь Oy, а вісь Ox перетинає у двох точках A(a; 0) та $A_1(-a;\ 0)$, які називають **вершинами гіперболи** *(рис. 17).*

16. Число **a** називають **дійсною,** а число **b** – **уявною піввіссю гіперболи**. Дійсною і уявною осями гіперболи називають відповідно числа 2a і 2b.

17. Точки $F_1(c;\ 0)$ і $F_2(-c;\ 0)$, де

$$c\ =\ \sqrt{a^2+b^2}, \tag{10}$$

називають **фокусами гіперболи** *(рис. 17*). Число **c** називають **фокусною відстанню гіперболи.**

18. Якщо точка, рухаючись у нескінченність вздовж деякої кривої, необмежено наближається до певної прямої, то кажуть, що ця пряма є **асимптотою** кривої.

19. Асимптотами гіперболи є прямі

$$y=\frac{b}{a}x \qquad \text{та} \qquad y=-\frac{b}{a}x\,, \tag{11}$$

де a і b – півосі гіперболи. Це прямі CL і ВК *(рис. 17).*

20. Прямокутник BCKL *(рис. 17*) з вершинами $B(-a;b)$, $C(a;b)$, $K(a;-b)$ і $L(-a;\ -b)$ називають **асимптотичним прямокутником** гіперболи. Асимптоти гіперболи є продовженням діагоналей цього прямокутника.

21. Якщо півосі гіперболи однакові (a = b), то гіперболу називають рівносторонньою, а її рівняння набуває вигляду:

$$x^2-y^2=a^2. \tag{12}$$

Рівняння асимптот рівносторонньої гіперболи мають вигляд $y\ =\ \pm x$, а її фокусна відстань $c = a\cdot\sqrt{12}$.

22. Ексцентриситетом гіперболи називають число

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \tag{13}$$

де a – дійсна піввісь гіперболи, c – її фокусна відстань.

23. З формул (10) та (13) випливає, що ексцентриситет гіперболи задовольняє умову $\varepsilon > 1$. За величиною ε можна робити **висновки про форму гіперболи**:

а) якщо ε зростає, то гіпербола розтягується вздовж осі Oy;

б) якщо $\varepsilon\ =\ \sqrt{2}$, то гіпербола є рівносторонньою;

в) якщо ε наближається до одиниці, то гіпербола набуває більш стиснутої до осі Ox форми.

24. Відстані від точки M, яка лежить на гіперболі, до її фокусів називають **фокальними радіус-векторами** цієї точки і позначають $MF_1 = r_1$ та $MF_2 = r_2$ *(рис. 17).*

25. Фокальні радіус-вектори точки M(x, y), яка лежить на гіперболі *(рис. 17),* обчислюються за формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x_M - a| \quad \text{та} \quad r_2 = |\varepsilon x_M + a|, \tag{14}$$

де a – дійсна піввісь гіперболи; ε – її ексцентриситет.

26. Характеристична властивість гіперболи. Модуль різниці відстаней від будь-якої точки гіперболи до її фокусів є сталою величиною і дорівнює 2a (дійсній осі гіперболи), тобто для будь-якої точки гіперболи:

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{15}$$

Приклад 2. Гіпербола займає стандартне положення відносно осей координат. Її уявна піввісь $b = 2$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Знайти:

1) дійсну піввісь і канонічне рівняння гіперболи;
2) фокусну відстань гіперболи та координати її фокусів;
3) рівняння асимптот гіперболи;
4) координати і фокальні радіус-вектори точки M, яка лежить на гіперболі і має абсцису $x_м = -5$ та ординату $y_м > 0$.

Виконати рисунок.

Розв'язання

1) Підставивши рівність (10) у рівність (13), матимемо:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \tag{16}$$

Підставимо в рівність (16) значення b та ε, відомі з умови задачі, і знайдемо a (дійсну піввісь гіперболи)

$$\frac{\sqrt{13}}{3} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}},$$

$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{a^2},$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4}{a^2},$$

$$a^2 = 9,$$

$$a = 3.$$

Підставивши у рівняння (9) знайдені півосі гіперболи, отримаємо її канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1. \tag{17}$$

2) Підставимо у формулу (10) півосі гіперболи і обчислимо c (фокусну відстань гіперболи):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Фокусами гіперболи *(див. п. 18)* будуть точки

$$F_1(\sqrt{13};\ 0) \quad \text{та} \quad F_2(-\sqrt{13}; 0).$$

3) Знайдемо рівняння асимптот гіперболи, підставивши її півосі у формули (11). Матимемо:

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{2x}{3},$$

$$3y = \pm 2x.$$

Отже, шукані рівняння асимптот:

$$2x - 3y = 0 \quad \text{та} \quad 2x + 3y = 0.$$

4) Підставимо в рівняння гіперболи (17) абсцису точки M (за умовою задачі $x_M = -5$) і знайдемо її ординату y_M:

$$\frac{(-5)^2}{9} - \frac{y_M^2}{4} = 1,$$

$$4 \cdot 25 - 9y_M^2 = 36,$$

$$9y_M^2 = 100 - 36,$$

$$y_M^2 = \frac{64}{9},$$

$$y_M = \pm\frac{8}{3}.$$

За умовою задачі $y_M > 0$, тому робимо висновок, що $y_M = \frac{8}{3}$.

Отже, шукана точка $M\left(-5; \frac{8}{3}\right)$.

Знайдемо фокальні радіус-вектори точки M, підставивши її абсцису $x = -5$ і значення **a** та **ε** гіперболи у формули (14):

$$r_1 = MF_1 = |\varepsilon x_M - a| = \left|\frac{\sqrt{13}}{3} \cdot (-5) - 3\right| = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{3} + 3 \text{ лін. од.};$$

$$r_1 = MF_1 = |\varepsilon x_M + a| = \left|\frac{\sqrt{13}}{3} \cdot (-5) + 3\right| = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{3} - 3 \text{ лін. од.}$$

На координатній площині будуємо асимптотичний прямокутник гіперболи *(див. п. 21),* сторони якого паралельні осям координат *(рис. 18).*

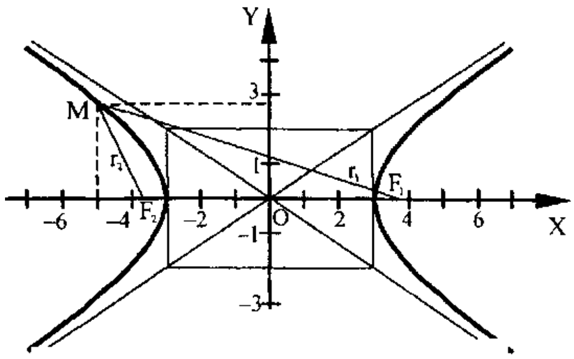


Рисунок 18

Точки з координатами (3; 0) і $(-3;\ 0)$будуть вершинами гіперболи *(див. п. 16).*

Проведемо діагоналі асимптотичного прямокутника і продовжимо їх за межі цього прямокутника. Отримані прямі будуть асимптотами гіперболи. Побудуємо фокуси гіперболи і точку М, координати яких відомі. Орієнтуючись за асимптотами, проведемо через вершину $(-3;\ 0)$ і точку М одну вітку гіперболи. Симетрично до неї відносно осі Оу будуємо другу вітку гіперболи *(див. рис. 18).*

27**. Параболою** називають лінію, яка при певному виборі системи координат задається рівнянням:

$$y^2 = 2px, \tag{18}$$

де $p > 0$ – стала, яку називають **параметром параболи.** Рівняння (18) називають **канонічним рівнянням параболи**.

28. Парабола, задана рівнянням (18), **симетрична відносно осі Ох** *(рис. 19)* і проходить через початок координат. Точку параболи, яка лежить на її осі симетрії (точку 0(0; 0), називають **вершиною параболи** *(рис. 19).*

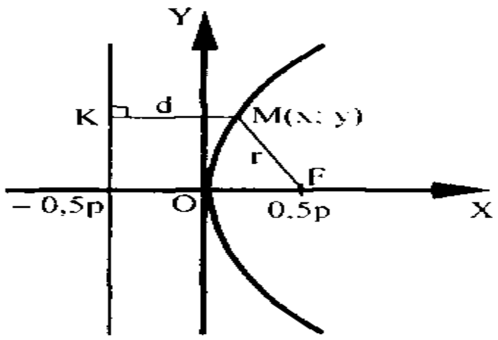


Рисунок 19

29. Фокусом параболи, заданої рівнянням (18), називають точку Р(0,5р; 0), де р – параметр параболи (*рис. 19).*

30. Пряму х = -0,5р, де р – параметр параболи, називають **директрисою параболи** *(рис. 19).*

31. Відстань від точки М, що лежить на параболі, до її фокуса називають **фокальним радіус-вектором** цієї точки і позначають $MF = r$.

Відстань від точки М до директриси параболи позначають $MK = d$ *(рис. 19).*

32. Характеристична властивість параболи. Кожна точка параболи рівновіддалена від її фокуса та директриси, тобто для будь-якої точки параболи

$$r = d. \tag{19}$$

33. Фокальний радіус-вектор точки М(х;у), яка лежить на параболі *(рис. 19),* обчислюється за формулою:

$$r = d = x_M + 0{,}5p, \tag{20}$$

де р – параметр параболи.

35**.** Залежно від розміщення параболи відносно осей координат її рівняння може набувати іншого, ніж (18), вигляду; відповідно зміняться координати фокуса, рівняння директриси, формули для обчислення фокальних радіус-векторів точок параболи тощо.

1) $x^2 = 2py$, де $p > 0$. Парабола симетрична відносно осі Оу, її вершина знаходиться в початку координат, вітки напрямлені у бік додатного напрямку осі Оу *(рис. 20)*. Рівняння директриси параболи $y = -0{,}5p$, її фокус F(0; 0,5р), фокальний радіус-вектор точки М(х;у), що лежить на параболі, обчислюється за формулою $r = y_M + 0{,}5p$.

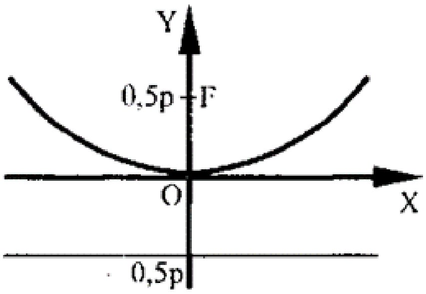


Рисунок 20

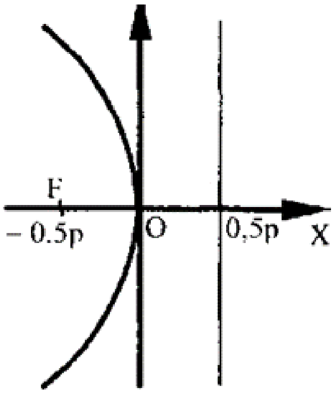


Рисунок 21

2) $y^2 = -2px$, де $p > 0$. Парабола симетрична відносно осі Ох, її вершина знаходиться в початку координат, але вітки напрямлені у бік від'ємного напрямку осі Ох *(рис. 21)*. Рівняння директриси параболи $x = 0{,}5p$, її фокус F(-0,5р; 0), фокальний радіус-вектор точки М(х; у), що лежить на параболі, обчислюється за формулою

$$r = 0{,}5p - x_M.$$

3) $x^2 = -2py$, де $p > 0$. Парабола симетрична відносно осі Оу, її вершина знаходиться в початку координат, але вітки напрямлені у бік від'ємного напрямку осі Оу *(рис. 22)*. Рівняння директриси параболи $y = 0{,}5p$, її фокус F(0;-0,5р), фокальний радіус-вектор точки М(х;у), що лежить на параболі, обчислюється за формулою $r = 0{,}5p - y_M$.

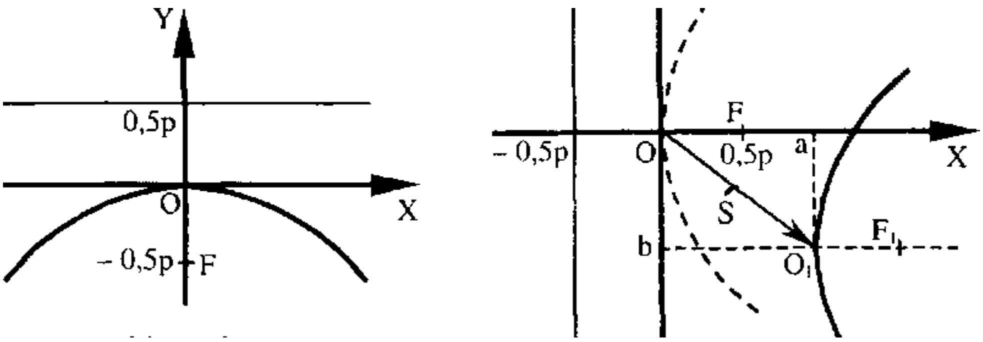


Рисунок 22

4) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$, де р>0, а і b – сталі. Парабола отримана паралельним перенесенням параболи $y^2 - 2px$ на вектор $\vec{S}$=(а; b). Вершина

параболи знаходиться у точці $O_1(a; b)$. Для повернення до канонічного рівняння досить виконати обернений паралельний перенос (повернути вершину параболи у початок координат). Таким самим чином зміниться, в результаті паралельного перенесення на вектор $\vec{S}$ = (a;b), рівняння будь-якої лінії.

Приклад 3. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої лежить на однаковій відстані від точки F(–2; 3) і прямої y = 1. Звести отримане рівняння до канонічного вигляду і побудувати лінію.

Розв'язання. Нехай точка M(x; y) належить шуканій лінії. Знайдемо відстань від цієї точки до прямої y=1 *(див. «Теоретичні відомості» до ПЗ-2, п. 1, формула (1):*

$$d_M = \frac{|y-1|}{\sqrt{0+1}} = |y-1|.$$

Підставивши координати точок M(x; y) та $F(-2;\ 3)$ у формулу для обчислення відстані між точками *(див. ПЗ-1, п. 1, формула (1),* знайдемо відстань MF:

$$MF = \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}.$$

Точка M належить шуканій лінії, тому з умови задачі випливає, що $MF = d_M$. Отже, рівняння шуканої лінії:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = |y-1|. \qquad (21)$$

Зведемо отримане рівняння до канонічного вигляду. Для цього піднесемо обидві частини рівності (21) до квадрата:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (y-1)^2,$$
$$(x+2)^2 = (y-1)^2 - (y-3)^2.$$

Застосувавши до правої частини отриманої рівності формулу різниці квадратів *(див.* [8], *с. 10, формули 20.1, 21.1),* матимемо:

$$(x+2)^2 = (y-1-(y-3)) \cdot (y-1+(y-3)),$$
$$(x+2)^2 = 2 \cdot (2y-4),$$
$$(x+2)^2 = 4 \cdot (y-2).$$

Одержане рівняння є рівнянням параболи з вершиною в точці $O_1(-2;\ 2)$ *(див. п. 35(4).* Вона отримана паралельним перенесенням параболи x^2=4y на вектор $\vec{S}$=(2;2).

На координатній площині *(рис. 24)* будуємо параболу x^2 =4y *(див. п. 35(1).* Ця парабола симетрична відносно осі Oy , її параметр p = 2, фокус F_1 (1; 0), рівняння директриси $y = -1$, вершина параболи знаходиться в початку координат.

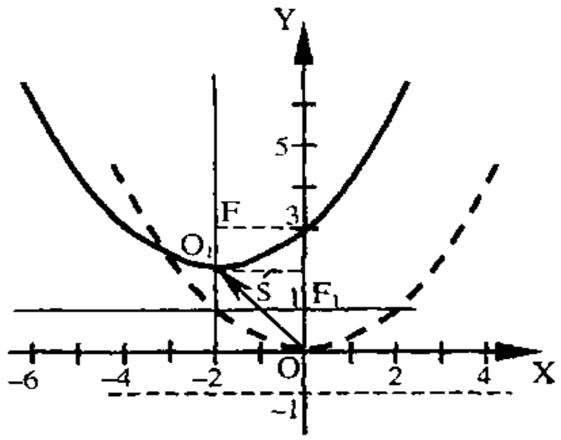


Рисунок 24

Виконавши паралельне перенесення побудованої кривої на вектор $\vec{S}=(-2;2)$, отримаємо параболу $(x+2)^2 = 4\cdot(y-2)$.

Завдання для роботи в аудиторії

№ 1. Скласти рівняння еліпса, відстань між фокусами якого 8 лінійних одиниць, а мала піввісь $b = 3$. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

№ 2. Еліпс займає стандартне положення відносно осей координат і проходить через точки $M(2;\sqrt{3})$і $B(0;2)$. Скласти рівняння еліпса, знайти координати фокусів, ексцентриситет, фокальні радіус-вектори точки M. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $F(\pm2\cdot\sqrt{3};0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r=4\pm\sqrt{3}$.

№ 3. Планета Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця становить 147,5 мільйона кілометрів, а найбільша — 152,5 млн. км. Знайти велику піввісь та ексцентриситет орбіти Землі. Вибрати систему координат так, щоб орбіта Землі займала стандартне положення відносно осей координат; скласти рівняння орбіти Землі у цій системі координат.

Відповідь: $a = 150$ млн. км, $\varepsilon=\frac{1}{60}$, $\frac{x^2}{22500}+\frac{y^2}{22493{,}75}=1$.

№ 4. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відомо, що відстань між його фокусами дорівнює відстані між кінцями його великої і малої півосей.

Відповідь: $\varepsilon=\sqrt{0{,}4}$.

№ 5. В еліпс, заданий рівнянням $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, вписано правильний трикутник ABC, одна з вершин якого A(2; 0) збігається з вершиною еліпса. Знайти координати двох інших вершин трикутника

Вказівка: *скласти рівняння сторони* AB *трикутника, яка має кутовий коефіцієнт* $k = tg150°$, *знайти координати точок перетину цієї сторони з еліпсом. Це дасть нам координати вершини* B. *Для знаходження координат вершини* C *потрібно скористатися симетрією трикутника відносно осі* Ox.

Відповідь: $B\left(\frac{2}{7};\ \frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}\right)$, $C\left(\frac{2}{7};\ -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}\right)$.

№ 6. Скласти рівняння гіперболи, яка займає стандартне положення відносно осей координат і має дійсну піввісь $a = 2\cdot\sqrt{5}$ та ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$.

№7. Знайти ексцентриситет гіперболи, одна з асимптот якої утворює кут α з її дійсною віссю.

Відповідь: $\varepsilon = \frac{1}{\cos\alpha}$.

№ 8. Скласти рівняння гіперболи, яка має вершини у фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 9. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться вдвічі ближче до прямої x = 1, ніж до точки P(4; 0). Звести рівняння лінії до канонічного вигляду. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

№ 10. Скласти рівняння гіперболи, яка займає стандартне положення відносно осей координат і фокальні радіус-вектори однієї з її вершин дорівнюють 1 лін. од. і 9 лін. од. Виконати рисунок.

Відповідь: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 11. Знайти на параболі, заданій рівнянням $y^2 = 6x$, точку, фокальний радіус-вектор якої дорівнює 4,5 лін. од. Виконати рисунок.

Відповідь: $M_1\ (3;\ 3\cdot\sqrt{2})$ і $M_2(3;\ -3\cdot\sqrt{2})$.

№ 12. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої лежить на однаковій відстані від точки F(0; 2) і прямої y = 4. Звести отримане рівняння до канонічного вигляду. Знайти координати точок перетину лінії з осями координат. Виконати рисунок.

Відповідь: $x^2 = -4-\ (y-3)$, A(0; 3), $B(\ 2\cdot\sqrt{3};\ 0)$, $C(-2\cdot\sqrt{3};\ 0)$.

№ 13. Через фокус параболи, заданої рівнянням $y^2 = -4x$ проведено пряму під кутом 120° до осі Ox Скласти рівняння прямої і знайти довжину утвореної хорди. Виконати рисунок**.**

Відповідь : $\sqrt{3}\cdot x + y + \sqrt{3} = 0$. $\ell = \frac{16}{3}$ лін. од.

№ 14. Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболи навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала $-$ 80 сантиметрів, а його глибина

– 10 сантиметрів. На якій відстані від вершини параболи потрібно розмістити джерело світла, якщо для відбивання променів паралельним пучком (при цьому досягається найбільша ефективність роботи прожектора) воно має бути у фокусі параболи?

Відповідь: d = 40 см.

№ 15. Скласти рівняння кола з центром у фокусі параболи, заданої рівнянням $y^2 = -8x$, якщо відомо, що директриса параболи є дотичною до цього кола. Знайти координати точок перетину параболи і кола. Виконати рисунок.

Вказівка: *радіус шуканого кола дорівнює відстані від фокуса параболи до її директриси, тобто параметра параболи.*

Відповідь:$(x + 2)^2 + y^2 = 16$,   A(−2;4),   B(−2; −4).

Домашнє завдання: виконати індивідуальне завдання **ІЗ № 3-3;** умову і дані відповідного варіанта взяти на сторінці 79.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

ІЗ № 3-1

Дано координати вершин трикутника ABC. Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:

1) довжину сторони AB;
2) координати точок M_1 та M_2, які ділять відрізок AB у відношеннях $\lambda_1 = 4$ та $\lambda_2 = -6$.
3) рівняння кола, діаметром якого е відрізок AB;
4) загальні рівняння прямих AB і AC, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;
5) рівняння прямої AB у відрізках;
6) напрямний вектор і канонічне рівняння прямої AE, яка містить медіану трикутника ABC.

Виконати рисунок.

ІЗ № 3-2

Дано координати вершин трикутника ABC. Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:

1) внутрішній кут A в радіанах з точністю до 0,01;
2) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
3) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно до прямої AC.

Виконати рисунок.

1.	A(7; 0),	B(-5; 9),	C(5; 14).
2.	A(12;-6),	B(0; 3),	C(10; 8).
3.	A(5;-5),	B(-7; 4),	C(3; 9).
4.	A(16;-8),	B(4; 1),	C(4; 6).
5.	A(9; 1),	B(-3; 10),	C(7; 15).
6.	A(8; 3),	B(-4; 12),	C(6; 17).
7.	A(2;-4),	B(-10; 5),	C(0; 10).
8.	A(15;-3),	B(3; 6),	C(13; 1).
9.	A(6;-l),	B(-6; 8),	C(4; 13).
10.	A(10;-2),	B(-2; 7),	C(8; 12).
11.	A(11;-5),	B(-l; 4),	C(15; 7).
12.	A(14;-4),	B(2; 5),	C(18; 8).
13.	A(8; 1),	B(-4; 10),	C(12; 3).
14.	A(13;-9),	B(l; 0),	C(17; 3).
15.	A(3;-3),	B(-9; 6),	C(7; 19).
16.	A(12;-7),	B(0; 2),	C(16; 5).
17.	A(2; 0),	B(-10; 9),	C(6; 22).
18.	A(0;-10),	B(-12;-l),	C(4; 12).
19.	A(7;-2),	B(-5; 7),	C(11; 0).
20.	A(4;-12),	B(-8;-3),	C(8; 10).
21.	A(0; 7),	B(9;-5),	C(14; 5).
22.	A(-5; 5),	B(4;-7),	C(9; 3).
23.	A(l; 9),	B(10;-3),	C(15; 7).
24.	A(10; 0),	B(l; 12),	C(-12;-4)
25.	A(3; 8).	B(12;-4),	C(17; 6).
26.	A(l;-6),	B(-8; 6),	C(-13;-4)
27.	A(-2; 10),	B(7:-2),	C(12; 8).
28.	A(12;-4),	B(3; 8),	C(-10;-8)
29.	A(-4; 2),	B(5:-10).	C(10; 0).
30.	A(-8; 16),	B(l; 4),	C(6; 14).

ІЗ № 3-3

1) Дано ексцентриситет **ε** і велику піввісь **a** еліпса, який займає стандартне положення відносно осей координат. Знайти:

а) фокусну відстань еліпса;

б) координати його фокусів;

в) малу піввісь і канонічне рівняння еліпса.

Виконати рисунок.

2) Гіпербола, яка займає стандартне положення відносно осей координат, проходить через точку А. Кутовий коефіцієнт однієї з її асимптот дорівнює k. Знайти:

а) півосі і канонічне рівняння гіперболи;
б) її фокусну відстань;
в) координати її фокусів;
г) ексцентриситет гіперболи;
д) фокальні радіус-вектори точки А.
Виконати рисунок.

3) Парабола, симетрична відносно осі Ох, проходить через початок координат і точку М. Знайти:
а) канонічне рівняння параболи і її параметр;
б) координати фокуса параболи;
в) рівняння її директриси;
г) фокальний радіус-вектор точки М.
Виконати рисунок.

1. 1) ε= 0,4, a = 5.
2) A($2\sqrt{2}$; 1), k = 0,5.
3) M(-8;4).

2. 1) ε= 0,5, a = 2.
2) A(2; 2), k = 1.
3) M(-3;6).

3. 1) ε= 0,5, a = 4.
2) A(-2; $3\sqrt{3}$), k = 3.
3) M(5; 10).

4.1) ε = 0,8, a= 5.
2) A($2\sqrt{2}$;4), k= -2 .
3) M(5; $5\sqrt{2}$).

5. 1) ε = 0,5, a= 6.
2) A(-$\sqrt{2}$;l), k = -1.
3) M(2;-6).

6. 1) ε= 0,2, a = 5.
2) A($2\sqrt{5}$;2), k = 0,5.
3) M(-3; $2\sqrt{3}$).

7. 1) ε = 0,5, a= 8.
2) A($3\sqrt{5}$;6), k = -1.
3) M(4;$2\sqrt{11}$).

8. 1)ε = 0,5, a= 14.
2) A($-\sqrt{2}$; 3), k = -3.
3) M(-9;$3\sqrt{5}$).

9. 1) ε = 0,2, a= 15.
2) A($-\sqrt{5}$;-2), k=-2.
3) M(4; $2\sqrt{7}$).

10. 1) ε= 0,2; a= 10.
2) A(-4;$\sqrt{7}$), k = -1.
3) M(-3; $3\sqrt{2}$).

11. 1) ε= 0,5, a= 10.
2) A(4;$2\sqrt{3}$), k = -1.
3) M(1;-4).

12. 1) ε= 0,8, a= 10.
2) A($\sqrt{5}$;4), k = -2.
3) M(-7; $7\sqrt{2}$).

13. 1) ε = 0,1, a= 10
2) A(-4;-$\sqrt{3}$), k = 0,5.
3) M(4;6).

14. 1) ε = 0,4, a= 15.
2) A($2\sqrt{5}$; 5), k = 2,5 .
3) M(-4; $4\sqrt{2}$).

15. 1) ε= 0,3, a= 10.

16. 1) ε = 0,4, a = 10.

2) A($\sqrt{10}$;2), k=-2.
3) M(9; $3\sqrt{3}$).

2) A(3;$2\sqrt{2}$), k = -1.
3) M(-9; $3\sqrt{11}$).

17. 1) ε= 0,6, a =10.
2) A(-$\sqrt{2}$; 2), k = -2.
3) M(2; $\sqrt{10}$).

18. 1) ε= 0,7, a= 10.
2) A($6\sqrt{2}$; 3), k = 0,5 .
3) M(-1;-3).

19. 1) ε = 0,9, a=10.
2) A(4; 10), k = 2,5 .
3) M(-4; 8).

20. 1) ε= 0,6, a= 15.
2) A(-4; $2\sqrt{7}$), k = -2 .
3) M(9; 6).

21. 1) ε = 0,25, a = 4.
2) A(4;$3\sqrt{3}$), k = 1,5.
3) M(2;$2\sqrt{7}$).

22. 1) ε = 0,75, a = 4.
2) A($2\sqrt{2}$; - 5), k = 2,5.
3) M(-4; $2\sqrt{3}$).

23. 1) ε = 0,25, a = 8.
2) A($2\sqrt{5}$;3), k = 1,5.
3) M(2;-$2\sqrt{3}$).

24. 1) ε = 0,75, a = 8.
2) A($\sqrt{5}$;-3), k = -3.
3) M(-9; $3\sqrt{7}$).

25. 1) ε = 0,25, a = 16.
2) A($8\sqrt{2}$;-4), k = 0,5.
3) M(l; $\sqrt{2}$).3)

26. 1) ε = 0,75, a = 16.
2) A(-$2\sqrt{2}$; 3), k = 1,5 .
3) M(-8; 12).

27. 1) ε= 0,25, a = 12.
2) A($2\sqrt{5}$; 10), k = 2,5.
3) M(-2; $2\sqrt{5}$).

28. 1) ε= 0,75, a = 12.
2) A(-$4\sqrt{2}$; 6), k = 1,5.
3) M(6;-$6\sqrt{2}$).

29. 1) ε = 0,5, a = 12.
2) A(-$2\sqrt{2}$; 6), k = -3.
3) M(1;-$2\sqrt{2}$).

30.1) ε = 0,5, a = 16.
2) A(8;$2\sqrt{3}$), k =0,5.
3) M(-2;$2\sqrt{10}$).

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 3

ІЗ № 3-1

Дано координати вершин трикутника ABC:
A(-6;7), B(3; -5), C(8;5).
Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:
1) довжину сторони AB;
2) координати точок M_1 та M_2, які ділять відрізок AB у відношеннях $\lambda_1 = 4$ та $\lambda_2 = -6$;

3) рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB;

4) загальні рівняння прямих AB і AC, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;

5) рівняння прямої AB у відрізках;

6) напрямний вектор і канонічне рівняння прямої AE, яка містить медіану трикутника ABC.

Виконати рисунок.

Розв'язання

Побудуємо на координатній площині заданий трикутник ABC *(рис. 25)*. На цьому рисунку ми будемо будувати всі ті точки і лінії, які знайдемо під час розв'язування задачі.

1) За формулою (1) *(див. ПЗ-1)* знаходимо:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3+6)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{18+144} = \sqrt{225} = 15 \text{ лін. од.}$$

2) Підставивши у формули (4) *(див. ПЗ-1)*координати точок A і B та значення λ_1 й λ_2, знайдемо координати точок M_1 та M_2:

$$x_{M_1} = \frac{x_A + \boldsymbol{\lambda_1} \cdot x_B}{1 + \boldsymbol{\lambda_1}} = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{1+4} = \frac{-6+12}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2;$$

$$y_{M_1} = \frac{y_A + \lambda_1 \cdot y_B}{1 + \lambda_1} = \frac{7 + 4 \cdot (-5)}{1+4} = \frac{7-20}{5} = \frac{13}{5} = -2{,}6;$$

$$x_{M_2} = \frac{x_A + \lambda_2 \cdot x_B}{1 + \lambda_2} = \frac{-6 + (-6) \cdot 3}{1 + (-6)} = \frac{-6-18}{-5} = \frac{24}{5} = 4{,}8;$$

$$y_{M_2} = \frac{y_A + \lambda_2 \cdot y_B}{1 + \lambda_2} = \frac{7 + (-6) \cdot (-5)}{1 + (-6)} = \frac{7+30}{-5} = \frac{37}{5} = -7{,}4.$$

Отже, шукані точки – $M_1(1{,}2; -2{,}6)$ і $M_2(4{,}8; -7{,}4)$.

3) Очевидно, що центром шуканого кола є точка O_1 – середина відрізка AB. Знайдемо координати точки O_1, підставивши координати точок A і B у формули (5) *(див. ПЗ-1):*

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6+3}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5;$$

$$y_{O_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + (-5)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Отже, центр шуканого кола – $O_1(-1{,}5; 1)$.

Радіус цього кола $R = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ лін. од.

Підставивши координати точки O_1 і знайдене значення R у рівняння (6) *(див. ПЗ-1),* отримаємо рівняння шуканого кола:

$$(x - x_{0_1})^2 + (y - y_{0_1})^2 = R^2,$$
$$(x - (-1{,}5))^2 + (y-1)^2 = 7{,}5,$$
$$(x + 1{,}5)^2 + (y-1)^2 = 56{,}25.$$

4) Підставивши у рівняння прямої, що проходить через дві задані точки *(див. ПЗ-1, п. 18, рівняння (14),* координати точок A і B, отримаємо рівняння прямої AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}, \qquad \frac{x-(-6)}{3-(-6)} = \frac{y-7}{-5-7}, \frac{x+6}{9} = \frac{y-7}{-12},$$
$$4 \cdot (x + 6) = -3 \cdot (y-7),\ 4x + 24 = -3y + 21,$$

$$4x + 3y + 3 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Рівняння (I) є загальним рівнянням прямої AB. Порівнюючи його з рівнянням (8) *(див. ПЗ-1),* встановимо, що нормальним вектором прямої AB буде вектор $\vec{N}_{AB}$ = (4; 3), оскільки його координати дорівнюють коефіцієнтам при змінних у загальному рівнянні цієї прямої. Побудуємо нормальний вектор прямої AB, відклавши його від точки B *(рис. 25).*

Розв'язавши відносно y загальне рівняння прямої AB, зведемо його до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом *(див. ПЗ-1, п. 15, рівняння (11):*

$$4x + 3y + 3 = 0,$$
$$3y = -4x - 3,$$

$$y = -\frac{4}{3}x - 1. \qquad \text{(II)}$$

Рівняння (II) є рівнянням прямої AB з кутовим коефіцієнтом. Коефіцієнт при x у цьому рівнянні дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB .

Отже, $k_{AB} = -\frac{4}{3}$.

Діючи аналогічно, знаходимо загальне рівняння, координати нормального вектора та кутовий коефіцієнт прямої AC.

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A},$$
$$\frac{x-(-6)}{8-(-6)} = \frac{y-7}{5-7},$$

$$x + 7y - 43 = 0. \qquad \text{(III)}$$

Рівняння (III) є загальним рівнянням прямої AC. Нормальним вектором цієї прямої буде вектор $\vec{N}_{AB}$=(1; 7), який на рисунку відкладемо від точки A *(рис. 25),*

$$x + 7y - 43 = 0,$$

$$y = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{43}{7}. \qquad \text{(IV)}$$

Рівняння (IV) є рівнянням прямої AC з кутовим коефіцієнтом. Звідси

$$k_{AC} = -\frac{1}{7}.$$

5) Зведемо загальне рівняння прямої AB до вигляду рівняння у відрізках *(див. ПЗ-1, п.16, рівняння (12))*Для цього перенесемо вільний член рівняння (I) у праву частину рівності і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$4x + 3y + 3 = 0,$$
$$4x + 3y = -3,$$
$$\frac{4x}{-3} + \frac{3y}{-3} = 1,$$

$$\frac{x}{-0{,}75} + \frac{y}{-1} = 1. \qquad \text{(V)}$$

Рівняння (V) є рівнянням прямої AB у відрізках. Легко побачити, що відрізками, які відтинає пряма AB на осях координат, будуть $a = -0{,}75$ та $b = -1$.

6) Медіана AE трикутника ABC проходить через точку E – середину сторони BC. Знайдемо координати цієї точки, підставивши у формули (5) *(див. ПЗ-1)* координати точок B і C. Матимемо:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5;$$
$$y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-5+5}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Отже, E(5,5; 0).

Підставивши координати точок E та A у рівняння прямої, що проходить через дві задані точки *(див. ПЗ-1, п. 18, рівняння (14),* отримаємо шукане рівняння прямої AE :

$$\frac{x - x_E}{x_A - x_E} = \frac{y - y_E}{y_A - y_E},$$

$$\frac{x - 5{,}5}{-6 - 5{,}5} = \frac{y - 0}{7 - 0},$$

$$\frac{x - 5{,}5}{-11{,}5} = \frac{y}{7}. \qquad \text{(VI)}$$

Рівняння (VI) є канонічним рівнянням прямої AE. Порівнюючи його з рівнянням (10) *(див. ПЗ-1),* встановимо, що напрямним вектором прямої AE буде вектор $\vec{S}_{AE}$=(−11,5; 7), оскільки його координати дорівнюють числам у знаменниках виразів канонічного рівняння цієї прямої.

Побудуємо напрямний вектор прямої AE, відклавши його від точки E *(рис. 25).*

Очевидно, що $\overrightarrow{S_{AE}} = \overrightarrow{EA}$.

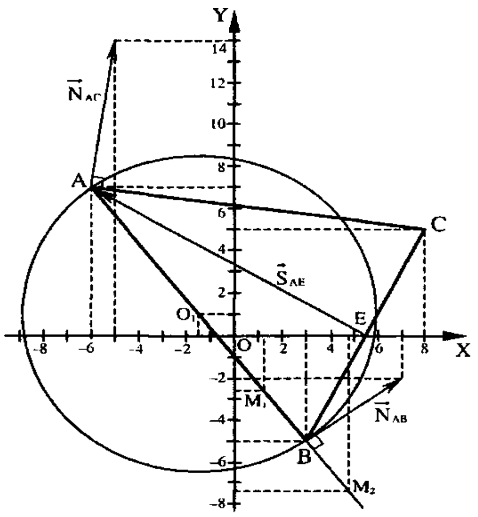


Рисунок 25

ІЗ № 3-2

Дано координати вершин трикутника ABC:

A(−6; 7), B(3; −5), C(8;5).

Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:

1) внутрішній кут A в радіанах з точністю до 0,01;
2) загальне рівняння висоти CD та її довжину;
3) рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно до прямої AC.

Виконати малюнок.

Розв'язання

Побудуємо на координатній площині заданий трикутник ABC *(рис. 26).*

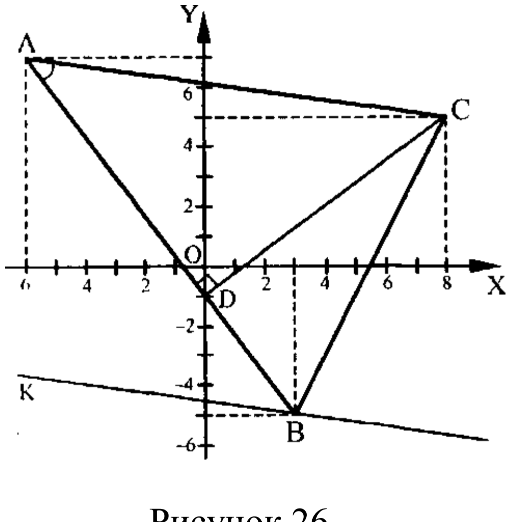


Рисунок 26

На цьому рисунку ми будемо будувати всі ті точки і лінії, які знайдемо під час розв'язування задачі.

1) В попередньому завданні ми вже знайшли кутові коефіцієнти прямих AB і AC, які утворюють шуканий кут A (як видно з рисунка, в трикутнику ABC внутрішній кут A – гострий).

Підставивши значення $k_{AB} = -\frac{4}{3}$ та $k_{AC} = -\frac{1}{7}$ у формулу (2) *(див. ПЗ-2, п. 2),* отримаємо тангенс шуканого кута:

$$tg\angle A = \left|\frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC}k_{AB}}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{7} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{21}}\right| = \left|\frac{\frac{-3+28}{21}}{\frac{21+4}{21}}\right|$$

$$\left|\frac{3 + 28}{21 + 4}\right| = \left|\frac{25}{25}\right| = 1.$$

Звідси, виконавши за допомогою мікрокалькулятора необхідні обчислення, отримуємо шуканий кут A трикутника ABC:

$$\angle A = \text{arctg } 1 = 45° = 0{,}79 \text{ радіан.}$$

2) За умовою задачі CD – висота трикутника ABC, тому $CD \perp AB$. За умовою перпендикулярності прямих *(див. ПЗ-2, п. 4(а), рівність (7),* використавши знайдений вище кутовий коефіцієнт прямої AB, матимемо:

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{\frac{-4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Підставивши знайдене значення k_{CD} та координати точки C у рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку *(див. ПЗ-1, п. 17, рівняння (13),* отримаємо шукане рівняння прямої CD:

$$y - y_c = k_{CD} \cdot (x - x_c),$$

$$y - 5 = \frac{3}{4} \cdot (x - 8),$$

$$4 \cdot (y - 5) = 3 \cdot (x - 8),$$

$$4y - 20 = 3x - 24,$$

$$3x - 4y - 4 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Рівняння (I) є шуканим загальним рівнянням висоти CD трикутника ABC .

Довжина висоти CD дорівнює відстані від точки C до прямої AB. Знайдемо цю відстань. Для цього підставимо у формулу відстані від точки до прямої *(див. ПЗ-2, п. 1, формула (I))* координати точки C і коефіцієнти з загального рівняння прямої AB, знайденого у попередньому завданні:

$$CD = d_C = \frac{|4x_c + 3y_c + 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{16 + 9}} =$$

$$= \frac{32 + 15 + 3}{\sqrt{25}} = \frac{50}{5} = 10 \text{ лін. од.}$$

3) Позначимо шукану пряму ВК. За умовою задачі ВК паралельна АС. За умовою паралельності прямих *(див. ПЗ-2, п. 3, рівність (5),* використавши знайдений раніше кутовий коефіцієнт прямої АС, матимемо:

$$k_{BK} = k_{AC} = -\frac{1}{7}.$$

Підставивши знайдене значення k_{BK} та координати точки В у рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку *(див. ПЗ-1, п. 17, рівняння (13),* отримаємо шукане рівняння прямої ВК:

$$y - y_{в} = k_{вк} \cdot (x - x_{в}),$$

$$y - (-5) = -\frac{1}{7} \cdot (x - 3),$$

$$-7 - (y + 5) = x - 3,$$

$$-7y - 35 = x - 3,$$

$$x + 7y + 32 = 0: \qquad \text{(II)}$$

Рівняння (II) є шуканим загальним рівнянням прямої ВК, яка проходить через точку В і паралельна прямій АС .

Використавши знайдені рівняння прямих СБ і ВК, побудуємо їх на рисунку *(див. рис. 26).*

ІЗ № 3-3

1) Дано ексцентриситет $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 0,6 і велику піввісь **а** = 5 еліпса, який займає стандартне положення відносно осей координат. Знайти:

а) фокусну відстань еліпса;

б) координати його фокусів;

в) малу піввісь і канонічне рівняння еліпса.

Виконати рисунок.

2) Гіпербола, яка займає стандартне положення відносно осей координат, проходить через точку А(6; $-6 \cdot \sqrt{2}$), кутовий коефіцієнт однієї з її асимптот k = $-1{,}5$. Знайти:

а) півосі і канонічне рівняння гіперболи;

б) її фокусну відстань;

в) координати її фокусів;

г) ексцентриситет гіперболи;

д) фокальні радіус-вектори точки А.

Виконати рисунок.

3) Парабола, симетрична відносно осі Ох, проходить через початок координат і точку М(2; -4). Знайти:

а) канонічне рівняння параболи і її параметр;

б) координати фокуса параболи;

в) рівняння її директриси;

г) фокальний радіус-вектор точки М .

Виконати рисунок.

Розв'язання

1)

а) За означенням, ексцентриситет еліпса: $\varepsilon = \frac{c}{a}$*(див. ПЗ-3, п. 9, формула (4),* де **a** – велика піввісь еліпса, **c** – його фокусна відстань. Звідси c = εa. Підставивши в цю рівність a та ε з умови задачі, отримаємо шукану фокусну відстань еліпса

c = 0,6·5 = 3.

б) Використовуючи обчислену вище фокусну відстань еліпса, знаходимо координати його фокусів *(див. ПЗ-3, п.* 7):

$$F_1(3;\ 0)\text{та}\ \ F_2(-3; 0).$$

в) Як відомо, фокусна відстань еліпса $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, де a та b – його півосі (див. *ПЗ-3, п.7, формула (3).* Звідси знаходимо:

$b^2 = a^2 - c^2,\ b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Підставивши в останню рівність відомі значення a і c, знайдемо малу піввісь b заданого еліпса:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Підставивши в канонічне рівняння еліпса (*див. ПЗ-3, п. 2, формула (1)* значення a = 5 і b= 4, отримаємо шукане рівняння заданого еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

На координатній площині побудуємо вершини заданого еліпса (точки з координатами (5; 0), (−5; 0), (0; 4) та (0; − 4). Через побудовані точки проведемо еліпс (*рис. 27*).

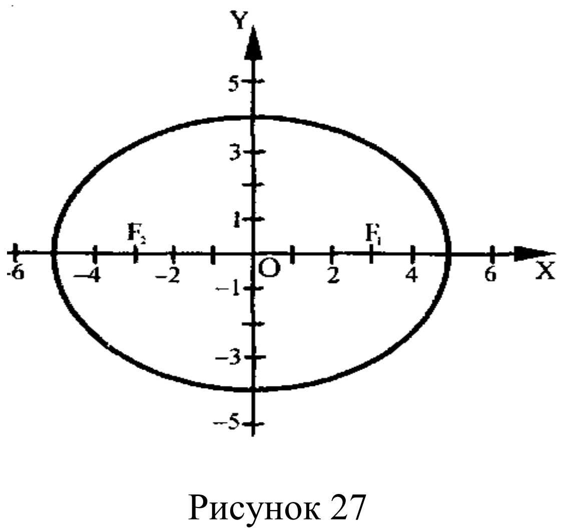


Рисунок 27

За відомими координатами побудуємо фокуси еліпса.

2)

а) Як відомо, кутові коефіцієнти асимптот гіперболи $k = \pm\frac{b}{a}$, де a і b – її півосі *(див. ПЗ-3, п. 20, формули (11)*. За умовою задачі $k = -1{,}5$. Враховуючи те, що a і b – додатні числа, матимемо:

$$\frac{b}{a} = |k| = |-1{,}5| = 1{,}5 \text{ , звідки}$$

$$\mathrm{b} = 1{,}5\mathrm{a}.$$

За умовою задачі точка $\mathrm{A}(\ 6;\ -6 \cdot \sqrt{2})$ належить гіперболі, тому її координати мають задовольняти рівняння цієї гіперболи. Підставимо координати точки A і рівність (I) в канонічне рівняння гіперболи *(див. ПЗ-3, п. 15, рівність (9)*. Матимемо:

$$\frac{\mathrm{x}_\mathrm{A}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{y}_\mathrm{A}^2}{\mathrm{b}^2} = 1,$$

$$\frac{6^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{\left(-6 \cdot \sqrt{2}\right)^2}{(1{,}5\mathrm{a})^2} = 1,$$

$$\frac{36}{\mathrm{a}^2} - \frac{72}{2{,}25\mathrm{a}^2} = 1.$$

Ми отримали рівняння з одним невідомим. Розв'язавши це рівняння, знайдемо a:

$$36 \cdot 2{,}25 - 72 = 2{,}25\mathrm{a}^2,$$

$$81 - 72 = 2{,}25\mathrm{a}^2,$$

$$2{,}25\mathrm{a}^2 = 9,$$

$$\mathrm{a}^2 = 4.$$

Врахувавши те, що a > 0, встановлюємо, що дійсна піввісь заданої гіперболи $\mathrm{a} = \sqrt{4} = 2$. Підставивши це значення у рівність (I), знайдемо уявну піввісь: $\mathrm{b} = 1{,}5\mathrm{a}\ = 1{,}5 \cdot 2 = 3$.

Підставимо знайдені півосі гіперболи у канонічне рівняння *(див. ПЗ-3. п. 15, рівність (9)*. Матимемо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Рівняння (II) є шуканим канонічним рівнянням заданої гіперболи.

б) Підставивши у формулу (10) *(див. ПЗ-3, п. 18)* знайдені вище півосі гіперболи, отримаємо її фокусну відстань:

$$\mathrm{c} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

в) Використавши обчислену вище фокусну відстань гіперболи, знайдемо координати її фокусів *(див. ПЗ-3, п. 18):*

$$F_1(\sqrt{13};\ 0) \ \text{ та } \ F_2(-\sqrt{13};\ 0).$$

г) Підставивши у формулу (13) *(див. ПЗ-3, п. 23)* знайдені вище фокусну відстань c та дійсну піввісь a заданої гіперболи, знайдемо її ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{3{,}25}.$$

д) Підставивши у формули (14) *(див. ПЗ-3, п. 26)* обчислені раніше величини, знайдемо фокальні радіус-вектори точки А:

$$r_1 = |\varepsilon x_A - a| = \left|6 \cdot \sqrt{3{,}25} - 2\right| = 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 3{,}25} - 2 == 3 \cdot \sqrt{13} - 2 \text{ лін. од.};$$

$$r_2 = |\varepsilon x_A + a| = \left|6 \cdot \sqrt{3{,}25} + 2\right| = 3 \cdot \sqrt{13} + 2 \text{ лін. од.}$$

На координатній площині будуємо асимптотичний прямокутник гіперболи *(див. ПЗ-3, п. 21),*сторони якого паралельні осям координат *(рис. 28).*

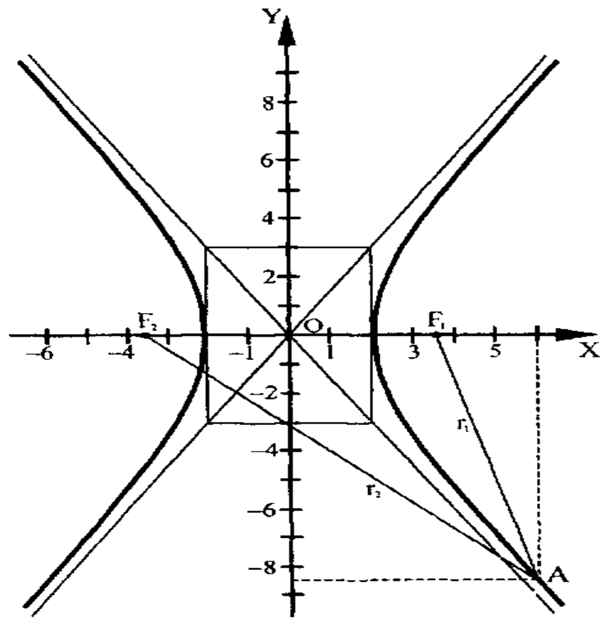


Рисунок 28

Точки з координатами (2; 0) і (−2; 0) будуть вершинами гіперболи *(див. ПЗ-3, п. 16).* Проведемо діагоналі асимптотичного прямокутника і продовжимо їх за його межі. Отримані прямі будуть асимптотами гіперболи. Побудуємо фокуси гіперболи і точку А, координати яких відомі. Орієнтуючись за асимптотами, проведемо через вершину (2; 0) і точку А одну вітку гіперболи. Симетрично до неї відносно осі Оу будуємо другу вітку гіперболи *(рис. 28).*

3)

а) За умовою задачі точка М(-2;-4) належить параболі. Оскільки $x_M < 0$, то вітки параболи напрямлені в бік від'ємного напрямку осі Ох. Тоді канонічне рівняння заданої параболи матиме вигляд

$$y^2 = -2px, \qquad \text{(III)}$$

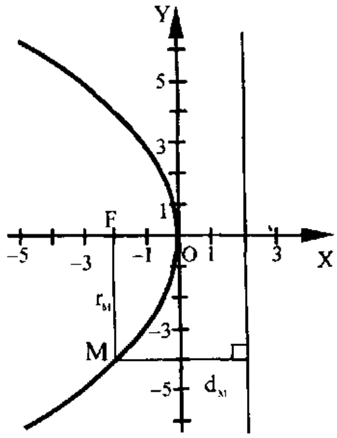


Рисунок 29

де $p > 0$ — параметр параболи *(див. ПЗ-3, п. 35(2).* Підставивши в це рівняння координати точки М, знайдемо параметр параболи:

$$y_M^2 = -2px_м,$$
$$(-4)^2 = -2p\cdot(-2),$$
$$4p = 16,$$
$$p = 4.$$

Підставимо знайдений параметр p у рівняння (III) і отримаємо шукане канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = -2\cdot 4x,$$
$$y^2 = -8x.$$

б) Фокус параболи, заданої рівнянням (III), матиме координати $(-0{,}5p; 0)$ *(див. ПЗ-3, п. 35(2).*Отже, шуканий фокус параболи:

$$F(-0{,}5\cdot 4;\ 0) \text{ або } F(-2;\ 0).$$

в) Рівняння директриси параболи, заданої рівнянням (III), матиме вигляд $x = 0{,}5$. Отже, шукане рівняння директриси:

$$x = 0{,}5\cdot 4 \text{ або } x = 2.$$

г) Підставимо параметр параболи і абсцису точки М у формулу для обчислення фокального радіус-вектора точки, що лежить на параболі, заданій рівнянням (III). Матимемо:

$$r_M = 0{,}5p - x_м = 0{,}5\cdot 4 - (-2) = 2 + 2 = 4 \text{ лін. од.}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П. Вища математика : навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – [4-те вид.]. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

2. Луценко Ю. Л. Вища математика : Метод. розробки практичних занять. Індивідуальні завдання / Ю. Л. Луценко, М. В. Миронюк. – Вінниця : Тірас, 2004. – 464 с.

3. Антоненко В. Ф. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра : навч. посібник / Антоненко В. Ф., Олешко Т. І., Паламарчук Ю. А.; за заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 140 с.

4. Вища математика. У двох част. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. П.; за заг. ред. П. П. Овчинникова; [пер. з рос. П. М. Юрченка]. – [3-тє вид., випр.]. – К. : Техніка, 2003. – 600 с.

5. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навчальний посібник для студ. технічних і технологічних спец. вищих навч. закладів / Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 577 с.

6. Кравченко В. В. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. / Кравченко В. В., Лубенська Т. В., Олешко Т. І.; за заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 144с.

Навчальне видання

Кирилащук Світлана Анатоліївна
Бондаренко Злата Василівна
Клочко Віталій Іванович

ВИЩА МАТЕМАТИКА ЧАСТИНА 1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Рукопис оформлено З. Бондаренко

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет виготовлено О. Ткачуком

Підписано до друку 13.02.2020 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 5,58.
Наклад 50 (1 – 21) пр. Зам. № 2020-031.

Видавець та виготовлювач
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.