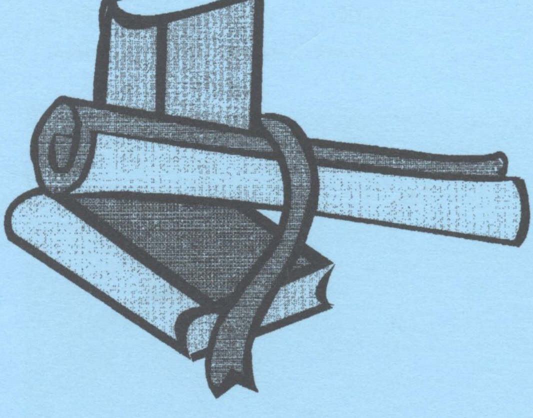
Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

Г.Г. Кашканова, В.А. Петрук

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 3



Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

Г.Г. Кашканова, В.А. Петрук

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 3

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 10 від 31 травня 2001р.

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 51077
К 31

Рецензенти:

А.М. Пстух, доктор технічних наук, професор
В.Л. Карпенко, кандидат фізико-математичних наук, професор
Д.А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Кашканова Г.Г., Петрук В.А.
К31 **Збірник завдань з вищої математики Частина 3**. Навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей. – Вінниця: ВДТУ, 2002 – 99 с.

В даному навчальному посібнику подані основні теореми та формули, які використовують при розв'язуванні завдань з таких тем, як ряди, теорія функції комплексної змінної, операційне числення.

Застосування формул та теорем розглядаються на прикладах. В кінці кожної теми подано дидактичний матеріал, який можна використати для розрахунково-графічних завдань та самостійних робіт.

Розрахований на студентів технічних вузів усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51077

Зміст

1 Ряди

1.1 Числові ряди

1.1.1 Основні поняття

Ряди в математичному аналізі є основним засобом дослідження функцій. Розкладання в степеневі ряди широко використовують в наближених обчисленнях (для обчислення значень функції, визначених інтегралів, розв'язків диференціальних рівнянь). В математиці, фізиці, електротехніці, важливу роль відіграють тригонометричні ряди Фур'є.

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $U_1, U_2, \ldots , U_n, \ldots$

Вираз
$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \qquad (1)$$

називають <u>числовим рядом</u>, а числа $U_1, U_2, \ldots , U_n$, відповідно 1-м; 2-м; … n-м <u>членами ряду</u>.

Закон утворення членів ряду задають n-м членом. Знаючи формулу n-го члена можна знайти будь-який член ряду.

Наприклад, якщо $U_n = \dfrac{2^n}{n^2+1}$,

то $U_1 = 1$; $U_2 = \dfrac{4}{5}$; $U_3 = \dfrac{8}{10}$; $U_4 = \dfrac{16}{17}$; $U_5 = \dfrac{32}{26}$, …

Означення. Суму скінченного числа "n" перших членів ряду називають n-ю частинною сумою ряду $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

Розглянемо частинні суми: $S_1 = U_1$; $S_2 = U_1 + U_2$; $S_3 = U_1 + U_2 + U_3$; … , $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. Якщо існує кінцева границя (2) то її називають <u>сумою ряду</u> (1), а ряд (1) - <u>збіжним.</u> Суму ряду записують

$$S = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

Якщо границя (2) не існує (наприклад $S_n \to \infty$, $n \to \infty$), то говорять, що ряд (1) <u>розбіжний</u> і суми не має.

1.1.2 Необхідна ознака збіжності ряду

Якщо ряд збіжний, то його n-й член прямує до нуля при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Наслідок: Якщо n-й член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$ то ряд розбіжний.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+2}$

Розв'язування. Використаємо необхідну ознаку збіжності:

$U_n = \frac{n}{3n+2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3} \neq 0$ - ряд розбіжний.

Дана ознака є тільки необхідною, тобто із того, що $U_n \to 0$ ще не випливає, що ряд збіжний (може бути і розбіжний). Прикладом є гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, хоч і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.1.3 Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Ознака порівняння

Нехай дано 2 ряди з невід'ємними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ (3)

та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \vartheta_n$ (4)

а) *Порівняльна ознака в формі нерівностей*:

якщо кожен член ряду (3) не більший за відповідний член ряду (4): $U_n \le \vartheta_n$ $(n = 1,2,...)$ то із збіжності ряду (4) (більшого) випливає збіжність ряду (3) (меншого) і із розбіжності ряду (3) випливає розбіжність ряду (4).

б) *Порівняльна ознака через границю*:

якщо існує скінчена та відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{\vartheta} = k$, то ряди (3) та (4) або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$ порівняємо з геометричною прогресією $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $q = \frac{1}{3} < 1$ збіжним рядом: $U_n = \frac{1}{3^n + 2} < \frac{1}{3^n} = \vartheta_n$, оскільки нерівність виконана і більший ряд збіжний, то і менший (U_n) збіжний.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ порівняємо з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (розбіжним): $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} = \vartheta_n$ - нерівність виконана і менший ряд розбіжний, тому і даний ряд (більший) розбіжний.

Ознака Д'Аламбера

Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$ існує границя $\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$, то даний ряд збігається якщо $l < 1$, розбігається якщо $l > 1$.

Якщо $l = 1$ відповіді щодо збіжності теорема не дає. Необхідно застосувати іншу ознаку.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

Розв'язування:

а) $U_n = \frac{2^n}{n^3}$ $U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}$ $\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1} n^3}{(n+1)^3 \cdot 2^n} = \lim 2 = 2 > 1$

- розбіжний

б) $U_n = \frac{5^n}{n!}$ $U_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$; $\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{5 \cdot 5^n \cdot n!}{n! (n+1) \cdot 5^n} = 0 < 1$ - збіжний.

Ознаки Коші

Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду з додатними членами $U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}$, то при $l<1$ ряд збігається; $l>1$ - розбігається.

Якщо $l=1$ теорема відповіді не дає, потрібно застосувати іншу ознаку.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Розв'язування.

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\ell>1$ - розбіжний;

Інтегральна ознака Коші

Якщо функція $f(x)$ при $x\geq 1$ неперервна, додатна і спадна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(n=1,2,\ldots)$, де $U_n=f(n)$ та інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ збіжний або розбіжний одночасно.

Приклад 5. Дослідити на збіжність: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Розв'язування.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ ця функція монотонно спадає на $[2;+\infty]$, неперервна на цьому проміжку та $f(n)=u_n$

$$\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big|_2^{\infty}=\infty$$

Інтеграл розбіжний. Згідно з інтегральною ознакою ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ розбіжний.

1.1.4 Ряди Лейбніца

Всі достатні ознаки ми розглядали відносно рядів з додатними членами.

Розглянемо знакозмінні ряди, для яких спостерігається чергування знаків, тобто ряди виду:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n+1} U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n \tag{5}$$

де $U_n > 0$ при $n = 1,2,\ldots$.(які називають рядами Лейбніца).

Такі ряди досліджують на збіжність за теоремою **Лейбніца:**

Якщо в знакозмінному ряді $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ $(U_n > 0)$ члени такі, що:

1) $U_1 > U_2 > \ldots > U_n > \ldots$ тобто члени монотонно спадають і

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$,

то ряд (5) збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена.

Приклад 6.

Дослідити на збіжність ряд $1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$ та знайти наближено (до 0.01) суму цього ряду.

Розв'язування.

а) Дослідимо на збіжність. Для цього перевіримо умови теореми Лейбніца:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{1}{2^3} > \dfrac{1}{4^3} > \ldots > \dfrac{1}{(2n)^3} > \ldots \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n)^3} = 0 \end{array}\right\} \text{ - ряд збіжний.}$$

б) Для того, щоб знайти суму ряду до 0.01, потрібно взяти стільки членів ряду, щоб його наступний член за модулем був менший 0.01.

$\frac{1}{2^3} > 0.01$; $\frac{1}{4^4} = \frac{1}{64} > 0.01$; $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} < 0.01$; $S \approx 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} \approx 0.89$.

Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

Означення. Знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним, якщо відповідний йому знакододатний ряд збіжний.

Для дослідження знакозмінного ряду на абсолютну та умовну збіжність зручно використовувати такий алгоритм:

1. Записати відповідний знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}U_n$.
2. Дослідити $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ за ознаками знакододатних рядів.
3. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ - збіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ - збіжний абсолютно.

   Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ - розбіжний, то перейти до 4 пункту.
4. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ на збіжність за теоремою Лейбніца.

Якщо її умова виконується – ряд збіжний умовно, якщо ні – розбіжний.

Приклад 7.

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Складемо знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ за ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – маємо:

$\lim\frac{U_n}{\vartheta_n}=\lim\frac{n^2}{n^2+n}=1$. Оскільки знакододатний ряд збіжний, то знакозмінний ряд збіжний абсолютно.

1.2 Степеневі ряди

1.2.1 Основні поняття

Степеневі ряди відносяться до найважливіших класів функціональних рядів.

Означення. Степеневим рядом називають функціональний ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad , \tag{6}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – сталі числа, коефіцієнти ряду.

Областю збіжності степеневого ряду завжди є інтервал, що може вироджуватись в точку.

Теорема Абеля: а) якщо степеневий ряд (6) збігається в точці x_0, то він абсолютно збігається при всякому значенні х, для якого $|x| < |x_0|$.

б) якщо ряд розбігається при деякому значенні x_0', то він розбігається при всякому x для якого $|x| > |x_0'|$

Означення. Інтервалом збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ називають такий інтервал $(-R;\, R)$ з центром в початку координат, що для будь-якої точки з цього інтервалу ряд збігається абсолютно, а для точок х, що лежать поза інтервалом, ряд розбігається.

Означення. Степеневим рядом також називають ряд $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$, де $n = \overline{1, \infty}$ a_n - коефіцієнти степеневого ряду. Це степеневий ряд записаний за степенями двочлена $(x - x_0)$. Якщо $x_0 = 0$ отримаємо ряд за степенями x. Даний степеневий ряд збігається в інтервалі $|x - x_0| < R$ і розбігається поза ним $|x - x_0| > R$.

1.2.2 Знаходження інтервалу збіжності

Інтервал $(-R; R)$ - інтервал збіжності степеневого ряду , де R – радіус збіжності, який обчислюють за формулами:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad \text{або} \qquad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Приклад 8. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

а) $a_n=\dfrac{2^n x^n}{2n+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$

Розв'язування.

а) $a_n=\dfrac{2^n}{2n+1}$ $a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{2(n+1)+1}=\dfrac{2\cdot 2^n}{2n+3}$;

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n(2n+3)}{(2n+1)\cdot 2\cdot 2^n}=\dfrac{1}{2}$; центр ряду в точці $X_0=0$, інтервал збіжності (-1/2; 1/2).

Дослідимо на кінцях інтервалу

$x=-\dfrac{1}{2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\sim\left(\dfrac{1}{2}\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ - збіжний умовно.

$x=\dfrac{1}{2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{2n+1}\dfrac{1}{(2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\approx\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ - розбіжний.

Тоді інтервал збіжності $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

б) $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ $R=0$ ряд збіжний в одній точці $x=0$.

Можна знаходити інтервал збіжності використовуючи ознаку Д'Аламбера або Коші.

в) Для знаходження інтервалу збіжності використаємо ознаку Д'Аламбера:

$U_n=\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$, $U_{n+1}=\dfrac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}n}{(n+1)|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збігається якщо $|x|<1$, тому $(-1,\ 1)$ інтервал збіжності ряду.

Приклад 9. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n}$.

Розв'язування.

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{5^n}}}=5$$

центр ряду в т. $X_0=-2$, інтервал збіжності (-7;3).

1.2.3 Ряди Тейлора та Маклорена

Якщо $f(x)$ нескінченно диференційовна в околі точки $x = x_0$, за формулою Тейлора число "n" можна брати як завгодно великим. Припустимо, що в розглядуваному околі залишок $R_n\to 0$ при $n\to\infty$. Якщо перейти в формулі Тейлора до границі при $n\to\infty$ дістанемо праворуч нескінченний ряд, що називають рядом Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\ldots$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то дістанемо ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots .$$

1.2.4 Приклади розкладу функцій в ряди Маклорена-Тейлора

1.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\quad n=0,1,2,\ldots(\infty+\infty).$$

2.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots n=0,1,2\ldots.\qquad(-\infty;+\infty).$$

3.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty; +\infty).$$

4.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!} + \ldots \qquad (-1; +1).$$

5.

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots \quad [-1; 1].$$

6.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad (-1; 1).$$

7.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad [-1; 1].$$

1.2.5 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Елементарні функції розкладають в ряд Маклорена за степенями x. Похибку, яку допускають при заміні функції (суми ряду) многочленом, можна визначити, оцінивши залишковий член ряду, обчисленням значень функцій.

Приклад 10. Знайти наближено sin 1.

Розв'язування.

Запишемо розклад в ряд функцію $\sin x$: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$.

Покладемо x 1, тоді $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$. Якщо відкинути всі члени починаючи з 4-го, то похибка буде за абсолютною величиною менша за $\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}<0.0002$ (за Теоремою Лейбніца). Звідки

$$\sin 1=\sin 57^\circ 18'=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\approx 0.8417 \text{ (з точністю до 0.0002).}$$

1.2.6 Обчислення визначених інтегралів

Інтеграли $\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx,\ \int_a^b \frac{\cos x}{x}dx,\ \int_a^b \frac{dx}{\ln x},\ \int_a^b e^{-x^2}dx,\ \int_a^b \sqrt{1-x^2\sin^2 x}dx$ не беруться в кінцевому вигляді через елементарні функції, тому їх обчислюють за допомогою рядів.

Приклад 11.

Обчислити $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язування.

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ Замінимо x на $-\frac{x^2}{2}$

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}-\frac{x^6}{8\cdot 6}+\ldots$ - проінтегруємо.

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\ldots\right)dx=\left.\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^5}{5\cdot 8}-\frac{x^7}{48\cdot 7}+\ldots\right)\right|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}-\ldots$$

Знайдемо член ряду менший за задану точність

$\frac{1}{3456}=2.8935185\cdot 10^{-4}<0.001$.

Тому всі члени ряду, починаючи з 5-го, відкидаємо:

$$I \approx 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336} \approx 0.855.$$

1.2.7 Розв'язування диференціальних рівнянь

Якщо не вдається проінтегрувати диференціальне рівняння в елементарних функціях, то його розв'язок, що задовольняє деяку початкову умову, шукаємо у вигляді степеневого ряду

$$y=y(a)+\frac{y'(a)}{1!}(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Приклад 12.

Знайти 4 відмінні від 0 члени розкладання диференціального рівняння $y'=x^2+xy+1$, що задовольняє початкову умову: $y(0)=1$.

Розв'язок запишемо у вигляді

$$y=y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots,$$

$y'(0)=0^2+0.1+1=1$ знайдемо $y''=2x+y+xy'$ $y''(0)=1$,

$y'''=2+y'+y'+xy''=2+2y'+xy''$ $y'''(0)=4$.

Тоді $y=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4x^3}{6}+\ldots1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2x^3}{3}+\ldots$.

1.3 Ряди Фур'є

1.3.1 Основні поняття

Періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ можна представити тригонометричним рядом, збіжним в інтервалі $(-\pi;\ \pi)$, тобто

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi\, x+b_n\sin n\pi\, x)$$

де, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$

Коефіцієнти a_0, a_n, b_n обчислені за цими формулами називають коефіцієнтами Фур'є, а тригонометричний ряд з такими коефіцієнтами називають рядом Фур'є.

1.3.2 Ознака розкладу функції в ряд Фур'є

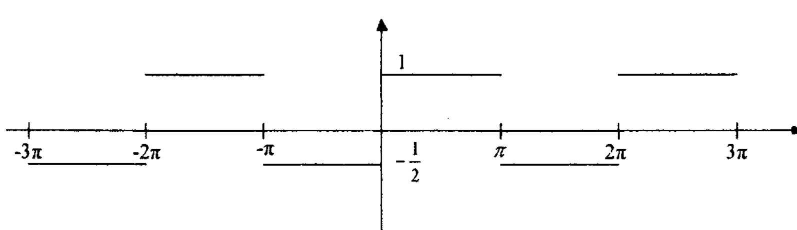
Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ кусочно-монотонна і обмежена на $[-\pi;\pi]$, то ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збіжний в усіх точках інтервалу $[-\pi;\pi]$. Сума отриманого ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках неперервності функції. В точках розриву функції сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції $f(x)$ зліва і справа, тобто, якщо C - точка розриву функції, то $S(x) = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$.

Приклад 13.

Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x \le \pi) \end{cases} \quad T = 2\pi$

Розв'язування.

Побудуємо графік функції, та доповнимо її до періодичної



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2}\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{2n}-\frac{(-1)^n-1}{n}\right)=\frac{1+2-3(-1)^n}{2\pi n}=$$

$$=\frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{2\pi n}$$

$$b\to(-1)^{2k+1}=(-1). \qquad b_{2k+1}=\frac{3}{\pi(2k+1)} \qquad k=0,1,2,\ldots,b_{2k}=0$$

$$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right)$$

в точках розриву $f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{2}=\dfrac{1}{4}$

1.3.3 Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

Якщо в ряд Фур'є розкладають непарну функцію $f(x)$, то коефіцієнти ряду Фур'є обчислюють за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)dx=0}_{\text{непарна}}, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nxdx=0}_{\text{непарна}}, \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nxdx\neq 0}_{\text{парна}},$$

тобто ряд Фур'є непарної функції містить тільки синуси.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

Якщо $f(x)$ - парна функція, то

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx\neq 0,\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\neq 0,\qquad b_n=0,$$

тобто ряд Фур'є парної функції містить тільки косинуси.

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx.$$

1.3.4 Ряди Фур'є для функції з періодом T = 2l.

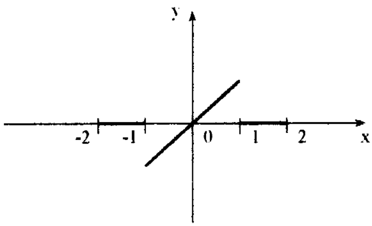
Нехай $f(x)$ - періодична функція з періодом $T=2l$.

Тоді $\quad a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Приклад 14.

Розкласти в ряд Фур'є функцію задану графіком:



Розв'язування.

Період $T=2l=4$.

Запишемо дану функцію $f(x)=x$, (-1;1).

Це непарна функція, тому $a_0=a_n=0$.

Обчислимо

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^{2}\sin\frac{\pi}{2}nx\,dx=$$

$$= -\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi}{2}nx\Bigg|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1\cos\frac{\pi nx}{2}dx = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi}{2}n + \frac{4}{n^2\pi^2}$$

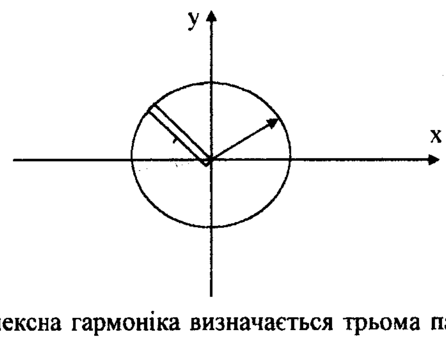
$$b_1 = \frac{4}{\pi^2} \qquad b_2 = \frac{1}{\pi} \qquad b_3 = -\frac{4}{\pi^2 3^2} \qquad b_4 = -\frac{4}{2\pi} \qquad b_5 = \frac{4}{\pi^2 5^2}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{\pi}\sin\pi x - \frac{4}{\pi^2 3^2}\sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\sin 4\pi x + \ldots$$

1.3.5 Ряд Фур'є в комплексній формі

Поняття комплексної гармоніки

Функцію $C\,e^{i\omega t}$, де $C = a - ib, i = \sqrt{-1}$, називають комплексною гармонікою. Ця періодична функція з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ геометрично зображається вектором, який рівномірно обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю обертання ω. Його модуль дорівнює $|C| = \sqrt{a^2 + b^2}$. В початковий момент часу t = 0, цей вектор збігається з вектором який зображує комплексне число C.



Кожна комплексна гармоніка визначається трьома параметрами ω, A та φ, де ω - кутова частота, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $|C| = A$ - амплітуда, $\arg C = \varphi$ - початкова фаза.

Розглядають комплексні гармоніки з від'ємними частотами, тобто функція виду $C \cdot e^{-i\omega t}$, які відрізняються від попередніх лише напрямком обертання вектора.

Поняття тригонометричного ряду

Функціональний ряд виду:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega k}$$

називають тригонометричним рядом в комплексній формі.

Якщо ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$ рівномірно збіжний на відрізку $[0,T]$, де $T = \frac{2\pi}{\omega}$, функції $f(t)$, тоді

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt.$$

Тригонометричний ряд Фур'є

Нехай функція $f(t)$ – періодична з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, інтегрована на відрізку $[0,T]$. Визначимо числа $C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$ та складемо тригонометричний ряд з цими коефіцієнтами, тобто ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$.

Теорема Діріхле: Якщо $f(t)$ періодична функція з періодом T і кусково-диференційовна на відрізку $[0; T]$, тоді

$$\sum_{k=\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2},$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а $C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$ – коефіцієнти Фур'є.

Якщо $f(t)$ неперервна в точці t, то

$$f(t-0)=f(t+0)-f(t).$$

Тоді з теореми Діріхлє одержимо:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t},$$

тобто сума ряду Фур'є збігається з функцією $f(t)$ у всіх точках її неперервності.

Якщо функція $f(t)$ неперіодична й визначена на відрізку нескінченної довжини, то розкласти її в ряд Фур'є неможливо, оскільки для неї неможливо побудувати періодичного продовження. В той же час при розв'язанні багатьох інженерних задач, потрібно знайти амплітудний та фазовий спектри функції. Цю задачу можна розв'язати за допомогою перетворення Фур'є.

Нехай функція $f(t)$ кусково-диференційовна та абсолютно інтегрована на всій числовій осі. Тоді

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{j\omega t}dt,$$

де $C(\omega)=\int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt$, спектральна функція $f(t)$.

Вираз $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{j\omega t}dt$ називають інтегралом Фур'є, в комплексній формі.

Таким чином у всіх точках неперервності $f(t)$ значення інтегралу Фур'є збігається із значенням цієї функції.

Спектральна функція $C(\omega)$ дає можливість побудувати амплітудний та фазовий спектри функції $f(t)$, $|C(\omega)|$ – є амплітудою комплексної гармоніки частоти ω, а аргумент $C(\omega)$ – початкова фаза цієї гармоніки. Сам інтеграл Фур'є є, ніби сума гармонік усяких частот від $-\infty$ до $+\infty$. На відміну від ряду Фур'є амплітудний та фазовий спектри інтеграла Фур'є мають вигляд неперервних ліній.

Приклад 15.

Розкласти функцію $f(t)=t$, $t\in[0;1]$ в ряд Фур'є в комплексній формі. Побудувати її амплітудний та фазовий спектри.

Розв'язання.

$T=1$ – період функції, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi$ - основна частота.

Ряд Фур'є в комплексній формі має вигляд:

$$C_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt \qquad (7)$$

$$f(t)=t \qquad 0<t<T.$$

Тому

$$C_k=\int_0^1 te^{-ik\omega t}dt=\left\{\begin{aligned}&U=t,\, dV=e^{-ik\omega t}dt\\&dU=dt,\, V=-\frac{1}{jk\omega}e^{-ik\omega t}\end{aligned}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{ik\omega}te^{-ik\omega t}\Big|_0^1+\frac{1}{ik\omega}\int_0^1 e^{-ik\omega t}dt=-\frac{1}{ik\omega}e^{-ik\omega t}\Big|+\frac{1}{k^2\omega^2}e^{-ik\omega t}\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{ik\omega}e^{-ik\omega t}+\frac{1}{k^2\omega^2}(e^{-ik\omega t}-1).$$

Підставивши $\omega=2\pi$ та враховуючи, що $e^{-ik2\pi}=1$ отримаємо

$$C_k=-\frac{1}{ik2\pi}=\frac{i}{2k\pi},\quad k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots.$$

Для знаходження C_0 підставимо $k=0$ в (7), отримаємо:

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Розклад $f(t)$ в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{i}{2k\pi}e^{ik\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k\pi}e^{ik\omega t}.$$

Для побудови амплітудного та фазового спектрів врахуємо, що

$$A_k = |C_k|, \quad \varphi_k = \arg C_k;$$

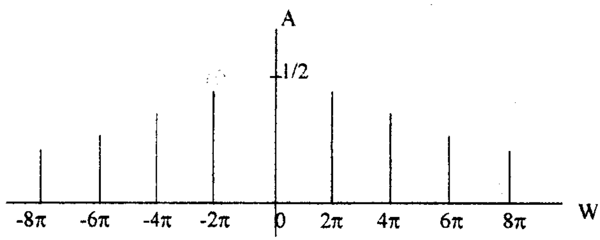
$$A_k = |C_k| = \frac{1}{2k\pi}, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

$$A_0 = |C_0| = \frac{1}{2}; \varphi_k = \arg\frac{i}{2k\pi} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, k > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, k < 0. \end{cases}$$

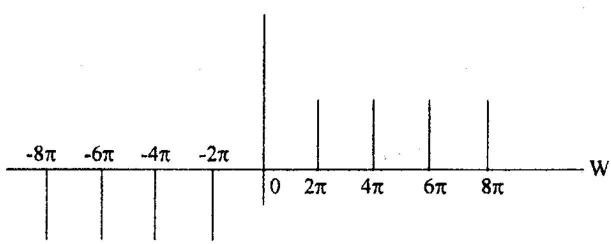
$$\varphi_0 = \arg C_0 = 0$$

Амплітудний та фазовий спектри мають вигляд 1 та 2 відповідно.

1)



2)



2 Завдання для самостійної роботи з теми „Ряди”

2.1 Ряди з додатними членами

1. Довести розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, використовуючи необхідну ознаку збіжності:

1) $a_n = \dfrac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$ 2) $a_n = \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

3) $a_n = \dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$ 4) $a_n = \sqrt{\dfrac{3n+4}{5n+1}}$

5) $a_n = 5^n tg\dfrac{1}{5^{2n}}$ 6) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

7) $a_n = (n^2+2)\ln\dfrac{n^2+1}{n^2}$ 8) $a_n = (n+1)arctg\dfrac{1}{n+2}$

9) $a_n = \dfrac{n^3+1}{n+3}\arcsin\dfrac{1}{n^2+2}$ 10) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$

11) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$ 12) $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$

13) $a_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$ 14) $a_n = \dfrac{n}{1000n+1}$

15) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$ 16) $a_n = \ln\dfrac{2n+1}{3n+1}$

17) $a_n = \dfrac{5n^2+1}{2n^2+4n-1}$ 18) $a_n = \dfrac{2n-5}{4n+8}$

19) $a_n = \dfrac{n^2+2n}{\sqrt{n^4+3n^2+2}}$ 20) $a_n = \dfrac{5n+7}{10n+4}$

21) $a_n = \dfrac{2n^2+5}{3n^2-1}$ 22) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{2n}}$

23) $a_n = \dfrac{6n-1}{3n+5}$ 24) $a_n = \dfrac{7n+3}{9n-2}$

25) $a_n = n^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{n^4}}$

26) $a_n = \frac{2n}{n-1}$

27) $a_n = \frac{2n}{\sqrt{3n^2+2}}$

28) $a_n = \frac{3n+1}{4n-3}$

29) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$

30) $a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{3n^2+2n+3}}$

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, за порівняльною ознакою:

1) $a_n = \frac{n+3}{n^3-2}$

2) $a_n = \frac{n}{n^2+2}$

3) $a_n = \frac{3n^2-2}{n^4+5n}$

4) $a_n = \frac{1}{3n-2}$

5) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$

6) $a_n = \frac{n}{3n^3-1}$

7) $a_n = \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$

8) $a_n = \frac{n}{n^3+3}$

9) $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

10) $a_n = \sin\frac{\pi}{2n^2}$

11) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

12) $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

13) $a_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

14) $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

15) $a_n = \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

16) $a_n = \sin\frac{1}{n^2}$

17) $a_n = \frac{1}{\ln n}$

18) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

19) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

20) $a_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}, n \geq 2$

21) $a_n = tg\frac{\pi}{4n}$

22) $a_n = \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$

23) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

24) $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

25) $a_n = \frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$

26) $a_n = \sqrt{n+1}\, arctg \frac{4}{\sqrt{n^5}}$

27) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

28) $a_n = 2^n \arcsin \frac{\pi}{3^n}$

29) $a_n = \ln\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^n$

30) $a_n = \sqrt{n^3} \ln\left(1 + \frac{2}{n^4}\right)$

3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ за радикальною ознакою Коші :

1) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$, $n \geq 2$

2) $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^n$

3) $a_n = \left(\frac{3n}{n+2}\right)^n$

4) $a_n = 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

5) $a_n = \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}$

6) $a_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$

7) $a_n = 3^{-2n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

8) $a_n = \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$

9) $a_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$

10) $a_n = \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^n$

11) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

12) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

13) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

14) $a_n = \left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$

15) $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

16) $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

17) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)^n}$ 18) $a_n = \dfrac{10^n}{(5n+1)^n}$

19) $a_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{(2n+3)^n}}$ 20) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)^{2n}}$

21) $a_n = \left(\dfrac{n-3}{7n+2}\right)^n$ 22) $a_n = \left(\dfrac{n^2+4}{n^2+3}\right)^{n^2}$

23) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^n$ 24) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{5n+7}{5n+4}\right)^{n^2}$

25) $a_n = \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 26) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^n$

27) $a_n = 5^n\left(\dfrac{n}{5n-4}\right)^{2n}$ 28) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

29) $a_n = \left(\dfrac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$ 30) $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{(5n+4)^n}$

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ за ознакою Д'Аламбера:

1) $a_n = \dfrac{n^{10}}{(n+1)!}$ 2) $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$

3) $a_n = \dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$ 4) $a_n = \dfrac{n!\cdot2^n}{n^n}$

5) $a_n = \dfrac{1\cdot5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2\cdot6\cdot\ldots\cdot(4n-2)}$ 6) $a_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$

7) $a_n = \dfrac{n^n}{n!\cdot(2{,}7)^{n+1}}$ 8) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$

9) $a_n = \dfrac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n(n+1)!}$ 10) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{3^n\cdot n!}$

11) $a_n = \dfrac{n^2}{(2n)!}$ 12) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$

13) $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

14) $a_n = \dfrac{n^3}{e^n}$

15) $a_n = \dfrac{n^2+5}{2^n}$

16) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$

17) $a_n = \dfrac{e^{2n+1}}{n!}$

18) $a_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$

19) $a_n = \dfrac{n^{100}}{2^n}$

20) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n^n}$

21) $a_n = \dfrac{n!}{2^n+1}$

22) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$

23) $a_n = \dfrac{2n-1}{3^n}$

24) $a_n = \dfrac{2^n}{n^4}$

25) $a_n = \dfrac{6^n}{(n+4)2^n}$

26) $a_n = \dfrac{4^n(n+1)!}{n^n}$

27) $a_n = \dfrac{5^n(n+1)!}{n^n}$

28) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 3^n}$

29) $a_n = \dfrac{n^3}{2^{n+3} \cdot n!}$

30) $a_n = \dfrac{5^{n-1}}{(n+2)!}$

5. Дослідити на збіжність, за інтегральною ознакою Коші, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

1) $a_n = \dfrac{1}{4n^2+4n}$

2) $a_n = \dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

3) $a_n = \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

4) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

5) $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$, n >= 2

6) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$

7) $a_n = \dfrac{1}{n^2-4n+5}$

8) $a_n = \dfrac{1}{n^2-n}$

9) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

10) $a_n = \dfrac{\ln n+1}{n\ln^2 n}$

11) $a_n = \frac{5^{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$ 12) $a_n = \frac{e^{-\sqrt{3n-1}}}{\sqrt{3n-1}}$

13) $a_n = \frac{n(1+\ln(n^2-1))}{n^2-1}$ 14) $a_n = \frac{\ln^3 n}{n(\ln^4 n+1)}$

15) $a_n = \frac{1}{n(\ln n+4)^6}$ 16) $a_n = \frac{1}{n(\ln^2 n+1)}$

17) $a_n = \frac{5-\sqrt{\ln n}}{n}$ 18) $a_n = \frac{1}{(n-3)\ln(n-3)}$

19) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 20) $a_n = \frac{1}{n\ln^{\frac{3}{2}} n}$

21) $a_n = ne^{-n}$ 22) $a_n = \frac{e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}}{\sqrt{n}}$

23) $a_n = ne^{-2n^2}$ 24) $a_n = \frac{1}{n^2+3n+4}$

25) $a_n = \frac{e^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n^5}}$ 26) $a_n = \frac{n\ln(n^2+9)}{n^2+9}$

27) $a_n = \frac{1}{n\ln\ln n}$ 28) $a_n = \frac{2n+2}{2n^2+5n+1}$

29) $a_n = \frac{1}{n^2+4n+3}$ 30) $a_n = \frac{1}{n^2+2n}$

2.2 Ряди Лейбніца

З'ясувати, які з рядів $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ збігаються абсолютно, умовно, розбігаються.

1) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ 2) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^3}$

3) $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ 4) $a_n = \frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$

5) $a_n = \frac{n+1}{n}$ 6) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$7)\ a_n=\frac{n^3}{2^n}\qquad 8)\ a_n=\frac{2^{n^2}}{n!}$$

$$9)\ a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\qquad 10)\ a_n=\frac{2^n}{3^n+1}$$

$$11)\ a_n=\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{\sqrt[5]{n+1}}\qquad 12)\ a_n=\frac{1}{n\ln(n+1)}$$

$$13)\ a_n=\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}\qquad 14)\ a_n=\frac{1}{3n-1}$$

$$15)\ a_n=\frac{\ln n}{n}\qquad 16)\ a_n=\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$$

$$17)\ a_n=\frac{1}{n^3+4n}\qquad 18)\ a_n=\frac{1}{(n+1)2^{2n}}$$

$$19)\ a_n=\frac{1}{1+e^{2n}}\qquad 20)\ a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$21)\ a_n=\frac{1}{\sqrt{n^6+n+3}}\qquad 22)\ a_n=\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$$

$$23)\ a_n=arctg\frac{1}{n^2}\qquad 24)\ a_n=n\arcsin\frac{\pi}{n^3}$$

$$25)\ a_n=\frac{1}{2n(3n-1)}\qquad 26)\ a_n=\frac{1}{\sqrt{2n+5}}$$

$$27)\ a_n=\frac{1}{n^2+\sin^2 n}\qquad 28)\ a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$$

$$29)\ a_n=\frac{n^2}{n^3+4}\qquad 30)\ a_n=\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$$

2.3 Степеневі ряди

1.Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ та дослідити на кінцях інтервалу:

$$1.\ U_n=\frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n\qquad 2.\ U_n=\frac{2^n(x+1)^n}{n\ln^2 n}$$

3. $U_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$

4. $U_n = \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$

5. $U_n = \frac{x^n}{2n+1}$

6. $U_n = \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n$

7. $U_n = \frac{n}{3^n (n+1)} x^n$

8. $U_n = \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}$

9. $U_n = \frac{(x+4)^n}{5n-4}$

10. $U_n = \frac{3^n x^n}{n+1}$

11. $U_n = \frac{(x+3)^{2n}}{n(2n-1)}$

12. $U_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(3n-2)n}$

13. $U_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{2^n (5n-3)}$

14. $U_n = \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

15. $U_n = (-1)^{n-1} \frac{nx^n}{3^{n-1}}$

16. $U_n = 3^{n^2} x^{n^2}$

17. $U_n = 3^n (x+1)^n$

18. $U_n = \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$

19. $U_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n$

20. $U_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$

21. $U_n = 2^n x^{n^2}$

22. $U_n = \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n} x^n$

23. $U_n = \frac{(x-1)^n}{(n+4)2^n}$

24. $U_n = \frac{(-1)^{n-1} (x-3)^{2n}}{5n+4}$

25. $U_n = \frac{(2x)^n}{2x+1}$

26. $U_n = \frac{(-1)^{n-1} (5x)^n}{(2n+1)n}$

27. $U_n = \frac{x^n}{n^3 5^n}$

28. $U_n = \frac{(x+5)^n}{2n4^n}$

29. $U_n = \frac{4^n (x+4)^n}{n^2+1}$

30. $U_n = \frac{nx^{2n}}{(n+2)3^{2n}}$

2. Записати перші п’ять членів розкладання функції в ряд Тейлора в околі точки x_0 :

1. $y=\cos x,\quad x_0=\frac{\pi}{2};$

2. $y=\sqrt[3]{x},\quad x_0=1;$

3. $y=\frac{1}{x+2},\quad x_0=-3;$

4. $y=e^x,\quad x_0=1;$

5. $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}},\quad x_0=5;$

6. $y=\sin x,\quad x_0=\frac{\pi}{2};$

7. $y=\ln(x+3),\quad x_0=-2;$

8. $y=2^{x-3},\quad x_0=4;$

9. $y=3^{-5x},\quad x_0=1;$

10. $y=e^{1-6x},\quad x_0=\frac{1}{6};$

11. $y=\sin^2(3x+1),\quad x_0=-\frac{1}{3};$

12. $y=\sqrt[3]{(5-x)^2},\quad x_0=4;$

13. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\quad x_0=-\frac{\pi}{4};$

14. $y=\frac{2}{5x+4},\quad x_0=-1;$

15. $y=\frac{2}{x^2-1},\quad x_0=2;$

16. $y=\frac{1}{x^2},\quad x_0=-1;$

17. $y=\sin^2 x,\quad x_0=\frac{\pi}{3};$

18. $y=\ln(x-1),\quad x_0=2;$

19. $y=\frac{1}{2x-1},\quad x_0=-1;$

20. $y=\frac{1}{(x+1)^2},\quad x_0=2;$

21. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}},\quad x_0=-3;$

22. $y=e^{5x+4},\quad x_0=-2;$

23. $y=\cos(5x-4),\quad x_0=\frac{4}{5};$

24. $y=\cos^2(x-4),\quad x_0=4;$

25. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{3x-2}},\quad x_0=1;$

26. $y=e^{2x+8},\quad x_0=-8;$

27. $y=\frac{1}{(5x-1)^3},\quad x_0=-1;$

28. $y=\frac{1}{\sqrt{2x+11}},\quad x_0=-1;$

29. $y=\sqrt[5]{3x+7},\quad x_0=1;$

30. $y=\ln(5x-4),\quad x_0=1;$

3. Розкласти в ряд Маклорена функцію:

1. $y = x\sqrt[3]{27-2x}$

2. $y = \dfrac{7}{12-x-x^2}$

3. $y = \dfrac{\sin^2 x}{5x^2}$

4. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $y = x^2 e^{-5x}$

6. $y = x\ln(1+x)$

7. $y = x\cos x^2$

8. $y = \dfrac{1-\cos x^2}{x}$

9. $y = 2x\cos^2\dfrac{x}{2}$

10. $y = x^3\sqrt{27-2x}$

11. $y = 5xe^{-3x^2}$

12. $y = x\sin 2x$

13. $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

14. $y = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$

15. $y = \dfrac{x}{9+x^2}$

16. $y = x\cos 2x$

17. $y = \dfrac{1}{x^2-4}$

18. $y = x\sqrt{2+x^2}$

19. $y = \dfrac{2x+4}{x^2-1}$

20. $y = x - arctgx^2$

21. $y = \dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$

22. $y = x^2\sin x^2$

23. $y = \dfrac{1-\cos x^3}{x^6}$

24. $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-3x}}$

25. $y = \ln(1-2x)$

26. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

27. $y = xe^{-3x}$

28. $y = \sqrt[5]{1+3x}$

29. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

30. $y = \cos^2 x$

4. Обчислити перші чотири відмінні від нуля члени розв'язку диференціального рівняння:

1. $y' - y = 0$, $y(0) = 1$;
2. $(1 + x^2)y' = 1$ $y(0) = 0$;
3. $y' = \cos x + y^2$, $y(0) = 1$;
4. $y'' - xy' + y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
5. $y' = 2e^y - xy$, $y(0) = 0$;
6. $y'' = -x^2 y' - 2xy + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
7. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 2$;
8. $y'' = y\cos x + x$, $y(0) = 1$;
9. $y' = \cos^2 xy + 1$, $y(0) = 0$;
10. $y' = e^x + y^2$, $y(0) = 0$;
11. $y' = e^x + y$, $y(0) = 4$;
12. $y' = \sin x^2 y + y$, $y(0) = 1$;
13. $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 0$
14. $y' = \cos xy - 5x$, $y(0) = 0$;
15. $y' = x^2 y + e^{5y}$, $y(0) = 0$;
16. $y' = \sin x + y^2$, $y(0) = 1$;
17. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
18. $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
19. $y'' = x^2 y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
20. $y' = y + y^2$, $y(0) = 3$;
21. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 0$;
22. $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$;
23. $y' = e^{x+y} + y$, $y(0) = 0$;
24. $y' = 2e^y + xy$, $y(0) = 0$;
25. $y' = y - 7e^{xy}$, $y(0) = 0$;
26. $y' = e^{\cos x} - y^2$, $y(0) = 0$;
27. $y' = \sin x + \frac{1}{2}y^2$, $y(0) = 1$;
28. $y' = e^{x^2 y} + x$, $y(0) = 0$;
29. $y' = \sin y^2 - x$, $y(0) = 0$;
30. $y' = x^3 + y\sin 5x$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

5. Обчислити з точністю до 0,001:

1. $a)\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx,$

   $б)\cos 1^\circ$

2. $a)\int\limits_{0}^{0,8}x^{10}\sin x dx,$

   $б)\cos 10^\circ$

3. $a)\int\limits_{0}^{0,3}\frac{\ln(1+x)}{x}dx,$

   $б)\ e^{0.37}$

4. $a)\int\limits_{0}^{0,6}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx,$

   $б)\ \cos 36^\circ$

5. $a)\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}dx,$

   $б)\sqrt[3]{250}$

6. $a)\int\limits_{0}^{1}\sin x^2 dx,$

   $б)\ln 1{,}08$

7. $a)\int\limits_{3}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

   $б)\sin 1$

8. $a)\int\limits_{0}^{0.5}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx,$

   $б)\sqrt[3]{68}$

8. $a)\int\limits_{0}^{0.5}\frac{arctgx}{x}dx,$

   $б)\sqrt[3]{130}$

10. $a)\int\limits_{0}^{0.5}\frac{dx}{1+x^4}$

    $б)\ln 1{,}2$

11. $a)\int\limits_{0}^{0,5}e^{-t^2}dt$

    $б)\sin\frac{\pi}{5}$

12. $a)\int\limits_{0}^{0.8}\frac{dx}{1+x^5},$

    $б)e^{0.43}$

13. $a)\int\limits_{0}^{1}\cos x^2 dx,$

    $б)\sin 24^\circ$

14. $a)\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{-x}}{x}dx,$

    $б)\sin 10^\circ$

15. $a)\int_{2}^{4} e^{\frac{1}{x}}dx,$

$б)\cos 9^\circ$

16. $a)\int_{0,1}^{0,3} xe^{-\frac{3x^2}{4}}dx,$

$б)\ln\frac{4}{5}$

17. $a)\int_{0,2}^{0,3}\cos^2 3x dx,$

$б)\sqrt[4]{700}$

18. $a)\int_{0,1}^{0,6}\frac{\sin 2x^3}{x^3}dx,$

$б)e^{0,18}$

19. $a)\int_{0,01}^{0,25}\sqrt{x}e^{-5x^2}dx,$

$б)\sqrt[3]{70}$

20 $a)\int_{0,1}^{0,2}\frac{\ln(1+x^3)}{x}dx,$

$б)\cos 3^\circ$

21. $a)\int_{0}^{0,1}\sin\frac{x^3}{3}dx,$

$б)\sin 18^\circ$

22. $a)\int_{0}^{1}\cos^2 2x dx,$

$б)\sqrt[3]{129}$

23. $a)\int_{0}^{\frac{1}{9}}\sqrt{x}e^{x^2}dx,$

$б)e^{0.33}$

24. $a)\int_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{1-e^{-6x}}{\sqrt{x}}dx,$

$б)\cos 28^\circ$

25. $a)\int_{0}^{\frac{1}{4}}\sqrt[10]{1+x^3}dx,$

$б)\ln 1,4$

26. $a)\int_{0}^{2.5}\frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}dx,$

$б)e^{0.23}$

27. $a)\int_{0}^{\frac{1}{4}}\sqrt[10]{1+x^3}dx,$

$б)\ln 1,4$

28. $a)\int_{0,3}^{0,6}\frac{1-\cos x}{x}dx,$

$б)\ln 1,2$

28. $a)\int_{0,1}^{0,4}\frac{\sin 3x^2}{x}dx,$

$б)\cos 20^\circ$

30 $a)\int_{0}^{1}\cos\sqrt[3]{x^2}dx,$

$б)\sin 12^\circ$

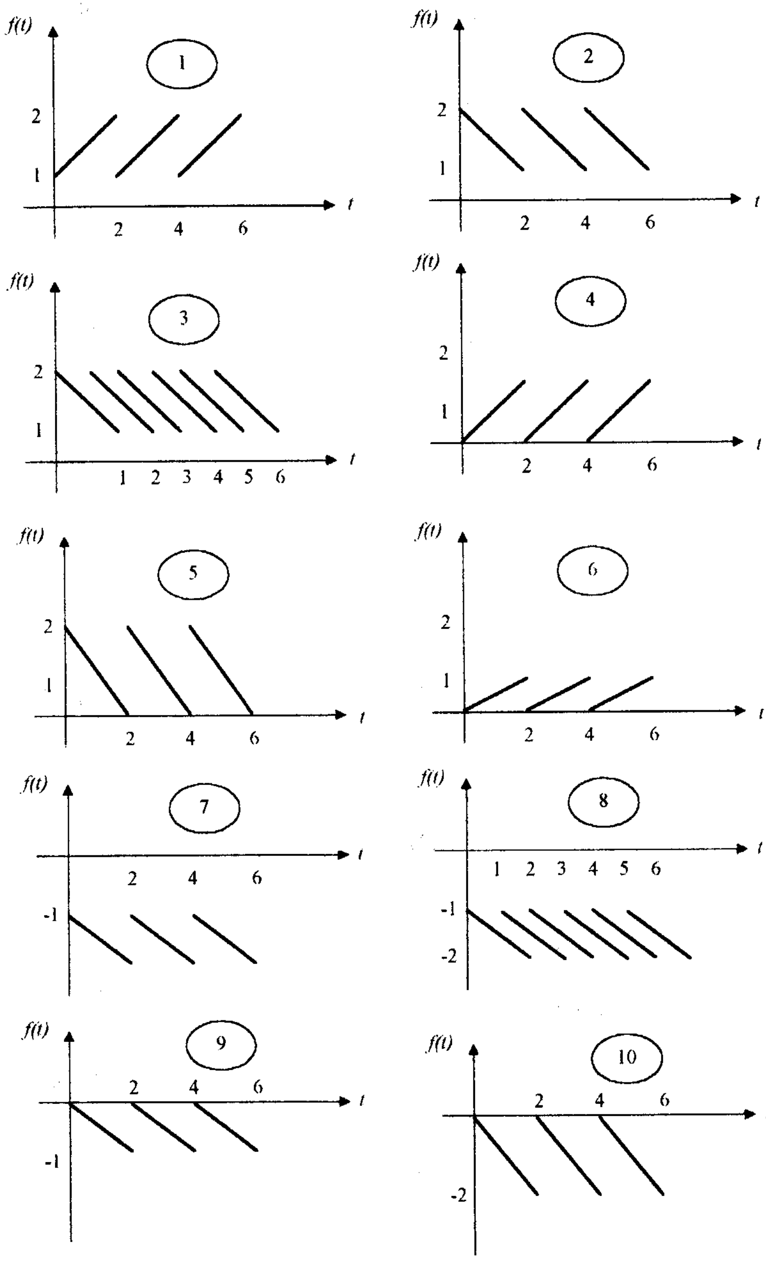
2.4 Ряди Фур'є

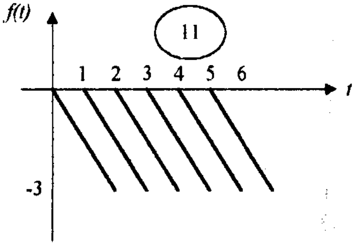
1.Розкласти функцію задану на відрізку $(a; b)$:

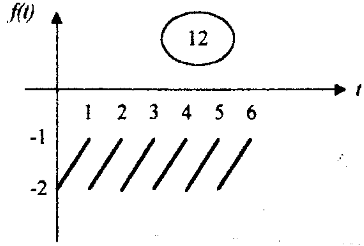
а) в повний ряд Фур'є; б) ряд синусів; в) ряд косинусів

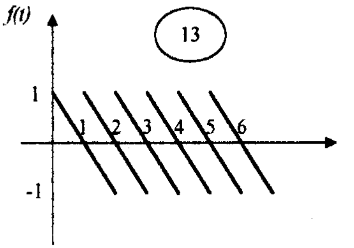
1. $y = x + 1,$	$(0; \pi);$	2. $y = \dfrac{\pi - x}{2},$	$(0; \pi);$
3. $y = 1 + 2x,$	$(0;1);$	4. $y = x^2,$	$(0; \pi);$
5. $y = -2x,$	$(0;2);$	6. $y = \cos 2x,$	$(0; \pi);$
7. $y = \dfrac{x}{2},$	$(0; \pi);$	8. $y = 3x + 2,$	$(0;2);$
9. $y = -2x - 1,$	$(0;2);$	10. $y = -x + 3,$	$(0; \pi);$
11. $y = x + 3,$	$(0; \pi);$	12. $y = \dfrac{x}{3},$	$(0; \pi);$
13. $y = -3x,$	$(0;2);$	14. $y = 2 + x,$	$(0; \pi);$
15. $y = 2x,$	$(0;1);$	16. $y = x^2 + 1,$	$(0;2);$
17. $y = x,$	$(0; \pi);$	18. $y = 1 - 2x,$	$(0;2);$
19. $y = x - 1,$	$(0;1);$	20. $y = x^3,$	$(0; \pi);$
21. $y = 2 - x,$	$(0; \pi);$	22. $y = -2x + 1,$	$(0; \pi);$
23. $y = -x + 1,$	$(0;2);$	24. $y = 2x + 1,$	$(0;1);$
25. $y = \dfrac{x}{3},$	$(0,3);$	26. $y = -x - 3,$	$(0;1);$
27. $y = 3x,$	$(0; \pi);$	28. $y = 1 - 3x,$	$(0;2);$
29. $y = 2x + 1,$	$(0; \pi);$	30. $y = \dfrac{x}{2} - 1,$	$(0;1);$

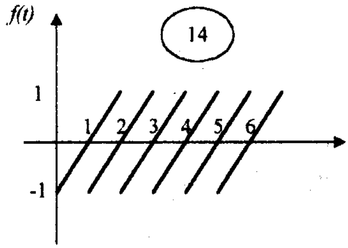
2. Розкласти в ряд Фур'є в комплексній формі періодичну функцію, задану графіком. Побудувати амплітудний та фазовий спектри.

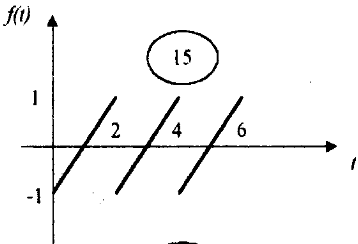


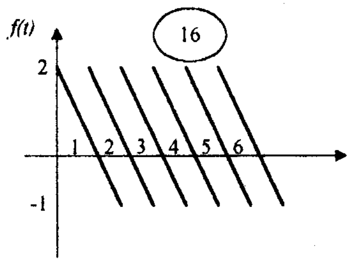

11
f(t)
t
1 2 3 4 5 6
-3

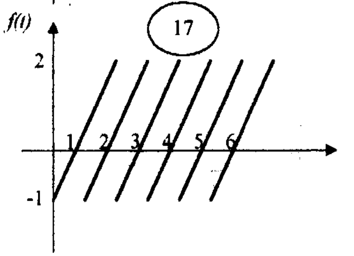

12
f(t)
t
1 2 3 4 5 6
-1
-2

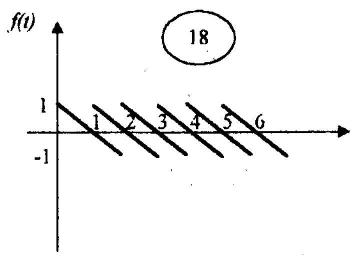

13
f(t)
1
1 2 3 4 5 6
-1

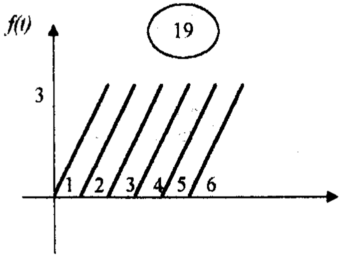

14
f(t)
1
1 2 3 4 5 6
-1

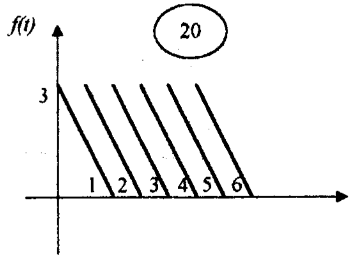

15
f(t)
1
2 4 6
t
-1

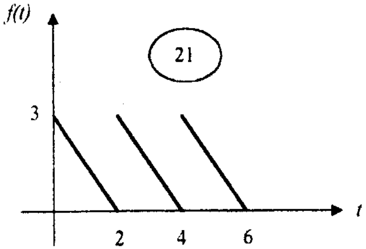

16
f(t)
2
1 2 3 4 5 6
-1

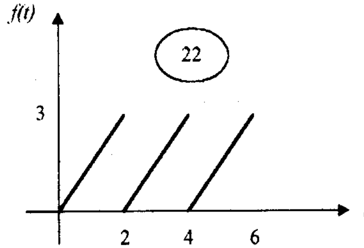

17
f(t)
2
1 2 3 4 5 6
-1

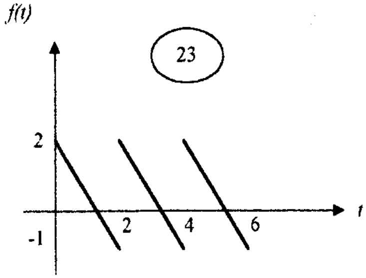

18
f(t)
1
1 2 3 4 5 6
t
-1

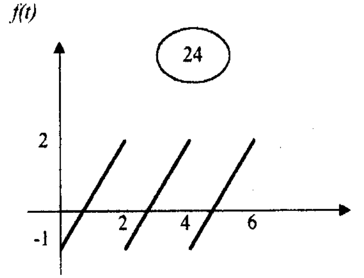

19
f(t)
3
1 2 3 4 5 6

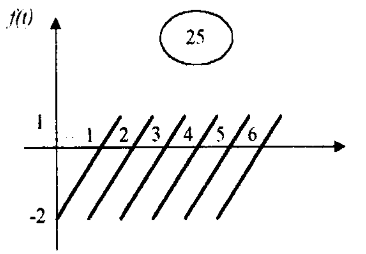

20
f(t)
3
1 2 3 4 5 6

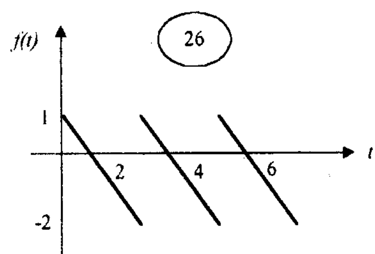

f(t)
21
3
2
4
6
t

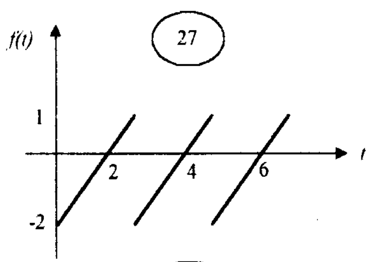

f(t)
22
3
2
4
6
t

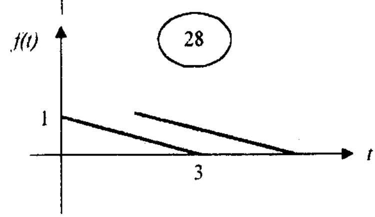

f(t)
23
2
-1
2
4
6
t

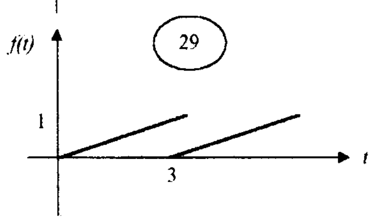

f(t)
24
2
-1
2
4
6
t

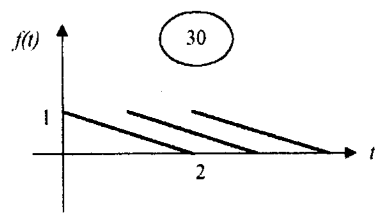

f(t)
25
1
-2
1
2
3
4
5
6


f(t)
26
1
-2
2
4
6
t


f(t)
27
1
-2
2
4
6
t


f(t)
28
1
3
t

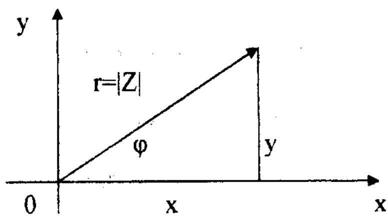

f(t)
29
1
3
t


f(t)
30
1
2
t

3 Теорія функції комплексної змінної

3.1 Комплексні числа

Комплексним числом Z називають вираз $Z = x + iy$, де $x, y \in R$, i – уявна одиниця, тобто $i^2 = -1$. Це алгебраїчна форма запису комплексного числа



Числа x та y – визначають, відповідно, дійсну та уявну частину комплексного числа Z, позначають як $x = ReZ$, $y = ImZ$. Кожному комплексному числу $Z = x + iy$ на комплексній площині відровідає точка $(x; y)$. Число $\overline{Z} = x - iy$ називають спряженим до комплексного числа Z. Кожне комплексне число характеризують модулем $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ та аргументом $\varphi = ArgZ$, $ArgZ$ - визначається неоднозначно, оскільки $\mathrm{Arg} Z = \arg Z + 2\pi k,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\arg Z$ – головне значення $\mathrm{Arg} Z$ $(-\pi < \arg Z \le \pi,\ \ або\ \ 0 \le \arg Z < 2\pi)$. Значення $\arg Z$ шукають в залежності від того, в якій чверті знаходиться точка (x, y), що відповідає комплексному числу Z.

$$\arg Z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & якщо\ Z\ в\ 1\ чверті\ та\ 4\ чверті \\ \pi + arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & якщо\ Z\ в 2\ чверті \\ -\pi + arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & якщо\ Z\ в 3\ чверті \end{cases}$$

Дії додавання, віднімання, множення над комплексними числами в алгебраїчній формі виконують так як над многочленами, а ділення за формулою $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_1\overline{Z}_2}{Z_2\overline{Z}_2}$.

Якщо число Z подано в тригонометричній формі $Z=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то при піднесенні числа Z до степеня n, використовують формулу Муавра

$$Z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Дії над компексними числами в тригонометричній формі:

1. $Z_1\cdot Z_2=|Z_1|\cdot|Z_2|(\cos(\arg Z_1+\arg Z_2)+i\sin(\arg Z_1+\arg Z_2))$.

2. $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}(\cos(\arg Z_1-\arg Z_2)+i\sin(\arg Z_1-\arg Z_2))$.

3. $Z^m=r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)$ (Формула Муавра).

4. Корінь n-го степення із числа Z має n різних значень:

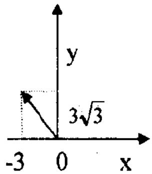
$$\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}),\quad k=0,1,\dots,(n-1)\; або\; k=0,\pm1\pm2\dots$$

Геометрично всі ці значення є вершинами правильного n-кутника, який вписаний в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром в початку координат.

Приклад 1. Піднести комплексне число $Z=-3+3\sqrt{3}i$ до степеня m = 3 і знайти всі корені n-го степеня (n=4).

Розв'язування.

Знайдемо модуль r та аргумент φ комплексного числа $Z:|r|=\sqrt{9+27}=6$ оскільки Z в 2 чверті, то аргумент



$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Таким чином

$$(-3+3\sqrt{3}i)^3 = 6^3(\cos 3\frac{2\pi}{3} + i\sin 3\frac{2\pi}{3}) = 216(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 216.$$

Тепер знайдемо всі корені 4-го степеня з числа Z. При $k = 0$,

$$Z_0 = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{2\pi}{3\cdot 4} + i\sin\frac{2\pi}{3\cdot 4}) = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[4]{6}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2});$$

$$k = 1 \quad Z_1 = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}) = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \sqrt[4]{6}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2});$$

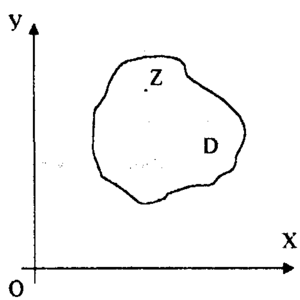
$$k = 2 \quad Z_2 = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}) = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = \sqrt[4]{6}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2});$$

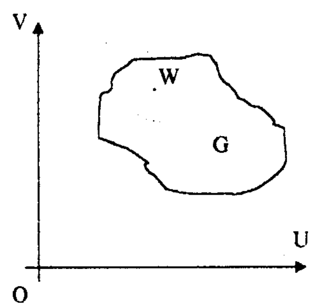
$$k = 3 \quad Z_3 = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}) = \sqrt[4]{6}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \sqrt[4]{6}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$Z = re^{i\varphi}$ - показникова форма комплексного числа. Наприклад, $Z = -3 + 3\sqrt{3}i$ в показниковій формі записують як $Z = 6e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

3.2. Поняття функції комплексної змінної

Нехай задано дві площини комплексних чисел: $Z = x + iy$ та $W = u + iv$. Розглянемо множину точок D в площині Z і множину точок G в площині W.





Областю комплексної площини називають множину точок D, що має такі властивості:

1. Разом із кожною точкою із D цій множині належить достатньо малий круг з центром в цій точці (властивість відкритості).

2. Будь-які дві точки D можна з'єднати ламаною, що складається із точок D (властивість зв'язності).

Якщо кожному числу $Z \in D$ за деяким законом f поставлено у відповідність певне комплексне число $W \in G$, то говорять, що на множині D задана однозначна функція комплексної змінної, яка відображає множину D в множину G. Позначають $W=f(Z)$.

Множину D називають областю визначення функції $f(Z)$. Якщо кожна точка множини G є значенням функції, то говорять, що G – область значень цієї функції або образ множини D за допомогою функції f. В цьому випадку говорять, що функція f відображає D на G.

Якщо кожному $Z \in D$ відповідає декілька значень W, то функцію $W=f(Z)$ називають **багатозначною**.

Функцію $f(Z)$ можна записати в вигляді:

$f(Z)=U(x,y)+iV(x,y) \qquad (x,y) \in D$

де $U(x,y)=Re\, f(Z)$ - дійсна частина $f(Z)$

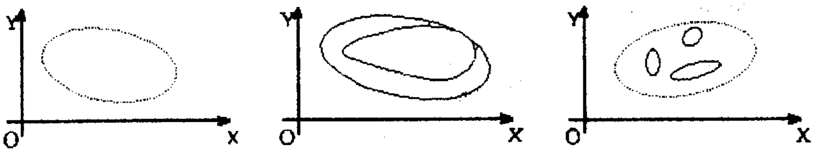
$V(x,y)=Im\, f(Z)$ - уявна частина $f(Z)$

$U(x,y), V(x,y)$ - дійсні функції змінних x, y.

3.3. Основні геометричні поняття (поняття області)

Область називають однозв'язною, якщо будь-яку замкнену криву, що лежить в цій області можна стягнути в точку, не виходячи за межі цієї області.

Якщо межа області складається із декількох зв'язних частин, то область називають багатозв'язною.

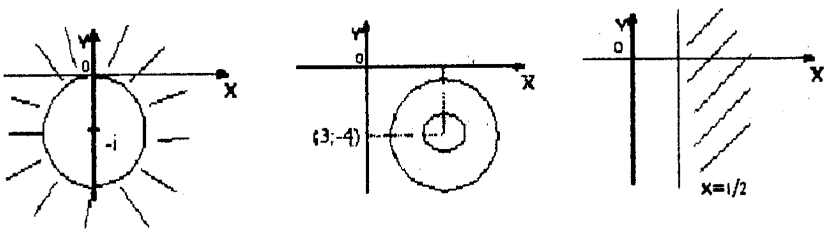


Однозв'язна Двозв'язна Чотиризв'язна

Приклад 2. Побудувати області в комплексній площині.

а) $|z+i|>1$ б) $1<|z-3+4i|<2$ в) $\operatorname{Re} Z \geq \frac{1}{2}$

$Z_0=-i$, $R=1$; $Z_0=3-4i$, $R=2;\ r=1$; $X \geq \frac{1}{2}$



3.4. Основні елементарні функції комплексної змінної

1) *Дробово-раціональна функція*

$$W=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m}$$

частинний випадок - многочлен $W=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$.

2) *Показникову функцію* e^z визначають як суму абсолютно збіжного у всій комплексній площині степеневого ряду:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots+$$

Властивості: а) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ z_1, z_2 – комплексні величини;

б) $e^{z+2k\pi i}=e^z$ $(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ - e^z - періодична функція з періодом $2\pi i$.

3) *Тригонометричні функції* $\sin Z$ та $\cos Z$ визначають степеневими рядами:

$$\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{Z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

які абсолютно збігаються для всіх Z. Функції, періодичні з дійсним періодом 2π, мають дійсні нулі $Z = k\pi$ та $Z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ відповідно, де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для функцій e^z, $\sin Z$, $\cos Z$ мають місце формули Ейлера:

$$e^{iz} = \cos Z + i\sin Z, \qquad e^{-iz} = \cos Z - i\sin Z$$

звідки $$\cos Z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin Z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Функції $\mathrm{tg}Z$ та $\mathrm{ctg}Z$ визначають рівностями:

$$\mathrm{ctg}Z = \frac{\cos Z}{\sin Z} \qquad \mathrm{tg}Z = \frac{\sin Z}{\cos Z}.$$

Для них залишаються справедливими всі формули тригонометрії.

4) *Гіперболічні функції* $\mathrm{sh}z$, $\mathrm{ch}z$, $\mathrm{th}z$, $\mathrm{cth}z$ визначають рівностями:

$$\mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} \qquad \mathrm{cth}z = \frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z}.$$

5) *Тригонометричні* та *гіперболічні* функції зв'язані між собою співвідношеннями:

$$\sin Z = -i\,\mathrm{sh}\,iZ \qquad \mathrm{sh}Z = -i\sin iZ$$

$$\cos Z = \mathrm{ch}\,iZ \qquad \mathrm{ch}Z = \cos iZ$$

$$\mathrm{tg}Z = -i\,\mathrm{th}\,iZ \qquad \mathrm{th}Z = -i\,\mathrm{tg}\,iZ$$

$$\mathrm{ctg}Z = i\,\mathrm{cth}\,iZ \qquad \mathrm{cth}Z = i\,\mathrm{ctg}\,iZ.$$

6) *Логарифмічну функцію* $\mathrm{Ln}\,Z$, де $Z \neq 0$, визначають як функцію,

обернену показниковій, причому

$$\operatorname{Ln} Z = \ln|Z| + i \operatorname{Arg} Z = \ln|Z| + i \arg Z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1; \pm 2, ..).$$

Ця функція є багатозначною. Серед нескінченної множини значень логарифма числа Z виділяють одне значення, що дорівнює $\ln|Z| + i \arg Z$, яке називають головним значенням логарифма і позначають $\ln Z$.

Очевидно, що $\operatorname{Ln} Z = \ln Z + 2k\pi i$, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Справедливі слідуючі співвідношення:

$$\operatorname{Ln}(Z_1 Z_2) = \operatorname{Ln} Z_1 + \operatorname{Ln} Z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \operatorname{Ln} Z_1 - \operatorname{Ln} Z_2.$$

7) *Обернені тригонометричні функції* Arcsin Z, Arccos Z, Arctg Z, Arcctg Z визначають як обернені відповідно до функцій $\sin W$, $\cos W$, $\operatorname{tg} W$, $\operatorname{ctg} W$. Наприклад, якщо $Z = \sin W$, то W називають арксинусом числа Z та позначають $W = \operatorname{Arcsin} Z$. Всі ці функції багатозначні та виражаються через логарифмічні.

$$\operatorname{Arcsin} Z = -i \ln(iZ + \sqrt{1 - Z^2}),$$

$$\operatorname{Arccos} Z = -i \ln(Z + \sqrt{Z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} Z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1 + iZ}{1 - iZ},$$

$$\operatorname{Arcctg} Z = -\frac{i}{2} \ln \frac{Z + i}{Z - i}.$$

Головні значення обернених тригонометричних функцій arcsin$Z$, arccos$Z$, arctg$Z$, arcctg$Z$ отримаємо, якщо взяти головні значення відповідних логарифмічних функцій.

8) *Загальна степенева функція* $W = Z^a$, де $a = \alpha + i\beta$ - комплексне число визначають рівністю $Z^a = e^{a\operatorname{Ln} Z}$ - функція багатозначна, її головне значення $Z^a = e^{a \ln Z}$.

9) *Загальну показникову функцію* $W = a^z$ ($a \neq 0$ - будь-яке комплексне число) визначають рівністю $a^z = e^{z \ln a}$.

Головне значення цієї функції $a^z = e^{z\ln a}$.

Приклад 2. Знайти значення модуля функції $W = \sin Z$ в точці $Z = \pi + i\ln(2 + \sqrt{5})$.

Розв'язування:

$Z = x + iy$, тоді $W = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$

$= \sin x \,\mathrm{ch}\, y - i\,\mathrm{sh}\, y \cos x, \left|\sin Z\right| = \sqrt{\sin^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\, \cos^2 x} =$

$= \sqrt{\sin^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\,(1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$,

якщо $Z = \pi + i\ln(2 + \sqrt{5})$, то

$$\left|\sin(\pi + i\ln(2 + \sqrt{5})\right| = \sqrt{\sin^2 \pi + \mathrm{sh}^2 \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)} = \mathrm{sh}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right) =$$

$$= \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5} - \dfrac{1}{2 + \sqrt{5}}}{2} = 2$$

тобто видно, що тригонометрична функція $\sin Z$ в комплексній області може приймати значення за модулем більші одиниці.

3.5 Диференціювання функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана

Означення. Похідною від функції $f(Z)$ в точці Z називають границю:

$$\lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta Z} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z + \Delta Z) - f(Z)}{\Delta Z} = f'(Z) = \frac{dW}{dZ}$$

коли $\Delta Z \to 0$ будь-яким способом.

Функцію $f(Z)$, що має неперервну похідну в будь-якій точці області D комплексної площини, називають аналітичною функцією на цій області. Основні властивості похідних функцій комплексної змінної аналогічні відповідним властивостям похідних для функцій дійсної змінної.

Для того, щоб функція $f(Z) = U(x,y) + iV(x,y)$ була аналітичною на області D площини Z необхідно і достатньо, щоб частинні похідні *першого порядку функцій U та V були неперервні на D та виконувались умови Коші-Рімана:*

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (x,y)\in D.$$

Приклад 3. Показати, що функція $W=e^{z}$ аналітична на всій комплексній площині.

Розв'язування: Маємо $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

$U(x,y)=e^{x}\cos y$, $V(x,y)=e^{x}\sin y$ - диференційовні в будь-якій точці *(x, y)*. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=e^{x}\cos y, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=e^{x}\cos y, \qquad \frac{\partial V}{\partial x}=e^{x}\sin y.$$

Умови Коші-Рімана виконані, тому функція аналітична.

Для будь-якої аналітичної функції $f(Z)$ похідну можна знайти, використовуючи одну із чотирьох формул:

$$f'(Z)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}-i\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial x}$$

Для прикладу (3) маємо:

$$f'(Z)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y=e^{x}(\cos y+i\sin y)=e^{x+iy}=e^{z}\rightarrow(e^{z})'=e^{z}$$

Означення. Функцію $f(Z)$ називають аналітичною в даній точці $Z\in D$, якщо вона диференційовна як в самій точці Z, так і в деякому її околі.

Використовуючи умови Коші-Рімана, аналітичну функцію можна відновити, якщо відома її дійсна частина $U(x,y)$ або уявна $V(x,y)$.

Приклад 4. Знайти аналітичну функцію $W=f(Z)$ якщо $U(x,y)=2e^{x}\cos y$ та $f(0)=2$.

Розв'язування.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=(2e^x\cos y)'_x=2e^x\cos y,\quad але\quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}\to 2e^x\cos y=\frac{\partial V}{\partial y}$$

$V(x,y)=\int 2e^x\cos y dy=2e^x\sin y+\varphi(x)$ визначимо $\varphi(x)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=(2e^x\sin y+\varphi(x))'_x=2e^x\sin y+\varphi'(x)=-\frac{\partial U}{\partial y}=2e^x\sin y,\text{ тоді}$$

$$2e^x\sin y+\varphi'(x)=2e^x\sin y\to$$

$$\varphi'(x)=0\ \ \varphi(x)=c,\quad \text{де}\quad c-const\to V(x,y)=2e^x\sin y+c$$

$$f(Z)=2e^x\cos y+i(2e^x\sin y+c)=2e^z+ic$$

$$f(0)=2\to f(0)=2\cdot e^0+ic=2+ic=2\to c=0$$

$$f(Z)=2e^z.$$

3.6 Поняття про конформне відображення

Означення. Відображення за допомогою аналітичної функції $W=f(Z)$, яка зберігає зі збереженням напрямку їх відліку і здійснює розтяг в кожній точці, де $f'(Z)\neq 0$, незалежно від напрямку називають конформним.

Коефіцієнт розтягу обчислюють за формулою $r=|f'(Z_0)|$, кут повороту $\varphi=\arg f'(Z_0)$.

Приклад 5. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні $W=Z^2$ в точці $Z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

Розв'язування:

$$W'(Z)=2Z,\ \ W'(Z_0)=2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}.$$

Перейдемо до тригонометричної форми комплексного числа:

$$2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$|f'(z)|_{Z=Z_0}=4\qquad \arg f'(z)|_{Z_0}=\frac{\pi}{4}$$

Коефіцієнт розтягу $r=4$, кут повороту $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

3.7 Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай однозначна функція $f(Z)$ визначена і неперервна в області D, а L – кусково-гладка замкнена (або не замкнена) орієнтована крива $L \subset D$.

Нехай $Z = x + iy$, $f(Z) = U + iV$, $U = U(x,y)$, $V = V(x,y)$ – дійсні функції змінних x та y.

Обчислення інтегралу від функції $f(Z)$ комплексної змінної Z зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів.

$$\int_L f(Z)dZ = \int_L (U + iV)(dx + idy) = \int_L Udx - Vdy + i\int_L Vdx + Udy.$$

Якщо крива L задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, початкова та кінцева точки дуги L відповідають значенням параметра $t = t_0$ та $t = t_L$, то

$$\int_L f(Z)dZ = \int_{t_0}^{t_1} f(Z(t))Z'(t)dt, \quad де\ Z(t) = x(t) + iy(t).$$

Якщо функція $f(Z)$ аналітична в однозв'язній області D, що містить точки Z_0 та Z_1, то має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{Z_0}^{Z_1} f(Z)dZ = \varphi(Z_1) - \varphi(Z_0) = \varphi(Z)\Big|_{Z_0}^{Z_1},$$

де $\varphi(Z)$ – будь-яка первісна для функції $f(Z)$: $\varphi'(Z) = f(Z)$.

Якщо функції $f(Z)$ та $\varphi(Z)$ аналітичні в однозв'язній області D, а Z_0 та Z_1 - довільні точки цієї області, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_{Z_0}^{Z_1} f(Z)\varphi'(Z)dZ = \left[f(Z)\varphi(Z)\right]\Big|_{Z_0}^{Z_1} - \int_{Z_0}^{Z_1} \varphi(Z)f'(Z)dZ.$$

Заміну змінних в інтегралах від функції комплексної змінної виконують аналогічно випадку функції дійсної змінної. Якщо аналітична функція $Z = \varphi(\omega)$ відображає взаємно однозначно контур L_1 в ω- площині на контур L в Z-площині, тоді

$$\int_L f(Z)dZ = \int_{L_1} f(\varphi(\omega))\varphi'(\omega)d\omega.$$

Якщо шлях інтегрування є:

1) напівпрямою, що виходить з т. Z_0, або

2) колом з центром в т. Z_0, то вводять заміну $Z - Z_0 = \rho e^{i\varphi}$.

В випадку 1) $\varphi = const$, ρ - дійсна змінна інтегрування.

2) $\rho = const$, φ - дійсна змінна інтегрування.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \left(Z + 2\overline{Z}\right)dZ$ за такими кривими:

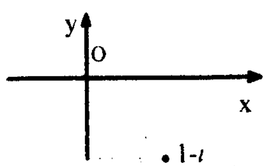
1. L - відрізок прямої від т. 0 до т. $1-i$

2. L - дуга кола $|Z| = 2$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg Z \le \dfrac{\pi}{2}$

3. L - коло $|Z - 1| = 2$.

Розв'язування: $f(Z) = Z + 2\overline{Z} = x + iy + 2(x - iy) = 3x - iy$.

Тоді $I = \int\limits_L \left(Z + 2\overline{Z}\right)dZ = \int\limits_L (3x - iy)(dx + idy) = \int\limits_L 3xdx + ydy + i\int\limits_L (-y)dx + 3xdy$



1. L - пряма, що з'єднує т. 0 з т. $1-i$, має рівняння $y = -x$

$0 \le x \le 1 \to dy = -dx$.

$$I = \int\limits_0^1 3xdx - x(-dx) + i\int\limits_0^1 xdx - 3xdx = 4\int\limits_0^1 xdx + i\int\limits_0^1 -2xdx = 2x^2\Big|_0^1 - ix^2\Big|_0^1 =$$

$= 2 - i.$

2. На колі $|Z| = 2$ введемо параметричне рівняння $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$; $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cdot 2\cos\varphi\cdot(-2\sin\varphi)d\varphi+2\sin\varphi\cdot 2\cos\varphi d\varphi+i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-2\sin\varphi\cdot(-2\sin\varphi)d\varphi+$$

$$+3\cdot 2\cos\varphi\cdot 2\cos\varphi d\varphi=-8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi+i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\sin^2\varphi+12\cos^2\varphi\right)d\varphi=8\pi i.$$

3. На колі $|Z-1|=2$ введем заміну

$$Z-1=2e^{i\varphi}\to Z=1+2e^{i\varphi}\qquad -\pi\le\varphi\le\pi.$$

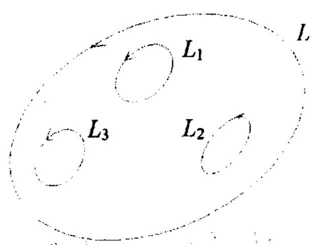
Тому на L $\quad \overline{Z}=1+2e^{-i\varphi} \qquad dZ=2ie^{i\varphi}d\varphi.$

$$\mathrm{I}=\int_{\pi}^{-\pi}\left[1+2e^{i\varphi}+2\left(1+2e^{-i\varphi}\right)\right]\cdot 2ie^{i\varphi}d\varphi=16\pi i.$$

3.8 Теорема та формула Коші

Теорема Коші

Якщо функція $f(Z)$ аналітична на однозв'язній області D, то інтеграл від $f(Z)$ по будь-якому кусково-гладкому замкненому контуру L, що належить D, дорівнює нулю $\int\limits_L f(Z)dZ=0$.



Для багатозв'язної області:

$$\int\limits_L f(Z)dZ=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k}f(Z)dZ$$

Формула Коші

Нехай функція $f(Z)$ аналітична в однозв'язній замкненій області D з кусково-гладкою межею L. Тоді має місце формула Коші:

$$f(Z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(Z)dZ}{Z-Z_0},$$

де Z_0 – будь-яка точка всередині контуру L, та інтегрування здійснюється в додатному напрямі.

Формула має місце і для багатозв'язної області.

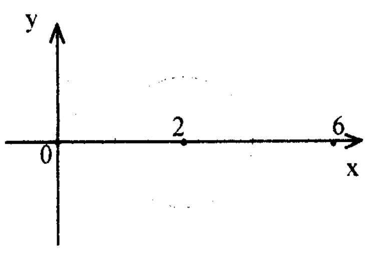
Якщо точка Z_0 лежить всередині L, то інтеграл Коші дорівнює $f(Z_0)$, якщо точка Z_0 лежить поза контуром L, то $\frac{f(Z)}{Z-Z_0}$ – аналітична функція в D, тоді інтеграл Коші дорівнює 0.

Приклад 7. Обчислити

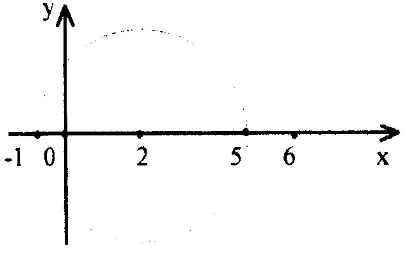
$$I=\int_L \frac{e^{Z^2}}{Z^2-6Z}dZ,\quad 1)\ L:|Z-2|=1,\quad 2)\ L:|Z-2|=3,\quad 3)\ L:|Z-2|=5.$$

Розв"язування:

1) $L:|Z-2|=1$ В цьому колі функція аналітична, тому $I=0$.



2) $L:|Z-2|=3$ - в цьому колі існує т. Z_0=0, в якій знаменник дорівнює нулю.



$$I=\int_L \frac{e^{Z^2}}{Z^2-6Z}dZ=\int_L \frac{\frac{e^{Z^2}}{Z-6}}{Z}dZ$$

Функція $f(Z)=\dfrac{e^{Z^2}}{Z-6}$ є аналітичною в даній області, тоді за формулою

Коші $\displaystyle\int_L \frac{e^{Z^2}}{Z^2-6Z}dZ=2\pi i f(Z_0)=2\pi i\left.\frac{e^{Z^2}}{Z-6}\right|_{Z_0=0}=\frac{2\pi i}{-6}=-\frac{\pi i}{3}$.

3) L: $|Z-2|=5$ - в цьому околі існує дві точки Z=0 та Z=6, в яких знаменник дорівнює нулю. Безпосередньо формулу застосувати не можна.

<u>1-й спосіб.</u> Розкладемо підінтегральну функцію $f(Z)$ на найпростіші дроби:

$$\frac{1}{Z^2-6Z}=\frac{A}{Z}+\frac{B}{Z-6}=\frac{A(Z-6)+BZ}{Z^2-6Z}$$

$$1=A(Z-6)+BZ$$

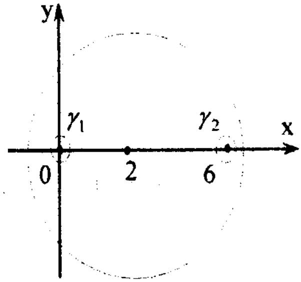
$$Z=0 \quad A=-\frac{1}{6}\ ,\ Z=6 \quad B=\frac{1}{6},$$

тоді $\quad \dfrac{1}{Z^2-6Z}=\dfrac{1}{6(Z-6)}-\dfrac{1}{6Z}$

$$\int_{|Z-2|=5}\frac{e^{Z^2}}{Z^2-6Z}dZ=\frac{1}{6}\int_{|Z-2|=5}\frac{e^{Z^2}dZ}{Z-6}-\frac{1}{6}\int_{|Z-2|=5}\frac{e^{Z^2}dZ}{Z}=\frac{1}{3}\pi i e^{36}-\frac{1}{3}\pi i.$$

<u>2-й спосіб.</u> Побудуємо кола γ_1 та γ_2 з центрами в точках Z=0 та Z=6 достатно малих радіусів, щоб кола не перетинались та первісні лежали в крузі $|Z-2|\le 5$.

В тризв'язній області, обмеженій колами $|Z-2|=5$, γ_1 та γ_2, підінтегральна функція всюди аналітична, тоді



$$\int\limits_{|Z-2|=5} \frac{e^{Z^2}}{Z^2-6Z}dZ = \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{Z^2}dZ}{Z^2-6Z} + \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{Z^2}}{Z^2-6Z} =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{Z^2}}{Z-6}\right|_{Z=0} + 2\pi i \left.\frac{e^{Z^2}}{Z}\right|_{Z=6} = \frac{1}{3}\pi i e^{36} - \frac{1}{3}\pi i .$$

Якщо функція $f(Z)$, що визначається інтегралом Коші, має в кожній точці $Z \in L$ похідні всіх порядків, то для будь-якого натурального n має місце формула:

$$f^{(n)}(Z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(Z)dz}{(Z-Z_0)^{n+1}}$$

Приклад 8. Обчислити $\int\limits_{|Z-1|=1} \frac{\sin \pi Z}{(Z^2-1)^2}dZ$.

Розв`язування:

Функція $\frac{\sin \pi Z}{(Z^2-1)^2}$ аналітична в області $|Z-1|=1$ всюди, крім т. $Z_0 = 1$.

Виділимо функцію $f(Z)$ аналітичну в крузі $|Z-1| \le 1$:

$$\frac{\sin \pi Z}{(Z^2-1)^2} = \frac{\dfrac{\sin \pi Z}{(Z+1)^2}}{(Z-1)^2}. \qquad f(Z) = \frac{\sin \pi Z}{(Z+1)^2} \to n = 1, \text{ тоді}$$

$$I = \int\limits_{|Z-1|=1} \frac{\sin \pi Z}{(Z^2-1)^2}dZ = 2\pi i f'(Z_0).$$

$$f'(Z) = \left(\frac{\sin \pi Z}{(Z+1)^2}\right)' = \frac{\pi \cos \pi Z - (Z+1) - 2\sin \pi Z}{(Z+1)^3},$$

$$f'(1) = \frac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4} \to \text{I} = 2\pi i(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi^2}{2}i .$$

3.9 Ряди Тейлора

Функція $f(Z)$ однозначна та аналітична в т. $Z = Z_0$, розкладається в околі цієї точки в степеневий ряд Тейлора:

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (Z - Z_0)^n$$

коефіцієнти якого $C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(Z)dZ}{(Z-Z_0)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n)}(Z_0)}{n!} \qquad n = 0, 1, \ldots$

де L - довільний контур, орієнтований проти годинникової стрілки, що належить кругу збіжності ряду та містить в середині т. Z_0. Радіус збіжності ряду дорівнює відстані від т. Z_0 до найближчої особливої точки функції $f(Z)$. Формули розкладання основних елементів функцій комплексної змінної аналогічні функціям дійсної змінної. Для багатозначних функцій потрібно до розкладу в ряд додати $2n\pi i$.

Приклад 9. Розкласти в ряд Тейлора за степенями Z функцію $f(Z) = \dfrac{Z}{Z^2 - 2Z - 3}$. Знайти радіус збіжності ряду.

Розв'язання:

1) Розкладемо функцію на найпростіші дроби:

$$f(Z) = \frac{Z}{Z^2 - 2Z - 3} = \frac{A}{Z+1} + \frac{B}{Z-3} = \frac{A(Z-3) + B(Z+1)}{Z^2 - 2Z - 3};$$

$$Z = A(Z-3) + B(Z+1)$$

$$\begin{array}{c|ll} Z = 3 & 3 = 4B & B = \dfrac{3}{4} \\ Z = -1 & -1 = -4A & A = \dfrac{1}{4} \end{array}$$

$$f(Z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+Z} + \frac{3}{4}\frac{1}{Z-3} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+Z} + \frac{3}{4}\frac{1}{(-3)}\frac{1}{1-\frac{Z}{3}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+Z} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{Z}{3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - Z + Z^2 - Z^3 + \ldots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{Z}{3} + \frac{Z^2}{9} + \ldots\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}Z + \frac{8}{9}Z^2 - \frac{28}{27}Z^3 + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{Z}{3} + \frac{2}{3^2}Z^2 - \frac{7}{3^3}Z^3 + \ldots$$

Найближчою особливою точкою до т. Z_0 є т. $Z=-1$. Тому $R=1$.

3.10 Ряди Лорана

Теорема. Нехай $0 \le r < R \le \infty$. Будь-яку аналітичну в кільці $r < |Z - Z_0| < R$ функцію $f(Z)$ однозначно можна представити в ньому збіжним рядом:

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (Z - Z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (Z - Z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(Z - Z_0)^n},$$

де $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|Z-a|=\rho} \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Цей ряд називають рядом Лорана.

Коли говорять, що ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (Z - Z_0)^n$ збігається, розуміють, що збігаються окремо ряди $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (Z - Z_0)^n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(Z - Z_0)^n}$.

Перший ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (Z - Z_0)^n$ в правій частині ряду Лорана збігається в крузі $|Z - Z_0| < R$ до деякої аналітичної в цьому крузі функції $f_1(Z)$. Його називають правильною частиною ряду Лорана.

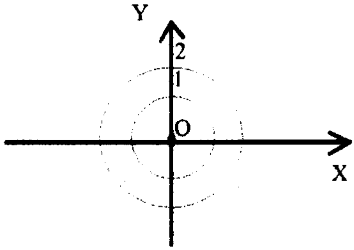
Другий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(Z - Z_0)^n}$ збігається при $|Z - Z_0| > r$, та визначає деяку аналітичну функцію $f_2(Z)$ - головну частина ряду Лорана. Тобто: $f(Z) = f_1(Z) + f_2(Z)$.

На практиці при розкладанні функції в ряд Лорана використовують готові розклади в ряд Тейлора елементарних функцій.

Приклад 10. Розглянути різні розкладання в ряд Лорана функції

$$f(Z) = \frac{2Z+1}{Z^2 + Z - 2}, \quad Z_0 = 0.$$

Розв'язування. Функція $f(Z)$ має дві особливі точки $Z_1=-2$, $Z_2=1$. Значить є три кільця з центром в т. $Z_0=0$, в кожному з яких $f(Z)$ аналітична.



1) круг $|Z|<1$.

2) кільце $1<|Z|<2$.

3) кільце $2<|Z|<+\infty$.

Знайдемо ряди Лорана в кожному із цих кілець.

$$f(Z)=\frac{2Z+1}{Z^2+Z-2}=\frac{1}{Z+2}+\frac{1}{Z-1}$$

1) $|Z|<1$:

$$f(Z)=\frac{1}{Z+2}+\frac{1}{Z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{Z}{2}}-\frac{1}{1-Z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{Z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}Z^n=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{Z}{2}+\frac{Z^2}{4}-\frac{Z^3}{8}+\ldots\right)-1-Z-Z^2-Z^3-\ldots=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}Z-\frac{7}{8}Z^2-\frac{15}{16}Z^3-\ldots$$

Це ряд Тейлора функції $f(Z)$.

2) $1<|Z|<2$:

$$f(Z)=\frac{1}{Z+2}+\frac{1}{Z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{Z}{2}\right)}+\frac{1}{Z}\frac{1}{1-\frac{1}{Z}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{Z}{2}+\frac{Z^2}{4}-\frac{Z^3}{8}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{Z}\left(1+\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{Z^3}+\ldots\right)=\ldots+\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{Z}+\frac{1}{2}-\frac{Z}{4}+\frac{Z^2}{8}-\frac{Z^3}{16}+\ldots$$

або $f(Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{2^n}$.

3) $|Z|>2$.

$$f(Z)=\frac{1}{Z+2}+\frac{1}{Z-1}=\frac{1}{Z}\frac{1}{1+\frac{2}{Z}}+\frac{1}{Z}\frac{1}{1-\frac{1}{Z}}=\frac{1}{Z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{Z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{Z}}\right)=$$

$$=\frac{1}{Z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{Z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{Z^n}\right)^n\right)=\frac{1}{Z}\left(1-\frac{2}{Z}+\frac{4}{Z^2}-\frac{8}{Z^3}+\ldots+1+\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{Z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{Z}\left(2-\frac{1}{Z}+\frac{5}{Z^2}-\frac{7}{Z^3}+\ldots\right).$$

Приклад показує, що для однієї і тієї ж функції $f(Z)$ ряд Лорана може мати різний вигляд для різних кілець.

3.11 Лишки функцій

Нехай точка Z_0 - ізольована особлива точка функції $f(Z)$, тобто функція $f(Z)$ аналітична в крузі $|Z-Z_0|<R$, з якого вилучена точка Z_0.

Означення. *Лишком функції $f(Z)$ в точці Z_0 називають інтеграл*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(Z)dZ=\operatorname{res} f(Z_0),$$

де L - контур в крузі $|Z-Z_0|<R$, орієнтований проти годинникової стрілки, що містить всередині точку Z_0.

Інші позначення: $\operatorname{res}(f(Z),Z_0)$, $\quad \operatorname*{res}_{Z\to Z_0} f(Z)$

Приклад 11. Знайти лишки функції $f(Z)$ в її особливих точках,

якщо $f(Z)=\dfrac{\sin Z^2}{Z^3-\frac{\pi}{4}Z^2}$

Розв'язування. Знайдемо особливі точки:

$$Z^3-\frac{\pi}{4}Z^2=0\to Z=0,\quad Z=\frac{\pi}{4}.$$

Таблиця 1 – Класифікація особливих точок та обчислення лишків в них

Назва	Означення	Н і Д умова
1. Z_0 - нуль порядку "n"	$f(Z_0)=0; f'(Z_0)=0$ $\dots$ $f^{(n-1)}(Z_0)=0, f^{(n)}(Z_0)\neq 0$	$f(Z)=(Z-Z_0)^n\varphi(Z)$
2. Z_0 - ізольована особлива точка	Аналітична в крузі $0<\lvert Z-Z_0\rvert<R$ із якого вилучена точка Z_0	$\operatorname{res} f(Z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(Z)dZ$
3. Z_0 - усувна особлива точка	$\lim f(Z)=c$, $c-const$ $\operatorname{res}(Z_0)=0$	В ряді Лорана не має головної частини $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(Z-Z_0)^n}$
4. Z_0 – полюс порядку "n"	$\lim_{Z\to Z_0} f(Z)=\infty$	1. Нуль порядку "n" для функції $\varphi(Z)=\frac{1}{f(Z)}$ 2. $f(Z)=\frac{\varphi(Z)}{(Z-Z_0)^n}$ 3. Головна частина розкладання в ряд Лорана містить кінцеве число членів. Найбільший із показників степенів у виразі $(Z-Z_0)$, що знаходиться у знаменниках членів головної частини ряду Лорана збігається з порядком полюса.
$n=1$	$\operatorname{res} f(Z_0)=\lim_{Z\to Z_0} f(Z)(Z-Z_0)$ $f(Z)=\frac{\varphi(Z)}{\phi(Z)}$ $\operatorname{res} f(Z_0)=\frac{\varphi(Z)}{\phi'(Z)}$	
$n>1$	$\operatorname{res} f(Z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot$ $\cdot\lim_{Z\to Z_0}\left(f(Z)(Z-Z_0)^n\right)^{(n-1)}$	
5. Z_0 - істотно особлива точка	$\lim_{Z\to Z_0} f(Z)$ - не існує $\operatorname{res} f(Z_0)=C_{-1}$	Головна частина лоранівського розкладання в околі точки Z_0 має нескінченне число членів.

1) $Z=0$

$\lim\limits_{Z\to 0} f(Z)=\lim\limits_{Z\to 0}\dfrac{\sin Z^2}{Z^2\left(Z-\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{\pi}{4}\to Z=0$ - усувна особлива точка, тому

$\operatorname{res} f(0)=0$

2) $Z=\dfrac{\pi}{4}$, $\qquad \varphi(Z)=\dfrac{Z^3-\dfrac{\pi}{4}Z^2}{\sin Z^2}$

$Z=\dfrac{\pi}{4}$ - нуль для чисельника $\varphi(Z)$.

$\phi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^3-\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^3=0 \qquad \phi'=\left(Z^3-\dfrac{\pi}{4}Z^2\right)'=3Z^2-\dfrac{\pi}{2}Z$

$\phi'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}\neq 0 \qquad Z=\dfrac{\pi}{4}$ - простий нуль для функції $\varphi(Z)\to$

простий полюс для функції $f(Z)$. Тоді

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{Z\to\frac{\pi}{4}} f(Z)\left(Z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{Z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin Z^2}{Z^2\left(Z-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(Z-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\pi^2}{16}}{\frac{\pi^2}{16}}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}$$

Приклад 12. Знайти лишок функції в особливій точці $Z_0=0$.

а) $f(Z)=Z^3\sin\dfrac{1}{Z^2}$

Розв'язування: Розкладемо $f(Z)$ в ряд Лорана

$$f(Z)=Z^3\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{3!Z^6}+\frac{1}{5!Z^{10}}-\ldots\right)=Z-\frac{1}{3!Z^3}+\frac{1}{5!Z^7}-\ldots\ -$$

лоранівське розкладання містить нескінченне число членів в головній частині $\to$ $Z_0=0$ - істотно особлива точка, тому $\operatorname{res} f(0)=C_{-1}=0$.

б) $f(Z)=e^{\frac{1}{Z}}$.

Розв'язування: Розкладемо $f(Z)$ в ряд Лорана

$e^{\frac{1}{Z}}=1+\frac{1}{Z}+\frac{1}{2!Z^2}+\ldots$ – $Z_0=0$ - істотно особлива точка.

$\operatorname{res} f(0)=C_{-1}=1$.

3.12 Обчислення інтегралів за допомогою лишків

Теорема Коші про лишки. Якщо фукуція $f(Z)$ аналітична на межі L області D та всюди всередині області D, за винятком кінцевого числа особливих точок $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, то

$$\int_L f(Z)dZ=2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(Z_k).$$

Приклад 13. Обчислити $\int\limits_{|Z|=4}\frac{e^Z}{Z^2+Z}dZ$.

Розв'язування. Знайдемо особливі точки:

$$Z^2-Z=Z(Z+1)=0$$
$$Z=0,\ Z=-1$$

За теоремою Коші: $\int\limits_{|Z|=4}\frac{e^Z-1}{Z^2+Z}dZ=2\pi i\cdot(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(-1))$.

$Z=0$ - усувна особлива точка, оскільки $\lim\limits_{Z\to 0}\frac{e^Z-1}{Z(Z+1)}=1$, тому $\operatorname{res} f(0)=0$.

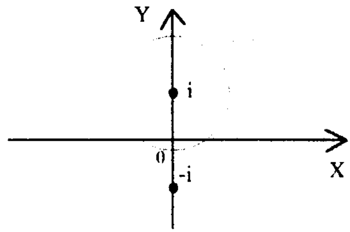
$Z=-1$ - полюс першого порядку: $\begin{cases}\varphi(Z)=Z^2+Z & \varphi'(Z)=2Z+1\\ \varphi(1)=1-1=0 & \varphi'(-1)=-1\neq 0\end{cases}$

$$\operatorname{res} f(-1)=\lim_{Z\to -1}\frac{e^Z-1}{Z(Z+1)}(Z+1)=1-e^{-1}$$

$$\int\limits_{|Z|=4}\frac{e^Z}{Z^2+Z}dZ\ =2\pi i\left(1-e^{-1}\right).$$

Приклад 14. Обчислити

$$\int\limits_{|Z-i|=1.5} \frac{e^{Z^{-2}}}{Z^2+1}dZ .$$



Розв'язуваня. Знайдемо особливі точки

$$\frac{1}{Z^2} \to Z_1 = 0; \quad Z^2 = -1, \quad Z = \pm i$$

$Z = -i$ – не належить колу $|Z - i| < 1.5$; тому

$$I = 2\pi i(\text{res } f(0) + \text{res } f(i))$$

$$Z = i \qquad \text{res } f(i) = \lim_{Z \to i} \frac{e^{Z^{-2}}(Z-i)}{(Z+i)(Z-i)} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

$$Z = 0 \qquad \frac{e^{Z^{-2}}}{Z^2+1} = \frac{1}{Z^2+1}\left(1 + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^4 2!} + \frac{1}{Z^6 3!} + \dots\right)$$

$Z = 0$ - істотно особлива точка

$$\text{res } f(0) = C_{-1} = 0$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{2ei} + 0\right) = \frac{\pi}{e}$$

3.13 Логарифмічний лишок. Теорема Руше

Нехай однозначна функція $f(Z)$ аналітична на області D, за винятком скінченного числа P ізольованих особливих точок Z_k $(k = 1,2,\dots,P)$, причому всі особливі точки Z_k - полюси. Крім того, функція $f(Z)$ в області D має кінцеве число n нулів; Z_n $(n = 1,2,\dots,N)$, а на межі області не має ні нулів, ні особливих точок функції $f(Z)$.

Повним числом N нулів (повним числом P полюсів) функції $f(Z)$, розташованих в області D, називається кількість всіх її нулів (полюсів) в цій області за умови, що кожен нуль (полюс) рахується стільки разів, який його порядок.

Функцію $\varphi(Z)=\dfrac{f'(Z)}{f(Z)}=(\ln f(Z))_Z'$ називають логарифмічною похідною функції $f(Z)$, а лишки функції $\varphi(Z)$ в її особливих точках; Z_m $(m=1,2,...,M)$ – логарифмічними лишками функції $f(Z)$.

Особливими точками функції $\varphi(Z)$ є нулі і полюси функції $f(Z)$. Якщо точка $\overline{Z}_k$ - нуль порядку n_k функції $f(Z)$, то в околі цієї точки

$$f(Z)=(Z-\overline{Z}_k)^{nk} f_1(Z), \qquad \text{де } f_1(Z)\neq 0.$$

Тому

$$\varphi(Z)=\frac{f(Z)'}{f(Z)}=(\ln f(Z))_Z'=(n_k\ln(Z-\overline{Z}_k)+\ln f_1(Z))_Z'=\frac{n_k}{Z-\overline{Z}_k}+\frac{f_1'(Z)}{f_1(Z)}$$

і точка $\overline{Z}_k$ буде полюсом першого порядку для функції $\varphi(Z)$.

Тоді $\operatorname{res}\varphi(\overline{Z}_k)=\operatorname{res}\left(\dfrac{f'(Z_k)}{f(Z_k)}\right)=n_k$, тобто логарифмічний лишок функції $f(Z)$ відносно її нуля дорівнює порядку цього нуля.

Якщо Z_k – полюс порядку P_k функції $F(Z)=\dfrac{1}{f(Z)}$, точка Z_k буде нулем того ж порядку P_k і поскільки $\ln f(Z)=-\ln F(Z)$, то

$$\frac{f'(Z)}{f(Z)}=(\ln f(Z))_Z'=(-\ln F(Z))_Z'=-(\ln F(Z))_Z'=\frac{F'(Z)}{F(Z)}.$$

Це означає, що $\operatorname{res}\left(\dfrac{f'(Z_k)}{f(Z_k)}\right)=-\operatorname{res}\left(\dfrac{f'(Z_k)}{f(Z_k)}\right)=-P_k$, тобто логарифмічний лишок функції $f(Z)$ відносно її полюса дорівнює порядку цього полюса, взятого зі знаком мінус.

Повне число нулів N і повне число полюсів P функції $f(Z)$ визначаються за формулами:

$$N=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left(\frac{f'(\overline{Z}_k)}{f(\overline{Z}_k)}\right) \qquad P=\sum_{k=1}^{p}\operatorname{res}\left(\frac{f'(Z_k)}{f(Z_k)}\right)$$

У відповідності з основною теоремою про лишки маємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(Z)}{f(Z)}dZ = \sum_{k=1}^{n}\text{res}\left(\frac{f'(\overline{Z}_k)}{f(Z)}\right) + \sum_{k=1}^{p}\text{res}\left(\frac{f'(\overline{Z}_k)}{f(Z)}\right) \quad \text{тобто} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(Z)}{f(Z)}dZ = N - P.$$

Вираз $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(Z)}{f(Z)}dZ$ називають логарифмічним лишком функції $f(Z)$ відносно контуру L.

Теорема Руше

Якщо на межі L області D має місце нерівність $|f(Z)|_L > |\varphi(Z)|_L$, причому, функції $f(Z)$ і $\varphi(Z)$ аналітичні в замкненій області D, повне число нулів функції $F(Z) = f(Z) + \varphi(Z)$ дорівнює повному числу нулів функції $f(Z)$.

Приклад 15.

Знайти повне число нулів функції $W = Z^2 - 1$ в середині круга $|Z| \le 2$.

Розв'язування. Нехай $Z^2 = f(Z)$, $\varphi(Z) = -1$, то на межі L кола $|Z| = 2$ маємо:

$$|f(Z)|_L = 4, \quad |\varphi(Z)|_L = 1, \quad |f(Z)_L| > |\varphi(Z)|_L$$

За теоремою Руше в середині круга $|Z| \le 2$ функція $W = F(Z) = f(Z) + \varphi(Z) = Z^2 - 1$ має стільки ж нулів, скільки їх має функція $f(Z) = Z^2$, але ця функція має один нуль кратності 2, тобто її повне число нулів дорівнює 2.

Тоді функція $W = Z^2 - 1$ в середині круга $|Z| \le 2$ має два нулі.

4 Завдання для самостійної роботи з теми „Функції комплексної змінної”

4.1 Комплексні числа

1 Виконати вказані операції та для пункту а) записати дійсну та уявну частину результату

1. а) $\frac{1-2i}{(2+i)2}$ б) $\sqrt[4]{-i}$
2. а) $\frac{2+3i}{3-i}$ б) $\sqrt{i}$
3. а) $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^3}$ б) $\sqrt[3]{i}$
4. а) $\frac{2i-i^2}{1-3i}$ б) $\sqrt[3]{-1+i}$
5. а) $\frac{2-i}{1+i}$ б) $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$
6. а) $\frac{1}{4-i}$ б) $\sqrt[4]{-i}$
7. а) $\frac{-1}{4-i}$ б) $\sqrt[4]{1}$
8. а) $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}$ б) $\sqrt[3]{-9}$
9. а) $\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$ б) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$
10. а) $\frac{i^5+2}{i^{19}+1}$ б) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$
11. а) $\frac{i^4-i}{(2-i)}$ б) $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$
12. а) $\frac{2+i}{i+1}$ б) $\sqrt[5]{-1-i}$
13. а) $\frac{i^3-2}{i-2}$ б) $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$
14. а) $\frac{2-i}{3+5i}$ б) $\sqrt{1+i}$
15. а) $\frac{-8+5i}{2+3i}$ б) $\sqrt[3]{-i}$
16. а) $\frac{2+i}{1+5i}$ б) $\sqrt[3]{27i}$
17. а) $\frac{1-i}{1+1}$ б) $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$
18. а) $\frac{2}{1-3i}$ б) $\sqrt{-2\sqrt{3}+2i}$
19. а) $\frac{-1+2i}{2-3i}$ б) $\sqrt[3]{-8i}$
20. а) $-\frac{2-7i}{1+3i}$ б) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$
21. а) $\frac{5-i}{2+4i}$ б) $\sqrt{\sqrt{3}-i}$
22. а) $\frac{i-1}{7+3i}$ б) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$
23. а) $\frac{-1+5i}{2-3i}$ б) $\sqrt{-2+2i}$
24. а) $\frac{3i+2}{5-i}$ б) $\sqrt[3]{2-2i}$
25. а) $\frac{2+4i}{7-3i}$ б) $\sqrt[4]{3+3i}$
26. а) $\frac{3-2i}{i-4}$ б) $\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}i}$
27. а) $\frac{4i-1}{2i+5}$ б) $\sqrt[4]{4+4i}$
28. а) $\frac{3i+1}{2i-7}$ б) $\sqrt{-3\sqrt{3}+3i}$
29. а) $\frac{i}{i-2i}$ б) $\sqrt[4]{16i}$
30. а) $\frac{6-5i}{3+2i}$ б) $\sqrt{3\sqrt{3}-3i}$

2 Знайти та побудувати множину точок на комплексній площині, які визначаються заданими умовами

1. $\lvert Z-3\cdot i\rvert=8$	2. $\lvert Z-2-i\rvert\le 4$
3. $1<\lvert Z-i\rvert<2$	4. $\frac{\pi}{6}<\arg Z<\frac{\pi}{3}$
5. $3<\lvert Z+1\rvert\le 4$	6. $0\le \operatorname{Im} Z\le 1$
7. $1<\operatorname{Re} Z<2$	8. $1\le\lvert Z+2+i\rvert\le 2$
9. $\lvert Z-5+3\cdot i\rvert>2$	10. $\lvert Z+1-4\cdot i\rvert\ge 3$
11. $2\le\lvert Z+i\rvert<4$	12. $\lvert Z-2-i\rvert<3$
13. $-1<\operatorname{Im} Z\le 3$	14. $\lvert Z+1-i\rvert\ge\frac{3}{2}$
15. $\lvert Z+2-2\cdot i\rvert=5$	16. $0\le\operatorname{Re} Z<25$
17. $\lvert Z-3-5\cdot i\rvert<2$	18. $0<\lvert Z+i\rvert\le 4$
19. $0\le\arg Z\le\frac{\pi}{2}$	20. $-3\le\operatorname{Im} Z\le 1$
21. $\lvert Z-3\cdot i\rvert\ge 1$	22. $0<\lvert Z+3-2\cdot i\rvert\le 2$
23. $\frac{1}{2}\le\lvert Z-i-1\rvert<2$	24. $1\le\lvert Z+5\cdot i-1\rvert<2$
25. $\frac{\pi}{3}<\arg Z<\pi$	26. $1<\operatorname{Re} Z\le 3$
27. $1<\lvert Z+5\rvert\le 3$	28. $\lvert Z+2\cdot i\rvert>4$
29. $\lvert Z+1+6\cdot i\rvert\le 2$	30. $0<\arg Z\le\frac{3\pi}{2}$

4.2 Елементарні функції комплексної змінної

1 Обчислити

1. 2^{i}	2. $(-1)^{i}$
3. $\cos(1+i)$	4. $\operatorname{Ln} i$

5. $(1+i)^i$

6. $\mathrm{Ln}(-1)$

7. $(-1)^{\sqrt{2}}$

8. $(3-4\cdot i)^{1+i}$

9. i^i

10. $\mathrm{Ch}(-1+i)$

11. $\sin 2i$

12. $\mathrm{Ln}(2-3i)$

13. $(-3-4i)^i$

14. $\mathrm{Ln}(1-\sqrt{3}i)$

15. $i^{\frac{1}{i}}$

16. 1^i

17. $\mathrm{Ln}(-2-2i)$

18. $(1+2i)^{-1}$

19. $(-3+4i)^i$

20. $\mathrm{Sh}(-2+i)$

21. $\mathrm{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

22. $\mathrm{Ch}\, i$

23. $\mathrm{Ch}(\sqrt{3}-i)$

24. $\mathrm{Ln}(3-2i)$

25. $\cos(2-i)$

26. $(2+i)^{-i}$

27. $\ln(-1+\sqrt{3}i)$

28. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^i$

29. $\ln\left(-1-\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)$

30. $(-1-2i)^i$

2 Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

1. $W=Z^2$, $Z_0=\sqrt{2}(1+i)$;

2. $W=-Z^3$, $Z_0=i$;

3. $W=Z^2+i$, $Z_0=1-i$;

4. $W=Z^2+2Z$, $Z_0=i$;

5. $W=e^{Z-1}$, $Z_0=i$;

6. $W=Z^2-iZ$, $Z_0=i$;

7. $W=Z^3$, $Z_0=1-i$;

8. $W=\dfrac{1}{Z}$, $Z_0=6-4i$;

9. $W=\dfrac{\operatorname{Im} Z}{Z}$, $Z_0=2-i$;

10. $W=(Z-i)^2$, $Z_0=\dfrac{1+i}{2}$;

11. $W=\dfrac{1}{Z^2}$, $Z_0=3-2i$;

12. $W=Z^3+1$, $Z_0=\sqrt{2}(1+i)$;

13. $W=\mathrm{Ln}(Z+1)$, $Z_0=1$;

14. $W=\sin Z$, $Z_0=i$;

15. $W=ie^{2Z}$, $Z_0=2\pi i$;

16. $W=(Z+1)^3$, $Z_0=2-2i$;

17. $W=(Z-i)^2$, $Z_0=1+i$;

18. $W=Z^2+Z-i$, $Z_0=-i$;

19. $W=ie^{3Z}$, $Z_0=3\pi i$;

20. $W=e^Z$, $Z_0=-1-i\dfrac{\pi}{2}$;

21. $W=Z^3$, $Z_0=1+i\dfrac{\pi}{2}$;

22. $W=e^Z$, $Z_0=\ln\left(2+i\dfrac{\pi}{4}\right)$;

23. $W=\sin Z$, $Z_0=0$;

24. $W=Z^3$, $Z_0=2-i$;

25. $W=Z^{-1}$, $Z_0=1+i$;

26. $W=Z^{-3}$, $Z_0=2-i$;

27. $W=\ln(Z-1)$, $Z_0=i$;

28. $W=ie^{Z+1}$, $Z_0=2i$;

29. $W=0.5Z^2+i$, $Z_0=-1-i$;

30. $W=(Z+2)^2$, $Z_0=3-i$.

3 Відновити аналітичну функцію $W(x,y)=U(x,y)+iV(x,y)$, якщо

1. $V(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+\dfrac{1}{3}$;

2. $U(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+7$;

3. $V(x,y)=e^{3x}\sin 3y$;

4. $U(x,y)=e^{2x}\sin 3y$;

5. $V(x,y)=x+y-3$;

6. $V(x,y)=\ln(x^2+y^2)-4$;

7. $U(x,y)=3x^2y-y^3$;

8. $V(x,y)=2xy-x-5y+2$;

9. $V(x,y)=3x^2y-y^3+4$;

10. $U(x,y)=e^{4x}\cos 4y$;

11. $U(x,y)=3y^2x-x^3+24$;

12. $V(x,y)=x^2-y^2-5x+y+2$;

13. $U(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+2x+3$;

14. $V(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

15. $V(x,y)=y-5x-y^2+x^2-7$;

16. $V(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$;

17. $V(x,y)=2e^x\cos y+1$;

18. $V(x,y)=arctg\dfrac{y}{x}$;

19. $V(x,y)=e^{6x}\sin 6y$;

20. $U(x,y)=x^2-y^2+2x$;

21. $V(x,y)=3x+2xy$;

22. $U(x,y)=x^2-y^2-3x+5$;

23. $U(x,y)=xy^2+\dfrac{x^3}{3}+5$;

24. $U(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

25. $U(x,y)=x^2-y^2+x$;

26. $V(x,y)=2xy-y$;

27. $V(x,y)=-x^2y+x^2-1+x$;

28. $V(x,y)=3xy^2-x^3$;

29. $U(x,y)=e^{3x}\cos 3y+1$;

30. $V(x,y)=e^{3x}\sin 3y-1$.

4 Розглянути різні розкладання в ряд Лорана функції $f(Z)$ за степенями $Z-Z_0$.

1. $f(Z)=\dfrac{1}{Z^3-3Z^2-4Z}$, $Z_0=0$;

2. $f(Z)=(Z+i)\sin\left(\dfrac{1}{Z+i}\right)$, $Z_0=-i$;

3. $f(Z)=\dfrac{Z}{(Z+3)(Z+2)^2}$, $Z_0=0$;

4. $f(Z)=\dfrac{1}{Z(Z-2)}$, $Z_0=0$;

5. $f(Z)=\cos(Z-i)$, $Z_0=i$;

6. $f(Z)=\dfrac{1}{(Z-1)(Z-3)}$, $Z_0=0$;

7. $f(Z)=e^{\frac{1}{Z^2}}$, $Z_0=0$;

8. $f(Z)=\dfrac{1}{(Z-3)Z}$, $Z_0=0$;

9. $f(Z)=\dfrac{1}{(Z-3)^2}$, $Z_0=0$;

10. $f(Z)=\dfrac{1}{Z(Z+1)}$, $Z_0=0$;

11. $f(Z)=e^{\frac{1}{2Z-1}}$, $Z_0=\dfrac{1}{2}$;

12. $f(Z)=\sin\left(\dfrac{1}{Z-i}\right)$, $Z_0=1$;

13. $f(Z)=\dfrac{1}{Z(Z+4)}$, $Z_0=0$;

14. $f(Z)=\cos\left(\dfrac{1}{(Z-i)^2}\right)$, $Z_0=i$;

15. $f(Z)=Z^2e^{\frac{1}{Z}}$, $Z_0=0$;

16. $f(Z)=(1+Z^3)\sin\dfrac{1}{Z^2}$, $Z_0=0$;

17. $f(Z)=Ze^{\frac{1}{Z^2}}$, $Z_0=0$;

18. $f(Z)=\dfrac{1}{(Z+1)(Z+2)}$, $Z_0=0$;

19. $f(Z)=\frac{1}{Z(Z-3)}, Z_0=0$;

20. $f(Z)=\frac{2Z+1}{Z^2+Z-2}, Z_0=0$;

21. $f(Z)=\frac{\sin Z}{Z^2}, Z_0=0$;

22. $f(Z)=\frac{1}{Z}\sin^2\frac{2}{Z}, Z_0=0$;

23. $f(Z)=Ze^{\frac{1}{Z+i}}, Z_0=-i$;

24. $f(Z)=\frac{2Z+3}{Z^2+3Z+2}, Z_0=0$;

25. $f(Z)=\frac{Z+2}{Z^2-4Z+3}, Z_0=0$;

26. $f(Z)=\frac{1-\cos Z}{Z^2}, Z_0=0$;

27. $f(Z)=\frac{1-e^{-Z}}{Z^3}, Z_0=0$;

28. $f(Z)=\frac{e^Z}{Z^3}, Z_0=0$;

29. $f(Z)=\frac{1}{Z^2+2Z-8}, Z_0=0$;

30. $f(Z)=Z^3e^{\frac{1}{Z}}, Z_0=0$.

4.3 Інтеграл. Лишки

I Обчислити: а) безпосередньо; б), в) за формулою Коші та використовуючи теорему Коші про лишки

1. а) $\int\limits_{|Z|=1} Z\cdot\overline{Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z-3|=6}\frac{ZdZ}{(Z-2)^2(Z+4)}$ в) $\int\limits_{|Z-1|=\frac{1}{3}}\frac{sh\pi ZdZ}{(Z-1)(Z^2+4)^2}$

2. а) $\int\limits_{|Z|=3}|Z|dZ$, $0\le\arg Z\le\pi$ б) $\int\limits_{|Z|=2}\frac{\sin iZdZ}{Z^2-4Z+3}$ в) $\int\limits_{|Z+2i|=\frac{1}{3}}\frac{sh\pi ZdZ}{(Z-1)(Z^2+4)^2}$

3. а) $\int\limits_{|Z|=1} Z\operatorname{Re}ZdZ$ б) $\int\limits_{|Z-2|=3}\frac{che^{i\pi Z}}{Z^3-4Z^2}dZ$ в) $\int\limits_{|Z|=6}\frac{e^{-Z}}{Z+\pi i}dZ$

4. а) $\int\limits_{|Z|=2}|Z|dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=3}\frac{\cos(Z+\pi i)dZ}{Z(e^Z+2)}$ в) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{e^Z}{Z^2+2Z}dZ$

5. а) $\int\limits_1^i\frac{1+tgZ}{\cos^2 Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{\cos Z}{Z^3}dZ$ в) $\int\limits_{|Z-3|=6}\frac{ZdZ}{(Z-2)(Z+4)^2}$

6. а) $\int\limits_{|Z|=2}(2-3Z+Z^2)dZ$ б) $\int\limits_{|Z+2i|=\frac{1}{2}}\frac{e^{-Z}}{Z+\pi i}dZ$ в) $\int\limits_{|Z-1|=\frac{1}{3}}\frac{sh\pi ZdZ}{(Z-1)(Z^2+4)^2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\arg Z\le\frac{\pi}{2}$

7. а) $\int\limits_0^i(Z-i)e^{-Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z-1|=1}\frac{\sin\frac{Z}{4}}{(Z-1)^2(Z-3)}dZ$ в) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{Z^3+1}{Z^2+4}dZ$

8. а) $\int\limits_L e^{-Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=5}\frac{1}{Z^2+16}dZ$ в) $\int\limits_{|Z-2i|=1}\frac{Z^3+1}{Z^2+4}dZ$

L : пряма від т. $Z_1=0$ до т. $Z_2=2-i$

9. а) $\int\limits_1^{-i}Ze^ZdZ$ б) $\int\limits_{|Z|=2}\frac{Z\cdot shZ}{(Z^2-1)^2}dZ$ в) $\int\limits_{|Z+\frac{\pi i}{2}|=1}\frac{chZ}{(Z+\frac{\pi i}{2})(Z-\pi i)}dZ$

10. а) $\int\limits_L|z|dz$ б) $\int\limits_{|Z-1|=3}\frac{\sin\frac{\pi Z}{2}dZ}{Z^2+2Z-3}$ в) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{chZ}{(Z+\frac{\pi i}{2})(Z-\pi i)^2}dZ$

L : пряма від т. $Z_1=0$ до т. $Z_2=2+i$

11. а) $\int\limits_0^{1+i}\sin Z\cos ZdZ$ б) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{shZ^2}{Z^3}dZ$ в) $\int\limits_{|Z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\cos2ZdZ}{Z^2+3Z+2}$

12. а) $\int\limits_L e^{-Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z-i|=1}\frac{e^{iZ}dZ}{Z^2+1}$ в) $\int\limits_{|Z+2|=\frac{1}{2}}\frac{\cos2Z}{Z^2+3Z+2}dZ$

L : ламана з вершинами в т. $Z_1=0$, $Z_2=2$, $Z_3=2-i$

13. а) $\int\limits_0^i(Z-i)e^{-Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z-3|=1}\frac{\sin4ZdZ}{(Z-1)(Z-3)}$ в) $\int\limits_{|Z+2i|=1}\frac{Z+1}{Z^2+4}dZ$

14. а) $\int\limits_0^i Ze^{2Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=2}\frac{ZdZ}{Z^2-1}$ в) $\int\limits_{|Z+\pi i|=1}\frac{chZdZ}{(Z+\pi i)^2Z}$

15. а) $\int\limits_Z\frac{e^{2Z}dZ}{Z^3-1}$ б) $\int\limits_{|Z|=2}e^{\frac{1}{Z+1}}dZ$ в) $\int\limits_L(Z+2\overline{Z})dZ$

L: пряма від т. 0 до т. $1-i$

16. $a)\ \int\limits_{|Z|=2}(Z+2\overline{Z})dZ$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z-2i|=2}\dfrac{dZ}{Z(Z^2+4)^2}$ $\qquad$ $в)\ \int\limits_{|Z-i|=1}\dfrac{e^Z}{Z^4+2Z+1}dZ$

$-\dfrac{\pi}{2}\le \arg Z\le \dfrac{\pi}{2}$

17. $a)\ \int\limits_{|Z|=\frac{1}{2}}Z^2\sin\dfrac{1}{Z}dZ$ $\qquad$ $б)\int\limits_{L}\dfrac{e^{2Z}dZ}{Z^3-1}$ $\qquad$ $в)\ \int\limits_{|Z-1|=2}(Z+2\overline{Z})dZ$

$L:\ x^2-y^2-2x=0$

18. $a)\int\limits_{L}Z^3dZ$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z|=\frac{1}{3}}(Z+1)e^{\frac{1}{Z}}dZ$ $\qquad$ $в)\ \int\limits_{|Z-i|=3}\dfrac{e^Z-1}{Z^3-iZ^2}dZ$

$L:\ y=x^2$ від т. $z_1=0$ до $z_2=1+i$

19. $a)\int\limits_{L}\dfrac{ZdZ}{(Z-1)(Z+2)}$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z+1|=\frac{3}{2}}\dfrac{ch2ZdZ}{Z^2(Z+2)(Z-1)}$ $\qquad$ $в)\int\limits_{1}^{i}\dfrac{\ln Z}{Z}dZ$

$L: x^2+y^2=9$

20. $a)\int\limits_{L}(1+i-2\overline{Z})dZ$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z|=2}\dfrac{ZdZ}{Z^2-1}$ $\qquad$ $в)\int\limits_{L}\dfrac{dZ}{Z^4+1}$

L: пряма від т. Z_1=0 до т. Z_2 = 1 + i $\qquad$ $L:\ x^2+y^2=2x$

21. $a)\int\limits_{L}(1+\overline{Z})dZ$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z|=2}\dfrac{\sin\pi Z}{Z^2-1}$ $\qquad$ $в)\ \int\limits_{|Z|=\frac{1}{2}}\dfrac{e^ZdZ}{Z(Z+1)}$

L: парабола $y=x^2$ від т. Z_1 = 0 до т. Z_2 = 1 + i

22. $a)\int\limits_{1}^{i}Z\sin ZdZ$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z+2|=1}\dfrac{tgZdZ}{Z+2}$ $\qquad$ $в)\ \int\limits_{|Z|=1}Z^2e^{\frac{1}{Z}}dZ$

23. $a)\int\limits_{1-i}^{2+i}(Z^2+3Z)dZ$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z|=4}\dfrac{ZdZ}{\sin Z}$ $\qquad$ $в)\ \int\limits_{|Z|=4}\dfrac{e^{iZ}dZ}{(Z-\pi)^2}$

24. $a)\int\limits_{1+i}^{2i}Ze^{\frac{Z^2}{2}}dZ$ $\qquad$ $б)\ \int\limits_{|Z|=1}\dfrac{ch2Z}{Z^2(Z-2)}$ $\qquad$ $в)\ \int\limits_{|Z-2i|=3}\dfrac{Z^2dZ}{Z^2+4}$

25. а) $\int\limits_{0}^{i}(Z-i)e^{-Z}dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=2}\frac{Z\cos Z dZ}{(Z-\frac{\pi}{3})^3}$ в) $\int\limits_{|Z|=4}\frac{Z+1}{Z^2+2Z-3}dZ$

26. а) $\int\limits_{0}^{1+i}\sin Z\cos Z dZ$ б) $\int\limits_{|Z-3|=2}\frac{e^Z dZ}{Z^2-9}$ в) $\int\limits_{L}\frac{sh\frac{\pi}{4}Z dZ}{Z^2+1}$

L: $x^2+y^2+2y=0$

27. а) $\int\limits_{1+i}^{-1-i}(Z+1)dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{sh\frac{\pi}{2}(Zz+i)}{Z^2-2Z}$ в) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{\cos Z dZ}{Z(Z-2)^2}$

28. а) $\int\limits_{0}^{1+i}Z^2 dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=1}\frac{\cos Z dZ}{Z^3}$ в) $\int\limits_{|Z|=6}\frac{e^{-Z}dZ}{Z+\pi i}$

29. а) $\int\limits_{1}^{i}\frac{\ln(Z+1)dZ}{Z+1}$ б) $\int\limits_{|Z-3|=6}\frac{Z dZ}{(Z-2)^2(Z+4)}$ в) $\int\limits_{|Z-2|=\frac{1}{3}}\frac{sh\pi Z dZ}{(Z-1)(Z^2+4)}$

30. а) $\int\limits_{-i}^{i}Ze^{Z^2}dZ$ б) $\int\limits_{|Z|=4}\frac{dZ}{(Z^2+9)(Z+9)}$ в) $\int\limits_{|Z-1|=\frac{1}{3}}\frac{sh\pi Z dZ}{(Z-1)(Z^2+1)^2}$

2 Визначити характер особливої точки Z_0 функції $f(Z)$:

1. $\frac{1-\cos Z}{Z^2}$; $Z_0=0$
2. $Zsh\frac{1}{Z}$; $Z_0=0$
3. $\frac{Z^2+3Z+2}{Z^2-2Z+1}$; $Z_0=1$
4. $e^{-\frac{1}{Z^2}}$; $Z_0=0$
5. $\frac{Z}{Z^5+2Z^4+Z^3}$; $Z_0=-1$
6. $\frac{\sin Z}{e^{-Z}+Z-1}$; $Z_0=0$
7. $\frac{1-\sin Z}{\cos Z}$; $Z_0=\frac{\pi}{2}$
8. $\frac{Z-\pi}{\sin^2 Z}$; $Z_0=\pi$
9. $\cos\frac{1}{2}+\sin(\frac{2-\pi Z}{2Z})$; $Z_0=0$
10. $\frac{\ln(1+Z^3)}{Z^2}$; $Z_0=0$

11. $\dfrac{Z^2-1}{Z^6+2Z^5+Z^4}; Z_0=-1$

12. $\sin\dfrac{\pi}{Z+1}; Z_0=-1$

13. $\dfrac{Z^2-1}{Z^6+2Z^5+Z^4}; Z_0=0$

14. $\dfrac{Z}{Z^5+2Z^4+Z^3}; Z_0=0$

15. $e^{\frac{1}{Z+2}}; Z_0=-2$

16. $\cos\dfrac{1}{Z+\pi}; Z_0=-\pi$

17. $\dfrac{1+\cos Z}{Z-\pi}; Z_0=\pi$

18. $\dfrac{\sin Z}{Z^2}; Z_0=0$

19. $ch\dfrac{1}{Z}; Z_0=0$

20. $\dfrac{\sin^2 Z}{Z}; Z_0=0$

21. $\dfrac{\sin Z}{Z}; Z_0=0$

22. $e^{\frac{Z}{1-Z}}; Z_0=1$

23. $\dfrac{2Z+3}{(Z^2-1)(Z^2+5Z+4)^2}; Z_0=-1$

24. $\dfrac{1}{Z^3(Z^2+4)^2}; Z_0=2i$

25. $\dfrac{1}{\sin Z-1}; Z_0=\dfrac{\pi}{2}$

26. $\dfrac{1}{Z(Z^2+4Z+4)^2}; Z_0=-2$

27. $\dfrac{1}{Z^2-5Z+4}; Z_0=4$

28. $\dfrac{1}{\cos Z-1}; Z_0=0$

29. $\dfrac{\cos Z}{(Z+\frac{\pi}{2})(Z^2-4)^2}; Z_0=2$

30. $\dfrac{2Z^3+1}{Z^4(Z^2+9)^3}; Z_0=3i$

3 Обчислити лишок функції в особливій точці Z_0:

1. $\dfrac{Z}{\sin Z}; z_0=0$

2. $Z^3\cos\dfrac{1}{Z}; Z_0=0$

3. $\dfrac{1}{\cos Z+\frac{1}{2}}; Z_0=0$

4. $\dfrac{\cos 2Z}{(Z-\pi)(Z-\frac{\pi}{6})}; Z_0=\pi$

5. $\dfrac{1}{Z^2(Z^2+4)}; Z_0=2i$

6. $\dfrac{1}{(Z-1)^2(Z+3)}; Z_0=1$

7. $\frac{1}{(Z+3)(Z-1)^2}; Z_0 = 1$

8. $\frac{2Z-5}{Z^2+2Z+1}; Z_0 = -1$

9. $Z^3 e^{\frac{1}{Z}}; Z_0 = 0$

10. $\frac{1}{(Z+1)(Z-2)^2}; Z_0 = -1$

11. $\frac{\sin 2Z}{(Z-\pi)^2(Z-\frac{\pi}{3})}; Z_0 = \frac{\pi}{3}$

12. $\frac{Z^2}{\sin Z}; Z_0 = \pi$

13. $\frac{1}{Z^2(Z^2+1)}; Z_0 = 0$

14. $\frac{2Z-5}{Z^2-2Z+1}; Z_0 = 1$

15. $Z^2 \sin\frac{1}{Z}; Z_0 = 0$

16. $\frac{Z}{\sin Z}; Z_0 = 0$

17. $\frac{1}{(Z+1)^3(Z-3)}; Z_0 = 3$

18. $\frac{1}{\cos Z + \frac{\sqrt{2}}{2}}; Z_0 = \frac{3\pi}{4}$

19. $\frac{Z}{\sin^2 Z}; Z_0 = 0$

20. $\frac{\cos Z}{(Z-\pi)(Z-1)^2}; Z_0 = \pi$

21. $\frac{1}{\sin Z + \frac{1}{2}}; Z_0 = -\frac{\pi}{6}$

22. $\frac{1}{Z^3+9Z}; Z_0 = 3i$

23. $\frac{1}{(Z^2+9)(Z-1)^3}; Z_0 = 3i$

24. $e^{\frac{1}{Z-1}}; Z_0 = 1$

25. $\cos\frac{1}{Z^2}; Z_0 = 0$

26. $ctg 2Z; Z_0 = \frac{\pi}{2}$

27. $\frac{2Z}{Z^4-4Z^2+4}; Z_0 = \sqrt{2}$

28. $(1-Z+2Z^2)\sin\frac{1}{Z^2}; Z_0 = 0$

29. $\sin\frac{1}{Z}; Z_0 = 0$

30. $\frac{e^{\frac{1}{Z}}}{1-Z}; Z_0 = 0$

5. Операційне числення

5.1 Оригінал та зображення

Розглянемо комплексну функцію $f(t)$ дійсної змінної t:

$$f(t)=U(t)+iV(t),$$

де $U(t)$ та $V(t)$ – дійсні функції аргументу t.

Означення. Функція $f(t)$ називається оригіналом, якщо вона задовольняє такі умови:

1. $f(t)=0$ при $t<0$.

2. $f(t)$ – неперервна на всій числовій осі t, за можливим винятком скінченного числа точок розриву 1 роду на кожному інтервалі скінченної довжини (кусково-неперервна).

3. Існують такі числа $M>0$ та S_0, що для будь-якого t

$$|f(t)|\le \mathrm{M}e^{S_0 t}.$$

Наприклад, $\dfrac{1}{\ln t}$ - не є оригіналом, оскільки порушена умова 2.

e^{t^2} - не оригінал – порушена умова 3.

$f(t)=\begin{cases} e^{2t}\sin 3t,\ t>0 \\ 0,\ t<0 \end{cases}$ - оригінал, умови 1-3 виконані.

Умова 1, що накладається на оригінал чисто формальна. Коли говорять про зображення функції $f(t)=0$, $t<0$, то мають на увазі зображення функції $f(t)\cdot \eta(t)$, де $\eta(t)$ - одинична функція (або функція Хевісайда) $\eta(t)=\begin{cases} 1,\ t\ge 0 \\ 0,\ t<0 \end{cases}$; $\eta(t-t_0)=\begin{cases} 1,\ t\ge t_0 \\ 0,\ t<t_0 \end{cases}$.

Розглянемо функцію $f(t)$, яка задовольняє за означенням оригіналу п. 2, 3 і не задовольняє п. 1. Наприклад, 1, $\sin t$, e^t, t^n,…

Помножимо $f(t)$ на $\eta(t)$ тобто $f(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases} f(t),\ t\geq 0 \\ 0,\ t<0 \end{cases}$.

Цей добуток збігається з $f(t)$, при $t\geq 0$ і дорівнює нулю при $t<0$ тому $f(t)\cdot\eta(t)$ – стає оригіналом. Далі, для скорочення будемо писати $f(t)$, але розуміти $f(t)\cdot\eta(t)$.

Означення. Зображенням функції $f(t)$ за Лапласом (або перетворенням Лапласа, або L-зображенням) називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p=\alpha+i\beta$, що визначається інтегралом

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Позначають $f(t)\div F(p)$, $F(p)=L(f(t),p)$ або $F(p)=L\{f(t)\}$.

Теорема єдиності. Якщо дві неперервні функції $f(t)$ та $g(t)$ мають одне і те ж зображення $F(p)$, то вони тотожно рівні.

Приклад. За означенням знайти $F(p)$ для $f(t)=e^{2t}$.

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{2t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t}dt=-\frac{1}{p-2}\cdot e^{-(p-2)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p-2}.$$

Означення: Сукупність всіх функцій $f(t)$, які є оригіналами, називають простором оригіналів, а сукупність зображень $F(p)$, що відповідають цим оригіналам, називають простором зображень.

5.2 Властивості перетворень Лапласа

1. Теорема подібності. Якщо $f(t)\div F(p)$, то $f(\alpha t)\div\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

2. Властивість лінійності. Якщо $f(t)=C_1f_1(t)+C_2f_2(t)$ і $f_1(t)\div F_1(p)$; $f_2(t)\div F_2(p)$; $f(t)\div F(p)$, то $f(t)\div F(p)=C_1F_1(p)+C_2F_2(p)$.

3. Диференціювання оригіналу. Якщо функції $f(t),\ f'(t),\ \ldots\ f^{(n)}(t)$ є функції оригінали та $f(t) \div F(p)$, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

....

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

4. Диференціювання зображення.

$F'(p) \div -tf(t)$ або $F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t)$.

5. Інтегрування оригіналу. Якщо: $f(t) \div F(p)$ то $\int\limits_0^t f(t)dt \div \dfrac{F(p)}{p}$.

6. Інтегрування зображення. Якщо інтеграл $\int\limits_p^{\infty} F(p)dp$ збігається, то він є зображенням функції $\dfrac{f(t)}{t}$ тобто $\dfrac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^{\infty} F(p)dp$.

7. Теорема зміщення (затухання). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\forall p_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ справедлива формула $e^{p_0 t} f(t) \div F(p - p_0)$.

8. Теорема зсуву. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\forall t_0 > 0$, $f(t - t_0) \div e^{-pt_0} F(p)$.

Таблиця 2 – Зображення та оригінали

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
1	$\dfrac{1}{p}$	$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
t^n $(n = 1,2,3\ldots)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$	$e^{\alpha t} \cdot \operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2 - \omega^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$e^{\alpha t} \cdot \sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{\alpha t} \cdot \operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 - \omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$	$e^{\alpha t} \cdot \cos\omega t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}$	$t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

Приклад 2. Записати зображення функцій:

а) $f(t)=t^2e^t$, б) $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$

Розв'язування.

а) $f(t)=t^2e^t$, за таблицею зображень $e^t \div \dfrac{1}{p-1}$; за теоремою 4

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' \div -te^t \to \frac{1}{(p-1)^2} \div te^t \text{ тоді } \left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' \div -t^2e^t \to \frac{2}{(p-1)^3} \div t^2e^t.$$

б) $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$, за таблицею зображень $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, тоді за теоремою 6

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

5.3 Згортка

Нехай дано дві функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

Означення. Згорткою функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ називають функцію $f(t)$, що визначається рівністю

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

Позначають $f_1(t) * f_2(t) = f(t)$.

Теорема про згортку (множення зображень).

Нехай функції $f_1(t)$ відповідає зображення $F_1(p)$, а функції $f_2(t)$ відповідає зображення $F_2(p)$. Тоді добутку зображень $F_1(p)\cdot F_2(p)$ відповідає оригінал, представлений згорткою функцій оригіналів $f_1(t)$ та $f_2(t)$: $F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1(t) * f_2(t)$.

Приклад 3. Знайти оригінал, якщо зображення $F(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Розв'язування.

Маємо $\quad F(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}, \qquad F_1(p)=\frac{p}{p^2+1}\div\cos t=f_1(t),$

$F_2(p)=\frac{1}{p^2+1}\div\sin t=f_2(t).$

Тоді добутку зображень відповідає оригінал представлений згорткою функцій

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\div f_1(t)*f_2(t)=\cos t*\sin t=\int_0^t\cos\tau\cdot\sin(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-2\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\sin t\,d\tau=\frac{1}{4}\cos(t-2\tau)\Big|_0^t+\frac{1}{2}\tau\cdot\sin t\Big|_0^t=$$

$$\frac{1}{4}(\cos(t-2t)-\cos t)+\frac{1}{2}t\sin t=\frac{1}{2}t\sin t$$

5.4 Інтеграл Дюамеля

Інтеграли, що стоять в лівій частині формул, називають інтегралами Дюамеля (французький математик 1797-1872).

Якщо $f(t)*\varphi(t)=\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\div F(p)\cdot\Phi(p)$, де $f(t)\div F(p)$ і

$\varphi(t)\div\Phi(p)$, то $\int_0^t f(\tau)\varphi_t'(t-\tau)d\tau+f(t)\varphi(0)\div pF(p)\cdot\Phi(p)$ або

$\int_0^t f_t'(t-\tau)\varphi'(\tau)d\tau+f(0)\varphi(t)\div pF(p)\cdot\Phi(p).$

Приклад 4. Знайти оригінал $g(t)$ якщо зображення $G(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+4\right)^2}$.

Розв'язування.

$$G(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+4\right)^2}=p\cdot\frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2+4};\qquad \frac{p}{p^2+4}\div\cos 2t\ ;\ \frac{1}{p^2+4}\div\frac{1}{2}\sin 2t\ ;$$

тоді $p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)=\int\limits_0^t f_t'(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau+f(0)\varphi(t)$.

Нехай $\cos 2t=\varphi(t)\div\Phi(p)$; $\sin 2t=f(t)\div F(p)$ тоді $f(t-\tau)=\sin 2(t-\tau)$; $f_t'(t-\tau)=2\cos(2t-2\tau)$.

Тому

$$G(p)=p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)\div\frac{1}{2}\int\limits_0^t 2\cos(2t-2\tau)\cdot\cos 2\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t(\cos(2t-2\tau-2\tau)+\cos(2t-2\tau+2\tau))d\tau=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\cos(2t-4\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\cos 2td\tau=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t.$$

5.5 Знаходження оригіналу за зображенням

Для знаходження оригіналу $f(t)$ за зображенням $F(p)$ використовують такі прийоми.

1) Якщо $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ - правильний раціональний дріб, що розкладається на найпростіші, то знаходять оригінали кожного простого дробу, використовуючи таблицю зображень та властивості перетворень Лапласа.

Приклад 5. Знайти $f(t)$, якщо $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}$.

Розв'язування.

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4};$$

$$1=A(p-1)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+p(p-1)(Cp+D)$$

$$\begin{array}{l|l}
p=0 & 1=-4A\to A=-1/4 \\
p=1 & 1=5B\to B=1/5 \\
p^3 & 0=A+B+C\to C=1/4-1/5=1/20 \\
p^2 & 0=-A+D-C\to D=C+A=1/20-1/4=-1/5
\end{array}$$

$$F(p)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4}\div$$

$$\div-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t.$$

2) Використання першої теореми розкладання.

Якщо зображення $F(p)$ можна записати як суму $F(p)=\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{p^{n+1}}$, де $a_n=const,\ n=\overline{0,k}$ то оригіналом $F(p)$ є функція $f(t)=\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{n!}\cdot t^n$.

Приклад 6. Знайти оригінал $f(t)$, якщо зображення $F(p)=\frac{p}{p^2+1}$.

Розв'язування.

$$F(p)=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{p^2}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{p^{2n}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Тоді

$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1-1}}{(2n+1-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos t$, що збігається з відомим розкладом.

3) Використання другої теореми розкладання.

Якщо зображення $F(p)$ є дробово-раціональною функцією зі степенем чисельника, меншим за степінь знаменника та знаменник має корені $p_1, p_2, \ldots, p_n$ кратності $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то оригінал $f(t)$ визначається за формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right] \text{ або}$$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left((p-p_k)^{r_k}\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right), \text{ де } F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}.$$

Наслідок. Якщо всі корені знаменника дробово-раціонального зображення прості, тобто $r_1=r_2=\ldots=r_n=1$, то оригінал можна знайти за формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Якщо $A(p)$ та $B(p)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами, то кожній парі комплексних спряжених коренів $B(p)\,(p_{1,2}=\alpha\pm\beta i)$ відповідають лишки – теж комплексні спряжені числа, тому їх сума дорівнює подвоєній дійсній частині будь-якого з них:

$$\underset{p_1}{res}\left[\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right]+\underset{p_2}{res}\left[\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right]=2\operatorname{Re}\underset{p_1}{res}\left[\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right].$$

Якщо $p_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ прості корені знаменника, то

$$\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}e^{p_1 t}+\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}e^{p_2 t}=2\operatorname{Re}\left[\frac{A(p_1)}{B(p_1)}e^{p_1 t}\right].$$

Приклад 7. Знайти оригінал $f(t)$, якщо його зображення

$$F(p)=\frac{p}{(p^2-1)^2}.$$

Розв'язування.

$(p^2-1)^2=0 \to p^2-1=0\ \ p_1=1\ \ p_2=-1$ корені кратності 2 $(r_1=2,\ r_2=2)$.

Тоді

$$f(t)=\lim_{p\to-1}\frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{(p-1)^2e^{pt}p}{(p-1)^2(p+1)^2}\right)_p^1+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to-1}\left(\frac{(p-1)^2e^{pt}p}{(p-1)^2(p+1)^2}\right)_p^1=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{\left(te^{pt}p+e^{pt}\right)\cdot(p-1)^2-p(p-1)e^{pt}}{(p-1)^4}=\frac{\left(te^t+e^t\right)\cdot 4-4e^t}{16}+\frac{4(1-t)e^{-t}-4e^{-t}}{16}=$$

$$=\frac{te^t}{4}-\frac{te^{-t}}{4}=\frac{1}{2}t\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)=\frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

5.6 Операторний метод розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$a_nx^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1x'(t)+a_ox(t)=f(t) \tag{1}$$

Потрібно розв'язати задачу Коші за початковими умовами

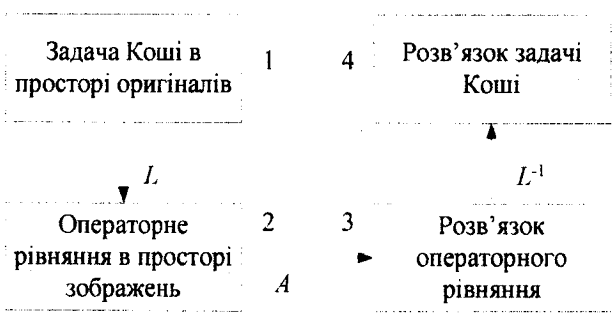
$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x'_0\ \ldots\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)} \tag{2}$$

Нехай $x(t)$ розв'язок (1), що задовольняє умови (2) та функції $x(t)$, $f(t)$ –функція-оригінал, причому

$$x(t)\div X(p)\ \text{ та }\ f(t)\div F(p)$$

Переведемо рівняння (1) із простору оригіналів в простір зображень.

Схема розв'язування задачі Коші за допомогою перетворення Лапласа.



Приклад 8. Розв'язати рівняння $x'' + x = t^3 + 6t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язування.

Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді

$$X''(p) \div p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p),$$

$$t^3 + 6t \div \frac{3!}{p^4} + \frac{6}{p^2} = \frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^2}.$$

Запишемо операторне рівняння:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^2},$$

$$X(p)(p^2 + 1) = \frac{6}{p^2}\left(\frac{1}{p^2} + 1\right) = \frac{6}{p^2}\frac{1 + p^2}{p^2} = \frac{6(1 + p^2)}{p^4},$$

$$X(p) = \frac{6(1 + p^2)}{p^4(p^2 + 1)}, \qquad X(p) = \frac{6}{p^4} = t^3 = x(t).$$

Відповідь: $x(t) = t^3$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x'' - 4x = 4e^{2t}$, $x'(0) = x(0) = 0$, використовуючи інтеграл Дюамеля.

Розв'язування.

Розв'яжемо допоміжне рівняння $y'' - 4y = 1$ з початковими умовами $y'(0) = y(0) = 0$. Нехай $y(t) \div Y(p)$, $y''(t) \div p^2 Y(p)$, $1 \div \frac{1}{p}$.

Операторне рівняння $p^2 Y(p) - 4Y(p) = \frac{1}{p}$. Розв'яжемо його:

$$Y(p)(p^2 - 4) = \frac{1}{p} \quad Y(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4)} = 1 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t$$

$$\frac{1}{p(p^2 - 4)} = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sh} 2t dt = \frac{1}{4}\operatorname{ch} 2t\Big|_0^t = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} 2t - 1)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}(ch2t - 1).$$

Тоді

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_0^t 4e^{2\tau}\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2t-2\tau)d\tau=2\int_0^t e^{2\tau}\frac{e^{2t-2\tau}-e^{-2t+2\tau}}{2}d\tau=$$

$$e^{2t}\int_0^t d\tau-e^{-2t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau=\tau e^{2t}\Big|_0^t-\frac{1}{4}e^{-2t}e^{4\tau}\Big|_0^t=te^{2t}-e^{-2t}\frac{e^{4t}-1}{4}=$$

$$te^{2t}-\frac{1}{2}\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}=te^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t.$$

5.7 Розв'язування систем диференціальних рівнянь операційним методом

Приклад 10. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'=-2x-2y-4z \\ y'=-2x+y-2z \\ z'=5x+2y+7z \end{cases},$$

що задовольняє початкові умови $x(0)=1$, $y(0)=2$, $z(0)=-1$.

Розв'язування.

Нехай $x(t)=X(p)$, $y(t)=Y(p)$, $z(t)=Z(p)$. Запишемо операторну систему рівнянь:

$$\begin{cases} pX(p)-1=-2X(p)-2Y(p)-4Z(p) \\ pY(p)-2=-2X(p)+Y(p)-2Z(p) \\ pZ(p)+1=5X(p)+2Y(p)+7Z(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p+2)X(p)+2Y(p)+4Z(p)=1 \\ 2X(p)+(p-1)Y(p)+2Z(p)=2 \\ 5X(p)+2Y(p)+(7-p)Z(p)=1 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+2 & 2 & 4 \\ 2 & p-1 & 2 \\ 5 & 2 & 7-p \end{vmatrix}=-(p^3-6p^2+11p-6)=-(p-3)(p-1)(p-2)$$

$$\Delta X=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & p-1 & 2\\ 1 & 2 & 7-p\end{vmatrix}=-\left(p^2-8p+15\right)=-(p\text{-}3)(p\text{-}5)$$

$$\Delta Y=\begin{vmatrix}p\cdot 2 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 2\\ 5 & 1 & 7-p\end{vmatrix}=-2(p\text{-}3)(p\text{-}2)$$

$$\Delta Z=\begin{vmatrix}p\cdot 2 & 2 & 1\\ 2 & p-1 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=p^2-8p+15=(p\text{-}3)(p\text{-}5).$$

Тоді $X(p)=\dfrac{\Delta X}{\Delta},\ Y(p)=\dfrac{\Delta Y}{\Delta},\ Z(p)=\dfrac{\Delta Z}{\Delta}.$

$$X(p)=\frac{(p-3)(p-5)}{(p-3)(p-1)(p-2)}=\frac{p-5}{(p-1)(p-2)}=\frac{p-5}{p^2-3p+2}$$

$p=1,\ p=2$, прості полюси, тому

$$\operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{p-5}{p^2-3p+2}e^{pt}\left(\frac{p-5}{p^2-3p+2}e^{pt}\right)+\operatorname*{res}_{p=2}\left(\frac{p-5}{p^2-3p+2}e^{pt}\right)=\right.$$

$$=\frac{p-5}{2p-3}\bigg|_{p=1}^{e^t}+\frac{p-5}{2p-3}\bigg|_{p=2}^{e^{2t}}=\frac{p-5}{2p-3}\bigg|_{p=2}^{e^{2t}}=\frac{-4}{-1}e^t-3e^{2t}=4e^t-3e^{2t}=x(t);$$

$$Y(p)=\frac{2(p-3)(p-2)}{(p-3)(p-1)(p-2)}=\frac{2}{p-1}=2e^t=y(t);$$

$$Z(p)=\frac{-(p-3)(p-5)}{(p-3)(p-1)(p-2)}=-\frac{p-5}{(p-1)(p-2)}=3e^{2t}-4e^t=z(t).$$

6 Завдання для самостійної роботи з теми „Операційне числення”

1. Знайти зображення оригіналу:

1. $f(t)=\begin{cases}4t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0;\ t>1\end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases}(5-t), & 0\le t\le 5\\ 0, & t<0;\ t>5\end{cases}$.

3. $f(t)=\begin{cases} e^{2-t}, \ t \ge 2 \\ 0, \ t<2 \end{cases}$;

4. $f(t)=\begin{cases} e^{-3t}, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

5. $f(t)=\begin{cases} (t-5), \ 5 \le t \le 6 \\ 0, \ t<5; \ t>6 \end{cases}$;

6. $f(t)=\begin{cases} (3-t), \ 1 \le t \le 3 \\ 0, \ t<1; \ t>3 \end{cases}$.

7. $f(t)=\begin{cases} 8; \ 2 \le t \le 3 \\ 0, \ t<2; \ t>3 \end{cases}$;

8. $f(t)=\begin{cases} e^{t-3}, \ t \ge 3 \\ 0, \ t<3 \end{cases}$.

9. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sh} 2t, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$;

10. $f(t)=\begin{cases} -2t, \ t \ge 1 \\ 0, \ t<1 \end{cases}$.

11. $f(t)=\begin{cases} 6; \ 2 \le t \le 4 \\ 0, \ t<2; \ t>4 \end{cases}$;

12. $f(t)=\begin{cases} \cos t, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

13. $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, \ t \ge 1 \\ 0, \ t<1 \end{cases}$;

14. $f(t)=\begin{cases} (2t-4), \ 2 \le t \le 3 \\ 0, \ t<2; \ t>3 \end{cases}$.

15. $f(t)=\begin{cases} 2t, \ 0 \le t \le 2 \\ 0, \ t<0; \ t>2 \end{cases}$;

16. $f(t)=\begin{cases} e^{t-2}, \ t \ge 2 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

17. $f(t)=\begin{cases} e^{t}, \ 0 \le t \le 1 \\ 0, \ t<0; \ t>1 \end{cases}$;

18. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{ch} t, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

19. $f(t)=\begin{cases} te^{-t}, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$;

20. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sh} t, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

21. $f(t)=\begin{cases} 4; \ 1 \le t \le 3 \\ 0, \ t<1; \ t>3 \end{cases}$;

22. $f(t)=\begin{cases} t+2, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

23. $f(t)=\begin{cases} 2-t, \ 0 \le t \le 2 \\ 0, \ t<0; \ t>2 \end{cases}$;

24. $f(t)=\begin{cases} e^{-2t}, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

25. $f(t)=\begin{cases} \sin t, \ 0 \le t \le \pi \\ 0, \ t<0; \ t>\pi \end{cases}$;

26. $f(t)=\begin{cases} t, \ 0 \le t \le 2 \\ 0, \ t<0; \ t>2 \end{cases}$.

27. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{ch} 3t, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$;

28. $f(t)=\begin{cases} t^2, \ 0 \le t \le 1 \\ 0, \ t<0; \ t>1 \end{cases}$.

29. $f(t)=\begin{cases} e^{2t}, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$;

30. $f(t)=\begin{cases} \sin 4t, \ t \ge 0 \\ 0, \ t<0 \end{cases}$.

2. Використовуючи властивості оригіналу $f(t)$, знайти його зображення $F(p)$:

1. а) $f(t)=e^{-t}\cos t$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \cos 3t\,dt$.

2. а) $f(t)=\dfrac{\sin 3t+\sin 2t}{t}$; б) $f(t)=e^{-4t}\sin t\sin 5t$.

3. а) $f(t)=e^{6t}\sin 2t$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \sin 4t\,dt$.

4. а) $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}$; б) $f(t)=e^{4t}\,t\cos t$.

5. а) $f(t)=\dfrac{1-\cos 6t}{t}$; б) $f(t)=e^{-t}\cos t\cos 3t$.

6. а) $f(t)=e^{2t}\,t\cos t$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2 2t\,dt$.

7. а) $f(t)=\dfrac{e^{4t}-e^{3t}}{t}$; б) $f(t)=e^{-3t}\cos 2t$.

8. а) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 3t}{t}$; б) $f(t)=\int\limits_0^t t\cos 2t\,dt$.

9. а) $f(t)=(t+1)\cos 2t$; б) $f(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{t}$.

10. а) $f(t)=t^2\sin 3t$; б) $f(t)=\int\limits_0^t t\,\mathrm{sh}\,3t\,dt$.

11. а) $f(t)=\sin^2 3t$; б) $f(t)=e^{t}\sin 2t+e^{-t}\cos 2t$.

12. а) $f(t)=(t+2)\sin\dfrac{t}{3}$; б) $f(t)=e^{2t}\,\mathrm{ch}\,t-\mathrm{sh}\,2t$.

13. а) $f(t)=e^{-t}\,t\sin 4t$; б) $f(t)=\int\limits_0^t t\cos 5t\,dt$.

14. а) $f(t)=\dfrac{e^{3t}-e^{t}}{t}$; б) $f(t)=t\cos^2 2t$.

15. а) $f(t)=(t-1)\,e^{7t}$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \sin^2 4t\,dt$.

16. а) $f(t) = e^{5t} \sin 3t$; б) $f(t)=\int_0^t t\, e^{4t} dt$.

17. а) $f(t)=\dfrac{\operatorname{ch} 2t - 1}{t}$; б) $f(t) = e^{-3t} \cos 2t \cos 5t$.

18. а) $f(t) = (t-1) \cos\dfrac{3}{2}t$; б) $f(t)=\int_0^t (t-1)\, e^{2t} dt$.

19. а) $f(t) = e^{-t}\, t \sin 4t$; б) $f(t)=\dfrac{\cos t + \cos 3t}{t}$.

20. а) $f(t)= t^3 e^{2t}$; б) $f(t)=\int_0^t t \cos 2t\, dt$.

21. а) $f(t)=e^{-2t} \cos 5t$; б) $f(t)=\int_0^t t e^{-4t} dt$.

22. а) $f(t)=\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$; б) $f(t)= e^{-6t} \cos^2 t$.

23. а) $f(t) = e^{9t} \sin 2t$; б) $f(t)=\dfrac{1-\cos 3t}{t}$.

24. а) $f(t)=\dfrac{\sin^2 2t}{t}$; б) $f(t) = e^{-2t}\, t \cos 2t$.

25. а) $f(t) = e^{-t}\, t \sin t$; б) $f(t)=e^{3t} \sin\dfrac{t}{2}$.

26. а) $f(t)=\int_0^t \sin^2 t\, dt$; б) $f(t)=t^3 e^{2t}$.

27. а) $f(t) = t \sin 2t + \cos^2 t$; б) $f(t)=\int_0^t \cos\dfrac{3}{2}t\, dt$.

28. а) $f(t) = e^{-2t} \cos^2 3t$; б) $f(t) = e^{t}\, t \cos t$.

29. а) $f(t)= \int_0^t t \operatorname{sh} 2t\, dt$; б) $f(t)=\dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2}$.

30. а) $f(t) = (t^2+1) e^{2t}$; б) $f(t)=\int_0^t t^2 e^t dt$.

3. За даним зображенням $F(p)$ записати оригінал $f(t)$, використовуючи властивості зображень:

1. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p-1)}$

2. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p(p-4)^2}$

3. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p+2)^3}$

4. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+2)(p-3)}$

5. $F(p)=\dfrac{2}{(p^2+1)^2}$

6. $F(p)=\dfrac{4}{(p^2+1)(p+3)}$

7. $F(p)=\dfrac{2p}{(p-4)^3}$

8. $F(p)=\dfrac{3e^{-p}}{(p^2+1)(p+5)^2}$

9. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$

10. $F(p)=\dfrac{8}{p(p+1)^2}$

11. $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p(p-1)^2}$

12. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+3)^2}$

13. $F(p)=\dfrac{p}{(p-5)^3}$

14. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$

15. $F(p)=\dfrac{4p-1}{p(p-1)^2}$

16. $F(p)=\dfrac{2p}{(p+1)(p=4)^2}$

17. $F(p)=\dfrac{p}{(p-2)(p^2+1)}$

18. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+2)^2}$

19. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p^2+4)}$

20. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p^2+1)}$

21. $F(p)=\dfrac{2p}{(p-4)^3}$

22. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p^2+4)}$

23. $F(p)=\dfrac{6}{(p+1)(p-5)^2}$

24. $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2+2p+1}$

25. $F(p)=\dfrac{3e^{-p}}{(p+5)^2}$

26. $F(p)=\dfrac{p-4}{p^2+2p+2}$

27. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+3)(p^2+1)}$

28. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{(p+1)^3}$

29. $F(p)=\dfrac{7}{p(p+5)^2}$

30. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p^2+9)}$

4.За даним зображенням $F(p)$ знайти оригінал:

а) розкладанням на найпростіші дроби

б) використовуючи лишки

1. $F(p)=\dfrac{3p+2}{(p-1)(p^2+4)}$

2. $F(p)=\dfrac{p-2}{p(p+1)(p^2+1)}$

3. $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p-3)(p^2+9)}$

4. $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p+3)(p^2+16)}$

5. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p-2)(p+1)}$

6. $F(p)=\dfrac{4}{(p^2+4)(p-2)}$

7. $F(p)=\dfrac{p}{(p+3)(p^2+5)}$

8. $F(p)=\dfrac{p}{(p-4)(p+1)(p^2+9)}$

9. $F(p)=\dfrac{3-p}{(p^2+25)(p-2)}$

10. $F(p)=\dfrac{1-p}{(p+3)(p^2+1)}$

11. $F(p)=\dfrac{p-4}{(p+2)(p^2+2)}$

12. $F(p)=\dfrac{2-p}{(p+1)(p^2+9)}$

13. $F(p)=\dfrac{3}{(p+1)(p-2)(p^2+9)}$

14. $F(p)=\dfrac{1-p}{(p+1)(p^2+6)}$

15. $F(p)=\dfrac{3p+5}{(p+3)(p^2+2)}$

16. $F(p)=\dfrac{p+4}{(p+6)(p^2+1)}$

17. $F(p)=\dfrac{p-1}{(p+3)(p+1)^2}$

18. $F(p)=\dfrac{4}{p^2(p^2+1)}$

19. $F(p)=\dfrac{p-3}{(p-2)^2(p^2+4)}$

20. $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p+4)(p^2+4)}$

21. $F(p)=\dfrac{2p+7}{(p^2+9)(p-5)}$

22. $F(p)=\dfrac{2-p}{p(p+4)^2}$

23. $F(p)=\dfrac{2}{(p+5)^2(p-1)}$

24. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^2(p-3)}$

25. $F(p)=\dfrac{p+4}{(p-3)(p^2+25)}$

26. $F(p)=\dfrac{4p+1}{p(p^2+3)}$

27. $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p(p^2+16)}$

28. $F(p)=\dfrac{4-p}{(p+3)(p-2)^2}$

29. $F(p)=\dfrac{2p}{(p-4)(p^2+4)}$

30. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+3)(p^2+1)}$

5. Розв'язати диференціальне рівняння, що задовольняє початкові умови $y(0)=0$, $y'(0)=0$, використовуючи:

а) розкладання на найпростіші дроби;

б) інтеграл Дюамеля;

в) лишки.

1. $y''+y=5t$
2. $2y''-y'-y=\cos t$
3. $y''-y'-6y=4$
4. $y''-3y'+2y=5t$
5. $y''+4y'=e^{2t}$
6. $y''+5y'+6y=2$
7. $y''+9y=t+1$
8. $y''-y=\sin 2t$
9. $y''-4y=2e^{t}$
10. $y''-2y'=e^{3t}$
11. $y''+3y'=\cos 3t$
12. $y''-2y'+y=3t$
13. $y''+4y'+4y=2$
14. $y''+10y=2t$
15. $y''-6y'+5y=3t$
16. $y''+y'=3\cos t$
17. $y''+3y'=\sin t$
18. $y''-4y'=5$
19. $y''-y'-2y=t$
20. $y''+6y'+9=t-1$
21. $2y''+3y'-2y=6$
22. $y''-6y'=2e^{-t}$

23. $y'' + 6y' = 3e^t$

24. $4y'' - 4y' + y = 4$

25. $y'' + 4y = e^{-t}$

26. $y'' - 3y' - 4y = \cos 2t$

27. $y'' - 6y' = e^{-2t}$

28. $y'' - 5y' = 2e$

29. $y'' + y' = 3\cos t$

30. $y'' - 4y' = 5$

6. Розв'язати систему рівнянь операційним методом:

1. $\begin{cases} x' = x + 2y & x(0) = -1 \\ y' = 2x + y & y(0) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 3x - 2y & x(0) = 1 \\ y' = x + 2 & y(0) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 3x + 2y & x(0) = 1 \\ y' = 2x - t & y(0) = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - y & x(0) = 1 \\ y' = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = y - 2x & x(0) = 0 \\ y' = 3x + e^t & y(0) = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2x + 2y & x(0) = -1 \\ y' = 3x + y & y(0) = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 3x + y + 1 & x(0) = 0 \\ y' = -2x + t & y(0) = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = x - y & x(0) = 1 \\ y' = 2x + 3y & y(0) = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = x + y & x(0) = 1 \\ y' = 2x + e^t & y(0) = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -x - y & x(0) = 0 \\ y' = 2x - 3y & y(0) = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -x + 3y & x(0) = 0 \\ y' = 2x - e^t & y(0) = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 4x - y & x(0) = -1 \\ y' = 3x + e^{-t} & y(0) = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = x - 8y & x(0) = 1 \\ y' = 3y - x & y(0) = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = y + 1 & x(0) = 0 \\ y' = 2x - y + t & y(0) = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 2x - y & x(0) = 0 \\ y' = 3x + 6y & y(0) = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x + y + t & x(0) = 0 \\ y' = 1 - x & y(0) = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = x + 2y & x(0) = 0 \\ y' = 2x + y + 1 & y(0) = 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = y - x & x(0) = 2 \\ y' = x - y + 3 & y(0) = -1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = x + 4y & x(0) = 1 \\ y' = 2x + 3y & y(0) = -2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = x - y & x(0) = 1 \\ y' = y - x + 1 & y(0) = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = x - y & x(0) = 1 \\ y' = 2x + 3y & y(0) = -1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' + y = t & x(0) = 1 \\ y' + x = e^t & y(0) = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = y + 2 & x(0) = 0 \\ y' = 2x - y + t & y(0) = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = x + y & x(0) = 2 \\ y' = 3y - x & y(0) = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 2x + y & x(0) = 1 \\ y' = 4x - y & y(0) = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = x + 2y & x(0) = 0 \\ y' = 4x - y & y(0) = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 3 - y & x(0) = 0 \\ y' = x + 2y + 1 & y(0) = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 2x - 2y & x(0) = 0 \\ y' = x - y & y(0) = -1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 2 - y & x(0) = 0 \\ y' = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = x - y & x(0) = 0 \\ y' = 3x - 2y & y(0) = 2 \end{cases}$

Література

1. Пискунов Н.С. Диференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов.-Т.2 -М.: Наука, 1985.
2. Чинаев П.И., Минин Н.А., Перевозников А.Ю., Черенков А.А. Высшая математика. Специальные главы. – К.: Вища школа, 1981.
3. Петрунина И.С., Петрунин В.С., Педорченко Л.И. Методические указания к выполнению типовых расчетов по курсу высшей математики. – Винница: ВПИ, 1988.
4. Кашканова Г.Г., Петрук В.А. Теорія функцій комплексної змінної. Навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей. – Вінниця: ВДТУ, 1998.

Навчальне видання

Кашканова Г.Г., Петрук В.А.

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 3

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор С.А. Малішевська

Підписано до друку 9.04.2002р
Формат 29.7×42 ¼ Гарнітура Times New Roman

Друк різографічний Ум. друк. арк. 4.13
Тираж 75 прим.
Зам.№ 2002-102

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел. **(0432) 44-01-59**