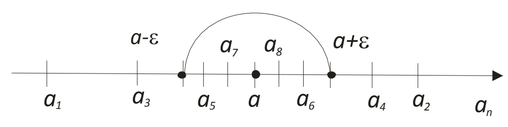
А. А. Коломієць, В. І. Клочко, В. О. Краєвський

Практикум з вищої математики: обчислення границь



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. А. Коломієць, В. І. Клочко, В. О. Краєвський

Практикум з вищої математики: обчислення границь

Практикум

Вінниця
ВНТУ
2020

УДК 517(076)
К61

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 30.04.2020 р.)

Рецензенти:
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор
В. Д. Дереч, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Т. Л. Годованюк, кандидат педагогічних наук, доцент, професор

Коломієць, А. А.
К61 Практикум з вищої математики: обчислення границь : практикум / А. А. Коломієць, В. І. Клочко, В. О. Краєвський. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 56 с.

ISBN 978-966-641-804-6

У практикумі наведено приклади розв’язання основних типів границь, які найчастіше зустрічають студенти в типових розрахунках, а також у подальшому при дослідженні на збіжність рядів та невласних інтегралів. Відповідно вміння обчислювати границі функцій є фундаментальним і обов’язковим вмінням для студентів. Мета практикуму – надати студентам можливість більш детально розібратися у методах обчислення границь функцій, у методах розкриття основних невизначеностей, що зустрічаються при обчисленні границь, а також поглибити знання теоретичного матеріалу.

Призначений для студентів усіх спеціальностей.

УДК 517(076)

ISBN 978-966-641-804-6

ЗМІСТ

ВСТУП

У практикумі наведено приклади основних типів границь, які найчастіше зустрічають студенти в типових розрахунках, а також у подальшому при дослідженні на збіжність рядів та невласних інтегралів. Відповідно, уміння обчислювати границі функцій є фундаментальним і обов'язковим для студентів.

При обчисленні границь студенти часто роблять помилки, плутаючи розкриття невизначеностей різного виду. Тому за мету у практикумі автори обрали описати в стислому вигляді розкриття основних невизначеностей, навести основні алгоритми обчислення границь та систематизувати в загальну таблицю типи границь, невизначеності, їх розкриття та приклади.

1 ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

Кожному числу $n \in N$ поставимо у відповідність деяке дійсне число $x_n = f(n)$. У цьому випадку кажуть, що задано *числову послідовність* і позначають $\{x_n\}$.

Означення. Число ***a*** називається *границею* послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться натуральне число *N* таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, що більші за *N* виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Те, що число *a* є границею послідовності $\{x_n\}$, записують так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Якщо послідовність має границю, то її називають *збіжною* і, якщо не має границі, *розбіжною*

Будь-який інтервал виду $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε *-околом точки a* на числовій осі.

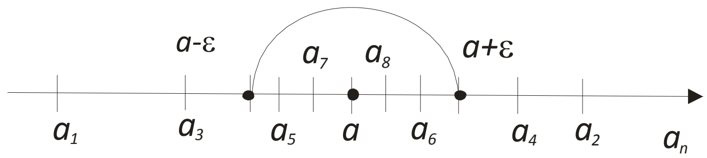


Рисунок 1 − Ілюстрація групування точок в околі точки *a*

З геометричної точки зору, якщо число *a* є границею послідовності $\{x_n\}$, то в довільний ε окіл точки *a* потраплять всі члени послідовності $\{x_n\}$, окрім скінченної їх кількості (ε може бути як завгодно малим). Можна сказати, що члени послідовності $\{x_n\}$ групуються навколо точки *a* (рис. 1).

Нехай на деякій множині *X* задано функцію $f(x)$ і деяку. Виберемо з *X* послідовність точок $\{x_n\}$, що відрізняються від точки *a*:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ Нехай число *a є границею* послідовність точок $\{x_n\}$:

$x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Знайдемо значення функції $f(x)$ у точках послідовності $\{x_n\}$

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$. Ці значення утворюють послідовність $\{f(x_n)\}$

Означення. Число *b* називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$ (або при $x \to a$), якщо для будь-якої збіжної до *a* послідовності значень аргументу *x*, відмінних від *a*, відповідна послідовність значень функції збігається до числа *b*.

$$\forall \{x_n\},\ x_n \neq a, \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Це означення називають означенням за Гейне або означенням границі «мовою послідовностей».

Означення. Число *A* називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. У цьому випадку записують

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Означення. Число *A* називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|x| > M(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. У цьому випадку записують $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

Дамо означення лівої і правої границі функції «мовою послідовностей».

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ зліва, якщо для послідовності $x_1, x_2 ... x_n ...,$ значень аргументу x, що збігається до числа x_0 і таких, що $x_n < x_0$, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2)...f(x_n)...,$ збігається до числа A_1.

Позначається ця границя символічно так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$,

Або інакше: для $\begin{array}{l} \forall x_n : x_n \to x_0 \ i \ x_n < x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A_1; \\ A_1 = f(x_0 - 0). \end{array}$

Означення. Число A_2 називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ справа, якщо для довільної послідовності $x_1, x_2 ... x_n ...,$ значень аргументу x, що збігається до числа x_0 і таких, що $x_n > x_0$, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2)...f(x_n)...,$ збігається до числа A_2.

Позначається ця границя символічно так:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2,$$

Або інакше: для $\begin{array}{l} \forall x_n : x_n \to x_0 \ i \ x_n > x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A_2; \\ A_2 = f(x_0 + 0). \end{array}$

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ *справа* в точці $x = a$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $a < x < a + \delta$ $[a - \delta < x < a]$, виконується нерівність: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Позначають границю справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ або $f(a + 0)$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ *справа* (*зліва)* в точці $x = a$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $a - \delta < x < a$, виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Скорочено означення границі справа (зліва) в точці $x=a$, можна записати так: $\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right)$ або $f\left(a-0\right)$.

Теорема. Для того, щоб у точці $x=a$ існувала границя функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб існували ліва і права границі і були рівні між собою:

$$\lim_{x\to a-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to a+0} f\left(x\right)=b.$$

Приклад. Обчислити ліву і праву границі функції

$$y=\frac{1}{e^{x+1}}$$

Обчислимо ліву границю функції:

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{1}{1-0-1}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Обчислимо праву границю функції :

$$\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{1}{1+0-1}}=e^{\frac{1}{0}}=e^{\infty}=\infty$$

Як бачимо, ліва і права границя функції в точці можуть не співпадати.

Приклад. Обчислити ліву і праву границі функції $y=\dfrac{x^2-3}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2-3}{x+1}=+\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x^2-3}{x+1}=-\infty$$

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує таке додатне число N, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x|>N$, виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$. Записують: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$

Розглянемо *нескінченно великі і нескінченно малі функції.*

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \to a$, якщо виконується рівність:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Іншими словами, функція $f(x)$ *називається нескінченно мало*ю при x, що прямує до a, якщо для будь-якого ε > 0 існує число δ (ε) > 0 таке, що при $0 < |x - a| <$ δ (ε) виконується нерівність: $|f(x)| <$ ε.

Означення. Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно великою* при x, що прямує до a, якщо для будь-якого N >0 існує число δ(N) таке, що при $|x - a| <$ δ(N) виконується нерівність $|\alpha(x)| > N$, це можна записати так: $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \infty$.

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку малості, якщо границя їх відношення $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$.

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними, якщо $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Їх позначають так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таблиця 1

Нескінченно малі (н. м.) і нескінченно великі (н. в.) послідовності та функції, зв'язок між ними

Послідовність	Функція
Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.	Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* функцією (скорочено н. м. ф.) при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$,	Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* функцією (скорочено н. в. ф.) у точці $x = a$ при $x \to a$, якщо: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Розглянемо деякі властивості н. м. і н. в. послідовностей і функцій

Властивість 1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: \quad |x_n + y_n| < \varepsilon \leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0.$$

Властивість 2. Добуток скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.

Властивість 3. Добуток нескінченно малої послідовності на послідовність обмежену є нескінченно малою послідовністю.

Усі перераховані вище властивості мають місце і для нескінченно малих функцій.

Наведемо основні *еквівалентності* функцій.

1. $sina(x) \sim a(x)$;
2. $tga(x) \sim a(x)$;
3. $1 - cosa(x) \sim (\frac{\alpha(x)}{2})^2$;
4. $arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5. $arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
6. $e^{\alpha(x)} \sim \alpha(x)$;
7. $ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$;
8. $log_a[1+a(x)] \sim \alpha(x) log_a e$;
9. $\sqrt[k]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{k}$;
10. $\sqrt[k]{a^k + \alpha(x)} - a \sim \frac{\alpha(x)}{k \cdot a^{k-1}}$;
11. $a^{\alpha(x)} - a^{\beta(x)} \sim (\alpha(x) - \beta(x)) \ln a$;
12. $\underset{\alpha\to 0,\ m,k=const}{(1+\alpha(x))^m - 1} \sim \alpha(x) \cdot m$;
13. $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$;
14. $\underset{\alpha,\beta\to 0}{e^{\alpha(x)} - e^{\beta(x)}} \sim \alpha(x) - \beta(x)$;
15. $a^{\alpha(x)} - b^{\beta(x)} \sim \alpha(x) \ln a - \beta(x) \ln b$.
16. $\ln U(x) \sim U(x) - 1$

2 ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ СУМИ, ДОБУТКУ І ЧАСТКИ ФУНКЦІЙ

З метою розв'язання деяких нижче наведених прикладів подамо властивості границь функцій.

Границі функцій мають такі *властивості*:

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, де C – константа,

2. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де C – константа.

3. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

4. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x);$$

5. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, причому $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

6. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi)}.$$

Ви часто будете зустрічатися з такими формулами. Звертаємо на них особливу увагу!

$$\lim_{x\to x_0}\frac{K}{g(x)} = \frac{K}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \infty, \text{ якщо } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0. \quad K - \text{ константа}$$

Границя частки двох функцій не існує (дорівнює ∞), якщо границя чисельника існує і відмінна від 0, а границя знаменника дорівнює нулю.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{K}{g(x)}=\dfrac{K}{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}=0,$ якщо $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty.$

Границя частки двох функцій дорівнює 0, якщо границя чисельника існує, а границя знаменника дорівнює ∞.

Розглянемо деякі важливі границі, які у подальшому допоможуть при обчисленні границь.

3 ПЕРША ТА ДРУГА ЧУДОВІ ГРАНИЦІ

Необхідні знання про першу чудову границю

Границю $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad (*)$$

називають *першою чудовою границею.*

Зазначимо, що границя функції $\dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$ має невизначеність $\dfrac{0}{0}$.

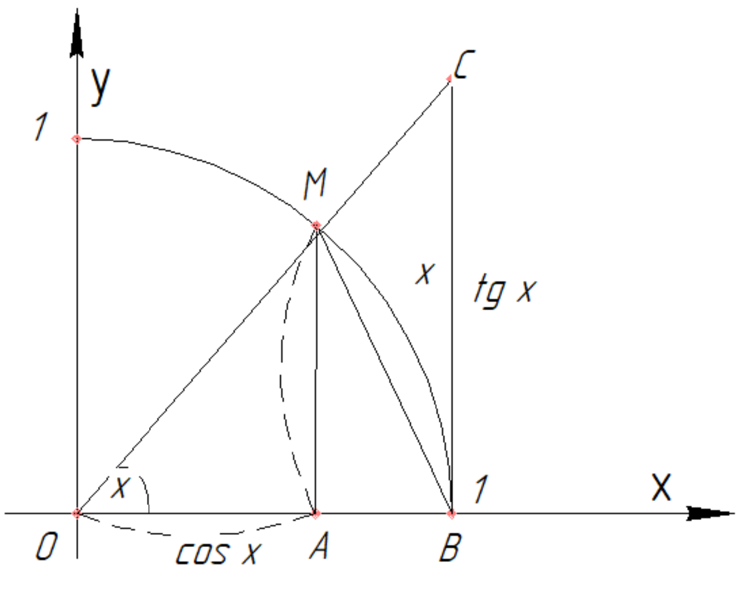


Рисунок 2

Доведемо формулу (*). Візьмемо круг з одиничним радіусом (рис. 2) і позначимо радіальну міру кута COB через x. Нехай $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Запишемо співвідношення між площами трикутників OMB, OCB та кругового сектора OMB:

$$S_{\vartriangle OMB} < S_{сектора\ OMB} < S_{\vartriangle OCB}$$

де $S_{\vartriangle OMB} = \frac{1}{2} OB \cdot AM = \frac{1}{2} \sin x$,

$$S_{сектора\ OMB} = \frac{1}{2} OM^2 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$S_{\vartriangle OCB} = \frac{1}{2} OB \cdot BC = \frac{1}{2} tgx$$

то $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tgx$,

звідси $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, $(\sin x > 0)$ або $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ і $\lim\limits_{x \to 0} = 1$, то за теоремою *про границю проміжної функції* існує границя

$$\lim_{x \to 0+0} = \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Нехай тепер $x < 0$. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ парна: $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, тому

$$\lim_{x \to 0-0} = \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Першу важливу границю широко використовують для обчислення границь виразів, що містять тригонометричні функції. За допомогою формули (*) можна довести границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgkx}{x} = k$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin kx}{x} = k$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{arc}\,tgkx}{x} = k$; 5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Розглянемо приклади на застосування першої чудової границі.

Приклад. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$

Приклад. $\lim_{x\to 2}(x-2)tg\frac{\pi x}{4}$

Розв'язання. Маємо невизначеність ($0\cdot\infty$). Нехай $x-2=t$;
при $x\to 2$, $t\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to 2}(x-2)tg\frac{\pi x}{4}=\lim_{t\to 0}t\cdot tg\frac{\pi(2+t)}{4}=\lim_{t\to 0}t\cdot tg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{4})=$$

$$=\lim_{t\to 0}t(-ctg\frac{\pi t}{4})=-\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}.$$

Необхідні знання про другу важливу границю

Другою важливою границею називають границю

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

Зазначимо, що ця формула справедлива як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$. Графік функції $y=(1+\frac{1}{x})^x$ зображено на рис. 3.

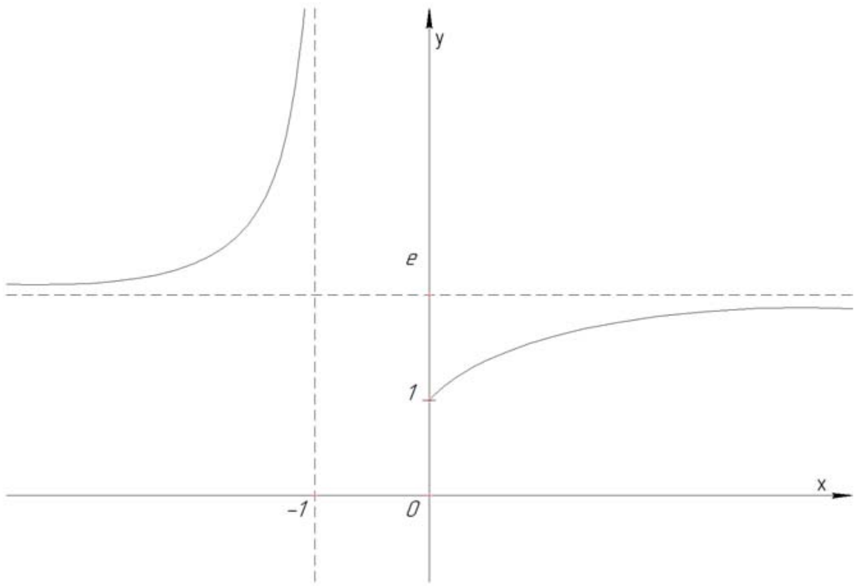


Рисунок 3

Виконавши у формулі (**) заміну $\frac{1}{x}=t$, дістанемо формулу $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$, яку також називають *другою важливою границею*.

Число e – трансцендентне число, його найближче значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Друга важлива границя пов'язана з невизначеністю 1^{∞} (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу $u(x)^{v(x)}$, де $u(x)\to 1$, $v(x)\to\infty$, якщо $x\to x_0$).

Наслідки з другої чудової границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{k}=e^{k}$

2) $2)\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k}-1}{x}=\log_a e$;

3) $3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+k}{x})^{k}=k$;.

При $a=e$ формули 2) і 3) набувають вигляду:

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\log_{\cos x}(1+x^2)$

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\log_{\cos x}(1+x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln\cos 2x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-2\sin^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2}{\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x}\cdot(-2\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin^2 x}=-\frac{1}{2}$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Перейдімо до безпосереднього обчислення границь, розглянувши основні типові невизначеності, що зустрічаються при їх розв'язанні.

4 ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ

Перейдемо до безпосереднього обчислення границь функцій. При обчисленні границь можна зустрітися з різними випадками, які ми детально розглянемо у цьому розділі.

4.1 Обчислення границь, що не містять невизначеності.

Для обчислення границі функції, за умови, коли змінна прямує до константи, необхідно у вираз, що міститься під знаком границі, підставити значення константи:

Приклад . $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + x - 4)$.

Розв'язання

Використаємо властивості границь функцій (1), (2), (3), отримаємо

$\lim\limits_{x\to 2} 5x^3 = 5\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 5\cdot 2^3 = 5\cdot 8 = 40$;

$\lim\limits_{x\to 2} x = 2$; $\lim\limits_{x\to 2} 4 = 4$; $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + x - 4) = 40 + 2 - 4 = 38$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3}$

Використаємо властивість (5).

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3} = \dfrac{1+1+1}{1+3} = \dfrac{3}{4}$.

4.2 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$,(якщо під знаком границі стоїть дробово-раціональна функція $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени)

$$P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \ldots + p_1 x + p_0,$$

$$Q_n(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + ... + q_1 x + q_0, \text{ (якщо } x \to \infty \text{).}$$

Необхідно кожен доданок чисельника і знаменника поділити на змінну в найбільшому показнику степеня.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 - 4x^2 - 7}{9x^3 - 4}$

Розв'язання

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 4x^2 - 7}{9x^3 - 4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3} - 4\frac{x^2}{x^3} - \frac{7}{x^3}}{9\frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1 - 4\frac{1}{x} - \frac{7}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(9 - \frac{4}{x^3})}\left\{\begin{matrix} \textit{враховуючи, що} \\ \frac{k}{x^n} \to 0 \\ \textit{при } x \to \infty \end{matrix}\right\} = \frac{1 - 4\cdot 0 - 0}{9 - 0} = \frac{1}{9}$$

.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+9}{7x^2 - 14}$.

Розв'язання

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+9}{7x^2 - 14} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2} + \frac{9}{x^2}}{7\frac{x^2}{x^2} - \frac{14}{x^2}} = \frac{0}{7} = 0\,.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 + x + 10}{x^2 + 9}$.

Розв'язання

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x + 10}{x^2 + 9} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{9}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

.

При обчисленні границь дробово-раціональних виразів $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ може бути декілька випадків:

а) якщо $m > n$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \infty$;

б) якщо $m < n$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0$;

в) якщо $m = n$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \frac{p_m}{q_m}$, беремо коефіцієнти при невідомих з однаковими показниками степеня.

Розкриття невизначеностей вказаного типу можна проводити застосувавши заміну многочлена на еквівалентний, тобто

$$p_m x^m + ... + p_1 x + p_0 \sim p_m x^m, \quad (1)$$

$$q_m x^m + ... + q_1 x + q_0 \sim q_m x^m \quad (2)$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4}$.

Розв'язання.

Застосуємо формули (1) і (2) до чисельника і знаменника дробу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4} = \left| \begin{matrix} x^3 - 5x^2 - 7 \sim x^3, \\ 3x^3 - 4 \sim 3x^3,\ x \to \infty \end{matrix} \right| = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{9x^2 + 4x + 1}{16x^2 + 7x + 3}}$.

Застосуємо формули (1) і (2) до чисельника і знаменника дробу:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{9x^2+4x+1}{16x^2+7x+3}}=\left|\begin{matrix}9x^2-x+1\approx 9x^2\\16x^2+7x+3\approx 3\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{9x^2}{8x^2}}=\frac{3}{4}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{p_m x^m}{q_m x^m}=\lim_{x\to\infty}\frac{p_m}{q_m}=\frac{p_m}{q_m}.$$

4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty-\infty\}$

а) Якщо вираз, що знаходиться під знаком границі, має вигляд $P_m(x)-Q_n(x)$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-15}{x-4}-2x\right).$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-15}{x-4}-2x\right).$$

Тут ми маємо невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$. Для того, щоб перейти до невизначеності $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, зведемо до спільного знаменника вирази, що знаходяться під знаком границі. Отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-15-2x^2+8x}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{11x-15}{2x-3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{matrix}11x-15\sim 11x,\ x\to\infty\\2x-3\sim 2x,\ x\to\infty\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{11x}{2x}=\frac{11}{5}..$$

4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty-\infty\}$

б) З ірраціональними виразами під знаком границі ($x\to\infty$)

Для розкриття таких невизначеностей потрібно помножити чисельник і знаменник виразу, що знаходиться під знаком границі, на спряжений вираз.

Приклад $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+8}-\sqrt{x^2-5x+7}\right).$

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник виразу, що знаходиться під знаком границі, на спряжений вираз. Будемо вважити, що знаменник одиниця.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+8}-\sqrt{x^2-5x+7}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x+8}-\sqrt{x^2-5x+7})(\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2-5x+7})}{\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+8\right)-\left(x^2-5x+7\right)}{\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+1}{\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2-5x+7}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left|\begin{array}{l}\textit{застосуємо формули}(1)\ \textit{і}\ (2)\\ \textit{до чисельника і знаменника}\\ \textit{підграничного виразу}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Розв'язання. У цьому випадку отримаємо суму двох нескінченностей $\{\infty+\infty\}$, а тому невизначеності не буде.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty+\infty=\infty.$$

4.4 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x\to a$, під знаком границі знаходиться дробово-раціональний вираз $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Щоб розкрити невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ потрібно у чисельнику та знаменнику дробу, що знаходиться під знаком границі, виділити множник $(x-a)$.

Найчастіше для виділення множника $(x-a)$ чисельник і знаменник дробу ділять кутом на множник $(x-a)$.

За теоремою Безу, якщо при підстановці у многочлен константи a, многочлен перетворюється в нуль, то цей многочлен розкладається на множники, серед яких обов'язково буде присутній множник $(x-a)$.

Якщо чисельник чи знаменник дробово-раціонального виразу є квадратичним тричленом, то його можна розкласти на множники за формулою:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \tag{3}$$

де x_1 *та* x_2 – корені квадратного тричлена.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x-3}{9x^2-8x-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Оскільки $x=1$ є коренем многочленів, що стоять в чисельнику і знаменнику, то за теоремою Безу вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x-1)$.

У чисельнику виконаємо ділення x^3+x^2+x-3 на $(x-1)$ у стовпчик:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2+x-3 & x-1 \\ \hline
\underline{x^3-x^2} & x^2+2x+3 \\
\quad 2x^2+x-3 & \\
\quad \underline{2x^2-2x} & \\
\qquad\quad 3x-3 & \\
\qquad\quad \underline{3x-3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

, тоді $x^3+x^2+x-3=(x-1)\cdot(x^2+2x+3)$.

$9x^2-8x-1$ розкладається на множники за формулою (3):

$$9(x-1)\left(x+\frac{1}{9}\right)=(x-1)(9x+1).$$

Маємо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(x-1)(9x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3}{9x+1}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

4.5 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \to a$, якщо під знаком границі містяться нескінченно малі функції (застосування таблиці еквівалентних функцій)·

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin 5x\cdot \arcsin x} = \left|\begin{array}{l} 1-\cos 4x = 2\sin^2 2x \sim 2(2x)^2 = 8x^2,\ x\to 0 \\ \sin 5x \sim 5x, \quad x\to 0 \\ \arcsin x \sim x, \quad x \to 0 \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{5x\cdot x} = \frac{8}{2} = 4.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-1}{\ln(1-10x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l} 7^x - 1 \sim x\cdot\ln 7,\ x\to 0 \\ \ln(1-10x) \sim -10x,\ x\to 0 \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot \ln 7}{-10x} = -\frac{\ln 7}{10}.$$

Приклад. Довести, що при $x \to 0$ н. м. $e^{3x}-e^{2x}$ і $\sin 2x - \sin x$ будуть еквівалентними.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення цих функцій.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 2x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\left(e^x-1\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l} \text{при } x\to 0 \\ e^x - 1 \sim x, \\ \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}, \\ \cos\frac{3x}{2} \to 0, \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot x}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 1} = 1.$$

Отже, за означенням ці величини еквівалентні.

4.6 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \to a$, якщо під знаком границі містяться ірраціональні вирази.

Такого типу границі розкривають шляхом домноження чисельника і знаменника дробу на спряжений вираз, до виразу, що містить ірраціональність. ·

Приклад. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-\sqrt{2x+12}}{\sqrt{4x+8}-\sqrt{x+14}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику та знаменнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $(\sqrt{3x+10}+\sqrt{2x+12})(\sqrt{4x+8}+\sqrt{x+14})$. Маємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+10}-\sqrt{2x+12}}{\sqrt{4x+8}-\sqrt{x+14}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x+10}-\sqrt{2x+12})(\sqrt{3x+10}+\sqrt{2x+12})(\sqrt{4x+8}+\sqrt{x+14})}{(\sqrt{4x+8}-\sqrt{x+14})(\sqrt{4x+8}+\sqrt{x+14})(\sqrt{3x+10}+\sqrt{2x+12})}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(3x+10-2x-12)(\sqrt{4x+8}+\sqrt{x+14})}{(4x+8-x-14)(\sqrt{3x+10}+\sqrt{2x+12})}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x+8}+\sqrt{x+14})}{(3x-6)(\sqrt{3x+10}+\sqrt{2x+12})}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+8}+\sqrt{x+14}}{\sqrt{3x+10}+\sqrt{2x+12}}=\frac{1}{3}\frac{4+4}{4+4}=\frac{1}{3}.$$

4.7 Розкриття невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ при $x\to a$

Щоб розкрити невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$, її зводять шляхом елементарних перетворень до невизначеностей типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}$.

Розв'язання. Перетворимо невизначеність $\{0\cdot\infty\}$ у невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ за допомогою елементарних перетворень.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}(1-x)}=$$

$$=\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)\sim\frac{\pi}{2}(1-x),\,1-x\to 0\right|=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\dfrac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}.$$

4.8 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty-\infty\}$ при $x \to a$, якщо під знаком границі міститься логарифмічна функція

Для розкриття такого роду невизначеностей їх зводять спочатку до невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ шляхом елементарних перетворень та властивостей логарифмічних функцій, а потім переходять до невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Часто при обчисленні границь необхідно буде застосовувати властивості логарифмів. Наведемо основні з них:

Властивості логарифмів

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^p = p\log_a x \ (p \in R)$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x \ (p \in R)$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\left(b > 0, b \neq 1\right)$
8. $a^{\log_a^b} = b$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+11\right)\cdot\left[\ln\left(x+4\right)-\ln\left(x-2\right)\right]=\{\infty-\infty\}$.

Розв'язання. Використаємо властивості логарифмів

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+11\right)\left[\ln\left(x+4\right)-\ln\left(x-2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+11\right)\cdot\ln\frac{\left(x+4\right)}{\left(x-2\right)}\right]=\{\infty\cdot 0\}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+11\right)\left[\ln\left(1+\frac{6}{x-2}\right)\right]=$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{6}{\text{x - 2}}\right)\sim\frac{6}{x-2},\ x\to\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\left(x+11\right)\cdot\frac{6}{x-2}=6\lim_{x\to\infty}\frac{x+11}{x-2}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{Поділивши чисельник і знаменник підграничногог виразу}\\ \textit{на } x \textit{ отримаємо}\end{array}\right|=6\cdot\frac{1}{1}=6$$

4.9 Розкриття невизначеності типу $\left\{1^{\infty}\right\}$ з використанням другої важливої границі

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \qquad (*)$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e, \qquad (**)$$

тут $\alpha(x)$ *довільна н. м. функція*

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x}$.

Розв'язання. Спосіб І. Маємо невизначеність $\left\{1^{\infty}\right\}$. Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (*). Додамо і віднімемо 1 в основі виразу, що міститься під знаком границі.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x}{x+2}-1\right)\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{показник}\\ \textit{степеня домножимо}\\ \textit{спочатку на}\\ -\dfrac{x+2}{2}\ \textit{,а потім на}\\ -\dfrac{2}{x+2}\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+2}\cdot x}.$$

Вираз, що знаходиться у квадратних дужках, приведено до виду (*), де $\alpha(x)=\dfrac{-2}{x+2}\to 0$ при $x\to\infty$, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}}=e$. Отже, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-2}{x+2}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{x}} = e^{\frac{-2}{1}} = e^{-2}.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}}$.

Розв'язання. Спосіб I. Маємо невизначеність $\left\{1^\infty\right\}$. Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (**).

Зробімо заміну:

$$\begin{aligned}&x-2=t,\ \textit{при}\ x\to 2,\ t\to 0,\\ &x=t+2\end{aligned}.$$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}} = \lim\limits_{t\to 0}(5-2(t+2))^{\frac{2(t+2)}{t+2-2}} = \lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{2t+4}{t}}$. Показник степеня домножимо на -2 і на $-\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{2t+4}{t}} = \lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{-2\cdot(2t+4)}{-2t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}(-2(2t+4))} = -8$

Спосіб II.

$$\lim_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\ln\left(5-2x\right)^{\frac{2x}{x-2}}}\ \lim_{x\to 2} e^{\frac{2x}{x-2}\ln\left(5-2x\right)} = e^{4\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(1+(4-2x))}{x-2}} =$$

$$= \begin{cases}(4-2x)\to 0 \quad \textit{при} \quad x\to 2\\ \ln(1+(4-2x))\sim 4-2x\end{cases} = e^{4\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-2x}{x-2}} = e^{4\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{x-2}} = e^{-8}.$$

5 КЛАСИФІКАЦІЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ПРИ РОЗКРИТТІ ГРАНИЦЬ ТА ШЛЯХИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Таблиця 2

	Вигляд границі	***Метод розв'язання***	***Приклад***
Умова x→a	$\lim\limits_{x\to a} P_m(x)$ $P_m(x) =$	Замість змінної в підграничний вираз підставляємо значення, до якого прямує змінна *x* $\lim\limits_{x\to a} P_m(x) = P\,(a)$	$\lim\limits_{x\to 2} x^3 - 3x + 1 =$ $= 2^3 - 3\cdot 2 + 1 =$ $= 8 - 6 + 1 = 3$
	$\lim\limits_{x\to a} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$ Маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$	У чисельнику і знаменнику дробу виділяємо множник *x-a*. Для цього можна застосувати одну із формул: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ де x_1 і x_2 − корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 = ab + b^2)$ Потім чисельник і знаменник дробу скорочуємо на *x-a* $\lim\limits_{x\to a} \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{P_m(x)}{x-a}}{\frac{Q_k(x)}{x-a}} =$ $= \lim\limits_{x\to a} \frac{P_{m-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}$ Якщо після ділення знову отримаємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, то знову виділяємо у чисельнику і знаменнику *x-a і* здійснюємо ділення на *x-a*	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$ $= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} =$ $= 12$ Розклали на елементарні множники і скоротили на *x*-2 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-6)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-5}{x-6} = \frac{3}{4}$

Умова $x \to a$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$ Відношення нескінченно малих функцій(н. м. ф)	Застосовуємо таблицю еквівалентностей для нескінченно малих функцій $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ $1-\cos\alpha(x)\sim\frac{(\alpha(x))^2}{2}$ $\text{tg }\alpha(x)\sim\alpha(x)$ $\text{arctg }\alpha(x)\sim\alpha(x)$ $\arcsin\ \alpha(x)\sim\alpha(x)$ $b^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln b$ $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$ $\log_b(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\log_b e$ $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ $(1+\alpha(x))^b-1\sim b\cdot\alpha(x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^x-1}{5x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$ $=\{8^x\approx x\ln 8\}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln 8}{5x}=\frac{\ln 8}{5}$
Умова $x \to a$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$ Відношення нескінченно малих функцій (н. м. ф) Вираз під знаком границі містить різницю (суму) тригонометричних функцій	Застосовуємо одну із формул $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$ $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x-\sin 4x}{\sin 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2\cos\frac{10x+4x}{2}\sin\frac{10x-4x}{2})}{\sin 2x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 7x\sin 3x}{\sin 2x}=$ $=\left\{\begin{matrix}\textit{застосуємо таблицю}\\ \textit{еквівалентних функцій}\end{matrix}\right\}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 7x\cdot 3x}{2x}=\frac{2\cdot 3}{2}=2$

Умова $x\to\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ Границя відношення многочленів $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$	Чисельник і знаменник дробу ділимо на змінну в найбільшому показнику степеня $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{P_k(x)}{x^k}}{\frac{Q_m(x)}{x^k}}$ *якщо* *k>m* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{P_k(x)}{x^m}}{\frac{Q_m(x)}{x^m}}$ *якщо* *m>k*	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-4}{7x^3+x-2}=$ $=\left\{\begin{matrix}\textit{чисельник і}\\ \textit{знаменник}\\ \textit{дробу ділимо}\\ \textit{на } x^3\end{matrix}\right\}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}{7+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=$ $=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(7+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\dfrac{2}{7}$
Умова $x\to\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(P_p(x)-Q_n(x)\right)$ маємо невизначеність $\infty-\infty$ типу	Зводимо дроби до спільного знаменника. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ При чому може утворитися невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{21x^2-2x}{3x}-7x\right)=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21x^2-2x-21x^2}{3x}=$ $\lim\limits_{x\to\infty}(-\dfrac{2x}{3x})=-\dfrac{2}{3}$
Умова $x\to\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{P_k(x)}-\sqrt{Q_k(}$ Маємо невизначеність $\infty-\infty$ типу	Домножуємо і ділимо на спряжений вираз $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{P_k(x)}-\sqrt{Q_k(x)})(\sqrt{P_k(x)}+\sqrt{Q_k(x)})}{\sqrt{P_k(x)}+\sqrt{Q_k(x)}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+4})=$ $=\{\infty-\infty\}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+4})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+4})}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2-x-4}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+4})}=\left\{\dfrac{-6}{\infty}\right\}=0$

Умова $x \to \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}$ Невизначеність типу $\{1^{\infty}\}$	Застосовуємо правило другої чудової границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2-3}{3x+2}\right)^{x-3} =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{3x+2}\right)^{x-3} =$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{3x+2}\right)^{-\frac{3x+2}{3}\cdot(x-2)\cdot(-\frac{3}{3x+2})} =$ $= e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{3x-6}{3x+2})} = e^{-1}$

6 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ІНЖЕНЕРА

Розглянемо декілька задач інженерного характеру.

Завдання. Матеріальна точка коливається по колу біля свого середнього положення за законом $x = A \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin \omega \cdot t$, де $(A, k, \omega > 0)$. Знайдіть $\lim\limits_{t \to \infty} x$.

Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю функції $\lim\limits_{t \to \infty} A \cdot e^{-k \cdot t} \sin \omega \cdot t$ за допомогою СКМ.

Відповідь: $\lim\limits_{t \to \infty} x = 0$ – коливання затухаючі.

Завдання Розрахунок робочого колеса турбіни приводить до рівняння $\ln y = -k^2 \cdot x^2 + \ln y_0$, де y – товщина колеса на відстані x від осі обертання, y_0 – значення y при $x = 0$. Знайдіть $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y}{y_0}$.

Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь основною логарифмічною тотожністю та властивостями степеня для вираження відношення $\dfrac{y}{y_0}$:

$y = e^{-k^2 \cdot x^2 + \ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot e^{\ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot y_0$.

Знайдіть границю функції $\lim\limits_{x \to 0} e^{-k^2 \cdot x^2}$ за допомогою СКМ.

Відповідь: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y}{y_0} = 1$.

Завдання. Висота частини вертикального струменя фонтану наближено виражається формулою $h = \dfrac{H}{1 + \varphi \cdot H}$, де H – величина напору води в насадках (у метрах водяного стовпа), φ – коефіцієнт, що визначається діаметром d (мм) вихідного перерізу насадки.

Побудуйте графіки залежності $h(H)$ при різних значення φ: $\varphi = 0,023$, $\varphi = 0,009$, $\varphi = 0,004$; дослідіть та порівняйте поведінку відповідних функцій.

Переформулюйте задачу математичною мовою, тобто знайдіть $\lim\limits_{H \to \infty} \dfrac{H}{1 + \varphi \cdot H}$ *за допомогою* СКМ.

Значення цієї границі $\frac{1}{\varphi}$ *вказує на існування горизонтальної асимптоти* $h = \frac{1}{\varphi}$ (при $\varphi = 0,23$, $h = 43,48$, тобто необхідно добудувати лінію $y(x) = 43,48$). *Для інтерпретації результатів порівняння отриманих залежностей побудуйте за допомогою ППЗ графіки залежностей при різних значеннях* φ, з урахуванням того, що за змістом задачі h обмежено відрізком $[0; H]$.

Відповідь: при збільшенні φ висота струменя зменшується, причому зміна величини напору при збільшенні φ майже не впливає на висоту струменя; при зменшені φ $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{H}{1 + \varphi \cdot H} = H$, тобто висота струменя прямує до H.

Завдання. Динамічна самоіндукція антени при постійному подовженні хвилі на одиницю довжини виражається формулою

$L = L_0 \frac{tg(\pi l / \lambda)}{2\pi l / \lambda}$, де L – динамічна самоіндукція; L_0 – статична самоіндукція; l – діюча довжина антени; λ – довжина хвилі антени. Знайти $\lim\limits_{\lambda \to \infty} L$.

Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю послідовності $\lim\limits_{\lambda \to \infty} L_0 \frac{tg(\pi \cdot l / \lambda)}{2 \cdot \pi \cdot l / \lambda}$ за допомогою ППЗ.

Відповідь: $\lim\limits_{\lambda \to \infty} L = L_0 \cdot \sqrt{2}$.

7 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^5+2x^3+1}{x^3+1}-3x^2\right)\left\{\begin{matrix}\textit{Маємо невизначеність}\\ \{\infty-\infty\}\end{matrix}\right\}$

Зведемо вирази до спільного знаменника

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^5+2x^3+1}{x^3+1}-3x^2\ ^{\backslash x^3+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3x^5}+2x^3+1-\cancel{3x^5}-3x^2}{x^3+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+1}\left\{\begin{matrix}\textit{Поділимо чисельник і}\\ \textit{знаменник на } x^3\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}-\dfrac{3x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}+\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\left(\dfrac{3}{x}\right)^{\nearrow 0}+\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\nearrow 0}}{1+\left(\dfrac{1}{x^3}\right)_{\searrow 0}}=2.$$

2. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x^3+x^2-9x-9}{x^2+3x}\right)\left\{\begin{matrix}\textit{При підстановці } x=-3\\ \textit{отримаємо}\left\{\dfrac{0}{0}\right\}\end{matrix}\right\}$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2(x+1)-9(x+1)}{x(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+1)(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}}$$

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos 2x-\cos 9x}{tg^2 2x}\right)\left\{\begin{matrix}\textit{Скористаємося формулою}\\ \cos\alpha x-\cos\beta x=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}x\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}x\end{matrix}\right\}$

$$\cos 2x-\cos 9x=-2\sin\frac{2x+9x}{2}\cdot\sin\frac{2x-9x}{2}=-2\sin\frac{11}{2}x\cdot\sin\left(-\frac{7x}{2}\right)=2\sin\frac{11x}{2}\cdot\sin\frac{7x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{11x}{2}\cdot\sin\frac{7x}{2}}{tg^2 2x}\left\{\begin{matrix}\sin\frac{11x}{2}\sim\frac{11x}{2}\\ \sin\frac{7x}{2}\sim\frac{7x}{2}\\ tg^2x\sim 2x\\ \end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{11x}{2}\cdot\frac{7x}{2}}{(2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{77\cancel{x^2}}{2}}{4\cancel{x^2}}=\frac{77}{8}$$

4. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{17-x}-4}{x^3-1}\left\{\begin{matrix}\textit{Підставимо 1}\\ \textit{замість змінної у вираз,}\\ \textit{що міститься під знаком}\\ \textit{границі}\end{matrix}\right\}=\frac{0}{0}$$

Домножимо чисельник і знаменник виразу, що міститься під знаком границі на $\sqrt{17-x}+4$; знаменник виразу розкладемо за формулою $a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$Отримаємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{17-x}-4\right)\left(\sqrt{17-x}+4\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{17-x}+4\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{17-x-16}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{17-x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(\sqrt{17-x}+4\right)}=-\frac{1}{24}$$

5. $\lim\limits_{x\to 2}(9-4x)^{-\frac{x}{x-2}}\left\{1^\infty\right\}$. Невизначеність розкриваємо за правилом другої чудової границі. $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \text{ або } \lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e}$

Зробимо заміну $\begin{matrix}x-2=t\\ x=t+2\end{matrix}$ якщо $x\to 2,\ \textit{то}\ t\to 0$

$$\lim_{t\to 0}\left(9-4(t+2)\right)^{\frac{t+2}{t+2-2}}=\lim_{t\to 0}(1-4t)^{\frac{t+2}{t}}\left\{\begin{matrix}\textit{Домножимо чисельник і знаменник}\\ \textit{показника на } -4\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(1-4t)^{\frac{t+2(-4)}{-4t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}(-4)(t+2)}=e^{-8}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{e^{3x}-1}\left\{\begin{array}{l}\arcsin 5x\sim 5x\\ e^{3x}-1\sim 3x\\ \textit{застосували таблицю еквівалентності функцій}\end{array}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x}\right)^{3x}=\left\{1^{\infty}\right\}$ застосуємо правило другої чудової границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-5}{6x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{6x}\right)^{3x\cdot\left(-\frac{6x}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{15x}{6x}}=e^{-\frac{15}{6}}$$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\left[\ln x-\ln(7+9x)\right]$. Маємо невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$

Скористаємося властивостями логарифмів:

$p\ \log_a x=\log_a xp$

$\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{9x+7}\right)^{x+2}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{9x+7}\right)^{x+2}=\ln\dfrac{1}{9}^{\infty}=\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\infty}=\ln\infty=\infty$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\left\{\begin{array}{l}\textit{Підставимо } 0 \textit{ замість}\\ \textit{змінної } \left\{\dfrac{0}{0}\right\}\end{array}\right\}$

Застосуємо таблицю еквівалентних функцій

$\left\{5^{\sqrt{x}}-1\sim\sqrt{x}\ln 5\right\}$ *отримаємо* $:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\ln 5}{\cancel{\sqrt{x}}}=\ln 5$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+11}-\sqrt{x-1}\right)$

Отримаємо невизначеність $\{\infty-\infty\}$. Домножимо і поділимо на спряжений вираз до виразу, що знаходиться під знаком границі. Тобто на

$\dfrac{\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+11}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}\right)}=$$

У чисельнику застосуємо формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+11-(x-1)}{\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}+11-\cancel{x}+1}{\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{\sqrt{x+11}+\sqrt{x-1}}=\frac{12}{\infty}=0$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+7}{\sqrt[5]{x^5+13}}$ Підкореневий вираз у знаменнику $x^5+13\sim x^5$ *при* $x\to\infty$

Отримаємо границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+7}{\sqrt[5]{x^5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+7}{x}=1$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{e^{x-1}-1}$

Заміна для зручності $\begin{matrix} x-1=t \\ x\to 1,\ t\to 0 \end{matrix}$. Отримаємо:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{e^t-1}\left\{\begin{matrix}\sin t\sim t\\ e^t-1\sim t\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}}=1$$

13. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}=$

Розділимо чисельник і знаменник на *x* в максимальному степені, тобто на x^3

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$$

14) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=$

Підставимо у підграничний вираз замість аргумента число, до якого прямує аргумент. Отримаємо невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Домножимо чисельник і знаменник цього дробу на вираз, спряжений до чисельника.

$$= \lim_{x \to 7} \frac{\left(\sqrt{2+x}+3\right)\left(\sqrt{2+x}-3\right)}{(x-7)\left(\sqrt{2+x}+3\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{2+x-9}{(x-7)\left(\sqrt{2+x}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt{2+x}+3\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{1}{\sqrt{2+x}+3} =$$

Спробуємо знову підставити значення $x = 7$ у вираз, що міститься під знаком границі. Отримаємо:

$$= \frac{1}{\sqrt{2+7}+3} = \frac{1}{6}$$

15) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin(3x)}{5x} =$

Скористаємося однією з форм записів першої чудової границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

Для того, щоб аргумент функції і знаменник були однакові, домножимо чисельник і знаменник виразу, що міститься під знаком границі, на 3:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\arcsin(3x)}{5 \cdot 3 \cdot x} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(3x)}{3 \cdot x} = \frac{3}{5}$$

16) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

Знайдемо границю, до якої прямує основа степеня.

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) =$ (розділимо чисельник і знаменник на x в максимальному степені, тобто на x) $= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{2}{2} = 1$. Знайдемо границю, до якої наближається показник степеня: $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$.

Оскільки основа показника степеня наближається до 1, а показник степеня наближається до нескінченності, то при обчисленні цієї границі застосуємо правило другої чудової границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-1-1}{2x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{2x+1}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{-2}{2x+1}}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{2+\frac{1}{x}}} = e^{-1}$$

8 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Варіант 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+5x^2}}{6x+8};\ \lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x^3-4x};\ \lim_{x\to0}\frac{\cos7x-1}{3\sin^2x};\ \lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2};\ \lim_{x\to1}(3-2x)^{\frac{3x}{x-1}};\ \lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{tg4x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+8x)}{2^x-1};\ \lim_{x\to\infty}x[\ln(6x+5)-\ln x];\ \lim_{x\to\infty}(\frac{6x+1}{6x})^{2x};\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-5}).$$

Варіант 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^6+5x^4+4}{x^6};\ \lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2};\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6});\ \lim_{x\to0}\frac{\cos9x-1}{5\sin^2x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3};\ \lim_{x\to2}(5-4x)^{\frac{2x}{x-2}};\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-5x)}{3^x-1};\ \lim_{x\to\infty}[\ln(7x+6)-\ln x];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{arctg3x}{e^{2x}-1};\ \lim_{x\to\infty}(\frac{8x+1}{8x})^{3x}.$$

Варіант 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3};\lim_{x\to1}\frac{x^3+8x^2+7x}{x^3-x};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-3});\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+8x^2}-1}{2x^2+x^3};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos5x}{1-\cos2x};\ \lim_{x\to2}(5-2x)^{\frac{3x}{x-2}};\ \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin4x}-1}{tg3x};\ \lim_{x\to\infty}[\ln(5x+7)-\ln x];\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-7x)}{5^x-1};$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{5x-3}{5x})^{4x}.$$

Варіант 4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+6x^2-5}}{5x^2-x-1};\ \lim_{x\to2}\frac{x^2+6x+8}{x^3-8};\ \lim_{x\to\infty}x[\ln x-\ln(2x+9)];\ \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{\arcsin2x};\ \lim_{x\to1}(6x-5)^{\frac{2x}{x-1}};\ \lim_{x\to0}\frac{arctg3x}{e^{5x}-1};\ \lim_{x\to0}\frac{6^3-1}{\ln(1+3x)};\lim_{x\to\infty}(\frac{2x-5}{2x+1})^{-x};$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-7}).$$

Варіант 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2};\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x-4};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2-3});\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2};\ \lim_{x\to2}(4x-7)^{\frac{6x}{x-2}};\ \lim_{x\to0}\frac{arctg^2 x}{e^{2x^2}-1};\ \lim_{x\to\infty}x[\ln(x+8)-\ln(x-1)];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{\ln(1+6x)};\ \lim_{x\to\infty}(\frac{3x-6}{3x+1})^{1-x};$$

Варіант 6

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^3+1}{2x^5-3x^2+2};\lim_{x\to5}\frac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15};\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\ln(1-2x)};\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{5x}-x}{x-5};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{tg3x};\lim_{x\to5}(6-x)^{\frac{5x}{x-5}};\lim_{x\to\infty}(\frac{2x}{2x-3})^{4x};\lim_{x\to\infty}(2x+3)[\ln(x+2)-\ln x];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{\sin 2x};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+2}-x).$$

Варіант 7

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4};\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-9});\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 5x}{arctg 2x};\lim_{x\to3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3};\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 5x}-1}{tgx};\ \lim_{x\to-\infty}(x-4)[\ln(2-x)-\ln(5-x)];$$

$$\lim_{x\to1}(5-4x)^{\frac{x}{2x-2}};\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+2}{x^2+1});$$

Варіант 8

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x);\ \lim_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1};\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x-3});\ \lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{3x}-x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sin x}{3tg2x};\ \lim_{x\to0}(1+4x^2)^{\frac{2x-1}{x^2}};\ \lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^x}{\sin 2x};\ \lim_{x\to\infty}(3x-2)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{\sin x};\ \lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{1-x};$$

Варіант 9

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^6-2x^4+3}}{2x^2+3x-4}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x+21}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+4})$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{tg^2 x}$;

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x^2)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2\sqrt{x}}-1}{tg\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)[\ln(2x+3)-\ln(2x-4)]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)}{\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-5}{x+1})^{x2}$;

Варіант 10

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+6x^2-3}{5x^3-3x+4}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-8})$; $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{x^2-9x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\arcsin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{3x}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{tg 4x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)[\ln(1-x)-\ln(2-x)]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin 2x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3x-8}{3x-5})^{-x}$;

Варіант 11

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{2x+1}$ $\quad\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9x+5}-x\right)$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\cos 2x-\cos 3x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x+x^2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{tg\sqrt[3]{x}}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{4x}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x-3)-\ln(2x+5)\right]$

$\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-5}\right)^{3x}$

Варіант 12

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$ $\quad\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+10}\right)$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-3x}$ $\quad\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{\frac{3x}{x+1}}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2^x-1}$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\left[\ln(1-2x)-\ln(5-x)\right]$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+9x)}{arctg 3x}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{-2x}$

Варіант 13

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{2x+5} \quad \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right) \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11}-x\right) \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{tg^2 2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x}{6^x-1} \quad \lim_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9} \quad \lim_{x\to-2}(3+x)^{\frac{2x}{x+2}} \quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin 4x}{\ln(1-7x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+1)-\ln(3x-1)\right] \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x+5}\right)^{-2x}$$

Варіант 14

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8x-2}{x^3-2x^2+1} \quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}\right) \quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{\arcsin^2 x} \quad \lim_{x\to-3}(x+4)^{\frac{x}{x+3}} \quad \lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{5x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+2)\left[\ln(2-3x)-\ln(4-x)\right]$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{tg 3x}-1} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-9}\right)^{3x}$$

Варіант 15

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1} \quad \lim_{x\to1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-1} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+11}\right) \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to6}\frac{\sqrt{6x}-x}{x-6} \quad \lim_{x\to1}(3x-2)^{\frac{6x}{x-1}} \quad \lim_{x\to0}\frac{3^{\sin x}-1}{5x} \quad \lim_{x\to+\infty}(x+3)\left[\ln x-\ln(2x-4)\right]$$

$$\lim_{x\to2}\frac{tg(x-2)}{e^{x-2}-1} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+3}\right)^{2x}$$

Варіант 16

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-7x^2+4}{3x^4+5x-2} \quad \lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-x} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-7}\right) \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 8x}{tg^2 3x}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{x^2-4} \quad \lim_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x^2-1}} \quad \lim_{x\to0}\frac{8^x-1}{\ln(1+2x)} \quad \lim_{x\to-\infty}(2-x)\left[\ln(1-x)-\ln(6-x)\right]$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-9}\right)^{3x}$$

Варіант 17

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{8x^3+7}}$ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+12}-x\right)$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{tg^2 3x}$

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}{x^2-16}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{1-\cos 3x}$ $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{6x}{x-2}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+5)-\ln x\right]$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{tg2x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+7}\right)^{2x}$

Варіант 18

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5}$ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2+x-2}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+15}\right)$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{5x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\arcsin 2x}$ $\lim\limits_{x\to-2}(2-x)^{\frac{5x}{1-x}}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-9x)}{tg3x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)\left[\ln(1-x)-\ln(5-x)\right]$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{e^{x-1}-1}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-6}\right)^{-2x}$

Варіант 19

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{\sqrt{x^4+1}}$ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+14}-\sqrt{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-1}{x\tan 2x}$

$\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{7x}-x}{x^2-7x}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x}{\ln(1+9x)}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7^x-1}{\sin 3x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+6)-\ln(x-1)\right]$

$\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x}$

Варіант 20

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x}}{5x^2+3x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+x-6}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7})$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 3x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{xtgx}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2x+1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(4x+3)-\ln x]$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9^{\sin x}-1}{\ln(1-x)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{5x+2}{5x-6})^{-2x}$.

Варіант 21

$\lim\limits_{x\to\infty}(5x-\frac{2+5x^2}{x-4})$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+15})$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 7x-1}{xtgx}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{\arcsin 2x}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{5-2x}-1}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{8^{\sin x}-1}{\ln(1+3x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)[\ln(2-x)-\ln(3-4x)]$;

$\lim\limits_{x\to1}(4-3x)^{\frac{x+1}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+4}{3x-5})^{1-x}$.

Варіант 22

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-4x^2+3}{2x^3+3x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+4x+4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+13}-\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\sin 3x}{\sin 2x}$;

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to2}(7-3x)^{\frac{x}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{10^x-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x[\ln(1-5x)-\ln(2-x)]$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg4x}{e^{8x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x-7})^{2-x}$.

Варіант 23

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-6x+7x^4}{\sqrt{4x^8+3x^2-2}}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^2+x-12}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2-13})$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin^2 x}{e^{3x^2}-1}$;

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{7-6x}-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{tg^2 3x}$; $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{x+1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(5+2x)-\ln x]$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{tgx}-1}{\ln(1-3x)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+5}{x-8})^{2x-1}$.

Варіант 24

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{6x^2-1}{2+3x}-2x)$; $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+x^2-9x+9}{x^2+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+11}-\sqrt{x^2-2})$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{3x^2}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x^2-5x}$; $\lim\limits_{x\to1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{e^{2x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)[\ln(1-x)-\ln(2-3x)]$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{\sin x}-1}{\ln(1+2x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-3}{x+5})^{2x}$.

Варіант 25

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-\frac{2x^2+3}{1+2x})$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7x+6}-x)$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x+\cos 2x}{tg3x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{6x}$; $\lim\limits_{x\to1}(6-5x)^{\frac{2x}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)[\ln(1-3x)-\ln(2-x)]$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{tgx}-1}{\arcsin 4x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+7}{x-1})^{2x}$.

Варіант 26

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^{10}+3x^6+1}}{2x^2+5x-4}$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+4})$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{\cos 3x-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{10-x}-3}{2x-2}$; $\lim\limits_{x\to2}(7-3x)^{\frac{x}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[6]{x^6+3x^8}}{e^{4x}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)[\ln x-\ln(5x+8)]$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{8^{tgx}-1}{\ln(1-5x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x+6})^{x-1}$.

Варіант 27

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3x^2+4x^3}{1+3x^2+5x^3}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+16})$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{8x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{tg^2 4x}$; $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{\frac{3x}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 5x}-1}{\ln(1+3x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x-5)-\ln(2x+1)]$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{6^{tgx}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-3}{2x+4})^{-x}$.

Варіант 28

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4+3x^2-4}{5x^4-3x^2+6}$; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^2+4x+4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+14}-\sqrt{x-1})$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4}$;

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\cos 6x-1}{x\sin x}$; $\lim\limits_{x\to-2}(9+4x)^{\frac{x}{x+2}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)[\ln(2-5x)-\ln(2-x)]$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{\sin x}-1}{\ln(1-4x)};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{x+2}.$$

Варіант 29

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-4}{1+3x}-x\right);\quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x};\quad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-9});\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{8^{tgx}-1};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8x}-\sqrt{8}}{x^2-1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg 2x}{\cos x-\cos 4x};\quad \lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{2x}{x-1}};\quad \lim_{x\to\infty}x[\ln(x+3)-\ln(4x-1)];$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{8^{tgx}-1};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{-x}.$$

Варіант 30

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^6+3x^2-1}}{5x^3-2x+3};\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+8}-\sqrt{x});\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x8}{2arctgx};\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2};\lim_{x\to 4}(5-x)^{\frac{4x}{x-4}};\ \lim_{x\to -\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)];$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{e^{tgx}-1};\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2-4}\right)^{x^2}.$$

9 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2. $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} arctg\,\dfrac{1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} e^{\frac{2x}{1-x^2}}$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0+0\\ a>1}} \dfrac{\ln(ax)}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 1+0\\ x\to -1-0}} \arccos\dfrac{1}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}\pm 0} arctg(tgx)$

12. $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} arctg\,\dfrac{1}{x^2}$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0-0\\ x\to -\infty}} \arcsin\left(e^x\right)$

Додаткові завдання підвищеної складності

а) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$, скористатись формулою $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

б) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{ka}{n^2}\right)$, a – const;

в) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $(a>1)$.

г) $\lim_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$.

18) Побудувати графіки функцій:

а) $y=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ $\quad (x>0)$;

б) $y=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $\quad (x\geq 0)$;

в) $y=(\cos(x))^{2n}$.

10 ОСНОВНІ ПІДКАЗКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

$$\left\{\frac{C}{0}\right\}=\infty; \quad \left\{\frac{C}{\infty}\right\}=0; \quad \left\{\sqrt[n]{\infty}\right\}=\infty.$$

Таблиця еквівалентних функцій

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\left(\alpha(x)\right)^2}{2}$

$\mathrm{tg}\ \alpha(x)\sim\alpha(x)$

$\mathrm{arctg}\ \alpha(x)\sim\alpha(x)$

$\arcsin\ \alpha(x)\sim\alpha(x)$

$b^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln b$

$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$

$\log_b(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\log_b e$

$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$

$(1+\alpha(x))^b-1\sim b\cdot\alpha(x)$

Алгоритм розкриття найпростіших невизначеностей

1. $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $x\to\infty$, частка многочленів або ірраціональних виразів $\Rightarrow$ необхідно і чисельник, і знаменник поділити на x у старшому степені.

2. $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $x\to x_0$, частка многочленів $\Rightarrow$ необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити множник $x-x_0$, використавши формули скороченого множення або діленням і чисельника, і знаменника на $x-x_0$.

3. $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $x\to x_0$, $\dfrac{\sqrt{\ }-P_n(x)}{Q_m(x)}$ або $\dfrac{P_n(x)}{\sqrt{\ }-Q_m(x)}$ або $\dfrac{\sqrt{\ }-P_n(x)}{\sqrt{\ }-Q_m(x)}$ або $\dfrac{\sqrt{\ }-\sqrt{\ }}{Q_m(x)}$ або $\dfrac{P_n(x)}{\sqrt{\ }-\sqrt{\ }}$ або $\dfrac{\sqrt{\ }-\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }-\sqrt{\ }}$ $\Rightarrow$ необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити множник $x-x_0$, для цього потрібно позбутись коренів, помноживши та поділивши на спряжений вираз.

4. $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $x \to x_0$, є тригонометричні, показникові, логарифмічні, обернені тригонометричні функції $\Rightarrow$ необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити множник $x - x_0$, використавши таблицю еквівалентних функцій.

5. $\left\{1^\infty\right\}$, $x \to x_0$ $\Rightarrow$ необхідно використати другу важливу границю $\lim\limits_{x \to x_0}\left(1 + \alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$ (де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$).

11 ТЕСТИ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Наступне означення

число b називається границею функції $f(x)$ у точці $x=a$ (або при $x\to a$), якщо для будь-якої збіжної до а послідовності значень аргументу х, відмінних від а, відповідна послідовність значень функції збігається до числа b

$$\forall\{x_n\},\ x_n\neq a, \lim_{n\to\infty}x_n=a \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$$

є означенням границі функції:

а) по Гейне;

б) по Коші;

в) по Абелю;

г) геометричне означення границі.

2. *Запис* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2,$ визначає:

а) границю функції $f(x)$ у точці x_0;

б) правосторонню границю функції $f(x)$;

в) лівосторонню границю функції $f(x)$;

г) інша власна відповідь.

3. Якщо послідовність x_n має границю, то її називають:

а) обмеженою;

б)зростаючою;

в)збіжною;

г) розбіжною.

4. Наступним обчисленням $\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1-0-1}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ визначено

а) значення функції в точці $x=1$*;*

б) правосторонню границю функції в точці $x=1$*;*

в) лівосторонню границю функції в точці $x=1$*;*

г) інша власна відповідь.

5. Якщо при $x \to a$ виконується рівність: $\lim_{x\to \alpha} f(x) = 0.$

Функція $f(x)$ називається:

а) нескінченно великою;

б) нульовою;

в) нескінченно малою;

г) невизначеною.

6. Вираз $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ називається:

а) першою чудовою границею;

б) другою чудовою границею;

в) ознакою порівняння границь;

г) умовною одиницею.

7. Вираз $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ називається

а) ексцентриситетом;

б) другою чудовою границею;

в) правилом переходу;

г) визначити не можливо.

8. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3}$

а) $\dfrac{3}{4}$ *б)* 1; *в)* $1\dfrac{1}{7}$; *г)* 0.

9. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+10}{x^2+9}$

а) 1; б) -3; в) ∞*; г) 0.*

10. Вкажіть правильну еквівалентність при $x\to\infty$

а) $p_m x^m + ... + p_1 x + p_0 \sim p_m x^m$;

б) $p_m x^m + ... + p_1 x + p_0 \sim 0$;

в) $p_m x^m + ... + p_1 x + p_0 \sim 1$;

г) $p_m x^m + ... + p_1 x + p_0 \sim \mathrm{p}_0$.

11. Вкажіть правильну еквівалентність при $x\to\infty$

а) $9x^3-5x^2-7\sim 9x^3$;

б) $9x^3-5x^2-7\sim 9$;

в) $9x^3-5x^2-7\sim 0$;

г) $9x^3-5x^2-7\sim -7$.

12. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^x$

а) e^{-2}; б) 4; в) $\dfrac{1}{4}$; г) *e*.

ГЛОСАРІЙ

Аргумент − Independent argument, Predictor; Argument

Границя − Limit

Границя послідовності − Limit of sequence,

Границя функції − Limit of function, Two-sided limit of function

Границя функції справа − Limit from above, Right-handed limit

Границя функції зліва − Limit from below, Left-handed limit

Дробово-раціональна функція − Rational function, Fractional rational function, Quotient of polynomials

Еквівалентні нескінченно малі − Equivalent infinitesimal

Еквівалентні нескінченно малі функції − Equivalent functions

Невизначеність − Ambiguity, Uncertainty

Нескінченність – Infinity

Нескінченно велика функція в точці − Infinite function at point

Нескінченно малі еквівалентні − Equivalent infinitesimal,

Нескінченно мала функція в точці − Infinitesimal function at point

Окіл точки − Neighborhood of point

Послідовність − Sequence

Послідовність збіжна − Convergent sequence

Послідовність розбіжна − Divergent sequence

Функція – Function

Функція обмежена − Limited Function

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / За ред. Г. Л. Кулініча. – К., 1992.
2. Дубовик В. П. Виша математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003.
3. Дубовик В. П. Вища математика : збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003.
4. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. У 2 ч. : навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, М. Я. Лященко. – К. : Вища школа, 2003. – Ч. 1.
5. Збірник задач з вищої математики / За ред. Ф. С. Гудименка. – К. : Вид-во Київ. ун-ту, 1967. – 352 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Кудрявцев Л. Д. – М. : Наука, 1989.
7. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике: типовые расчеты / Кузнецов Л. А. – М. : Высш. шк., 1983.
8. Овчинников П. Ф. Высшая математика. / Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – К. : Вища школа, 1987.
9. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – К. : Либідь, 1996.

Навчальне видання

Коломієць Альона Анатоліївна
Клочко Віталій Іванович
Краєвський Володимир Олександрович

Практикум з вищої математики: обчислення границь

Практикум

Рукопис оформила *А. Коломієць*

Редактор *О. Ткачук*

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку 19.06.2020.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 3,23.
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2020-072.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.