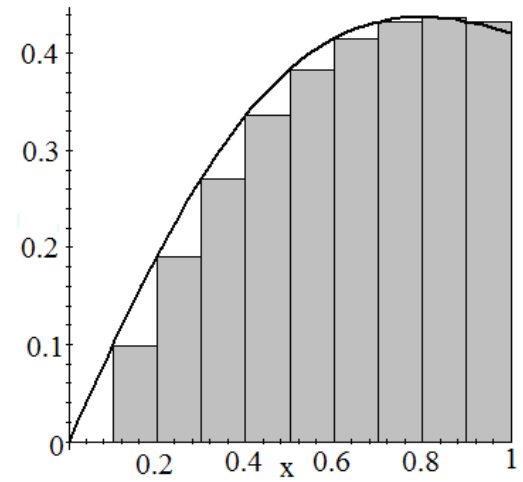


ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Чисельне інтегрування функцій



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Л. В. КРИЛИК, І. В. БОГАЧ, А. І. ЛІСОВЕНКО

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Чисельне інтегрування функцій

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 519.6(075.8)
К82

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 27.12.2018 р.)

Рецензенти:

А. А. Яровий, доктор технічних наук, професор

Т. Б. Мартинюк, доктор технічних наук, професор

А. Я. Кулик, доктор технічних наук, професор

Крилик, Л. В.
К82 Чисельні методи. Чисельне інтегрування функцій : навчальний посібник / Л. В. Крилик, І. В. Богач, А. І. Лісовенко. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 74 с.

Навчальний посібник поєднує класичну теорію чисельного інтегрування з практичним розв'язанням типових задач. Програми для розв'язування задач написані мовою програмування C/C++ і для покращення їх розуміння складено відповідні схеми алгоритмів. Навчальний посібник розроблено відповідно до навчальних програм дисциплін «Чисельні методи» для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки», «Обчислювальні методи» для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та «Методи комп'ютерних обчислень» для спеціальності «Інформаційні системи та технології» та інших спеціальностей, в навчальному плані яких є аналогічна дисципліна.

УДК 519.6(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
1 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ.....	5
1.1 Постановка задачі.....	5
1.2 Квадратурні формули Ньютона-Котеса.....	8
1.2.1 Формули прямокутників	9
1.2.2 Формула трапеції	18
1.2.3 Формула Сімпсона.....	24
1.2.4 Вибір кроку інтегрування і практичне оцінення похибки інтегрування.....	30
1.2.5 Формули Ньютона-Котеса вищих порядків (правило трьох восьми)	35
1.3 Квадратурна формула Чебишева	39
1.4 Квадратурна формула Гаусса.....	46
2 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ЗАСОБАМИ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ	57
2.1 Чисельне інтегрування функцій в прикладному програмному пакеті MathCad	58
2.2 Чисельне інтегрування функцій в прикладному програмному пакеті Maple.....	63
СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ.....	69
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	72

ПЕРЕДМОВА

Обчислювальна математика (computational mathematics) – розділ математики, що охоплює коло питань, пов'язаних з виконанням наближених обчислень. У більш вузькому розумінні, обчислювальна математика – теорія чисельних методів розв'язування типових математичних задач. Сучасна обчислювальна математика містить і вивчення особливостей обчислень із використанням комп'ютерів. Цей розділ математики має широке коло прикладних використань для проведення наукових та інженерних розрахунків.

Основним об'єктом вивчення обчислювальної математики є *чисельні методи (numerical methods)* розв'язування різноманітних математичних задач та алгоритмізація цих методів. Числові методи, на відміну від аналітичних, дають не загальні, а частинні розв'язки з певною похибкою.

В навчальному посібнику розглядаються методи розв'язання задач чисельного інтегрування, що складено за програмою дисципліни «*Чисельні методи*» для студентів спеціальностей «*Комп'ютерні науки*», «*Обчислювальні методи*» для студентів спеціальності «*Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології*», «*Методи комп'ютерних обчислень*» для спеціальності «*Інформаційні системи та технології*» та інших спеціальностей, в навчальному плані яких є аналогічна дисципліна.

Навчальний посібник поєднує класичну теорію чисельного інтегрування з практичним розв'язанням типових задач. Наведено теоретичний матеріал та набір типових задач вказаного напрямку. Опис методів орієнтований на конкретну реалізацію відповідних алгоритмів на ЕОМ. Наведені приклади розраховуються як вручну, так і за допомогою програмного забезпечення, складеного на основі викладеного теоретичного матеріалу. Програми для розрахунків написані мовою програмування C/C++ і для покращення їх розуміння складені відповідні схеми алгоритмів.

Навчальний посібник призначено, насамперед, для самостійної роботи студентів, оскільки поєднує класичну теорію з практичними розв'язуваннями, правильність яких підтверджується програмним тестуванням. На думку авторів це забезпечить швидке та якісне освоєння наведеного матеріалу.

Навчальний посібник складається з двох частин. В першій частині розглядаються квадратурні формули: Ньютона-Котеса, Чебишева, Гаусса. Наведено приклади конкретних задач та їх розв'язання за допомогою складених програм.

В другій частині – задачі чисельного інтегрування розв'язуються засобами систем прикладних програмних пакетів Maple та MathCAD.

1 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Формула (*formula*) Ньютона-Лейбніца досить зручна для обчислення (*calculation*) визначених інтегралів. Однак на практиці дуже рідко вдається обчислити точно *визначений інтеграл (definite integral)* чи *проінтегрувати (integrate)* звичайне *диференціальне рівняння (differential equations)*. У багатьох випадках первісну функцію не можна знайти аналітично чи вона має досить складний і незручний для обчислень вигляд (навіть якщо вона є елементарною), що ускладнює обчислення інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца або воно взагалі стає неможливим. Часто на практиці *підінтегральна функція (integrand)* задається таблично або графічно, що також унеможлиблює використання аналітичних методів.

У всіх згаданих випадках для обчислення визначеного інтеграла використовують чисельні методи. Чисельне обчислення однорідних інтегралів називається механічною квадратурою, а коли розмірність інтеграла більше одиниці, – механічною кубовою. Відповідно формули називають **квадратурними** та **кубатурними**. Особливо важливе значення мають квадратурні формули – методи чисельного інтегрування функцій, в яких для знаходження наближеного значення визначеного інтеграла використовуються значення підінтегральної функції та її похідних у скінченній кількості точок, що належать переважно проміжку інтегрування.

Найбільш відомими методами знаходження визначених інтегралів є:

- методи Ньютона-Котеса, Гаусса, Чебишева, які основані на використанні так званих квадратурних формул, отриманих заміною $f(x)$ інтерполяційними багаточленами;
- методи Монте-Карло, основані на використанні статистичних моделей.

Навчальний посібник присвячений методам наближеного обчислення інтегралів.

1.1 Постановка задачі

Розв'язати задачу інтегрування означає обчислити інтеграл Рімана для деякої функції $f(x)$ на заданому інтервалі $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.1)$$

Традиційний підхід до чисельного інтегрування полягає в тому, що функцію $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ замінюють інтерполяційною функцією $\varphi(x)$, наприклад поліномом Лагранжа або Ньютона, а потім беруть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R(x), \quad (1.2)$$

де $R(x)$ – деяка похибка інтегрування (*integration accuracy*).

У цьому випадку функція $\varphi(x)$ має бути такою, щоб інтеграл (*integral*) можна було обчислити безпосередньо. Якщо функція $f(x)$ задана аналітично, то наближено обчислити визначений інтеграл (1.1) можна заміною інтеграла скінченною сумою, тобто задачею чисельного інтегрування функції є обчислення значення визначеного інтеграла на основі ряду значень підінтегральної функції.

Тобто замінюючи підінтегральну функцію деяким інтерполяційним многочленом, ми отримуємо квадратурні формули вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \quad (1.3)$$

де x_k – вибрані вузли інтерполяції (*units interpolation*) (будемо вважати, що вони пронумеровані в порядку зростання $x_1 < x_2 < \dots < x_n$);

A_k – коефіцієнти (*odds*), що залежать тільки від вибору вузлів і не залежать від виду функції;

$R_n(f)$ – залишковий член (*remainder*) або похибка квадратурної формули (*error of quadrature formula*).

Крім похибки, яка виникає від заміни інтеграла квадратурною сумою (похибки методу $|R(x)|$), є похибка (*error*), яка зумовлена виконанням арифметичних дій над наближеними числами – значеннями $f(x_k)$. Якщо абсолютні похибки значень $f(x_k)$ дорівнюють Δ_f , то абсолютна похибка

(*absolute error*) квадратурної суми $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ дорівнюватиме

$$\tilde{R} = \Delta_f \sum_{k=1}^n |A_k|.$$

Це так звана неусувна похибка, яка зумовлена наближеними значеннями $f(x_k)$. У процесі обчислень виникає ще похибка за рахунок округлення проміжних результатів. Цю похибку можна зробити значно меншою порівняно з неусувною, якщо проміжні обчислення виконувати із запасними цифрами, які відкидають в остаточному результаті. Оцінюючи похибки чисельного інтегрування, потрібно враховувати також і похибку остаточ-

ного округлення Δ_0 . Отже, повна похибка чисельного інтегрування Δ_I дорівнює сумі названих вище трьох похибок, тобто

$$\Delta_I = |R_n(f)| + \tilde{R} + \Delta_0 = |R_n(f)| + \Delta_f \sum_{k=1}^n |A_k| + \Delta_0. \quad (1.4)$$

Для побудови квадратурних формул вигляду (1.3) часто вдаються до параболічного інтерполювання підінтегральної функції f . Для цього на проміжку $[a, b]$ вибирають скінченну послідовність точок x_0, x_1, \dots, x_n і будують *інтерполяційний многочлен Лагранжа (interpolation polynomial (lagrange))*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k),$$

де $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Тоді:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k) + R_n(f, x), \quad (1.5)$$

де $R_n(f, x)$ – залишковий член (похибка) інтерполювання.

Проінтегрувавши *рівність (equality)* (1.5) та порівнявши із (1.3), отримаємо

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} dx \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (1.6)$$

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(f, x) dx. \quad (1.7)$$

Якщо залишковий член $R_n(f, x)$ *інтерполювання функції (function interpolation)* f досить малий на всьому проміжку $[a, b]$, то у формулі (1.3), яка є точною рівністю, доданком $R_n(f)$ можна знехтувати. Тоді дістанемо наближену рівність:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k). \quad (1.8)$$

Квадратурну формулу (1.8), коефіцієнти якої обчислюються за формулами (1.6), називають *інтерполяційною* [1 –7].

1.2 Квадратурні формули Ньютона-Котеса

До інтерполяційних квадратурних формул належать формули Ньютона-Котеса. Вузли цих формул рівновіддалені. Для їх побудови *відрізок* (*segment*) $[a, b]$, на якому визначено функцію f , ділять на n однакових частин з кроком $h = \frac{b-a}{n}$ точками $x_0 = a$, $x_k = x_0 + kh$, $x_n = b$, обчислюють значення (*values*) функції f у цих точках і будують інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$, значення якого в точках x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) дорівнюють значенням функції f у цих точках. Замінивши в інтегралі (1.1) функцію f многочленом $L_n(x)$, дістають квадратурну формулу (1.8), коефіцієнти A_k якої обчислюються за формулами (1.6).

В інтегралі (1.6) переходять до нової змінної q за формулою $x = x_0 + qh$. Тоді $dx = hdq$ і нові *межі інтегрування* (*integrational limits*) будуть: якщо $x = a$, то $q = 0$, а якщо $x = b = x_0 + hn$, то $q = n$. Виразимо тепер через q $x - x_k$, $\omega'_{n+1}(x_k)$ і $\omega_{n+1}(x)$. Маємо:

$$\begin{aligned} x - x_k &= x - x_0 + x_0 - x_k = hq - kh = h(q - k); \\ \omega'_{n+1}(x_k) &= (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) = \\ &= kh(k-1)h \dots h(-h) \dots (-h(n-k)) = (-1)^{n-k} h^n k!(n-k)!; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \\ &= (x - x_0)(x - x_0 + x_0 - x_1)(x - x_0 + x_0 - x_2) \dots (x - x_0 + x_0 - x_n) = \\ &= hqh(q-1)h(q-2) \dots h(q-n) = h^{n+1}q(q-1)(q-2) \dots (q-n). \end{aligned}$$

Підставивши ці значення в інтеграл (1.6), знайдемо:

$$A_k = h \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n)}{q-k} dq \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Але $h = \frac{b-a}{n}$, тому

$$\begin{aligned} A_k &= (b-a) \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n q(q-1) \dots (q-k+1)(q-k-1) \dots (q-n) dq \\ &\quad (k = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Коефіцієнти:

$$H_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n q(q-1)\dots(q-k+1)(q-k-1)(q-n)dq \quad (k=0,1,\dots,n)$$

називаються **коефіцієнтами Котеса**, який вперше підрахував їх значення для n від 1 до 10.

Отже, квадратурні формули Ньютона-Котеса набувають вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n H_k f(x_k), \quad (1.9)$$

причому рівновіддалені від кінців відрізка інтегрування коефіцієнти Котеса рівні між собою, тобто $H_k = H_{n-k}$ і $\sum_{k=0}^n H_k = 1$. Доведено, що для $n \geq 10$ (n – число вузлів) серед коефіцієнтів Котеса завжди є від’ємні. Тоді малі похибки в значеннях функції $f(x_k)$ можуть призвести до великих похибок у квадратурній сумі. Саме тому формули Ньютона-Котеса з великою кількістю вузлів мало придатні для обчислень і їх на практиці не використовують. Проте формули з 2 або 3 вузлами широко застосовують. Щоб не мати справу з многочленами високих степенів, зазвичай розбивають *проміжок інтегрування (Integration interval)* на окремі ділянки. Використовують формули Ньютона-Котеса з невисокими степенями на кожній ділянці, а потім додають отримані результати. Це створює так звані *складені формули (compound of formula)*.

Розглянемо окремі випадки застосування формул Ньютона-Котеса (1.9). Через важливість цих формул їх коефіцієнти і залишкові члени обчислимо незалежно від формули (1.9) [8, 9].

1.2.1 Формули прямокутників

Найпростіший підхід до обчислення значення інтеграла полягає у заміні площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції, сумою площ прямокутників, тобто функція $f(x)$ апроксимується поліномом нульового степеня.

Для побудови формули чисельного інтегрування на всьому відрізку $[a, b]$ спочатку необхідно побудувати квадратурну формулу для інтеграла на частковому відрізку, а потім скористатися властивістю інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \quad (1.10)$$

Спочатку розглянемо *метод (method)* середніх прямокутників. Заміни-мо значення інтеграла на частковому відрізку $[x_0, x_1]$ площею прямокутника:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0)f(\bar{x}) + R_1(f), \quad (1.11)$$

де $\bar{x} = (x_1 + x_0) / 2$ – середня точка відрізка.

Отримана формула називається **формулою середніх прямокутників на частковому відрізку**. Це означає, що *площа (area)* криволінійної трапеції замінюється площею прямокутника (рис. 1.1). Тоді похибку на частковому відрізку визначимо як

$$R_1(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - (x_1 - x_0)f(\bar{x}).$$

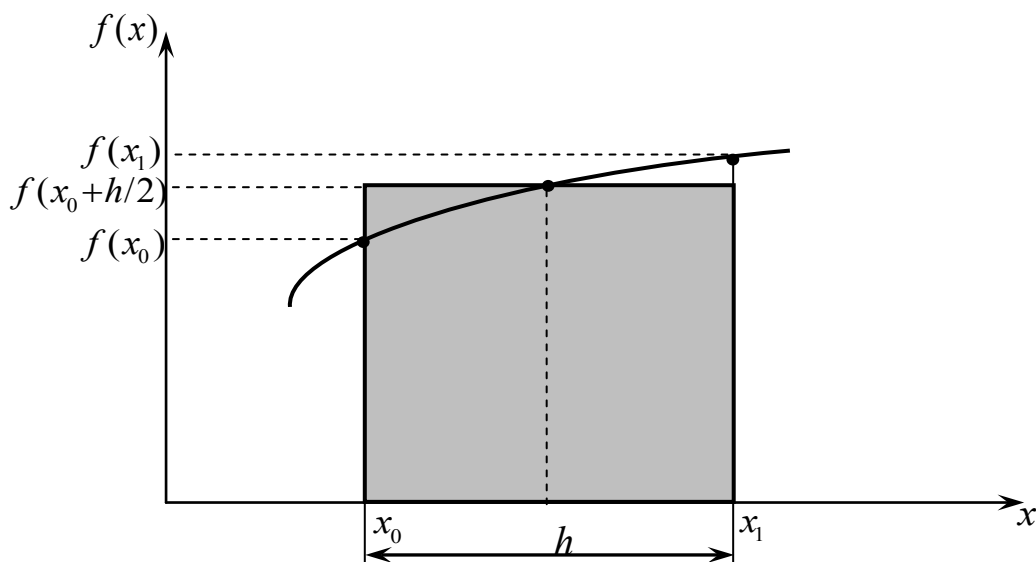


Рисунок 1.1 – Геометрична інтерпретація методу середніх прямокутників на частковому відрізку

Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна разом зі своїми похідними до другого порядку включно. Розкладемо функцію $f(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ в околі точки \bar{x} в ряд Тейлора [10, 11, 13 – 15].

Проінтегруємо останній *вираз (Expression)* на інтервалі $[x_0, x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(\bar{x})dx + \int_{x_0}^{x_1} f'(\bar{x})(x - \bar{x})dx + \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi) \frac{(x - \bar{x})^2}{2} dx =$$

$$= f(\bar{x})(x_1 - x_0) + f'(x) \underbrace{\left[\frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} - x\bar{x} \Big|_{x_0}^{x_1} \right]}_{=0} + f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - \bar{x})^2}{2} dx.$$

Виразимо похибку:

$$R_1(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - \bar{x})^2 dx = \frac{1}{2} f''(\xi) \frac{(x - \bar{x})^3}{3} \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Враховуючи, що $\bar{x} = (x_1 + x_0) / 2$, $h = x_1 - x_0$, визначимо

$$R_1(f) = \frac{h^3}{24} f''(\xi).$$

Тобто для похибки формули середніх прямокутників на частковому відрізьку справедлива оцінка:

$$|R_1(f)| \leq \frac{h^3}{24} \max_{[x_0, x_1]} |f''(\xi)|. \quad (1.12)$$

Враховуючи (1.10), отримаємо **узагальнену формулу середніх прямокутників** (рис. 1.2):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right] + R(f) = \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) + R(f) = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) + R(f). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Загальна похибка (general error) цієї формули дорівнює сумі похибок на всіх часткових відрізьках:

$$R(f) = \frac{h^3}{24} (f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

тобто

$$R(f) = \frac{h^3}{24} n f''(\eta) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta).$$

Тоді оцінка похибки (*estimation of errors*) узагальненої формули середніх прямокутників буде

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{[a,b]} |f''(\xi)|. \quad (1.14)$$

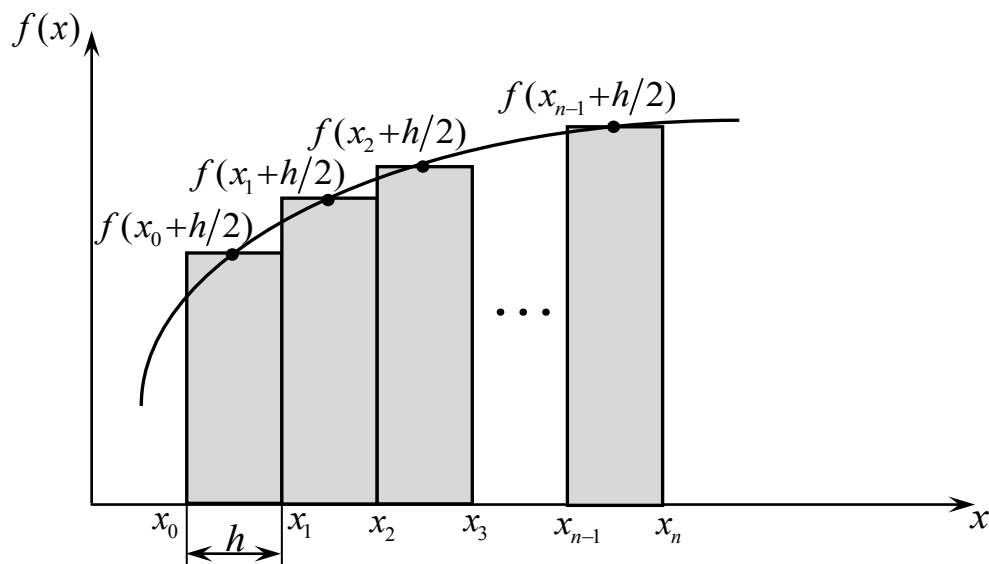


Рисунок 1.2 – Геометрична інтерпретація методу середніх прямокутників на інтервалі

Порядок точності (*order of accuracy*) отриманої формули – $O(h^2)$.

Формули інтегрування на основі прямокутників можуть бути побудовані й за іншого розташування вузлів. У загальному випадку формулу прямокутників можна записати у такому вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f(q + ih) + R(f). \quad (1.15)$$

Виходячи з (1.15), формулу середніх прямокутників (1.13) можна отримати, якщо за q взяти значення $q = x_0 + h/2$. Коли $q = x_0$, отримаємо **формулу лівих прямокутників** (рис. 1.3):

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + R(x) = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + R(x), \quad (1.16)$$

а для $q = x_0 + h$ – **формулу правих прямокутників** (рис. 1.4):

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + R(x) = \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) + R(x). \quad (1.17)$$

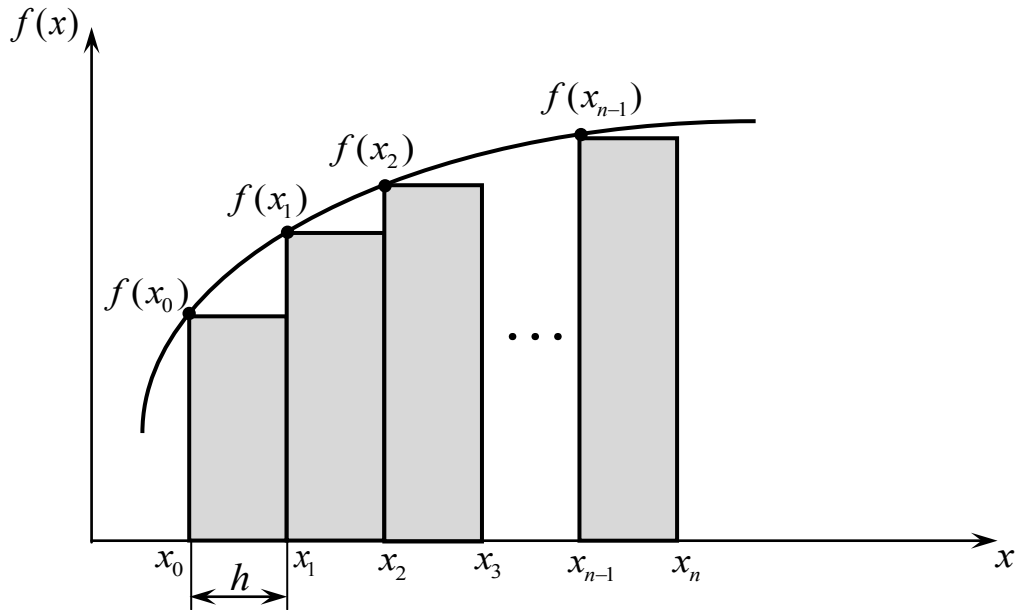


Рисунок 1.3 – Геометрична інтерпретація (geometrical interpretation) методу лівих прямокутників на інтервалі

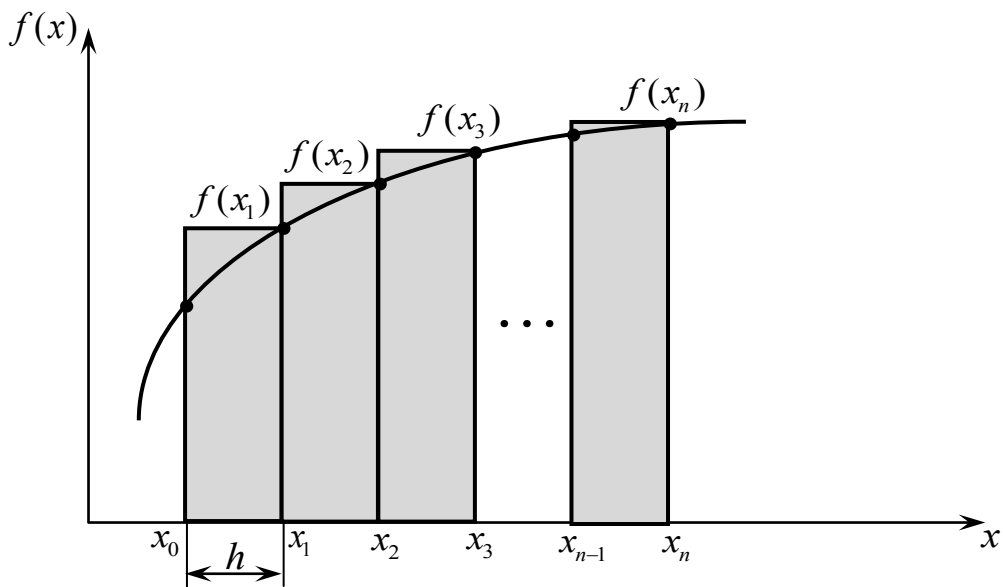


Рисунок 1.4 – Геометрична інтерпретація методу правих прямокутників на інтервалі

У формулах лівих та правих прямокутників оцінка залишкового члена (evaluation remainder term) має такий вигляд:

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a,b]} |f'(\xi)|. \quad (1.18)$$

Похибка обчислень формул лівих та правих прямокутників має порядок $O(h)$; вона більша, ніж для формули середніх прямокутників через порушення симетрії [10, 11, 12, 13 – 20].

Приклад 1.1. Обчислити наближено значення інтеграла

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx,$$

(точно значення якого $I = 0,3217935447$) за формулами прямокутників, розбивши відрізок інтегрування на $n = 10$ рівних частин та оцінити похибку методів.

Розв'язання. Визначимо крок інтегрування

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1.$$

Складемо таблиці значень підінтегральної функції (табл. 1.1 і табл. 1.2).

Таблиця 1.1 – Вихідні значення для квадратурних формул лівих та правих прямокутників

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x_k)$	0	0,098845	0,191028	0,271119	0,335705	0,383541

Продовження таблиці 1.1

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x_k)$	0,415178	0,432361	0,437412	0,432777	0,420736

Таблиця 1.2 – Вихідні значення для квадратурної формули середніх прямокутників

k	0	1	2	3	4	5
$x_{k+1/2}$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55
$f(x_{k+1/2})$	0,049855	0,146150	0,232851	0,305477	0,361718	0,401295

Продовження таблиці 1.2

k	6	7	8	9
$x_{k+1/2}$	0,65	0,75	0,85	0,95
$f(x_{k+1/2})$	0,425438	0,436249	0,436157	0,427551

Користуючись узагальненою формулою лівих прямокутників (1.16) та даними табл. 1.1, маємо:

$$I_{\Pi} \approx h \sum_{k=0}^9 f(x_k) = 0,1 \cdot (0 + 0,098845 + 0,191028 + 0,271119 + 0,335705 + 0,383541 + 0,415178 + 0,432361 + 0,437412 + 0,432777) = 0,299797.$$

Користуючись формулою правих прямокутників (1.17), на основі даних табл. 1.1 отримаємо:

$$I_{\Pi} \approx h \sum_{k=1}^{10} f(x_k) = 0,1 \cdot (0,098845 + 0,191028 + 0,271119 + 0,335705 + 0,383541 + 0,415178 + 0,432361 + 0,437412 + 0,432777 + 0,420736) = 0,341871.$$

Визначимо залишковий член формул лівих та правих прямокутників, використовуючи нерівність (1.18). Для оцінення похибки інтегрування знаходимо:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} - 2 \cdot \frac{x \cdot \sin(x)}{(x^2 + 1)^2},$$

$$f'(0) = 1;$$

$$f'(0,1) = 0,966;$$

$$f'(0,2) = 0,869;$$

$$f'(0,3) = 0,727;$$

...

$$f'(0,9) = -0,087;$$

$$f'(1) = -0,150585.$$

Звідси маємо:

$$\max_{[0; 1]} |f'(\xi)| = |f'(0)| = 1;$$

$$|R(f)| = \frac{(1-0)^2}{2 \cdot 10} \cdot 1 = 0,0500000.$$

На основі даних табл. 1.2 за формулою середніх прямокутників (1.13) матимемо:

$$\begin{aligned} I_{\text{сеп}} &\approx h \sum_{k=0}^9 f(x_{k+1/2}) = 0,1 \cdot (0,049855 + 0,146151 + 0,232851 + \\ &+ 0,305477 + 0,361718 + 0,401295 + 0,425439 + 0,436249 + \\ &+ 0,436157 + 0,427551) = 0,1 \cdot 3,22274 = 0,322274. \end{aligned}$$

Визначимо залишковий член формули середніх прямокутників, використовуючи нерівність (1.14). Для оцінення похибки інтегрування знаходимо:

$$f''(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2 + 1} - 4 \cdot \frac{x \cdot \cos(x)}{(x^2 + 1)^2} + 8 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2 + 1)^3} - 2 \cdot \frac{\sin(x)}{(x^2 + 1)^2},$$

$$f''(0) = 0;$$

$$f''(0,1) = -0,677;$$

$$f''(0,2) = -1,227;$$

$$f''(0,3) = -1,569;$$

$$f''(0,4) = -1,69;$$

...

$$f''(0,9) = -0,087;$$

$$f''(1) = -0,540302.$$

Звідси маємо:

$$\max_{[0; 1]} |f''(\xi)| = |f''(0,4)| = 1,69;$$

$$|R(f)| = \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 1,69 = 0,00140833.$$

Відповідно *схема алгоритму (scheme of the algorithm)* та програма обчислення набуде такого вигляду (рис. 1.5).

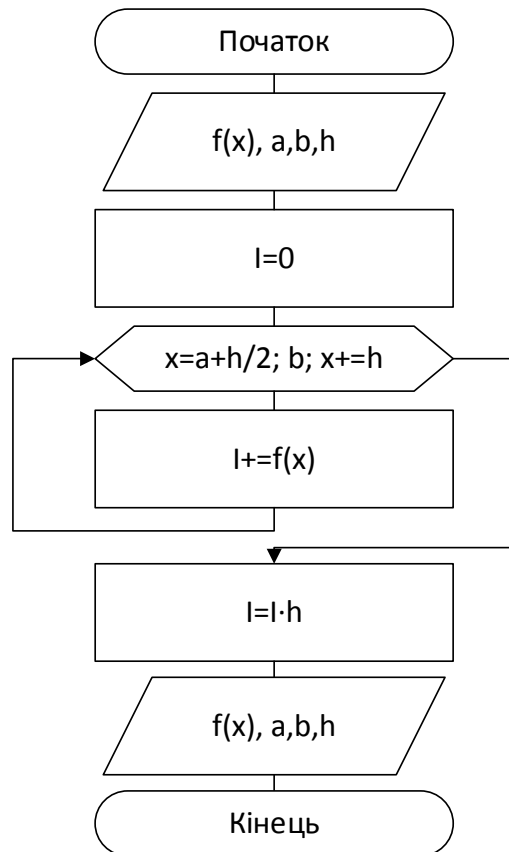


Рисунок 1.5 – Схема алгоритму чисельного інтегрування за формулою середніх прямокутників

Лістинг програми:

```

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

float f(float x)
{ return (sin(x)/(x*x + 1)); }

float method_ser_pr (float a, float b, float h)
{
    float I = 0;
    for (float x=a+h/2; x<=b; x+=h)
        I = I + f(x);
    I = I*h;
    printf ("I = %f\n", I);
    return 0;
}

int main()
{
    float a = 0, b = 1, h = 0.1;
    method_ser_pr (a, b, h);
    getch();
    return 0;
}
  
```

В результаті отримаємо:

$I = 0.322274$.

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити наближено визначені інтеграли за формулами прямокутників, розбивши відрізок на n рівних частин:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, n=6; & \quad 2) \int_1^5 \frac{dx}{1+x^4}, n=8; & \quad 3) \int_0^1 x \sin x dx, n=10; \\ 4) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}, n=10; & \quad 5) \int_1^5 \frac{dx}{1+x^2}, n=10; & \quad 6) \int_0^2 \sqrt{8x^4+1} dx, n=10; \\ 7) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}, n=10; & \quad 8) \int_0^2 e^{x^2} dx, n=10; \\ 9) \int_1^2 \sqrt[3]{x} dx, n=10; & \quad 10) \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}, n=10. \end{aligned}$$

1.2.2 Формула трапеції

Тепер розглянемо метод наближеного обчислення визначеного інтеграла, що полягає в заміні підінтегральної функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом першого степеня. Спочатку розглянемо заміну площі криволинійної трапеції на частковому відрізку $[x_0, x_1]$ площею прямокутної трапеції, побудованої по тих самих точках (рис. 1.6).

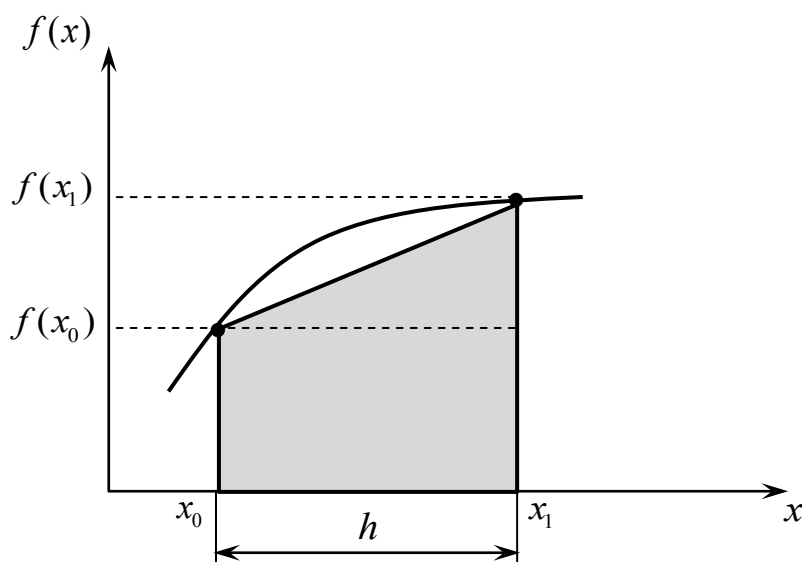


Рисунок 1.6 – Геометрична інтерпретація методу трапецій на частковому відрізку

Цю заміну зробимо так:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= (x_1 - x_0) \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) \right] + R_1(f) = \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + R_1(f). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Формула (1.19) є **формулою трапецій на частковому відрізку**.

Оцінимо похибку $R_1(f)$ у разі заміни $f(x)$ інтерполяційним поліномом першого степеня на частковому відрізку $[x_0, x_1]$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + r_1(x),$$

де $r_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)f''(\xi)}{2!}$.

Виконаємо такі *перетворення (convert)*:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} [f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + r_1(x)]dx = \\ &= f(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f(x_0, x_1) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} r_1(x)dx = \\ &= f(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)f''(\xi)}{2} dx = \\ &= (x_1 - x_0) \frac{2f(x_0) + f(x_1) - f(x_0)}{2} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)dx}_{\text{похибка}}. \end{aligned}$$

Врахувавши, що:

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)dx = -\frac{1}{6}(x_1 - x_0)^3 = -\frac{1}{6}h^3,$$

отримаємо оцінку залишкового члена для формул трапецій на частковому відрізку:

$$|R_1(f)| \leq \frac{h^3}{12} \max_{[x_0, x_1]} |f''(\xi)|. \quad (1.20)$$

Узагальнена формула трапецій (*trapezoids formula*) для всього інтервалу має такий вигляд (рис. 1.7):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] + R(f). \quad (1.21)$$

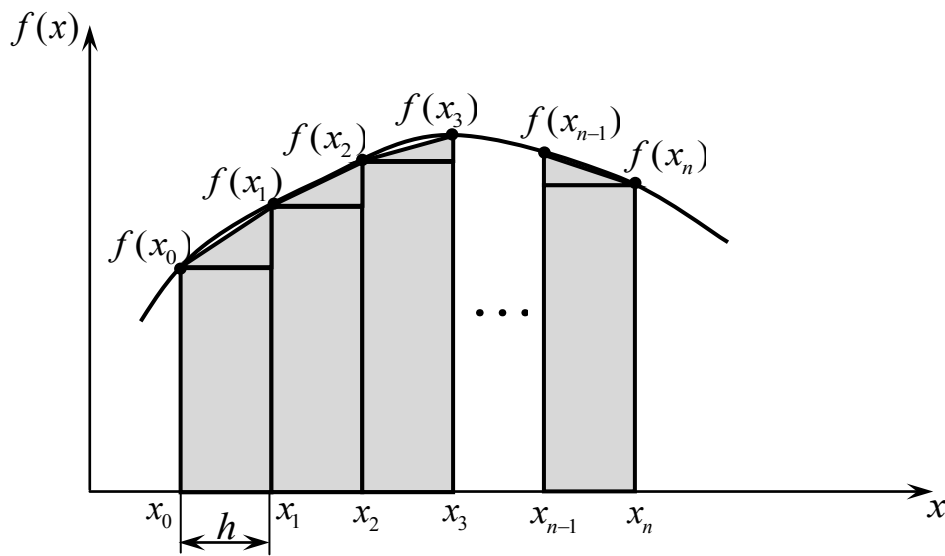


Рисунок 1.7 – Геометрична інтерпретація методу трапецій на інтервалі

Похибка цього методу обчислюється як *сума похибок* (*sum of errors*) на всіх часткових інтервалах:

$$R(f) = \sum_{i=1}^n -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12} n f''(\eta)$$

і визначається як

$$|R(f)| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{[a,b]} |f''(\xi)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''(\xi)|. \quad (1.22)$$

Порядок точності формули трапецій – $O(h^2)$ [16 – 19].

Приклад 1.2. Обчислити визначений інтеграл за формулою трапецій з розбивкою на $n = 10$ вузлів:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx \approx 0,3217935447.$$

Розв'язання. Значення підінтегральної функції у вузлах візьмемо із табл. 1.1, тоді за формулою трапеції (1.21) матимемо:

$$I = h \left(\frac{f(x_0) + f(x_{10})}{2} + \sum_{k=1}^9 f(x_k) \right) = 0,1 \cdot \left(\frac{0 + 0,420736}{2} + 0,098845 + \right. \\ \left. + 0,191028 + 0,271119 + 0,335705 + 0,383541 + 0,415178 + 0,432361 + \right. \\ \left. + 0,437412 + 0,432777 \right) = 0,320833.$$

Визначимо залишковий член формули трапеції, використовуючи нерівність (1.22). Для оцінення похибки інтегрування знаходимо:

$$f''(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2 + 1} - 4 \cdot \frac{x \cdot \cos(x)}{(x^2 + 1)^2} + 8 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2 + 1)^3} - 2 \cdot \frac{\sin(x)}{(x^2 + 1)^2};$$

$$f''(0) = 0;$$

$$f''(0,1) = -0,677;$$

$$f''(0,2) = -1,227;$$

$$f''(0,3) = -1,569;$$

$$f''(0,4) = -1,69;$$

$$\dots$$

$$f''(0,9) = -0,087;$$

$$f''(1) = -0,540302.$$

Звідси маємо

$$\max_{[0; 1]} |f''(\xi)| = |f''(0,4)| = 1,69;$$

$$|R(f)| = \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 1,69 = 0,00140833.$$

Алгоритм чисельного інтегрування функції за формулою трапецій (1.21) наведено нижче на рис. 1.8.

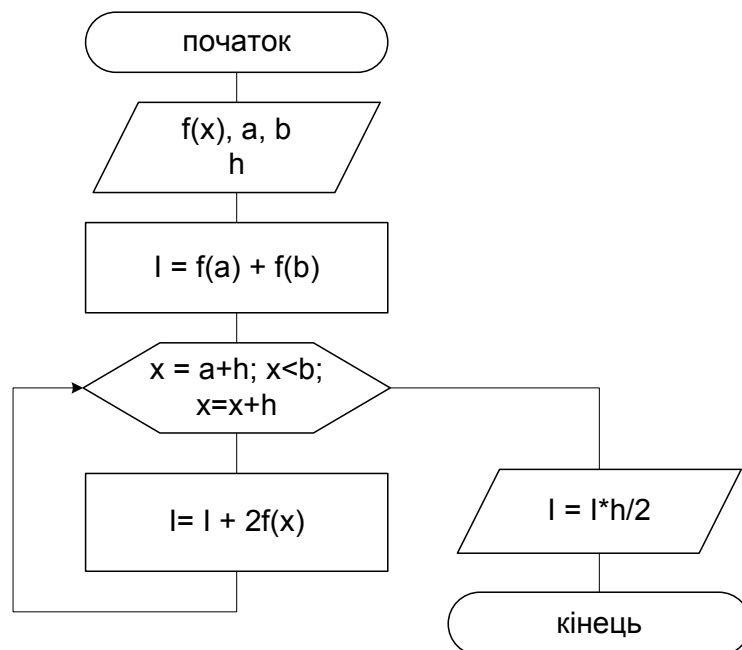


Рисунок 1.8 – Схема алгоритму чисельного інтегрування за формулою трапецій

Запрограмуємо методи в окремих функціях. В цьому прикладі покажемо приклад з основною функцією, а далі будемо наводити тільки функції методів.

В програмі задамо можливість обчислення значення з двома різними кроками, а саме 0,1 та 0,05. Метод трапецій, як і метод прямокутників, запрограмуємо окремою функцією і далі будемо додавати лише функції методів.

Лістинг програми:

```

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

FILE *fp;
const int n_h = 2;

float f(float x)
{ return (sin(x)/(x*x + 1)); }

float Metod_Trapets (float a, float b, float h)
{
    float I, x = a + h;
    fprintf (fp, «\n--- Metod trapets - h = %.3f ---\n», h);
    I = f(a) + f(b);
    for (x; x<b; x+=h)
        I = I + 2*f(x);

    I = h*I/2;
    fprintf (fp, «I = %9.7f\n», I);
    return 0;
}
  
```

```

}

int main()

{
    float a = 0, b = 1;
    float h[n_h] = {0.1, 0.05};

    if ( (fp = fopen(«Data.txt», «w»)) == NULL)
    {
        printf(«Error opening file\n»);
        return 0;
    }

    for (int i=0; i<n_h; i++)
    {
        Metod_Trapets (a, b, h[i]);
    }
    printf(«End!»);
    getch();
    fclose(fp);
    return 0;
}

```

В результаті отримаємо:

----- Metod trapets – $h = 0.100$ -----

$I = 0.3208335$

----- Metod trapets – $h = 0.050$ -----

$I = 0.3215538$

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити наближено визначені інтеграли за формулою трапеції, розбивши відрізок на n рівних частин:

$$1) \int_0^1 \frac{\sin x}{2x} dx, n=6; \quad 2) \int_1^5 \frac{dx}{1+2x^2}, n=8; \quad 3) \int_0^1 x^2 \sin x dx, n=10;$$

$$4) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{2+x^2}, n=10; \quad 5) \int_1^5 \frac{dx}{5x+x^2}, n=10; \quad 6) \int_0^2 \sqrt{3x^2+2} dx, n=10;$$

$$7) \int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{4+3x-x^2}}, n=10; \quad 8) \int_0^2 2e^{x^2} dx, n=10; \quad 9) \int_1^2 \sqrt[3]{1+x} dx, n=10;$$

$$10) \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}, n=10.$$

1.2.3 Формула Сімпсона

Геометрично формула Сімпсона отримується в результаті заміни деякої кривої $y = f(x)$ параболою $y = P_2(x)$, що проходить через три точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 1.9). Підінтегральна функція замінюється квадратичною функцією, що набуває у вузлах таких значень: $x_0 = a$, $x_1, x_2 = b$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

Як інтерполяційний многочлен використовується інтерполяційний поліном вигляду:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx + R_1(f) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + R_1(f). \quad (1.23)$$

Формула (1.23) – **формула Сімпсона для визначеного інтеграла на проміжку $[x_0, x_2]$** .

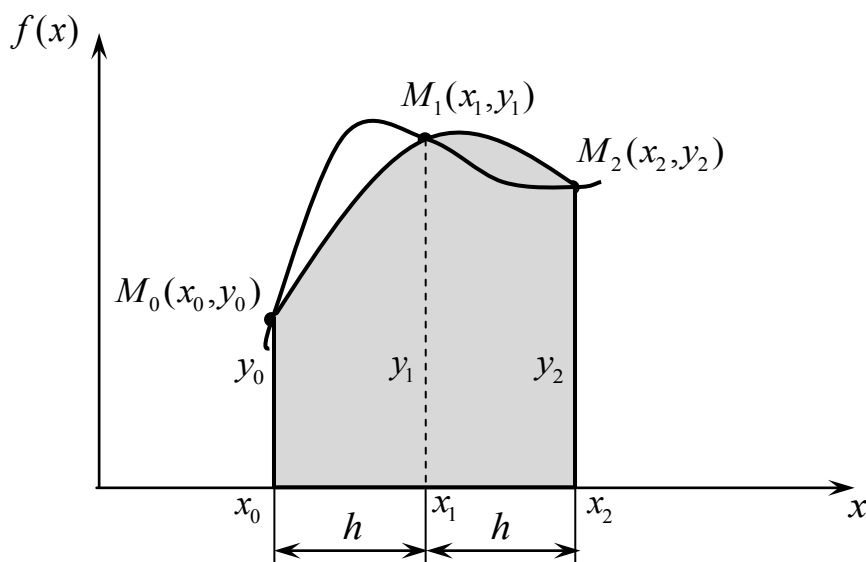


Рисунок 1.9 – Геометрична інтерпретація методу Сімпсона на частковому відрізку

Формулу (1.23) можна отримати так: обчислимо інтеграл за узагальненою формулою трапеції на рівномірній сітці з кроком h , а потім на сітці з кроком $2h$; другу сітку отримуємо із першої викиданням вузлів через один. Провівши *уточнення (refinement)* методом Рунге для відрізка, який

містить вузли (units) x_0, x_1, x_2 , матимемо формулу Сімпсона на частковому відрізку:

$$I \approx \frac{1}{3} [4I_{mpan}(h) - I_{mpan}(2h)] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[4h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + \frac{1}{2} y_2 \right) - 2h \left(\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_2 \right) \right] = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$h = x_i - x_{i-1}.$$

Похибка формули Сімпсона обчислюється з використанням розкладання в ряд Тейлора (причому для пари інтервалів $[x_0, x_0 + h]$ та $[x_0 + h, x_0 + 2h]$ за центр розкладу береться вузол $x_0 + h$. Тоді

$$R_1(f) = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx - \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_0 + 2h],$$

тобто оцінка залишкового члена формули Сімпсона на частковому відрізку буде визначатись як

$$|R_1(f)| \leq \frac{h^5}{90} \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f^{(4)}(\xi)|. \quad (1.24)$$

Якщо треба обчислити $\int_a^b f(x) dx$ з достатньою точністю, то відрізок $[a, b]$ розбивають на n пар відрізків $[x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) і, замінюючи підінтегральну функцію інтерполяційною формулою Ньютона другого степеня (рис. 1.10), отримують *наближене значення інтеграла (integral approximate value)* на кожному відрізку довжиною $2h$, тобто:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Тоді отримаємо **узагальнену формулу Сімпсона** як суму значень інтеграла на частинних відрізках

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(2k) + 4f(2k+1) + f(2k+2)) + R(f) =$$

$$= \frac{h}{3} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})) + R(f), \quad (1.25)$$

де $h = \frac{b-a}{2n}$ – крок інтегрування.

Похибка узагальненої формули Сімпсона на всьому інтервалі буде визначатися як

$$R(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_k),$$

де $\xi_k \in [x_{2k}, x_{2k+2}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

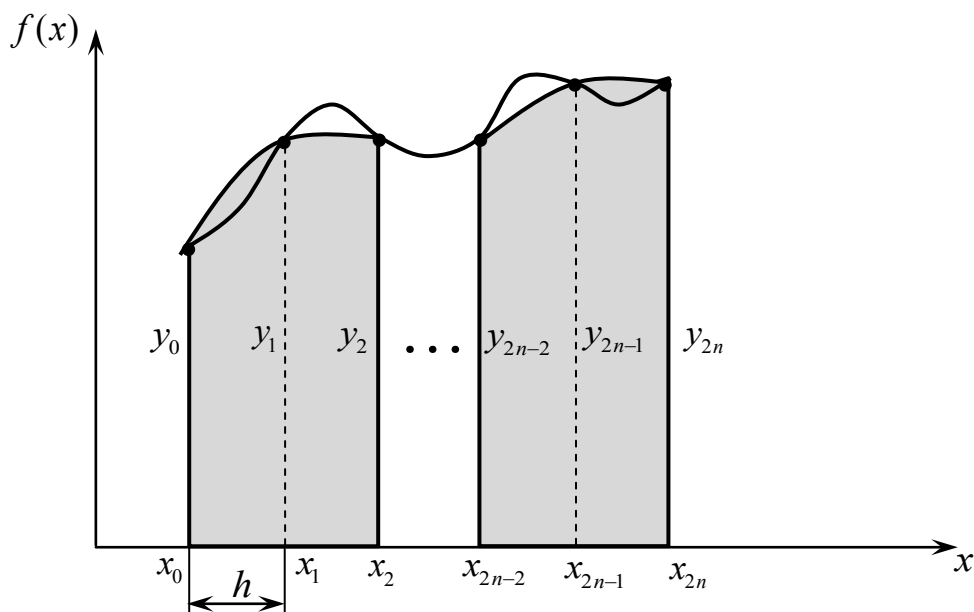


Рисунок 1.10 – Геометрична інтерпретація методу Сімпсона на інтервалі

Оскільки $f^{(4)}(\xi)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то існує точка $\xi \in [a, b]$ така, що

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_k) = f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Тоді залишковий член матиме такий вигляд (view):

$$R(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2n}.$$

Тобто для похибки узагальненої формули Сімпсона справедлива оцінка

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|. \quad (1.26)$$

Звідси видно, що формула Сімпсона значно точніша за формули прямокутників і трапецій. Її порядок точності – $O(h^4)$. Вона може бути застосована для рівномірно розташованих вузлів у разі парної кількості підінтервалів n і непарної кількості вузлів [16 – 20, 23 – 25, 27].

Приклад 1.3. Обчислити визначений інтеграл за формулою Сімпсона з розбивкою на $n = 10$ вузлів:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx \approx 0,3217935447.$$

Розв’язання. Значення підінтегральної функції у вузлах візьмемо із табл. 1.1, тоді за узагальненою формулою Сімпсона (1.25) матимемо:

$$\begin{aligned} I = \frac{h}{3} & \left((y_0 + y_{10}) + 4 \sum_{k=0}^4 f(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=0}^4 f(x_{2k}) \right) = \frac{0,1}{3} \cdot ((0 + 0,420736) + \\ & + 4 \cdot (0,098845 + 0,271119 + 0,383541 + 0,432361 + 0,432777) + \\ & + 2 \cdot (0,191028 + 0,335705 + 0,415178 + 0,437412)) = 0,321799. \end{aligned}$$

Визначимо залишковий член формули Сімпсона, використовуючи нерівність (1.26). Для оцінення похибки інтегрування знаходимо:

$$f^{(4)}(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} - 8 \cdot \frac{x \cdot \cos(x)}{(x^2 + 1)^2} - 48 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2 + 1)^3} +$$

$$+12 \cdot \frac{\sin(x)}{(x^2+1)^2} - 192 \cdot \frac{x^3 \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^4} +$$

$$+96 \cdot \frac{x \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^3} + 384 \cdot \frac{x^4 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^5} - 288 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^4} + 24 \cdot \frac{\sin(x)}{(x^2+1)^3};$$

$$f^{(4)}(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(1) = -3,54749.$$

Звідси маємо

$$\max_{[0; 1]} |f^{(4)}(\xi)| = |f^{(4)}(1)| = 3,54749;$$

$$R(f) = \frac{(1-0)^5}{2880 \cdot 10^4} \cdot 3,54749 = 0,123177 \cdot 10^{-6}.$$

Зауважимо, що цей метод працює тільки для парної кількості проміжків, але якщо кожний з них розбити навпіл і використати $2n$ інтервалів, тоді зможемо обчислити задану задачу методом Сімпсона для будь-якої кількості інтервалів.

У табл. 1.3 наведено розглянуті квадратурні формули Ньютона-Котеса та їх залишкові члени [11].

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити наближено визначені інтеграли за формулою Сімпсона, розбивши відрізок на n рівних частин:

$$1) \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx, \quad n=6; \quad 2) \int_1^5 \frac{2x dx}{1+x^4}, \quad n=8; \quad 3) \int_0^1 \sin 2x dx, \quad n=10;$$

$$4) \int_0^1 \frac{5 dx}{1+x^6}, \quad n=10; \quad 5) \int_1^5 \frac{dx}{5x+x^2}, \quad n=10; \quad 6) \int_1^2 \sqrt[3]{2x^2} dx, \quad n=10;$$

$$7) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}, \quad n=10; \quad 8) \int_0^2 (e^x+1) dx, \quad n=10;$$

$$9) \int_0^2 \sqrt{8x^4+2x-1} dx, \quad n=10; \quad 10) \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{5x+2}}, \quad n=10.$$

Таблиця 1.3 – Квадратурні формули Ньютона-Котеса

$f(\xi_k) (k=\overline{0, n-1})$	Квадратурна формула (quadrature form)	Похибка квадратурної формули (error of quadrature form)
$f(x_k)$	Формула лівих прямокутників (left rectangles formula) : $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) =$ $= \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))$	$R(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \times$ $\times \max_{[a,b]} f'(\xi) $
$f(x_{k+1})$	Формула правих прямокутників (right rectangles formula): $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) =$ $= \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$	$R(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \times$ $\times \max_{[a,b]} f'(\xi) $
$f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$	Формула середніх прямокутників (medium rectangles formula): $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) =$ $= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right)$	$R(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \times$ $\times \max_{[a,b]} f''(\xi) $
$\frac{1}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$	Формула трапеції (trapezoids formula): $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (f(x_k) +$ $+ f(x_{k+1})) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} +$ $+ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right)$	$ R(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \times$ $\times \max_{[a,b]} f''(\xi) $
$\frac{1}{3}(f(x_{2k}) +$ $4f(x_{2k+1}) +$ $+ f(x_{2k+2}))$	Формула Сімпсона (Simpson's formula): $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(2k) + 4f(2k+1) +$ $+ f(2k+2)) = \frac{b-a}{6n} (f(a) + f(b) +$ $+ 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}))$	$R(f) \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \times$ $\times \max_{[a,b]} f^{(4)}(\xi) $

1.2.4 Вибір кроку інтегрування і практичне оцінення похибки інтегрування

Необхідність вибору кроку інтегрування h виникає тоді, коли задано *точність обчислення (approximation accuracy)* ε . Одним із способів розв'язку цієї задачі є **вибір кроку інтегрування (choice of integration step) за оцінкою залишкового члена**. Розглянемо його детальніше.

Як відомо, точне значення інтеграла визначають за формулами лівих і правих прямокутників, якщо підінтегральна функція стала – середніх прямокутників і трапецій, якщо функція лінійна – за формулою Сімпсона, якщо підінтегральною функцією є многочлен степеня, не вищого від третього.

Точність квадратурної формули (accuracy of the quadrature formula) характеризується порядком залишкового члена $R(f)$ відносно степеня кроку інтегрування h . Як було показано раніше, залишковий член квадратурних формул залежить від кроку інтегрування і $R(f) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). Кажуть, що залишковий член $R(f)$ має порядок p (p – натуральне число), якщо існує скінченна границя:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(f)}{h^p} = M \neq 0,$$

і це записують так: $R(f) = O(h^p)$.

Раніше згадувалось, що залишкові члени формул лівих і правих прямокутників мають перший порядок, середніх прямокутників і трапецій – другий, а Сімпсона – четвертий. Квадратурну формулу вважають найточнішою, чим більший порядок її залишкового члена $R(f)$.

Нехай потрібно обчислити інтеграл із заданою точністю ε . Використовуючи формулу потрібного залишкового члена, вибирають *крок (step)* таким, щоб виконувалась нерівність:

$$|R(f)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далі обчислюють інтеграл з вибраним кроком, причому кількість знаків при обчисленні беруть таку, щоб *похибка округлень (rounding error)* не перевищувала $\varepsilon/2$ [19, 20, 27].

Приклад 1.4. Вибрати *крок інтегрування (integration step)* h , що забезпечує задану точність ε обчислення інтеграла за квадратурною формулою Сімпсона на основі оцінки залишкового члена:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+3x} dx,$$

якщо задано точність інтегрування $\varepsilon = 0,0001$, а точне значення інтеграла $I = \frac{14}{9} = 1,555555556$.

Розв'язання. Вибираємо крок інтегрування. Він має бути таким, щоб виконувалась нерівність

$$|R(f)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Використовуючи вираз для залишкового члена формули Сімпсона, отримаємо нерівність:

$$\frac{h^4}{180} \cdot (b-a) \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Продиференціюємо підінтегральну функцію за x чотири рази:

$$f(x) = \sqrt{1+3x}, \quad f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}, \quad f''(x) = -\frac{9}{4\sqrt{(1+3x)^3}},$$

$$f'''(x) = \frac{81}{8\sqrt{(1+3x)^5}}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{1215}{16\sqrt{(1+3x)^7}}.$$

Знайдемо *максимальне значення (peak value)* $f^{(4)}(x)$ на проміжку $[a, b]$:

$$\max_{[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| = |f^{(4)}(0)| = \frac{1215}{16}.$$

Тоді крок інтегрування буде визначатися із нерівності:

$$\frac{h^4}{180} \cdot (1-0) \cdot \frac{1215}{16} < \frac{0,0001}{2},$$

звідки

$$h^4 < \frac{2}{16875},$$

$$h < 0,10434.$$

Оскільки крок має бути таким, щоб розбити відрізок на парну кількість частин, візьмемо $h = 0,1$. Тоді

$$n = \frac{b-a}{2h} = \frac{1}{2 \cdot 0,1} = 5.$$

Розбиваємо проміжок (*interval*) $[0; 1]$ з кроком $h = 0,1$ на систему вузлів x_0, x_1, \dots, x_{10} та обчислюємо y_0, y_1, \dots, y_{10} із двома запасними десятковими розрядами (табл. 1.4).

Таблиця 1.4 – Значення функції на проміжку $[0; 1]$

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x_k)$	1	1,140175	1,264911	1,378405	1,483240	1,581139

Продовження таблиці 1.4

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x_k)$	1,673320	1,760682	1,843909	1,923538	2

Тоді за узагальненою формулою Сімпсона (1.25):

$$I = \frac{h}{3} \left((y_0 + y_{10}) + 4 \sum_{k=0}^4 f(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=0}^4 f(x_{2k}) \right) = \frac{0,1}{3} ((1 + 2) + 4(1,140175 + 1,378405 + 1,581139 + 1,760682 + 1,923538) + 2(1,264911 + 1,483240 + 1,673320 + 1,843909)) = 1,555551.$$

Округливши з заданою точністю, маємо $I = 1,5556$, що збігається із точним значенням.

Іноді оцінити залишковий член квадратурної формули дуже важко або й неможливо, наприклад тоді, коли функцію задано графічно або таблично, і *аналітичний вираз (analytical form)* її невідомий, або коли функцію задано складним аналітичним виразом і її похідні важко оцінити. Але якщо похідну певного порядку знайдено, то оцінити її за модулем на відрізьку інтегрування завжди можна, побудувавши за допомогою ЕОМ таблицю значень похідної. Проте оцінити залишковий член $R(f)$ квадратурної формули можна й тоді, коли не вдається оцінити безпосередньо модуль похідної функції. Важливо лише знати порядок залишкового члена $R(f)$ відносно кроку інтегрування h . Для цього використовують *метод подвійного перерахування (double transfer method)*.

Нехай залишковий член деякої квадратурної формули має порядок p відносно кроку інтегрування h , тобто $R(f) = O(h^p)$, $p \notin N$. Припустимо

також, що похідна, яка входить до залишкового члена $R(f)$, на відрізку інтегрування $[a, b]$ змінюється мало, а тому наближено її можна вважати сталою. Тоді залишковий член набуде вигляду

$$R(f) = Mh^p,$$

де M – деяка невідома стала.

Якщо відрізок $[a, b]$ поділити на n і $2n$ рівних частин з кроком $h = \frac{b-a}{n}$ і $\frac{h}{2} = \frac{b-a}{2n}$, відповідно, і обчислити за квадратурною формулою

наближені значення I_n та I_{2n} інтеграла $I = \int_a^b f(x)dx$, а відповідні їм залишкові члени позначити через $R_n(f)$ і $R_{2n}(f)$, то отримаємо дві рівності:

$$\begin{cases} I = I_n + R_n(f) = I_n + Mh^p, \\ I = I_{2n} + R_{2n}(f) = I_{2n} + M\left(\frac{h}{2}\right)^p. \end{cases} \quad (1.27)$$

Ці рівності можна розглядати як лінійну систему рівнянь відносно I та M . Виключивши з цієї системи I , знайдемо для M значення:

$$M = \frac{2^p}{2^p - 1} \cdot \frac{I_{2n} - I_n}{h^p}.$$

Підставивши це значення M у вираз для $R_{2n}(f)$, дістанемо:

$$R_{2n}(f) = \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}. \quad (1.28)$$

Отже, залишковий член квадратурної формули пропорційний різниці двох наближених значень інтеграла, обчислених за цією ж квадратурною формулою з кроками h і $h/2$. Таку оцінку похибки квадратурної формули називають **правилом Рунге**. Якщо тепер (1.28) підставити у друге рівняння системи (1.27), то знайдемо уточнене значення інтеграла

$$I_{n,2n} = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}. \quad (1.29)$$

Обчислення наближеного значення інтеграла за формулою (1.29) називають **екстраполяцією за Річардсоном**. Якщо $I_n \neq I_{2n}$, то уточнене значення $I_{n,2n}$ ніколи не лежить між I_n та I_{2n} . Якщо $I_{2n} > I_n$, то з формули

(1.29) впливає, що $I_{n,2n} > I_{2n} = \max\{I_n, I_{2n}\}$. А якщо $I_{2n} < I_n$, то $I_{n,2n} < I_{2n} = \min\{I_n, I_{2n}\}$. Отже, наближення $I_{n,2n}$ визначають з наближень I_n та I_{2n} в результаті операції екстраполяції, тому й сам спосіб називають екстраполяцією.

У табл. 1.5 для квадратурних формул Ньютона-Котеса, розглянутих раніше, подано значення порядку p залишкового члена відносно кроку h , формули для обчислення значень залишкового члена $R_{2n}(f)$ і уточненого значення інтеграла $I_{n,2n}$.

Таблиця 1.5 – Уточнення квадратурних формул методом Рунге

Узагальнена квадратурна формула	p	$R_{2n}(f)$	$I_{n,2n}$
лівих і правих прямокутників	1	$I_{2n} - I_n$	$I_{2n} + (I_{2n} - I_n)$
середніх прямокутників і трапецій	2	$\frac{1}{3}(I_{2n} - I_n)$	$I_{2n} + \frac{1}{3}(I_{2n} - I_n)$
Сімпсона	4	$\frac{1}{15}(I_{2n} - I_n)$	$I_{2n} + \frac{1}{15}(I_{2n} - I_n)$

З табл. 1.5 видно, що для обчислення наближеного значення інтеграла з точністю $\varepsilon > 0$ методом подвійного перерахування потрібно:

1. Обчислити наближені значення інтеграла I_n та I_{2n} з кроком

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{і} \quad \frac{h}{2} = \frac{b-a}{2n}.$$

2. За формулою (1.28) обчислити наближене значення похибки $R_{2n}(f)$ чисельного інтегрування.

3. Порівняти $R_{2n}(f)$ з ε .

4. Якщо $|R_{2n}(f)| < \varepsilon$, то за формулою (1.29) обчислити уточнене значення $I_{n,2n}$ і процес обчислень припинити.

5. Якщо $|R_{2n}(f)| \geq \varepsilon$, то, зберігши значення I_{2n} , відрізок $[a, b]$ поділити на $4n$ рівних частин і обчислити $R_{4n}(f)$, яке знову порівнюється з ε . Цей процес послідовного збільшення (*process of sequential increase*) вдвічі числа вузлів квадратурної формули (зменшення вдвічі кроку інтегрування) продовжують доти, доки на певному кроці k не виконуватиметься нерівність $|R_{2^k n}(f)| < \varepsilon$.

Зауваження. Іноді як початковий крок пропонують значення, близьке до $\sqrt[p]{\varepsilon}$.

Таким чином, *екстраполяція (extrapolation)* за Річардсоном – могутній і універсальний алгоритм підвищення точності чисельного інтегрування функцій. Навіть у таких методах низького порядку точності, як методи лівих і правих прямокутників, її застосування дає змогу дістати результат досить високого порядку точності при мінімальних обсягах обчислювальної роботи [19, 20, 27].

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити інтеграл:

- а) за вказаною квадратурною формулою із заданою точністю $\varepsilon > 0$;
 б) користуючись подвійним перерахунком;

формула середніх прямокутників

$$1) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}, \varepsilon = 0,01; \quad 2) \int_0^2 e^{x^2} dx, \varepsilon = 0,01;$$

$$3) \int_0^2 \sqrt{8x^4+2x-1} dx, \varepsilon = 0,01; \quad 4) \int_1^2 x^3 dx, \varepsilon = 0,01;$$

формула трапеції

$$5) \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}, \varepsilon = 0,01; \quad 6) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \varepsilon = 0,01;$$

$$7) \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \varepsilon = 0,01; \quad 8) \int_0^2 \sqrt{x^4+1} dx, \varepsilon = 0,01;$$

Формула Сімпсона

$$9) \int_0^1 \frac{5dx}{1+x^6}, \varepsilon = 0,01; \quad 10) \int_1^5 \frac{dx}{5x+x^2}, \varepsilon = 0,01.$$

1.2.5 Формули Ньютона-Котеса вищих порядків (правило трьох восьмих)

Замінивши підінтегральну функцію інтерполяційним поліномом третього степеня, аналогічно до формули Сімпсона, отримаємо **квадратурну формулу Ньютона**

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + R_1(f), \quad (1.30)$$

яку ще називають **правилом трьох восьмих**.

Залишковий член формули Ньютона на частковому інтервалі (1.30) ви- значається як

$$R_1(f) = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx - \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_3],$$

а на всьому відрізку інтегрування справедлива оцінка похибки

$$|R(f)| \leq \frac{3h^4(b-a)}{80} \max_{[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \quad \xi \in [x_0, x_3], \quad (1.31)$$

тобто при однаковому кроці формула Ньютона, взагалі-то, менш точна, ніж формула Сімпсона.

Варто зауважити, що *похибка формули (formula error)* Ньютона-Котеса з $n+1$ ординатами при досить гладкій функції $y = f(x)$ має порядок що- найменше

$$R(f) = O \left[h^{2E\left(\frac{n}{2}\right)+3} \right],$$

де $E\left(\frac{n}{2}\right)$ – ціла частина дробу $\frac{n}{2}$.

Звідси випливає, що квадратурні формули з непарним числом ординат є найточнішими.

Наведемо таблицю коефіцієнтів Котеса (табл. 1.6). Для зручності запи- су коефіцієнти Котеса для кожного n подані у вигляді дробів

$$H_i = \frac{\hat{H}_i}{N},$$

із спільним знаменником N . Для контролю відзначимо, що

$$\sum_{i=0}^n \hat{H}_i = N.$$

Таблиця 1.6 – Коефіцієнти Котеса

n	\hat{H}_0	\hat{H}_1	\hat{H}_2	\hat{H}_3	\hat{H}_4	\hat{H}_5	\hat{H}_6	\hat{H}_7	\hat{H}_8	N
1	1	1								2
2	1	4	1							6
3	1	3	3	1						8
4	7	32	12	32	7					90
5	19	75	50	50	75	19				288
6	41	216	27	272	27	216	41			840
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751		17280
8	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989	28350

Потрібно звернути увагу на те, що коефіцієнти Котеса при великих n можуть бути від'ємними (див., наприклад, $n = 8$) [10, 16].

Приклад 1.5. Обчислити визначений інтеграл вигляду:

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{3 + 2 \cos x},$$

за формулою Ньютона-Котеса, взявши $n = 5$, точне значення якого $I = 0,3746904742$.

Розв'язання. Визначимо крок інтегрування

$$h = \frac{1-0}{5} = 0,2.$$

Складемо таблицю значень (табл. 1.7), де для зручності прийнято $\hat{H}_i = 288H_i$.

Таблиця 1.7 – Приклад обчислення інтеграла за формулою Ньютона-Котеса

i	x_i	y_i	\hat{H}_i	$\hat{H}_i y_i$
0		0,2	19	3,8
1	0,2	0,246244	75	18,4683
2	0,4	0,308093	50	15,40465
3	0,6	0,391797	50	19,58985
4	0,8	0,506563	75	37,992225
5	1	0,666147	19	12,656793
Σ				107,911818

Звідси

$$I \approx \frac{1}{288} \cdot 107,911818 = 0,374694.$$

Отримане значення збігається із точним до п'ятого порядку включно.

Визначимо залишковий член формули Ньютона-Котеса вищих порядків, використовуючи нерівність (1.31). Для оцінення похибки інтегрування знаходимо:

$$f^{(4)}(x) = \frac{e^x}{3+2\cos x} + 16 \frac{e^x \sin^2 x}{(3+2\cos x)^3} + 10 \frac{e^x \cos x}{(3+2\cos x)^2} +$$

$$+ 192 \frac{e^x \sin^3 x}{(3+2\cos x)^4} + 96 \frac{e^x \sin x \cdot \cos x}{(3+2\cos x)^3} + 384 \frac{e^x \sin^4 x}{(3+2\cos x)^5} +$$

$$+ 288 \frac{e^x \sin^2 x \cos x}{(3+2\cos x)^4} + 24 \frac{e^x \cos^2 x}{(3+2\cos x)^3};$$

$$f^{(4)}(0) = 0,792000;$$

$$f^{(4)}(1) = 6,692079.$$

Звідси маємо

$$\max_{[0; 1]} |f^{(4)}(\xi)| = |f^{(4)}(1)| = 6,692079;$$

$$R(f) = \frac{3 \cdot 0,2^4 \cdot (1-0) \cdot 6,692079}{80} = 0,0004015248.$$

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити наближено інтеграл за формулою Ньютона-Котеса вищих порядків:

$$1) \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{6\sqrt{1+x^2}} dx, n=5;$$

$$2) \int_1^2 \frac{2x^5}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx, n=6;$$

$$3) \int_2^3 \frac{x(x^2+3)}{2(x^2+1)} dx, n=7;$$

$$4) \int_3^4 \frac{(2x+1)^2}{x^2+9} dx, n=4;$$

$$5) \int_4^5 \frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)} dx, n=5;$$

$$6) \int_1^2 \frac{2x^2-5}{x^4+5x^2+6} dx, n=6;$$

$$7) \int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+3x-1} dx, n=7;$$

$$8) \int_4^5 \frac{x^3+1}{x^3+5x^2+6x} dx, n=4;$$

$$9) \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + 4x + 4} dx, n = 6; \quad 10) \int_3^4 \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3x^2} dx, n = 5.$$

1.3 Квадратурна формула Чебишева

Розглянемо квадратурну формулу:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n B_i f(t_i), \quad (1.32)$$

де B_i – сталі коефіцієнти.

Чебишев запропонував вибрати абсциси t_i в такий спосіб:

- 1) коефіцієнти B_i мають бути рівні між собою;
- 2) квадратурна формула (1.32) є точною для всіх поліномів до степені n включно.

Продемонструємо, як можна визначити в цьому випадку величини B_i та t_i . Покладемо

$$B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$$

і враховуючи, що при $f(t) \equiv 1$ будемо мати

$$2 = \sum_{i=1}^n B_i,$$

отримаємо:

$$B = \frac{2}{n} \quad B = \frac{2}{n}.$$

Як результат, квадратурна формула Чебишева має вигляд:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i). \quad (1.33)$$

Для визначення абсцис t_i необхідно врахувати, що формула (1.33), (згідно з умовою 2) має бути точною для функції вигляду:

$$f(t) = t, t^2, \dots, t^n.$$

Поклавши ці функції у формулу (1.33), отримаємо систему рівнянь, з якої можна визначити невідомі t_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Чебишев показав, що обчислення системи (1.34) зводиться до визначення коренів деякого алгебраїчного рівняння степеня n .

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \frac{n}{3}, \\ t_1^3 + t_2^3 + \dots + t_n^3 = 0, \\ t_1^4 + t_2^4 + \dots + t_n^4 = \frac{n}{5}, \\ \dots\dots\dots, \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = \frac{n \left[1 - (-1)^{n+1} \right]}{2(n+1)}, \end{array} \right. \quad (1.34)$$

У таблиці 1.8 подано значення коренів t_i системи (1.34) для $n = 2, 3, \dots, 7$ [10, 14].

Таблиця 1.8 – Значення абсцис t_i у формулі Чебишева

n	i	t_i	n	i	t_i
2	1; 2	$\mp 0,577350$	6	1; 6	$\mp 0,866247$
3	1; 3	$\mp 0,707107$		2; 5	$\mp 0,422519$
	2	0		3; 4	$\mp 0,266635$
4	1; 4	$\mp 0,794654$	7	1; 7	$\mp 0,883862$
	2; 3	$\mp 0,187592$		2; 6	$\mp 0,529657$
5	1; 5	$\mp 0,832498$		3; 5	$\mp 0,323912$
	2; 4	$\mp 0,374541$	4	0	
	3	0			

Необхідно зазначити, що система (system) (1.34) не має дійсних розв'язків при $n = 8$ та $n \geq 10$. Саме в цьому полягає суттєвий недолік квадратурної формули Чебишева.

Розглянемо виведення формули Чебишева з трьома ординатами ($n = 3$). Для визначення абсцис t_i ($i = 1, 2, 3$) маємо таку систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 + t_3 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1, \\ t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = 0. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Симетричні функції коренів мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}C_1 &= t_1 + t_2 + t_3, \\C_2 &= t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_3, \\C_3 &= t_1 \cdot t_2 \cdot t_3.\end{aligned}$$

Із системи (1.35) отримуємо:

$$\begin{aligned}C_1 &= 0; \\C_2 &= \frac{1}{2} \left[(t_1 + t_2 + t_3)^2 - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) \right] = \frac{1}{2} (0 - 1) = -\frac{1}{2}; \\C_3 &= \frac{1}{6} \left[(t_1 + t_2 + t_3)^3 - 3(t_1 + t_2 + t_3)(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) + \right. \\&\quad \left. + 2(t_1^3 + t_2^3 + t_3^3) \right] = \frac{1}{6} (0 - 0 + 0) = 0.\end{aligned}$$

Можна зробити висновок, що t_i є корені допоміжного рівняння

$$t^3 - C_1 \cdot t^2 + C_2 \cdot t - C_3 = 0$$

або

$$t^3 - \frac{1}{2}t = 0.$$

Тобто можна прийняти, що

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді відповідна формула Чебишева має такий вигляд:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

Для застосування квадратурної формули Чебишева до інтеграла вигляду

$$\int_a^b f(x) dx,$$

потрібно його перетворити за допомогою підстановки

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

яка перетворить відрізок $a \leq x \leq b$ у відрізок $-1 \leq t \leq 1$.

Застосувавши до перетвореного інтеграла формулу Чебишева (1.33) будемо мати:

$$I_{[a;b]} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i); \quad (1.36)$$

де $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$;

t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – корені системи (1.34) (табл. 1.8).

Маємо кінцеву квадратурну формулу Чебишева:

$$I = \sum_{i=0}^2 I_{[a;b]}; \quad (1.37)$$

Необхідно зазначити, що квадратурна формула Чебишева використовується, загалом, в кораблебудуванні.

Похибка методу обчислюється за формулою:

$$\Delta = Ch^{n+1},$$

де n – кількість ординат;

h – крок;

C – обчислюється за формулою:

$$C = \frac{I^{(h/2)} - I^h}{(h/2)^{n+1} - h^{n+1}}.$$

Приклад 1.6. Використовуючи формулу Чебишева з чотирма ординатами ($n = 4$), обчислити інтеграл вигляду:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2 + 1},$$

точно значення якого $I=0.32179354474$.

Розв'язання. Маємо $a = 0$ і $b = 1$. Виходячи із формули (1.36) та значень табл. 1.8, абсциси точок з точністю до шести значущих цифр матимуть такі значення:

$$x_1 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0,794654) = 0,102673;$$

$$x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0,187592) = 0,406204;$$

$$x_3 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0,187592 = 0,593796;$$

$$x_4 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0,794654 = 0,897327.$$

Відповідно $f(x_i)$ за умови, що $i = 1, 2, 3, 4$, набувають таких значень:

$$y_1 = \frac{\sin(x_1)}{x_1^2 + 1} = \frac{\sin(0,102673)}{0,102673^2 + 1} = 0,101424;$$

$$y_2 = \frac{\sin(x_2)}{x_2^2 + 1} = \frac{\sin(0,406204)}{0,406204^2 + 1} = 0,339163;$$

$$y_3 = \frac{\sin(x_3)}{x_3^2 + 1} = \frac{\sin(0,593796)}{0,593796^2 + 1} = 0,413658;$$

$$y_4 = \frac{\sin(x_4)}{x_4^2 + 1} = \frac{\sin(0,897327)}{0,897327^2 + 1} = 0,433007.$$

Отже з кроком $h=1$ кінцевий інтеграл буде мати вигляд:

$$I = I_{[a;b]} \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^4 f(x_i) = \frac{1}{4}(0,101424 + 0,339163 + 0,413658 + 0,433007) = 0,321813.$$

Для обчислення похибки спочатку обчислимо коефіцієнт C :

$$C = \frac{I^{(h/2)} - I^h}{(h/2)^{n+1} - h^{n+1}};$$

$$C = \frac{0,321785 - 0,321813}{0,5^5 - 1^5} = \frac{-0,000028}{-0,96875} = 0,00001854.$$

Отже,

$$\Delta = Ch^{n+1} = 0,00001854 \cdot 1^5 = 0,00001854.$$

Зауваження. Якщо для збільшення точності потрібно розбити проміжок на декілька рівновіддалених проміжків, тоді значення інтеграла на кожному проміжку розраховується як це показано в прикладі 1.7, а загальне значення інтеграла буде розраховано за формулою:

$$I = \sum I_i$$

де I_i – значення інтеграла для кожного проміжку.

Відповідно схема алгоритму та програма обчислення при врахуванні додаткового розбиття на декілька рівновіддалених проміжків з відстанню h набуде такого вигляду (рис. 1.12).

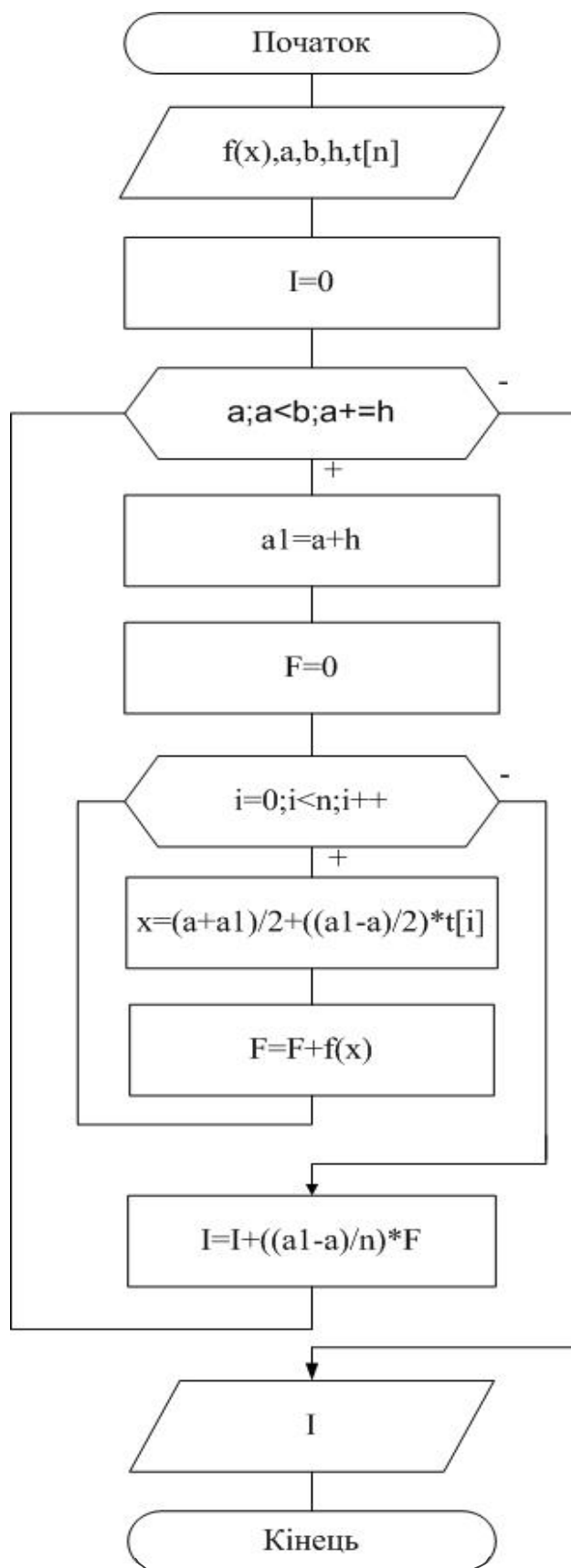


Рисунок 1.12 – Схема алгоритму чисельного інтегрування за квадратурними формулами Чебишева

Лістинг програми функції методу наведений нижче, а сама функція для розв'язання тестового прикладу та функція для вирішення задачі інтегрування при розбитті заданого проміжку на рівновіддалені відрізки:

```

const int n = 4; //порядок методу для методу Чебишева
float t[n]= {-0.794654, -0.187592, 0.187592, 0.794654};

float Method_Chebicheva_simple (float a, float b)
{
    float I;
    fprintf (fp, "\n--- Metod Chebisheva_simple \n");
    float F = 0;
    for (int i=0; i<n; i++)
    {
        float x = (a+b)/2 + (b-a)*t[i]/2;
        F = F + f(x);
    }
    I = (b-a)*F/n;
    fprintf (fp, "I = %9.7f\n", I);
    return 0;
}
float Method_Chebicheva (float a, float b, float h)
{
    float I = 0;
    fprintf (fp, "\n--- Metod Chebisheva - h = %.3f ---\n",
h);
    for (a; a<b; a+=h)
    {
        float a1 = a+h;
        float F = 0;
        for (int i=0; i<n; i++)
        {
            float x = (a+a1)/2 + (a1-a)*t[i]/2;
            F = F + f(x);
        }
        I = I + (a1-a)*F/n;
    }
    fprintf (fp, "I = %9.7f\n", I);
    return 0;
}

```

До головної функції, відповідно, потрібно додати:

```

Method_Chebicheva_simple (a, b);
Method_Chebicheva (a, b, 0.1);

```

В результаті отримаємо:

--- Metod Chebisheva_simple

I = 0.3218128

--- Metod Chebisheva - h = 0.100 ---

I = 0.3217936

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити наближено інтеграл за квадратурною формулою Чебишева за умови, що: $h=1$, порядок $n=5$.

$$\begin{aligned} 1) \int_0^4 \frac{\sqrt{1+x}}{6\sqrt{1+x^2}} dx; & \quad 2) \int_0^4 \frac{2x^5}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx; & \quad 3) \int_0^4 \frac{x(x^2+3)}{2(x^2+1)} dx; \\ 4) \int_0^4 \frac{(2x+1)^2}{x^2+9} dx; & \quad 5) \int_0^4 \frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)} dx; & \quad 6) \int_0^4 \frac{2x^2-5}{x^4+5x^2+6} dx; \\ 7) \int_0^4 \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+3x-1} dx; & \quad 8) \int_0^4 \frac{x^3+1}{x^3+5x^2+6x} dx; & \quad 9) \int_0^4 \frac{x^2}{x^2+4x+4} dx; \\ 10) \int_0^4 \frac{2x^2+1}{x^3+3x^2} dx. & & \end{aligned}$$

1.4 Квадратурна формула Гаусса

Перш ніж розглядати квадратурну формулу Гаусса, необхідно навести деякі відомості про *поліном (polynomial) Лежандра*. Поліноми вигляду:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n=0,1, \dots) \quad (1.38)$$

називаються **поліномами Лежандра**.

Відзначимо найважливіші властивості полінома Лежандра:

$$1) P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n \quad (n=0,1, \dots);$$

$$2) \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot Q_k(x) dx = 0 \quad (k < n), \text{ де } Q_k(x) \text{ — будь-який поліном степеня } k, \text{ меншого за } n;$$

3) поліном Лежандра $P_n(x)$ має n різних і дійсних коренів, які лежать на інтервалі $(-1; 1)$.

Наведемо перші п'ять поліномів Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1; \\ P_1(x) &= x; \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \end{aligned}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^3 + 3).$$

Перейдемо тепер до виведення **квадратурної формули Гаусса**.

Поставимо задачу: як потрібно підібрати точки t_1, t_2, \dots, t_n на відріжку $[a, b]$ та коефіцієнти A_1, A_2, \dots, A_n , щоб квадратурна формула

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (1.39)$$

була точною для всіх поліномів $f(t)$ найвищого можливого степеня N .

Оскільки в нашому розпорядженні є $2n$ сталих t_i та A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а поліном степеня $2n - 1$ визначається $2n$ коефіцієнтами, то найвищий степінь в загальному випадку, очевидно, дорівнює $N = 2n - 1$.

Для забезпечення рівності (1.39) потрібно і достатньо, щоб вона виконувалась при

$$f(t) = 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1}.$$

Дійсно, покладаючи

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1) \quad (1.40)$$

і

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k,$$

матимемо:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i).$$

Таким чином, враховуючи *співвідношення (proportion)*

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & \text{якщо } k - \text{парне;} \\ 0, & \text{якщо } k - \text{непарне,} \end{cases}$$

можемо зробити висновок, що для обчислення поставленої задачі достатньо визначити t_i та A_i із системи $2n$ рівнянь [10, 14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}, \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Система (1.41) – нелінійна, розв’язати її звичайним шляхом досить складно, тому тут можна застосувати такий штучний прийом.

Розглянемо поліноми

$$f(t) = t^k P_n(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

де $P_n(t)$ – поліном Лежандра.

Оскільки степені цих поліномів не перевищують $2n-1$, то на основі системи (1.41) для них має бути справедлива формула (1.39) і

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t_i) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.42)$$

З іншого боку, внаслідок властивості ортогональності поліномів Лежандра (властивість 2) виконуються рівності

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t_i) dt = 0 \quad \text{при } k < n,$$

тому

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.43)$$

Рівності (1.43) будуть виконуватися при будь-яких значеннях A_i , якщо покласти:

$$P_n(t_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.44)$$

тобто для досягнення найвищої точності квадратурної формули (1.39) як точки t_i достатньо взяти нулі відповідного полінома Лежандра. Як відомо (властивість 3), ці нулі дійсні, різні та розташовані на інтервалі $(-1; 1)$. Знаючи абсциси t_i , легко можна знайти із лінійної системи n рівнянь системи (1.41) і коефіцієнти A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Визначник цієї підсистеми є визначником Вандермонда

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0,$$

і, як наслідок, A_i визначаються однозначно.

Формула (1.39), де t_i – нулі полінома Лежандра $P_n(t)$ і A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) визначаються із системи (1.41), називається **квадратурною формулою Гаусса**.

Незручність застосування квадратурної формули Гаусса полягає в тому, що абсциси точок t_i і коефіцієнти A_i – взагалі-то, ірраціональні числа. Цей недолік частково перекривається її високою точністю при порівняно малому числі ординат.

Для довідок наведемо наближені значення абсцис t_i і коефіцієнтів A_i у квадратурній формулі Гаусса (1.39) (табл. 1.9).

Розглянемо тепер використання квадратурної формули Гаусса для обчислення загального інтеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Зробивши заміну змінної

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

отримаємо:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

Застосувавши до останнього виразу квадратурну формулу Гаусса (1.39), матимемо:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (1.45)$$

де

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.46)$$

t_i – нулі полінома Лежандра $P_n(t)$, тобто

$$P_n(t_i) = 0.$$

Таблиця 1.9 – Елементи формули Гаусса

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1; 2	$\mp 0,57735027$	1
3	1; 3 2	$\mp 0,77459667$ 0	0,55555556 0,88888889
4	1; 4 2; 3	$\mp 0,86113631$ $\mp 0,33998104$	0,34785484 0,65214516
5	1; 5 2; 4 3	$\mp 0,90617985$ $\mp 0,53846931$ 0	0,23692688 0,47862868 0,56888889
6	1; 6 2; 5 3; 4	$\mp 0,93246951$ $\mp 0,66120939$ $\mp 0,23861919$	0,17132450 0,36076158 0,46791394
7	1; 7 2; 6 3; 5 4	$\mp 0,94910791$ $\mp 0,74153119$ $\mp 0,40584515$ 0	0,12948496 0,27970540 0,38183006 0,41795918
8	1; 8 2; 7 3; 6 4; 5	$\mp 0,96028986$ $\mp 0,79666648$ $\mp 0,52553242$ $\mp 0,18343464$	0,10122854 0,22238104 0,31370664 0,36268378

Залишковий член формули Гаусса (1.45) з n вузлами виражається так:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3 (2n+1)}, \quad (1.47)$$

звідки

$$R_2 = \frac{1}{135} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

$$R_3 = \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2} \right)^7 f^{(6)}(\xi),$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875} \left(\frac{b-a}{2} \right)^9 f^{(8)}(\xi),$$

$$R_5 = \frac{1}{1237732650} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{11} f^{(10)}(\xi),$$

$$R_6 = \frac{1}{648984486150} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{13} f^{(12)}(\xi) \text{ і так далі [10, 14].}$$

Приклад 1.7. Використовуючи формулу Гаусса з чотирма ординатами ($n = 4$), обчислити визначений інтеграл:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2 + 1},$$

точно значення якого $I=0.32179354474$.

Розв'язання. Маємо $a = 0$ і $b = 1$. Виходячи із формули (1.46) та значень табл. 1.9, абсциси точок з точністю до шести значущих цифр матимуть такі значення:

$$x_1 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0,86113631) = 0,069431845;$$

$$x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0,33998104) = 0,33000948;$$

$$x_3 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0,33998104 = 0,66999052;$$

$$x_4 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0,86113631 = 0,930568155.$$

Відповідні коефіцієнти формули (1.45) у нашому випадку будуть:

$$C_1 = \frac{b-a}{2} \cdot A_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,34785484 = 0,17392742;$$

$$C_2 = \frac{b-a}{2} \cdot A_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,65214516 = 0,32607258;$$

$$C_3 = \frac{b-a}{2} \cdot A_3 = \frac{1}{2} \cdot 0,65214516 = 0,32607258;$$

$$C_4 = \frac{b-a}{2} \cdot A_4 = \frac{1}{2} \cdot 0,34785484 = 0,17392742.$$

Подальші обчислення зведено в табл. 1.10.

Таблиця 1.10 – Приклад обчислення інтеграла за формулою Гаусса

i	x_i	y_i	C_i	$C_i y_i$
1	0,069431845	0,06904323	0,17392742	0,012008511
2	0,33000948	0,292226683	0,32607258	0,095287108
3	0,66999052	0,428589965	0,32607258	0,139751436
4	0,930568155	0,429784521	0,17392742	0,074751313
Σ				0,321798368

Отже,

$$I \approx \sum_{i=1}^4 c_i y_i = 0,321798368.$$

Для оцінення залишкового члена можна скористатись формулою:

$$R_4 = \frac{1}{3472875} \left(\frac{b-a}{2} \right)^9 f^{(8)}(\xi), \text{ де } \xi \notin (a, b).$$

Продиференціювавши за x вісім разів функцію $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$, мати-

МЕМО:

$$\begin{aligned}
 f^8(x) = & \frac{\sin(x)}{x^2+1} + \frac{56 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{1680 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^3} + \frac{20160 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^4} + \\
 & + \frac{40320 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^5} - \frac{2688x^3 \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^4} - \frac{215040x^3 \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^5} - \\
 & - \frac{3225600x^3 \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^6} + \frac{215040x^5 \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^6} + \\
 & + \frac{7741440x^5 \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^7} - \frac{5160960x^7 \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^8} - \frac{224x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^3} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{20160x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^4} - \frac{483840x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^5} - \frac{1612800x^2 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^6} + \\
& + \frac{26880x^4 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^5} + \frac{1612800x^4 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^6} + \frac{9675800x^4 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^7} + \\
& - \frac{1290240x^6 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^7} - \frac{18063360x^6 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^8} + \\
& + \frac{10321920x^8 \cdot \sin(x)}{(x^2+1)^9} + \frac{16x \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{1344x \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^3} + \\
& + \frac{40320x \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^4} + \frac{322560x \cdot \cos(x)}{(x^2+1)^5}.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\max_{[0;1]} |f^{(8)}(x)| = 1.481 \cdot 10^3.$$

Тому

$$|R_4| \leq \frac{1}{3472875} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot 1.481 \cdot 10^3 = 4.85835362 \cdot 10^{-6}.$$

Як бачимо, формула Гаусса дає можливість обчислити інтеграл із достатньо високою точністю.

Зауваження 1. Якщо задано точність інтегрування ε , після вибору числа ординат n необхідно оцінити похибку за формулою (1.47). Якщо залишковий член не задовольняє нерівності

$$\int_a^b f(t) dt,$$

потрібно збільшити n [10, 17].

Зауваження 2. Якщо для збільшення точності потрібно розбити проміжок на декілька рівновіддалених проміжків, тоді значення інтеграла на кожному проміжку розраховується так, як це показано в прикладі 1.7, а загальне значення інтеграла буде розраховано за формулою:

$$I = \sum I_i,$$

де I_i – значення інтеграла для кожного проміжку.

Відповідно схема алгоритму та програма обчислення при врахуванні додаткового розбиття на декілька рівновіддалених проміжків з відстанню h набуде такого вигляду (рис. 1.13).

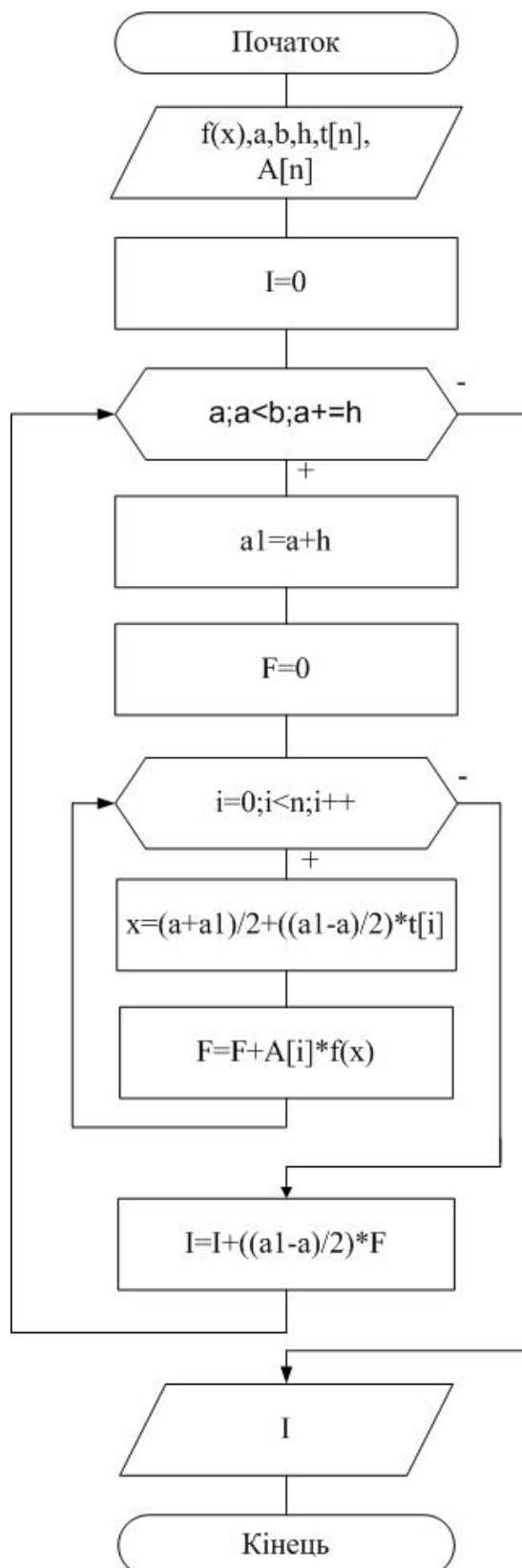


Рисунок 1.13 – Схема алгоритму чисельного інтегрування за квадратурними формулами Гаусса

Лістинг програми функції методу наведено нижче, а саме функція для розв'язання тестового прикладу та функція для вирішення задачі інтегрування при розбітті заданого проміжку на рівновіддалені відрізки:

```

const int n_G = 4; //порядок методу для методу Гаусса
float t_G[n_G] = {-0.86113631, -0.33998104, 0.33998104,
0.86113631}; // коефіцієнти t [i] для методу Гаусса n=4
float A_G[n_G] = {0.34785484, 0.65214516, 0.65214516, 0.34785484};
// коефіцієнти A[i] для методу Гаусса n=4

float Method_Gaussa_simple (float a, float b)
{
    float I;
    fprintf (fp, "\n--- Metod Gaussa_simple \n");
    float F = 0;
    for (int i=0; i<n_G; i++)
    {
        float x = (a+b)/2 + (b-a)*t_G[i]/2;
        F = F + A_G[i]*f(x);
    }
    I = (b-a)*F/2;
    fprintf (fp, "I = %9.7f\n", I);
    return 0;
}

float Method_Gaussa (float a, float b, float h)
{
    float I = 0;
    fprintf (fp, "\n--- Metod Gaussa - h = %.3f ---\n", h);
    for (a; a<b; a+=h)
    {
        float a1 = a+h;
        float F = 0;
        for (int i=0; i<n_G; i++)
        {
            float x = (a+a1)/2 + (a1-a)*t_G[i]/2;
            F = F + A_G[i]*f(x);
        }
        I = I + (a1-a)*F/2;
    }
    fprintf (fp, "I = %.9f\n", I);
    return 0;
}

```

До головної функції, відповідно, потрібно додати:

```

Method_Gaussa_simple (a, b);
Method_Gaussa (a, b, 0.1);

```

В результаті отримаємо:

--- Metod Gaussa_simple

I = 0.3217984

--- Metod Gaussa - h = 0.100 ---

I = 0.321793616

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити наближено інтеграл за квадратурною формулою Гаусса за умови, що: $h=1$, порядок $n=5$

$$1) \int_0^4 \frac{2x+3}{x^2+2x+5} dx; \quad 2) \int_0^4 \frac{2x+3}{(x+2)(x+5)} dx; \quad 3) \int_0^4 \frac{2x^3+3x}{(x+1)(x+4)} dx;$$

$$4) \int_0^4 \frac{2x^2}{(x^2+1)(x+4)} dx; \quad 5) \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}} dx;$$

$$6) \int_0^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{4x+5+x^2}} dx; \quad 7) \int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x} + \frac{\sqrt{2x}}{2} \right)^2 dx;$$

$$8) \int_0^4 \left(2\sqrt{x} + \frac{2}{4+x} \right)^2 dx; \quad 9) \int_0^4 \frac{1}{3x^2 + \sqrt{2x^2+1}} dx;$$

$$10) \int_0^4 \sqrt{\frac{1+2x}{4x^2+2}} dx.$$

2 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ЗАСОБАМИ ПРІКЛАДНИХ ПРОГРАМ

Математичні та науково-технічні розрахунки є важливою сферою застосування персональних комп'ютерів (ПК). Сьогодні цю роботу нерідко виконує звичайний користувач ПК. Його роботу може спростити застосування інтегрованих програмних систем автоматизації математичних розрахунків (Maple, MathCAD, MatLab та ін.).

Фірма MathSoft Inc. (США) випустила першу версію системи в 1986 р. Головна відмінна риса системи MathCAD полягає в її вихідній мові, що максимально наближена до природної математичної мови, яка використовується як в трактатах з математики, так і взагалі в науковій літературі. Під час роботи з системою користувач готує так звані документи. Вони одночасно містять описи алгоритмів обчислень, програми керування роботою систем і результатами обчислень.

MathCAD – це програма, призначена для автоматизації обчислення масових математичних задач в найрізноманітніших галузях науки, техніки та освіти. Назва системи походить від двох слів – Mathematica (математика) і CAD (Computer Aided Design – системи автоматичного проектування, або САПР). Так що цілком правомірно вважати MathCAD математичними САПР.

Сьогодні різні версії MathCAD є математично орієнтованими універсальними системами. Крім власне обчислень, як чисельних, так і аналітичних, вони дозволяють швидко обчислювати складні оформлювальні завдання, які важко даються популярним текстовим редакторам або електронним таблицям. За допомогою MathCAD можна, наприклад, готувати статті, книги, дисертації, наукові звіти, дипломні та курсові проекти не тільки з якісними текстами, але і з легко здійснюваним набором найскладніших математичних формул, вишуканим графічним поданням результатів обчислень і численними «живими» прикладами. А застосування бібліотек і пакетів розширення забезпечує професійну орієнтацію MathCAD на будь-яку галузь науки, техніки та освіти.

До важливих переваг нових версій MathCAD входить багатий набір шрифтів, можливість використання всіх інструментів Windows, прекрасна графіка і сучасний багатовіконний інтерфейс. У новій версії MathCAD є ефективні засоби оформлення документів у кольорі, можливість створення анімованих (рухомих) графіків і звукового супроводу. Тут же текстовий, формульний і графічний редактори, поєднані з потужним обчислювальним потенціалом. Передбачена і можливість об'єднання з іншими математичними і графічними системами для розв'язання особливо складних завдань. Звідси і назва таких систем – інтегровані системи.

Maple – програмний пакет, система комп'ютерної алгебри. Цей програмний пакет є продуктом компанії Waterloo Maple Inc., яка з 1984 року

випускає програмні продукти, орієнтовані на складні математичні обчислення, візуалізацію даних та моделювання.

Система Maple призначена для символічних обчислень, хоча має ряд засобів і для чисельного обчислення диференціальних рівнянь та знаходження інтегралів. В системі є добре розвинуті графічні засоби, власна мова програмування, що нагадує Паскаль.

Робота в Maple відбувається в режимі сесії (session) – користувач вводить речення (команди, вирази, процедури), що сприймаються й інтерпретуються Maple. Те, що при цьому з'являється на екрані дисплея, умовно розділяється на три частини: область введення (Input Region), що складається з речень, які набираються, область виведення (Output Region) і тексти коментарів (Text Region). Область виведення може містити результати виконання математичних і алгоритмічних операцій, графічні образи (двовимірна і тривимірна графіка). Області введення і виведення разом з відповідними коментарями називаються групою (Group). Групи розділяються сепараторами.

Натискання клавіші Enter запускає виконання речення. Якщо введене закінчене речення, то йде виконання, інакше Maple очікує його завершення. Знайшовши помилку, Maple друкує в наступному рядку повідомлення про неї.

Результати роботи можуть бути збережені у файлах різних форматів. Існують два види Maple файлів. За замовчуванням усі результати роботи (області введення і виведення, коментарі) записуються у файл із розширенням 'mw'. При записуванні у файли з іншими розширеннями зберігаються тільки області введення і тексти коментарів. При відкритті формату 'mws' змінюється інтерфейс на Classic Worksheet Maple [1, 12, 21, 22].

2.1 Чисельне інтегрування функцій в прикладному програмному пакеті MathCAD

Більшість чисельних методів, запрограмованих в MathCAD, реалізовано у вигляді вбудованих функцій. Звичайно, не кожен символ можливо ввести з клавіатури. Наприклад, неочевидно, як вставити в документ знак інтеграла або диференціювання. Для цього в MathCAD є спеціальні панелі інструментів, дуже схожі на засоби формульного редактора Microsoft Word і одна з них – панель інструментів **Math**. Вона має інструменти для вставки в документи математичних об'єктів (операторів, графіків, елементів програм тощо).

Панель містить дев'ять кнопок, натиснення кожної з яких приводить до появи на екрані ще однієї панелі інструментів. За допомогою цих дев'яти допоміжних панелей можна вставляти в документи MathCAD різноманітні об'єкти.

Традиційна форма написання виразів тут майже зберігається, єдина особливість полягає в необхідності для символічних обчислень використання символу \rightarrow замість знака дорівнює. Його можна ввести в редакторі MathCAD з будь-якої з панелей **Evaluation** (Вираз) або **Symbolic** (Символіка), а символі інтегрування і диференціювання – з панелі **Calculus** (Обчислення).

Символьні обчислення

$$\int \frac{\ln(a \cdot x)}{x^b} dx \rightarrow \left[\frac{-(1 - \ln(a) + b \cdot \ln(a))}{-2 \cdot b + 1 + b^2} \cdot x - \frac{1}{b-1} \cdot x \cdot \ln(x) \right] \cdot x^{-b}.$$

Для обчислення невизначеного інтеграла від деякого виразу за певною змінною виділіть в виразі змінну і виконайте команду **Symbolics / Variable / Integrate** (Символіка / Змінна / Інтегрувати). Обчислене аналітичне подання невизначеного інтеграла з'явиться нижче. При цьому результат може містити як вбудовані в MathCAD, так і інші спеціальні функції, які не можна безпосередньо розрахувати в MathCAD, але символічний процесор «вміє» видавати їх як результат деяких символічних операцій.

Обчислення невизначеного інтеграла від підінтегральної функції $f(t)$ (у символічному вигляді):

- $\int f(t) dt$ – комбінація клавіш **ctrl+[I]**.

Обчислення визначеного інтеграла від підінтегральної функції $f(t)$ з межами інтегрування – нижньою a і верхньою b :

- $\int_a^b f(t) dt$ – кнопка **&**.

Для розв'язання прикладних задач інтегрування чисельними методами в MathCad використовуються стандартні математичні операції та частково елементи програмування [1, 21, 22].

Розглянемо приклади розв'язання прикладних задач інтегрування чисельними методами в MathCAD.

Задамо у MathCAD початкові дані, необхідні для обчислення задачі, наведеної у розділі 1:

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$$

$$a := 0$$

$$b := 1$$

$$n := 10$$

Визначимо заданий інтеграл методом трапецій (див. приклад 1.2) для випадку, коли підінтегральна функція обчислюється за деяким алгоритмом, що поданий у вигляді функції з параметром:

$$\text{fintegral}(a, b, n, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + j \cdot h) \right) \end{array} \right.$$

$$\text{fintegral}(a, b, n, f) = 0.32083$$

Якщо функція задана таблично з рівновіддаленими вузлами, тоді потрібно замінити $f(a)$ на f_0 , $f(b)$ на f_n , $f(a + j \cdot h)$ на f_j .

Таке обчислення можна реалізувати з використанням елементів програмування:

$$\text{ftrapets1}(a, b, n, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ I \leftarrow f(a) + f(b) \\ \text{for } j \in 1..(n - 1) \\ \quad I \leftarrow I + 2f(a + j \cdot h) \\ \frac{h \cdot I}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{ftrapets1}(a, b, n, f) = 0.32083$$

чи

$$\text{ftrapets1}(a, b, n, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ I \leftarrow f(a) + f(b) \\ a1 \leftarrow a + h \\ b1 \leftarrow b - h \\ \text{for } x \in a1, a1 + h.. b1 \\ \quad I \leftarrow I + 2f(x) \\ \frac{h \cdot I}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{ftrapets1}(a, b, n, f) = 0.32083$$

Відповідно розрахунки квадратурних формул на основі лівих та правих прямокутників (див. приклад 1.1) з використанням елементів програмування набувають такого вигляду:

$$\text{liv_pr}(a, b, n, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ I \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad I \leftarrow I + f(a + h \cdot i) \\ I \cdot h \end{array} \right.$$

$$\text{liv_pr}(a, b, n, f) = 0.2998$$

$$\text{prav_pr}(a, b, n, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ I \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad I \leftarrow I + f(a + h \cdot i) \\ I \cdot h \end{array} \right.$$

$$\text{prav_pr}(a, b, n, f) = 0.34187$$

Визначимо заданий інтеграл методом Сімпсона (див. приклад 1.3):

$$\text{fsimpson}(a, b, n, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \left[\frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f[a + (2j-1) \cdot h] + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a + 2j \cdot h) \right] \right] \end{array} \right.$$

$$\text{fsimpson}(a, b, n, f) = 0.3218$$

Наведений вище розрахунок, як зазначено в теорії, підходить тільки для парної кількості інтервалів.

Для того, щоб застосувати метод Сімпсона для непарної кількості інтервалів, можна поділити кожен проміжок навпіл, тоді розрахунок спроститься, але буде потребувати більшої кількості обчислень:

$$\text{fsimpson1}(a, b, n, f) := \left[\begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ I \leftarrow 0 \\ \text{for } x \in a, a+h..(b-h) \\ \quad I \leftarrow I + f(x) + 4 \cdot f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(x+h) \\ \frac{h \cdot I}{6} \end{array} \right.$$

$$\text{fsimpson1}(a, b, n, f) = 0.32179$$

Визначимо заданий інтеграл методом Чебишева, для чого потрібно попередньо задати порядок методу та відповідні коефіцієнти (див. приклад 1.6). Перепишемо задані початкові умови, додамо додаткові та обчислимо поставлену задачу.

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$$

$$a := 0 \quad i := 1..4 \quad t_i :=$$

$$b := 1$$

$$n := 4$$

-0.794654
-0.187592
0.187592
0.794654

$$\text{fintegral_simple}(a, b, n, t, f) := \left[\begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left[\begin{array}{l} x \leftarrow \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cdot t_i \\ F \leftarrow F + f(x) \end{array} \right. \\ I \leftarrow \frac{(b-a) \cdot F}{n} \\ I \end{array} \right.$$

$$\text{fintegral_simple}(a, b, n, t, f) = 0.32181$$

Якщо для збільшення точності ввести розбиття на рівновіддалені інтервали з кроком h , отримаємо:

```

h := 0.1
fintegral(a,b,n,t,h,f) :=
  I ← 0
  for a ∈ a, a + h .. (b - h)
    a1 ← a1 + h
    F ← 0
    for i ∈ 1..n
      x ←  $\frac{a + a1}{2} + \frac{h}{2} \cdot t_i$ 
      F ← F + f(x)
    I ← I +  $\frac{h \cdot F}{n}$ 
  I

```

`fintegral(a,b,n,t,h,f) = 0.32179`

Для обчислення задачі за методом Гаусса, необхідно додати відповідні коефіцієнти та ввести відповідні формули. Загальний принцип розрахунку залишається таким самим, як і в методі Чебишева.

2.2 Чисельне інтегрування функцій в прикладному програмному пакеті Maple

Maple – система комп’ютерної математики, розрахована на широке коло користувачів. До недавнього часу її називали системою комп’ютерної алгебри, що вказувало на особливе значення символьних обчислень і перетворень, які спроможна виконувати ця система. Однак нині вона спроможна виконувати швидко і ефективно не тільки символьні, але і числові розрахунки, поєднуючи це із засобами графічної візуалізації і підготовки електронних документів.

Maple – типова інтегрована система, як поєднує у собі:

- потужну мову програмування;
- редактор для підготовки і редагування документів і програм;
- сучасний багатовіконний інтерфейс користувача з можливістю роботи в діалоговому режимі;
- потужну довідкову систему з численними прикладами;
- ядро алгоритмів та правил перетворень математичних виразів;
- числовий і символьний процесори;
- систему діагностики;
- бібліотеки вбудованих і додаткових функцій;
- пакети функцій сторонніх виробників і підтримку деяких інших мов програмування та програм.

Основою для роботи із символічними перетвореннями в Maple є ядро системи. Воно підтримує сотні базових функцій та алгоритмів символічних перетворень. У нових реалізаціях обсяг ядра досягає 6÷7 Мбайт. Існує також основна бібліотека операторів, команд і функцій. Ряд вбудованих функцій, як і функції ядра, можуть використовуватись без будь-якого оголошення, інші мають потребу в ньому.

Обчислення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx,$$

зазвичай полягає в знаходженні первісної функції. Це одна із найпоширеніших операцій математичного аналізу.

Для обчислення невизначених і визначених інтегралів Maple надає такі функції:

int(f,x)	int(f,x=a..b)	int(f,x=a..b, continuous),
Int(f,x)	Int(f,x=a..b)	Int(f,x=a..b, continuous),

де **f** – підінтегральна функція;

x – змінна, за якою виконуються обчислення;

a і **b** – нижня і верхня межі інтегрування;

continuous – необов'язкові додаткові умови.

Maple намагається знайти аналітичне значення інтеграла із заданою підінтегральною функцією. Якщо це не вдається (наприклад, для інтегралів у закритій формі), то повертається вихідний запис інтеграла. Для обчислення визначеного інтеграла потрібно використовувати функцію **evalf(int(f,x=a..b))**.

Крім того, існує ряд пакетів (**packages**), які можна під'єднати.

Додаткові функції із пакетів можуть застосовуватись після оголошення під'єднання пакета за допомогою команди **with(name)**, де **name** – це ім'я під'єданого пакета.

Пакет **student** – найважливіший пакет для студентів та аспірантів. В ньому зібрані найпоширеніші і необхідні функції, які студенти зазвичай використовують на практичних заняттях, при підготовці курсових і дипломних проектів та робіт. Набір цих функцій, в основному, відноситься до математичного аналізу. Одночасно із студентами ці функції використовують професіонали-математики та науковці, що використовують математичні методи у своїй роботі. Розглянемо обчислення визначених інтегралів в середовищі пакета **student** за допомогою функцій:

leftbox – графічна ілюстрація інтегрування за методом лівих прямокутників;

rightbox – графічна ілюстрація інтегрування за методом правих прямокутників;

middlebox – графічна ілюстрація інтегрування за методом середніх (центральных) прямокутників;

simpson – числове наближення до інтеграла за методом Сімпсона;

trapezoid – числове наближення до інтеграла за методом трапеції.

Синтаксис:

leftbox(f(x), x=a..b, o) та **leftbox(f(x), x=a..b, n, 'shading'= <color>, o)**;

rightbox (f(x), x=a..b, o) та **rightbox (f(x), x=a..b, n, 'shading'= <color>, o)**;

middlebox (f(x), x=a..b, o) та **middlebox (f(x), x=a..b, n, 'shading'= <color>, o)**;

simpson (f(x), x=a..b) та **simpson (f(x), x=a..b, n)**;

trapezoid (f(x), x=a..b) та **trapezoid (f(x), x=a..b, n)**;

де **f(x)** – функція змінної **x**;

x – змінна інтегрування;

a – ліва межа області інтегрування;

b – права межа області інтегрування;

n – число показаних прямокутників;

color – колір прямокутників;

o – параметри.

leftsum – числове наближення до інтеграла лівими прямокутниками;

rightsum – числове наближення до інтеграла правими прямокутниками;

middlesum – числове наближення до інтеграла середніми (центральними) прямокутниками;

evalf – обчислення значення визначеного інтеграла [1, 12].

Розглянемо приклад розв’язання прикладних задач інтегрування чисельними методами в Maple.

Потрібно обчислити наближено значення інтеграла за формулами прямокутників та Сімпсона, розбивши відрізок інтегрування на $n = 10$ рівних частин.

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx .$$

Використовуючи функції **Int(f,x=a..b)** та **int(f,x=a..b)** обчислимо наведений вище інтеграл:

> **Int(f,x=0..1)=evalf(int(f,x=0..1));**

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = 0,3217935447 .$$

Графічна ілюстрація інтегрування (рис. 2.1) за методом лівих прямокутників та обчислення значення визначеного інтеграла.

```
> with(student): leftbox(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10, color=black, style=line,
'shading'=grey);
```

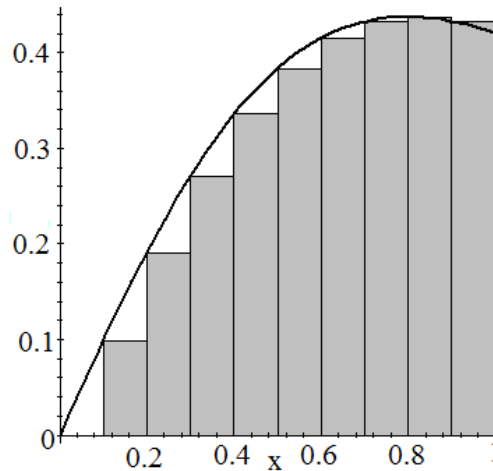


Рисунок 2.1 – Графічна ілюстрація інтегрування за методом лівих прямокутників

```
> with(student): leftsum(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10);
```

$$\frac{1}{10} \left(\sum_{i=0}^9 \frac{\sin\left(\frac{1}{10}i\right)}{\frac{1}{100}i^2 + 1} \right)$$

```
> evalf(1/10*Sum(sin(1/10.*i)/(1/100.*i^2+1.), i = 0 .. 9));
.2997967226
```

Графічна ілюстрація інтегрування (рис. 2.2) за методом правих прямокутників та обчислення значення визначеного інтеграла.

```
> with(student): rightbox(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10, color=black, style=line,
'shading'=grey);
```

```
> with(student): rightsum(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10);
```

$$\frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^{10} \frac{\sin\left(\frac{1}{10}i\right)}{\frac{1}{100}i^2 + 1} \right)$$

```
> evalf(1/10.*Sum(sin(1/10.*i)/(1/100.*i^2+1.), i = 1 .. 10));
.3418702718
```

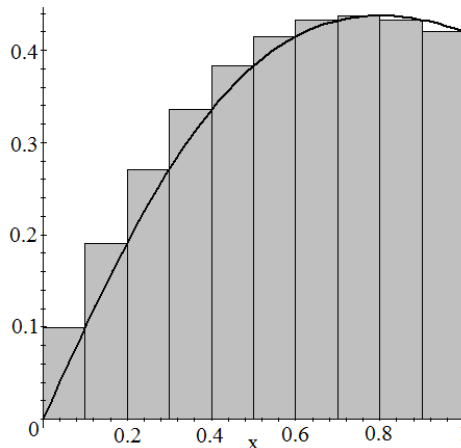


Рисунок 2.2 – Графічна ілюстрація інтегрування за методом правих прямокутників

Графічна ілюстрація інтегрування (рис. 2.3) за методом середніх (центральных) прямокутників та обчислення значення визначеного інтегралу.

```
> restart; with(student): middlebox(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10, color=black,
style=line, 'shading'=grey);
> with(student):middlesum(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10);
```

$$\frac{1}{10} \left(\sum_{i=0}^9 \frac{\sin\left(\frac{1}{10}i + \frac{1}{20}\right)}{\left(\frac{1}{10}i + \frac{1}{20}\right)^2 + 1} \right)$$

```
> evalf(1/10.*Sum(sin(1/10.*i+1/20.)/((1/10.*i+1/20.)^2+1.), i = 0 .. 9));
.3222740292
```

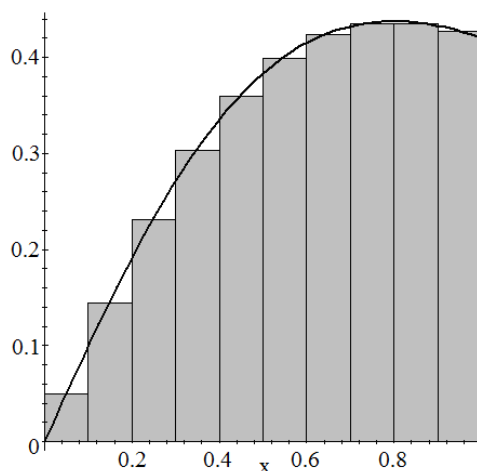


Рисунок 2.3 – Графічна ілюстрація інтегрування за методом центральних прямокутників

Обчислення визначеного інтеграла за допомогою функції trapezoid.

> restart; with(student): trapezoid(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10);

$$\frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^9 \frac{\sin\left(\frac{1}{10}i\right)}{\frac{1}{100}i^2 + 1} \right) + \frac{1}{40} \sin(1)$$

> evalf(1/10*Sum(sin(1/10*i)/(1/100*i^2+1), i = 1 .. 9)+1/40*sin(1));

.3208334972

Обчислення визначеного інтеграла за допомогою функції simpson.

> with(student): simpson(sin(x)/(x^2+1), x=0..1, 10);

$$\frac{1}{60} \sin(1) + \frac{2}{15} \left(\sum_{i=1}^5 \frac{\sin\left(\frac{1}{5}i - \frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{1}{5}i - \frac{1}{10}\right)^2 + 1} \right) + \frac{1}{15} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\sin\left(\frac{1}{5}i\right)}{\frac{1}{25}i^2 + 1} \right)$$

> evalf(1/60*sin(1)+2/15*Sum(sin(1/5*i-1/10)/((1/5*i-1/10)^2+1),
i=1.. 5)+1/15*Sum(sin(1/5*i)/(1/25*i^2+1), i = 1 .. 4));

.3217985324

СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

<i>Обчислювальна математика</i>	<i>Вычислительная математика</i>	<i>Computational Mathematics</i>
<i>Метод</i>	<i>Метод</i>	<i>Method</i>
<i>Чисельні методи</i>	<i>Численные методы</i>	<i>Numerical Methods</i>
<i>Формула</i>	<i>Формула</i>	<i>Formula</i>
<i>Обчислення</i>	<i>Вычисления</i>	<i>Calculation</i>
<i>Визначений інтеграл</i>	<i>Определенный интеграл</i>	<i>Definite integral</i>
<i>Проінтегрувати</i>	<i>Проинтегрировать</i>	<i>Integrate</i>
<i>Диференціальне рівняння</i>	<i>Дифференциальное уравнение</i>	<i>Differential equations</i>
<i>Підінтегральна функція</i>	<i>Подынтегральная функция</i>	<i>Integrand</i>
<i>Похибка інтегрування</i>	<i>Погрешность интегрирования</i>	<i>Integration accuracy</i>
<i>Інтеграл</i>	<i>Интеграл</i>	<i>Integral</i>
<i>Вузли інтерполяції</i>	<i>Узлы интерполяции</i>	<i>Units interpolation</i>
<i>Коефіцієнти</i>	<i>Коэффициенты</i>	<i>Odds</i>
<i>Залишковий член</i>	<i>Остаточный член</i>	<i>Remainder</i>
<i>Похибка</i>	<i>Погрешность</i>	<i>Accuracy(точность) Error</i>
<i>Похибка квадратурної формули</i>	<i>Погрешность квадратурной формулы</i>	<i>Error of quadrature formula</i>
<i>Абсолютна похибка</i>	<i>Абсолютная погрешность</i>	<i>Absolute error</i>
<i>Інтерполяційний многочлен (Лагранжа)</i>	<i>Интерполяционный многочлен (Лагранжа)</i>	<i>Interpolation polynomial (Lagrange)</i>
<i>Рівність</i>	<i>Равенство</i>	<i>Equality</i>
<i>Інтерполювання функції</i>	<i>Интерполирование функции</i>	<i>Function Interpolation</i>
<i>Відрізок</i>	<i>Отрезок</i>	<i>Segment</i>
<i>Значення</i>	<i>Значение</i>	<i>Values</i>

<i>Межі інтегрування</i>	<i>Пределы интегрирования</i>	<i>Integrational limits</i>
<i>Проміжок</i>	<i>Промежуток</i>	<i>Interval</i>
<i>Проміжок інтегрування</i>	<i>Промежуток интегрирования</i>	<i>Integration interval</i>
<i>Складені формули</i>	<i>Составленные формулы</i>	<i>Compound of formula</i>
<i>Площа</i>	<i>Площадь</i>	<i>Area</i>
<i>Вираз</i>	<i>Выражение</i>	<i>Expression</i>
<i>Загальна похибка</i>	<i>Общая погрешность</i>	<i>General error</i>
<i>Оцінка похибки</i>	<i>Оценка погрешности</i>	<i>Estimation of errors</i>
<i>Порядок точності</i>	<i>Порядок точности</i>	<i>Order of accuracy</i>
<i>Геометрична інтерпретація</i>	<i>Геометрическая интерпретация</i>	<i>Geometrical interpretation</i>
<i>Оцінка залишкового члена</i>	<i>Оценка остаточного члена</i>	<i>Evaluation remainder term</i>
<i>Схема алгоритму</i>	<i>Схема алгоритма</i>	<i>Scheme of the algorithm</i>
<i>Лістинг програми</i>	<i>Листинг программы</i>	<i>Listing of Program</i>
<i>Результат</i>	<i>Результат</i>	<i>Result</i>
<i>Перетворення</i>	<i>Преобразование</i>	<i>Convert</i>
<i>Сума похибок</i>	<i>Сумма погрешностей</i>	<i>Sum of errors</i>
<i>Уточнення</i>	<i>Уточнение</i>	<i>Refinement</i>
<i>Вузли</i>	<i>Узлы</i>	<i>Units</i>
<i>Наближене значення інтеграла</i>	<i>Приближенное значение интеграла</i>	<i>Integral approximate value</i>
<i>Вигляд</i>	<i>Вид</i>	<i>View</i>
<i>Квадратурна формула</i>	<i>Квадратурная формула</i>	<i>Quadrature formula</i>
<i>Похибка квадратурної формули</i>	<i>Погрешность квадратурной формулы</i>	<i>Error of quadrature formula</i>
<i>Формула лівих прямокутників</i>	<i>Формула левых прямоугольников</i>	<i>Left rectangles formula</i>
<i>Формула правих прямокутників</i>	<i>Формула правых прямоугольников</i>	<i>Right rectangles formula</i>
<i>Формула трапецій</i>	<i>Формула трапеций</i>	<i>Trapezoids formula</i>

<i>Формула Сімпсона</i>	<i>Формула Симпсона</i>	<i>Simpson's formula</i>
<i>Точність обчислення</i>	<i>Точность вычисления</i>	<i>Approximation accuracy</i>
<i>Вибір кроку інтегрування</i>	<i>Выбор шага интегрирования</i>	<i>Choice of integration step</i>
<i>Точність квадратурної формули</i>	<i>Точность квадратурной формулы</i>	<i>Accuracy of the quadrature formula</i>
<i>Крок</i>	<i>Шаг</i>	<i>Step</i>
<i>Крок інтегрування</i>	<i>Шаг интегрирования</i>	<i>Integration step</i>
<i>Похибка округлень</i>	<i>Погрешность округления</i>	<i>Rounding error</i>
<i>Максимальне значення</i>	<i>Максимальное значение</i>	<i>Peak value</i>
<i>Аналітичний вираз</i>	<i>Аналитическое выражение</i>	<i>Analytical form</i>
<i>Метод подвійного перерахування</i>	<i>Метод двойного перечисления</i>	<i>Double transfer method</i>
<i>Процес послідовного збільшення</i>	<i>Процесс последовательного увеличения</i>	<i>Process of sequential increase</i>
<i>Екстраполяція</i>	<i>Экстраполяция</i>	<i>Extrapolation</i>
<i>Похибка формули</i>	<i>Погрешность формулы</i>	<i>Formula error</i>
<i>Система</i>	<i>Система</i>	<i>System</i>
<i>Поліном</i>	<i>Полином</i>	<i>Polynomial</i>
<i>Співвідношення</i>	<i>Соотношение</i>	<i>Proportion</i>

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алексеев Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCAD 12, MATLAB 7, Maple 9 / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. – М. : НТ Пресс, 2006. – 496 с.
2. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров : учебное пособие / Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. – М. : Высшая школа, 1994. – 544 с.
3. Амосов А. А. Вычислительные методы : учебное пособие / Амосов А. А. – М. : МЭИ, 2008. – 672 с.
4. Бахвалов Н. С. Численные методы : учебное пособие / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Т. М. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
5. Боглаев Ю. П. Вычислительная математика и программирование : учебное пособие для студентов вузов / Боглаев Ю. П. – М. : Высшая школа, 1990. – 544 с.
6. Брановицька С. В. Обчислювальна математика та програмування : підручник / Брановицька С. В., Медведєв Р. Б., Фіалков Ю. Я. – К. : ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2004. – 220 с.
7. Вержбицкий В. М. Основы численных методов : учебник для вузов / Вержбицкий В. М. – М. : Высшая школа, 2002. – 840 с.
8. Волков Е. А. Численные методы : учебное пособие для вузов / Волков Е. А. – М. : Наука, 1987. – 248 с.
9. Воробьева Г. Н. Практикум по вычислительной математики : учебное пособие для техникумов / Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. – М. : Высшая школа, 1990. – 208 с.
10. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 644 с.
11. Математичний аналіз у задачах і прикладах / [Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та інш.]. – К. : Вища школа, 2003. – Ч.1. – 462 с.
12. Дьяконов В. Maple 7 : учебный курс / Дьяконов В. – СПб. : Питер, 2002. – 672 с.
13. Калиткин Н. Н. Численные методы / Калиткин Н. Н. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
14. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1 : навчальний посібник / [Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та інш.]; за заг. ред. Р. Н. Кветного. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 191 с.
15. Колесницький О. К. Чисельні методи : навчальний посібник / Колесницький О. К., Арсенюк І. Р., Месюра В. І. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 130 с.
16. Копченова Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учебное пособие / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Лань, 2008. – 368 с.

17. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 263 с.
18. Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах: учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – М. : Высшая школа, 2006. – 480 с.
19. Лященко М. Я. Чисельні методи : підручник / М. Я. Лященко, М. С. Головань. – К : Либідь, 1996.– 288 с.
20. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Марчук Г. И. – М. : Наука, 1989. – 608 с.
21. Охорзин В. А. Компьютерное моделирование в системе MathCAD / Охорзин В. А. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 144 с.
22. Охорзин В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD : учебное пособие / Охорзин В. А. – СПб. : Лань, 2009. – 352 с.
23. Самарский А. А. Численные методы : учебное пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
24. Турчак Л. И. Основы численных методов : учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М. : Физматлит, 2005. – 304 с.
25. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці / Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А.. – К. : Видавнича група ВНУ, 2006. – 480 с.
26. Франка П. С. С++ : учебный курс / Франка П. С. – СПб. : Питер, 2000. – 528 с.
27. Шахов Ю. Н. Численные методы : учебное пособие / Ю. Н. Шахов, Е. И. Деза. – М. : Книжный дом «Либроком», 2012. – 248 с.

Навчальне видання

**Крилик Людмила Вікторівна
Богач Ілона Віталіївна
Лісовенко Анна Ігорівна**

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ
Чисельне інтегрування функцій

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *Л. Крилик*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку 14.03.2019 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк 4,44.
Наклад 50 (1–21) пр. Зам. № 2019-039.

Видавець та виготовлювач
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.