

В. Г. Мадьяров

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

Частина 2

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. Г. Мадьяров

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Частина 2

Конспект лекцій

Вінниця
ВНТУ
2018

УДК 621.3(075)

М30

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 15 від 25.05.2017 р.)

Рецензенти:

А. Я. Кулик, доктор технічних наук, професор

В. М. Кутін, доктор технічних наук, професор

Л. Б. Терешкевич, кандидат технічних наук, доцент

Мадьяров, В. Г.

М30 Теоретичні основи електротехніки. Частина 2 : конспект лекцій / Мадьяров В. Г. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 142 с.

В конспекті лекцій розглянуті питання перехідних процесів в лінійних колах та методи їх розрахунку, синтезу лінійних кіл, усталених і перехідних процесів в нелінійних колах, а також питання усталених і перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами. В кінці кожного розділу наведені задачі та питання для кращого засвоєння матеріалу та самоперевірки.

УДК 621.3(075)

ЗМІСТ

Вступ.....	5
1 Перехідні процеси в лінійних електричних колах.....	6
1.1 Перехідні процеси в електричних колах, причини виникання. Закони комутації.....	6
1.2 Класичний метод розрахунку перехідних процесів. Вільна та примусова складові розв'язку.....	7
1.3 Початкові умови та їх знаходження.....	8
1.4 Вмикання кола R, L на постійну напругу.....	8
1.5 Вмикання кола R, C на постійну напругу.....	11
1.6 Відключення котушки R, L від джерела постійної напруги.....	14
1.7 Вмикання кола R, L на синусоїдну напругу.....	15
1.8 Перехідні процеси в розгалужених колах першого порядку.....	18
1.9 Вмикання послідовно з'єднаних елементів r, L, C , до джерела постійної напруги.....	23
1.10 Розрахунок перехідних процесів класичним методом в складних розгалужених колах.....	29
1.11 Складання характеристичних рівнянь.....	34
2 Операторний метод розрахунку перехідних процесів.....	41
2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа і зображення найпростіших функцій.....	41
2.2 Закон Ома і Кірхгофа в операторній формі.....	45
2.3 Операторні схеми.....	49
2.4 Перехід від зображення до оригіналу.....	50
3 Частотний метод розрахунку перехідних процесів.....	53
3.1 Спектри аперіодичних функцій.....	53
3.2 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів.....	56
3.3 Наближені способи при розрахунку перехідних процесів частотним методом.....	56
4 Перехідні процеси при довільних діях.....	62
4.1 Одиначна функція і перехідна характеристика.....	62
4.2 Використання перехідних характеристик для розрахунку перехідних процесів.....	66
4.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних діях.....	67
4.4 Імпульсна функція та імпульсна характеристика кола.....	71
4.5 Розрахунок перехідних процесів при довільних діях з використанням імпульсної функції.....	73

5 Нелінійні електричні кола	75
5.1 Загальна характеристика нелінійних елементів і нелінійних електричних кіл	75
5.2 Розрахунок електричних кіл постійного струму з нелінійними резисторами.....	80
5.3 Деякі використання нелінійних кіл постійного струму	87
5.4 Загальна характеристика магнітних кіл.....	90
5.5 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму	91
5.6 Розгалужене магнітне коло постійного струму	95
5.7 Електричні кола змінного струму з нелінійними резисторами.....	97
5.8 Метод еквівалентних синусоїд	98
5.9 Котушка з феромагнітним осердям.....	99
5.10 Ферорезонанси	104
5.11 Трансформатор з феромагнітним осердям	106
6 Перехідні процеси в нелінійних електричних колах	110
6.1 Метод умовної лінеаризації	110
6.2 Метод кусково-лінійної апроксимації	111
7 Електричні кола з розподіленими параметрами	114
7.1 Диференціальні рівняння однорідної лінії	114
7.2 Розв'язок телеграфних рівнянь в усталеному режимі при синусоїдній напрузі.....	115
7.3 Падаючі і відбиті хвилі.....	117
7.4 Відбивання в довгих лініях	121
7.5 Рівняння довгої лінії через гіперболічні функції.....	122
7.6 Лінія без спотворень	123
7.7 Лінія без втрат на холостому ходу	124
7.8 Лінія без втрат при короткому замиканні	128
7.9 Перехідні процеси в довгих лініях	131
7.10 Вмикання довгої лінії на постійну напругу	132
7.11 Вмикання лінії на постійну напругу при холостому ходу.....	134
7.12 Вмикання лінії на постійну напругу при індуктивному навантаженні	136
7.13 Заломлення хвиль в місці спряження двох ліній.....	138
Література	141

ВСТУП

У зв'язку зі збільшенням обсягу самостійної роботи та скороченням лекційних занять при вивченні різних дисциплін виникла необхідність у виданні методичних вказівок і посібників, які допомогли б студентам самостійно вивчати матеріал.

Орієнтування на самостійне вивчення значно змінює методику читання лекцій. Лекції набувають, в основному, настановного характеру, наголос робиться на поясненні складних для розуміння місць, даються рекомендації для методичного вивчення тих або інших розділів тощо. Такий характер читання передбачає обов'язкове попереднє знайомство з матеріалом наступних лекцій.

При вивченні курсу головна увага повинна приділятися розумінню матеріалу, а не запам'ятовуванню, хоча окремі формулювання та формули потрібно знати напам'ять.

При вивченні курсу бажано користуватися кількома підручниками або навчальними посібниками різних авторів, щоб зіставляти (порівнювати) різні докази, роздуми і давати їм свою оцінку.

Вивчення курсу «Теоретичні основи електротехніки» потребує знання фізики і особливо математики, передусім розділів:

- системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- похідна і інтеграл;
- диференціальні рівняння;
- функціональні ряди;
- інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є;
- рівняння математичної фізики;

Теоретичні положення курсу засвоюються ґрунтовно тільки тоді, коли вони використані для вирішення конкретних задач. З цією метою в курсі лекцій наведені розв'язані приклади, а також контрольні питання і задачі.

Конспект лекцій написаний за матеріалом другого семестру вивчення курсу теоретичних основ електротехніки студентами електротехнічного профілю і є продовженням відповідного конспекта лекцій «Теоретичні основи електротехніки. Ч 1» цих же авторів.

Він складається з восьми розділів, в яких розглянуті перехідні процеси в лінійних і нелінійних колах, методи розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму, електричні кола з розподіленими параметрами.

При викладенні окремих питань особлива увага зверталася на застосування їх до аналізу прикладних задач. В кінці розділів наводяться приклади та контрольні питання, які допомагають закріпленню матеріалу, що вивчається.

1 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

1.1 Перехідні процеси в електричних колах, причини виникання. Закони комутації

Електричне коло, до складу якого входять реактивні елементи (ємності та індуктивності), в усталеному режимі має деяку енергію, яка накопичена в електричному і магнітному полях. Величина цієї енергії визначається виразами:

$$\text{в електричному полі ємності} \quad W_e = \frac{Cu^2}{2}, \quad (1.1)$$

$$\text{в магнітному полі індуктивності} \quad W_m = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.2)$$

При зміні одного усталеного режиму іншим, під впливом будь-яких перемикань, змінюється кількість цієї енергії. Оскільки енергія не може змінитися миттєво, то і зміна одного усталеного режиму іншим проходить також протягом деякого часу. Процес переходу від одного усталеного стану кола до іншого називається *перехідним процесом*. Таким чином, основною причиною виникнення перехідного процесу є зміна енергетичного стану кола.

Будь-яку зміну параметрів кола або зовнішніх дій звичайно називають *комутацією*, в розрахунках приймають, що будь-яка комутація відбувається миттєво. Комутацію будемо зображати за допомогою ключа (замикального чи розмикального).

Оскільки енергія електричного та магнітного полів не може змінитися миттєво, то при постійному значенні L та C не можуть змінитися миттєво струм в індуктивності та напруга на ємності. Звідси отримуємо два закони комутації.

Перший закон комутації: струм через індуктивність в перший момент після комутації залишається таким же, яким він був безпосередньо перед комутацією.

Якщо перший момент часу після комутації будемо позначати $t=0+$, а час безпосередньо перед комутацією через $t=0-$, то перший закон комутації записується

$$i_{L(0+)} = i_{L(0-)} . \quad (1.3)$$

Аналогічно формулюється *другий закон комутації*.

Напруга на ємності в перший момент після комутації дорівнює напрузі на ємності безпосередньо перед комутацією.

$$u_{C(0+)} = u_{C(0-)} . \quad (1.4)$$

Практична тривалість перехідних процесів залежить від параметрів кола і в багатьох випадках складає частки секунди. Проте під час перехідних процесів на окремих елементах кола можуть виникати великі напруги або протікати великі струми.

1.2 Класичний метод розрахунку перехідних процесів. Вільна та примусова складові розв'язку

Класичний метод розрахунку перехідних процесів являє собою розв'язання системи диференціальних рівнянь, що складені за законами Кірхгофа для післякомутаційної схеми. Розглянемо це на прикладі вмикання R, L, C кола на деяку напругу $u(t)$ (рис. 1.1).

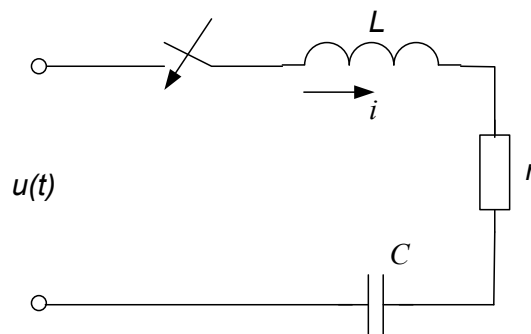


Рисунок 1.1

За другим законом Кірхгофа маємо:

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = u(t) . \quad (1.5)$$

Взявши похідну від цього виразу за часом t , отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно струму i .

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d}{dt} u(t) . \quad (1.6)$$

Лінійне тому, що коефіцієнти в рівнянні сталі; порядок рівняння визначається порядком старшої похідної (друга); неоднорідне тому, що права частина рівняння не дорівнює нулю.

З математики відомо, що розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння складається з суми двох розв'язків: загального та частинного. Загальний розв'язок – це розв'язок однорідного рівняння. В

електротехніці його називають вільною складовою (струму або напруги), оскільки при нульовій правій частині рівняння вона не залежить від дії на вході кола. Її звичайно записують у вигляді:

$$i_e = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (1.7)$$

де n – порядок диференціального рівняння; A_k – сталі інтегрування, що знаходяться з початкових умов; p_k – корені характеристичного рівняння.

Характеристичне рівняння складається з однорідного шляхом заміни відповідної похідної $\frac{d^k i}{dt^k}$ на p^k (сама величина i міняється на $p^0=1$). Так, для рівняння (1.6) маємо: $Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$.

Оскільки рівняння квадратне і має два корені p_1 та p_2 , то вільну складову запишемо у вигляді:

$$i_e = A_1 e^{p_1 t} + A_{12} e^{p_2 t}. \quad (1.8)$$

За частинний розв'язок в математиці беруть будь-який розв'язок, що задовольняє рівняння та початкові умови. В електротехніці цей розв'язок називають примусовою складовою та приймають за нього новий усталений режим роботи кола. Він виникає в колі під дією вхідної напруги $u(t)$ та знаходиться шляхом розрахунку нового усталеного режиму роботи кола.

1.3 Початкові умови та їх знаходження

Початковими умовами (ПУ) називаються значення струмів, напруг, похідних та інтегралів від них в першу мить після комутації. Початкові умови розділяють на два види: незалежні (НПУ) та залежні (ЗПУ).

До НПУ відносять значення струму в індуктивності та напруги на ємності в першу мить після комутації, які, за законами комутації, знаходяться з розрахунку докомутаційної схеми.

До ЗПУ відносять всі інші ПУ, крім незалежних. ЗПУ знаходять з системи диференціальних рівнянь, що складені за законами Кірхгофа для післякомутаційної схеми, шляхом підстановки в неї НПУ, тобто для моменту часу $t=0-$.

Приклади розрахунку НПУ та ЗПУ будемо розглядати в процесі розв'язання конкретних прикладів.

1.4 Вмикання кола R, L на постійну напругу

Розглянемо розрахунок перехідного процесу на прикладі (рис. 1.2).

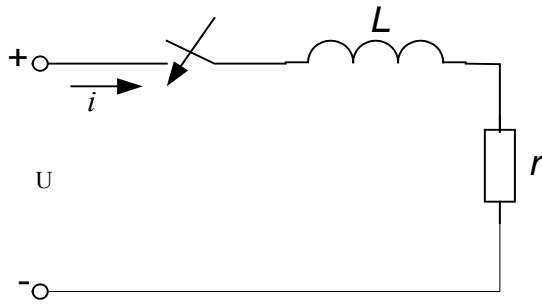


Рисунок 1.2

При замиканні ключа в колі виникає перехідний процес, оскільки коло переходить із одного усталеного режиму в інший. Під час перехідного процесу струми i і напруги в колі змінюються залежно від часу, тому, складаючи рівняння, яке описує процес в колі, використаємо другий закон Кірхгофа з урахуванням компонентних співвідношень.

$$L \frac{di}{dt} + ri = U. \quad (1.9)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох складових – вільної та примусової.

Таким чином

$$i = i_{np} + i_{\vartheta}. \quad (1.10)$$

Для визначення i_{ϑ} однорідне рівняння (1.10) має вигляд:

$$L \frac{di_{\vartheta}}{dt} + ri_{\vartheta} = 0.$$

Його розв'язок

$$i_{\vartheta} = Ae^{pt}, \quad (1.11)$$

де p – корінь характеристичного рівняння

$$Lp + r = 0, \quad p = -\frac{r}{L}, \quad (1.12)$$

A – постійна інтегрування.

Оскільки права частина рівняння (1.9) постійна величина, то примусова складова теж постійна.

$$i_{np} = I. \quad (1.13)$$

Підставляючи (1.13) в (1.9), одержуємо

$$L \frac{dI}{dt} + rI = U,$$

або $rI = U$, тому що в новому усталеному режимі $\frac{dI}{dt} = 0$. Звідси

$$i_{np} = I = \frac{U}{r}. \quad (1.14)$$

Неважко бачити, що примусова складова – це струм в новому усталеному режимі. Тому звичайно числові значення цієї складової і визначаються з розрахунку нового усталеного режиму.

Повний розв'язок рівняння (1.9) має вигляд

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (1.15)$$

Для визначення постійної інтегрування використаємо початкові умови. Знайдемо значення струму в момент часу $t=0+$, використавши перший закон комутації. До комутації струму в колі не було $i_{L(0-)}=0$ (ключ розімкнутий), а згідно з першим законом комутації

$$i_{L(0-)}=i_{L(0+)}=0. \quad (1.16)$$

Підставляючи (1.16) в (1.15) одержуємо:

$$0 = A + \frac{U}{r} \Rightarrow A = -\frac{U}{r}. \quad (1.17)$$

Таким чином

$$i = -\frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{U}{r}, \quad \text{або} \quad i = \frac{U}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t}). \quad (1.18)$$

Графіки зміни струму через індуктивність показані на рис. 1.3.

Примусова складова на графіку має вигляд прямої лінії, а вільна складова – експоненти. Повний розв’язок теж являє собою експоненту, яка починається з нуля і асимптотично наближається до усталеного значення.

Коефіцієнт при t в показнику експоненти має розмірність $1/\text{с}$, тому обернена величина має розмірність часу, позначається буквою τ і називається *постійною часу*.

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r} . \quad (1.19)$$

Постійна часу залежить від параметрів кола і характеризує тривалість протікання перехідного процесу.

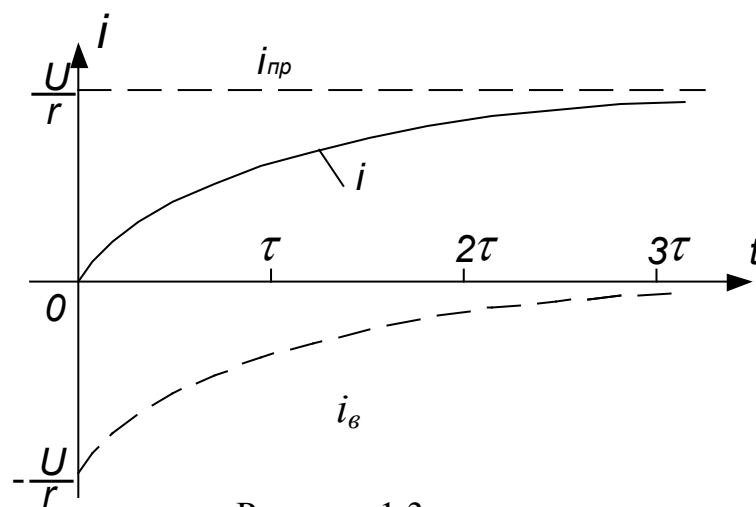


Рисунок 1.3

Не дивлячись на те, що теоретично перехідний процес триває нескінченно довго (тільки при $t \rightarrow \infty$ вільна складова наближається до нуля), можна вважати, що перехідний процес практично закінчується, коли вільна складова стає меншою 1% від усталеного значення. Тому практично тривалість перехідного процесу приймають

$$t_{n.np.} = (4 \div 5)\tau. \quad (1.20)$$

Якщо $L = 0,5$ Гн, $r = 10$ Ом, то $\tau = 0,5/10 = 0,05$ с і $t_{n.np.} = 0,2 \div 0,25$ с.

1.5 Вмикання кола R, C на постійну напругу

Складемо рівняння для кола з послідовно з'єднаними r і C при вмиканні на постійну напругу (рис. 1.4).

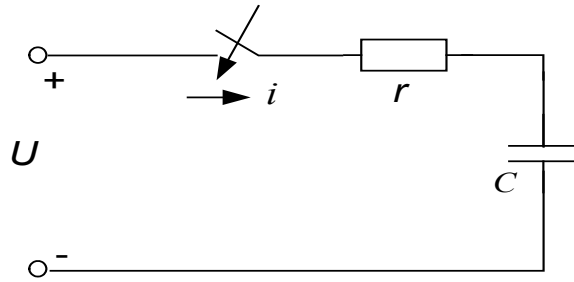


Рисунок 1.4

$$ri + u_c = U . \quad (1.21)$$

Оскільки

$$i = C \frac{du_c}{dt} , \quad (1.22)$$

то (1.21) запишемо в вигляді

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c = U , \quad (1.23)$$

Повний розв'язок рівняння (1.23)

$$u_c = u_{c.np} + u_{c\vartheta} .$$

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо

$$u_{c.np} = U .$$

Вільна складова розв'язку диференціального рівняння першого порядку

$$u_{c\vartheta} = Ae^{pt} .$$

Характеристичне рівняння

$$rCp + 1 = 0 . \quad (1.24)$$

Звідси

$$p = -\frac{1}{rC} , \quad \tau = \frac{1}{|p|} = rC . \quad (1.25)$$

Повний розв'язок

$$u_c = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.26)$$

Постійну інтегрування A знаходимо, використовуючи початкові умови. Відповідно до закону комутації

$$u_{c(0-)} = u_{c(0+)},$$

тому $u_{c(0-)} = U + A$ і $A = u_{c(0-)} - U.$ (1.27)

Якщо до комутації конденсатор не був заряджений, то

$$u_{c(0-)} = 0 \quad \text{і} \quad A = -U. \quad (1.28)$$

Остаточний повний розв'язок

$$u_c = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1.29)$$

Для визначення закону зміни струму використаємо співвідношення (1.22):

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.30)$$

Графіки зміни струму і напруги на ємності мають вигляд, показаний на рис. 1.5.

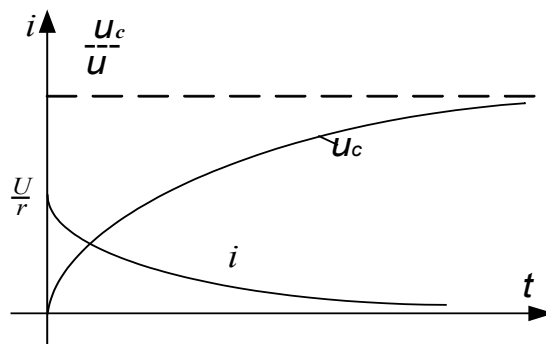


Рисунок 1.5

Із графіків видно, що u_c в момент комутації нерозривна лінія, а i змінюється стрибком від нуля до величини U/r .

В наведених прикладах початкові значення i_L і u_c дорівнювали нулю. Такі початкові значення називають нульовими. Розглянемо випадок, коли початкові умови ненульові.

1.6 Відключення котушки R, L від джерела постійної напруги

В наведеному колі (рис. 1.6) до комутації струм через вольтметр протікав від точки a до точки b і дорівнював $i_0 = \frac{U}{r_0}$.

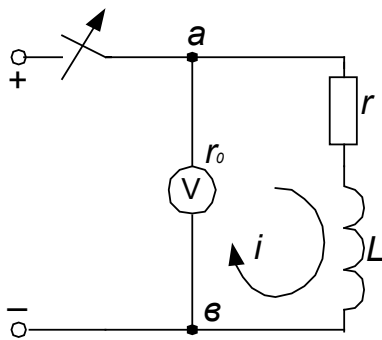


Рисунок 1.6

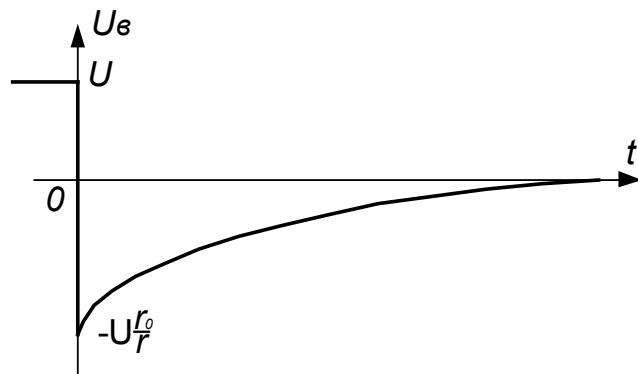


Рисунок 1.7

Напруга на вольтметрі дорівнювала прикладеній напрузі

$$U_{a(0-)} = U. \quad (1.31)$$

Струм у вітці з котушкою до комутації протікав також від точки a до точки b і визначався з виразу

$$i(0-) = \frac{U}{r}. \quad (1.32)$$

Після комутації струм протікає через контур, який складається з послідовно з'єднаних r, L, r_0 , а рівняння, яке описує процеси в цьому контурі, має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + (r + r_0) \cdot i = 0. \quad (1.33)$$

Повний розв'язок цього рівняння складається тільки з вільної складової, тому що диференціальне рівняння є однорідним (права частина дорівнює нулю), і струм в новому усталеному режимі відсутній. Тому

$$i_{np} = 0, \quad i = i_{\beta} = Ae^{pt}. \quad (1.34)$$

Характеристичне рівняння $Lp + r + r_0 = 0$,

звідси
$$p = -\frac{r+r_0}{L}; \quad \tau = \frac{L}{r+r_0}. \quad (1.35)$$

Постійна інтегрування визначається за допомогою початкових умов

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)} = \frac{U}{r}, \quad \text{звідки} \quad A = \frac{U}{r},$$

і повний розв'язок

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.36)$$

Знайдемо як змінюється напруга на вольтметрі. Оскільки після комутації струм через вольтметр направлений від точки b до точки a , то

$$u_{\beta} = -ir_0 = -U \frac{r_0}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.37)$$

Якщо r_0 більше r , то в перший момент після комутації напруга на вольтметрі може значно перевищувати прикладену напругу і до того ж направлена в протилежну сторону, що може призвести до пошкодження прилада. Графік зміни напруги на вольтметрі показаний на рис. 1.7.

1.7 Вмикання кола R, L на синусоїдну напругу

Розглянемо послідовне з'єднання елементів r, L (див. рис. 1.2) при вмиканні кола на синусоїдну напругу

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.38)$$

В рівнянні (1.9) ліва частина залишається без змін, а права частина буде синусоїдною функцією

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.39)$$

Повний розв'язок – сума примусової та вільної складових

$$i = i_{np} + i_{\vartheta}.$$

Примусова складова визначається з розрахунку нового усталеного режиму. В усталеному режимі струм також синусоїдний

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \beta + \varphi), \quad (1.40)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}.$$

Вільна складова як розв'язок однорідного рівняння має такий же вигляд, як і (1.11)

$$i_{\vartheta} = Ae^{pt}, \quad \text{де} \quad p = -\frac{r}{L}.$$

Повний розв'язок

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.41)$$

Оскільки початкові умови нульові (струму до комутації в колі не було)

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)} = 0, \quad \text{то} \quad i = I_m \sin(\beta - \varphi) + A \quad \text{і} \quad A = -I_m \sin(\beta - \varphi).$$

$$\text{Остаточно} \quad i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) - I_m \sin(\beta - \varphi) Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.42)$$

Розглянемо графік зміни струму в колі (рис. 1.8) з великою постійною часу $\tau \gg T$.

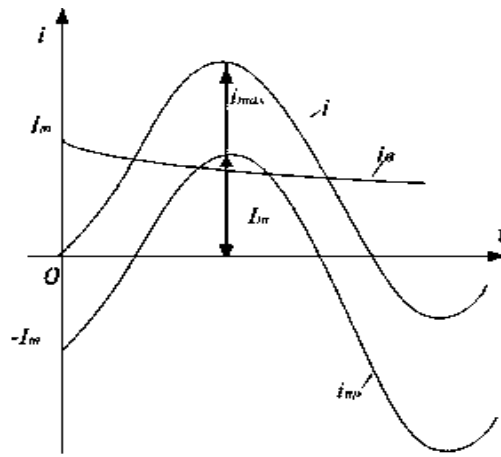


Рисунок 1.8

Якщо коло вмикається в момент, коли примусова складова $i_{\text{пр}} = -I_m$ (як показано на рис. 1.8), то максимальне значення струму в перехідному режимі i_{max} може бути більше амплітуди струму в усталеному режимі майже в 2 рази.

Таким чином, якщо при вмиканні кола r, L на постійну напругу перехідний струм не перебільшує усталеного значення (див. рис. 1.3), то при вмиканні того ж кола на синусоїдну напругу перехідний струм може бути більшим усталеного значення.

Розглянемо вплив моменту вмикання на характер перехідного процесу при синусоїдному впливі. Нехай комутація відбувається в момент, показаний на рис. 1.9, коли $i_{\text{пр}}$ близький до нуля. В цьому випадку вільна складова в момент $t=0$: $i_{\text{с}(0+)} = -i_{\text{пр}(0+)}$ також близька до нуля і перехідний струм мало відрізняється від усталеного.

Якщо ключ замикається в момент, коли примусова складова струму проходить через нуль, то вільна складова також дорівнює нулю, тому що $i_{\text{с}(0+)} = -i_{\text{пр}(0+)} = 0$ і в колі зразу ж настає новий усталений режим.

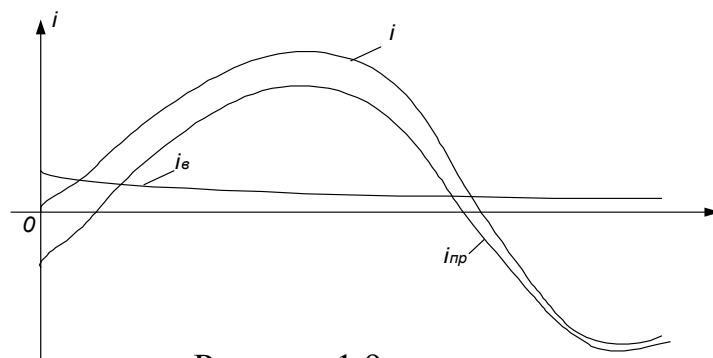


Рисунок 1.9

Отже, при вмиканні кола на синусоїдну напругу характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання кола. Найбільш сприятливий

момент вмикання, коли примусова складова проходить через нуль, найбільш несприятливий момент вмикання, коли примусовий струм приймає максимальне значення.

1.8 Перехідні процеси в розгалужених колах першого порядку

Наведені вище приклади дозволяють сформулювати суть класичного методу розрахунку – складання диференціального рівняння відносно шуканої величини і його розв’язання з урахуванням початкових умов. Якщо коло розгалужене (рис. 1.10), то спочатку складається за законами Кірхгофа система диференціальних рівнянь

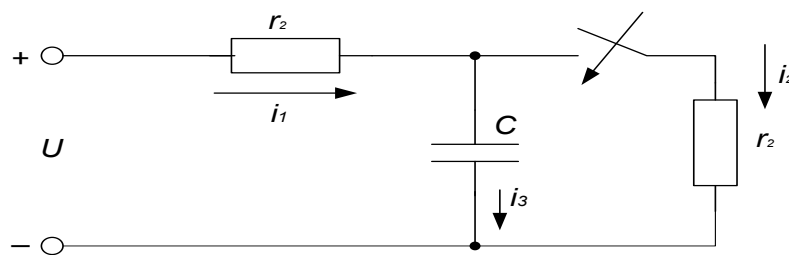


Рисунок 1.10

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + u_c &= U, \\ u_c - r_2 i_2 &= 0, \\ i_1 &= i_2 + i_3, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Із цієї системи будемо складати одне диференціальне рівняння відносно невідомої напруги u_c , оскільки для неї існує другий закон комутації. Для цього виразимо інші невідомі через u_c відповідно з першого, другого і четвертого рівнянь системи

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{U - u_c}{r_1}, \\ i_2 &= \frac{u_c}{r_2}, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Підставимо одержані значення i_1, i_2, i_3 в третє рівняння системи (1.43)

$$\frac{U - u_c}{r_1} = \frac{u_c}{r_2} + C \frac{du_c}{dt}.$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$Cr_1r_2 \frac{du_c}{dt} + u_c(r_1 + r_2) = Ur_2. \quad (1.45)$$

Розв'язок рівняння (1.44) складається з сукупності примусової і вільної складових

$$u_c = u_{cnp} + u_{cv}.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо примусову складову

$$u_{cnp} = \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot r_2. \quad (1.46)$$

Оскільки одержане диференціальне рівняння є рівнянням першого порядку, то

$$u_{cv} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$p \cdot Cr_1r_2 + (r_1 + r_2) = 0.$$

і його корінь

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}.$$

Повний розв'язок рівняння

$$u_c = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + A \cdot e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}t}. \quad (1.47)$$

Постійну інтегрування визначають за допомогою початкових умов. До замикання ключа струму в колі не було ($i_{(0-)}=0$), тому що до кола

прикладена постійна напруга і коло складається з послідовно з'єднаних елементів r_1 і C .

За другим законом Кірхгофа

$$r_1 i_{1(0-)} + u_{c(0-)} = U \quad (1.48)$$

і

$$u_{c(0-)} = U.$$

Відповідно до другого закону комутації

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = U.$$

Підставляючи (1.48) в (1.47), одержуємо

$$U = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + A.$$

Звідси $A = \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot r_1.$

і остаточно
$$u_c = \frac{U}{r_1 + r_2} r_2 + \frac{U}{r_1 + r_2} r_1 \cdot e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}. \quad (1.49)$$

Співвідношення (1.44) дозволяють знайти струм.

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{U - u_c}{r_1} = \frac{U}{r_1 + r_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}, \\ i_2 &= \frac{u_c}{r_2} = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt} = -\frac{U}{r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

В цьому прикладі перед тим, як визначити струми, був знайдений закон зміни напруги на ємності. Проте часто необхідно знати тільки один струм. В цьому випадку визначення напруги на ємності стає зайвим, тому потрібно спробувати визначити зразу шуканий струм.

Нехай потрібно знайти струм i_1 , не визначаючи напругу u_c . Виразимо з системи (1.43) всі невідомі через i_1 . Із першого рівняння системи

$$u_c = U - r_1 i_1.$$

Із другого рівняння

$$i_2 = \frac{U}{r_2} - i_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Із четвертого рівняння

$$i_3 = -Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Підставимо одержані значення в третє рівняння

$$i_1 = \frac{U}{r_2} - i_1 \frac{r_1}{r_2} - Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Після перетворень отримуємо рівняння:

$$Cr_1 r_2 \frac{di_1}{dt} + (r_1 + r_2) i_1 = U. \quad (1.51)$$

Повний розв'язок якого

$$i_1 = i_{1np} + i_{1\theta}.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Вільна складова

$$i_{\theta} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Cr_1r_2p + (r_1 + r_2) = 0,$$

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}$$

$$i \quad i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} + Ae^{-\frac{r_1+r_2}{r_1r_2C}t} \quad (1.52)$$

Для визначення постійної інтегрування необхідно знайти залежні початкові умови.

Для їх визначення використовується початкова система рівнянь (1.43), яка записується для моменту $t=0+$ і доповнена законами комутації.

Система рівнянь (1.43) для моменту часу $t=0+$ має вигляд:

$$\begin{aligned} r_1i_{1(0+)} + u_{c(0+)} &= U, \\ u_{c(0+)} - r_2i_{2(0+)} &= 0, \\ i_{1(0+)} &= i_{2(0+)} + i_{3(0+)}, \\ i_{3(0+)} &= C \frac{du_c}{dt}(0+). \end{aligned} \quad (1.43, a)$$

Другий закон комутації

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = U.$$

Із першого рівняння системи (1.43, a)

$$i_{1(0+)} = \frac{U - u_{c(0+)}}{r_1} = \frac{U - U}{r_1} = 0.$$

Підставляючи одержане початкове значення $i_{1(0+)}$ в (1.52), одержуємо

$$0 = \frac{U}{r_1 + r_2} + A, \quad \text{звідки} \quad A = -\frac{U}{r_1 + r_2}$$

$$i \quad i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1+r_2}{r_1r_2C}t}.$$

1.9 Вмикання послідовно з'єднаних елементів r , L , C до джерела постійної напруги

Складемо за другим законом Кірхгофа рівняння для кола, яке зображене на рисунку 1.11.

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_c = U. \quad (1.53)$$

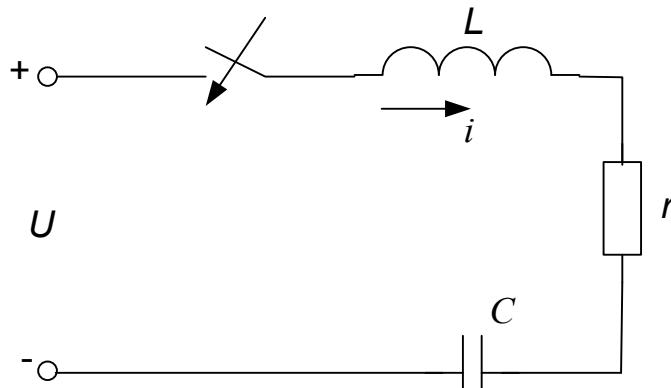


Рисунок 1.11

Оскільки $i = C \frac{du_c}{dt}$, то рівняння (1.53) набуде вигляду

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + rC \frac{du_c}{dt} + u_c = U. \quad (1.54)$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Повний розв'язок i в цьому випадку складається з примусової та вільної складових.

$$u_c = u_{cnp} + u_{cv}.$$

Примусова складова визначається з розрахунку нового усталеного режиму, тому $u_{cnp} = U$.

Вільна складова записується залежно від коренів характеристичного рівняння, тому запишемо спочатку характеристичне рівняння

$$LCp^2 + rCp + 1 = 0. \quad (1.55)$$

Звідси одержуємо два кореня цього рівняння

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (1.56)$$

Залежно від параметрів виділяють три види коренів характеристичного рівняння.

1. Якщо $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$, то корені будуть комплексні спряжені, які звичайно записують у вигляді

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0. \quad (1.57)$$

Вільна складова в цьому випадку має вигляд

$$u_{cв} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.58)$$

2. Якщо $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$, то корені дійсні різні і вільна складова має вигляд

$$u_{cв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.59)$$

3. Якщо $\frac{r^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, то корені однакові ($p_1 = p_2 = p$) і вільна складова має вигляд

$$u_{cв} = (A_1 + A_2 t) e^{p t}. \quad (1.60)$$

Припустимо, що має місце перший випадок (випадок комплексних спряжених коренів), тоді повний розв'язок

$$u_c = U + e^{-\delta t} (A_2 \cos \omega_0 t + A_1 \sin \omega_0 t) \quad (1.61)$$

має дві постійні інтегрування, а для їх визначення необхідно мати дві початкові умови. Першу початкову умову визначимо з другого закону комутації. Вважаючи що до замикання ключа конденсатор не був зарядженим, одержуємо

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = 0. \quad (1.62)$$

Підставляючи (1.62) в (1.61) для $t=0$ маємо

$$A_2 = -U. \quad (1.63)$$

Друга початкова умова визначається з першого закону комутації

$$i_{(0+)} = i_{(0-)} = 0, \quad (1.64)$$

тому що до комутації струму в колі не було. Щоб скористатися другою початковою умовою, треба визначити струм i через постійні інтегрування A_1 і A_2 . Оскільки $i = C \frac{du_c}{dt}$, то

$$i = C \left[(-\delta) e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + e^{-\delta t} (\omega_0 A_1 \cos \omega_0 t - \omega_0 A_2 \sin \omega_0 t) \right] \quad (1.65)$$

Підставляючи значення $i_{(0)}$ при $t=0$, одержуємо

$$0 = C [(-\delta) A_2 + \omega_0 A_1],$$

звідси

$$A_1 = \frac{\delta}{\omega_0} A_2 = -\frac{\delta}{\omega_0} U. \quad (1.66)$$

Таким чином, повний розв'язок

$$u_c = U - e^{-\delta t} \left(\frac{\delta}{\omega_0} U \sin \omega_0 t + U \cos \omega_0 t \right),$$

або

$$u_c = U - A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \gamma), \quad (1.67)$$

де

$$A = \sqrt{\frac{\delta^2}{\omega_0^2} U^2 + U^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{U}{U \frac{\delta}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\delta}.$$

Розглянемо докладно характер зміни вільної складової

$$u_{c\dot{a}} = -A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \gamma). \quad (1.68)$$

З виразу (1.68) видно, що вільна складова є синусоїдою, що згасає, з частотою коливань ω_0 і змінною амплітудою $Ae^{-\delta t}$.

Постійна часу кола $\tau = \frac{1}{\delta}$, а період коливань $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Графік зміни вільної складової показаний на рис.1.12.

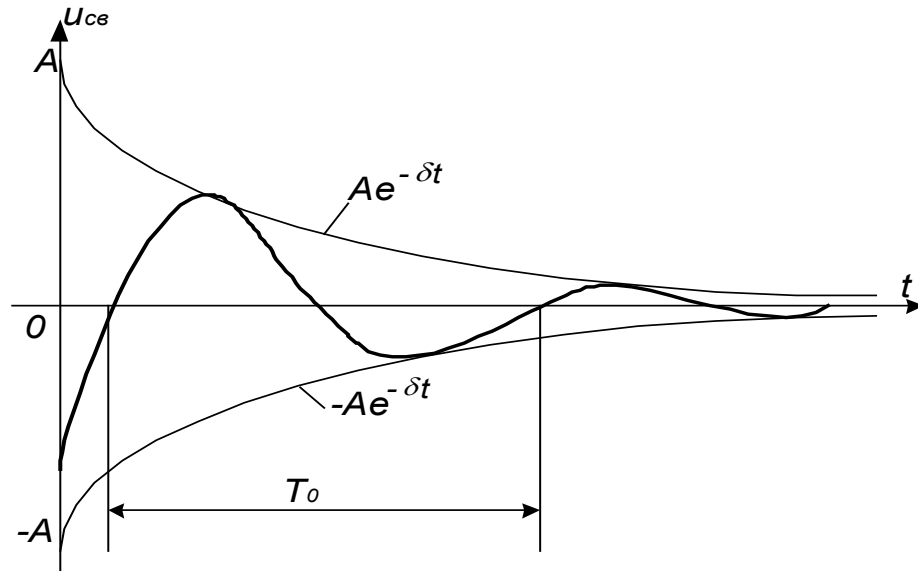


Рисунок 1.12

Оскільки вільна складова наближається до нуля, коливаючись біля нульового значення, то такий режим перехідного процесу називається *коливальним*.

В іншому випадку, якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, повний розв'язок записується у вигляді

$$u_c = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.69)$$

Використовуючи першу початкову умову (1.62), одержуємо

$$0 = U + A_1 + A_2.$$

Виражаючи струм i через u_c , одержуємо

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C [A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}] \quad (1.70)$$

і, використовуючи другу початкову умову (1.60), маємо

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (1.71)$$

Розв'язуючи разом рівняння (1.70) і (1.71), одержимо

$$A_1 = \frac{Up_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{Up_1}{p_1 - p_2} \quad (1.72)$$

і повний розв'язок буде

$$U_c = U + \frac{Up_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{Up_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (1.73)$$

Графік зміни вільної складової для $|p_1| > |p_2|$ зображений на рис. 1.13.

В цьому випадку вільна складова наближається до нуля асимптотично, не коливаючись, тому такий режим перехідного процесу називається *апериодичним*. Практична тривалість перехідного процесу в цьому випадку визначається за більшим значенням τ .

Якщо $|p_1| > |p_2|$, $\frac{1}{|p_1|} < \frac{1}{|p_2|}$, то $\tau_2 > \tau_1$ і $t_{n.pr} = (4 \div 5)\tau_2$.

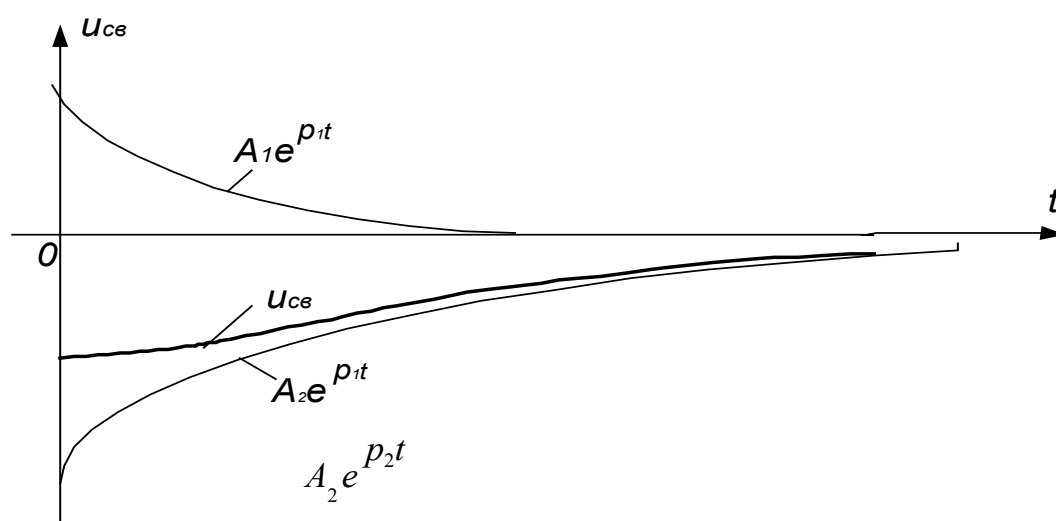


Рисунок 1.13

В третьому випадку, тобто коли корені характеристичного рівняння дійсні рівні (корені кратні), повний розв'язок рівняння (1.54) має вигляд

$$u_c = U + (A_1 + A_2 t)e^{pt}. \quad (1.74)$$

Підставляючи першу початкову умову, одержуємо

$$0 = U + A_1; \quad A_1 = -U. \quad (1.75)$$

Виразимо струм через постійні інтегрування

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C [p(A_1 + A_2 t)e^{pt} + A_2 e^{pt}]$$

і підставимо другу початкову умову (1.64)

$$0 = C(pA_1 + A_2); \quad A_2 = -pA_1 = pU. \quad (1.76)$$

Остаточно

$$u_c = U + (-U + pUt)e^{pt}. \quad (1.77)$$

Графік зміни вільної складової показаний на рис. 1.14.

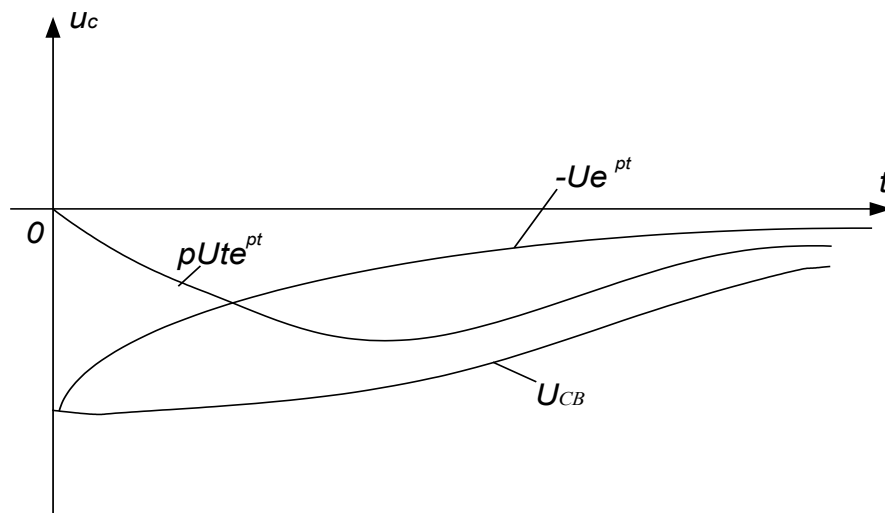


Рисунок 1.14

1.10 Розрахунок перехідних процесів класичним методом в складних розгалужених системах

Для розрахунку перехідних процесів в складних розгалужених колах складається, за законами Кірхгофа для миттєвих значень, система диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану.

Після цього одержану систему зводять до одного диференціального рівняння відносно однієї невідомої. Повний розв'язок цього диференціального рівняння складається з двох частин: примусової та вільної складових. Примусова складова визначається з розрахунку нового усталеного режиму. Якщо дія (прикладена напруга) постійна, то і примусова складова постійна, якщо дія синусоїдна, то примусова складова також синусоїдна і визначається комплексним методом.

Вигляд вільної складової записується залежно від виду коренів характеристичного рівняння. Число коренів дорівнює порядку диференціального рівняння.

Нехай, наприклад, диференціальне рівняння має вигляд

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t), \quad (1.78)$$

де x – шукана величина, n – порядок диференціального рівняння, $f(t)$ – зовнішня дія.

Характеристичне рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.79)$$

Якщо всі корені дійсні різні, то вільна складова записується як сума експонент.

$$x_{\text{в}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{K=1}^n A_K e^{p_K t}. \quad (1.80)$$

Повний розв'язок

$$x = x_{\text{пр}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}.$$

Постійні інтегрування визначаються за допомогою початкових умов. Часто як початкові умови використовують n залежних початкових умов:

$$x_{(0+)}, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0+}, \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=0+}, \dots, \left. \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right|_{t=0+},$$

які визначаються, як відмічалось раніше, з системи рівнянь, записаної для $t = 0 +$ і доповненої законами комутації.

Якщо частина коренів комплексно-спряжена, наприклад,

$$p_{2,3} = -\delta_1 \pm j\omega_{01}, \quad p_{4,5} = -\delta_2 \pm j\omega_{02},$$

то вільна складова має вигляд:

$$x_{\theta} = A_1 e^{p_1 t} + e^{-\delta_1 t} (A_2 \sin \omega_{01} t + A_3 \cos \omega_{01} t) + e^{-\delta_2 t} (A_4 \sin \omega_{02} t + A_5 \cos \omega_{02} t) + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.81)$$

Якщо є корені кратні (наприклад, $p_2 = p_3 = p'$, $p_4 = p_5 = p''$), то

$$x_{\theta} = A_1 e^{p_1 t} + (A_2 + A_3 t) e^{p' t} + (A_4 + A_5 t) e^{p'' t} + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.82)$$

Необхідно відмітити, що в лінійних електричних колах з постійними параметрами без зворотних зв'язків дійсні частини коренів характеристичного рівняння від'ємні, тому з часом вільна складова прямує до нуля.

Приклад 1.1

Визначити закони зміни вхідного струму (i_1) при розмиканні ключа (рис. 1.15).

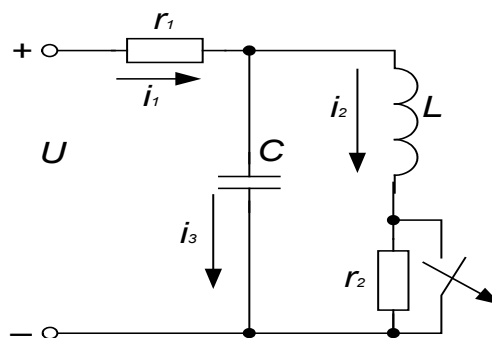


Рисунок 1.15

Складаємо за законами Кірхгофа систему диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану кола (ключ розімкнутий)

$$\begin{aligned}
r_1 i_1 + u_c &= U, \\
L \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 - u_c &= 0, \\
i_1 &= i_2 + i_3, \\
i_3 &= C \frac{du_c}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1.83}$$

Приведемо систему (1.83) до одного диференціального рівняння відносно невідомого струму i_1 , виражаючи всі інші невідомі через i_1 .

Із першого рівняння системи

$$u_c = U - r_1 i_1,$$

з четвертого рівняння

$$i_3 = -Cr_1 \frac{di_1}{dt},$$

з третього рівняння

$$i_2 = i_1 - i_3 = i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Підставляючи одержані значення в друге рівняння одержимо

$$L \frac{d\left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right)}{dt} + r_2 \left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right) - U + i_1 r_1 = 0,$$

або

$$LCr_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (L + Cr_1 r_2) \frac{di_1}{dt} + (r_1 + r_2) i_1 = U. \tag{1.84}$$

Одержане диференціальне рівняння є неоднорідним рівнянням другого порядку. Повний розв'язок цього рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1\theta}. \tag{1.85}$$

Примусова складова визначається з розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі ключ розімкнутий, при прикладеній постійній напрузі в усталеному режимі струм через конденсатор не протікає, тому

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + r_2}. \quad (1.86)$$

Характеристичне рівняння

$$LCr_1p^2 + (L + Cr_1r_2)p + r_1 + r_2 = 0.$$

Нехай його корені будуть комплексні спряжені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$, тоді

$$i_{1\beta} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.87)$$

Повний розв'язок

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_1} + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (1.88)$$

Для визначення постійних інтегрування знайдемо початкові умови $i_{1(0+)}$, $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+}$. Оскільки ці початкові умови залежні, то запишемо систему рівнянь (1.83) для $t=0+$ і доповнимо її законами комутації

$$\begin{aligned} r_1 i_{1(0+)} + u_{(0+)} &= U, \\ L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0+} + r_2 i_{2(0+)} - u_{c(0+)} &= 0, \\ i_{1(0+)} &= i_{2(0+)} + i_{3(0+)}, \\ i_{3(0+)} &= C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+}. \end{aligned} \quad (1.88, a)$$

Закони комутації

$$\begin{aligned} i_{2(0+)} &= i_{2(0-)}, \\ u_{c(0+)} &= u_{c(0-)}. \end{aligned}$$

Значення $i_{2(0-)}$ і $u_{c(0-)}$ визначаються з розрахунку усталеного режиму до комутації, тому

$$\begin{aligned} i_{2(0+)} = i_{2(0-)} &= \frac{U}{r_1}, \\ u_{c(0+)} = u_{c(0-)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Із першого рівняння системи (1.88, а) визначаємо $i_{1(0+)}$.

$$i_{1(0+)} = \frac{U - u_{c(0+)}}{r_1} = \frac{U}{r_1}. \quad (1.90)$$

Із третього рівняння системи (1.88, а)

$$i_{3(0+)} = i_{1(0+)} - i_{2(0+)} = \frac{U}{r_1} - \frac{U}{r_1} = 0. \quad (1.91)$$

Із четвертого рівняння системи (1.83)

$$\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{i_{3(0+)}}{C} = 0. \quad (1.92)$$

Проінтегруємо перше рівняння системи (1.83)

$$r_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0.$$

і запишемо його для $t=0+$

$$r_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} + \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+} = 0,$$

або

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} = -\frac{1}{r_1} \cdot \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+}.$$

Враховуючи (1.92), одержуємо

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} = 0. \quad (1.93)$$

Таким чином, необхідні початкові умови визначаються виразами (1.90) і (1.93). Підставляючи (1.86) в (1.84), одержуємо

$$\frac{U}{r_1} = \frac{U}{r_1 + r_2} + A_2; \quad A_2 = \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)}. \quad (1.94)$$

Продиференціюємо (1.88) і підставимо туди (1.93)

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= (-\delta) e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + \\ &+ e^{-\delta t} (\omega_0 A_1 \cos \omega_0 t - \omega_0 A_2 \sin \omega_0 t), \\ 0 &= (-\delta) A_2 + \omega_0 A_1. \end{aligned}$$

Звідси

$$A_1 = A_2 \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{Ur_2 \delta}{\omega_0 r_1 (r_1 + r_2)}. \quad (1.95)$$

Остаточний розв'язок

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)} e^{-\delta t} \left(\frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right). \quad (1.96)$$

1.11 Складання характеристичних рівнянь

Диференціальне рівняння відносно однієї невідомої необхідне для того, щоб одержати характеристичне рівняння. В багатьох випадках характеристичне рівняння можна одержати більш простим шляхом.

Розглянемо два способи складання характеристичних рівнянь.

1. Метод алгебризації диференціальних рівнянь

Розглянемо цей метод на прикладі конкретного кола (рис. 1.16). Складемо, за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану, систему диференціальних рівнянь.

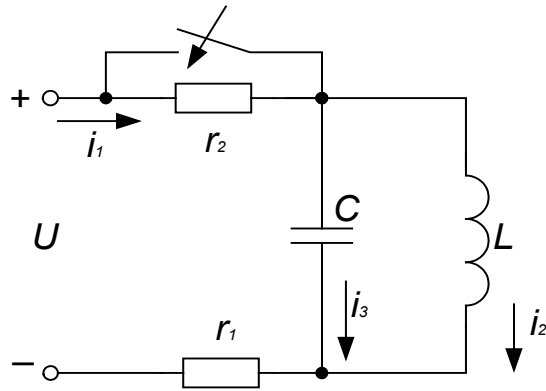


Рисунок 1.16

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt &= U, \\ L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Повний розв'язок для будь-якої змінної, як відомо, складається з примусової та вільної складових. Вільна складова залежить від параметрів кола і не залежить від зовнішньої дії. Тому, якщо вважати зовнішню дію відсутньою, система (1.97) буде справедлива тільки для вільних складових, тобто

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1\theta} + \frac{1}{C} \int i_{3\theta} dt &= 0, \\ L \frac{di_{2\theta}}{dt} - \frac{1}{C} \int i_{3\theta} dt &= 0, \\ i_{1\theta} - i_{2\theta} - i_{3\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.97, a)$$

Вільна складова складається з суми членів вигляду Ae^{pt} . Неважко бачити, що

$$\frac{di_{\dot{a}}}{dt} = Ape^{pt} = p \cdot i_{\dot{a}},$$

а

$$\int i_{\theta} dt = \frac{1}{p} Ae^{pt} = \frac{i_{\theta}}{p}.$$

Враховуючи одержані співвідношення, система (1.97, a) запишеться в

вигляді

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1\beta} + \frac{1}{Cp} i_{3\beta} &= 0, \\ Lp i_{2\beta} - \frac{1}{Cp} i_{3\beta} &= 0, \\ i_{1\beta} - i_{2\beta} - i_{3\beta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.97, б)$$

Одержали однорідну лінійну алгебраїчну систему рівнянь, Відомо, що однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок, якщо визначник системи дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{Cp} \\ 0 & Lp & -\frac{1}{Cp} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$-r_1 Lp - \frac{L}{C} - \frac{r_1}{Cp} = 0$$

$$r_1 CLp^2 + Lp + r_1 = 0. \quad (1.98)$$

Одержаний вираз (1.94) і є характеристичним рівнянням.

2. Метод вхідного опору

Припустимо, що до схеми (див. рис. 1.16) після комутації прикладена синусоїдна напруга (рис. 1.17) і відповідно в вітках кола протікають синусоїдні струми.

Запишемо в комплексній формі рівняння за законами Кірхгофа.

$$\left. \begin{aligned} r_1 \underline{I}_1 + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_3 &= \underline{U}, \\ j\omega L \underline{I}_2 - \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_3 &= 0, \\ \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.99)$$

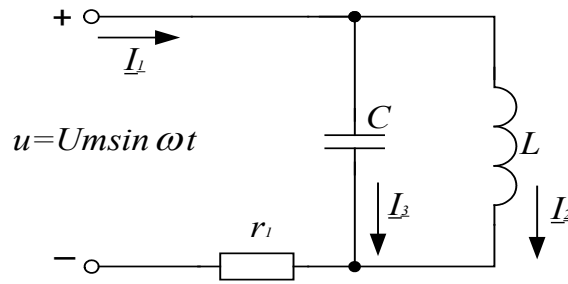


Рисунок 1.17

Знайдемо вхідний опір кола при синусоїдній дії

$$Z_{\text{ex}}(j\omega) = \frac{U}{\underline{I}_1}. \quad (1.100)$$

Струм \underline{I}_1 знайдемо з системи (1.99) за правилом Крамера, тобто

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)}, \quad (1.101)$$

де

$$\Delta(j\omega) = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ +1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (1.102)$$

$$\Delta_1(j\omega) = \begin{vmatrix} \underline{U} & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{U} \Delta_{11}(j\omega), \quad (1.103)$$

де

$$\Delta_{11}(j\omega) = \begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Підставимо одержане значення $\Delta(j\omega)$, $\Delta_{11}(j\omega)$ в (1.97), а потім в (1.100), тоді

$$Z_{\theta x}(j\omega) = \frac{\Delta(j\omega)}{\Delta_{11}(j\omega)}. \quad (1.104)$$

Позначимо $j\omega = p$ і підставимо його в (1.100)

$$Z_{\theta x}(p) = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{pC} \\ 0 & pL & -\frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pL & -\frac{1}{pC} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} \quad (1.105)$$

Із (1.105) видно, що визначник в чисельнику $Z_{\theta x}(p)$ є визначником алгебривованої системи (1.97, б), прирівнюючи який до нуля, одержують характеристичне рівняння. Таким чином, умова $Z_{\theta x}(p) = 0$ дає можливість одержати характеристичне рівняння.

Приклад 1.2

Визначити характеристичне рівняння за допомогою методу вхідного опору для кола, яке зображене на рис. 1.15.

Запишемо вхідний опір цього кола при синусоїдній напрузі для післякомутаційного стану.

$$Z_{\theta x}(j\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{r_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Замінімо $j\omega$ на p , тоді

$$Z_{\theta x}(p) = r_1 + \frac{(r_2 + pL) \frac{1}{pC}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}}.$$

Після перетворень

$$Z_{\theta x}(p) = r_1 + \frac{r_2 + pL}{Lcp^2 + r_2Cp + 1} = \frac{Lcr_1p^2 + (r_1r_2C + L)p + (r_1 + r_2)}{Lcp^2 + r_2Cp + 1}.$$

Прирівнюючи $Z_{\theta x}(p)$ до нуля, одержуємо характеристичне рівняння

$$LCr_1p^2 + (r_1r_2C + L)p + r_1 + r_2 = 0. \quad (1.106)$$

Контрольні питання та вправи

1. Які причини виникнення перехідних процесів?
2. Як формулюються і записуються закони комутації?
3. Як визначається примусова складова?
4. Який вигляд має вираз для вільної складової залежно від кількості і виду коренів характеристичного рівняння?
5. Чим відрізняється розрахунок перехідних процесів в колах з джерелом постійної напруги від розрахунку процесів в колах з джерелом гармонічної напруги?
6. Що розуміють під залежними початковими умовами і яка методика їх визначення?
7. Визначити значення напруги $u_{L(0)}$ кола (рис. 1.18) в момент комутації, якщо $U = 160\text{В}$, $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 60\Omega$.

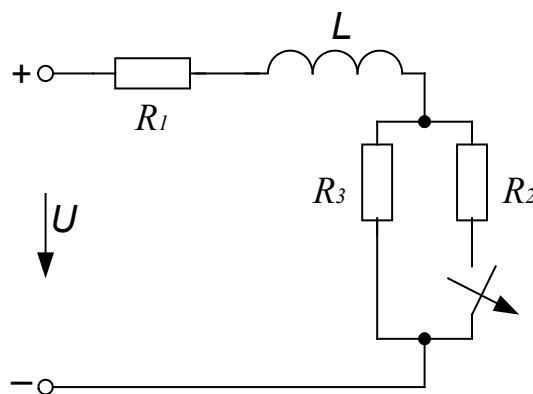


Рисунок 1.18

Відповідь: $u_{L(0)} = -64\text{ В}$.

8. Визначити значення струму $i_{2(0)}$ в колі (рис. 1.19) в момент комутації, якщо $U=80\text{ В}$, $R_1=2\text{ Ом}$, $R_2=8\text{ Ом}$, $R_3=6\text{ Ом}$.

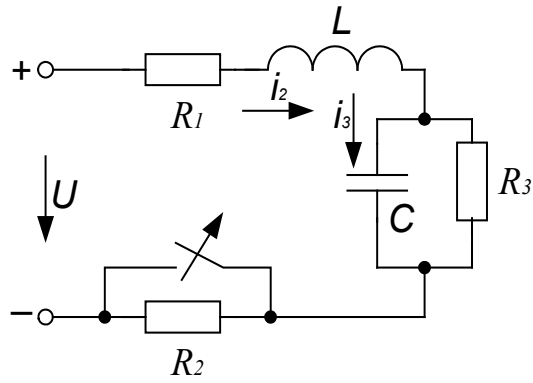


Рисунок 1.19

Відповідь: $i_{2(0)} = -8A$.

9. Визначити перехідну напругу u_c в колі (рис. 1.20).

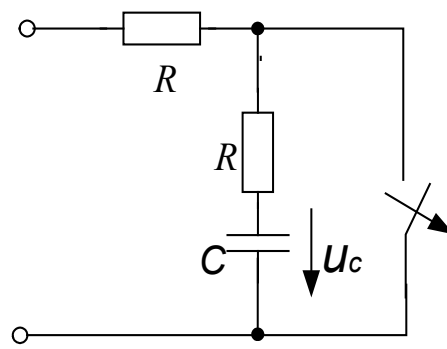


Рисунок 1.20

Відповідь: $u_c = U \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right)$.

10. Опір $R=100 \text{ Ом}$ і заряджена ємність $C=100 \text{ мкФ}$, які з'єднані послідовно, підключаються до джерела ЕРС $e = 141 \sin(377t + \pi/6) \text{ В}$ при $t = 0$. Визначити $i(t)$, якщо початкова напруга на ємності дорівнює 50 В .

Відповідь: $i = 1,37 \sin(377t + 44,8^\circ) + 0,241e^{-100t} \text{ А}$.

2 ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа і зображення характеристичних функцій

Інтегральне перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

переводить функцію $f(t)$ дійсної змінної t , яку називають *оригіналом*, в функцію комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$, яку називають *зображенням* $F(p)$.

Відповідність між функціями часу (оригіналами) та функціями комплексної змінної (зображеннями) звичайно записують у вигляді

$$f(t) \rightarrow F(p) \quad (2.2)$$

або

$$F(p) = L[f(t)]. \quad (2.3)$$

Для того, щоб функція часу мала зображення, необхідно, щоб вона задовольняла умови Діріхле та була функцією обмеженого зростання, тобто, щоб виконувалась умова

$$f(t) < Ae^{at}, \quad (2.4)$$

де A і a – константи.

Перетворення Лапласа є лінійними перетворенням. Дійсно, нехай

$$f_k(t) \rightarrow F_k(p), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Знайдемо зображення функції

$$f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_k f_k(t) + \dots + C_n f_n(t) = \sum_{k=1}^n C_k f_k(t). \quad (2.5)$$

Оскільки $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$, то, підставляючи сюди значення (2.5),

одержуємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} [C_1 f_1(t) + \dots + C_K f_K(t) + \dots + C_n f_n(t)] e^{-pt} dt,$$

або $F\left(\begin{smallmatrix} s \\ p \end{smallmatrix}\right) = C_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt + \dots + C_K \int_0^{\infty} f_K(t) e^{-pt} dt + \dots + C_n \int_0^{\infty} f_n(t) e^{-pt} dt$

і $F(p) = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) + \dots + C_n F_n(p) = \sum_{K=1}^n C_K F_K(p).$ (2.6)

Таким чином, зображення суми функцій дорівнює сумі зображень окремих функцій; зображення функції, яка помножена на константу, дорівнює константі, помноженій на зображення цієї функції.

Знайдемо зображення характерних функцій. Нехай $f(t) = A$, тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = A \left(-\frac{1}{p} \right) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}. \quad (2.7)$$

Якщо $f(t) = e^{\alpha t}$, то

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{-(p-\alpha)} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}. \quad (2.8)$$

Якщо $f(t) = e^{-\alpha t}$, то зображення даної функції відрізняється від попередньої знаком біля α , тобто,

$$F(p) = \frac{1}{p+\alpha}. \quad (2.9)$$

Нехай $f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$

Тоді, відповідно до (2.8)

$$F(p) = \frac{1}{p-j\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

Тобто,

$$\begin{aligned}\cos \omega t &\rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \\ \sin \omega t &\rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Знайдемо зображення похідної функції $f(t)$. Нехай $f(t)$ має своїм зображенням $F(s)$, тоді

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt.$$

Візьмемо інтеграл частинами.

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Позначимо $u = e^{-pt}$, $v = f(t)$, $du = (-p)e^{-pt} dt$, тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \left[f(t) e^{-pt} \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Оскільки функція $f(t)$ росте не швидше показникової функції (2.4), то при підстановці верхньої границі перша складова дає нуль, а нижньої границі $-f(0)$, тобто, значення функції в момент $t=0$. Друга складова (інтеграл) відповідно до (2.1) є $F(s)$, тому

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0).\tag{2.11}$$

Визначимо зображення невизначеного інтеграла функції $f(t)$, зображення якої є $F(p)$. Відомо, що

$$\varphi(t) = \int f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \varphi(0),$$

де $\varphi(0)$ – значення функції $\varphi(t)$ для $t=0$,
тому

$$L\left[\int f(t)dt\right] = L\left[\int_0^t f(t)dt + \varphi(0)\right].$$

Відповідно до (2.7)

$$L[\varphi(0)] = \frac{\varphi(0)}{p},$$

$$\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = f(t).$$

Зображення останньої рівності

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = L[f(t)] = F(p).$$

Згідно з (2.11)

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = pL\left[\int_0^t f(t)dt\right] - \int_0^0 f(t)dt.$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

і остаточно

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(p)}{p}. \quad (2.12)$$

Вирази (2.11) і (2.12) показують, що операціям диференціювання функцій дійсної змінної t відповідають алгебраїчні операції для зображень. Це значить, що диференціальним рівнянням оригіналів відповідають алгебраїчні рівняння зображень.

2.2 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

Для кола, яке містить один резистор (рис. 2.1, а), напруга між точками a і b буде: $u=ri$.

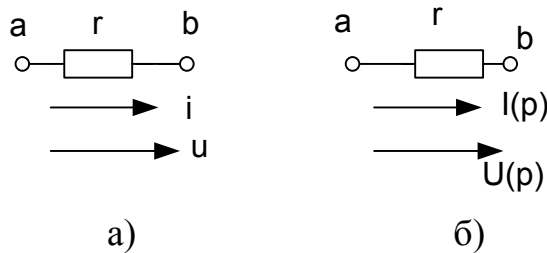


Рисунок 2.1

В операторній формі, згідно з (2.6), $U(p)=rI(p)$, тому резистор замінюється в операторній схемі елементом, величина якого дорівнює r (рис. 2.1, б).

Для індуктивності (рис. 2.2, а) $u = L \frac{di}{dt}$.

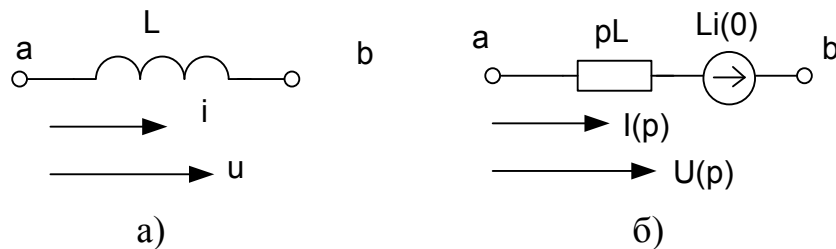


Рисунок 2.2

В операторному вигляді, відповідно до (2.11),

$$U(p) = LpI(p) - Li(0).$$

Напруга на ділянці ab має дві складові i , відповідно, операторна схема (рис. 2.2, б) складається також із двох ділянок: опору pL і е.р.с. $Li(0)$, яка збігається за напрямом із струмом.

Для ділянки, яка містить ємність (рис. 2.3, а) $u = \frac{1}{c} \int idt$.

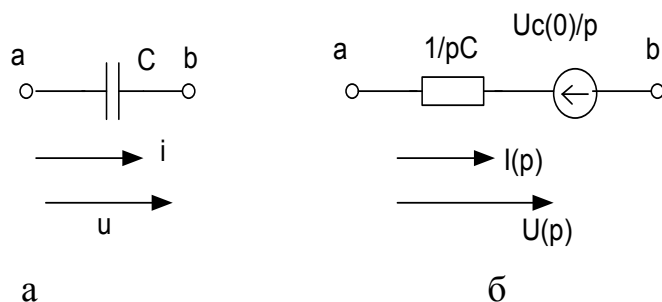


Рисунок 2.3

В операторному вигляді, відповідно до (2.12),

$$U(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_c(0)}{p},$$

напруга також складається з двох складових, що відповідає двом ділянкам операторної схеми (рис. 2.3, б): опору $\frac{1}{pC}$ і додаткової е.р.с. $\frac{U_c(0)}{p}$, яка направлена назустріч струмові.

Розглянемо окремий контур (рис. 2.4), який містить всі три елементи, і складемо рівняння для миттєвих значень за законами Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_c = e(t). \quad (2.13)$$

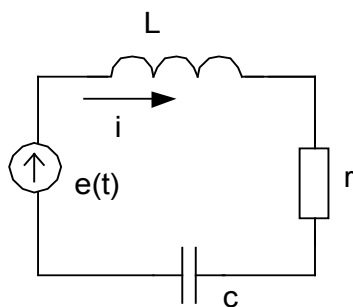


Рисунок 2.4

Тому рівняння (2.13) в операторній формі набуде вигляду

$$LpI(p) - Li(0) + rI(p) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_c(0)}{p} = E(p) \quad (2.14)$$

або

$$I(p)(Lp + r + \frac{1}{pC}) = E(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}. \quad (2.15)$$

Позначимо

$$Lp + r + \frac{1}{pC} = Z(p) \quad (2.16)$$

і назовемо цю величину операторним опором, тоді

$$I(p) \cdot Z(p) = E(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}. \quad (2.17)$$

Для нульових початкових умов

$$I(p) \cdot Z(p) = E(p). \quad (2.18)$$

Таким чином, в колі для нульових початкових умов закон Ома справедливий і для зображень. Якщо початкові умови не нульові, то до зовнішньої е.р.с. додаються ще дві е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в електричному полі конденсатора $\left(-\frac{u_c(0)}{p}\right)$ і магнітному полі котушки $Li_f(0)$. Отже, якщо врахувати додаткові е.р.с. в колі $Li_f(0)$ і $\left(-\frac{u_c(0)}{p}\right)$, то і в цьому випадку закон Ома справедливий для зображень.

Нехай, наприклад, у вузлі а деякого електричного кола (рис. 2.5) з'єднуються 4 вітки з відповідними струмами.

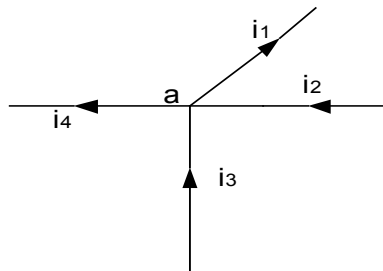


Рисунок 2.5

Для миттєвих значень за першим законом Кірхгофа:

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0. \quad (2.19)$$

В операторній формі:

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) + I_4(p) = 0. \quad (2.20)$$

В загальному вигляді $\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$

Таким чином, перший закон Кірхгофа в операторній формі повністю справедливий.

Для того, щоб розглянути другий закон Кірхгофа, виділимо контур, який містить n віток (рис. 2.6).

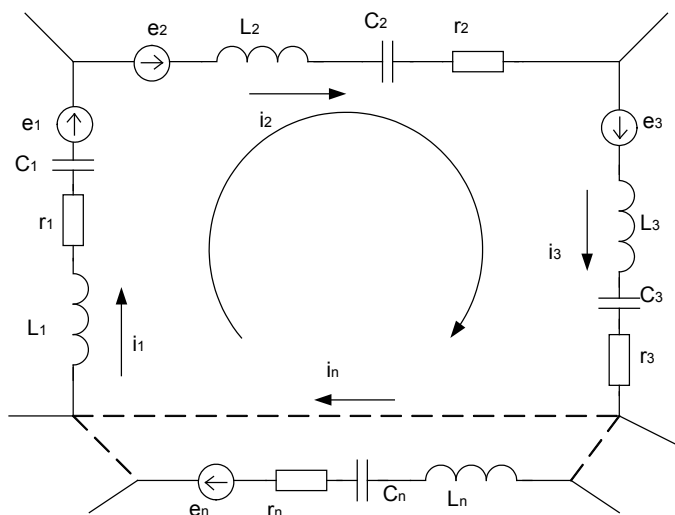


Рисунок 2.6

При вибраних напрямках обходу контуру та струмів у вітках для миттєвих значень запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа.

$$\sum_{k=1}^n \left(L \frac{di_k}{dt} + r_k i_k + u_{ck} \right) = \sum_{k=1}^n e_k. \quad (2.21)$$

Переходячи до зображень з урахуванням (2.14), одержуємо

$$\sum_{k=1}^n \left[pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + r_k I_k(p) + \frac{1}{C_k p} I_k(p) + \frac{u_{ck}(0)}{p} \right] = \sum_{k=1}^n E_k(p)$$

або

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) \left(pL_k + r_k + \frac{1}{pC_k} \right) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{p} \right].$$

З урахуванням (2.16)

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{p} \right]. \quad (2.22)$$

Для нульових початкових умов другий закон Кірхгофа в операторному вигляді також є правильним, тобто алгебраїчна сума зображень напруг на ділянках кола дорівнює алгебраїчній сумі зображень е.р.с. в будь-якому замкненому контурі.

$$\sum_{k=1}^n I_k(p)Z_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \quad (2.23)$$

Якщо початкові умови не є нульовими, то треба враховувати не тільки зовнішні е.р.с., але й додаткові, які характеризують початкові запаси енергії. При цьому потрібно враховувати, що додаткові е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в магнітному полі $Li_L(0)$ направлені за струмом, а додаткові е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в електричному полі $\frac{u_c(0)}{p}$, направлені назустріч струмові.

Маючи сформульовані закони Ома і Кірхгофа в операторному вигляді, можна зразу записувати систему рівнянь в операторному вигляді для післякомутаційного стану кола.

2.3 Операторні схеми

Операторні схеми – це такі схеми, в вітках яких діють зображення джерел енергії, знаходяться операторні елементи і протікають зображення струмів. На рис. 2.7 зображено електричне коло, а на рис. 2.8 – його операторна схема.

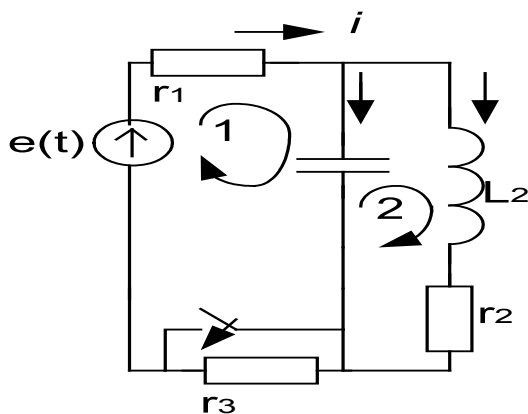


Рисунок 2.7

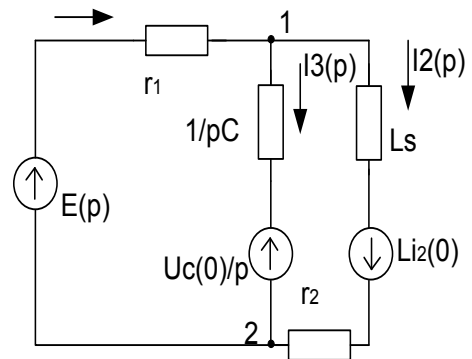


Рисунок 2.8

При складанні операторної схеми потрібно враховувати, що операторна схема складається для післякомутаційного стану, тому в операторній схемі не показується ключ і вилучається опір r_3 .

Маючи операторну схему з операторними струмами, можна використовувати для її розрахунку будь-які відомі методи аналізу лінійних кіл.

Наприклад, для схеми на рис. 2.8 запишемо рівняння для вузла 1 за методом вузлових потенціалів.

$$(\varphi_2 = 0) \quad \varphi_1(p) \left[\frac{1}{r} + pC + \frac{1}{pL + r_2} \right] = E(p) \frac{1}{r_1} + \frac{u_c(0)}{p} \frac{1}{pC} - \frac{Li_2(0)}{r_2 + Lp}.$$

Знаючи зображення потенціалу вузла 1, можна визначити зображення будь-якого струму.

Наприклад,

$$I_2(p) = \frac{\varphi_1(p) + Li_2(0)}{pL + r_2}.$$

2.4 Перехід від зображення до оригіналу

Існують різні шляхи знаходження оригіналів. В теорії кіл звичайно використовують теорему розкладання (розвинення).

Теорема розкладання використовується в тих випадках, коли зображення деякої функції $F(p)$ записано у вигляді відношення двох поліномів

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (2.24)$$

причому $m < n$.

Як правило, зображення величин, які визначаються при розрахунку перехідних процесів в лінійних колах, задовольняють цю умову.

Якщо всі корені знаменника прості, то вираз (2.24) можна записати в вигляді суми простих дробів:

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}, \quad (2.25)$$

де p_k – корінь знаменника, A_k – деякі невідомі постійні.

Для визначення постійної A_k помножимо ліву і праву частини (2.25) на $(p - p_k)$

$$\frac{P(p)}{Q(p)} (p - p_k) = A_1 \frac{p - p_k}{p - p_1} + A_2 \frac{p - p_k}{p - p_2} + \dots + A_k + \dots + A_n \frac{p - p_k}{p - p_n}$$

і спрямуємо p до p_k .

В правій частині рівняння всі складові, крім A_k , перетворюються в нуль, а в лівій частині одержуємо невизначеність, оскільки при $p \rightarrow p_k$ $(p - p_k) \rightarrow 0$ і $Q(p_k) \rightarrow 0$, тому що p_k – це корінь знаменника. Таким чином,

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{Q(p)} \cdot P(p). \quad (2.26)$$

Розкриваючи невизначеність в (2.26) за правилом Лопіталя, тобто диференціюючи чисельник і знаменник (2.26) і підставляючи $p = p_k$, одержуємо

$$A_k = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}. \quad (2.27)$$

В цьому випадку

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}. \quad (2.28)$$

Згідно з (2.8)

$$\frac{1}{p - p_k} \rightarrow e^{p_k t},$$

тому оригіналом функції $F(p)$ є функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (2.29)$$

де p_k – корінь знаменника; $P(p_k)$ – значення чисельника функції $F(p)$ при $p=p_k$; $Q'(p_k)$ – значення похідної знаменника функції $F(p)$ при $p=p_k$; n – число коренів знаменника.

Приклад 2.1

Зображення деякої функції має вигляд

$$F(p) = \frac{p^2 + 4p + 8}{p(p^2 + 6p + 8)} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Знайти оригінал цієї функції.

Знаходимо корені знаменника

$$p(p^2 + 6p + 8) = 0; \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -4.$$

Визначаємо значення чисельника для $p=p_k$

$$P(p_1) = 8; P(p_2) = 4 - 8 + 8 = 4; P(p_3) = 16 - 16 + 8 = 8.$$

Знаходимо похідну знаменника

$$Q'(p) = (p^2 + 6p + 8) + p(2p + 6)$$

і її значення для $p=p_k$

$$Q'(p_1) = 8; Q'(p_2) = -4; Q'(p_3) = 8.$$

Підставляємо одержані значення в (2.29)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^3 \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{P(p_1)}{Q'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{P(p_2)}{Q'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{P(p_3)}{Q'(p_3)} e^{p_3 t} = \\ &= \frac{8}{8} e^{0t} + \frac{4}{-4} e^{-2t} + \frac{8}{8} e^{-4t} = 1 - e^{-2t} + e^{-4t}. \end{aligned}$$

Контрольні питання та вправи

1. Який вигляд має інтегральне перетворення Лапласа?
2. Які умови повинна задовольняти функція, щоб вона мала зображення за Лапласом?
3. Як знайти зображення гармонічної функції з початковою фазою?
4. Чому дорівнює зображення похідної й інтеграла?
5. Який вигляд мають операторні схеми елементів електричного кола?
6. Як записати теорему розкладання?
7. Знайти оригінали за зображеннями

$$\text{а) } \frac{3p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}; \quad \text{б) } \frac{p + 1}{p^2 + 2p} \quad \text{в) } \frac{1}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Відповіді:

$$\text{а) } \cos t - \cos 2t; \quad \text{б) } \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}); \quad \text{в) } \frac{1}{5}\left[1 + \frac{1}{2}e^{-t}(-2 \cos 2t - \sin 2t)\right].$$

8. Розв'язати задачі 9 і 10 попереднього розділу операторним методом.

3 ЧАСТОТНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

3.1 Спектри аперіодичних функцій

Як показано раніше (підрозділ 1.6), періодична функція, яка записана рядом Фур'є

$$f(t) = B_0 + C_1 \sin(\omega t + \psi_1) + C_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + C_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + C_k \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots, \quad (3.1)$$

повністю характеризується амплітудно-частотним і фазочастотним дискретним спектром.

Якщо ряд Фур'є записати в вигляді

$$f(t) = \frac{B_0}{2} + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots + \\ + A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t + \dots, \quad (3.2)$$

де $B_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$, $B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt$, $A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt$, (3.3)

то ряд Фур'є можна записати в комплексному вигляді

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (3.4)$$

де ω_1 – частота основної гармоніки;

$$C_k = \frac{B_k - jA_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (3.5)$$

Як відомо, спектр періодичних функцій є дискретним. Перейдемо до аперіодичних функцій. З цією метою будемо збільшувати період періодичної функції T , спрямовуючи його до нескінченності. Зі зростанням періоду T інтервал на шкалі між складовими ряду Фур'є зменшується і

спектр згущується, переходячи в граничному випадку в суцільний спектр (рис. 3.1). В цьому випадку частота основної гармоніки $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ стає нескінченно малою $d\omega$ і інтервал між сусідніми гармоніками також стає нескінченно малою величиною, яка дорівнює $d\omega$. Частота k -тої гармонічної складової $k\omega_1$ може бути позначена в цьому випадку ω .

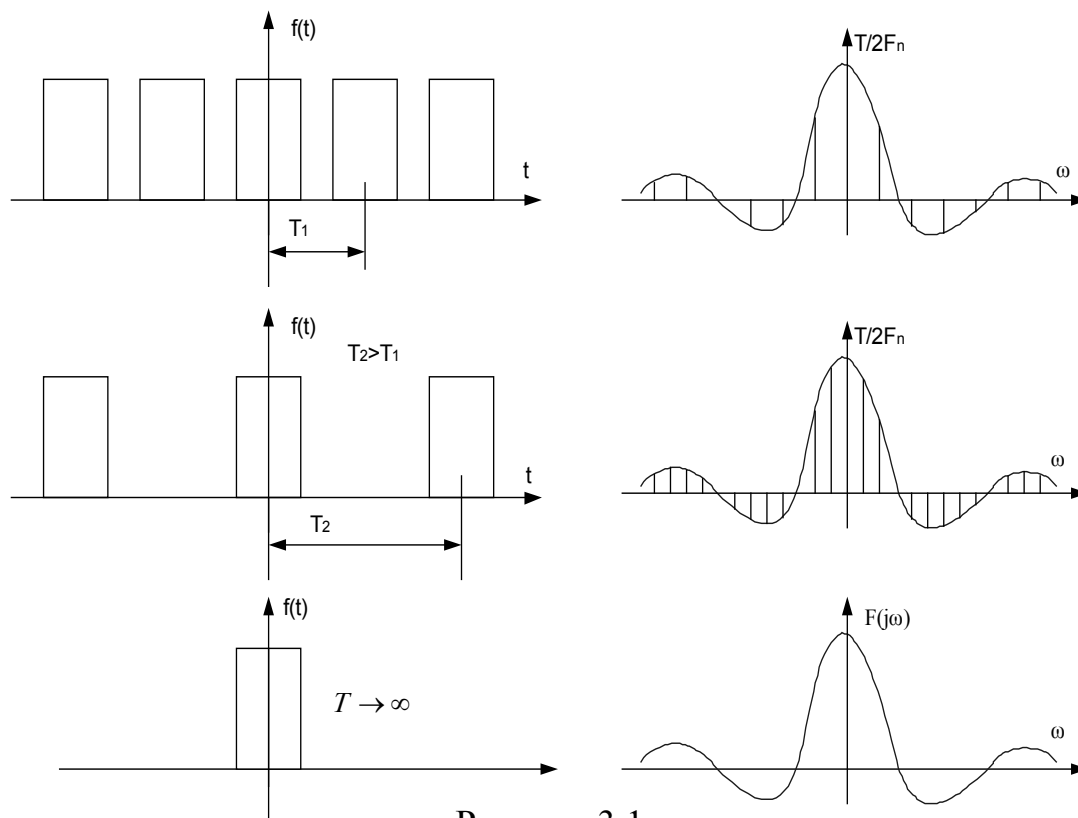


Рисунок 3.1

Комплексна амплітуда k -тої гармоніки стає також нескінченно малою і може бути позначена

$$dC(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.6)$$

Ряд Фур'є (3.4) в цьому випадку може бути записаний в вигляді

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dC(j\omega)e^{j\omega t},$$

або, з урахуванням (3.6),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (3.7)$$

Якщо позначити

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.8)$$

і назвати цю величину *спектральною характеристикою* або просто спектральною функцією $f(t)$, то вихідна функція визначається через спектральну характеристику за виразом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.9)$$

Інтегральні перетворення (3.8) і (3.9) називають *прямим* і *оберненим* перетворенням Фур'є.

Таким чином, неперіодичну функцію можна подати нескінченно великим числом гармонічних складових нескінченно малої амплітуди $dC(j\omega)$, які відрізняються одна від однієї на нескінченно малу частоту $d\omega$.

Спектр такої функції буде неперервним.

Якщо функція $f(t)=0$ для $t<0$, що, звичайно, має місце при розгляді перехідних процесів, то (3.8) можна записати в вигляді

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.10)$$

Неважко бачити, що перетворення Фур'є одержують безпосередньо з перетворення Лапласа (2.1) формальною заміною s на $j\omega$.

Треба мати на увазі, що функція $f(t)$ може бути перетворена за Фур'є, якщо вона абсолютно інтегрована, тобто

$$\int_0^{\infty} |f(t) dt| = M, \quad (3.11)$$

де M – скінченне число.

Зображення неперіодичної функції в вигляді сукупності незгасальних гармонічних коливань дає можливість досліджувати перехідний процес в лінійному електричному колі, використовуючи загальні методи розрахунку усталених синусоїдних процесів.

3.2 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів

Припустимо, що деяке лінійне коло (рис. 3.2), яке має комплексний опір $Z(j\omega)$, підключається в момент $t=0$ при нульових початкових умовах до джерела. е.р.с. $e(t)$.

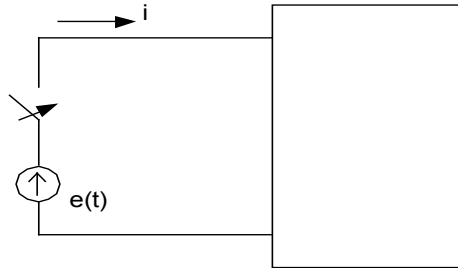


Рисунок 3.2

Визначивши спектральну характеристику дії згідно з (3.8) і позначивши її через $E(j\omega)$, можна визначити спектральну характеристику вхідного струму за формулою

$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z(j\omega)} = E(j\omega)Y(j\omega), \quad (3.12)$$

де $Y(j\omega)$ – комплексна провідність двополюсника.

Оригінал струму $i(t)$ можна знайти за допомогою виразу

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.13)$$

3.3 Наближені способи при розрахунку перехідних процесів частотним методом

Спроба точного аналізу перехідних процесів частотним методом зустрічає значні труднощі через складність оберненого перетворення Фур'є (3.9) і тому в таких випадках зручніше використовувати обернене перетворення Лапласа, тому що визначення оригіналу за допомогою теореми розкладання звичайно не викликає ускладнень.

Частотний метод зручно використовувати тоді, коли можна обмежитися наближеними виразами і особливо в тих випадках, коли аналітичні вирази функції кола в операторній або спектральній формах неможливі, але спектральна характеристика може бути знайдена дослідним шляхом.

Розглянемо на конкретному прикладі наближений спосіб розрахунку перехідних процесів, коли до кола (рис. 3.3, а) прикладений сигнал прямокутної форми (рис. 3.3, б).

Спектральна характеристика функції кола

$$K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{U_1(j\omega)R}{U_1(j\omega)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{jR\omega C}{1 + j\omega CR}$$

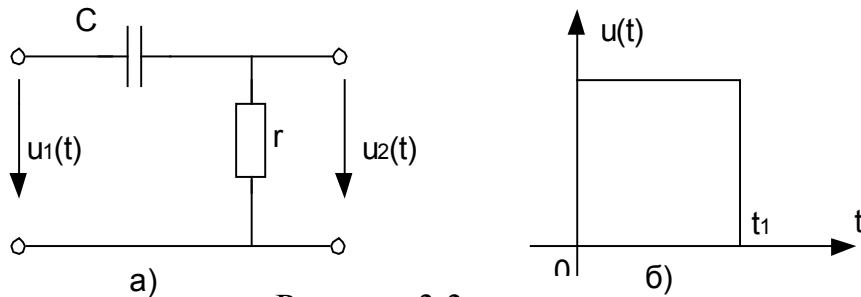


Рисунок 3.3

Будемо вважати, що на вхід схеми подається періодична напруга в вигляді прямокутних імпульсів з періодом T (рис. 3.4),

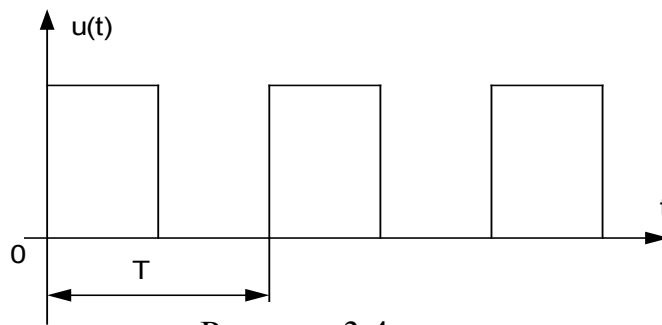


Рисунок 3.4

Період T вибираємо таким чином, щоб до початку наступного імпульсу перехідний процес в колі практично закінчився, тобто $T \geq 5\tau$, де τ – стала часу кола.

Оскільки тепер на вхід схеми подається періодична напруга, то розрахунок схеми можна провести для усталеного режиму при несинусоїдній дії, розклавши завчасно вхідну дію в ряд Фур'є.

Вихідна напруга для k -тої гармоніки визначається за формулою

$$U_{2k} = U_{1k} K(j\omega k) = \frac{U_{1k} jRk\omega C}{1 + jk\omega CR}$$

Якщо обмежитися трьома гармоніками, то вихідна напруга зображується графіком, який на рис. 3.5 показаний пунктиром. Суцільною лінією показаний точний розв'язок.

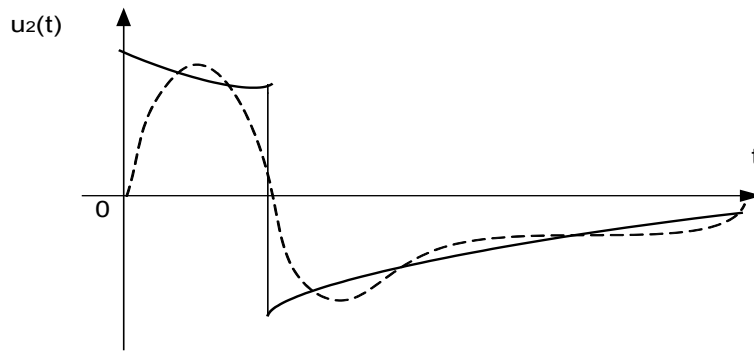


Рисунок 3.5

Якщо частотна характеристика знята дослідним шляхом, то для визначення реакції кола використовують метод трапецій. Запишемо спектральну характеристику $F(j\omega)$ в вигляді

$$F(j\omega) = F_1(\omega) - jF_2(\omega), \quad (3.13)$$

де, відповідно до (3.8),

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (3.14)$$

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Якщо $f(t) = 0$ для $t < 0$, то

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (3.15)$$

$$F_2(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Неважко бачити, що функція $F_1(\omega)$ парна, тому що $F_1(\omega) = F_1(-\omega)$ а функція $F_2(\omega)$ непарна, оскільки $F_2(\omega) = -F_2(-\omega)$.

Згідно з (3.9)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) - jF_2(\omega)] \times [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \sin \omega t - F_2(\omega) \cos \omega t] d\omega \right\}. \quad (3.20)$$

Другий інтеграл всередині фігурних дужок повинен дорівнювати нулю, оскільки $f(t)$ не може мати уявної складової, тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (3.21)$$

В виразі (3.21) функція в квадратних дужках відносно змінної ω є парною, оскільки добуток двох парних функцій $F_1(\omega)$ і $\cos \omega t$ – функція парна, і добуток двох непарних функцій $F_2(\omega)$ і $\sin \omega t$ – теж парна функція. В цьому випадку границі інтегрування можна взяти від 0 до ∞ і подвоїти результати, тобто

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (3.22)$$

Оскільки для $t < 0$ $f(t) = 0$, то

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos(-\omega t) + F_2(\omega) \sin(-\omega t)] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F_1(\omega) \cos \omega t - F_2(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0. \end{aligned}$$

Тому

$$\int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (3.23)$$

З урахуванням (3.23) вираз (3.22) набуває вигляду

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (3.24)$$

Таким чином, функцію часу можна визначити, знаючи тільки дійсну складову спектральної характеристики.

Припустимо, що дійсна частина спектральної характеристики має вигляд трапеції (рис. 3.6).

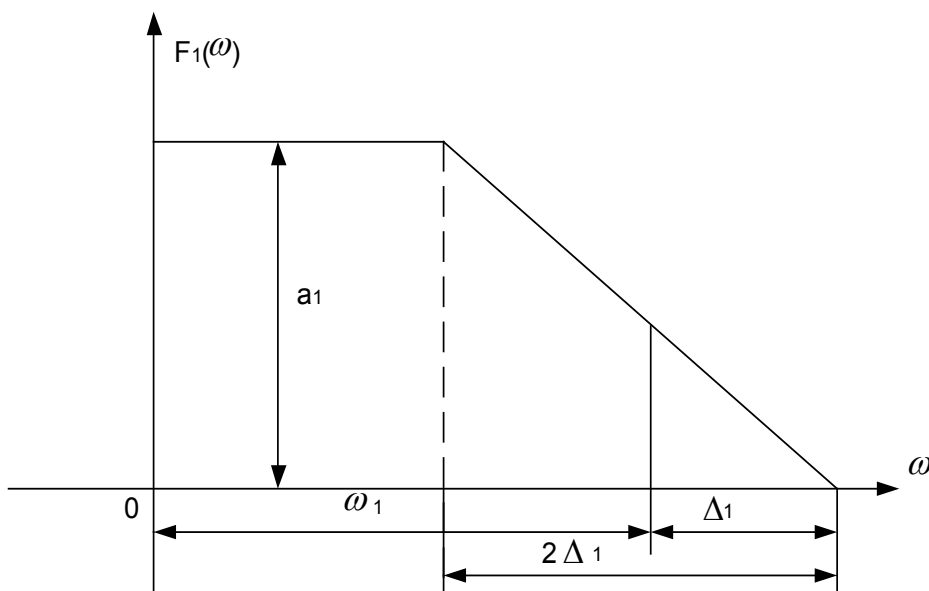


Рисунок 3.6

Застосуємо до (3.24) формулу інтегрування частинами, позначивши

$$u = F_1(\omega), \quad dv = \frac{1}{t} d(\sin \omega t).$$

Тоді

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \frac{1}{t} d(\sin \omega t) = \frac{2}{\pi t} [F_1(\omega) \sin \omega t]_0^{\infty} - \frac{2}{\pi t} \int_0^{\infty} \sin \omega t \frac{dF_1(\omega)}{d\omega} d\omega.$$

При $\omega = 0$ і $\omega = \infty$ перша складова перетворюється в нуль. Похідна $\frac{dF_1(\omega)}{d\omega}$ відрізняється від нуля тільки на інтервалі $\omega_1 - \Delta_1 < \omega < \omega_1 + \Delta_1$, де

вона має значення $-\frac{a_1}{2\Delta_1}$, тому

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{2}{\pi t} \int_{\omega_1 - \Delta_1}^{\omega_1 + \Delta_1} \left(-\frac{a_1}{2\Delta_1}\right) \sin \omega t d\omega = \frac{a_1}{\pi \Delta_1 t^2} [\cos(\omega_1 - \Delta_1)t - \cos(\omega_1 + \Delta_1)t] = \\ &= 2 \frac{a_1 \omega_1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \cdot \frac{\sin \Delta_1 t}{\Delta_1 t}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Якщо функція $F_1(\omega)$ має більш складний вигляд, наприклад, як показано на рис. 3.7, а,

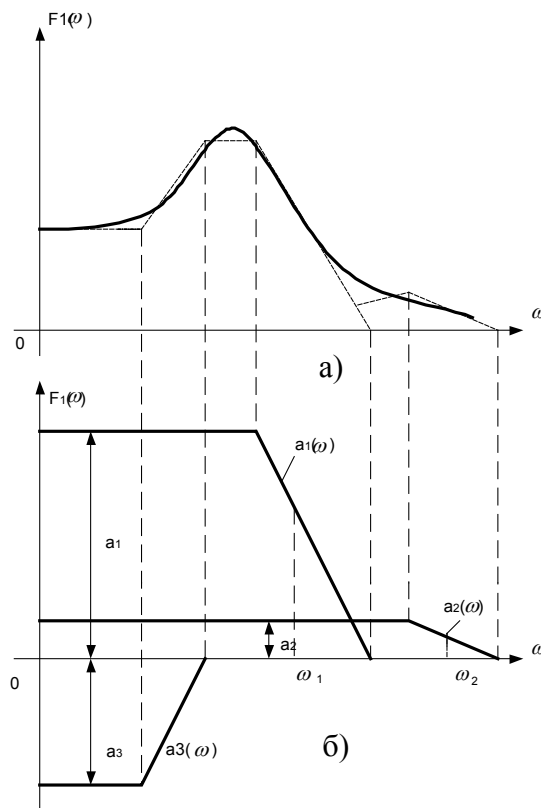


Рисунок 3.7

то її приблизно можна зобразити у вигляді суми декількох трапецій (рис. 3.7, б). Тоді $F_1(\omega) = \sum a_i(\omega)$ і

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i t} \cdot \frac{\sin \Delta_i t}{\Delta_i t}. \quad (3.26)$$

Контрольні питання та вправи

1. У чому полягає подібність перетворень Фур'є і Лапласа?
2. В яких випадках більш доцільно застосовувати для розрахунку перехідних процесів перетворення Фур'є, а для яких – перетворення Лапласа?
3. Знайти спектральну характеристику напруги у вигляді прямокутного імпульсу (рис. 3.3, б).

Відповідь: $E(j\omega) = \frac{2}{\omega} e^{-j\frac{\omega t_1}{2}} \sin \frac{\omega t_1}{2}$.

4. Які умови повинна задовольняти функція $f(t)$, щоб її можна було перетворити за Фур'є?
5. Чому розрахунок перехідних процесів частотним методом проводиться, як правило, наближеними методами?

4 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ПРИ ДОВІЛЬНИХ ДІЯХ

4.1 Одинична функція і перехідна характеристика кола

Одинична східчаста функція (рис. 4.1, а), яка називається функцією Хевісайда, визначається так:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ 1, & t > 0 . \end{cases} \quad (4.1)$$

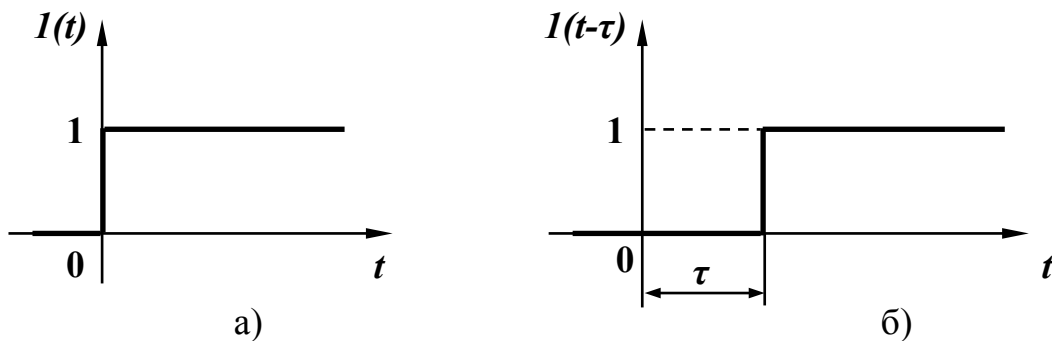


Рисунок 4. 1

За допомогою одиничної функції дія будь-якої напруги на коло може бути описано як добуток

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ f(t), & t > 0 . \end{cases}$$

Якщо коло в момент $t = 0$ вмикається на постійну напругу U_0 , то це можна описати добутком

$$U_0 \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ U_0, & t > 0 . \end{cases}$$

Цей вираз вказує на те, що напруга зростає від нуля до U_0 стрибком в момент вмикання ($t=0$), далі діє безперервно, залишаючись постійною, тобто відпадає необхідність у використанні ключа.

Якщо дія (вхідний сигнал) подається на коло з запізненням на час τ , то його потрібно записувати з допомогою одиничної функції (рис. 4.1, б) з аргументом з запізненням ($t - \tau$)

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ 1, & t > \tau . \end{cases} \quad (4.2)$$

Добуток

$$U_0 \cdot 1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ U_0, & t > \tau \end{cases}$$

вказує на те, що напруга величиною U_0 вмикається в коло в момент часу $t = \tau$.

Реакція кола на одиничну східчасту функцію при нульових початкових умовах називається перехідною характеристикою кола і позначається $h(t)$. Під нульовими початковими умовами розуміють нульові значення незалежних початкових умов.

З електротехнічної точки зору дія одиничної східчастої напруги на коло рівноцінна вмиканню кола в момент $t = 0$ під постійну напругу 1 В. Таким чином для визначення перехідної характеристики кола $h(t)$ слід знайти необхідну реакцію (згідно з умовою задачі), розраховавши перехідний процес в колі (рис. 4.2) (початкові умови нульові).

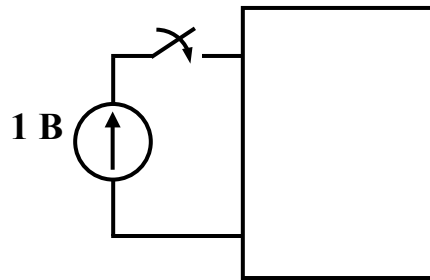


Рисунок 4. 2

Такий розрахунок можна проводити як класичним, так і операторним методом. Знайдена реакція і буде шуканою перехідною характеристикою $h(t)$.

Наприклад, при вмиканні кола, яке складається з послідовно з'єднаних опору R і індуктивності L , на напругу складної форми, де як реакцію потрібно знайти струм, перехідною характеристикою є струм від дії постійної напруги на вході 1 В. Оскільки струм в такому колі від дії постійної напруги U , як відомо, дорівнює

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right),$$

то перехідна характеристика

$$h(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right). \quad (4.3)$$

В складних колах зручно спочатку знаходити зображення перехідної характеристики $H(s)$, а потім, за теоремою розкладання, визначати $h(t)$.

Подамо будь-яке коло у вигляді чотириполосника (рис. 4.3, а), до якого прикладена деяка дія $f(t)$ і реакція на цю дію на виході $x(t)$. Для знаходження зображення реакції $X(p)$ перерисуємо схему в операторній формі (рис. 4.3, б).

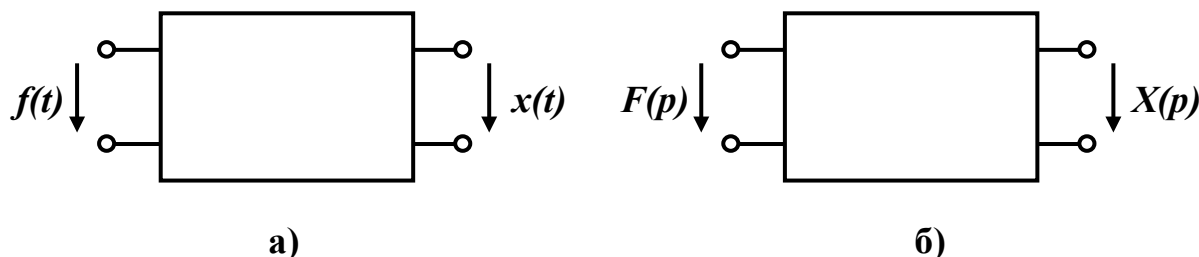


Рисунок 4. 3

Оскільки початкові умови нульові, то ніяких додаткових е.р.с. в чотириполоснику не з'являється і зв'язок між зображеннями реакції $X(p)$ і дії $F(p)$ записується у вигляді:

$$X(p) = K(p)F(p), \quad (4.4)$$

де $K(p)$ – передаточна функція кола, яка залежить лише від параметрів кола та вигляду їх з'єднання між собою.

Якщо дія є одиничною східчастою функцією $1(t)$, то її зображення можна знайти, використовуючи інтеграл Лапласа

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{p}; \quad 1(t) \doteq \frac{1}{p}. \quad (4.5)$$

Тоді зображення перехідної характеристики визначається за виразом

$$H(p) = \frac{K(p)}{p}. \quad (4.6)$$

Приклад 4.1. Знайти перехідну характеристику для напруги на ємності в колі, яке зображене на рисунку 4.4, а.

Подамо схему в операторній формі (початкові умови нульові, рис. 4.4, б) і виразимо напругу $U_C(p) = U_2(p)$ через вхідну напругу $U_1(p)$.

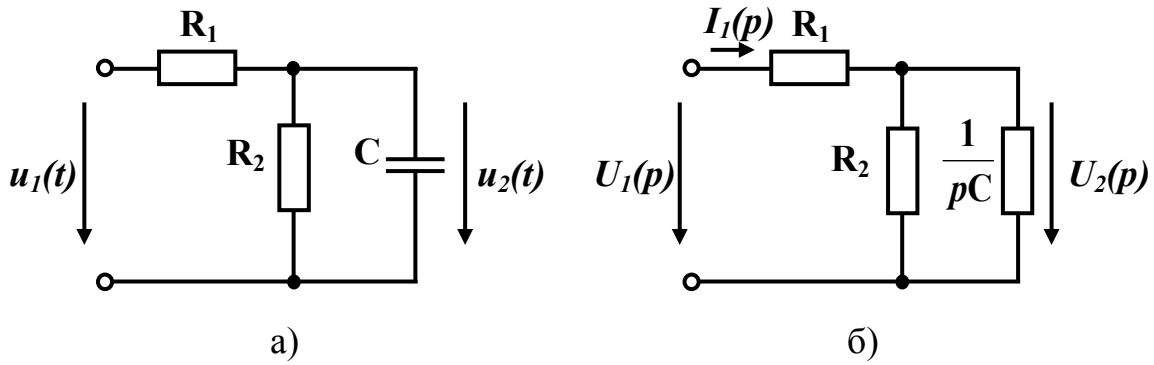


Рисунок 4.4

Вхідний струм

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}} = \frac{U_1(p)}{R_1 + \frac{R_2}{R_2 Cp + 1}} = \frac{U_1(p)(R_2 Cp + 1)}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

Шукана напруга

$$U_2(p) = I_1(p) \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = I_1(p) \frac{R_2}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_1(p) R_2}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

Враховуючи, що $F(p) = U_1(p)$, $X(p) = U_2(p)$, передаточна функція кола

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2},$$

зображення перехідної характеристики для напруги на ємності, згідно з (4.6),

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{R_2}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}.$$

Використовуючи теорему розкладання, знаходимо оригінал перехідної характеристики

$$h(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}.$$

Знаючи перехідну характеристику, легко визначити значення $u_C(t)$ при будь-якій величині постійної вхідної напруги. Дійсно, якщо на вході включена постійна напруга U_1 , то

$$u_2(t) = U_1 h(t).$$

4.2 Використання перехідних характеристик для розрахунку перехідних процесів

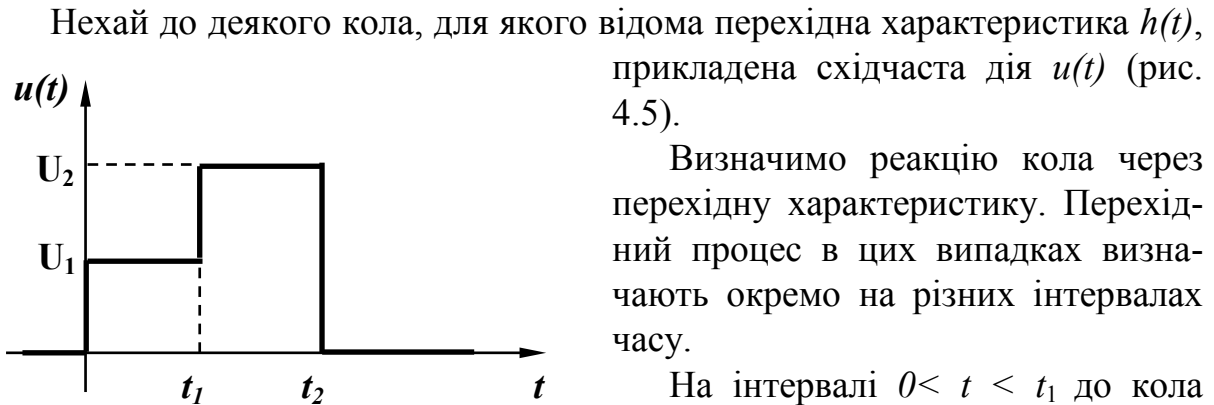


Рисунок 4. 5

Визначимо реакцію кола через перехідну характеристику. Перехідний процес в цих випадках визначають окремо на різних інтервалах часу.

На інтервалі $0 < t < t_1$ до кола прикладена постійна напруга U_1 , тому

$$x(t) = U_1 h(t), \quad 0 < t < t_1. \quad (4.7)$$

На інтервалі $t_1 < t < t_2$ продовжує діяти постійна напруга U_1 , відповідно, існує реакція на цю напругу $U_1 h(t)$. В момент часу t_1 додатково підключається постійна напруга $(U_2 - U_1)$, і з'являється складова реакції від цього стрибка напруги, яка зміщена на час t_1 , тобто $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$. Таким чином, загальна реакція на цьому інтервалі

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1), \quad t_1 < t < t_2. \quad (4.8)$$

На інтервалі $t_2 < t < \infty$ реакція кола складається з трьох складових:

- продовжує діяти напруга U_1 – реакція $U_1 h(t)$;
- продовжує діяти постійна напруга $(U_2 - U_1)$, яка виникає в момент t_1 – реакція $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$;
- в момент $t = t_2$ з'являється постійна напруга $(-U_2)$, реакція від якої $(-U_2)h(t - t_2)$.

Таким чином, для $t_2 < t < \infty$

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1) - U_2 h(t - t_2), \quad t > t_2. \quad (4.9)$$

4.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних діях

Такий підхід до визначення реакції кола на східчасту дію дозволяє розглядати перехідний процес при будь-яких складних діях.

Розглянемо знаходження реакції кола, перехідна характеристика $h(t)$ якого відома, при вмиканні його до джерела напруги $u(t)$ довільної форми (рис. 4.6) при нульових початкових умовах.

Виберемо деякий довільний фіксований момент спостереження t і розрахуємо реакцію (струм або напругу) до цього часу. Не дивлячись на те, що момент вибирається довільно, він фіксується і стає постійною величиною – параметром. В зв'язку з цим вводиться нове позначення змінного часу τ , який змінюється в межах $0 < \tau < t$.

Подамо прикладену напругу у вигляді східчастої дії, коли через однакові проміжки часу $\Delta\tau = t/n$ додаються сходинки напруги Δu_k (n відповідає числу сходинок, за допомогою яких подається вихідна дія).

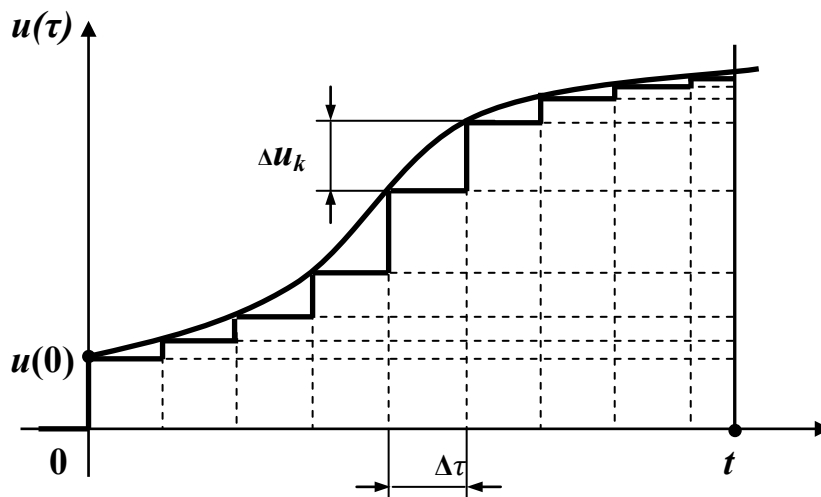


Рисунок 4. 6

Дію сходинок на коло описуємо за допомогою одиничних функцій. На проміжку часу $0 < t < \Delta\tau$ реакція кола від дії напруги $u(0)l(t)$, тобто від нульової сходинки, яка наближено заміняє напругу на цьому проміжку,

$$x(t) \approx u(0)h(t);$$

на проміжку $\Delta\tau < t < 2\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_1 l(t - \Delta\tau)$, тобто від першої сходинки

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau);$$

на проміжку $2\Delta\tau < t < 3\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_2 l(t - 2\Delta\tau)$, тобто від другої сходинки

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau);$$

на проміжку часу $n \Delta\tau < t < (n+1) \Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_n I(t - n\Delta\tau)$, тобто від дії n -ої сходинки

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta u_k h(t - k\Delta\tau) + \dots + \Delta u_n h(t - n\Delta\tau)$$

або

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k h(t - k\Delta\tau). \quad (4.10)$$

Вираз (4.10) дає наближене значення реакції кола $x(t)$, оскільки справжня крива $x(t)$ замінена східчастою.

Для одержання точного значення реакції кола спрямовуємо $\Delta\tau$ до нескінченно малої величини $d\tau$. Тоді

$$\Delta u_k = \frac{\Delta u_k}{\Delta\tau} \Delta\tau \rightarrow u'(\tau) d\tau,$$

$$k\Delta\tau \rightarrow \tau.$$

Сума в (4.10) перетворюється на інтеграл з межами інтегрування від нуля до t , тобто

$$x(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (4.11)$$

Вираз (4.11) називають інтегралом накладання або інтегралом Дюамеля.

Приклад 4.2. Визначити закон зміни напруги на ємності в колі (рис. 4.7) при дії експоненціальної напруги

$$u(t) = Ue^{-\beta t}.$$

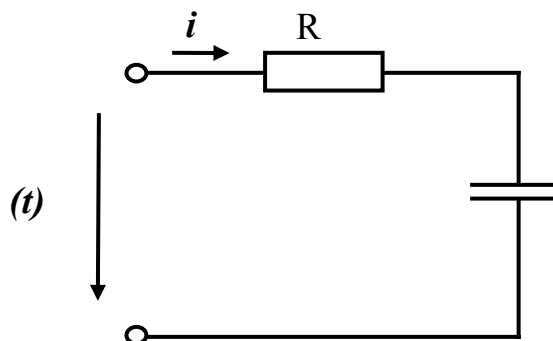


Рисунок 4.7

Перехідна характеристика цього кола для напруги на ємності

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t}; \quad \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Визначимо всі величини, які входять в інтеграл Дюамеля (4.11).

$$u(0) = U; \quad u'(\tau) = (Ue^{-\beta\tau})' = -\beta Ue^{-\beta\tau};$$

$$h(1-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Відмітимо, що змінною інтегрування в (4.11) є змінна τ , тому t при знаходженні інтеграла розглядається як стала величина. Підставимо одержані величини в (4.11)

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t (-\beta)Ue^{-\beta\tau}(1 - e^{-\alpha(t-\tau)})d\tau = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\int_0^t e^{-\beta\tau} d\tau - \int_0^t e^{-\beta\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\left(\frac{1}{-\beta} e^{-\beta\tau} \right)_0^t - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + \frac{1}{\beta} \right) + \beta U e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)\tau} \right)_0^t = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \\ &= U - Ue^{-\alpha t} + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} - \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} = \\ &= Ue^{-\beta t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) - Ue^{-\alpha t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha U}{\alpha - \beta} (Ue^{-\beta t} - Ue^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним виразом (рис. 4.8).

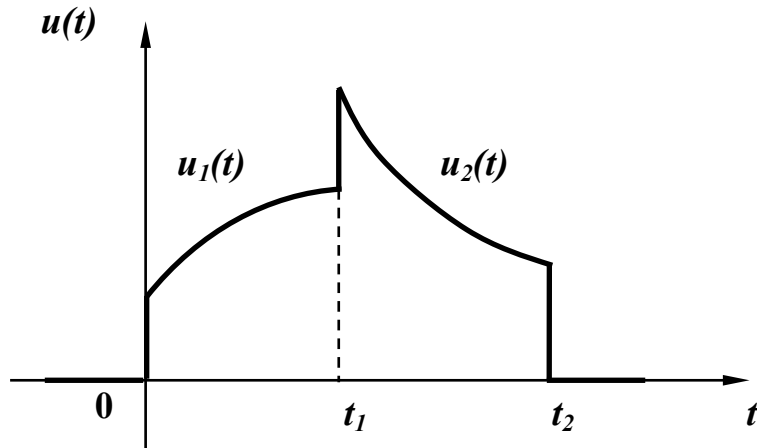


Рисунок 4.8

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t < t_1, \\ u_2(t), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2, \end{cases}$$

то реакцію кола слід визначити для кожного інтервалу часу, де діє відповідна напруга.

Для $0 < t < t_1$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

При визначенні реакції кола на інтервалі $t_1 < t < t_2$ враховуємо такі обставини:

– продовжує діяти реакція кола на напругу $u_1(t)$, яка існує до моменту часу t_1 , тому верхня межа цього інтеграла буде t_1 ;

– при визначенні реакції від напруги $u_2(t)$ потрібно пам'ятати, що ця напруга діє на коло з моменту часу t_1 , тому нижня межа даного інтервалу t_1 ;

– в момент t_1 вхідна напруга стрибком змінюється від $u_1(t_1)$ до $u_2(t_1)$, тому цей стрибок враховується при визначенні реакції як дія постійної напруги $(u_2(t_1) - u_1(t_1))$ в момент t_1 .

Таким чином для $t_1 < t < t_2$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Для часу $t > t_2$ враховується стрибок напруги $(0 - u_2(t_2))$ в момент t_2 і перестає діяти в цей же момент напруга $u_2(t)$.

Для $t > t_2$

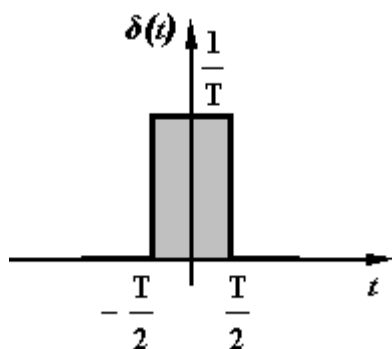
$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (0 - u_2(t_2))h(t-t_2).$$

4.4 Імпульсна функція і імпульсна характеристика кола

Імпульсною характеристикою кола називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію при нульових початкових умовах.

Одинична імпульсна функція, її ще називають функцією Дірака або δ -функцією, характеризується тим, що її площа дорівнює одиниці, величина імпульсна прямує до нескінченності при $t \rightarrow 0$, а при всіх інших значеннях t вона дорівнює нулю.

На рисунку 4.9 показаний імпульс шириною T і висотою $1/T$, площа якого дорівнює одиниці.



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Рисунок 4.9

Одиничну імпульсну функцію $\delta(t)$ одержують з цього імпульсу при $T \rightarrow 0$. Для δ -функції справедливе співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1, \quad (4.13)$$

якщо $t_1 < 0$, $t_2 > 0$. Добре видно, що

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

отже

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t),$$

або

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (4.14)$$

Якщо взяти добуток функцій $f(t)$ на $\delta(t)$, то цей добуток при всіх $t \neq 0$ перетворюється на нуль, а при $t = 0$ має значення $f(0)\delta(t)$, тобто

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Відповідно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0). \quad (4.15)$$

Операторне зображення δ -функції

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt} dt = e^{-p \cdot 0} \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.16)$$

Враховуючи одержане співвідношення та означення імпульсної характеристики, можна стверджувати, що операторне зображення імпульсної характеристики дорівнює зображенню передаточної функції.

Якщо позначити зображення імпульсної характеристики $g(t)$ через $G(p)$, то

$$G(p) = K(p). \quad (4.17)$$

Для кола, яке розглядалося вище (рис. 4.4, а),

$$G(p) = K(p) = \frac{R_2}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2} \quad \text{і} \quad g(t) = \frac{1}{R_1 C} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}.$$

Якщо на вході кола (рис. 4.4, а) діє імпульс напруги, площа якого дорівнює A , тобто $u_1(t) = A\delta(t)$, то напруга на ємності $u_2(t) = Ag(t)$.

4.5 Розрахунок перехідних процесів при довільних діях з використанням імпульсної функції

Знайдемо вираз для знаходження реакції кола від дії напруги довільної форми з використанням імпульсної характеристики. В цьому випадку задану дію розбиваємо на n прямокутних імпульсів (рис. 4.10) шириною $\Delta\tau$ і висотою u_k . Площа будь-якого імпульсу $u_k \times \Delta\tau$.

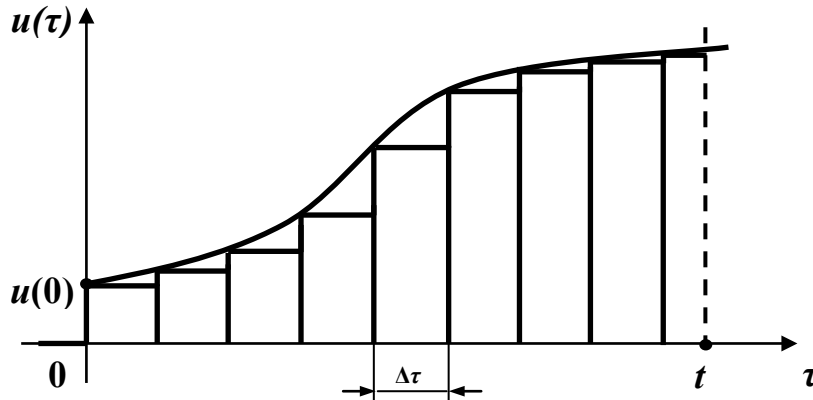


Рисунок 4. 10

Реакція кола від дії окремого k -го імпульсу визначається як добуток площі імпульсу на імпульсну характеристику, яка зміщена на $k\Delta\tau$, тобто

$$\Delta x_k = u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau) . \quad (4.18)$$

Реакція кола від заданої дії в момент часу t наближено подається як сума реакцій від дії n імпульсів.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau) . \quad (4.19)$$

При $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ сума перетворюється на інтеграл, $k\Delta\tau \rightarrow \tau$, дискретні значення u_k стають неперервними миттєвими значеннями $u(\tau)$, тому

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau . \quad (4.20)$$

Приклад 4.3. Визначимо напругу на ємності через імпульсну характеристику для кола (рис. 4.7) при вхідній напрузі $u(t) = Ue^{-\beta \cdot t}$.

Знайдемо імпульсну характеристику кола для напруги на ємності.

Напруга на ємності в операторній формі

$$U_c(p) = \frac{U(p) \frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{U(p)}{RCp + 1}.$$

Передаточна функція кола отже, і зображення імпульсної характеристики

$$K(p) = G(p) = \frac{1}{RCp + 1}.$$

Оригінал цього зображення

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}.$$

Якщо позначити $\alpha = \frac{1}{RC}$, то $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$.

Підставляємо всі дані в (4.20), одержуємо

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \int_0^t U e^{-\beta \tau} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta) \cdot \tau} d\tau = U \alpha e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta} \right) \Bigg|_0^t = \\ &= U \alpha e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha-\beta} \left(e^{(\alpha-\beta) \cdot t} - 1 \right) = \frac{U \alpha}{\alpha-\beta} \left(e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t} \right). \end{aligned}$$

При розв'язанні задачі (рис. 4.8) з використанням інтеграла Дюамеля, записаного через імпульсну характеристику (4.20), стрибки напруги в моменти t_1 і t_2 враховуються самими функціями $u_1(t)$ і $u_2(t)$ безпосередньо при інтегруванні, тобто

$$\text{для } 0 < t < t_1 \quad x(t) = \int_0^t u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

$$\text{Для } t_1 < t < t_2 \quad x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

$$\text{Для } t > t_2 \quad x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

5 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

5.1 Загальна характеристика нелінійних елементів і нелінійних електричних кіл

При розгляді лінійних електричних кіл допускалося, що параметри всіх елементів – резистивних, ємнісних і індуктивних – є постійними величинами і характеризуються відповідними значеннями цих параметрів – опору r , ємності C і індуктивності L .

Існує широкий клас елементів, параметри яких залежать від струмів або прикладених до них напруг. Такі елементи називаються *нелінійними*. Для кількісного опису властивостей нелінійних елементів потрібно задавати залежності, що їх називають характеристиками. Звичайно, ці залежності знаходять за результатами досліду і подають у вигляді графіків (рис. 5.1, а). Нелінійні елементи можуть бути резистивними, ємнісними, індуктивними. Нелінійні резистори, ємності та індуктивності позначаються так, як показано на рисунку 5.1, б).

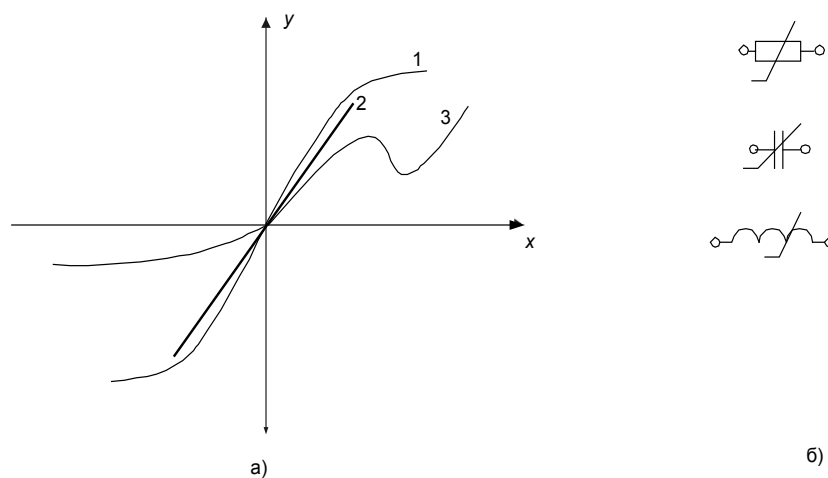


Рисунок 5.1

Для резистора $y=u$, $x=i$ і характеристика називається *вольт-амперною* (в.а.х.), для ємності $y=q$, $x=u$ – характеристика *кулон-вольтна*, для індуктивності $y=\psi$, $x=i$ – характеристика *вебер-амперна*.

На рисунку 5.1, а криві 1, 3 є характеристиками нелінійних елементів, а пряма 2 – характеристикою лінійного елемента.

Для кожної точки нелінійної характеристики можна ввести поняття статичного і динамічного параметрів (рисунку 5.2).

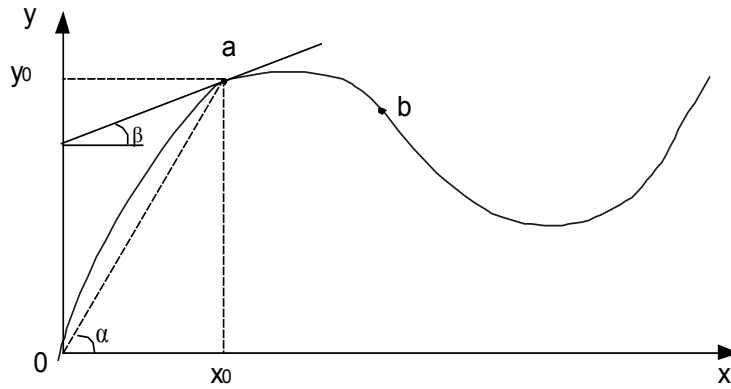


Рисунок 5.2

Під статичним опором в точці a розуміють відношення постійної напруги нелінійного елемента в цій точці до постійного струму, який відповідає цій точці, тобто

$$r_{cm} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Відповідно для ємності $C_{cm} = \frac{q_0}{U_0},$

для індуктивності $L_{cm} = \frac{\psi_0}{I_0}.$

Статичні параметри пропорційні тангенсу кута α і завжди додатні.

Під динамічним опором розуміють відношення малого приросту напруги в точці a до відповідного приросту струму

$$R_d = \frac{du}{di}.$$

Аналогічно

$$C_d = \frac{dq}{du}, \quad L_d = \frac{d\psi}{di}.$$

Динамічні параметри пропорційні тангенсу кута β (кута між (точка a), так і від'ємні (точка b) на спадних ділянках характеристик. Крім того, розрізняють нелінійні елементи за типом характеристик:

- з симетричною відносно початку координат (крива 1 на рисунку 5.1) і несиметричною (крива 2 на рисунку 5.1) характеристиками

- з монотонною (крива 1 на рисунку 5.1, а), коли нахил кривої (похідна di/du) не змінює свого знака, і немонотонною (крива 3 на рисунку 5.1, а) характеристиками;

- з однозначною (крива 1 на рисунку 5.1, а), коли кожному значенню змінної x відповідає єдине значення функції y , і неоднозначною (рисунок 5.3) характеристиками.

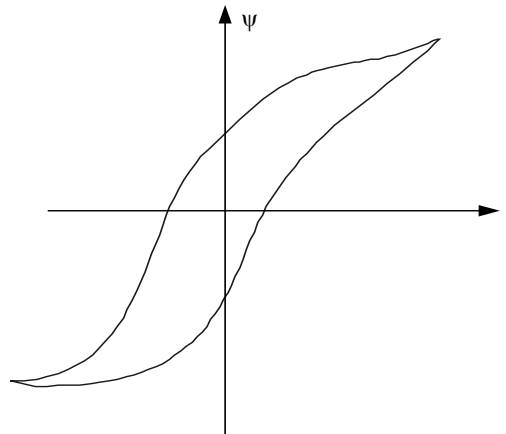


Рисунок 5.3

Наведемо деякі конкретні нелінійні елементи та їх характеристики.

На рисунку 5.4, а показаний напівпровідниковий діод і його характеристика.

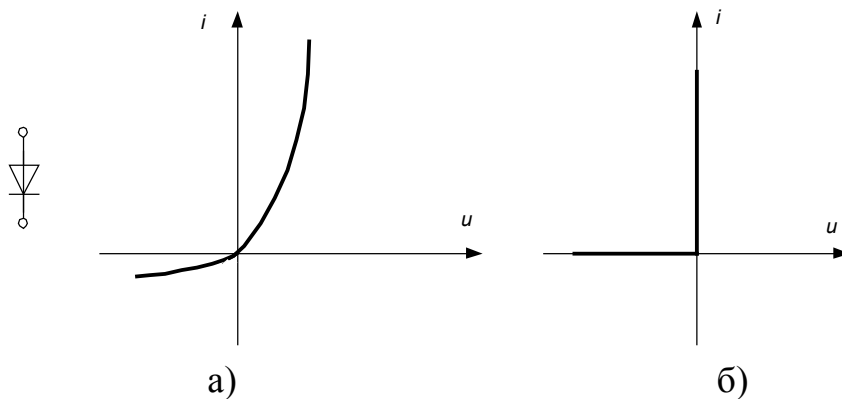


Рисунок 5.4

При додатній напрузі опір діода малий, а при від'ємній – великий. Часто опір діода в прямому напрямі приймають таким, що дорівнює нулю, а у зворотному напрямі – нескінченності. Характеристика такого діода показана на рисунку 5.4, б, а діод називають ідеальним.

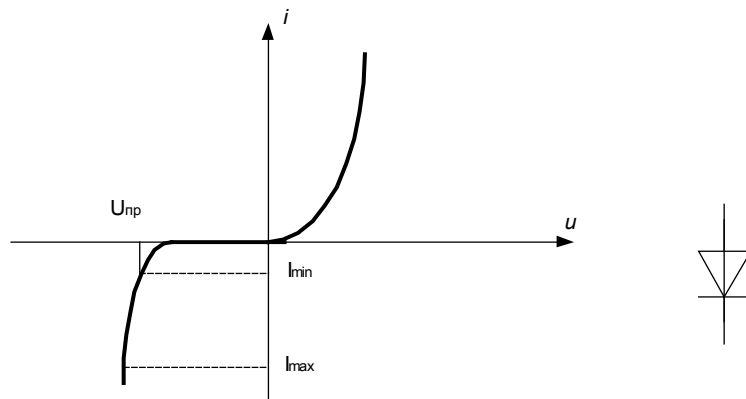


Рисунок 5.5

На рисунку 5.5 показаний напівпровідниковий стабілітрон і його характеристика. При напрузі $u=U_{пр}$ характеристика має круту лінійну ділянку, на якій значна зміна струму не приводить до зміни напруги.

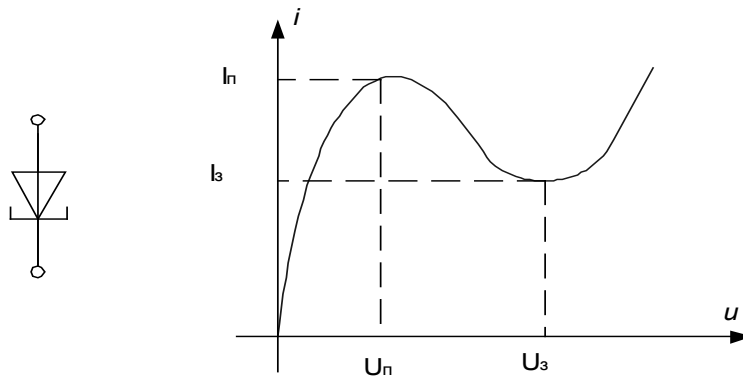


Рисунок 5.6

На рисунку 5.6 показана характеристика тунельного діода, на якій відмічено: піковий струм I_n і пікова напруга U_n , струм I_z і напруга U_z западини.

Сім'я характеристик, яка показана на рисунку 5.7, стосується біполярного транзистора, який є нелінійним керованим елементом, його характеристика може змінюватися залежно від управляльної дії, в даному випадку струму бази.

Електричне коло, яке містить хоч би один нелінійний елемент, називається **нелінійним** електричним колом.

Процеси в нелінійних електричних колах відрізняються складністю і багатосторонністю. Перерахуємо деякі з найбільш відомих явищ, які властиві лише нелінійним колам і принципово неможливі в лінійних колах.

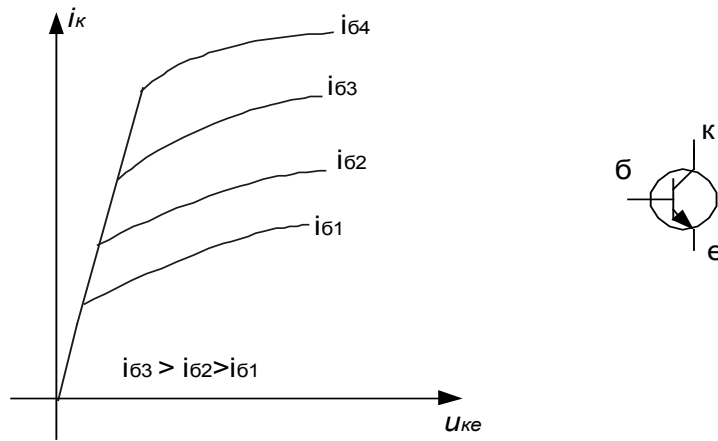


Рисунок 5.7

1. При прикладеній на вході синусоїдній дії на виході з'являється сигнал несинусоїдної форми, що дозволяє здійснювати перетворення частоти або випрямлення змінного струму.

2. При зміні рівня вхідного сигналу або величини навантаження в широкому діапазоні напруги або струми навантаження можуть залишатися практично постійними, тобто, можна здійснювати стабілізацію напруги або струму.

3. В лінійному колі з заданими параметрами та зовнішньою дією усталений режим встановлюється завжди один і той же, незалежно від початкових умов. В нелінійних колах можливе існування декількох усталених станів рівноваги, стійких чи нестійких. Тому в нелінійних колах, залежно від початкових умов, усталений режим може бути не єдиним.

4. В нелінійних колах при наявності джерела постійної напруги можливе існування автоколивань, тобто виникнення періодичних коливань, що дозволяє створювати генератори періодичних напруг різної форми.

5. При плавній зміні напруги вхідного сигналу або частоти в нелінійних колах можуть мати місце стрибкоподібні зміни напруг і струмів або фаз і частоти в випадку періодичного режиму.

Такі можливості нелінійних кіл обумовили їх широке використання в електротехніці, радіоелектроніці і автоматиці. Нелінійність характеристик елементів в нелінійних електричних колах приводить до того, що процеси в таких колах описуються нелійними диференціальними рівняннями, в яких невідомі змінні (напруга або струм) і їх похідні входять нелінійно, тобто не в першому степені, як у лінійних рівняннях, а довільно.

Одна з головних особливостей нелінійних кіл, з точки зору аналізу, полягає в тому, що до них не можна застосувати принцип накладання. Наслідком цього є те, що не існує скільки-небудь загальних засобів аналітичного розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, навіть першого порядку. Тому аналіз процесів в нелінійних колах проводиться, як правило, наближеними методами.

5.2 Розрахунок електричних кіл постійного струму з нелінійними резисторами

а) Графічний метод

Якщо коло містить всього одне джерело і один нелінійний елемент з відомою вольт-амперною характеристикою (рис. 5.8, а), то при відомій е.р.с. джерела E легко графічно за допомогою характеристики знайти струм I в колі (рисунок 5.8, б).

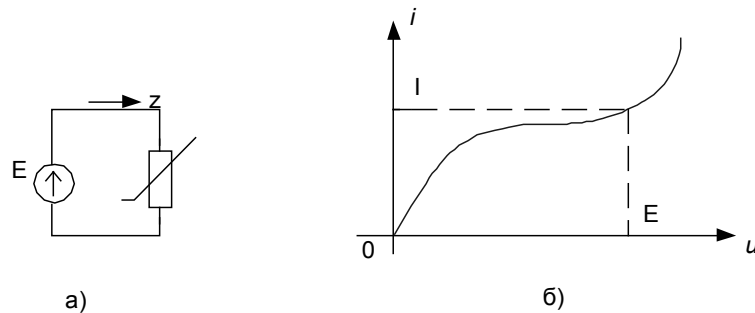


Рисунок 5.8

Таким чином, суть графічного методу полягає в тому, що шляхом графічних побудов визначається вольт-амперна характеристика всього кола, що приводить складне коло з декількома резисторами до кола з одним нелінійним резистором.

Для двох послідовно з'єднаних елементів (рис. 5.9, а) з вольт-амперними характеристиками, які показані на рисунку 5.9, б, будується графічно вольт-амперна характеристика всього кола.

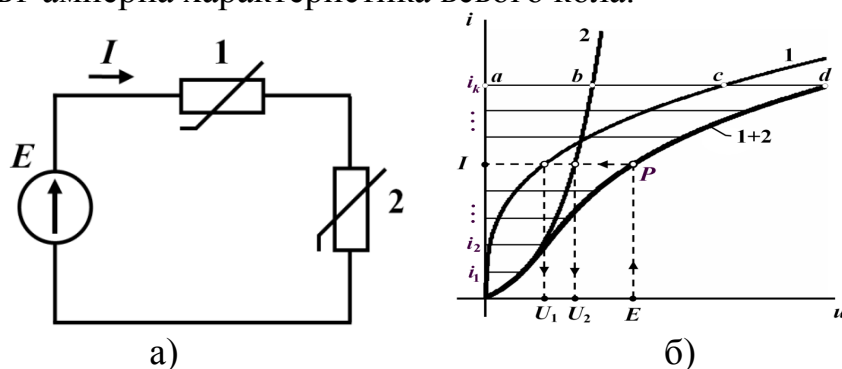


Рисунок 5.9

Оскільки при послідовному з'єднанні струм через елементи протікає один і той самий, то точки загальної в.а.х. визначаються складанням напруг елементів 1 і 2 при різних значеннях струмів. Так, наприклад, точка d загальної характеристики одержана складанням відрізків ab і ac , тобто, $ad=ab+ac$.

При більшому числі послідовно з'єднаних елементів додається відповідне число відрізків. Ця ж задача може бути розв'язана також графічно, але іншим методом – графічним розв'язанням рівнянь. Задану вольт-амперну характеристику (рис. 5.10)

$$i = f(u_n) \quad (5.1)$$

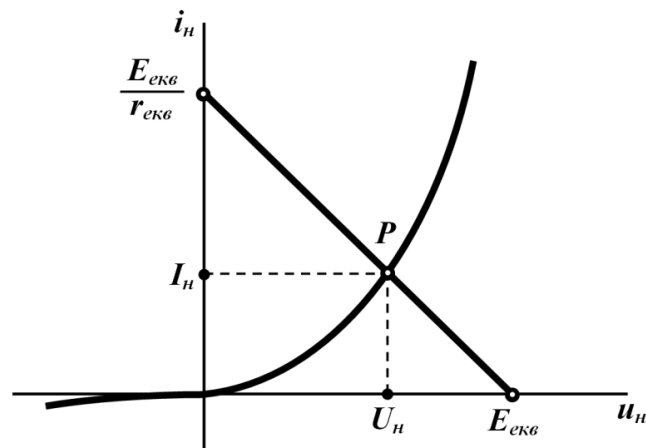


Рисунок 5.10

вважаємо одним рівнянням з двома невідомими: струмом I і напругою нелінійного елемента U_n . Друге рівняння для визначення невідомих одержуємо з другого закону Кірхгофа $i r = u_{не} - E$, або

$$i = \frac{E}{r} - \frac{u_{не}}{r}. \quad (5.2)$$

Рівняння (5.2) – рівняння прямої лінії, яка легко будується на тому ж рисунку 5.10. Точка перетину графіків рівнянь (5.1) і (5.2) дає розв’язок.

Якщо елементи в колі з’єднані паралельно (рис. 5.11, а), то точки загальної характеристики знаходяться додаванням ординат окремих в.а.х., тобто при одних і тих же напругах на елементах (рис. 5.11, б).

Загальний струм I знаходиться при заданій е.р.с. E за допомогою загальної в.а.х., а струми в вітках – за відповідними в.а.х. елементів (рис. 5.11, б).

При змішаному з’єднанні елементів (рис. 5.12, а) спочатку будується характеристика паралельно з’єднаних елементів (пунктир на рисунку 5.12, б), а потім – в.а.х. всього кола (жирна лінія на рисунку 5.12, б).

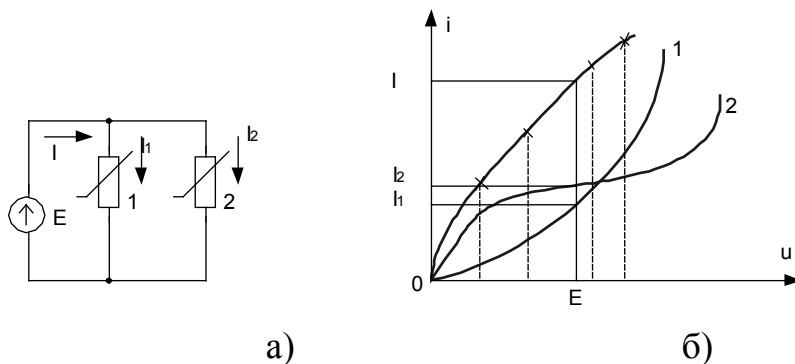


Рисунок 5.11

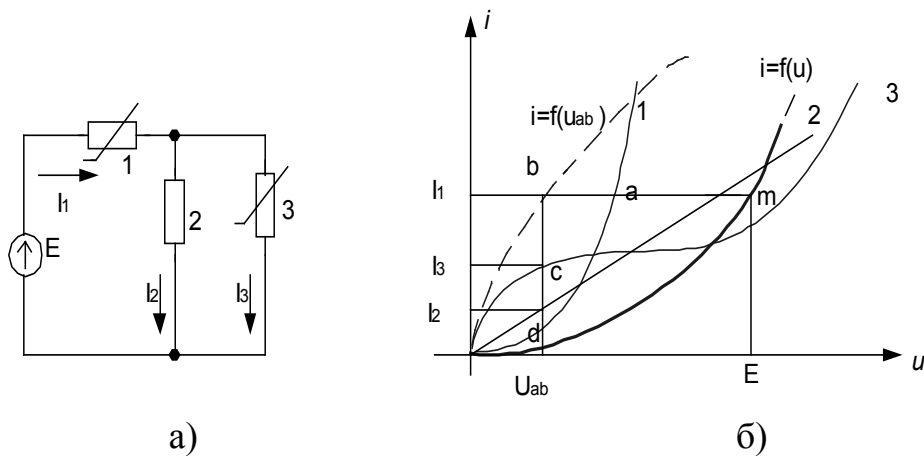


Рисунок 5.12

Вхідний струм I_1 визначається за в.а.х. всього кола за заданою е.р.с. E (точка m). Точки перетину лінії струму I_1 з характеристикою елемента 1 (точка a) і характеристикою $i=f(U_{ab})$ (точка b) визначають, відповідно, напругу на елементі 1 – U_1 і напругу U_{ab} . Точки перетину лінії напруги U_{ab} з характеристиками елемента 2 (точка d) і 3 (точка c) визначають струми I_2 і I_3 . Цей метод, деякою мірою, аналогічний методіві перетворень для лінійних кіл.

Якщо в складному колі є лише один нелінійний елемент, то задача значно спрощується, якщо вся лінійна частина замінюється еквівалентним джерелом з е.р.с. E_0 і внутрішнім опором r_0 (рис. 5.13).

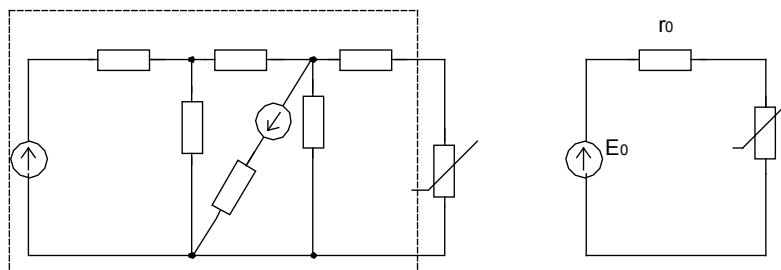


Рисунок 5.13

В тих випадках, коли в вітках з нелінійним елементом є е.р.с., зручно будувати за відповідною в.а.х. елемента в.а.х. вітки.

Нехай в вітці ab (рис. 5.14, а) послідовно з нелінійним елементом, в.а.х. якого зображена на рисунку 5.14, б суцільною лінією, присутня е.р.с. E_0 , яка направлена назустріч струмові.

Потрібно побудувати в.а.х. вітки, тобто залежність $i=f(u_{ab})$. Оскільки має місце співвідношення

$$u_{ab} = u_n + E_0, \quad (5.3)$$

неважко бачити, що кожна точка в.а.х. елемента при переході до напруги u_{ab} зміщується вправо на величину E_0 (рис. 5.14, б).

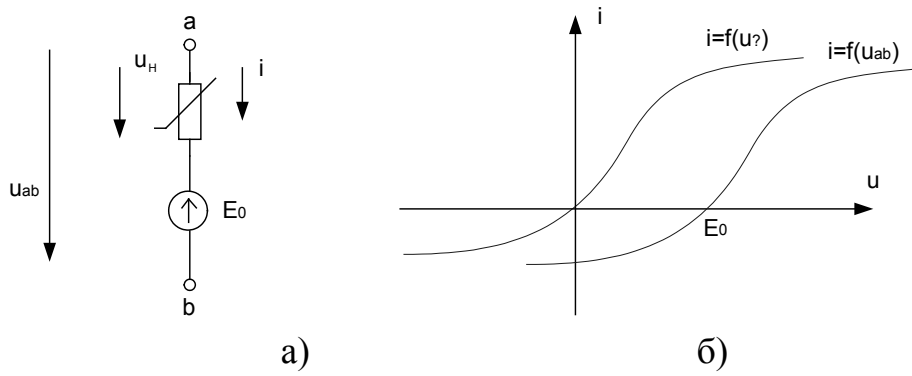


Рисунок 5.14

Якщо е.р.с. направлена як і струм, то в (5.3) змінюється знак біля E_0 і в цьому випадку в.а.х. вітки зміщується вліво на величину E_0 .

б) *Метод двох вузлів*

Можливість побудови в.а.х. віток дозволяє використовувати для нелінійних кіл метод двох вузлів при графічному розв'язанні нелінійних рівнянь.

Розглянемо цей метод на конкретному прикладі (рис. 5.15).

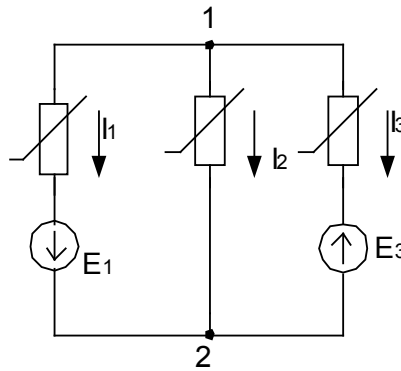


Рисунок 5.15

Всі струми направимо від точки 1 до точки 2. Характеристики елементів задані (рис. 5.16, а).

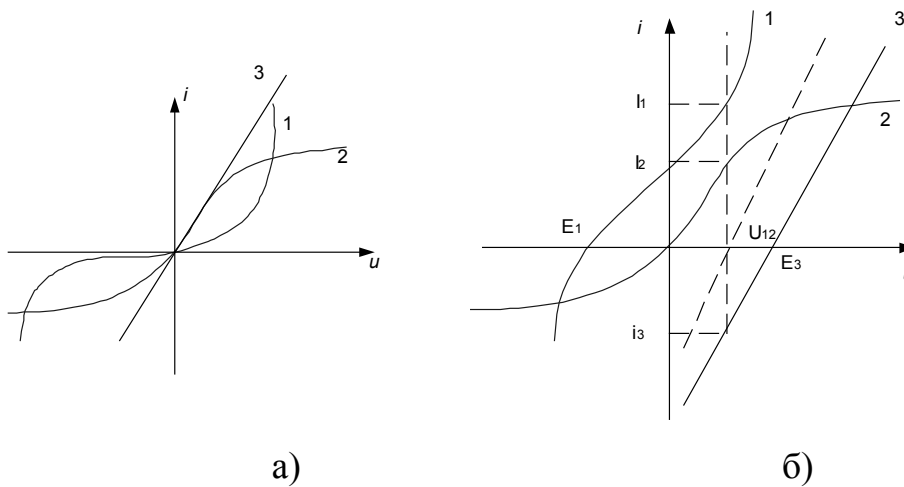


Рисунок 5.16

Побудуємо в.а.х. віток, тобто залежності струмів в вітках від напруги u_{12} . Оскільки в вітці 1 е.р.с. направлена за струмом, то в.а.х. першої вітки зміщена вліво на величину е.р.с. E_1 порівняно з в.а.х. елемента 1, в.а.х. другої вітки збігається з в.а.х. елемента 2, а в.а.х. третьої вітки зміщена вправо на величину е.р.с. E_3 (див. рис. 5.16, б).

Побудуємо нову функцію (див. пунктир на рисунку 5.16, б)

$$i_1 + i_2 + i_3 = f(u_{12}). \quad (5.4)$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (5.5)$$

тому точка перетину створеної функції (5.4) з віссю абсцис визначає напругу u_{12} і отже, за відповідними характеристиками, струми в вітках.

Графічні методи не потребують обчислень, досить прості для засвоєння, можуть використовуватися для широкого класу кіл, але громіздкі при використанні, а їх точність визначається точністю графічних побудов.

в) *Графоаналітичний метод*

В колі, яке містить джерело, лінійний і нелінійний елементи (рис. 5.17, а), визначимо струм графоаналітичним методом.

Припустимо, що заздалегідь, із якихось міркувань, приблизне положення робочої точки на в.а.х. нелінійного елемента відоме. Нехай вона знаходиться на ділянці ab (рис. 5.17, б). Замінімо криволінійну ділянку ab прямою лінією, яка перетинає вісь абсцис в точці E_0 , подаючи тим самим нелінійний елемент віткою, яка містить лінійний опір r_0 і е.р.с. E_0 . Оскільки одержана лінійна характеристика зміщена відносно початку координат вправо, то е.р.с. E_0 в вітці направлена назустріч струмові.

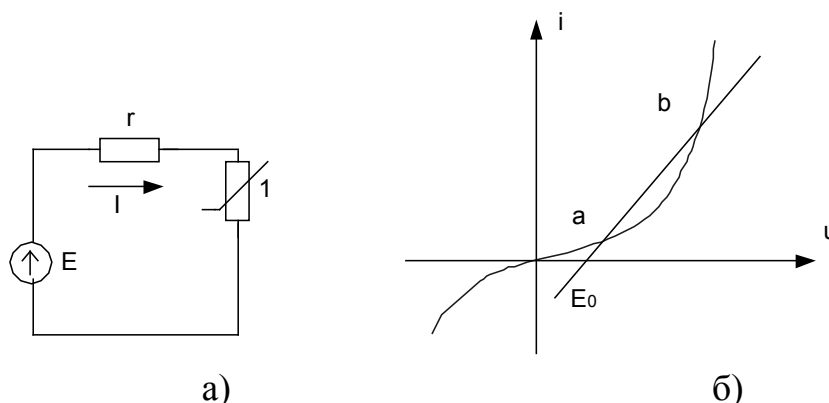


Рисунок 5.17

Таким чином, одержуємо лінійну схему заміщення (рис. 5.18), з якої легко визначаємо струм

$$I = \frac{E - E_0}{r + r_0}. \quad (5.6)$$

Необхідно тепер перевірити, чи знаходиться знайдене значення струму I на ділянці ab . Якщо ця умова виконується, то розрахунок закінчений. Якщо одержане значення струму не потрапляє на цю ділянку, то необхідно вибрати нову ділянку випрямлення і розрахунок повторити.

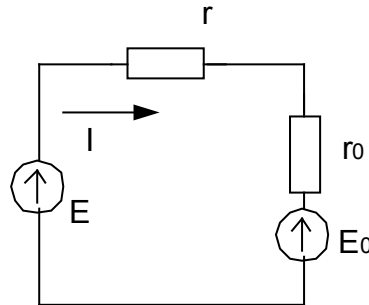


Рисунок 5.18

Якщо в електричному колі декілька нелінійних елементів, кожен із них замінюється лінійним опором з е.р.с., складається лінійна схема заміщення, робиться її розрахунок, а всі знайдені значення струмів нелінійних елементів перевіряються на відповідність їх спрямленим ділянкам характеристики.

2) Аналітичний метод

При аналітичному методі в.а.х. нелінійного елемента повинна бути задана у вигляді аналітичного виразу. Нехай, наприклад, характеристика нелінійного елемента в колі (див. рис. 5.17, а) задана виразом

$$i = a_1 u_n + a_2 u_n^2 + a_3 u_n^3, \quad (5.7)$$

де a_1, a_2, a_3 – відомі коефіцієнти.

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для цього кола

$$ir + u_n = E,$$

або, з урахуванням (5.7),

$$ra_3 u_n^3 + ra_2 u_n^2 + (ra_1 + 1)u_n - E = 0. \quad (5.8)$$

Розв'язуючи це нелінійне алгебраїчне рівняння, знаходимо u_n і за допомогою (5.7) – шуканий струм.

Розв'язок задачі і в цьому випадку наближений, тому що нелінійне алгебраїчне рівняння майже ніколи точно не розв'язується.

Одним із досить простих і ефективних методів наближеного розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь є метод Ньютона-Рафсона. Нехай маємо нелінійне алгебраїчне рівняння

$$f(x) = 0. \quad (5.9)$$

Припустимо, що x_0 – нульовий наближений розв'язок цього рівняння. Позначимо наступний наближений розв'язок

$$x_1 = x_0 + h, \quad (5.10)$$

де h – поправка до нульового наближення.

Підставимо (5.10) в (5.9) і розкладемо функцію в ряд Тейлора, обмежившись двома членами.

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0. \quad (5.11)$$

Із (5.11) знаходиться значення поправки

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

де $f'(x_0)$ – значення похідної функції $f(x)$ при $x=x_0$.

Відповідно до (5.10)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (5.13)$$

Приклад 5.1. Нехай в рівнянні (5.8) коефіцієнти мають значення: $a_1=0,5 \text{ A/B}$, $a_2=0$, $a_3=0,25 \text{ A/B}^3$, $r=10 \text{ м}$, $E=5 \text{ В}$.

Тоді (5.8) запишеться у вигляді

$$0,25u_n^3 + 1,5u_n - 5 = 0,$$

$$\text{або, позначивши } u_n = x, f(x) = 0,25x^3 + 1,5x - 5 = 0.$$

Використаємо нульові наближення $x_0 = 1$.

Перше наближення

$$x_1 = 1 - \frac{0,25 \cdot 1^3 + 1,5 \cdot 1 - 5}{0,75 \cdot 1^2 + 1,5} = 1 - (-1,444) = 2,444.$$

Друге наближення

$$x_2 = 2,444 - \frac{0,25 \cdot 2,444^3 + 1,5 \cdot 2,444 - 5}{0,75 \cdot 2,444^2 + 1,5} = 2,444 - 0,388 = 2,056.$$

Третє наближення

$$x_3 = 2,056 - \frac{0,25 \cdot 2,056^3 + 1,5 \cdot 2,056 - 5}{0,75 \cdot 2,056^2 + 1,5} = 2,056 - 0,055 = 2,001.$$

Наступного наближення можна не знаходити, оскільки x_2 і x_3 мало відрізняються одне від одного. Точний розв'язок рівняння $x_0=2$.

Таким чином

$$U_n = 2B, \quad i = 0,5 \cdot 2 + 0,25 \cdot 2^3 = 3A.$$

Якщо в.а.х. подати не степеневим поліномом, а іншими функціями (показниковими, логарифмічними тощо), процедура розв'язання залишається незмінною.

5.3 Деякі використання нелінійних кіл постійного струму

а) Стабілізація напруги на навантаженні

Для стабілізації напруги на навантаженні при зміні величини постійної вхідної напруги або зміні опору навантаження використовуються стабілітрони (рис. 5.19).

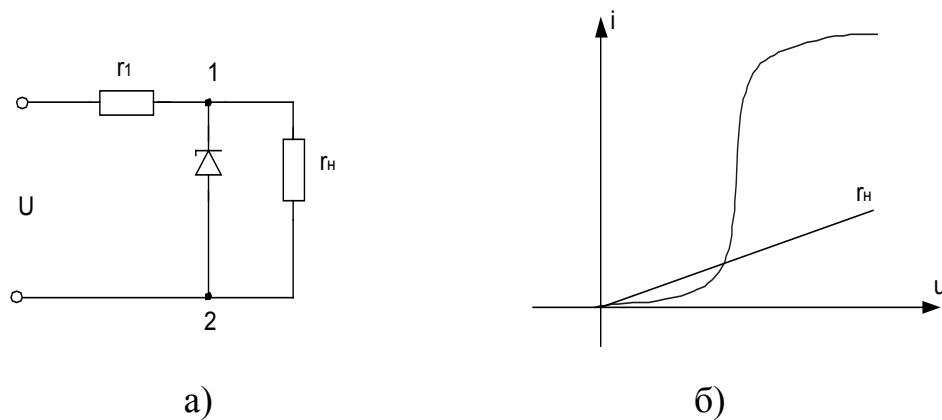


Рисунок 5.19

На рисунку 5.19, б показані в.а.х. стабілітрона і опору навантаження. Одержимо в.а.х. паралельно з'єднаних стабілітрона і опору навантаження, додавши ординати окремих в.а.х. (крива 2, рис. 5.20).

Визначення напруги навантаження проведемо шляхом графічного розв'язання двох рівнянь (рис. 5.20).

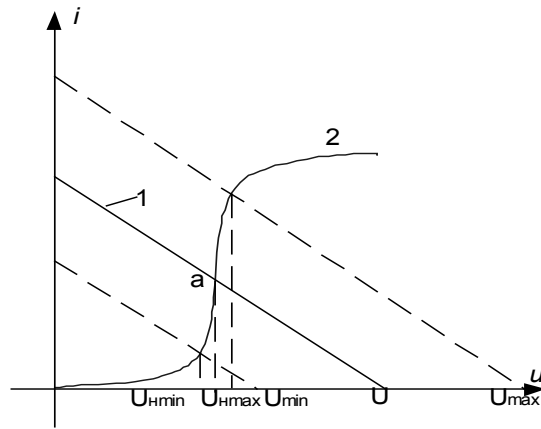


Рисунок 5.20

Проведемо пряму лінію (пряма 1), яка відповідає рівнянню

$$i = \frac{E}{r_1} - \frac{u_n}{r_1}$$

Січна характеристик 1 і 2 дає робочу точку а, яка визначає режим роботи кола.

При зміні напруги джерела його характеристика (пряма 1) переміщується паралельно собі. Із графіків (рисунок 5.20) і переміщення робочої точки видно, що напруга на навантаженні змінюється мало. Граничні положення прямих, які нанесені пунктиром, відповідають мінімально і максимально допустимим значенням напруги джерела U_{min} і U_{max} , при яких ще відбувається стабілізація. Перше з них визначається величиною струму навантаження, а друге – максимально допустимим струмом стабілітрона.

Стабілізатори напруги, звичайно, характеризуються коефіцієнтом стабілізації, під яким розуміють відношення відносної зміни напруги на вході до відносної зміни напруги на виході

$$K_{ст} = \frac{\Delta U_{вх} / U_{вх}}{\Delta U_{вих} / U_{вих}}$$

Цей коефіцієнт можна виразити через параметри конкретного стабілізатора.

б) Логічні схеми на діодах

На рисунку 5.21 показана логічна схема «І» на ідеальних діодах. На схемі показані лише два входи x_1 і x_2 але їх може бути і більше. При відсутності сигналів на входах діоди знаходяться в відкритому стані, потенціал точки а дорівнює нулю, на виході у сигнал відсутній.

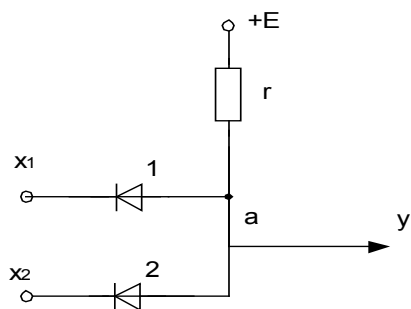


Рисунок 5.21

При появі сигналу на одному із входів, наприклад x_1 , діод 1 закривається, діод 2 залишається відкритим і потенціал точки а залишається таким, що дорівнює нулю – сигналу на виході немає. Якщо сигнали з’являються одночасно на всіх входах, всі діоди закриваються, струм в колі відсутній і точка а одержує потенціал $+E$, на виході з’являється сигнал.

Таким чином, на виході з’являється сигнал тільки тоді, коли на всіх входах одночасно є сигнали.

В таблиці 5.1 записані перетворення, які здійснює логічна схема «І».

Таблиця 5.1

x_1	0	1	0	1
x_2	0	0	1	1
Y	0	0	0	1

На рисунку 5.22 показана логічна схема «АБО» на ідеальних діодах. При відсутності сигналів на входах діоди відкриті, потенціал точки а дорівнює нулю і сигнал на виході відсутній.

Поява сигналу на одному із входів, наприклад x_1 , діод 1 залишається відкритим, потенціал точки а стає таким, що дорівнює потенціалу входу x_1 , всі інші діоди закриваються і на виході з’являється сигнал. Таким чином, поява сигналу хоч би на одному вході викликає появу сигналу на виході.

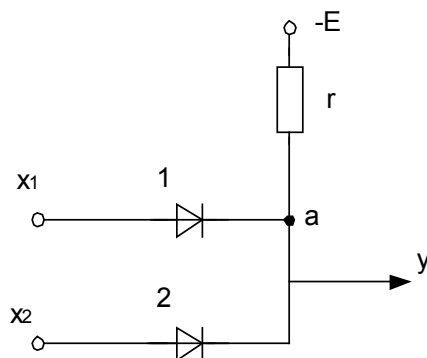


Рисунок 5.22

Перетворення, які здійснюються логічною схемою «АБО», записані в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

X_1	X_2	Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

5.4 Загальна характеристика магнітних кіл

Магнітним колом називається сукупність пристроїв, переважно з феромагнітних матеріалів, призначених для створення та концентрації в певному місці магнітного потоку. Магнітні кола є невід'ємною частиною електромагнітних реле, електромагнітів, трансформаторів, двигунів, електромашинних генераторів тощо. Феромагнітні осердя використовуються тому, що вони мають малий опір і полегшують проходження магнітного потоку.

Як відомо з курсу фізики, залежність між магнітною індукцією B і магнітною напруженістю H в феромагнітних тілах є нелінійною і являє собою петлю гістерезису (рис. 5.23).

Значення магнітної індукції B_r при $H=0$ називається залишковою індукцією, а значення H_e при $B=0$ – коерцитивною силою.

Геометричне місце вершин петель гістерезису, знятих при різних значеннях H_{max} , називається основною кривою намагнічування.

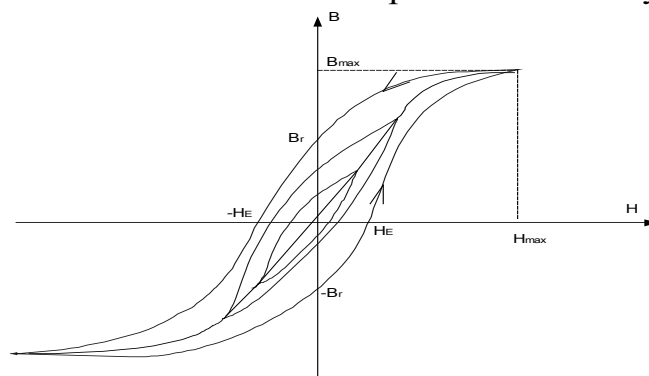


Рисунок 5.23

Потік магнітної індукції, який називається магнітним потоком Φ , через деяку поверхню S визначається за виразом

$$\Phi = \int_s \bar{B} d\bar{S}. \quad (5.14)$$

Якщо магнітна індукція в усіх точках поверхні однакова, тобто магнітне поле однорідне, то

$$\Phi = B \cdot S. \quad (5.15)$$

Магнітний потік через замкнену поверхню завжди дорівнює нулю.

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (5.16)$$

Зв'язок між магнітною індукцією B і магнітною напруженістю H визначається співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (5.17)$$

де μ_a – магнітна проникність речовини.

Для повітря $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г / м}$.

Для феромагнітних матеріалів μ_a є змінною величиною і може перевищувати μ_0 в десятки тисяч раз.

В магнітному полі виконується закон повного струму

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = i, \quad (5.18)$$

де i – повний струм, який пронизує контур інтегрування.

5.5 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму

Розглянемо нерозгалужене магнітне коло постійного струму, яке містить в собі осердя з феромагнітного матеріалу з поперечним перерізом S , повітряним проміжком величиною δ , обмотку з числом витків W , через яку протікає постійний струм I (рис. 5.24).

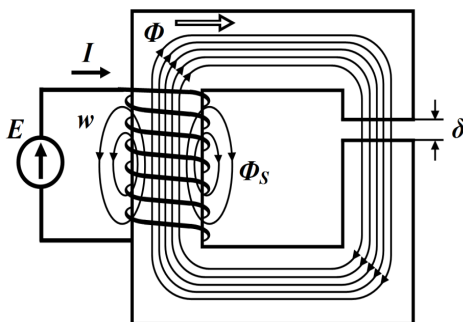


Рисунок 5.24

Струм, який протікає через обмотку, створює магнітний потік, більша частина якого замикається через осердя, а менша – через повітря навколо обмотки. Частина магнітного потоку, який замикається через осердя, називається *основним магнітним потоком* Φ_0 , а магнітний потік, який замикається через повітря, називається *потокот розсіювання* Φ_s .

При всіх подальших міркуваннях будемо припускати:

- відсутність потоку розсіювання,

- постійність величини магнітної індукції в усіх точках поперечного перерізу,

- шлях магнітного потоку визначається за довжиною середньої лінії l .

Застосуємо до заданого магнітного кола основні співвідношення, які розглянуті в попередньому підрозділі. Оскільки магнітний потік через всю довжину осердя однаковий (припущення 1), магнітне поле в осерді однорідне (припущення 2), то по всій довжині осердя. Якщо переріз осердя всюди однаковий, то магнітна індукція в осерді B_c і магнітна індукція в проміжку B_0 однакові.

Напруженості магнітного поля в осерді $H_c = B_c / \mu_a$ і в повітрі $H_0 = B_0 / \mu_0$ значно відрізняються одна від одної.

Використаємо закон повного струму. Інтегрування проведемо вздовж середньої лінії осердя. Оскільки вздовж шляху інтегрування напруженість поля має два значення, то вираз складається з двох частин

$$H_c l + H_0 \cdot \delta = I \cdot W, \quad (5.19)$$

а в правій частині записується $I \cdot W$, оскільки струм I пронизує контур інтегрування W раз. Виразимо в (5.19) магнітну напруженість через магнітний потік

$$\frac{B_c}{\mu_0} l + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = IW, \quad \hat{O}_0 \frac{l}{s\mu_a} + \hat{O}_0 \frac{\delta}{s\mu_0} = IW. \quad (5.20)$$

За аналогією з електричними колами добуток IW називають *магніторушійною* силою або *намагнічувальною силою*, вираз (5.19) – другим законом Кірхгофа для магнітних кіл, Hl – магнітною напругою, $\frac{l}{s\mu_0} = R_m$ – магнітним опором а вираз (5.16) – першим законом Кірхгофа для магнітних кіл.

Розрахунок магнітних кіл зводиться звичайно до двох типів задач.

1. Пряма задача – при заданих геометрії магнітного кола, матеріалі осердя, магнітній індукції в деякому місці магнітного кола визначити намагнічувальну силу IW .

2. Обернена задача – при заданих геометрії, матеріалі осердя і намагнічувальних силах визначити величину магнітної індукції в деякому місці магнітного кола.

Розглянемо розв'язання більш простої прямої задачі. Нехай задані: довжина середньої лінії осердя l , переріз осердя S , величина проміжку δ , значення магнітної індукції в проміжку B_0 . Необхідно визначити намагнічувальну силу IW .

Оскільки магнітний потік по всій довжині осердя однаковий, переріз незмінний, то магнітна індукція в проміжку, як це було встановлено раніше, дорівнює магнітній індукції в осерді.

Для знаходження намагнічувальної сили скористаємося другим

законом Кірхгофа для магнітного кола (5.19), попередньо визначивши магнітні напруженості ділянок. Магнітна напруженість в повітряному проміжку визначається виразом

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0},$$

а магнітна напруженість осердя визначається за допомогою основної кривої намагнічування матеріалу осердя (рис. 5.25).

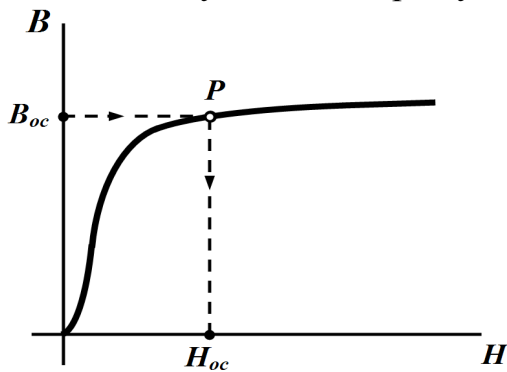


Рисунок 5.25

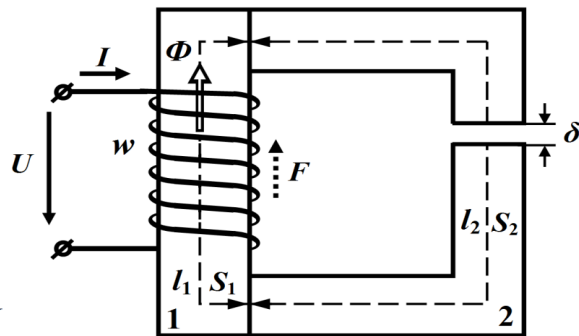


Рисунок 5.26

Якщо частина осердя (рис. 5.26) (наприклад, ділянка 1) з іншого матеріалу, то ліва частина виразу (5.19) буде мати три складові

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 \cdot \delta = IW \quad (5.21)$$

і напруженості H_1 і H_2 будуть визначатися з основних кривих намагнічування відповідних матеріалів.

Якщо ділянка 1 осердя з того ж матеріалу, що і ділянка 2, але має інший переріз, то будуть різні магнітні індукції, тобто

$$B_1 = \frac{\hat{O}}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\hat{O}}{S_2}$$

і магнітні напруженості цих ділянок хоч і будуть визначатися за однією і тією ж кривою намагнічування (матеріал один і той самий), але будуть різними, а для визначення намагнічувальної сили потрібно користуватися виразом (5.21).

Обернена задача розв'язується за аналогією з нелінійними електричними колами постійного струму, наприклад, графічно.

Подамо магнітне коло (див. рис. 5.24) у вигляді нелінійного електричного кола постійного струму (рис. 5.27, а).

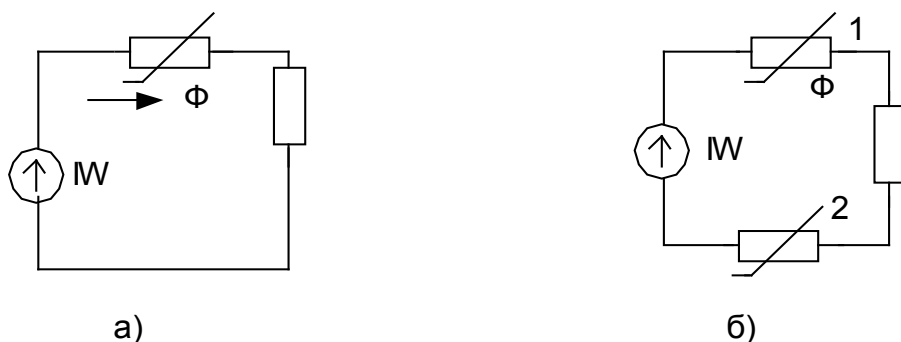


Рисунок 5.27

За е.р.с. в ньому маємо м.р.с. IW , струм – магнітний потік Φ , напругу – магнітна напруга Hl . Нелінійний резистор відповідає магнітному опоріві осердя, а лінійний резистор – магнітному опоріві повітряного проміжку. Замість вольт-амперних характеристик нелінійних резисторів необхідно використовувати вебер-амперні характеристики ділянок $\Phi = f(Hl)$.

Для визначення вебер-амперної характеристики ділянки використовується характеристика магнітного матеріалу (основна крива намагнічування на рис. 5.28, а) і складається таблиця.

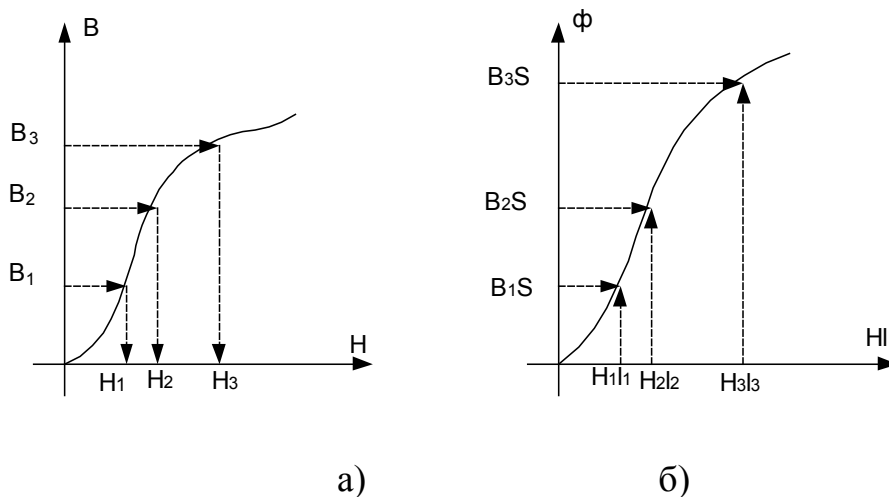


Рисунок 5.28

Таблиця 5.3

B	B_1	B_2	B_3
H	H_1	H_2	H_3
$\Phi=BS$	B_1S	B_2S	B_3S
Hl	H_1l	H_2l	H_3l

Задавшись 8÷10 значеннями B_i , за кривою намагнічування визначають значення H_i ; їхні значення записують в перший і другий рядки таблиці. За одержаними значеннями $B_i S$ і $H_i l$ будується вебер-амперна характеристика ділянки (рис. 5.28, б).

Подальший розрахунок аналогічний розрахунку нелінійних кіл постій-

ного струму. Будується характеристика лінійної ділянки, потім додаються абсиси характеристик, тому що з'єднання послідовне, і визначається характеристика всього кола (напівжирна лінія на рис. 5.29).

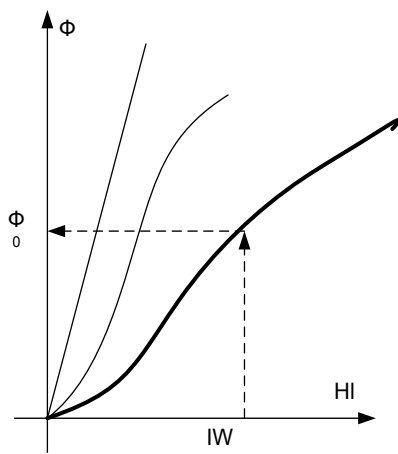


Рисунок 5.29

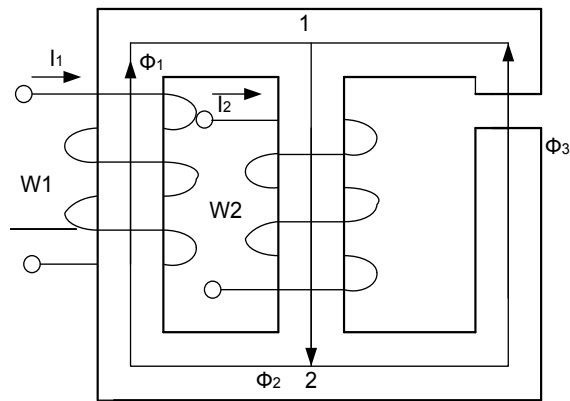


Рисунок 5.30

За заданою намагнічувальною силою IW визначається магнітний потік Φ_0 , а при відомому перерізі – магнітна індукція $B = \Phi_0/S$.

Аналогом магнітного кола, яке зображене на рисунку 5.26, буде електричне коло, показане на рисунку 5.27, б.

5.6 Розгалужене магнітне коло постійного струму

Для розгалуженого магнітного кола також існують два типи задач – пряма і обернена.

Розглянемо розв'язання прямої задачі на прикладі розгалуженого магнітного кола, яке зображене на рисунку 5.30.

В розглядуваному магнітному колі три стержні, через які протікають відповідні потоки. Потоки Φ_1 і Φ_2 направлені за напрямом намотування обмоток і напрямом струмів I_1 і I_2 .

Напрямок потоку Φ_3 вибрано довільно. Позначимо переріз і довжину стержнів через S_i і l_i . Задано: геометрія і матеріал магнітного кола, намагнічувальна сила I_1W_1 і магнітна індукція в проміжку B_0 . Визначити намагнічувальну силу I_2W_2 .

Приймаючи ті ж припущення, що і раніше, встановлюємо, що $B_3=B_0$ і магнітний потік третього стержня $\Phi_3 = B_3S_3$.

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, який складається з першого та третього стержнів. Обхід контуру виконаємо за годинниковою стрілкою

$$H_1l_1 - H_3l_3 - H_0 \cdot \delta = I_1W_1. \quad (5.22)$$

Друга і третя складові від'ємні, оскільки напрям обходу контуру і напрям магнітного потоку Φ_3 направлені назустріч один одному. Магнітна напруженість проміжку визначається за виразом $H_0 = B_0 / \mu_0$, а H_3 – з кривої намагнічування за відомим значенням B_3 .

Із (5.22) одержуємо

$$H_1 = \frac{I_1 W_1 + H_0 \delta + I_3 W_3}{i_1}.$$

Знаючи H_1 з кривої намагнічування визначається B_1 і магнітний потік першого стержня $\Phi_1 = B_1 S_1$.

За першим законом Кірхгофа для магнітного кола

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3, \quad B_2 = \Phi_2 / S_2,$$

а H_2 визначається з кривої намагнічування.

Записуючи рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, що складається з першого та другого стержнів, одержуємо

$$H_1 L_1 + H_2 L_2 = I_1 W_1 + I_2 W_2.$$

звідки

$$I_2 W_2 = H_1 L_1 + H_2 L_2 - I_1 W_1.$$

Для розв'язання оберненої задачі, коли відомі намагнічувальні сили і необхідно визначити магнітні потоки в стержнях, звернемося до аналізу електричного кола (рис. 5. 31).

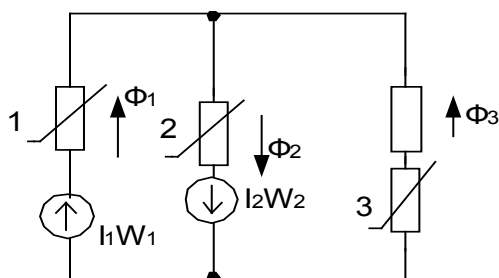


Рисунок 5.31

Визначивши вебер-амперні характеристики ділянок магнітного кола, для знаходження потоків Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 можна використати уже відомі методи розрахунку нелінійних кіл постійного струму.

5.7 Електричні кола змінного струму з нелінійними резисторами

В лінійних електричних колах при синусоїдній вхідній напрузі струми і напруги в усіх вітках також синусоїдні. В нелінійних електричних колах ця умова не виконується.

Розглянемо коло (рис. 5.32), до складу якого входять джерело синусоїдної е.р.с. $e = E_m \sin \omega t$ і нелінійний резистор з вольт-амперною характеристикою $i = au^3$.

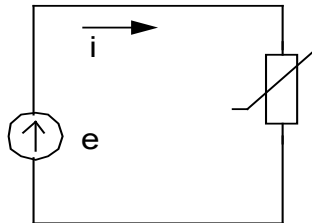


Рисунок 5.32

В даному колі напруга на нелінійному елементі дорівнює е.р.с, тому

$$i = aE_m^3 \sin^3 \omega t = aE_m^3 \cdot \frac{3}{4} \sin \omega t - aE_m^3 \cdot \frac{1}{4} \sin 3\omega t, \quad (5.23)$$

тобто, при вхідній синусоїдній дії струм, крім першої гармоніки, має ще й третю гармоніку. Це твердження можна довести і графічним шляхом. Зобразимо половину хвилі напруги на нелінійному резисторі (рис. 5.33, а), а біля неї вольт-амперну характеристику резистора, відклавши амперної характеристики однаковий).

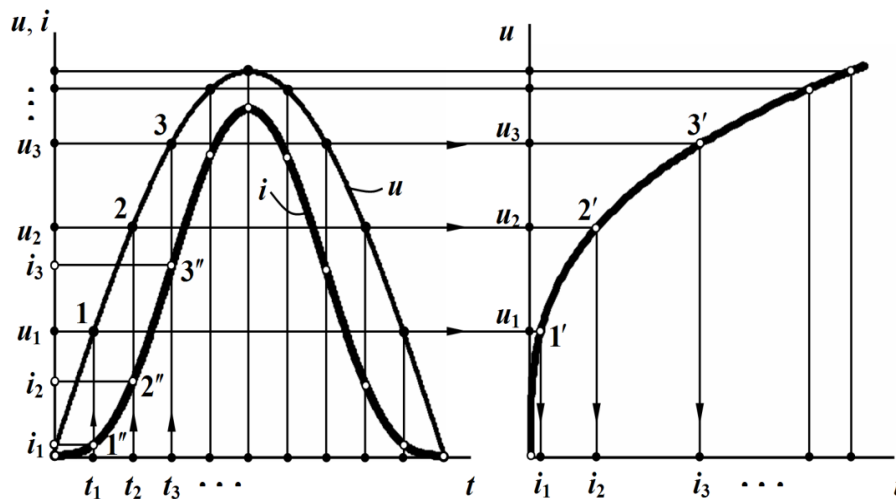


Рисунок 5.33, а

Рисунок 5.33, б

Побудова графіку струму $i(t)$ проводиться таким чином.

Півперіод напруги на нелінійному елементі ділиться на n однакових проміжків. В момент часу t_1 – кінець першого інтервалу – визначається

значення напруги u_1 (точка 1 на рисунку 5.33, а). За одержаним значенням напруги u_1 визначається точка 1' на в.а.х. (рис. 5.33, б) і відповідне їй значення струму i_1 . Величина цього струму у відповідному масштабі відкладається в момент t_1 на першому графіку і отримуємо точку 1'' графіка струму. Аналогічно отримуємо всі інші точки кривої струму. За необхідності будується крива струму і на другому півперіоді. Із побудови чітко видно, що крива струму несинусоїдна.

Якщо коло містить тільки резистори, лінійні і нелінійні, то вхідний струм можна знайти графічно, як це показано вище, попередньо знайшовши в.а.х. всього кола. Визначення струму в інших вітках з нелінійними резисторами пов'язано з громіздкими побудовами, і в цих випадках перевагу віддають іншим наближеним методам.

5.8 Метод еквівалентних синусоїд

Коли наявність нелінійних елементів не викликає значних спотворень синусоїдної величини, зручно вважати струми та напруги у вітках еквівалентними синусоїдами, характеристики нелінійних елементів зображати не для миттєвих, а для діючих значень; тоді для кіл з нелінійними резисторами придатні методи, що їх використовують для кіл постійного струму.

Розглянемо коло (рис. 5.34, а), яке містить джерело синусоїдної е.р.с. і два нелінійних резистори, характеристики яких для діючих значень зображені на рисунку 5.34, б.

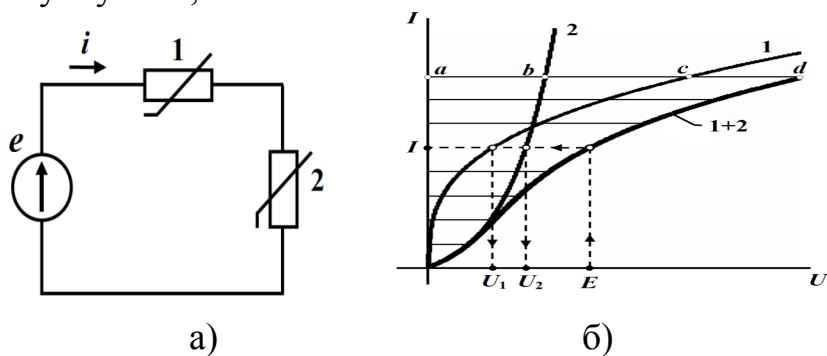


Рисунок 5.34

Вважаючи струм синусоїдним, знаходимо в.а.х. всього кола при послідовному з'єднанні елементів і за відомим діючим значенням е.р.с. E визначаємо діюче значення струму в колі.

Аналогічно проводиться розрахунок і в випадку більш складних нелінійних кіл змінного струму.

Побудова в.а.х. всього кола за наявності реактивних елементів має свої особливості. Розглянемо коло (рис. 5.35, а), яке містить нелінійний резистор і нелінійну індуктивність при синусоїдній вхідній дії. Не дивлячись на те, що струм в колі не буде синусоїдним, як і раніше використовуємо еквівалентні синусоїди та в.а.х. для діючих значень (рис. 5.35, б).

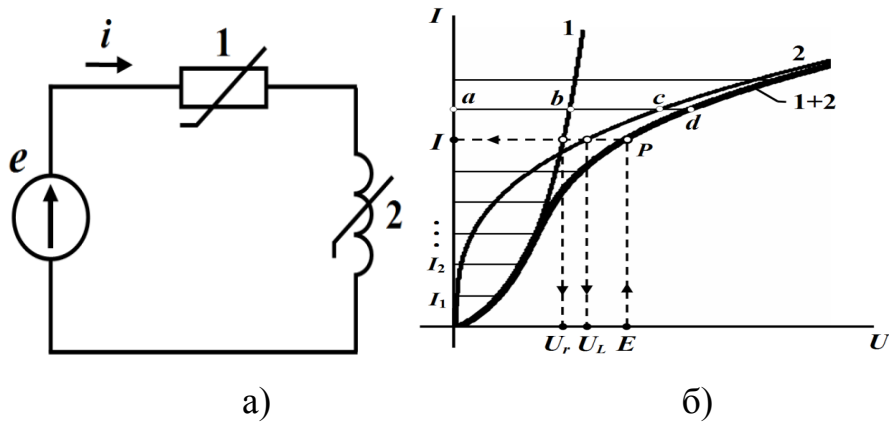


Рисунок 5.35

Для одержання підсумкової в.а.х. всього кола при послідовному з'єднанні потрібно додавати діючі значення напруг елементів при одному й тому ж струміві, але за наявності реактивних елементів таке додавання повинно бути геометричним. Наприклад, для одержання точки а в.а.х. всього

$$U_a = \sqrt{U_{br}^2 + U_{ca}^2},$$

тому що вектори напруги на резисторі та індуктивності перпендикулярні один до одного. Інші точки характеристики знаходяться подібним чином.

5.9 Котушка з феромагнітним осердям

Як уже відмічалось, феромагнітні тіла мають малий магнітний опір, що його забезпечує великий магнітний потік, і велику індуктивність порівняно з такою ж котушкою без осердя.

Як і в підрозділі 5.5, на рисунку 5.36 потік Φ_o – основний магнітний потік, який замикається через осердя, Φ_s – потік розсіювання, який замикається, в основному, через повітря.

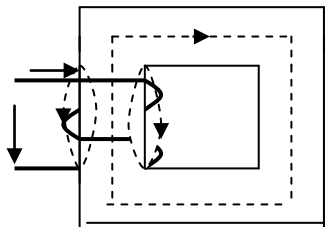


Рисунок 5.36

Зв'язок між основним потокозчепленням $\psi_o = W\Phi_o$ і струмом нелінійний, зв'язок між потокозчепленням розсіювання ψ_s і струмом можна вважати лінійним

$$\psi_s = L_s i, \tag{5.24}$$

де r – опір обмотки; L_s – індуктивність розсіювання, яка враховує потік розсіювання.

Запишемо для контуру рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень

$$u = ri + L_s \frac{di}{dt} + W \frac{d\Phi_o}{dt}, \quad (5.25)$$

самоіндукції при зміні основного магнітного потоку

$$W \frac{d\Phi_o}{dt} = u_o. \quad (5.26)$$

Для спрощення приймемо, що можна знехтувати активним опором r обмотки і потоком розсіювання. Залишиться лише остання складова

$$u = u_o = W \frac{d\Phi_o}{dt}. \quad (5.27)$$

Якщо основний магнітний потік змінюється за синусоїдним законом $\Phi_o = \Phi_{mo} \sin \omega t$, то напруга u_o та вхідна напруга, при зроблених припущеннях, змінюються за синусоїдним законом

$$u = u_o = W \Phi_{mo} \omega \cos \omega t. \quad (5.28)$$

Амплітуда напруги

$$U_{mo} = W \Phi_{mo} 2 \pi f.$$

Якщо переріз осердя однаковий по всій довжині, то

$$\Phi_{mo} = B_m S, \quad (5.29)$$

де S – переріз осердя, B_m – амплітуда магнітної індукції в осерді

і

$$U_{mo} = 2 \pi W S f B_m.$$

Діюче значення напруги

$$U_o = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} W S f B_m = 4,44 \cdot W S f B_m. \quad (5.30)$$

Визначимо форму кривої струму графічно, див. підрозділ 5.7, враховуючи, що при змінному магнітному потоці характеристикою феромагнітного матеріалу є петля гістерезису (рис. 5.37).

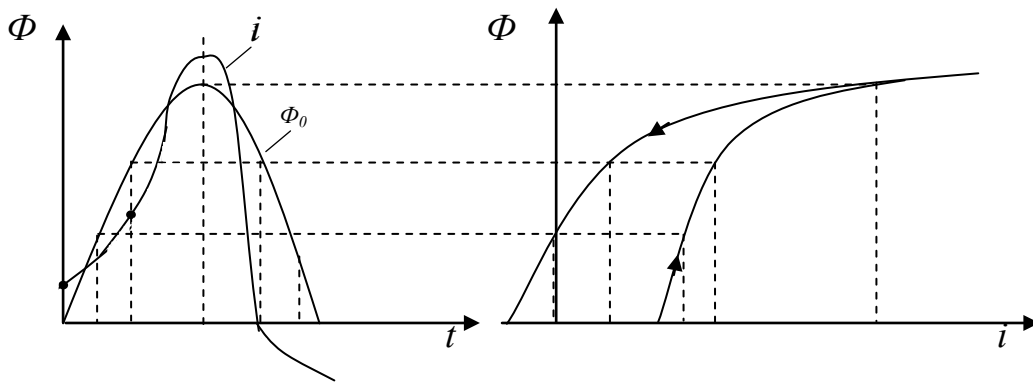


Рисунок 5.37

Як і очікувалось, крива струму несинусоїдна і випереджає основний магнітний потік за фазою. Величина кута випередження залежить від ширини петлі гістерезису. Використаємо для аналізу метод еквівалентних синусоїд. Замінімо криву струму еквівалентною синусоїдою і побудуємо векторну діаграму (рис. 5.38, а).

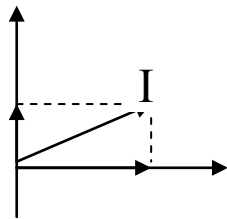


Рисунок 5.38, а

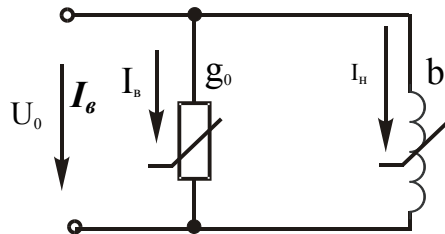


Рисунок 5.38, б

Із векторної діаграми видно, що напруга на котушці випереджає струм на кут менший 90° , що відповідає активно-індуктивному навантаженню. Не дивлячись на те, що активний опір обмотки прийнято таким, що дорівнює нулю, в котушці є втрати, пов'язані з втратами на гістерезис P_Γ в осерді, та вихрові струми P_B . Ці втрати звичайно називають втратами в сталі.

$$P_{cm} = P_\Gamma + P_B. \quad (5.31)$$

Втрати від гістерезису викликаються необоротними процесами в сталі при зміні орієнтації ділянок самодовільного намагнічування і пропорційні частоті $P_\Gamma = k_I f$.

Під дією змінного магнітного потоку в осерді наводиться е.р.с., яка викликає струми в осерді, що їх називають вихровими. Втрати від дії цих струмів пропорційні квадратові частоти $P_B = k_\Gamma f^2$.

Струм на векторній діаграмі можна розкласти на дві складові – струм втрат I_B , який збігається за фазою з напругою, і струм намагнічування I_H , який збігається за фазою з магнітним потоком.

Схема заміщення, яка відповідає векторній діаграмі, показана на рисунку 5.38, б. Нелінійна провідність g_o характеризує втрати в сталі, а нелінійна індуктивність – основний магнітний потік.

Для побудови векторної діаграми котушки з осердям, з урахуванням втрат в обмотці та індуктивності розсіювання, запишемо рівняння (5.25) в комплексній формі

$$\underline{U} = r\underline{I} + j\omega L_s \underline{I} + \underline{U}_o, \quad (5.32)$$

Звідси видно, що вектор вхідної напруги \underline{U} складається з суми трьох складових – напруги \underline{U}_o , напруги на активному опорі обмотки $r\underline{I}$, яка збігається за напрямом зі струмом, і напруги індуктивності розсіювання $j\omega L_s \underline{I}$, яка випереджає струм на кут 90° . Векторна діаграма котушки показана на рисунку 5.39, а; а схема заміщення – на рисунку 5.39, б.

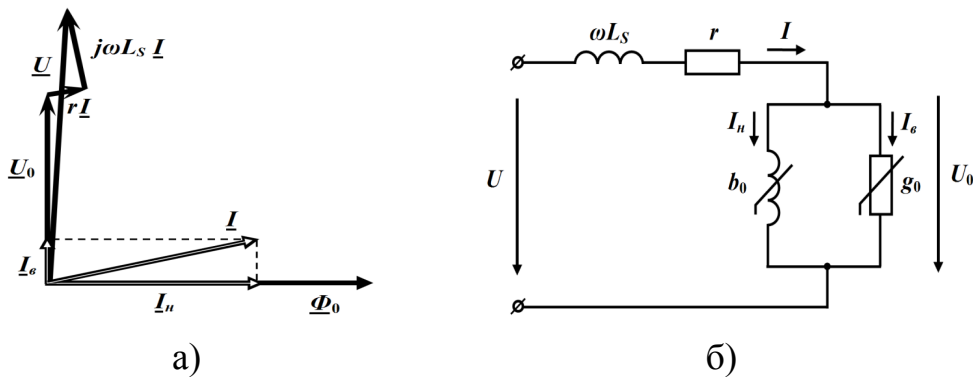


Рисунок 5.39

Для розрахунку котушок з феромагнітними матеріалами характеристики матеріалів звичайно задаються у вигляді нелінійних залежностей $P_o = f_1(B_m)$, $Q_o = f_2(B_m)$, де P_o і Q_o , відповідно, питома потужність втрат і питома потужність намагнічування, тобто потужність, яка стосується одиниці ваги осердя (рис. 5.40).

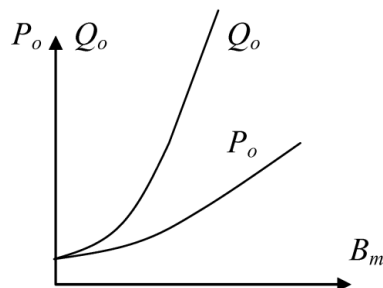


Рисунок 5.40

$$P_o = P_{cm} / G, \quad Q_o = Q / G. \quad (5.33)$$

Наведемо приклад розрахунку котушки з феромагнітним осердям при відомих: матеріалі, геометрії осердя і вхідній напрузі. Розрахунок проводиться за умови зміни всіх несинусоїдних величин еквівалентними синусоїдами. Спочатку задаються першим наближенням діючого значення напруги $U_o^{(1)}$.

Звичайно беруть

$$U_o^{(1)} \approx (0,85 \div 0,9) U, \quad (5.34)$$

де U – вхідна напруга.

Знаючи $U_o^{(1)}$, знаходимо перше наближення амплітуди магнітної індукції з (5.30).

$$B_m^{(1)} = U_o^{(1)} / 4,44 W_s f.$$

Використовуючи характеристики матеріалу (див. рис. 5.40), визначаємо спочатку питому потужність втрат $P_o^{(1)}$ і питому потужність намагнічування $Q_o^{(1)}$, а після цього і повні значення $P_{cm}^{(1)}$ та $Q^{(1)}$

$$P_{cm}^{(1)} = P_o^{(1)} G, \quad Q^{(1)} = Q_o^{(1)} G.$$

Визначаємо струми в паралельних вітках схеми заміщення

$$I_g^{(1)} = P_{cm}^{(1)} / U_o^{(1)}, \quad I_n^{(1)} = Q^{(1)} / U_o^{(1)},$$

і комплексне значення струму в нерозгалуженій частині, тобто вхідний струм

$$\underline{I} = I_g - j I_n.$$

При відомих r і L_s з (5.32) знаходимо вхідну напругу

$$\underline{U}^{(1)} = r \underline{I}^{(1)} + j \omega L_s \underline{I}^{(1)} + \underline{U}_o^{(1)}.$$

Одержане значення $U^{(1)}$, як правило, буде відрізнятись від заданого, тому необхідно взяти нове значення $U^{(2)}$ – друге наближення і повторити розрахунок. Графік, побудований за одержаними значеннями $U_o^{(k)}$ і $U^{(k)}$, дозволяє знайти значення U_o і U (рис. 5.41), а також вхідний струм I і значення g_o і b_o для заданого режиму $g_o = I_g / U_o$, $b_o = I_n / U_o$.

В багатьох випадках для спрощення розрахунків нехтують втратами в сталі і в обмотці котушки з осердям і користуються нелінійною в.а.х. для діючих значень.

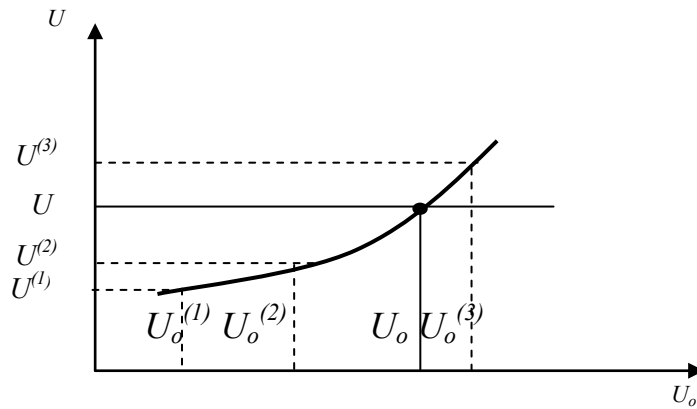


Рисунок 5.41

5.10 Ферорезонанси

Розглянемо контур, який містить послідовне з'єднання нелінійної індуктивності і лінійної ємності (рис. 5.42). Знехтуємо втратами в котушці, струми і напруги будемо вважати еквівалентними синусоїдами і знайдемо в.а.х. усього кола (рис. 5.43).

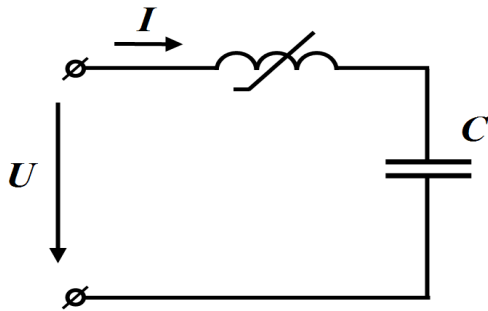


Рисунок 5.42

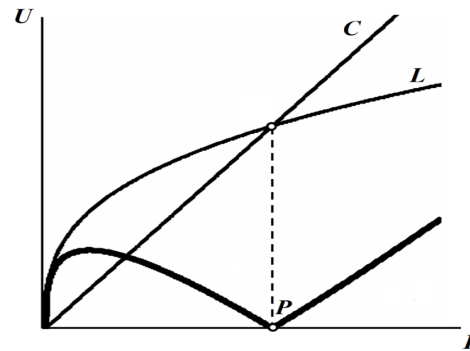


Рисунок 5.43

За другим законом Кірхгофа $\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C$, але, оскільки напруги на індуктивності і ємності направлені назустріч одна одній, то модуль вхідної напруги

$$U = |U_L - U_C|, \quad (5.35)$$

і для побудови в.а.х. всього кола напруги U_L і U_C віднімаються одна від одної. Точка a на характеристиці, де $U_L = U_C$, є точкою резонансу. На відміну від резонансу в послідовному лінійному контурі, де резонансу можна досягти, змінюючи величину ємності, індуктивності або частоти, в нелінійному послідовному контурі резонансу можна досягти ще й зміною напруги, тому даний резонанс називають *ферорезонансом* напруги. Насправді, це теж зміна індуктивності, тому що характеристика нелінійна.

Наявність спадної ділянки на в.а.х. всього кола викликає появу деяких ефектів, які принципово неможливі в лінійному колі.

Розглянемо в.а.х. з урахуванням втрат. Наявність активного опору і напруги на ньому піднімає характеристику і вона буде мати вигляд, показаний на рисунку 5.44.

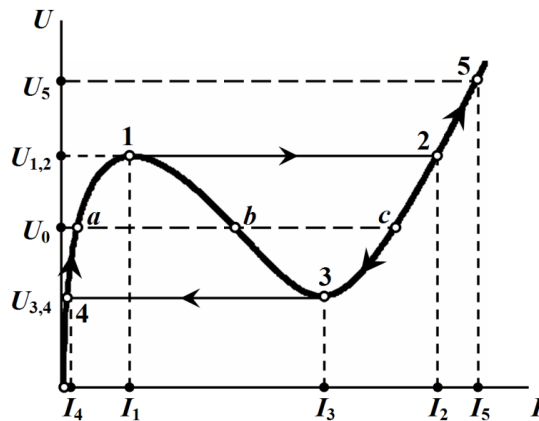


Рисунок 5.44

Якщо на вході схеми (див. рис. 5.42) встановити пристрій, який регулює величину вхідної напруги (наприклад, автотрансформатор), то при збільшенні напруги від нуля до U і при зменшенні її до нуля струм в колі два рази зміниться стрибком. При збільшенні напруги робоча точка з точки 1 стрибком переміщується в точку 2, а при зменшенні напруги – з точки 3 в точку 4. Така стрибкоподібна зміна струму при малих відхиленнях напруги називається *тригерним ефектом*.

Явище ферорезонансу напруг можна використовувати для стабілізації вихідної напруги при зміні діючого значення вхідної напруги.

На рисунку 5.45, а показана принципова схема ферорезонансного стабілізатора напруги, а на рисунку 5.45, б – вольт-амперна характеристика.

При зміні вхідної напруги від $U_1^{(1)}$ до $U_1^{(2)}$ з в.а.х. всього кола визначають вхідні струми $I^{(1)}$ і $I^{(2)}$, а з характеристики індуктивності – вихідні напруги $U_2^{(1)}$ і $U_2^{(2)}$, які відповідають струмам $I^{(1)}$ і $I^{(2)}$. Із графіків видно, що значним змінам напруги відповідають незначні зміни вихідної напруги.

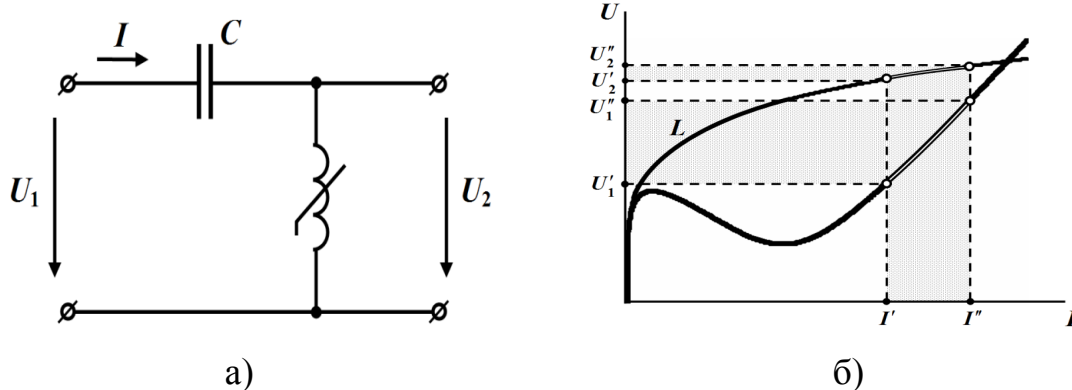


Рисунок 5.45

При паралельному з'єднанні нелінійної індуктивності і лінійної ємності (рис. 5.46, а) має місце *ферорезонанс струмів*.

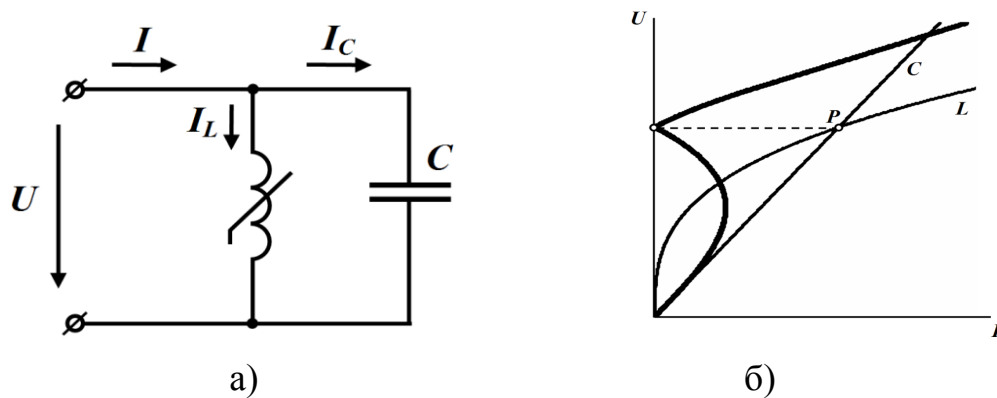


Рисунок 5.46

5.11 Трансформатор з феромагнітним осердям

Якщо на осердя котушки, яка розглянута в попередньому підрозділі, помістити ще одну обмотку, то одержимо простий трансформатор, який зображений на рисунку 5.47.

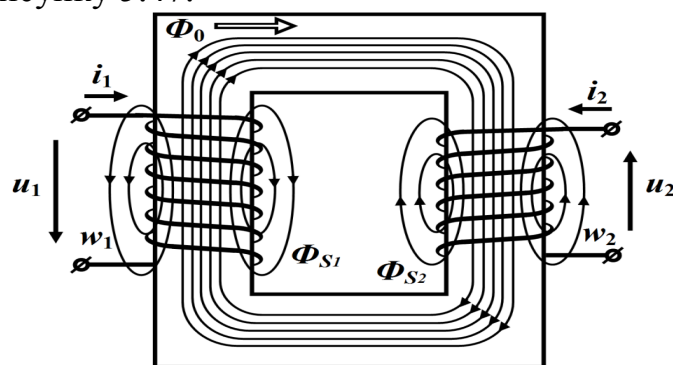


Рисунок 5.47

Основний магнітний потік Φ_o , який проходить через осердя, наводить е.р.с. в обмотках. В первинній обмотці, яка приєднана до джерела живлення з напругою u_1 , е.р.с. визначається за формулою

$$e_1 = -W_1 \frac{d\Phi_o}{dt},$$

а у вторинній обмотці, до якої приєднується навантаження, – за формулою

$$e_2 = -W_2 \frac{d\Phi_o}{dt},$$

де W_1, W_2 – число витків, відповідно, первинної та вторинної обмоток. Якщо вважати всі струми і напруги синусоїдними, то

$$E_1 = -j4.44W_1f\Phi_o, \quad E_2 = -j4.44W_2f\Phi_o.$$

Звідси одержуємо співвідношення

$$n = E_1 / E_2 = W_1 / W_2, \quad (5.36)$$

яке характеризує основну властивість трансформатора – перетворювати напругу – і називається коефіцієнтом трансформації.

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа.

Для першого контуру

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{s1} \underline{I}_1 + \underline{U}_o, \quad (5.37)$$

де $\underline{U}_o = -\underline{E}_1$.

Для другого контуру

$$\underline{E}_2 = r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_{s2} \underline{I}_2 + \underline{U}_2, \quad (5.38)$$

де L_{s1}, L_{s2} – індуктивність розсіювання первинної і вторинної обмоток.

Для побудови схеми заміщення та векторної діаграми трансформатора звичайно користуються приведеними параметрами вторинної обмотки. Вторинну обмотку замінюють еквівалентною обмоткою з числом витків, що дорівнює числу витків первинної обмотки. Для того, щоб режим роботи трансформатора не змінився, необхідно дотриматися умови рівності магніторушійних сил

$$i_2 W_2 = i'_2 W'_2 = i'_2 W_1.$$

Враховуючи (5.36), одержуємо, що приведені значення струму вторинної обмотки

$$i'_2 = i_2 (W_2 / W_1) = i_2 / n. \quad (5.39)$$

Аналогічно
$$e'_2 = -W_2 \frac{d\Phi_o}{dt} = \frac{W_1}{W_2} \left(-W_2 \frac{d\Phi_o}{dt} \right) = n e_2 = e_1. \quad (5.40)$$

Запишемо рівняння (5.38) для приведених значень

$$\underline{E}'_2 / n = r_2 \underline{I}'_2 n + j\omega L_{s2} \underline{I}'_2 n + \underline{U}_2, \text{ або}$$

$$\underline{E}'_2 = r_2 \underline{I}'_2 n^2 + j\omega L_{s2} \underline{I}'_2 n^2 + n \underline{U}_2.$$

Позначимо

$$\underline{U}'_2 = n \underline{U}_2, \quad r'_2 = n^2 r_2, \quad L'_{s2} = n^2 L_{s2},$$

Тоді

$$\underline{E}'_2 = r'_2 \underline{I}'_2 + j\omega L'_{s2} \underline{I}'_2 + \underline{U}'_2. \quad (5.41)$$

Магніторушійна сила, яка визначає основний магнітний потік, має дві складові

$$i_1 W_1 + i_2 W_2.$$

Конструкція трансформаторів звичайно така, що при зміні навантаження в деяких межах магнітний потік в осерді практично не змінюється, тому магніторушійна сила залишається незмінною. Якщо трансформатор працює в режимі холостого ходу ($i_2 = 0$), то

$$i_1 W_1 + i_2 W_2 = i_o W_1, \quad (5.42)$$

де i_o – струм холостого ходу.

Рівність (5.42) запишемо у вигляді

$$i_1 W_1 + i_2' W_1 = (i_1 + i_2') W_1 = i_o W_1.$$

$$\text{Звідси} \quad i_o = i_1 + i_2', \quad \text{або} \quad \underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2. \quad (5.43)$$

Струм I_o називається струмом намагнічування.

На підставі рівнянь (5.37), (5.41) і (5.43) можна побудувати векторну діаграму та схему заміщення трансформатора (рис. 5.48, а, б).

Параметри схеми заміщення звичайно визначають із дослідів холостого ходу і короткого замикання.

В режимі холостого ходу можна знехтувати спадом напруги на опорах r_1 і x_{S1} і вважати $\underline{U}_1 = \underline{U}_o$. В цьому випадку, маючи активну потужність P_{1xx} , вхідну напругу U_{1xx} і вхідний струм I_{1xx} , визначають параметри b_o і g_o .

$$g_o = \frac{P_{1xx}}{U_{1xx}^2}; \quad y_o = \frac{I_{1xx}}{U_{1xx}};$$

$$\cos \varphi_{1xx} = \frac{P_{1xx}}{U_{1xx} I_{1xx}}; \quad b_o = y_o \sin \varphi_{1xx}.$$

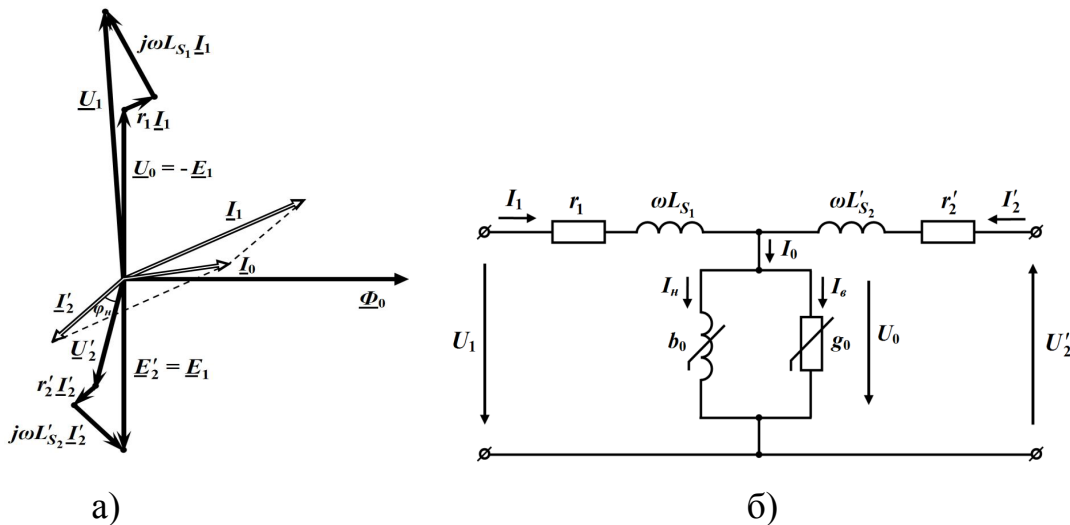


Рисунок 5.48

Режим короткого замикання проводиться при номінальному струмі вторинної обмотки, тобто, при зниженій вхідній напрузі. Струм I_0 при цьому значно менший струмів I_1 і I_2 і ним можна знехтувати. Вважаючи, що $r_1 = r'_2$, $L_{S1} = L'_{S2}$, визначають інші параметри схеми заміщення трансформатора.

$$(r_1 + r'_2) = \frac{P_{1\kappa}}{I_{1\kappa}^2}; \quad \cos \phi_{1\kappa} = \frac{P_{1\kappa}}{U_{1\kappa} I_{1\kappa}};$$

$$(x_{s1} + x'_{s2}) = (r_1 + r'_2) \operatorname{tg} \phi_{1\kappa}.$$

Приклад 5.2

Досліди холостого ходу і короткого замикання трансформатора дали такі результати:

$$U_{1x} = 220 \text{ В}, \quad I_{1x} = 0.565 \text{ А}, \quad P_{1x} = 30.2 \text{ Вт},$$

$$U_{1\kappa} = 12 \text{ В}, \quad I_{1\kappa} = 0.25 \text{ А}, \quad P_{1\kappa} = 2.5 \text{ Вт}.$$

Коефіцієнт трансформації $n=5$. Визначити параметри схеми заміщення.

Розв'язання

За результатами холостого ходу визначаємо

$$g_o = \frac{P_{1x}}{U_{1x}^2} = \frac{30.2}{220^2} = 6.25 \cdot 10^{-4} \text{ См},$$

$$\cos \phi_{1x} = \frac{P_{1x}}{U_{1x} I_{1x}} = \frac{30.2}{220 \cdot 0.565} = 0.243; \phi_{1x} = 76^\circ,$$

$$b_o = g_o \operatorname{tg} \phi_{1x} = 6.25 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ См}.$$

$$(r_1 + r'_2) = \frac{P_{1\kappa}}{I_{1\kappa}^2} = \frac{2.5}{0.25^2} = 40 \text{ Ом},$$

$$\cos \phi_{1\kappa} = \frac{P_{1\kappa}}{U_{1\kappa} I_{1\kappa}} = \frac{2.5}{12 \cdot 0.25} = 0.833; \phi_{1\kappa} = 33.5^\circ,$$

$$(x_{s1} + x'_{s2}) = (r_1 + r'_2) \operatorname{tg} \phi_{1\kappa} = 40 \cdot 0.662 = 26.5 \text{ Ом}.$$

$$r_1 = 20 \text{ Ом}; \quad r_2 = \frac{r'_2}{n^2} = \frac{20}{5^2} = 0.8 \text{ Ом},$$

$$x_{s1} = 13.25 \text{ Ом}, \quad x_{s2} = \frac{x'_{s2}}{n^2} = \frac{13.5}{25} = 0.54 \text{ Ом}.$$

6 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Як уже відзначалося раніше, основна складність розрахунку перехідних процесів полягає в необхідності розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, для яких не існує регулярних методів розрахунку і доводиться використовувати різні наближені методи.

6.1 Метод умовної лінеаризації

Цей метод полягає в тому, що, якщо нелінійний елемент заданий характеристикою $y = f(x)$, то на першому етапі нелінійна характеристика замінюється лінійною $y = ax$, визначається одна зі змінних y або x (із розв'язку лінійного диференціального рівняння), а друга змінна (x або y) знаходиться з нелінійної характеристики.

Розглянемо використання цього методу на прикладі вмикання нелінійної котушки з активним опором r на постійну напругу (рис. 6.1).

Нелінійне диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = U. \quad (6.1)$$

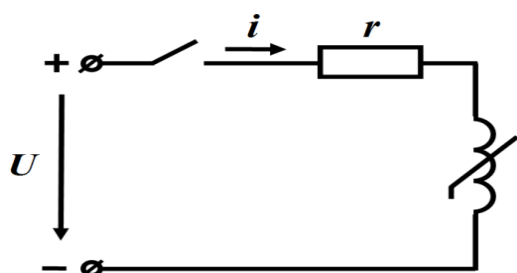


Рисунок 6.1

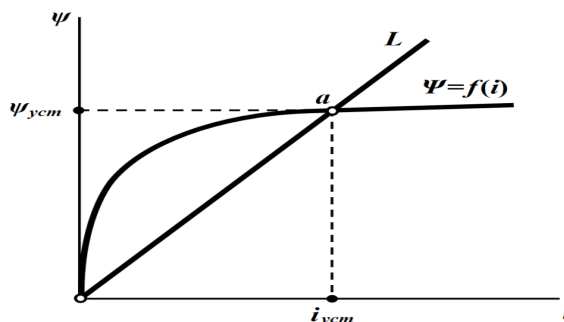


Рисунок 6.2

Характеристика індуктивності нелінійна (рис. 6.2), але на першому етапі припустимо, що вона лінійна, де точка a – точка усталеного стану, при якому струм

$$I_{ycm} = U / r. \quad (6.2)$$

Це дозволяє записати $\psi = Li$; $L = \psi_o / I_{ycm}$ (6.3)

і $\frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi = U.$ (6.4)

Розв'язуючи рівняння (6.4) при нульових початкових умовах, одержуємо

$$\psi = \psi_{ycm}(1 - e^{-(r/L)t}). \quad (6.5)$$

Для знаходження струму як функції часу за відомими значеннями ψ використовується нелінійна характеристика, а не співвідношення (6.3). В даному прикладі змінна ψ знаходиться за лінеаризованою характеристикою, а змінна i – з урахуванням нелінійності.

6.2 Метод кусково-лінійної апроксимації

При розв'язуванні задачі даним методом нелінійна характеристика подається декількома відрізками прямих (рис. 6.3).

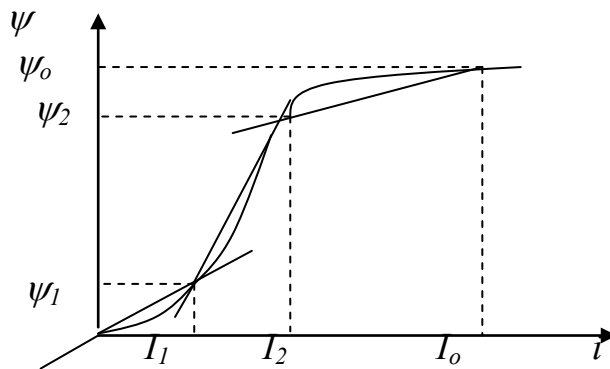


Рисунок 6.3

Кількість відрізків визначається виглядом характеристики і бажаною точністю розрахунків. В нашому прикладі таких відрізків три. Відповідно, для кожного відрізка диференціальне рівняння буде лінійним, при цьому кінцеві значення неперервних змінних (струму через індуктивність або напруги на ємності) однієї ділянки повинні бути початковими значеннями наступної ділянки.

Розглянемо використання методу кусково-лінійної апроксимації на прикладі (рис. 6.1). Для першої ділянки

$$L_1 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad (6.6)$$

де $L_1 = \psi_1 / I_1$.

Розв'язок цього лінійного рівняння, як відомо, має вигляд

$$i = i_{np} + i_s = I_o + A_1 e^{p_1 t},$$

де $I_o = U / r$ – усталене значення струму, A_1 – постійна інтегрування, $p_1 = - (r/L_1)$ – корінь характеристичного рівняння.

При нульових початкових умовах

$$i = I_o (1 - e^{p_1 t}), \quad 0 < t < t_1 \quad (6.7)$$

Це рівняння справедливе лише для проміжку часу $0 < t < t_1$.
В момент часу t_1 струм набуває значення I_1 , тому

$$I_1 = I_o (1 - e^{-\frac{r}{L_1} t_1})$$

$$t_1 = \frac{L_1}{r} \ln \frac{I_o}{I_o - I_1}. \quad (6.8)$$

де

$$L_2 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad (6.9)$$

$$L_2 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{I_2 - I_1}.$$

Розв'язок цього рівняння

$$i = i_{np} + i_{\varepsilon} = I_o + A_2 e^{p_2 (t - t_1)},$$

де I_o – усталене значення струму, $p_2 = -(r/L_2)$.

В показнику експоненти записано не t , а $t - t_1$, тому що перехідний процес для другої ділянки починається не з нуля часу, а в момент t_1 .

Постійна інтегрування A_2 визначаються з початкових умов для другої ділянки, тобто при $t = t_1$, $i = I_1$.

В цьому випадку $I_1 = I_o + A_2$; $A_2 = I_1 - I_o$

і

$$i = I_o + (I_1 - I_o) e^{-\frac{r}{L_2} (t - t_1)}, \quad t_1 < t < t_2 \quad (6.10)$$

Вираз (6.10) справедливий і для $t = t_2$, коли струм набуває значення I_2 . Із цієї умови визначається момент t_2 за допомогою рівняння

$$i_2 = I_o + (I_1 - I_o) e^{-\frac{r}{L_2} (t_2 - t_1)}$$

звідки

$$t_2 = \frac{L_2}{r} \cdot \ln \frac{I_1 - I_o}{I_2 - I_o} + \frac{L_1}{r} \cdot \ln \frac{I_o}{I_o - I_1}. \quad (6.11)$$

Аналогічно ведеться розрахунок і для третьої частини ділянки

$$L_3 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad L_3 = \frac{\psi_0 - \psi_2}{I_0 - I_2},$$

$$i = I_0 + A_3 e^{p_3(t-t_2)}, \quad p_3 = -\frac{r}{L_3}.$$

Початкові умови для третьої ділянки:

при $t = t_2$ $i = I_2$, а отже

$$A_3 = I_2 - I_0$$

$$i = I_0 + (I_2 - I_0) e^{p_3(t-t_2)}, \quad t > t_2. \quad (6.12)$$

Контрольні питання та вправи

1. Які фізичні явища можуть спостерігатись в нелінійних електричних колах і не можуть в лінійних?
2. Чому при аналізі процесів в нелінійних електричних колах використовують, як правило, наближені методи?
3. Чим відрізняються статичні і динамічні параметри нелінійних елементів?
4. Що характеризують параметри схеми заміщення котушки з феромагнітним осердям?
5. Яким чином можна визначити параметри схеми заміщення трансформатора?
6. Побудуйте векторну діаграму трансформатора при активно-ємнісному навантаженні.
7. В чому суть методу гармонічного балансу розрахунку нелінійних кіл в усталеному режимі?
8. В чому суть методу кусково-лінійної апроксимації при розрахунках перехідних процесів в нелінійних колах?

7 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1 Диференціальні рівняння однорідної лінії

В попередніх розділах розглядалися електричні кола з зосередженими параметрами, тобто припускалось, що електричне поле, магнітне поле і перетворення енергії в інші види зосереджені на окремих, локальних ділянках кола, завжди можна виділити ці ділянки і характеризувати їх ємністю, індуктивністю та активним опором. При такому зображенні струм у всіх точках однієї і тієї ж вітки має одне і те ж значення.

В багатьох випадках доводиться зустрічатися з такими електричними колами, в яких не можна виділити ділянки зосереджених електричних і магнітних полів або незворотних перетворень електричної енергії. Такі кола називають колами з розподіленими параметрами, оскільки електричне поле, магнітне поле і втрати енергії розподілені вздовж всіх ділянок кола.

В колах з розподіленими параметрами напруга і струм змінюються не лише залежно від часу, але й від віддалі. До кіл з розподіленими параметрами відносять довгі лінії електропередач, лінії телеграфного зв'язку, лінії телекерування та телевимірювання, антени радіопередавачів і радіоприймачів і т. д.

Для дослідження процесів в лінії приймаємо умову, що параметри лінії – індуктивність, активний опір проводів, ємність і активна провідність між проводами – розподілені вздовж лінії рівномірно. Таку лінію будемо називати однорідною і характеризувати *первинними параметрами*, тобто параметрами на одиницю довжини – L_o [Г/м], C_o [Ф/м], r_o [Ом/м], g_o [См/м].

Для складання диференціальних рівнянь виділимо на віддалі x від початку лінії ділянку лінії довжиною dx і уявимо її у вигляді ділянки кола з зосередженими параметрами (рис. 7.1, б).

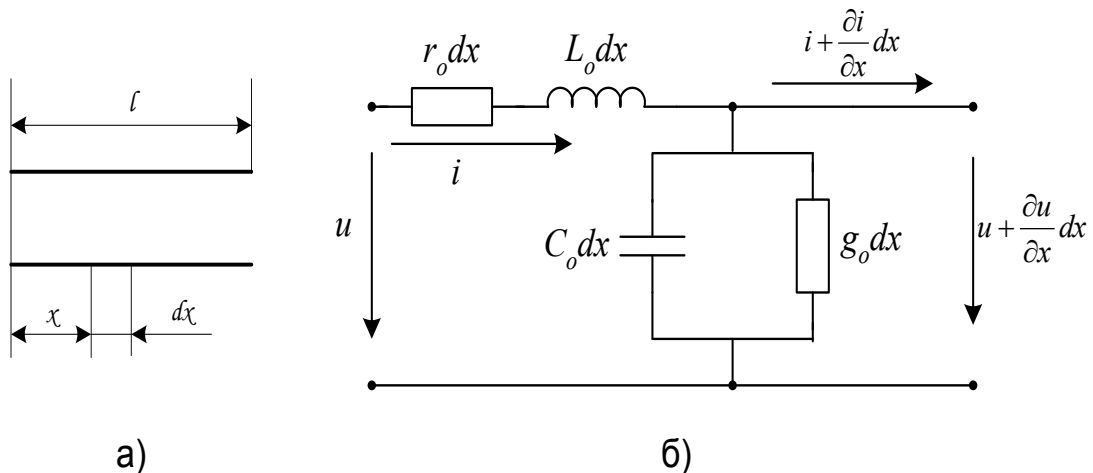


Рисунок 7.1

На виділеній ділянці кола її параметри визначаються як добуток первинних параметрів на довжину ділянки. Через те, що струм і напруга змінюються рівномірно вздовж лінії зі швидкістю $\frac{\partial i}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial x}$, то струм і напруга в кінці ділянки будуть $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$, $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

За другим законом Кірхгофа різниця вхідної і вихідної напруг дорівнює сумі спадів напруг на активному опорі та індуктивності, тобто

$$u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = r_o dx i + L_o dx \frac{\partial i}{\partial t},$$

або
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r_o i + L_o \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (7.1)$$

За першим законом Кірхгофа

$$i - (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) = g_o dx (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + C_o dx \frac{\partial (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)}{\partial t}.$$

Нехтуючи складовими другого порядку меншості, одержуємо

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_o u + C_o \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Рівняння (7.1) і (7.2) запишемо у вигляді системи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_o i + L_o \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_o u + C_o \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Ця система диференціальних рівнянь в частинних похідних називається *телеграфними рівняннями*.

7.2 Розв'язання телеграфних рівнянь в усталеному режимі при синусоїдній напрузі

Якщо на початку лінії підключене джерело синусоїдної напруги з частотою f , то струм і напруга в будь-якій точці лінії також будуть змінюватися за синусоїдним законом.

Використаємо символічний метод, замінивши синусоїдну функцію часу

комплексними величинами $u \rightarrow \underline{U}$ $i \rightarrow \underline{I}$.

Підставимо комплексні значення струму і напруги в (7.3), враховуючи, що операція диференціювання при цьому замінюється множенням на

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I}, \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

В цих рівняннях комплексні величини \underline{U} і \underline{I} не є функціями часу, тому частинні похідні в (7.4) замінені повними.

Із (7.4) одержимо одне диференціальне рівняння. Продиференціюємо перше рівняння системи

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0) \frac{d\underline{I}}{dx}$$

і підставимо замість $\frac{d\underline{I}}{dx}$ його значення з другого рівняння системи.

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0) \underline{U}.$$

Позначивши

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)}, \quad (7.5)$$

Одержимо

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0. \quad (7.6)$$

Одержане диференціальне рівняння другого порядку має розв'язок

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{p_1 x} + \underline{A}_2 e^{p_2 x},$$

де $p_1 = -\gamma$; $p_2 = \gamma$ – корені характеристичного рівняння, а \underline{A}_1 , \underline{A}_2 – комплексні постійні інтегрування.

Таким чином

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}. \quad (7.7)$$

Із першого рівняння системи (7.4)

$$\underline{I} = -\frac{1}{r_0 + j\omega L_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{(r_0 + j\omega L_0)} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}).$$

Підставляючи значення γ із (7.5) одержимо

$$\underline{I} = \sqrt{\frac{g_0 + j\omega C_0}{r_0 + j\omega L_0}} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}).$$

Позначимо

$$\underline{Z}_{xg} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}. \quad (7.8)$$

і назвемо його *хвильовим або характеристичним опором лінії*, тоді

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_{xg}} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}). \quad (7.9)$$

Постійну інтегрування можна знайти з граничних умов. Якщо, наприклад, відомо вхідний струм \underline{I}_1 і напругу \underline{U}_1 (при $x=0$), то

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{xg} &= \underline{A}_1 - \underline{A}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Звідси

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{xg}}{2}, \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{xg}}{2}. \quad (7.11)$$

7.3 Падаючі і відбиті хвилі

Для того, щоб з'ясувати фізичну суть складових в рівнянні (7.7), розглянемо миттєві значення першої складової, позначивши її \underline{U}_n .

Через те, що $\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\Psi_1}$ і коефіцієнт γ також комплексне число $\gamma = \alpha + j\beta$, то комплексне значення \underline{U}_n можна записати в вигляді

$$\underline{U}_n = A_1 e^{j\Psi_1} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} = A_1 \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\Psi_1 - \beta x)}.$$

Миттєве значення

$$u_n = A_{1m} e^{-\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x) \quad (7.12)$$

В кожній точці лінії при $x = x_i$ напруга u_n , залежно від часу, змінюється за синусоїдним законом з амплітудою $A_{1m} e^{-\alpha \cdot x_i}$. В фіксований момент часу $t = t_1$ напруга u_n вздовж лінії змінюється за згасальною синусоїдою (рис. 7.2).

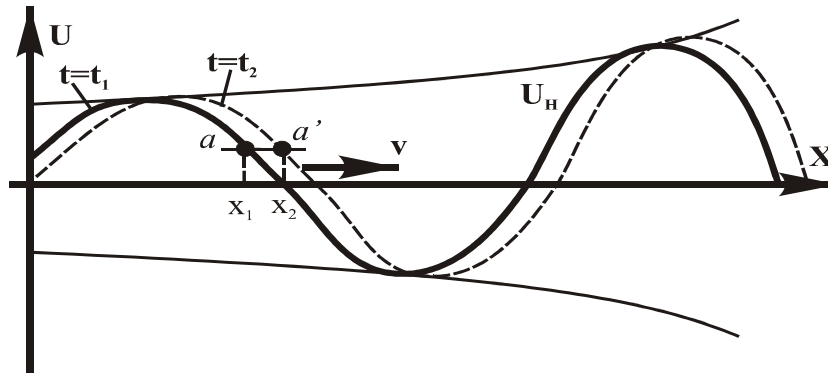


Рисунок 7.2

Фаза коливань в точці a визначається виразом $\omega \cdot t_1 + \Psi_1 - \beta \cdot x_1$. Визначимо положення цієї ж точки хвилі в момент $t_2 > t_1$. Оскільки фаза коливань цієї точки залишається без змін, повинна виконуватись рівність

$$\omega \cdot t_1 + \Psi_1 - \beta \cdot x_1 = \omega \cdot t_2 + \Psi_1 - \beta \cdot x_2.$$

Враховуючи те, що $t_2 > t_1$, то $x_2 > x_1$. Це означає, що всі точки хвилі напруги U_n за час $t_2 - t_1$ зміщуються на величину $x_2 - x_1$ (рис. 7.2, пунктирна лінія).

Іншими словами, хвиля напруги переміщується з часом від початку лінії до її кінця зі швидкістю v , яку називають фазовою швидкістю. Тому цю хвилю напруг називають *прямою* або *падаючою*.

Визначимо фазову швидкість. При русі фаза будь-якої точки хвилі залишається незмінною, тобто

$$\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x = Const. \quad (7.13)$$

Продиференціювавши (7.13) за часом, одержимо

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0.$$

Звідси

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (7.14)$$

Фазова швидкість звичайно близька до швидкості світла $v \approx c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Із виразу (7.12) зрозуміла і фізична суть коефіцієнтів α і β . Величина α характеризує ступінь зміни амплітуди хвилі при русі її вздовж лінії і називається *коефіцієнтом згасання*. Величина β показує відмінність фаз напруги хвилі в різних точках лінії і називається *фазовим коефіцієнтом*, а величина γ називається коефіцієнтом або *постійною поширення*.

Коефіцієнт α вимірюють в Нп/м , а β – в рад/м .

Для характеристики хвильових процесів в лінії вводять поняття *довжини хвилі* λ . Довжиною хвилі називають відстань між двома точками лінії, в яких фаза хвилі в будь-який момент часу відрізняються одна від однієї на 2π , тобто:

$$(\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x) - [\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot (x + \lambda)] = 2 \cdot \pi.$$

Звідси

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta}, \quad (7.15)$$

або, з урахуванням (7.14),

$$\lambda = \frac{v}{f}. \quad (7.16)$$

Якщо прийняти $V = 3 \times 10^8 \text{ мс}$, то для $f = 50 \text{ Гц}$ довжина хвилі $\lambda = 6000 \text{ км}$, для $f = 30 \text{ МГц}$ $\lambda = 10 \text{ м}$.

Якщо довжина лінії і довжина хвилі сумірні, то вздовж лінії помітні зміни напруги, якщо ж $\lambda \ll L$, то зміна напруги практично не помітна і лінію можна розглядати як коло з зосередженими параметрами.

Друга складова в (7.7) відрізняється від першої знаком при X , тому друга складова

$$u_g = A_{2m} e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \Psi_2 + \beta \cdot x) \quad (7.17)$$

являє собою хвилю напруги, що переміщується від кінця лінії до початку з тією ж швидкістю v (рис. 7.3) і називається *зворотною* або *відбитою*.

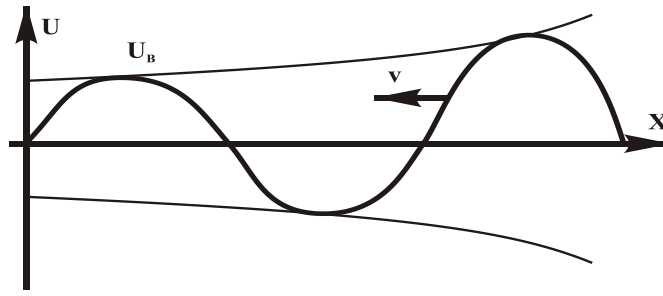


Рисунок 7.3

Поділ хвилі на падаючу і відбиту умовний. Насправді в лінії існує одна напруга як результат додавання падаючої і відбитої хвиль.

Точно так само умовно можна розділити на падаючу і відбиту хвилі струму, а підсумковий струм визначити як різницю цих хвиль.

$$i = i_n - i_B \quad \text{або} \quad \underline{I} = \underline{I}_n - \underline{I}_B. \quad (7.18)$$

При цьому для синусоїдних величин виконується співвідношення

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{U}_n}{\underline{Z}_{xg}}, \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_{xg}}. \quad (7.19)$$

Таким чином, хвильовий опір \underline{Z}_{xg} являє собою опір лінії струмові падаючої і відбитої хвиль.

Величини – коефіцієнт поширення γ і хвильовий опір \underline{Z}_{xg} – називають *вторинними* або *хвильовими* параметрами.

Приклад 7.1

Визначити хвильові параметри для повітряної лінії з первинними параметрами $r_0 = 2,84 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 1,94 \frac{\text{мГ}}{\text{км}}$, $g_0 = 0,7 \text{ мкСм/км}$,

$C_0 = 6,25 \text{ нФ/км}$ на частоті $f = 800 \text{ Гц}$.

Хвильовий опір

$$\underline{Z}_{\hat{a}\hat{a}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2,84 + j2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3}}{0,7 \cdot 10^{-6} + j2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9}}} = 5,68 \cdot e^{-j7^\circ 30'} \hat{H}.$$

Коефіцієнт поширення

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{10,15 \cdot e^{j73^\circ 45'} \cdot 31,4 \cdot e^{j88^\circ 45'} \cdot 10^{-6}} = \\ &= 2,74 \cdot 10^{-3} + j \cdot 17,8 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт згасання

$$\alpha = 2,74 \cdot 10^{-3} \text{ Hn / км.}$$

Фазовий коефіцієнт

$$\beta = 17,8 \cdot 10^{-3} \text{ рад / км.}$$

Фазова швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{17,8 \cdot 10^{-3}} = 2,84 \cdot 10^5 \text{ км / с.}$$

Приклад 7.2

Визначити хвильові параметри коаксіального кабелю з параметрами $r_0 = 19,7 \text{ Ом / км}$, $L_0 = 0,263 \text{ мГ / км}$, $C_0 = 46,5 \text{ нФ / км}$, $g_0 = 3,2 \text{ мкСм / км}$ на частоті $f = 20 \text{ кГц}$.

$$\underline{Z}_{x\delta} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{19,7 + j2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,263 \cdot 10^{-3}}{3,2 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 46,5 \cdot 10^{-9}}} = 81e^{-j15^\circ} \text{ Ом}$$

$$\gamma = 0,474e^{j75^\circ} = 0,123 + j0,458; \quad \alpha = 0,123 \text{ Hn / км};$$

$$\beta = 0,458 \text{ рад / км}, \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3}{0,458} = 2,74 \cdot 10^5 \text{ км / с.}$$

7.4 Відбивання в довгих лініях

Вияснимо фізичну суть появи відбитих хвиль напруги або струму та їх величини.

Перенесемо початок відліку координати x на кінець лінії, тоді в виразах (7.7) і (7.9) для струму і напруги, в будь-який момент, потрібно змінити x на $l - x$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma(l-x)} + \underline{A}_2 e^{\gamma(l-x)} = \underline{B}_1 e^{\gamma x} + \underline{B}_2 e^{-\gamma x}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_{x\delta}} e^{-\gamma(l-x)} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_{x\delta}} e^{\gamma(l-x)} = \frac{\underline{B}_1}{\underline{Z}_{x\delta}} e^{\gamma x} - \frac{\underline{B}_2}{\underline{Z}_{x\delta}} e^{-\gamma x}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Нові постійні інтегрування \underline{B}_1 і \underline{B}_2 визначимо з граничних умов для кінця лінії при $x = 0$, $\underline{U} = \underline{U}_2$, $\underline{I} = \underline{I}_2$, де $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ – напруга і струм в кінці лінії.

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_1 + \underline{B}_2, \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\delta} &= \underline{B}_1 - \underline{B}_2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Звідси

$$\underline{B}_1 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\delta}}{2}, \quad \underline{B}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\delta}}{2}. \quad (7.22)$$

i

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6}}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6}}{2} \cdot e^{-\gamma x}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6}}{2 \cdot \underline{Z}_{x6}} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6}}{2 \cdot \underline{Z}_{x6}} \cdot e^{-\gamma x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Відношення комплексного значення напруги відбитої хвилі на кінці лінії $\underline{U}_{B_2} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{6x}}{2}$ до комплексного значення падаючої хвилі на кінці лінії $\underline{U}_{n_2} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{6x}}{2}$ називається *коефіцієнтом відбивання*

$$K_B = \frac{\underline{U}_{B_2}}{\underline{U}_{n_2}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{6x}}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{6x}} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_{x6}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{x6}}. \quad (7.24)$$

Тут враховано, що $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H$, де \underline{Z}_H – опір навантаження.

Із (7.24) видно, що величина відбитої хвилі залежить від співвідношення між опором навантаження і хвильовим опором лінії.

При короткому замиканні лінії ($\underline{Z}_H = 0$) коефіцієнт відбивання $K_B = -1$, а при холостому ході ($\underline{Z}_H = \infty$) – $K_B = 1$, тобто в цих режимах падаюча хвиля повністю відбивається від кінця лінії. При $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{x6}$ коефіцієнт відбивання дорівнює нулю, потужність, яка передається через лінію, повністю поглинається навантаженням. Такий режим роботи лінії називається *узгодженням*.

Таким чином, відбита хвиля від кінця лінії виникає тому, що при відсутності узгодження навантаження з лінією ($\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_{x6}$) не вся потужність поглинається навантаженням і частина потужності повертається до джерела.

7.5 Рівняння довгої лінії через гіперболічні функції

Систему рівнянь (7.23) запишемо в вигляді

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{U}_2}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{6x}}{2} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2}{2} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6}}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \underline{U}_2 \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{2 \cdot \underline{Z}_{x6}} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{I}_2}{2} \cdot e^{\gamma x} - \frac{\underline{U}_2}{2 \cdot \underline{Z}_{x6}} \cdot e^{-\gamma x} + \frac{\underline{I}_2}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x6}} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}; \end{aligned}$$

або

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\phi} \operatorname{sh} \gamma x, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\phi}} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Одержаний вираз дозволяє визначити напругу і струм в будь-якій точці лінії, якщо відомі напруга і струм в кінці лінії і вторинні параметри $(\gamma, \underline{Z}_{x\phi})$ лінії.

Напруга і струм на початку лінії $(x = L)$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma L + \underline{I}_2 \underline{Z}_{x\phi} \cdot \operatorname{sh} \gamma L, \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\phi}} \cdot \operatorname{sh} \gamma L + \underline{I}_2 \cdot \operatorname{ch} \gamma L. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Система рівнянь (7.26) являє собою рівняння симетричного чотириполюсника.

В узгодженому режимі $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{x\phi}$ тому $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\phi}$ і система (7.25) набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma x}, \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_H = \underline{Z}_{x\phi} \quad (7.28)$$

не залежить від довжини лінії і дорівнює хвильовому опорі.

Як уже відмічалось, однорідну лінію можна розглядати як симетричний чотириполюсник з характеристичним опором $\underline{Z}_{x\phi}$ і постійною передачею γL . Відповідно, при дослідженні режимів генератора і приймача для однієї заданої частоти лінію можна подати у вигляді T - або Π -подібної схеми заміщення.

7.6 Лінія без спотворень

При передаванні сигналів через лінію необхідно, щоб форма сигналу на початку і в кінці лінії була однакою. Така лінія, в якій при передаванні не виникають спотворення сигналів, називається лінією без спотворення.

Сигнал в загальному випадку являє собою сукупність різних гармонічних складових. Щоб сигнал передавався без спотворення, згасання складових (різних гармонік) повинно бути однаковим. Іншими словами, коефіцієнт згасання α не повинен залежати від частоти. Фазова швидкість

різних гармонік повинна бути також однакою, щоб не виникали фазові викривлення. Через те, $v = \omega/\beta$, то коефіцієнт фази повинен бути пропорційний частоті.

Такі умови виконуються, якщо виконується співвідношення

$$\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0}. \quad (7.29)$$

Дійсно, при цьому

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = \sqrt{L_0 \cdot C_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{L_0} + j \cdot \omega\right) \cdot \left(\frac{g_0}{C_0} + j \cdot \omega\right)} = \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left(\frac{r_0}{L_0} + j \cdot \omega\right) = \\ &= r_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0} = \sqrt{r_0 \cdot g_0} + j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\alpha = \sqrt{r_0 \cdot g_0}; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}.$$

Звичайно в лінії

$$\frac{r_0}{L_0} > \frac{g_0}{C_0}.$$

Щоб домогтися виконання умови (7.29), можна зменшувати r_0 , для чого необхідно збільшувати діаметр проводів або взяти матеріал з кращою провідністю, що значно збільшує вартість лінії. Можна збільшити g_0 , але тим самим значно збільшиться згасання лінії, що також недоцільно. Зменшення C_0 також може привести до виконання рівності (7.29), але це вимагає збільшення відстані між провідниками, що ускладнює конструкцію і вартість лінії.

Найбільш прийнятним шляхом виявляється штучне збільшення індуктивності лінії шляхом вмикання в лінію через однакові проміжки спеціально виготовлених котушок індуктивності.

Спотворення сигналу викликаються ще і неузгодженістю опору навантаження і хвильового опору лінії, при якій виникало відбивання хвиль. Для одержання узгодженого режиму роботи лінії часто використовують ідеальні трансформатори з відповідним вибором коефіцієнта трансформації.

7.7 Лінія без втрат на холостому ходу

На високих частотах $\omega \cdot L_0 \gg r_0$ і $\omega \cdot C_0 \gg g_0$, тому при визначенні Z_{xg} та γ можна знехтувати величинами r_0 та g_0 .

В цьому випадку хвильовий опір лінії

$$\underline{Z}_{x\delta} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (7.30)$$

дійсне число, а

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega \cdot \sqrt{L_0 C_0}, \quad (7.31)$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{L_0 C_0}. \quad (7.32)$$

Згасання в лінії без втрат відсутнє, а фазова швидкість $v = \frac{\omega}{\beta}$ не залежить від частоти. Таким чином, лінія без втрат одночасно є і лінією без спотворень.

Запишемо рівняння однорідної лінії без втрат через гіперболічні функції, враховуючи, що $\operatorname{ch} j\beta x = \cos \beta x$, $\operatorname{sh} j\beta x = j \sin \beta x$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\delta} \sin \beta x, \\ \underline{I} &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\delta}} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

На холостому ході $\underline{I}_2 = 0$, тому

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta x, \\ \underline{I} &= \frac{j \underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\delta}} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Запишемо ці вирази у вигляді миттєвих функцій, вважаючи, що початкова фаза напруги U_2 дорівнює нулю

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \sin \omega t \cos \beta x, \\ i &= \frac{U_{2m}}{\underline{Z}_{x\delta}} \cos \omega t \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Виразимо фазовий коефіцієнт через довжину хвилі λ з (7.15)

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{\lambda} x, \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_{x\phi}} \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Проаналізуємо одержані рівняння. В будь-якій точці лінії ($x = Const$) напруга змінюється залежно від часу за синусоїдним законом з різною амплітудою. Наприклад, в кінці лінії при $x=0$, $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 1$ і амплітуда напруги максимальна.

Зі зростанням x амплітуда напруги зменшується, і при $x=\lambda/4$, $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$ амплітуда напруги дорівнює нулю в будь-який момент часу. На проміжку $\lambda/4 < x < 3\lambda/4$ амплітуда зростає до максимального значення при $x = \lambda/2$ і знову дорівнює нулю при $x=3\lambda/4$. Ті точки лінії, в яких напруга завжди дорівнює нулю ($x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \dots$), називаються *вузлами*, а ті точки, в яких напруга може набувати максимального значення ($x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$), називаються *пучностями*.

На рисунку 7.4 зображені графіки миттєвих значень напруги вздовж лінії для деяких послідовних моментів часу $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ протягом одного півперіоду коливань.

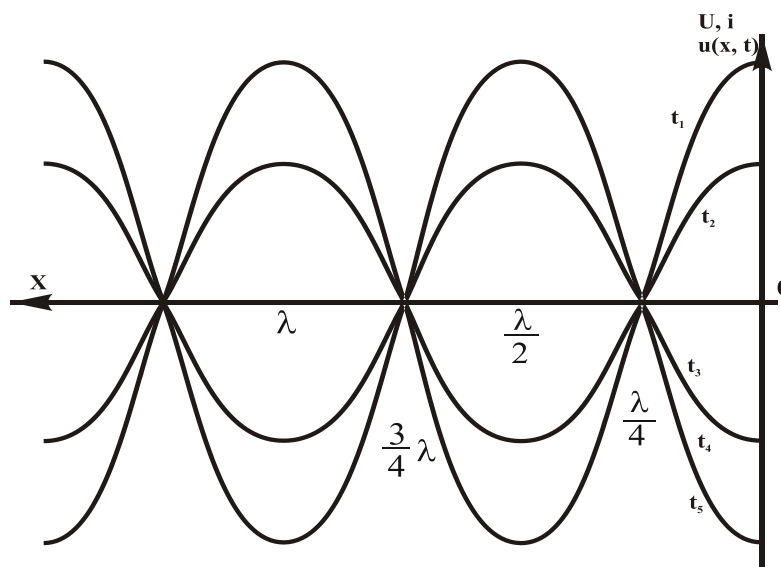


Рисунок 7.4

В лінії виникають хвилі, які пульсують, і не переміщуються вздовж. Такі хвилі називаються *стоячими*.

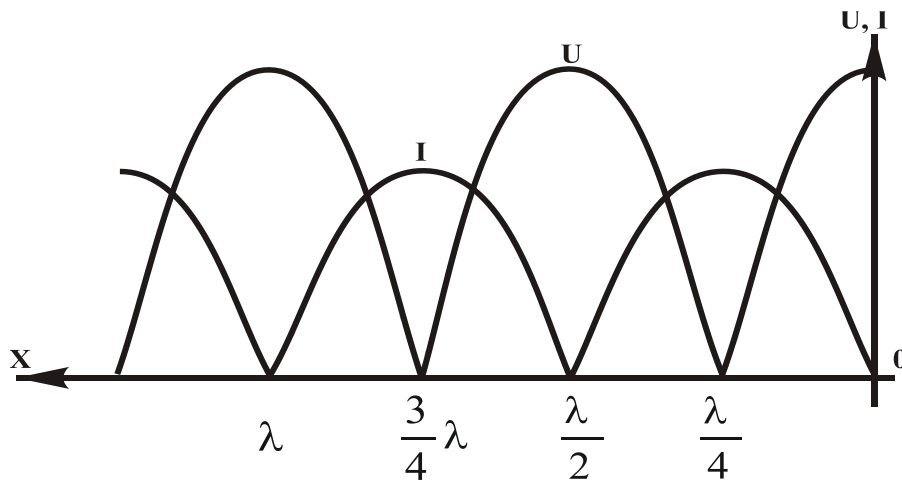


Рисунок 7.5

На рисунку 7.5 зображений розподіл діючого значення напруги і струму вздовж лінії.

Струм вздовж лінії розподілений за синусоїдний законом (7.36), тому в кінці лінії вузол струму. Із графіка розподілення діючого значення струму вздовж лінії (рис. 7.5) видно, що вузли струму збігаються з пучностями напруги і навпаки.

Пульсуюче значення струму і напруги в точках лінії означає відсутність передачі енергії вздовж лінії. В лінії відбувається тільки обмін енергією між електричним і магнітним полями.

В режимі холостого ходу також можна уявляти напругу і струм у вигляді падаючої і відбитої хвиль. Оскільки при холостому ході коефіцієнт відбивання $K_v = -1$, то складання падаючої і відбитої хвиль приводить до виникнення стоячої хвилі.

Вхідний опір лінії на холостому ході

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U}{I} = \frac{U_2 \cos \beta x}{\frac{jU_2}{Z_{ex}} \cdot \sin \beta x} = -jZ_{ex} \cdot \operatorname{ctg} \beta x. \quad (7.37)$$

Оскільки \underline{Z}_{ex} дійсна величина для лінії без втрат, то вхідний опір лінії на холостому ході є реактивним і його величина і характер залежать від довжини лінії.

На рисунку 7.6 зображений графік зміни вхідного опору лінії залежно від її довжини. З графіка видно, що при $0 < L < \frac{\lambda}{4}$ вхідний опір носить ємнісний характер і зі зростанням довжини лінії зменшується. При $\frac{\lambda}{4} < L < \frac{\lambda}{2}$ вхідний опір лінії є індуктивним і зі зростанням довжини

збільшується. При $L = \frac{\lambda}{4}$ вхідний опір лінії дорівнює нулю, а при $L = \frac{\lambda}{2}$ – нескінченності.

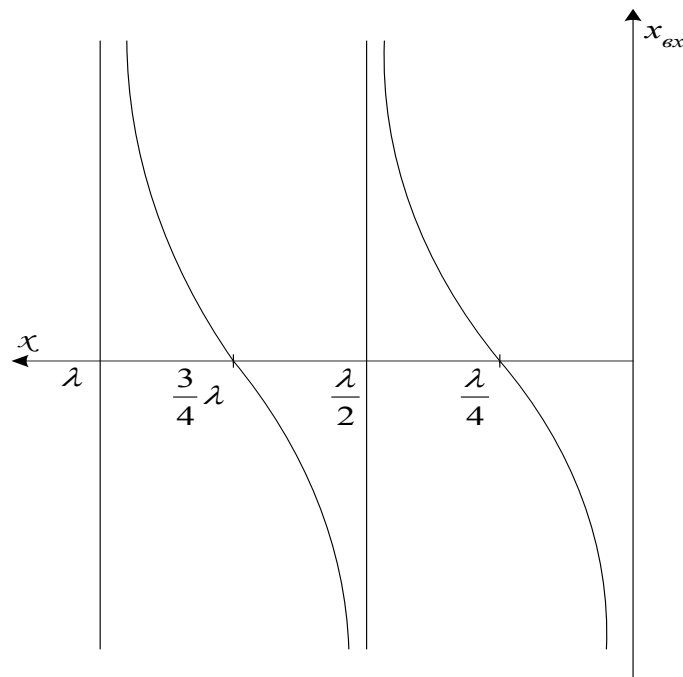


Рисунок 7.6

7.8 Лінія без втрат при короткому замиканні

При короткому замиканні $\underline{U}_2 = 0$ і система (7.33) має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= j \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x_0} \sin \beta x, \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Миттєві значення напруги і струму

$$\left. \begin{aligned} u &= I_{2m} \cdot Z_{x_0} \cdot \cos \omega t \sin \beta x, \\ i &= I_{2m} \cdot \sin \omega t \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Міркування, аналогічні зробленим раніше, приводять до висновку, що і в цьому випадку мають місце стоячі хвилі. Розподіл діючих значень напруги і струму вздовж лінії показаний на рисунку 7.7.

Вузли і пучності напруги при короткому замиканні збігаються, відповідно, з вузлами і пучностями струму при холостому ході. Вхідний опір лінії при короткому замиканні

$$\underline{Z}_{gx} = \frac{U}{I} = \frac{jI_2 \cdot \underline{Z}_{xg} \cdot \sin \beta x}{I_2 \cos \beta x} = j\underline{Z}_{xg} \operatorname{tg} \beta x. \quad (7.40)$$

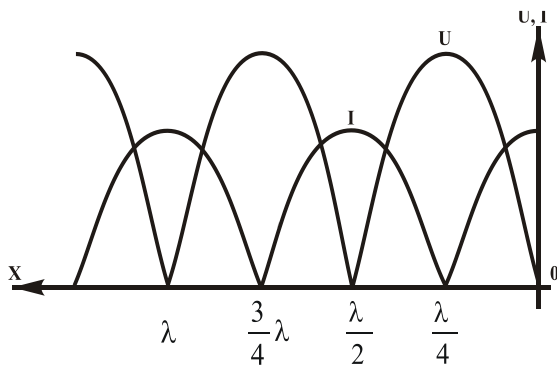


Рисунок 7.7

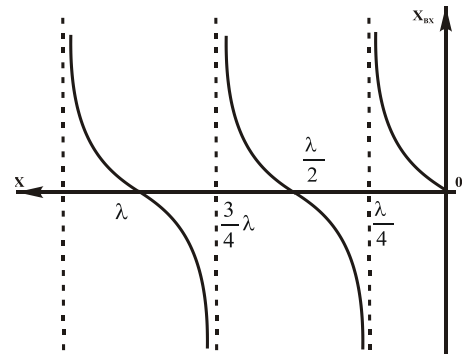


Рисунок 7.8

$$\underline{Z}_{gx} = \frac{U}{I} = \frac{jI_2 \cdot \underline{Z}_{xg} \cdot \sin \beta x}{I_2 \cos \beta x} = j\underline{Z}_{xg} \operatorname{tg} \beta x. \quad (7.40)$$

Вхідний опір лінії і при короткому замиканні реактивний, величина і характер якого залежить від довжини лінії (рис. 7.8). При $0 < L < \lambda/4$ характер вхідного опору індуктивний і величина опору зростає з ростом довжини.

Розглянуті властивості лінії без втрат широко використовуються для практичних цілей. Наприклад, короткозамкнуті або розімкнуті лінії використовуються в коливальних контурах як добротні індуктивності і ємності.

Приклад 7.3. Послідовно з активним опором $r = 10 \text{ Ом}$ і ємністю $C = 1.2 \text{ нФ}$ потрібно підключити короткозамкнуту лінію без втрат з $L_0 = 2 \text{ мкГ/м}$, $C_0 = 5,55 \text{ нФ/м}$ так, щоб на частоті $f = 200 \text{ МГц}$ контур працював в резонансному режимі. Визначити мінімальну довжину короткозамкненої лінії.

Розв'язання

Визначимо спочатку величину індуктивності, при якій контур працює в резонансному режимі. Відомо, що для послідовного коливального контуру резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Звідси

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^8)^2 \cdot 2 \cdot 1.2 \cdot 10^{-12}} = 0.53 \cdot 10^{-6} \text{ Г}$$

Вхідний опір короткозамкненої лінії без втрат

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = j \cdot \underline{Z}_{\text{хв}} \cdot \text{tg } \beta x \quad \text{або} \quad X_{\text{вх}} = Z_{\text{хв}} \text{tg } \beta x.$$

Хвильовий опір лінії

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{5.55 \cdot 10^{-12}}} = 600 \text{ Ом}$$

Індуктивний вхідний опір на частоті $f_0 = 200 \text{ МГц}$

$$X_{\text{вх}} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0.53 \cdot 10^{-6} = 672 \text{ Ом}.$$

Тоді

$$\text{tg } \beta x = \frac{X_{\text{вх}}}{Z_{\text{вх}}} = \frac{672}{600} = 1.12,$$

$$\beta x = 41.7^\circ = 0.728 \text{ рад}.$$

Оскільки фазовий коефіцієнт

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5.55 \cdot 10^{-12}} = 4.2 \text{ рад / м},$$

то

$$x = \frac{0.728}{4.2} = 0.173 \text{ м} = 17.3 \text{ см}.$$

Як виходить із (7.40), вхідний опір короткозамкненої довгої лінії без втрат при $x = \frac{\lambda}{4}$ дорівнює нескінченності, тому така лінія може служити металевим ізолятором для кріплення ліній (рис. 7.9).

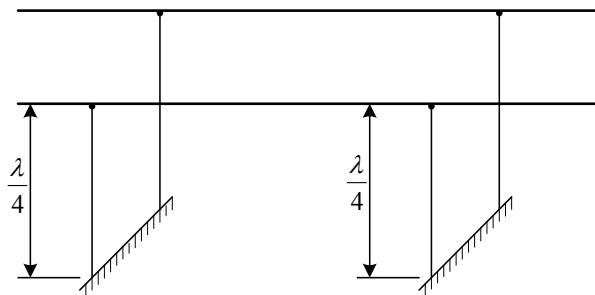


Рисунок 7.9

7.9 Перехідні процеси в довгих лініях. Загальний розв'язок

При аналізі перехідних процесів в однорідних довгих лініях слід користуватися телеграфними рівняннями

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

де за початок відліку x взятий початок лінії.

Задача розрахунку перехідних процесів зводиться до знаходження загального розв'язку системи (7.41) при визначених початкових ($t=0$) і граничних ($x=0, x=L$) умовах. В загальному вигляді розв'язання такої системи досить складне. Обмежимося тому розглядом лінії без втрат ($r_0=0, g_0=0$).

В цьому випадку система набуде вигляду:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\}, \quad (7.42)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7.43)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ – швидкість хвилі.

Систему рівнянь (7.43) задовольняє розв'язок

$$\left. \begin{aligned} u(x,t) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \\ i(x,t) &= \frac{1}{Z_{xв}} f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{Z_{xв}} f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

де $Z_{xв} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ – хвильовий опір лінії (дійсне число).

Конкретні значення функцій f_1 і f_2 визначаються характером зовнішньої дії а також початковими і граничними умовами. Перша

складова напруги або струму являє собою напругу або струм хвилі, яка рухається від початку лінії до кінця зі швидкістю v і є падаючою або прямою хвилею, а друга складова – зворотна або відбита хвиля, тому можна записати

$$\left. \begin{aligned} u &= u_n + u_e \\ i &= i_n - i_e = \frac{u_n}{Z_{x\epsilon}} - \frac{u_e}{Z_{x\epsilon}} \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Перехідний процес в лінії подається як сума падаючої і відбитої хвиль, так само як і в усталеному режимі.

7.10 Вмикання довгої лінії на постійну напругу

Після вмикання ключа (рис. 7.10) напруга на початку лінії зразу досягає постійного значення $U = E$, і виникає падаюча хвиля прямокутної форми (рис. 7.11), яка рухається від початку лінії до кінця зі швидкістю v . Струм хвилі $i_n = I = \frac{E}{Z_{x\epsilon}}$. В будь-який момент часу в усіх точках лінії, до яких хвиля ще не дійшла, напруга і струм дорівнюють нулю. Точка, яка обмежує ділянку лінії, до якої дійшло хвильове збурення, називається *фронтом хвилі*. До кінця лінії хвиля доходить за час $t_1 = \frac{L}{v}$.

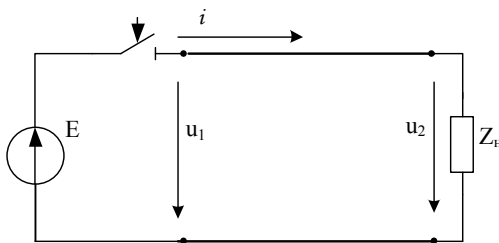


Рисунок 7.10

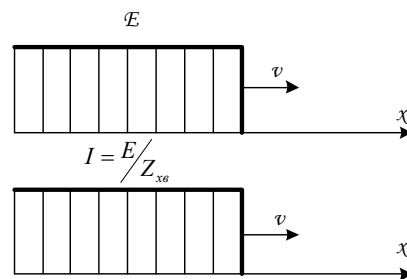


Рисунок 7.11

Для кінця лінії справедливі співвідношення (7.45), тобто

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_n + u_e, \\ i_2 &= \frac{u_n}{Z_{x\epsilon}} - \frac{u_e}{Z_{x\epsilon}} \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_n + u_e, \\ i_2 Z_{x\epsilon} &= u_n - u_e. \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

Додаючи ці рівняння, одержимо

$$2u_n = i_2 Z_{x\delta} + u_2. \quad (7.47)$$

Одержаному рівнянню відповідає розрахункова схема, яка зображена на рисунку 7.12.

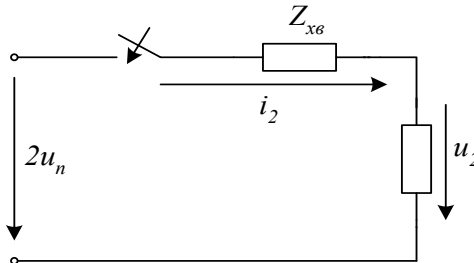


Рисунок 7.12

Ця схема дозволяє визначити для кожного конкретного навантаження відбиті хвилі напруги та струму.

Початок перехідного процесу в розрахунковій схемі запізнюється, порівняно з моментом вмикання лінії, на $t_1 = \frac{L}{v}$, тобто на час, який потрібний хвилі напруги для проходження всієї лінії.

Якщо навантаження лінії це активний опір r_n , то $u_2 = r_n i_2$ і (7.47) записується у вигляді

$$2u_n = i_2 (Z_{x\delta} + r_n).$$

Звідси

$$i_2 = \frac{2u_n}{Z_{x\delta} + r_n}.$$

Із другого рівняння (7.46)

$$u_6 = u_n - i_2 Z_{x\delta} = u_n - \frac{2u_n Z_{x\delta}}{Z_{x\delta} + r_n} = u_n \frac{r_n - Z_{x\delta}}{r_n + Z_{x\delta}}.$$

Коефіцієнт відбиття

$$K_0 = \frac{u_6}{u_n} = \frac{r_n - Z_{x\delta}}{r_n + Z_{x\delta}} \quad (7.48)$$

є постійною величиною, яка залежить від опору навантаження і хвильового опору.

7.11 Вмикання лінії на постійну напругу при холостому ході

При холостому ході $r_n = \infty$, $K_B = 1$.

На рисунку 7.13, а показані графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії, коли хвиля, яка виникла, ще не дійшла до кінця лінії.

В кінці лінії хвиля напруги і струму відбивається з тим самим знаком і рухається до початку лінії. Загальна напруга в лінії подвоюється, а струм дорівнює нулю (рис. 7.13, б). Для відбитої хвилі початок лінії є навантаженням і при $Z_{ДЖ} = 0$, $K_B = -1$, тобто хвиля напруги і струму відбивається з оберненим знаком. На рисунку 7.13, в показана третя хвиля напруги і струму.

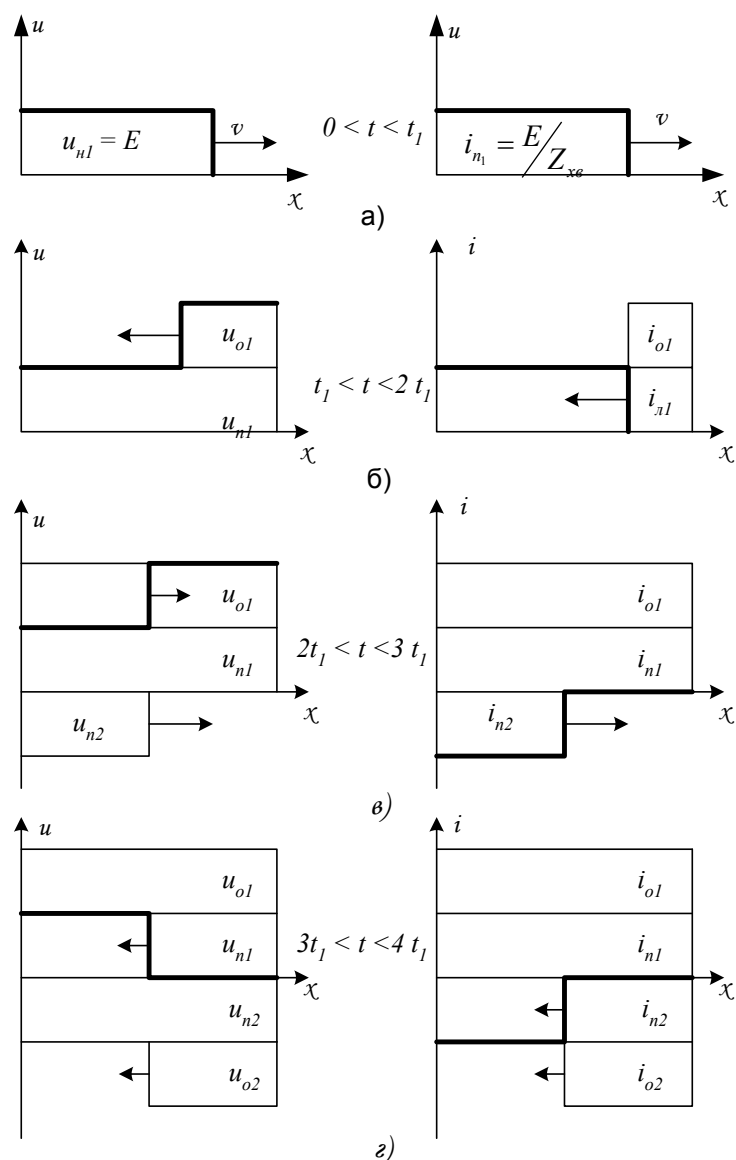


Рисунок 7.13

Загальна напруга при цьому стає такою, що дорівнює E , а струм набуває від'ємного значення. Після відбивання третьої хвилі від кінця лінії виникає друга відбита хвиля напруги і струму (рис. 7.13, г). Коли вона

досягає початку лінії, напруга і струм в лінії дорівнюють нулю, як і було до вмикання джерела напруги. З цього моменту, тобто після $T = 4t_1 = 4\frac{L}{v}$, перехідний процес в лінії повторюється.

В кожній точці лінії напруга і струм змінюються періодично, але криві зміни їх в різних точках будуть неоднакові. На рисунку 7.14, а показані графіки зміни залежно від часу напруги і струму в кінці лінії.

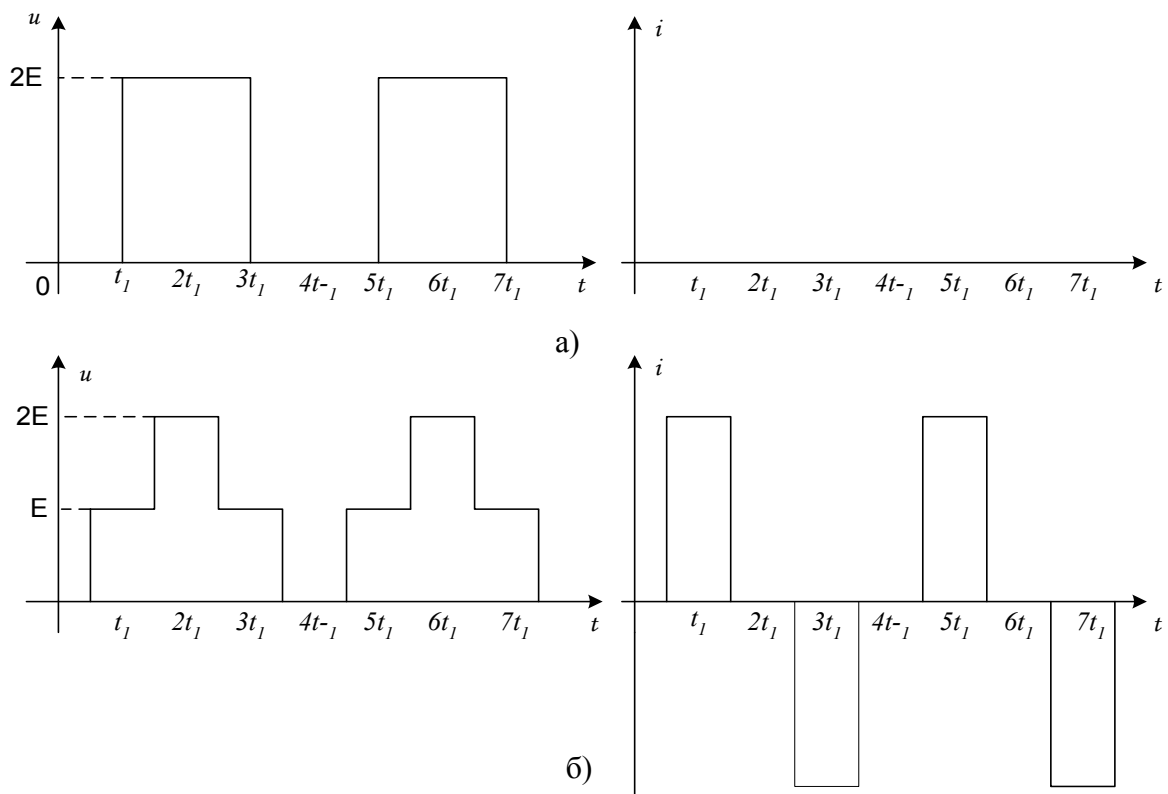


Рисунок 7.14

До моменту часу t_1 в кінці лінії немає ні напруги, ні струму (хвиля ще не дійшла до кінця лінії). В момент t_1 напруга в кінці лінії стрибком змінюється до значення $u = u_{n1} + u_{e1} = 2E$ і залишається такою до тих пір, поки до кінця лінії не дійде друга падаюча хвиля u_{n2} , тобто, протягом $2t_1$. Потім напруга спадає до нуля і зберігає своє значення знову протягом $2t_1$ і т. д., струм же в кінці лінії завжди дорівнює нулю. На рисунку 7.14, б зображений графік зміни напруги і струму в середині лінії.

В реальних лініях завжди є втрати, тому напруга і струм з часом зменшуються і при кожному новому відбитті хвилі їх значення теж будуть зменшуватися. В результаті цього рівень напруги в лінії поступово наближається до величини напруги джерела живлення.

Аналогічно можна розглядати рух хвиль в короткозамкненій лінії при підключенні її до джерела постійної напруги.

7.12 Вмикання лінії на постійну напругу при індуктивному навантаженні

На рисунку 7.15, а показано вмикання лінії з індуктивним навантаженням, а на рисунку 7.15, б – розрахункову схему для визначення струму в кінці лінії. Від початку вмикання лінії і до моменту t_1 , коли хвиля дійде до кінця лінії, графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії мають той же вигляд, що і раніше (рис. 7.16, а).

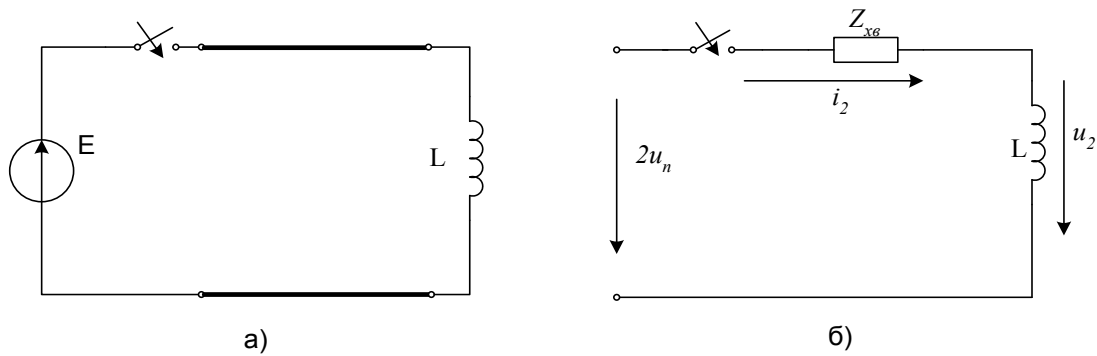


Рисунок 7.15

Визначимо коефіцієнт відбиття при індуктивному навантаженні. Для схеми на рисунку 7.15, б рівняння має вигляд

$$L \frac{di_2}{dt} + Z_{xg} i_2 = 2u_n, \text{ для } t > t_1. \quad (7.49)$$

Розв'язок цього рівняння

$$i_2 = \frac{2u_n}{Z_{xg}} \left[1 - e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} \right],$$

або

$$i_2 = 2i_n \left[1 - e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} \right]. \quad (7.50)$$

Оскільки в кінці лінії $i_2 = i_n - i_g$, то

$$i_g = i_n \left[2e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} - 1 \right]$$

і аналогічно

$$u_g = u_n \left[2e^{-\frac{Z_{xg}}{L}(t-t_1)} - 1 \right].$$

Коефіцієнт відбиття $K_B = \frac{u_\epsilon}{u_n} = 2e^{-\frac{Z_{x\epsilon}}{L}(t-t_1)} - 1$ (7.51)

залежить від часу.

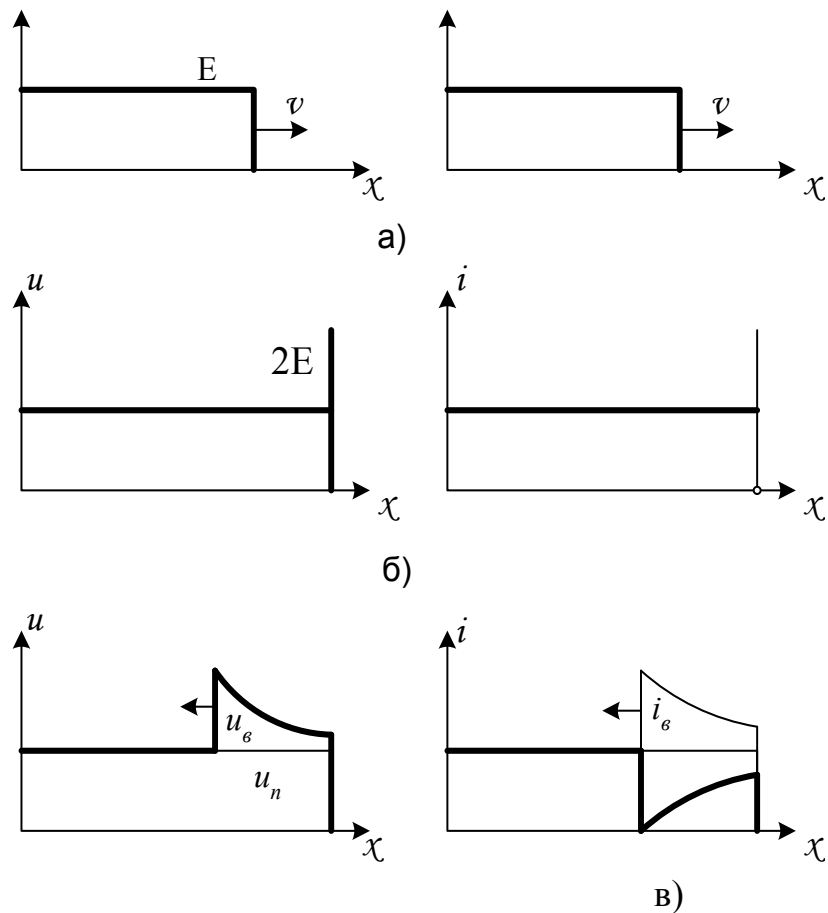


Рисунок 7.16

В момент часу t_1 $K_B = 1$ і загальна напруга в кінці лінії зразу подвоюється (рис. 7.16, б). В момент часу $t_2 > t_1$ фронт хвилі переміщується на відстань vt_2 , а коефіцієнт відбиття стає таким, що дорівнює

$$K_B(t_2) = \left(2e^{-\frac{Z_{x\epsilon}}{L}(t_2-t_1)} - 1 \right) < 1.$$

Графік розподілу напруги і струму для цього моменту часу показаний на рисунку 7.16, в.

З часом фронт хвилі переміщується до початку лінії. Коефіцієнт відбиття продовжує зменшуватися і при $t = \infty$ стає таким, що дорівнює мінус 1 ($K_B = -1$).

7.13 Заломлення хвиль в місці спряження двох ліній

Розглянемо проходження хвиль в місці спряження ліній з різними хвильовими опорами (рис. 7.17). Перша лінія довжиною L_1 має хвильовий опір $Z_{xв1}$ і друга лінія довжиною L_2 хвильовий опір $Z_{xв2}$.

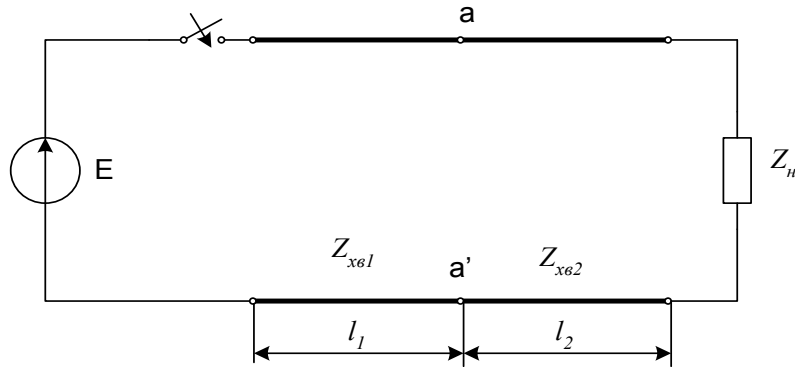


Рисунок 7.17

При замиканні ключа фронт хвилі напруги E переміщується зі швидкістю V до кінця лінії (7.18, а). В момент часу $t_1 = \frac{L_1}{V}$ падаюча хвиля підходить до місця спряження і, внаслідок різних хвильових опорів лінії, падаюча хвиля частково відбивається.

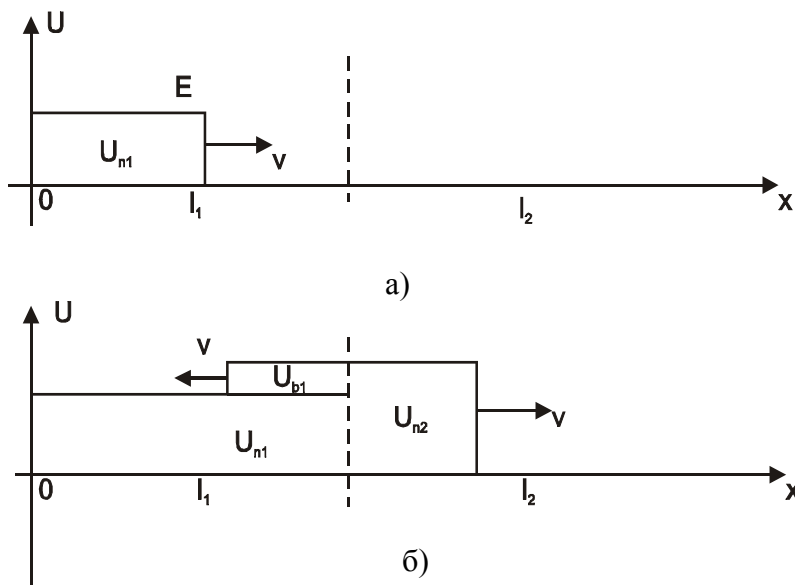


Рисунок 7.18

Загальна напруга на кінці першої лінії являє собою суму падаючої і відбитої хвиль

$$u_1 = u_{n1} + u_{e1}.$$

Напруга на початку другої лінії повинна бути такою, що дорівнює напрузі на кінці першої лінії (напруга між одними і тими ж точками a і a'), і вона ж є падаючою хвилею другої лінії, тобто

$$u_{n2} = \underline{u}_{n1} + \underline{u}_{e1}. \quad (7.52)$$

Аналогічно для струму

$$i_{n2} = i_{n1} - i_{e1} \quad (7.53)$$

або

$$\frac{u_{n2}}{Z_{x\theta 2}} = \frac{u_{n1}}{Z_{x\theta 1}} - \frac{u_{e1}}{Z_{x\theta 1}}. \quad (7.54)$$

Виразимо u_{n2} із (7.54) і підставимо в (7.52)

$$\begin{aligned} u_{n1} \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} - u_{e1} \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} &= u_{n1} + u_{e1}, \\ u_{n1} \left(1 - \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} \right) &= -u_{e1} \left(1 + \frac{Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1}} \right). \end{aligned}$$

Звідки

$$u_{e1} = u_{n1} \frac{Z_{x\theta 2} - Z_{x\theta 1}}{Z_{x\theta 2} + Z_{x\theta 1}}. \quad (7.55)$$

Таким чином, коефіцієнт відбиття для першої лінії

$$K_{B1} = \frac{u_{e1}}{u_{n1}} = \frac{Z_{x\theta 2} - Z_{x\theta 1}}{Z_{x\theta 2} + Z_{x\theta 1}}. \quad (7.56)$$

Падаюча хвиля другої лінії, яку називають звичайно *заломленою* хвилею, з (7.52)

$$u_{n2} = u_{n1} + u_{n1} \frac{Z_{x\theta 2} - Z_{x\theta 1}}{Z_{x\theta 2} + Z_{x\theta 1}} = u_{n1} \frac{2Z_{x\theta 2}}{Z_{x\theta 1} + Z_{x\theta 2}} = u_{n1} (1 + K_{e1}). \quad (7.57)$$

Перехід хвилі з першої лінії на другу характеризують *коефіцієнтом заломлення*, який дорівнює відношенню падаючої хвилі другої лінії до падаючої хвилі першої лінії, тобто

$$K_{31} = \frac{u_{n2}}{u_{n1}} = \frac{2Z_{x\epsilon 2}}{Z_{x\epsilon 1} + Z_{x\epsilon 2}} = 1 + K_{\epsilon 1}. \quad (7.58)$$

Якщо $Z_{x\epsilon 2} > Z_{x\epsilon 1}$, то $0 < K_{\epsilon} < 1$ і графік розподілу хвилі напруги показаний на рисунку 7.18, б.

Подальший розподіл хвилі по лінії залежить від навантаження другої лінії і внутрішнього опору джерела.

Відбита від навантаження хвиля другої лінії, підходячи до місця спрження, також відбивається і заломлюється, але в цьому випадку

$$K_{B2} = \frac{Z_{x\epsilon 1} - Z_{x\epsilon 2}}{Z_{x\epsilon 1} + Z_{x\epsilon 2}}, \quad K_{32} = 1 + K_{B2}. \quad (7.59)$$

Контрольні питання та вправи

1. Які величини називають хвильовими параметрами лінії і як вони пов'язані з первинними параметрами?

2. Який опір потрібно ввімкнути в кінці лінії, щоб не було відбитих хвиль?

3. Від яких параметрів залежить коефіцієнт відбиття?

4. Що таке стоячі хвилі та за яких умов вони виникають?

5. Чи можна розглядати довгу лінію як чотириполосник і які при цьому його А-параметри?

6. При яких навантаженнях коефіцієнт відбиття при перехідних процесах в довгих лініях залежить від часу?

7. Визначити при частоті $f = 1000 \text{ Гц}$ хвильовий опір однорідної лінії, коефіцієнт згасання, фазовий коефіцієнт і фазову швидкість за заданими первинними параметрами: $r_o = 6.5 \text{ Ом/км}$, $l = 2.29 \text{ мГ/км}$, $C_o = 5.22 \text{ мкФ/км}$, $g_o = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$.

Відповідь: $\underline{Z}_{\epsilon} = 692e^{-j12} \text{ Ом}$, $\alpha = 4,92 \cdot 10^{-3} \text{ Нн/км}$, $\beta = 22.2 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}$,
 $v = 2.83 \cdot 10^5 \text{ км/с}$.

7. До лінії, вказаній у попередній задачі, приєднане активне навантаження $r_o = 200 \text{ Ом}$. Знайти коефіцієнт відбиття.

Відповідь: $K_B = 0.558e^{j173^\circ}$.

Література

1. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола / [Карпов Ю. О., Кацев С. Ш., Кухарчук В. В., Ведміцький Ю. Г.] ; за ред. проф. Ю. О. Карпова – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 326 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами / [Карпов Ю. О., Кацев С. Ш., Кухарчук В. В., Ведміцький Ю. Г.] ; за ред. проф. Ю. О. Карпова – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 456 с.
3. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч. I. Линейные электрические цепи / Атабеков Г. И. – М. : Энергия, 1977. – 592 с.
4. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч. II, III. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле / Атабеков Г. И. – М. : Энергия, 1979.
5. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники : в 2 т. / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 386 с.
6. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Бессонов Л. А. – М. : Высшая школа, 1973. – 750 с.
7. Перхач В. С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола / Перхач В. С. – К. : Вища школа, 1992. – 439 с.
8. Карпов Ю. О. Конспект лекцій з курсу «Теоретичні основи електротехніки», ч. I. / Карпов Ю. О., Магас Т. Є., Мадьяров В. Г. – Вінниця : ВПШ, 1992. – 174 с.

Навчальне видання

Мадьяров Вячеслав Губейович

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ
Частина 2

Конспект лекцій

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлено В. Мадьяровим

Підписано до друку 09.01.2018.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 8,28.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20) пр. Зам. № 2018-015.

Видавець та виготовлювач
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.