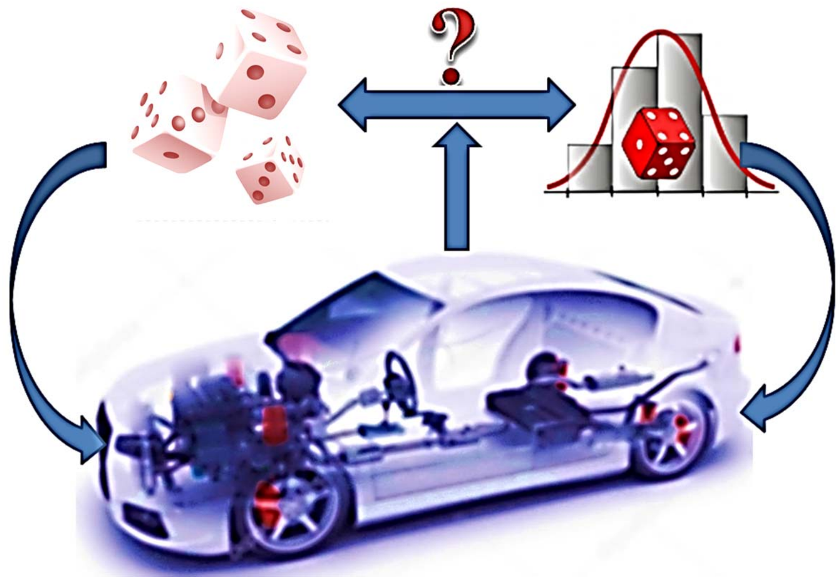
В. А. Макаров, В. В. Біліченко, Т. В. Макарова

ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. А. Макаров, В. В. Біліченко, Т. В. Макарова

ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 519.2:629.3](075.8)
М15

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 27.12.2018 р.)

Рецензенти:
В. П. Сахно, доктор технічних наук, професор
С. М. Шуклінов, доктор технічних наук, професор
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор

Макаров, В. А.
М15 Імовірнісно-статистичні методи в задачах автомобільної техніки : навчальний посібник / В. А. Макаров, В. В. Біліченко, Т. В. Макарова. – Вінниця: ВНТУ, 2019. – 105 с.

В посібнику наведено задачі з автомобільної техніки та основні імовірнісно-статистичні методи, які можуть використовуватися при розв’язанні цих задач. Особливу увагу приділено послідовному визначенню понять і характеристик імовірнісних процесів, починаючи з найпростіших подій і величин, на прикладах, які зустрічаються при конструюванні, виготовленні та експлуатації автомобільної техніки.

Особливістю посібника є великий обсяг розв’язків і пояснень задач, через що він займає проміжне положення між збірником задач та підручником.

Навчальний посібник призначений для студентів, аспірантів, наукових співробітників, викладачів та робітників автомобільного транспорту.

УДК 519.2:629.3](075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

На початку XXI сторіччя в економічно розвинутих країнах спостерігається прискорений розвиток автомобільної техніки: докорінно змінюється конструкція автомобілів за 4–5 років, автомобільна електроніка стає несучасною за декілька місяців. Щорічно виробляються десятки мільйонів автомобілів, велика частка транспортних засобів, що вийшли з експлуатації, переробляється на матеріали для нових автомобілів.

В різних країнах експлуатуються сотні мільйонів автомобілів, які мають бути динамічними, економічними, екологічними, безпечними й працездатними. Для цього потрібна розвинена інтелектуальна зовнішня інфраструктура. Вона здатна забезпечити раціональне використання властивостей автомобіля шляхом утворення ефективних інформаційних та навігаційних систем. Крім того, сам автомобіль має бути оснащений інтелектуальною системою управління (штучним «розумом»), до складу якої входять бортові комп'ютери та близько сотні датчиків і виконавчих механізмів. І останнє, необхідні стратегія і тактика, а також технічні можливості підприємств для підтримання та відновлення працездатності автомобілів.

Професії, пов'язані з автомобільною технікою, є популярними серед молоді США, ФРН, Англії, Франції та інших економічно розвинених держав. Так, значні перспективи для інженерів-автомобілістів спостерігаються у Німеччині: близько 16% випускників технічних ВНЗ цієї країни на початку XXI сторіччя бажають працювати в автомобільній галузі.

За останні 10 років в Україні спостерігається стрімке збільшення кількості автомобілів. Тенденція зростання прогнозується ще на 1,5 – 2 десятки років. Через це, а також розвиток сфери транспортних послуг, в Україні значна кількість студентів бажають мати професії, пов'язані з автомобільною технікою.

Характерною рисою виробничої діяльності сучасних спеціалістів є те, що «вольові рішення» інтелектуальних робітників автомобільного транспорту зведені до мінімуму. В процесі проектування, виробництва та експлуатації автомобільної техніки інженер формулює проблеми та вирішує будь-які складні задачі шляхом аналізу різної розрахункової інформації з посиленою комп’ютерною підтримкою.

Через ускладнення конструкції автомобілів, зростання їх кількості та продуктивності використання, раціональне вирішення наведених вище задач стає все більш трудомістким. При цьому, часто необхідно розглядати велику кількість спроб, на результат яких впливають багато причин, пов'язаних між собою невизначеними функціями.

Використання детермінованих методів, іноді, буває корисним. Однак вони виявляються обмеженими, негнучкими та недостатньо ефективними у тих випадках, коли потрібно враховувати вплив дії великої кількості факторів.

Визнання цих фактів привело до широкого практичного використання імовірнісно-статистичних методів при розв’язанні інженерних задач з автомобільної техніки. Наприклад, розрахунок напрацювання до відмови автомобіля з метою оцінення його надійності або визначення кількості запасних частин для заданого пробігу транспортного засобу (задачі технічної експлуатації автомобілів). В цих випадках неможливо точно прогнозувати: напрацювання до відмови (кількість км) конкретного автомобіля (ресори, зчеплення тощо) або кількість деталей (одиниць), які потрібно замінити за певний пробіг на конкретному автомобілі. Однак, з урахуванням того, що ці показники визначені для десятків або сотень транспортних засобів, існує імовірнісна закономірність для вибірки таких об'єктів. Таким чином, випадкові відхилення, які обов'язково зустрінуться при розрахунку показників для конкретного автомобіля або його елементів, значно зменшуються, якщо розглядається вибірка транспортних засобів (елементів). Можна визначити кількість транспортних засобів (систем, елементів тощо), для якої вказані вище показники розраховуються з заданою (великою) точністю.

Теорія імовірностей – це наука, яка вивчає закономірності масових випадкових явищ. Математична статистика дає експериментальні дані, на яких основані закони теорії імовірностей: статистична теорія багато в чому використовує висновки та залежності теорії імовірностей, а при побудові імовірнісних моделей базовими є статистичні дані. Таким чином, між теорією імовірностей та математичною статистикою існує взаємно-зворотний зв'язок. Математична статистика – це наука, яка розробляє методи реєстрації та аналізу експериментальних даних: показників масових випадкових явищ. Широкому використанню імовірнісно-статистичних методів сприяють можливості планування та обробки даних за допомогою комп'ютерів.

Викладання теорії імовірностей та математичної статистики з урахуванням понять і на прикладах задач автомобільної техніки дозволить студентам спеціальності «Автомобільний транспорт» придбати необхідні фундаментальні знання для успішного вивчення таких дисциплін: «Основи технічної діагностики автомобілів», «Управління надійністю автомобільної техніки», «Основи наукових досліджень», «Технічна експлуатація автомобілів» і «Сучасні системи управління працездатністю транспортних засобів». Крім того, наведені вище знання можуть бути потрібними при виконанні студентами та магістрантами науково-дослідницьких робіт, курсових проектів, бакалаврських дипломних та магістерських кваліфікаційних робіт, а також під час проходження виробничої практики.

1 АНАЛІЗ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ КОНСТРУКЦІЇ ТА ЕКСПЛУАТАЦІЇ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ З ВИПАДКОВИМИ ПОДІЯМИ

Якщо розглядати сучасну автомобільну техніку, яка динамічно розвивається та експлуатується, то можна виокремити в її життєвому циклі події, пов’язані із прогнозуванням розвитку автомобільної промисловості та самого автомобіля, проектуванням сучасних транспортних засобів, а також ефективним управлінням надійністю автомобіля, шляхом підтримання та відновлення його працездатності.

Експерти займаються прогнозуванням майбутнього розвитку автозаводів і самих автомобілів. Для вирішення наведеної проблеми необхідно визначити таке: який автомобіль та за який термін чекають суспільство й конкретні споживачі через 10–15 років. В цьому випадку розглядається основна подія – вибір споживачем конкретного автомобіля.

Проектувальники повинні враховувати нові прогресивні тенденції в розвитку конструкції автомобілів (оснащення бортовою мережею для функціонування безпілотних АТЗ, виготовлення фар з використанням біотехнологій, розробки надійної структури автомобіля тощо), а також витрати на виготовлення транспортного засобу. Проектування автомобіля, який має конкретну конструкцію, також є подією, яка залежить від впливу багатьох чинників.

Технічна експлуатація автомобілів вирішує задачі керування виробництвом, підвищення надійності роботи транспортних засобів, діагностування і прогнозування технічного стану. У цих задачах одним із основних понять є відмова – подія, що полягає в порушенні працездатності об'єкта. При вивченні вхідного потоку автомобілів на станцію технічного обслуговування розглядається подія – заїзд автомобіля для виконання технічних впливів. Ще один приклад події – виявлення несправностей автомобіля при діагностуванні. Означені й інші події, що зустрічаються на автомобільному транспорті, часто є випадковими.

1.1 Поняття випадкової події

Одним з перших понять теорії імовірностей є «подія». Будь-який факт, що може відбутися чи не відбутися в результаті спроби в певному комплексі умов, називають подією. Подія – якісна характеристика спроби. Наприклад, обгін автомобіля на обраній ділянці дороги (рисунок 1.1). Подією виступає обгін, а комплекс умов характеризується особливостями руху, станом автомобілів, кліматичними, дорожніми й іншими умовами.

Подією є відмова двигуна з певним пробігом. Комплекс умов формується станом дороги й автомобіля, кваліфікацією водія, завантаженням автомобіля тощо.

Рисунок 1.1 – Обгін автомобіля на повороті в зимових умовах

При певній комбінації випадкових факторів, що створюють комплекс умов, відбудеться відмова двигуна, якщо деякі фактори змінять значення (наприклад, зменшиться вага вантажу і режим роботи двигуна стане більш раціональним), то відмови може не бути.

Як приклад події можна навести також заїзд та обслуговування автомобіля на СТО (рис. 1.2). Комплекс умов: технічний стан автомобіля й дороги; відстань до пункту призначення; кваліфікація водія тощо.

Рисунок 1.2 – Обслуговування автомобіля після заїзду на СТО

Подія називається достовірною, якщо вона неминуче відбувається в результаті спроби. Наприклад, зупинка автомобіля, що витратив паливо; відмова двигуна автомобіля при руйнуванні колінчастого вала.

Подія називається неможливою, якщо вона свідомо не може відбутися в цій спробі. Наприклад, функціонування фар автомобіля за відсутності джерела електричної енергії.

Випадковою подією називається подія, що у певній спробі може відбутися, а може і не відбутися. Наприклад, на певній ділянці шляху водій може зробити обгін автомобіля, а може й не робити його.

Дві події А і В називаються неспільними в певній спробі, якщо в цій спробі поява однієї з них виключає появу іншої.

Наведемо кілька прикладів. Припустимо, що подія А – автомобіль стоїть, подія В – автомобіль рухається. В розглянутий миттєвий проміжок часу автомобіль не може одночасно рухатися і стояти. Якщо автомобіль переміщається (подія В), він не стоїть, тобто не відбувається подія А. Отже події А і В – неспільні. Споживач купує один автомобіль. Можливу купівлю Volkswagen з дизельним двигуном позначимо як подію А, з бензиновим – як подію В. Одна подія виключає іншу.

Треба відзначити, що поняття спільності чи неспільності подій завжди пов'язане з тим, яка подія мається на увазі. Ті ж самі події можуть виявитися неспільними в одній спробі але спільними в іншій. Розглянемо наступний приклад. На складі автотранспортного підприємства (АТП) є один двигун, одночасно отримані заявки на заміну двигуна сідельного тягача й автомобіля-самоскида. Позначимо події: А – ремонт сідельного тягача, В – ремонт автомобіля-самоскида. Природно, що за наявності одного двигуна не можна зробити два ремонти одночасно, тобто події А і В неспільні. Однак ці події спільні, якщо є на складі два чи більше двигунів.

1.2 Обчислення імовірності події

Розглянемо такі випадкові події:
- обгін легкового автомобіля вантажним;
- обгін вантажного автомобіля легковим;
- відмова двигуна після пробігу автомобіля 2 тис. км;
- відмова двигуна, що знаходився в експлуатації 3 роки;
- ремонт на СТО автомобіля М-20 «ПОБЕДА» (випускався в СРСР після Другої світової війни);
- заїзд на СТО автомобілів Opel.

Аналіз наведених подій дозволяє зробити висновок про те, що кожна з випадкових подій має якусь можливість, причому ці можливості можна порівняти. Практично мало можливими представляються: відмова двигуна після пробігу автомобіля 2 тис. км та заїзд на СТО автомобіля М-20 «ПОБЕДА». Для швидкісного легкового автомобіля можливість здійснити обгін більша, ніж для вантажного автомобіля. Цілком можливими можуть бути такі події: відмова двигуна після 3 років експлуатації, заїзд на СТО автомобіля Opel. Таким чином, кожна з цих подій характеризується тим чи іншим ступенем можливості. Щоб кількісно порівняти між собою події за ступенем можливості, мабуть, потрібно з кожною подією пов'язувати певне число, яке тим більше, чим більш можлива подія. Таке число називається імовірністю події.

Імовірність події – це ступінь об'єктивної можливості події, вимірювана числом. Класичне визначення імовірності випадкової події наведено нижче.

Наслідки спроб, що виключають один одного в результаті проведення спроби, називають єдино можливими. Наслідки рівноправні відносно умов цієї спроби, називають рівноімовірними або рівноможливими.

Розглянемо задачу на визначення імовірності випадкової події. Припустимо, що у шухляді знаходиться 50 однакових ретельно перемішаних деталей, серед яких 5 несправних. Із шухляди на вдачу виймають одну деталь. Обчислимо імовірність події А – із шухляди вийняли несправну деталь. Можливість вийняти із шухляди справну деталь більша, ніж можливість вийняти несправну деталь. Дамо кількісну оцінку можливості вийняти несправну деталь. У розглянутій спробі два результати: перший – вийнята на вдачу деталь справна і другий – вийнята на вдачу деталь несправна. Кожний з цих результатів можливий, тому що деталі однакові і ретельно перемішані, та єдино можливий, тому що поява несправної деталі виключає появу справної.

Наслідки спроб, при яких події, що нас цікавлять, настають, назвемо *сприятливими результатами.* В цьому прикладі тільки 5 наслідків спроб сприяють події – вийнята несправна деталь. Загальна кількість результатів спроб 50. Можливість вийняти несправну деталь можна розглядати як частку сприятливих наслідків у загальній кількості результатів.

Імовірність події А обчислюють як відношення числа сприятливих цій події наслідків до загального числа всіх єдино можливих і рівноможливих елементарних наслідків спроб

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.1)$$

де *m* – число сприятливих результатів, од.;

n – загальне число результатів

Тоді імовірність події А (поява несправної деталі), дорівнює

$$P(A)=5/50=0,1.$$

Якщо в шухляді всі деталі справні, то подія – поява справної деталі – достовірна. У цьому випадку m = n = 50 і імовірність дорівнює одиниці. Це найбільше значення імовірності.

Вийняти несправну деталь із шухляди, у якій 50 справних деталей – подія неможлива. У цьому випадку m = 0, а імовірність неможливої події В

$$P(B) = \frac{0}{n} = 0.$$

Це найменше значення імовірності.

Імовірність випадкової події задовольняє співвідношення

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

1.3 Теорема складання імовірностей

Сумою подій А і В називають подію С, що складається з появи події А або В, чи обох разом. Нижче наведено приклади складання імовірностей.

Якщо подія А – наявність вантажного автомобіля в АТП, подія В – наявність в АТП легкового автомобіля, то подія С=А+В – наявність на підприємстві засобів пересування (тобто транспортних засобів).

Подія А – виявлення несправності автомобіля при першому діагностуванні, подія В – виявлення несправності при повторному діагностуванні, тоді А+В – невідповідність технічного стану автомобіля технічним умовам, тобто виявлення несправності при першому або повторному контролі, чи взагалі в процесі діагностування.

Автомобілі можуть характеризуватися різними конструктивними особливостями. Нижче розглянуто АТЗ, який має два однакових паливних баки (рисунок 1.3), тобто паливна система містить два паралельно з'єднаних елементи.

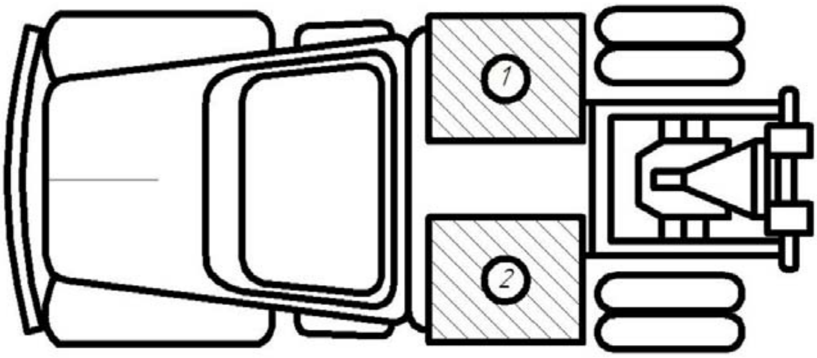


Рисунок 1.3 – Компонувальна схема сідельного тягача з двома паливними баками

Подія A_i, і-тий елемент (бак) працює, ($i = 1, 2$). Подія В – працює система (справний автомобіль може рухатися). Система функціонує, якщо працює хоча б один елемент, тобто $B = A_1+A_2$.

Теорема 1. Імовірність суми двох неспільних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2}$$

Теорема 2. Імовірність суми декількох неспільних подій дорівнює сумі їхніх імовірностей, тобто якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ – неспільні події, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.3}$$

Декілька єдино можливих попарно неспільних подій утворять повну групу, якщо в результаті спроби неодмінно має з'явитися одна з них.

Теорема 3. Сума імовірностей подій, що утворять повну групу, дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \tag{1.4}$$

Задача. Автомобіль, що має чотириступінчасту коробку передач, рухається вперед за середньопересіченою місцевістю. Імовірність включення 1-ої передачі – 0,2; другої – 0,6; третьої – 0,1. Яка імовірність включення четвертої передачі?

Розв'язання. Позначимо події, що можуть відбутися: A_1 – включена перша передача, $P(A_1)=0{,}2$; A_2 – включена друга передача, $P(A_2)=0{,}6$; A_3 – включена третя передача, $P(A_3)=0{,}1$; A_4 – включена четверта передача.

Події A_1, A_2, A_3, A_4 утворять повну групу, тобто під час руху автомобіля одна з них обов'язково відбудеться. Тому

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=1.$$

Імовірність, яка розраховується

$$P(A_4)=1-P(A_1)-P(A_2)-P(A_3)=1-0{,}2-0{,}6-0{,}1=0{,}1.$$

Дві неспільних події, що утворять повну групу, називають протилежними. Подію, протилежну події А, позначають $\overline{A}$.

Приклади протилежних подій: подія А – висновок про працездатність, $\overline{A}$ – висновок про непрацездатність автомобіля при одному і тому ж контролі його технічного стану; подія А – рух автомобіля, $\overline{A}$ – зупинка цього автомобіля при виконанні транспортних робіт; подія А – безвідмовна робота всіх деталей пристрою, $\overline{A}$ – відмова хоча б однієї деталі за міжконтрольний період.

Наслідок. Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{1.5}$$

Приклад. Імовірність відмови в роботі циліндро-поршневої групи двигуна в інтервалі 80–100 тис. км пробігу дорівнює 0,3. Яка імовірність безвідмовної роботи цієї групи в тому ж інтервалі пробігу?

Розв'язування. Подія А – відмова циліндро-поршневої групи. Подія $\overline{A}$ – безвідмовна робота цієї групи:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}3=0{,}7.$$

Якщо виконується розрахунок імовірності події А, то, як правило, раціонально спочатку обчислити імовірність події $\overline{A}$.

1.4 Теорема множення імовірностей

Добутком двох подій А і В називається подія С, що характеризується спільною появою подій А та В.

На автомобілі, що розглянутий вище (див. рис. 1.3), застосовують два паралельно з'єднаних елементи: сідельний тягач має два паливних баки: 1 і 2. Розглянемо три події: C_1 – відсутність палива в першому резервуарі, подія C_2 – відсутність палива в другому резервуарі, тоді подія $C=C_i \cdot C_2$ – зупинка справного автомобіля.

Добутком декількох подій називають подію, що полягає в спільній появі всіх цих подій. Наприклад, перевіряється тиск повітря в шинах сідельного тягача (рис. 1.4) і розглядається подія B_i: тиск в і-тій шині відповідає вимогам технічних умов (i=1, 2, ...,6).

Подія $A=B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4 \cdot B_5 \cdot B_6$ полягає в тому, що у всіх шинах номінальний тиск повітря.

Подію А називають незалежною від події В, якщо імовірність події А не зміниться залежно від того, відбулася подія В чи ні. У протилежному випадку подію А називають залежною від події В. Наприклад, два автомобілі виконують транспортну роботу. Розглянемо подію А – відмова першого автомобіля, подія В – відмова другого автомобіля, імовірності відмов 0,01 і 0,05, відповідно. Імовірність події А, яка дорівнює 0,01, не зміниться від того, відбулася подія В чи ні. У цьому прикладі А і В – незалежні.

Рисунок 1.4 – Сідельний тягач з шістьма шинами

На автомобілі (рис. 1.4) використовуються шість зовні однакових шин, дві з яких мають внутрішні пошкодження – розриви каркасу (рис. 1.5), які можна знайти тільки після демонтажу покришки й огляду її внутрішньої сторони.

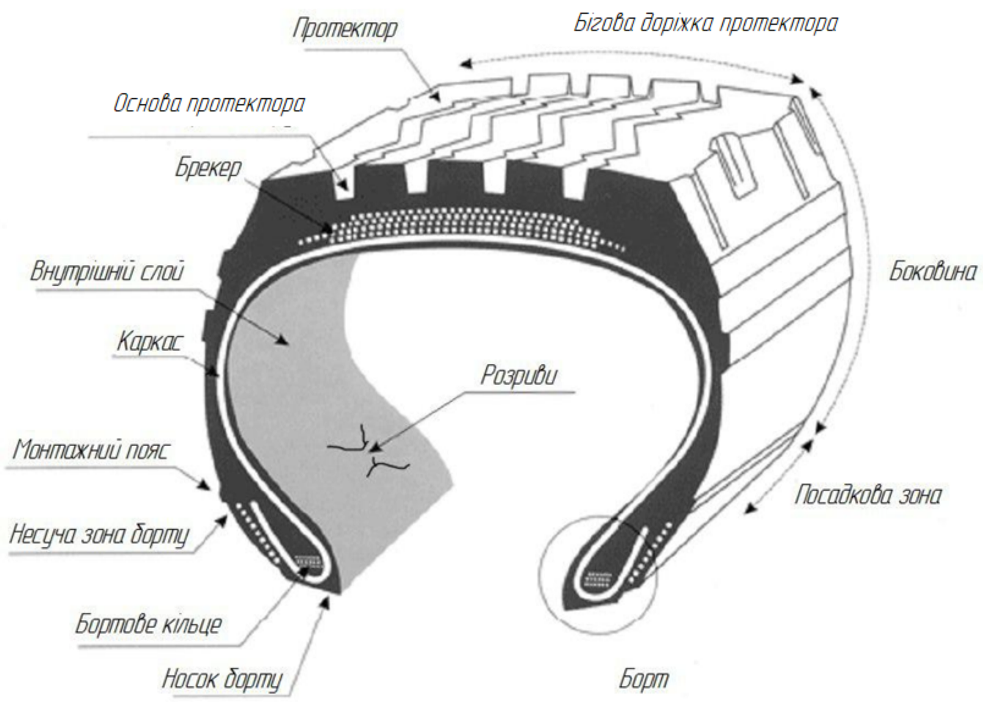


Рисунок 1.5 – Фрагмент еластичного рушія з внутрішнім пошкодженням каркасу шини – розривом

Робітники шинного підрозділу АТП демонтують і оглядають з використанням спредера (рис. 1.6) послідовно дві будь-які шини з метою визначення місця руйнування каркасу. Розглянемо дві події: А – заміна несправної шини після першого демонтажу та огляду; В – заміна ушкодженої шини після виконання інших означених технічних впливів. Якщо подія А не відбулася, то імовірність знайти шину, що відмовила, при другому демонтажі дорівнює 2/5.

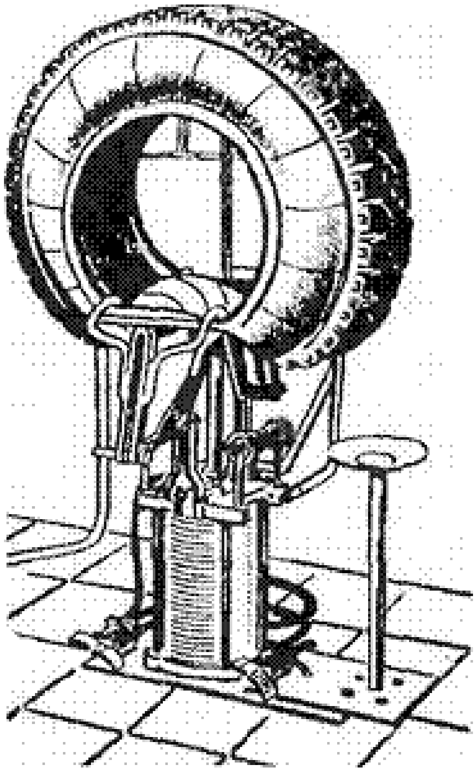


Рисунок 1.6 – Перевірка технічного стану внутрішньої поверхні каркасу шини

Якщо ж подія А відбулася і залишилася одна ушкоджена шина з п'яти, то імовірність знайти ушкоджену шину при другому демонтажі дорівнює 1/5. Отже, імовірність події В змінюється залежно від появи або непояви події А. Таким чином, події А і В залежні.

Імовірність події В, обчислену за умови, що мала місце подія А, називають умовною імовірністю і позначають P(B/A). В останньому прикладі умовна імовірність може набувати двох значень: $P(\text{▯}/A) = \frac{1}{5}$ або $P(\text{▯}/A) = \frac{2}{5}$.

Якщо подія А залежить від події В, то P(A)≠P(A/B). Якщо подія А не залежить від події В, то P(A)=P(A/B). У прикладі для двох виконуючих перевезення автомобілів, який наведений вище, P(A)=P(A/B)=0,01. В другому прикладі (з шинами) $P(A) \neq P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{3}$.

Теорема. Імовірність добутку двох залежних подій дорівнює імовірності однієї з них, помноженій на умовну імовірність іншої, обчислену за умови, що перша мала місце

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A). \tag{1.6}$$

Теорема. Імовірність добутку декількох залежних подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність всіх інших, причому імовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулися

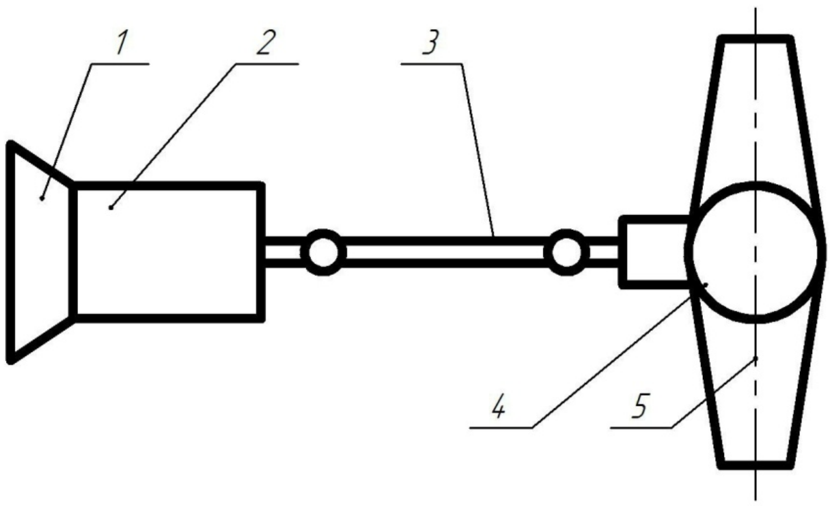
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_i)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2). \tag{1.7}$$

Розглянемо дві незалежних події А й В. У цьому випадку P(B/A)=P(B) і формула (1.6) набуде вигляду

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Теорема. Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій.

Задача. У силовій передачі послідовно розташовані три елементи: зчеплення 1, коробка передач 2, карданна передача 3 (рис. 1.7), імовірність безвідмовної роботи яких дорівнює $P(B_1)=0,92$, $P(B_2)=0,95$, $P(B_3)=0,96$, відповідно. Визначити імовірність безвідмовної передачі обертального моменту P(A) від двигуна до головної передачі.



1 – зчеплення; 2 – коробка передач; 3 – карданна передача;
4 – головна передача; 5 – задній міст

Рисунок 1.7 – Схема силової передачі автомобіля

Розв'язання Позначимо подію A – система працює. Події B_i – працює i-й елемент (i = 1, 2, 3). Елементи системи відмовляють незалежно один від другого. Тому, події B_i – незалежні. При послідовному розташуванні елементів відмова хоча б одного з них обумовлює відмову системи в цілому. Отже, система працює, якщо працюють усі три елементи $A=B_1 \cap B_2 \cap B_3$, тобто

$$P(A)=P(B1B2B3)=P(B1) \cdot P(B2) \cdot P(B3),$$

$$P(A)=0{,}92 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}96=0{,}84.$$

Задача. На АТП 86% автомобілів мають технічний стан, що відповідає технічним умовам, тобто вони придатні до експлуатації. З кожної сотні цих (працездатних) автомобілів 75 одиниць мають пробіг більше 100 тис. км. Визначити імовірність того, що обраний на вдачу автомобіль із пробігом понад 100 тис. км виявиться придатним до експлуатації.

Розв'язання. Позначимо подію A – автомобіль придатний до експлуатації, подію B – автомобіль має пробіг понад 100 тис. км. У задачі потрібно визначити імовірність P(AB). Події A і B залежні, тому

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B/A).$$

За умовою задачі можна написати, що $P(A)=0{,}86$; $P(B/A)=0{,}75$. Підставляючи наведені значення у формулу, одержуємо: $P(AB)=0{,}86 \cdot 0{,}75=0{,}645$.

Вище розглядалася теорема про імовірність суми двох неспільних подій. Розглянемо випадок спільних подій.

Теорема. Імовірність суми двох спільних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій без імовірності їх спільної появи

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB). \qquad (1.8)$$

Задача. Два інженери-діагности перевіряють на стенді ефективність роботи двигуна автомобіля (рис. 1.8).

Імовірність виявлення несправності першим інженером – 0,9, другим – 0,8. Визначити імовірність виявлення несправності двигуна, якщо інженери одночасно, але незалежно діагностують автомобіль.

Розв'язання. Позначимо подію A – виявлення несправності двигуна автомобіля, події B_i – виявлення несправності i-тим інженером (i = 1, 2). Подія $A=B_1+B_2$, де B_1 і B_2 – незалежні спільні події. За формулою (1.8) отримано

$$P(A)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2) - P(B_1B_2)=P(B_1)+P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2),$$
$$P(A)=0{,}9+0{,}8-0{,}9 \cdot 0{,}8=0{,}98.$$

Рисунок 1.8 – Діагностування двигуна двома інженерами

1.5 Формула повної імовірності

Теорема. Імовірність події А, що може настати лише за умови появи однієї з неспільних подій B_1, B_2, ...,B_n, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну імовірність появи події А, тобто

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A/B_n),$$

або

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P\left(\frac{A}{B_i}\right). \qquad (1.9)$$

Задача. Шина легкового автомобіля працює в двох швидкісних режимах: при 90 км/год і 130 км/год. Зі швидкістю 90 км/год автомобіль рухається в 80% випадків його роботи, з підвищеною швидкістю – у 20% випадків. Імовірність відмови шини під час функціонування при швидкості 130 км/год дорівнює 0,7, а при іншій швидкості – 0,1. Визначити повну імовірність відмови шини під час кочення еластичного рушія.

Розв'язання. Позначимо сукупність подій А – відмова шини під час функціонування, подія B_1 – робота шини з швидкістю 90 км/год, подія B_2 – робота шини з швидкістю 130 км/год. Події B_1 і B_2 – неспільні. Подія А може з'явитися тільки при появі однією з подій – B_1 або B_2.

$$P(B1)=0,8;\ P(B2)=0,2;\ P(A/B1)=0,1;\ P(A/B2)=0,7;$$

$$P(A)=0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,7=0,02+0,14=0,22.$$

1.6 Повторення спроб

Під час функціонування автомобільної техніки часто зустрічаються задачі, в яких такі ж самі або аналогічні відповіді повторюються неодноразово. Наприклад, в результаті будь-якої спроби може з'явитися деяка подія А, а в серії спроб вона може з'явитися кілька разів. У випадку, що розглядається, інженера цікавить не результат однієї спроби, а загальне число появ події А в результаті проведення серії спроб. Наприклад, група автомобілів-самоскидів виконує перевезення ґрунту на відстань 5 км протягом тижня. Технічну службу АТП цікавить не відмова окремого автомобіля, а загальне число відмов, з метою підготовки певної кількості запасних частин.

Окрема спроба – спостереження за одним автомобілем. У роботі вона може відмовити або не відмовити, тобто спроба може мати два протилежні результати. Відмова в роботі однієї машини не впливає на працездатність іншої, тобто відповіді взаємно незалежні. Якщо автомобілі однотипні і мають однаковий пробіг, то імовірність відмови для кожного автотранспортного засобу однакова. Розглянутий приклад приводить до схеми повторних незалежних випробувань або схеми Бернуллі.

Схемою Бернуллі називають серію спроб, що задовольняють такі умови:

- імовірність появи події А постійна та не змінюється від спроби до спроби;
- спроби незалежні відносно події А, тобто результат кожної спроби не залежить від наслідків попередніх спроб;
- кожна спроба може мати два результати – появу або непояву події А.

Розглянемо питання про обчислення імовірності того, що подія А в серії із має n спроб з'явиться точно К разів, визначимо $P_n(K)$.

Імовірність $P_n(K)$ обчислюється за різними формулами залежно від кількості спроб і величини імовірності появи події в окремій спробі.

1. Формула Бернуллі. Припустимо, що проводиться серія з n спроб, підлеглих схемі Бернуллі. Імовірність появи події А в окремій спробі дорівнює p, а імовірність непояви події А дорівнює $q = 1 - p$. Імовірність того, що в серії з n спроб подія А з'явиться точно К разів, обчислюється за формулою

$$P_n(K) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \quad (1.10)$$

2. Формула Пуассона. Проведені спроби підлеглі схемі Бернуллі. Число спроб *n* досить велике, а імовірність появи події А в окремій спробі досить мала. У цьому випадку

$$P_n(K) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \qquad a = n \cdot p. \tag{1.11}$$

3. Локальна теорема Лапласа. Якщо імовірність Р появи події *А* в кожній спробі постійна та відмінна від нуля й одиниці, то імовірність того, що подія А з'явиться в *n* спробах точно К разів, дорівнює

$$P_n(K) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{1.12}$$

де

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Функцію φ (x) обчислюють за таблицею.

Властивості функції φ(x):

- φ (x) – парна функція, φ (x)= φ (-x);
- при x>0 функція φ (x) монотонно спадна;
- при x≥5 можна вважати φ (x)=0, тому в таблицях значення функції φ (x) дано для x<5.

Інтегральна теорема Лапласа. Якщо імовірність Р появи події А в кожній спробі постійна і відмінна від нуля й одиниці, то імовірність того, що в n незалежних спробах подія А з'явиться від K_1 до K_2 разів, обчислено за формулою:

$$P_n(K_1, K_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{1.13}$$

де

$$x_1 = \frac{K_1 - np}{\sqrt{nqp}}, \qquad x_2 = \frac{K_2 - np}{\sqrt{nqp}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{1.14}$$

Значення функції Ф(x), яка називається функцією Лапласа, визначається за таблицею.

Властивості функції Ф(x):

- Ф(x)= - Ф (-x) – функція Лапласа непарна;
- функція Ф(x) – монотонно зростаюча;
- для x≥5 вважають Ф(x)= 0,5, тому в таблицях не дано значення функції при x>5.

Приклад. Довжина їздки автомобіля, що виконує транспортну роботу, становить 1000 км. Три його елементи – акумулятор, ресора й карданний вал давно експлуатуються, тому для них характерна висока імовірність відмови, що для кожного елемента дорівнює 0,8. Визначити імовірність того, що два елементи залишаться працездатними після виконання автомобілем транспортної роботи, а також імовірність справності хоча б одного елемента.

Розв'язання. У цьому випадку можна використовувати формулу Бернуллі, тому що виконуються необхідні умови: число спроб фіксоване, кожна спроба приведе до появи чи непояви відмови, імовірність появи відмови у всіх спробах постійна, відмова одного елемента не впливає на відмови іншого. Згідно з формулою (1.10) одержано таку імовірність працездатності двох елементів з наявних трьох

$$\mathrm{P}_3(2) = \mathrm{C}_3^2(0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^{3-2} = \frac{3!}{1!\,2!} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}8 = 0{,}096,$$

де р = 0,2 – імовірність того, що елемент залишається працездатним;

q = l–Р = 0,8 – імовірність відмови.

Проведені обчислення показали, що подія, яка характеризується тим, що два елементи залишаться працездатними після виконання транспортної роботи автомобілем, практично неможлива, тому що її імовірність дуже мала.

Обчислимо імовірність того, що хоча б один елемент залишиться справним. Цю задачу більш раціонально вирішувати шляхом обчислення імовірності протилежної події, коли всі елементи відмовили. Імовірність цієї події дорівнює

$$\mathrm{P}_3(0) = \mathrm{P}^0 \cdot q^3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512,$$

тоді імовірність події, яка розглядається

$$\mathrm{P} \qquad = 1 - \mathrm{P}3\ (0) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488.$$

Задача. При діагностуванні на СТО нових автомобілів категорії М1 для 1% транспортних засобів діагноз неправильний. Це обумовлено точністю застосованого устаткування. Визначити імовірність одержання неправильного діагнозу для п'яти автомобілів з 500, що пройшли діагностування.

Рішення. За умовою задачі помилка при діагностуванні нових автомобілів становить 1%, тоді імовірність припуститися цієї помилки дорівнює 0,01 і не змінюється при діагностуванні будь-якого транспортного засобу. Маємо схему Бернуллі. Усього перевіряють 500 машин, отже: n=500.

Нас цікавить імовірність одержання неправильного діагнозу для п'яти машин, тобто *К*=5.

Число машин велике, імовірність помилки при діагностуванні мала, тому розв'язуємо задачу за формулою Пуассона (1.11):

$$a = np = 500 \cdot 0{,}01 = 5, \qquad P_{500}(5) = \frac{5^5}{5!} e^{-5} = 0{,}0175.$$

Імовірність мала, практично ця подія неможлива.

Задача. Велике СТО обслуговує декілька АТП. При проведенні технічного обслуговування імовірність його виконання з відхиленнями від вимог технологічного процесу дорівнює 0,1. Визначити імовірність того, що з 400 автомобілів для 50 технічні впливи будуть проведені неякісно.

Розв'язання. Умови появи подій відповідають схемі Бернуллі, тому що імовірність неякісного виконання обслуговування *p*=0,1 не змінюється при проведенні обслуговувань. Для кожного автомобіля два таких результати: обслуговування виконане відповідно до вимог технологічного процесу чи з відхиленням від них.

Число спроб досить велике n=400, імовірність дорівнює ρ=0,1, *К=5*0. Для розрахунку наведено формулу Бернуллі

$$P_{400}(50) = C_{400}^{50}(0{,}1)^{50}(0{,}9)^{350}.$$

Для одержання результату необхідні великі обчислення. Тому використано локальну формулу Лапласа

$$P_{400}(50) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \cdot \varphi(x),$$

$$x = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = 1{,}67.$$

За таблицею визначаємо $\varphi(x)$ = 0,0989.

За формулою (1.12) одержано

$$P_{400}(50) = \frac{1}{6} \cdot \varphi(1{,}67) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}0989 = 0{,}0165.$$

Імовірність мала, подія практично неможлива.

Задача. На великому АТП проводиться поточний ремонт двигунів автомобілів. Імовірність роботи відремонтованого двигуна без додаткового регулювання системи живлення P=0,8. Визначити імовірність того, що подія, яка полягає в роботі відремонтованого двигуна без додаткового регулювання, буде спостерігатися не менш ніж у 75 автомобілів з 100.

Розв'язання. В розглянутій задачі імовірність роботи для всіх двигунів є постійною, робота одного двигуна не впливає на роботу іншого і двигун може бути працездатним або непрацездатним. Отже, спроби проводять за схемою Бернуллі.

За умовою задачі p = 0,8; q = 0,2; n = 100; $75 \leq k \leq 100$.

Для рішення застосовуємо інтегральну теорему Лапласа.

За формулою (1.13) отримано такий розрахунок

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25; \qquad x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

За таблицею функції Лапласа Ф (-1,25) = -0,394, Ф (5) = 0,5.

Підставляючи дані у формулу, одержуємо

$$P100(75,100) = Ф\,(5) - Ф\,(-1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}394 = 0{,}894.$$

Імовірність досить велика, таку подію можна вважати практично достовірною.

Питання до самоперевірки

1. Назвіть та поясніть основні напрями розвитку автомобільної техніки.
2. Які чинники впливають на створення різних конструкцій автомобільної техніки?
3. Що таке випадкова подія під час технічної експлуатації автомобілів? Наведіть приклади.
4. Поясніть різницю між спільними та неспільними випадковими подіями в одній спробі. Наведіть приклади.
5. Чим характеризується ступінь можливості події? Наведіть приклад з функціонування автомобільної техніки.
6. В чому полягає суть поняття «сума випадкових подій»? Наведіть приклади, пов'язані з функціонуванням АТП або характерні для особливостей конструкції автомобіля.
7. Розкрийте суть поняття «умовна імовірність». Які операції технічних впливів на АТП можуть характеризуватися умовною імовірністю появи події.

8. В яких випадках можна використовувати імовірність безвідмовної роботи силової передачі автомобіля?

9. В чому полягає ефективність оцінки роботи спеціалістів з використанням поняття імовірність події?

10. В яких випадках можна використовувати формулу повної імовірності при розгляді виробничих ситуацій на АТП?

11. Які критерії використовуються для оцінення ефективності функціонування СТО, якщо технічну службу цікавить не відмова конкретного автомобіля, а загальне число відмов сукупності автомобілів, з метою підготовки певної кількості запасних частин на складі підприємства.

2 ПОКАЗНИКИ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ – ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Значення багатьох характеристик прогнозування, діагностики і технічної експлуатації автомобілів залежать від великої кількості факторів. Наприклад, неможливо заздалегідь прогнозувати такі явища: конкретне число заїздів автомобілів у зону поточного ремонту АТП за добу; число відмов двигунів автомобілів автоколони під час виконання транспортної роботи; пробіг до відмови зчеплення; час виконання відновлення кузова; кількість автомобілів певної моделі, проданих споживачам; число відвідувань автомобілями СТО для проведення діагностування гальмівної системи тощо. Наведені вище та багато інших показників автомобільної техніки є випадковими величинами.

2.1 Поняття і види випадкових величин

Результат спроби можна характеризувати кількісно і якісно. Якісну характеристику спроб дає подія. Кількісну сторону результату характеризує випадкова величина.

Випадковою величиною називають величину, що у результаті спроби набуде тільки одного наперед невідомого певного значення, яке є залежним від багатьох випадкових причин, всі з яких заздалегідь не можуть бути враховані.

Розглянемо низку прикладів випадкових величин.

1. Швидкість автомобіля, який рухається магістраллю. Вона змінюється та залежить від багатьох факторів: покриття та профілю дороги, оглядовості, інтенсивності транспортного потоку й типу рухомого складу, психологічного стану водія та його досвіду роботи тощо. Щодо автомобіля, який рухається, жоден з перелічених факторів не залишається постійним на всій протяжності маршруту. При цьому зміна кожного з факторів від ділянки до ділянки маршруту є випадковою. Цим і пояснюється неможливість точного обліку впливу кожного з факторів на рух транспортного засобу і величину його швидкості.
2. Витрата палива двигуном на певній ділянці дороги. Величина витрати палива двигуном залежить від числа обертів колінчастого вала і ступеня використання потужності двигуна. Останнє, так само, залежить від профілю і стану дороги, виду її покриття, навичок водія, технічного стану автомобіля тощо. Усі зовнішні умови не залишаються постійними, а змінюються випадково у процесі руху транспортного засобу.
3. Кількість обгонів, що здійснює водій автомобіля, різна від рейсу до рейсу і залежить від багатьох факторів. Наприклад, таких як інтенсивність і склад потоку автомобілів, метеорологічні умови тощо.
4. Число заїздів автомобілів у зону поточного ремонту АТП протягом певного проміжку часу набуває різних значень залежно від випадкових обставин.

5. Величина зносу шийок колінчастих валів двигунів автомобілів однієї марки з різним пробігом, що використовуються на різних маршрутах.

6. Кількість шин автомобіля, що відмовляють за деякий період експлуатації.

7. Помилка при вимірюванні швидкості автомобіля спідометром.

8. Інтенсивність руху автомобілів за одну хвилину спостереження.

9. Число автомобілів, що прибули на станцію технічного обслуговування за певний проміжок часу.

Випадкова величина в результаті спроби набуде лише одного значення, а в результаті декількох спроб може набувати різних значень. Кожне значення, що може набути випадкова величина в результаті спроби, називають її можливим значенням. Можливі значення мають розмірність випадкової величини.

Дискретними випадковими величинами називають величини, що набувають тільки окремих різних значень, які можна заздалегідь перелічити. Приклади дискретних випадкових величин наведені вище, у випадках 3, 4, 6, 8, 9. Перелічені випадкові величини набувають можливих значень, рівні 0, 1, 2, ... тощо. Ці значення відокремлені між собою проміжками, у яких немає можливих значень випадкової величини. У наведених прикладах випадкова величина може набувати тільки окремих, ізольованих значень.

Швидкість автомобіля на магістралі та витрата палива двигуном на ділянці шляху є випадковими величинами, всі можливі значення яких не можна перелічити. Вони змінюються в деякому певному проміжку. Швидкість буде змінюватися в межах можливості функціонування двигуна автомобіля і зчеплення колеса з різною за шорсткістю дорогою. Таким чином, можливі значення швидкості заповнюють проміжки між швидкістю на нижній передачі при мінімально стійких обертах колінчастого вала двигуна і швидкістю, обумовленою максимальними обертами колінчастого вала двигуна і вищою передачею.

Безперервними випадковими величинами називають випадкові величини, можливі значення яких заповнюють деякий проміжок (див. наведені вище приклади 1, 2, 5, 7).

Випадкову величину позначають великими буквами X та Y, а її можливі значення відповідними маленькими буквами $x_1, x_2,..,x_n$.

Наприклад, якщо X – число автомобілів, що прибули на дорожню СТО, то можливі значення $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$ тощо.

2.2 Аналіз законів розподілу імовірностей випадкової величини

Для характеристики випадкової величини недостатньо перелічити всі її можливі значення. Різні випадкові величини можуть мати однакові переліки можливих значень, але різні імовірності їх появи.

Законом розподілу імовірностей випадкової величини називається співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями.

Випадкова величина підлягає певному закону розподілу. Ряд розподілу задається таблицею (табл. 2.1), у верхньому рядку якої перелічені всі можливі значення випадкової величини, а у нижньому рядку – відповідні їм імовірності.

Таблиця 2.1 – Ряд розподілу

Найменування показника	Позначення			
Можливе значення	x_1	x_2	…	x_n
Імовірність появи значення	P_1	P_2	…	P_n

Оскільки в таблиці 2.1 перелічені всі можливі значення випадкової величини X, то в одній зі спроб випадкова величина обов'язково набуде одного з цих значень. Отже, події, які полягають в тому, що випадкова величина X має значення x_1 або x_2,..., або x_n, утворять повну групу. Тому сума імовірностей усіх можливих значень випадкової величини дорівнює одиниці.

Нижче наведена характерна ознака ряду розподілу – сума імовірностей дорівнює одиниці:

$$P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n=1. \tag{2.1}$$

Задача. На державному комунальному підприємстві автомобільного транспорту після технічного обслуговування номер 1 проводиться вибіркова перевірка технічного стану систем і агрегатів, що забезпечують безпеку руху автомобілів. Випадковим чином обрано 3 автомобілі для контролю на посту діагностики. Діагностування проводиться послідовно до виявлення першої відмови чи поки не пройде перевірка всіх трьох автомобілів. Скласти закон розподілу імовірностей числа перевірених автомобілів за умови, що імовірність виявлення відмови для кожного автомобіля дорівнює 0,2.

Розв'язання. Випадкова величина X – число перевірених автомобілів, її можливі значення $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Значенню випадкової величини $x_1=1$ відповідає подія A_1 – виявлена відмова першого автомобіля, за умовою задачі $P(A_1)=0,2$.

Значенню випадкової величини $x_2=2$ відповідає подія A_2 – виявлена відмова другого автомобіля, тобто перший автомобіль виявився справним, а у другого автомобіля виявлена відмова системи, що забезпечує безпеку його руху. Подія A_2 – добуток двох зазначених подій

$$P(A2) = (1-0,2)\cdot 0,2 = 0,16.$$

Значенню випадкової величини x_3=3 відповідає подія A_3 – два перших автомобілі виявилися справними, діагностується третій автомобіль. При його діагностуванні виявлення відмови вже є не істотним для визначення імовірності P(A3), оскільки більше немає автомобілів, що підлягають перевірці

$$P(A3) = (1-0,2)(1-0,2) = 0,64.$$

Нижче наведено ряд розподілу для цієї задачі.

Таблиця 2.2 – Ряд розподілу кількості перевірених автомобілів

Найменування показника	Значення		
Кількість перевірених автомобілів	1	2	3
Імовірність появи значення	0,2	0,16	0,64

Безперервну випадкову величину задають інтервальним рядом розподілу. Приклади наведено в таблицях 2.3 і 2.4.

Таблиця 2.3 - Закон розподілу напрацювання на відмову двигунів автомобілів

Найменування показника	Значення							
Величина пробігу автомобіля (граничні значення інтервалу), тис. км	120 140	140 160	160 180	180 200	200 220	220 240	240 260	260 280
Імовірність відмови в інтервалі пробігу	0,02	0,08	0,2	0,28	0,24	0,12	0,04	0,02

Багатокутник розподілу імовірностей випадкової величини – графічне зображення ряду розподілу. Для його побудови на вісі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини, а на вісі ординат - імовірності їх появи. Отримані точки з’єднують відрізками прямої. Побудовану фігуру називають багатокутником розподілу.

Таблиця 2.4 – Закон розподілу витрати палива автомобілів

Найменування показника	Значення показника					
Витрата палива (граничні значення інтервалу), л/100 км	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
Імовірність витрат в інтервалі	0,17	0,29	0,22	0,18	0,09	0,05

На рисунку 2.1 показано багатокутник для заданого в таблиці 2.2 ряду.

Інтегральна функція розподілу – універсальна характеристика випадкової величини. Вона будується для безперервних й дискретних випадкових величин та цілком їх характеризує з імовірнісної точки зору.

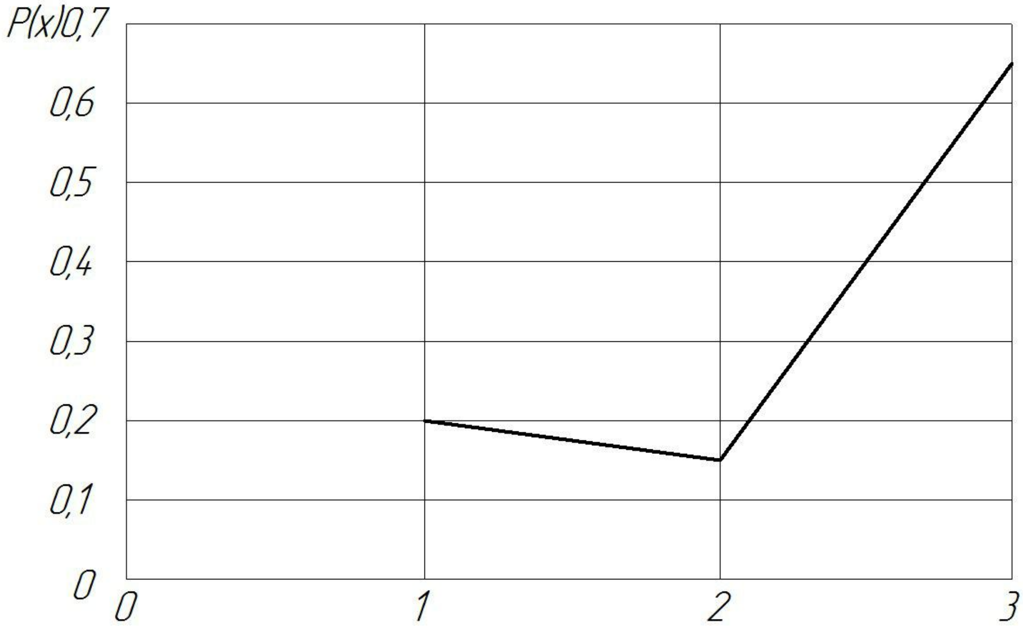


Рисунок 2.1 – Багатокутник розподілу імовірностей виявлення відмов автомобілів

Припустимо, що X – випадкова величина, x – будь-яке дійсне число. Імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X набуде значення, меншого x, буде змінюватися при зміні x, її можна розглядати як функцію x.

Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого, ніж довільне дійсне число x, називають функцією розподілу і позначають

$$F(x) = P\ (X < x).$$

Геометрична інтерпретація інтегральної функції розподілу така. На числовій осі для дійсного числа x інтегральна функція розподілу F(x) вказує на імовірність того, що можливі значення випадкової величини X заповнять частину числової осі, що розташована зліва від фіксованої точки x.

Властивості інтегральної функції розподілу.

1. Значення інтегральної функції належить відрізку від 0 до 1, тобто $0 \le F(x) \le 1$.

2. F(x) – неспадна функція, тобто якщо $x_2 > x_1$ то

$$F(x_2) > F(x_1).$$

3. Імовірність того, що випадкова величина набуде укладеного в інтервалі (a, в) значення, дорівнює збільшенню інтегральної функції на цьому інтервалі

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a). \qquad (2.2)$$

4. Імовірність того, що безперервна випадкова величина X набуде одного певного значення, дорівнює нулю.

Використовуючи цю властивість, одержуємо:

$$P(a \le x < b) = P(a < x \le b) = P(a < x < b) = P(a \le x \le b). \qquad (2.3)$$

Рівність нулю імовірності того, що випадкова величина набуде *окремого значення, не спричиняє неможливості події.*

5. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a,$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

Наслідок. Якщо можливі значення безперервної випадкової величини розташовані по всій числовій осі X, то справедливі такі граничні співвідношення

$$F(-\infty) = \lim_{n \to -\infty} F(x) = 0,$$

$$F(+\infty) = \lim_{n \to +\infty} F(x) = 1.$$

Диференціальна функція розподілу (щільність імовірності).

Похідну від інтегральної функції розподілу $f(x)=F^{/}(x)$ називають диференціальною функцією розподілу або щільністю імовірності.

Властивості диференціальної функції розподілу:

1. $f(x) \geq 0$ – функція не є негативною.

Таким чином, точки графіка $f(x)$ розташовані на осі або над віссю абсцис. Графік диференціальної функції розподілу називають кривою розподілу.

1. Якщо всі значення випадкової величини X належать інтервалу (-∞, +∞), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (2.4)$$

Зауваження. Якщо всі можливі значення випадкової величини заповнюють інтервал (a, b*),* то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1. \quad (2.5)$$

2. Імовірність того, що безперервна випадкова величина X набуде значень, які належать інтервалу (a, b), обчислюється за формулою:

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \quad (2.6)$$

Геометрично цей результат можна тлумачити так: імовірність набуття безперервною випадковою величиною значення з інтервалу (a, b), дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями y=0, y=f(x), x=a, x=b (рисунок 2.2).

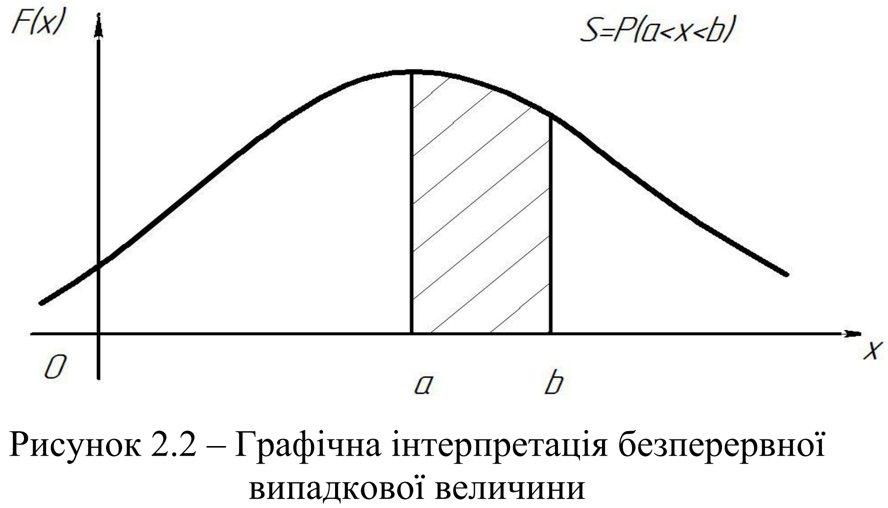


Рисунок 2.2 – Графічна інтерпретація безперервної випадкової величини

2.3 Числові характеристики випадкових величин

Функція розподілу цілком характеризує випадкову величину. Однак у деяких задачах достатньо вказати тільки окремі параметри, що характеризують істотні риси розподілу випадкової величини. Наприклад, величину, біля якої групуються можливі значення випадкової величини, або число, що характеризує ступінь розкиданості цих значень щодо середнього тощо. Такі *характеристики* називаються *числовими.* Вони виражають найбільш істотні властивості випадкової величини в стиснутій формі, а саме числом.

Математичне сподівання відноситься до числових характеристик, що відображають положення випадкової величини на числовій вісі, тобто вказують деяке середнє, біля якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

Розглянемо дискретну величину *X,* задану законом розподілу (таблиця 2.1).

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають суму добутків усіх можливих значень випадкової величини на імовірності їх появи. Позначення – M(X).

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i. \qquad (2.7)$$

Для безперервної випадкової величини X, яка задана диференціальною функцією розподілу $f(x)$:

$$M(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx. \qquad (2.8)$$

Математичне сподівання випадкової величини є величина невипадкова, що має розмірність випадкової величини.

Нижче наведено властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання детермінованої (невипадкової) величини C дорівнює самій детермінованій величині

$$M(C)=C. \qquad (2.9)$$

2. Теорема додавання математичних сподівань: математичне сподівання суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань додатків

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y). \qquad (2.10)$$

3. Теорема про математичне сподівання добутку: математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y). \tag{2.11}$$

4. Постійний множник виноситься за знак математичного сподівання

$$M(CX)=C\cdot M(X). \tag{2.12}$$

Крім математичного сподівання, що характеризує положення випадкової величини на числовій осі, вводять характеристику розсіювання випадкової величини. Наприклад, розкиду часу обслуговування автомобілів на посту, розсіювання напрацювання на відмову елементів автомобілів тощо.

Дисперсією чи розсіюванням випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D(X)=M[X-M(X)]^2. \tag{2.13}$$

Дисперсія випадкової величини – величина невипадкова, що має розмірність квадрата випадкової величини.

Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X й квадратом її математичного сподівання

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X). \tag{2.14}$$

Для дискретної випадкової величини X, заданої рядом розподілу, маємо такі формули:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i-M(X)]^2\cdot P_i, \tag{2.15}$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2P_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iP_i\right)^2. \tag{2.16}$$

Для безперервної випадкової величини X, заданої диференціальною функцією розподілу *f(x),* формули (2.14) і (2.15) набувають вигляду:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx, \quad (2.17)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right]^2 . \quad (2.18)$$

Нижче наведено властивості дисперсії.

1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю

$$D(C)=0. \quad (2.19)$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії шляхом його піднесення до квадрата

$$D(CX)=C^2D(X). \quad (2.20)$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y). \quad (2.21)$$

Дисперсія випадкової величини має розмірність квадрата випадкової величини. Під час розв'язання конкретних задач зручніше скористатися величиною, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини. Таку характеристику дає середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають $\sqrt{D(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (2.22)$$

Задача. Щоденне обслуговування виконується на двох потокових лініях великого АТП. Закони розподілу добової кількості автомобілів, що неякісно обслуговуються на кожній лінії, наведено в таблиці 2.5. Необхідно порівняти роботу двох ліній.

Розв'язання. Випадкові величини X і Y – кількості автомобілів, що неякісно обслуговуються на першій і другій лініях, відповідно:

$$M(X)=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1 =1{,}3 \text{ автомобіля,}$$

$$M(Y)=0\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2=0{,}7 \text{ автомобіля.}$$

Таблиця 2.5 – Закони розподілу автомобілів з низькою якістю обслуговування

Найменування показника	Перша лінія технічного обслуговування				Друга лінія технічного обслуговування			
Кількість автомобілів, що обслужені неякісно	0	1	2	3	0	1	2	3
Імовірність проведення неякісного обслуговування	0,1	0,6	0,2	0,1	0,5	0,3	0,2	0,0

Отже, з кожної лінії в середньому за добу сходить один автомобіль, що неякісно обслуговується.

Дисперсія для першої лінії дорівнює

$$M(X^2)=0\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}6+4\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}1=2{,}30 \text{ автомобіля,}$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=2{,}30-1{,}69=0{,}61 \text{ автомобіля.}$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=0{,}78$ автомобіля.

Для другої лінії характеристики розсіювання випадкової величини визначаються аналогічно

$$M(Y^2)=0\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}2=1{,}10 \text{ автомобіля,}$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M(Y)=1{,}10-0{,}49=0{,}61 \text{ автомобіля,}$$

$$\sigma(Y)=0{,}78 \text{ автомобіля.}$$

Порівнюючи математичні сподівання та дисперсії, можна зробити висновок про більш якісне обслуговування автомобілів на другій лінії. Таким чином, задачі з використанням числових характеристик випадкових величин можуть використовуватися для оптимізації виробничих процесів, а також при вивченні характеристик надійності й діагностичних параметрів.

Питання до самоперевірки

1. Чим відрізняються випадкові величини від детермінованих?
2. Назвіть низку випадкових величин, які є характеристиками руху автомобіля.
3. Назвіть перелік випадкових величин, які є характеристиками технічної експлуатації автомобілів.
4. Які чинники впливають на величину витрат палива легкового автомобіля?
5. Що розуміють під законом розподілу імовірностей випадкової величини?
6. Наведіть приклади отримання закону розподілу імовірностей випадкової величини при аналізі виробничої ситуації на підприємстві автомобільного транспорту.
7. Які властивості має інтегральна функція розподілу?
8. Які властивості має диференціальна функція розподілу?
9. Перелічіть числові характеристики випадкових величин.
10. Наведіть характеристику розсіювання випадкової величини.
11. Які властивості має дисперсія випадкової величини?

3 ВИКОРИСТАННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ АВТОСЕРВІСУ

При вирішенні задач автосервісу широко використовуються закони розподілу випадкових величин. Це задачі з розрахунку потрібної кількості запасних частин і агрегатів, визначення кількості постів поточного ремонту для АТП або СТО, обчислення характеристик надійності тощо (додаток А).

3.1 Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл розглядає наслідки проведених за схемою Бернуллі спроб. Він використовується в інженерних задачах при аналізі незалежних спроб, які багаторазово повторюються. Причому, кожна спроба має тільки два результати – поява чи непоява деякої події.

Біноміальний розподіл застосовується при: плануванні потреби в агрегатах, вузлах і запасних частинах до автомобілів; дослідженні потоків руху автомобілів; статистичному контролі якості тощо. За допомогою біноміального розподілу можна описати потребу в матеріалах при плануванні матеріально-технічного забезпечення у встановлений термін.

Розглянемо серію з n спроб, проведених за схемою Бернуллі. Число появ події А в цій серії є випадкова величинах X. Її можливі значення 0, 2, ..., n. Імовірність того, що в серії з n спроб подія А з'явиться точно K раз обчислюють за формулою Бернуллі (1.10)

$$P_n(K) = c_n^k \cdot p^K \cdot q^{n-K}.$$

Числові характеристики біноміального закону розподілу

$$M(X)=np,\ D(X)=npq. \tag{3.1}$$

Задача. На АТП вибрано 5 автомобілів певної марки. Імовірність виходу на лінію кожного з них дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу числа АТЗ, що можуть вийти на лінію.

Розв'язання. Число автомобілів, що можуть вийти на лінію – випадкова величина X, можливі значення якої такі: 0, 1, 2, 3, 4, 5. З урахуванням того, що імовірність виходу на лінію кожного автомобіля є постійною величиною, випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. В таблиці 3.1 наведено результати обчислень імовірності появи можливих значень випадкової величини.

$$P_5(0)=0{,}2^5 = 0{,}00032, \qquad P_5(1)=5\cdot0{,}2^4\cdot0{,}8 =0{,}0064,$$
$$P_5(2)= C_5^2\ 0{,}2^2\cdot0{,}8^2 = 0{,}0512, \qquad P_5(3)=C_5^3\cdot0{,}2^2\cdot0{,}6^3=0{,}2048, \tag{3.2}$$
$$P_5(4)=C_5^4\cdot0{,}3^2\cdot0{,}8^4=0{,}4096, \qquad P_5(5)=0{,}8^5=0{,}32768.$$

Таблиця 3.1 – Закон розподілу числа автомобілів, що можуть вийти на лінію

Число автомобілів, од.	0	1	2	3	4	5
Імовірність	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Перевірка: 0,00032+0,0064+0,0512+0,2048+0,4096+0,32768=1.

Найбільш ймовірне число виходів автомобілів на лінію дорівнює 4, тому що цьому можливому значенню випадкової величини відповідає найбільша імовірність.

Нижче побудовано багатокутник розподілу імовірностей для біноміального розподілу (рисунок 3.1).

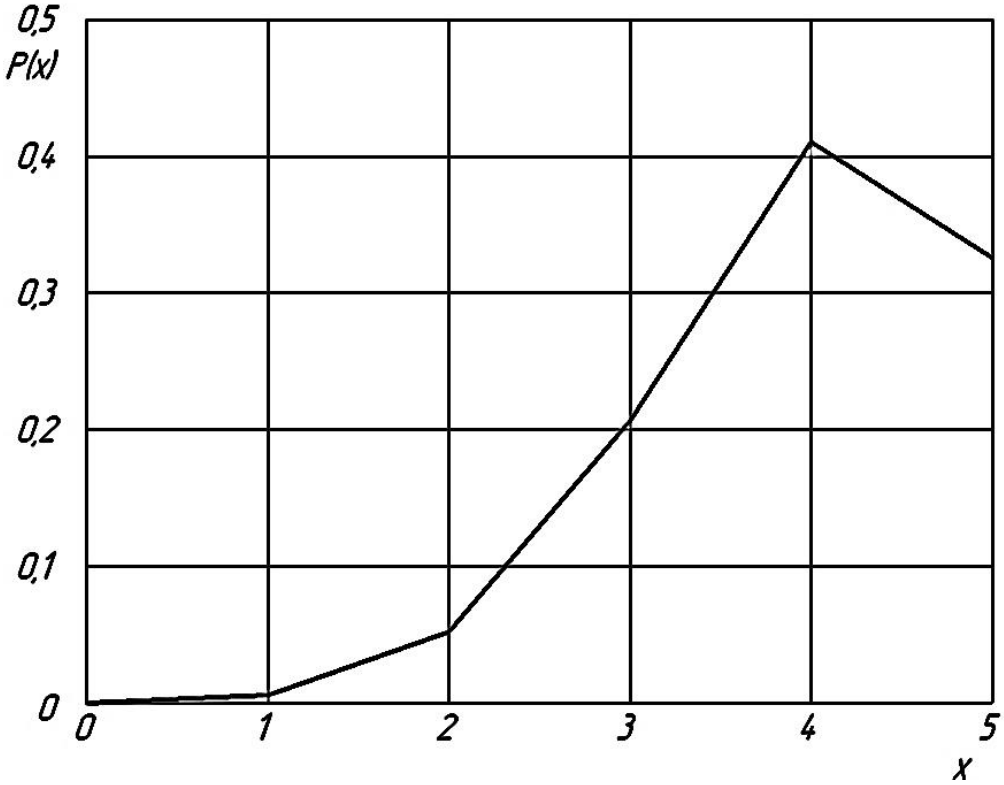


Рисунок 3.1 – Багатокутник розподілу імовірностей числа автомобілів, що виходять на лінію для виконання роботи

Математичне сподівання M(X)=5·0,8=4 збігається з найбільш ймовірною кількістю автомобілів, що вийшли на лінію.

Дисперсія

$$D(X) = 5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}8,\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}9 \approx 1.$$

На лінію при сформульованих умовах вийде 4±1 автомобілі.

3.2 Розподіл Пуассона

Розглянемо схему Бернуллі при дуже великому числі спроб і дуже малій $\rho \leq 0{,}1$ імовірності появи події в одній спробі. З такими умовами зустрічаються в автосервісі при визначенні числа автомобілів, що надійшли на станцію технічного обслуговування з потоку автомобілів на дорозі або кількості відмов елементів автомобіля.

Розглянемо випадкову величину X – число появ події А в серії з n спроб. Враховуючи те, що n велике число, а імовірність появи події А в окремій спробі незначна, то імовірність того, що подія А з'явиться точно К разів, обчислюється за формулою Пуассона (1.11). Можливі значення випадкової величини Х: 0; 1; 2; …; К. Нижче для означеної величини складено закон розподілу (таблиця 3.2), з огляду на a=n·p.

Таблиця 3.2 – Закон розподілу Пуассона

Значення випадкової величини	0	1	2	…	К
Формула для обчислювання імовірності	e^{-a}	$\frac{a}{1!} \cdot e^{-a}$	$\frac{a}{2!} \cdot e^{-a}$	…	$\frac{a^k}{K!} \cdot e^{-a}$

Числові характеристики розподілу Пуассона. Математичне сподівання

$$M(X)=a=n \cdot p.$$

Дисперсія

$$D(X)=a=n \cdot p.$$

Для випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, математичне сподівання чисельно дорівнює дисперсії.

Задача. Діагностуються 1000 деталей автомобілів. Імовірність безвідмовної роботи кожної деталі за проміжок часу t дорівнює 0,97. Знайти математичне сподівання числа деталей, що відмовили за проміжок часу t.

Розв'язання. Імовірність безвідмовної роботи q=0,97. Імовірність відмови p=1−q=0,03. Випадкова величина Х – число деталей, що відмовили, розподілена за законом Пуассона.

$$M(X)=1000 \cdot 0{,}03=30 \text{ деталей.}$$

За результатом розв'язання можна зробити висновок, що за проміжок часу t при зазначених умовах потрібно очікувати в середньому 30 відмов деталей.

3.3 Найпростіший потік подій

Розподіл Пуассона тісно пов'язаний з теорією масового обслуговування, ідеї і методи якої знаходять застосування на автомобільному транспорті для дослідження технологічних, організаційних і планувальних процесів, а також при виявленні виробничих резервів. З використанням теорії масового обслуговування можна вирішувати такі задачі: визначення кількості ліній або постів технічного обслуговування і поточного ремонту автомобілів; розрахунок кількості постів навантаження або розвантаження; визначення раціональної кількості оборотних агрегатів тощо.

Теорія масового обслуговування, яка й є одним з розділів теорії ймовірностей, розглядає будь-який процес масового обслуговування як імовірнісний. Основним поняттям теорії масового обслуговування є поняття потоку.

Потоком подій називають послідовність подій, що надходять у випадкові моменти часу. Прикладами означених потоків є прибуття автомобілів на дорожню СТО, надходження автомобілів на поточний ремонт в АТП тощо.

Нижче розглянуто основні властивості потоків.

Стаціонарність, яка полягає в тому, що імовірність появи К подій за проміжок часу t залежить від К й тривалості проміжку t та не залежить від початку відліку проміжку.

Наприклад, імовірності появи трьох автомобілів на СТО за проміжки часу 10 – 12, 14 – 16, T−(T+2), однакової тривалості t=2 години однакові між собою. Властивість стаціонарності має потік вимог на поточний ремонт по днях календарного періоду, утворений автомобілями великого автотранспортного підприємства.

Для багатьох систем обслуговування характер потоків такий, що поява двох і більше подій за малий проміжок часу практично неможлива. Потоки, що мають цю властивість, називають *ординарними.*

Відсутність наслідку означає, що число подій, які з'явилися після довільного моменту t*,* не залежить від того, яке число подій відбулося до моменту t, тобто передісторія потоку не позначається на імовірності появи події в найближчому майбутньому.

Наприклад, прибуття автомобілів у великий пункт навантаження відбувається незалежно від того, коли і скільки автомобілів прибуло до цього моменту.

Потік, що одночасно має властивості стаціонарності і відсутності наслідку, називають *найпростішим потоком подій.* Для потоку цього типу число подій, що з'явилося за проміжок часу тривалістю t*,* розподілено за законом Пуассона з параметром λ_t

$$P_t(K) = (\lambda_t)^k \frac{e^{-\lambda t}}{k!}, \tag{3.3}$$

де λ – *інтенсивність потоку* – середнє число подій, що з'являються за одиницю часу.

Параметр потоку λ збігається з математичним сподіванням числа подій, що з'явилися за одиницю часу.

Формулу Пуассона можна вважати математичною моделлю найпростішого потоку подій.

Задача. Працює велика СТО, що має 100 робочих постів. Середня кількість автомобілів, які надійшли на СТО за 1 хв, дорівнює двом. Знайти імовірність того, що за 5 хв надійде не менше двох автомобілів. Потік автомобілів, що надходять на СТО, передбачається найпростішим.

Розв'язання. Позначимо такі події: А – на СТО надійшло не менше двох АТЗ за п'ять хвилин; $\overline{A}$ – на СТО надійшло менше двох машин за п'ять хвилин. Ці події протилежні. Подія А складається з двох несумісних подій: на СТО не надійшло автомобілів і надійшов один автомобіль, тобто

$$P(\overline{A}) = P_5(0) + P_5(1).$$

Згідно з умовою задачі λ=2, і=5 використано формулу Пуассона

$$P(\overline{A}) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 e^{-10}}{1!} = 0{,}000495.$$

Така подія практично неможлива. Нижче обчислено імовірність події А

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}999505.$$

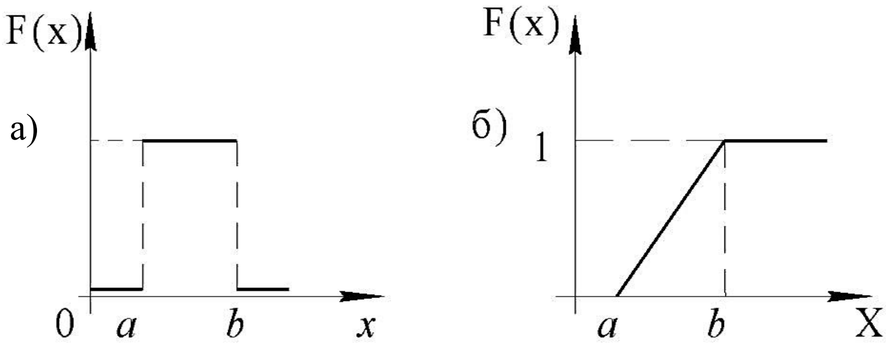
3.4 Закон рівномірного розподілу ймовірностей

У деяких практичних задачах зустрічаються безперервні випадкові величини, можливі значення яких рівноймовірні в межах певного інтервалу. Такі випадкові величини підлягають закону рівномірної щільності.

Випадкову величину X називають розподіленою за *рівномірним законом,* якщо її щільність імовірності має вигляд

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{1}{b-a}, \text{при } x \in [a, b]; \\ 0, \text{при } x \notin [a, b]. \end{matrix} \right\} \tag{3.4}$$

Графік диференціальної функції розподілу зображено на рис. 3.2, а.



а) – графік щільності розподілу;
б) – графік інтегральної функції розподілу

Рисунок 3.2 – Рівномірний закон розподілу

Інтегральна функція має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \le x \le b; \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases} \tag{3.5}$$

Її графік зображено на рисунку 3.2, б. *Числові характеристики наведені нижче.*

Математичне сподівання

$$M(X) = \frac{b+a}{2}. \tag{3.6}$$

Дисперсія

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{3.7}$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{3.8}$$

Задача. На перехресті діє автоматичний світлофор, у якому 1 хвилину горить зелене та 0,5 хвилини – червоне світло. Будь-який водій під'їжджає до перехрестя на автомобілі у випадковий момент часу. Знайти імовірність того, що він проїде перехрестя не зупиняючись.

Розв'язання. Випадкова величина X – момент проїзду автомобіля через перехрестя, розподілена рівномірно в проміжку [0, 3/2]. Диференціальна функція має вигляд

$$P(0 < x < 1) = \int_0^1 \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3} x \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Машина проїде світлофор без зупинки, якщо час її під'їзду попадає на проміжок 0<x<1.

З імовірністю p=0,67 можна чекати проїзду машини без зупинки.

3.5 Показниковий розподіл

Випадкову величину X називають розподіленою за показниковим законом, якщо її *диференціальна функція* має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

де λ – щільність або середнє число подій за одиницю часу.

Показниковий закон має широке застосування на автомобільному транспорті. Цьому закону підлягає час на:

- обслуговування автомобілів на СТО;
- заміну агрегатів в АТП;
- діагностування автомобіля;
- наробіток на раптову відмову;
- налагодження діагностичного і технологічного устаткування тощо.

Інтегральна функція розподілу показникового закону дорівнює

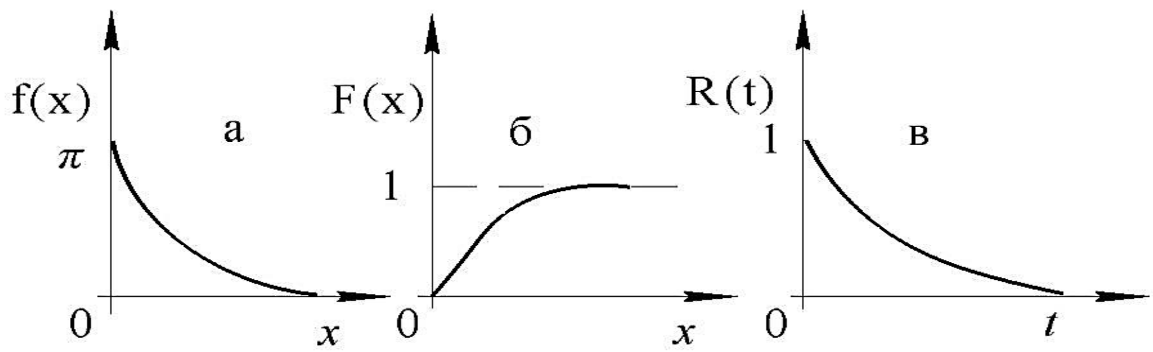
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Інтегральна функція розподілу F(t) характеризує імовірність відмови елемента за час t.

Функцією надійності R(t) називають імовірність безвідмовної роботи елемента за час тривалістю t (рисунок 3.3, в)

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}. \tag{3.11}$$

Задача. Розрахувати графік відмов стартера за певний термін часу, якщо математичне сподівання часу безвідмовної роботи стартера дорівнює 5 років. Розрахунок будемо робити з припущення, що час роботи стартера підлягає експонентному закону, тобто $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. За випадкову величину T позначимо час роботи стартера.



а – графік щільності розподілу; б – графік інтегральної функції розподілу; в – графік функції надійності

Рисунок 3.3 – Показниковий закон розподілу

За умовою задачі M(T)=5. Тоді $\lambda = \frac{1}{5}$. Обчислимо імовірність відмов за годину. Для цього, задаючи значення t, обчислимо значення інтегральної функції розподілу:

$t=0$, $F(t)=1–e^{0}=0$,
$t=1$, $F(t)=1–e^{-1/5}=1–e^{-0,2}=1–0,819=0,181$,
$t=2$, $F(t)=1–e^{-0,4}=1–0,670=0,330$,
$t=3$, $F(t)=1–e^{-0,6}=1–0,549=0,451$,
$t=4$, $F(t)=1–e^{-0,8}= 1–0,449=0,551$,
$t=5$, $F(t)=1–e^{-1,0}=1–0,368=0,632$.

Отримані дані відображено на графіку (рисунок 3.4).

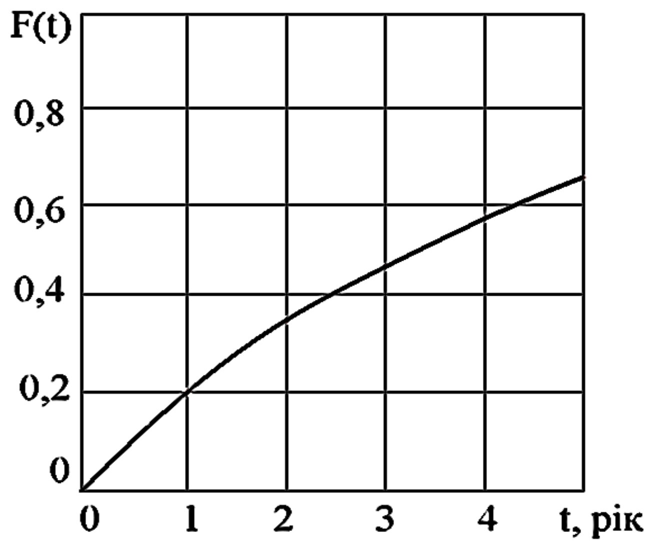


Рисунок 3.4 – Графік наробітки на відмову стартерів

3.6 Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу (закон Гаусса) дуже часто зустрічається в технічних задачах. Головна особливість нормального закону полягає в тому, що він є граничним для інших законів розподілу за типових умов, які дуже часто зустрічаються. Такий висновок можна зробити з центральної граничної теореми теорії імовірності, що була доведена видатним російським математиком Ляпуновим А. М.

Центральна гранична теорема. Якщо випадкова величина Х являє собою суму дуже великого числа взаємонезалежних випадкових величин x_1, x_2, ..., x_n, вплив кожної з яких на суму занадто малий, то випадкова величина має розподіл імовірностей, близький до нормального.

Більшість випадкових величин, що зустрічаються в задачах автомобільного транспорту, можуть бути подані саме як суми великого числа порівняно малих доданків – елементарних помилок, кожна з який викликана дією окремої причини, що не залежить від інших. Тоді на підставі сформульованої теореми Ляпунова можна зробити висновок, що сума цих елементарних помилок підлягає закону, близькому до нормального. Основне обмеження, що накладається на помилки, які додаються, полягає в тому, щоб вони всі в загальній сумі рівномірно відіграли відносно малу роль.

Наприклад, при русі автомобіля за містом швидкість його визначається рядом причин або факторів. До них можна віднести: дорожній опір, ухили та повороти на маршруті, метеорологічні умови, навички водія, технічний стан автомобіля тощо. Усі ці причини змінюються від ділянки до ділянки маршруту, що призводить до зміни швидкості автомобіля, яка буде визначатися сумарним впливом цих причин.

У зазначених умовах кожна з цих причин відіграє відносно невелику роль у сумарному впливі на рух автомобіля. Отже, закон розподілу швидкостей автомобіля в зазначених умовах має бути близьким до нормального. Експериментальні роботи підтверджують правомірність такого висновку.

Якщо ж одна з випадкових величин різко та переважно впливає на суму, то закон розподілу сумарної випадкової величини не підпорядковується нормальному. Наприклад, у міських умовах основними переважними факторами є безпека і регулювання руху. Ці фактори і визначають, в основному, закон розподілу швидкості автомобіля в межах міста.

Випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу, якщо щільність імовірності має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[\sigma]{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3.12)$$

На рисунку 3.5 візуалізовано графік щільності імовірності нормального розподілу

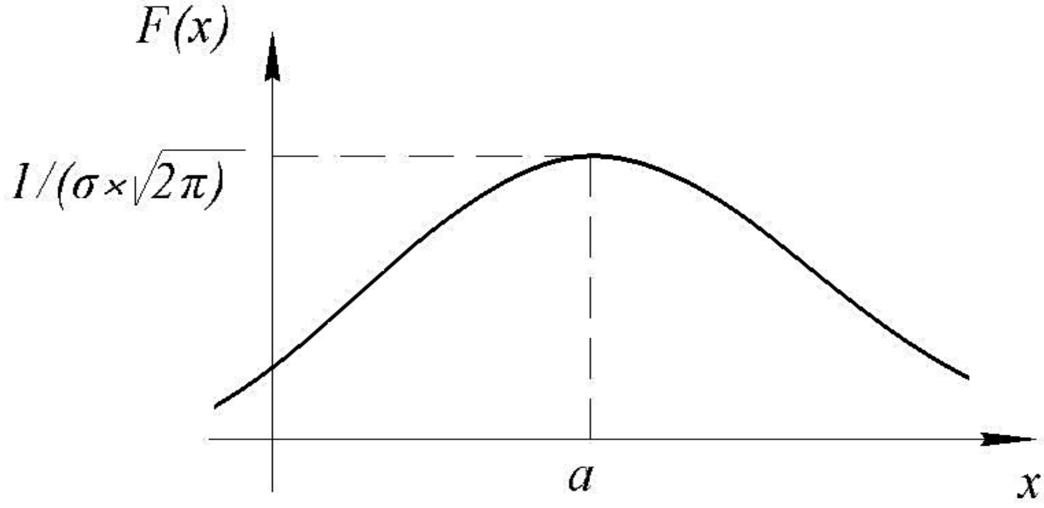


Рисунок 3.5 – Графік щільності імовірності нормального розподілу

Числові характеристики.

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma(X)^2,\ \sigma(X)=\sigma.$$

Імовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал обчислюють за формулою:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (3.13)$$

де a – імовірність заданого відхилення дорівнює

$$P(|x-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (3.14)$$

З формули (3.14) можна одержати правило 3σ, що відіграє велику роль у вирішенні практичних задач.

Правило 3σ: якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то її відхилення від математичного сподівання за абсолютною величиною не перевершує потрійного середнього квадратичного відхилення.

За цим правилом

$$P(|x-a| < 3\sigma) = 0{,}9973. \qquad (3.15)$$

Тобто тільки в 0,27% випадків відхилення перевищує потрійне середнє квадратичне відхилення.

Задача. Виконується вимірювання довжини стрижня без систематичних помилок. Випадкові помилки вимірювання X підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 50 \cdot 10^{-2}$ мм. Знайти імовірність того, що вимірювання буде зроблено з помилкою, що не перевищує за абсолютною величиною $75 \cdot 10^{-2}$ мм.

Розв'язання: Позначимо через X випадкові помилки вимірювання; оскільки систематичних помилок вимірювання немає, то a=3. За умовою задачі потрібно обчислити $P(|x| < 75 \cdot 10^{-2})$. Відомо $\sigma = 50 \cdot 10^{-2}$ мм і $\alpha = 75 \cdot 10^{-2}$ мм.

$$P(|x| < 75 \cdot 10^{-2}) = 2\Phi\left(\frac{75 \cdot 10^{-2}}{50 \cdot 10^{-2}}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8662,$$

$$P(|x| < 75 \cdot 10^{-2}) = 0{,}8662.$$

Задача. Діаметр деталей, виготовлених на виробництві, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Дисперсія дорівнює 0,0001 мм^2, а математичне сподівання – 2,5 мм. У яких межах можна практично гарантувати розмір деталей?

Розв'язання. На підставі правила 3σ розмір деталі знаходиться в межах $a \pm 3\sigma$.

За умовою задачі D(x)=0,0001 мм^2, тоді

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = 0{,}01 \text{ мм.}$$

Визначимо межі інтервалу:

$$a - 3\sigma = 2{,}5 - 0{,}03 = 2{,}47 \text{ мм}, \quad a + 3\sigma = 2{,}5 + 0{,}03 = 2{,}53 \text{ мм}.$$

Отже, розмір деталі знаходиться в інтервалі 2,47 – 2,53 мм.

3.7 Логарифмічно нормальний розподіл

Логарифмічно нормальний закон розподілу описує випадкову величину, натуральний логарифм якої розподілений за нормальним законом. Цей закон застосовується при вирішенні ряду технічних задач. Йому підпорядковуються відмови виробів, які поступово зношуються (для деяких умов). На автомобільному транспорті за допомогою цього закону досліджують довговічність і надійність автомобіля, вирішують задачі теорії масового обслуговування тощо.

Випадкова величина X називається розподіленою за логарифмічно нормальним законом, якщо її щільність імовірності має вигляд

$$f(X) = \frac{1}{x\sigma(\ln x)\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{\ln x - \ln x_0}{2\sigma^2(\ln x)}}. \tag{3.16}$$

Логарифмічно нормальний закон використовується для опису випадкової величини, яка отримана в результаті множення великого числа випадкових величин, кожна з якій впливає на добутки.

Параметри логарифмічно нормального закону визначаються зі співвідношення $\ln x_0 – 2\ln a – 1/2\ln[D(X)+a^2]$.

$$\sigma(\ln x) = \sqrt{\ln[D(X) + a^2] \cdot 2\ln a}, \tag{3.17}$$

де a – математичне сподівання;

D(X) – дисперсія випадкової величини.

3.8 Закон розподілу Вейбулла

Закон розподілу Вейбулла застосовують у задачах, які пов'язані з тривалістю експлуатації технічних виробів. Наприклад, тривалість справного стану технічних виробів при відмовах, які обумовлені зносом; довговічність і надійність автомобіля і його вузлів; вихід з експлуатації кузова автомобіля, викликаний корозією металу.

Законом Вейбулла називають розподіл імовірностей випадкової величини X, що описується щільністю імовірності

$$f(X) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}}, \tag{3.18}$$

де X – випадкова величина (як правило, відображає час);

1/β – параметр масштабу;

α – параметр форми.

Інтегральна функція розподілу має вигляд

$$F(X) = \int_0^x \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}} dx = 1 - e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}}. \tag{3.19}$$

В теорії надійності інтегральна функція являє собою імовірність відмови виробу. Імовірність протилежної події, тобто справного стану виробу, дорівнює

$$R(X) = 1 - F(X) = e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}}.$$

Якщо в (3.18) і (3.19) α=1, одержимо:

$$f(X) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}},\ \ F(X) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}},\ \ \frac{1}{\beta} = \lambda,$$

отримуємо інтегральну і диференціальну функції розподілу показового закону. Отже, показовий розподіл – окремий випадок закону розподілу Вейбулла. Формули для визначення його числових характеристик наведено нижче.

$$M(X) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \beta^{\frac{1}{\alpha}},\ \ \sigma = \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}\, \beta^{\frac{1}{\alpha}},$$

де Г – гамма-функція.

3.9 Поняття про усічені закони

Розподіл випадкової величини Х називають усіченим, якщо з розгляду виключені випадкові величини, які знаходяться поза деяким інтервалом.

Таким чином, усічений розподіл змінює область розподілу випадкової величини. Якщо випадкова величина Х змінюється на інтервалі (x_1, x_2), то усікання двостороннє. Якщо $-\infty < x < x_2$ - усікання однобічне праворуч; $x < x < \infty$, то усікання однобічне ліворуч.

Усічені розподіли, в основному, зустрічаються при дослідженнях: надійності і довговічності вузлів автомобіля; часу, що витрачається на заміну вузлів; тобто скрізь, де роль випадкової величини відіграє час. У цьому випадку процес розглядається в деякий проміжок часу або починаючи з деякого проміжку. Це і створює усікання закону розподілу.

З властивості диференціальної функції розподілу можна зробити висновок, що площа, обмежена кривою щільності імовірності і віссю абсцис, дорівнює одиниці. Тому для усіченого розподілу необхідно ввести множник, що дозволяє зберегти цю властивість, тобто

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = 1.$$

Звідси

$$k = \frac{1}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{1}{F(b) - F(a)}, \tag{3.20}$$

де k – коефіцієнт усікання. Він дозволяє пов'язати вихідний розподіл f(x) з усіченим $f_{ус}(X)$

$$f_{ус}(X)=\begin{cases}0, & \text{при } x \le x_1,\\ kf(x), & \text{при } x_1 < x < x_2,\\ 0, & \text{при } x \ge x_2.\end{cases}$$

Для усіченого нормального розподілу щільність імовірності має вигляд

$$f_{ус}(X)=\begin{cases}0, & \text{при } x \le x_1,\\ \dfrac{k}{\sigma}f(x), & \text{при } x_1 < x < x_2,\\ 0, & \text{при } x \ge x_2,\end{cases}$$

$$f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Його математичне сподівання

$$a_{ус}=a+\sigma k\big(f(x_1)-f(x_2)\big).$$

Дисперсія усіченого нормального розподілу

$$D_{ус}(X)=\sigma^2\left[1-\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{F(x_2)-F(x_1)}\right)^2+\frac{x_2f(x_2)-x_1f(x_1)}{F(x_2)-F(x_1)}\right].$$

У цих формулах a і σ числові характеристики нормального закону розподілу. Графік усіченого нормального розподілу – частина графіка кривої Гаусса.

Питання до самоперевірки

1. Які розподіли випадкових величин використовуються для вирішення задач автосервісу?
2. Наведіть приклад використання біноміального розподілу випадкової величини.
3. У яких випадках використовується розподіл Пуассона?
4. Наведіть приклад використання розподілу Пуассона.
5. Назвіть числові характеристики розподілу Пуассона.
6. Розкрийте поняття потік подій. Наведіть приклади.
7. Які основні властивості потоків подій?
8. Охарактеризуйте закон рівномірного розподілу імовірностей.

9. Яка випадкова величини розподілена за показниковим законом?
10. Наведіть графіки, що віддзеркалюють показниковий закон розподілу випадкової величини.
11. Назвіть особливості та переваги нормального закону розподілу випадкової величини.
12. Обґрунтуйте необхідність використання логарифмічно нормального розподілу.
13. Оцініть можливості використання закону розподілу Вейбулла в технічній експлуатації автомобілів.
14. Розкрийте поняття про усічені закони розподілу випадкової величини.

4 СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

4.1 Вибірковий метод

Припустимо, що потрібно вивчити сукупність однорідних об’єктів щодо деякої якісної чи кількісної ознаки, яка характеризує ці об'єкти. Наприклад, досліджується партія автомобілів, якісною ознакою якої може слугувати відмова автомобіля, а кількісною – потужність двигуна. Іноді проводять суцільне обстеження сукупності, тобто обстежують кожний з об'єктів щодо ознаки, якою цікавляться. Але таке обстеження не завжди можливе, тому що сукупність може містити дуже велику кількість об'єктів. Наприклад, перевірка тиску повітря в шинах автомобілів, що виїжджають з великого АТП.

Іноді обстеження пов'язане зі знищенням об'єктів чи потребує великих матеріальних витрат. У такому випадку проводити повне обстеження практично не має сенсу. Наприклад, перевірка сталевого дроту на розрив, визначення часу горіння електролампочки, визначення часу роботи деталі.

Усю сукупність об'єктів, що підлягає вивченню, називають *генеральною сукупністю.*

Вибірковою сукупністю чи *вибіркою* називають сукупність випадково відібраних об’єктів з генеральної сукупності.

Обсягом сукупності (вибіркової чи генеральної) називають число об'єктів цієї сукупності.

Наприклад. Якщо з 1000 автомобілів відібрано для обстеження 50, то обсяг генеральної сукупності N=1000, а обсяг вибірки n=50.

За даними вибірки можна аналізувати характеристики генеральної сукупності, якщо вона була *репрезентативною* тобто *представницькою.* Це означає таке:

- кожен об'єкт з генеральної сукупності відібраний випадково;
- всі об'єкти генеральної сукупності мають однакову імовірність потрапити у вибірку.

4.2 Статистичний ряд розподілу та його графічне зображення

Розглянемо деяку випадкову величину X. Для її вивчення проводиться n спроб, у кожній з яких вона набуває будь-якого значення. Припустимо, що ознака набуває n_1 раз значення x_1; n_2 рази – значення $x_2; ...;$ n_k разів – значення x_k. Причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, де n – загальне число спроб, які проведені для вивчення випадкової величини.

Результати цих спроб можна розглядати як вибірку обсягу n. Обчислимо відносні частоти появи випадкової величини X: $x_1, x_2, ... , x_k$. Це будуть значення

$$P_1^* = \frac{n_1}{n}, P_2^* = \frac{n_2}{n}, P_k^* = \frac{n_k}{n}.$$

Складемо таблицю, у першому рядку якої перелічимо в порядку зростання отримані значення ознаки X, а в другому – відповідні їм відносні частоти (таблиця 4.1).

Таблиця 4.1 – Варіаційний ряд

Значення ознаки	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_k
Відносна частота	P_1^*	P_2^*	P_3^*	P_4^*	...	P_k^*

Значення величини X, тобто x_1, x_2, …, x_k називають *варіантами,* а отриману таблицю – варіаційним рядом. *Варіаційним* або *статистичним* рядом розподілу вибірки називають перелік значень варіантів і відповідних їм відносних частот (за спостереженнями).

Сума відносних частот варіаційного ряду завжди дорівнює одиниці.

$$\sum_{i=1}^{k} P_i^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Приклад. Результати 10 спостережень над кількісною ознакою сукупності зведені в табл. 4.2. Скласти варіаційний ряд.

Таблиця 4.2 – Дані спостережень

Значення ознаки	4	6	8	12
Абсолютна частота	1	3	4	2

Розв'язання. Знайдемо відносні частоти:

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 1 + 3 + 4 + 2 = 10, \quad P_1^* = \frac{1}{10}, \quad P_2^* = \frac{3}{10}, P_3^* = \frac{4}{10}, P_4^* = \frac{2}{10}.$$

Одержуємо варіаційний ряд, який наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Варіаційний ряд

Варіанти	4	6	8	12
Відносна частота	0,1	0,3	0,4	0,2

Перевірка

$$\sum_{i=1}^{k} P_i^* = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1.$$

Для наочного подання варіаційного ряду користуються його графічним зображенням. Для цього, по осі ОХ відкладають значення Х, по осі ординат – відповідні їм відносні частоти ознаки P_i^*. Отримані точки з'єднують відрізками прямих. Побудовану ламану лінію називають полігоном відносних частот.

Побудуємо полігон відносних частот для варіаційного ряду, який задано в табл. 4.3 (рисунок 4.1).

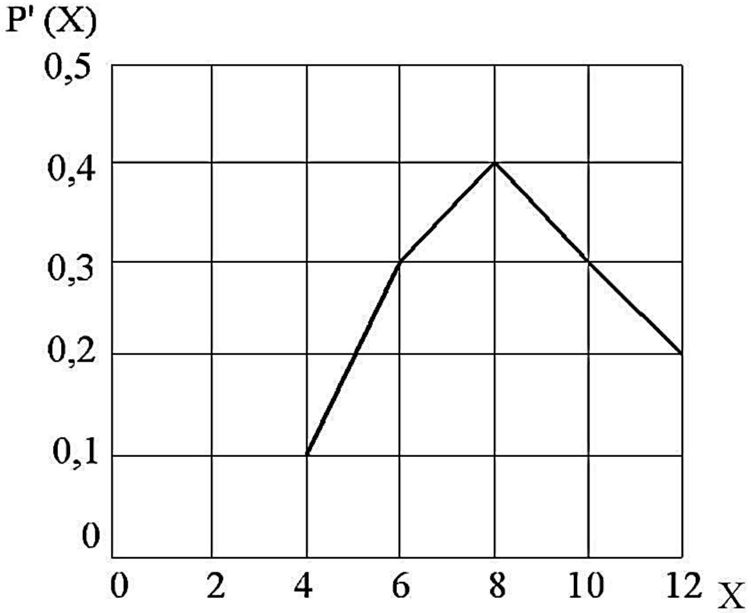


Рисунок 4.1 – Полігон відносних частот

Зауваження. Якщо по осі ОХ відкладати значення ознаки Х, а по осі OY – абсолютні частоти *n* (табл. 4.2), то отриманий графік називають полігоном частот. Очевидно, що розходження між цими двома видами полігонів тільки у виборі масштабу по осі OY.

На практиці доводиться проводити спостереження над кількісною ознакою сукупності, вираження якої в деяких одиницях може безперервно змінюватися. Наприклад, до цих ознак належать:

- напрацювання на відмову автомобіля та його елементів (км);
- відхилення показників технічного стану від номінального розміру (мк);
- електрична ємкість акумуляторів (ампер-годин) тощо.

Таку ознаку називають *безперервною* та для її характеристики будують інтервальний варіаційний ряд.

Приклад. Результати дослідження пробігу групи автобусів до першого ремонту двигуна на агрегатній дільниці подано в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 – Пробіг до першого ремонту двигуна

Границі інтервалу, пробіг, тис. км	120 140	140 160	160 180	180 200	200 220	220 240	240 260	260 280
Число автомобілів, од.	1	4	10	14	12	6	2	1

У цьому випадку частоти відносяться до всього інтервалу, а не до будь-якого окремого значення величини. Наприклад, частота 4 показує, що пробіг чотирьох автомобілів знаходиться в межах від 140 до 160 тис. км, пробіг окремого автомобіля залишається невідомим.

Для безперервного розподілу вводиться поняття щільності розподілу. Щільністю розподілу називають відношення відносної частоти P_i^* до довжини інтервалу варіювання ознаки Δ_i. Наприклад, для інтервалу (160 – 180) щільність розподілу пробігу автомобіля дорівнює

$$\frac{P_3^*}{\Delta} = \frac{\frac{10}{50}}{180 - 160} = 0{,}01.$$

Для графічного зображення інтервального варіаційного ряду слугує гістограма. Її будують таким чином: по осі OX відкладають відрізки, що дорівнюють окремим інтервалам; на них будують прямокутники з висотами, які дорівнюють щільностям відповідних інтервалів.

У результаті одержують східчасту фігуру у вигляді зсунених один до одного прямокутників, площі яких дорівнюють відносним частотам, а площа усієї фігури дорівнює одиниці.

Для розглянутого прикладу побудовано гістограму (рисунок 4.2) за даними таблиці 4.5.

Таблиця 4.5 – Дані для побудови гістограми

Пробіг, тис. км	120 140	140 160	160 180	180 200	200 220	220 240	240 260	260 280
Щільність розподілу	0,001	0,004	0,010	0,014	0,012	0,006	0,002	0,001

З гістограми можна зробити висновок, що найімовірніший пробіг до першого капітального ремонту становить 180-200 тис. км. З огляду на розкид навколо цього значення, можна розширити інтервал від 160 до 220 тис. км. Іноді, при побудові гістограми, по осі ординат відкладають частоти цієї ознаки.

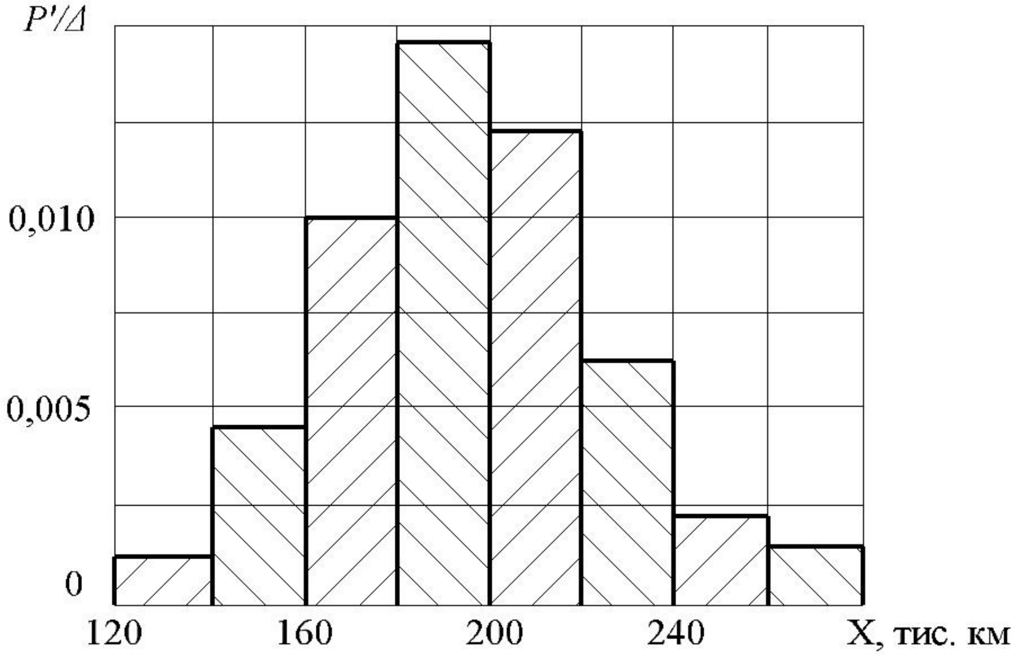


Рисунок 4.2 – Гістограма ряду розподілу пробігу автомобілів

Емпірична функція розподілу. Припустимо, що відомий статистичний розподіл кількісної ознаки X. Позначимо через n_x число спостережень, при яких спостерігалося x значень ознаки X, менше деякого фіксованого числа. Нехай n – загальне число спостережень, тобто обсяг вибірки. Тоді відносна частота події X<x дорівнює n_x/n. Якщо x змінюється, то буде змінюватися і відносна частота. Отже, відношення n_x/n є функцією від x. Вона знаходиться емпіричним шляхом і називається *емпіричною функцією розподілу.*

Емпіричною функцією розподілу називають функцію F*(X), що визначає для кожного фіксованого значення відносну частоту події X<x.

На відміну від емпіричної функції F*(X), інтегральну функцію розподілу F(X) називають теоретичною. Розходження між емпіричною та теоретичною функціями розподілу полягає в тому, що теоретична функція F(X) визначає імовірність події P(X<x) для заданого фіксованого значення, а емпірична функція F*(X) відносну частоту цієї події, тобто розраховується після проведення спроб. При досить великому числі спроб

$$F^*(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(X).$$

Емпіричну функцію розподілу цієї вибірки можна використовувати для наближеного подання теоретичної інтегральної функції розподілу генеральної сукупності. Основні властивості цих функцій збігаються.

4.3 Статистичні оцінки невідомих параметрів розподілу

Однією з задач математичної статистики є побудова оцінок параметрів закону розподілу величини, яка досліджується за даними вибірки. Вибірка містить обмежене число даних. Тому значення параметрів, обчислене за цими даними, містить елемент випадковості та є наближеним.

Випадкове наближене значення параметра, обчислене на основі обмеженого числа спроб, називають *оцінкою параметра.* Оцінку параметра, яка виражена одним числом, називають *точковою оцінкою.*

Оцінку параметра, що обумовлена двома числами – кінцями інтервалу, називають *інтервальною.*

Види точкових оцінок. Припустимо, що a^* є статистичною оцінкою невідомого параметра а теоретичного розподілу. Потрібно очікувати, що при збільшенні числа спроб a^* наближається до параметра а.

Обгрунтованою називають оцінку, що при $n \to \infty$ прагне за імовірністю до параметра, який оцінюється.

Незміщеною називають статистичну оцінку a^*, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру а, тобто $M(a^*)=a$.

Якщо оцінка a^* має велику дисперсію, то знайдена за даними однієї вибірки оцінка a_1^*, може виявитися значно віддаленою від середнього значення оцінок a^* та оцінюваного параметра. Прийняття a_1^* за наближене значення a^* обумовлює велику погрішність. Якщо висунути вимоги, щоб дисперсія a^* була малою, то можливість припущення великої помилки буде виключена.

Ефективною називають статистичну оцінку, яка при заданому обсязі вибірки має найменшу можливу дисперсію.

Інтервальні оцінки. При малому числі спостережень значення точкової оцінки є випадковим і може значно відрізнятися від параметра, який оцінюється. Тоді заміна параметра його оцінкою призводить до грубих помилок. Через це виникає питання про точність і надійність оцінки.

Припустимо, що за статистичними даними визначена оцінка a^* невідомого параметра а. Оцінка тим краща, чим менший $|a - a^*|$. Якщо $|a - a^*| < \delta$, тоді чим менша δ, тим точніша оцінка. Додатне число ($\delta > 0$), що характеризує модуль різниці параметра і його оцінки, називається *точністю оцінки.* Однак, статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка a^* задовольняє нерівність $|a - a^*| < \delta$. Можна лише говорити про імовірність ν, з якою ця нерівність виконується.

Надійністю або довірчою імовірністю оцінки параметра а за a^* називають імовірність ν, з якою виконується нерівність $|a - a^*| < \delta$.

Звичайно надійність оцінки задається заздалегідь і визначається з технічної суті задачі близькими до одиниці числами, які дорівнюють 0,90; 0,95, а для більш точних розрахунків – 0,994; 0,999 тощо.

Припустимо, що $P(|a - a^*| < \delta) = \nu$.

Замінимо нерівність $|a - a^*| < \delta$ рівносильною подвійною нерівністю

$$-\delta < a - a^* < \delta \quad \text{або} \quad a^* - \delta < a < a^* + \delta.$$

Тоді одержуємо $P(a^* - \delta < a < a^* + \delta) = \nu$. Це означає, що з імовірністю γ інтервал $(a^* - \delta,\ a^* + \delta)$ покриває невідомий параметр а. *Довірчим* називають інтервал $(a^* - \delta,\ a^* + \delta)$, що покриває невідомий параметр а з заданою надійністю γ. Границі інтервалу $(a^* - \delta,\ a^* + \delta)$ називають *довірчими границями.*

Для різних вибірок одержують різні значення оцінок параметра а, отже, будуть різні і довірчі границі, тобто $a^* - \delta,\ a^* + \delta$ – випадкові числа. Параметр а, який оцінюється, є невипадковою величиною. Тому величину γ краще розглядати не як імовірність «улучення» параметра а в інтервал $(a^* - \delta,\ a^* + \delta)$, а як імовірність того, що випадковий інтервал $(a^* - \delta, a^* + \delta)$ накриє параметр *а.*

4.4 Побудова точкових оцінок числових характеристик генеральної сукупності

Припустимо, що вивчається дискретна генеральна сукупність обсягом N відносно кількісної ознаки X, значення якої $x_1, x_2, ..., x_k$ мають відповідно частоти $N_1, N_2, ..., N_k$, причому

$$N_1+N_2+...N_k= N.$$

Генеральною середньою $\overline{x_Г}$ називають середнє арифметичне значення ознаки генеральної сукупності

$$\overline{x_Г} = \frac{x_1N_1 + x_2N_2 + \ldots + x_kN_k}{N}. \qquad (4.1)$$

Теорема. Математичне сподівання ознаки дорівнює генеральній середній цієї ознаки.

Доведення. Розглянемо генеральну сукупність обсягом N відносно ознаки X. Припустимо, що значення ознаки $x_1, x_2, ..., x_k$ мають відповідно частоти $N_1,\ N_2,\ ..., N_k$. Відносна частота того, що витягнуто обсяг зі значенням ознаки x_i дорівнює $P_i^* = N_i/N$. Оскільки розглядається генеральна сукупність, то $P_i^* = P_i$.

Таким чином, величину ознаки X можна розглядати як випадкову, можливі значення якої $x_1, x_2, ..., x_k$ мають відповідні імовірності. Обчислимо математичне сподівання ознаки $N_1/N, ... , N_k/N$.

$$M(X) = x_1 \frac{N_1}{N} + x_2 \frac{N_2}{N} + \ldots x_k \frac{N_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i N_i}{N} = \overline{x_Г},$$

що і було потрібно довести.

Припустимо, що для вивчення генеральної сукупності відносно кількісної ознаки *X* витягнута вибірка обсягом n.

Вибірковою середньою $\overline{x_b}$, називають середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності.

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ мають відповідно частоти $n_1, n_2, \ldots, n_m$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, то

$$\overline{x_b} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_m n_m}{n}. \qquad (4.2)$$

Теорема: середня вибіркова є незміщеною і обґрунтованою точковою оцінкою генеральної середньої, тобто невідомого математичного сподівання генеральної сукупності.

Для того, щоб охарактеризувати розсіювання значень кількісної ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього значення, вводять зведену характеристику – генеральну дисперсію.

Генеральною дисперсією $D_Г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх значення.

Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ значення ознаки генеральної сукупності мають відповідні частоти $N_1, N_2, \ldots, N_k$, то

$$D_Г = \frac{N_1(x_1 - \overline{x_Г})^2 + N_2(x_2 - \overline{x_Г})^2 + \ldots + N_k(x_k - \overline{x_Г})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x_Г})^2}{N}. \qquad (4.3)$$

Припустимо, що з генеральної сукупності витягнута вибірка обсягом n і $x_1, x_2, \ldots, x_m$ значення ознаки з частотами, відповідно, рівними $n_1, n_2, \ldots, n_m$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Вибірковою дисперсією (D_b) називають середнє арифметичне відхилення квадратів значень ознаки, яка спостерігається, від їх середнього значення

$$D_b = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \overline{x_b})^2}{n}. \qquad (4.4)$$

Вибіркова дисперсія характеризує розсіювання значень кількісної ознаки вибірки навколо свого середнього значення (за результатами спостережень).

Теорема. Дисперсію, байдуже, вибіркову чи генеральну, можна обчислити за формулою:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \tag{4.5}$$

Дисперсія дорівнює середньому квадратів значень без квадрата загальної середньої.

Доведення

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i\,(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} n_i[x_i^2 - 2x_i\bar{x} + (\bar{x})^2]\right\} =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i + (\bar{x})^2 n\right) = x^2 - 2\bar{x}x + (\bar{x})^2$$
$$= \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Теорема. Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії.

Виправленою дисперсією називають

$$S^2 = \frac{n-1}{n} \cdot D_b. \tag{4.6}$$

Теорема. Виправлена дисперсія – незміщена оцінка генеральної дисперсії.

Зауваження. Порівнюючи формули

$$D_b = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \bar{x}_i)^2}{n}; \quad S^2 = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \bar{x}_i)^2}{n-1},$$

бачимо, що вони відрізняються знаменниками. Потрібно очікувати, що на практиці, за умови великих обсягів вибірки ($D_b \approx S^2$) та при n<30 користуються виправленою дисперсією.

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням δ_y називають $\sqrt{D_b}$

$$\delta_в = \sqrt{\frac{\sum n_i\,(x_i - \bar{x}_i)^2}{n}}. \tag{4.7}$$

Оцінками для середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності є вибіркове середнє квадратичне $\delta_в$ відхилення чи виправлене середнє квадратичне відхилення

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Приклад. Знайти оцінки числових характеристик генеральної сукупності за даними вибірки (табл. 4.6).

Таблиця 4.6 – Вибіркові дані

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Розв'язання. Знаходимо середню вибіркову

$$\overline{x_b} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{50} = 2.$$

Обчислимо середнє квадратів ознаки

$$\overline{x^2} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 25 \cdot 16}{50} = 5.$$

Виправлена дисперсія дорівнює

$$S^2 = \frac{50 - 1}{50} \cdot (5 - 2^2) = 0{,}98.$$

Зміщена оцінка генеральної дисперсії

$$D_b = 5 - 4 = 1.$$

Незміщена оцінка генеральної дисперсії

$$S^2 = 0{,}98.$$

Незміщена оцінка математичного сподівання генеральної сукупності

$$\overline{x_b} = 2.$$

4.5 Побудова інтервальних оцінок числових характеристик генеральної сукупності

Нижче розглянуто приклад побудови інтервальної оцінки невідомого математичного сподівання а генеральної сукупності. Припустимо, що кількісна ознака X, яка досліджується, є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом з відомим середнім квадратичним відхиленням σ. Побудуємо довірчий інтервал, що покриває математичне сподівання а з надійністю ν. При цьому, будемо враховувати, що точкова оцінка а – середня вибіркова. Але $\overline{x_b}$ має різні значення для різних вибірок. Тому його можна розглядати як випадкову величину $\overline{X_b}$. Значення ознаки X, які дорівнюють $x_1, x_2, \dots, x_n$, будемо розглядати як взаємно незалежні однаково розподілені випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$, які мають однакові числові характеристики з *X*, тобто

$$M(X) = M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = a,$$

$$\sigma(X) = \sigma(X_1) = \sigma(X_2) = \ldots = \sigma(X_n) = \sigma.$$

Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом, то й випадкова величина $\overline{X}$ підлягає такому ж розподілу. Дійсно, на підставі властивостей математичного сподівання і дисперсії отримано:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = M(X_i) = a,$$

$$\sigma(\overline{X}) = \sigma\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X_i) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Побудуємо довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання генеральної сукупності, задаючи довірчу імовірність ν. При цьому розглядають два випадки.

1. Відомо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності σ.

За означенням довірчого інтервалу

$$P(|\overline{X}_b - \alpha| < \delta) = \nu.$$

Для нормальної розподіленої випадкової величини таку нерівність можна подати у вигляді

$$P\left(\left|\overline{X}_b - \alpha\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\left(\overline{X}_b\right)}\right).$$

Заміняючи $\sigma\left(\overline{X}_b\right)$ його значенням, одержуємо:

$$P\left(\left|\overline{X}_b - \alpha\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Позначивши $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = t$, можна розрахувати $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Тоді $$P\left(\left|\overline{X}_b - \alpha\right| < \delta\right) = 2\Phi(t).$$

Значення імовірності ν відомо, тоді 2Φ(t)=ν. З цього співвідношення визначаємо t за таблицею функції Лапласа

$$P\left(\overline{X}_b - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \overline{X}_b + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \nu. \tag{4.8}$$

Таким чином, з надійністю ν можна стверджувати, що довірчий інтервал

$$\left(\overline{X}_b - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \overline{X}_b + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

покриває невідомий параметр а.

Точність оцінки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

За цією формулою можна зробити такі висновки:

- при зростанні обсягу вибірки n число δ убуває і точність оцінки збільшується;

- функція Φ(t) зростаюча, тому зі збільшенням надійності ν збільшується значення t. Це призводить до збільшення δ. Отже, збільшення надійності обумовлює зменшення точності.

2 Середнє квадратичне відхилення невідоме. У цьому випадку для побудови довірчого інтервалу використовують виправлену дисперсію S^2.

Англійський математик Стьюдент (В. Госсет) довів, що в цьому випадку довірчий інтервал має вигляд:

$$\bar{x}_b - t_\nu \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_b + t_\nu \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{4.9}$$

Величину t_ν знаходять в таблицях за значеннями ν і n.

Розглянемо побудову інтервальної оцінки для середнього квадратичного відхилення за виправленою середньою. Припустимо, що кількісна ознака *X* генеральної сукупності розподілена нормально. Побудуємо довірчий інтервал, що покриває параметр σ із заданою надійністю v. Для цього необхідно виконати співвідношення

$$P(|\sigma - S| < \delta) = \nu \text{ чи } P(S - \delta < \sigma < S + \delta) = \nu.$$

Перетворимо подвійну нерівність $S - \delta < \sigma < S + \delta = \delta$ у рівносильну

$$S\left(1 - \frac{\delta}{S}\right) < \sigma < S\left(1 + \frac{\delta}{S}\right).$$

Позначивши $\frac{\delta}{S} = q$, одержимо:

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q). \tag{4.10}$$

Якщо відомі n і v, то за таблицею визначаємо q. Значення *S* знаходиться за даними вибірки і будується довірчий інтервал для σ

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \text{ при } q<1, \tag{4.11}$$

і

$$0 < \sigma < S(1+q) \text{ при } q>1.$$

Задача. В результаті спостереження за 115 вантажними автомобілями був отриманий середній пробіг до першого капітального ремонту кермового механізму 145,0 тис. км при σ = 37,5 тис. км. Визначити точність отриманого результату за надійності, що дорівнює 0,95.

Розв'язання. Вважаючи, що величина пробігу до першого капітального ремонту кермового механізму розподілена за нормальним законом. Точність результату можна отримати за допомогою довірчого інтервалу:

$$\bar{x}_b - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_b + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

За умовою задачі v=0,95. Тоді *Ф(t)*=0,475, а *t*=1,96. При побудові довірчого інтервалу одержали:

$$\delta = \frac{1{,}96 \cdot 37{,}6}{\sqrt{115}} \approx 6{,}88.$$

Звідси витікає, що в 95 випадках із 100 для вантажних автомобілів середній пробіг до першого капітального ремонту кермового механізму становить 145,0 ± 6,9 тис. км. Абсолютна погрішність 6,9 тис. км, відносна погрішність результату

$$\Delta = \frac{6,88}{145,0} \cdot 100 \approx 4\%.$$

Задача. Визначити кількість однакових приладів автомобілів, що підлягають випробуванню при діагностуванні, щоб з імовірністю 0,95 помилковий діагноз був поставлений не більш ніж для двох приладів вибірки, якщо $\sigma = 10$.

Розв'язання. За умовою задачі відомі наступні показники: $\nu = 0,95$, $\delta = 2$ і $\sigma = 10$. Потрібно визначити n.

Вважаючи, що для вибірки справедливий нормальний закон, позначений n зі співвідношення

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Звідси

$$n = \left(\frac{t\sigma}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 10}{2}\right)^2 = (9,8)^2 = 96,04.$$

Отже, за даними умов підлягає випробуванню 96 приладів автомобілів.

Задача. За даними 16-ти незалежних рівноточних вимірів прогину паса приводу водяного насоса при зусиллі 4 Н для двигуна вантажного автомобіля знайдено $\bar{x}_b = 23,161$ мм і виправлене середнє квадратичне відхилення S=0,400 мм. Потрібно оцінити істинне значення вимірювальної величини з надійністю 0,95.

Розв'язання. Позначимо істинне значення вимірюваної величини a.

Потрібно, щоб $P(|\overline{x_b} - a| < \delta) = 0,95$.

Оцінку для істинного значення дає довірчий інтервал. Але для цього потрібно знайти δ при невідомому σ. Значення t_v=2,13 знаходимо за таблицею при заданих n=16 і v=0,95.

Тоді

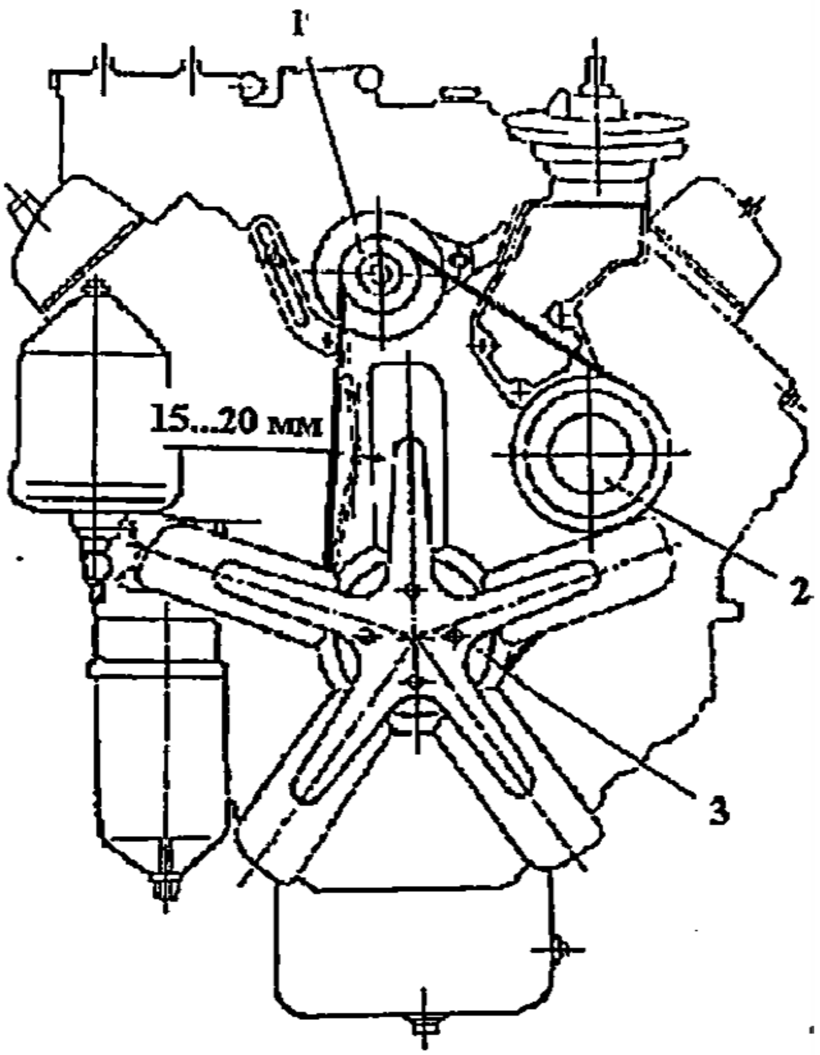
$$\delta = t_v \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{2,13 \cdot 0,4}{\sqrt{16}} = 0,213.$$

Для вимірюваної величини одержуємо інтервальну оцінку

$$23,161 - 0,213 \text{ мм} < a < 23,161 + 0,213 \text{ мм};$$

$$22,948 \text{ мм} < a < 23,374 \text{ мм}.$$

Прогин паса привода водяного насоса наведено на рисунку 4.3.



1 – шків генератора; 2 – шків водяного насоса; 3 – шків вентилятора

Рисунок 4.3 – Прогин паса привода водяного насоса

Питання до самоперевірки

1. Обґрунтуйте необхідність використання вибіркового метода оцінення параметрів розподілу випадкової величини.
2. Розкрийте поняття статистичного ряду розподілу випадкової величини.
3. Наведіть приклади графічного зображення статистичного ряду розподілу.
4. Назвіть статистичні оцінки невідомих параметрів розподілу.
5. Охарактеризуйте точкові оцінки числових характеристик генеральної сукупності.
6. Наведіть інтервальні оцінки числових характеристик генеральної сукупності.
7. Наведіть приклад визначення інтервальної оцінки числових характеристик.

5 ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦІОНУВАННЯ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА АВТОСЕРВІСУ

5.1 Основні положення. Критерій згоди Пірсона

При вирішенні великого ряду практичних задач автомобільного транспорту потрібно встановити кількісний і якісний зв'язок між досліджуваними параметрами. Вихідні дані отримують в результаті проведення спроб. Звичайно, залежність між змінними випадкової величини описується законом розподілу імовірностей, що, як правило, є невідомим. Тоді висувають і перевіряють гіпотезу про вид закону розподілу за допомогою статистичних засобів, так званих критеріїв згоди.

Критерієм згоди називають спеціально підібрану випадкову величину, що слугує для перевірки гіпотези про прогнозований закон невідомого розподілу. Критерії згоди не доводять остаточну справедливість гіпотези, а лише встановлюють погодженість її з даними спостережень на прийнятому рівні значущості.

Існує кілька критеріїв згоди: Пірсона, Колмогорова, Смирнова та інші. Найбільш поширений критерій Пірсона, що застосовується до перевірки гіпотези про будь-який вид закону розподілу (табл. 5.1).

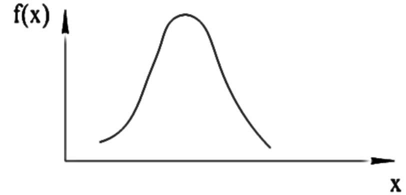
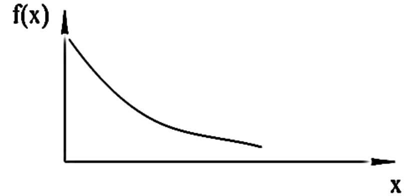
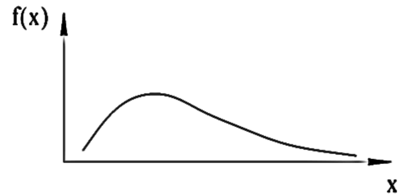
Суть критерію Пірсона полягає в порівнянні таких частот: емпіричних (що спостерігаються) і теоретичних (обчислених у припущенні певного розподілу). Розбіжність частот може бути випадковою (тобто викликаною малим числом спостережень або способом їх групування). Але можливо, що розбіжність частот викликана тим, що теоретичні частоти обчислені на підставі неправильної гіпотези про закон розподілу. Тоді їх розбіжність є суттєвою. Критерій Пірсона на прийнятому рівні значущості вирішує питания про значущість розбіжності емпіричних і теоретичних частот.

Задача перевірки гіпотези про закон розподілу вирішується таким чином.

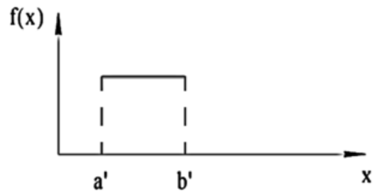
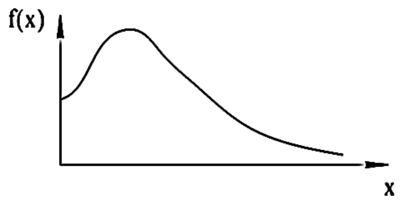
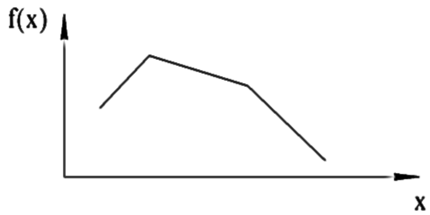
1. За даними спроб будують інтервальний варіаційнний ряд.

Для цього за результатами вимірів визначають зону розсіювання розмірів і розподіляють їх таким чином, щоб вийшло не менше 5 і не більше 20 інтервалів. Кількість інтервалів *K* при заданому обсязі N вимірів можна приблизно обчислити за формулою $K \leq 5\lg N$. Для деяких значень N розрахована таблиця 5.2.

Таблиця 5.1 – Схема застосування критерію Пірсона до перевірки гіпотез про закон розподілу генеральної сукупності

Закони розподілу	Графік щільності імовірності	Параметри для оцінення	Імовірність потрапляння в інтервал	Теоретична частота	Число ступенів вільності	Умови прийняття гіпотези
1 Нормальний		$a^* = \overline{x_b}$ $\sigma * = \overline{\sigma_y}$ $r = 2$	$P_i = \Phi(Z_{i+1}) - \Phi(Z_i)$ $Z_i = \frac{x_i - \overline{x_b}}{\sigma}$	$n' = P_i \cdot n$ де n – обсяг вибірки	f=S-3, де S – число інтервалів	$\chi^2_{спок} > \chi^2_{кр}$ немає сенсу відкидати гіпотезу
2 Показниковий		$\lambda = \frac{1}{\overline{x_b}}$ r=1	$P_i = F(x_{i+1}) - F(x_i) =$ $= e^{-\frac{x_i}{x_b}} - e^{-\frac{x_{i+1}}{x_b}}$	–//–	f=S-2	–//–
3 Логарифмічно нормальний		$a^* = \overline{x_b}(\ln x)$ $\sigma^* = \sigma_b(\ln\ x)$	$P_i = \Phi(Z_{i+1}) - \Phi(Z_i)$ $Z_i = \frac{\ln x_i - \overline{x_b}}{\sigma_b}$	–//–	f=S-3	–//–
4 Вейбулла		$\overline{x_b};\ \sigma_b; a = \frac{1}{\mu}$ $\mu = \frac{r(1+\frac{1}{n})}{\overline{x_b}}$	P_i $= e^{-(x_i\mu)^n} - e^{-(x_{i+1}\mu)^n}$	–//–	f=S-3	$\chi^2_{спок} > \chi^2_{кр}$ немає сенсу відкидати гіпотезу

Продовження таблиці 5.1

Закони розподілу	Графік щільності імовірності	Параметри для оцінення	Імовірність потрапляння в інтервал	Теоретична частота	Число ступенів вільності	Умови прийняття гіпотези
5 Рівномірний		$\overline{x_b};\ \sigma_b$ $a^* = \overline{x_b} - \sqrt{3\sigma_b}$ $b^* = \overline{x_b} + \sqrt{3\sigma_b}$	$P_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{b^* - a^*} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2\sqrt{3\sigma_b}}$	–//–	f=S-3	–//–
6 Пуассона		$b^* = \overline{x_b} = D_b$ r=1	$P_i = \frac{(\overline{x_b})^{x_i}}{(x_i)!} e^{-\overline{x_b}}$	–//–	f=S-2	–//–
7 Біноміальний		$P^* = \frac{m}{n}$ r=1 – якщо імовір-ність появи невідома. Якщо P задано, то r=0	$P_i = C_n^i P^i q^{n-1}$	–//–	f=S-2 чи f=S-1 якщо P задано	–//–

Таблиця 5.2 – Кількість інтервалів для заданого обсягу вимірів

Обсяг вимірів	50	100	520	1000	10000
Кількість інтервалів	8	10	13	15	20

Ширина інтервалів має бути постійною для усього варіаційного ряду. Дуже мала або занадто велика ширина інтервалів впливає на вид кривої розподілу.

2. Для побудови гістограми відзначають середини прямокутників і з'єднують їх плавною кривою. За видом графіка висувають нульову гіпотезу про закон розподілу досліджуваної ознаки.

3. В припущенні справедливості висунутої гіпотези обчислюють теоретичні частоти

$$n_i' = nP_i,$$

де n – обсяг вибірки;

P_i – імовірність потрапляння в інтервал, для якого обчислюється n_i'.

4. Обчислюють випадкову величину, яка характеризує розходження емпіричних частот n_i і теоретичних n_i'

$$\chi^2 = \sum (n_i - n_i')^2 \cdot \frac{1}{n_i'}.$$

У різних спробах отримано різні значення χ^2, тому ця величина – випадкова. Доведено, що зі збільшенням обсягу вибірки, тобто при $n \to \infty$ обчислена випадкова величина має розподіл χ^2 з f ступенями вільності, незалежно від того, якому закону розподілу підлягає генеральна сукупністъ.

5. Будують правобічну критичну область, тому що однобічний критерій більш «жорстко» відкидає нульову гіпотезу ніж лівосторонній. Критичну область знаходять з умови, що імовірність улучення критерію в цю область, у пропорції справедливості нульової гіпотези дорівнювала прийнятому рівню значущості *α*.

$$P(\chi^2 > \chi^2_{кр}) = \alpha.$$

6. Якщо $\chi^2_{спос} < \chi^2_{кр}$, то немає причин відкидати нульову гіпотезу.

$\chi^2_{кр}$ визначаємо за таблицею залежності від рівня значущості α та числа ступенів вільності

$$f = S - r - 1,$$

де S – число груп, тобто число часткових інтервалів;

r – число параметрів передбачуваного розподілу, що оцінені за даними вибірки (воно має різні значення для різних законів розподілу).

Розглянемо r для різних законів розподілу.

Нормальний закон розподілу характеризується двома параметрами: математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням σ. Отже, за даними вибірки оцінюють два параметри, тобто $r = 2$, тоді $f = S - 2 - 1 = S - 3$.

Показниковий закон розподілу характеризується одним параметром λ, отже, $r = 1$ і $f = S - 1 - 1 = S - 2$.

Рівномірний закон розподілу визначається кінцями інтервалу, що оцінюються за даними вибірки, тобто $r = 2$ і $f = S - 2 - 1 = S - 3$.

Біноміальний закон розподілу має одну характеристику – ймовірність появи події Р, отже, r=1 і f=S–1–1=S–2.

Якщо імовірність появи події Р задана й за даними спроб не визначається, то r=0 і f=S–1.

Закон розподілу Пуассона характеризується одним параметром *a*, що обумовлений за даними вибірки. Тому r=1 і f=S–1–1=S–2.

При роботі з критерієм Пірсона χ^2 особливі труднощі становить обчислення теоретичних частот. Це питання розглянуто в таблиці 5.3 і пояснено в прикладах.

5.2 Вирівнювання статистичних рядів у задачах автомобільного транспорту

Задача. Дослідження відповідності тиску повітря в шинах вимогам технічних умов проводиться в державному комунальному підприємстві пасажирського транспорту. Вимірювання тиску повітря здійснювалися контрольним манометром при виїзді автомобілів на лінію. При цьому, точність вимірювання дорівнювала ±0,001 МПа. Був перевірений тиск у 350 шинах. Результати наведено в таблиці 5.3

Потрібно вирівняти отримані експериментальні дані нормальним законом при припустимому рівні значущості 0,01.

Розв'язання. Проводять побудову полігона відносних частот та їх обчислення. Результати заносять у таблицю 5.4 (стовпець 4).

$$P_1^* = \frac{3}{350} = 0{,}009, \; P_2^* = \frac{8}{350} = 0{,}023.$$

Таблиця 5.3 – Відхилення тиску повітря від припустимого в шинах автомобіля

Кількість розрядів	Границя розрядів (відхилення тиску повітря), $\cdot 10^5$, Па		Експериментальні частоти
1	-0,230	-0,210	3
2	-0,210	-0,190	8
3	-0,190	-0,170	19
4	-0,170	-0,150	37
5	-0,150	-0,130	53
6	-0,130	-0,110	60
7	-0,110	-0,090	64
8	-0,090	-0,070	49
9	-0,070	-0,050	31
10	-0,050	-0,030	17
11	-0,030	-0,010	7
12	-0,010	0,010	2
Разом			350

Визначають висоти прямокутників, тобто щільність відносної частоти, і заносять результати в стовпець 6 таблиці 5.4

$$\Delta X = 0{,}020;\ H_i = \frac{P_i^*}{\Delta X};\ H_1 = \frac{0{,}009}{0{,}020} = 45; H_2 = \frac{0{,}023}{0{,}020} = 1{,}15.$$

Обчислюють середнє вибіркове і виправлене квадратичні відхилення

$$\overline{x_b} = -0{,}1120, D_в = 0{,}0018, S^2 = \frac{350}{349} \cdot 0{,}018 = 0{,}0019.$$

Для визначення теоретичних частот розраховують $z_i = \frac{x_i - \overline{x_b}}{S}$.

Значення функції $\Phi(z_i)$ визначають за таблицею функції Лапласа. Розрахунки зведено в стовпці 7, 8, 9 таблиці 5.4

Гіпотезу про можливість вирівнювання експериментальних даних нормальним законом перевіряють за критерієм згоди Пірсона. Обчислюють експериментальне значення критерію

$$\chi^2_{спос} = \sum_{i=1}^{12} \frac{(n_i - n_i)^2}{n_i},\ \ \chi^2_{спос} = 1{,}432.$$

Таблиця 5.4 – Статистична обробка експериментальних даних

№ роз-ряду	Границі розрядів		Абсо-лютна частота	Відносна частота	Середина Інтервалу, 10^{-5}, Па	Висота прямо-кутника	Центроване відхилення	Центроване і нормальне відхилення	Теоретичні частоти потрапляння в розряди		Щільність імовірності
1	2		3	4	5	6	7	8	9		10
1.	-0,230	-0,210	3	0,009	-0,220	0,45	-2,4	0,0224	3,48	4	0,50
2.	-0,210	-0,190	8	0,023	-0,200	1,15	-1,95	0,0596	9,27	9	1,32
3.	-0,190	-0,170	19	0,054	-0,180	2,7	-1,51	0,1276	19,85	20	2,85
4.	-0,170	-0,150	37	0,106	-0,160	5,3	-1,07	0,2251	35,02	35	5,00
5.	-0,150	-0,130	53	0,151	-0,140	7,55	-0,62	0,3292	51,21	51	7,32
6.	-0,130	-0,110	60	0,171	-0,120	8,55	-0,18	0,3925	61,05	61	8,70
7.	-0,110	-0,090	64	0,183	-0,100	9,15	0,27	0,3847	59,84	60	8,55
8.	-0,090	-0,070	49	0,140	-0,080	7,00	0,711	0,3101	48,84	49	6,69
9.	-0,070	-0,050	31	0,088	-0,060	4,40	1,156	0,2036	31,64	32	4,50
10.	-0,050	-0,030	17	0,049	-0,040	2,45	1,60	0,1109	17,75	18	2,45
11.	-0,030	-0,010	7	0,020	-0,020	1,00	2,04	0,0498	7,75	8	1,10
12.	-0,010	+0,010	2	0,006	-0,000	0,30	2,49	0,0180	2,8	3	0,40

За таблицею критичних точок χ^2 та рівнем значущості α=0,01 і числом ступенів вільності f=12-3=9 визначають $\chi^2_{табл} = 21{,}7$. При $\chi^2_{спос} < \chi^2_{табл}$, приймають гіпотезу про вирівнювання експериментальних даних нормальним законом розподілу.

Будуємо нормальну вирівнювальну криву. Для цього на перпендикулярах до середини інтервалів відкладають величину щільності теоретичної імовірності, яка зазначена в стовпці 10 таблиці 5.4.

Отримані точки з’єднують кривою. Полігон відносних частот і теоретична вирівнювальна крива зображено на рисунку 5.1.

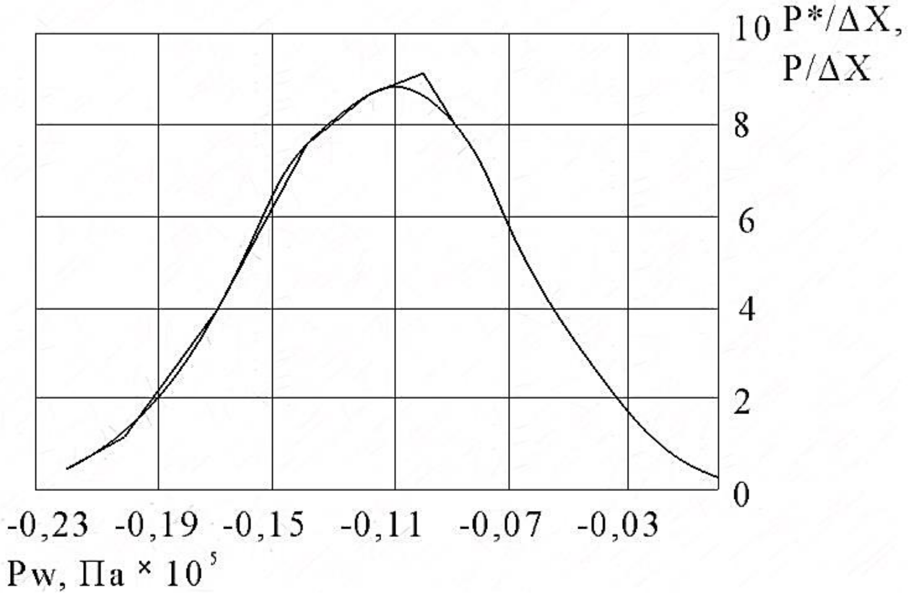


Рисунок 5.1 – Полігон відносних частот і вирівнювальна крива

Задача. Вивчення розподілу часу діагностування.

Для можливості використання систем масового обслуговування при розрахунку станції діагностики необхідно, щоб час обслуговування на посту розподілявся згідно з показниковим законом. З метою дослідження часу діагностування в АТП проводилося хронометрування робіт, що виконуються на постах діагностування гальмівної системи, рульового керування і приладів освітлення. Отримані дані зведено в таблицю 5.5.

Таблиця 5.5 – Час діагностування

Номер розряду	Границі розрядів, хв		Експериментальні частоти
1	2	3	4
1	0	10	49
2	10	20	27
3	20	30	32

Продовження таблиці 5.5

1	2	3	4
4	30	40	20
5	40	50	15
6	50	60	8
7	60	70	8
8	70	80	4
9	80	90	5
10	90	100	2
11	100	110	3
12	110	120	2

Таблиця 5.6 – Статистична обробка експериментальних даних

№ роз-ряду	Границі розрядів, хв		Середини розрядів, хв	Експе-римен-тальні частоти	Теоретична ймовірність влучення в частоти	Теоретичні частоти		$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$
1	2		3	4	5	6		7
1	0	10	5	49	0,281	49,75	50	0,02
2	10	20	15	27	0,202	35,58	35	2,25
3	20	30	20	32	0,145	25,41	25	7,96
4	30	40	35	20	0.1045	18,28	18	0,22
5	40	50	45	15	0,1653	13,13	13	0,31
6	50	60	55	8	0,054	9,45	9	0,11
7	60	70	65	8	0,0388	6,80	7	0,14
8	70	80	75	4	0,02979	4,88	5	0,20
9	80	90	85	5	0,020	3,51	3	1,33
10	90	100	95	2	0.0144	2,52	2	0,00
11	100	110	105	3	0.0104	1,82	2	0,50
12	110	120	115	2	0,0074	1,3	1	1,00

$\chi^2_{\text{спос}} = 8{,}04$

Необхідно перевірити значущість прийнятої статистичної гіпотези шляхом проведення вирівнювання отриманих даних показниковим законом.

Рішення.

1. Будуємо гістограму частот часу, що витрачається на діагностування. Для цього по осі абсцис відкладаємо середини інтервалів, а осі ординат – відповідні їм частоти. Всі обчислення зводимо в таблицю 5.6.

2. Обчислюємо оцінку математичного сподівання

$$\overline{t_в} = \frac{\sum_{i=1}^{12} t_i n_i}{n} = \frac{1}{175} \cdot (5 \cdot 49 + 15 \cdot 27 + 25 \cdot 32 + 35 \cdot 20 + 45 \cdot 15 + 55 \cdot 8 +$$
$$+65 \cdot 8 + 75 + 85 \cdot 5 + 95 \cdot 2 + 105 \cdot 3 + 115 \cdot 2) = 29{,}97 \text{ хв.}$$

3. Визначаємо інтенсивність процесу діагностування

$$\lambda = \frac{1}{\overline{t_b}} = \frac{1}{29,97} = 0,033.$$

Це означає, що за хвилину виконувалися 0,033 частини роботи, а за годину – 2 види діагностування.

4. Можливість вирівнювання експериментальних даних показниковим законом перевіримо за критерієм Пірсона. Обчислюємо імовірність улучення випадкової величини в розряди і заносимо до таблиці 5.6 (стовпець 5)

$$\mathrm{P}(0 < t < 10) = \mathrm{e}^{-0,033\cdot 0} - e^{-0,033\cdot 10} = 1 - 0,7189 = 0,281,$$
$$\mathrm{P}(10 < t < 20) = e^{-0,033\cdot 10} - e^{-0,033\cdot 20} = 0,7189 - 0,5158 = 0,202.$$

Результати заносимо в стовпець 6 таблиці 5.6.

5. В стовпці 7 таблиці 5.6 знаходяться обчислені квадрати різниць експериментальних і теоретичних частот, віднесені до теоретичних

$$\chi^2_{\text{спос}} = 8,04.$$

За таблицею критичних точок χ^2 за рівнем значущості α=0,05 і числом ступенів вільності f=12–3=9 визначаємо

$$\chi^2_{\text{табл}}(\alpha = 0,05; \mathrm{f} = 9) = 16,9; \ \chi^2_{\text{спос}} < \chi^2_{\text{табл}}$$

Отже, гіпотеза про належність експериментальних даних до показникового закону за критерієм згоди Пірсона виправдується.

6. Будуємо вирівнювальну криву (рис. 5.2) щільності показникового закону розподілу. По осі абсцис відкладаємо середини розрядів, а по осі ординат – теоретичні частоти.

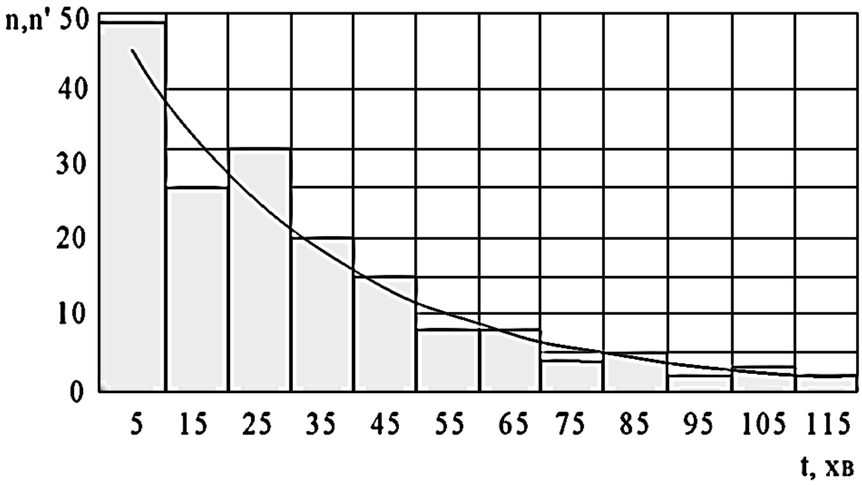


Рисунок 5.2 – Гістограма і вирівнювальна крива

Задача. Протягом 8 годин реєстрували час заїзду автомобілів на станцію технічного обслуговування. У результаті отримано емпіричний розподіл, який наведено у таблиці 5.7. Необхідно перевірити гіпотезу про те, що час прибуття автомобілів розподілений рівномірно. Рівень значущості взято 0,05.

Таблиця 5.7 – Емпіричний розподіл числа заїздів автомобілів на СТО

Найменування показника	Значення			
Інтервали часу спостереження, год	8–10	10–12	12–14	14–16
Кількість автомобілів, що надійшли на СТО	25	40	30	45

Інтервал часу спостереження позначений $x_{i-1} - x_i$; кількість машин, що надійшли на СТО – n_i

Розв'язання

1. Середини інтервалів беруть за значення варіантів і обчислюють вибіркове і виправлене середні квадратичні відхилення

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i n_i = (9 \cdot 25 + 11 \cdot 40 + 13 \cdot 30 + 15 \cdot 45)\frac{1}{140} = 12{,}357 \text{ год},$$

$$S^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = (81 \cdot 25 + 121 \cdot 40 + 169 \cdot 30 + 225 \cdot 45) \times$$
$$\times \frac{1}{140} - 12{,}357^2 = 4{,}876 \text{ год}^2,$$
$$S = 2{,}208 \text{ год}.$$

2. Визначають оцінки параметрів a й b рівномірного розподілу за формулами

$$a^* = \overline{x_в} - \sqrt{3} \cdot S;\; a^* = 12{,}357 - \sqrt{3} \cdot 2{,}208 = 8{,}533,$$
$$b^* = \overline{x_в} + \sqrt{3} \cdot S;\, b^* = 12{,}357 + \sqrt{3} \cdot 2{,}208 = 16{,}181.$$

Результати обчислень зведено в таблицю 5.8.

3. Знаходять імовірність потрапляння ознаки в кожен інтервал:

$$P_1 = \frac{10 - 8{,}533}{16{,}181 - 8{,}533} = 0{,}192, \qquad P_2 = \frac{12 - 10}{16{,}181 - 8{,}533} = 0{,}262,$$

$$P_3 = 0{,}262,\, P_4 = 0{,}285.$$

4. Обчислюють теоретичні частоти

$$n'_1 = n \cdot P_1 = 140 \cdot 0{,}192 = 26{,}905; n'_2 = n'_3 = 140 \cdot 0{,}262 = 36{,}680;$$
$$n'_4 = n \cdot P_4 = 140 \cdot 0{,}285 = 39{,}924.$$

5. Знаходять значення критерію Пірсона за даними вибірки

$$\chi^2_{спос} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_2}$$
$$= \frac{(25 - 26{,}905)^2}{26{,}905} + \frac{(40 - 36{,}680)^2}{36{,}680} + \frac{(30 + 36{,}680)^2}{36{,}680} +$$
$$+ \frac{(45 - 39{,}999)^2}{39{,}999} = 2{,}283$$

6. За таблицею критичних точок χ^2 , рівнем значущості α=0,05 і числу ступенів вільності f=4–3=1 визначають табличне значення критерію

$$\chi^2_{кр}(\alpha = 0{,}05; f = 1) = 3{,}8.$$

7. З нерівності $\chi^2_{спос} < \chi^2_{кр}$ випливає, що немає підстав відкидати гіпотезу про рівномірний розподіл. Іншими словами, дані спостережень відповідають висунутій теорії.

Таблиця 5.8 – Статистична обробка експериментальних даних

$x_{(i-1)} - x_i$	n_i	x_i^*	$x_i^* n_i$	$(x_i^*)^2 n_i$	P_i	n'_i	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$
8-10	25	9	225	2025	0,192	26,9	0,135
10-12	40	11	440	4840	0,262	36,7	0,300
12-14	30	13	390	5070	0,262	36,7	0,223
14-16	45	15	675	10125	0,285	39,9	0,625
-	140	-	1730	22060	1,001	140,29	2,283

Питання до самоперевірки

1. Розкрийте поняття критеріїв згоди.
2. Наведіть приклад використання критерію Пірсона.
3. Охарактеризуйте вирівнювання статистичних рядів у задачах автомобільного транспорту.
4. Наведіть приклад перевірки значущості прийнятої статистичної гіпотези.

6 СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ У ДІАГНОСТУВАННІ ТА ТЕХНІЧНОМУ ОБСЛУГОВУВАННІ АВТОМОБІЛІВ

6.1 Статистична гіпотеза і статистичний критерій

Однією з задач технічної діагностики автомобілів є визначення параметрів відомого закону розподілу. Вирішення цієї задачі проводиться за даними вибірки, яка вносить у процес аналізу елемент випадковості. Тому кожне рішення потрібно перевіряти за допомогою статистичних методів.

Статистичною називають гіпотезу про вид невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів. Розрізняють два види гіпотез: *прості і складні. Простою* називають гіпотезу, що містить тільки одне припущення; *складною* – гіпотезу, що складається з кінцевого або нескінченного числа простих гіпотез.

Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу. Позначають її H_0. *Конкуруючою (альтернативною)* – гіпотезу, що суперечить нульовій. Позначають H_1. Наприклад, нульова гіпотеза складається з припущення, що математичне сподівання нормального розподілу пробігу до відмови електрообладнання дорівнює 20 тис. км, а $\mathrm{H}_1 \neq 20$. Стисло це записується так: $\mathrm{H}_0: \alpha = 20, \mathrm{H}_1: \alpha \neq 20$.

У результаті перевірки гіпотези можуть бути допущені помилки двох видів:

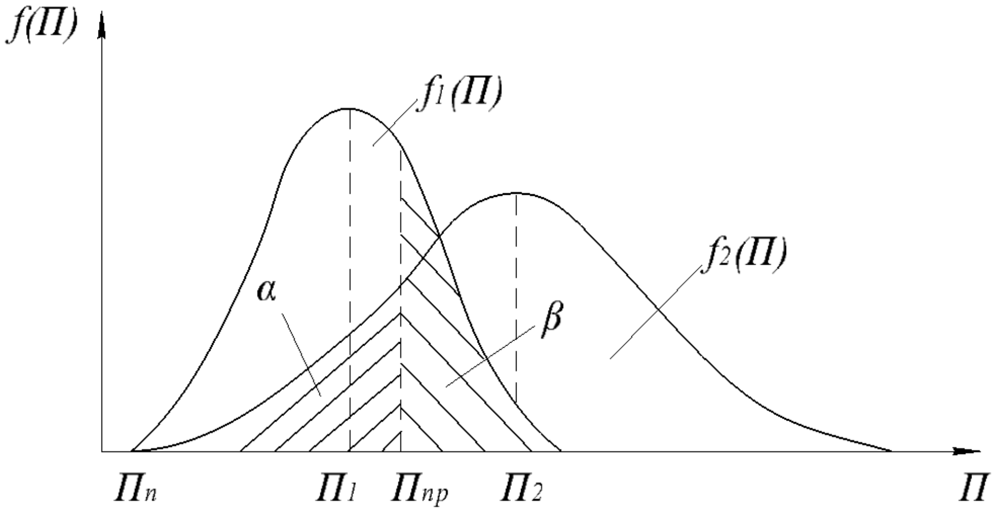
1. Першого, яка полягає в відкиданні правильної гіпотези;

2. Другого, яка передбачає прийняття неправильної гіпотези.

Наприклад, до діагностичних нормативів відноситься допустиме значення параметра. Допустимий норматив є основним при періодичному діагностуванні. Найбільше впливають на процеси зношування змінні умови експлуатації. Тому в процесі постановки діагнозу за допустимим нормативом можливі такі помилки (рис. 6.1). Об’єкт вважається справним, якщо поточне значення параметра Π_i знаходиться в діапазоні між номінальним і допустимим. При проведенні діагностування може зустрітися помилка першого виду, коли справною визначається частина α фактично несправних елементів з розподілу $f_2(\Pi)$.

Якщо поточне значення параметра Π_j перевищує допустиме, то об’єкт вважається несправним. Можна припуститися помилки другого роду: як несправні прийняти фактично справні об’єкти з розподілу $f_1(\Pi)$, у яких значення параметра більше. Імовірність помилки другого роду β.

Імовірність зробити помилку першого роду називають *рівнем значущості* і, як правило, позначаються α.



f_1(П) – для справних об'єктів; f_2(П) – для несправних об'єктів;
$П_н$ – номінальне значення параметра; $П_{пр}$ –допустиме значення параметра; $\overline{П_1}$ – середнє значення параметра справних елементів;
$\overline{П_2}$ – середнє значення параметра несправних елементів

Рисунок 6.1 – Щільність розподілу параметра

Для практичних завдань з автомобільного транспорту рівень значущості беруть 0,05 (5%) або 0,01 (1%). Якщо α=0,01, то це означає, що в одному випадку з 100 можна припуститися помилки першого роду, тобто відкинути правильну гіпотезу.

Задача. При діагностуванні на СТО перевіряються тягові якості автомобіля (рис. 6.2). Відомо що для конкретного автомобіля імовірність появи несправності дорівнює p=0,9. Контроль виконує один спеціаліст – діагност, який може виявити несправність транспортного засобу з імовірністю p=0,8. Якщо несправність не виявлена, то власнику автомобіля видається свідоцтво про відповідність технічного стану автомобіля технічним умовам. Крім того, при діагностуванні є можливість помилково визнати несправним працездатний транспортний засіб. Імовірність останньої події – α=0,01.

З метою аналізу ефективності процесу діагностування необхідно визначити імовірність таких подій:

- несправність автомобіля виявлено (подія А);
- автомобіль помилково визнано непрацездатним (подія В);
- клієнту помилково видано документ про відсутність несправності, але вона існує (подія С).

Розв'язання.

Спочатку визначається імовірність виявлення несправності

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{p} \cdot \mathrm{p_1} + (1 - \mathrm{p})\alpha = 0{,}9 \cdot 0{,}8 + (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}01 = 0{,}721.$$

Рисунок 6.2 – Діагностування тягових якостей автомобіля

Потім розраховується імовірність помилкового признання автомобіля непрацездатним

$$P(B) = (1 - p)\alpha = (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}01 = 0{,}001.$$

Останньою визначається імовірність визнання автомобіля справним, хоча транспортний засіб є непрацездатним

$$P(C) = p(1 - p_1) = 0{,}9(1 - 0{,}8) = 0{,}18.$$

Таким чином, імовірність помилкового визнання справного автомобіля непрацездатним незначна, що важливо для забезпечення безперервної роботи транспортного засобу. Однак, за таких умов (p=0,9 і $p_1 = 0{,}8$), імовірність визначення несправного автомобіля справним є значною. Така ситуація є неприйнятною та може викликати такі негативні наслідки: відмову транспортного засобу під час перевезення пасажирів або вантажів; використання автомобілів з низькою ефективністю тощо.

Перевірку гіпотез проводять за допомогою спеціально підібраних випадкових величин, закон розподілу яких відомий.

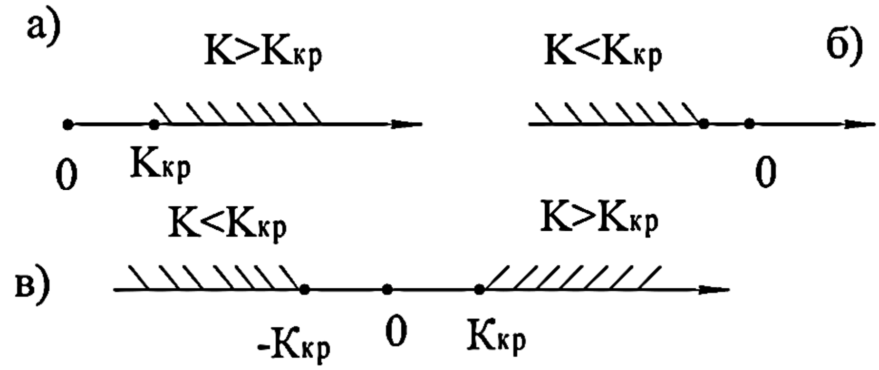
Статистичним критерієм називають випадкову величину яка, за результатами спостережень, дозволяє прийняти чи відкинути висунуту гіпотезу. Суть перевірки нульової гіпотези полягає в такому. Якщо розподіл критерію відомий, то можна обчислити його значення за умови правильності нульової гіпотези. Обчислені значення критерію зводяться у таблицю та називаються спостереженими. Порівнюючи спостережене і теоретичне значення критеріїв, можна зробити висновок про правильність нульової гіпотези.

6.2 Критична область. Потужність критерію

Безліч значень критерію можна розбити на дві непересічних безлічі. Сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають, називають *критичною областю. Область прийняття гіпотези* – сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають. Точку, що відокремлює критичну область від області прийняття гіпотези, називають *критичною* $К_{кр}$.

Процедура перевірки гіпотези полягає в такому. За даними вибірки обчислюють значення критерію $К_{спост}$. Якщо значення спостережуваного критерію належить критичній області, то гіпотезу відкидають.

Розглядають кілька видів критичної області. *Правосторонньою* називають область, обумовлену нерівністю $К > К_{кр}$ за виконання умови $К_{кр} > 0$ (рис. 6.3, а), *лівосторонньою* вважається область, обумовлена $К < К_{кр}$ за умови $К_{кр} < 0$ (рис. 6.3, б); *двосторонньою* – коли $|К| > К_{кр}$ (рис. 6.3, в).



а – правостороння; б – лівостороння; в – двостороння

Рисунок 6.3 – Види критичних зон

Для визначення критичної області задають рівень значущості та за даними вибірки знаходять значення критерію.

Якщо обчислене значення критерію потрапляє в критичну область, то буде зроблена помилка першого роду й допускають правильною нульову гіпотезу. Імовірність зробити таку помилку є дуже малою. Тому, для визначення критичних точок, одержуємо такі співвідношення:

а) для правосторонньої критичної області $\mathrm{P}\left(\mathrm{K} > \mathrm{K}_{\text{кр}}\right) = \alpha$;

б) для лівосторонньої критичної області $\mathrm{P}\left(\mathrm{K} < \mathrm{K}_{\text{кр}}\right) = \alpha$;

в) для двосторонньої критичної області $\mathrm{P}\left(|\mathrm{K}| > \mathrm{K}_{\text{кр}}\right) = \alpha$.

Імовірність потрапляння критерію в критичну область за умови, що конкуруюча гіпотеза правильна, називають *потужністю критерію.*

6.3 Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей

На практиці задача порівняння дисперсій виникає, якщо потрібно порівняти точності приладів, інструментів, методів вимірювання тощо. Вибирають такий прилад, інструмент або метод, який забезпечує найменше розсіювання результатів, тобто найменшу дисперсію.

Припустимо, що дано дві генеральні сукупності X і Y з нормальним розподілом. З кожної сукупності витягнемо вибірки обсягом n_1 і n_2. За ними обчислимо виправлені дисперсії $\mathrm{S}^2(\mathrm{X})$ і $\mathrm{S}^2(\mathrm{Y})$, що є незміщеними оцінками генеральної дисперсії, тобто

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}) = \mathrm{M}[S^2(\mathrm{X})] \text{ і} \mathrm{D}(\mathrm{Y}) = \mathrm{M}[S^2(\mathrm{Y})].$$

Тоді гіпотезу $\mathrm{H}_0\colon \mathrm{D}(\mathrm{X}) = \mathrm{D}(\mathrm{Y})$можна замінити такою

$$\mathrm{M}[S^2(X)] = M[S^2(Y)].$$

Як критерій візьмемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{S}_{\text{б}}^2}{\mathrm{S}_{\text{м}}^2}$.

Величина критерію F має розподіл Фішера – Снедекора зі ступенями вільності

$$\mathrm{f}_1 = \mathrm{n}_1 - 1,$$

де n_1 – обсяг вибірки, за якою обчислена велика виправлена дисперсія;

n_2 – обсяг вибірки, за якою обчислена менша виправлена дисперсія.

Критична зона будується залежно від конкуруючої гіпотези. Можливі такі випадки:

$$1.\ \mathrm{H}_0\colon \mathrm{D}(\mathrm{X}) = \mathrm{D}(\mathrm{Y}), \mathrm{H}_1\colon \mathrm{D}(\mathrm{X}) > D(\mathrm{Y}).$$

У цьому випадку будують правосторонню критичну зону, виходячи з вимоги, щоб імовірність потрапляння критерію в цю область за умови справедливості нульової гіпотези, дорівнювала рівню значущості

$$P[F < F_{кр}(\alpha; f_1; f_2)] = \alpha.$$

Критичну точку $F_{кр}(\alpha; f_1; f_2)$ знаходять за такими даними: таблиці «Критичні точки розподілу F Фішера – Снедекора»; рівнем значущості α; числом ступенів вільності для чисельника і знаменника. Якщо $F < F_{кр}$ тобто F потрапляє в область прийняття гіпотези, то немає основ відкидати нульову гіпотезу.

$$2.\ H_0: D(X) = D(Y), H_1: D(X) \neq D(Y).$$

У цьому випадку будують двосторонню критичну область. Критичне значення критерію знаходять в таблиці за рівнем значущості $^{\alpha}/_{2}$ та числом ступенів вільності для чисельника f_1й знаменника f_2.

Якщо $F_{спос} < F_{кр}(\frac{\alpha}{2};\ f_1;\ f_2)$, немає підстав відкидати нульову гіпотезу.

Якщо $F_{спос} > F_{кр}(\frac{\alpha}{2};\ f_1;\ f_2)$, нульову гіпотезу відкидаємо.

Задача. Для виявлення раціонального способу планування технічного обслуговування вивчено фактичний розподіл його періодичності. Отримано дві незалежні, витягнуті з нормальних генеральних сукупностей X і Y, вибірки з обсягами $n_1 = 10$ та $n_2 = 15$ автомобілів. Визначено виправлені вибіркові дисперсії часу обслуговування для кожного з двох способів $S^2(X) = 0{,}73$ і $S^2(Y) = 0{,}45$. При рівні значущості α=0,05 необхідно перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі $H_1: D(X) > D(Y)$.

Розв'язання. Порівняння двох генеральних дисперсій за їх оцінками, які побудовано за вибірковими даними, витягнутими з нормальних сукупностей X і Y, виконують на підставі критерію Фішера. Для цього обчислюють експериментальне значення критерію Фішера, як відношення більшої виправленої дисперсії до меншої

$$F_{спос} = \frac{0{,}73}{0{,}45} = 1{,}62.$$

Отримане значення критерію порівнюють з табличним. Щоб знайти значення $F_{кр}$ за таблицею, потрібно знати вид критичної області. За умовою задачі $H_0: D(X) = D(Y)$, при конкуруючій гіпотезі $H_1: D(X) > D(Y)$. У цьому випадку критична область – правостороння. За таблицею критерію Фішера за рівнем значущості α=0,05 і числами ступенів вільності $f_1 = 10 - 1 = 9$, $f_2 = 15 - 1 = 14$ знаходимо критичну точку

$$F_{кр}(\alpha = 0{,}05; f_1 = 9; f_2 = 14) = 2{,}65.$$

Коли спостережене значення критерію потрапило в область прийняття гіпотези ($F_{спос} < F_{кр}$), то немає основ відкидати гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Іншими словами, вибіркові виправлені дисперсії мало відрізняються, тобто вони рівноцінні.

Задача. Для двох марок автомобілів проводиться вивчення величини люфту в зачепленні шестерень головної передачі. З двох нормальних генеральних сукупностей витягнуто незалежні вибірки: виміряно люфти в 15-ти автомобілях однієї марки та 10-ти автомобілях іншої марки.

За даними вибірки обчислено виправлені вибіркові дисперсії люфту $S^2(X) = 0{,}92$ і $S^2(Y) = 2{,}97$. Виконати перевірку нульової гіпотези про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі $H_1: D(X) \neq D(Y)$ та рівні значущості α=0,1.

Розв'язання. Припустимо, що маємо генеральні сукупності X і Y. З них витягнуто вибірки обсягами $n_1 = 15$ й $n_2 = 10$ та обчислено $S^2(X) = 0{,}92$ й $S^2(Y) = 2{,}97$. Перевірити $H_0: D(X) = D(Y)$ при $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Перевірку проводимо за критерієм Фішера. Знаходимо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої

$$F_{спос} = \frac{2{,}97}{0{,}92} = 3{,}23.$$

Якщо $H_1: D(X) \neq D(Y)$, то критична область – двостороння. Тому, при відшукуванні критичної точки рівень значущості потрібно брати в два рази меншим заданого.

За таблицею критерію Фішера за рівнем значущості α/2=0,05 і числами ступенів вільності $f_1 = 9$ і $f_2 = 14$ знаходимо критичну точку

$$F_{кр}(\alpha/2 = 0{,}05; f_1 = 9; f_2 = 14) = 2{,}65.$$

Коли $F_{спос} > F_{кр}$, тобто $F_{спос}$ потрапляє в критичну область, то відкидаємо нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Це значить, що виправлені вибіркові дисперсії суттєво відрізняються

6.4 Порівняння декількох дисперсій нормальних генеральних сукупностей за вибірками однакового обсягу

Питання порівняння декількох дисперсій виникає при вирішенні задач про рівноточність декількох вимірів, приладів тощо. Наприклад, проводиться m вимірів гальмівної сили на стенді. Кожен вимір повторюється n разів. Якщо дисперсії кожного з m вимірів суттєво відрізняються, то виміри не є рівноточними, їх усереднювати не можна.

Припустимо, що маємо m генеральних сукупностей X_1, X_2, …, X_m, які розподілені нормально. З кожної сукупності витягнуто вибірки однакового обсягу n і за ними обчислено виправлені дисперсії S_1^2, S_2^2, …,S_m^2 , кожна з $f = n - 1$ ступенем вільності.

Потрібно перевірити гіпотезу про рівність генеральних дисперсій вихідних сукупностей при заданому рівні значущості α та за обчисленими виправленими дисперсіями.

$$H_0: D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_m).$$

Висунута гіпотеза вирішує питання про значущість розбіжностей обчислених виправлених дисперсій. Для її перевірки використовують критерій Фішера чи критерій Кохрена.

1. За критерієм Фішера обчислюють відношення найбільшої виправленої дисперсії до найменшої

$$F = \frac{S_{max}^2}{S_{min}^2}.$$

Найбільша потужність критерію досягається при побудові правосторонньої критичної області. Критичне значення критерію знаходять в таблиці за рівнем значущості α й числом ступенів вільності $f = n - 1$. Якщо $F_{спос} < F_{кр}$, то немає причин відкидати нульову гіпотезу. Якщо розходження між найбільшою і найменшою дисперсіями незначні, то інші дисперсії також не значно відрізняються.

Недоліком цього критерію є те, що не враховується інформація про всі дисперсії, окрім найбільшої і найменшої.

2. Критерій Кохрена обчислюється як відношення найбільшої дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{S_{max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_m^2}.$$

Будують правобічну критичну область. Вона знаходиться за таблицею залежно від рівня значущості α, числа ступенів вільності $f = n - 1$ й числа сукупностей m.

Якщо $G_{спос} < G_{кр}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу.

Якщо $G_{спос} > G_{кр}$, то нульову гіпотезу відкидають.

Задача. Проводиться вивчення нерівномірності зносу протектора шини по колу. Досліджується шість шин з однаковими характеристиками, але різних заводів виробників. Для кожної шини виконується 37 вимірювань глибини канавок протектора в різних місцях по колу покришки. Отже, отримано незалежні вибірки n=37, витягнуті з нормальних генеральних сукупностей. Визначено виправлені вибіркові дисперсії: 2,54; 2,61; 2,89; 3,75; 4,31; 4,10. Потрібно порівняти нерівномірність зносу шин різних заводів при рівнях значущості 0,1 і 0,05, а також оцінити генеральну дисперсію. Береться нульова гіпотеза про однорідність дисперсій.

Розв'язання. Гіпотезою про однорідність дисперсій називають гіпотезу про рівність декількох дисперсій. Отже, треба перевірити

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_6).$$

В задачі розглядають вибірки однакового обсягу. Тому для її розв'язання можна використовувати критерії Кохрена чи Фішера.

Проведемо перевірку за критерієм Кохрена. Знаходимо експериментальне значення критерію Кохрена – відношення виправленої дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G_{\text{спос}} = \frac{4{,}31}{2{,}54 + 2{,}61 + 2{,}89 + 3{,}75 + 4{,}31 + 4{,}10} = 0{,}2134.$$

За таблицею визначаємо критичні точки розподілу Кохрена. Число ступенів вільності f=37-1=36, число вибірок m=6 та рівень значущості в задачах беремо різними. При рівні значущості 0,01 $G_{\text{кр}}(\alpha = 0{,}01; f=36; m=6)=0{,}2858$. Тому що $G_{\text{спос}} < G_{\text{кр}}$ немає сенсу відкидати нульову гіпотезу. При рівні значущості 0,05 $G_{\text{кр}}$ (0,05; 36; 6)=2,612. Оскільки $G_{\text{спос}} < G_{\text{кр}}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу.

З розв'язку випливає, що дисперсії однорідні. У цьому випадку як оцінки генеральної дисперсії беруть середнє арифметичне виправлених дисперсій

$$D_{\text{г}} = \frac{2{,}54 + 2{,}61 + 2{,}89 + 3{,}75 + 4{,}31 + 4{,}10}{6} = 3{,}21.$$

Перевірка нульової гіпотези за критерієм Фішера дає такі ж результати.

Обчислимо значення критерію

$$F_{\text{спос}} = \frac{4{,}31}{2{,}34} = 1{,}697.$$

Знаходимо критичні значення критерію Фішера при числі ступенів вільності $f_1=f_2=36$ і рівні значущості $\alpha = 0{,}01$, а потім при $\alpha = 0{,}05$

$$F_{\text{кр}}(0{,}01; 36) = 2{,}20, F_{\text{кр}}(0{,}05; 36) = 1{,}74.$$

В обох випадках $F_{спос} < F_{кр}$, виходить, що немає підстав відкидати нульову гіпотезу, тобто нерівномірність зносу шин однакова.

Питання до самоперевірки

1. Розкрийте поняття статистичної гіпотези і статистичного критерію.
2. Охарактеризуйте поняття критичної області та потужності критерію.
3. Як використати порівняння двох дисперсій?
4. Як використати порівняння декількох дисперсій по вибірках однакового обсягу?

7 ДОСЛІДЖЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ. ПОБУДОВА ЛІНІЙ РЕГРЕСІЇ

Якщо не вдається вирівняти дані випробувань одним з імовірнісних законів, то постає задача про побудову аналітичної залежності між факторами.

Наявність залежності між факторами виявляється за допомогою кореляційного аналізу емпіричних даних. Вид конкретних залежностей між змінними знаходиться за допомогою регресійного аналізу, що вирішує проблему вибору рівняння за відповідними точками випробувань. Це найбільш точно відображає природу досліджуваного об'єкта.

Звичайно експериментальні точки дають деякий розкид, тобто випадкові відхилення від загальної закономірності. Для будь-якого випробування такі відхилення пов'язані з неминучими помилками вимірів. Розкид експериментальних точок називають кореляційним полем (рисунок 7.1).

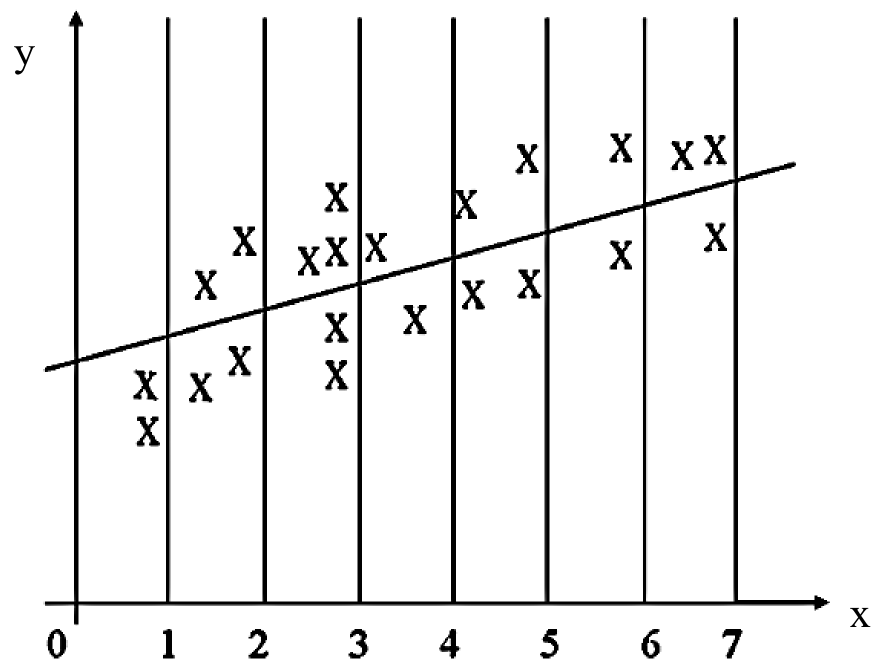


Рисунок 7.1 – Розкид експериментальних точок позитивної кореляційної залежності між результативною ознакою y і факторіальною ознакою x

У кореляційному полі одному значенню факторіальної ознаки x відповідає кілька значень результативної ознаки y, тому будується залежність

$$\bar{y}=f(x), \qquad (7.1)$$

де $\overline{y}$ – умовне середнє (середнє арифметичне результативної ознаки y), що відповідає одному значенню x.

Рівняння (7.1) називають рівнянням регресії.

Форма зв'язку між змінними може виражатися будь-якою аналітичною функцією. Найбільш простою з них є лінійна залежність.

Наявність лінійної залежності між x і y можна виявити за допомогою коефіцієнта кореляції, який обумовлений рівнянням

$$r_b = \frac{\sum n_{xy} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma(x)\cdot\sigma(y)}\ , \tag{7.2}$$

де x_i, y_i – значення ознак, що спостерігалися;

n_{xy} – частота пари значень $(x_i; y_i)$;

n_{xy} – сума всіх частот;

$\sigma(x), \sigma(y)$ – середні квадратичні відхилення, що обчислюються за формулою (4.7);

$\overline{x}, \overline{y}$ – вибіркові середні, що обчислюються за формулою (4.1).

Чим ближче r_b до одиниці, тим тісніший лінійний зв'язок між змінними величинами. Якщо значення $r_в$ близьке до нуля, то це може свідчити тільки про відсутність лінійної залежності, а не залежності взагалі.

Величина коефіцієнта залежить від обсягу вибірки. Величини, що досліджуються, можуть бути залежні в одному випадку і незалежні в іншому. Для статистичної перевірки значущості коефіцієнта кореляції можна скористатися розрахованою Відділом статистики Інституту прикладної математики і механіки м. Йена «Таблицею найбільших випадкових значень коефіцієнта кореляції», що наведена в додатку Б. При заданому рівні значущості α і числі ступенів вільності $f = k - 2$ за таблицею визначається найбільше значення емпіричного коефіцієнта кореляції, при якому величини, що досліджуються, незалежні. Якщо розрахункове значення r_b більше визначеного за таблицею – x і y пов'язані лінійною залежністю.

Установивши наявність лінійного зв'язку, можна записати вид рівняння прямої регресії

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_b \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)}(x - \overline{x}). \tag{7.3}$$

У рівнянні (7.3) кожному значенню аргументу відповідає середнє значення функції.

В окремих випадках нелінійні залежності можна звести до лінійних шляхом заміни змінних. У таблиці 7.1 наведено деякі види залежностей і заміни змінних, що приводять їх до лінійного виду.

Вид нелінійної залежності можна підібрати за видом кореляційного поля. Але не завжди вид залежності легко визначається. Зручно вид емпіричної залежності визначити за найпростішими необхідними умовами. З даних випробування беремо три точки: (x_1, y_1) на початку, (x_s, y_s) у середині та (x_2, y_2) наприкінці кореляційного поля. Розглянемо рівняння прямої y=kx+b. Якщо взяти $\overline{x}_s=\frac{x_1+x_2}{2}$, то функція буде мати такий вигляд:

$$\overline{y}_s=k\frac{x_1+x_2}{2}+b=\frac{kx_1+kx_2+2b}{2}=\frac{(kx_1+b)+(kx_2+b)}{2}=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Таким чином, для будь-яких двох точок прямої справедливе співвідношення: середньому арифметичному значенню аргументу відповідає середнє арифметичне значення функції.

З вибірки беремо значення y_s відповідне $\overline{x}_s$ і розглянемо $|\ y_s - \overline{y}_s|$.

Якщо для якого-небудь виду залежності це відхилення незначне, то дані випробувань можна апроксимувати певною аналітичною функцією. Аналогічні залежності можна скласти для різного виду функцій (табл. 7.2).

Часто кореляційне поле є криволінійним і його можна описати кривою другого порядку, наприклад, параболою

$$\overline{y}_x = ax^2+bx+c. \tag{7.4}$$

За даними випробувань потрібно обчислити оцінки коефіцієнтів a, b, c.

Зробити це можна за допомогою методу найменших квадратів. Його суть полягає в такому: коефіцієнти залежності (7.4) обчислюються з умови, що сума квадратів відхилень значень випробувань від розрахункових набуде найменшого значення.

Позначимо y_i – значення залежностей змінної з таких випробувань, $\overline{y_x}$– розрахункове значення тієї самої змінної. Запишемо суму квадратів відхилень

$$T = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y_{x_i}}\right)^2 \tag{7.5}$$

Замість $\overline{y_x}$ підставимо його значення з формули (7.4)

$$T = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - ax_i^2 - bx_i \ - c\right)^2.$$

Таблиця 7.1 – Заміна змінних, що зводить нелінійні залежності до лінійних

Вихідна формула	Перетворена формула	Формули заміни перемінних	Остаточна формула	Примітки
$y=ax^m$	$\lg y=m\lg x+\lg a$	$\lg y=Y$ $\lg x=X$ $\lg a=A$	$Y=mX+A$	Якщо $m>0$, то крива має вид параболи і проходить через точки (0;0) і (1;0). Якщо $m<0$, то крива є гіперболою, її асимптоти – координатні осі, що проходять через точку (1; 0).
$y=ab^x$	$\lg y=x\lg b+\lg a$	$Y=\lg y$ $\lg b=B$ $\lg a=A$	$Y=Bx+A$	Крива проходить через точку (0; a)
$y=ae^{mx}$	$\lg y=\lg a+mx$	$\lg y=Y$ $\lg a=A$	$Y=mx+A$	
$y=\frac{a}{x}+b$		$\frac{1}{x}\neq X$	$Y=ax+b$	Асимптоти кривої: $x=0$, $y=b$
$y=\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{y}=ax+b$	$\frac{1}{y}=Y$	$Y=ax+b$	Асимптоти кривої: $x=-\frac{b}{a}, y=0$
$y=\frac{x}{ax+b}$	$\frac{1}{y}=\frac{b}{x}+a$	$\frac{1}{y}=Y$ $\frac{1}{x}=X$	$Y=bX+a$	Асимптоти кривої: $x=-\frac{b}{a}, y=\frac{1}{a}$
$y=a\lg x+b$		$\lg x=X$	$Y=aX+b$	Крива проходить через точку (1; b)

Одержимо функцію змінних a, b, c. Необхідною умовою досягнення функцією T (a, b, c) мінімуму є рівність нульових часткових похідних

$$\frac{\partial T}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial b} = 0; \qquad \frac{cT}{c} = 0.$$

Таблиця 7.2 – Найпростіші необхідні умови вибору емпіричних залежностей

Ч.ч.	Вид емпіричної формули	$\overline{x_S}$	$\overline{y_S}$
1	$y = ax + b$	$\frac{x_1 + x_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$\frac{y_1 + y_n}{2}$ (середнє арифметичне)
2	$y = ax^b$	$\sqrt{x_1 x_n}$ (середнє геометричне)	$\sqrt{y_1 y_n}$ (середнє геометричне)
3	$y = ab^x$	$\frac{x_1 + x_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$\sqrt{y_1 y_n}$ (середнє геометричне)
4	$y = a + \frac{b}{x}$	$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$ (середнє гармонійне)	$\frac{y_1 + y_n}{2}$ (середнє арифметичне)
5	$y = \frac{x}{ax + b}$	$\frac{x_1 + x_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$ (середнє гармонічне)
6	$y = \frac{x}{ax + b}$	$\frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$ (середнє гармонічне)	$\frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$ (середнє гармонічне)
7	$y = a\lg x + b$	$\sqrt{x_1 x_n}$ (середнє геометричне)	$\frac{y_1 + y_n}{2}$ (середнє арифметичне)

Обчислюємо похідні й одержуємо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum y_i x_i^2; \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i \;\; = \sum y_i x_i; \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + c\cdot n = \sum y_i. \end{cases} \qquad (7.6)$$

Суми змінних x і y визначаємо з даних випробувань. Систему (7.6) розв'язуємо матричним методом та методом Гаусса відносно невідомих параметрів a, b, c.

Оцінку тісноти нелінійного кореляційного зв'язку визначають за допомогою кореляційного відношення

$$\eta_{\text{відх}} = \frac{\sigma_{\text{міжгр}}}{\sigma_{\text{заг}}}, \qquad (7.7)$$

де $\sigma_{\text{міжгр}}$ *і* $\sigma_{\text{заг}}$ – відповідно міжгрупове і загальне середні квадратичні відхилення.

Міжгруповою дисперсією $D_{\text{міжгр}} = \sigma^2_{\text{міжгр}}$ називають дисперсію групових середніх відносно загальної середньої

$$D_{\text{міжгр}} = \sigma^2_{\text{міжгр}} = \frac{\sum\left(\overline{y_{x_i}} - \overline{y}\right)^2 n_{x_i}}{N},$$

де $\overline{y_{x_i}}$ – середнє значення змінної y, відповідне одному значенню x_i;

$\overline{y}$ – середнє значення усіх вимірів;

n_{x_i} – частота значення x_i;

N – сума всіх частот.

Загальною дисперсією $D_{\text{заг}} = \sigma^2_{\text{заг}}$ називають дисперсію значень ознаки всієї сукупності відносно загальної середньої

$$D_{\text{заг}} = \sigma^2_{\text{заг}} = \frac{\sum(y_i - y)^2 n_{y_i}}{N},$$

де y_i – значення виміру;

n_{y_i} – частота значення y_i.

Підставляючи значення $\sigma_{\text{міжгр}}$ й $\sigma_{\text{заг}}$ у формулу (7.7), одержуємо

$$\eta_{\text{відх}} = \frac{\sum(\overline{y_{x_i}} - y)^2 n_{x_i}}{\sum(\overline{y_i} - y)^2 n_{y_i}}.$$

У загальному випадку $|\eta_{\text{відх}}| \leq 1$, причому чим ближче кореляційне відношення до одиниці, тим тісніший зв'язок між змінними. Якщо $\eta_{\text{відх}} = 0$, то x та y не пов'язані кореляційною залежністю. Кореляційне відношення слугує мірою тісноти зв'язку будь-якої форми, у тому числі й лінійної.

Основні види графіків емпіричних залежностей наведено в додатку В.

Задача. З метою вирішення проблеми підвищення надійності автомобілів проводиться дослідження залежності коефіцієнта технічної готовності (КТГ) в АТП від числа випадків ремонту. Статистичними спостереженнями було зафіксовано 96 результатів, зведених у табл. 7.3.

Таблиця 7.3 – Статистичні дані спостережень

Ч.ч.	Число випадків ремонту, од./ 1000 км	КТГ	Ч.ч.	Число випадків ремонту, од./ 1000 км	КТГ	Ч.ч.	Число випадків ремонту, од./ 1000 км	КТГ
1	0,01	0,972	33	0,91	0,853	65	0,80	0,913
2	1,07	0,892	34	0,54	0,840	66	1,48	0,848
3	0,83	0,828	35	0,80	0,874	67	0,73	0,881
4	1,44	0,783	36	1,62	0,796	68	1,63	0,817
5	1,33	0,780	37	1,60	0,853	69	1,68	0,852
6	1,11	0,799	38	1,14	0,855	70	1,68	0,854
7	0,47	0,947	39	0,70	0,875	71	0,45	0,918
8	1,21	0,860	40	1,10	0,817	72	0,20	0,892
9	0,25	0,870	41	0,15	0,959	73	1,13	0,840
10	1,00	0,912	42	0,17	0,940	74	1,13	0,846
11	0,40	0,898	43	0,70	0,837	75	0,70	0,935
12	0,42	0,898	44	1,44	0,794	76	0,73	0,935
13	0,95	0,817	45	0,71	0,854	77	1,00	0,875
14	1,23	0,832	46	0,60	0,895	78	0,60	0,863
15	1,21	0,860	47	0,59	0,851	79	0,31	0,899

Продовження таблиці 7.3

Ч.ч.	Число випадків ремонту, од./ 1000км	КТГ	Ч.ч.	Число випадків ремонту, од./ 1000км	КТГ	Ч.ч.	Число випадків ремонту, од./ 1000км	КТГ
16	0,55	0,913	48	1,13	0,836	80	0,34	0,899
17	0,57	0,913	49	0,36	0,912	81	0,28	0,945
18	0,46	0,828	50	0,69	0,910	82	0,47	0,912
19	0,90	0,861	51	0,93	0,906	83	0,18	0,934
20	1,18	0,817	52	1,25	0,812	84	0,30	0,933
21	0,94	0,877	53	0,53	6,875	85	0,30	0,927
22	0,09	0,946	54	0,56	0,875	86	0,98	0,887
23	0,90	0,887	55	0,29	0,949	87	1,30	0,811
24	0,80	0,886	56	0,55	0,853	88	0,73	0,907
25	0,40	0,945	57	0,73	0,898	89	0,96	0,885
26	0,30	0,921	58	0,66	0,857	90	0,82	0,900
27	0,42	0,886	59	0,70	0,907	91	0,57	0,907
28	0,88	0,913	60	0,58	0,871	92	0,65	0,878
29	0,57	0,924	61	0,20	0,940	93	0,60	0,912
30	1,33	0,809	62	0,23	0,940	94	0,60	0,912
31	0,62	0,933	63	0,23	0,906	95	0,37	0,943
32	0,51	0,881	64	0,40	0,852	96	0,31	0,908

Потрібно визначити тісноту зв'язку між зазначеними параметрами та скласти рівняння регресії, яке описує залежність КТГ від числа випадків ремонту.

Розв'язання. Дані 96 спостережень зводимо в кореляційну таблицю. Інтервал зміни КТГ установлюємо від його найменшого значення 0,770 до найбільшого 0,980. Далі розбиваємо його на шість інтервалів. Аналогічно встановлюємо інтервал зміни числа випадків ремонту, що припадають на 1000 км пробігу (від 0,00 до 1,80) і поділяємо його на шість рівних інтервалів. Визначаємо частоту спільного потрапляння змінних в інтервали. Як результат одержуємо кореляційну таблицю 7.4 у якій позначено через x число випадків ремонту, що припадають на 1000 км пробігу; а через y – величину КТГ.

Таблиця 7.4 – Кореляційна таблиця

y \ x	0,0–0,3	0,3–0,6	0,6–0,9	0,9–1,20	1,20–1,50	1,50–1,80
1	2	3	4	5	6	7
0,770 0,805	4	1	—	—	—	—
0,805 0,840	9	11	6	1	—	—
0,840 0,875	2	7	9	6	—	—
0,875 0,910	1	5	7	5	3	3
0,910 0,945	—	—	2	4	4	1
0,945 0,980	—	—	—	1	3	1

Тісноту лінійного зв'язку між змінними встановлюємо за допомогою вибіркового коефіцієнта кореляції (7.2). Для проведення всіх обчислень знаходимо середини інтервалів зміни змінних. Обчислення зводимо до табл. 7.5.

$$\bar{x} = \frac{1}{96} \cdot (0{,}15 \cdot 16 + 0{,}45 \cdot 24 + 0{,}75 \cdot 24 + 1{,}05 \cdot 17 + 1{,}35 \cdot 10 + 1{,}65 \cdot 5)$$
$$== 0{,}7375;$$

$$\bar{y} = {}^{1}/_{96} \cdot \left(\begin{matrix} 0{,}7875 \cdot 5 + 0{,}8205 \cdot 27 + 0{,}8575 \cdot 24 + 0{,}8925 \cdot 24 + \\ +0{,}9275 \cdot 11 + 0{,}9625 \cdot 5 \end{matrix}\right) =$$

$$08663;$$

$$\bar{y}^2 = {}^{1}/_{96} \cdot (0{,}7875^2 \cdot 5 + 0{,}8525^2 \cdot 27 + \ \dots) = 0{,}75234;$$

$$\bar{x}^2 = {}^{1}/_{96} \cdot (0{,}15^2 \cdot 16 + 0{,}45^2 \cdot 24 + \ \dots) = 0{,}7219;$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}7523 - (0{,}7575)^2} = 0{,}4219\ ;$$

$$\sigma_y = \sqrt{0{,}7523 - (0{,}8663)^2} = 0{,}0427.$$

У кореляційній таблиці 7.4 у лівому верхньому куті кожної клітини пишемо добуток факторів, на перетині яких вона знаходиться. Отримане число множимо на частоту, що знаходиться в клітині. Для контролю підсумовуємо добутки по стовпцях і рядках. У результаті обчислення одержуємо

$$\sum n_{xy}xy = 62{,}5898;$$

$$r_b = \frac{62{,}5897 - 96 \cdot 0{,}7375 \cdot 0{,}8662}{96 \cdot 0{,}4219 \cdot 0{,}0427}.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції досить великий. Це означає, що між розглянутими ознаками існує лінійний кореляційний зв'язок. Складаємо рівняння прямої лінії регресії.

$$\overline{y_x} - \overline{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x});$$

$$\overline{y_x} - 0{,}8662 = 0{,}7301 \cdot \frac{0{,}0427}{0{,}4219} \cdot (x - 0{,}7375);$$

$$\overline{y}_x = 0{,}0739x + 0{,}8117.$$

Для побудови лінії регресії потрібно задавати значення змінної й одержувати значення y_x.

$$x = 0{,}15; \qquad \overline{y_x}=0{,}823;$$

$$x = 0{,}15; \qquad \overline{y_x}=0{,}934.$$

Побудуємо емпіричний графік. Знаходимо середнє значення змінної y, відповідне одному значенню змінної x.

$$x = 0{,}15;$$

$$y_{0,15} = \frac{0{,}7875 \cdot 4 + 0{,}8225 \cdot 9 + 0{,}8575 \cdot 2 + 0{,}8925 \cdot 1}{16} = 0{,}8225;$$

$$x = 0{,}45;$$

$$y_{0,45} = \frac{0{,}7875 \cdot 1 + 0{,}8225 \cdot 11 + 0{,}8575 \cdot 7 + 0{,}8925 \cdot 5}{24} = 0{,}8458;$$

Таблиця 7.5 – Розрахункова таблиця до задачі

Середини інтервалів		0,15	0,45	0,75	1,05	1,35	1,65	n_y У	п $_y$ у	п $_y$ у ^{2}	n_{xy}ху
	у х	0,0-0,3	0,3-0,6	0,6-0,9	0,9-1,2	1,2-1,5	1,5-1,8				
0,7875	0,770 - 0,805	4	1					5	0,9375	3,1001	0,8268
0,8225	0,805 - 0,840	9	11	6	1			27	2,2075	8,2657	9,7467
0,8575	0,840 - 0,875	2	7	9	6			24	0,5800	7,6474	14,1481
0,8925	0,875-0,910	1	5	7	5	3	3	24	4,4200	9,1174	19,5457
0,9275	0,910-0,945			2	4	4	1	11	0,2025	9,46280	11,8256
0,9625	0,945 - 0,980				1	3	1		8,1250	4,63200	6,49690
п $_x$		16,000	24,000	24,0000	17,0000	10,0000	5,0000	96,0000	83,1600	72,2254	62,5898
n_x x		2,4000	10,800	18,0000	17,8500	13,5000	8,2500	0,8000			
п $_x$ x ^{2}		0,3600	4,8600	13,5000	18,7425	18,2250	13,6125	69,300			
n_{xy}ху		1,9741	9,1341	15,5663	15,8576	12,5213	7,5363	62,5898			

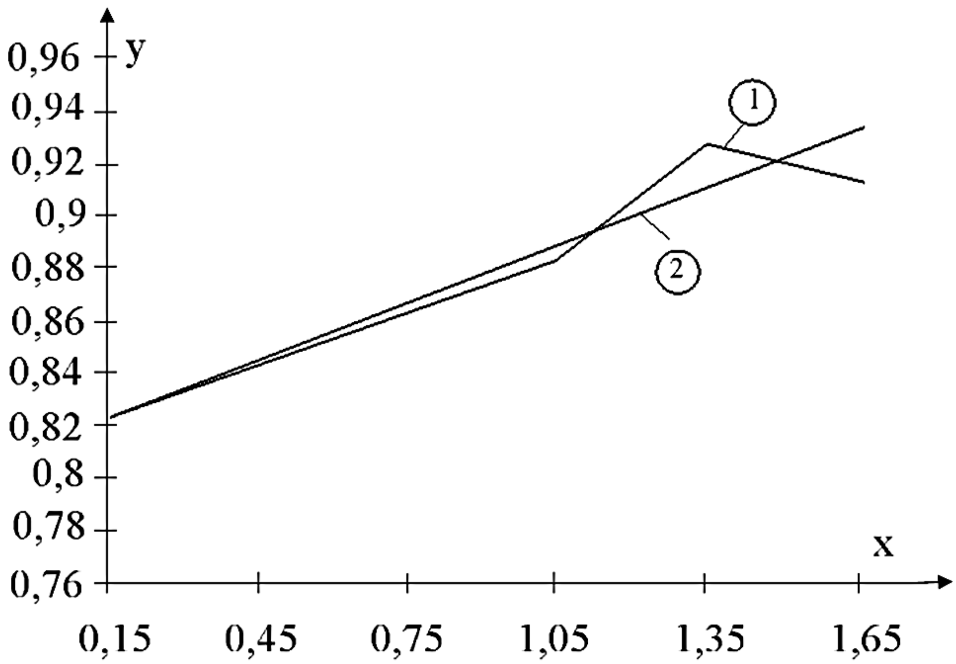
$$x = 0{,}75; \bar{y}_{0{,}75} = 0{,}8648;$$

$$x = 1{,}05; \bar{y}_{1{,}05} = 0{,}8830;$$

$$x = 1{,}35; \bar{y}_{1{,}35} = 0{,}9275;$$

$$x = 1{,}65; \bar{y}_{1{,}65} = 0{,}9135.$$

Обидва графіки наведено на рис. 7.3.



1 – за даними випробувань; 2 - теоретична лінія регресії, що вирівнює кореляційне поле за даними випробувань

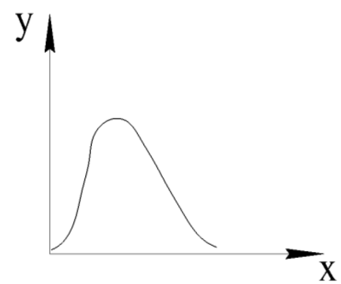
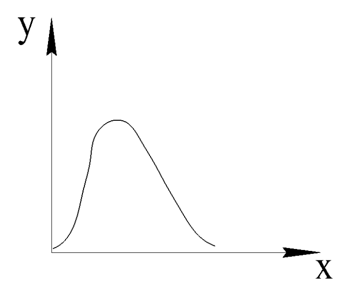
Рисунок 7.3 – Залежність КТГ (вісь ординат) від числа випадків ремонту (вісь абсцис)

Питання до самоперевірки

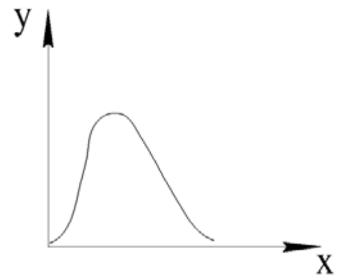
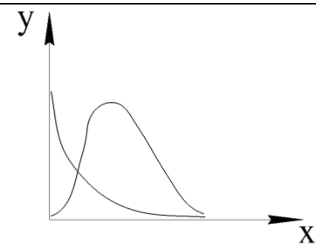
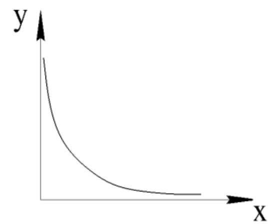
1. У яких випадках використовується регресійний аналіз?
2. Наведіть зовнішній вигляд кореляційної залежності.
3. Охарактеризуйте рівняння регресії та коефіцієнт кореляції
4. Які особливості криволінійного кореляційного поля?
5. Наведіть приклад задачі з визначенням тісноті зв’язку між зазначеними параметрами.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Узагальнення використання законів розподілу випадкових величин при рішенні задач автомобільної техніки

Закон розподілу	Середній і фактичний коефіцієнти варіації	Випадки використання закону	Середній коефіцієнт варіації за групою	Щільність імовірності
1	2	3	4	5
Нормаль-ний	0,25 (0,08 - 0,40)	Пробіги автомобілів до календарних термінів	0,10	 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{(x-x)^2}{2\sigma^2}\right]$
		Періодичність профілактичних робот	0,20	
		Трудомісткість операцій регулярної профілактики	0,26	
		Трудомісткість груп операцій профілактики	0,23	
		Інтенсивність зношування, ресурс	0,28	
		Періодичність груп перших відмов	0,38	
Вейбула	0,44 (0,36 - 0,63)	Періодичність груп перших відмов	0,43	 $\frac{m}{x_0}\cdot x^{m-1}exp\left[-\frac{x^m}{x_0}\right]$
		Інтенсивність зношування, ресурс	0,47	
		Трудомісткість операцій нерегулярної профілактики	0,47	

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5
Логарифмічно-нормальний	0,68 (0,35 - 0,80)	Трудомісткість операцій нерегулярної профілактики	0,44	 $\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{[(\ln x-\bar{x})^2]}{2\sigma^2}\right]$
		Розмір транспортних підприємств	0,49	
		Інтенсивність зношування, ресурс	0,53	
		Періодичність відмов кріпильних з’єднань	0,72	
Вейбулла	0,71 (0,42 - 0,85)	Трудомісткість і тривалість ремонту	0,70	 $x_0=\left(\frac{\sigma^m}{Cm}\right)$; $Cm=\sqrt{r\left(1+\frac{2}{m}\right)-\left[r\left(\frac{1}{m}+1\right)\right]^2}$
		Періодичність відмов кріпильних з’єднань	0,75	
Експонентний	0,92 (0,60- 1,30	Трудомісткість операцій ремонту і нерегулярної профілактики	0,81	 $\frac{1}{\bar{x}}\exp\left[-\frac{x}{\bar{x}}\right]$
		Трудомісткість і тривалість ремонту	0,90	
		Періодичність раптових відмов	0,95	
		Періодичність між відмовами (крім перших)	0,98	

Примітка. *m* – параметр розподілу закону Вейбулла, пов’язаний з коефіцієнтом варіації

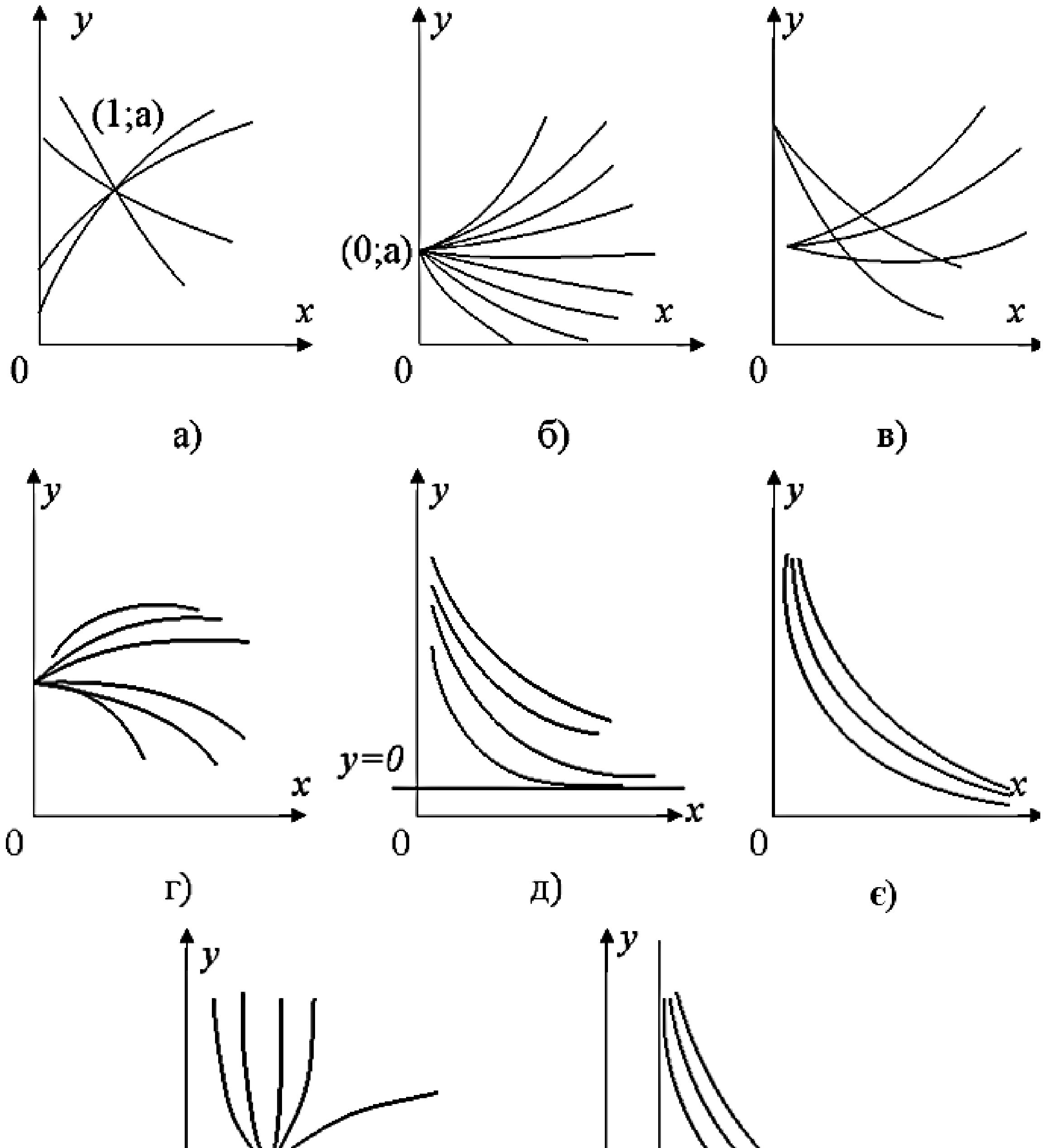
ДОДАТОК Б

Таблиця Б.1 – Найбільші випадкові значення коефіцієнта кореляції

Число ступенів вільності f	Рівень значущості α			
	0,05	0,01	0,0027	0,001
5	0,75	0,87	0,93	0,95
10	0,58	0,71	0,78	0,82
15	0,48	0,61	0,68	0,72
20	0,42	0,53	0,61	0,65
25	0,38	0,49	0,55	0,60
30	0,35	0,45	0,51	0,55
35	0,32	0,42	0,48	0,52
40	0,30	0,39	0,45	0,49
50	0,27	0,35	0,41	0,44
60	0,25	0,33	0,37	0,41
70	0,23	0,30	0,35	0,38
80	0,22	0,28	0,33	0,36
90	0,21	0,26	0,31	0,34
100	0,19	0,25	0,29	0,32
120	0,18	0,23	0,27	0,30
150	0,16	0,21	0,24	0,26
200	0,14	0,18	0,21	0,23
300	0,11	0,15	0,17	0,19
400	0,10	0,13	0,15	0,16
500	0,09	0,11	0,13	0,15
700	0,07	0,10	0,11	0,12
900	0,06	0,09	0,10	0,11
1000 і більше	0,06	0,09	0,10	0,11

ДОДАТОК В

Основні види графіків емпіричних залежностей



а) $y = ax^b$; **б)** $y = ac^{bx}$; **в)** $y = ax^b$+c;

г) $y = ae^{bx}$+c; **д)** $y = a + {}^{b}/_{x}$; **є)** $y = {}^{1}/_{a + bx}$

Навчальне видання

Макаров Володимир Андрійович
Біліченко Віктор Вікторович
Макарова Тамара Володимирівна

ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *Т. Макаровою*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку 13.02.2019.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 6,3.
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2019-028.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.