Д. А. Найко, В. О. Краєвський, А. А. Коломієць

Вища математика:
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Д. А. Найко, В. О. Краєвський, А. А. Коломієць

ВИЩА МАТЕМАТИКА: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 512.64(075.8)
Н20

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 14 від 25.06.2019 р.)

Рецензенти:
Джеджула О. М., доктор педагогічних наук, професор
Михалевич В. М., доктор технічних наук, професор
Шевчук О. Ф., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Найко, Д. А.
Н20 Вища математика: лінійна алгебра : навчальний посібник / Найко Д. А., Краєвський В. О., Коломієць А. А. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 111 с.

У навчальному посібнику містяться основні формули, теореми, означення теорії лінійної алгебри. Також є значна кількість покрокових алгоритмів, які стануть у пригоді студентам при розв'язанні практичних завдань. Підібрано достатню кількість завдань для розв’язання на практичних заняттях та для самостійної роботи студентів. Розглянуто розв’язання прикладів з кожної теми, надається 100 варіантів завдань для типових розрахунків та контрольних робіт.

Посібник розрахований для студентів технічних спеціальностей.

УДК 512.64(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Посібник містить теоретичний матеріал, де подані основні формули, теореми, означення, які підкріплюються великою кількістю прикладів. Також є значна кількість покрокових алгоритмів, які стануть у пригоді студентам при розв'язанні практичних завдань. У кінці кожної теми містяться завдання, необхідні для проведення практичних занять. Крім того, з кожної теми подано 100 варіантів завдань для контрольних робіт.

У посібнику вміщено значну кількість докладних розв'язань прикладів, що дає змогу використовувати його для самостійного вивчення лінійної алгебри, зокрема студентами заочної форми навчання.

У посібнику наведено приклади застосування математичного пакета Wolfram Alpha до розв'язання задач лінійної алгебри.

Посібник може бути рекомендований студентам першого курсу для більш ефективного засвоєння лекційних матеріалів.

1 ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. АЛГЕБРАЇЧНІ ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Довільна множина чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, що складається з m рядків і n стовпців, називається $m \times n$ – ***матрицею*** або ***матрицею розмірності*** $m \times n$.

Матриці записують так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{або} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

де a_{ij} – елементи матриці; i – номер рядка; j – номер стовпця.

Приклад 1.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -1 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Види матриць

Якщо $m = n$, то матриця називається ***квадратною***, а число n називають порядком матриці.

Матриця розмірності $m \times 1$ називається ***вектор-стовпцем***.

Матриця розмірності $1 \times n$ називається ***вектор-рядком***.

Матриця називається ***нульовою***, або ***нуль-матрицею***, якщо всі її елементи дорівнюють нулеві. Нульова матриця позначається символом 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо вона має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, усі діагональні елементи якої рівні між собою, називається ***скалярною***.

Скалярна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називається ***одиничною***. Позначається така матриця символом E.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Діагональ, яка з'єднує верхній лівий елемент квадратної матриці із нижнім правим називається ***головною діагоналлю*** матриці. Діагональ, яка з'єднує нижній лівий із верхнім правим, називається ***побічною діагоналлю*** матриці.

Символ Σ

У математиці часто доводиться знаходити суми великої кількості доданків, при чому всі доданки мають однаковий вигляд, відрізняються лише індексами. Для таких сум прийняте таке позначення: символ $\sum\limits_{k=1}^{n}$, після якого знаходиться деякий вираз, що містить індекс *k,* означає суму таких виразів для усіх значень індексу *k* від *1* до *n.* Наприклад,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Індекс k називається ***індексом підсумовування***. Звичайно, як індекс підсумовування може бути і будь-яка інша буква.

Зауваження 1. Множник, що не залежить від індексу підсумовування, може бути винесений за знак суми.

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha P_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} P_k .$$

Зауваження 2.

$$\sum_{k=1}^{n} P_k + Q_k = \sum_{k=1}^{n} P_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k .$$

Зауваження 3. Два знаки суми можуть бути переставлені.

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} P_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} P_{ki}$$

Дії над матрицями

Множення матриці на число. Щоб помножити матрицю на число або число на матрицю $(\alpha A = A\alpha)$, потрібно помножити кожний елемент матриці на це число.

Приклад 2.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 15 & 10 & -15 \end{pmatrix}.$$

У результаті множення матриці розмірністю $m \times n$ на число отримаємо матрицю розмірністю $m \times n$.

Додавання матриць. Сумою двох матриць однакової розмірності називається матриця аналогічної розмірності, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів (елементів, які стоять на однакових місцях) матриць, що додаються.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Приклад 3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 & 2+3 & 1-1 \\ -1+1 & 2+2 & -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Різницею двох матриць однакової розмірності називається матриця аналогічної розмірності, елементи якої дорівнюють різницям відповідних елементів матриць зменшуваного і від'ємника.

Приклад 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 0-7 \\ -2-3 & 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Транспонування матриці. Якщо рядки матриці A записати стовпцями, зберігаючи порядок, тобто перший рядок записати першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т.д., то отримана матриця називається транспонованою до матриці A і позначається A^T .

Перехід від матриці A до матриці A^T називається операцією транспонування.

Отже, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

тоді

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад 5.

Якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \\ 8 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *то* $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Приклад 6.Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. *Знайти* $A^T + 2B$.

$$A^T + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 21 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Множення матриці на матрицю.

Результатом добутку двох матриць є матриця.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $C = AB$ шукається за алгоритмом:

1. Перевіряємо чи можна перемножити відповідні матриці. Перший множник повинен мати стільки стовпців, скільки рядків у другого.

   Дві матриці називаються ***узгодженими,*** якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.
2. Визначаємо розмірність результуючої матриці. Кількість рядків матриці-добутку дорівнює кількості рядків першого множника, а кількість стовпців дорівнює кількості стовпців другого множника, тобто розмірність результуючої матриці визначається за формулою $(m \times n) \cdot (n \times r) = (m \times r)$.
3. Обчислюємо кожний елемент матриці-добутку за формулою

   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \ . \qquad (1)$$

   Тобто, якщо шукаємо елемент, який стоїть у i-тому рядку і j-тому стовпці необхідно почленно перемножити елементи i-того рядка першого множника і j-того стовпця другого множника і отримані добутки додати.

На рис.1 схематично показано як утворюється елемент матриці, яка є добутком двох матриць.

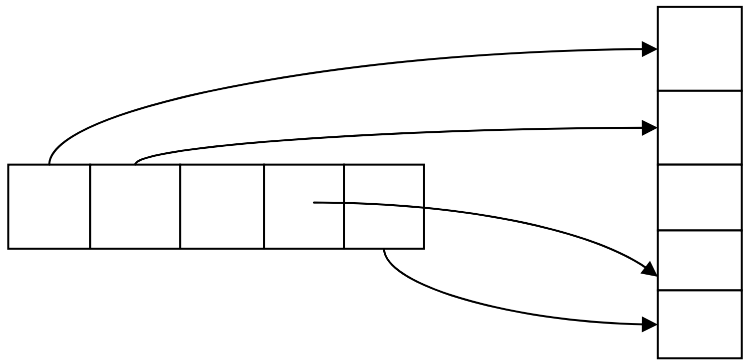


Рисунок 1 – Схематичне зображення множення матриць

Приклад 7.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-1)+1\cdot 4 & -2\cdot(-3)+1\cdot 1 \\ 0\cdot(-1)+3\cdot 4 & 0\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Властивості дій над матрицями

Із означень дій над матрицями випливає

1. $1\cdot A = A\cdot 1 = A$, $0\cdot A = A\cdot 0 = 0$;
2. $0\cdot\alpha = \alpha\cdot 0 = 0$;
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\cdot\beta)A = (A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$;
4. $A + B = B + A$;
5. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
6. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, $A(\alpha+\beta) = \alpha A + \beta A$;
7. $A + 0 = 0 + A$;
8. $\alpha(AB) = \alpha(AB)$;
9. $(A+B)C = AC + BC$, $C(A+B) = CA + CB$;
10. $A(BC) = (AB)C$.
11. Якщо A *– квадратна матриця, а* E *– одинична, то* $A\cdot E = E\cdot A = A$.
12. У загальному випадку *множення матриць не комутативне*: $A\cdot B \neq B\cdot A$. Якщо ж для A і B виконується рівність $AB = BA$, то матриці називаються *переставними* (*комутативними*). При чому A і B квадратні матриці однакової розмірності.

Поняття рівності матриць

Дві матриці рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову розмірність і їх відповідні елементи однакові.

Поняття рівності матриць застосовується при розв'язуванні матричних рівнянь.

Приклад 8. Нехай задано матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю X.

Маємо

$$2 \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді за означенням рівності матриць

$$2 \cdot x_{11} = -5, \; 2 \cdot x_{12} = -5,$$

$$2 \cdot x_{21} = 0, \;\; 2 \cdot x_{22} = -1.$$

Звідки $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Завдання для розв'язання

1\. Знайти суму $F = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 7 & -1 & -14 \end{pmatrix}$

2\. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 8 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти:

а) $A + B$, $A - B$,

б) $2A + B^T$,

в) $A \cdot B$.

3. Задані матриці A та B. Знайти: $A+B$, $2A^T$, $A-3B$, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Задані матриці A і B. Знайти AB та BA, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Задані матриці A, B та C. Знайти $A(BC)$, $(AB)C$ і показати, що $A(BC)=(AB)C$, якщо: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -2 & -30 \end{pmatrix}$.

2 ВИЗНАЧНИК МАТРИЦІ

Визначником (детермінантом) квадратної матриці називається число, яке ставиться у відповідність матриці і може бути обчислене за її елементами. Визначник (детермінант) матриці A ми будемо позначати $\det A$, або якщо необхідно записати елементи, то позначатимемо прямими лініями по боках цієї матриці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Нехай a_{ij} – довільний елемент квадратної матриці A. Якщо викреслити рядок і стовпець, у яких стоїть цей елемент, то дістанемо квадратну матрицю, на порядок меншу за початкову. Цій матриці відповідає визначник, який називається ***мінором*** елемента a_{ij}. Позначається мінор M_{ij}.

Означення. **Визначником (детермінантом)** матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

порядку $n > 1$ називається число

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} \left(-1\right)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \tag{2}$$

де M_{1k} – мінор елемента a_{1k}. Матриця першого порядку складається з одного числа і її детермінант дорівнює цьому числу.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається добуток мінору елемента a_{ij} на $\left(-1\right)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{3}$$

Тоді згідно з означенням детермінанта

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} \ . \tag{4}$$

Властивості визначників

1. Визначник не зміниться від заміни рядків стовпцями і стовпців рядками з однаковими номерами.

$$\det A = \det A^T \ .$$

2. При переставлянні у визначнику двох будь-яких стовпців або рядків знак визначника змінюється на протилежний, а абсолютна величина не змінюється.

3. Визначних з двома однаковими стовпцями (рядками) дорівнює нулю.

4. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого з його стовпців (рядків) на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \ , \ \left(1 \le i \le n\right); \tag{5}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \ , \ \left(1 \le j \le n\right). \tag{6}$$

Формули (5) та (6) називаються розкладом детермінанта за елементами рядка або стовпця.

5. Сума добутків усіх елементів будь-якого стовпця (рядка) на алгебраїчні доповнення, що відповідають елементам другого стовпця (рядка), дорівнює нулю.

6. Визначник, у якого всіма елементами деякого стовпця (рядка) є нулі, дорівнює нулю.

7. Множник, спільний для всіх елементів деякого стовпця (рядка), можна винести за знак визначника.

8. Якщо кожен елемент деякого стовпця (рядка) визначника є сумою двох доданків, то визначник розкладається на суму двох визначників, у яких всі стовпці (рядки), крім сумарного, такі ж, як і у вихідного визначника, а на місці сумарного стовпця (рядка) розміщені стовпці (рядки) відповідно з перших і других доданків.

9. Якщо деякий стовпець (рядок) визначника є лінійною комбінацією інших його стовпців (рядків), то такий визначник дорівнює нулю.

Наслідок. Визначник, елементи двох стовпців якого відповідно пропорційні, дорівнює нулеві.

10. Визначник не зміниться, якщо до будь-якого його стовпця (рядка) додати довільну лінійну комбінацію решти стовпців (рядків).

Наслідок. Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь його стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на одне і те саме число.

Визначник матриці другого порядку

Застосуємо формулу (2) для обчислення визначника матриці другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$M_{11} = a_{22},\ M_{12} = a_{21}$$

і визначник матриці другого порядку обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{7}$$

Отже, щоб знайти визначник матриці другого порядку, необхідно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Приклад 9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 3 \cdot 7 = -21.$$

Визначник матриці третього порядку

Для матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

запишемо мінори для елементів першого рядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \ M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} =$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Тобто

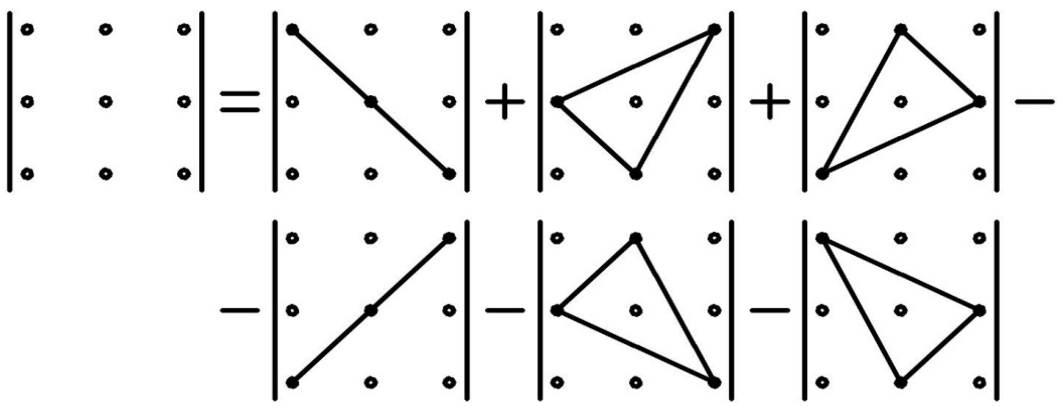
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (8)$$

Цей метод обчислення визначників третього порядку називається ***методом розкладу за елементами рядка (або стовпця).***

Правила обчислення визначників третього порядку

1. Методом розкладу визначника за елементами i-го рядка або j-го стовпця (використовуючи формули (5) або (6).

2. За правилом трикутників.



Схематично правило трикутників можна зобразити так. Перший доданок цієї рівності є добутком елементів, розміщених на головній діагоналі. Два наступних доданки є добутками елементів, два з яких лежать на прямій, що паралельна головній діагоналі, а третій у вершині побічної діагоналі. Причому всі три добутки беруться зі своїми знаками. Наступні три доданки утворюються аналогічно, але замість елементів головної діагоналі потрібно взяти елементи, які стоять на побічній діагоналі. І всі добутки записати із протилежними знаками.

Отже,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

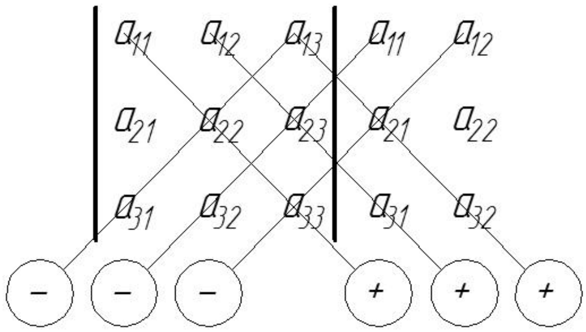
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Приклад 10.

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-2)\cdot 1 =$$

$$= 1 + 6 - 12 - 9 - 2 + 4 = -12.$$

3. За правилом Саррюса (правило дописування стовпців). Правило трикутників можна замінити правилом, яке передбачає дописування двох перших стовпців справа від визначника. Легко помітити, що співмножники кожного з шести доданків правила трикутників тепер розміщуються на прямих, які паралельні головній та побічній діагоналям.



Обчислення визначників n-го порядку

1. *Розклад визначника за елементами рядків або стовпців.* Цей спосіб полягає в тому, що на основі властивості 4 визначник n-го порядку розкладають на алгебраїчну суму n визначників $(n-1)$-го порядку. Кожний з утворених визначників $(n-1)$-го порядку розкладають на алгебраїчну суму $(n-1)$ визначників $(n-2)$-го порядку і так далі доти, поки не дістануть визначники, які можна обчислити вже безпосередньо (це

визначники другого або третього порядків). Якщо при цьому деякі елементи рядка або стовпця, за якими розкладається визначник, дорівнюють нулю, то доданки, що відповідають цим елементам у розкладі визначника, випадають. Тому доцільно розкладати визначник за тими рядками або стовпцями, які містять найбільшу кількість нулів.

Приклад 11. Обчислити визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна обчислити шляхом розкладу його за елементами рядка чи стовпця. Найменша кількість операцій буде, якщо розкладати визначник за елементами останнього рядка чи стовпця. Розкладемо цей визначник за елементами останнього рядка.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(0 + 20 + 0 - 48 - 0 - 0) + 3(6 + 15 + 28 - 36 - 10 - 7) = 44.$$

2. Метод ефективного пониження порядку (метод занулення).

Обчислення детермінанта n-го порядку зводять до обчислення одного визначника $n-1$-го порядку, зробивши (за наслідком з властивості 10) у деякому стовпці (рядку) усі елементи, крім одного, рівними нулю і далі скористатись властивістю 4.

Приклад 12. Обчислити визначник.

$$\det A = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Винесемо з першого рядка 10 (за властивістю визначників). А потім послідовно будемо домножувати на 1, 2, 3, і додавати до другого і третього рядка. Тоді за властивістю визначників маємо

$$\det A = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник можна розкласти за елементами другого стовпця.

$$\det A = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна обчислити за допомогою методу трикутника або за допомогою розкладу по елементах рядка чи стовпця

$$\det A = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910.$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;   е) $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} = 1$; б) $\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ x-2 & x \end{vmatrix} = 0$.

3. Методом ефективного пониження порядку (методом занулення) обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;   в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$;

3 ПОНЯТТЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Квадратна матриця порядку n називається ***невиродженою***, якщо її визначник не дорівнює нулю. У випадку, коли визначник дорівнює нулю, матриця називається виродженою.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\ . \tag{9}$$

Очевидно, що матриці A та A^{-1} квадратні матриці одного порядку.

Теорема. Якщо матриця A невироджена, то обернена матриця A^{-1} існує і

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}.

Доведення.

На підставі 4 та 5 властивостей визначників отримаємо

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\ \dots & \dots. & \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots A_{n1}a_{n1} \dots\dots\dots A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots + A_{n1}a_{nn} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + \dots A_{n2}a_{n1} \dots\dots\dots A_{12}a_{1n} + A_{22}a_{2n} + \dots + A_{n2}a_{nn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}a_{11} + A_{2n}a_{21} + \dots A_{nn}a_{n1} \dots\dots\dots A_{12}a_{1n} + A_{2n}a_{2n} + \dots + A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots. \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots. & \dots & \dots & \dots. \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогічно покажемо, що

$$AA^{-1} = E\ .$$

Приклад 13. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

$$\det A=-2;\ A_{11}=4;\ A_{12}=-3;\ A_{21}=-2;\ A_{22}=1.$$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Завдання для розв'язання

1. Для заданих матриць знайти обернені (якщо це можливо). Зробити перевірку.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

4 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Запишемо систему m алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{m2} + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (11)$$

у якій коефіцієнти a_{ij} і вільні члени b_k відомі, а $x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі.

Розв'язати систему – це означає знайти такі числові значення невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$, які перетворюють кожне рівняння системи на тотожність.

Матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається матрицею системи.

Матриця $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ називається матрицею (стовпцем) вільних елементів.

Матриця $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ називається матрицею (стовпцем) невідомих.

Приєднаємо до матриці системи стовпець вільних елементів. Дістанемо так звану розширену матрицю

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Використовуючи означення добутку матриць систему можна записати у вигляді $AX = B$. Ця форма запису системи називається матричною.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь може не мати розв'язків, може мати єдиний розв'язок і може мати безліч розв'язків.

Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Система n лінійних рівнянь з n невідомими називається *невиродженою*, якщо матриця системи невироджена.

Система називається *однорідною*, якщо всі її вільні члени $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ дорівнюють нулю. Якщо хоча б одне з чисел відмінне від нуля, то система називається неоднорідною.

Матричний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь

Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_{n2} + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{12}$$

в матричній формі:

$$A \cdot X = B. \tag{13}$$

Розв'язати систему рівнянь (12) – це означає знайти стовпець невідомих X, яке задовольняє матричне рівняння (13).

Теорема. Якщо визначник матриці A системи (12), не дорівнює нулеві, то розв'язок системи існує, причому

$$X = A^{-1}B. \tag{14}$$

Доведення.

Справді, $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B.$

Що й потрібно було довести.

На цій теоремі ґрунтується матричний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь.

Приклад 14. Розв'язати систему рівнянь матричним методом.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3=-3 \end{cases}$$

Запишемо матриці A, B, X:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник матриці системи та її алгебраїчні доповнення:

$$\det A=-3\neq 0 \qquad \begin{matrix} A_{11}=5 & A_{21}=-4 & A_{31}=-3 \\ A_{12}=1 & A_{22}=-2 & A_{32}=0 \\ A_{13}=-7 & A_{23}=5 & A_{33}=3 \end{matrix}$$

Отже, обернена матриця до матриці системи буде мати вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи рівнянь знайдемо використовуючи рівність (14):

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 5\cdot 0+(-4)\cdot 3+(-3)\cdot(-3) \\ 1\cdot 0+(-2)\cdot 3+0\cdot(-3) \\ -7\cdot 0+5\cdot 3+3\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Тобто $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

Метод Крамера

Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишемо її у вигляді

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n = B,$$

де $A_i - i$ -тий стовпець матриці системи.

Тепер знайдемо визначник матриці, яку дістанемо з матриці системи A, якщо перший стовпець матриці A замінити на стовпець вільних елементів:

$$\det\left(B, A_2, A_3, ..., A_n\right) = \det\left(x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 ... + x_nA_n, A_2, A_3, ..., A_n\right) =$$
$$= \det\left(x_1A_1, A_2, A_3, ..., A_n\right) + \det\left(x_2A_2, A_2, A_3, ..., A_n\right) + \det\left(x_3A_3, A_2, A_3, ..., A_n\right) +$$
$$+ \det\left(x_nA_n, A_2, A_3, ..., A_n\right) = x_1 \cdot \det\left(A_1, A_2, A_3, ..., A_n\right) = x_1 \det A$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\det\left(A_1, B, A_3, ..., A_n\right) = x_2 \det A$$
$$\det\left(A_1, A_2, B, ..., A_n\right) = x_3 \det A$$
$$...$$
$$\det\left(A_1, A_2, A_3, ..., B\right) = x_n \det A$$

Позначимо матрицю системи $\det A = \Delta$, а детермінанти матриць, що отримують шляхом заміни i -того стовпця на стовпець вільних елементів, Δ_i.

Тоді

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = \overline{1, n}.$$

Ця формула називається формулою Крамера.

П р и к л а д 15. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Запишемо матриці A, B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначники Δ, Δ_1, Δ_2 і Δ_3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{-3} = -2.$$

Метод Гауса

У разі, якщо система лінійних рівнянь має велику кількість невідомих, користуватись формулами Крамера незручно, оскільки вони ведуть до громіздких обчислень. На практиці часто застосовують метод виключення невідомих, або метод Гауса.

Нехай маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

З другого рівняння виключимо x_1, а з третього x_1 та x_2. Для цього перше рівняння помножимо на число $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. Щоб виключити x_1 з третього рівняння, помножимо перше на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. Тоді до третього рівняння додамо перше помножене на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ (змінюється той рядок, до якого додаємо, тобто третій). Отримаємо систему виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ 0 \quad + a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 = b_2^*, \\ 0 \quad + a_{32}^*x_2 + a_{32}^*x_3 = b_3^*. \end{cases}$$

a_{mn}^*, b^* – умовне позначення нового громіздкого виразу, який утворився після перетворень.

Щоб позбутися x_2 у третьому рівнянні, потрібно друге рівняння помножити на $\left(-\frac{a_{32}^*}{a_{22}^*}\right)$ і додати до третього рівняння. При цьому буде змінюватися третє рівняння (те, до якого додаємо). У результаті отримаємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ 0 \quad + a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 = b_2^{*}, \\ 0 \quad + \ 0 \quad + a_{32}^{**}x_3 = b_3^{**}. \end{cases}$$

a_{32}^{**}, b_3^{**} – нові коефіцієнти, що утворилися після перетворень. З останнього рівняння визначаємо невідому $x_3 = \dfrac{b_3^{*}}{a_{33}^{*}}$. Знайдене значення x_3 підставляємо в друге рівняння системи, звідки знаходимо x_2. Далі знайдені значення підставляємо у перше рівняння системи і знаходимо x_1. Для зручності виконання дій для системи записують розширену матрицю. І проводять вказані дії над елементами рядків розширеної матриці. Потім розширену матрицю записують у вигляді системи вже з утвореними коефіцієнтами при невідомих та вільними членами.

Зауваження. Вищенаведений метод послідовного виключення можна здійснювати за умови $a_{11} \neq 0$, $a_{22}^{*} \neq 0$, $a_{33}^{**} \neq 0$. Якщо вказані коефіцієнти дорівнюють нулю, то вилучити можна ті змінні, які мають коефіцієнти, що не дорівнюють нулю.

Зауваження. За необхідності елементи стовпців розширеної матриці можна міняти місцями, при цьому над коефіцієнтами роблять позначення змінної, до якої належать ці коефіцієнти. Цю зміну варто враховувати в остаточній системі лінійних рівнянь при відшуканні відповіді.

Приклад 16. Розв’язати систему рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

Запишемо розширену матрицю системи та виконаємо перетворення:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&4&3\\1&2&1&4\\1&3&-3&1\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&3&-3&1\\1&2&1&4\\2&-3&4&3\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&3&-3&1\\0&-1&4&3\\2&-3&4&3\end{pmatrix}\cong$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&3&-3&1\\0&-1&4&3\\0&-9&10&1\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&3&-3&1\\0&-1&4&3\\0&0&-26&-26\end{pmatrix}$$

Перейдемо до системи рівнянь:

$$\begin{cases}x_1+3x_2-3x_3=1\\ \quad -x_2+4x_3=3\\ \quad\quad -26x_3=-26\end{cases}$$

$$x_3=1,\quad x_2=1,\quad x_1=1.$$

Часто при вказаних перетвореннях виникають дробові коефіцієнти при невідомих, які є не зручними для подальших математичних операцій. Розглянемо інший підхід до застосування методу Гауса до розв’язання систем рівнянь, де можна уникнути дробових коефіцієнтів при невідомих - схему «єдиного ділення». Аналогічно в основі цього методу покладене те, що будь-який рядок системи рівнянь можна множити на довільне число (окрім нуля), а також те, що рядки можна додавати між собою.

Поставимо за мету у системі

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

виключити змінну x_1 і не отримати при цьому дробові числа, тобто не виконувати операцію ділення

$$\begin{cases}-a_{21}a_{11}x_1-a_{21}a_{12}x_2=-a_{21}b_1\\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=a_{11}b_2\end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

Спробуємо застосувати такий метод виключення для більшої кількості змінних і рівнянь. Для цього запишемо наступний алгоритм:

1.Записуємо систему схематично у вигляді таблиці

x_1	x_1	$\ldots$	x_1	b
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\ldots$				
a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nn}	b_n

2. Вибираємо у таблиці ведучий елемент (за ведучий краще брати верхній лівий елемент, ведучий елемент не може дорівнювати нулю)

3. Виключаємо змінну при якій стоїть ведучий елемент. Для цього формуємо внизу таблицю, яка не містить рядка і стовпця ведучого елемента. Елементи нової таблиці шукаємо за правилом прямокутника: проводимо уявні лінії через рядок і стовпець ведучого елемента і лінії через рядок і стовпець елемента, що міняється. Утвориться прямокутник. Далі множимо ведучий елемент на елемент, що міняється і віднімаємо добуток елементів, що стоять у інших вершинах прямокутника. Тобто

$$a'_{ij} = a_{lk}a_{ij} - a_{ik}a_{lj}$$
$$b'_i = a_{lk}b_i - a_{ik}b_l$$

4. Повторюємо пункти 2 і 3, допоки не отримаємо таблицю з одним елементом у лівій частині.

a'_{nn}	b'_n

Ця таблиця еквівалентна рівнянню $a'_{nn}x_n = b'_n$, звідки знаходимо змінну x_n.

5. Розглянемо попередню таблицю і з рівняння, яке виключали, знаходимо змінну, яку виключали.

6. Повторюємо пункт 5, допоки не знайдемо усі змінні.

Завдання для розв'язання

1. Розв'язати системи рівнянь матричним методом

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

В: $x_1 = x_2 = x_3 = -1$.

б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

В: $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2$.

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

В: $x_1 = x_2 = x_3 = -1$.

г) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

В: $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2$.

2. Розв'язати системи рівнянь за допомогою формул Крамера

а) $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -16 \\ x_1 + 4x_3 = -6 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = -8 \end{cases}$

В: $x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = -2$.

б) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ -x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

В: $x_1 = -2; x_2 = 2; x_3 = 0$.

в) $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -16 \\ x_1 + 4x_3 = -6 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = -8 \end{cases}$

В: $x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = -2$.

г) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ -x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

В: $x_1 = -2; x_2 = 2; x_3 = 0$.

3. Розв'язати системи рівнянь методом Гауса

а) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

В: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 2$.

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -4 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

В: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -3, x_4 = 1$.

5 УМОВА СУМІСНОСТІ СИСТЕМИ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.

Рангом матриці A (позначається $\operatorname{rang} A$) називається найбільший порядок породжених нею визначників, що відмінні від нуля. Якщо усі визначники порядку k дорівнюють нулю, то $\operatorname{rang} A < k$.

Базисним мінором матриці називається будь-який відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу цієї матриці.

Основний метод знаходження рангу матриці – ***метод обвідних мінорів***. Мінор $k+1$ порядку, що містить у собі мінор k порядку, називається обвідним мінором. Якщо у матриці A існує відмінний від нуля мінор k-го порядку, а усі обвідні мінори дорівнюють нулю, то $\operatorname{rang} A = k$.

Приклад 17. Знайти ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для M_2 обвідними будуть лише два мінори:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix}, M_3^* = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

кожен з яких дорівнює нулю. Тому rang A=2, *а вказаний мінор M_2, може бути прийнятий як базисний.*

Теорема Кронекера-Капелі. Для того, щоб система m лінійних рівнянь з n невідомими була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи і ранг розширеної матриці системи були рівні.

Якщо $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_1 = r$ і $r = n$, то система має єдиний розв'язок, якщо $r < n$, то система має нескінченну кількість розв'язків, що залежать від $n - r$ довільних параметрів.

Для однорідної системи рівнянь $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$, тому вона завжди сумісна.

Методи розв'язання вироджених систем рівнянь

I. Метод перетворення у невироджену систему рівнянь

1. Перевіряємо виконання теореми Кронекера-Капеллі.
2. Визначаємо будь-який базисний мінор. Змінні, які стоять при коефіцієнтах базисного мінору, називаються базисними. Усі інші змінні називаються вільними.
3. Видаляємо усі рівняння системи, коефіцієнти яких не входять у базисний мінор (ці рівняння є лінійною комбінацією базисних рівнянь і не впливають на розв'язок).
4. Переносимо у праву частину усі вільні невідомі разом із їх коефіцієнтами. У результаті отримаємо невироджену систему, яку розв'язуємо матричним методом, методом Крамера або методом Гауса. Отримаємо значення базисних невідомих як функції вільних невідомих. При цьому вільні невідомі – довільні числа.

Приклад 18.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

розширена матриця

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \ rangA = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rangA^* = 2.$$

$$rangA = rangA^*$$

Отже, система сумісна.

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – *базисний мінор.*

$x_1,\ x_2$ – *базисні невідомі*, x_3 – *вільна невідома*.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -2 - 5x_{3,} \\ x_1 + x_2 = -1 - 2x_{3.} \end{cases}$$

За методом Крамера.

$$\Delta = 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 - 5x_3 & -1 \\ -1 - 2x_3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 5x_3 - 1 - 2x_3 = -3 - 7x_{3.}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 - 5x_3 \\ 1 & -1 - 2x_3 \end{vmatrix} = -3 - 6x_3 + 2 + 5x_3 = -1 - x_{3.}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3 + 7x_3}{4},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1 + x_3}{4},\ x_3 = x_3 - \text{довільне число (параметр)}$$

II. Метод Гауса.

При розв’язанні системи лінійних рівнянь методом Гауса може бути декілька варіантів розв’язків. Враховуючи теорему *Кронекера-Капелі*, опишемо їх:

1. Система лінійних рівнянь звелася до трикутного вигляду. Це випадок, коли $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_1 = r$, $r = n$. Система матиме єдиний розв’язок.
2. Система лінійних рівнянь звелася до вигляду трапеції, тобто число

рівнянь системи (r) менше числа невідомих (n): $r<n$. У лівій частині рівнянь вибираємо невідомі, визначник складений з коефіцієнтів при них $\neq 0$, а кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь. Ці невідомі називаються базисними. Решту невідомих переносимо разом з коефіцієнтами у праву частину рівняння, вважаємо їх сталими і називатимемо вільними. Утворену систему можна розв'язати методом Крамера. Надаючи вільним невідомим різних значень знайдемо множину розв'язків.

3. У процесі розв'язування системи отримали протиріччя виду $0 = C$. У цьому випадку система розв'язків не має.

III. Метод Гауса (схема «єдиного ділення»).

Алгоритм аналогічний, як і у разі невироджених систем рівнянь.

Перетворення робимо, допоки у таблиці не залишиться один рядок або один стовпець (стовпець вільних елементів). Можливі такі ситуації:

1. Якщо під час перетворення у лівій і правій частинах таблиці усі коефіцієнти деякого рядка дорівнюють нулю, то цей рядок потрібно видалити в усіх таблицях, так як рівняння, яке ми отримаємо з нього, не впливає на розв'язок.
2. Якщо під час перетворення усі коефіцієнти деякого рядка у лівій частині таблиці дорівнюють нулю, а у правій частині коефіцієнт відмінний від нуля, то система несумісна.
3. Якщо залишився один рядок, який містить один елемент у лівій частині, то система має один розв'язок. В іншому випадку система має безліч розв'язків.
4. Якщо залишився один стовпець і хоча б один елемент відмінний від нуля, то система несумісна. В іншому випадку система має розв'язок, який знаходимо починаючи з передостанньої таблиці, викресливши усі рядки крім того, що виключали.

Приклад 19.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ 8x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$$

x_1	x_2	b
2	1	3
1	-1	1
8	7	2
	-3	-1
	6	-20
		66≠0.

Отже, система несумісна.

Приклад 20.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ 4x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$$

x_1	x_2	b
2	1	3
1	-1	1
4	-1	5
	-3	-1
	-6	-20
		0

Отже, система сумісна. Знайдемо її розв'язки.

$$-3x_2 = -1;$$

$$x_2 = \frac{1}{3};$$

$$2x_1 + \frac{1}{3} = 3;$$

$$x_1 = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{1}{3}.$

Приклад 21.

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = -2, \\ x_1 - 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

x_1	x_2	b
-2	4	-2
1	-2	1
3	1	3
	0	0
	-14	0

$$-14x_2 = 0,\ x_2 = 0,\ -2x_1 + 0 = -2,\ x_1 = 1.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 0.$

Приклад 22.

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	b
-2	-3	4	5
1	1	1	-2
	1	-6	-1

$$x_2 - 6x_3 = -1;$$

$$x_2 = -1 + 6x_3;$$

$$2x_1 + 3 - 14x_3 = 5;$$

$$x_1 = -1 - 7x_3.$$

Відповідь: $x_1 = -1 - 7x_3$, $x_2 - 6x_3 = -1$, $x_3 = x_3$, $x_3 -$ *довільне число.*

Завдання для розв'язання

1. Знайти ранг матриці системи лінійних рівнянь

а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$,

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -4 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

6 ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У загальному вигляді однорідна система лінійних рівнянь записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Ця система завжди має нульовий розв’язок, який називається тривіальним. Розглянемо питання про нетривіальні розв’язки системи (15).

Теорема (про нетривіальні розв’язки однорідної системи). Однорідна система (15) має нетривіальні розв’язки тоді і тільки тоді, коли ранг матриці цієї системи менший за число невідомих.

Доведення. Необхідність. Нехай система (15) має нетривіальні розв’язки, тобто існують числа $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$, серед яких принаймні одне відмінне від нуля, такі, що

$$x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + ... + x_n^0 A_n = 0,$$

де $A_1, A_2, ..., A_n$ – стовпці матриці системи. Це означає, що стовпці $A_1, A_2, ..., A_n$ лінійно залежні, внаслідок чого на підставі теореми про базисний мінор вони не всі можуть бути базисними, тому ранг матриці A менший за n.

Достатність. Нехай ранг r матриці A менший за n. Тоді, відповідно до теореми про базисний мінор, стовпці $A_1, A_2, ..., A_n$ лінійно залежні. Це означає, що існують числа $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, і справджується рівність:

$$x_1^0 A_1 + x_2^0 A_2 + ... + x_n^0 A_n = 0.$$

Іншими словами, числа $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ дають нетривіальний розв’язок системи (15). Теорему доведено.

Будемо записувати розв’язки однорідної системи у вигляді стовпців і позначати буквою X з індексами.

Для розв'язків однорідної системи справджуються такі властивості:

1. Якщо стовпець X_0 є розв'язок системи (15), то для будь-якого числа α стовпець αX_0 також є розв'язком системи (15).

Доведення. Запишемо систему (15)у матричній формі

$$AX=0. \tag{16}$$

Оскільки X_0 є розв'язок матричного рівняння (16), то

$$AX_0=0.$$

Тому підставивши замість X в (16) стовпець αX_0 , на основі властивостей операцій над матрицями, маємо

$$A(\alpha X_0)=\alpha AX_0=\alpha 0=0,$$

що й треба було довести.

2. Якщо X_1 і X_2 - розв'язки системи (15), то й стовпець X_1+X_2 є розв'язком системи (15).

Справді, оскільки

$$AX_1=0,\ AX_2=0,$$

то, відповідно до властивостей операцій над матрицями, маємо

$$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=0,$$

що й треба було довести.

Наслідок. Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь також є розв'язком цієї системи, тобто, якщо стовпці $X_1,X_2,...,X_\ell$ – розв'язки, то стовпець

$$c_1X_1+c_2X_2+...+c_\ell X_\ell$$

також є розв'язок ($c_1,c_2,...,c_\ell$ – довільні числа).

Поняття загального розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь

Нехай дано однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ \text{.......................................} \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{17}$$

або в матричній формі

$$AX=0. \tag{18}$$

Із властивостей розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь випливає, що з будь-яких двох частинних розв'язків цієї системи можна дістати безліч розв’язків цієї системи як різні лінійні комбінації цих розв’язків. У зв’язку з цим виникає питання, чи не можна всі розв’язки системи (17) подати як лінійні комбінації кількох певних розв’язків. Виявляється, справді, завжди можна знайти так звану фундаментальну систему розв’язків, характерну тим, що кожний розв'язок системи (17) є якоюсь лінійною комбінацією розв’язків фундаментальної системи.

Цілком зрозуміло, що фундаментальна система розв’язків має бути лінійно незалежною системою стовпців, бо інакше один з розв’язків сам був би лінійною комбінацією інших розв’язків цієї системи рівнянь, тому його можна було б відкинути.

Загальним розв’язком системи (17) називається розв’язок, що залежить від довільних сталих, з якого при відповідному виборі цих сталих можна дістати будь-який розв’язок системи (17). Іншими словами, загальний розв’язок – це лінійна комбінація фундаментальної системи розв’язків.

Наведемо деякі міркування з питання про знаходження загального розв’язку системи (17).

Припустимо, як і раніше, що ранг r– матриці системи A менший за число невідомих n і базисний мінор розміщений у верхньому лівому кутку системи. Тоді перші r рядків матриці системи є базисними і за теоремою про базисний мінор кожний рядок матриці, починаючи з (r+1)-го, є лінійною комбінацією перших r рядків цієї матриці. Мовою системи рівнянь це означає, що кожне з рівнянь системи, починаючи з (r + 1)-го, є лінійною комбінацією (наслідком) перших r рівнянь системи, тобто будь-який розв’язок перших r рівнянь системи (17) буде розв’язком і решти рівнянь цієї системи.

Таким чином, для знаходження всіх розв’язків системи досить знайти всі розв’язки лише перших r рівнянь системи.

Розглянемо перші r рівнянь системи, записавши їх у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{19}$$

Якщо надати невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ довільних значень $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$

, то система (19) перетвориться у квадратну систему r лінійних рівнянь з r невідомими $x_1, x_2, ..., x_r$, причому визначник цієї системи є базисний мінор, що відмінний від нуля. Така система має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера при вибраних сталих $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$. Позначимо через X_1 розв'язок системи (19) при $c_1 = 1, \ \ c_2 = 0, \ \ ..., \ \ c_{n-r} = 0,$ через X_2 – розв'язок системи (19) при $c_1 = 0, \ \ c_2 = 1, \ \ c_3 = 0, \ \ ..., \ \ c_{n-r} = 0$ і т. д., через X_{n-r} – розв'язок системи (19)при $c_1 = 0, \ \ c_2 = 0, \ \ ..., \ \ c_{n-r} = 1.$

Можна довести, що всі ці розв'язки $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ рівняння (18) (чи системи (17)) є лінійно незалежні і будь-який інший розв'язок

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_{n-r} X_{n-r}, \tag{20}$$

де $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ – довільні сталі. Отже, (20) є загальний розв'язок системи (17).

Завдання для розв'язання

1. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0 \end{cases}$

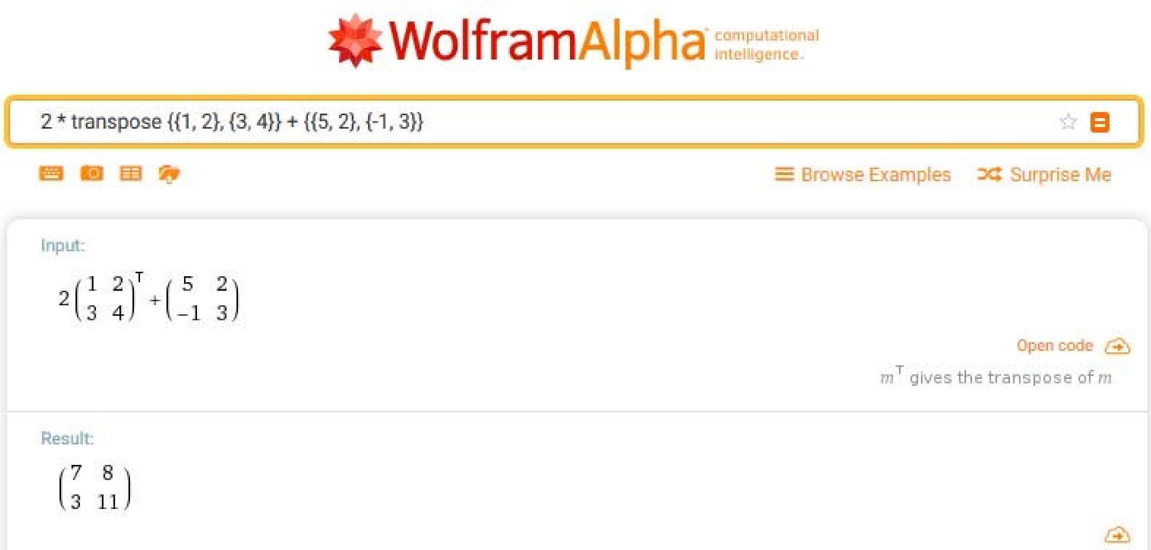
7 ЗАСТОСУВАННЯ WOLFRAM ALPHA

Для введення матриці уWolfram Alpha кожен рядок поміщаємо у фігурні дужки {}, відокремлюючи елементи комами. Рядки відокремлюються один від одного також комами, і уся сукупність рядків також береться у фігурні дужки, тобто матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ вводиться у систему Wolfram Alpha у вигляді

$$\{\{a_{11},a_{12},a_{13}\},\{a_{21},a_{22},a_{23}\},\{a_{31},a_{32},a_{33}\}\}$$

Дії над матрицями виконуються за допомогою операторів +, -, * або $\cdot$. Транспонування виконується командою transpose.

Приклад 23. Знайти $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.



Відповідь: $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

Приклад 24. Знайти $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Платна версія Wolfram Alpha, крім результату, дозволяє отримати покроковий розв'язок з поясненнями англійською мовою. Зокрема, для цього прикладу приведено 10 кроків:

STEP 1

Multiply the following matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

STEP 2

Hint: Determine the dimension of the product.

The dimensions of the first matrix are 2×2
and the dimensions of the second matrix are 2×2.
This means the dimensions of the product are 2×2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 3

Hint: Find the entry in the 1^{st} row and 1^{st} column of the product matrix. First look at the 1^{st} row of the first matrix and the 1^{st} column of the second matrix.

Highlight the 1^{st} row and the 1^{st} column:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 4

Show intermediate steps

Hint: Multiply corresponding components of the highlighted row and highlighted column, then add.

Multiply corresponding components and add: $\boxed{2 \times 1 + (-1) \times 3 = -1}$.

Place this number into the 1^{st} row and 1^{st} column of the product:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 5

Hint: Find the entry in the 1^{st} row and 2^{nd} column of the product matrix. First look at the 1^{st} row of the first matrix and the 2^{nd} column of the second matrix.

Highlight the 1^{st} row and the 2^{nd} column:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 6

Show intermediate steps

> **Hint:** Multiply corresponding components of the highlighted row and highlighted column, then add.

Multiply corresponding components and add: $2 \times 2 + (-1) \times 4 = 0$.

Place this number into the 1^{st} row and 2^{nd} column of the product:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \boxed{0} \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 7

> **Hint:** Find the entry in the 2^{nd} row and 1^{st} column of the product matrix. First look at the 2^{nd} row of the first matrix and the 1^{st} column of the second matrix.

Highlight the 2^{nd} row and the 1^{st} column:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1 \quad 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 8

Show intermediate steps

> **Hint:** Multiply corresponding components of the highlighted row and highlighted column, then add.

Multiply corresponding components and add: $1 \times 1 + 3 \times 3 = 10$.

Place this number into the 2^{nd} row and 1^{st} column of the product:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \boxed{10} & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 9

Hint: Find the entry in the 2^{nd} row and 2^{nd} column of the product matrix. First look at the 2^{nd} row of the first matrix and the 2^{nd} column of the second matrix.

Highlight the 2^{nd} row and the 2^{nd} column:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1 \quad 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & \_ \end{pmatrix}$$

STEP 10

Show intermediate steps

Hint: Multiply corresponding components of the highlighted row and highlighted column, then add.

Multiply corresponding components and add: $1 \times 2 + 3 \times 4 = 14$.

Place this number into the 2^{nd} row and 2^{nd} column of the product:

Answer:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & \boxed{14} \end{pmatrix}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$.

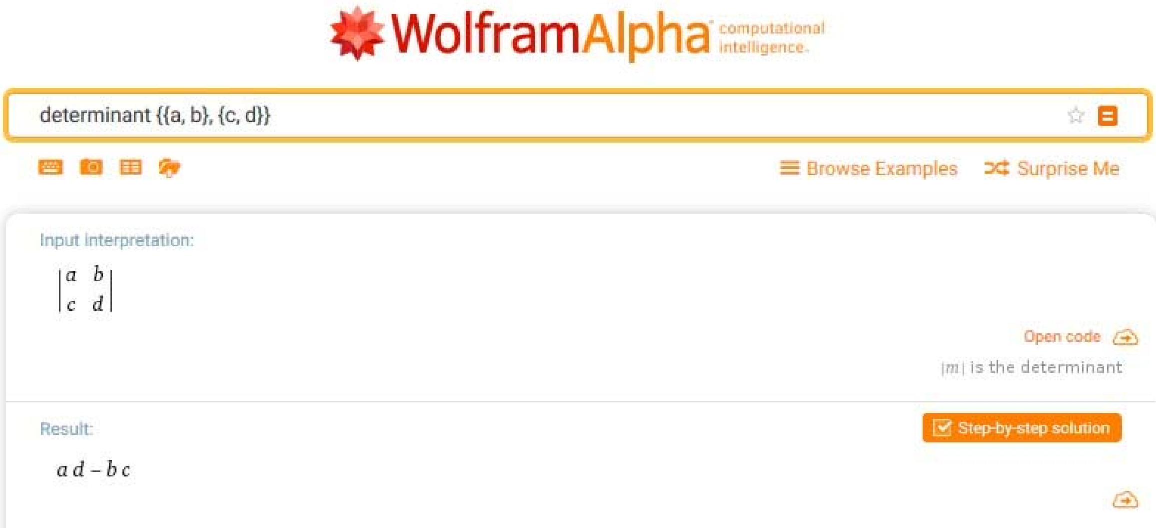
Для обчислення визначників в Wolfram | Alpha можна використовувати дві команди det і determinant. Отже, запити

det {{a, b}, {c, d}}

і

determinant {{a, b}, {c, d}}

зумовлюють однаковий результат:

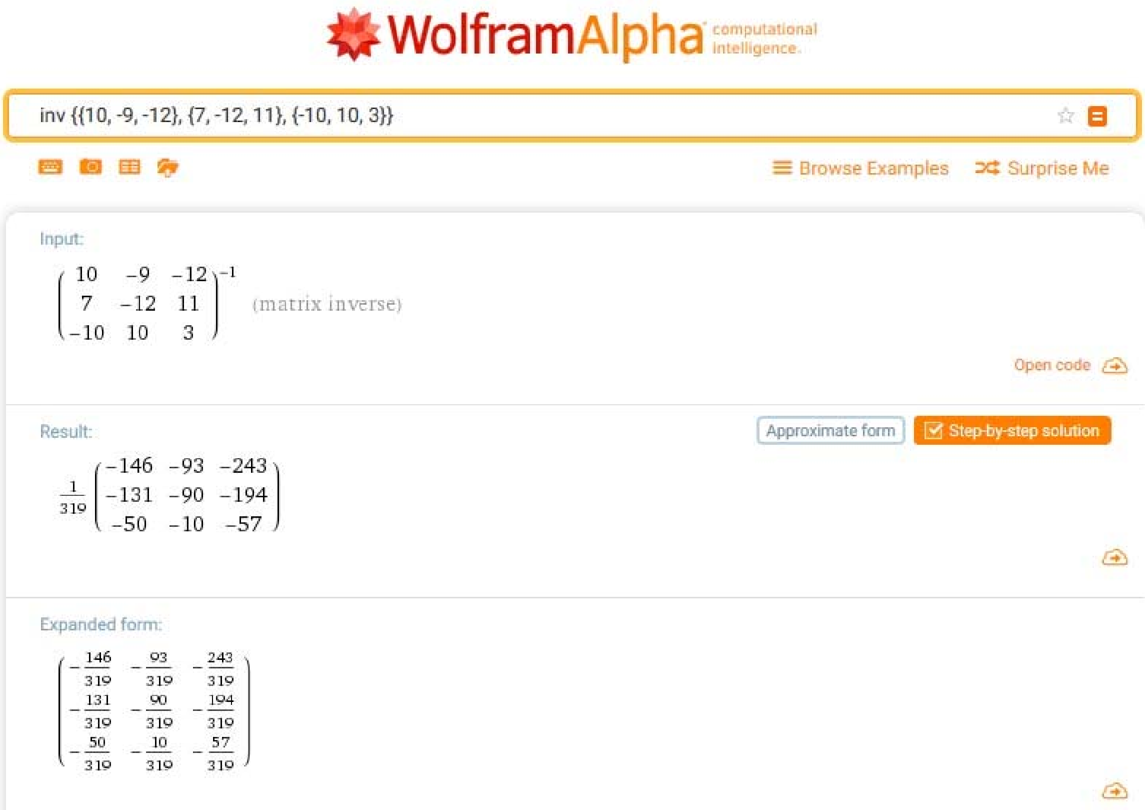


Зазвичай, перед обчисленням оберненої матриці потрібно перевірити, чи існує вона взагалі. Для цього необхідно обчислити визначник матриці, і якщо він не дорівнює нулю, то обернена матриця існує. Однак у Wolfram Alpha в такій перевірці немає необхідності. Wolfram Alpha автоматично визначає, чи є ця матриця виродженою, і якщо вона невироджена, то обчислює обернену матрицю. Якщо ж така матриця вироджена, то Wolfram Alpha видає повідомлення «matrix is singular», і обчислює так звану псевдообернену матрицю.

Для обчислення зворотної матриці в Wolfram Alpha використовується команда inverse або inv.

Приклад 25. Знайти матрицю, що обернена до матриці

$$A=\begin{pmatrix}10 & -9 & -12\\ 7 & -12 & 11\\ -10 & 10 & 3\end{pmatrix}.$$



Натиснувши <Step-by-step solution> отримаємо 13 кроків визначення оберненої матриці методом Гауса-Жордана, який ми не розглядали у даному посібнику, але з яким можна ознайомитись наприклад у Вікіпедії.

STEP 1

Find the inverse:

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 & -12 \\ 7 & -12 & 11 \\ -10 & 10 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

STEP 2

Hint: Append the identity matrix of the same size to the right of: $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -12 \\ 7 & -12 & 11 \\ -10 & 10 & 3 \end{pmatrix}$.

To find the inverse, augment the given matrix with the identity matrix and perform Gaussian elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -12 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 10 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

STEP 3

⊞ Show intermediate steps

Hint: Subtract a multiple of one row from another.

Subtract $\frac{7}{10} \times$(row 1) from row 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{10} & \frac{97}{5} & -\frac{7}{10} & 1 & 0 \\ -10 & 10 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

STEP 4

⊞ Show intermediate steps

Hint: Add one row to another.

Add row 1 to row 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{10} & \frac{97}{5} & -\frac{7}{10} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

STEP 5

Hint: Swap two rows.

Swap row 2 with row 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{57}{10} & \frac{97}{5} & -\frac{7}{10} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

STEP 6

Show intermediate steps

Hint: Add a multiple of one row to another.

Add $\frac{57}{10}\times$(row 2) to row 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{319}{10} & 5 & 1 & \frac{57}{10} \end{array}\right)$$

STEP 7

Show intermediate steps

Hint: Multiply row 3 by a scalar.

Multiply row 3 by $-\frac{10}{319}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{319} & -\frac{10}{319} & -\frac{57}{319} \end{array}\right)$$

STEP 8

Show intermediate steps

Hint: Add a multiple of one row to another.

Add $9\times$(row 3) to row 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{131}{319} & -\frac{90}{319} & -\frac{194}{319} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{319} & -\frac{10}{319} & -\frac{57}{319} \end{array}\right)$$

STEP 9

Show intermediate steps

Hint: Add a multiple of one row to another.

Add 12 × (row 3) to row 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -9 & 0 & -\frac{281}{319} & -\frac{120}{319} & -\frac{684}{319} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{131}{319} & -\frac{90}{319} & -\frac{194}{319} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{319} & -\frac{10}{319} & -\frac{57}{319} \end{array}\right)$$

STEP 10

Show intermediate steps

Hint: Add a multiple of one row to another.

Add 9 × (row 2) to row 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -\frac{1460}{319} & -\frac{930}{319} & -\frac{2430}{319} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{131}{319} & -\frac{90}{319} & -\frac{194}{319} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{319} & -\frac{10}{319} & -\frac{57}{319} \end{array}\right)$$

STEP 11

Show intermediate steps

Hint: Divide row 1 by a scalar.

Divide row 1 by 10:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{146}{319} & -\frac{93}{319} & -\frac{243}{319} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{131}{319} & -\frac{90}{319} & -\frac{194}{319} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{319} & -\frac{10}{319} & -\frac{57}{319} \end{array}\right)$$

STEP 12

Hint: The inverse of $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -12 \\ 7 & -12 & 11 \\ -10 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ is the right part of the augmented matrix.

Read off the inverse:

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 & -12 \\ 7 & -12 & 11 \\ -10 & 10 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{146}{319} & -\frac{93}{319} & -\frac{243}{319} \\ -\frac{131}{319} & -\frac{90}{319} & -\frac{194}{319} \\ -\frac{50}{319} & -\frac{10}{319} & -\frac{57}{319} \end{pmatrix}$$

STEP 13

Hint: Factor out common terms.

Simplify by factoring out an appropriate term:

Answer:

$$\frac{1}{319}\begin{pmatrix} -146 & -93 & -243 \\ -131 & -90 & -194 \\ -50 & -10 & -57 \end{pmatrix}$$

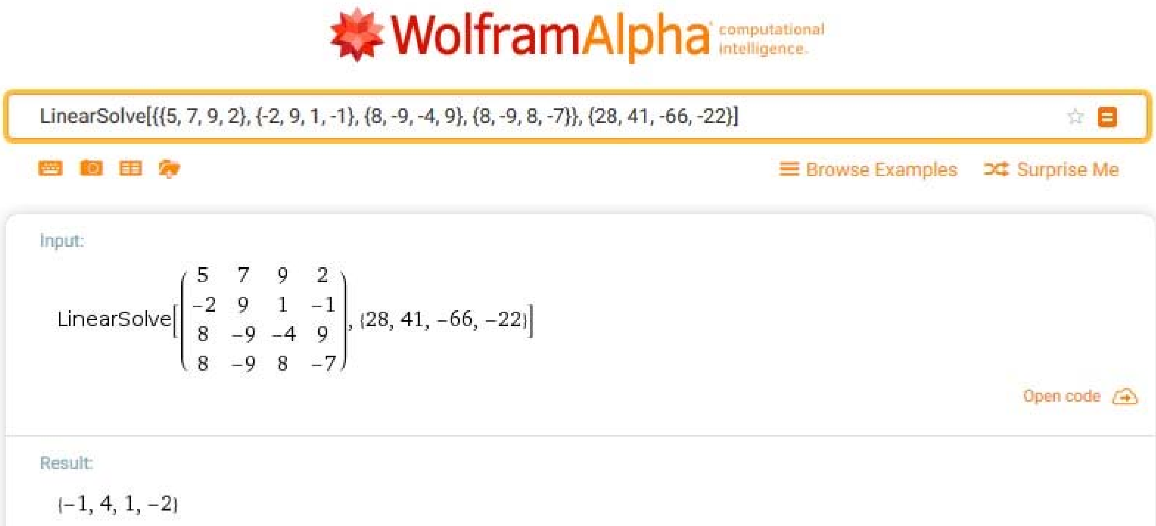
$$\textit{Відповідь: } A^{-1} = \frac{1}{319}\begin{pmatrix} -146 & -93 & -243 \\ -131 & -90 & -194 \\ -50 & -10 & -57 \end{pmatrix}$$

Wolfram Alpha також дозволяє безпосередньо обчислювати ранг матриці використовуючи команду rank.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь розв’язується за допомогою команди solve. Команда solve є універсальною командою для знаходження розв’язку алгебраїчних рівнянь та їх систем. При цьому шукається розв’язок як виродженої системи, так і невиродженої. Для розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом можна використати команду LinearSolve.

Приклад 26. Розв'язати матричне рівняння:

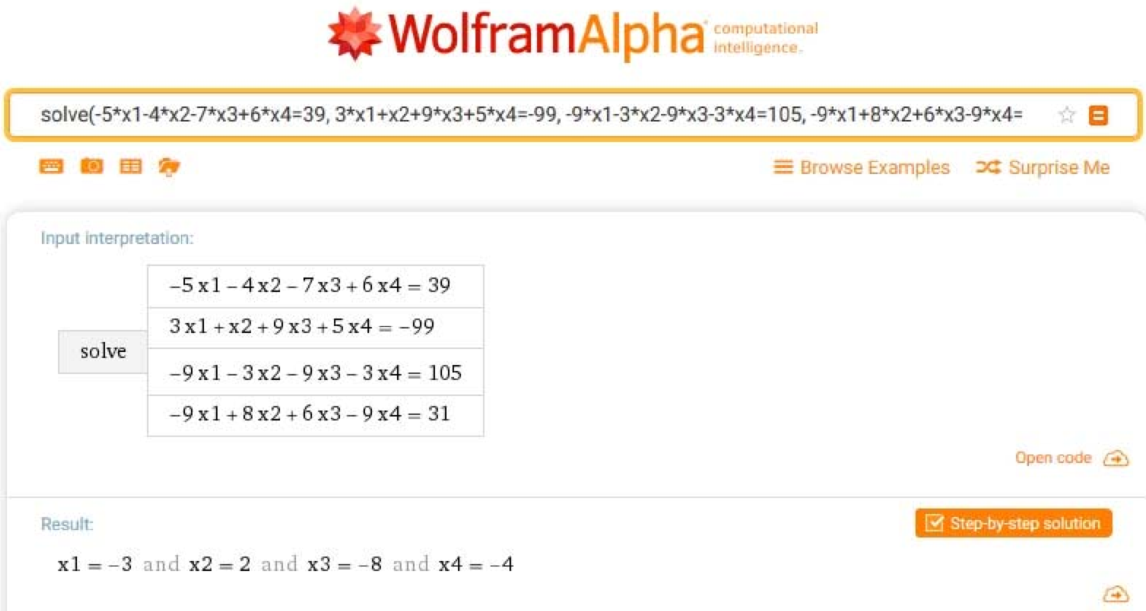
$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 2 \\ -2 & 9 & 1 & -1 \\ 8 & -9 & -4 & 9 \\ 8 & -9 & 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 28 \\ 41 \\ -66 \\ -22 \end{pmatrix}$$



Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Приклад 27. Знайти розв'язок системи алгебраїчних рівнянь:

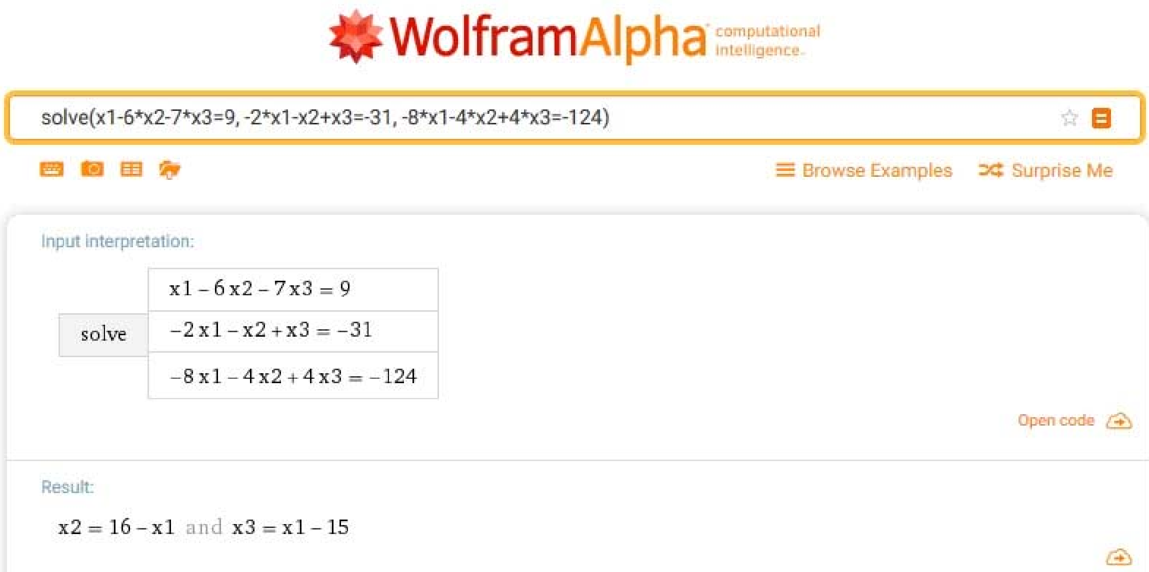
$$\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 39 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -99 \\ -9x_1 - 3x_2 - 9x_3 - 3x_4 = 105 \\ -9x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 9x_4 = 31 \end{cases}$$



Відповідь: $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -8, x_4 = -4$.

Приклад 28. Знайти розв'язок системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 7x_3 = 9 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -31 \\ -8x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -124 \end{cases}$$



Відповідь: $x_2 = 16 - x_1,\ x_3 = x_1 - 15,\ x_1$ *– довільне число*.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

1.1. Для заданих матриць *A* та *B* обчислити *3A-2B*.

1. $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -7 & -4\\ 8 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ -5 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix},$

2. $A=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ -7 & 3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 9 & 2\end{pmatrix};$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 6 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 6 & 3\end{pmatrix};$

4. $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 7\\ 3 & -6 & -8\\ 6 & 0 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}9 & 1 & -8\\ 5 & -1 & -6\\ 1 & 6 & -4\end{pmatrix};$

5. $A=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 7 & 3\\ -5 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 2 & -6\\ 3 & -9\end{pmatrix};$

6. $A=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 7 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -2 & 6\end{pmatrix};$

7. $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -7 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -6 & -3\end{pmatrix};$

8. $A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 7 & -8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -2 & -4\end{pmatrix};$

9. $A=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -1\\ -8 & -6 & 9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 8 & 1\\ 0 & -5 & 1\end{pmatrix};$

10. $A=\begin{pmatrix}-7 & -5 & -7\\ 1 & 3 & -6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3 & 7 & -5\\ -9 & 7 & -7\end{pmatrix};$

11. $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -5 & -7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 4 & 8\end{pmatrix};$

12. $A=\begin{pmatrix}-8 & -1\\ -5 & 9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 6 & 4\end{pmatrix};$

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6 & -5\\ 5 & 7\end{pmatrix};$

14. $A=\begin{pmatrix}-9 & -4 & 5\\ 6 & -6 & -4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}7 & 3 & -9\\ -3 & 5 & 0\end{pmatrix};$

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 5 & -7 & -8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9 & -1 & 0\\ 2 & -6 & 5\end{pmatrix};$

16. $A=\begin{pmatrix}0 & -6\\ 5 & 4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6 & -8\\ -4 & -7\end{pmatrix};$

17. $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -8\\ 1 & -2 & -5\\ -8 & -8 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 7\\ -5 & 6 & 0\\ 9 & 7 & -6\end{pmatrix};$

18. $A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 9\\ -1 & -9 & -5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 6\\ -6 & 0 & -1\end{pmatrix};$

19. $A=\begin{pmatrix}-5 & -9 & -8\\ 6 & -1 & 3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}5 & -8 & 5\\ -7 & -1 & -1\end{pmatrix};$

20. $A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-8 & 7\\ -3 & 3\end{pmatrix};$

21. $A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -9 & -7\\ 5 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6 & -6\\ 9 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix};$

22. $A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 2\\ -8 & -1 & 5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix};$

23. $A=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 6\\ -5 & -3 & -2\\ 7 & 1 & 4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2 & -7 & 5\\ 7 & -8 & 5\\ 8 & -7 & -6\end{pmatrix};$

24. $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 5 & -8\end{pmatrix};$

25. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -4 & 1\end{pmatrix};$

26. $A=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 9\\ -2 & 5 & 9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4 & 8 & 9\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix};$

$27. A=\begin{pmatrix}-1 & 8 & -2\\ -1 & -2 & 6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 4\\ 8 & 9 & 2\end{pmatrix};$

$28. A=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix};$

$29. A=\begin{pmatrix}-7 & -5 & -7\\ 0 & -5 & 5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ -8 & -5 & 3\end{pmatrix};$

$30. A=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -8 & 5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 9 & -5\end{pmatrix};$

$31. A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5\\ 1 & -1 & -3\\ 0 & 7 & 6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & -5 & 7\\ 0 & 4 & 3\\ 1 & 9 & 6\end{pmatrix};$

$32. A=\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 2 & 4 & 5\\ -7 & 0 & -3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-4 & 5 & -5\\ -3 & 6 & 4\\ -8 & -9 & -2\end{pmatrix};$

$33. A=\begin{pmatrix}-5 & 8 & -6\\ 6 & -3 & 9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}7 & 9 & 7\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix};$

$34. A=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 7 & 6\\ -7 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ -9 & -9\\ 6 & 9\end{pmatrix};$

$35. A=\begin{pmatrix}0 & -6\\ -4 & -8\\ 6 & -6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -7\\ -8 & -1\end{pmatrix};$

$36. A=\begin{pmatrix}5 & -9 & 2\\ 5 & 7 & -2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 7 & -6 & 4\end{pmatrix};$

$37. A=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 5 & 1\\ -7 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -5 & 9\\ 0 & 2\end{pmatrix};$

$38. A=\begin{pmatrix}-6 & 9 & 3\\ 6 & 2 & -6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ -7 & -7 & 6\end{pmatrix};$

$39. A=\begin{pmatrix}6 & 7\\ 5 & 7\\ 2 & -3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 2 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix};$

$40. A=\begin{pmatrix}8 & 2 & 1\\ 8 & -5 & -2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & 8 & -5\\ -1 & 6 & -8\end{pmatrix};$

$41. A=\begin{pmatrix}-8 & 1\\ 5 & 6\\ -2 & -8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & -7\\ -8 & -8\\ 2 & 2\end{pmatrix};$

$42. A=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 6 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix};$

$43. A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -7 & -2\\ 8 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -9\\ -6 & -4\end{pmatrix};$

$44. A=\begin{pmatrix}3 & -9 & 7\\ 1 & -5 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & 8 & -6\\ -2 & -9 & -9\end{pmatrix};$

$45. A=\begin{pmatrix}9 & -2 & 3\\ -8 & 5 & -5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}9 & -4 & 2\\ 8 & -3 & -4\end{pmatrix};$

$46. A=\begin{pmatrix}-5 & -7 & 5\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -7\\ 5 & 2 & 6\end{pmatrix};$

$47. A=\begin{pmatrix}2 & -7 & -3\\ 0 & -5 & -7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3\\ -7 & 8 & 8\end{pmatrix};$

$48. A=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -7 & -7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix};$

$49. A=\begin{pmatrix}-5 & -6 & -6\\ -2 & -9 & 5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6 & 6 & -2\\ 8 & 1 & 1\end{pmatrix};$

$50. A=\begin{pmatrix}8 & 3 & -8\\ -7 & 6 & -2\\ -9 & -4 & 8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4 & -1 & -5\\ 4 & 1 & 2\\ 8 & -9 & 3\end{pmatrix};$

$51. A=\begin{pmatrix}7 & 6 & 0\\ -6 & -4 & -8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}9 & -2 & 8\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix};$

$52. A=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 5 & -7\\ 0 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & -5\\ 2 & -9\\ 6 & 3\end{pmatrix};$

$53. A=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 9 & -7\end{pmatrix};$

54. $A=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ -7 & 8\\ 3 & -9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 9\\ -2 & -1\end{pmatrix};$

55. $A=\begin{pmatrix}-1 & -9\\ -3 & -3\\ -9 & -5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-8 & -8\\ 0 & -6\\ 9 & 2\end{pmatrix};$

56. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ -3 & 1 & 1\\ -6 & -2 & 6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6 & 0 & -3\\ -1 & 8 & 7\\ 6 & 2 & -9\end{pmatrix};$

57. $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}8 & 5\\ -3 & 3\end{pmatrix};$

58. $A=\begin{pmatrix}9 & 2\\ -6 & 9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix};$

59. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -8\\ 1 & 6 & 9\end{pmatrix};$

60. $A=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -2 & -4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix};$

61. $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1\\ 5 & 4 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 5\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix};$

62. $A=\begin{pmatrix}-7 & 2 & -9\\ 5 & -7 & -7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ -7 & 6 & -8\end{pmatrix};$

63. $A=\begin{pmatrix}8 & -5 & -8\\ -2 & -4 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4 & -4 & 9\\ -6 & 2 & -5\end{pmatrix};$

64. $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 8\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix};$

65. $A=\begin{pmatrix}-9 & 2\\ 7 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}9 & -8\\ -2 & 2\end{pmatrix};$

66. $A=\begin{pmatrix}-7 & -5 & -8\\ -4 & -9 & 4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9 & -2 & 6\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix};$

67. $A=\begin{pmatrix}-8 & 6 & 4\\ 8 & -4 & 6\\ -6 & -3 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3\\ -5 & -5 & 7\\ -8 & -1 & -3\end{pmatrix};$

68. $A=\begin{pmatrix}7 & -4\\ -7 & 7\\ -7 & -4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -5 & -3\\ -8 & -9\end{pmatrix};$

69. $A=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ 5 & -2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & -5\\ 8 & 6\end{pmatrix};$

70. $A=\begin{pmatrix}6 & -4 & -7\\ -5 & -1 & -7\\ -4 & 1 & -3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 9\\ 1 & 1 & -4\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix};$

71. $A=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 5 & -5\\ -1 & -2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9 & 9\\ 8 & -6\\ -3 & 7\end{pmatrix};$

72. $A=\begin{pmatrix}-3 & -5 & -5\\ -8 & -3 & 0\\ 5 & 3 & 7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9 & -8 & -8\\ 6 & 6 & 9\\ -7 & 6 & 8\end{pmatrix};$

73. $A=\begin{pmatrix}9 & -4\\ 7 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -1\\ -2 & -5\end{pmatrix};$

74. $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 3\\ -7 & -6 & -1\\ 1 & -6 & -8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 8\\ -3 & -6 & -7\\ -1 & 8 & -4\end{pmatrix};$

75. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 9\\ 3 & 8 & 0\\ 3 & 5 & -9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -5\\ -8 & -4 & -6\\ 7 & -4 & 0\end{pmatrix};$

76. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -8 & -8\\ -7 & -9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3 & -9\\ -3 & 2\\ 4 & -7\end{pmatrix};$

77. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -5 & 5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & 8\\ -7 & 7\end{pmatrix};$

78. $A=\begin{pmatrix}-6 & -7\\ 4 & -6\\ -3 & 5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 9\\ -9 & 4\end{pmatrix};$

$79. A=\begin{pmatrix}-5&-7&9\\-6&4&-5\\-9&6&1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0&-8&-5\\2&8&-3\\-8&-1&-4\end{pmatrix};$

$80. A=\begin{pmatrix}-7&5&-7\\-7&8&5\\-1&5&7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}8&-7&-7\\2&-5&-7\\7&1&-8\end{pmatrix};$

$81. A=\begin{pmatrix}9&6\\-8&-1\\7&6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2&4\\-6&7\\-9&-2\end{pmatrix};$

$82. A=\begin{pmatrix}-8&9\\0&7\\3&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5&9\\1&5\\7&0\end{pmatrix};$

$83. A=\begin{pmatrix}-8&-5\\8&-1\\2&5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&1\\3&-6\end{pmatrix};$

$84. A=\begin{pmatrix}6&-5\\-5&1\\7&-7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4&4\\0&4\\-1&-3\end{pmatrix};$

$85. A=\begin{pmatrix}-4&7\\3&8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}5&2\\-4&4\end{pmatrix};$

$86. A=\begin{pmatrix}4&9&3\\5&3&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}8&-3&2\\9&3&-1\end{pmatrix};$

$87. A=\begin{pmatrix}6&2&-4\\-6&-4&-8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9&-1&9\\-1&3&-9\end{pmatrix};$

$88. A=\begin{pmatrix}8&-2\\-2&2\\-5&7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6&1\\-9&-4\\-7&-7\end{pmatrix};$

$89. A=\begin{pmatrix}-7&-3\\0&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0&1\\6&3\end{pmatrix};$

$90. A=\begin{pmatrix}7&-5\\0&-9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}8&4\\2&9\end{pmatrix};$

$91. A=\begin{pmatrix}-6&-7&4\\2&-3&3\\9&2&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0&0&-4\\7&6&-8\\-5&-3&9\end{pmatrix};$

$92. A=\begin{pmatrix}-7&-6&-6\\6&-8&9\\6&5&5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4&6&-1\\7&5&0\\-9&-3&-1\end{pmatrix};$

$93. A=\begin{pmatrix}-1&9&-9\\2&3&-7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9&-4&8\\4&6&1\end{pmatrix};$

$94. A=\begin{pmatrix}-6&-4&-7\\0&-1&0\\8&-5&1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2&-2&8\\-2&-1&7\\-1&-8&9\end{pmatrix};$

$95. A=\begin{pmatrix}-1&-9&-5\\-9&8&-6\\4&-7&-4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2&-6&8\\4&-7&-3\\-6&1&2\end{pmatrix};$

$96. A=\begin{pmatrix}-5&-8\\-4&-3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9&-3\\8&-2\end{pmatrix};$

$97. A=\begin{pmatrix}5&4\\-7&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2&7\\7&9\end{pmatrix};$

$98. A=\begin{pmatrix}4&-3&8\\-4&6&-6\\-5&-8&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2&-3&-7\\-2&1&-5\\-9&8&0\end{pmatrix};$

$99. A=\begin{pmatrix}-8&-2&-6\\9&-1&-7\\4&-4&-7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3&-8&7\\2&6&5\\-3&5&7\end{pmatrix};$

$100. A=\begin{pmatrix}-3&2\\8&8\\-7&8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9&2\\2&5\\0&-9\end{pmatrix}.$

1.2. Для заданих матриць A та B знайти AB і BA.

$$1. A=\begin{pmatrix}3&1&-9\\2&2&-6\\5&1&-7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1&9&-6\\5&0&-6\\2&4&-1\end{pmatrix};$$

$$2. A=\begin{pmatrix}-5&-8&1\\-9&-4&-9\\7&9&-8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6&-9&-4\\5&-9&3\\3&-1&-5\end{pmatrix};$$

$$3. A=\begin{pmatrix}6&9&-4\\0&8&-3\\-8&-2&3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-4&1&0\\9&6&-1\\2&7&0\end{pmatrix};$$

$$4. A=\begin{pmatrix}-5&5&8\\-8&7&-7\\-7&2&-8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3&-3&9\\-4&7&0\\0&4&7\end{pmatrix};$$

$$5. A=\begin{pmatrix}2&5&3\\-2&-2&5\\-8&-3&2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3&-2&-9\\3&8&4\\-6&-8&-6\end{pmatrix};$$

$$6. A=\begin{pmatrix}8&6&0\\-4&1&-3\\-9&-2&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-2&2&-7\\-5&-4&1\\0&-2&-5\end{pmatrix};$$

$$7. A=\begin{pmatrix}7&-5&5\\3&-9&6\\5&-1&6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1&6&8\\4&-8&9\\6&-8&3\end{pmatrix};$$

$$8. A=\begin{pmatrix}-3&3&-5\\3&9&8\\-9&-8&-9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6&-5&-2\\7&9&-9\\9&8&-9\end{pmatrix};$$

$$9. A=\begin{pmatrix}2&-9&-5\\6&-6&3\\5&-2&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1&2&-5\\5&7&2\\4&-3&0\end{pmatrix};$$

$$10. A=\begin{pmatrix}-7&-1&2\\2&-6&-7\\-9&-4&7\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1&4&-4\\2&8&6\\5&-1&-5\end{pmatrix};$$

$$11. A=\begin{pmatrix}5&0&4\\-6&-8&-6\\1&-8&0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3&0&-7\\4&5&-3\\-9&-3&-8\end{pmatrix};$$

$$12. A=\begin{pmatrix}8&3&-4\\6&8&-8\\8&-1&-9\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}8&9&4\\-8&4&-2\\-2&5&6\end{pmatrix};$$

$$13. A=\begin{pmatrix}3&-9&-1\\-4&-8&-4\\-5&-3&5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6&-5&3\\-8&4&-2\\-4&0&7\end{pmatrix};$$

$$14. A=\begin{pmatrix}5&2&-1\\5&-3&1\\1&5&4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-4&9&2\\-7&6&-3\\5&7&-9\end{pmatrix};$$

$$15. A=\begin{pmatrix}1&9&8\\9&8&1\\1&-2&5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6&3&1\\-9&-5&-9\\-8&-4&-1\end{pmatrix};$$

$$16. A=\begin{pmatrix}4&-3&7\\3&-8&-9\\-1&-2&8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}5&2&-7\\2&-4&5\\4&4&1\end{pmatrix};$$

$$17. A=\begin{pmatrix}2&3&8\\-3&-4&3\\-9&-9&-4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}2&-3&1\\-4&6&-6\\5&-1&-6\end{pmatrix};$$

$$18. A=\begin{pmatrix}6&7&4\\-8&-3&-7\\4&9&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9&2&6\\5&0&-6\\-4&8&-2\end{pmatrix};$$

$$19. A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-6&4&6\\-2&-7&-1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-7&-8&-1\\3&-7&1\\7&4&8\end{pmatrix};$$

$$20. A=\begin{pmatrix}0&-1&-5\\-9&-2&-2\\9&0&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0&-8&-5\\-3&3&-1\\3&-2&1\end{pmatrix};$$

$$21. A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -5 & -9 & -7 \\ -4 & -5 & 2 \\ -4 & -1 & -7 \end{pmatrix};$$

$$22. A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -8 & -4 & 9 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -7 & 8 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$23. A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -5 & 5 & -7 \\ 7 & 9 & -9 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix};$$

$$24. A=\begin{pmatrix} -8 & 0 & -2 \\ -7 & 5 & 8 \\ 6 & -9 & 5 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix};$$

$$25. A=\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & -4 \\ -7 & 1 & 6 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -7 \\ -1 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$26. A=\begin{pmatrix} -7 & 9 & -7 \\ 5 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 7 \\ -7 & 7 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix};$$

$$27. A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -8 & 4 & -5 \\ 6 & -9 & -8 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix};$$

$$28. A=\begin{pmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \\ -7 & -5 & -8 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 3 & 8 & 4 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix};$$

$$29. A=\begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 \\ -1 & 7 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$30. A=\begin{pmatrix} 8 & -5 & 7 \\ -4 & -3 & 3 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -6 \\ -5 & 1 & -8 \\ -9 & 9 & -8 \end{pmatrix};$$

$$31. A=\begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 5 & -6 & -4 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -9 & -9 & -4 \end{pmatrix};$$

$$32. A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 5 & 2 & 9 \\ -8 & -8 & -8 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & -8 \\ 9 & 1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$33. A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 9 \\ 5 & -8 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 2 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \\ -7 & 8 & -7 \end{pmatrix};$$

$$34. A=\begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ -3 & 9 & 5 \\ -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -8 & -6 & -3 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$35. A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 8 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -5 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -5 & -5 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$36. A=\begin{pmatrix} -9 & 5 & 9 \\ 7 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -9 \\ 7 & -5 & -3 \\ -6 & -7 & -3 \end{pmatrix};$$

$$37. A=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ -3 & -7 & 4 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -9 & -4 & -2 \\ 9 & -5 & -5 \end{pmatrix};$$

$$38. A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & -5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 8 & -4 & -4 \\ -6 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$39. A=\begin{pmatrix} -7 & -4 & -6 \\ 4 & -4 & 7 \\ -9 & -1 & -1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -8 \\ -5 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$40. A=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 6 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 \\ -6 & -7 & -9 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$41. A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -7 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -7 & -7 & -8 \\ -8 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & -6 \end{pmatrix};$$

$$42. A=\begin{pmatrix} -7 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ 9 & -8 & 3 \\ -9 & 9 & -2 \end{pmatrix};$$

$$43.A=\begin{pmatrix}9&6&9\\5&-2&-4\\-3&3&-9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}5&-7&6\\-4&-7&6\\1&2&-2\end{pmatrix};$$

$$44.A=\begin{pmatrix}-2&6&-7\\3&5&5\\-1&-7&-8\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0&-8&4\\9&-4&6\\0&-6&-1\end{pmatrix};$$

$$45.A=\begin{pmatrix}-4&2&-5\\-5&-5&0\\8&-5&-5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-4&9&8\\5&-3&-2\\-5&-4&-5\end{pmatrix};$$

$$46.A=\begin{pmatrix}1&7&4\\5&8&-7\\-5&1&5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}7&9&1\\0&-8&3\\7&2&6\end{pmatrix};$$

$$47.A=\begin{pmatrix}1&-8&0\\2&3&0\\-2&8&-7\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}6&-8&8\\-7&-7&2\\0&2&6\end{pmatrix};$$

$$48.A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-4&-7&-7\\-4&-5&-8\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-6&6&7\\9&0&8\\5&-9&0\end{pmatrix};$$

$$49.A=\begin{pmatrix}7&-1&2\\3&4&-8\\2&-3&-9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-7&0&4\\9&3&-5\\9&-5&4\end{pmatrix};$$

$$50.A=\begin{pmatrix}3&-8&5\\8&-8&-4\\-4&-3&-7\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-5&-4&6\\2&-3&-4\\-9&-3&-7\end{pmatrix};$$

$$51.A=\begin{pmatrix}-4&-1&-7\\-9&-3&-8\\9&1&4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&-9&-4\\8&2&-9\\5&-5&6\end{pmatrix};$$

$$52.A=\begin{pmatrix}3&8&-3\\-7&2&-7\\-1&1&-1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}5&-3&9\\-4&-3&6\\-6&5&0\end{pmatrix};$$

$$53.A=\begin{pmatrix}1&3&3\\-9&6&4\\-6&8&9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}5&7&-4\\2&-6&8\\2&0&-9\end{pmatrix};$$

$$54.A=\begin{pmatrix}-7&-5&-1\\-5&3&-5\\-1&-9&9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-3&-5&1\\5&-4&9\\5&-6&-7\end{pmatrix};$$

$$55.A=\begin{pmatrix}-7&0&5\\-2&4&9\\8&1&5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-3&-7&8\\-8&5&-3\\-1&-8&-7\end{pmatrix};$$

$$56.A=\begin{pmatrix}-1&-3&9\\-9&-6&-6\\-1&7&-6\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}9&-7&-8\\-5&-9&1\\-7&9&-5\end{pmatrix};$$

$$57.A=\begin{pmatrix}2&9&4\\4&4&2\\-3&-3&1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-8&7&8\\-4&2&8\\1&-3&4\end{pmatrix};$$

$$58.A=\begin{pmatrix}0&7&-3\\-2&-5&-9\\-4&-2&-1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}2&-9&8\\-9&9&-8\\1&9&4\end{pmatrix};$$

$$59.A=\begin{pmatrix}-5&-5&5\\-2&-3&7\\-2&3&9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}6&-5&-1\\9&8&3\\-1&5&-2\end{pmatrix};$$

$$60.A=\begin{pmatrix}-8&-9&9\\1&0&9\\-1&-6&9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-7&0&1\\-3&2&-3\\-1&1&3\end{pmatrix};$$

$$61.A=\begin{pmatrix}5&7&2\\4&-8&-7\\2&1&-4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-2&-6&9\\4&-6&6\\-1&0&-4\end{pmatrix};$$

$$62.A=\begin{pmatrix}-9&-6&4\\-7&-9&-4\\-4&3&0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1&7&2\\6&3&-4\\6&-7&-9\end{pmatrix};$$

$$63.A=\begin{pmatrix}-1&6&-7\\-3&3&7\\7&-2&-8\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}9&3&7\\-2&-1&3\\-6&4&-8\end{pmatrix};$$

$$64.A=\begin{pmatrix}-4&8&6\\5&-8&-4\\5&8&5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}7&-3&0\\2&4&-9\\-8&-9&-2\end{pmatrix};$$

$$65.A=\begin{pmatrix}0&-5&-4\\7&4&-6\\5&6&8\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}4&-7&-9\\-3&-4&-9\\1&1&1\end{pmatrix};$$

$$66.A=\begin{pmatrix}5&-8&8\\5&1&8\\-5&5&4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}5&4&-3\\-3&-4&-5\\-6&-8&-4\end{pmatrix};$$

$$67.A=\begin{pmatrix}2&9&-5\\5&2&7\\-9&6&1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-8&-4&5\\7&7&-7\\8&-5&-3\end{pmatrix};$$

$$68.A=\begin{pmatrix}-4&-5&0\\-3&-8&-5\\-1&5&-3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1&-5&1\\9&5&2\\3&-4&-3\end{pmatrix};$$

$$69.A=\begin{pmatrix}5&6&-8\\0&-5&4\\-4&-8&-6\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1&9&6\\2&8&-6\\-2&-1&-9\end{pmatrix};$$

$$70.A=\begin{pmatrix}-2&-6&-8\\3&-7&0\\8&-8&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-3&2&0\\-8&-9&6\\-6&6&-7\end{pmatrix};$$

$$71.A=\begin{pmatrix}-4&0&-7\\9&7&-8\\6&6&9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}7&-3&9\\0&2&-4\\1&1&-3\end{pmatrix};$$

$$72.A=\begin{pmatrix}7&8&4\\1&2&-9\\1&6&4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-3&-5&7\\-9&6&3\\3&-8&-9\end{pmatrix};$$

$$73.A=\begin{pmatrix}-3&2&-2\\8&-5&-2\\9&-1&-7\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}7&-1&-1\\5&-8&4\\-5&9&5\end{pmatrix};$$

$$74.A=\begin{pmatrix}3&6&-4\\7&-3&6\\-2&3&-3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1&-6&0\\-7&5&-8\\4&-4&-6\end{pmatrix};$$

$$75.A=\begin{pmatrix}-5&6&-6\\-3&3&1\\1&8&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-7&7&-9\\-6&0&-2\\6&6&9\end{pmatrix};$$

$$76.A=\begin{pmatrix}-6&-9&3\\-5&-3&-6\\6&-3&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}4&-3&-5\\-5&3&9\\-2&-6&-6\end{pmatrix};$$

$$77.A=\begin{pmatrix}0&-1&-7\\8&9&6\\-2&5&4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0&0&9\\9&-3&-3\\-1&0&-2\end{pmatrix};$$

$$78.A=\begin{pmatrix}4&9&-1\\-2&1&-2\\4&9&7\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-3&-3&-2\\-8&2&-7\\-2&9&0\end{pmatrix};$$

$$79.A=\begin{pmatrix}6&-3&0\\-8&9&3\\1&-2&4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-3&-9&3\\-5&-9&-6\\7&9&-9\end{pmatrix};$$

$$80.A=\begin{pmatrix}-7&-2&-1\\4&7&-5\\-7&-7&-8\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}9&8&-7\\4&4&-9\\-8&-2&-3\end{pmatrix};$$

$$81.A=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\-8&7&-6\\-3&-7&-2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}6&-4&8\\-4&-1&1\\-6&-9&-7\end{pmatrix};$$

$$82.A=\begin{pmatrix}6&-1&-2\\8&-4&9\\-5&-2&9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}2&0&-5\\-7&-5&-5\\-5&-2&-9\end{pmatrix};$$

$$83.A=\begin{pmatrix}-1&-7&0\\-1&-4&1\\6&-6&-2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}8&8&-4\\7&-7&-2\\8&9&9\end{pmatrix};$$

$$84.A=\begin{pmatrix}7&-9&1\\-8&-2&-6\\-7&-7&9\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-5&-7&-4\\-1&-3&-5\\1&2&-7\end{pmatrix};$$

$$85.A=\begin{pmatrix}-3&-9&-3\\2&-8&6\\-1&-5&-3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1&-4&5\\5&1&-9\\4&-6&7\end{pmatrix};$$

$$86.A=\begin{pmatrix}3&0&6\\-8&9&6\\-4&1&-7\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}9&-4&4\\6&4&9\\-8&0&-4\end{pmatrix};$$

$$87. A=\begin{pmatrix}-4&-3&-5\\3&7&6\\-6&9&4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9&6&1\\3&1&-2\\2&1&-4\end{pmatrix};$$

$$88. A=\begin{pmatrix}-3&2&-5\\5&-8&-9\\-3&6&-4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}4&1&-2\\-9&-5&8\\6&0&9\end{pmatrix};$$

$$89. A=\begin{pmatrix}7&-7&3\\2&3&2\\0&-8&-4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}9&-3&-1\\-7&-8&-5\\-8&-2&6\end{pmatrix};$$

$$90. A=\begin{pmatrix}9&0&-1\\-5&-6&4\\1&6&1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0&8&0\\-3&4&4\\-9&-2&3\end{pmatrix};$$

$$91. A=\begin{pmatrix}2&2&-5\\7&0&6\\-8&-8&0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}5&6&6\\-8&-3&0\\-2&-2&-6\end{pmatrix};$$

$$92. A=\begin{pmatrix}4&-7&-3\\-7&3&-8\\-6&4&8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}0&6&-1\\-8&-6&-3\\-3&-8&-3\end{pmatrix};$$

$$93. A=\begin{pmatrix}4&9&-4\\2&2&1\\-6&-4&4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-5&-5&5\\-6&8&9\\2&-3&-9\end{pmatrix};$$

$$94. A=\begin{pmatrix}-8&-9&2\\3&-2&6\\2&-9&-3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-6&7&-9\\-5&-7&-3\\-6&2&-9\end{pmatrix};$$

$$95. A=\begin{pmatrix}-4&5&1\\-9&5&-5\\8&4&4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6&-7&2\\9&-1&0\\-2&-8&4\end{pmatrix};$$

$$96. A=\begin{pmatrix}9&-7&0\\3&7&5\\-8&9&8\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}5&5&-6\\4&-3&0\\4&-8&2\end{pmatrix};$$

$$97. A=\begin{pmatrix}1&-7&-6\\-7&6&-7\\-3&3&1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-9&-1&-6\\0&-8&5\\-8&7&-9\end{pmatrix};$$

$$98. A=\begin{pmatrix}-5&7&7\\-1&-5&4\\-2&5&-5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1&-6&2\\8&1&1\\4&3&-6\end{pmatrix};$$

$$99. A=\begin{pmatrix}-1&-7&5\\-3&2&2\\4&-2&6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-8&7&-7\\-7&9&-6\\1&-8&4\end{pmatrix};$$

$$100. A=\begin{pmatrix}-4&0&3\\5&7&6\\-7&5&-6\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3&-6&5\\-9&5&0\\-9&1&-6\end{pmatrix}.$$

1.3. Знайти $\det A$, $\det B$, $\det AB$, $\det BA$. Переконатись у тому, що $\det AB = \det BA = \det A \cdot \det B$. Матриці A і B взяти із завдання 1.2.

1.4. Для заданої матриці A:

а) обчислити det A шляхом занулення рядка чи стовпця та за теоремою розкладу;

б) знайти обернену матрицю.

$$1. A=\begin{pmatrix}-4&-2&-9\\-9&8&-4\\-6&1&0\end{pmatrix}; \qquad 2. A=\begin{pmatrix}9&0&5\\5&-7&-2\\-1&3&-5\end{pmatrix}; \qquad 3. A=\begin{pmatrix}1&8&-7\\-2&5&6\\-7&3&7\end{pmatrix};$$

$$4.A=\begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$5.A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 7 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix};$$

$$6.A=\begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & -9 \end{pmatrix};$$

$$7.A=\begin{pmatrix} -6 & -5 & -9 \\ 3 & 8 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$8.A=\begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & -6 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$9.A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix};$$

$$10.A=\begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ 6 & 8 & 8 \\ -1 & -6 & 6 \end{pmatrix};$$

$$11.A=\begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 8 & 3 & 6 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix};$$

$$12.A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -5 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix};$$

$$13.A=\begin{pmatrix} -4 & -8 & 9 \\ -6 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$14.A=\begin{pmatrix} -6 & -9 & -8 \\ -6 & 5 & -8 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$15.A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -6 & 1 & -3 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix};$$

$$16.A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix};$$

$$17.A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 8 & -9 & -6 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix};$$

$$18.A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 6 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix};$$

$$19.A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 8 & -2 & 3 \\ -9 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$20.A=\begin{pmatrix} 8 & -9 & -6 \\ -6 & -4 & 1 \\ 9 & -7 & -8 \end{pmatrix};$$

$$21.A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

$$22.A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -9 \\ -5 & -1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$23.A=\begin{pmatrix} -9 & 5 & 5 \\ -9 & 0 & -8 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix};$$

$$24.A=\begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ -3 & -7 & -3 \end{pmatrix};$$

$$25.A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -4 & 8 & -7 \\ -5 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

$$26.A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 2 & -7 & -3 \\ -6 & 1 & 9 \end{pmatrix};$$

$$27.A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 6 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$28.A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$29.A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 9 & -6 & -3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$30.A=\begin{pmatrix} -4 & -7 & 2 \\ 6 & -8 & 8 \\ -9 & -1 & 9 \end{pmatrix};$$

$31.A=\begin{pmatrix}-1&-8&3\\0&-7&-3\\-7&-1&5\end{pmatrix};$

$32.A=\begin{pmatrix}-5&0&7\\-4&5&9\\0&-1&-1\end{pmatrix};$

$33.A=\begin{pmatrix}3&-1&9\\9&-7&-8\\7&-8&3\end{pmatrix};$

$34.A=\begin{pmatrix}-7&9&9\\-6&-7&8\\7&5&-1\end{pmatrix};$

$35.A=\begin{pmatrix}0&5&1\\1&-5&-3\\6&0&8\end{pmatrix};$

$36.A=\begin{pmatrix}-8&-5&-3\\1&9&-8\\-2&-5&-2\end{pmatrix};$

$37.A=\begin{pmatrix}-4&-8&5\\-7&-1&6\\9&-8&4\end{pmatrix};$

$38.A=\begin{pmatrix}1&-2&-6\\3&9&-9\\-5&-5&-4\end{pmatrix};$

$39.A=\begin{pmatrix}-6&-7&9\\4&-4&-5\\-2&3&1\end{pmatrix};$

$40.A=\begin{pmatrix}-2&2&-7\\-4&-1&4\\7&-4&6\end{pmatrix};$

$41.A=\begin{pmatrix}2&7&-9\\6&1&-4\\-2&-9&-5\end{pmatrix};$

$42.A=\begin{pmatrix}-3&-4&1\\-3&-2&9\\-7&6&0\end{pmatrix};$

$43.A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&7&-4\\-2&-9&1\end{pmatrix};$

$44.A=\begin{pmatrix}-8&9&2\\4&-8&9\\-8&-1&4\end{pmatrix};$

$45.A=\begin{pmatrix}2&7&0\\5&-8&2\\7&1&-9\end{pmatrix};$

$46.A=\begin{pmatrix}-1&-8&8\\-1&-4&-9\\6&1&-3\end{pmatrix};$

$47.A=\begin{pmatrix}6&-8&-3\\7&-8&-1\\6&-3&8\end{pmatrix};$

$48.A=\begin{pmatrix}1&5&-9\\8&3&1\\3&-4&7\end{pmatrix};$

$49.A=\begin{pmatrix}-1&7&6\\-7&2&8\\5&-7&8\end{pmatrix};$

$50.A=\begin{pmatrix}4&-1&6\\-3&-6&4\\8&-6&-5\end{pmatrix};$

$51.A=\begin{pmatrix}-3&-9&1\\7&6&5\\5&3&8\end{pmatrix};$

$52.A=\begin{pmatrix}-2&1&4\\-3&3&4\\-4&-5&8\end{pmatrix};$

$53.A=\begin{pmatrix}-9&9&-1\\9&-4&-6\\5&8&8\end{pmatrix};$

$54.A=\begin{pmatrix}-4&5&4\\3&-1&-7\\-3&2&-6\end{pmatrix};$

$55.A=\begin{pmatrix}1&1&-8\\2&6&2\\7&7&-2\end{pmatrix};$

$56.A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-7&4&8\\-2&4&5\end{pmatrix};$

$57.A=\begin{pmatrix}-6&-8&1\\-9&-9&-7\\6&-9&-6\end{pmatrix};$

$58. A=\begin{pmatrix}-6 & 9 & -4\\ 2 & -3 & 0\\ 8 & -3 & -1\end{pmatrix};$

$59. A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 9\\ 2 & -7 & -5\\ 9 & -3 & 1\end{pmatrix};$

$60. A=\begin{pmatrix}6 & -1 & -9\\ 6 & 6 & -8\\ 9 & -8 & -4\end{pmatrix};$

$61. A=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -7\\ 5 & 0 & -5\\ -5 & 1 & -8\end{pmatrix};$

$62. A=\begin{pmatrix}6 & 8 & 3\\ 3 & 1 & 5\\ -6 & 4 & -1\end{pmatrix};$

$63. A=\begin{pmatrix}9 & -8 & 6\\ -9 & 1 & -3\\ 7 & 2 & -5\end{pmatrix};$

$64. A=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 5\\ -9 & 1 & 0\\ 8 & -9 & -8\end{pmatrix};$

$65. A=\begin{pmatrix}6 & 5 & -1\\ -6 & 2 & -2\\ -9 & 1 & -2\end{pmatrix};$

$66. A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 6\\ 4 & -1 & 9\end{pmatrix};$

$67. A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 4 & -9 & -1\\ 9 & 7 & -8\end{pmatrix};$

$68. A=\begin{pmatrix}-7 & -1 & -8\\ 2 & -9 & 0\\ 8 & -5 & -8\end{pmatrix};$

$69. A=\begin{pmatrix}8 & -1 & 5\\ 4 & 6 & 0\\ 3 & -5 & 9\end{pmatrix};$

$70. A=\begin{pmatrix}-8 & 9 & -6\\ -5 & 8 & 0\\ -4 & -5 & 1\end{pmatrix};$

$71. A=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -1\\ -9 & 4 & 0\\ 4 & 5 & -7\end{pmatrix};$

$72. A=\begin{pmatrix}1 & 6 & -9\\ -4 & 1 & 0\\ -9 & -9 & -2\end{pmatrix};$

$73. A=\begin{pmatrix}-8 & 9 & -3\\ -2 & 9 & -1\\ 8 & 1 & 5\end{pmatrix};$

$74. A=\begin{pmatrix}-3 & 8 & 8\\ 4 & 1 & 7\\ -4 & -3 & 5\end{pmatrix};$

$75. A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 9\\ -4 & 2 & 9\\ -5 & 1 & -6\end{pmatrix};$

$76. A=\begin{pmatrix}0 & 9 & 0\\ -1 & 2 & -7\\ -4 & -7 & 2\end{pmatrix};$

$77. A=\begin{pmatrix}-3 & -7 & -2\\ -5 & -4 & 0\\ -9 & 4 & 1\end{pmatrix};$

$78. A=\begin{pmatrix}-6 & 6 & 6\\ 7 & -6 & -9\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix};$

$79. A=\begin{pmatrix}8 & -7 & 5\\ -5 & -2 & -1\\ 7 & 5 & 5\end{pmatrix};$

$80. A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 7\\ 4 & 1 & 5\\ -8 & -1 & 1\end{pmatrix};$

$81. A=\begin{pmatrix}-4 & -5 & -8\\ 6 & 2 & -9\\ 1 & 9 & 1\end{pmatrix};$

$82. A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 8 & -6 & 1\\ -5 & -3 & 5\end{pmatrix};$

$83. A=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 2\\ -9 & -3 & -3\\ -6 & -7 & 6\end{pmatrix};$

$84. A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 5 & -6 & 8\\ 4 & -5 & -5\end{pmatrix};$

$85. A=\begin{pmatrix} -6 & -7 & 8 \\ 6 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & -9 \end{pmatrix};$ $91. A=\begin{pmatrix} -8 & 9 & -1 \\ -4 & 6 & 6 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix};$ $97. A=\begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 9 & -9 & -1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix};$

$86. A=\begin{pmatrix} -4 & -9 & -5 \\ -6 & 4 & -6 \\ -8 & 1 & -6 \end{pmatrix};$ $92. A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ -7 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix};$ $98. A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -7 & 3 & -4 \\ 8 & 0 & -9 \end{pmatrix};$

$87. A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix};$ $93. A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 3 & -5 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix};$ $99. A=\begin{pmatrix} -9 & 9 & 5 \\ -6 & -8 & 1 \\ 9 & 7 & -5 \end{pmatrix};$

$88. A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 3 & -5 & 8 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$ $94. A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ -8 & -2 & -8 \\ -9 & -3 & -3 \end{pmatrix};$ $100. A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$

$89. A=\begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -8 & 5 & 9 \end{pmatrix};$ $95. A=\begin{pmatrix} -5 & 7 & -1 \\ -9 & 6 & -8 \\ 7 & -3 & -8 \end{pmatrix};$

$90. A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ -1 & 6 & 3 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix};$ $96. A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 6 & -7 & -9 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix};$

1.5. Розв'язати задані системи трьома методами: матричним, методом Крамера, методом Гауса.

$$1.1. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -25 \\ -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -27 \end{cases}$$

$$2.1. \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -10 \\ -x_2 + 3x_3 = -22 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -14 \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} 4x_1 - 3x_3 - 9x_4 = 77 \\ -x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 77 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3 \\ 5x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1 \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 = -13 \\ 6x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 69 \\ -6x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 22 \\ 4x_1 - 7x_2 - 7x_4 = -54 \end{cases}$$

$$3.1.\ \begin{cases} -5x_1+8x_2=-40 \\ -x_1-5x_2-8x_3=81 \\ -2x_2-7x_3=59 \end{cases}$$

$$3.2.\ \begin{cases} -6x_1-3x_2-5x_3+8x_4=-124 \\ x_1-8x_2+3x_3+8x_4=-10 \\ -2x_1-3x_2+3x_3+9x_4=-36 \\ -3x_1-x_2-9x_3-3x_4=-79 \end{cases}$$

$$6.1.\ \begin{cases} -4x_1-x_2+4x_3=31 \\ 4x_1-7x_2+3x_3=24 \\ -9x_1+6x_2+7x_3=60 \end{cases}$$

$$6.2.\ \begin{cases} -3x_1+x_2+4x_3+2x_4=46 \\ 3x_1-3x_2+9x_3+2x_4=7 \\ -3x_1+3x_2-2x_3+3x_4=23 \\ x_1+5x_2+5x_3+4x_4=33 \end{cases}$$

$$4.1.\ \begin{cases} 6x_1-6x_2+3x_3=30 \\ -9x_1-x_2+2x_3=-31 \\ -2x_1-9x_2-9x_3=66 \end{cases}$$

$$4.2.\ \begin{cases} 2x_1+9x_2-2x_3-5x_4=-41 \\ -2x_1-7x_2+3x_3=36 \\ 3x_1-2x_2-5x_3-4x_4=-12 \\ -6x_1-3x_2+7x_3+4x_4=24 \end{cases}$$

$$7.1.\ \begin{cases} 6x_1+4x_2+3x_3=18 \\ 2x_1-7x_2=-40 \\ 5x_1+6x_2-2x_3=49 \end{cases}$$

$$7.2.\ \begin{cases} -6x_1+5x_2+8x_3-x_4=0 \\ 2x_1+7x_2-3x_3+7x_4=89 \\ -4x_1-5x_2-9x_3=-80 \\ 4x_1+x_2+7x_3-8x_4=-2 \end{cases}$$

$$5.1.\ \begin{cases} 8x_1-7x_2-9x_3=2 \\ -6x_1-3x_2-x_3=-50 \\ 5x_1+4x_2+9x_3=64 \end{cases}$$

$$5.2.\ \begin{cases} 8x_1-3x_2+4x_3-3x_4=38 \\ -6x_1+3x_2-x_3-8x_4=-99 \\ -6x_1+5x_2+9x_3-2x_4=-101 \\ 9x_1+2x_2-7x_3-5x_4=46 \end{cases}$$

$$8.1.\ \begin{cases} -6x_1+2x_2+9x_3=-7 \\ 5x_1+3x_2-7x_3=10 \\ -x_1-8x_2-3x_3=-5 \end{cases}$$

$$8.2.\ \begin{cases} 4x_1-7x_2+7x_3-4x_4=3 \\ 6x_1+6x_2+x_3+7x_4=-5 \\ -x_1+3x_2-x_3-4x_4=0 \\ -6x_1+x_2-5x_4=6 \end{cases}$$

9.1. $\begin{cases} -6x_1+5x_2+2x_3=75 \\ -9x_1+9x_2+3x_3=120 \\ 4x_1-9x_2=-81 \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} -6x_1+6x_2-8x_3+x_4=77 \\ -8x_1+8x_2+3x_3-x_4=-32 \\ 9x_1-8x_2-6x_3-x_4=43 \\ 5x_1+2x_3-7x_4=-83 \end{cases}$

10.1. $\begin{cases} 3x_1+8x_2+3x_3=45 \\ -2x_1-3x_2-5x_3=-57 \\ -9x_1-9x_2+4x_3=-18 \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} 9x_1+9x_2-6x_3+3x_4=12 \\ -6x_1+5x_2+4x_3+x_4=53 \\ -5x_1+2x_2+4x_3-2x_4=53 \\ -5x_1-9x_2-5x_3+2x_4=-80 \end{cases}$

11.1. $\begin{cases} -4x_1+4x_2-7x_3=73 \\ 4x_1-9x_2-9x_3=9 \\ 8x_1+3x_3=-21 \end{cases}$

11.2. $\begin{cases} -4x_1+6x_2+x_3+8x_4=92 \\ 7x_1-8x_2+3x_3-8x_4=-109 \\ -x_1-x_2+2x_3+x_4=12 \\ -2x_1+5x_2-x_3+3x_4=49 \end{cases}$

12.1. $\begin{cases} 9x_1+4x_2-8x_3=20 \\ 8x_1-2x_2-6x_3=0 \\ 8x_1+8x_2-6x_3=40 \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} -2x_1-2x_2+6x_3+6x_4=-90 \\ 9x_1+x_3+8x_4=6 \\ 9x_1+4x_2-3x_3-4x_4=86 \\ -9x_1-2x_2-4x_3-8x_4=35 \end{cases}$

13.1. $\begin{cases} -2x_1+3x_2=-1 \\ 8x_1+2x_2+7x_3=-31 \\ x_1+2x_2-8x_3=-57 \end{cases}$

13.2. $\begin{cases} 2x_1+9x_2+5x_4=130 \\ -6x_1+3x_2-9x_4=-78 \\ 9x_1+3x_2+x_3-8x_4=43 \\ 7x_1+x_2+5x_3+8x_4=159 \end{cases}$

14.1. $\begin{cases} -2x_1-6x_2-x_3=25 \\ 2x_1-9x_2-4x_3=50 \\ -2x_1-9x_2-8x_3=94 \end{cases}$

14.2. $\begin{cases} -5x_1+2x_2-7x_3-7x_4=94 \\ -2x_1-6x_2-x_3-4x_4=31 \\ 7x_1-3x_2+3x_3-5x_4=-10 \\ 4x_1+7x_2+8x_3+8x_4=-104 \end{cases}$

15.1. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 = -48 \\ 7x_1 + 8x_2 = -67 \\ 9x_1 + x_2 + 9x_3 = -40 \end{cases}$

15.2. $\begin{cases} x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 43 \\ -4x_1 + 6x_2 + x_4 = 25 \\ 6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 113 \\ -2x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -132 \end{cases}$

16.1. $\begin{cases} -6x_1 + x_2 - 9x_3 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = -43 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -25 \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -48 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ -6x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = -18 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -24 \end{cases}$

17.1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -12 \\ 6x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -48 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 33 \end{cases}$

17.2. $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -125 \\ -x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 = -67 \\ -5x_1 - 9x_3 - 5x_4 = 39 \\ -5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -51 \end{cases}$

18.1. $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - 8x_3 = 56 \\ -4x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 4 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 20 \end{cases}$

18.2. $\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 61 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -5x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 63 \\ 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -35 \end{cases}$

19.1. $\begin{cases} -8x_1 - 3x_2 - 8x_3 = -46 \\ -9x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -100 \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

19.2. $\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 98 \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 71 \\ -x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 2x_4 = -17 \\ 3x_1 + 5x_3 - x_4 = 16 \end{cases}$

20.1. $\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 + 6x_3 = -94 \\ 7x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -75 \\ 9x_1 - 8x_2 + x_3 = -133 \end{cases}$

20.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1 \\ -6x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -2 \\ -6x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 58 \\ -9x_1 + 5x_2 + x_3 + 9x_4 = 54 \end{cases}$

21.1. $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 = 30 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 66 \end{cases}$

21.2. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 30 \\ 8x_1 + 8x_3 + 9x_4 = 36 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 24 \\ 8x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -92 \end{cases}$

22.1. $\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 = -58 \\ 7x_2 - 9x_3 = -74 \\ -2x_1 = -6 \end{cases}$

22.2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = -33 \\ 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 78 \\ -3x_1 - 8x_2 - 9x_4 = -100 \\ -9x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 69 \end{cases}$

23.1. $\begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + x_3 = -5 \\ -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 = -43 \end{cases}$

23.2. $\begin{cases} -4x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 9x_4 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 68 \\ -5x_1 + 9x_2 - x_3 + 4x_4 = 34 \end{cases}$

24.1. $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 - x_3 = -39 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -24 \\ 2x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$

24.2. $\begin{cases} -6x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 111 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 4x_4 = -80 \\ 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 3 \\ -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 9x_4 = 126 \end{cases}$

25.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6x_3 = -22 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 20 \\ -2x_2 - 9x_3 = -23 \end{cases}$

25.2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = -53 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 12 \\ -8x_2 - 4x_4 = -52 \\ 8x_1 - 6x_2 + x_3 = -100 \end{cases}$

26.1. $\begin{cases} -5x_1 - 6x_2 + 6x_3 = -69 \\ -5x_1 - 9x_2 + 4x_3 = -76 \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 = 29 \end{cases}$

26.2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 56 \\ -9x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 = -141 \\ -5x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 8x_4 = -7 \\ 8x_1 - 9x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 67 \end{cases}$

27.1. $\begin{cases} 2x_1+8x_2-2x_3=-18 \\ -4x_1-x_2-4x_3=-18 \\ x_2-4x_3=-14 \end{cases}$

27.2. $\begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3-6x_4=-7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3-x_4=2 \\ -x_1-9x_2-6x_3+x_4=14 \\ -7x_1+2x_2+6x_3+6x_4=-6 \end{cases}$

28.1. $\begin{cases} -2x_1-2x_2+7x_3=-83 \\ 5x_1-9x_2+4x_3=-69 \\ 3x_1-7x_3=73 \end{cases}$

28.2. $\begin{cases} -4x_1-6x_2+8x_3-4x_4=-32 \\ -6x_1+7x_2-3x_3+6x_4=99 \\ -2x_1+7x_2-3x_3-8x_4=33 \\ -4x_1+x_2+2x_3-2x_4=22 \end{cases}$

29.1. $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=-6 \\ -9x_2-5x_3=-41 \\ 9x_1-5x_2+6x_3=58 \end{cases}$

29.2. $\begin{cases} -2x_1-7x_2-2x_3+8x_4=16 \\ -3x_1-5x_2+2x_3+8x_4=4 \\ -x_1+6x_2-2x_3-6x_4=2 \\ -6x_1+x_2+x_3+6x_4=0 \end{cases}$

30.1. $\begin{cases} 4x_1-4x_2+8x_3=12 \\ -x_1+3x_2+8x_3=41 \\ 8x_1-5x_2-7x_3=-62 \end{cases}$

30.2. $\begin{cases} -2x_1+4x_2-4x_3=70 \\ 9x_1-x_3+3x_4=-22 \\ 6x_1-9x_2+8x_3-7x_4=-102 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+9x_4=-134 \end{cases}$

31.1. $\begin{cases} 4x_1-9x_2=-11 \\ -x_1-4x_2+8x_3=0 \\ -7x_1+6x_2+6x_3=2 \end{cases}$

31.2. $\begin{cases} -9x_2-7x_3-2x_4=-18 \\ 6x_1-3x_2+6x_3+9x_4=-39 \\ 5x_1+3x_2-x_3-x_4=71 \\ -4x_1-4x_2+9x_3+6x_4=-145 \end{cases}$

32.1. $\begin{cases} -3x_1-7x_2-6x_3=-33 \\ -6x_2-x_3=-46 \\ -8x_1-x_2+5x_3=-97 \end{cases}$

32.2. $\begin{cases} -8x_1-4x_2-9x_4=-109 \\ 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=64 \\ 2x_1+7x_2-x_3-x_4=7 \\ -8x_1-3x_2-6x_4=-94 \end{cases}$

$$33.1.\ \begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = -62 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -19 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$33.2.\ \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 20 \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -48 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_4 = 34 \\ 5x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -19 \end{cases}$$

$$34.1.\ \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 27 \\ -6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -45 \\ -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$34.2.\ \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 6x_4 = -32 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -33 \\ -7x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = -64 \\ -8x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 6x_4 = -106 \end{cases}$$

$$35.1.\ \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 = -31 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 19 \end{cases}$$

$$35.2.\ \begin{cases} -4x_1 - 9x_2 + 8x_3 = 39 \\ -7x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 26 \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 33 \\ 6x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -14 \end{cases}$$

$$36.1.\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -25 \\ 7x_1 - 6x_2 + 8x_3 = -154 \end{cases}$$

$$36.2.\ \begin{cases} -x_1 + 2x_3 - 6x_4 = -2 \\ 6x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -19 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 = -10 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$$

$$37.1.\ \begin{cases} -7x_1 + 6x_3 = -22 \\ -3x_1 - 7x_2 - 7x_3 = 20 \\ 9x_2 = 36 \end{cases}$$

$$37.2.\ \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 46 \\ -x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 70 \\ -8x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -92 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 9x_4 = -23 \end{cases}$$

$$38.1.\ \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -36 \\ -8x_1 - 5x_2 + 8x_3 = -45 \end{cases}$$

$$38.2.\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 54 \\ 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 27 \\ -6x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 54 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -17 \end{cases}$$

39.1. $\begin{cases} 5x_1+8x_2+5x_3=11 \\ 6x_1+8x_2-3x_3=28 \\ -8x_1-3x_2-8x_3=2 \end{cases}$

39.2. $\begin{cases} -6x_1+4x_2+4x_3+x_4=15 \\ 2x_1+8x_2+8x_3+3x_4=-67 \\ -6x_1+5x_2-2x_3+9x_4=2 \\ 2x_1-9x_2-4x_3-2x_4=57 \end{cases}$

40.1. $\begin{cases} -x_1+5x_2-5x_3=41 \\ -x_1+8x_2=36 \\ -8x_1+5x_2+2x_3=-15 \end{cases}$

40.2. $\begin{cases} -x_1+8x_2-5x_3+6x_4=-118 \\ 3x_1-3x_2+6x_3+3x_4=30 \\ -4x_1-5x_2+2x_3-2x_4=17 \\ -7x_1+4x_2+6x_3+6x_4=-133 \end{cases}$

41.1. $\begin{cases} 6x_1+8x_2-8x_3=-94 \\ -5x_1+3x_2+2x_3=17 \\ 2x_1+6x_2-2x_3=-32 \end{cases}$

41.2. $\begin{cases} 3x_1-x_2-9x_3-x_4=110 \\ 6x_1+7x_2+2x_3-4x_4=0 \\ 5x_1+4x_2-8x_3-6x_4=108 \\ 6x_1-2x_2+6x_3+9x_4=-38 \end{cases}$

42.1. $\begin{cases} 3x_1+9x_2-4x_3=15 \\ -7x_1+5x_3=-1 \\ -5x_1+9x_2-6x_3=37 \end{cases}$

42.2. $\begin{cases} -6x_1-x_2+2x_3+7x_4=22 \\ 4x_1-6x_2-5x_3-2x_4=13 \\ -9x_1-4x_2-x_3+5x_4=55 \\ -2x_1+x_2-2x_3+5x_4=-18 \end{cases}$

43.1. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+8x_3=-71 \\ 9x_1+4x_2-7x_3=-26 \\ -2x_1+2x_2+5x_3=-23 \end{cases}$

43.2. $\begin{cases} -6x_1-8x_2+x_3+x_4=53 \\ -4x_1+9x_2+7x_3+8x_4=96 \\ -5x_1-6x_2-8x_3+x_4=-9 \\ 3x_1-9x_2-9x_4=-57 \end{cases}$

44.1. $\begin{cases} 3x_1+3x_2-9x_3=-3 \\ 3x_1+7x_3=23 \\ 4x_1-7x_2+7x_3=12 \end{cases}$

44.2. $\begin{cases} -9x_1-3x_3+7x_4=19 \\ -6x_1+6x_2-x_3+6x_4=-54 \\ 4x_1+x_2+3x_3+9x_4=-88 \\ -2x_1-3x_2-4x_3+5x_4=34 \end{cases}$

45.1. $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3=1\\ -6x_1-6x_2-7x_3=32\\ 3x_1+9x_2-3x_3=3 \end{cases}$

45.2. $\begin{cases} 9x_1+7x_2+x_3-6x_4=-90\\ -4x_1-2x_2-8x_3+8x_4=116\\ 4x_1+x_2+2x_3-3x_4=-39\\ -3x_1-6x_2+3x_3+6x_4=60 \end{cases}$

46.1. $\begin{cases} 6x_1-9x_2+4x_3=89\\ -3x_1-7x_2-8x_3=42\\ 5x_1+9x_3=16 \end{cases}$

46.2. $\begin{cases} -3x_1-3x_2+5x_3+8x_4=-29\\ -3x_1-2x_2+4x_3-7x_4=70\\ x_1-4x_2+x_3-7x_4=77\\ -4x_1-5x_2+4x_3-8x_4=109 \end{cases}$

47.1. $\begin{cases} 4x_2-2x_3=-16\\ -7x_1-x_2+8x_3=-8\\ 2x_1-7x_2=26 \end{cases}$

47.2. $\begin{cases} -3x_1-8x_2-2x_3=-42\\ -7x_1-x_2-2x_3-x_4=-36\\ 9x_2+8x_3+5x_4=-6\\ -8x_1-8x_2-x_3+x_4=-78 \end{cases}$

48.1. $\begin{cases} -4x_1-4x_2+2x_3=-44\\ -2x_1+2x_2+4x_3=-54\\ 4x_1-3x_2+4x_3=10 \end{cases}$

48.2. $\begin{cases} -4x_1-5x_2-9x_3-3x_4=40\\ -2x_1-6x_2-6x_3+3x_4=-1\\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4=-33\\ -2x_1+9x_3-9x_4=65 \end{cases}$

49.1. $\begin{cases} -9x_1-2x_2=95\\ -8x_1+4x_2+4x_3=40\\ x_1-x_2-2x_3=0 \end{cases}$

49.2. $\begin{cases} -x_1+9x_2-6x_3+6x_4=-29\\ 9x_1-3x_2-7x_3+5x_4=29\\ 7x_1+4x_2-4x_3-9x_4=-67\\ -7x_1-8x_2-6x_3=55 \end{cases}$

50.1. $\begin{cases} -2x_1+5x_2+9x_3=51\\ -8x_1-6x_2+9x_3=18\\ 4x_1+7x_2-4x_3=5 \end{cases}$

50.2. $\begin{cases} -8x_1-2x_2-2x_3-2x_4=48\\ 2x_1+x_2-5x_3+3x_4=-50\\ 7x_1-8x_2-4x_3+x_4=-44\\ 9x_1-x_2-5x_3+6x_4=-88 \end{cases}$

$$51.1.\begin{cases}-5x_1+8x_2-6x_3=66\\-4x_1-5x_2+5x_3=9\\4x_1-9x_2-4x_3=-129\end{cases}$$

$$51.2.\begin{cases}x_1+5x_2-5x_3-2x_4=100\\-7x_1-2x_2-6x_4=4\\-9x_1+9x_2+8x_3=-28\\5x_1-4x_2-7x_3+8x_4=-20\end{cases}$$

$$54.1.\begin{cases}-2x_1-6x_2-7x_3=94\\-3x_1+5x_2-2x_3=-25\\-8x_1-9x_2-6x_3=95\end{cases}$$

$$54.2.\begin{cases}3x_2+2x_3-4x_4=-57\\2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=-23\\7x_1+3x_2+4x_3-9x_4=-42\\-x_1-4x_2+9x_3+8x_4=-2\end{cases}$$

$$52.1.\begin{cases}-3x_1+2x_2-8x_3=-39\\3x_1-6x_2-7x_3=37\\-8x_1-3x_2-8x_3=-19\end{cases}$$

$$52.2.\begin{cases}-8x_1-7x_2-6x_3-4x_4=22\\-4x_1+2x_2-9x_3-4x_4=-59\\5x_1+3x_2+3x_3-4x_4=-31\\-5x_1-4x_2+6x_3+4x_4=66\end{cases}$$

$$55.1.\begin{cases}8x_1-2x_2-4x_3=-2\\9x_2+2x_3=-79\\4x_1-5x_2-7x_3=30\end{cases}$$

$$55.2.\begin{cases}8x_1-8x_2-8x_3-6x_4=154\\-3x_1+6x_2-6x_3-6x_4=-87\\6x_1-3x_2-9x_3+6x_4=207\\4x_1+2x_2-x_3-6x_4=-28\end{cases}$$

$$53.1.\begin{cases}4x_3=-32\\-9x_1-5x_2-4x_3=53\\-3x_1-6x_2-x_3=41\end{cases}$$

$$53.2.\begin{cases}9x_1+4x_2+5x_3-x_4=-18\\6x_1+6x_2+5x_3+8x_4=-7\\-4x_1-7x_2-8x_3-3x_4=73\\-6x_1-8x_2-x_3-8x_4=-5\end{cases}$$

$$56.1.\begin{cases}6x_1+4x_2-3x_3=55\\-2x_1-5x_2-8x_3=-17\\7x_1-6x_2+9x_3=-48\end{cases}$$

$$56.2.\begin{cases}x_1-6x_2+7x_3+3x_4=59\\6x_1+9x_2+8x_3+3x_4=-25\\-2x_1-3x_2+3x_3-9x_4=-50\\7x_1+3x_2+8x_3+4x_4=11\end{cases}$$

57.1. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 97 \\ 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 76 \\ -8x_1 - 4x_2 + x_3 = -90 \end{cases}$

57.2. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 9x_4 = -121 \\ 7x_1 + 4x_2 - 9x_3 - 4x_4 = 140 \\ 8x_1 + 7x_2 - 9x_3 - 6x_4 = 182 \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -40 \end{cases}$

58.1. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 9x_3 = -83 \\ -8x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 72 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -57 \end{cases}$

58.2. $\begin{cases} -9x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 95 \\ -5x_1 + 5x_2 + 8x_4 = -14 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + x_4 = -98 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -92 \end{cases}$

59.1. $\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 35 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -63 \end{cases}$

59.2. $\begin{cases} -2x_1 - 8x_2 + 9x_3 + 9x_4 = -31 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -17 \\ 6x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -75 \\ -9x_1 + 9x_2 - 4x_4 = -67 \end{cases}$

60.1. $\begin{cases} 5x_1 - x_3 = 52 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ -8x_1 + 6x_2 - x_3 = -65 \end{cases}$

60.2. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 8x_3 - x_4 = 17 \\ -9x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 30 \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 79 \\ -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 30 \end{cases}$

61.1. $\begin{cases} -6x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 49 \\ 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -58 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$

61.2. $\begin{cases} -2x_1 - 6x_2 - 8x_3 - x_4 = 21 \\ -8x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -70 \\ 6x_1 + 7x_2 - 7x_3 + x_4 = 61 \\ -4x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 21 \end{cases}$

62.1. $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -42 \\ -4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -86 \\ 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 87 \end{cases}$

62.2. $\begin{cases} -8x_1 + x_2 - 2x_4 = -48 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -37 \\ -7x_1 - 7x_2 - x_3 - 6x_4 = -37 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 19 \end{cases}$

63.1. $\begin{cases} -8x_1+8x_2+x_3=15 \\ 7x_1-x_2-x_3=-20 \\ -2x_1+x_2+9x_3=66 \end{cases}$

63.2. $\begin{cases} 9x_1+4x_2+8x_3+3x_4=100 \\ -5x_1-8x_2-3x_3+9x_4=-128 \\ -8x_1+6x_2+5x_3-7x_4=107 \\ 2x_1-x_2-4x_3-3x_4=-30 \end{cases}$

64.1. $\begin{cases} -8x_1+9x_2-2x_3=-81 \\ -2x_1+6x_2+x_3=-57 \\ 3x_1-4x_2-x_3=47 \end{cases}$

64.2. $\begin{cases} -4x_1+5x_2+6x_3+4x_4=28 \\ 9x_1+2x_2+9x_3+4x_4=97 \\ 8x_1-7x_2+x_3+5x_4=14 \\ -6x_2+4x_3+9x_4=-15 \end{cases}$

65.1. $\begin{cases} -x_1-8x_2-3x_3=46 \\ 6x_1+4x_2-4x_3=-78 \\ -7x_1-x_2+9x_3=92 \end{cases}$

65.2. $\begin{cases} -4x_1+8x_2+5x_3+7x_4=-109 \\ -x_1+9x_2-5x_3+6x_4=-108 \\ 8x_1-7x_2-2x_3+x_4=86 \\ -4x_1+2x_2-x_3-9x_4=25 \end{cases}$

66.1. $\begin{cases} -9x_1+8x_2-x_3=-95 \\ -8x_1-2x_2+7x_3=-119 \\ -x_1-x_2-6x_3=50 \end{cases}$

66.2. $\begin{cases} -3x_1-4x_2-5x_3+2x_4=5 \\ x_1+7x_2-7x_3-6x_4=20 \\ -3x_1-9x_2+5x_3+7x_4=-15 \\ 3x_1-3x_2-x_3=-18 \end{cases}$

67.1. $\begin{cases} x_1-8x_2+4x_3=-54 \\ -9x_1-6x_2-2x_3=18 \\ -8x_1+4x_2+9x_3=72 \end{cases}$

67.2. $\begin{cases} 3x_1-9x_2+6x_3-3x_4=-18 \\ 9x_1+8x_2+5x_3+4x_4=169 \\ x_1-9x_2-4x_3-7x_4=-108 \\ -9x_2+5x_3-5x_4=-59 \end{cases}$

68.1. $\begin{cases} 6x_1-5x_2-6x_3=46 \\ 2x_1-3x_2-8x_3=46 \\ 2x_1+x_2-9x_3=68 \end{cases}$

68.2. $\begin{cases} x_1-4x_2-8x_3-2x_4=-49 \\ x_1+7x_2-8x_3-3x_4=-122 \\ 5x_1-6x_2-x_3+4x_4=42 \\ x_1-2x_2-x_3-7x_4=-47 \end{cases}$

69.1. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -147 \\ 5x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 7 \\ -5x_3 = 45 \end{cases}$

69.2. $\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -73 \\ -9x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 15 \\ -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 8x_4 = -62 \\ x_1 - 9x_2 - 7x_4 = -99 \end{cases}$

70.1. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 36 \\ -3x_1 + 8x_2 - x_3 = 14 \\ -3x_1 + 7x_2 - 4x_3 = -12 \end{cases}$

70.2. $\begin{cases} -6x_1 - 7x_2 - 4x_4 = -21 \\ -6x_1 + 7x_2 - 8x_3 - x_4 = 9 \\ -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 68 \\ -3x_1 + x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -22 \end{cases}$

71.1. $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 10 \\ -5x_1 + 8x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 35 \end{cases}$

71.2. $\begin{cases} -x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 37 \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 40 \\ -4x_1 - x_2 - 9x_3 + 4x_4 = -63 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 60 \end{cases}$

72.1. $\begin{cases} -9x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 83 \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 36 \\ 9x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -66 \end{cases}$

72.2. $\begin{cases} -x_1 - 9x_2 + 6x_3 + x_4 = -42 \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -26 \\ -3x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 5x_4 = -112 \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -59 \end{cases}$

73.1. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_3 = -69 \end{cases}$

73.2. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 26 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 31 \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 15 \\ -7x_1 - 4x_3 - 8x_4 = -93 \end{cases}$

74.1. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 = -119 \\ -8x_1 + 8x_2 + x_3 = 104 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

74.2. $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -75 \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 = -52 \\ -9x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -40 \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -23 \end{cases}$

$$75.1.\begin{cases} -5x_1+9x_2+9x_3=-43\\ -x_1+2x_2-x_3=-16\\ -7x_1+8x_2-8x_3=-60 \end{cases}$$

$$75.2.\begin{cases} -2x_1+2x_2+5x_3-x_4=-45\\ 8x_1-8x_2-3x_3-9x_4=117\\ -5x_1-5x_2+7x_3+6x_4=-55\\ -6x_1+6x_3+3x_4=-69 \end{cases}$$

$$78.1.\begin{cases} -x_1-8x_2-5x_3=106\\ -3x_1-x_2-6x_3=62\\ -2x_1-5x_2-7x_3=100 \end{cases}$$

$$78.2.\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3+8x_4=-64\\ x_1+6x_2-6x_3-5x_4=21\\ 3x_3-4x_4=45\\ -7x_1+6x_2+5x_3=92 \end{cases}$$

$$76.1.\begin{cases} 2x_1+7x_2-5x_3=24\\ 3x_1+7x_2+5x_3=81\\ 4x_1+2x_2+6x_3=68 \end{cases}$$

$$76.2.\begin{cases} 9x_1+7x_2-7x_3-7x_4=9\\ 4x_1-3x_2+2x_3+8x_4=68\\ 4x_1+3x_2-6x_3+7x_4=22\\ 9x_1+3x_4=78 \end{cases}$$

$$79.1.\begin{cases} 5x_2-8x_3=81\\ 2x_1-4x_2+x_3=-23\\ -9x_2-5x_3=-10 \end{cases}$$

$$79.2.\begin{cases} -2x_1+8x_2+5x_3+8x_4=76\\ -6x_1-3x_2+x_3+x_4=28\\ -x_1-5x_2+7x_3+x_4=17\\ 9x_1-2x_2-x_3-6x_4=-69 \end{cases}$$

$$77.1.\begin{cases} 5x_1+4x_2+9x_3=-48\\ 3x_1-8x_2+2x_3=68\\ 9x_1+x_2+8x_3=-4 \end{cases}$$

$$77.2.\begin{cases} 2x_1-9x_2+7x_3+6x_4=-65\\ 3x_1-2x_2+7x_3-9x_4=74\\ 3x_1+4x_2+9x_3+7x_4=-32\\ -9x_1-8x_2+6x_3+8x_4=-58 \end{cases}$$

$$80.1.\begin{cases} 3x_1-4x_2=51\\ -2x_1+7x_2+8x_3=-100\\ 7x_1-4x_2-9x_3=132 \end{cases}$$

$$80.2.\begin{cases} -8x_1+7x_2+8x_3-7x_4=-20\\ -4x_1+x_2-9x_3+6x_4=167\\ 5x_1-8x_2-9x_3-9x_4=-94\\ -x_1+6x_3+9x_4=42 \end{cases}$$

81.1. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -15 \\ 2x_1 - x_3 = -9 \\ -9x_1 + x_2 - 3x_3 = 60 \end{cases}$

81.2. $\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = -66 \\ 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -103 \\ 5x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -109 \\ -5x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 3x_4 = -9 \end{cases}$

82.1. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -4 \\ -7x_1 - x_2 - 3x_3 = -46 \\ -7x_2 + 7x_3 = 14 \end{cases}$

82.2. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = -39 \\ -5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -16 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -4 \\ -6x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 54 \end{cases}$

83.1. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -35 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -66 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 48 \end{cases}$

83.2. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 22 \\ 7x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 109 \\ -8x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -28 \end{cases}$

84.1. $\begin{cases} -7x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 51 \end{cases}$

84.2. $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 50 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 22 \\ 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -45 \end{cases}$

85.1. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 60 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -36 \\ 9x_1 + 7x_2 + 6x_3 = -101 \end{cases}$

85.2. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 54 \\ -9x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 8x_4 = 157 \\ -8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 8x_4 = -81 \\ 4x_1 + 8x_3 - 4x_4 = 100 \end{cases}$

86.1. $\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 69 \\ -2x_1 + 8x_2 - 9x_3 = -80 \\ 9x_1 + 6x_2 - 6x_3 = -3 \end{cases}$

86.2. $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 41 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -47 \\ 2x_1 - x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -83 \\ -8x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -77 \end{cases}$

87.1. $\begin{cases} 5x_1+9x_2-4x_3=97 \\ -9x_1+2x_2+6x_3=-91 \\ 8x_1-7x_2+4x_3=-24 \end{cases}$

87.2. $\begin{cases} 6x_1-x_2+6x_3+4x_4=-39 \\ -6x_1-4x_2+3x_3-2x_4=78 \\ x_1-6x_2-4x_3+3x_4=-85 \\ -x_1-x_2+5x_3+8x_4=-27 \end{cases}$

88.1. $\begin{cases} -9x_1-5x_2=0 \\ -x_1-3x_2+6x_3=-16 \\ -2x_1-5x_2-7x_3=-42 \end{cases}$

88.2. $\begin{cases} -6x_1-2x_2-8x_3=-4 \\ x_1+7x_2-9x_3+7x_4=37 \\ -7x_1-4x_2+3x_3+x_4=-14 \\ 4x_1-6x_2-7x_3+4x_4=92 \end{cases}$

89.1. $\begin{cases} -2x_1-4x_2+2x_3=8 \\ -3x_2-4x_3=23 \\ 7x_1-3x_3=34 \end{cases}$

89.2. $\begin{cases} 9x_1-7x_2-6x_3-5x_4=-114 \\ -x_1-8x_2+6x_3=110 \\ 2x_1+7x_2+7x_3-4x_4=-19 \\ x_1-2x_2+5x_4=34 \end{cases}$

90.1. $\begin{cases} 5x_1+6x_2+x_3=42 \\ -7x_1+7x_2-4x_3=-51 \\ 7x_1-3x_2-9x_3=90 \end{cases}$

90.2. $\begin{cases} x_1+7x_2+2x_3-5x_4=29 \\ 3x_1+x_2+9x_3-7x_4=-46 \\ -4x_1-8x_2-3x_3-3x_4=21 \\ 5x_1+2x_2+9x_3+8x_4=-112 \end{cases}$

91.1. $\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=10 \\ -5x_1-4x_2+9x_3=-61 \\ 9x_1-6x_2+9x_3=-33 \end{cases}$

91.2. $\begin{cases} -6x_1+4x_2+6x_3+9x_4=33 \\ 9x_1+9x_2+x_3+3x_4=105 \\ -x_1-8x_2+4x_3-8x_4=-110 \\ -6x_1+2x_2-x_3-8x_4=-15 \end{cases}$

92.1. $\begin{cases} -3x_1+6x_2-4x_3=-7 \\ 4x_1+5x_2+2x_3=-36 \\ 4x_1-2x_2-9x_3=14 \end{cases}$

92.2. $\begin{cases} -7x_1+7x_2-x_3+7x_4=-65 \\ -6x_1+9x_2+3x_3-9x_4=-54 \\ -2x_1-9x_2-x_3+7x_4=58 \\ x_1+9x_2-8x_3-6x_4=-15 \end{cases}$

$$93.1.\ \begin{cases} -7x_1+2x_2-7x_3=-2 \\ 4x_2-5x_3=39 \\ 2x_1-x_2+8x_3=-20 \end{cases}$$

$$93.2.\ \begin{cases} 3x_1+9x_3-5x_4=-88 \\ -9x_1-5x_2-5x_3-6x_4=96 \\ -2x_1-7x_2-7x_3-5x_4=56 \\ 2x_1-3x_2+6x_3-7x_4=-62 \end{cases}$$

$$96.1.\ \begin{cases} -8x_1-7x_2+7x_3=-69 \\ 4x_2+7x_3=-10 \\ -x_1-2x_2-x_3=-6 \end{cases}$$

$$96.2.\ \begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3+2x_4=15 \\ -8x_2-2x_3+9x_4=12 \\ -x_1+2x_2+7x_3-3x_4=27 \\ -6x_1-4x_2-5x_3-9x_4=-72 \end{cases}$$

$$94.1.\ \begin{cases} -9x_1+9x_3=-90 \\ -x_1-3x_2-9x_3=77 \\ -6x_1+3x_2-2x_3=15 \end{cases}$$

$$94.2.\ \begin{cases} -8x_1+3x_2+9x_3+x_4=-88 \\ -2x_1-2x_2-2x_3+8x_4=-14 \\ 4x_1-6x_3-x_4=59 \\ -5x_1-x_2+5x_3+6x_4=-69 \end{cases}$$

$$97.1.\ \begin{cases} 6x_1-7x_2+9x_3=34 \\ -x_1-8x_2-6x_3=-115 \\ -5x_1+4x_2+x_3=25 \end{cases}$$

$$97.2.\ \begin{cases} -x_1+6x_3-6x_4=3 \\ 6x_1+7x_2-4x_3-8x_4=-163 \\ -2x_1+4x_2+4x_4=10 \\ -9x_1-2x_2+7x_3-3x_4=73 \end{cases}$$

$$95.1.\ \begin{cases} 4x_1-7x_2+7x_3=-19 \\ -x_1+8x_2-6x_3=7 \\ 8x_1+x_2-3x_3=-19 \end{cases}$$

$$95.2.\ \begin{cases} 3x_1+3x_2+8x_3-5x_4=-77 \\ 8x_1-7x_2-8x_3-5x_4=111 \\ 2x_1-5x_2-4x_3-9x_4=71 \\ -6x_1+7x_2+7x_3-7x_4=-91 \end{cases}$$

$$98.1.\ \begin{cases} 4x_1+8x_2-5x_3=-26 \\ -5x_1-4x_2-3x_3=-17 \\ 7x_1+6x_2-3x_3=-19 \end{cases}$$

$$98.2.\ \begin{cases} -5x_1+3x_2+7x_3-4x_4=47 \\ 5x_1-5x_2+8x_3-x_4=70 \\ 6x_1+3x_2+4x_3+3x_4=57 \\ x_1+6x_2+5x_3-8x_4=117 \end{cases}$$

99.1. $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 40 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$ 100.1. $\begin{cases} -5x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -57 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -18 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -24 \end{cases}$

99.2. $\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 2x_4 = -79 \\ -9x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 9x_4 = -2 \\ -9x_1 + 4x_2 - 9x_3 + x_4 = 19 \\ -x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 9x_4 = 105 \end{cases}$ 100.2. $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -85 \\ -x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -31 \\ -6x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 33 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -42 \end{cases}$

1.6. Знайти базисний мінор і ранг матриці А.

$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ $7. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 \\ -6 & 9 & 8 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix};$ $13. A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ -3 & -6 & -9 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix};$

$2. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 8 & -9 & -5 \end{pmatrix};$ $8. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 9 & -7 & -6 \\ 9 & -8 & -5 \end{pmatrix};$ $14. A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 7 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix};$

$3. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ -5 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix};$ $9. A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 6 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ $15. A = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -9 \\ -7 & 8 & -6 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix};$

$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix};$ $10. A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ $16. A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix};$

$5. A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 9 & -7 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix};$ $11. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -8 & 7 & -9 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix};$ $17. A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -9 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix};$

$6. A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -8 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix};$ $12. A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -7 \\ -1 & 9 & 1 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix};$ $18. A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -8 \\ 3 & -5 & -8 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix};$

$19. A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & -7 & -2 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix};$

$20. A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix};$

$21. A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -9 & 8 & 5 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix};$

$22. A=\begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -5 & -7 & -4 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix};$

$23. A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ -7 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix};$

$24. A=\begin{pmatrix} 6 & -5 & -1 \\ 3 & -8 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$

$25. A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 9 & -7 & -8 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix};$

$26. A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -4 & -7 & -3 \end{pmatrix};$

$27. A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -6 \\ 6 & 9 & -7 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix};$

$28. A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -4 & -7 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix};$

$29. A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -8 & -2 & -6 \\ -7 & 2 & -6 \end{pmatrix};$

$30. A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 \\ 8 & -8 & -2 \\ -7 & 2 & -4 \end{pmatrix};$

$31. A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix};$

$32. A=\begin{pmatrix} -9 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -3 & -9 & 5 \end{pmatrix};$

$33. A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -7 & -3 & -4 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix};$

$34. A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix};$

$35. A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -9 \\ -8 & 8 & 2 \end{pmatrix};$

$36. A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & -6 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix};$

$37. A=\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 8 & 9 & -9 \\ 6 & -9 & -9 \end{pmatrix};$

$38. A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix};$

$39. A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & -1 \\ -4 & 9 & -5 \\ 9 & -8 & -1 \end{pmatrix};$

$40. A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & -2 \\ -6 & -5 & -1 \end{pmatrix};$

$41. A=\begin{pmatrix} -8 & 9 & 2 \\ 3 & -9 & -8 \\ -5 & 0 & -6 \end{pmatrix};$

$42. A=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix};$

$43. A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix};$

$44. A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \\ 6 & -7 & -2 \end{pmatrix};$

$45. A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -6 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix};$

$46. A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & -9 \\ 5 & -6 & -9 \end{pmatrix};$

$47. A=\begin{pmatrix} -9 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 8 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix};$

$48. A=\begin{pmatrix} -4 & -9 & -5 \\ -6 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

$49. A = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 6 \\ -9 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & -9 \end{pmatrix};$

$50. A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix};$

$51. A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ -4 & -6 & 4 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix};$

$52. A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 3 \\ 3 & 0 & -7 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix};$

$53. A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix};$

$54. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 3 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix};$

$55. A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 9 \\ -6 & -3 & -5 \\ 2 & -9 & 4 \end{pmatrix};$

$56. A = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -9 \\ -2 & -5 & -5 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix};$

$57. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -9 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix};$

$58. A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 9 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix};$

$59. A = \begin{pmatrix} -8 & 6 & -5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix};$

$60. A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix};$

$61. A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix};$

$62. A = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix};$

$63. A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ -4 & 7 & 7 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix};$

$64. A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -5 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix};$

$65. A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ -6 & 2 & 8 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix};$

$66. A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & -7 & -5 \\ 1 & -1 & -9 \end{pmatrix};$

$67. A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -8 \\ -4 & 8 & -5 \\ -5 & 3 & -8 \end{pmatrix};$

$68. A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix};$

$69. A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix};$

$70. A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \end{pmatrix};$

$71. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -6 & -3 & -3 \\ -8 & -8 & -3 \end{pmatrix};$

$72. A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix};$

$73. A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix};$

$74. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & 8 & -8 \end{pmatrix};$

$75. A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -6 \\ -6 & -3 & -9 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix};$

$76. A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -8 \\ 1 & -1 & -7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix};$

$77. A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & -6 \end{pmatrix};$

$78. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 7 & 4 & 7 \\ -4 & -3 & -9 \end{pmatrix};$

$$79. A=\begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$80. A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -6 \\ -1 & -5 & -1 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$81. A=\begin{pmatrix} -6 & -8 & -3 \\ -6 & 8 & 5 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$82. A=\begin{pmatrix} -8 & 5 & 6 \\ -3 & 7 & -8 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$83. A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$84. A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -2 & -6 & -5 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix};$$

$$85. A=\begin{pmatrix} -4 & -4 & 8 \\ -9 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$86. A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \\ -7 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$87. A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & 3 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix};$$

$$88. A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -8 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$89. A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ -4 & -1 & 0 \\ 8 & 8 & -6 \end{pmatrix};$$

$$90. A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix};$$

$$91. A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 5 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$92. A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$93. A=\begin{pmatrix} -2 & -9 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$94. A=\begin{pmatrix} -7 & 9 & -5 \\ 0 & -4 & 9 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$95. A=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$96. A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & -2 \\ -5 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$97. A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 7 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$98. A=\begin{pmatrix} -1 & 8 & -9 \\ 0 & -5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$99. A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 7 \\ -9 & -7 & -5 \end{pmatrix};$$

$$100. A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.7. Знайти усі розв'язки системи

1. $\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = -72 \\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -33 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = -4 \\ -7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18 \\ 3x_1 - 3x_2 = -18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -41 \\ -8x_1 - 3x_2 = 93 \\ -2x_2 + 8x_3 = 22 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -17 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -57 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 = -9 \\ -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -42 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -8x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 41 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -28 \\ 9x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 17 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ -6x_1 - 8x_2 + 4x_3 = -26 \\ 2x_1 = 10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 - 4x_3 = -30 \\ -x_1 + 4x_3 = 22 \\ -2x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -26 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + x_3 = -25 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 80 \\ -x_1 - 2x_3 = -25 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 8x_1 - 6x_2 + x_3 = 11 \\ -7x_1 + 5x_2 - x_3 = -8 \\ -x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 49 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -8x_1 - 8x_2 - 9x_3 = -164 \\ -8x_1 - 9x_2 - 9x_3 = -171 \\ -8x_1 - 9x_3 = -108 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -6x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -73 \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -49 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 = -25 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 + 9x_3 = -65 \\ -4x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 60 \\ 9x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 25 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ -2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -46 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -65 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -9 \\ -9x_2 + 9x_3 = -9 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_3 = 33 \\ -6x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -23 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 43 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5 \\ -8x_1 + 8x_2 = -120 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_2 - 8x_3 = -56 \\ 4x_1 - 4x_2 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 30 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 8x_3 = -12 \\ 2x_1 + 7x_2 + 7x_3 = -10 \\ -3x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 7x_2 + 7x_3 = -35 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -10 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} -4x_1+9x_2+5x_3=33 \\ -3x_1+9x_2+6x_3=45 \\ -6x_1+2x_2-4x_3=-54 \end{cases}$

22. $\begin{cases} -2x_1-3x_2-5x_3=23 \\ -4x_2+4x_3=-44 \\ -2x_2+2x_3=-22 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1+9x_2+7x_3=63 \\ -2x_1+2x_3=0 \\ -x_1-2x_2-x_3=-14 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -3x_1-5x_2-x_3=40 \\ 3x_1+x_2+4x_3=-17 \\ 3x_1-3x_2+7x_3=6 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1+4x_2+8x_3=-12 \\ -6x_1+6x_2-6x_3=-36 \\ -4x_1-6x_2-9x_3=21 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1-5x_2=30 \\ -3x_1+6x_2-3x_3=-18 \\ -3x_1+7x_2-6x_3=-6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+9x_2-4x_3=-23 \\ 2x_1+6x_2-2x_3=-16 \\ x_1-3x_2+2x_3=7 \end{cases}$

28. $\begin{cases} -7x_2-5x_3=-108 \\ -x_1-8x_2-5x_3=-110 \\ 3x_1+3x_2=6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} -9x_1-4x_2+x_3=-57 \\ 6x_1+3x_2-3x_3=48 \\ -3x_1-x_2-2x_3=-9 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -6x_2-8x_3=-18 \\ -4x_1+8x_2+3x_3=-19 \\ -4x_1+2x_2-5x_3=-37 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+6x_3=-25 \\ x_1+2x_2-7x_3=7 \\ -8x_1-8x_2+2x_3=36 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 4x_1-x_2+9x_3=46 \\ x_1-2x_2=-5 \\ -7x_1+7x_2-9x_3=-31 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 7x_1-7x_3=-14 \\ -8x_1-2x_2-8x_3=46 \\ x_2+8x_3=-15 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3=-26 \\ -7x_1-x_2+x_3=5 \\ 5x_1-7x_2+9x_3=47 \end{cases}$

35. $\begin{cases} -x_2-x_3=-7 \\ x_1-2x_2-x_3=-24 \\ -2x_1-x_2-3x_3=13 \end{cases}$

36. $\begin{cases} -6x_1-6x_3=24 \\ 2x_1+7x_2-5x_3=27 \\ x_1+6x_2-5x_3=26 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 3x_1-3x_2+8x_3=12 \\ -3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+9x_2=12 \end{cases}$

38. $\begin{cases} -4x_1-7x_2+4x_3=58 \\ 4x_1+9x_2+4x_3=-94 \\ 2x_2+8x_3=-36 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 6x_1+x_2-7x_3=8 \\ -5x_1+4x_2+x_3=32 \\ 3x_1-7x_2+4x_3=-56 \end{cases}$

40. $\begin{cases} -x_1+x_2-4x_3=-15 \\ 5x_1+5x_2-7x_3=-42 \\ -6x_1-4x_2+3x_3=27 \end{cases}$

41. $\begin{cases} -2x_1 - 8x_2 + x_3 = 47 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -18 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -12 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = -54 \\ -8x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -87 \end{cases}$

43. $\begin{cases} -8x_1 + 9x_2 + x_3 = -20 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

44. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ -4x_1 + x_2 + 9x_3 = -97 \\ -5x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 45 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 = 48 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 9 \\ 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 66 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -30 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 27 \\ -7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 93 \end{cases}$

47. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 22 \\ 6x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -35 \\ 6x_1 - 5x_2 - x_3 = -41 \end{cases}$

48. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - x_2 = -26 \\ -5x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 80 \end{cases}$

49. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -19 \\ -9x_1 - x_2 = -78 \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 46 \end{cases}$

50. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ -3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 48 \\ 7x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -50 \end{cases}$

51. $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -23 \\ 7x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 38 \\ -4x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 71 \\ -x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -5 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -22 \end{cases}$

53. $\begin{cases} 8x_1 - 7x_2 - 5x_3 = -39 \\ -8x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 49 \\ -5x_2 - 5x_3 = 25 \end{cases}$

54. $\begin{cases} -6x_2 - 6x_3 = -84 \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -46 \\ -4x_2 - 4x_3 = -56 \end{cases}$

55. $\begin{cases} -6x_1 - x_2 + 7x_3 = -7 \\ -4x_1 + 9x_2 - 5x_3 = -53 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = -34 \end{cases}$

56. $\begin{cases} -8x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 90 \\ -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 46 \\ -x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 48 \end{cases}$

57. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases}$

58. $\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = -26 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -11 \\ 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 29 \end{cases}$

59. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 96 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 36 \\ -4x_2 - 4x_3 = -60 \end{cases}$

60. $\begin{cases} -8x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -108 \\ 2x_1 - 7x_3 = 66 \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 42 \end{cases}$

61. $\begin{cases} -6x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -46 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 = -26 \\ -6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = -36 \end{cases}$

62. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = -7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

63. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 7x_3 = -109 \\ -x_2 + 4x_3 = -3 \\ 4x_1 + 9x_2 - 8x_3 = -77 \end{cases}$

64. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 54 \\ -6x_1 - 4x_2 - x_3 = -5 \\ 9x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 118 \end{cases}$

65. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 77 \\ -2x_1 - 3x_2 = -22 \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases}$

66. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -9 \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 21 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -32 \\ -3x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 15 \\ 5x_1 - 5x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

69. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 27 \\ 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 23 \\ -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

70. $\begin{cases} -4x_1 + 8x_2 - x_3 = -65 \\ -3x_1 + 3x_2 = -27 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = -16 \end{cases}$

71. $\begin{cases} -4x_2 - 5x_3 = 36 \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -21 \\ -6x_1 + x_2 + 2x_3 = -15 \end{cases}$

72. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 23 \\ -2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 6x_1 - 9x_2 - x_3 = -34 \end{cases}$

73. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 = -35 \\ -2x_1 - 8x_2 + 8x_3 = -108 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 51 \end{cases}$

74. $\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -11 \\ 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -36 \\ -3x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -29 \end{cases}$

75. $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 104 \\ -7x_2 - 7x_3 = 7 \\ 3x_1 + 3x_3 = 33 \end{cases}$

76. $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -21 \\ -2x_2 + 7x_3 = 9 \\ -4x_1 + 9x_2 - 5x_3 = -39 \end{cases}$

77. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 + 9x_3 = -80 \\ 2x_1 + 2x_3 = -16 \end{cases}$

78. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 = 66 \\ 6x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 86 \end{cases}$

79. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 33 \\ -5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -17 \\ -7x_1 - x_2 - 6x_3 = -85 \end{cases}$

80. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 = 16 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 48 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -32 \end{cases}$

81. $\begin{cases} -x_2 - 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -19 \\ 2x_1 + x_3 = -5 \end{cases}$

82. $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -18 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 7x_3 = -57 \end{cases}$

83. $\begin{cases} -x_1 + 9x_2 + 5x_3 = -29 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -15 \\ -9x_1 + x_2 - 2x_3 = -57 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = -33 \end{cases}$

85. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 5x_3 = 42 \\ 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 68 \\ 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -26 \end{cases}$

86. $\begin{cases} -7x_1 + 7x_2 = -84 \\ -x_2 - 2x_3 = 25 \\ 7x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 109 \end{cases}$

87. $\begin{cases} -9x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 140 \\ 5x_1 + x_2 = -48 \\ -4x_1 + x_3 = 25 \end{cases}$

88. $\begin{cases} -6x_1 - 7x_2 - 7x_3 = -68 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 31 \\ -9x_1 + x_2 - 2x_3 = -25 \end{cases}$

89. $\begin{cases} -7x_1 - 8x_2 - 6x_3 = 41 \\ 8x_2 - 8x_3 = 64 \\ -6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 66 \end{cases}$

90. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 32 \\ -5x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -48 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -24 \end{cases}$

91. $\begin{cases} 6x_1 - 4x_3 = 28 \\ -2x_1 - 8x_2 + 8x_3 = 40 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

92. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 68 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -43 \\ -3x_2 - 3x_3 = 42 \end{cases}$

93. $\begin{cases} -7x_1 + 8x_2 + x_3 = -56 \\ -x_1 + x_2 = -6 \\ -4x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 74 \end{cases}$

94. $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 65 \\ -9x_2 - 9x_3 = 36 \\ -x_1 - 8x_2 - 9x_3 = 27 \end{cases}$

95. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -5x_1 + 5x_3 = 35 \\ 6x_1 + x_2 - 5x_3 = -39 \end{cases}$

96. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -46 \\ -4x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 50 \\ 2x_1 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

97. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 17 \\ -9x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 6 \\ -8x_1 + x_2 + 7x_3 = -15 \end{cases}$

98. $\begin{cases} -5x_1 + x_3 = -38 \\ x_1 - 9x_2 - 2x_3 = 67 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$

99. $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 - x_3 = 9 \\ 8x_1 + 8x_2 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 45 \end{cases}$

100. $\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 = 24 \\ 5x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 24 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

1.1. Для заданих матриць *A* та *B* обчислити *3A-2B*.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

1.2. Для заданих матриць A та B знайти AB і BA.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 3 & -4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5 & 5 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ -4 & -5 & -5\end{pmatrix}.$$

1.4. Для заданої матриці A:

а) обчислити det A шляхом занулення рядка чи стовпця та за теоремою розкладу;

б) знайти обернену матрицю.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ 3 & -3 & -3\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

1.5. Розв'язати задані системи трьома методами: матричним, методом Крамера, методом Гауса.

а) $\begin{cases} -x-2z=7\\ -4x+4y+5z=-16\\ 5x+2y+3z=-3\end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x_1+3x_2-2x_3-x_4=-7\\ 3x_1+x_2-5x_3-4x_4=-1\\ -2x_1-4x_2-2x_3=22\\ 3x_2-2x_3-4x_4=-12\end{cases}$

1.6. Знайти базисний мінор і ранг матриці A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -4\\ -4 & -4 & 8\\ 5 & -9 & -3\end{pmatrix}.$$

1.7. Знайти усі розв'язки системи.

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-3x_3=-1\\ 5x_1-x_2+5x_3=-9\\ 3x_1-3x_2+2x_3=-10\end{cases}$$

ЗАВДАННЯ № 1.1

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 12 & 24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 10\\ -4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -1\\ 16 & 16\end{pmatrix}$$

ЗАВДАННЯ № 1.2, 1.3

Дано:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 3 & -4\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}5 & 5 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ -4 & -5 & -5\end{pmatrix}$$

Розв'язок:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$$

$c_{11} = (-2)\cdot5+(-2)\cdot0+(-2)\cdot(-4) = -2$

$c_{12} = (-2)\cdot5+(-2)\cdot3+(-2)\cdot(-5) = -6$

$c_{13} = (-2)\cdot1+(-2)\cdot4+(-2)\cdot(-5) = 0$

$c_{21} = 1\cdot5+3\cdot0+1\cdot(-4) = 1$

$c_{22} = 1\cdot5+3\cdot3+1\cdot(-5) = 9$

$c_{23} = 1\cdot1+3\cdot4+1\cdot(-5) = 8$

$c_{31} = (-1)\cdot5+3\cdot0+(-4)\cdot(-4) = 11$

$c_{32} = (-1)\cdot5+3\cdot3+(-4)\cdot(-5) = 24$

$c_{33} = (-1)\cdot1+3\cdot4+(-4)\cdot(-5) = 31$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-2 & -6 & 0\\ 1 & 9 & 8\\ 11 & 24 & 31\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & c_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

$d_{11} = 5\cdot(-2)+5\cdot1+1\cdot(-1) = -6$

$d_{12} = 5\cdot(-2)+5\cdot3+1\cdot3 = 8$

$d_{13} = 5\cdot(-2)+5\cdot1+1\cdot(-4) = -9$

$d_{21} = 0\cdot(-2)+3\cdot1+4\cdot(-1) = -1$

$d_{22} = 0\cdot(-2)+3\cdot3+4\cdot3 = 21$

$d_{23} = 0\cdot(-2)+3\cdot1+4\cdot(-4) = -13$

$d_{31} = (-4)\cdot(-2)+(-5)\cdot1+(-5)\cdot(-1) = 8$

$d_{32} = (-4)\cdot(-2)+(-5)\cdot3+(-5)\cdot3 = -22$

$d_{33} = (-4)\cdot(-2)+(-5)\cdot1+(-5)\cdot(-4) = 23$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -9 \\ -1 & 21 & -13 \\ 8 & -22 & 23 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\cdot3\cdot(-4)+(-2)\cdot1\cdot(-1)+1\cdot3\cdot(-2)-(-2)\cdot3\cdot(-1)-3\cdot1\cdot(-2)-1\cdot(-2)\cdot(-4) = 12$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 5\cdot3\cdot(-5)+5\cdot4\cdot(-4)+0\cdot(-5)\cdot1-1\cdot3\cdot(-4)-(-5)\cdot4\cdot5-0\cdot5\cdot(-5) = -43$$

$|A|\cdot|B| = 12\cdot(-43) = -516$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 9 & 8 \\ 11 & 24 & 31 \end{vmatrix} = (-2)\cdot9\cdot31+(-6)\cdot8\cdot11+1\cdot24\cdot0-0\cdot9\cdot11-24\cdot8\cdot(-2)-1\cdot(-6)\cdot31 = -516$$

$$|B\cdot A| = \begin{vmatrix} -6 & 8 & -9 \\ -1 & 21 & -13 \\ 8 & -22 & 23 \end{vmatrix} = (-6)\cdot21\cdot23+8\cdot(-13)\cdot8+(-1)\cdot(-22)\cdot(-9)-(-9)\cdot21\cdot8-(-22)\cdot(-13)\cdot(-6)-(-1)\cdot8\cdot23 = -516$$

ЗАВДАННЯ № 1.4

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв’язок:

Знайдемо детермінант матриці

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -15 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -9 & -15 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot((-9)\cdot 1 - (-15)\cdot 3) = 36$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-3)-1\cdot(-3)=12$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(3\cdot(-3)-(-1)\cdot(-3))=12$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot 1-(-3)\cdot(-1)=0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot(-3)-4\cdot 1)=1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3)-4\cdot(-1)=-8$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4\cdot 1-(-1)\cdot(-1))=-3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3)-4\cdot(-3)=15$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(4\cdot(-3)-4\cdot 3)=24$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-(-1)\cdot 3=-9$$

$$A^{-1}=\frac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 1 & 15 \\ 12 & -8 & 24 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

ЗАВДАННЯ № 1.5

$$\begin{cases} -1\cdot x-2\cdot z=7 \\ -4\cdot x+4\cdot y+5\cdot z=-16 \\ 5\cdot x+2\cdot y+3\cdot z=-3 \end{cases}$$

МАТРИЧНИЙ МЕТОД

$X=A^{-1}\cdot B$

Матриця системи:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Матриця вільних елементів:

$$B=\begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо детермінант матриці системи:

$$\det A=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 4\cdot 3+0\cdot 5\cdot 5+(-4)\cdot 2\cdot(-2)-(-2)\cdot 4\cdot 5-2\cdot 5\cdot(-1)-(-4)\cdot 0\cdot 3=54$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=4\cdot 3-2\cdot 4=2$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-((-4)\cdot 3-5\cdot 5)=37$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=(-4)\cdot 2-4\cdot 5=-28$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-(0\cdot 3-(-2)\cdot 2)=-4$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 3-(-2)\cdot 5=7$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-((-1)\cdot 2-0\cdot 5)=2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=0\cdot 5-(-2)\cdot 4=8$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}=-((-1)\cdot 5-(-2)\cdot(-4))=13$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 4-0\cdot(-4)=-4$$

$$A^{-1}=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 37 & 7 & 13 \\ -28 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Тоді стовпець невідомих елементів дорівнює:

$$X=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 37 & 7 & 13 \\ -28 & 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

МЕТОД КРАМЕРА

$$X_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 4\cdot 3+0\cdot 5\cdot 5+(-4)\cdot 2\cdot(-2)-(-2)\cdot 4\cdot 5-2\cdot 5\cdot(-1)-(-4)\cdot 0\cdot 3=54$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -16 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=7\cdot 4\cdot 3+0\cdot 5\cdot(-3)+(-16)\cdot 2\cdot(-2)-(-2)\cdot 4\cdot(-3)-2\cdot 5\cdot 7-(-16)\cdot 0\cdot 3=54$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{54}{54}=1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 \\ -4 & -16 & 5 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-16)\cdot 3+7\cdot 5\cdot 5+(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)-(-2)\cdot(-16)\cdot 5-(-3)\cdot 5\cdot(-1)-(-4)\cdot 7\cdot 3=108$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{108}{54}=2$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ -4 & 4 & -16 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 4\cdot(-3)+0\cdot(-16)\cdot 5+(-4)\cdot 2\cdot 7-7\cdot 4\cdot 5-2\cdot(-16)\cdot(-1)-(-4)\cdot 0\cdot(-3)=-216$$

$$z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-216}{54}=-4$$

МЕТОД ГАУСА

x	y	z	b
-1	0	-2	7
-4	4	5	-16
5	2	3	-3
	-4	-13	44
	-2	7	-32
		-54	216

$-54\cdot z= 216$

$$z=\frac{216}{-54}=-4$$

$-4\cdot y-13\cdot z= 44$

$$y=\frac{44-13\cdot 4}{-4}=2$$

$-1\cdot x+0\cdot y-2\cdot z= 7$

$$x=\frac{7-2\cdot 4+0\cdot 2}{-1}=1$$

1.5.б. Розв'язати систему

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -7 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 0x_4 = 22 \\ 0x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -12 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему матричним методом

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 22 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -11 & 3 & 11 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & -9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = (11 \cdot 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 9 - 4 \cdot 6 \cdot 11 -$$

$$- 11 \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 2 \cdot 11 + 4 \cdot 3 \cdot 8) = -268$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 4 -$$

$$- 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 4 = 32$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 4 +$$

$$+ 4 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4) = -48$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 4 +$$

$$+ 4 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 4 = 64$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 5 +$$

$$+ 5 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2) = -68$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 4) = -42$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = -4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 4) = 50$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 2 +$$

$$+ 2 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = -28$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4 = 39$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 4) = 42$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 3 \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 = 11$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 0 - 3 \cdot 3 \cdot 2 +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2) = 26$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0) = 34$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 0 = 16$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 0) = -66$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 -$$

$$- 2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 112$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{268}\begin{pmatrix} 32 & -42 & 39 & 34 \\ -48 & -4 & 42 & 16 \\ 64 & 50 & 11 & -66 \\ -68 & -28 & 26 & 112 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{268}\begin{pmatrix} 32 & -42 & 39 & 34 \\ -48 & -4 & 42 & 16 \\ 64 & 50 & 11 & -66 \\ -68 & -28 & 26 & 112 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 22 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -5 & -4 \\ 22 & -4 & -2 & 0 \\ -12 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & -7 \\ -4 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 22 \\ -4 & 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -11 & 3 & 27 \\ 0 & -4 & -2 & 22 \\ 0 & -9 & 6 & 16 \end{vmatrix} = (11 \cdot 2 \cdot 16 - 3 \cdot 22 \cdot 9 - 4 \cdot 6 \cdot 27 -$$

$$- 27 \cdot 2 \cdot 9 + 6 \cdot 22 \cdot 11 + 4 \cdot 3 \cdot 16) = 268$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -7 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -4 \\ -2 & 22 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & -2 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -7 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 22 & -2 & -2 \\ -4 & -12 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -7 & -2 & -2 \\ 0 & 27 & 3 & 11 \\ 0 & 22 & -2 & -2 \\ 0 & 16 & 6 & 8 \end{vmatrix} = (-27 \cdot 2 \cdot 8 - 3 \cdot 2 \cdot 16 + 22 \cdot 6 \cdot 11 +$$

$$+ 11 \cdot 2 \cdot 16 + 6 \cdot 2 \cdot 27 - 22 \cdot 3 \cdot 8) = 1072$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & 22 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 & -2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 22 & -2 \\ -4 & 3 & -12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 & -2 \\ 0 & -11 & 27 & 11 \\ 0 & -4 & 22 & -2 \\ 0 & -9 & 16 & 8 \end{vmatrix} = (-11 \cdot 22 \cdot 8 + 27 \cdot 2 \cdot 9 - 4 \cdot 16 \cdot 11 +$$

$$+ 11 \cdot 22 \cdot 9 - 16 \cdot 2 \cdot 11 + 4 \cdot 27 \cdot 8) = 536$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 & 22 \\ 0 & 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & -7 \\ -2 & -4 & -2 & 22 \\ 0 & 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & -7 \\ -4 & -2 & -2 & 22 \\ 3 & 0 & -2 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -11 & 13 & -4 \\ 0 & 10 & -22 & 18 \\ 0 & -9 & 13 & -9 \end{vmatrix} = (-11 \cdot 22 \cdot 9 - 13 \cdot 18 \cdot 9 - 10 \cdot 13 \cdot 4 +$$

$$+ 4 \cdot 22 \cdot 9 + 13 \cdot 18 \cdot 11 + 10 \cdot 13 \cdot 9) = -268$$

$$x_1 = \frac{268}{-268} = -1$$

$$x_2 = \frac{1072}{-268} = -4$$

$$x_3 = \frac{536}{-268} = -2$$

$$x_4 = \frac{-268}{-268} = 1$$

Розв'яжемо систему методом Гауса

x_1	x_2	x_3	x_4	b
-2	3	-2	-1	-7
3	1	-5	-4	-1
-2	-4	-2	0	22
0	3	-2	-4	-12
	-11	16	11	23
	14	0	-2	-58
	-6	4	8	24
		-224	-132	316
		52	-22	-126
			11792	11792

$11792\, x_4 = 11792$

$x_4 = \frac{11792}{11792} = 1$

$-224\, x_3 - 132\cdot 1 = 316$

$x_3 = \frac{316 + 132\cdot 1}{-224} = -2$

$-11\, x_2 - 16\cdot 2 + 11\cdot 1 = 23$

$x_2 = \frac{23 + 16\cdot 2 - 11\cdot 1}{-11} = -4$

$-2\, x_1 - 3\cdot 4 + 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = -7$

$x_1 = \frac{-7 + 3\cdot 4 - 2\cdot 2 + 1\cdot 1}{-2} = -1$

ЗАВДАННЯ № 1.6

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \\ 5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв'язок:

Знайдемо ранг матриці A

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 20 = 15 \neq 0$$

Складаємо обвідні мінори

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \\ 5 & -9 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 16 & -8 \\ 0 & -34 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 16 & -8 \\ -34 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (16 \cdot 17 - (-8) \cdot (-34)) = 0$$

Отже, $rang\ A = 2$.

ЗАВДАННЯ № 1.7

Знайти усі розв'язки системи

$$\begin{cases} -2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = -1 \\ 5 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = -9 \\ 3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -10 \end{cases}$$

Метод Гауса:

x_1	x_2	x_3	b
-2	-2	-3	-1
5	-1	5	-9
3	-3	2	-10
	12	5	23
	12	5	23
		0	0

$x_3 = t$

$12 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 23$

$$x_2 = \frac{23 - 5 \cdot x_3}{12} = 1{,}917 - 0{,}417 \cdot t$$

$-2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = -1$

$$x_1 = \frac{-1 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2}{-2} = -1{,}417 - 1{,}083 \cdot t$$

t - довільне число

ПИТАННЯ НА КОЛОКВІУМ ТА ІСПИТ

1. Означення матриці. Види матриць.
2. Добуток матриці на число. Сума, різниця двох матриць. Транспонування матриць.
3. Добуток двох матриць. Поняття рівності матриць.
4. Властивості дій над матрицями.
5. Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення (означення).
6. Властивості визначників.
7. Означення та правила обчислення визначників другого та третього порядку.
8. Правила обчислення визначників n-го порядку.
9. Обернена матриця, приєднана матриця (означення, правила обчислення).
10. Матриця системи, матриця вільних елементів, розширена матриця, невироджена, сумісна, несумісна, однорідна, неоднорідна системи лінійних алгебраїчних рівнянь (означення).
11. Матричний спосіб розв'язання невиродженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (з виведенням).
12. Метод Крамера для розв'язання невиродженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (з виведенням).
13. Метод Гауса для розв'язання невиродженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (алгоритм).
14. Ранг матриці та методи його обчислення. Базисний мінор (означення).
15. Теорема Кронекера-Капелі.
16. Методи розв'язання вироджених систем рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А.Кудрявцев, В. П. Демидович.– М.: Наука, 1975.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1978.
3. Волков Ю. І. Лінійна алгебра й аналітична геометрія з елементами програмування мовою Паскаль / Ю. І. Волков, Д. А. Найко. – К. : НМК ВО, 1990.
4. Минорский В. М. Сборник задач по высшей математике / В. М. Минорский. – М. : Наука, 1978.
5. Беклимишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Беклимишев Д. В. – М. : Наука, 1987.
6. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1984.
7. Беклимишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Беклимишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. – М. : Наука, 1987.

Навчальне видання

Найко Дмитро Антонович
Краєвський Володимир Олександрович
Коломієць Альона Анатоліївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Рукопис оформлено: *В. Краєвським, А. Коломієць*

Редактор *О. Ткачук*

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку 13.09.2019.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура TimesNewRoman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 6,72.
Наклад 50 (1-й запуск 1-20). Зам. № 2019-119.

Видавець та виготовлювач
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.