М. В. Працьовитий, М. Б. Ковальчук, Н. В. Сачанюк-Кавецька

Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів.

Частина 1

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

М. В. Працьовитий, М. Б. Ковальчук , Н. В. Сачанюк-Кавецька

Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів.

Частина 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 51(075.8)
П70

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 28.03.2019 р.)

Рецензенти:
О. А. Бойчук, доктор фізико-математичних наук, професор
О. М. Станжицький, доктор фізико-математичних наук, професор
О. І. Матяш, доктор педагогічних наук, професор

Працьовитий, М. В.
П70 Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 1 : навч. посіб. / Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 103 с.

Метою посібника, який складається з двох частин, є формування у студентів вміння одержувати, шукати, фіксувати, подавати і застосовувати інформацію.

В першій частині систематизовано у вигляді схем і таблиць основний матеріал курсу вищої математики для студентів технічних спеціальностей, що містить такі теми: лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз.

Істотною особливістю цього посібника є систематизація та алгоритмізація теоретичного матеріалу. Така форма подання теоретичного матеріалу дозволяє студентам визначати структуру матеріалу, встановлювати зв'язок між його компонентами, сприяє формуванню вмінь працювати з навчальною літературою і застосовувати теоретичні знання на практиці.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей, аспірантів, викладачів та осіб, які займаються самоосвітою.

УДК 51(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасне суспільство вимагає від вищої школи підготовку фахівця, що володіє новим типом мислення, спроможний здобувати знання протягом всього життя та вміє творчо й якісно вирішувати професійні та життєві завдання та проблеми. Процеси глобалізації у розвитку науки вимагають відмінні від традиційних вимоги до підготовки інженерів, що мають підвищений рівень фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості.

Тому із кожним днем в інженерній діяльності все важливіше місце займають інноваційні технології, які висувають високі вимоги не тільки до спеціальної, але й фундаментальної підготовки інженера, а тому необхідно, щоб навчання одночасно забезпечувало високу якість фундаментальних знань і готовність випускника до професійної діяльності. Для студентів інженерних спеціальностей математика постає не стільки навчальною дисципліною, скільки професійним інструментом аналізу, організації, управління технологічними процесами. Математика є основою інженерної освіти, мовою інженерних досліджень і в діяльності інженера повинна допомагати вирішувати професійні задачі.

Тому уміння працювати з інформацією є актуальним і одним із необхідних вмінь майбутнього інженера.

В умовах сучасної вищої технічної школи спостерігається тенденція до загострення проблеми інтелектуальної активності студентів.

Введення теоретичних знань у вигляді опорних схем, алгоритмів, узагальнюючих таблиць дає можливість студентам побачити правило в повному обсязі, краще осмислити викладений матеріал, усвідомити логічні взаємозв'язки, систематизувати та впорядкувати знання.

Використання опор та алгоритмів передбачає управління пізнавальною діяльністю студентів, розвиток у них умінь самостійної роботи. Навчання із застосуванням опорних схем та алгоритмів розвиває пам'ять, логічне мислення, індивідуальні здібності студентів і служать засобом графічного узагальнення досліджуваного матеріалу.

Істотною особливістю даного посібника є узагальнення та систематизація теоретичного матеріалу через алгоритмічні форми його подання.

Навчальний посібник складається з передмови, опорних схем, таблиць і основних алгоритмів, які об’єднані за темами, списку джерел, додатків і ключів до кросвордів, які запропоновані в додатках.

Змістовність, логічність і доступність подання теоретичного матеріалу робить можливим його використання не тільки студентами при підготовці до практичних занять, виконанні розрахункових завдань але й викладачами при укладанні лекцій з курсу вищої математики і інших предметів математичного циклу у вищих навчальних закладах.

Додаток представляє органічне доповнення до основної частини рецензованого посібника. Запропоновані кросворди спонукають читача до самоаналізу в аспекті набутих емпіричних знань.

Нестандартна, оригінальна подача теоретичного матеріалу, на нашу думку, полегшує його сприймання й розуміння читачем із будь-яким рівнем методичної підготовки.

В даній частині посібника систематизовано у вигляді схем і таблиць основний матеріал з таких тем:

- лінійна алгебра;
- векторна алгебра;
- аналітична геометрія;
- введення в математичний аналіз (функція; границя функції; диференціальне числення; функції багатьох змінних; невизначений інтеграл; визначений інтеграл).

Даний посібник дозволить студентам заочної форми навчання самостійно опанувати необхідний інженеру обсяг математичних знань. Також він може бути корисним при вибірковому вивченні окремих тем або розділів студентами як заочної, так і денної форм навчання. Велика кількість завдань та детальний розгляд прикладів розв’язування типових завдань дозволяє використовувати даний навчальний посібник як на практичних заняттях з «Вищої математика», так і для самоосвіти.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

МАТРИЦІ

Матрицею розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця елементів, яка містить m рядків і n стовпців:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\| \qquad i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}.$$

a_{ij} – елементи матриці;

i – номер рядка;

j – номер стовпця.

$m \neq n$,

A – прямокутна матриця

$m=n$,

A – квадратна матриця

ВИДИ МАТРИЦЬ

Матриця-рядок

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Матриця-стовпець

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Нульова матриця

$$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Одинична матриця

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ
Додавання матриць
$\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=\|a_{ij}\|+\|b_{ij}\|=\|c_{ij}\|=\underset{m\times n}{C}$ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$ Властивості   1. $A+B=B+A$ 2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ 3. $A+O=A$
Множення матриці на число
$\alpha A=\alpha\|a_{ij}\|=\|\alpha a_{ij}\|\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$ $\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$ Властивості   1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ 2. $(A+B)\cdot\alpha=\alpha A+\alpha B$ 3. $\alpha\beta A=(\alpha A)\beta$ 4. $A\cdot\mathrm{O}=\mathrm{O}$
Транспонування матриць
$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\qquad \underset{m\times n}{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Властивості   1. $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}$ 2. $(A+B)^T=A^T+B^T$ 3. $(\alpha\mathrm{A})^{\mathrm{T}}=\alpha\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Множення матриць

$\underset{m\times n}{A} \times \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C}$ («ширина» матриці А= «висоті» матриці В)

$$C = \left\| c_{ij} \right\|, \text{ де}$$

$$c_{ij} = \left(a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}\right) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}$$

Властивості

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$
5. $A \cdot B \neq B \cdot A$
6. $A \cdot E = E \cdot A = A$
7. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Піднесення до степеня

A- квадратна матриця

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m-\text{раз}}$$

Властивості

1. $A^0 = E$
2. $A^1 = A$
3. $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$
4. $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Обернена матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де Δ – визначник матриці $A(\Delta \neq 0)$

A_{ij} – алгебраїчне доповнення елементів a_{ij} матриці A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Ранг матриці

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to$$

Ранг матриці $A(\operatorname{rang} A)$ – найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rk} \end{pmatrix} \to \operatorname{rang} B = r$$

$$b_{ij} \neq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad r < k$$

ВИЗНАЧНИКИ

Визначники другого порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \det A=\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ – число}$$

Правило обчислення:

$$\Delta_2=\overset{+}{}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Визначники третього порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Правила обчислення

Перше правило Саррюса (або правило трикутника**)**

$$|\mathrm{A}|_{3\times 3}=a^{+}-a^{-}=\left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\right)-$$
$$-\left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}+a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\right)$$

Друге правило Саррюса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{31}-$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

ВИЗНАЧНИКИ 2-го ПОРЯДКУ

Властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями і навпаки (тобто транспонувати)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3. Спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Визначник, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

   4.1. Якщо всі елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

6. Якщо у визначника елементи будь якого рядка (стовпця) складаються з двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі 2-х визначників, у першого визначника елементами є перші доданки, у другого – другі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b \\ a_{21} & a_{22}+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & c \end{vmatrix}$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), які помножені на деяке число k

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\times k}{+} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$

ВИЗНАЧНИКИ

Властивості визначників

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Мінор M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ n-го порядку є визначник *(n-1)*-го порядку, отриманий шляхом викреслення i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ є мінор цього елемента, який береться зі знаком «+» чи «-», отже

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Властивості визначників

8. (Розклад визначника за елементами рядка чи стовпця). Визначник дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

9. Сума добутків елементів будь якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчне доповнення другого рядка (стовпця) дорівнює нулю

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

Визначники n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

ОСНОВНІ АЛГОРИТМИ

Алгоритм 1

Добуток двох матриць

Для знаходження **добутку двох матриць** виконуємо такі кроки ***алгоритму***:

а) перевіряємо узгодженість матриць (добуток матриць $\mathrm{A}_{(\mathrm{m},\underline{\mathrm{n}})} \times \mathrm{B}_{(\underline{\mathrm{n}},\mathrm{p})}$ можливий, якщо внутрішні індекси рівні між собою $(\mathrm{n} = \mathrm{k})$, тобто кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B);

б) визначаємо розмірність добутку двох матриць $\mathrm{A}_{(\underline{\mathrm{m}},\mathrm{n})} \times \mathrm{B}_{(\mathrm{n},\underline{\mathrm{p}})} = \mathrm{C}_{(\mathrm{m},\mathrm{p})}$;

в) знаходимо кожен з елементів c_{ij}, використовуючи формулу

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj},$$

або в загальному

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}\text{, де } i = \overline{1, m}\ ,\ j = \overline{1, n}\,,$$

тобто використовується правило множення *«рядок на стовпець»*

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \ \ldots \quad a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix};$$

г) формуємо матрицю $\mathrm{C}_{(\mathrm{m},\mathrm{p})}$.

Алгоритм 2

Обнулення елементів рядка (стовпця)

Обираємо стовпець (рядок), елементи якого будемо обнуляти.

Якщо в цьому стовпці (рядку) є елемент, що дорівнює одиниці, то обираємо його за ключовий елемент. Якщо одиниці немає, то її завжди можна одержати, розділивши увесь стовпець (рядок) на обраний a_{kj} (a_{ik}). При цьому такий елемент виноситься як коефіцієнт перед визначником.

Запам'ятаймо! Якщо ми обнуляємо елементи j-го стовпця, то будемо працювати з рядками $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{1j} & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & a_{k-1,j} & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{k+1,j} & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & a_{nj} & \bullet \end{vmatrix}$. Для обнулення, наприклад, елемента $a_{k-1,j}$ потрібно домножити k-ий рядок на $(-a_{k-1,j})$ та додати його до $(k-1)$-го рядка. Результат виконання операції записуємо на місці цього рядка. При цьому k-ий рядок переписуємо у новий визначник без змін. Аналогічним чином обнуляємо решту елементів j-го стовпця.

Запам'ятаймо! Якщо ми обнуляємо елементи i-го рядка, то будемо працювати із стовпцями $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{i1} & \dots & a_{i,k-1} & 1 & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$.

Для обнулення, наприклад, елемента $a_{k+1,j}$ потрібно домножити k-ий стовпець на $(-a_{k+1,j})$ та додати його до $(k+1)$-го стовпця. Результат виконання операції записуємо на місці цього стовпця. При цьому i-ий рядок переписуємо у новий визначник без змін. Аналогічним чином обнуляємо решту елементів i-го рядка.

Розкладаємо, одержаний в результаті перетворень, визначник за елементом $a_{kj}=1$ ($a_{ik}=1$).

Зауваження. При обчисленні визначників методом обнулення рядка або стовпця необхідно враховувати деякі властивості визначників:

- визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю;
- якщо всі елементи одного рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю;
- якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, які попередньо множаться на деяке число, то визначник не зміниться.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Система m лінійних рівнянь з n невідомими

Неоднорідна

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots a_{m3}x_3=b_m, \end{cases}$$

Однорідна

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots a_{m3}x_3=0. \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі; $a_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\,)$ – коефіцієнти при невідомих;

b_i – вільні члени; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – розв'язок системи

Система m лінійних рівнянь з n невідомими

Сумісна – має хоча б один розв'язок

Несумісна – не має розв'язку

Визначена – має один розв'язок

Невизначена – має більше одного розв'язку

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Матрична форма запису системи

$A \cdot X = B$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

Умова сумісності системи рівнянь

$rang\ A = rang\ A^*$

Умова визначеності системи рівнянь

$\det A \neq 0$

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Способи розв'язування

Метод Гаусса

$m=n, m \neq n$

Загальний розв'язок
Базовий розв'язок
Частинний розв'язок

Метод Крамера

$m=n$

$\Delta = detA = a_{11}A_{11}+\dots+a_{1n}A_{1n}$

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Матричний метод

$m=n$

$det\ A \neq 0$

$$A^{-1}=\frac{1}{det\ A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\left(A|E\right) \rightarrow \left(E|A^{-1}\right)$

$X = A^{-1} \cdot B$

СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Дано:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв'язування за формулами Крамера

- ✓ Обчислюємо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

- ✓ Знаходимо відношення:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

- ✓ $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ – розв'язок системи рівнянь

СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Дано:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв'язування матричним методом

- ✓ Виписуємо основну матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, матрицю невідомих $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ і матрицю вільних членів $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

- ✓ Розв'язуємо матричне рівняння

$$A\cdot X=B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B, \quad \text{де} \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

- ✓ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – розв'язок системи

СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Дано:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв’язування методом Гаусса

- ✓ Формуємо розширену матрицю системи рівнянь

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

- ✓ Зводимо розширену матрицю до вигляду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

- ✓ Для цього використовуємо такі перетворення:
  1. Перестановка рядків (стовпців) розширеної матриці.
  2. Множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля.
  3. Додавання до одного рядка розширеної матриці іншого, який множиться на число, відмінне від нуля.
- ✓ Записуємо систему рівнянь, яка відповідає матриці $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+a'_{13}x_3=b'_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{33}x_3=b'_3. \end{cases}$$

- ✓ Розв’язуємо систему знизу вверх методом послідовного виключення
- ✓ $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ – розв’язок системи рівнянь

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Вільні вектори

Довжина вектора

$\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

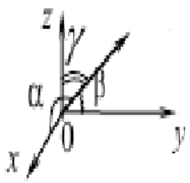
Координати вектора

$A\left(x_A;y_A;z_A\right)$,

$B\left(x_B;y_B;z_B\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(x_B\text{-}x_A;y_B\text{-}y_A;z_B\text{-}z_A\right)$

Напрямні косинуси



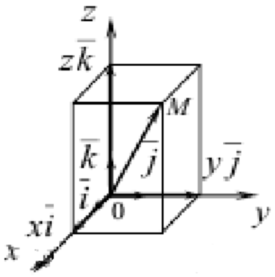
$\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}$, $\cos\beta=\dfrac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}$,

$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Розклад за ортонормованим базисом



$\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$

$\vec{i}\perp\vec{j},\vec{i}\perp\vec{k},\vec{j}\perp\vec{k}$

$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

або

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=$

$=\left(a_x;a_y;a_z\right)$

ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Додавання і віднімання

$\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z\right)$

Множення на число $k\in R$

$\vec{b}=k\cdot\vec{a}=\left(k\cdot a_x;k\cdot a_y;k\cdot a_z\right)$

Колінеарність векторів

$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=k\cdot\vec{a}$

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\pm\frac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$$

ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Скалярний

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\varphi=$

$=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

$\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Кут між векторами

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Умова ортогональності

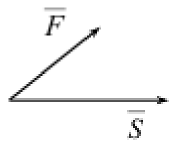
$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Модуль вектора $\vec{a}$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Робота сили

$A=\vec{F}\cdot\vec{S}$



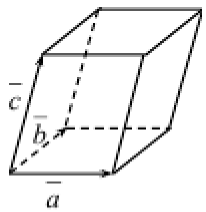
Мішаний

$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=$

$=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

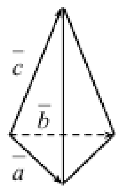
$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

Об'єм паралелепіпеда



$V=\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$

Об'єм тетраедра



$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$

Умова компланарності

$\vec{a};\vec{b};\vec{c}\in\alpha\ \Leftrightarrow\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=0$

Векторний $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$

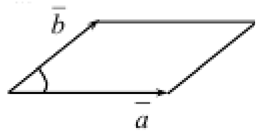
$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\varphi,$

$\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

$\vec{c}\perp\begin{cases}\vec{a}\\ \vec{b}\end{cases}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

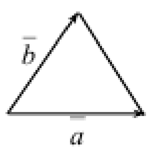
Площа паралелограма



$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$

Площа трикутника

$S=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$



Момент сили відносно точки О

$\overrightarrow{M}=\vec{F}\times\vec{r}$, де

$\vec{r}=\overrightarrow{OA}$

Умова колінеарності

$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ НА ПЛОЩИНІ

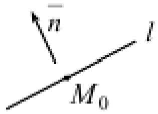
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Загальне рівняння

$$l:\quad Ax+By+C=0$$

$$\vec{n}=(A;B)\perp l$$

Рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$



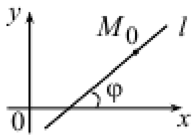
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C=0,$$

$$M_0(x_0;y_0),\ \vec{n}=(A;B)\perp l$$

Рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y=kx+b,\ k=tg\alpha$$

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку

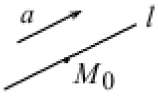


$$l:\ y-y_0=k(x-x_0),$$

$$M_0(x_0;y_0)$$

$$k=tg\alpha$$

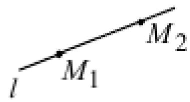
Канонічне рівняння прямої



$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

$$l\parallel\vec{a}=(m;n)$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки



$$l:\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

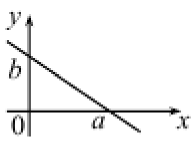
Параметричні рівняння прямої

$$M_0(x_0;y_0)$$

$$\vec{a}=(m;n)$$

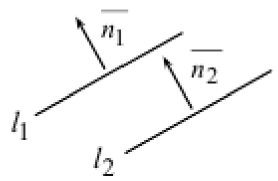
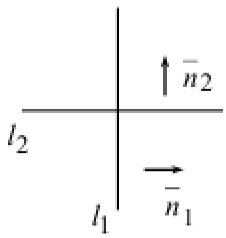
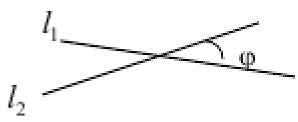
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$$

Рівняння у відрізках



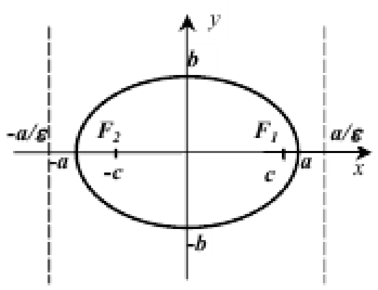
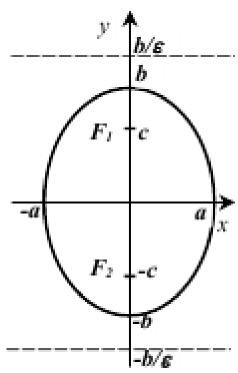
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

<table>
<tr><td colspan="2">Взаємне розміщення прямих на площині</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дано: $l_1\colon\ A_1x+B_1y+C_1=0$, $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1)$, $k_1=-\dfrac{A_1}{B_1}$, $b_1=-\dfrac{C_1}{B_1}$
$l_2\colon\ A_2x+B_2y+C_2=0$ $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2)$, $k_2=-\dfrac{A_2}{B_2}$, $b_2=-\dfrac{C_2}{B_2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Умова паралельності прямих</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$
або
$k_1=k_2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Умова збігу прямих</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$l_1=l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Умова перпендикулярності прямих</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$
або
$k_1=-\dfrac{1}{k_2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Кут між прямими</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$ або $tg\varphi=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Відстань від точки до прямої</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$l\colon\ Ax+By+C=0,\ M_0\left(x_0;y_0\right)$
$d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$</td></tr>
</table>

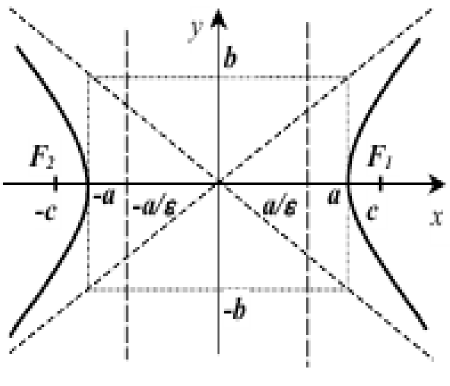
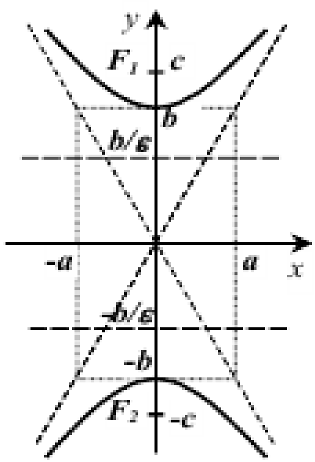
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

ЕЛІПС ($A \neq B$, знаки A і B однакові)		
Характеристики	***Фокуси на осі Ох***	***Фокуси на осі Оу***
Канонічне рівняння	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a<b$
Півосі	***а*** – велика, ***в*** – мала	***а*** – мала, ***в*** – велика
Відстань від центра до фокусів	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;0);F_2(-c;0)$	$F_1(0;c);F_2(0;-c)$
Ексцентриситет	$\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\dfrac{c}{b}<1$
Рівняння директрис	$x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$	$y=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$
Рисунок		

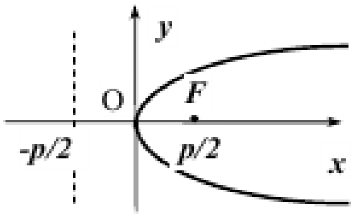
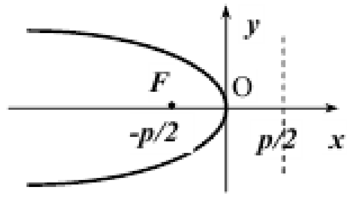
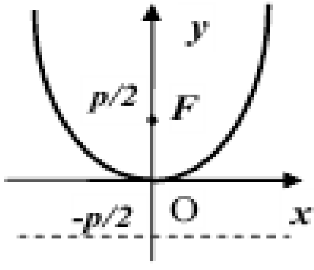
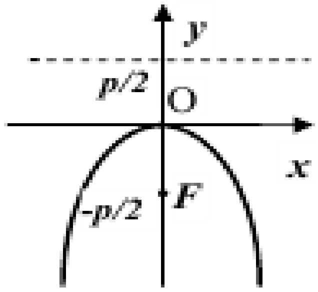
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

ГІПЕРБОЛА (A і B рівні)		
Характеристики	***Фокуси на осі Ox***	***Фокуси на осі Oy***
Канонічне рівняння	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Півосі	***а*** – дійсна, ***в*** – уявна	***а*** – уявна, ***в*** – дійсна
Відстань від центра до фокусів	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	$c=\sqrt{b^2+a^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;0);F_2(-c;0)$	$F_1(0;c);F_2(0;-c)$
Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}(\varepsilon>1)$	$\varepsilon=\frac{c}{b}(\varepsilon>1)$
Рівняння директрис	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$
Рівняння асимптот	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
Рисунок		

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

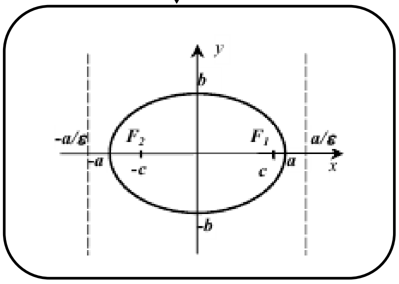
ПАРАБОЛА		
Характеристики	***Симетрія відносно осі Ox***	
Канонічне рівняння	$y^2=2px$	$y^2= -2px$
Координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$
Рівняння директриси	$x= -\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$
Рисунок		
Характеристики	***Симетрія відносно осі Oy***	
Канонічне рівняння	$x^2=2py$	$x^2= -2py$
Координати фокуса	$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси	$y= -\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
Рисунок		

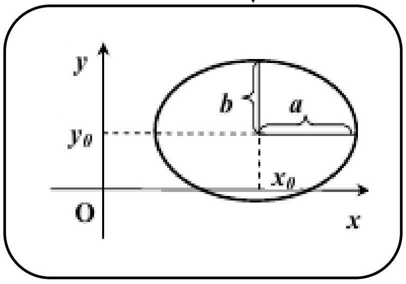
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Еліпс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

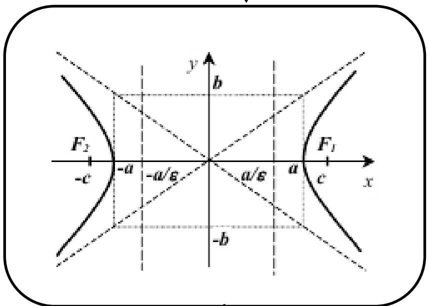


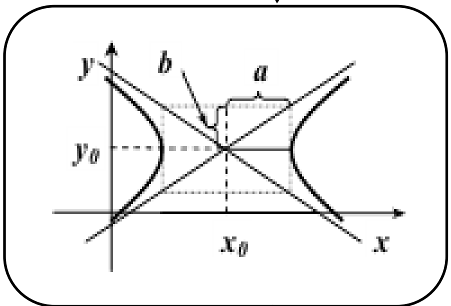


Гіпербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

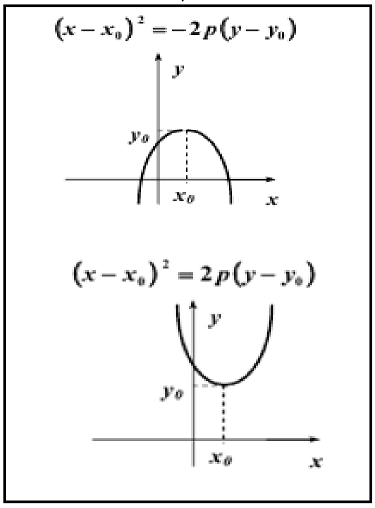


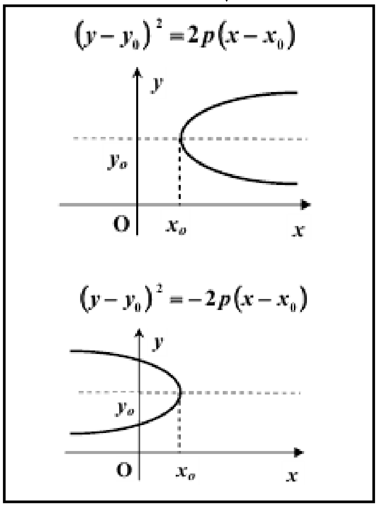


Парабола

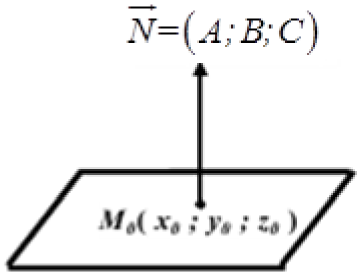
$$x^2=\pm 2py$$

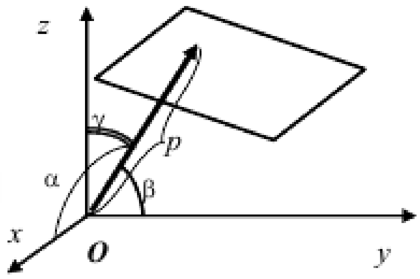
$$y^2=\pm 2px$$

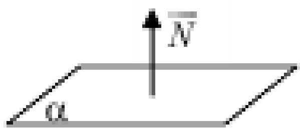
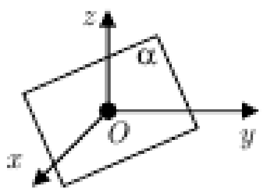
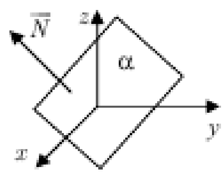
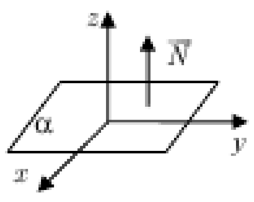




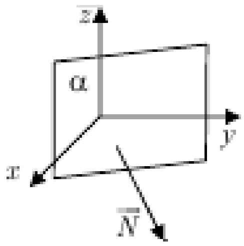
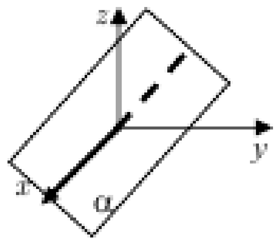
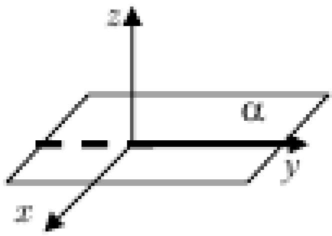
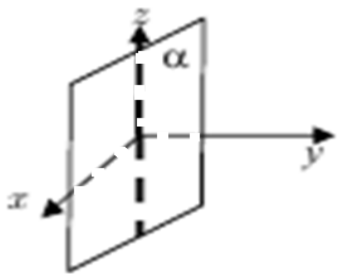
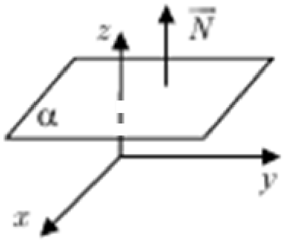
ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ У ПРОСТОРІ
ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ



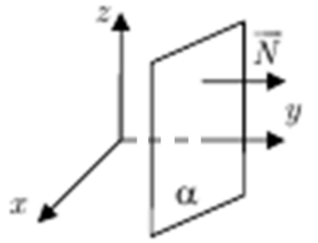
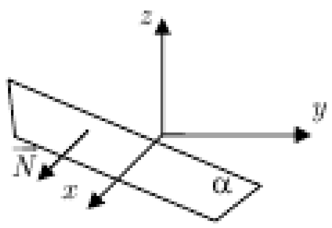
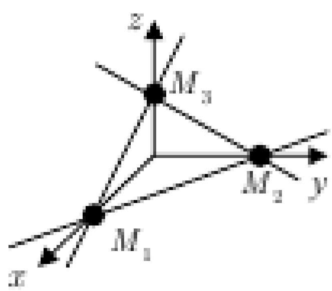
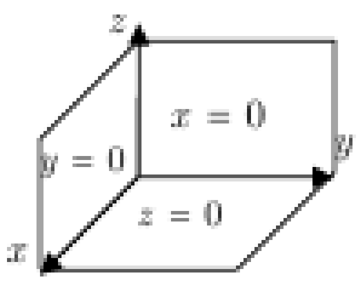


ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ ТА ЙОГО ЧАСТИННІ ВИПАДКИ		
$Ax+By+Cz+D=0$		$\vec{N}=(A;B;C)$-вектор нормалі; $\vec{N}\perp\alpha$
$Ax+By+Cz=0$		$D=0$ $\vec{N}=(A;B;C)$ т.$O(0;0;0)\in\alpha$
$By+Cz+D=0$		$A=0,\ D\neq 0$ $\vec{N}=(0;B;C)$ $\vec{N}\perp Ox$ $\alpha \parallel Ox$
$Ax+Cz+D=0$		$B=0,\ D\neq 0$ $\vec{N}=(A;0;C)$ $\vec{N}\perp Oy$ $\alpha \parallel Oy$

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ ТА ЙОГО ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

$Ax+By+D=0$		$C=0,\ D\neq 0$ $\vec{N}=(A;B;0)$ $\vec{N}\perp Oz$ $\alpha \parallel Oz$
$By+Cz=0$		$A=D=0$ $\vec{N}=(0;B;C)$ $Ox\in\alpha$
$Ax+Cz=0$		$B=D=0$ $\vec{N}=(A;0;C)$ $Oy\in\alpha$
$Ax+By=0$		$C=D=0$ $\vec{N}=(A;B;0)$ $Oz\in\alpha$
$Cz+D=0$		$A=B=0$ $\vec{N}=(0;0;C)$ $\vec{N}\parallel Oz$ $\alpha\perp Oz$

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ ТА ЙОГО ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

$By+D=0$		$A=C=0$ $\vec{N}=(0;B;0)$ $\vec{N} \parallel Oy$ $\alpha \perp Oy$
$Ax+D=0$		$B=C=0$ $\vec{N}=(A;0;0)$ $\vec{N} \parallel Ox$ $\alpha \perp Ox$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$		$a=-\frac{D}{A};$ $b=-\frac{D}{B};$ $c=-\frac{D}{C}.$ $M_1(a;0;0),$ $M_2(0;b;0),$ $M_3(0;0;c).$
$z=0$		Площина *Oxy*
$y=0$		Площина *Oxz*
$x=0$		Площина *Oyz*

ОСНОВНІ ФОРМИ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

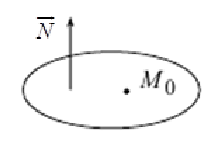
Рівняння площини, яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{N}$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$

$+C(z-z_0)=0$

$\overrightarrow{N}=(A;B;C)$



Рівняння площини, яка проходить через три точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$,

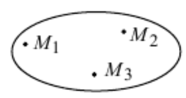
$M_2(x_2, y_2, z_2)$,

$M_3(x_3, y_3, z_3)$

$M(x; y; z)$ - довільна точка

$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$



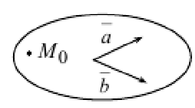
Рівняння площини, яка проходить через точку M_0 паралельно до двох векторів

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$M(x; y; z)$ - точка з поточними координатами

$\vec{a}=(p_1; q_1; r_1)$, $\vec{b}=(p_2; q_2; r_2)$

$\overrightarrow{M_0M}\,\vec{a}\,\vec{b}=0$



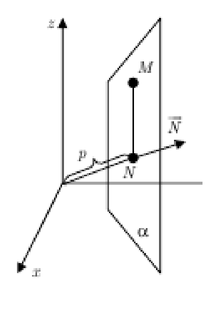
Нормальне рівняння

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma - p=0$

$\overrightarrow{N}=(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

$|\overrightarrow{N}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси перпендикуляра, який проведено з початку координат на площину; p – довжина вектора $\overrightarrow{N}$.



ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОЩИН

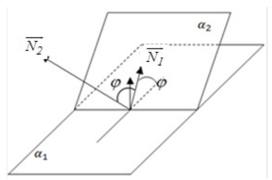
Кут між площинами

$$\alpha_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$$

$$\alpha_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

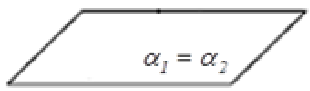
де $\varphi=\angle(\alpha_1;\alpha_2)=\angle\left(\overrightarrow{N_1};\overrightarrow{N_2}\right)$



Критерій збігу площин

$\alpha_1=\alpha_2$, якщо

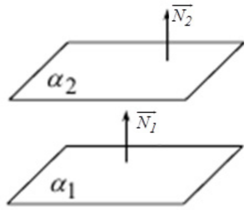
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$



Критерій паралельності площин

$\alpha_1 \parallel \alpha_2$ якщо

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$$

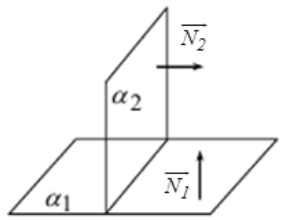


Критерій перпендикулярності площин

$$\alpha_1\perp\alpha_2\Leftrightarrow\overrightarrow{N_1}\perp\overrightarrow{N_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0\Leftrightarrow$$

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

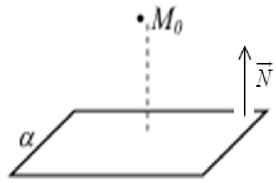


Відстань від точки до площини

$$\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0$$

$$M_0(x_0;y_0;z_0)$$

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



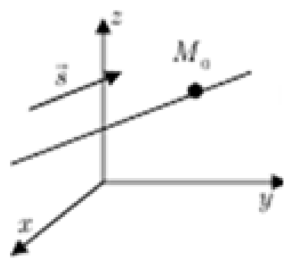
ПРЯМА $\underline{l}$ В ПРОСТОРІ

Канонічні рівняння прямої

$M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$, $\vec{s}\parallel l$

$\vec{s}=(p;\,q;\,r)$ – напрямний вектор

$$l:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r},$$



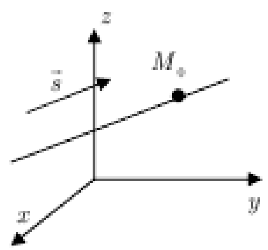
Параметричні рівняння прямої

$$M_0(x_0,y_0,z_0)$$

$$\vec{s}=(p;\,q;\,r)$$

$$\begin{cases} x=x_0+pt, \\ y=y_0+qt, \\ z=z_0+rt. \end{cases}$$

t – змінний параметр

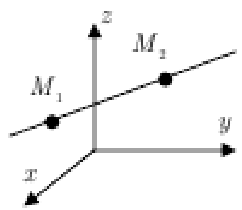


Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

$$M_1(x_1,y_1,z_1)$$

$$M_2(x_2,y_2,z_2)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

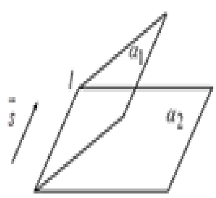


Загальні рівняння прямої (пряма як лінія перетину двох площин)

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

де $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ і

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\cup\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$



ПРЯМА l В ПРОСТОРІ

Кут між прямими

$$\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1},\ \vec{s_1}=(p_1;\ q_1;\ r_1)$$

$$\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2},\ \vec{s_2}=(p_2;\ q_2;\ r_2)$$

$$l_1 \parallel \vec{s_1}, l_2 \parallel \vec{s_2},\ M_1 \in l_1, M_2 \in l_2$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}\right|}{\left|\vec{s_1}\right|\cdot\left|\vec{s_2}\right|}=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

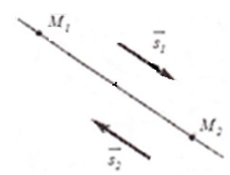
де $\varphi=\angle(l_1,l_2)=\angle(\vec{s_1},\vec{s_2})$

Критерій збігу прямих

$l_1=l_2$ якщо:

1) $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$;

2) $M_1 \in l_2: \frac{x_1-x_2}{p_2}=\frac{y_1-y_2}{q_2}=\frac{z_1-z_2}{r_2}$

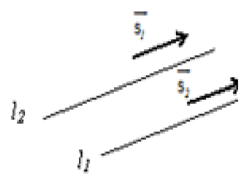


Критерій паралельності прямих

$l_1 \parallel l_2$ якщо:

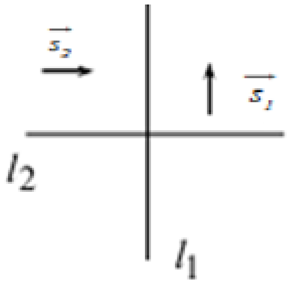
1) $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$;

2) $M_1 \notin l_2$.



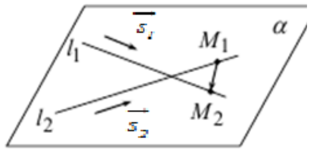
Критерій перпендикулярності прямих

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0 \Leftrightarrow$$
$$p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$$



Критерій належності прямих одній площині

$$l_1, l_2 \subset \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{s_1}\,\vec{s_2}=0$$



ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Взаємне розміщення прямої і площини

Дано:

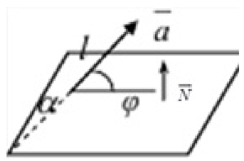
$$l:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r},\ \vec{s}=\left(p;\ q;\ r\right);\ \alpha: Ax+By+Cz+D=0,\ \ \overrightarrow{N}=\left(A;B;C\right)$$

Кут між прямою і площиною

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{a}\cdot\overrightarrow{N}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N}\right|}=$$

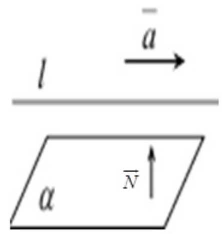
$$=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

де $\varphi=\angle\left(\vec{a},\overrightarrow{N}\right)$



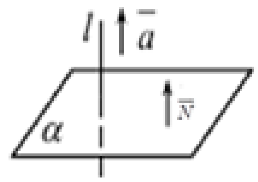
Критерій паралельності прямої і площини

$$l\parallel\alpha\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\overrightarrow{N}\Leftrightarrow$$
$$Ap+Bq+Cr=0$$



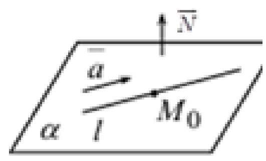
Критерій перпендикулярності прямої і площини

$$l\perp\alpha\Leftrightarrow\overrightarrow{N}\parallel\vec{a}\Leftrightarrow$$
$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$$



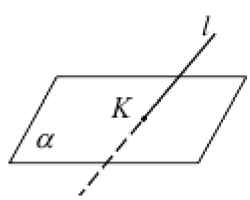
Критерій належності прямої до площини

$$l\subset\alpha,\overrightarrow{N}\perp\vec{a},M_0\in\alpha\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}Ap+Bq+Cr=0\\Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$$



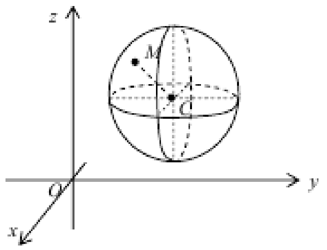
Критерій перетину прямої і площини

$$l\cap\alpha\Leftrightarrow Ap+Bq+Cr=0$$
$$l\cap\alpha=K$$
$$K:\begin{cases}x=x_0+pt\\y=y_0+qt\\z=z_0+rt\\Ap+Bq+Cr+D=0\end{cases}$$



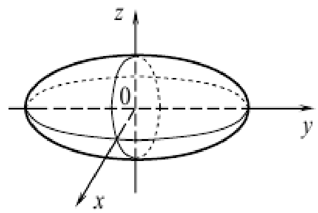
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Сфера



$$\left(x\text{-}x_0\right)^2+\left(y\text{-}y_0\right)^2+\left(z\text{-}z_0\right)^2=R^2$$

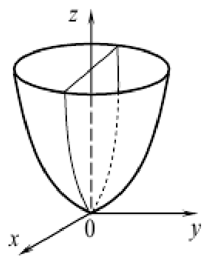
Еліпсоїд



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

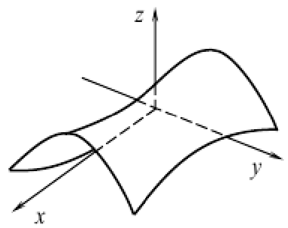
Параболоїди

Еліптичний параболоїд



$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

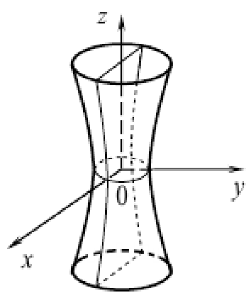
Гіперболічний параболоїд



$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

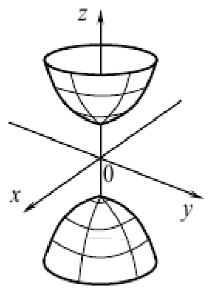
Гіперболоїди

Однопорожнинний гіперболоїд



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Двопорожнинний гіперболоїд

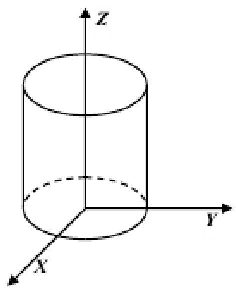


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

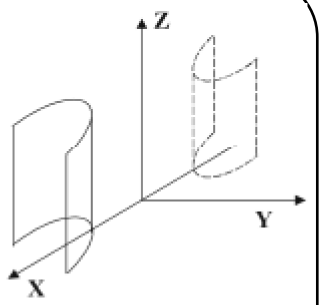
Циліндричні поверхні

Еліптичний циліндр



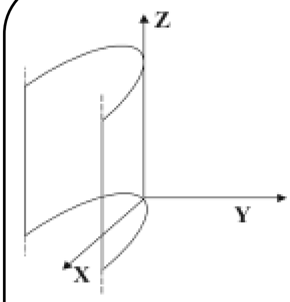
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Гіперболічний циліндр



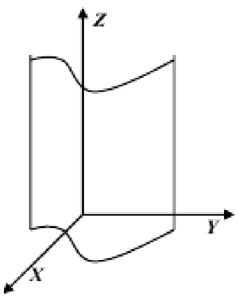
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параболічний циліндр



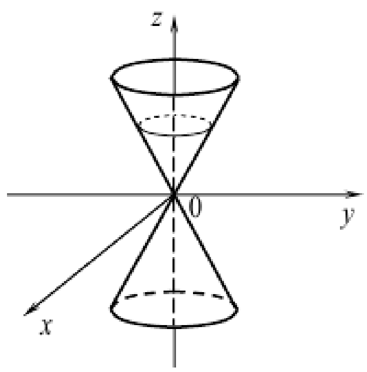
$$y^2 = 2px$$

Довільна циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі Oz



$$F(x,y)=0$$

Конус

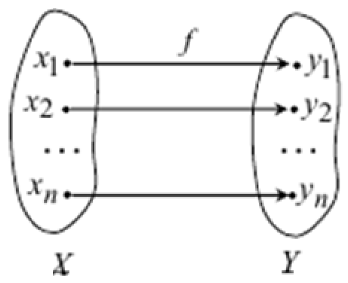


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ФУНКЦІЯ

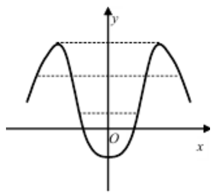
Поняття функції



y=f(x) - функція;
f – закон, за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність певне значення $y \in Y$; $D(y)$ – область визначення функції (множина значень x, для яких існують y); $E(y)$ – область значень функції (множина значень y).

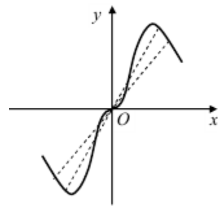
Парність функції

Парні функції



f(-x)=f(x)

Непарні функції



f(-x)= - f(x

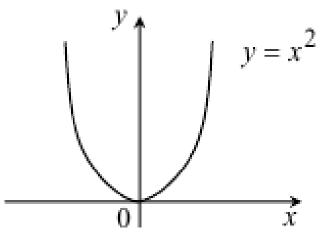
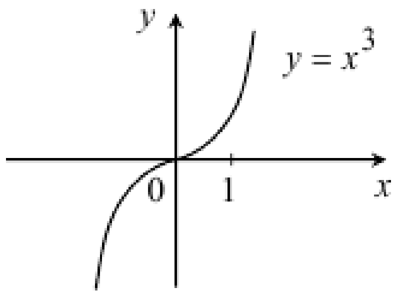
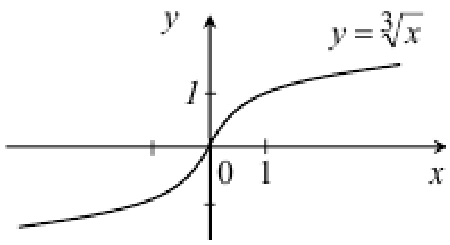
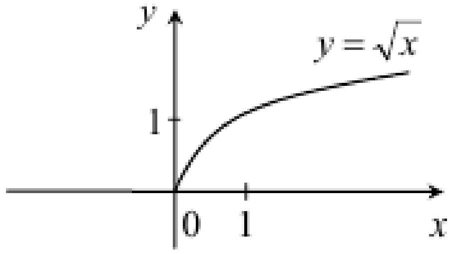
Періодичність функції

Функція *y=f(x)* – періодична з періодом $T \neq 0$, якщо : $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$ для будь-якого x з області визначення

Монотонність функції

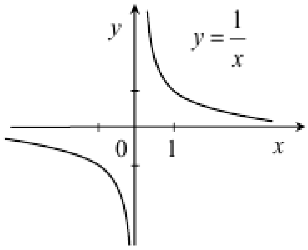
Функція *y=f(x)* зростає на проміжку $[a;b]$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з цього проміжку, таких що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$

Функція *y=f(x)* спадає на проміжку $[a;b]$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з цього проміжку, таких що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$

ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ	
Функція та її графік	Властивості функції
Степенева функція $y=x^{\alpha}, \alpha \in R$	
$y=x^{n}, \quad n \in N$ 	n – парне 1. $D(y)=(-\infty;\infty)$ 2. $E(y)=[0;+\infty)$ 3. Парна 4. Неперіодична 5. Зростає на $[0;\infty)$, спадає на $(-\infty;0]$
$y=x^{n}, \quad n \in N$ 	n – непарне 1. $D(y)=(-\infty;\infty)$ 2. $E(y)=(-\infty;+\infty)$ 3. Непарна 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$
$y=\sqrt[n]{x}, \quad n \in N,\ n>1$ 	n – непарне 1. $D(y)=(-\infty;\infty)$ 2. $E(y)=(-\infty;+\infty)$ 3. Непарна 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$
	n – парне 1. $D(y)=[0;\infty)$ 2. $E(y)=[0;+\infty)$ 3. Парна 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$

<table>
<tr><th colspan="2">ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ</th></tr>
<tr><th>Функція та її графік</th><th>Властивості функції</th></tr>
<tr><td colspan="2">Степенева функція $y=x^{\alpha}, \alpha \in R$</td></tr>
<tr><td>

$y=x^{-n}, \quad n \in N$

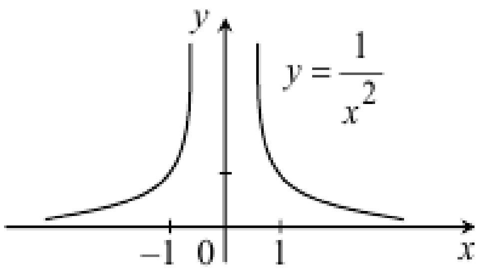


</td><td>

n – непарне

1. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
2. $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
3. Непарна
4. Неперіодична
5. Спадає на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

</td></tr>
<tr><td>



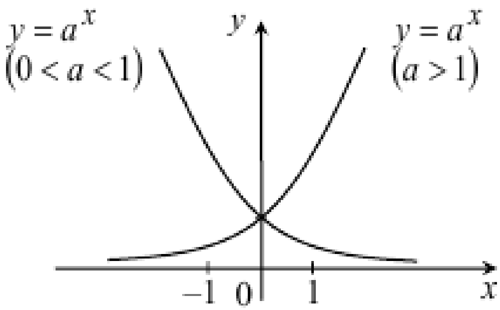
</td><td>

n – парне

1. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
2. $E(y)=(0;+\infty)$
3. Парна
4. Неперіодична
5. Зростає на $(-\infty;0)$ і спадає на $(0;+\infty)$

</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Показникова функція</td></tr>
<tr><td>

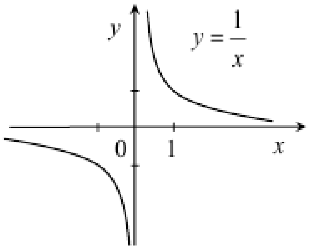
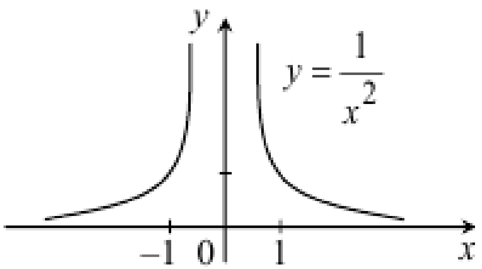
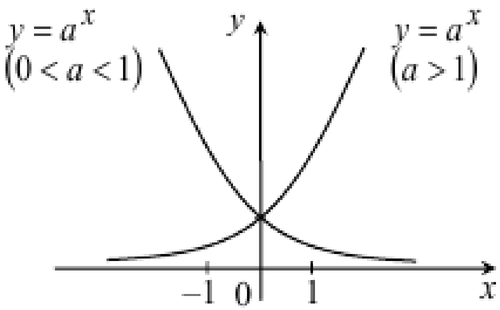
$y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$



</td><td>

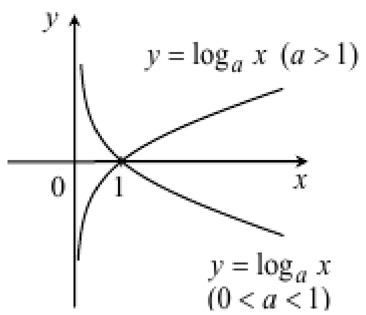
1. $D(y)=(-\infty;\infty)$
2. $E(y)=(0;+\infty)$
3. Не є парною і не є непарною
4. Неперіодична
5. Зростає на $D(y)$ при $a>1$, спадає на $D(y)$ при $0<a<1$

</td></tr>
</table>

ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ	
Функція та її графік	Властивості функції
Степенева функція $y=x^{\alpha}, \alpha \in R$	
$y=x^{-n}, \quad n \in N$ 	n – непарне 1. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ 2. $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ 3. Непарна 4. Неперіодична 5. Спадає на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
	n – парне 1. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ 2. $E(y)=(0;+\infty)$ 3. Парна 4. Неперіодична 5. Зростає на $(-\infty;0)$ і спадає на $(0;+\infty)$
Показникова функція	
$y=a^{x}, \ a>0, \ a \neq 1$ 	1. $D(y)=(-\infty;\infty)$ 2. $E(y)=(0;+\infty)$ 3. Не є парною і не є непарною. 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$ при $a>1$, спадає на $D(y)$ при $0<a<1$

<table>
<tr><th colspan="2">ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ</th></tr>
<tr><th>Функція та її графік</th><th>Властивості функції</th></tr>
<tr><td colspan="2">Логарифмічна функція</td></tr>
<tr><td>

$y=log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$



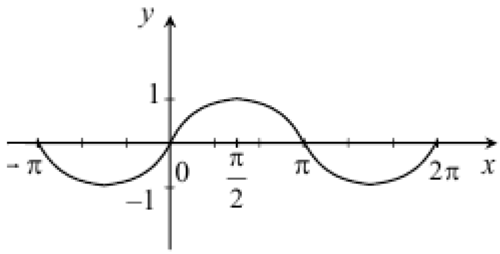
</td><td>

1. $D(y)=(0;+\infty)$
2. $E(y)=(-\infty;+\infty)$
3. Не є парною і не є непарною
4. Неперіодична
5. Зростає на $D(y)$ при $a>1$,

спадає на $D(y)$ при $0<a<1$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Тригонометричні функції</td></tr>
<tr><td>

$y=\sin x$



</td><td>

1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$
2. $E(y)=[-1;1]$
3. Непарна
4. Періодична з періодом $T=2\pi$
5. Зростає на

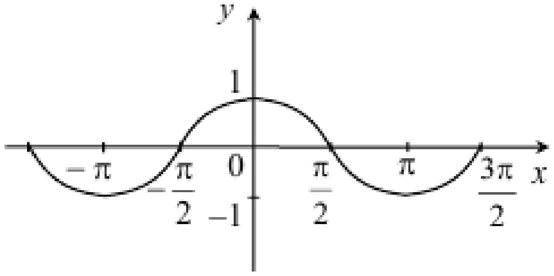
$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in Z$,

спадає на

$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in Z$

</td></tr>
<tr><td>

$y=\cos x$



</td><td>

1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$
2. $E(y)=[-1;1]$
3. Парна
4. Періодична з періодом $T=2\pi$
5. Зростає на

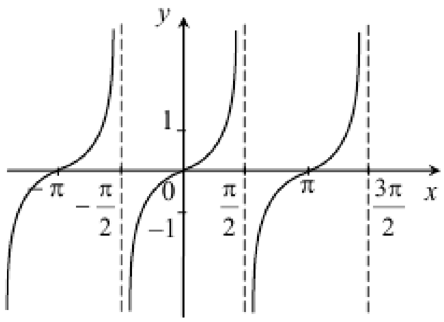
$[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n],\ n\in Z$, спадає на

$[2\pi n;\ \pi+2\pi n],\ n\in Z$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ</td></tr>
<tr><td>Функція та її графік</td><td>Властивості функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">Тригонометричні функції</td></tr>
<tr><td>

$y=tg\,x$

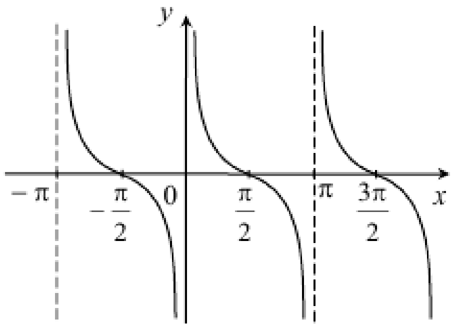


</td><td>

1. $D(y)=\left\{\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z\right\}$
2. $E(y)=(-\infty;+\infty)$
3. Непарна
4. Періодична з періодом $T=\pi$
5. Зростає на $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$

</td></tr>
<tr><td>

$y=Ctg\,x$



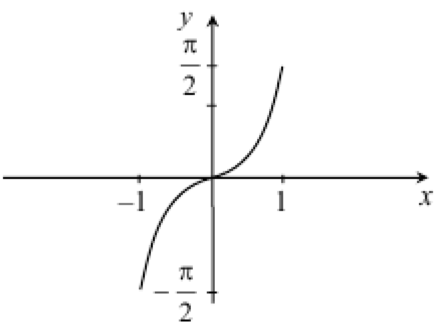
</td><td>

1. $D(y)=(\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z$
2. $E(y)=(-\infty;+\infty)$
3. Непарна
4. Періодична з періодом $T=\pi$
5. Зростає на $(\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Обернені тригонометричні функції</td></tr>
<tr><td>

$y=arcsin\,x$



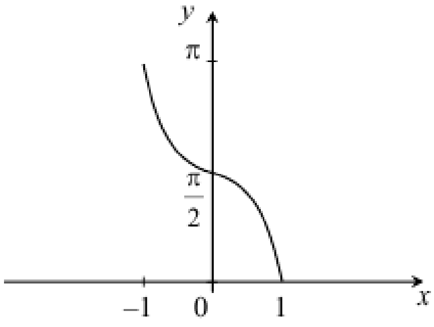
</td><td>

1. $D(y)=[-1;1]$
2. $E(y)=\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$
3. Непарна
4. Зростає на $D(y)$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ</th></tr>
<tr><th>Функція та її графік</th><th>Властивості функції</th></tr>
<tr><td colspan="2">Обернені тригонометричні функції</td></tr>
<tr><td>

$y=\arccos x$

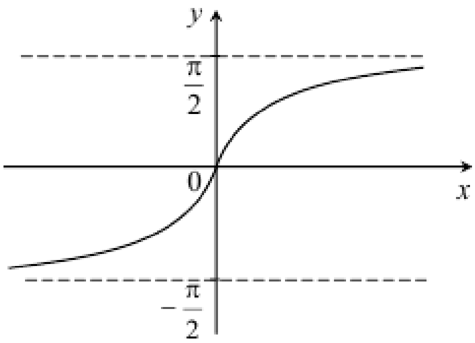


</td><td>

1. $D(y)=[-1;1]$
2. $E(y)=[0;\pi]$
3. Не є парною і не є непарною.
4. Спадає на $D(y)$

</td></tr>
<tr><td>

$y=\operatorname{arctg} x$

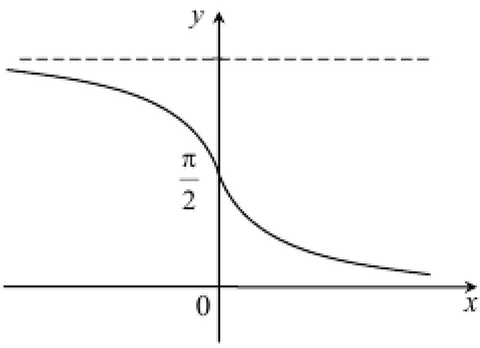


</td><td>

1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$
2. $E(y)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
3. Непарна
4. Зростає на $D(y)$

</td></tr>
<tr><td>

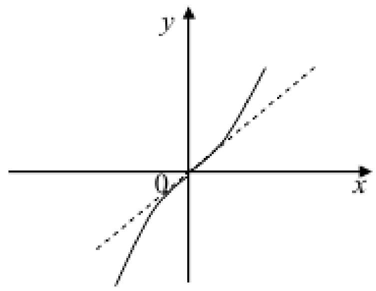
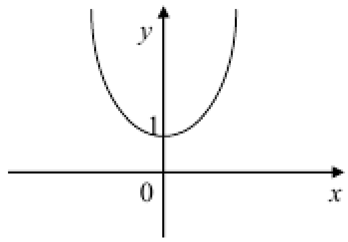
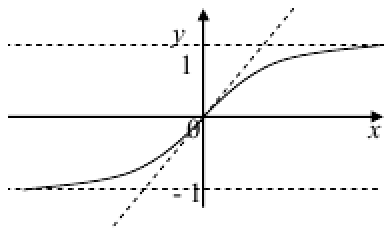
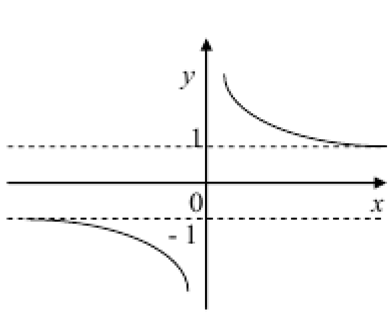
$y=\operatorname{arcctg} x$



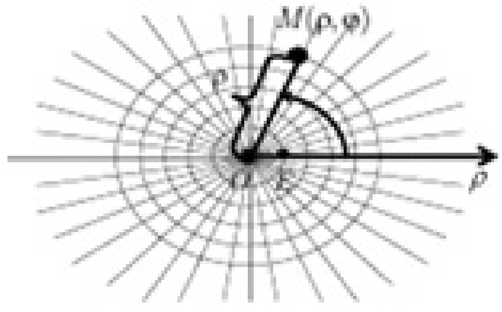
</td><td>

1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$
2. $E(y)=(0;\pi)$
3. Не є парною і не є непарною.
4. Спадає на $D(y)$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ</th></tr>
<tr><th>Аналітичне завдання функції</th><th>Графік функції</th></tr>
<tr><td colspan="2">Гіперболічний синус</td></tr>
<tr><td>$sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Гіперболічний косинус</td></tr>
<tr><td>$ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Гіперболічний тангенс</td></tr>
<tr><td>$th\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Гіперболічний котангенс</td></tr>
<tr><td>$Cth\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$</td><td>
</td></tr>
</table>

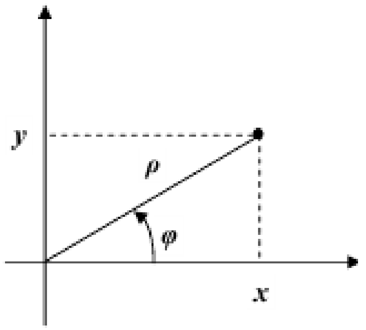
ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ



$\rho = OM$ – ***полярний радіус*** (відстань від точки M до ***полюса*** O),

φ – полярний кут ($\angle\rho OM$)

Зв’язок прямокутної і полярної систем координат

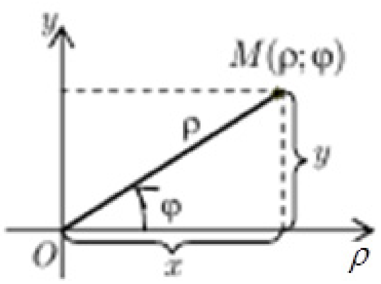


$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi=\begin{cases} +\arccos\dfrac{x}{\rho},\ y\ge 0 \\ -\arccos\dfrac{x}{\rho},\ y<0 \end{cases},\ \varphi\in(-\pi;\pi]$$

Формули переходу від полярних до декартових координат



Перехід від полярних до декартових координат:

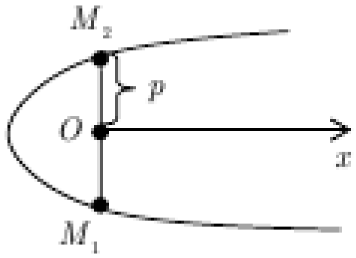
$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$$

Перехід від декартових до полярних координат

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad tg\varphi=\frac{y}{x}$$

Рівняння ліній другого порядку в полярній системі координат



Нехай $M_1M_2=2p$ – фокальна хорда, яка проходить через полюс і перпендикулярна до полярної осі.

Число $p=M_1O=M_2O$ називається параметром лінії, $p>0$

Рівняння $p=\dfrac{p}{1\text{-}\varepsilon\cdot cos\,\varphi}$ визначає відповідно:

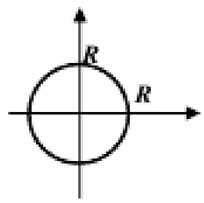
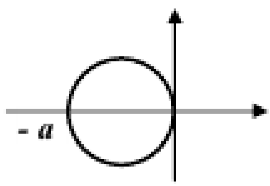
а) коло, якщо $\varepsilon=0$;

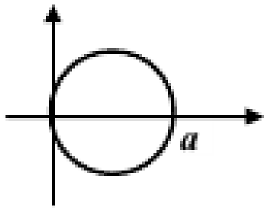
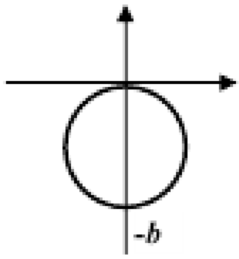
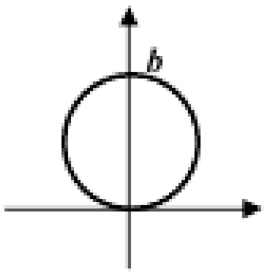
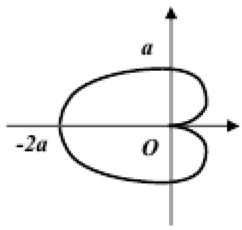
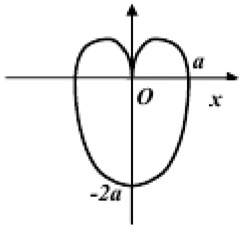
б) еліпс, якщо $0<\varepsilon<1$;

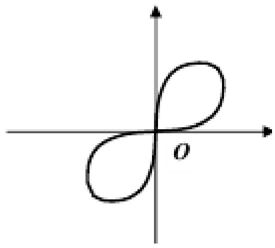
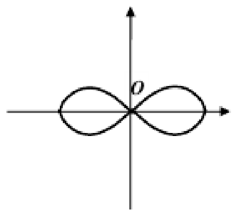
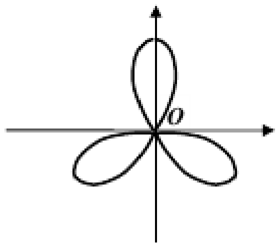
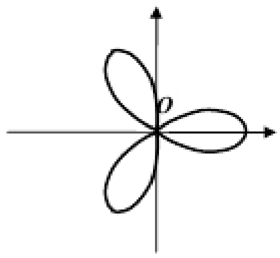
в) параболу, якщо $\varepsilon=1$;

г) праву гілку гіперболи, якщо $\varepsilon>1$.

Деякі лінії в полярних координатах

Рівняння в декартовій системі координат	Рівняння в полярній системі координат	Рисунок
	Коло	
$x^2+y^2=R^2$	$\rho=R$ $\left(0\le\varphi\le 2\pi\ \text{або}-\pi\le\varphi\le\pi\right)$	
$x^2+y^2+ax=0$	$\rho=-a\cdot cos\,\varphi$ $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}$	

Рівняння в декартовій системі координат	Рівняння в полярній системі координат	Рисунок
$x^2+y^2\text{-}ax=0$	$\rho=a\cdot cos\varphi$ $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$	
$x^2+y^2+by=0$	$\rho=-bsin\varphi$ $\left(-\pi\le\varphi\le 0 \text{ або } \pi\le\varphi\le 2\pi\right)$	
$x^2+y^2\text{-}by=0$	$\rho=bsin\varphi$ $\left(0\le\varphi\le\pi\right)$	
Кардіоїда		
$\left(x^2+y^2\right)^2+$ $+2ax\left(x^2+y^2\right)-$ $-a^2y^2=0$	$\rho=a\cdot\left(1\text{-}cos\varphi\right)$	
$\left(x^2+y^2\right)^2+$ $+2ax\left(x^2+y^2\right)-$ $-a^2x^2=0$	$\rho=a\cdot\left(1\text{-}sin\ \varphi\right)$	

Рівняння в декартовій системі координат	Рівняння в полярній системі координат	Рисунок
Розетки		
$\left(x^2+y^2\right)^3 -$ $- 4a^2x^2y^2 = 0$	$\rho = a \cdot sin\ 2\varphi$	Двопелюсткова троянда 
$\left(x^2+y^2\right)^3 -$ $- a^2\left(x^2-y^2\right)^2 = 0$	$\rho = a \cdot cos\,2\varphi$	Двопелюсткова троянда 
$\left(x^2+y^2\right)^2 -$ $- ay\left(3x^2-y^2\right) = 0$	$\rho = a \cdot sin\,3\varphi$	Трипелюсткова троянда 
$\left(x^2+y^2\right)^2 -$ $- ax\left(x^2-3y^2\right) = 0$	$\rho = a \cdot cos\,3\varphi$	Трипелюсткова троянда 

ГРАНИЦІ

Означення: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon): |x\text{-}x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)\text{-}A|<\varepsilon$

ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ

Дано: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$;

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,\ G(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$

$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$

$\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)}=a^b$

$\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b$

$\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b$

$\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{b},\ a\neq 0$

Теореми про нескінченно малі

$\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\to} 0,\ \beta(x)\underset{x\to x_0}{\to} 0$

$\lim\limits_{x\to x_0} \left(\alpha(x)\pm\beta(x)\right)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0} \left(\alpha(x)\cdot\beta(x)\right)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$

НЕВИЗНАЧЕННОСТІ

1^∞:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\infty\text{-}\infty$, $0\cdot\infty$ → $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{G_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a}{b}, n=m\\ \infty, n>m\\ 0,\ n<m.\end{cases}$$

$\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{G_m(x)}=\frac{(x\text{-}x_0)\cdot P_{n\text{-}1}(x)}{(x\text{-}x_0)\cdot G_{m\text{-}1}(x)}$$

Порівняння нескінченно малих

$\sin x\sim x$

$tg\, x\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$arctg\, x\sim x$

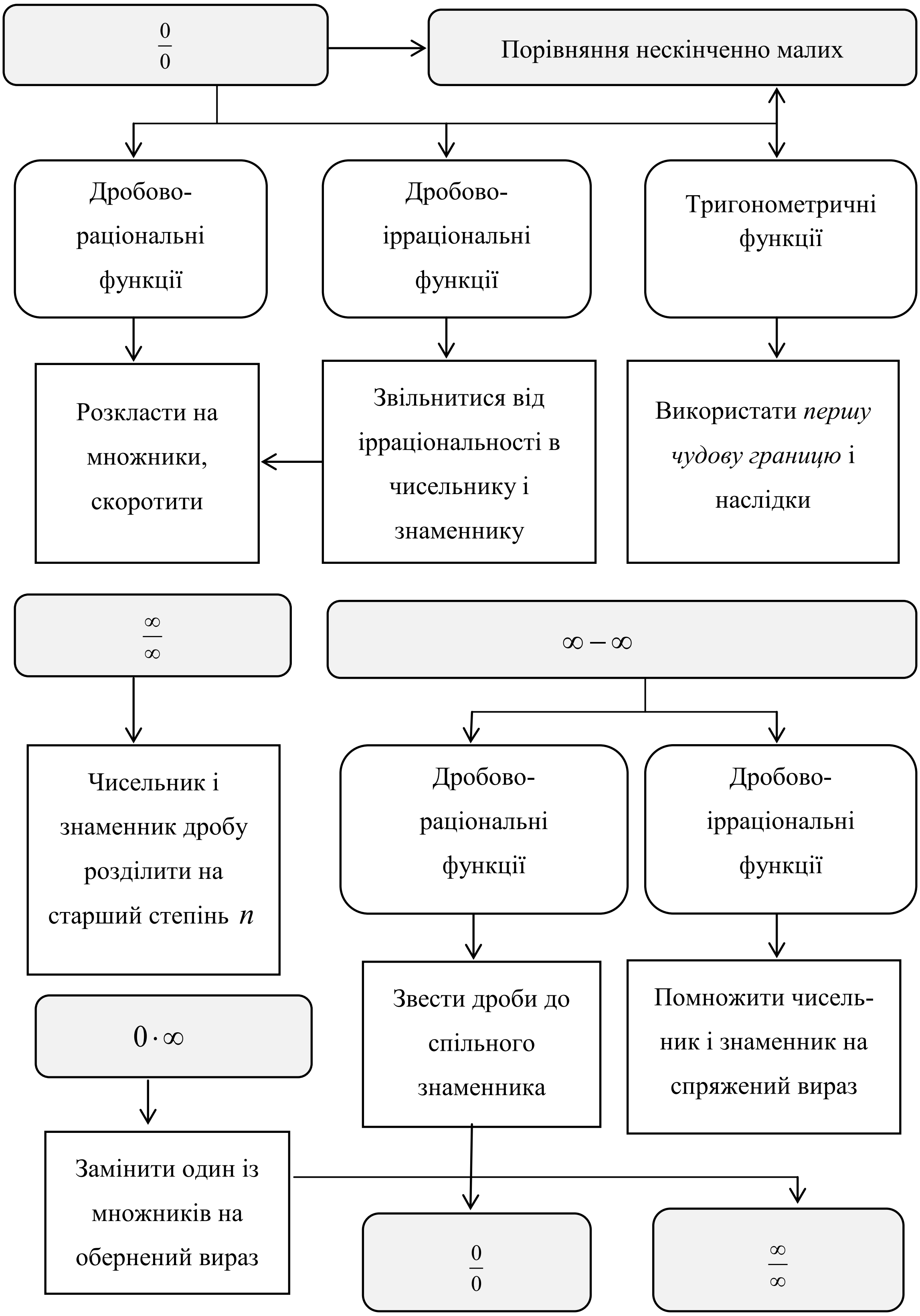
$ln(1\text{-}x)\sim x$

$e^x-1\sim x$

Правило Лопіталя

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

1. Перевірте чи є невизначеність.
2. Обчисліть границю, якщо невизначеності немає.
3. Розкрийте невизначеність, використовуючи такі блок-схеми.



МЕТОДИ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Раціональні функції. Факторіали

Структура функцій	**Граничне значення змінної**	**Невизна-ченість**	**Метод перетворення**
Частка двох поліномів	$x \to \infty$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної та визначити нескінченно малі доданки
Частка двох поліномів	$x \to x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	Розкласти чисельник і знаменник на множники, скоротити дріб на $(x\text{-}x_0)$
Сума або різниця двох дробів	$x \to \infty$	$(\infty - \infty)$	Перетворити вираз до одного дробу, за наявності невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ скоротити на $(x\text{-}x_0)$
Вираз з факторіалами	$n \to \infty$	$(\infty - \infty)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Обрати факторіал найбільшого виразу, інші за рекурентною формулою звести до обраного

МЕТОДИ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Ірраціональні функції

Структура функцій	**Граничне значення змінної**	**Невизна-ченість**	**Метод перетворення**
Дріб з коренями від поліномів	$x \to \infty$	$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	Поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування коренів) та визначити нескінченно малі доданки
Дріб з коренями від поліномів	$x \to x_0$	$\left(\dfrac{0}{0}\right)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення та відокремити множник $(x\text{-}x_0)$; скоротити дріб на цей множник
Сума або різниця з коренями	$x \to \infty$	$(\infty - \infty)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення, перетворивши вираз до одного дробу, за наявності невизначеності типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування кореня)

МЕТОДИ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Ірраціональні функції

Структура функцій	**Граничне значення змінної**	**Невизна-ченість**	**Метод перетворення**
Дріб з коренями від поліномів	$x \to \infty$	$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	Поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування коренів) та визначити нескінченно малі доданки
Дріб з коренями від поліномів	$x \to x_0$	$\left(\dfrac{0}{0}\right)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення та відокремити множник $(x\text{-}x_0)$; скоротити дріб на цей множник
Сума або різниця з коренями	$x \to \infty$	$(\infty - \infty)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення, перетворивши вираз до одного дробу, за наявності невизначеності типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування кореня)

МЕТОДИ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Застосування другої важливої границі

Структура функцій	Граничне значення змінної	Невизна-ченість	Метод перетворення
Степенево-показникова функція	$x \to \infty$ $x \to x_0$	$\left(1^{\infty}\right)$	Записати у вигляді суми **1** та нескінченно малої функції; побудувати другу важливу границю та перейти до границі в показнику
Вираз з логарифмом	Аргумент логарифма прямує до **1**	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $\left(0 \cdot \infty\right)$	Записати аргумент логарифма у вигляді суми **1** та нескінченно малої функції; побудувати другу важливу границю під знаком логарифма або використати відповідний наслідок другої важливої границі
Різниця логарифмів еквівалентних функцій	$x \to \infty$ $x \to x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $\left(0 \cdot \infty\right)$ $\left(\infty - \infty\right)$	Перетворити різницю логарифмів у логарифм частки, яка прямує до **1**, та побудувати під знаком логарифма другу важливу границю або використати відповідний наслідок другої важливої границі

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

ФУНКЦІЯ

$y=f\left(x\right)$

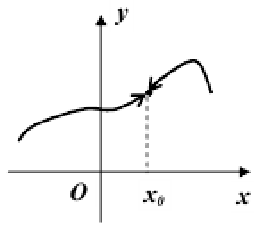
Неперервні

Розривні

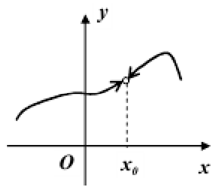
Функція $y=f\left(x\right)$ є *неперервною* в точці x_0, якщо

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) =$

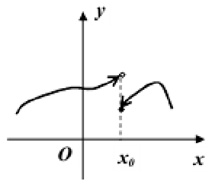
$= \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$



Розрив першого роду

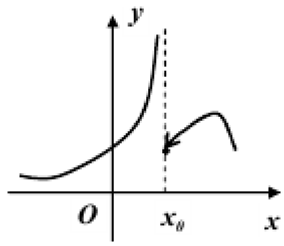


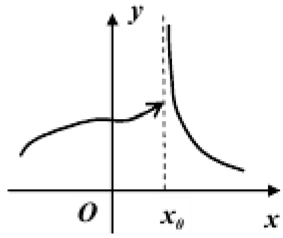
Точка x_0 є точкою усувного розриву 1-го роду, якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ є скінченними, але $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)= \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq$ $\neq f(x_0)$

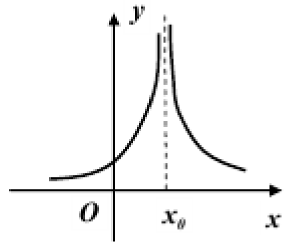


Точка x_0 є точкою неусувного розриву 1-го роду, якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ є скінченними, але $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

Розрив другого роду







Точка x_0 є точкою розриву 2-го роду, якщо щонайменше одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ є нескінченною

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ $y=f\left(x\right)$

Означення: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=y'$

Основні правила диференціювання:

$(U+V)'=U'+V'$ $\qquad$ $(C\cdot U)'=\mathrm{C}U',\ C\text{ - }const$

$(U\cdot V)'=U'V+V'U$ $\qquad$ $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'V-V'U}{V^{2}}$

Похідна складної функції

$y=f(U),\ U=U(x)$ $\qquad$ $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

Похідна оберненої функції

$y=f(x),\ x=\varphi(y)$ $\qquad$ $x'_y=\dfrac{1}{\mathrm{y}'_x}$

Похідна неявної функції

$F(x,y)=0$ $\qquad$ $y'_x=-\dfrac{\mathrm{F}'_x}{\mathrm{F}'_\mathrm{y}}$

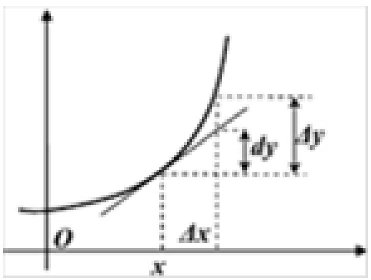
Похідна функції, яка задана параметрично

$x=x(t),\ \ y=y(t)$ $\qquad$ $y'_x=\dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$

Логарифмічне диференціювання

$y=f(x)$ $\qquad$ $\left(lnf(x)\right)'=\dfrac{y'}{y}$

Диференціал та його геометричний зміст



$dx=\Delta x,\qquad dy=y'dx$

Похідні вищих порядків:

$(y'')=(y')',\ (y''')=(y'')',$

$,\ldots,\ (y^{n})=(y^{n\text{-}1})'$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

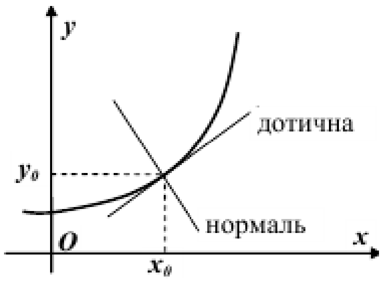
Обчислення похідних

Елементарні функції		Складені функції	
1	$(C)' = 0$	1	-
2	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	2	$(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$
3	$(x)' = 1$	3	-
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	4	$(\sqrt{U})' = \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
5	$(a^x)' = a^x \cdot ln a$	5	$(a^U)' = a^U \cdot ln a \cdot U'$
6	$(e^x)' = e^x$	6	$(e^U)' = e^U \cdot U'$
7	$(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot ln a}$	7	$(log_a U)' = \frac{1}{U \cdot ln a} \cdot U'$
8	$(lg x)' = \frac{1}{x \cdot ln 10}$	8	$(lg U)' = \frac{1}{U \cdot ln 10} \cdot U'$
9	$(ln x)' = \frac{1}{x}$	9	$(ln U)' = \frac{1}{U} \cdot U'$
10	$(sin x)' = cos x$	10	$(sin u)' = cos u \cdot u'$
11	$(cos x)' = -sin x$	11	$(cos u)' = -sin u \cdot u'$
12	$(tg x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	12	$(tg u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
13	$(ctg x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$	13	$(ctg u)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$
14	$(arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$(arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15	$(arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15	$(arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16	$(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$	16	$(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2}$
	$(arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$		$(arcctg u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Геометричний зміст похідної



Рівняння дотичної

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Рівняння нормалі

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

Кут між двома кривими

$$tg\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}$$

Фізичний зміст похідної

Швидкість $v=\dfrac{dS}{dt}$

Прискорення $a=\dfrac{dV}{dt}$

Сила струму $I=\dfrac{dq}{dt}$

Лінійна густина $\rho=\dfrac{dm}{dx}$

Теплоємність $c=\dfrac{dQ}{dT}$

Правило Лопіталя

Розкриття невизначеностей

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Асимптоти кривої

Вертикальна

$x=a$, якщо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

Горизонтальна

$y=b,\ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

Похила

$y=kx+b$, якщо

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$$

Дослідження функції і побудова графіка

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

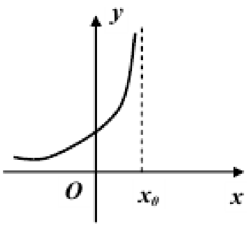
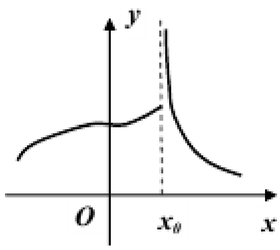
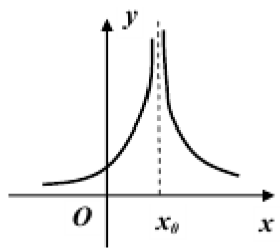
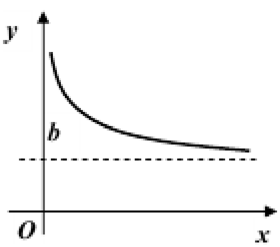
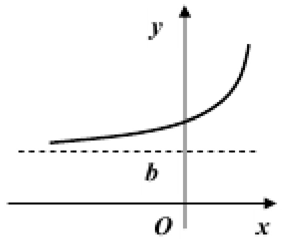
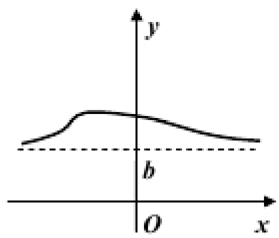
Алгоритм дослідження функції

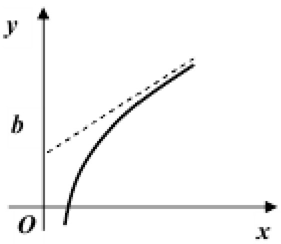
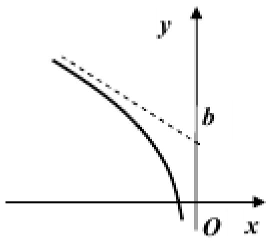
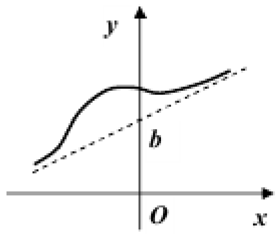
1. Знайти область визначення функції $D(y)$.
2. Дослідити функцію на парність і непарність.

   $f(x)=f(-x)$ – умова парності (графік симетричний відносно осі Oy;

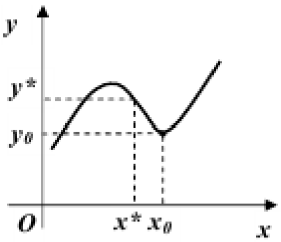
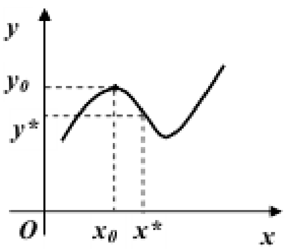
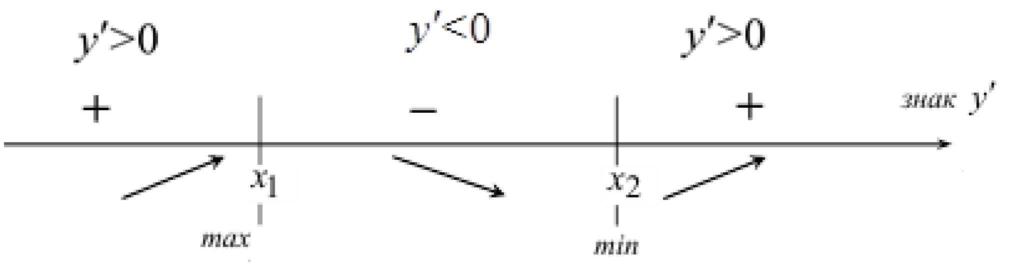
   $f(-x)= - f(x)$ – умова непарності (графік симетричний відносно осі Ox).
3. Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями:

   $f(x)\cap Ox$ в точці $\left(x;\ 0\right)$; $f(x)\cap Oy$ в точці $\left(\ 0; y\right)$.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву (якщо вони існують) та встановити характер розриву.
5. Знайти асимптоти кривої:

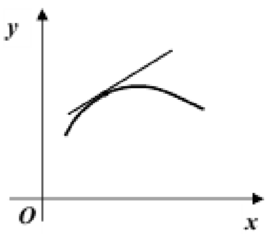
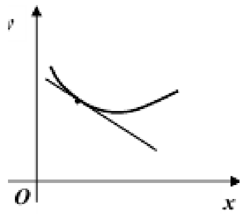
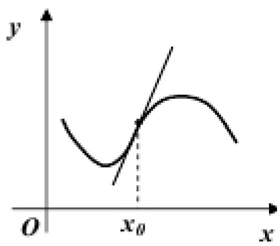
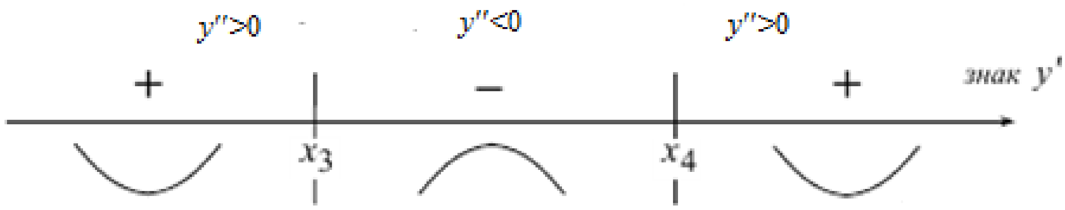
<table>
<tr><th colspan="3">Асимптоти</th></tr>
<tr><td colspan="3">Вертикальна асимптота
$x=x_0$ – вертикальна асимптота, якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Горизонтальна
$y=b$ – горизонтальна асимптота, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Асимптоти		
Похила $y=kx+b$ – похила асимптота якщо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ і $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$		
		

6. Знайти інтервали монотонності функції та екстремуми.

Екстремум	
При $x=x_0$ функція має ***мінімум***	При $x=x_0$ функція має ***максимум***
	
Необхідна умова: $y'\left(x_0\right)=0$	*Необхідна умова:* $y'\left(x_0\right)=0$
Достатня умова: При переході через критичну точку похідна змінює знак з «-» на «+»	*Достатня умова:* При переході через критичну точку похідна змінює знак з «+» на «-»
	

7. Знайти інтервали опуклості та вгнутості кривої і точки перегину.

<table>
<tr><td colspan="3">Опуклість та вгнутість</td></tr>
<tr><td>На деякому проміжку крива є опуклою</td><td>На деякому проміжку крива є вгнутою</td><td>Точка перегину</td></tr>
<tr><td>Лінія розташована нижче дотичної, яка проведена в будь якій точці кривої.

</td><td>Лінія розташована вище дотичної, яка проведена в будь якій точці кривої.

</td><td>Точка $\left(x_0; f(x_0)\right)$ є точкою перегину, якщо при переході через цю точку змінюється взаємне розташування кривої та дотичної до неї.

</td></tr>
<tr><td>Необхідна умова:
$y''(x_0)=0$ або не існує</td><td>Необхідна умова:
$y''(x_0)=0$ або не існує</td><td>Необхідна умова:
$y''(x_0)=0$ або не існує</td></tr>
<tr><td>Достатня умова
$y''<0$</td><td>Достатня умова
$y''>0$</td><td>При переході через точку x_0 змінює знак</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ АЛГОРИТМИ

Алгоритм дослідження функції на монотонність

1. З'ясовують область визначення заданої функції $y = f(x)$.
2. Знаходять першу похідну функції $y = f(x)$.
3. Прирівнюють першу похідну до нуля і знаходять корені рівняння $f'(x) = 0$ та точки, в яких похідна не існує.
4. Наносять одержані розв'язки рівняння $f'(x) = 0$ (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоті» точки) на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.
5. Досліджують знак похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з'ясовують знак похідної в цій точці.

   Зауваження

   1. Для того, щоб диференційовна на проміжку X функція $f(x)$ не спадала (не зростала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб її похідна в усіх точках цього проміжку була не від'ємна (не додатна), тобто $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

   2. Якщо при переході значень аргументу x функції $f(x)$ через критичну точку x_0 її похідна змінює знак, то критична точка є точкою локального екстремуму, причому:

   а) при зміні знака з «плюса» на «мінус» точка x_0 є точкою локального максимуму;

   б) при зміні знака з «мінуса» на «плюс» – точкою локального мінімуму.
6. За одержаними результатами формуємо відповідь.

Алгоритм дослідження функції на опуклість

1. З'ясовують область визначення заданої функції $y = f(x)$.

2. Знаходять другу похідну функції $y = f(x)$.

3. Прирівнюють другу похідну до нуля і знаходять корені рівняння $f''(x) = 0$ та точки, в яких похідна не існує.

4. Наносять одержані розв'язки рівняння $f''(x) = 0$ (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоті» точки) на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.

5. Досліджують знак другої похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з'ясовують знак другої похідної в цій точці.

   - ✓ Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну на проміжку *X*, то за умови $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) $\forall x \in X$ графік – опуклий (угнутий);
   - ✓ Точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої $f(x)$ від угнутої, називається *точкою перегину*.

6. За одержаними результатами формуємо відповідь.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку

Для знаходження найбільшого *M* і найменшого *m* значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ потрібно:

1) знайти критичні точки, які належать відрізку $[a;b]$;

2) обчислити значення функції в цих критичних точках і в точках *a* і *b*;

3) з усіх отриманих значень вибрати найбільше $M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(x_1)$ і найменше $m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(x_2)$ і відмітити точки, в яких ці значення досягаються.

ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

ФУНКЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ

$z=f(x;y)$

Область визначення

$F(x;y)=0$

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЇ

Частинні похідні першого порядку

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}$$

$$x=\mathrm{const}$$

$$z'_y=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}$$

$$y=\mathrm{const}$$

Частинні похідні другого порядку

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

Повний диференціал функції $z=f(x;y)$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

частинні диференціали

Застосування повного диференціала до наближених обчислень

$$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)\approx f(x_0;y_0)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Похідна складеної функції

$z=f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$z=f(x,y)$, $y=y(x)$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$z=f(x,y)$, $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Похідна функції, яка задана неявно

$F(x;y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}$$

$F(x;y;z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$$

Похідна за напрямком $u=u(x;y;z)$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

Градієнт скалярного поля $u=u(x;y;z)$

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Схема дослідження функції $z=f\left(x;y\right)$ *на екстремум*

1. Знайти область визначення функції
2. Знайти z'_x, z'_y.
3. Розв'язати систему рівнянь

   $$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

   і знайти критичні точки $\left(M_0, M_1, \ldots\right)$ функції.
4. Знайти значення других похідних в критичних точках:

   $$A = z''_{xx}\left(M_0\right),$$
   $$B = z''_{xy}\left(M_0\right),$$
   $$C = z''_{yy}\left(M_0\right).$$

5. Обчислити $\Delta = AC - B^2$ для кожної критичної точки.
6. На основі достатньої умови існування екстремуму зробити висновок про існування екстремуму в критичній точці, тобто в точці M_0 функція $z=f\left(x;y\right)$ має:

   а) мінімум, якщо $\Delta>0$ і $A>0$;

   б) максимум, якщо $\Delta>0$ і $A<0$;

   в) не має екстремуму, якщо $\Delta<0$;

   г) потрібні додаткові дослідження, якщо $\Delta = 0$.
7. Знайти екстремальні значення функції.

ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Рівняння поверхні
$S\colon F(x;y;z)=0$

Рівняння поверхні
$S\colon z=f(x;y)$

Рівняння дотичної площини в точці $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$

$$F'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+F'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)+F'_z\left(M_0\right)\left(z-z_0\right)=0$$

$$z-z_0=f'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+f'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)$$

Рівняння нормалі до поверхні в точці $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$

$$\frac{x-x_0}{F'_x\left(x_0;y_0;z_0\right)}=\frac{y-y_0}{F'_y\left(x_0;y_0;z_0\right)}=\frac{z-z_0}{F'_z\left(x_0;y_0;z_0\right)}$$

Рівняння поверхні
$S\colon z=f(x;y)$

Рівняння поверхні
$S\colon F(x;y;z)=0$

$$\frac{x-x_0}{f'_x\left(x_0;y_0\right)}=\frac{y-y_0}{f'_y\left(x_0;y_0\right)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ
Означення і властивості невизначеного інтеграла

Означення

Сукупність $F(x)+C$ всіх первісних функції $f(x)$ на множині X називається *невизначеним інтегралом*: $\int f(x)dx=F(x)+C$,

де $f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

x – змінна інтегрування;

$F(x)$ – первісна інтегрування $f(x)$, тобто

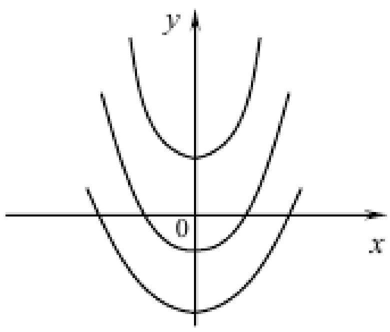
$F'(x)=f(x)$

Властивості

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,
3. $\int dF(x)=F(x)+C$,
4. $\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx,\ a=const,$
5. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,
6. $\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C,\ \ a,b$ - $const.$

Геометричне подання

$y=F(x)+C$ – сімейство інтегральних кривих



ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	12	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsin\ x+C$ або $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-arccos\ x+C$
2	$\int xdx=\frac{x^2}{2}+\text{C}$	13	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
3	$\int dx=x+\text{C}$	14	$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
4	$\int\frac{dx}{x}=ln\|x\|+C$	15	$\int\frac{dx}{x^2+1}=arctg\,x+C$ або $\int\frac{dx}{x^2+1}=-arcctg\,x+C$
5	$\int e^x dx=e^x+C$	16	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$
6	$\int a^x dx=\frac{a^x}{lna}+C$	17	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$
7	$\int sin\,x\,dx=-cos\,x+C$	18	$\int tg\,x\,dx=-ln\|cosx\|+C$
8	$\int cos\,x\,dx=sin\,x+C$	19	$\int ctg\,x\,dx=ln\|sin\,x\|+C$
9	$\int\frac{dx}{cos^2x}=tg\,x+C$	20	$\int\frac{dx}{cos\,x}=ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
10	$\int\frac{dx}{sin^2x}=-ctg\,x+C$	21	$\int\frac{dx}{sin\,x}=ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$
11	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arcsin\frac{x}{a}+C$	22	$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=ln\|f(x)\|+C$

МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

<table>
<tr><th>Ч.ч.</th><th>Тип інтеграла</th><th>u</th><th>dv</th></tr>
<tr><td rowspan="5">1.</td><td>$\int P_n(x)\cdot e^{kx}dx$</td><td rowspan="4">$P_n(x)$</td><td>$e^{kx}$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cdot a^{kx}dx$</td><td>$a^{kx}$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cdot \cos kx\,dx$</td><td>$\cos kx$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cdot \sin kx\,dx$</td><td>$\sin kx$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2.</td><td>$\int P_n(x)\cdot \ln x\,dx$</td><td>$\ln x$</td><td rowspan="5">$P_n(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\,x\,dx$</td><td>$\mathrm{arctg}\,x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arcctg}\,x\,dx$</td><td>$\mathrm{arcctg}\,x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cdot \arcsin x\,dx$</td><td>$\arcsin x$</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x)\cdot \arccos x\,dx$</td><td>$\arccos x$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\int e^{kx}\cdot \cos bx\,dx$</td><td colspan="2">Метод інтегрування частинами використовується двічі. Двічі як U беруть функцію одного типу (обидва рази або показникову функцію, або тригонометричну). Одержане рівняння розв’язують відносно шуканого інтеграла.</td></tr>
</table>

ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБІВ

Тип інтеграла	*Метод інтегрування*
$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ $D=b^2-4ac<0$	Виділити в знаменнику повний квадрат і ввести підстановку $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=t.$$
$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$	*а*) якщо $n \geq m$ виділити цілу частину; *б*) розкласти знаменник $Q_m(x)$ на множники, тобто подати у вигляді; $Q_m(x)=(x-a)^k\left(x^2+px+q\right)^s$; *в*) подати правильний дріб у вигляді суми простіших дробів за принципом: $(x-a)\to \frac{A_1}{x-a}$; $(x-a)^k \to \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}$; $\left(x^2+px+q\right)\to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $\left(x^2+px+q\right)^k \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}+...+\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$.

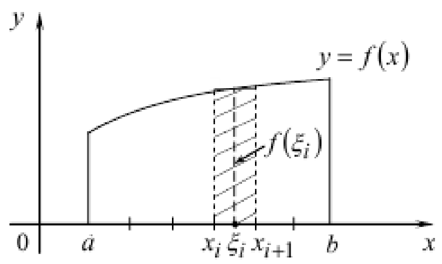
ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Ч.ч.	*Тип інтеграла*	*Метод інтегрування*
1	$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	Виділити в підкореневому виразі повний квадрат і ввести підстановку $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=t$.
2	$\int R\left(x,\ (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$	Підстановка $(ax+b)=t^s$, де s-найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1};\frac{m_2}{n_2};\ldots$
3	$\int R\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$	Підстановка $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1};\frac{m_2}{n_2};\ldots$
4	Інтеграл від диференціального бінома $\int x\cdot\left(a+bx^n\right)^p \mathrm{dx}$ *а)* p – ціле число *б)* $\frac{m+1}{n}$ – ціле число *в)* $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число	**Підстановка Чебишева** *а)* $x=t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n; *б)* $\left(a+bx^n\right)=t^k$, де k – знаменник дробу p; *в)* $\left(a+bx^n\right)=t^k\cdot x^n$, де k – знаменник дробу p.
5	$\int R\left(x,\sqrt{a^2\text{-}x^2}\right)dx$ $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$	Підстановки: $x=a\cdot sint\left(x=a\cdot cost\right)$; $x=\frac{a}{sint},\left(x=\frac{a}{cost}\right)$, $x=a\cdot tgt,\ \left(x=a\cdot ctgt\right)$.

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Ч.ч.	*Тип інтеграла*	*Метод інтегрування*
1	$\int R(\sin x,\cos x)dx$	Підстановка $tg\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $x=2arctgt$, $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$, $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
2	$\int R(\sin^m x,\cos^n x)dx$	
	m,n – парні, додатні;	а) понизити степінь $sinx,\ cosx$ за формулами $sin^2x=\frac{1-cos2x}{2}$, $sin^2x=\frac{1+cos2x}{2}$, $sinx\cdot cosx=\frac{sin2x}{2}$;
	m,n – додатні, хоча б одне непарне;	б) від функції, яка має непарний степінь, відокремити множник і внести його під знак диференціала;
	m,n – парні, хоча б одне від'ємне або $(m+n)$ – парне, від'ємне	в) підстановка $tgx=t$, $x=arctgt$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
3	$\int tg^n x\,dx$, $\int ctg^n x\,dx$	Підстановка $tgx=t$, $ctgx=t$
4	$\int \sin mx\cdot\cos nx\,dx$ $\int \sin mx\cdot\sin nx\,dx$ $\int \cos mx\cdot\cos nx\,dx$	Застосувати відповідні формули: $sin\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\left[sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)\right]$, $sin\alpha\cdot sin\beta=\frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\right]$, $cos\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)\right]$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\triangle x_i$$

$$\lambda = \max_{1\le i\le n} \triangle x_i$$

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx=F\left(x\right)\Big|_a^b = F(b)\text{-}F(a),\quad F\left(x\right) - \text{первісна}\quad f(x)$$

Основні властивості

$$\int_a^b f(x)dx = 0,\qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

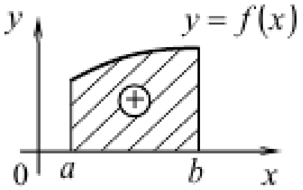
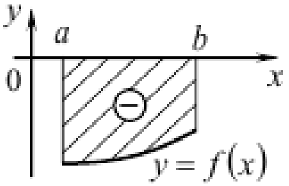
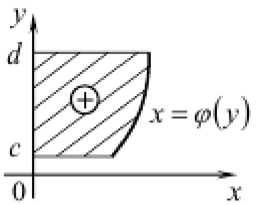
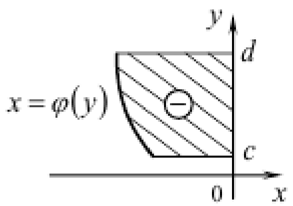
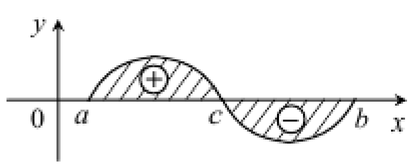
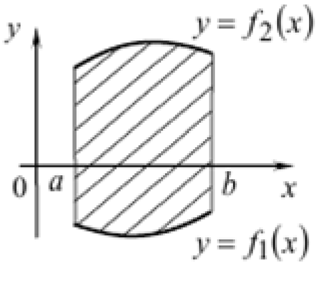
$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$$

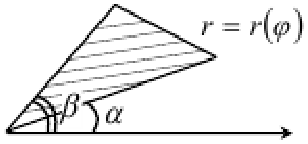
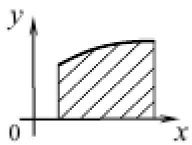
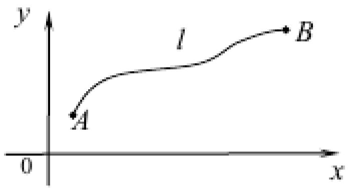
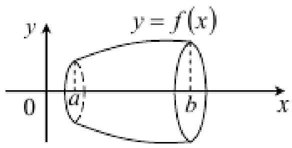
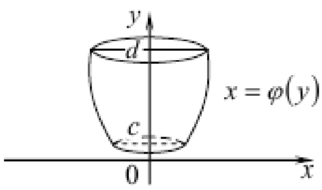
$$\int_a^b k\ f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx,\ k=const$$

Методи інтегрування

Заміна змінної	*Інтегрування частинами*
$\int_a^b f(x)dx=\begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ \alpha \le t \le \beta \end{vmatrix}= \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$	$\int_a^b u\ dv=u\cdot v\Big\vert_a^b-\int_a^b v\ du$

ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

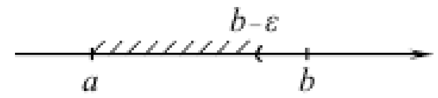
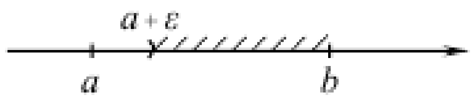
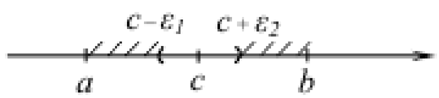
Площа плоскої фігури в декартових координатах	
	$S = \int_a^b f(x)dx$
	$S = \left\| \int_a^b f(x)dx \right\| = -\int_a^b f(x)dx$
	$S = \int_c^d \varphi(y)dy$
	$S = \left\| \int_c^d \varphi(y)dy \right\| = -\int_c^d \varphi(y)dy$
	$S = \int_a^c f(x)dx + \left\| \int_c^d f(x)dx \right\|$
	$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$

<table>
<tr><td colspan="3">Площа в полярних координатах</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Площа криволінійної трапеції, яка обмежена лінією, заданою параметрично</td></tr>
<tr><td>$x=x(t)$
$y=y(t)$
$t_1 \le t \le t_2$</td><td>
</td><td>$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Довжина дуги плоскої кривої</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td colspan="2">$l\!:\ y=f(x),\ a \le x \le b,\ l = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$l\!:\ x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha \le t \le \beta,$
$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dx$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Тіло обертання</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="2">$V_x = \pi\int\limits_a^b y^2\,dx$</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="2">$V_y = \pi\int\limits_c^d x^2\,dy$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Площа поверхні обертання</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$S_x = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx$</td></tr>
</table>

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

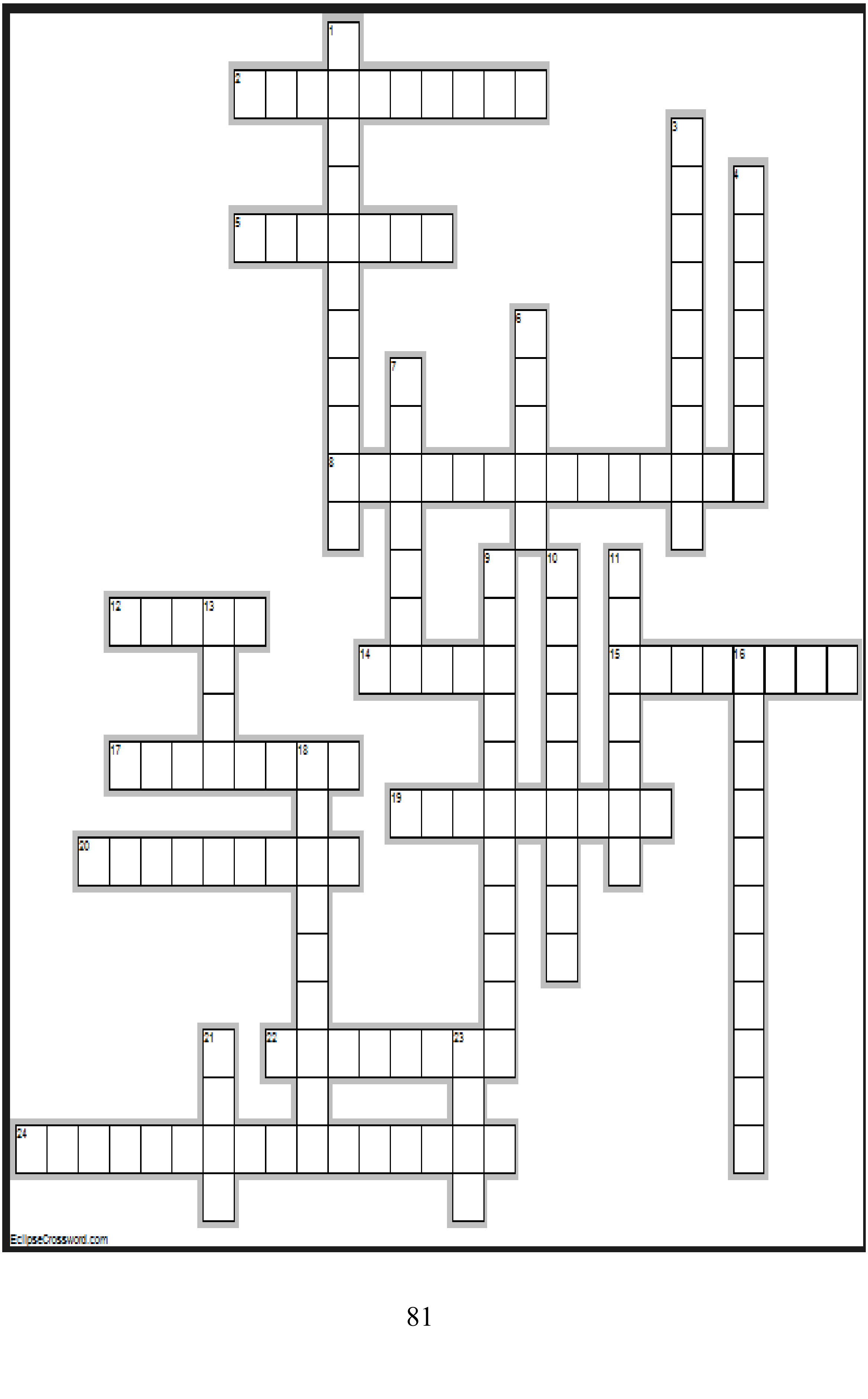
Робота сили $F(x)$	$A=\int_a^b F(x)dx$
Шлях, який пройшло тіло ($v(t)$ – швидкість)	$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Статичні моменти дуги плоскої кривої ($\rho(x)$ – густина)	$M_x=\int_a^b \rho(x)\cdot y\,dl$ $M_y=\int_a^b \rho(x)\cdot x\,dl$
Моменти інерції дуги плоскої кривої ($\rho(x)$ – густина)	$J_x=\int_a^b \rho(x)\cdot y^2\,dl$ $J_y=\int_a^b \rho(x)\cdot x^2\,dl$
Маса кривої ($\rho(x)$ – густина)	$m=\int_a^b \rho(x)\,dl$
Координати центра ваги плоскої кривої	$x_c=\frac{M_y}{m}$ $y_c=\frac{M_x}{m}$

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласні інтеграли I роду (з нескінченним розривом)		*Невласні інтеграли II роду (від розривних функцій)*	
$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$			b – точка розриву функції $f(x)$, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$
$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$			a – точка розриву функції $f(x)$, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, $c\in(-\infty;+\infty)$			c – точка розриву функції $f(x)$, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

КРОСВОРД № 1. Матриці



КРОСВОРД № 1. Матриці

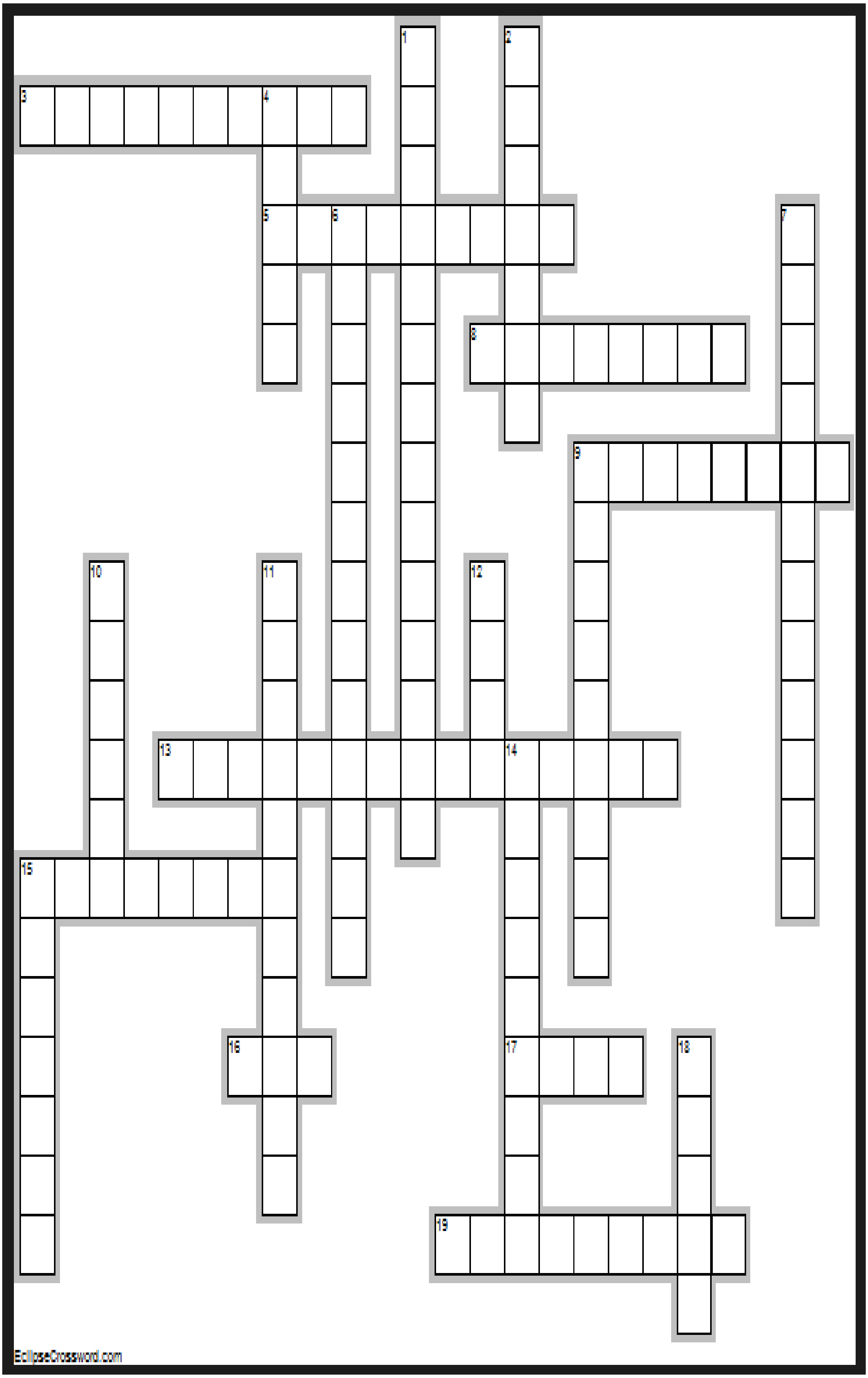
По горизонталі

2. визначник, одержаний із визначника системи шляхом заміни відповідного стовпця, стовпцем вільних членів
5. система лінійних рівнянь, яка має хоча б один розв'язок
8. операція заміни рядків матриці на відповідні стовпці
12. матриці однакової розмірності, елементи яких збігаються
14. метод розв'язування системи лінійних рівнянь шляхом зведення розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень до трикутної чи трапецієвидної форми
15. матриця, яка у добутку із вихідною матрицею дорівнює одиничній матриці
17. матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю
19. число, пов'язане із квадратною матрицею
20. якщо елементи матриці дорівнюють сумі відповідних елементів матриць однакової розмірності, то ця матриця є результатом виконання операції...
22. діагональна матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці
24. елементи квадратної матриці з однаковими індексами

По вертикалі

1. кількість рядків і стовпців матриці
3. матриці, у яких кількість стовпців однієї матриці дорівнює кількості рядків іншої
4. прямокутна числова таблиця
6. і музичний лад, і визначник, менший на порядок, що утворюється з визначника вихідної матриці, шляхом викреслювання певних рядка та стовпця
7. метод, при якому єдиний розв'язок системи лінійних рівнянь знаходять як відношення допоміжних визначників до визначника системи
9. квадратна матриця, усі елементи якої, окрім тих, що стоять на головній діагоналі, дорівнюють нулю
10. метод, при якому системі лінійних рівнянь зіставляють матричне рівняння $AX=B$
11. його можна виносити за знак визначника
13. значення суми добутків елементів будь-якого рядка на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка цього визначника
16. квадратна матриця, визначник якої відмінний від нуля
18. система лінійних рівнянь, вільні члени якої дорівнюють нулю
21. якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два стовпці, то він змінить...
23. визначник з двома однаковими стовпцями дорівнює...

КРОСВОРД № 2. Вектори



КРОСВОРД № 2. Вектори

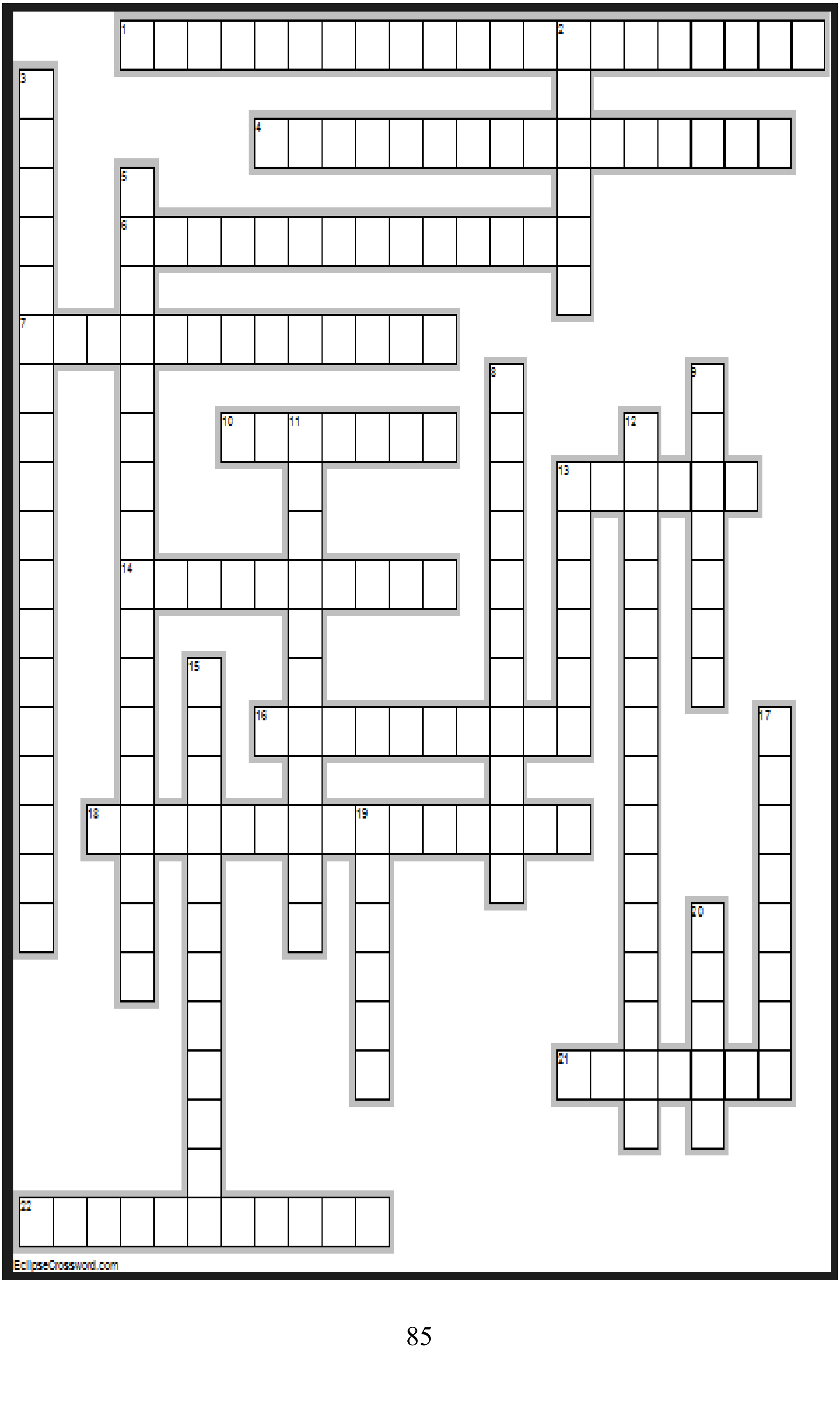
По горизонталі

3. паралельні вектори
5. множення двох векторів, в результаті якого одержуємо добуток-вектор, перпендикулярний до цих векторів
8. вектор, у якого точка початку збігається з точкою кінця
9. система координат, однією з координатних поверхонь якої є конус
13. якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони...
15. просторове тіло, об’єм якого дорівнює шостій частині мішаного добутку некомпланарних векторів
16. одиничний вектор
17. векторний квадрат будь-якого вектора дорівнює...
19. фігура, площа якої дорівнює половині довжини векторного добутку

По вертикалі

1. базис, в якому одиничні базисні вектори взаємно перпендикулярні
2. функція кута між двома векторами, яка визначається як відношення скалярного добутку цих векторів до добутку їх довжин
4. співнапрямлені вектори однакової довжини
6. вектори, мішаний добуток яких дорівнює нулю
7. векторний добуток виник з поняття...
9. добуток векторів, за допомогою якого визначають роботу, виконану деякою силою із переміщення матеріальної точки у певному напрямі
10. напрямлений відрізок
11. вектори, що лежать в одній площині
12. якщо мішаний добуток векторів від’ємний, то вони мають ... орієнтацію
14. операції множення вектора на число та додавання векторів називають…
15. система координат, яка складається з точки і променя
18. впорядкована система лінійно незалежних векторів, через які можна виразити решту векторів простору

КРОСВОРД № 3. Границя функції



КРОСВОРД № 3. Границя функції

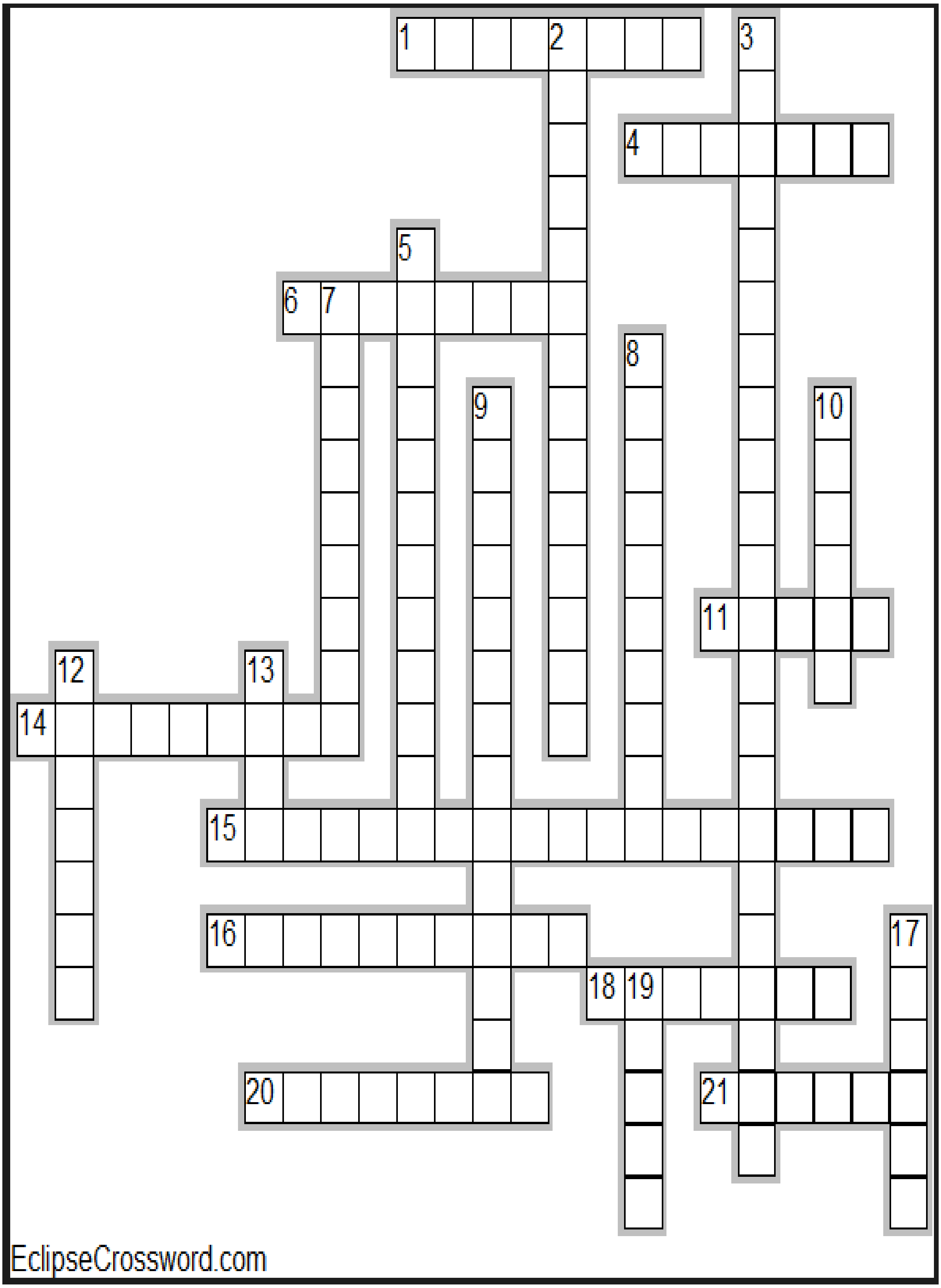
По горизонталі

1. якщо кожному натуральному числу ставиться у відповідність деяке дійсне число, то кажуть, що задано...
4. функція, задана рівнянням, що не розв'язане відносно залежної змінної, називається ...
6. величини, границя відношення яких дорівнює одиниці, називають ...
7. точка, в якій функція не є неперервною
10. якщо кожному значенню x за певним законом відповідає єдиний елемент y, то кажуть, що задано...
13. рід точки розриву, в якій функція робить стрибок
14. у функції y=f(x) змінну x називають ...
16. якщо меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції, то таку функцію називають ...
18. якщо функція не є парною, а також не є непарною, то її називають функцією ...
21. послідовність, яка має скінченну границю ...
22. функції зростаючі, спадні, неспадні, незростаючі називають ...

По вертикалі

2. рід точки розриву, в якій хоча б одна одностороння границя дорівнює нескінченості або не існує
3. множина значень аргументу x, для яких функція має дійсний зміст
5. якщо границя послідовності дорівнює нулю при необмеженому збільшенні номера члена, то таку послідовність називають ...
8. спосіб, при якому функція задається за допомогою формули
9. границя відношення sinx до аргументу, коли останній прямує до нуля, дорівнює ...
11. якщо границя функції в точці M дорівнює значенню функції в цій точці, то ця функція в точці M є ...
12. поняття, означення якого дали Гейне і Коші
13. якщо графік функції симетричний відносно осі OY, то функцію називають ...
15. якщо незалежна і залежна змінні є функціями третьої змінної t, то кажуть, що функцію задано ...
17. якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функцію називають ...
19. множина точок площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати - відповідним значення функції
20. для існування границі функції в точці необхідно і достатньо, щоб односторонні границі функції в цій точці були ...

КРОСВОРД № 4. Криві другого порядку



КРОСВОРД № 4. Криві другого порядку

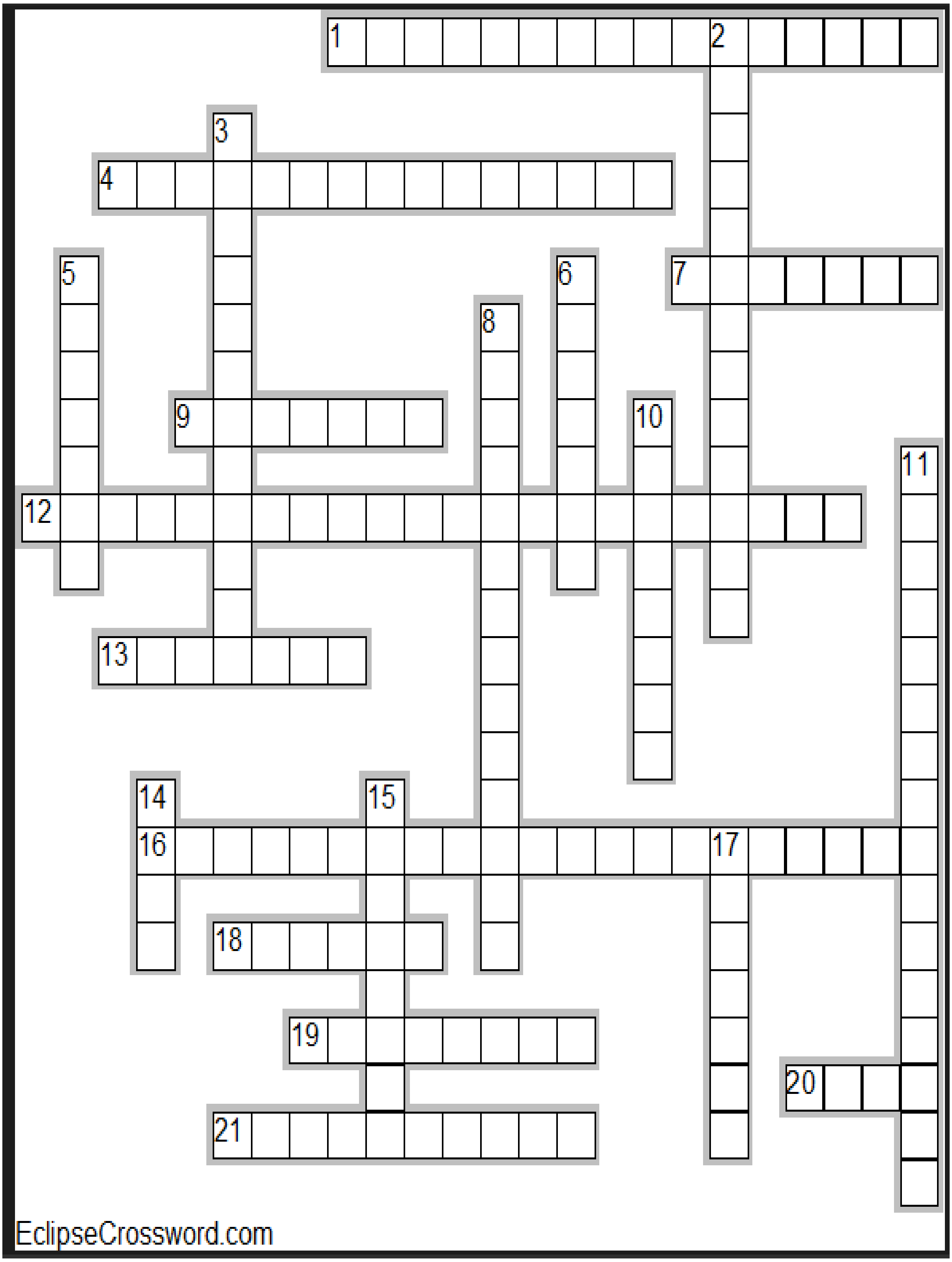
По горизонталі

1. ексцентриситет параболи ... одиниці
4. ексцентриситет еліпса менший ...
6. множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від фокуса і від заданої прямої, що не проходить через фокус
11. вісь гіперболи, що знаходиться на осі ординат
14. множина всіх точок площини, модель різниці яких від двох заданих точок цієї площини, є величина стала і менша відстані між ними
15. відстані від точок еліпса до фокуса називають ...
16. прямі, для яких відношення фокальних радіусів довільної точки гіперболи до відстаней від цієї точки до цих прямих дорівнює ексцентриситету
18. точки, в яких еліпс перетинає осі координат
20. число, яке дорівнює відстані фокуса від директриси
21. особливі точки еліпса, відносно яких визначають цю криву

По вертикалі

2. відстань від початку координат до вершини еліпса, що знаходяться на осі OX
3. прямокутник зі сторонами 2a і 2b називають ...
5. відстань від початку координат до вершин еліпса, що знаходяться на осі OY
7. пряма, до якої необмежено наближаються гілки гіперболи, віддаляючись у нескінченність
8. гіпербола ... осям координат і початку координат
9. міра відхилення еліпса від кола
10. вісь гіперболи, що знаходиться на осі абсцис
12. ексцентриситет гіперболи ... за одиницю
13. множина точок площини, відстані яких від заданої точки площини дорівнюють сталому числу
17. параметр p параболи характеризує ... області, яку обмежує парабола
19. множина всіх точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок є величина стала і більша за відстань між ними

КРОСВОРД № 5. Похідна функції



КРОСВОРД № 5. Похідна функції

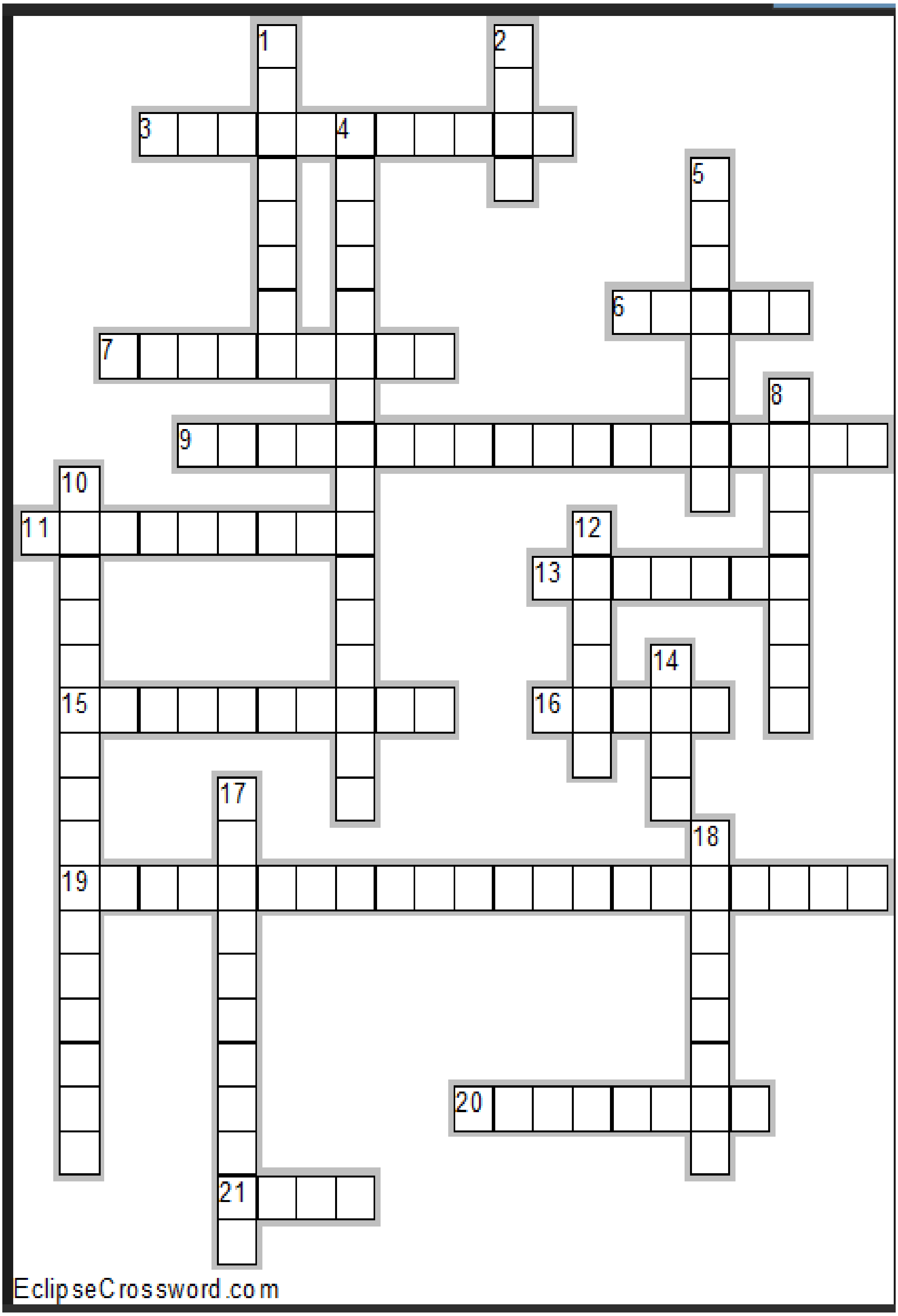
По горизонталі

1. якщо при переході через точку М похідна змінює знак з додатного на від'ємний, то ця точка є ...
4. функція, яка має похідну називається ...
7. якщо друга похідна функції на деякому проміжку від'ємна, то її графік ...
9. похідна від sinx
12. якщо підінтегральний вираз містить одну з обернених тригонометричних функцій, то потрібно застосувати метод ...
13. якщо графік функції розміщений над дотичною в усіх точках проміжку, то такий графік називають ...
16. множина усіх первісних
18. кількість видів елементарних дробів
19. сталий множник можна ... за знак інтеграла
20. теорема про відношення приростів двох функцій
21. інтеграл, який використовується для обчислення площі криволінійної трапеції

По вертикалі

2. похідна суми дорівнює ...
3. інтеграл, у якого хоча б одна межа нескінченна, називають невласним інтегралом ...
5. швидкість зміни функції
6. якщо на деякому проміжку похідна функції додатна, то ця функція ...
8. за допомогою визначеного інтеграла можна обчислити об'єм ...
10. з геометричної точки зору похідна дорівнює тангенсу кута нахилу ...
11. для обчислення визначеного інтеграла використовують формулу ...
14. якщо у визначеному інтегралі нижня межа стане верхньою, а верхня - нижньою, то інтеграл змінює свій ...
15. теорема про скінченні прирости
17. функція, похідна якої обернено пропорційна квадрату cosx

КРОСВОРД № 6. Функція багатьох змінних



КРОСВОРД № 6. Функція багатьох змінних

По горизонталі

3. границю відношення приросту функції при переході від однієї точки до іншої в напрямі заданого вектора до відстані між цими точками, коли остання прямує до нуля називають похідною ...
6. геометричне місце точок простору, рівновіддалених від заданої точки
7. приріст функції двох змінних, при якому одну незалежну змінну вважають константою, а іншій змінній надаємо приросту
9. сума добутків відповідних частинних похідних функції на диференціали незалежних змінних
11. якщо всі значення функції двох змінних менші за значення функції в деякій точці M, то цю точку називають ...
13. частинна похідна є ... випадком похідної за напрямом
15. рівність нулю кожної частинної похідної функції двох змінних в точці M є ... умовою екстремуму
16. поверхня, утворена переміщенням прямої l, яка проходить через одну й ту саму точку та задану криву L
19. метод, що використовують для з'ясування загального вигляду поверхонь другого порядку
20. умова екстремуму, для використання якої потрібно побудувати визначник, елементи якого є значення частинних похідних другого порядку в точці, "підозрілій" на екстремум
21. похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта дорівнює ...

По вертикалі

1. сталий множник можна ... за знак градієнта
2. якщо кожній парі (x, y) значень двох незалежних змінних, що належать області D, ставиться у відповідність за певним законом одне значення z, то кажуть, що задано функцію ... змінних
4. вектор-градієнт у кожній точці поля ... до поверхні рівня, яка проходить через цю точку
5. графіком функції двох змінних є ...
8. якщо всі значення функції двох змінних більші за значення функції в деякій точці M, то цю точку називають точкою …
10. границя відношення частинного приросту функції за однією з незалежних змінних до приросту заданої змінної, коли останній прямує до нуля
12. будь-який круг радіуса r з центром в точці M називають ... цієї точки
14. градієнт суми ... градієнтів
17. поверхня, описана прямою, що паралельна деякій заданій прямій l і яка перетинає лінію L
18. вектор, у напрямі якого похідна за напрямом має найбільше значення

ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Формули скороченого множення

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

Тригонометрія

Основні відношення

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$;

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$;

Основні значення тригонометричних функцій

	0 0^0	$\pi/6$ 30^0	$\pi/4$ 45^0	$\pi/3$ 60^0	$\pi/2$ 90^0	π 180^0	$3/2\pi$ 270^0	2π 360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Формули додавання

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta; \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta; \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}; \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha};$$

Формули подвійних кутів

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha};$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

Формули половинних кутів

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}; \qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

Формули зведення

	$-\varphi$	$\frac{\pi}{2}\pm\varphi$	$\pi\pm\varphi$	$\frac{3}{2}\pi\pm\varphi$	$2\pi\pm\varphi$
sin	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$
cos	$\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$\cos\varphi$
tg	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\pm\operatorname{ctg}\varphi$	$\pm\operatorname{tg}\varphi$	$\pm\operatorname{ctg}\varphi$	$\pm\operatorname{tg}\varphi$
ctg	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\pm\operatorname{tg}\varphi$	$\pm\operatorname{ctg}\varphi$	$\pm\operatorname{tg}\varphi$	$\pm\operatorname{ctg}\varphi$

Формули суми і різниці тригонометричних функцій

$$\sin\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = A\sin(a+\varphi), \qquad \text{де } A = \sqrt{a^2+b^2}, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right); \quad \cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right);$$

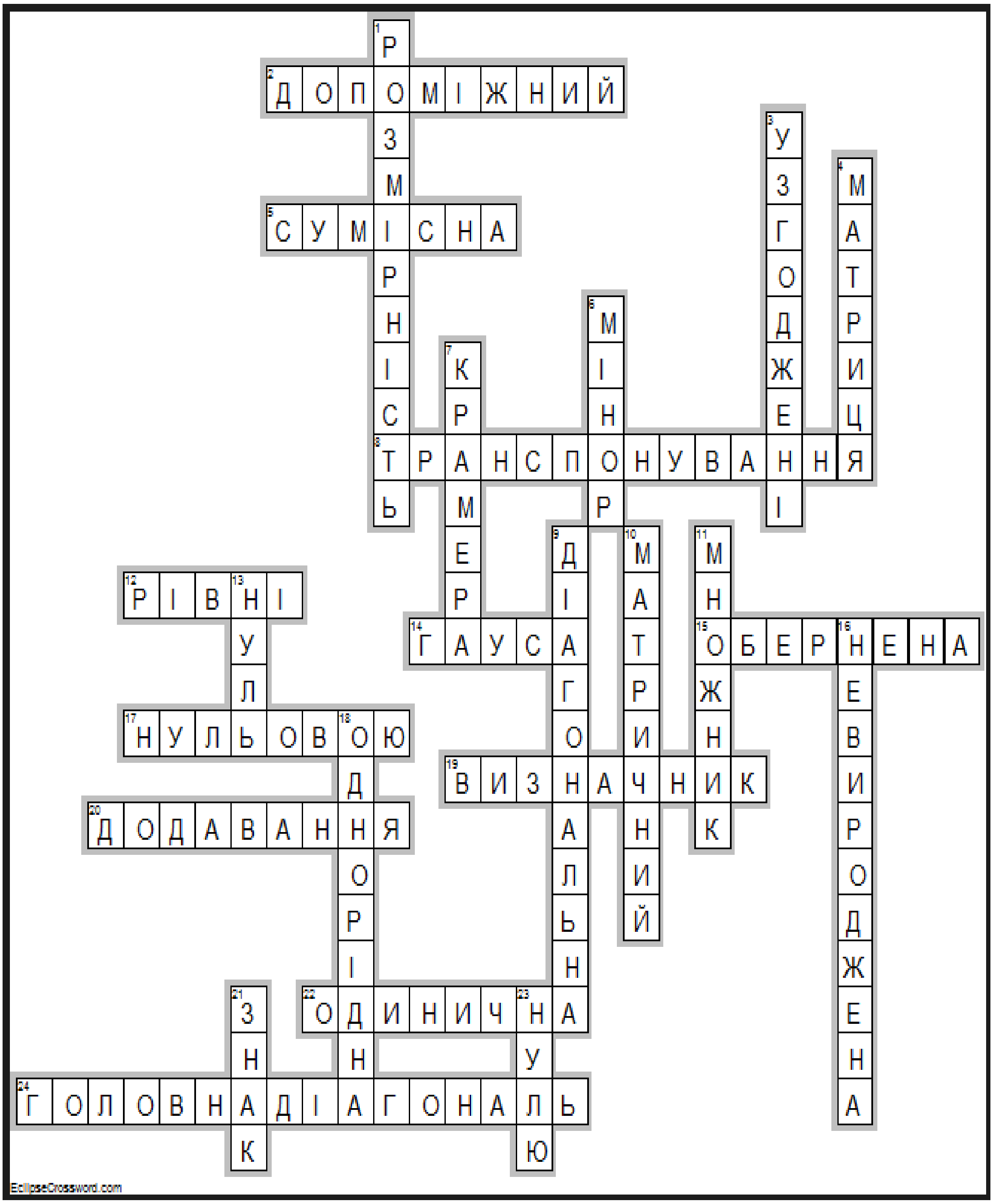
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

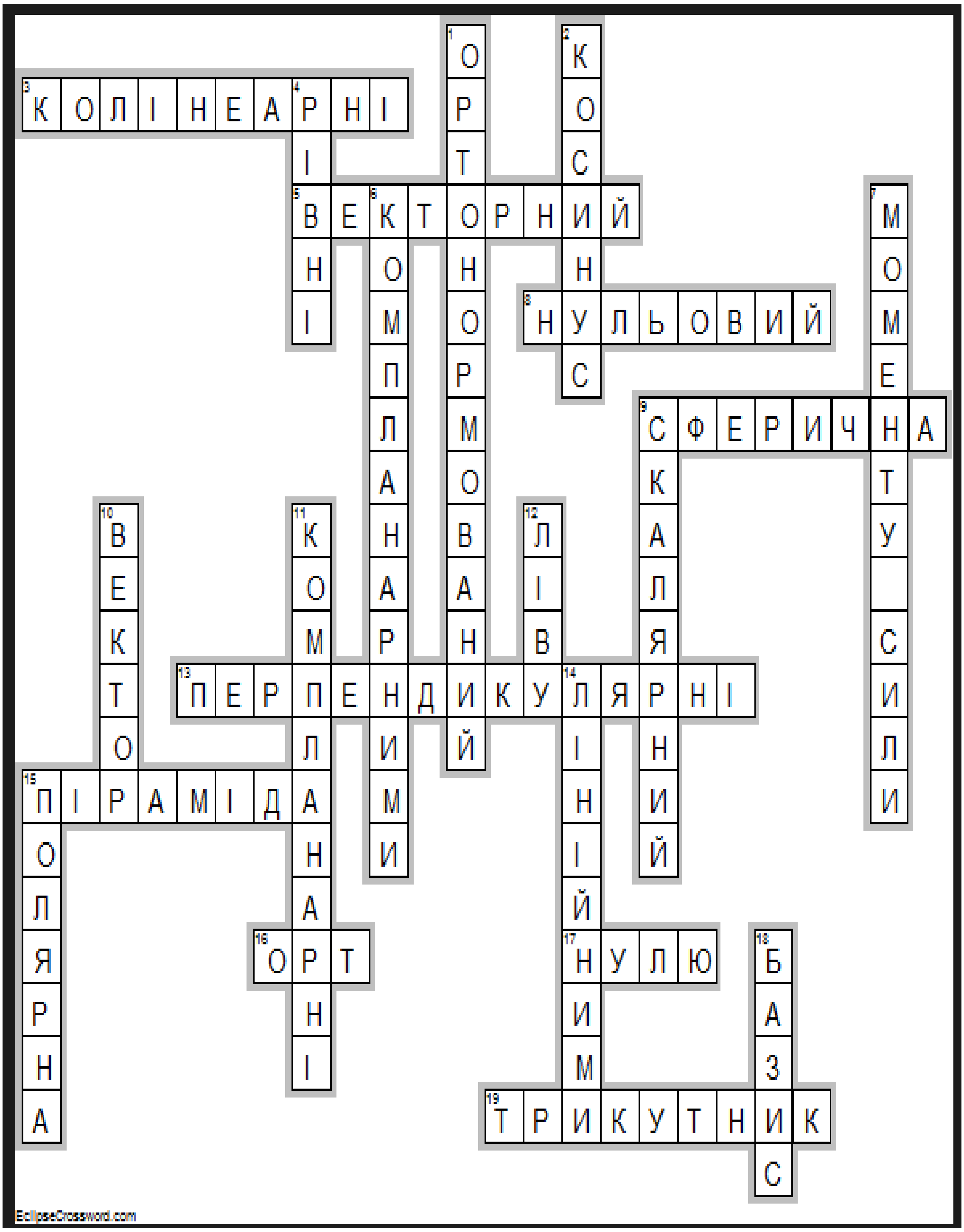
1. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики (для студентів1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050702 «Електротехніка та електротехнології») / [уклад. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова]. – Х. : ХНУМГ, 2013. – 77 с.
2. Кочеткова І. Б. Вища математика в формула та таблицях. Ч. 1. : навч. посібник– довідник / І. Б. Кочеткова, Л. Ф. Сушко. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2013. – 49 с.
3. Знаенко Н. С. Опорные схемы по высшей математике : учеб. пособие / Знаенко Н. С. – Ульяновск : УВАУ ГА(И), 2011. – 90 с.
4. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 1 : [навчальний посібник] / І. В. Хом'юк, Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. В. Хом'юк, М. Б. Ковальчук. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 198 с.
5. Сачанюк-Кавецька Н. В. Збірник тестових завдань для систематизації та узагальнення знань з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навчальний посібник / Н. В. Сачанюк-Кавецька, М. Б. Ковальчук. – Вінниця: ВНТУ, 2014. – 137 с.
6. Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика з комп’ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли : навчальний посібник / Сачанюк-Кавецька Н. В., Краєвський В. О., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2014. - 135 с.
7. Савченко Ю. С. Опорные конспекты по математике : справочно-методическое пособие для студентов. Часть 1 / Савченко Ю. С. – Л. : Машиностроение, 1990. – 64 с.
8. Пастушенко С. М. Вища математика: Довідник для студентів вищих навчальних закладів : навчальний посібник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – [3-є вид.] – К. : Діал, 2004. – 464 с.
9. Яковець В. П. Аналітична геометрія : навчальний посібник / Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. – 296 с.
10. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – [5-е изд., стереотип.] – М. : Наука, 1966. – 736 с.

ВІДПОВІДІ ДО КРОСВОРДІВ

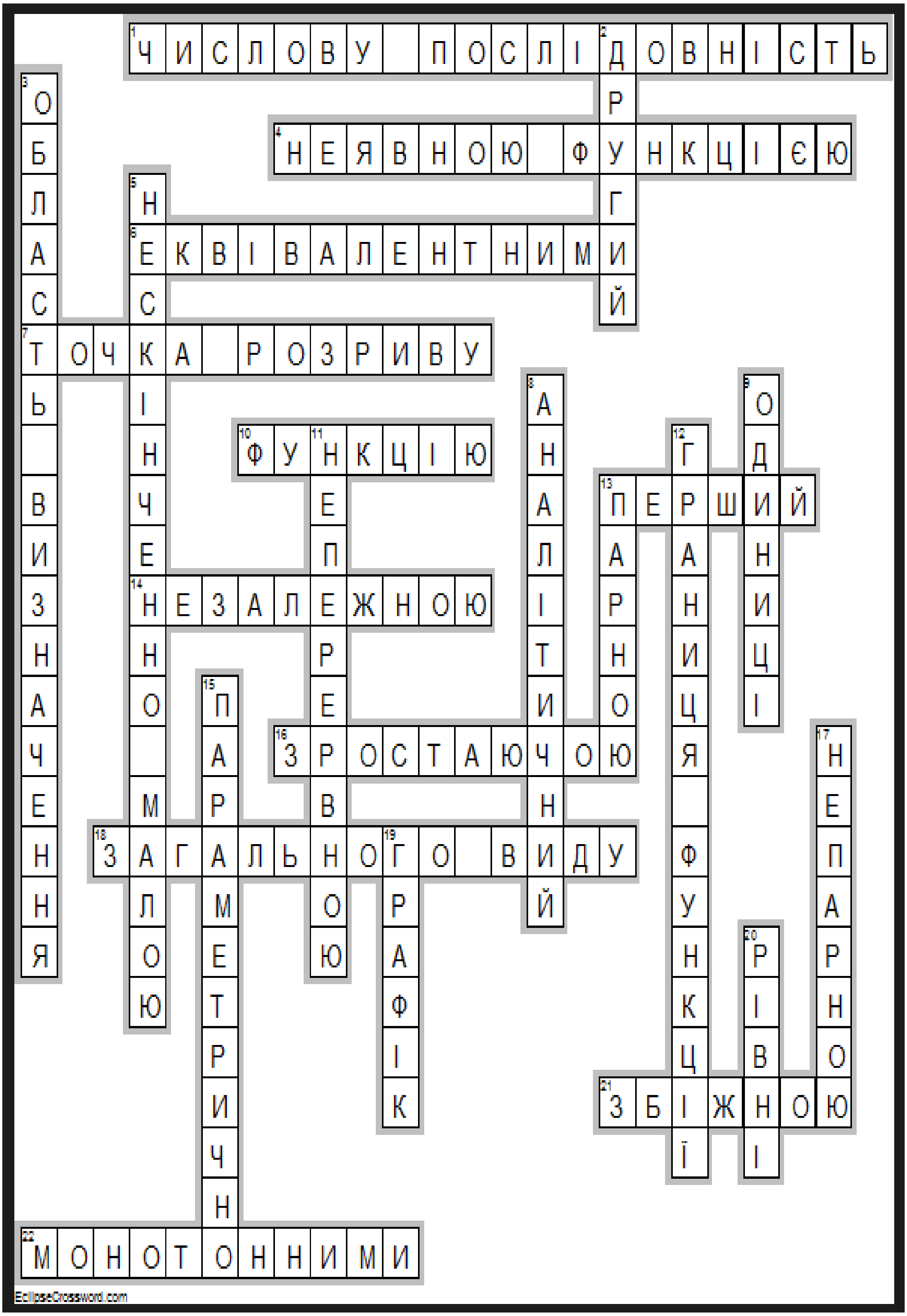
КРОСВОРД № 1. Матриці



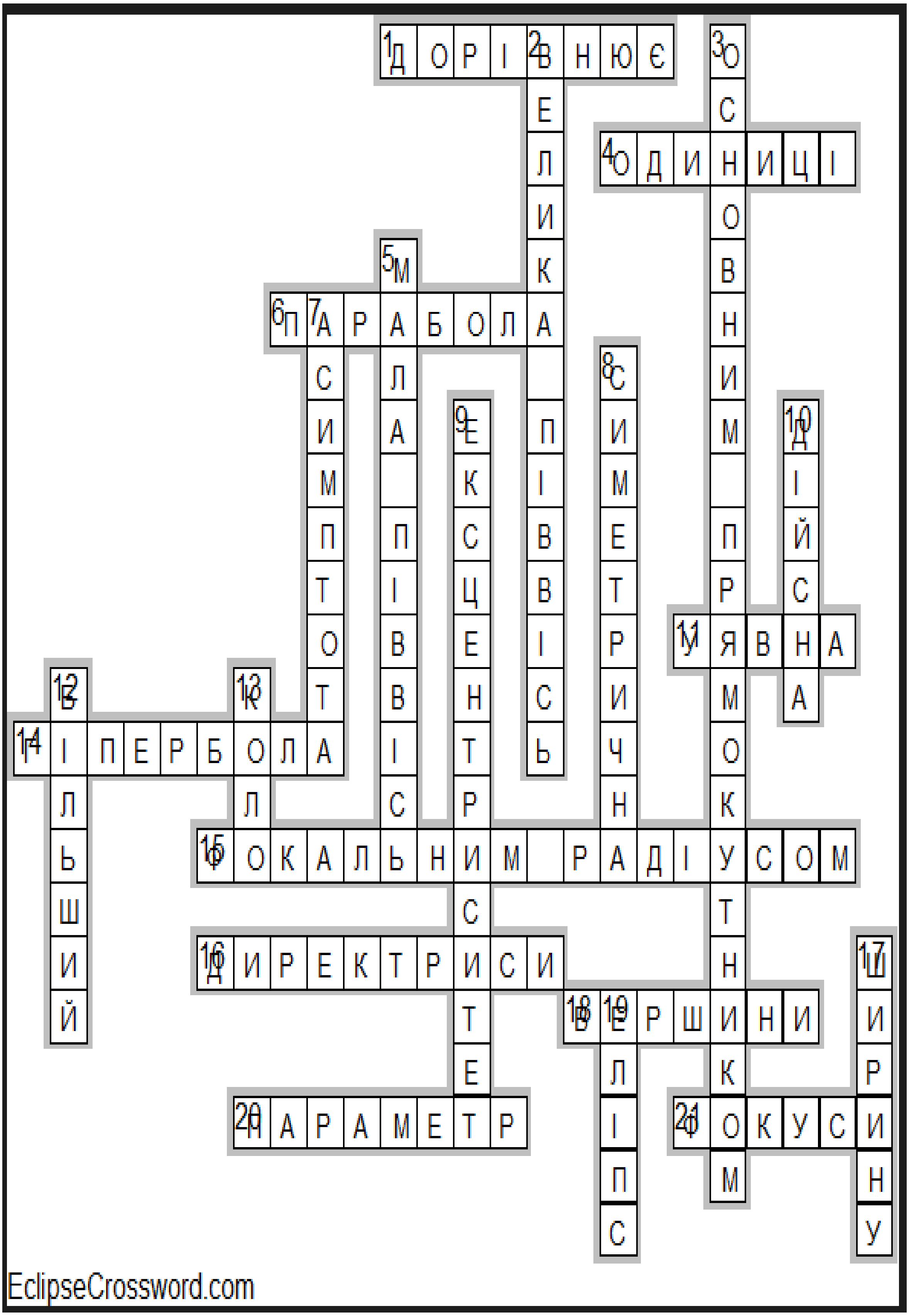
КРОСВОРД № 2. Вектори



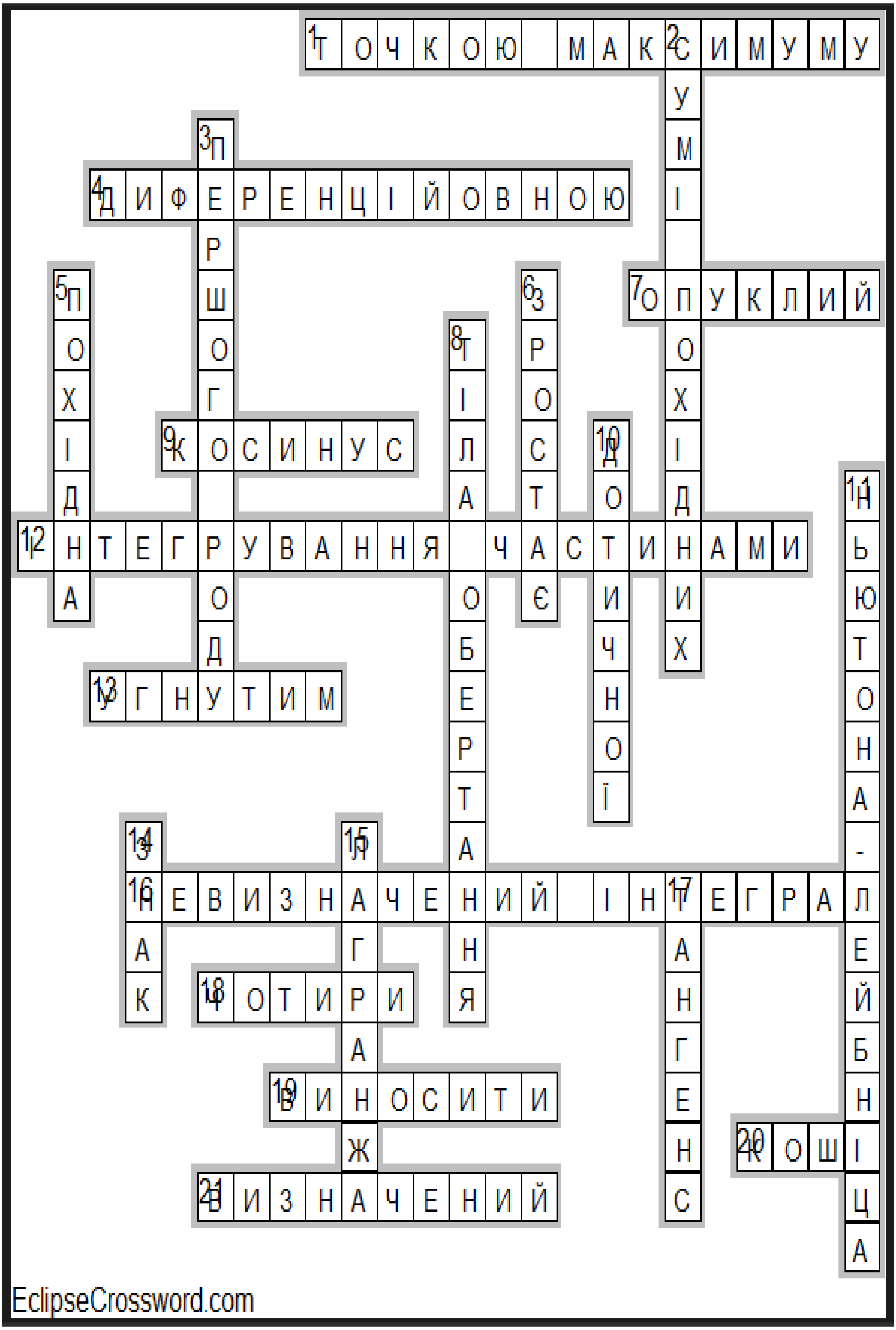
КРОСВОРД № 3. Границя функції



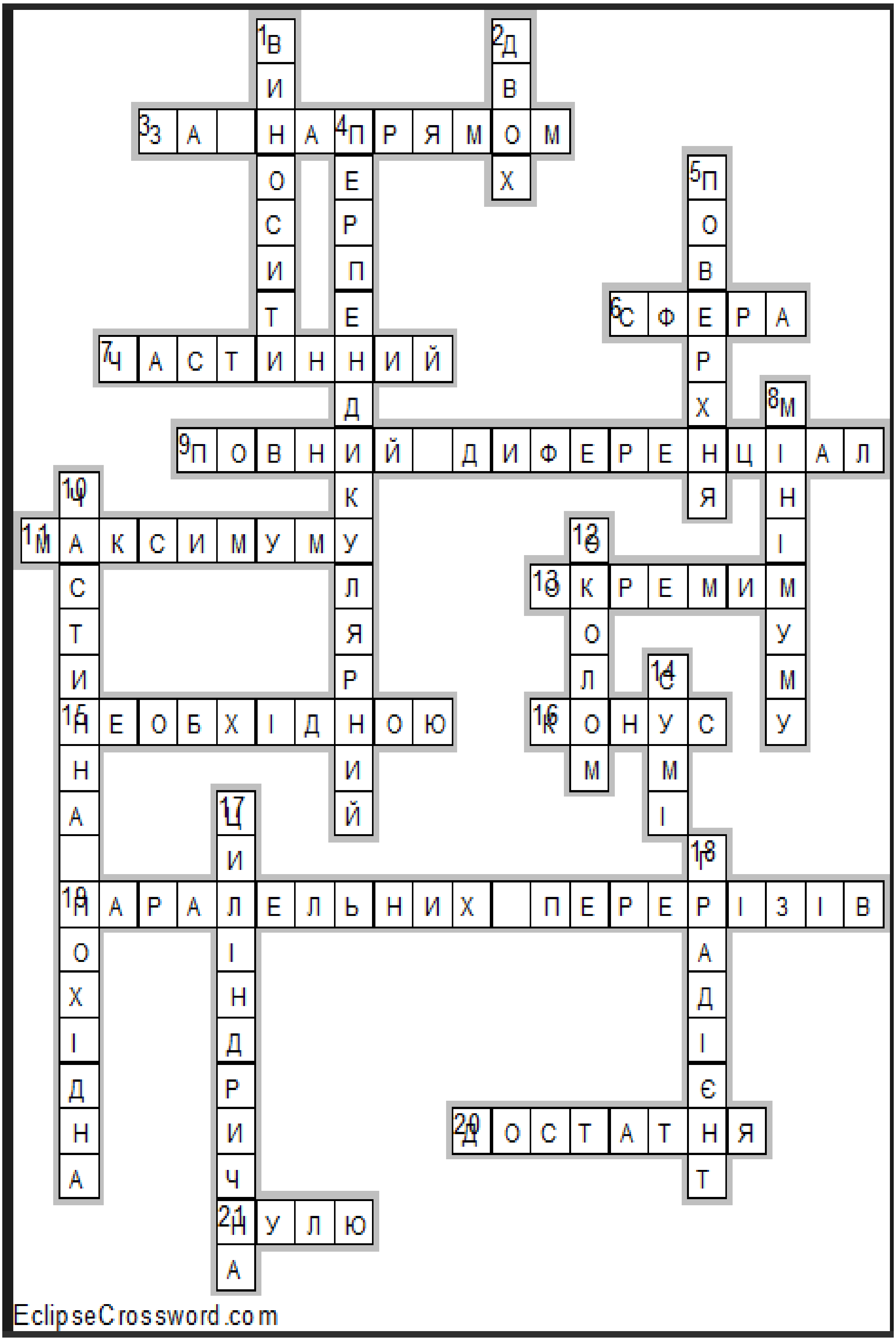
КРОСВОРД № 4. Криві другого порядку



КРОСВОРД № 5. Похідна функції



КРОСВОРД № 6. Функція багатьох змінних



Навчальне видання

Працьовитий Микола Вікторович
Ковальчук Майя Борисівна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна

Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 1

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *М. Ковальчук*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку 10.04.2019.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 6,18.
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2019-053.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.