Г.Г.Кашканова

В.А.Петрук

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 4

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

Г.Г.Кашканова

В.А.Петрук

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 4

Затверджено Вченою радою Вінницького державного технічного університету як збірник завдань з вищої математики для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 11 від 25 червня 2003 р.

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 51077
К 31

Рецензенти:

***А.М. Пєтух**, доктор технічних наук, професор*
***В.Л. Карпенко**, кандидат фізико-математичних наук, професор*
***Д.А. Найко**, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Кашканова Г.Г., Петрук В.А.
К 31 **Збірник завдань з вищої математики.** Частина 4. Збірник завдань. – Вінниця: ВНТУ, 2004 – 66 с.

В даному збірнику подані основні теореми та формули, які використовують при розв'язуванні завдань з теорії ймовірностей.

Застосування формул та теорем розглядаються на прикладах. До кожної теми подано дидактичний матеріал, який можна використовувати для розрахунково-графічних завдань та самостійних робіт.

Розрахований для студентів технічних вузів усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51077

Зміст

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі експериментів з випадковими результатами (наслідками). Будь-який результат інтерпретується як випадкова подія, яка може відбуватися або не відбуватися в результаті експерименту. Випадкові події можна порівнювати між собою за певною мірою можливості їх появи. Ймовірністю випадкової події називають деяку чисельну міру об'єктивної можливості появи випадкової події.

1 Елементи комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, який вивчає розташування об'єктів згідно з певними правилами і методи підрахунку числа можливих способів, за якими ці розташування можна зробити.

Найпростішими комбінаціями елементів є розміщення, перестановки і сполуки.

Нехай $M^{(n)} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – довільна n-елементна множина.

Упорядкована k-елементна підмножина множини $M^{(n)}$ називається *розміщенням* з n елементів по k. Число всіх таких розміщень A_n^k обчислюють за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1),\ 0! = 1. \qquad (1)$$

Для $k = n$ розміщення є *перестановкою* елементів множини $M^{(n)}$ причому їх число дорівнює

$$\Pi_n = A_n^n = n!. \qquad (2)$$

Розміщення вважаються різними, якщо вони відрізняються складом елементів або порядком їх розташування.

Будь-яка невпорядкована k-елементна підмножина множини M називається *сполукою* з n елементів по k. Число різних таких сполук позначається символом C_n^k і обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}. \qquad (3)$$

Числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ є коефіцієнтами в розкладі *бінома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^2 + \dots + C_n^n a^n b^0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad (4)$$

де $a, b \in R$, $n \in N$.

Сполуки вважаються різними, якщо вони відрізняються складом елементів.

Наприклад, нехай маємо множину $M = \{1, 2, 3\}$. Розміщеннями по два елементи є (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1) і (3, 2), а їх число

$A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$. Перестановками елементів множини M є (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) і (3, 2, 1), а їх число $П_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Сполуками по два елементи є (1, 2), (1, 3) і (2, 3), а їх число $C_3^2 = \dfrac{3\cdot 2}{2!} = 3$.

Число різних *розміщень з повтореннями* з n елементів по k обчислюють за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{5}$$

Для множини $M = \{1, 2, 3\}$ число розміщень з повтореннями по 2 елементи є $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$. До розглянутих вище розміщень (без повторень) слід додати ще такі: (1, 1), (2, 2), (3, 3).

Число різних *сполук з повтореннями* з n елементів по k визначають за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{6}$$

Для множини $M = \{1, 2, 3\}$ сполуками з повтореннями по 2 елементи будуть такі (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), а їх число $\overline{C}_3^2 = C_4^2 = 6$.

Основні властивості розміщень і сполук

$$\text{а) } A_n^0 = A_0^0 = 1, \text{ б) } C_n^0 = C_n^n = 1, \text{ в) } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},$$

$$\text{г) } C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ д) } C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k,\ k < n \tag{7}$$

Правило добутку. Якщо об'єкт A із сукупності об'єктів можна вибрати k способами і після кожного з цих виборів об'єкт B, в свою чергу, можна вибрати l способами, то вибір A і B можна здійснити kl способами.

Приклади

1. Обчислити: а) $\dfrac{П_4 - П_3}{3!}$; б) $C_6^4 + C_3^2$.

а) Оскільки $П_n = n!$ (формула(2)), то

$$\frac{П_4 - П_3}{3!} = \frac{4! - 3!}{3!} = \frac{3!\cdot 4 - 2!}{3!} = \frac{3!(4-1)}{3!} = 3.$$

б) За властивістю (7 г), і формулою (3) отримаємо

$$C_6^4 + C_3^2 = C_6^2 + C_3^1 = \frac{6\cdot 5}{2!} + \frac{3}{1!} = 3\cdot 5 + 3 = 18.$$

2. Обчислити n якщо $A_n^5 = 20A_{n-1}^4$.

За формулою (1) маємо

$$A_n^5 = \frac{n!}{(n-5)!} \quad і \quad A_{n-1}^4 = \frac{(n-1)!}{(n-1-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-5)!}.$$

Отже, $\frac{n!}{(n-5)!} = 20 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-5)!}$, звідки $n! = 20\ (n-1)!$ або $(n-1)! = 20(n-1)!$, тобто $n = 20$.

3. Студенти одного з курсів вивчають 8 навчальних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день слід запланувати три лекції з різних предметів?

Кількість таких способів дорівнює числу розміщень з 8 елементів по 3, тобто $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

4. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох студентів для чергування, якщо: а) один з них має бути старшим; б) старшого не повинно бути?

а) Оскільки роль чергових різна, то кількість способів виділення двох чергових дорівнює числу розміщень з 30 елементів по 2, тобто $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

б) У даному випадку маємо число сполук з 30 елементів по 2: $C_{30}^2 = 435$.

5. У шаховому турнірі, де учасники зустрічаються між собою один раз, 3 шахісти вибули через хворобу, зігравши відповідно одну, дві і три партії. Скільки шахістів почали турнір, якщо всього було зіграно 84 партії?

Позначимо через n число учасників турніру. Оскільки три з них вибуло, зігравши в сумі 6 партій, то в останніх $84 - 6 = 78$ партіях взяло участь $n - 3$ учасники. Отже, $78 = C_{n-3}^2$, тобто $\frac{(n-3)(n-4)}{2!} = 78$ або $n^2 - 7n - 144 = 0$, звідки дістаємо додатний корінь $n = 16$.

6.Команда з «Клубу знавців» у складі 6 осіб займає місця за круглим столом. Скільки є можливих варіантів розміщення гравців? Скільки таких варіантів у випадку, коли два члени команди повинні сісти поруч?

У першому випадку кількість способів розміщення гравців дорівнює числу перестановок з 6 елементів, тобто $\Pi_6 = 6! = 720$. У другому випадку для двох виділених осіб є 6 різних сусідніх пар місць, на кожному з яких ці дві особи можуть сісти двома способами. Отже, посадити їх поряд можна 12 способами. На місця, що залишилися, решту членів команди можна розсадити $\Pi_4 = 4!$ способами. За правилом добутку отримаємо кількість всіх варіантів розміщень: $12 \cdot 4! = 288$.

2 Випадкові події

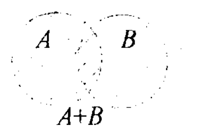
2.1 Означення випадкових подій та обчислення їх ймовірностей

Випробуванням називається експеримент, який можна проводити в однакових умовах (принаймні теоретично) будь-яке число разів.

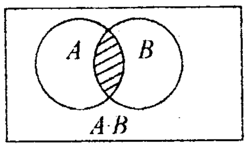
Найпростіший результат випробування називається *елементарною подією* або *наслідком* і позначається ω. При випробуванні обов'язково настає лише один наслідок. Множина всіх можливих наслідків випробування називається *основним простором* або *простором елементарних подій* і позначається Ω. *Випадковою подією* (або *подією*) називається будь-яка підмножина A простору Ω, тобто будь-яка множина наслідків. Наслідки, які утворюють подію А, називають *сприятливими* для A ($\omega \in A$). Подія A настає тоді й тільки тоді, коли настає елементарна подія (наслідок), сприятлива для A. Порожня множина $\emptyset$ і сама множина Ω, розглядувані як підмножини основного простору, називаються відповідно *неможливою* і *вірогідною* подіями.

Оскільки подія означується як множина елементарних подій, то над подіями можна виконувати такі ж операції, як і над множинами.

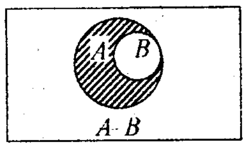
Сумою подій A і B називається така подія C, настає принаймні одна з подій A або B, і позна $C = A \cup B$.



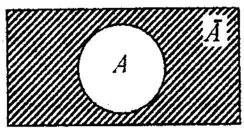
Добутком (суміщенням) подій A і B називається така подія C, яка настає тоді й тільки тоді, коли настають обидві події A і B, і позначається $C = AB$ або $C = A \cap B$.



Різницею подій A і B є подія $C = A - B$ ($C = A \setminus B$), яка полягає в тому, що A відбувається, а B не відбувається.



Подія $\overline{A} = \Omega - A$ (доповнення множини A до Ω) називається *протилежною* до A. Ця подія полягає в тому, що A не відбувається. Очевидно, $\overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$.



Події A і B називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої, тобто $AB = \emptyset$.

Події A_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ утворюють *повну групу*, якщо в результаті випробування обов'язково настане принаймні одна з них, тобто $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Імовірністю $P(A)$ події A називається числова функція, яка визначена на множині подій і задовольняє такі три умови (аксіоми ймовірності):

1) для довільної події $A \subset \Omega$ справедлива нерівність $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$ (ймовірність вірогідної події дорівнює 1);

3) ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(\sum_k A_k) = (\sum_k P(A_k))$$ *(аксіоматичне означення ймовірності).*

Будь-яке випробування, при якому простір елементарних подій Ω зі скінченною множиною *рівноможливих наслідків* (тобто $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$), називається *класичною схемою* або *схемою урн.* У цьому випадку ймовірність будь-якої події $A \subset \Omega$ означається так:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n}, \tag{7}$$

де $N(A) = m$ – число елементів множини A (число наслідків, які сприяють події A), $N(\Omega) = n$ – число елементів множини Ω (число всіх наслідків випробування) *(класичне означення ймовірності).*

Неважко перевірити, що так означена функція $P(A)$ має властивості: $0 \le P(A) \le 1$, $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, якщо $AB = \varnothing$.

Нехай при n-разовому здійсненні досліду подія A відбулася k разів. Тоді відношення $\frac{k}{n} = W_n$ називається *частотою випадкової події,* а границя $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = P(A)$ — ймовірністю цієї події (*статистичне означення ймовірності*).

Приклади

7. Випробування полягає в підкиданні правильного однорідного шестигранного кубика, на гранях якого нанесено цифри 1, 2, 3, 4, 5 і 6. Подія A полягає в тому, що на верхній грані випаде число, більше за 4, подія B – випаде парне число, подія C – випаде число, кратне 3. Вказати множину всіх можливих наслідків випробування, а також підмножини, що визначають відповідно події A, B і C.

Простором елементарних подій є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, де $\omega_i = \{$при підкиданні випала цифра $\{i\}$, $i = \overline{1,6}$. Подія A відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається ω_5 або ω_6. Тому $A = \{\omega_5, \omega_6\}$. Аналогічно визначаємо, що $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, а $C = \{\omega_3, \omega_6\}$.

8. У лотереї 2000 білетів. На один з білетів припадає виграш 100 грн., на 4 – по 50 грн., на 20 – по 20 грн., на 55 – по 10 грн., на 150 – по 5 грн., на 500 – по 1 грн. Решта білетів невиграшні. Навмання вибирається один білет. Яка ймовірність виграти не менше 5 грн.?

Маємо $n = 2000$, $m = 1 + 4 + 20 + 55 + 150 = 230$ і $P = 230/2000 = 0.115$.

9. Слово «інтеграл» складено з букв розрізної азбуки. Навмання виймають три картки і кладуть в ряд одну за одною в порядку появи. Яка ймовірність дістати при цьому слово «гра»?

При утворенні простору елементарних подій Ω розглядаються всі впорядковані 3-елементні підмножини 8-елементної множини (букв, що утворюють слово «інтеграл»). Отже, $N(\Omega) = A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$, а сприятливим для шуканої події A є лише один випадок: коли підряд буде вийнято букви «г», «р» і «а». Отже, $P(A) = 1 : 336 \approx 0{,}003$.

10. З десяти білетів книжкової лотереї виграшними є два. Навмання купують п'ять білетів. Визначити ймовірність того, що серед них: а) один виграшний (подія A); б) два виграшних (подія B); в) принаймні один виграшний (подія C).

Число всіх можливих способів взяти 5 білетів з 10 дорівнює $C_{10}^5 = N(\Omega)$. Сприятливими для події A є випадки, коли із загальної кількості виграшних білетів (2) взято 1 (це можна зробити C_2^1 способами), а останні $5 - 1 = 4$ білети взято невиграшні, тобто їх взято із загальної кількості $10 - 2 = 8$ невиграшних білетів (число таких способів дорівнює C_8^4). Тому за правилом добутку $N(A) = C_2^1 \cdot C_8^4$. Отже, шукана ймовірність $P(A) = C_2^1 \cdot C_8^4 \div C_{10}^5 = \frac{5}{9}$. Аналогічно попередньому отримаємо $P(B) = C_2^2 \cdot C_8^3 \div C_{10}^5 = \frac{2}{9}$.

Подія C є протилежною до події $\overline{C}$, яка полягає в тому, що жоден білет з куплених не є виграшним. Очевидно, $P(\overline{C}) = \frac{2}{9}$. Тоді $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{7}{9}$.

2.2 Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей. *Ймовірність суми двох довільних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку*, тобто

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{8}$$

Для суми трьох доданків A, B, C маємо

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC). \tag{9}$$

Зокрема, для попарно несумісних подій отримаємо

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{10}$$

Ймовірність події A, обчислена за умови, що вже відбулася подія B, називається *умовною ймовірністю* події A і позначається $P_B(A)$ та обчислюється за формулою умовної ймовірності

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (11)$$

Якщо $P_B(A)=P(A)$, то подія A називається *незалежною* від події B. Якщо $(P_B(A)\neq P(A))$, то подія A називається *залежною* від події B.

Теорема множення ймовірностей. *Ймовірність добутку двох довільних подій дорівнює ймовірності однієї з цих подій, помноженій на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулася,* тобто

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B) \text{ або } P(AB)=P(A)\cdot P_B(A). \qquad (12)$$

Якщо події A і B незалежні, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (13)$$

Для довільних подій A, B і C справедлива формула

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C). \qquad (14)$$

Нехай подія A настає лише разом з однією з n попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_3$, які по відношенню до A називають *гіпотезами*. Тоді справедлива формула *повної ймовірності:*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A) \qquad (15)$$

Якщо подія A відбулася, то умовні ймовірності $P_A(H_i)$ обчислюють за формулою *Байєса*

$$P_A(H_i)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{H_i})\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i=\overline{1,n} \qquad (16)$$

де $P(A)$ обчислюють за формулою (15).

Приклади

11. В одній урні 3 білі і 7 чорних куль, у другій – 4 білі і 6 чорних. З кожної урни виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

Нехай подія A – поява білої кулі з першої урни, подія B – поява білої кулі з другої урни. Очевидно, події A і B – незалежні. В задачі йдеться про суміщення подій A і B, тобто про їх добуток. Оскільки $P(A)=0{,}3$ і $P(B)=0{,}4$, то за формулою (6) маємо $P(AB)=0{,}12$.

12. Радіолампа надійшла з одного з трьох заводів відповідно з ймовірностями 0,35; 0,45; 0,2. Ймовірність вийти з ладу протягом року дорівнює 0,2 для ламп, виготовлених першим заводом, 0,3 – другим і 0,1 – третім. Яка ймовірність того, що лампа працюватиме рік?

Нехай подія A – лампа працюватиме рік, гіпотези H_i – лампа надійшла з i-го заводу, $i=\overline{1,3}$. Ймовірність гіпотез отримаємо з умови задачі: $P(H_1)=0{,}35$, $P(H_2)=0{,}45$ і $P(H_3)=0{,}2$. Умовні ймовірності події A за умови, що є гіпотези H_1, H_2 або H_3, визначимо з того, що задано умовні ймовірності протилежних подій. Отже, $P_{H1}(A)=0{,}8$ (або $P_{H1}(\overline{A})=0{,}2$), $P_{H2}(A)=0{,}7$, $P_{H3}(A)=0{,}9$. Тоді за формулою (15) отримаємо

$$P(A) = 0,35 \cdot 0,8 + 0,45 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,775.$$

13. Відомо, що 95 % випущеної продукції задовольняє стандарт. Спрощений контроль визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,97 і нестандартну – з ймовірністю 0,06. Визначити ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, стандартний.

Нехай A – виріб, що пройшов спрощений контроль, H_1 і H_2 – гіпотези, які полягають відповідно у виборі стандартного і нестандартного виробу. За умовою задачі маємо $P(H_1) = 0,95$, $P(H_2) = 0,05$, $P_{H1}(A) = 0,97$, $P_{H2}(A) = 0,06$. Тоді за формулами (15) і (16) отримаємо

$$P_A(H_1) = 0,95 \cdot 0,97 : (0,95 \cdot 0,97 + 0,06 \cdot 0,05) = 0,997.$$

2.3 Повторні незалежні випробування. Граничні теореми

Подія A називається *незалежною* в даній серії випробувань, якщо її ймовірність у кожному з них не залежить від наслідків інших випробувань. Серія повторних незалежних випробувань, у кожному з яких дана подія A має одну й ту саму ймовірність $P(A) = p$, що не залежить від номера випробування, називається *схемою Бернуллі*.

Ймовірність того, що при n-разовому проведенні випробування подія A відбувається рівно k разів ($0 \le k \le n$), визначається за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{17}$$

яка називається *формулою Бернуллі*. При цьому q – ймовірність події $\overline{A}$. Подія A розглядається як успіх, а $\overline{A}$ – як невдача.

Для знаходження найімовірнішого числа успіхів k_0 за заданими n і p можна користуватися нерівностями

$$np - q \le k_0 \le np + p \tag{18}$$

При досить великій кількості випробувань зручно користуватися наближеними формулами *Лапласа*.

Локальна теорема Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події p ($0 < p < 1$), подія настане рівно k раз (незалежно в якій послідовності), наближено дорівнює

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \tag{19}$$

Функція $\varphi(x)$ для додатних значень x табульована, для від'ємних значень x користуються тією ж самою таблицею, оскільки $\varphi(x)$ парна $(\varphi(-x) = \varphi(x))$, якщо $x \ge 4$, то $\varphi(x) = 0$.

Інтегральна теорема Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події p $(0 < p < 1)$, подія настане не менше k_1 раз і не більше k_2 раз наближено дорівнює

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функція Лапласа,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \tag{20}$$

Таблиця функції Лапласа для додатних значень $x\,(0 \le x \le 5)$ табульована для значень $x > 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$; для від'ємних значень x користуються цією ж таблицею, враховуючи, що функція Лапласа непарна $(\Phi(-x) = -\Phi(x))$.

При досить великому n і малому p використовують наближену *формулу Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ де } \lambda = np. \tag{21}$$

Приклади

14. У люстрі три лампи. Ймовірність виходу з ладу протягом року для кожної лампи дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться замінити не менше двох ламп?

Скористаємось формулою (17). Ймовірність того, що протягом року вийде з ладу три лампи, дорівнює $C_3^3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}008$ дві лампи – $C_3^2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$. За теоремою додавання для несумісних подій шукана ймовірність дорівнює $P_3(2) + P_3(3) = 0{,}096 + 0{,}008 = 0{,}104$.

15. Знайти ймовірність того, що з 500 висіяних насінин не зійде 130, якщо схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,75.

Маємо $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, $n = 500$, $k = 130$. Зручно скористатися формулою Лапласа. Отже, $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{93{,}75} \approx 9{,}682$, $x = \frac{130 - 500 \cdot 0{,}25}{9{,}682} \approx 0{,}52$.

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(0{,}52) = 0{,}3485$. Тоді за формулою (19) отримуємо $P_{500}(130) \approx 0{,}036$.

16. При виготовленні деякої масової продукції ймовірність появи одного нестандартного виробу дорівнює 0,01. Яка ймовірність того, що в партії із 100 виробів 4 будуть нестандартними?

У даному випадку ймовірність $p = 0{,}01$ мала, а число $n = 100$ велике, причому $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$. Користуючись формулою Пуассона (21), отримуємо

$$P_{100}(4) \approx \frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} = \frac{1}{24}e^{-1} \approx 0{,}015\,.$$

3 Випадкові величини

3.1 Випадкові величини. Розподіл випадкових величин

Випадковою величиною (ВВ) називається величина X, яка в результаті експерименту може приймати те чи інше значення, причому заздалегідь (до експерименту) невідоме. В теоретико-ймовірнісній схемі випадковою величиною називають числову вимірну функцію від елементарних наслідків: $X = X(x)$, $x \in \Omega$, що описує результати експерименту і визначена на просторі елементарних подій. Такі числові функції називають випадковими величинами і позначають великими буквами латинського алфавіту X, Y, Z, ..., а їх значення – $x, y, z, \ldots$

Дискретною ВВ називають величину $X = X(x)$, яка в залежності від елементарних наслідків x приймає кінцеву чи нескінченну зчисленну множину значень, тобто можливі її значення є окремі ізольовані числа.

Наприклад. Пристій складається з трьох елементів, що працюють незалежно. ВВ X – число елементів, що відмовили в одному досліді. Ця ВВ приймає значення 0,1,2,3.

Випадкова величина вважається заданою, якщо відомий закон розподілу.

Законом розподілу дискретної ВВ називають будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями ВВ і відповідними їм ймовірностями.

Закон розподілу ВВ можна задати таблично, графічно та аналітично.

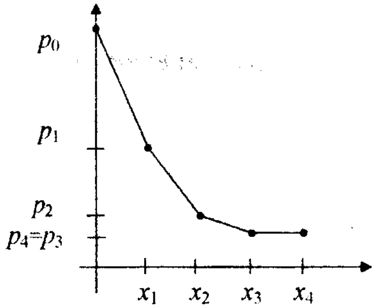
При табличному заданні дискретної *ВВ* маємо ряд розподілу. *Рядом розподілу дискретної ВВ X* називають таблицю, в якій перераховані значення $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ВВ X і відповідні їм ймовірності $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$:

$$p_i = P(X = x_i), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,.$$

Ряд розподілу, якщо ВВ X приймає скінченну множину значень, має вигляд:

X	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

У випадку *графічного задання дискретної ВВ* по осі Ox відкладають значення цієї випадкової величини, а по осі Oy - відповідні їм ймовірності; ламана лінія, що з'єднує точки (x_i, y_i), називається *многокутником розподілу.*



Закон розподілу дискретної ВВ X можна задати аналітично в вигляді формули

$$P(X=x_i)=\psi(x_i).$$

Неперервною ВВ називається така ВВ X, можливі значення якої належать деякому проміжку $[a;b]$ тобто вона приймає незчисленну множину значень.

Наприклад, ВВ T – напрацювання деякого елемента пристрою до відмови.

Неперервну ВВ можна задати графічно чи аналітично. Графік неперервної ВВ називають *кривою розподілу.*

3.2 Функція розподілу. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Функцією розподілу (інтегральною функцією розподілу) ВВ X називають функцію $F(x)$, значення якої дорівнюють ймовірностям $P(X<x)$ того, що ВВ X прийме значення, менше x, $X\in(-\infty;x)$ тобто:

$$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x). \quad (22)$$

Для дискретних ВВ $F(x)$ обчислюють за формулою

$$F(x)=\sum_{x_i<x}P(X<x_i),$$

де сума знаходиться для всіх значень i, для яких $x_i<x$.

Властивості функції розподілу.

1. *Функція розподілу $F(x)$ є невід'ємною. Її значення знаходяться між нулем і одиницею:*

$$0\le F(x)\le 1.$$

2. *Функція розподілу $F(x)$ є неспадною, тобто для $b>a$*

$$F(b)\ge F(a).$$

3. *Ймовірність появи неперервної ВВ в інтервалі* $[a;b]$ *дорівнює приросту функції розподілу* $F(x)$ *на цьому інтервалі:*

$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a).$$

4. *Якщо всі можливі значення ВВ X належать інтервалу* $[a;b]$, *то*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x < a, \\ 1 \text{ для } x > b. \end{cases}$$

Якщо ж усі можливі значення ВВ X належать усій числовій осі, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ (диференціальною функцією розподілу) неперервної ВВ X називають першу похідну від функції розподілу тобто

$$f(x) = F'(x). \tag{23}$$

Графік щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ називають *кривою розподілу ймовірностей.*

Властивості щільності розподілу імовірностей ВВ X:

1. *Щільність розподілу ймовірностей невід'ємна:*

$$f(x) \ge 0.$$

2. *Інтеграл у нескінченних межах від щільності розподілу ймовірностей дорівнює одиниці:*

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1. \tag{24}$$

Ймовірність того, що неперервна ВВ X належить інтервалу $[a;b]$

$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{25}$$

3. *Функція розподілу* $F(x)$ *виражається через щільність розподілу ймовірностей* $f(x)$ *формулою*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{26}$$

Приклад 17. Відомо, що ВВ X має щільність розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x < 1, \\ A/x^2 \text{ для } x \ge 1. \end{cases}$$

Визначити: 1) коефіцієнт A; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) ймовірність $P(2 \le X \le 3)$ попадання ВВ X в відрізок [2; 3]; 4) ймовірність того, що при чотирьох випробовуваннях ВВ X не потрапить в відрізок [2; 3].

Розв'язування.

1) Для знаходження коефіцієнта A скористаємося властивістю 2, щільності розподілу ймовірностей.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{A}{x^2}dx = -\lim_{a\to\infty} \frac{A}{x}\Big|_1^a = A = 1, \text{ тобто } A = 1.$$

2) Знаходимо $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0 \text{ для } x < 1, \\ \int_{1}^{x} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}\Big|_1^x = \frac{x-1}{x} \text{ для } x \ge 1. \end{cases}$$

3) Шукана ймовірність $P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

4) Ймовірність того, що при одному випробовуванні ВВ X не потрапить в відрізок $[2; 3]$, дорівнює $1 - 1/6 = 5/6$, а при чотирьох випробовуваннях – $(5/6)^4 = 0{,}48$.

3.3 Числові характеристики випадкових величин

Математичним сподіванням ВВ X називають число $M(X)$, обчислене за формулою

$$M(X) = \begin{cases} \sum_i x_i p_i \text{ для дискретної ВВ } X, \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ для неперервної ВВ } X, \end{cases} \tag{27}$$

де $p_i = P(X = x_i)$; $f(x)$ – щільність розподілу ймовірностей. Передбачається, що ряд $\sum_i x_i p_i$ і невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ абсолютно збіжні, в протилежному випадку вважають, що математичне сподівання ВВ X не існує.

Властивості математичного сподівання.

1. *Математичне сподівання сталої величини $M(C) = C$ стале, тому що єдиному значенню C відповідає ймовірність $p = 1$. За визначеним* $M(C) = C \cdot p = C \cdot 1 = C$.

2. *Якщо C стала, то $M(CX) = CM(X)$.*

3. *Для будь-яких ВВ $X_1, X_2, ..., X_n$*

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n).$$

4. *Математичне сподівання добутку незалежних ВВ дорівнює добутку математичних сподівань співмножників:*

$$M(X_1X_2...X_n) = M(X_1)M(X_2)...M(X_n).$$

Дисперсією $D(X)$ *ВВ* X називають математичне сподівання квадрата відхилення ВВ X від її математичного сподівання:

$D = M(X - M(X))^2$, де $X - M(X)$ – називають відхиленням ВВ.

Дисперсія ВВ X обчислюється за формулою

$$D(X) = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - m_x)p_i & \text{для дискретної ВВ } X, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx & \text{для неперервної ВВ } X. \end{cases} \qquad (28)$$

Формулу можна перетворити до виду

$$D(X) = \begin{cases} \sum\limits_i x^2 p_i - M^2(X) & \text{для дискретної ВВ } X, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(x) & \text{для неперервної ВВ } X. \end{cases} \qquad (29)$$

Основні властивості дисперсії

1. *Для будь-якої ВВ* X $D(X) > 0$.
2. $D(C) = 0$.
3. $D(CX) = C^2 D(X)$, *де* C – *стала.*
4. *Якщо ВВ* $X_1, X_2, ..., X_n$ *незалежні, то*

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n).$$

У випадку двох ВВ X_1 і X_2 маємо $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$.

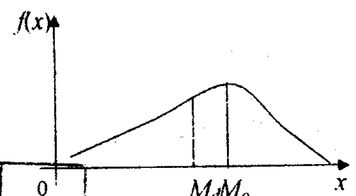
5. *Дисперсія числа появи події в n незалежних випробовуваннях, при яких ймовірність появи події p стала (біноміального розподілу), дорівнює добутку числа випробовувань на ймовірність появи p і непояви q події, тобто* $D(X) = npq$.

Арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії ВВ X називають її *середнім квадратичним відхиленням* і позначають $\delta_x : \delta_x = \sqrt{D(X)}$.

Модою дискретної ВВ називається її найбільш ймовірне значення. *Модою неперервної ВВ* називається таке її значення M_0, при якому щільність розподілу ймовірностей має максимум.

Медіаною M_d *довільної ВВ* називається таке її значення, відносно якого рівноймовірне одержання більшого чи меншого значення ВВ.

$$P(X < M_d(x)) = P(X > M_d(x)). \qquad (30)$$



Геометрично медіана – це точка, в якій ординати $f(x)$ ділять навпіл площу, обмежену кривою розподілу.

Приклади

18. При складанні приладу для найбільш точного припасування основної деталі може знадобитися (в залежності від удачі) 1,2,3,4,5 спроб з ймовірностями 0,07, 0,21, 0,55, 0,16, 0,01 відповідно. Необхідно забезпечити складальника необхідною кількістю деталей для складання 30 приладів. Скільки деталей треба видати складальнику?

Розв'язування. Число спроб, необхідних для досягнення задовільного складання приладу, є ВВ X, яка має ряд розподілу

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,21	0,55	0,16	0,01

Середнє число спроб, необхідних для складання одного приладу, дорівнює $M(X)$. Тоді

$$30M(X) = 30(1\cdot 0{,}07 + 2\cdot 0{,}21 + 3\cdot 0{,}55 + 4\cdot 0{,}16 + 5\cdot 0{,}11) = 30\cdot 2{,}83 \cong 85.$$

Отже, для складання 30 приладів необхідно 85 деталей.

19. Крива розподілу СВ X є напівеліпсом із півосями a і b. Піввісь a відома. Визначити b. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язування. Піввісь b знаходиться з умови рівності одиниці площі, обмеженої кривою розподілу:

$$\pi ab/2 = 1, \quad b = 2/(\pi a).$$

Щільність розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} & для \quad -a \le x \le a, \\ 0 & для \ x < -a \ або \ x > a. \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$M(x) = \int_{-a}^{a} x \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 0.$$

Дисперсія

$$D(X) = \int_{-a}^{a} x^2 \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{4}.$$

Функція розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & для \ x < -a, \\ \dfrac{1}{\pi a^2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{a^2\pi}{2}\right) & для \quad -a \le x \le a, \\ 1 & для \ x > a. \end{cases}$$

3.4 Основні імовірнісні моделі розподілу випадкових величин

Законом розподілу ВВ називається співвідношення, що враховує зв'язок між можливими її значеннями і відповідними ймовірностями.

Приведемо закони розподілу, які часто зустрічаються.

3.4.1 Дискретні розподіли

1. *Геометричний розподіл*

$$P(X = k) = q^{k-1}p,$$

де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2. *Гіпергеометричний розподіл*

$$P(X = k) = (C_M^k C_{N-M}^{n-k}) : C_N^n, \tag{31}$$

де N, M, n – натуральні числа: $M \le N$, $n \le N$; $k = 0, 1, \ldots, \min(M, n)$.

3. *Біноміальний розподіл*

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{32}$$

де n – натуральне число; $0 \le p \le 1$; $q = 1 - p$; $k = 0, 1, \ldots, n$. Математичне сподівання $M(X) = np$, дисперсія $D(X) = npq$.

4. *Розподіл Пуасона.* Якщо ймовірність появи події мала, а число дослідів велике, то застосувати формулу Бернуллі недоцільно. У цьому випадку користуються її граничним значенням – формулою Пуасона:

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!, \quad \text{де } \lambda = np. \tag{33}$$

Математичне сподівання і дисперсія ВВ X, розподіленої за законом Пуасона, відповідно рівні $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.

Приклади

20. Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили, в одному досліді.

Розв'язування. Дискретна ВВ X (число елементів, що відмовили, в одному досліді) набуває значень: $x_1 = 0$ (жоден з елементів пристрою не відмовив), $x_2 = 1$ (відмовив один елемент), $x_3 = 2$ (відмовили два елементи) і $x_4 = 3$ (відмовили три елементи).

Оскільки відмови елементів незалежні один від одного, ймовірності відмови кожного елемента рівні між собою, застосуємо формулу Бернуллі. Враховуючи, що за умовою $n = 3$; $p = 0{,}1$ (отже, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$), одержимо:

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729;$$

$$P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P_3^2(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027;$$

$$P_3 = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Контроль: $0{,}729+0{,}243+0{,}027+0{,}001=1$.

Запишемо шуканий біноміальний закон розподілу X, як ряд розподілу

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

21. В партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрано 2 деталі. Скласти закон розподілу числа стандартних деталей серед відібраних.

Розв'язування. ВВ X - число стандартних деталей серед двох відібраних деталей має такі можливі значення: $x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2$.

Знайдемо ймовірності можливих значень ВВ X за формулою

$$P(X=k)=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

(N – число деталей в партії, n – число стандартних деталей в партії, m – число відібраних деталей, k – число стандартних деталей серед відібраних), одержимо:

$$P(X=0)=\frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}}=\frac{1}{45};$$

$$P(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 2}{45}=\frac{16}{45};$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}}{45}=\frac{28}{45}.$$

Складемо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Контроль: $\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1$.

22. Екзаменатор задає студенту додаткові питання. Імовірність того, що студент відповість на будь-яке задане питання, дорівнює 0,9. Викладач припиняє іспит, як тільки студент не відповідає на задане питання. Потрібно: а) скласти закон розподілу дискретної ВВ X - числа додаткових питань, які задасть викладач студенту; б) знайти найімовірніше число k_0 заданих студенту додаткових питань.

Розв'язування. а) Дискретна ВВ X – число заданих додаткових питань набуває значень: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$, ..., $x_k = k$, ...

Знайдемо ймовірності цих можливих значень.

Величина X прийме можливе значення $x_1 = 1$ (екзаменатор задасть тільки одне питання), якщо студент не відповість на перше питання. Ймовірність цього можливого значення дорівнює $1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Таким чином, $P(X = 1) = 0{,}1$.

Величина X прийме можливе значення $x_2 = 2$ (екзаменатор задасть тільки 2 питання), якщо студент відповість на перше питання (імовірність цієї події дорівнює 0,9) і не відповість на друге (імовірність цієї події дорівнює 0,1). Таким чином, $P(X = 2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$.

Аналогічно знайдемо

$$P(X = 3) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}081, \ldots,$$

$$P(X = k) = 0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1, \ldots.$$

Напишемо шуканий закон розподілу:

X	1	2	3	$\ldots k$	...
p	0.1	0.09	0.081	$\ldots 0.9^{k-1}.0.1$	...

б) Найімовірніше число k_0 заданих питань (найімовірніше можливе значення X), тобто число заданих викладачем питань, що має найбільшу ймовірність, як видно з закону розподілу, дорівнює одиниці.

3.4.2 Неперервні розподіли

1. *Рівномірний розподіл на відрізку* $[a;b]$, $a < b$.

Щільність розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{для } a \le x \le b, \\ 0 & \text{для } x < a, x < b, \end{cases} \tag{34}$$

$$M(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2},$$

$$D(X) = \int_{-a}^{a} (x - \frac{a+b}{2})^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

2. *Нормальний розподіл або Гаусса.*

Щільність розподілу ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\delta^2)}, \tag{35}$$

де $a = M(X)$; $\delta = \sqrt{D(X)}$ - середнє квадратичне відхилення. Математичне сподівання

$$M(X)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-(x-a)^2/(2\delta^2)}dx.$$

Вважаючи $x=\delta y+a$ і застосовуючи формулу інтегрування частинами, одержимо

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\delta y+a)e^{-y^2/2}dy=$$

$$=\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2/2}dy+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}dy=0+a\cdot 1=a.$$

Оскільки функція $ye^{-y^2/2}$ – непарна, а $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ye^{-y^2/2}$ є щільністю нормального розподілу з параметрами (0; 1), то перший інтеграл у правій частині останньої формули дорівнює 0, а другий a. Таким чином, якщо ВВ X розподілена нормально з параметрами $(a,\ \delta^2)$, то $M(X)=a$. Дисперсія

$$D(X)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-(x-a)^2/(2\delta^2)}dx=\delta^2.$$

При обчислені $M(X)$ і $D(X)$ використовувався інтеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=\sqrt{2\pi}.$$

Якщо ВВ X має нормальний розподіл з параметрами $M(X)=a$ і $\delta=\sqrt{D(X)}$, то символічно це записують ВВ $X\in N(a;\ \delta)$.

Графік щільності розподілу ймовірностей, який задають формулою (23), називають *нормальною кривою* чи *кривою Гауса*. Нормальна крива – це дзвоноподібна крива, симетрична відносно прямої $x=a$, яка асимптотично наближається до осі абсцис для $x\to\infty$. Приведемо без доведення *основні властивості кривої Гауса.*

1. *Функція щільності розподілу ймовірностей визначена для будь-якого* $x\in R$.

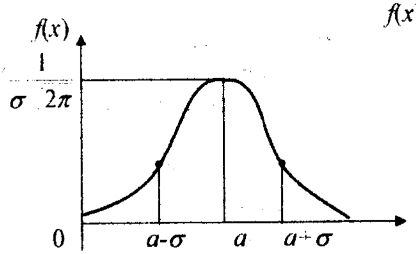
2. *Крива Гаусса розташована над віссю Ох для будь-якого* $x\in R,\ f(x)>0$.

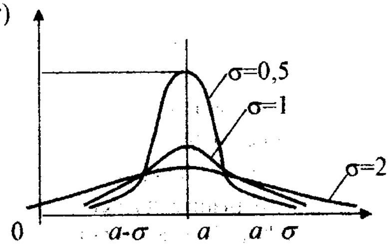
3. *Вітки кривої Гаусса асимптотично наближаються до осі Ох* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.

4. *Крива Гаусса має максимум у точці* $x=a$, *рівний* $f(a)=1/(\delta\sqrt{2\pi})$.

5. *Крива Гаусса симетрична відносно прямої* $x=a$.

Отже, для ВВ $X\in N(a;\delta)$ *математичне сподівання збігається з модою і медіаною розподілу.*





На рисунку зображені криві Гаусса для $a=2$ і $\delta=2$; 1; 0,5; зміна параметра δ при фіксованому значенні a характеризує форму кривої Гаусса.

За нормальним законом розподілу розподілено багато неперервних ВВ, що зустрічаються в техніці: помилки вимірювань, висота мікронерівностей на обробленій поверхні, відхилення розмірів деталей від номінальних, амплітуди коливання машин, які виникають під час руху.

Ймовірність попадання ВВ X, розподіленої нормально, в заданий інтервал $(\alpha;\ \beta)$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\delta}\right), \qquad (36)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t/2} dt$ - функція Лапласа.

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення ВВ X від свого математичного сподівання менше будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon / \delta).$$

Приклад 23. Бракування кульок для підшипників відбувається в такий спосіб: якщо кулька не проходить через отвір діаметром d_1, але проходить через отвір d_2, то його розмір вважається прийнятним. Якщо яка-небудь з цих умов не виконується, то кулька бракується. Відомо, що діаметр кульки D є ВВ із характеристиками $m_x = (d_1 + d_2)/2$ і $\delta_x = (d_2 - d_1)/4$. Визначити ймовірність P того, що кулька буде забракована.

Розв'язування. Маємо:

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{d_2 - m_x}{\delta_x}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - m_x}{\delta_x}\right)\right) =$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\delta_x}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\delta_x}\right)\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\delta_x}\right) = 1 - 2\Phi(2) = 0{,}0456.$$

4 Функція одного випадкового аргументу

Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y, то Y називають функцією випадкового аргументу X і записують $Y = \varphi(X)$.

Якщо X – дискретна випадкова величина і функція $Y = \varphi(X)$ монотонна, то різним значенням X будуть відповідати різні значення Y, причому ймовірність відповідних значень X та Y будуть однакові. Тобто можливі значення Y знаходять з рівності $y_i = \varphi(x_i)$ де x_i – можливі значення X; ймовірність можливих значень X знаходять з рівності:

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i).$$

Якщо $Y = \varphi(X)$ – не монотонна функція, то різним значенням X можуть відповідати однакові значення Y (це відбувається тоді, коли можливі значення X попадуть в інтервал, в якому функція $\varphi(x)$ не монотонна). В цьому випадку для знаходження ймовірностей можливих значень Y необхідно додавати ймовірності тих можливих значень X, для яких Y приймає однакові значення. Тобто ймовірність значення Y, що повторюється рівна сумі ймовірностей тих можливих значень X, для яких Y приймає одне і те ж значення.

Якщо X – неперервна випадкова величина, що задана щільністю розподілу $f(x)$, і якщо $y = \varphi(x)$ – диференційована строго зростаюча або строго спадна функція, яка має обернену функцію $x = \psi(y)$, то щільність функції $g(y)$ випадкової величини Y можна знайти за формулою

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \tag{37}$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ на інтервалі можливих значень X не монотонна, то потрібно розбити цей інтервал на такі інтервали, в яких функція $\varphi(x)$ монотонна, і знайти щільність функції $g_i(y)$ для кожного з інтервалів монотонності, а потім виразити $g(y)$ у вигляді суми:

$$g(y) = \sum g_i(y).$$

Наприклад, якщо функція $\varphi(x)$ монотонна в двох інтервалах, в яких відповідні обернені функції рівні $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$, то

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi'_1(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi'_2(y)|. \tag{38}$$

Приклади

24. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5 .

Знайти закон розподілу випадкової величини $X = 3Y$.

Розв'язування. Знайдемо можливі значення величини $X = 3Y$:

$$y_1 = 3 \cdot 1 = 3; \quad y_2 = 3 \cdot 3 = 9; \quad y_3 = 3 \cdot 5 = 15.$$

Ми бачимо, що різним можливим значенням X відповідають різні можливі значення Y. Це пояснюється тим, що функція $Y = y_1 = 3$ монотонна.

Знайдемо ймовірності можливих значень Y. Для того, щоб $Y = y_1 = 3$, достатньо, щоб величина X прийняла значення $x_1 = 1$. Ймовірність події $X = 1$ за умовою рівна 0,4; а значить і ймовірність події $Y = y_1 = 3$ також рівна 0,4.

Аналогічно отримаємо ймовірності всіх інших можливих значень Y:

$$P(Y = 9) = P(X = 3) = 0{,}1.$$

$$P(Y = 15) = P(X = 5) = 0{,}5.$$

Запишемо шуканий закон розподілу:

X	3	9	15
p	0,4	0,1	0,5

25. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-1	-2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4.

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язування. Знайдемо можливі значення величини:

$$y = x_1^2 = (-1)^2 = 1,\quad y = x_2^2 = (-2)^2 = 4,\quad y = x_3^2 = (1)^2 = 1,\quad y = x_4^2 = (2)^2 = 4.$$

Ми бачимо, що різним значенням X відповідають однакові значення Y. Це пояснюється тим, що можливі значення X належать інтервалу, на якому функція $Y = X^2$ не монотонна.

Знайдемо ймовірності можливих значень Y. Для того, щоб величина Y прийняла значення $Y = 1$, достатньо, щоб величина X прийняла значення $X = -1$ або $X = 1$. Ці останні дві події не сумісні, їх ймовірності відповідно рівні 0,3 і 0,2. Тому ймовірність події $Y = 1$ за теоремою додавання рівна

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}5.$$

Аналогічно знайдемо ймовірність можливого значення $Y = 4$:

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5.$$

Запишемо шуканий закон розподілу величини Y:

X	1	4
p	0,5	0,5.

26. Задана щільність ймовірності $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої знаходяться в інтервалі (a,b). Знайти щільність ймовірності $g(y)$ випадкової величини $Y = 3X$.

Розв'язування. Оскільки функція $y = 3x$ диференційована і строго зростаюча, то можна застосувати формулу (37), де $\psi(y)$ – функція, обернена функції $y = 3x$.

Знайдемо $\psi(y)$: $$\psi(y) = x = \frac{y}{3}.$$

Знайдемо $f[\psi(y)]$: $f[\psi(y)] = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Знайдемо похідну $\psi'(y)$: $\psi'(y) = \left(\frac{y}{3}\right)' = \frac{1}{3}$.

Видно, що $|\psi(y)| = \frac{1}{3}$.

Тоді знайдемо шукану щільність ймовірності:

$$g(y) = \frac{1}{3} f\left(\frac{y}{3}\right).$$

Оскільки x змінюється в інтервалі $(a\,;b)$ і $y = 3x$, то $3a < y < 3b$.

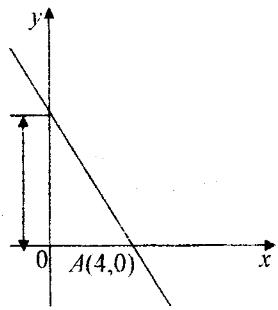
27. В прямокутній системі координат xOy з точки $A(4\,;0)$ навмання (під довільним кутом t) проведено промінь, який перетинає вісь Oy. Найти щільність функції $g(y)$ розподілу ймовірностей ординати y точки перетину проведеного променя з віссю Oy.

Розв'язування. Кут t можна розглядати як випадкову величину, розподілену рівномірно в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, причому щільність ймовірності $f(t)$ на даному інтервалі рівна $f(t) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi}$; поза інтервалом $f(t) = 0$.

З рисунка видно, що ордината у пов'язана з кутом t таким чином:

$$y = 4\,\mathrm{tg}\,t.$$

Дана функція на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ монотонно зростає, тому для знаходження шуканої щільності функції $g(y)$ можна застосувати формулу (37), де $\psi(y)$ – функція, обернена до функції $y = 4\,\mathrm{tg}\,t$.



Знайдемо $\psi(y)$: $\psi(y) = t = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{4}$.

Знайдемо $\psi'(y)$: $\psi'(y) = \frac{4}{16 + y^2}$.

Отже, $|\psi'(y)| = \frac{4}{16 + y^2}$.

Знайдемо $f[\psi(y)]$. Оскільки $f(t)=\frac{1}{\pi}$, то $f[\psi(y)]=\frac{1}{\pi}$.

Тоді
$$g(y)=\frac{4}{\pi(16+y^2)}.$$

Причому $-\infty<y<\infty$ (останнє випливає з того, що $y=4\operatorname{tg}t$ і $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$).

Перевірка: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(y)dy=\frac{4}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2}=\frac{4}{\pi}\cdot 2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2}=\frac{2\cdot 4\cdot\pi}{\pi\cdot 4\cdot 2}=1$.

28. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Найти щільність функції $g(y)$ випадкової величини $Y=\sin X$.

Розв'язування: Знайдемо щільність функції $f(x)$ випадкової величини X. Величина X рівномірно розподілена на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, тому на цьому проміжку $f(x)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\pi}$; поза проміжком $f(t)=0$.

Функція $y=\sin x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ монотонна, тоді на даному проміжку вона має обернену функцію $x=\psi(y)=\arcsin y$. Знайдемо похідну $\psi'(y)$:
$$\psi'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знайдемо шукану щільність функції за формулою (37). Враховуючи, що $f(x)=\frac{1}{\pi}$ (а отже $f[\psi(y)]=\frac{1}{\pi}$) і $|\psi'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, маємо $g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$.

Оскільки $y=\sin x$, причому $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, то $-1<y<1$.

Тобто на проміжку $(-1;\ 1)$ $g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, поза цим проміжком $g(y)=0$.

Перевірка:
$$\int\limits_{-1}^{1}g(y)dy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

5 Системи випадкових величин

Сукупність n випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$, розглянутих спільно, називається *системою n випадкових величин* або *n-вимірною випадковою величиною*. Система n випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ геометрично інтерпретується як випадкова точка в n-вимірному просторі з координатами $(X_1, X_2, ..., X_n)$ або як випадковий вектор, спрямований з початку координат у точку $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Координати вектора є випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$.

В окремому випадку для $n = 2$ маємо систему двох випадкових величин (X, Y), що геометрично інтерпретується як випадкова точка з координатами (X, Y) на площині xOy чи як випадковий вектор, спрямований з початку координат у точку (X, Y).

Законом *розподілу* системи випадкових величин називається співвідношення, що встановлює зв'язок між областями можливих значень системи випадкових величин і ймовірностями появи системи в цих областях.

Якщо X та Y – дискретні випадкові величини, можливі значення яких (x_i, y_j), де $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, то розподіл системи таких випадкових величин визначається заданням ймовірностей $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$ того, що випадкова величина X прийме значення x_i й одночасно з цим випадкова величина Y прийме значення y_j.

Ймовірності p_{ij} зводяться в таблицю.

Таблиця 5.1

y_j \ x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
$\vdots$	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Така таблиця називається *таблицею розподілу системи двох дискретних випадкових величин з кінцевим числом можливих значень.*

Найбільш загальною формою закону розподілу системи випадкових величин є функція розподілу.

Функцією розподілу системи n випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ називається ймовірність спільного виконання n нерівностей $X_k < x_k (k = 1, 2, ..., n)$:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2; ... X_n < x_n).$$

Для системи двох випадкових величин (X,Y) функцією розподілу $F(x, y)$ є ймовірність спільного виконання двох нерівностей:

$$F(x,y) = P(X < x;\ Y < y). \tag{39}$$

Геометрично функція розподілу $F(x, y)$ інтерпретується як ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у ліву нижню частину квадрантної площини з вершиною в точці $(x; y)$ (рисунок 5.1).

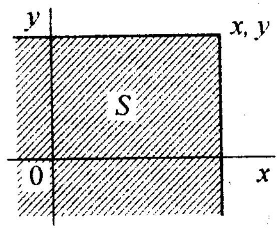


Рисунок – 5.1

Властивості функції розподілу системи випадкових величин.

1. Якщо один з аргументів прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу однієї випадкової величини, що відповідає іншому аргументу:

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x); \quad \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y).$$

2. Якщо обидва аргументи прямують до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до одиниці:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1.$$

3. Якщо хоча б однин з аргументів прямує до $-\infty$ функція розподілу прямує до нуля:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0.$$

4. Функція розподілу є не спадною функцією по кожному аргументу:

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y), \text{ якщо } x_2 > x_1;$$
$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1.$$

5. Ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у довільний прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям (рис. 5.2), обчислюється за формулою:

$$P(x_1 \le x < x_2, y_1 \le y < y_2) = F(x_1,y_1) + F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1).$$

При вивченні неперервних систем випадкових величин (кожна випадкова величина, що входить у систему, неперервна) основною формою закону розподілу є щільність ймовірності.

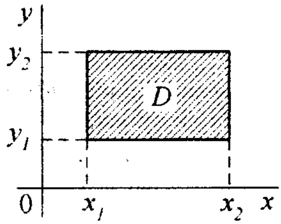


Рисунок – 5.2

Щільністю ймовірності системи n випадкових величин називається границя відношення ймовірності появи системи $(X_1, X_2, ..., X_n)$ в околі точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ до розміру цього околу при необмеженому його зменшенні, тобто коли окіл стягується в точку $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для системи двох випадкових величин (X, Y) щільність ймовірності

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x \cap y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Якщо функція розподілу $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована по кожній змінній, то щільність імовірності

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}.$$

Аналогічно для системи двох випадкових величин (X, Y)

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (40)$$

Поверхня, що зображує функцію $f(x, y)$, називається *поверхнею розподілу*.

Ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в довільну область D обчислюється за формулою

$$P((X,Y) \subset D) = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Властивості щільності імовірності системи двох випадкових величин.

1. Щільність імовірності є функція не від'ємна:

$$f(x,y) \ge 0.$$

2. Подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами від щільності імовірності системи дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)dxdy = 1. \quad (41)$$

Функція розподілу системи (X,Y) виражається через щільність ймовірності формулою

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy. \qquad (42)$$

Для системи n випадкових величин $(X_1,X_2,...,X_n)$ формула (42) приймає вигляд

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n.$$

Щільність імовірності окремих величин, що входять у систему (X,Y), обчислюється через щільність імовірності системи за формулами:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \quad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \qquad (43)$$

Умовним законом розподілу випадкової величини, що входить у систему (X,Y), називається її закон розподілу, обчислений за умови, що інша випадкова величина прийняла певне значення.

Умовні функції розподілу випадкових величин X та Y, що входять в систему, позначають $F_X(x/y)$ та $F_Y(y/x)$, а умовні щільності ймовірності – $f_X(x/y)$ та $f_Y(y/x)$.

Умовні щільності ймовірностей виражаються через безумовні за формулами:

$$\left.\begin{aligned} f_X(x/y)&=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad \textit{якщо } f_2(y)\neq 0;\\ f_Y(y/x)&=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad \textit{якщо } f_1(x)\neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

З формул (44) випливають рівності:

$$f(x,y)=f_1(x)f_Y(y/x); \; f(x,y)=f_2(y)f_X(x/y),$$

які називають *теоремою множення щільностей ймовірностей.*

Випадкові величини X та Y називаються *незалежними*, якщо умовний закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке значення прийме інша:

$$f_X(x/y)=f_1(x) \text{ або } f_Y(y/x)=f_2(y).$$

Для незалежних випадкових величин системи (X,Y) щільність імовірності

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y).$$

Основні числові характеристики системи двох випадкових величин (X,Y):

1. *Математичні сподівання* m_X та m_Y є координатами центра розсіювання системи.

Формули для обчислення математичних сподівань m_X та m_Y:

а) для системи дискретних випадкових величин

$$m_X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i;$$

$$m_Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} y_j p_j. \qquad (45)$$

де $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ – ймовірність того, що система (X,Y) прийме значення (x_i, y_j), а сума знаходиться для всіх значень випадкових величин X та Y;

б) для системи неперервних випадкових величин

$$m_X = \iint_{-\infty}^{+\infty} x f(x;y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx;$$

$$m_Y = \iint_{-\infty}^{+\infty} y f(x;y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy, \qquad (46)$$

де $f(x, y)$ – щільність ймовірності системи.

2. *Дисперсії* D_X і D_Y, характеризують розсіювання випадкової точки відповідно вздовж осей Ox, Oy.

Формули для обчислення дисперсій D_X, D_Y:

а) для системи дискретних випадкових величин

$$D_X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_X)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_Y)^2 p_i;$$

$$D_Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_j - m_Y)^2 p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (y_j - m_Y)^2 p_j; \qquad (47)$$

б) для системи неперервних випадкових величин

$$D_X = \int_{-\infty}^{+\infty}\int (x - m_X)^2 f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_Y)^2 f_1(x)dx;$$

$$D_Y = \iint_{-\infty}^{+\infty} (y - m_Y)^2 f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 f_2(y)dy. \qquad (48)$$

3. Кореляційний момент K_{XY} характеризує зв'язок між випадковими величинами X та Y.

Формули для обчислення кореляційного моменту K_{XY}:

а) для системи дискретних випадкових величин

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_X)(y_j - m_Y) p_{ij}; \qquad (49)$$

б) для системи неперервних випадкових величин

$$K_{XY} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x,y)dxdy. \qquad (50)$$

Для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю. Безрозмірною характеристикою зв'язку між випадковими величинами X та Y є *коефіцієнт кореляції*:

$$\rho_{XY} = K_{XY} / \sigma_X \sigma_Y, \qquad (51)$$

де $\sigma_X = \sqrt{D_X}$; $\sigma_Y = \sqrt{D_Y}$.

Коефіцієнт кореляції характеризує ступінь зв'язку лінійної залежності між випадковими величинами.

Випадкові величини X та Y називаються некорельованими, якщо їх кореляційний момент (чи, що рівносильно, коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю.

Якщо випадкові величини X та Y зв'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$, то їх коефіцієнт кореляції $\rho_{XY} = \pm 1$, де плюс чи мінус береться в відповідності зі знаком коефіцієнта a. Для будь-яких випадкових величин $|\rho_{XY}| \le 1$.

Аналогічні числові характеристики розглядаються для системи n випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Для обчислення кореляційного моменту $K_{X_i X_j}$ іноді є зручною формула

$$K_{X_i X_j} = M[X_i X_j] - M[X_i]\, M[X_j].$$

Кореляційною матрицею системи n випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ називається таблиця, складена з кореляційних моментів усіх цих величин, узятих попарно:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{11}\ K_{12}\ ...K_{1n} \\ K_{21}\ K_{22}\ ...K_{2n} \\ .... \\ K_{n1}\ K_{n2}\ ...K_{nn} \end{bmatrix},$$

де $K_{ij} = K_{X_i X_j}$.

З визначення кореляційного моменту випливає, що $K_{X_i X_j} = K_{X_j X_i}$. Це значить, що елементи кореляційної матриці, розташовані симетрично до головної діагоналі, рівні. Тому звичайно заповнюється тільки половина кореляційної матриці:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{11}\ K_{12}\ ...K_{1n} \\ \quad K_{22}\ ...K_{2n} \\ .... \\ \qquad\qquad K_{nn} \end{bmatrix}.$$

По головній діагоналі кореляційної матриці стоять дисперсії випадкових величин системи $(X_1, X_2, ..., X_n)$: $K_{X_i X_j} = D_{X_i}$.

Система двох неперервних випадкових величин (X, Y) має *рівномірний* розподіл в області D площини $x0y$, якщо щільність ймовірності в точках області D постійна і дорівнює нулю в інших точках площини $x0y$:

$$f(x, y) = \begin{cases} C \text{ всередині } D; \\ 0 \text{ ззовні } D. \end{cases}$$

Це означає, що з ймовірністю 1 випадкова точка попадає в область D, причому усі положення цієї точки в області D рівноправні.

За властивістю 2 щільності імовірності маємо $C = 1/S_D$, де S_D – площа області D.

Основна властивість рівномірного розподілу полягає в тому, що для нього можна застосувати геометричний спосіб визначення імовірності. Так, якщо область d міститься в області D, то

$$P((X, Y) \subset d) = S_d / S_D,$$

де S_d – площа області d.

Приклади

29. Втулки, що виготовляються в цеху, сортуються за відхиленнями їхнього внутрішнього діаметра від номінального розміру на чотири групи зі значеннями 0,01; 0,02; 0,03 і 0,04 мм і по овальності на чотири групи зі значеннями 0,02; 0,04; 0,06 і 0,08 мм. Спільний розподіл відхилень діаметра (X) і овальності (Y) втулок заданий таблицею 5.2.

Таблиця 5.2

y_i \ x_i	0,01	0,02	0,03	0,04
0,02	0,01	0,02	0,04	0,04
0,04	0,03	0,24	0,15	0,06
0,06	0,04	0,10	0,08	0,08
0,08	0,02	0,04	0,03	0,02

Визначити математичні сподівання, середньоквадратичні відхилення X і Y та їх коефіцієнт кореляції. Знайти одновимірні закони розподілу кожної з величин X та Y.

Розв'язування. Для визначення числових характеристик системи випадкових величин (X, Y) і одновимірних законів розподілу кожної з величин, що входять у систему, складемо допоміжну таблицю (табл. 5.3).

Імовірності можливих значень дискретної випадкової величини X, що входить в систему, визначаються за формулою

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}.$$

Тому, згідно з табл. 5.3, ряд розподілу величини X має такий вигляд (табл. 5.4).

Таблиця 5.3

x_i / y_j p_{ij}	$x_1 = 0{,}01$		$x_2 = 0{,}02$		$x_3 = 0{,}03$		$x_4 = 0{,}04$		$\sum_i p_{ij}$	$\sum_i p_{ij} y_j$	$\sum_i p_{ij} y_j^2$
	p_{1j}	$p_{1j} y_j$	p_{2j}	$p_{2j} y_j$	p_{3j}	$p_{3j} y_j$	p_{4j}	$p_{4j} y_j$			
$y_1 = 0{,}02$	0,01	0,0002	0,02	0,0004	0,04	0,0008	0,04	0,0008	0,11	0,0022	0,000044
$y_2 = 0{,}04$	0,03	0,0012	0,24	0,0096	0,15	0,006	0,06	0,0024	0,48	0,0192	0,000768
$y_3 = 0{,}06$	0,04	0,0024	0,10	0,006	0,08	0,0048	0,08	0,0048	0,30	0,018	0,00108
$y_4 = 0{,}08$	0,02	0,0016	0,04	0,0032	0,03	0,0024	0,02	0,0016	0,11	0,0088	0,000704
$\sum_j$	0,10	0,0054	0,40	0,0192	0,30	0,014	0,20	0,0096	1,00	0,0482	0,002596
$x_i \sum_j$	0,001	0,000054	0,008	0,000384	0,009	0,00042	0,008	0,000348	0,026	0,001242	–
$x_i^2 \sum_j$	0,00001	–	0,00016	–	0,00027	–	0,00032	–	0,00076	–	–

Таблиця 5.4

x_i	0,01	0,02	0,03	0,04
p_i	0,10	0,40	0,30	0,20

Аналогічно, користуючись формулою

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},$$

з табл. 5.3 одержуємо ряд розподілу випадкової величини Y (табл. 5.5).

Таблиця 5.5.

y_j	0,02	0,04	0,06	0,08
p_j	0,11	0,48	0,30	0,11

Математичне сподівання випадкової величини X

$$m_X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0{,}026.$$

Математичне сподівання випадкової величини Y

$$m_Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} y_j p_j = 0{,}0482.$$

Дисперсія величини X

$$D_X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij} - m_X^2 = 0{,}00076 - 0{,}000676 = 0{,}000084.$$

Дисперсія величини Y

$$D_Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - m_Y^2 \approx 0{,}002596 - 0{,}002323 = 0{,}000273.$$

Середньоквадратичні відхилення

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0{,}000084} \approx 0{,}0092;$$

$$\sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{0{,}000273} \approx 0{,}0165.$$

Кореляційний момент випадкових величин X та Y

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - m_X m_Y = 0{,}001242 - 0{,}001253 = -0{,}000011.$$

Коефіцієнт кореляції

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0{,}000011}{0{,}0092 \cdot 0{,}0165} \approx -0{,}072.$$

30. Дана щільність імовірності системи випадкових величин (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} a\sin(x+y) & \text{для } 0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le \pi/2 \\ 0 & \text{для будь-яких інших значень } x \text{ та } y. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) визначити функцію розподілу системи; в) визначити математичні сподівання і дисперсії випадкових величин X та Y; г) визначити кореляційний момент величин X та Y.

Розв'язування.

а) На підставі властивості щільності імовірності маємо

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\sin(x+y)dxdy = 1$$

звідки

$$a = \left(\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)dxdy\right)^{-1} = \left(\int_0^{\pi/2}\left[-\cos[x+y]\right|_0^{\pi/2}dx\right)^{-1} =$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2}\left[-\cos(x+\frac{\pi}{2})+\cos x\right]dx\right)^{-1} = \left(\int_0^{\pi/2}\sin xdx + \int_0^{\pi/2}\cos xdx\right)^{-1} =$$

$$= \left(-\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

б) Використовуючи формулу (49), отримуємо

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{для } x\le 0,\ y\le 0; \\ \frac{1}{2}[\sin x+\sin y-\sin(x+y)] & \text{для } 0<x<\frac{\pi}{2};\ 0<y<\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(1+\sin x-\cos x) & \text{для } 0<x<\frac{\pi}{2};\ y\ge\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(1+\sin y-\cos y) & \text{для } x\ge\frac{\pi}{2};\ 0<y<\frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{для } x\ge\frac{\pi}{2};\ y\ge\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

в) Математичне сподівання випадкової величини X

$$M[X] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\sin(x+y)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right]dx = \frac{\pi}{4}.$$

Дисперсія випадкової величини X

$$D[X] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x^2\sin(x+y)dxdy - m_X^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x^2\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right]dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

На підставі симетрії щільності імовірності відносно X та Y випливає, що

$$M[Y]=M[X]=\frac{\pi}{4};$$

$$D[Y]=D[X]=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

г) Кореляційний момент:

$$[K_{XY}]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}xy\sin(x+y)dxdy-m_Xm_Y=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}xy(\sin x\cos y+\cos x\sin y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\sin xdx\int_0^{\pi/2}y\cos ydy+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\cos xdx\int_0^{\pi/2}y\sin ydy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}x\sin xdx\int_0^{\pi/2}y\cos ydy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi/2}(y\sin y+\cos y)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}.$$

31. Система двох випадкових величин (X, Y) розподілена за законом рівномірної щільності розподілу всередині кола радіуса r, з центром в початку координат. Записати щільність розподілу системи та окремих випадкових величин, що входять у систему. Встановити, чи є випадкові величини X та Y залежними. У випадку їхньої залежності визначити, чи корельовані вони.

Розв'язування. Щільність імовірності системи величин (X, Y), рівномірно розподіленої всередині кола радіуса r, визначається за формулою

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi r^2, & для\ x^2+y^2\le r^2;\\ 0, & для\ x^2+y^2>r^2.\end{cases}$$

Користуючись формулами (43), знайдемо щільності імовірності окремих величин, що входять у систему (X, Y):

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2},$$

отже,

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}, & для\ |x|\le r;\\ 0, & для\ |x|>r.\end{cases}$$

Аналогічно

$$f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}, & \text{для } |y|\le r;\\ 0, & \text{для } |y|>r.\end{cases}$$

Для того щоб встановити чи є випадкові величини (X, Y) залежними знайдемо, користуючись формулами (44), умовні щільності імовірності:

$$f_X(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & \text{для } |x|<\sqrt{r^2-y^2}\ , \text{ де } |y|<r;\\ 0, & \text{для } |x|>\sqrt{r^2-y^2}\ , \text{ де } |y|<r.\end{cases}$$

$$f_Y(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & \text{для } |y|<\sqrt{r^2-x^2}\ , \text{ де } |x|<r;\\ 0, & \text{для } |y|>\sqrt{r^2-x^2}\ , \text{ де } |x|<r.\end{cases}$$

Оскільки $f_1(x)\ne f_X(x/y)$ і $f_2(y)\ne f_Y(x/y)$, то випадкові величини X та Y є залежними. Подивимося, чи є ці величини корельованими. Для цього обчислимо кореляційний момент. Маючи на увазі, що з симетрії $m_X=m_Y=0$, одержимо

$$K_{XY}=\iint_D xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi r^2}\iint_D xydxdy=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}xdx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}ydy=$$

$$=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dx=\frac{1}{2\pi r^2}\int_{-r}^{r}x\left(\left(r^2-x^2\right)-\left(r^2-x^2\right)\right)dx=0.$$

тобто випадкові величини X та Y некорельовані.

Таким чином, випадкові величини X та Y залежні, але некорельовані; це значить, що з некорельованості випадкових величин не випливає їх незалежність.

6 Варіанти типових завдань

6.1 Випадкові події

1. Слово складене із карточок, на кожній з яких написана одна буква. Карточки змішують і виймають без повернення по одній. Знайти ймовірність того, що букви виймаються в порядку заданого слова:

1. математика
2. програма
3. програміст
4. програмування
5. статистик
6. статистика
7. подія
8. випадковість
9. ймовірність
10. алгоритм
11. блок-схема
12. підпрограма
13. процедура
14. умова
15. процесор
16. пристрій
17. перфокарта
18. магніт
19. напівпровідник
20. транзистор
21. інтеграл
22. калькулятор
23. арифметика
24. диференціал
25. розподіл
26. многокутник
27. резистор
28. похідна
29. випадок

2. Як і в попередній задачі, знайти відповідну ймовірність випадку, коли заданим словом є ваше прізвище та ім'я.

3. Пристрій складається з трьох незалежних елементів, які працюють безвідмовно час T з ймовірностями p_1, p_2, p_3. Знайти ймовірність того, що за час T вийде із ладу:

а) тільки один елемент;

б) хоча б один елемент;

в) два елементи із трьох;

г) всі три елементи;

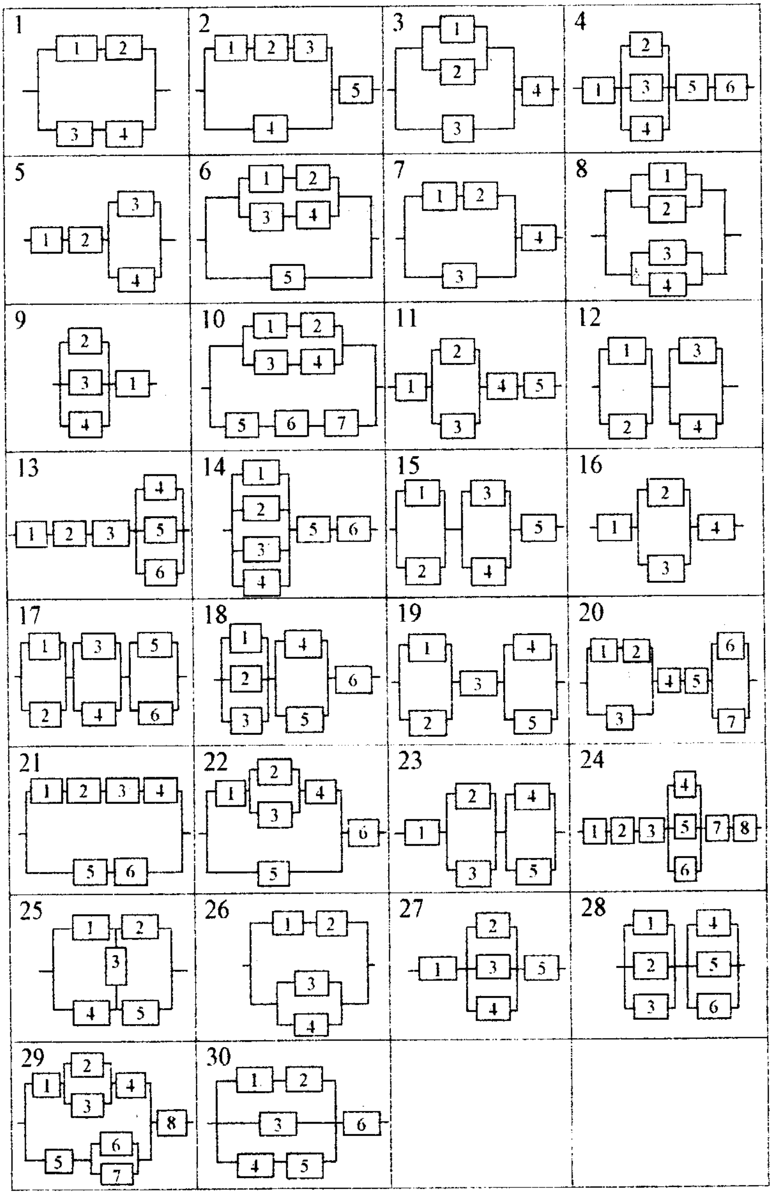
д) жоден з елементів не вийде з ладу.

Значення параметрів k, p_1, p_2, p_3 обчислити за формулами:

$$k = \frac{|14.9 - V|}{100} \qquad p_1 = 1 - k \qquad p_2 = 0{,}9 - k \qquad p_3 = 0{,}85 - k,$$

де V – номер варіанта завдання.

4. В приведених схемах елементи відмовляють незалежно один від одного, надійність їх p_k. Записати надійність кожної схеми.



5. Із інтервалу (a,b) навмання вибирають число x, а з інтервалу (c,d) – число y. Знайти ймовірність того, що ці числа задовольняють нерівності: $f_1(x)\le y\le f_2(x)$. Зробити рисунок.

V	a	b	c	d	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1.	0	2	0	2	$x^2/4$	x
2.	0	$\pi/4$	0	1	$\sin x$	$\cos x$
3.	-2	2	0	1	0,5	$x+2$
4.	e	e^2	1	4	2	$\ln x$
5.	0	2	1	10	e^x	$e+4x$
6.	-1	2	2	5	$4-x$	3
7.	4	9	1	4	$\sqrt{x}$	$x-1$
8.	4	7	2	5	2	$x/2$
9.	0	π	-1	0	$-\sin 2x$	-0,5
10.	4	6	2	9	$x/2$	$x^2/4$
11.	e^2	e^3	2	4	$\frac{x-e^2}{100}+2$	$\ln x$
12.	0	1	0	1	x^3	x^2
13.	0	$\pi/4$	0	2	$2x$	$2\mathrm{tg}\, x$
14.	1	e	0	e	0	$x \ln x$
15.	0	1	0	e	0	$x e^x$
16.	2	8	2	6	$\sqrt{2x}$	x
17.	0	$\pi/2$	0	1	$\cos^2 x$	1
18.	0	3	0	3	x^2	x
19.	0	$\pi/2$	0	1	$x/4$	$\sin x$
20.	1	1	1	1	x^2	$\sqrt{x}$
21.	0	2	0	4	$x/2$	$2x$
22.	1	2	1	4	x^2	x^3
23.	0	$\pi/4$	0	1	x	$\cos x$
24.	0	$\pi/4$	0	1	$\sin x$	$\cos x$
25.	1	2	0	3	x	x^3
26.	0	$\pi/4$	0	1	$\mathrm{tg}\, x$	x
27.	0	1	0	1	$2x$	x^2
28.	0	2	0	2	e^{-x}	$2x$
29.	0	2	1	2	2^x	2
30.	1	3	0	2	1	$\sqrt{x}$

6. Прилад може працювати у двох режимах: нормальному і форсованому. Нормальний режим спостерігається в M%, форсований – N%. Надійність приладу для нормального режиму P_H, для форсованого –

$P_Ф$. Знайти повну (з врахуванням випадкових умов) надійність приладу. $P_H = P_1$, $P_Ф = P_2$ взяти з умови задачі 1.3.

V	M	N	V	M	N	V	M	N
1	95	5	11	89	11	21	82	18
2	94	6	12	88	12	22	84	16
3	93	7	13	87	13	23	80	20
4	92	8	14	86	14	24	79	21
5	91	9	15	85	15	25	96	4
6	90	10	16	84	16	26	75	25
7	98	2	17	83	17	27	77	23
8	97	3	18	82	18	28	74	26
9	96	4	19	81	19	29	76	24
10	99	1	20	80	20	30	78	22

7. У виробниче об'єднання надійшли кінескопи із трьох заводів-постачальників: N_1 – першого заводу; N_2 – другого заводу; N_3 – третього заводу. Ймовірність бракованої продукції заводів відповідно дорівнює P_1, P_2, P_3. Якщо вибір бракований, то він не проходить на складальний конвеєр. Взято навмання один кінескоп із змішаної партії, він був бракований. Знайти ймовірність того, що його виготовили на k-му заводі. $P_1 = q_1$, $P_2 = q_2$, $P_3 = q_3$ (з умови задачі 1.3).

V	N_1	N_2	N_3	k	V	N_1	N_2	N_3	k	V	N_1	N_2	N_3	k
1	125	130	121	1	11	200	203	101	3	21	205	169	127	2
2	124	123	130	1	12	133	135	136	3	22	306	300	194	2
3	130	132	100	1	13	126	129	141	2	23	200	210	205	2
4	180	120	110	1	14	190	205	153	2	24	196	204	100	2
5	134	132	140	2	15	200	209	191	2	25	210	132	147	3
6	154	156	110	2	16	200	175	125	2	26	185	111	204	3
7	163	145	151	2	17	150	175	135	1	27	206	132	112	3
8	134	165	200	2	18	134	168	150	1	28	135	171	76	3
9	125	127	130	3	19	180	136	190	1	29	156	201	110	3
10	130	131	132	3	20	209	191	120	1	30	172	130	155	3

8. На стенді випробовують зразок блоку живлення для серійного виробництва. Його надійність P. Випробування проводять протягом m годин. Знайти ймовірність того, що прилад буде працювати безвідмовно k годин.

V	P	m	k	V	P	m	k
1	0,9	8	3	16	0,93	10	6
2	0,92	7	4	17	0,97	12	7
3	0,97	10	6	18	0,98	11	9
4	0,94	7	2	19	0,97	12	6
5	0,93	10	4	20	0,85	4	1
6	0,98	12	7	21	0,83	8	3
7	0,91	11	7	22	0,87	9	4
8	0,92	12	5	23	0,88	8	5
9	0,89	10	3	24	0,93	10	5
10	0,89	9	5	25	0,92	9	2
11	0,91	10	6	26	0,85	7	2
12	0,93	8	7	27	0,85	7	3
13	0,95	12	6	28	0,9	10	4
14	0,85	10	4	29	0,98	11	6
15	0,92	9	4	30	0,88	5	1

9. АТС за 1 год. отримує в середньому m викликів. Яка ймовірність того, що за 2 хвилини вона отримає k викликів?

V	m	k	V	m	k	V	m	k
1	56	3	11	49	10	21	31	1
2	54	4	12	48	9	22	30	3
3	53	2	13	47	8	23	33	3
4	39	7	14	45	6	24	46	8
5	38	6	15	44	5	25	57	6
6	37	5	16	43	4	26	58	12
7	36	4	17	42	3	27	58	10
8	35	5	18	41	2	28	59	7
9	34	4	19	40	1	29	60	10
10	50	9	20	32	2	30	30	3

10. В кожному із n незалежних випробуваннях подія A відбувається зі сталою ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що подія A відбувається:

а) точно G разів;

б) точно L разів;

в) менше ніж M і більше ніж F разів;

г) менше ніж R разів.

Значення параметрів n, p, G та L, M, F, R обчислити за формулами:

$$n = 500 + V \cdot 10; \qquad p = 0.4 + \frac{V}{100};$$

$$G = 220 + V \cdot 10; \qquad L = G - 30;$$

$$M = G + 20 \cdot V; \qquad R = G + 15.$$

$$F = G - 40 + V;$$

6.2 Випадкові величини

1. В урні m білих та n чорних кульок. Взяли 2 кульки. Випадкова величина X – число взятих білих кульок. Записати ряд розподілу та функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X, та побудувати їх графіки.

V	m	N	V	m	n	V	m	N
1	3	8	11	6	10	21	3	8
2	4	7	12	7	8	22	4	9
3	6	10	13	6	12	23	5	8
4	2	7	14	4	10	24	5	10
5	4	10	15	4	9	25	2	9
6	7	12	16	6	10	26	2	7
7	7	11	17	7	12	27	3	7
8	5	12	18	9	11	28	4	10
9	3	10	19	6	12	29	6	11
10	5	9	20	4	6	30	5	11

2. ВВ X задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини x та побудувати її графік. Обчислити математичне сподівання $M(x)$, дисперсію $D(x)$ і моду M_o. Значення параметрів x_1, x_2, x_3, x_4; p_1, p_2, p_3, p_4 обчислити за формулами:

R = остача $(V/4)+2$;

$x_1 = V + 3;\ x_2 = x_1 + R;\ x_3 = x_2 + R;\ x_4 = x_3 + 2R;$

$$p_1 = \frac{1}{R+5};\quad p_2 = \frac{1}{R+3};\quad p_3 = \frac{41+33R-R^3}{(R+3)(R+5)(8-R)};\quad p_4 = \frac{1}{8-R}.$$

3. Випадкова величина X задана функцією щільності ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x}{k}, & 0 < x \le R; \\ 0, & x > R. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X. Побудувати графік функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(x)$, моду M_o та медіану M_e. Значення параметрів k та R обчислити за формулами: $R = 2 + V$; $k = \dfrac{R^2}{2}$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{k}, & 0<x\le k;\\ 1, & x>k.\end{cases}$$

Знайти функцію щільності $f(x)$ випадкової величини X. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(x)$, моду M_o і медіану M_e. Значення параметра k обчислити за формулою: $k = 3 + V$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^e}{2\sigma_x^2}}.$$

Знайти ймовірність того, що вона прийме значення:

а) в інтервалі $[a,b]$;

б) менше K;

в) більше L.

Значення параметрів m_x, S_x, a, b, K, L обчислити за формулами:

$$m_x=V;\ S_x=остача\,\frac{V}{8}+2;\ S=остача\,\frac{V}{5}+1;$$
$$a=V-S;\ b=V+2S;\ K=a;\ L=b.$$

6.3 Системи випадкових величин

1. Закони розподілу числа очок, які вибиває кожен із двох стрільців, такі:

X	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3

Y	y_1	y_2	y_3
P	p_4	p_5	p_6

$\sum p_i = 1$.

Записати закон розподілу суми очок, які вибивають обидва стрілки.

V	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	1	2	3	1	2	3	0,1	0,1	0,8	0,5	0,1	0,4
2	2	3	4	1	2	3	0,2	0,1	0,7	0,1	0,6	0,3
3	1	2	4	1	3	4	0,3	0,2	0,5	0,2	0,7	0,1
4	2	3	4	2	3	4	0,2	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3
5	0	1	2	1	3	4	0,1	0,4	0,5	0,5	0,2	0,3

V	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
6	1	2	3	0	1	2	0,4	0,3	0,3	0,2	0,6	0,2
7	0	1	2	1	2	3	0,1	0,6	0,3	0,1	0,5	0,4
8	2	3	4	0	1	2	0,3	0,6	0,1	0,2	0,5	0,3
9	3	4	5	2	6	7	0,7	0,2	0,1	0,1	0,8	0,1
10	1	5	7	2	3	9	0,6	0,1	0,3	0,2	0,4	0,4
11	2	3	8	1	6	7	0,8	0,1	0,1	0,4	0,3	0,3
12	7	8	9	8	9	10	0,5	0,4	0,1	0,3	0,1	0,6
13	5	9	10	3	6	8	0,6	0,3	0,1	0,7	0,2	0,1
14	4	5	6	6	7	8	0,5	0,1	0,4	0,2	0,2	0,6
15	2	5	8	1	4	7	0,2	0,7	0,1	0,8	0,1	0,1
16	0	2	6	3	5	7	0,4	0,3	0,3	0,4	0,2	0,4
17	3	6	7	0	5	9	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,5
18	6	7	9	4	8	10	0,3	0,6	0,1	0,5	0,4	0,1
19	5	8	10	2	3	5	0,3	0,4	0,3	0,2	0,6	0,2
20	5	6	7	7	8	9	0,2	0,7	0,1	0,1	0,6	0,3
21	4	9	10	1	6	8	0,1	0,3	0,6	0,3	0,5	0,2
22	1	3	5	1	5	6	0,2	0,1	0,7	0,1	0,1	0,8
23	5	9	10	3	4	9	0,5	0,3	0,2	0,6	0,2	0,2
24	3	6	7	0	8	10	0,6	0,2	0,2	0,6	0,1	0,3
25	3	5	9	5	6	8	0,1	0,8	0,1	0,4	0,5	0,1
26	2	4	6	2	4	6	0,5	0,1	0,4	0,3	0,2	0,5
27	0	5	10	3	5	6	0,2	0,3	0,5	0,3	0,3	0,4
28	1	3	5	0	3	9	0,1	0,5	0,4	0,3	0,5	0,2
29	5	6	9	1	2	7	0,7	0,1	0,2	0,6	0,3	0,1
30	5	8	9	6	7	10	0,5	0,3	0,2	0,4	0,3	0,3

2. По мішені стріляють один раз. Ймовірність влучення p_i. Розглядають дві випадкові величини: X – число влучень; Y – число невлучень. Побудувати функцію розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини (x, y).

$$p_1 = 1 - k, \quad k = \frac{|14{,}9 - V|}{100}.$$

3. Двовимірна випадкова величина (x, y) має щільність ймовірності

$$f(x, y) = \frac{c}{\pi^2 (V + x^2)((V - 1) + y^2)}.$$

Визначити:

а) величину c;

б) функцію розподілу $F(x, y)$.

в) ймовірність влучення випадкової точки (x, y) в прямокутник, обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$; $x = a$, $y = b$.

$a = V - S$; $\quad b = V + 2S$; $\quad S =$ остача$(V/5) + 1$,

де V – номер варіанта.

7 Додаткові завдання
Випадкові події

1. В електричне коло послідовно включено три резистори, які можуть перегоріти незалежно один від одного з ймовірностями відповідно 0,2; 0,1; 0,3. Визначити ймовірність того, що:

а) коло не проводить струм,

б) струм є.

2. В кожній з двох урн знаходиться 5 білих і 10 чорних кульок. Із першої урни в другу поклали одну кульку, потім із другої навмання взяли одну. Знайти ймовірність того, що взята кулька буде чорною.

3. Число вантажних автомашин, що проїжджають по трасі з бензоколонкою відноситься до числа легкових машин як 3:2. Імовірність заправки вантажної машини 0,1; легкової 0,2. Машина заправляється. Яка ймовірність того, що це вантажна машина.

4. Всередину круга з радіусом r незалежно одна від одної поставлено 2 точки. Знайти ймовірність того, що обидві точки попадуть всередину вписаного в цей круг квадрата.

5. В партії з 50 деталей 5 нестандартних. Визначити ймовірність того, що серед шести взятих деталей є дві нестандартні.

6. Ймовірність помилки в одному вимірювані 0,4. Проведено три незалежних вимірювання. Яка ймовірність того, що тільки в одному із них буде помилка.

7. Два стрільці стріляють по мішені ймовірність влучення при одному пострілі для першого 0,7; для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один стрілець.

8. Робітник обслуговує три станки, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того що протягом години не потребує уваги робітника перший станок дорівнює 0,9; другий – 0,8; третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом години хоча б один із станків потребує уваги робітника.

9. Монету кидають 5 раз. Знайти ймовірність того, що герб випаде:

а) менше ніж 2 рази

б) не менше 2-х разів.

10. В ящику є 10 однакових кубиків з номерами від 1 до 10. Навмання беруть по 1 кубику три кубики. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кубики з номерами 1, 2, 3 якщо кубики беруть:

а) без повернення

б) з поверненням.

11. Секретний замок на загальній осі має 4 диски, кожен з яких розділений на 5 секторів. Замок відкривається тільки тоді, коли диски встановлені так, що цифри дисків утворюють певне чотиризначне число. Найти ймовірність того, що при довільній установці дисків замок можна буде відкрити.

12. Станок-автомат штампує деталі. Ймовірність, того що деталь бракована 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей рівно 4 браковані.

13. При наборі телефонного номера абонент забув три останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи, що вони різні. Яка ймовірність того, що номер набрано правильно.

14. Прилад може працювати в трьох режимах:1) нормальному, 2) форсованому, 3) недогруженому. Нормальний режим спостерігається в 60% роботи приладу, форсований 30% і недогружений – в 10%. Надійність приладу відповідно1) 0,8; 2) 0,5; 3) 0,9. Знайти повну надійність приладу.

15. Скільки потрібно кинути гральних кубиків, щоб з ймовірністю, меншою 0,3, можна стверджувати, що ні на одній із граней, що випали не з'явиться 6 очок?

16. Є три урни, в першій 3 білих і 1чорна кульки; в третій – 3 білі кульки. Навмання беруть 1 кульку. Ця кулька – біла. З якої урни найімовірніше взята кулька.

17. Контрольна робота має 6 завдань. Для заліку потрібно зробити будь-які 4 завдання. Якщо студент виконує тільки 4 завдання, то ймовірність правильного розв'язку будь-якого із завдань буде 0,8. Якщо виконує 5 завдань, то ця ймовірність – 0,7, якщо всі шість завдань, то ймовірність знизиться до 0,6. Які дії студента потрібно визначити найбільш доцільними?

18. На телефонній станції неправильне з'єднання відбувається з ймовірністю 1/200. Знайти ймовірність того, що серед 200 з'єднань відбувається рівно 2 неправильних.

19. Побудувати ряд розподілу та функцію розподілу ВВХ – числа влучень м'ячем в корзину при двох киданнях, якщо ймовірність влучення дорівнює 0,4.

20. Знайти ймовірність того, що сума двох випадково вибраних чисел із проміжку [-1;1] більша за 0, а їх добуток від'ємний.

21. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по одній мішені (по 1 пострілу) ймовірність влучення в мішень для першого стрільця 0,8 для другого 0,4. Після стрільби в мішені помічено 1 пробоїну. Яка ймовірність того, що влучив перший стілець.

22. На АТС йде найпростіший потік викликів з інтенсивністю 0,8 викликів за хвилину. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини: а) не надійде жодного виклику б) надійде рівно 1 виклик в) надійде хоча б 1 виклик.

23. Ймовірність того, що потрібна деталь знаходиться в першому, другому, третьому, четвертому ящиках відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь є: а) не більше ніж в трьох ящиках; б) не менше ніж в двох ящиках.

24. Стрілець, стріляючи з гвинтівки з оптичним прицілом, влучає в мішень з ймовірністю 0,9, без оптичного прицілу – 0,6. Всього є 7 гвинтівок, із них 4 з оптичним прицілом. Знайти ймовірність влучення в мішень із випадково взятої гвинтівки.

25. Два автомати виготовляють однакові деталі, які надходять на загальний конвеєр. Перший автомат виготовляє вдвічі більше деталей ніж другий. Взята з конвеєра деталь – відмінної якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена першим автоматом.

26. Дві людини *A* та *B* домовились зустрітись в певному місці між 17 та 18 годиною. Той що прийшов першим чекає другого протягом 15 хв., після чого йде. Визначити ймовірність зустрічі, якщо час приходу кожного незалежний і рівноможливий протягом вказаної години.

27. Телефонний номер складається з шести цифр. Знайти ймовірність того, що всі цифри різні.

28. На складання механізму надходять деталі з двох автоматів. Перший автомат в середньому дає 1,5% браку, другий – 1%. Знайти ймовірність надходження на складання бракованої деталі, якщо з першого автомата надійшло 2000 деталей, а з другого – 1500.

29. В майстерню для ремонту надійшло 15 телевізорів. Відомо, що шість з них потребують загального регулювання. Майстер бере перші 5 телевізорів. Яка ймовірність того, що два з них потребують загального регулювання.

30. З партії, що складається з 20 радіоприймачів, для перевірки довільно відбирають три приймачі. Партія містить 5 несправних приймачів. Яка ймовірність того, що в число відібраних увійдуть: а) тільки справні приймачі; б) лише несправні приймачі; в) один несправний і два справних приймачі?

Випадкові величини

1. ВВ X задана щільністю $f(x)=\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}$ в інтервалі (3; 5), поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти моду, математичне сподівання, медіану.

2. ДВВ X задана законом розподілу

x	2	4	7
p	0,5	0,2	0,1

Записати функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

3. В шафі є 9 приладів; 5 нових і 4 таких, що були в користуванні. Навмання беруть 4 прилади; ВВ X – число приладів серед взятих. Побудувати ряд розподілу ВВ X. Знайти $M(X)$.

4. ВВ X задана щільністю $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1;1)\\ 0, x\notin(-1;1)\end{cases}$.

Знайти: а) M_o; б) M_e; в) $M(x)$.

5. Задана щільність розподілу ВВ X: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);\\ 0, x\notin\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$

Записати щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $y = \operatorname{tg} X$.

6. Щільність розподілу задана формулою $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Побудувати графік $f(x)$ та знайти ймовірність того, що ВВ X попаде в проміжок (-1;1).

7. ДВВ X має тільки два значення: x_1 та x_2 ($x_1 < x_2$). Знайти закон розподілу ВВ X, якщо $M(X) = 2{,}2$ та $\sigma(X) = 0{,}6$, якщо $p_1 = 0{,}9$.

8. Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію ВВ X, заданої функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{9}x^2, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

9. ВВ X розподілена рівномірно в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Знайти щільність функції $g(y)$ випадкової величини $Y=\sin X$.

10. Розглядається робота трьох незалежних технічних пристроїв (ТП); ймовірність нормальної роботи першого ТП – 0,2; другого – 0,4; третього – 0,5. ВВ X – число працюючих ТП. Побудувати ряд та многокутник розподілу ВВ X.

11. НВВ X має щільність $f(x)=\dfrac{\sin x}{2}$ при $x\in(0;\pi)$, $f(x)=0$ поза цим проміжком. Побудувати графік $f(x)$. Знайти $M(X)$, M_o, M_e.

12. Дана щільність розподілу НВВ X

$$f(x)=\begin{cases}3\sin 3x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right);\\ 0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right].\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

13. Завод виготовляє кульки для підшипників, номінальний діаметр яких 10 мм, а фактичний – ВВ, розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням a = 10 мм і σ = 0,4 мм. При контролі бракуються всі кульки, що не проходять через отвір з діаметром d_1 = 10,7 мм і всі що проходять через отвір з d_2 = 9,3 мм. Скільки відсотків кульок буде забраковано.

14. Матриця розподілу системи ВВ (X, Y) має вигляд:

x_i, y_i	0	1	2
0	0,0324	0,1512	0,1764
1	0,432	0,2016	0,2352
2	0,0144	0,0672	0,0784

Записати ряди розподілу ВВ X та ВВ Y. Побудувати їх многокутники розподілу. Обчислити $M(x)$; $\sigma(y)$; $M(y)$; $\sigma(x)$.

15. ДВВ X має тільки два можливих значення: x_1 та x_2 ($x_2 > x_1$). Ймовірність того, що X прийме значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу X, якщо $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$.

16. Побудувати полігон відносних частот вибірки, заданої статистичним рядом:

z_i	1	4	5	7
m_i	20	10	14	6

Обчислити незсувну дисперсію.

17. Знайти математичне сподівання та дисперсію ВВ X, заданої законом розподілу

x	1	2	5
p	0,3	0,35	0,4

18. ДВВ X задана законом розподілу

x	-3	1	4
p	0,2	0,5	0,7

Записати функцію розподілу $F(X)$ та побудувати її графік.

19. Скласти таблицю розподілу ймовірностей числа очок, що випадають при киданні грального кубика. Побудувати многокутник розподілу. Знайти $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$.

20. ВВ X має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;\pi]; \\ \frac{1}{2}\sin x, & x \in (0;\pi]. \end{cases}$$

Записати функцію розподілу $F(x)$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування ВВ X прийме значення з інтервалу $(0; \pi/4)$.

21. Знайти математичне сподівання та дисперсію НВВ X заданої функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

22. Вибірка партії електроламп має об'єм 100 ламп. В середньому лампа із вибірки горить 1000 годин. Знайти з надійністю 0,95 надійний (гарантійний) інтервал горіння лампи всієї партії, якщо середнє квадратичне відхилення часу горіння лампи $\sigma = 40$ годин.

23. НВВ X задана щільністю розподілу $f(x) = a\cos x$, для $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. $f(x) = 0$, поза цим проміжком. Знайти а) коефіцієнт a; б) побудувати криву розподілу; в) знайти та побудувати функцію розподілу $F(x)$.

24. ВВ X задана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} c(x^2 + 2x), & x \in (0;1); \\ 0, & x \notin (0;1). \end{cases}$

Знайти: а) параметр c, б) $M(X)$.

25. Надійність деякого приладу – ВВ X розподілена за нормальним законом, з гарантією 15 років та середнім квадратичним відхиленням 3 роки. Визначити надійність приладу за час від 10 до 20 років.

26. Мисливець, що має 5 патронів, стріляє в ціль до першого влучення (або доки не витратить усі патрони). Знайти математичне сподівання та дисперсію числа витрачених патронів. Побудувати графік функції розподілу цієї випадкової величини, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,4.

27. Два стрільці стріляють по одній мішені, роблячи незалежно один від одного по два постріли. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює 0,4, а для другого – 0,5. Нехай X – кількість влучень першим стрільцем в мішень, Y – кількість влучень другим стрільцем. Побудувати ряд розподілу випадкової величини $Z = X - Y$ та знайти її характеристики $M(z)$ та $D(z)$.

28. Робітник обслуговує 4 станки. Ймовірність того, що протягом години станок не потребує уваги робітника, дорівнює для першого станка – 0,7, для другого – 0,75, для третього – 0,8, для четвертого – 0,9. Побудувати ряд розподілу та знайти математичне сподівання та дисперсію числа станків, які не вимагають уваги робітника протягом години.

29. Однотипні прилади випробовуються при перевантажених режимах. Ймовірність для кожного приладу пройти незалежні випробування дорівнює p. Випробування закінчується після поломки першого приладу. Випадкова величина X – кількість проведених випробувань. Побудувати ряд розподілу цієї випадкової величини та знайти її характеристики – математичне сподівання та дисперсію.

30. Проводиться 4 незалежних дослідження, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина X – число появи події A в чотирьох дослідах. Побудувати ряд та функцію розподілу випадкової величини X. Знайти її математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Література

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей.– М.: Наука, 1975. – 320 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 400с.

5. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1982. – 166 с.

6. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1971. – 324 с.

Додаток А

Таблиця А1 – Значення функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Цілі та десяті частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,398	0,3977	0,3973
0,1	0,397	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3818
0,2	0,391	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,379	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,341	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,323	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,292
0,8	0,2897	0,2874	0,285	0,2827	0,2803	0,278	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,242	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,12	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127

Продовження таблиці А1

Цілі та десяті частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,104	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,094	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,079	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,062	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,054	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,044	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,031	0,0303	0,0297	0,029
2,3	0,0283	0,0277	0,027	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,018
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,011	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,006	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,005	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,003	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,002	0,002	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,001	0,001	0,001	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006

Продовження таблиці А1

Цілі та десяті частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,2	0,000016									
5,0	0,0000015									

Додаток Б

Таблиця Б1 – Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2888	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	03686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4134	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441

Продовження таблиці Б1

x	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,49794	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,49824	0,4983	0,49835	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,4986
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49881	0,49886	0,49889	0,49893	0,49897	0,49900
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,6	0,49984	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988
3,8	0,49992	0,49993	0,49993	0,49993	0,49993	0,49941	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995
4,0	0,49996	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997

Додаток В

Таблиця В1 – Значення функції $P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0015	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,003	0,005	0,0077	0,0111	0,0153
5	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,002	0,0031
6	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0001

Продовження таблиці В1

m	λ								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,224	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,005	0,0023
3	0,1805	0,224	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,015	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,012	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,149	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,149	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0902	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,071	0,0993	0,1186	0,1251
11	0	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,097	0,1137
12	0	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948

Продовження таблиці В1

m	λ								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	0	0	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0	0	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0	0	0	0,0002	0,0009	0,0033	0,009	0,0194	0,0347
16	0	0	0	0	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0	0	0	0	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0	0	0	0	0	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0	0	0	0	0	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0	0	0	0	0	0	0,0002	0,0006	0,0019
21	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0003	0,0009
22	0	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0004
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0002
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0001
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Додаток Г

Таблиця Г1 – Квантилі розподілу Стьюдента

	0,75	0,875	0,95	0,975	0,99	0,995
1	1,00	2,41	6,31	12,7	31,82	63,7
2	0,816	1,60	2,92	4,30	6,97	9,92
3	0,765	1,42	2,35	3,18	4,54	5,84
4	0,741	1,34	2,13	2,78	3,75	4,60
5	0,727	1,30	2,01	2,57	3,37	4,03
6	0,718	1,27	1,94	2,45	3,14	3,71
7	0,711	1,25	1,89	2,36	3,00	3,50
8	0,706	1,24	1,86	2,31	2,90	3,36
9	0,703	1,23	1,83	2,26	2,82	3,25
10	0,700	1,22√	1,81	2,23	2,76	3,17
11	0,697	1,21	1,80	2,20	2,72	3,11
12	0,695	1,21	1,78	2,18	2,68	3,05
13	0,694	1,20	1,77	2,16	2,65	3,01
14	0,692	1,20	1,76	2,14	2,62	2,98
15	0,691	1,20	1,75	2,13	2,60	2,95
16	0,690	1,19	1,75	2,12	2,58	2,92
17	0,689	1,19	1,74	2,11	2,57	2,90
18	0,688	1,19	1,73	2,10	2,55	2,88
19	0,688	1,19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	0,687	1,18	1,73	2,09	2,53	2,85
25	0,684	1,18	1,71	2,06	2,49	2,79
30	0,683	1,17	1,70	2,04	2,46	2,75
40	0,681	1,17	1,68	2,02	2,42	2,70
60	0,679	1,16	1,67	2,00	2,39	2,66
∞	0,674	1,15	1,64	1,96	2,33	2,58

Додаток Д

Таблиця Д1 – Значення ймовірностей P для критерію χ^2

χ^2	P									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982	0,9994	0,9998
2	0,1574	0,3679	0,5724	0,7358	0,8491	0,9197	0,9598	0,981	0,9915	0,9963
3	0,0833	0,2231	0,3916	0,5578	0,7	0,8087	0,885	0,9344	0,9643	0,9814
4	0,0455	0,1353	0,2615	0,406	0,5494	0,6767	0,7798	0,8571	0,9114	0,9473
5	0,0254	0,0821	0,1718	0,2873	0,4159	0,5438	0,66	0,7576	0,8343	0,8912
6	0,0113	0,0498	0,1116	0,1991	0,3062	0,4232	0,5398	0,6472	0,7352	0,8153
7	0,0081	0,0302	0,1719	0,1359	0,2206	0,3208	0,4289	0,5368	0,6348	0,7254
8	0,0047	0,0183	0,046	0,0916	0,1562	0,2331	0,3326	0,4335	0,5362	0,6288
9	0,0027	0,0111	0,0293	0,0611	0,1091	0,1736	0,2527	0,3423	0,4373	0,5321
10	0,0016	0,0067	0,0186	0,0404	0,0752	0,1247	0,1886	0,265	0,3565	0,4405
11	0,0009	0,0041	0,0117	0,0266	0,0514	0,0884	0,1386	0,2017	0,2027	0,3575
12	0,0005	0,0025	0,0074	0,0174	0,0348	0,052	0,1006	0,1512	0,2153	0,2851
13	0,0003	0,0015	0,0046	0,0113	0,0234	0,043	0,0721	0,1119	0,1626	0,2237
14	0,0002	0,0009	0,0029	0,0073	0,0156	0,0296	0,0512	0,0818	0,1223	0,173
15	0,0001	0,0006	0,0013	0,0047	0,0104	0,0203	0,036	0,0591	0,0909	0,1321
16	0,0001	0,0003	0,0011	0,003	0,0068	0,0138	0,0251	0,0424	0,0669	0,0996
17	0	0,0002	0,0007	0,0019	0,0045	0,0093	0,0174	0,0301	0,0487	0,0744

Продовження таблиці Д1

χ^2	P									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	0	0,0001	0,0004	0,0012	0,0029	0,0062	0,012	0,0212	0,0352	0,055
19	0	0,0001	0,0003	0,0008	0,0019	0,0042	0,0082	0,0149	0,0252	0,0403
20	0	0	0,0002	0,0005	0,0013	0,0028	0,0056	0,0103	0,0179	0,0293
21	0	0	0,0001	0,0003	0,0008	0,0018	0,0038	0,0071	0,0126	0,0211
22	0	0	0,0001	0,0002	0,0005	0,0012	0,0025	0,0049	0,0089	0,0151
23	0	0	0	0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0034	0,0062	0,0107
24	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0023	0,0043	0,0076
25	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,003	0,0053
26	0	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0005	0,001	0,002	0,0037
27	0	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0003	0,0007	0,0014	0,0026
28	0	0	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0005	0,001	0,0013
29	0	0	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0003	0,0006	0,0012
30	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0001	0,0009

Навчальне видання

Галина Григорівна Кашканова
Віра Андріївна Петрук

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 4

Збірник завдань

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор С.А. Малішевська

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 27.01.04 Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7x42 ¼ Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 3.69
Тираж 90 прим. .
Зам. № 2004-14

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ