ББК 22.17
К 60
УДК 519.2

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук Т. М. Гатауллин (Государственная академия управления им. С. Орджоникидзе), д-р эконом. наук В. [illegible] Тавбовцев (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

К $\frac{4306020500-394}{001(01)-91}$ 83—91

ISBN 5-06-002069-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждая математическая теория становится более понятной и доступной, если ее удается использовать для решения практических задач. Настоящее пособие позволит каждому учащемуся техникума, изучающему начала математической статистики, приобрести навыки использования теоретических знаний на практике.

Основную часть практикума составляют шесть параграфов: первые два содержат элементы теории вероятностей, остальные посвящены математической статистике. В каждом параграфе имеется одна работа, содержащая до десяти задач. В начале параграфа кратко излагается необходимый теоретический материал и приводятся формулы, требуемые для решения задач. Каждая задача имеет тридцать один вариант. В конце каждого параграфа в качестве эталонного решен нулевой вариант работы.

В седьмом параграфе заданы выборки, используемые в работах по математической статистике. В приложениях содержатся таблицы распределений случайных величин, необходимые при решении задач.

Все задачи разных вариантов однотипны. Числовые данные приведены в таблицах или находятся параметрически по номеру варианта V, или заданы в виде выборок в § 7.

В данном пособии все примеры решены «вручную». Микрокалькулятор и ЭВМ использованы только для выполнения некоторых вычислений. Если способ решения задачи на микрокалькуляторе или на ЭВМ отличается от решения «вручную», то соответствующие формулы и указания содержатся в теоретической части каждого параграфа.

Решать задачи можно на уроках практических занятий или дома. Рекомендуется решения задач оформлять в специальной тетради, рисунки выполнять на миллиметровой бумаге и приклеивать в тетрадь. Перед тем как приступить к решению задачи, рекомендуется переписать ее текст вместе с числовыми данными, соответствующими конкретному варианту. Результаты вычислений следует оформлять в виде таблиц.

Автор

Глава I
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Событие. Всевозможные результаты испытаний называются *элементарными событиями* ω. Совокупность всех элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$ называется *множеством* (или *пространством*) элементарных событий.

В настоящем пособии будем считать, что пространство Ω конечно или счетно. В этом случае *событием* называется любое подмножество множества элементарных событий Ω. Говорят, что в результате испытания осуществилось событие A, если произошло элементарное событие $\omega \in A$. Пусть множество $\varnothing$ является *невозможным событием* Φ, которое при испытаниях произойти никогда не может. Само множество элементарных событий является *достоверным событием* Ω, которое произойдет в результате каждого испытания, потому что результат каждого испытания является элементарным событием. Остальные подмножества пространства элементарных событий Ω называются *случайными событиями* A, B, C, ... В результате испытания случайное событие может либо произойти, либо не произойти, при этом перед испытанием результат не определен.

2. Отношения между событиями. Отношения между событиями можно рассматривать как отношения между соответствующими подмножествами множества элементарных событий Ω.

1) **Следуемость**: $A \subset B$, *если из осуществления события A следует осуществление события B, или событие A влечет за собой событие B.*

2) **Равенство:** $A = B$, *если одновременно выполняются следующие условия:* $A \subset B$ и $B \subset A$.

3) **Сумма:** $A \cup B$ *выполняется тогда, когда происходит хотя бы одно из этих событий.*

4) **Произведение:** $A \cap B$ *выполняется тогда, когда происходят оба события (и A, и B).*

5) **Разность:** $A \setminus B$ *выполняется тогда, когда событие A происходит, а событие B не происходит.*

6) **Противоположность.** *Противоположное событие* $\bar{A} = \Omega \setminus A$ *осуществляется только тогда, когда не происходит событие A. Правильно и следующее утверждение:* $\bar{\bar{A}} = A$.

7) **Совместность.** *События называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если*

при осуществлении одного события другое произойти не может, т. е. они не могут произойти одновременно.

3. Системы событий. Множество событий $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ называется *системой событий* $\mathcal{A}$, если это множество не содержит ни одной пары равных событий. Система событий $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ называется *системой несовместных событий,* если все события в системе попарно несовместны. Система несовместных событий называется *полной*, если сумма всех событий системы является достоверным событием Ω.

4. Классическая вероятность. Мера возможности наступления события называется его *вероятностью. Классическая вероятность* события A определяется как отношение количества элементарных событий m, входящих в состав события A, к количеству всех возможных элементарных событий n:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{I.1}$$

Вероятность невозможного события Φ равна нулю: $P(\Phi) = 0$, *вероятность достоверного события* Ω равна единице: $P(\Omega) = 1$, *а вероятность* произвольного *случайного события* A заключена между 0 и 1: $0 < P(A) < 1$.

Вероятность суммы событий $A \cup B$ определяется следующей формулой:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{I.2}$$

Если события несовместны, то формула (I.2) упрощается и принимает вид

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{I.3}$$

Эту формулу можно обобщить на случай суммы любого количества несовместных событий. Учитывая, что $A \cup \bar{A} = \Omega$, и принимая во внимание формулу (I.3), получаем

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{I.4}$$

События являются *независимыми,* если вероятность происхождения одного события не зависит от того, произошло ли другое событие или нет. При зависимых событиях A и B имеет смысл говорить об *условной вероятности* $P(A|B)$ события A при условии, что событие B уже произошло. При независимых событиях условная вероятность равна обычной вероятности $P(A|B) = P(A)$.

Вероятность произведения событий $A \cap B$ выражается следующей формулой:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \text{ или } P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A). \tag{I.5}$$

Если события независимы, то формула (I.5) упрощается и принимает вид

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{I.6}$$

Эту формулу можно обобщить на случай произведения любого количества независимых событий.

Если событие A зависит от событий (гипотез) полной системы событий $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$, то вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i). \qquad (I.7)$$

В этом случае вместе с осуществлением события A происходит одно и только одно событие из системы $\mathscr{B}$.

Если событие A произошло, то можно вычислить условную вероятность того, что вместе с событием A осуществлялась гипотеза B_i:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}, \qquad (I.8)$$

где $P(A)$ — полная вероятность события A. Полученную формулу называют *формулой Бейеса*. С помощью формулы Бейеса можно после испытания уточнить вероятность происхождения гипотезы B_i. Сумма вероятностей гипотез B_i должна быть равна единице.

5. Понятия комбинаторики. При решении задач теории вероятностей часто используют следующие понятия комбинаторики: *перестановка, сочетание* и *размещение*, а также *правило умножения* и *правило сложения*.

Пусть дано множество $\mathscr{N}$ из n объектов. Всевозможные последовательности из всех n объектов называют **перестановками**. Общее число P_n различных перестановок из n объектов вычисляют по формуле

$$P_n = n! \qquad (I.9)$$

где $n! = 1 \cdot 2 ... n$, при этом считают, что $0! = 1$.

Сочетаниями называют подмножества множества $\mathscr{N}$. Общее число различных сочетаний C_n^m из n объектов по m вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (I.10)$$

Размещениями называют упорядоченные последовательности объектов подмножеств множества $\mathscr{N}$. Общее число различных размещений A_n^m из n объектов по m вычисляют по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)...(n-m+1). \qquad (I.11)$$

Правило умножения. Если требуется выполнить одно за другим какие-то k действий, которые можно выполнить соответственно $n_1, n_2, ..., n_k$ способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 ... n_k$ способами.

Правило сложения. Если два взаимно исключающие друг друга действия могут выполняться соответственно m или n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $m + n$ способами.

B_2 — среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные:

$$A_2 = B_1 \cup B_2.$$

Так как события B_1 и B_2 несовместны, можно использовать формулу (1.3). Имеем:

$$P(A_2) = P(B_1) + P(B_2);$$

$$m_1 = C_6^1 \cdot C_5^3 = \frac{6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 60, \quad m_2 = C_5^4 = 5;$$

$$P(B_1) = \frac{60}{330}, \quad P(B_2) = \frac{5}{330};$$

$$P(A_2) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}.$$

в) A_3 — среди вынутых шаров хотя бы один белый. Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый и 3 черных (B_1), 2 белых и 2 черных (B_2), 3 белых и 1 черный (B_3), 4 белых (B_4). Имеем

$$A_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4.$$

Здесь событие A_3 определяется словами «хотя бы один» и прямое решение приводит обычно к сложным вычислениям. Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем по формуле (1.4) вычислить вероятность искомого события.

$\bar{A}_3$ — среди вынутых шаров нет ни одного белого. В этом случае

$$m = C_5^4 = 5, \quad P(\bar{A}_3) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66};$$

$$P(A_3) = 1 - P(\bar{A}_3) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{65}{66}.$$

Ответ: $P(A_1) = 5/11$, $P(A_2) = 13/66$, $P(A_3) = 65/66$.

Задача 1.5. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями 0,851, 0,751 и 0,701. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя:

а) только один элемент;

б) хотя бы один элемент.

Испытание т. е. работу за время T, нужно рассмотреть на двух уровнях: на уровне устройства и на уровне элементов. Элементарные события определять не надо, так как их вероятности заданы.

а) A_1 — за время T выходит из строя только один элемент:

B_1 — первый элемент выходит из строя;

B_2 — второй элемент выходит из строя;

B_3 — третий элемент выходит из строя;

$\bar{B}_1$ — первый элемент не выходит из строя;

$\bar{B}_2$ — второй элемент не выходит из строя;

$\bar{B}_3$ — третий элемент не выходит из строя.

$$A_1 = (B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3).$$

Учитывая независимость элементов устройств, несовместность событий B_i и $\bar{B}_i$ и формулы (I.3) и (I.6), получаем следующую формулу:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\bar{B}_3) + \\ + P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(B_3).$$

По условию,

$$P(\bar{B}_1) = 0{,}851, \ P(\bar{B}_2) = 0{,}751, \ P(\bar{B}_3) = 0{,}701,$$

а по формуле (I.4) получаем

$$P(B_1) = 0{,}149, \ P(B_2) = 0{,}249, \ P(B_3) = 0{,}299.$$

Таким образом,

$$P(A_1) = 0{,}149 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}249 \cdot 0{,}701 + \\ + 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}299 = 0{,}418.$$

б) A_2 — за время T выходит из строя хотя бы один элемент. Событие определяется словами «хотя бы один», значит, используем противоположное событие.

$\bar{A}_2$ — за время T все элементы работают безотказно:

$\bar{A}_2 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3$;

$P(\bar{A}_2) = P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) = 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 = 0{,}448$;

$P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - 0{,}448 = 0{,}552$.

Ответ: $P(A_1) = 0{,}418$, $P(A_2) = 0{,}552$.

Задача 1.6. В первой урне 6 белых и 4 черных шара, а во второй урне 5 белых и 7 черных шаров. Из первой урны взяли случайно 3 шара, а из второй — 2 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров:

а) все шары одного цвета;

б) только три белых шара;

в) хотя бы один белый шар.

Шары вынимали из обеих урн независимо. Испытаниями являются извлечение трех шаров из первой урны и двух шаров из второй урны. Элементарными событиями будут сочетания по 3 или 2 из 10 или 12 шаров соответственно.

а) A_1 — все вынутые шары одного цвета, т. е. они или все белые, или все черные.

Определим для каждой урны всевозможные события:

B_1 — из первой урны вынуты 3 белых шара;

B_2 — из первой урны вынуты 2 белых и 1 черный шар;

B_3 — из первой урны вынуты 1 белый и 2 черных шара;

B_4 — из первой урны вынуты 3 черных шара;

C_1 — из второй урны вынуты 2 белых шара;

C_2 — из второй урны вынуты 1 белый и 1 черный шар;

C_3 — из второй урны вынуты 2 черных шара.

Значит, $A_1 = (B_1 \cap C_1) \cup (B_4 \cap C_3)$, откуда, учитывая независимость и несовместимость событий, получаем

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(C_1) + P(B_4) \cdot P(C_3).$$

Найдем количество элементарных событий n_1 и n_2 для первой и второй урн соответственно. Имеем

$$n_1 = C_{10}^3 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120, \quad n_2 = C_{12}^2 = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66.$$

Найдем количество каждого из элементарных событий, определяющих следующие события:

$$B_1\colon\ m_{11} = C_6^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20, \qquad C_1\colon\ m_{21} = C_5^2 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10,$$

$$B_2\colon\ m_{12} = C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 60, \qquad C_2\colon\ m_{22} = C_5^1 \cdot C_7^1 = 5 \cdot 7 = 35,$$

$$B_3\colon\ m_{13} = C_6^1 \cdot C_4^2 = \frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 36, \qquad C_3\colon\ m_{23} = C_7^2 = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21,$$

$$B_4\colon\ m_{14} = C_4^3 = 4.$$

Следовательно,

$$P(A_1) = \frac{20}{120} \cdot \frac{10}{66} + \frac{4}{120} \cdot \frac{21}{66} = \frac{50}{1980} + \frac{21}{1980} = \frac{71}{1980}.$$

б) A_2 — среди извлеченных шаров только 3 белых. В этом случае

$$A_2 = (B_1 \cap C_3) \cup (B_2 \cap C_2) \cup (B_3 \cap C_1);$$

$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(C_3) + P(B_2) \cdot P(C_2) + P(B_3) \cdot P(C_1);$$

$$P(A_2) = \frac{20}{120} \cdot \frac{21}{66} + \frac{60}{120} \cdot \frac{35}{66} + \frac{36}{120} \cdot \frac{10}{66} =$$

$$= \frac{7}{132} + \frac{35}{132} + \frac{6}{132} = \frac{48}{132} = \frac{4}{11}.$$

в) A_3 — среди извлеченных шаров имеется по крайней мере один белый.

$\bar{A}_3$ — среди извлеченных шаров нет ни одного белого шара. Тогда

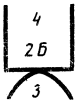
$$\bar{A}_3 = B_4 \cap C_3;$$

$$P(\bar{A}_3) = P(B_4) \cdot P(C_3) = \frac{4}{120} \cdot \frac{21}{66} = \frac{7}{660};$$

$$P(A_3) = 1 - P(\bar{A}_3) = 1 - \frac{7}{660} = \frac{653}{660}.$$

Ответ: $P(A_1) = \frac{71}{1980}$, $P(A_2) = \frac{4}{11}$, $P(A_3) = \frac{653}{660}$.

Задача 1.7. В урне 4 черных и белых шара. К ним прибавляют 2 белых шара. После этого из урны случайным образом вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые, предполагая, что все предположения о первоначальном содержании урны равновозможны.



Здесь имеют место два вида испытаний: сначала задается первоначальное содержимое урны и затем случайным образом вынимается 3 шара, причем результат второго испытания зависит от результата первого. Поэтому используем формулу полной вероятности (I.7).

Событие A — случайно вынимают 3 белых шара. Вероятность этого события зависит от того, каким был первоначальный состав шаров в урне.

Рассмотрим события:

B_1 — в урне было 4 белых шара;
B_2 — в урне было 3 белых и 1 черный шар;
B_3 — в урне было 2 белых и 2 черных шара;
B_4 — в урне был 1 белый и 3 черных шара;
B_5 — в урне было 4 черных шара.

Формулу полной вероятности используем в следующем виде:

$$P(A) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2) + \\ + P(A|B_3)\cdot P(B_3) + P(A|B_4)\cdot P(B_4) + \\ + P(A|B_5)\cdot P(B_5).$$

События B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 образуют полную систему событий, значит, их сумма равна достоверному событию

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 = \Omega.$$

Используя формулу (I.3), получаем

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 1.$$

По условию все эти вероятности равны. Следовательно,

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{1}{5}.$$

Общее число элементарных исходов

$$n = C_6^3 = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 20.$$

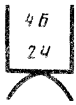
Найдем условные вероятности события A при различных условиях.

При B_1: 

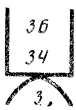
$m_1 = C_6^3 = 20,$ $\qquad P(A|B_1) = \frac{20}{20} = 1.$

При B_2: 

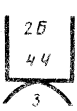
$m_2 = C_5^3 = \frac{4\cdot5}{1\cdot2} = 10,$ $\qquad P(A|B_2) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$

При B_3: 

$m_3 = C_4^3 = 4,$ $P(A|B_3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$

При B_4: 

$m_4 = C_3^3 = 1,$ $P(A|B_4) = \frac{1}{20}.$

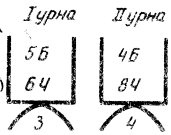
При B_5: 

$m_5 = 0,$ $P(A|B_5) = 0.$

$$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{20+10+4+1}{20} = \frac{1}{5} \cdot \frac{35}{20} = \frac{7}{20}.$$

Ответ: $P(A) = \frac{7}{20}.$

Задача 1.8. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой — 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.



В этой задаче испытания также происходят в два этапа: вначале случайным образом вынимают шары из первой урны и опускают во вторую, а затем случайно вынимают шары из второй урны.

Рассмотрим события:

A — шары, взятые из второй урны;

B_1 — из первой урны взяли 3 белых шара;

B_2 — из первой урны взяли 2 белых и 1 черный шар;

B_3 — из первой урны взяли 1 белый и 2 черных шара;

B_4 — из первой урны взяли 3 черных шара.

Используя формулу полной вероятности (I.7), находим

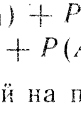
$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) + P(A|B_4) \cdot P(B_4).$$

Количество элементарных событий на первом этапе равно

$$n_1 = C_{11}^3 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165,$$

а на втором этапе

$$n_2 = C_{15}^4 = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 13 \cdot 7 \cdot 15.$$

При B_1: $m_1 = C_5^3 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10,$ 

$m_2 = C_7^4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35,$

$P(B_1) = \frac{10}{165} = \frac{2}{33},$ $P(A|B_1) = \frac{35}{13 \cdot 7 \cdot 15}$

При B_2: $m_1 = C_5^2 \cdot C_6^1 = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot1} = 60$, $m_2 = C_6^4 = \frac{5\cdot6}{1\cdot2} = 15$,

$$P(B_2) = \frac{60}{165} = \frac{12}{33}, \qquad P(A|B_2) = \frac{15}{13\cdot7\cdot15}.$$

При B_3: $m_1 = C_5^1 \cdot C_6^2 = \frac{5\cdot5\cdot6}{1\cdot1\cdot2} = 75$, $m_2 = C_5^4 = 5$.

$$P(B_3) = \frac{75}{165} = \frac{15}{33} \qquad P(A|B_3) = \frac{5}{13\cdot7\cdot15}.$$

При B_4: $m_1 = C_6^3 = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 20$, $m_2 = C_4^4 = 1$,

$$P(B_4) = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}, \qquad P(A|B_4) = \frac{1}{13\cdot7\cdot15}.$$

$$P(A) = \frac{2}{33}\cdot\frac{35}{13\cdot7\cdot15} + \frac{12}{33}\cdot\frac{15}{13\cdot7\cdot15} +$$

$$+ \frac{15}{33}\cdot\frac{15}{13\cdot7\cdot15} + \frac{4}{33}\cdot\frac{1}{13\cdot7\cdot15} =$$

$$= \frac{70+180+75+4}{33\cdot13\cdot7\cdot15} = \frac{329}{33\cdot13\cdot7\cdot15} = \frac{47}{6435}.$$

Ответ: $P(A) = \frac{47}{6435}$.

Задача 1.9. В пирамиде стоят 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0,81, а стреляя из винтовки без оптического прицела, — с вероятностью 0,46. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

В этой задаче первым испытанием является случайный выбор винтовки, вторым — стрельба по мишени. Рассмотрим следующие события:

A — стрелок поразит мишень;

B_1 — стрелок возьмет винтовку с оптическим прицелом;

B_2 — стрелок возьмет винтовку без оптического прицела.

Используем формулу полной вероятности (1.7). Имеем

$$P(A) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2).$$

Учитывая, что винтовки выбираются по одной, получаем $n = C_{19}^1 = 19$ и соответственно $m_1 = C_3^1 = 3$ (для B_1) и $m_2 = C_{16}^1 = 16$ (для B_2); таким образом, $P(B_1) = 3/19$, $P(B_2) = 16/19$.

Условные вероятности заданы в условии задачи:

$$P(A|B_1) = 0{,}81 \text{ и } P(A|B_2) = 0{,}46.$$

Следовательно,

$$P(A) = 0{,}81\cdot\frac{3}{19} + 0{,}46\cdot\frac{16}{19} = 0{,}515.$$

Ответ. $P(A) = 0{,}515$.

Задача 1.10. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели названных заводов соответственно в количестве 19, 6 и 11 шт., которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока соответственно с вероятностями 0,85, 0,76 и 0,71. Рабочий берет случайно один двигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятности того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом-изготовителем.

Первым испытанием является выбор электродвигателя, вторым — работа электродвигателя во время гарантийного срока. Рассмотрим следующие события:

A — электродвигатель работает безотказно до конца гарантийного срока;

B_1 — монтер возьмет двигатель из продукции 1-го завода;

B_2 — монтер возьмет двигатель из продукции 2-го завода;

B_3 — монтер возьмет двигатель из продукции 3-го завода.

Вероятность события A вычисляем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3).$$

Условные вероятности заданы в условии задачи:

$$P(A|B_1) = 0{,}85, \ P(A|B_2) = 0{,}76, \ P(A|B_3) = 0{,}71.$$

Аналогично предыдущей задаче найдем вероятности:

$$P(B_1) = 19/36 = 0{,}528; \ P(B_2) = 6/36 = 0{,}167;$$
$$P(B_3) = 11/36 = 0{,}306;$$

$$P(A) = 0{,}85 \cdot 19/36 + 0{,}76 \cdot 6/36 + 0{,}71 \cdot 11/36 = 0{,}792.$$

По формуле Байеса (1.8) вычисляем условные вероятности событий (гипотез) B_1:

$$P(B_1|A) = \frac{0{,}528 \cdot 0{,}85}{0{,}792} = 0{,}566;$$

$$P(B_2|A) = \frac{0{,}167 \cdot 0{,}76}{0{,}792} = 0{,}160;$$

$$P(B_3|A) = \frac{0{,}306 \cdot 0{,}71}{0{,}792} = 0{,}274.$$

Ответ: $P(B_1|A) = 0{,}566$, $P(B_2|A) = 0{,}160$, $P(B_3|A) = 0{,}274$.

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Повторные испытания. Предположим, что событие A происходит в результате n независимых испытаний, притом в каждом испытании вероятность события A постоянна и равна p. Результа-

том каждого испытания является либо событие A, либо событие $\bar{A}$. Последнее происходит с вероятностью $q = 1 - p$.

Если рассматривать все n испытаний как одно испытание, то его результатом является произведение событий A и $\bar{A}$. Здесь ввиду независимости исходных испытаний важен не порядок событий, а число повторений события A. Частоту события A обозначим через k, $0 < k < n$. Вероятность появления события A k раз вычисляют по *формуле Бернулли:*

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (I.12)$$

Если нужно вычислить вероятности для всех значений k, $0 < k < n$, то можно воспользоваться формулой, с помощью которой p_k вычисляется по значению p_{k-1}:

$$p_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (I.13)$$

Тогда p_0 следует вычислять по формуле (I.12), которая при $k = 0$ принимает вид $p_0 = q^n$, а все остальные p_k — по формуле (I.13). При больших значениях n и k вычисления по формуле Бернулли достаточно громоздки и, кроме того, на практике обычно не требуется такая высокая точность. Поэтому разработаны довольно точные приближенные методы вычисления вероятности p_k.

Иногда находят *наивероятнейшую частоту*, т. е. частоту, имеющую максимальную вероятность. Наивероятнейшая частота находится в интервале $np - q \leqslant k \leqslant np + p$. Длина этого интервала равна единице, поэтому если границы интервала — целые числа, то имеются две наивероятнейшие частоты, в противном случае — только одна.

2. Формулы Муавра — Лапласа и Пуассона. Вместо формулы Бернулли (I.12) можно использовать **локальную теорему Муавра — Лапласа:**

если при n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая не очень близка к нулю и единице ($0 < p < 1$), то при достаточно большом количестве испытаний n вероятность того, что событие A произойдет k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (I.14)$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $f(x)$ — четная ($f(-x) = f(x)$) и принимает только неотрицательные значения (рис. 1). Для нее составлены таблицы (см. приложение 2). Так как график функции симметричен относительно оси ординат, то таблицы составлены только для положительных значений аргумента.

Если вероятность p реализации события A близка к нулю, то

следует использовать следующую **теорему Пуассона**, которая в этом случае дает большую точность.

если при n независимых испытаниях событие A происходит с вероятностью p, близкой к 0, то при достаточно большом n вероятность осуществления события A k раз приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (1.15)$$

где $\lambda = np$.

Для функции формулы (1.15) также составлены таблицы (см. приложение 1).

Часто нужно найти вероятность того, что частота появления события A находится в каком-то интервале. Эту проблему позволяет решить **интегральная теорема Муавра—Лапласа:**

если в n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая отличается от 0 и 1, то при достаточно большом n вероятность того, что частота k события A находится в интервале $[a, b]$, *приближенно равна*

$$P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.16)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x)$ является интегралом от функции $f(x)$ [см. формулу (1.14)] и принимает значения в интервале $[0, 1]$, при этом $\Phi(-\infty) = 0$; и $\Phi(\infty) = 1$ и $\Phi(0) = 0{,}5$. График функции $\Phi(x)$ приведен на рис. 2. Для функции $\Phi(x)$ составлены таблицы (см. приложение 3). Таблицы составлены только для положительных значений аргумента. Для отрицательных аргументов значения функции можно получить из этой же таблицы, используя соотношение

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \qquad (1.17)$$

Иногда нужно решить следующую задачу. В n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p. Найти вероятность того, что относительная частота k/n события A отличается от вероятности события A по абсолютной величине не больше чем на $\varepsilon > 0$. Решение этой задачи сводится к использованию интегральной формулы Муавра—Лапласа (1.16), с помощью которой для решения данной задачи получаем следующую формулу:

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1. \qquad (1.18)$$

3. Понятие случайной величины. *Случайной величиной X* называют величину, которая случайно принимает какое-то значение

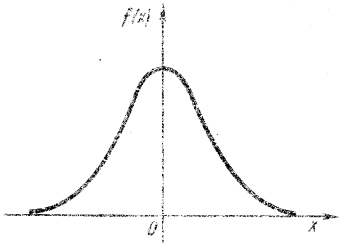


Рис. 1. График функции $f(x)$

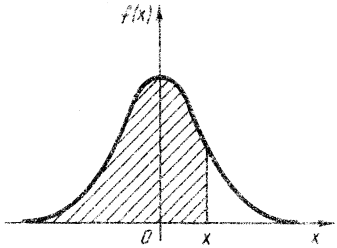


Рис. 2. Геометрический смысл функции $\Phi(x)$

из совокупности своих значений, ее *закон распределения* может быть задан *функцией распределения*

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.19}$$

Функция распределения $F(x)$ — неубывающая, непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси, при этом $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$. Случайные величины будем обозначать обычно последними буквами латинского алфавита: X, Y, Z.

Практически случайную величину можно получить, сопоставляя событиям из полной системы событий вещественных чисел. Совокупность этих чисел образует совокупность значений случайной величины. По совокупностям значений различают случайные величины двух видов: дискретные и непрерывные. *Дискретными* называют случайные величины, значениями которых являются только отдельные точки числовой оси. Значениями непрерывной случайной величины могут быть любые точки какого-то интервала на числовой оси.

Закон распределения дискретной случайной величины X можно определить с помощью ряда распределения, заданного в виде следующей таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

В первой строке этой таблицы указаны все значения x_i дискретной случайной величины X, а во второй строке — вероятности p_i принятия случайной величиной соответствующих значений x_i. Сумма всех вероятностей равна единице.

На основе ряда распределения можно получить *функцию распределения дискретной случайной величины* X. Эта функция выражается следующей формулой:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \tag{1.20}$$

Формулу (I.20) можно записать в следующем виде, наглядно иллюстрирующем непрерывность слева функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1, \\ p_1, & x_1 < x \leqslant x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leqslant x_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \leqslant x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \tag{I.21}$$

График функции распределения дискретной случайной величины обычно представляет собой ступенчатую линию (рис. 3).

Закон распределения непрерывной случайной величины задается или *функцией распределения*, или *функцией плотности вероятности*. Функция распределения непрерывной случайной величины X представляется в виде интеграла

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \tag{I.22}$$

где $f(x) > 0$ — функция плотности вероятности. График этой функции всегда охватывает фигуру, площадь которой равна единице. Это следует из свойства функции распределения: $F(\infty) = 1$, так как

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1. \tag{I.23}$$

Формула (I.22) определяет площадь под графиком функции $f(x)$ в интервале $]-\infty, x]$ (рис. 4).

Если заданы два значения x_1 и x_2 непрерывной случайной величины $X (x_1 < x_2)$, то вероятность того, что X принимает значение в интервале $[x_1, x_2]$, равна

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}t. \tag{I.24}$$

Это можно доказать с помощью формул (I.19) и (I.22) (см. рис. 4). Подставив $x_1 = x_2$, получим

$$P(x_1 = X = x_2) = \int_{x_1}^{x_1} f(x)\mathrm{d}t = 0. \tag{I.25}$$

Из формул (I.22) и (I.25) видно, что значение функции плотности вероятности $f(x)$ не точно совпадает с вероят-

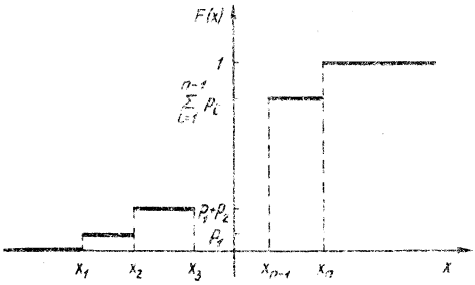


Рис. 3. График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X

ностью принятия значения дискретной случайной величины. Неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (см. рис. 4) означает, что при достаточно большом количестве испытаний вблизи точки x_1 окажется больше значений случайной величины X, чем вблизи точки x_2. Если все полученные значения изобразить в виде точек на числовой оси, то вокруг точки x_1 они будут находиться плотнее, чем вокруг точки x_2. Значит, чем больше значение функции плотности вероятности, тем больше вероятность того, что случайная величина примет значение вблизи этой точки (но не обязательно в самой точке).

График функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины представляет собой непрерывную кривую (рис. 5). Из формулы (I.22) следует, что

$$f(x) = F'(x). \tag{I.26}$$

Случайные величины X и Y являются *независимыми*, если при всех парах чисел (x, y) независимы и соответствующие события $(X < x)$ и $(Y < y)$.

4. Числовые характеристики случайной величины. 4.1. Среднее значение. Среднее значение дает чаще всего серединное значение совокупности значений случайной величины и обозначается через EX или $E(X)$. Учитывая, что значения случайной величины разбросаны вблизи среднего значения, среднее значение иногда называют математическим ожиданием (обозначение: $M(X)$).

Среднее значения дискретной случайной величины вычисляют по следующей формуле:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i, \tag{I.27}$$

где x_i — значение дискретной случайной величины, p_i — вероятность того, что случайная величина примет значение x_i, n — количество значений случайной величины, которое может быть равно и ∞, но тогда ряд (I.27) должен абсолютно сходиться.

Среднее значение непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x, \tag{I.28}$$

где $f(x)$ — функция плотности вероятности случайной величины и интеграл сходится абсолютно.

Среднее значение непрерывной случайной величины имеет следующие свойства, общие как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

1) $EC = C$, *если* C — *постоянная, т. е. среднее значение постоянной величины равно константе.*

2) $E(CX) = C \cdot EX$, *т. е. постоянную можно выносить из-под знака среднего значения.*

3) $E(X + Y) = EX + EY$. *Среднее значение суммы случайных величин равно сумме средних значений случайных величин.*

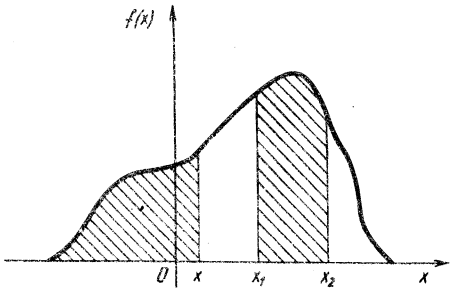


Рис. 4. График функции плотности вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X

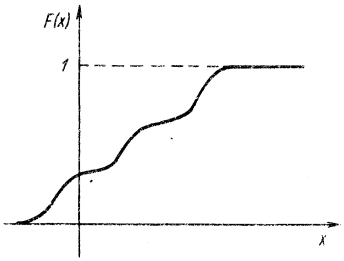


Рис. 5. График функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

4) *Если случайная величина* $X \geqslant 0$, *то и среднее значение* $EX \geqslant 0$.

5) *Если случайные величины* X *и* Y *независимы, то* $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$, *т. е. среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению средних значений случайных величин.*

4.2. Дисперсия. Дисперсия характеризует степень рассеяния значений случайной величины от своего среднего значения и обозначается через DX или $D(X)$. *Дисперсия* определяется как среднее значение квадрата отклонений случайной величины от своего среднего значения

$$DX = E(X - EX)^2. \tag{I.29}$$

Если эту формулу преобразовать, используя свойства среднего значения, то получаем формулу, которую обычно используют при вычислении дисперсии

$$DX = E(X^2) - (EX)^2. \tag{I.30}$$

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется [на основе формул (I.27), (I.29) и (I.30)] по следующей формуле:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 \cdot p_i \tag{I.31}$$

или

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (EX)^2. \tag{I.32}$$

Аналогично, согласно формулам (I.28) — (I.30), получаем формулы для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) \mathrm{d}x, \tag{I.33}$$

или

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - (EX)^2. \qquad (I.34)$$

Дисперсия имеет следующие свойства, которые можно доказать на основании свойств среднего значения.

1) *Дисперсия константы равна нулю:* $DC = 0$.

2) *Дисперсия всегда неотрицательна:* $DX \geqslant 0$.

3) *Постоянную можно вынести из-под знака дисперсии, возведя предварительно ее в квадрат:* $D(CX) = C^2 \cdot DX$.

4) *Изменение случайной величины на постоянную не изменяет ее дисперсию:* $D(C + X) = DX$.

5) *Если случайные величины X и Y независимы, то* $D(X \pm Y) = DX + DY$. *Дисперсия суммы или разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих случайных величин.*

4.3. Среднее квадратичное отклонение. *Средним квадратичным отклонением* называется квадратный корень из дисперсии $\sqrt{DX}$. Среднее квадратичное отклонение означает абсолютное среднее отклонение случайной величины от своего среднего значения.

4.4. Моменты. *Моментом порядка r* называется величина

$$m_r = EX^r. \qquad (I.35)$$

Центральным моментом порядка r называется величина

$$\bar{m}_r = E(X - EX)^r. \qquad (I.36)$$

Из этих определений видно, что среднее значение является моментом первого порядка ($m_1 = EX^1$), а дисперсия — центральным моментом второго порядка ($\bar{m}_2 = E(X - EX)^2 = DX$).

4.5. Мода. *Модой (Mo)* называется значение случайной величины, которое встречается чаще всего, т. е. имеет максимальную вероятность (для дискретной случайной величины) или максимум функции плотности вероятности в данной точке (при непрерывной случайной величине).

Одна и та же случайная величина может иметь одну или несколько мод. Однако возможно, что случайная величина и не имеет моды (если все ее значения имеют одинаковую вероятность (равномерное распределение)).

4.6. Медиана. Определим сначала понятие *квантиля непрерывной случайной величины.* Корень уравнения $F(x) = p$, где $F(x)$ — функция распределения и $0 < p < 1$, называется p-квантилем x_p (рис. 6.); 1/2-квантиль называется *медианой (Me)*. Учитывая определение функции распределения $F(x)$ [формулу (I.19)], получаем $P(X < Me) = 1/2$ и отсюда $P(X > Me) = 1/2$. Таким образом, медиана делит область значений случайной величины на две равные по вероятности части.

5. Биномиальное распределение. Случайная величина, имеющая биномиальное распределение, получается при повторных независимых испытаниях (см. п. 1). Значениями случайной величины X

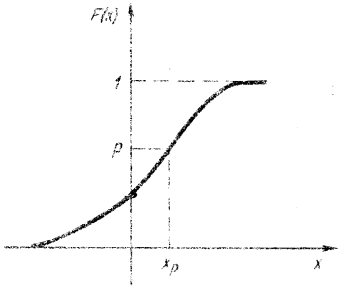


Рис. 6. p-квантиль

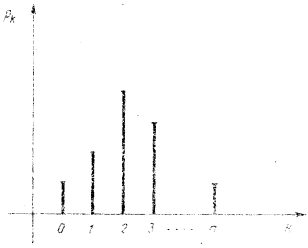


Рис. 7. График вероятностей значений случайной величины X с биномиальным распределением

являются частоты события A при независимых испытаниях, т. е. целые числа в интервале $[0, n]$. Это означает, что случайная величина с биномиальным распределением *дискретна*.

Вероятность каждого значения вычисляется по формуле Бернулли (I.12). Согласно формуле (I.20), можно записать *функцию распределения биномиальной случайной величины:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & 0 < x \leqslant n, \\ 1, & x > n. \end{cases} \qquad (I.37)$$

График функции распределения похож на график, изображенный на рис. 3. Часто строят график вероятностей значений случайной величины с биномиальным распределением (рис. 7). Параметрами биномиального распределения являются n и p. Утверждение, что случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, можно более кратко записывать в виде $X \in B(n, p)$. *Среднее значение* биномиального распределения $EX = np$ и *дисперсия* $DX = npq$. Модой является наивероятнейшая частота (см. п. 1).

6. Распределение Пуассона. Случайная величина, имеющая распределение Пуассона, принимает значения 0, 1, 2, ..., n, причем вероятность p_k того, что она принимает значения $k \geqslant 0$, вычисляется по формуле Пуассона (I.15). Ее *функция распределения* аналогично формулам (I.37) определяется соотношением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sum\limits_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & 0 < x \leqslant n, \\ 1, & x > n, \end{cases} \qquad (I.38)$$

где $\lambda = \text{const}$, $\lambda > 0$. Параметром распределения Пуассона является величина λ. Этому параметру равны и среднее значение, и дисперсия.

7. Равномерное распределение. Случайная величина X, имеющая равномерное распределение, принимает значения в интервале $[a, b]$, ее функция плотности вероятности $f(x)$ в этом интервале постоянна. По условию (I.23) можно определить эту константу и записать функцию плотности вероятности равномерного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \leqslant b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{I.39}$$

Функцию распределения можно найти по формуле (I.22):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{x-b}, & a < x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{I.40}$$

Графики этих функций изображены на рис. 8 и 9. *Среднее значение* EX получаем по формуле (I.28): $EX = (a + b)/2$, а *дисперсию* DX — по формуле (I.34), $DX = (b - a)/12$. Равномерное распределение не имеет моды, а медиана совпадает со средним значением.

8. Нормальное распределение. Нормальное распределение является самым распространенным распределением в природе, экономике и т. д. Случайная величина с нормальным распределением может принимать любые значения в интервале $]-\infty, +\infty[$ и имеет *функцию плотности вероятности*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{I.41}$$

где μ и σ — параметры нормального распределения, при этом $\sigma > 0$.

Как показывает исследование функции $f(x)$, функция определена на всей числовой оси, все ее значения неотрицательны, при $|x| \to \infty$ значения функции уменьшаются $f(x) \to 0$, т. е. ось x является асимптотой функции $f(x)$. Функция $f(x)$ достигает в точке $x = \mu$ максимума, равного $1/\sigma\sqrt{2\pi}$, и имеет точки перегиба в точках $x_1 = \mu - \sigma$ и $x_2 = \mu + \sigma$.

При изменении значения μ график функции $f(x)$ «жестко» смещается вдоль оси x (рис. 10). При изменении значения σ изменяется и вид графика: при увеличении значения σ в m раз максимальное значение функции уменьшается в m раз и график «вытягивается» в обе стороны вдоль оси x. При уменьшении значения σ происходит обратное (рис. 11).

На основании формул (I.22) и (I.41) получаем *функцию распределения* $\Phi(x)$ нормального распределения

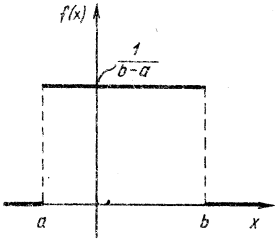


Рис. 8. График функции плотности вероятности $f(x)$ равномерного распределения

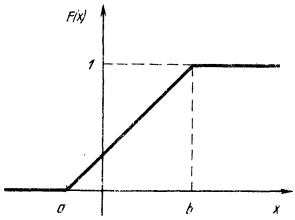


Рис. 9. График функции распределения $F(x)$ равномерного распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (I.42)$$

По параметрам нормального распределения вычисляют и все числовые характеристики нормального распределения, а именно, $EX = \mu$, $DX = \sigma^2$, σ является средним квадратичным отклонением: $Mo = Me = \mu$. Утверждение «случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ» кратко записывается так: $X \in N(\mu, \sigma)$.

Особое значение среди нормальных распределений имеет *нормированное нормальное распределение* с параметрами 0 и 1: $X \in N(0, 1)$. Если подставить $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ в формулу (I.41) и (I.42), то получим уже знакомые формулы для $f(x)$ и $\Phi(x)$ [см. формулы (I.14) и (I.16)]. Для этих функций составлены таблицы (см. приложения 2 и 3). От произвольного нормального распределения $X \in N(\mu, \sigma)$ можно перейти к нормированному нормальному распределению, воспользовавшись заменой переменных

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}. \qquad (I.43)$$

Случайные величины с нормальным распределением используют при решении задач двух типов. *Первая задача:* найти вероятность

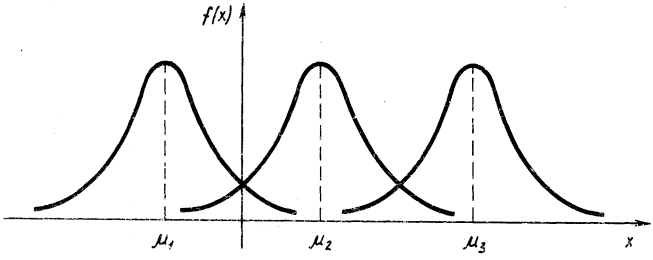


Рис. 10. Смещение графика $f(x)$ при изменении значения параметра μ

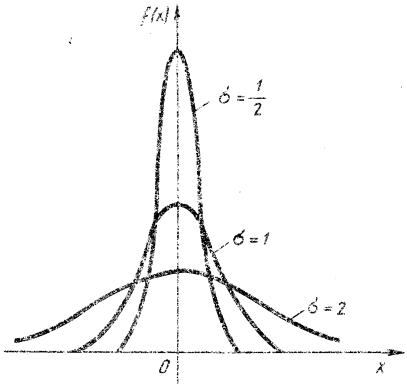


Рис. 11. Изменение графика $f(x)$ при изменении значения параметра σ

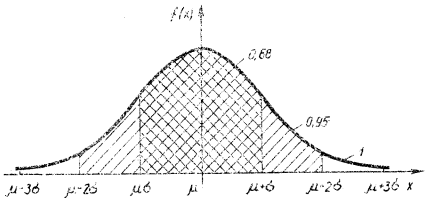


Рис. 12. Правило «трех сигм»

того, что случайная величина $X \in N(\mu, \sigma)$ принимает значение в интервале $[a, b]$. Найдем эту вероятность по формуле

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \tag{I.44}$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения нормированного нормального распределения [см. формулу (I.14)].

Вторая задача: найти вероятность того, что случайная величина $X \in N(\mu, \sigma)$ отличается от своего среднего значения μ по абсолютной величине не больше чем на

$$P(|X-\mu| \leqslant \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1. \tag{I.45}$$

Эта формула следует из формулы (I.44).

Если $\varepsilon = \sigma$, то по формуле (I.45) получаем $P = 0{,}68268$; если $\varepsilon = 2\sigma$, то $P = 0{,}95450$, если $\varepsilon = 3\sigma$, то $P = 0{,}99730 \approx 1$. Таким образом, случайная величина X с нормальным распределением практически не принимает значений, которые отличались бы от среднего значения по абсолютной величине больше чем на 3σ. Это утверждение называется *правилом «трех сигм»* (рис. 12).

Формулы (I.44) и (I.45) похожи на интегральные формулы Муавра — Лапласа (I.16) и (I.18), от которых можно перейти к первым формулам, заменяя параметры $EX = np$ на μ и $\sqrt{DX} = \sqrt{npq}$ на σ. При достаточно большом n такой переход от биномиального распределения к нормальному основывается на законе больших чисел.

РАБОТА 2

Задание

1) Переписать текст задачи, заменяя все параметры их значениями для решаемого варианта.

2) Определить исходные данные и результаты.

3) Определить подходящие формулы вычисления и выполнить вычисления при помощи микрокалькулятора и таблиц.

4) Построить требуемые графики.

а) в интервале $[a, b]$;

б) меньше K;

в) большее L;

г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше чем на ε.

Значения параметров μ, σ, a, b, K, L и ε вычислить по следующим формулам:

$$\mu = V,\ \sigma = \text{остаток } (V/8) + 2,\ S = \text{остаток } (V/5) + 1,$$
$$a = V - S,\ b = V + 2S,\ K = V - S,$$
$$L = V + 2S,\ \varepsilon = S.$$

Задача 2.10. Задана случайная величина $X \in N(\mu, \sigma)$ и точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 на числовой оси, разделяющие ее на шесть интервалов. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения в этих интервалах.

Значения параметров μ, σ, x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 вычислить по следующим формулам:

$$\mu = V - 10,\ \sigma = \text{остаток}(V/6) + 3,\quad S = \text{остаток}(V/4) + 2,$$
$$T = \text{остаток}(V/3) + 1,\ x_1 = V - 15 - S,\ x_2 = V - 12 - T,$$
$$x_3 = V - 5 - S,\quad x_4 = V - T,\quad x_5 = V + S$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 0

Задача 2.1. В каждом из 11 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,3. Вычислить все вероятности p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 11$, где k — частота события A. Построить график вероятностей p_k. Вычислить наивероятнейшую частоту.

Задано: $n = 11$, $p = 0{,}3$, $q = 1 - p = 0{,}7$.

Найти: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{11}$ и k.

Используем формулу Бернулли (I.12) и формулу (I.13). Значение p_0 вычисляем по первой из формул, а остальные вероятности — по второй.

Для формулы (I.13) вычисляем постоянный множитель

$$p/q = 0{,}3/0{,}7 = 0{,}4285714,\ p_0 = C_{11}^0 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{11} = 0{,}7^{11} = 0{,}0197732.$$

Результаты вычислений запишем в табл. 5. Если вычисления верны, то должно выполняться равенство $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

По найденным значениям вероятностей построим их график (рис. 13).

Найдем наивероятнейшую частоту по заданным условиям:

$$np - q \leqslant k \leqslant np + p,$$
$$np - q = 11 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 = 3{,}3 - 0{,}7 = 2{,}6.$$

Значит, наивероятнейшая частота $k = 3$ и, как и было получено ранее, значение p_3 является максимальным.

Таблица 5

k	$\frac{(n-k+1)}{k}$	p_k	k	$\frac{(n-k+1)}{k}$	p_k
0		0,0197732	6	6/6	0,0566056
1	11/1	0,0932168	7	5/7	0,0173282
2	10/2	0,1997503	8	4/8	0,0037131
3	9/3	0,2568218	9	3/9	0,0005304
4	8/4	0,2201330	10	2/10	0,0000454
5	7/5	0,1320798	11	1/11	0,0000017
			Σ		0,9999994

Задача 2.2. В каждом из 700 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие A происходит:

а) точно 270 раз;

б) меньше чем 270 и больше чем 230 раз;

в) больше чем 270 раз.

Учитывая, что количество испытаний $n = 700$ довольно велико, можно использовать формулы Муавра — Лапласа (I.14) и (I.16)

а) *Задано:* $n = 700$, $p = 0{,}35$, $k = 270$.

Найти: $P_{700}(270)$.

Используем локальную теорему Муавра — Лапласа [формулу (I.14)]. Находим:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} = \sqrt{159{,}25} = 12{,}6;$$

$$x = \frac{270 - 700 \cdot 0{,}35}{12{,}6} = \frac{25}{12{,}6} = 1{,}98.$$

Значение функции $f(x)$ найдем из таблицы (см. приложение 2):

$$f(1{,}98) = 0{,}05618, \quad P_{700}(270) = \frac{0{,}05618}{12{,}6} = 0{,}00446.$$

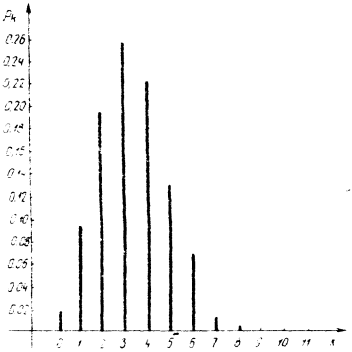


Рис. 13. График вероятностей p_k

б) *Задано:* $n = 700$, $p = 0{,}35$, $a = 230$, $b = 270$.

Найти: $P_{700}(230 < k < 270)$.

Используем интегральную теорему Муавра — Лапласа [формулу (I.16)]. Находим:

$$\sqrt{npq} = 12{,}6;$$

$$x_1 = \frac{230 - 700 \cdot 0{,}35}{12{,}6} = -1{,}19;$$

$$x_2 = \frac{270 - 700 \cdot 0{,}35}{12{,}6} = 1{,}98.$$

Значение функции $\Phi(x)$ найдем из таблицы (см. приложение 3):

$$P_{700}(230<k<270) = \Phi(1{,}98) - \Phi(-1{,}19) =$$
$$= \Phi(1{,}98) - 1 + \Phi(1{,}19) = 0{,}97615 - 1 + 0{,}088298 = 0{,}85913.$$

в) *Задано:* $n = 700$, $p = 0{,}35$, $a = 270$, $b = 700$.
Найти: $P_{700}(270<k)$.

Имеем: $\sqrt{npq} = 12{,}6$, $x_1 = 1{,}98$, $x_2 = \frac{700 - 700\cdot 0{,}35}{12{,}6} = 36{,}1$,

$$P_{700}(270<k) = P_{700}(270<k<700) =$$
$$= \Phi(36{,}1) - \Phi(1{,}98) = 1 - 0{,}97615 = 0{,}02385.$$

Задача 2.3. В каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие A происходит:

а) точно 220 раз;
б) точно 190 раз;
в) меньше чем 240 и больше чем 180 раз;
г) меньше чем 235 раз.

При решении этой задачи используем теоремы Муавра — Лапласа: локальную в случаях а) и б) и интегральную для случаев в) и г).

а) *Задано:* $n = 500$, $p = 0{,}4$, $k = 220$.
Найти: $P_{500}(220)$.

Имеем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6} = \sqrt{120} = 11;$$

$$x = \frac{220 - 500\cdot 0{,}4}{11} = 1{,}82;\ f(1{,}82) = 0{,}07614;$$

$$P_{500}(220) = \frac{0{,}07614}{11} = 0{,}00692.$$

б) *Задано:* $n = 500$, $p = 0{,}4$, $k = 190$.
Найти: $P_{500}(190)$.

Получаем:

$$\sqrt{npq} = 11,\ x = \frac{190 - 500\cdot 0{,}4}{11} = -0{,}91;$$

$$f(-0{,}91) = 0{,}26369,\ P_{500}(190) = \frac{0{,}26369}{11} = 0{,}02397.$$

в) *Задано:* $n = 500$, $p = 0{,}4$, $a = 180$, $b = 240$.
Найти: $P_{500}(180<k<240)$.

Находим:

$$\sqrt{npq} = 11;$$

$$x_1 = \frac{180 - 500\cdot 0{,}4}{11} = -1{,}82;\ x_2 = \frac{240 - 500\cdot 0{,}4}{11} = 3{,}64;$$

$$P_{500}(180<k<240) = \Phi(3{,}64) - \Phi(-1{,}82) =$$
$$= \Phi(3{,}64) + 1 + \Phi(1{,}82) = 0{,}99986 - 1 + 0{,}96562 = 0{,}96548.$$

г) *Задано:* $n = 500$, $p = 0{,}4$, $a = 0$, $b = 235$.
Найти: $P_{500}(k<235)$.

Имеем:

$$\sqrt{npq} = 11;$$

$$x_1 = \frac{0 - 500 \cdot 0{,}4}{11} = -18; \quad x_2 = \frac{235 - 500 \cdot 0{,}4}{11} = 3{,}18;$$

$$P_{500}(k < 235) = P_{500}(0 < k < 235) = \Phi(3{,}18) - \Phi(-18) =$$
$$= \Phi(3{,}18) - 1 + \Phi(18) = 0{,}99926 - 1 + 1 = 0{,}99926.$$

Задача 2.4. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 1/200. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:

а) точно 1 неправильное соединение;

б) меньше чем 3 неправильных соединения;

в) больше чем 2 неправильных соединения.

Здесь вероятность события мала, поэтому используем формулу Пуассона (1.15).

а) *Задано:* $n = 200$, $p = 1/200$, $k = 1$.
Найти: $P_{200}(1)$.

Получаем

$$\lambda = 200 \cdot 1/200 = 1.$$

Из таблиц (см. приложение 1) определяем

$$P_{200}(1) = 0{,}3679.$$

б) *Задано:* $n = 200$, $p = 1/200$, $k < 3$.
Найти: $P_{200}(k < 3)$.

Имеем

$$\lambda = 1,$$

$$P_{200}(k < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) =$$
$$= 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197.$$

в) *Задано:* $n = 200$, $p = 1/200$, $k > 2$.
Найти: $P_{200}(k > 2)$.

Находим

$$\lambda = 1.$$

Эту задачу можно решить проще, найти вероятность противоположного события, так как в этом случае нужно вычислить меньше слагаемых. Принимая во внимание предыдущий случай, имеем

$$P_{200}(k > 2) = 1 - P_{200}(k \leqslant 2) = 1 - P_{200}(k < 3) =$$
$$= 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803.$$

Задача 2.5. В каждом из 600 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что относительная частота $k/600$ этого события отличается по абсолютной величине от вероятности 0,85 не больше чем на 0,0055 (на 0,011).

Задано: $n = 600$, $p = 0{,}85$, $\varepsilon_1 = 0{,}0055$, $\varepsilon_2 = 0{,}011$.

Найти: $P_{600}\left(\left|\frac{k}{600}-0{,}85\right|<0{,}0055\right)$ и

$$P_{600}\left(\left|\frac{k}{600}-0{,}85\right|<0{,}011\right).$$

Решаем эту задачу, используя формулу (I.18). Имеем

$$P_{600}\left(\left|\frac{k}{600}-0{,}85\right|<0{,}0055\right)=2\Phi\left(0{,}0055\sqrt{\frac{600}{0{,}85\cdot 0{,}15}}\right)-1=$$
$$=2\Phi(0{,}38)-1=2\cdot 0{,}64803-1=0{,}29606;$$
$$P_{600}\left(\left|\frac{k}{600}-0{,}85\right|<0{,}011\right)=2\Phi\left(0{,}011\sqrt{\frac{600}{0{,}85\cdot 0{,}15}}\right)-1=$$
$$=2\Phi(0{,}75)-1=2\cdot 0{,}77337-1=0{,}54674.$$

Задача 2.6. Случайная величина X задана рядом распределения

	x_1	x_2	x_3	x_4
X	3	5	7	11
P	0,14	0,20	0,49	0,17
	p_1	p_2	p_3	p_4

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X ее среднее значение EX, дисперсию DX и моду Mo.

Функцию распределения находим по формулам (I.20) и (I.21) для дискретных случайных величин:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 3,\\ 0{,}14, & 3<x\leqslant 5,\\ 0{,}34, & 5<x\leqslant 7,\\ 0{,}83, & 7<x\leqslant 11,\\ 1, & x>11.\end{cases}$$

Построим график функции распределения $F(x)$ (рис. 14). Среднее значение EX вычисляем по формуле (I.27):

$$EX=3\cdot 0{,}14+5\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}49+11\cdot 0{,}17=6{,}72.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулами (I.30) и (I.32):

$$E(X^2)=3^2\cdot 0{,}14+5^2\cdot 0{,}2+7^2\cdot 0{,}49+11^2\cdot 0{,}17=50{,}84,$$
$$DX=50{,}84-6{,}72^2=5{,}6816.$$

Моду Mo найдем по максимальной вероятности $Mo=7$.

Задача 2.7. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x/2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

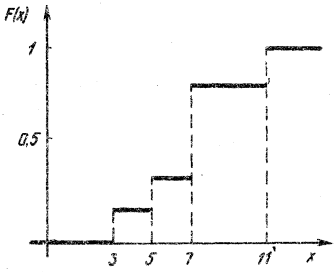


Рис. 14. График функции распределения к задаче 2.6

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Вычислить для X ее среднее значение EX, дисперсию DX, моду Mo и медиану Me.

Функцию распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины найдем по формуле (I.22):

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{4}\Big|_0^x = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/4, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$ (рис. 15 и 16). Среднее значение X вычисляем по формуле (I.28):

$$EX = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}.$$

Для нахождения дисперсии X воспользуемся формулами (I.30) и (I.34):

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = \frac{16}{8} = 2;$$

$$DX = 2 - (4/3)^2 = 2 - 16/9 = 2/9.$$

Из графика (см. рис. 15) видно, что $f(x)$ достигает максимума в точке $x = 2$ и, значит, $Mo = 2$. Для нахождения медианы Me нужно решить уравнение $x^2/4 = 1/2$ (см. п. 4.6), или $x^2 = 2$. Имеем $x = \pm\sqrt{2}$. Случайная величина определена только на интервале $[0, 2]$, значит, $Me = \sqrt{2} = 1{,}414$.

Задача 2.8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x/3, & 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Вычислить для X ее среднее значение EX, дисперсию DX, моду Mo и медиану Me.

Функцию плотности вероятности вычислим по формуле (I.26), дальнейшее решение задачи аналогично решению предыдущей задачи.

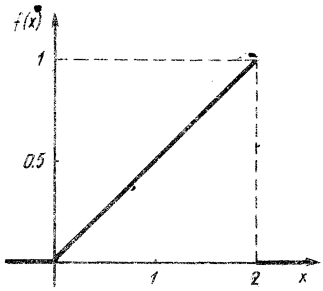


Рис. 15. График функции плотности вероятности $f(x)$ к задаче 2.7

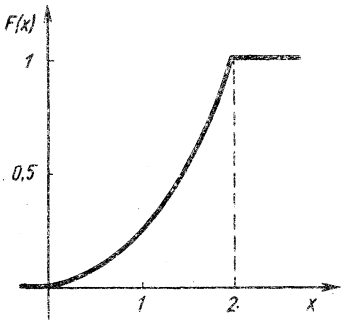


Рис. 16. График функции распределения $F(x)$ к задаче 2.7

Задача 2.9. Задана случайная величина $X \in N(0,\ 2)$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение:

а) в интервале $[-1,\ 2]$;

б) меньшее -1;

в) большее 2;

г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше чем на 1.

В первых трех случаях можно воспользоваться формулой (1.44), а четвером — формулой (1.45).

а) *Задано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $a = -1$, $b = 2$.

Найти: $P(-1 \leqslant X \leqslant 2)$.

Имеем

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) - 1 + \Phi(0{,}5) =$$

$$= 0{,}84134 - 1 + 0{,}69146 = 0{,}53280.$$

б) *Задано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $a = -\infty$, $b = -1$.

Найти: $P(X \leqslant -1)$.

Получаем

$$P(X \leqslant -1) = P(-\infty < X \leqslant -1) = \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-0}{2}\right) =$$

$$= \Phi(-0{,}5) - \Phi(-\infty) = 1 - \Phi(0{,}5) - 0 = 1 - 0{,}69146 = 0{,}30854.$$

в) *Задано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $a = 2$, $b = \infty$.

Найти: $P(X \geqslant 2)$.

Имеем

$$P(X \geqslant 2) = P(2 \leqslant X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right)$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866.$$

г) *Задано:* $\mu = 0$, $\sigma = 2$, $\varepsilon = 1$.

Найти: $P(|X - 0| \leqslant 1)$.

Получаем

$$P(|X - 0| \leqslant 1) = 2 \cdot \Phi(1/2) - 1 = 2 \cdot 0{,}69146 - 1 = 0{,}38292.$$

Задача 2.10. Задана случайная величина $X \in N(-10, 3)$ и точки -17, -13, -7, -1, 2 на числовой оси, разделяющие ее на шесть интервалов. Найти вероятности того, что случайная величина X принимает значения в этих интервалах.

Используем формулу (I.44). Учитывая, что конец одного интервала является началом следующего, записываем результаты вычислений в таблице (табл.6).

Таблица 6

x_i	$\frac{x_i - \mu}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)$	$P(x_i \leqslant X \leqslant x_{i+1})$
$-\infty$	$-\infty$	0	
-17	$-2{,}33$	0,00990	0,00990
-13	-1	0,15866	0,14876
-7	1	0,84134	0,68268
-1	3	0,99865	0,15731
2	4	0,99997	0,00132
∞	∞	1	0,00003
		Σ	1,00000

Интервалы охватывают всю числовую ось, так что сумма полученных вероятностей должна быть равна 1.

Глава II
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§ 3. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ВЫБОРОК

1. Генеральная совокупность и выборка. Совокупность объектов, или, точнее, совокупность значений какого-то признака объектов, называется *генеральной совокупностью.* Основной задачей математической статистики является исследование генеральной совокупности статистически, т. е. выяснение вероятностных свойств совокупности: *распределения, числовых характеристик* и т. д.

Однако полное исследование генеральной совокупности обычно практически невозможно или неэкономно. Например, при проверке лампочек накаливания одним из ее качественных свойств считается время работы (до сгорания). Аналогичная ситуация имеет место и при проверке качества консервов, снарядов и т. д. Кроме того, всеобщая проверка генеральной совокупности требует больших материальных затрат. Поэтому всеобщее исследование применяют, как правило, редко. Например, всеобщую перепись населения в Советском Союзе производят примерно через 10 лет.

Обычно из генеральной совокупности делают выборку, т. е. исследуют только некоторые ее объекты. С помощью выборки оценивают генеральную совокупность по вероятностным свойствам. Чтобы оценки были достоверными, выборка должна быть *представительной*, т. е. ее вероятностные свойства должны совпадать или быть близкими к свойствам генеральной совокупности.

Представительную выборку можно получить, если выбирать объекты для исследований случайно, т. е. гарантировать всем объектам генеральной совокупности одинаковую вероятность подвергнуться исследованию. Далее предполагаем, что все выборки получены из генеральной совокупности случайно.

Случайно выбранный объект после проверки нужного признака можно возвратить (возвратная или повторная выборка) или не возвратить (*безвозвратная* или *бесповторная выборка*) обратно в генеральную совокупность. В первом случае получаем более независимую и представительную выборку.

Часто под генеральной совокупностью понимают и исследуемую случайную величину. Для исследования случайной величины при постоянных условиях выполняются испытания. Совокупность полученных значений также называется выборкой и обрабатывается статистически. Методы статистической обработки выборки аналогичны в обоих случаях.

При исследовании объектов можно фиксировать или измерять значение одного или нескольких признаков. Соответственно говорят об *одномерной, двумерной, трехмерной* и т. д. выборках. Вначале рассмотрим обработку одномерных выборок.

2. Вариационный ряд. Выбор объекта из генеральной совокупности и измерение значения признака называется статистическим наблюдением. Результаты наблюдений фиксируют в протоколе или дневнике наблюдений в порядке их появления.

Выборка будет намного наглядней, если все ее элементы упорядочить по возрастанию или по убыванию. Но в выборке одно значение (вариант) может встречаться несколько раз, и поэтому целесообразно результаты записать в виде таблицы, в первом столбце которой находятся всевозможные значения (варианты) x_i генеральной совокупности (или случайной величины) X, а во втором — числа n_i, т. е. частоты появления i-го значения. Такую таблицу называют *вариационной таблицей* или *вариационным рядом*.

Для составления вариационного ряда нужно:

1) найти минимальное ($x_{\min}$) и максимальное ($x_{\max}$) значения выборки;

2) в первый столбец таблицы записать варианты значений случайной величины (генеральной совокупности), начиная с $x_{\min}$ и кончая $x_{\max}$;

3) просмотреть по одному все элементы выборки в протоколе наблюдений, и отметить каждое значение в соответствующем варианте во втором столбце таблицы;

4) подсчитать количество меток в каждом варианте и записать соответствующее им число n_i;

5) подсчитать количество элементов в выборке (объем выборки) n, которое должно быть равно

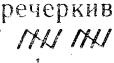
$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i, \qquad (II.1)$$

где m — количество вариантов в вариационном ряде. Если условие (II.1) не выполнено, то повторить все пункты, начиная с третьего.

Если объем выборки n большой, то строка меток может оказаться слишком длинной, т. е. подсчитать их неудобно. Более короткой получается запись при следующих способах подсчета: каждая пятая палочка перечеркивает предыдущие четыре:

~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///

из точек и палочек образуют фигуру из 10 элементов (см. табл. 7 и 9 на с. 47 и 49).



В обоих случаях упрощается подсчет количества пометок.

Если количество вариантов m слишком велико или близко к объему выборки, то целесообразно составить *вариационный ряд по интервалам значений генеральной совокупности*. По интервалам

составляют вариационный ряд и из выборки непрерывной генеральной совокупности.

Вариационный ряд по интервалам значений можно получить с помощью приведенного выше алгоритма, где во втором пункте следует:

заполнить первый столбец таблицы интервалами значений генеральной совокупности. Все интервалы выбирать одинаковой длины таким образом, чтобы x_{min} вошло в первый, а x_{max} — в последний интервал. Обычно начало интервала входит в интервал, а его конец — не входит.

В остальных пунктах алгоритма следует слово «вариант» заменить словом «интервал». Пример вариационного ряда по интервалам см. в табл. 9 на с. 49.

3. Графики вариационных рядов. Своеобразными графиками являются строки меток, сделанных при составлении вариационных рядов. Сравнивая вариационные ряды в табл. 7 и 9, видим, что в обоих рядах встречаются одинаковые частоты n_i (16, 3). Но соответствующие значения имеют разный вес в выборках, так как объемы выборок различны (79 и 200). Значения генеральной совокупности будут сравнимыми, если использовать *относительные частоты или частости* n_i/n. При построении графиков обычно используют частости. Сумма частостей должна быть равна единице [см. формулу (II.1)]:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} = 1. \qquad \text{(II.2)}$$

Используют два вида графиков вариационных рядов: *полигон* и *гистограмму*. Если вариационный ряд составлен по значениям, то полигон строят из отрезков, соединяющих точки, координатами которых являются значения x_i и соответствующие частости n_i/n (см. рис. 17 на с. 48). При построении гистограммы над каждым значением x_i строят прямоугольник, высота которого пропорциональна соответствующей частости n_i/n (см. рис. 18 на с. 48).

Если вариационный ряд составлен по интервалам, то в качестве значений x_i следует рассматривать середины интервалов (см. рис. 20, 21 на с. 50).

4. Эмпирическая функция распределения. Каждая генеральная совокупность имеет функцию распределения $F(x)$ [см. формулу (I.19)], которая обычно неизвестна. По выборке можно найти эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$, где на основании закона больших чисел Бернулли вместо вероятностей p_i берутся относительные частоты n_i/n. Процесс нахождения эмпрической функции распределения $F^*(x)$ аналогичен процессу нахождения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X [см. п. 3 § 2, формулы (I.20) и (I.21)]:

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}, \qquad \text{(II.3)}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1, \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \leqslant x_2, \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \leqslant x_3, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{n_i}{n}, & x_{m-1} < x \leqslant x_m, \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \qquad (II.4)$$

Значениями эмпирической функции распределения $F^*(x)$ [формула (II.4)] являются так называемые *накопленные частости* (см. табл. 7 и 9 на с. 47 и 49). График эмпирической функции распределения строят так же, как и график функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины (см. рис. 3).

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений и в качестве представителя интервала берется его середина, то эмпирическая функция составляется так же, как по вариационному ряду по значениям. Но в качестве представителя интервала можно брать и правый конец интервала. Объединяя отрезками точки, координатами которых являются правые концы интервалов и накопленные частости соответствующих интервалов, получаем ломаную линию, являющуюся довольно хорошим приближением *графика функции распределения непрерывной случайной величины* (ср. рис. 5 и 22 на с. 25 и 50). Такой график является точным, если все значения в каждом интервале распределены равномерно. Аналитический вид этой функции довольно сложен.

5. Числовые характеристики выборки. 5.1. Среднее арифметическое. *Среднее арифметическое* $\bar{x}$ определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (II.5)$$

где x_i — элементы выборки, n — ее объем. Если объем выборки n небольшой и x_i не слишком велики, то расчет «вручную» по этой формуле не вызывает трудности. Для больших выборок необходимо прибегнуть к помощи микрокалькулятора или ЭВМ. С помощью формулы (II.5) вычисляют непосредственно по протоколу наблюдений.

Если составлен вариационный ряд, то следует использовать следующую формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i, \qquad (II.6)$$

где x_i — варианты случайной величины, n_i — соответствующие частоты, m — количество вариантов, n — объем выборки.

Если при вычислении по этой формуле встречаются трудности, то можно обратиться к микрокалькулятору или ЭВМ.

Для упрощения счета имеется следующая формула:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k} n_i}{n} k + c, \qquad (II.7)$$

где x_i, n_i, m и n имеют тот же смысл, что и в предыдущей формуле; k — шаг таблицы, т. е. интервал между соседними вариантами; c — произвольное число (но для простоты следует выбрать вариант, имеющий максимальную частоту). В результате при вычислениях приходится иметь дело с довольно малыми числами. Формулу (II.7) используют только в том случае, когда вариационный ряд имеет постоянный шаг таблицы k. При переменном шаге нужно использовать формулу (II.6).

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений, то в роли x_i в формулах (II.6) и (II.7) используют середины интервалов.

Вычисления по формулам (II.5) и (II.6) можно упростить, если выполнить замену переменных $y_i = x_i - c$, где константа выбирается вблизи середины интервала, в котором находятся все значения выборки. Таким образом, новые значения вариантов y_i получаются как отклонения старых вариантов от «ложного нуля» c, т. е. они довольно малы по абсолютной величине. Формулы (II.5) и (II.6) принимают соответственно вид:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c) + c; \qquad (II.5а)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i - c) n_i + c. \qquad (II.6а)$$

5.2. Дисперсия выборки. Дисперсию выборки обозначим через S^2. Для вычисления выборочной дисперсии $\bar{S}^2$ приведем такие же формулы, что и для нахождения среднего арифметического:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2; \qquad (II.8)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i - \bar{x}^2; \qquad (II.9)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i}{n} k^2 - (\bar{x} - c)^2. \qquad (II.10)$$

Для упрощения расчетов формулы (II.8) и (II.9) можно преобразовать следующим образом:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2 - (\bar{x} - c)^2; \qquad (II.8а)$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{(II.9a)}$$

5.3. **Стандартное отклонение.** *Среднеквадратическое* отклонение определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$\bar{S} = \sqrt{S}$$

5.4. **Мода**. Если вариационный ряд составлен по значениям генеральной совокупности, то *модой* его является значение, имеющее максимальную частоту. Если вариационный ряд составлен по интервалам значений генеральной совокупности, то мода вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$Mo = x_0 + k\frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})} \qquad \text{(II.11)}$$

где x_0 — начало модального интервала, т. е. интервала, имеющего максимальную частоту, k — длина модального интервала, n_i — частота модального интервала, n_{i-1} и n_{i+1} — частоты соответственно предшествующего и последующего за модальным интервалов.

5.5. **Медиана**. *Медианой* выборки является значение серединного элемента вариационного ряда. Если вариационный ряд составлен по значениям генеральной совокупности, то при нечетном объеме выборки n медиана — это действительное значение серединного элемента, а при n четном — среднее арифметическое двух серединных элементов.

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений, то медиана вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$Me = x_0 + k\frac{n/2 - T_{i-1}}{n_i} \qquad \text{(II.12)}$$

где x_0 — начало медианного интервала, т. е. интервала, в котором содержится серединный элемента; k — длина медианного интервала; n — объем выборки, T_{i-1} — сумма частот интервалов, предшествующих медианному; n_i — частота медианного интервала.

РАБОТА 3

Задание

В следующих задачах использовать выборки из § 7. Вычисления по возможности выполнить максимально в таблицах.

Задача 3.1. По выборкам А и В решить следующие подзадачи:

составить вариационный ряд;

вычислить относительные частоты (частости) и накопленные частости;

построить графики вариационного ряда (полигон и гистограмму);

составить эмпирическую функцию распределения.

построить график эмпирической функции распределения;
вычислить числовые характеристики вариационного ряда:
среднее арифметическое $\bar{x}$;
дисперсию $\bar{S}^2$;
стандартное отклонение $\bar{S}$;
моду Mo;
медиану Me.

Задача 3.2. Для столбцов $F1$ и $F2$ выборки D вычислить числовые характеристики ($\bar{x}$, $\bar{S}^2$, $\bar{S}$).

Задача 3.3. Для первых столбцов X, Y и Z выборки C вычислить числовые характеристики ($\bar{x}$, $\bar{S}^2$, $\bar{S}$). По желанию можно сначала составить вариационные ряды по значениям.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 0

Задача 3.1. Сначала решим задачу по выборке A. Находим: $x_{min} = 0$ и $x_{max} = 7$. Размах ($7 - 0 + 1 = 8$) довольно мал, поэтому составим вариационный ряд по значениям (табл. 7).

Таблица 7

x_i		n_i	n_i/n	Накопленные частости
0		4	0,0506	0,0506
1		13	0,1646	0,2152
2		14	0,1772	0,3924
3		24	0,3038	0,6962
4		16	0,2025	0,8987
5		3	0,0380	0,9367
6		3	0,0380	0,9747
7		2	0,0253	1,0000
Σ		79	1,0000	—

Все относительные частоты вычисляем с одинаковой точностью. При построении графиков изображаем на оси x значения с 0 по 7 на оси n_i/n — значения с 0 по 0,3 (рис. 17 и 18).

Эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ находим, используя формулу (II.4) и накопленные частости, из табл. 7. Имеем:

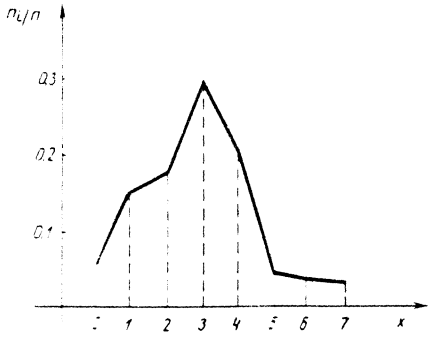


Рис. 17. Полигон вариационного ряда выборки А

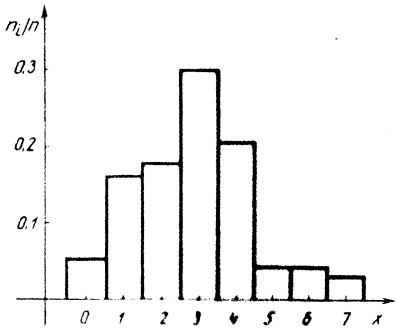


Рис. 18. Гистограмма вариационного ряда выборки А

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0{,}0506, & 0 < x \leq 1, \\ 0{,}2152, & 1 < x \leq 2, \\ 0{,}3924, & 2 < x \leq 3, \\ 0{,}6962, & 3 < x \leq 4, \\ 0{,}8987, & 4 < x \leq 5, \\ 0{,}9367, & 5 < x \leq 6, \\ 0{,}9747, & 6 < x \leq 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

При построении графика $F^*(x)$ откладываем значения функции в интервале от 0 до 1 (рис. 19).

Вычисление сумм для среднего арифметического и дисперсии по формулам (II.7) и (II.10) и по вариационному ряду (см. табл. 7) оформляем в табл. 8. По максимальной частоте определяем $c = 3$, а шаг таблицы $k = 1$.

Далее по формуле (II.7) вычисляем среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{-13}{79} \cdot 1 + 3 = -0{,}16 + 3 = 2{,}84$$

Таблица 8

x_i	n_i	$\frac{x_i - c}{k}$	$\frac{x_i - c}{k} n_i$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i$
0	4	−3	−12	9	36
1	13	−2	−26	4	52
2	14	−1	−14	1	14
3	24	0	0	0	0
4	16	1	16	1	16
5	3	2	6	4	12
6	3	3	9	9	27
7	2	4	8	16	32
Σ	79	—	−13	—	189

и по формуле (II.10) — дисперсию

$$\bar{S}^2 = \frac{189}{79} \cdot 1 - (2{,}84 - 3)^2 =$$

$$= 2{,}3924 - 0{,}0256 = 2{,}3668.$$

Стандартное отклонение $\bar{S} = \sqrt{2{,}3668} = 1{,}54$. Модой Mo является значение с максимальной частотой, т. е. $Mo = 3$. Медианой Me служит 39-е значение вариационного ряда: $Me = 3$.

Теперь по выборке B найдем $x_{\min} = 60$ и $x_{\max} = 81$. Размах $(81 - 60 + 1 = 22)$ достаточно большой, поэтому составим вариационный ряд по интервалам значений, используя при выборке заданные начало первого интервала и длину интервала (табл. 9).

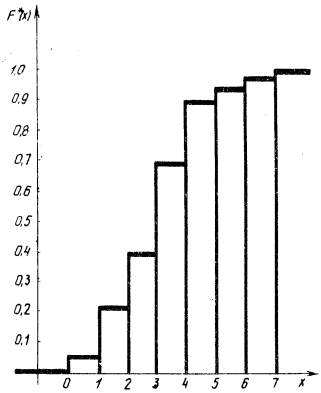


Рис. 19. График эмпирической функции распределения выборки A

Таблица 9

Интервалы		n_i	n_i/n	Накопленные частости
59—61	•	1	0,005	0,005
61—63	• •	2	0,010	0,015
63—65		7	0,035	0,050
65—67		16	0,080	0,130
67—69		27	0,135	0,265
69—71		40	0,200	0,465
71—73		38	0,190	0,655
73—75		38	0,190	0,845
75—77		18	0,090	0,935
77—79		9	0,045	0,980
79—81	• • •	3	0,015	0,995
81—83	•	1	0,005	1,000
Σ		200	1,000	—

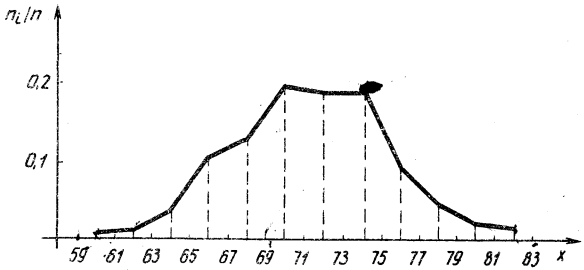


Рис. 20. Полигон вариационного ряда выборки B

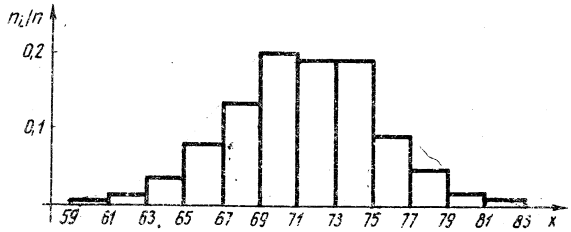


Рис. 21. Гистограмма вариационного ряда выборки B

При построении графиков откладываем по оси x значения с 59 по 83 и по оси n_i/n — значения с 0 по 0,2 (рис. 20 и 21).

Далее учитываем, что в качестве представителя каждого интервала взят его конец. Принимая за координаты точек концы интервалов и соответствующие накопленные частости (см. табл. 9) и соединяя эти точки прямыми, построим график эмпирической функции распределения (рис. 22).

Для вычисления среднего арифметического и дисперсии по формулам (II.7) и (II.10) по табл. 9 определим $c = 70$ и $k = 2$. Суммы вычислим с помощью табл. 10 (табл. 10).

По формуле (II.7) вычисляем среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{132}{200} \cdot 2 + 70 = 1{,}32 + 70 = 71{,}32,$$

а по формуле (II.10) — дисперсию

$$\bar{S}^2 = \frac{818}{200} \cdot 4 - (71{,}32 - 70)^2 =$$
$$= 16{,}36 - 1{,}7424 = 14{,}6176.$$

Стандартное отклонение $\bar{S} = \sqrt{14{,}6176} = 3{,}82$. Моду находим по формуле (II.11):

$$Mo = 69 + 2 \cdot \frac{40 - 27}{(40 - 27) + (40 - 38)} =$$
$$= 69 + 2 \cdot \frac{13}{13 + 2} = 70{,}7$$

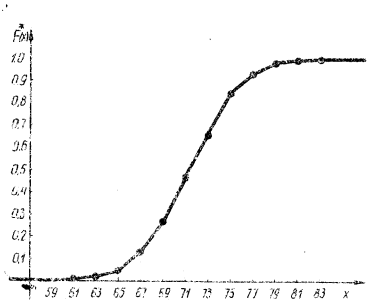


Рис. 22. График эмпирической функции распределения выборки B

Таблица 10

Интервал	Середина интервала x_i	n_i	$\frac{x_i - c}{k}$	$\frac{x_i - c}{k} n_i$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i$
59—61	60	1	— 5	— 5	25	25
61—63	62	2	— 4	— 8	16	32
63—65	64	7	— 3	— 21	9	63
65—67	66	16	— 2	— 32	4	64
67—69	68	27	— 1	— 27	1	27
69—71	70	40	0	0	0	0
71—73	72	38	1	38	1	38
73—75	74	38	2	76	4	152
75—77	76	18	3	54	9	162
77—79	78	9	4	36	16	144
79—81	80	3	5	15	25	75
81—83	82	1	6	6	36	36
Σ	—	200	—	132	—	818

Медиану находим по формуле (II.12):

$$Me = 71 + 2 \cdot \frac{100 - 93}{38} = 71 + 0{,}4 = 71{,}4.$$

Задача 3.2. Рассматриваем столбцы $F1$ и $F2$ выборки D как отдельные выборки, имеющие объем $n = 6$. Для вычисления среднего арифметического и дисперсии используем формулы (II.5) и (II.8). Вычисления оформляем в таблицах (табл. 11 и 12).

Таблица 11

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
— 19	15,2	231,04
— 28	6,2	38,44
— 39	— 4,8	23,04
— 36	— 1,8	3,24
— 44	— 9,8	96,04
— 39	— 4,8	23,04
— 205	—	414,84

Таблица 12

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
— 31	— 0,5	0,25
— 33	— 2,5	6,25
— 35	— 4,5	20,25
— 25	5,5	30,25
— 27	2,5	6,25
— 31	— 0,5	0,25
— 183	—	63,50

Имеем:

$$\bar{x} = \frac{-205}{6} = -34{,}2; \qquad \bar{x} = \frac{-183}{6} = -30{,}5;$$

$$\bar{S}^2 = \frac{414{,}84}{6} = 69{,}14; \qquad \bar{S}^2 = \frac{63{,}50}{6} = 1{,}58;$$

$$\bar{S} = \sqrt{69{,}14} = 8{,}3; \qquad \bar{S} = \sqrt{10{,}58} = 3{,}2$$

Задача 3.3. Из заданных выборок видно, что составление вариационного ряда по значениям не имеет смысла, поскольку в выборке мало повторяющихся элементов. Для вычислений используем формулы (II.5) и (II.8) или (II.5а) и (II.8а). В данном случае следует отдать предпочтение последним формулам, так как при вычислениях приходится иметь дело с меньшими числами. Вычисления сумм оформляем в таблицах (табл. 13, 14, 15).

Таблица 13

x_i	$x_i - c$	$(x_i - c)^2$
73	3	9
69	— 1	1
72	— 2	4
72	— 2	4
65	— 5	25
67	— 3	9
56	— 14	196
70	— 0	0
63	— 7	49
64	— 6	36
70	0	0
67	— 3	9
60	— 10	100
63	— 7	49
80	10	100
71	1	1
74	4	16
68	— 2	4
65	— 5	25
73	3	9
Σ	— 38	646

Таблица 14

y_i	$(y_i - c)$	$(y_i - c)^2$
— 291	— 41	1681
— 270	— 20	400
— 279	— 29	841
— 282	— 32	1 024
— 254	— 4	16
— 264	— 14	196
— 216	34	1 156
— 276	— 26	676
— 248	— 2	4
— 253	— 3	9
— 276	— 26	676
— 262	— 12	144
— 234	16	256
— 243	7	49
— 313	— 63	3 969
— 278	— 28	784
— 292	— 42	1 764
— 271	— 21	441
— 256	— 6	36
— 291	— 41	1 681
Σ	— 349	15 803

Таблица 15

z_i	$z_i - c$	$(z_i - c)^2$
577	27	729
548	— 2	4
575	25	625
573	23	529
519	— 31	961
530	— 20	400
443	— 107	11 449
555	5	25
502	— 48	2 304
506	— 44	1 936
554	4	16
535	— 15	225
478	— 72	5 184
495	— 55	3 025
635	85	7 225
564	14	196
583	33	1 089
534	— 16	256
518	— 32	1 024
574	24	576
Σ	— 202	37 778

Имеем:

$$x_{\min} = 56,\ x_{\max} = 80,\ c = 70,\ n = 20,$$

$$\bar{x} = \frac{-38}{20} + 70 = -1{,}9 + 70 = 68{,}1,$$

$$\bar{S}_x^2 = \frac{646}{20} - (68{,}1 - 70)^2 = 32{,}3 - 1{,}9^2 = 32{,}3 - 3{,}61 = 28{,}69,$$

$$\bar{S}_x = \sqrt{28{,}69} = 5{,}6,$$

$$y_{\min} = -313,\ y_{\max} = -216,\ c = -250,\ n = 20,$$

$$\bar{y} = \frac{-349}{20} - 250 = -17{,}45 - 250 = -267{,}45,$$

$$\bar{S}_y^2 = \frac{15\,803}{20} - (-267{,}45 + 250)^2 = 790{,}15 - 304{,}50 = 485{,}65,$$

$$\bar{S}_y = \sqrt{485{,}65} = 22{,}0,$$

$$z_{\min} = 443,\ z_{\max} = 635,\ c = 550,\ n = 20,$$

$$\bar{z} = \frac{-202}{20} + 550 = -10{,}1 + 550 = 539{,}9,$$

$$\bar{Z}_Z^2 = \frac{37\,778}{20} - (539{,}9 - 550)^2 = 1888{,}9 - 102{,}01 = 1786{,}89,$$

$$\bar{S}_Z = 1786{,}89 = 42{,}3.$$

§ 4. ТЕОРИЯ ОЦЕНОК

1. Понятие оценки. Генеральные совокупности характеризуются некоторыми постоянными числовыми характеристиками распределения. По выборкам можно найти оценки этих характеристик. Вследствие случайности выборок значения оценок одной числовой характеристики, вычисленные по разным выборкам из одной же генеральной совокупности, бывают, как правило, различными.

Обозначим неизвестный параметр распределения, т. е. числовую характеристику генеральной совокупности X, через θ, а оценку неизвестного параметра — через T_n. Оценка T_n — функция от выборки. Оценки неизвестного параметра можно находить различными способами. Например, если нужно оценить среднее значение $\theta = \mu$ нормального распределения, то можно использовать следующие оценки T_n:

1) x_1 — первый элемент выборки. На практике часто так и поступают: измеряют какую-то величину только один раз, и этот результат используют как значение этой величины;

2) $(x_{\max} + x_{\min})/2$ — среднее арифметическое максимального и минимального элементов выборки;

3) Mo — моду, которая при нормальном распределении равна среднему значению μ;

4) Me — медиану, которая при нормальном распределении также равна среднему значению μ;

5) $\bar{x}$ — среднее арифметическое.

Для того чтобы установить, какая из оценок лучше, надо знать основные свойства (виды) оценок.

2. Несмещенные оценки. *Несмещенной* называется оценка T_n, среднее значение которой равно оцениваемому параметру θ:

$$ET_n = \theta.$$

Если это условие не выполняется, то оценку называют *смещенной*, при этом смещение вычисляется как разность $ET_n - \theta$.

Другие свойства оценок в настоящем пособии не рассматриваются. *Несмещенной оценкой среднего значения* μ является среднее арифметическое $\bar{x}$.

Аналогично с помощью выборочной дисперсии $\bar{S}^2$ можно оценить дисперсию σ^2. Оказывается, что выборочная дисперсия $\bar{S}^2$ является *смещенной оценкой дисперсии* σ^2:

$$E(\bar{S}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

т. е. $\sigma^2 - \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$. Отсюда видно, что при $n \to \infty$ смещение стремится к нулю. Значит, при достаточно большом объеме выбор-

ки n выборочную дисперсию можно приближенно принимать за несмещенную оценку дисперсии σ^2. Для оценки дисперсии, несмещенной при малом объеме выборки, используют *исправленную дисперсию*

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\bar{S}^2. \qquad (II.13)$$

Если сравнить эту формулу с формулами для выборочной дисперсии из п. 5.2. § 3 [см. формулы (II.8) — (II.10)], то можно получить аналогичные формулы для вычисления несмещенной оценки S^2 дисперсии σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \qquad (II.14)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 n_i. \qquad (II.15)$$

Преобразовать формулу (II.10) так просто не удается, поэтому нужно сначала по формуле (II.10) вычислить выборочную дисперсию $\bar{S}^2$, а затем с помощью формулы (II.13) найти несмещенную оценку S^2 дисперсии σ^2.

3. Доверительный интервал. Оценки T_n неизвестного параметра θ, рассмотренные выше, называют *точечными*, так как они определяют одно значение, одну точку на числовой оси. Все точечные оценки параметров распределения генеральной совокупности вычисляют по выборкам, но из-за случайности выборок *оценки являются случайными величинами*, отличающимися от постоянного истинного значения параметра θ. Обозначим точность оценки через Δ ($\Delta > 0$); тогда $|\theta - T_n| \leqslant \Delta$. Чем меньше Δ, тем точнее оценка.

Любую точность можно получить с определенной вероятностью (*надежностью*):

$$P(|\theta - T_n| \leqslant \Delta) = \gamma. \qquad (II.16)$$

Если преобразовать это выражение, то получим

$$P(-\Delta \leqslant \theta - T_n \leqslant \Delta) = \gamma,$$

или

$$P(T_n - \Delta \leqslant \theta \leqslant T_n + \Delta) = \gamma. \qquad (II.17)$$

Условие (II.17) означает, что интервал $[T_n - \Delta,\ T_n + \Delta]$ покрывает значение параметра θ с заданной *доверительной вероятностью* γ. Точность оценки Δ фактически определяет *длину доверительного интервала* (2Δ). Доверительная вероятность γ задается обычно значением, близким к единице, например, 0,95; 0,98; 0,99 и т. д.

Доверительная вероятность γ, точность оценки Δ и объем выборки n связаны между собой. Если определены две величины, то тем самым будет определена и третья.

4. Доверительный интервал для среднего значения μ нормального распределения при известном σ. Пусть задана генеральная совокупность с нормальным распределением $X \in N(\mu, \sigma)$, где значение стандартного отклонения σ известно. Для оценки параметра μ воспользуемся величиной $\bar{X}$. Заметим, что и *среднее арифметическое* $\bar{X}$, и *элементы выборки* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из-за случайности выборок являются *случайными величинами*. Все элементы выборки имеют то же распределение, что и генеральная совокупность: $X_i \in N(\mu, \sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Среднее арифметическое также имеет нормальное распределение: $\bar{X} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

По формуле (II.16) получим

$$P(|\bar{X} - \mu| \leqslant \Delta) = \gamma. \qquad (II.18)$$

С другой стороны, заменяя в (I.45) X на $\bar{X}$, σ на $\sigma/\sqrt{n}$ и ε на Δ, получим

$$P(|\bar{X} - \mu| \leqslant \Delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}\right) - 1 = 2\,\Phi(u_\gamma) - 1 = \gamma, \qquad (II.19)$$

где $u_\gamma = \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}$. Отсюда находим

$$\Delta = u_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (II.20)$$

Используя соотношения (II.17) и (II.18), можно записать формулу для вычисления доверительного интервала:

$$P\left(\bar{x} - u_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + u_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma, \qquad (II.21)$$

где выражение в скобках определяет доверительный интервал. Вычислим значение переменной u_γ. На основании формулы (II.19) получим условие

$$\Phi(u_\gamma) = 1/2(1 + \gamma). \qquad (II.22)$$

Согласно этому условию, из таблиц (см. приложение 3) найдем значение аргумента u_γ.

5. Доверительный интервал для среднего значения μ нормального распределения при неизвестном σ. Пусть задана генеральная совокупность с нормальным распределением $X \in N(\mu, \sigma)$, где значение стандартного отклонения σ неизвестно. Так как σ неизвестно, то непосредственно воспользоваться нормальным распределением $N(\mu, \sigma)$ нельзя. Однако известно, что случайная величина

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S}\sqrt{n}, \qquad (II.23)$$

где S — несмещенная оценка стандартного отклонения генеральной совокупности, n — объем выборки, имеет *распределение Стьюдента* (*t-распределение*) *с числом степеней свободы* $n - 1$.

Для получения интервальной оценки потребуем, чтобы выполнялось условие

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n}\right| \leqslant t_\gamma\right) = \gamma. \qquad (II.24)$$

Величина t_γ определяется по таблицам распределения Стьюдента (см. приложение 5). По нижней части головки таблицы; на основании условия $P(|X| > t_\gamma) = \gamma$ определяется t_γ, но в данном случае имеем противоположное неравенство, значит, нужно использовать условие

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n}\right| > t_\gamma\right) = 1-\gamma.$$

Число степеней свободы равно $n-1$.

Преобразовав условие (II.24), имеем

$$P\left(\bar{x} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma, \qquad (II.25)$$

где доверительный интервал указан в скобках. Полученная формула аналогична формуле (II.20). Здесь

$$\Delta = t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}. \qquad (II.26)$$

6. Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормального распределения. Предположим, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение $X \in N(\mu, \sigma)$. Тогда случайная величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \qquad (II.27)$$

имеет χ^2-*распределение (распределение Пирсона) с числом степеней свободы* $n-1$. Случайная величина с χ^2-распределением принимает только неотрицательные значения. По таблицам χ^2-распределения (см. приложение 4) можно найти x_α, удовлетворяющее следующему условию: $P(\chi^2 > x_\alpha) = \alpha$ (рис. 23).

По таблицам χ^2-распределения всегда можно найти такие два числа u_1 и u_2, которые удовлетворяли бы условию

$$P(u_1 \leqslant \chi^2 \leqslant u_2) = \gamma. \qquad (II.28)$$

Таких пар чисел u_1 и u_2 существует бесконечное множество. Чтобы зафиксировать одну такую пару u_1, u_2, введем дополнительное условие (симметричность по вероятности) (рис. 24):

$$P(\chi^2 < u_1) = P(\chi^2 > u_2) = \frac{1}{2}(1-\gamma). \qquad (II.29)$$

Из таблиц, используя условие (II.29), получаем u_2. Для нахождения u_1 используем вероятность противоположного события

$$P(\chi^2 > u_1) = \frac{1}{2}(1+\gamma). \qquad (II.30)$$

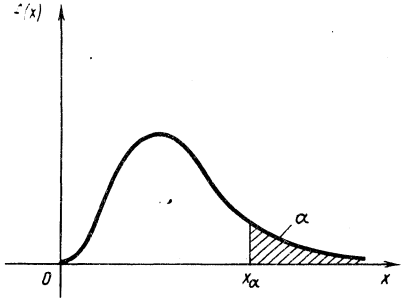


Рис. 23. Использование таблицы χ^2-распределения

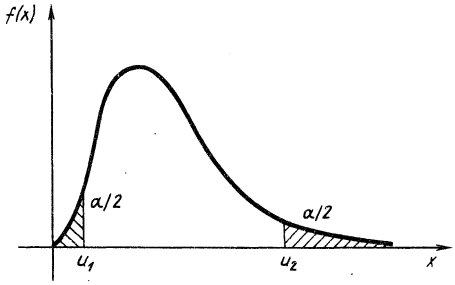


Рис. 24. Нахождение чисел u_1 и u_2

Заменяя в формуле (II.28) χ^2 его значением из формулы (II.27) и выполняя преобразования, получаем

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{u_2} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{u_1}\right) = \gamma, \qquad \text{(II.31)}$$

где в скобках задан *доверительный интервал для дисперсии* σ^2.

Извлекая квадратный корень из обеих сторон неравенства, определяющего доверительный интервал для дисперсии σ^2, получаем *доверительный интервал для среднего квадратичного (стандартного) отклонения* σ:

$$\frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{u_2}} \leqslant \sigma \leqslant \frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{u_1}}. \qquad \text{(II.32)}$$

7. Определение объема выборки n. До сих пор мы рассматривали обработку готовых выборок с фиксированным объемом n. Какой объем должна иметь выборка, чтобы было можно получить результаты нужной точности? По закону больших чисел предпочтение отдается выборкам с большим объемом. Но обычно больший объем выборки требует и больших затрат для ее получения и обработки. Поэтому на практике целесообразно использовать тот минимальный объем, который позволяет получить удовлетворительные результаты.

При вычислении доверительных интервалов среднего значения нормального распределения можно, используя формулу (II.20), определить *объем выборки*

$$n = u_\gamma^2 \frac{\sigma^2}{\Delta^2}. \qquad \text{(II.33)}$$

Таким образом, объем выборки n прямо пропорционален σ^2 и u_γ^2 (при этом последнее значение зависит от γ) и обратно пропорционален σ^2. По этим данным можно задать значения вероятности и длину полуинтервала Δ. Если мы хотим получить интервал с большей доверительной вероятностью γ (вместе с тем увеличивается и u_γ), то следует увеличить объем выборки n. Если мы хотим укоро-

тить интервал, то должны увеличить объем выборки n. Так, с помощью формулы (II.33) вычисляется объем выборки при известном σ.

Если σ неизвестно, то для выборки объема n из формулы (II.26) получаем

$$n = t_\gamma^2 \frac{S^2}{\Delta^2}. \qquad \text{(II.34)}$$

По формуле (II.33), задавая σ, можно определить соответствующий объем выборки n до получения самой выборки. По формуле (II.34) можно определить нужный объем выборки n после обработки уже имеющейся пробной выборки, по которой вычисляется несмещенная оценка дисперсии генеральной совокупности S^2.

РАБОТА 4

Задание

При решении следующих задач использовать выборки из § 7. Воспользоваться результатами, полученными в предыдущей работе.

Задача 4.1. Вычислить по третьему и четвертому столбцу ($F3$ и $F4$) выборки D несмещенные оценки среднего значения μ, дисперсии σ^2 и стандартного отклонения σ генеральной совокупности: $\bar{x}$, S^2, S.

Задача 4.2. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\bar{x}$, S^2, S по второй тройке столбцов X, Y и Z выборки C. По желанию можно сначала составить вариационный ряд по значениям.

Задача 4.3. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\bar{x}$, S^2, S по всем столбцам X выборки C. Сначала составить вариационный ряд по интервалам.

Задача 4.4. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\bar{x}$, S^2, S по выборкам A и B, используя результаты, полученные в задаче 3.1.

Задача 4.5. Найти доверительные интервалы для среднего значения μ, дисперсии σ^2 и стандартного отклонения σ генеральных совокупностей при доверительной вероятности γ, если из генеральных совокупностей сделаны выборки, используемые в задачах 4.1 и 4.2, и

$$\gamma = \begin{cases} 0{,}8, & V \leqslant 10, \\ 0{,}95 & 10 < V \leqslant 20, \\ 0{,}98 & V > 20. \end{cases}$$

Задача 4.6. Считая выборки, заданные в задаче 4.1, пробными, определить минимальный объем выборки n для нахождения доверительного интервала среднего значения μ длины 2Δ и доверительной вероятностью γ, где

Таблица 18

x_i	$x_i - c$	$(x_i - c)^2$
57	— 8	64
71	6	36
66	1	1
76	11	121
70	5	25
68	3	9
74	9	81
68	3	9
69	4	16
71	6	36
60	— 5	25
56	— 9	81
71	6	36
68	3	9
66	1	1
60	— 5	25
70	5	25
69	4	16
72	7	49
70	5	25
Σ	51	690

Таблица 19

y_i	$y_i - c$	$(y_i - c)^2$
— 219	31	961
— 281	— 31	961
— 262	— 12	144
— 302	— 52	2 704
— 275	— 25	625
— 267	— 17	289
— 290	— 40	1 600
— 266	— 16	256
— 270	— 20	400
— 283	— 33	1 089
— 237	13	169
— 222	28	784
— 281	— 31	961
— 269	— 19	361
— 257	— 7	49
— 235	15	225
— 275	— 25	625
— 276	— 26	676
— 282	— 32	1 024
— 277	— 27	729
Σ	— 326	14 632

Таблица 20

z_i	$z_i - c$	$(z_i - c)^2$
454	— 66	4 356
566	46	2 116
522	2	4
599	79	6 241
554	34	1 156
542	22	484
588	68	4 624
537	17	289
550	30	900
559	39	1 521
479	— 41	1 681
446	— 74	5 476
565	45	2 025
538	18	324
520	0	0
478	— 42	1 764
554	34	1 156
542	22	484
566	46	2 116
558	38	1 444
Σ	317	38 161

$$S_X^2 = \frac{20}{19} \cdot 27{,}74 = 29{,}20, \qquad S_X = \sqrt{29{,}2} = 5{,}4,$$

$$y_{\min} = -302, \; y_{\max} = -219, \qquad c = -250, \; n = 20,$$

$$\bar{y} = \frac{-326}{20} - 250 = -16{,}3 - 250 = -266{,}3;$$

$$\overline{S_Y^2} = \frac{14632}{20} - (-266{,}3 + 250)^2 = 731{,}6 - 265{,}69 = 465{,}91,$$

$$S_Y^2 = \frac{20}{19} \cdot 465{,}91 = 490{,}43, \qquad S_Y = \sqrt{490{,}43} = 22{,}15,$$

$$z_{\min} = 446, \; z_{\max} = 599, \qquad c = 520, \qquad n = 20,$$

$$\bar{z} = \frac{317}{20} + 520 = 15{,}8 + 520 = 535{,}8;$$

$$\overline{S_Z^2} = \frac{38161}{20} - (535{,}8 - 520)^2 = 1908{,}05 - 251{,}22 = 1656{,}83,$$

$$S_Z^2 = \frac{20}{19} \cdot 1656{,}83 = 1744{,}03, \qquad S_Z = \sqrt{1744{,}03} = 41{,}76.$$

Задача 4.3. Найдем $x_{\min} = 55$, $x_{\max} = 80$. Начало первого интервала 53 и длина интервала 5 задаются выборкой. Составление вариационного ряда и вычисления сумм по формулам (II.8) и (II.11) оформляем в таблице (табл. 21).

Таблица 21

Интервал		n_i	Середина интервала x_i	$\frac{x_i - c}{k}$	$\frac{x_i - c}{k} n_i$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i$
53—58		5	55,5	— 3	— 15	9	45
58—63		9	60,5	— 2	— 18	4	36
63—68		20	65,5	— 1	— 20	1	20
68—73		33	70,5	0	0	0	0
73—78		8	75,5	1	8	1	8
78—83		3	80,5	2	6	4	12
Σ		78	—	—	— 39	—	121

Имеем:

$$c = 70{,}5, \quad k = 5,$$

$$\bar{x} = \frac{-39}{78} \cdot 5 + 70{,}5 = -2{,}5 + 70{,}5 = 68;$$

$$\overline{S^2} = \frac{121}{78} \cdot 25 - (68 - 70{,}5)^2 = 38{,}78 - 6{,}25 = 32{,}53,$$

$$S^2 = \frac{78}{77} \cdot 32{,}53 = 32{,}95, \qquad S = \sqrt{32{,}95} = 5{,}7.$$

Задача 4.4. Для выборки A при решении задачи 3.1 была получена несмещенная оценка среднего значения $\bar{x} = 2{,}84$, а также выборочная дисперсия $\overline{S^2} — 2{,}3668$. По формуле (II.13) находим несмещенные оценки дисперсии и стандартного отклонения:

$$n = 79, \qquad S^2 = \frac{79}{78} \cdot 2{,}3668 = 2{,}3971, \qquad S = \sqrt{2{,}3971} = 1{,}55.$$

Для выборки B имеем

$$\bar{x} = 71{,}32, \quad \overline{S^2} = 14{,}6176, \quad n = 200,$$

$$S^2 = \frac{200}{199} \cdot 14{,}6176 = 14{,}6910, \qquad S = \sqrt{14{,}6910} = 3{,}83.$$

Задача 4.5. С доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}8$ по формуле (II.25) найдем доверительные интервалы для среднего значения (II.25), дисперсии σ^2 по формуле (II.31) и стандартного отклонения σ по формуле (II.32), используя выборки задач 4.1 и 4.2.

В задаче 4.1 обе выборки имеют один и тот же объем $n = 6$,

следовательно, по таблицам получаем одинаковые величины t_γ для обеих выборок. Из таблицы распределения Стьюдента найдем $t_\gamma = 1{,}48$, а из таблицы $\varkappa^2$-распределения $u_1 = 1{,}610$ и $u_2 = 15{,}086$.

По выборке $F3$ получаем следующие доверительные интервалы:

$$\bar{x} = -29{,}2, \quad S^2 = 46{,}968, \quad S = 6{,}85,$$

$$\Delta = 1{,}48 \cdot \frac{6{,}85}{\sqrt{6}} = 4{,}1,$$

$$-29{,}2 - 4{,}1 \leqslant \mu \leqslant -29{,}2 + 4{,}1, \qquad -33{,}3 \leqslant \mu \leqslant -25{,}1,$$

$$\frac{46{,}968 \cdot 5}{15{,}086} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{46{,}968 \cdot 5}{1{,}610},$$

$$15{,}57 \leqslant \sigma^2 \leqslant 145{,}86, \qquad 3{,}9 \leqslant \sigma \leqslant 12{,}1.$$

По выборке $F4$ получаем следующие доверительные интервалы:

$$x = -32, \quad S^2 = 23{,}2, \quad S = 4{,}8.$$

$$\Delta = 1{,}48 \cdot \frac{4{,}8}{\sqrt{6}} = 2{,}9,$$

$$-32 - 2{,}9 \leqslant \mu \leqslant -32 + 2{,}9, \qquad -34{,}9 \leqslant \mu \leqslant -29{,}1,$$

$$\frac{23{,}2 \cdot 5}{15{,}086} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{23{,}2 \cdot 5}{1{,}610},$$

$$7{,}69 \leqslant \sigma^2 \leqslant 72{,}05, \qquad 2{,}8 \leqslant \sigma \leqslant 8{,}5.$$

В задаче 4.2 вторая тройка столбцов выборки C имеет объем $n = 20$ и из таблиц находим

$$t_\gamma = 1{,}33, \quad u_1 = 11{,}051, \quad u_2 = 33{,}687.$$

По второму столбцу X получаем следующие доверительные интервалы:

$$\bar{x} = 67{,}6, \quad S_X^2 = 29{,}20, \quad S_X = 5{,}4,$$

$$\Delta_X = 1{,}33 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{20}} = 1{,}6;$$

$$67{,}6 - 1{,}6 \leqslant \mu_X \leqslant 67{,}6 + 1{,}6, \qquad 66{,}0 \leqslant \mu_X \leqslant 69{,}2,$$

$$\frac{29{,}20 \cdot 19}{33{,}687} \leqslant \sigma_X^2 \leqslant \frac{29{,}20 \cdot 19}{11{,}051},$$

$$16{,}47 \leqslant \sigma_X^2 \leqslant 50{,}20, \qquad 4{,}1 \leqslant \sigma_X \leqslant 7{,}1.$$

По второму столбцу Y получаем следующие доверительные интервалы:

$$\bar{y} = -266{,}3, \quad S_Y^2 = 490{,}43, \quad S_Y = 22{,}15,$$

$$\Delta_Y = 1{,}33 \cdot \frac{22{,}15}{\sqrt{20}} = 6{,}6;$$

$$-266{,}3 - 6{,}6 \leqslant \mu_Y \leqslant -266{,}3 + 6{,}6, \qquad -272{,}9 \leqslant \mu_Y \leqslant -259{,}7,$$

$$\frac{490{,}43 \cdot 19}{33{,}687} \leqslant \sigma_Y^2 \leqslant \frac{490{,}43 \cdot 19}{11{,}051},$$

$$276{,}61 \leqslant \sigma_Y^2 \leqslant 843{,}20, \qquad 16{,}6 \leqslant \sigma_Y \leqslant 29{,}0.$$

По второму столбцу Z получаем следующие доверительные интервалы:

$$\bar{z} = 535{,}8, \quad S_Z^2 = 1744{,}03, \quad S_Z = 41{,}76,$$

$$\Delta_Z = 1{,}33 \cdot \frac{41{,}76}{\sqrt{20}} = 12{,}4.$$

$$535{,}8 - 12{,}4 \leqslant \mu_Z \leqslant 535{,}8 + 12{,}4, \quad 523{,}4 \leqslant \mu_Z \leqslant 548{,}2,$$

$$\frac{1744{,}03 \cdot 19}{33{,}687} \leqslant \sigma_Z^2 \leqslant \frac{1744{,}03 \cdot 19}{11{,}051}$$

$$983{,}66 \leqslant \sigma_Z^2 \leqslant 2998{,}51, \qquad 31{,}4 \leqslant \sigma_Z \leqslant 54{,}8.$$

Задача 4.6. Для определения объема выборки воспользуемся формулой (II.34). При $\gamma = 0{,}8$ и $\Delta = 1$ найдем $t_\gamma = 1{,}48$. По выборке $F3$ получаем $S^2 = 46{,}968$ и

$$n = 1{,}48^2 \cdot \frac{46{,}968}{1^2} = 102{,}88 \approx 103.$$

По выборке $F4$ вычислим $S^2 = 23{,}2$ и

$$n = 1{,}48^2 \cdot \frac{23{,}2}{1^2} = 50{,}8 \approx 51.$$

§ 5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

1. Понятие статистической гипотезы. *Статистической* гипотезой называют любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Например, случайная величина X имеет распределение Пуассона, случайная величина с нормальным распределением имеет среднее значение $\mu = 5$ или $\mu \neq 5$ и т. д. Статистические гипотезы проверяются статистическими методами.

Гипотезы о неизвестном параметре θ распределения бывают простые и сложные; простая гипотеза утверждает, что параметр θ имеет одно конкретное значение ($\theta = \theta_0$), а сложная гипотеза утверждает, что параметр θ имеет значение из совокупности значений ($\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$, $\theta \neq \theta_0$).

Проверяемую гипотезу обозначим H_0. Обычно вырабатывают еще и *альтернативную гипотезу* H_1, отрицающую или исключающую основную гипотезу H_0. Таким образом, в результате проверки можно принимать только одну из гипотез H_0 или H_1, отвергая в это же время другую.

Гипотезу проверяют на основании выборки, полученной из генеральной совокупности. Из-за случайности выборки в результате проверки могут возникать ошибки и приниматься неправильные решения. В принципе возможны ошибки первого и второго рода. *Ошибка первого рода* имеет место тогда, когда отвергается правильная гипотеза H_0. При *ошибке второго рода* принимается неправильная гипотеза H_0.

Таким образом, по одним выборкам принимается правильное решение, а по другим — неправильное. Решение принимается по значению некоторой функции выборки, называемой *статистикой* или *статистической характеристикой.* Множество значений этой статистики можно разделить на два непересекающихся подмножества:

подмножество значений статистики, при которых гипотеза H_0 принимается (не отклоняется), называют *областью принятия гипотезы* (*допустимой областью*);

подмножество значений статистики, при которых гипотеза H_0 отвергается (отклоняется) и принимается гипотеза H_1, называют *критической областью.*

При проверке гипотез разумно уменьшить вероятности принятия неправильных решений. *Допустимая вероятность ошибки первого рода* обозначается через α и называется *уровнем значимости.* Значение α обычно мало. Но уменьшение вероятности ошибки первого рода обычно вызывает увеличение вероятности ошибки второго рода (β).

Статистика выбирается так, чтобы вероятности α и β были бы минимальными. Проверяемая гипотеза H_0 в настоящем пособии предполагается всегда простой, так что распределение статистики при правильной гипотезе H_0 известно. Методы выбора наилучшей статистики здесь не рассматриваются.

Для определения критической области статистики используют уровень значимости α и учитывают вид альтернативной гипотезы H_1. *Основная гипотеза* H_0 о значении неизвестного параметра θ распределения выглядит так:

$$H_0 : \theta = \theta_0.$$

Альтернативная гипотеза H_1 может при этом иметь следующий вид:

$$H_1 : \theta < \theta_0, \quad H_1 : \theta > \theta_0 \text{ или } H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Соответственно можно получить *левостороннюю, правостороннюю* или *двустороннюю критические области* (рис. 25). Граничные точки критических областей определяют по таблицам распределения статистики.

Проверка статистической гипотезы состоит из следующих этапов:

1) определение гипотез H_0 и H_1;

2) выбор статистики и задание уровня значимости α;

3) определение по таблицам, по уровню значимости α и по альтернативной гипотезе H_1 критической области;

4) вычисление по выборке значения статистики;

5) сравнение значения статистики с критической областью;

6) принятие решения: если *значение статистики не входит в критическую область*, то принимается гипотеза H_0 и отвергается гипотеза H_1, а *если входит в критическую область*, то отвергается гипотеза H_0 и принимается гипотеза H_1.

Иногда целесообразно перед определением альтернативной гипотезы H_1 выполнить этап 4), где для получения значения статистики

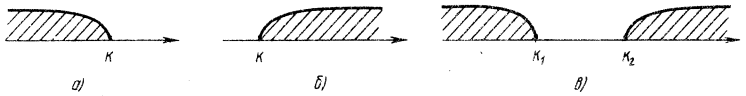


Рис. 25. Критические области:
а — левосторонняя; *б* — правосторонняя; *в* — двусторонняя

нужно вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности. Например, если проверяется гипотеза $H_0: \mu \neq 5$ и несмещенная оценка среднего значения $\bar{x} = 7{,}2$, то имеют смысл только следующие альтернативные гипотезы $H_1: \mu > 5$ или $H_1: \mu = 5$.

Результаты проверки статистической гипотезы нужно интерпретировать так: *если приняли гипотезу* H_1, то можно считать ее *доказанной*, а *если приняли гипотезу* H_0, то признали, что *гипотеза* H_0 *не противоречит результатам наблюдений*. Однако этим свойством наряду с H_0 могут обладать и другие гипотезы. Например, если мы принимаем гипотезу $H_0: \mu = 5$, то может случиться, что по данной выборке можно принять и другие гипотезы, например, $H_0: \mu = 5{,}5$ или $H_0: \mu = 4$ и т. д. Вопрос о том, как найти среди них наилучшую гипотезу, в данном пособии не рассматривается. Следует помнить, что, *принимая гипотезу* H_0, *следует проводить еще дополнительные исследования*.

2. Гипотеза о среднем значении нормального распределения при известном σ. Предполагаем, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение $X \in N(\mu, \sigma)$, где значение σ известно. *При уровне значимости* α нужно проверить гипотезу $H_0: \mu = \mu_0$. В качестве альтернативной можно использовать одну из следующих гипотез $H_1: \mu < \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ или $H_1: \mu \neq \mu_0$. В качестве статистики воспользуемся случайной величиной

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, \qquad \text{(II.35)}$$

которая при истинной гипотезе H_0 имеет *нормированное нормальное распределение* $Z \in N(0, 1)$.

Критическую область определяем с помощью таблицы функции распределения (см. приложение 3).

Если альтернативная гипотеза имеет вид $H_1: \mu < \mu_0$, то используем левостороннюю критическую область, которая удовлетворяет (рис. 26) следующему условию:

$$P(Z < -z_\alpha) = \Phi(-z_\alpha) = \alpha. \qquad \text{(II.36)}$$

Таблицы составлены только для положительных значений аргумента, поэтому из таблицы найдем z_α, учитывая [см. формулу (I.17)], что

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha. \qquad \text{(II.37)}$$

Отсюда следует, что критическая область — это множество таких Z, для которых

$$Z < -z_\alpha. \qquad \text{(II.38)}$$

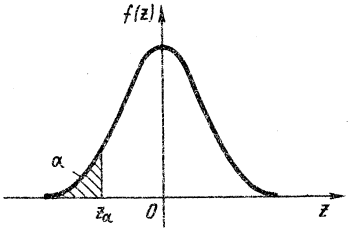


Рис. 26. Левосторонняя критическая область

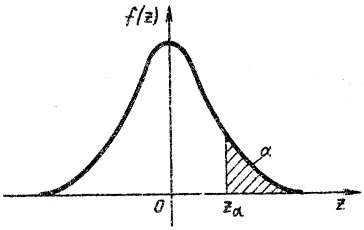


Рис. 27. Правосторонняя критическая область

Если альтернативная гипотеза имеет вид $H_1: \mu > \mu_0$, то используем правостороннюю критическую область, которая удовлетворяет (рис. 27) условию

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha. \qquad (II.39)$$

Из таблицы получаем значение z_α, учитывая, что

$$P(Z < z_\alpha) = \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha. \qquad (II.40)$$

Отсюда находим критическую область

$$Z > z_\alpha. \qquad (II.41)$$

И наконец, при альтернативной гипотезе H_1: $\mu \neq \mu_0$ используем двустороннюю критическую область, удовлетворяющую (рис. 28) условию

$$P(|Z| > z_\alpha) = \alpha. \qquad (II.42)$$

Учитывая определение абсолютной величины, находим

$$P(Z < z_\alpha) = P(Z > z_\alpha) = \alpha/2.$$

По формулам (II.39) и (II.40) получаем условие использования таблицы:

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha/2. \qquad (II.43)$$

Таким образом, критическая область имеет вид

$$|Z| > z_\alpha. \qquad (II.44)$$

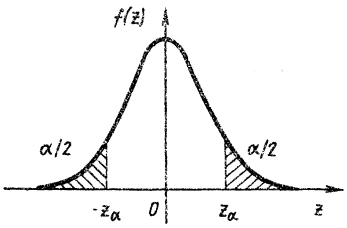


Рис. 28. Двусторонняя критическая область

Для вычисления значения статистики с помощью формулы (II.35) нужно по выборке найти среднее арифметическое $\bar{x}$.

3. Гипотеза о среднем значении нормального распределения при неизвестном σ. Предположения те же, что и в предыдущем пункте, но только σ неизвестно. В этом случае в качестве статистики используют случайную величину

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}, \qquad (II.45)$$

которая, если верна гипотеза H_0, имеет *t-распределение Стьюдента с числом степеней свободы* $n - 1$, где n — объем выборки.

Критические области определяются так же, как и в предыдущем пункте. Но использование таблицы t-распределения Стьюдента проще, так как она составлена именно для определения критических областей. При нахождении левосторонней или правосторонней критических областей используем верхнюю головку таблицы, а для двусторонней — нижнюю.

Перед вычислением по формуле (II.45) значения статистики t нужно по выборке вычислить x и S.

4. Гипотеза о дисперсии нормального распределения. Предполагаем, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение $X \in N(\mu, \sigma)$, где параметр σ неизвестен. Требуется *при уровне значимости* α *проверить гипотезу* H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$. В качестве статистики используем случайную величину

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}. \qquad (II.46)$$

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина χ^2 имеет *χ^2-распределение Пирсона с числом степеней свободы* $n - 1$, где n — объем выборки.

Критическая область определяется в зависимости от альтернативной гипотезы H_1 по таблице χ^2-распределения (см. приложение 4).

Если альтернативная гипотеза имеет вид $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$, то используем *левостороннюю критическую область*, удовлетворяющую условию

$$P(\chi^2 < x_\alpha) = \alpha. \qquad (II.47)$$

Таблица χ^2-распределения составлена в соответствии с противоположным условием. Значит, для нахождения из таблицы x_α используем условие

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = 1 - \alpha. \qquad (II.48)$$

При альтернативной гипотезе $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ находим *правостороннюю критическую область* исходя из условия

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = \alpha, \qquad (II.49)$$

по которому x_α можно найти непосредственно из таблицы.

При альтернативной гипотезе $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ находим двустороннюю критическую область согласно условию

$$P((\chi^2 < x'_\alpha) \cup (\chi^2 > x''_\alpha)) = \alpha. \qquad (II.50)$$

Обычно принимают симметричную по вероятности критическую область, удовлетворяющую условию

$$P(\chi^2 < x'_\alpha) = P(\chi^2 > x''_\alpha) = \alpha/2. \qquad (II.51)$$

Для этого условия из таблицы можно сразу найти x''_α, а для получения x'_α следует преобразовать условия [см. формулы (II.47) и (II.48)]

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = 1 - \alpha/2. \qquad \text{(II.52)}$$

По выборке нужно вычислить несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности S^2, а затем по формуле (II.46) можно найти значение статистики χ^2.

5. Гипотеза о равенстве двух средних значений. Предполагаем, что заданы две генеральные совокупности с нормальным распределением $X_1 \in N(\mu_1, \sigma_1)$, $X_2 \in N(\mu_2, \sigma_2)$, при этом стандартные отклонения σ_1 и σ_2, неизвестны, но должны быть равными. Сначала нужно проверить гипотезу о равенстве дисперсий. Из обеих генеральных совокупностей сделаны независимые выборки с параметрами n_1, $\bar{x}_1$, S_1 и n_2, $\bar{x}_2$, S_2 соответственно.

Обозначим разность средних значений через $\delta = \mu_1 - \mu_2$. *Зафиксировав уровень значимости α, проверим гипотезу $H_0: \delta = \delta_0$, используя статистику*

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}. \qquad \text{(II.53)}$$

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина t имеет *t-распределение с числом степеней свободы* $n_1 + n_2 - 2$. Обычно $\delta_0 = 0$, т. е. проверяется гипотеза о равенстве средних значений генеральных совокупностей.

Критическая область определяется в зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 ($\delta < \delta_0$, $\delta > \delta_0$ или $\delta \neq \delta_0$) по таблице t-распределения (см. приложение 5).

6. Гипотеза о равенстве двух дисперсий. Предполагаем, как и в предыдущем пункте, что заданы две генеральные совокупности X_1 и X_2 с нормальным распределением: $X_1 \in N(\mu_1, \sigma_1)$ и $X_2 \in N(\mu_2, \sigma_2)$. Из этих генеральных совокупностей сделаны независимые выборки с параметрами n_1, S_1^2 и n_2, S_2^2 соответственно. Требуется *при уровне значимости α проверить гипотезу* H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Обычно здесь другие альтернативные гипотезы не используют.

Предполагая, что $S_1^2 > S_2^2$, принимаем в качестве статистики величину

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \qquad \text{(II.54)}$$

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина F имеет *F-распределение Фишера с числами степеней свободы* $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$. Критическая область будет только *правосторонняя* и определяется условием

$$P(F > f_2) = \alpha. \qquad \text{(II.55)}$$

Значение f_α найдем из таблиц F-распределения (см. приложение 6). Значение f_α зависит от трех величин: уровня значимости α и двух

чисел степеней свободы k_1 и k_2, поэтому таблицы составлены отдельно для каждого значения α (трехмерные таблицы). В таблицах число степеней свободы большей дисперсии k_1 находится в верхней части таблицы.

7. χ^2-критерий согласия. Рассмотрим, как можно проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности X. Пусть генеральная совокупность имеет какое-то неизвестное распределение. Сделаем выборку из генеральной совокупности. На основании выборки или учитывая какие-то другие соображения составим гипотезу о конкретном распределении генеральной совокупности, выраженной через функцию распределения $F(x)$. Это распределение назовем *теоретическим*.

По выборке можем найти *эмпирическую функцию распределения* $F^*(x)$. Гипотезу H_0 о распределении генеральной совокупности принимаем тогда, когда эмпирическое распределение хорошо согласуется с теоретическим. Полного совпадения, конечно, ожидать не стоит. Для проверки таких гипотез разработаны несколько критериев согласия. Мы рассмотрим только χ^2-критерий согласия Пирсона.

При использовании χ^2-критерия согласия вся область изменения генеральной совокупности X делится на k интервалов, которые могут иметь различную длину. По выборке составляют вариационный ряд по этим же интервалам. Если в некотором интервале частота n_i слишком мала (меньше 5), то этот интервал объединяют с соседним интервалом. При дискретной генеральной совокупности интервал может содержать только одно значение генеральной совокупности.

По выборке вычисляют оценки параметров теоретического распределения. Тем самым теоретическое распределение будет полностью определено. Теперь по теоретическому распределению вычислим вероятности p_i того, что случайная величина X принимает значение из i-го интервала, при этом $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Затем найдем теоретические частоты $m_i = n \cdot p_i$.

Гипотеза H_0 верна, если теоретические и эмпирические частоты m_i и n_i достаточно мало отличаются друг от друга. Для проверки гипотезы H_0 используем следующую статистику:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}. \qquad \text{(II.56)}$$

Случайная величина Q^2 имеет *χ^2-распределение с числом степеней свободы $k - r - 1$*, где k — количество интервалов, r — количество параметров теоретического распределения, оценки которых вычислялись по выборке.

Чем больше Q^2, тем хуже согласованы теоретическое и эмпирическое распределения. При достаточно большом значении Q^2 нужно отвергнуть гипотезу H_0. Поэтому используем только правостороннюю критическую область.

3 РАБОТА 5

Задание

В задачах этого параграфа используются выборки, сделанные из генеральных совокупностей с нормальным распределением, кроме задачи 5.7, где предполагается, что генеральная совокупность имеет распределение Пуассона.

При решении задач воспользоваться результатами, полученными в работах 3 и 4.

Задача 5.1. По первому столбцу X выборки C при уровне значимости α проверить гипотезу о среднем значении H_0: $\mu = M$ при альтернативной гипотезе H_1: $\mu * M$, если задано стандартное отклонение σ.

Имеем

$$\alpha = 0{,}01 + k/100,\ k = \text{остаток } (V/10),\ \sigma = 8,$$

$$M = \begin{cases} \text{целая часть } (\bar{x}) - 3, & k < 2, \\ \text{целая часть } (\bar{x}) - 1, & 2 \leqslant k < 5, \\ \text{целая часть } (\bar{x}) + 1, & 5 \leqslant k \leqslant 8, \\ \text{целая часть } (\bar{x}) + 3, & k \geqslant 8; \end{cases} \qquad * = \begin{cases} >, & k < 2, \\ \neq, & 2 \leqslant k < 8, \\ <, & k \geqslant 8. \end{cases}$$

Задача 5.2. По первому столбцу Y выборки C при уровне значимости α проверить гипотезу о среднем значении H_0: $\mu = M$ при альтернативной гипотезе H_1: $\mu * M$, если σ неизвестно.

Имеем:

$$k = \text{остаток } (V/5),$$

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}1, & k = 0, \\ 0{,}05, & k = 1, \\ 0{,}01, & k = 2, \\ 0{,}005, & k = 3, \\ 0{,}001, & k = 4, \end{cases} \qquad M = \begin{cases} \text{целая часть } (\bar{y}) + 4, & k = 0, \\ \text{целая часть } (\bar{y}) + 2, & k = 1, 2, \\ \text{целая часть } (\bar{y}) - 2, & k = 3, \\ \text{целая часть } (\bar{y}) - 4, & k = 4; \end{cases}$$

$$* = \begin{cases} <, & k = 0, \\ \neq, & k = 1, 2, 3, \\ >, & k = 4. \end{cases}$$

Задача 5.3. По первому столбцу Z выборки C при уровне значимости α проверить гипотезу о дисперсии H_0: $\sigma^2 = T$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma^2 * T$.

Имеем:

$$k = \text{остаток } (V/4),$$

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}01, & k = 0, \\ 0{,}02, & k = 1, \\ 0{,}10, & k = 2, \\ 0{,}05, & k = 3; \end{cases} \qquad T = \begin{cases} \text{целая часть } (S^2) - 4, & k = 0, \\ \text{целая часть } (S^2) - 1, & k = 1, \\ \text{целая часть } (S^2) + 1, & k = 2, \\ \text{целая часть } (S^2) + 4, & k = 3; \end{cases}$$

$$* = \begin{cases} >, & k = 0, \\ \neq, & k = 1, 2, \\ <, & k = 3. \end{cases}$$

Задача 5.4. По столбцам $F1$ и $F2$ выборки D при уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве средних значений H_0: $\delta = 0$ при альтернативной гипотезе H_1: $\delta * 0$, если неизвестные дисперсии обеих совокупностей считать равными.

Имеем:

$$k = \text{остаток } (V/5),$$

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}001, & k = 0, \\ 0{,}005, & k = 1, \\ 0{,}01, & k = 2, \\ 0{,}05, & k = 3, \\ 0{,}1, & k = 4; \end{cases} \qquad * = \begin{cases} <, & \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \text{ и } k = 0{,}4, \\ >, & \bar{x}_1 > \bar{x}_2 \text{ и } k = 0{,}4, \\ \neq, & k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Задача 5.5. По столбцам $F3$ и $F4$ выборки D при уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Имеем:

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}05, & V \text{ четное}, \\ 0{,}01, & V \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Задача 5.6. По первым двум столбцам X выборки C при уровне значимости α проверить сначала гипотезу о равенстве дисперсий и, если она принимается, то затем гипотезу о равенстве средних значений.

Получаем

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}01, & V \text{ четное}, \\ 0{,}05, & V \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Задача 5.7. По выборке A при уровне значимости α проверить гипотезу о распределении Пуассона соответствующей генеральной совокупности.

Имеем:

$$k = \text{остаток } (V/4),$$

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}01, & k = 0, \\ 0{,}02, & k = 1, \\ 0{,}05, & k = 2, \\ 0{,}1, & k = 3. \end{cases}$$

Задача 5.8. По выборке B при уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении соответствующей генеральной совокупности.

Имеем:

$$k = \text{остаток } (V/4),$$

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}1, & k = 0, \\ 0{,}05, & k = 1, \\ 0{,}02, & k = 2, \\ 0{,}01, & k = 3. \end{cases}$$

Задача 5.1. При решении задачи 3.3 было найдено, что

$$\bar{x} = 68{,}1, \ \overline{S^2} = 28{,}69, \ n = 20.$$

Находим $S^2 = 20/19 \cdot 28{,}69 = 30{,}2$, отсюда $S = 5{,}5$.

Задано: $\alpha = 0{,}01$, $\sigma = 5{,}5$, $n = 20$.

Проверить: $H_0: \mu = 65$ при $H_1: \mu > 65$.

Статистика Z [см. формулу (II.35)] имеет нормальное распределение. По альтернативной гипотезе H_1 найдем правостороннюю критическую область [см. уравнение (II.40)].

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

По таблицам нормального распределения (см. приложение 3) получаем $z_\alpha = 2{,}33$. Отсюда следует, что критическая область имеет вид $z > 2{,}33$. Вычислим значение статистики по формуле (II.35):

$$Z = \frac{68{,}1 - 65}{5{,}5}\sqrt{20} = \frac{3{,}1}{5{,}5}\sqrt{20} = 2{,}52.$$

Значение статистики принадлежит критической области. Следовательно, отвергаем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1: $\mu > 65$.

Задача 5.2. Из решения задачи 3.3 имеем

$$\bar{y} = -267{,}4, \quad \overline{S^2} = 485{,}65, \quad n = 20.$$

Вычисляем $S^2 = 20/19 \cdot 485{,}65 = 511{,}21$, отсюда $S = 22{,}6$.

Задано: $\alpha = 0{,}1$, $n = 20$.

Проверить: H_0: $\mu = -264$ при H_1: $\mu < -264$.

Статистика t [см. формулу (II.45)] имеет t-распределение с числом степеней свободы $n - 1$. При альтернативной гипотезе H_1 найдем левостороннюю критическую область по условию $P(t < t_\alpha) = 0{,}1$. Из таблицы t-распределения Стьюдента (см. приложение 5) получаем $t_\alpha = -1{,}33$. Отсюда критическая область $t < -1{,}33$. Значение статистики вычислим по формуле (II.44):

$$t = \frac{-267{,}4 + 264}{22{,}6}\sqrt{20} = \frac{-3{,}4}{22{,}6}\sqrt{20} = -0{,}67.$$

Значение статистики не принадлежит критической области и нет оснований отвергать основную гипотезу H_0: $\mu = -264$.

Задача 5.3. При решении задачи 3.3 было получено, что

$$\overline{S^2} = 1786{,}89, \ n = 20.$$

Вычислим $S^2 = 20/19 \cdot 1786{,}89 = 1880{,}94$, отсюда $S = 43{,}4$.

Задано: $\alpha = 0{,}01$, $n = 20$.

Проверить: H_0: $\sigma^2 = 1876$ при H: $\sigma^2 > 1876$.

Статистика χ^2 [см. формулу (II.46)] имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $n - 1$. По альтернативной гипотезе H_1 найдем правостороннюю критическую область, используя условие (II.49) и таблицу χ^2-распределения Пирсона (см. приложение 4).

Имеем

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = 0{,}01, \quad x_\alpha = 36{,}191, \quad \chi^2 > 36{,}191.$$

По формуле (II.46) вычислим значение статистики:

$$\chi^2 = \frac{(20-1)\cdot 1880{,}94}{1876} = 19{,}1.$$

Это значение не принадлежит критической области, поэтому гипотеза H_0: $\sigma^2 = 1876$ не будет отвергнута.

Задача 5.4. При решении задачи 3.2 было получено, что

$$\bar{x}_1 = -34{,}2, \quad \overline{S_1^2} = 69{,}14, \quad n_1 = 6, \quad \bar{x}_2 = -30{,}5, \quad \overline{S_2^2} = 10{,}58, \quad n = 6.$$

Вычислим $S_1^2 = 6/5\cdot 69{,}14 = 82{,}97$ и $S_2^2 = 6/5\cdot 10{,}58 = 12{,}70$.

Задано: $\alpha = 0{,}001$.

Проверить: H_0: $\delta = 0$ при H_1: $\delta < 0$.

Статистика t [см. формулу (II.53)] имеет t-распределение с числом степеней свободы $n_1 + n_2 - 2$. По альтернативной гипотезе H_1, используя условие $P(t < t_\alpha) = 0{,}001$ и таблицу t-распределения (см. приложение 5), найдем левостороннюю критическую область

$$t_\alpha = -4{,}14, \qquad t < -4{,}14.$$

По формуле (II.53) вычислим значение статистики

$$t = \frac{-34{,}2 + 30{,}5}{\sqrt{\frac{(6-1)\cdot 82{,}97 + (6-1)\cdot 12{,}70}{6+6-2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)}} = -0{,}93.$$

Это значение не принадлежит критической области, поэтому оснований отвергать гипотезу H_0: $\delta = 0$ нет, т. е. считаем средние значения генеральных совокупностей равными. При этом мы без проверки предполагали, что дисперсии генеральных совокупностей равны.

Задача 5.5. При решении задачи 4.1 было получено, что

$$S_1^2 = 46{,}97, \quad n_1 = 6, \qquad S_2^2 = 23{,}2, \quad n_2 = 6.$$

Задано: $\alpha = 0{,}05$.

Проверить: H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Статистика F [см. формулу (II.54)] имеет F-распределение с числом степеней свободы $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$. Найдем правостороннюю критическую область согласно условию (II.55) и по таблицам F-распределения (см. приложение 6):

$$P(F > f_\alpha) = 0{,}05, \quad f_\alpha = 4{,}95, \quad F > 4{,}95.$$

По формуле (II.54) вычислим значение статистики:

$$F = \frac{46{,}97}{23{,}20} = 2{,}02.$$

Это значение не принадлежит критической области, поэтому нет оснований отвергать гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, т. е. считаем дисперсии генеральных совокупностей равными.

Задача 5.6. При решении задач 3.3 и 5.1, 4.2 и 4.5 было получено, что

$$\bar{x}_1 = 68{,}1, \quad S_1^2 = 30{,}2, \quad n_1 = 20;$$
$$\bar{x}_2 = 67{,}6, \quad S_1^2 = 29{,}2, \quad n_2 = 20.$$

Сначала проверяем гипотезу о равенстве дисперсий.

Задано: $\alpha = 0{,}01$.

Проверить: H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Получаем следующую критическую область:

$$P(F > f_\alpha) = 0{,}01, \quad f_\alpha = 2{,}92, \quad F > 2{,}92.$$

Значение статистики

$$F = \frac{30{,}2}{29{,}2} = 1{,}03$$

не принадлежит критической области, поэтому принимаем гипотезу H_0 о равенстве дисперсий. Следовательно, стоит проверить и гипотезу о равенстве средних значений генеральных совокупностей.

Задано: $\alpha = 0{,}01$.

Проверить: H_0: $\delta = 0$ при H_1: $\delta > 0$.

Получаем следующую критическую область:

$$P(t > t_\alpha) = 0{,}01, \quad t_\alpha = 2{,}42, \quad t > 2{,}42.$$

Значение статистики

$$t = \frac{68{,}1 - 67{,}6}{\sqrt{\frac{(20-1)\cdot 30{,}2 + (20-1)\cdot 29{,}2}{20+20-2} \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right)}} = 0{,}29$$

не принадлежит критической области, поэтому принимаем гипотезу H_0 о равенстве средних значений.

Задача 5.7. При решении задач 3.1 и 4.4 был получен вариационный ряд (см. табл. 7) и значения $\bar{x} = 2{,}84$, $S^2 = 2{,}3971$. С уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ проверим гипотезу о распределении Пуассона генеральной совокупности. Параметром распределения Пуассона является λ, при этом $EX = DX = \lambda$ (см. п. 6 § 2). Оценки среднего значения и дисперсии близки по значению, но не равны. В таблицах распределения Пуассона (см. приложение 1) ближайшими к ним значениями λ являются 2 и 3. Проверим гипотезу при $\lambda = 3$. Частоты последних значений вариационного ряда малы, поэтому объединяем их в один интервал ($\geqslant 5$). Количество интервалов $k = 6$.

Статистика Q^2 [см. формулу (II.56)] имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $k - r - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$. Критическая область имеет вид

$$P(Q^2 > x_\alpha) = 0{,}01, \quad x_\alpha = 13{,}277, \quad Q^2 > 13{,}277.$$

Вычисления выполним, используя таблицу (табл. 22). Вероятности p_i получим по таблицам распределения Пуассона (см. приложение 1).

Таблица 22

x_i	n_i	p_i	m_i	$n_i - m_i$	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
0	4	0,0498	3,9	0,1	0,01	0,0026
1	13	0,1494	11,8	1,2	1,44	0,1220
2	14	0,2240	17,7	— 3,7	13,69	0,7734
3	24	0,2240	17,7	6,3	39,69	2,2424
4	16	0,1680	13,3	2,7	7,29	0,5481
$\geqslant 5$	8	0,1847	14,6	— 6,6	43,56	2,9836
Σ	79	0,9999	79,0	—	—	6,6721

Значение статистики $Q^2 = 6{,}6721$ не принадлежит критической области, так что нет оснований отвергать гипотезу о распределении Пуассона генеральной совокупности.

Задача 5.8. При решении задач 3.1 и 4.4 был получен вариационный ряд (см. табл. 9) и значения $\bar{x} = 71{,}32$; $S^2 = 14{,}6910$, $S = 3{,}83$. Задав уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, проверяем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Оценки параметров нормального распределения таковы: $\mu = 71{,}3$ и $\sigma = 3{,}8$.

В вариационном ряде (см. табл. 9) частоты первых и последних интервалов слишком малы, поэтому объединим их с соседними интервалами. В результате остается $k = 8$ интервалов.

Статистика Q^2 [см. формулу (II.56)] имеет χ^2-распределение $k - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$ степенями свободы. Критическая область следующая:

$$P(Q^2 > x_\alpha) = 0{,}1, \quad x_\alpha = 9{,}236, \quad Q^2 > 9{,}236.$$

Вычисление вероятностей p_i аналогично вычислениям в задаче 2.10 (см. табл. 6). Значения этих вероятностей можно найти в табл. 23. Вычисления статистики Q^2 оформляем в табл. 24.

Таблица 23

x_i	$\frac{x_i - \mu}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)$	p_i
$-\infty$	$-\infty$	0	
65	— 1,66	0,04846	0,04846
67	— 1,13	0,12924	0,08078
69	— 0,60	0,27425	0,14501
71	— 0,08	0,46812	0,19387
73	0,45	0,67364	0,20552
75	0,97	0,83398	0,16034
77	1,50	0,93319	0,09921
∞	∞	1	0,06681
Σ	—	—	1,00000

Таблица 24

Интервалы	n_i	p_i	m_i	$n_i - m_i$	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
$-\infty - 65$	10	0,04846	9,7	0,3	0,09	0,0093
65—67	16	0,08078	16,2	— 0,2	0,04	0,0025
67—69	27	0,14501	29,0	— 2,0	4,00	0,1379
69—71	40	0,19387	38,8	1,2	1,44	0,0371
71—73	38	0,20552	41,1	— 3,1	9,61	0,2338
73—75	38	0,16034	32,1	5,9	34,81	1,0844
75—77	18	0,09921	19,8	— 1,8	3,24	0,1636
$77 - \infty$	13	0,06681	13,4	— 0,4	0,16	0,0119
$\sum$	200	1,00000	200,1	—	—	1,6805

Значение статистики $Q^2 = 1{,}6805$ не принадлежит критической области, поэтому принимаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

§ 6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

1. Понятие многомерной выборки. Во время статистических наблюдений для каждого объекта в ряде случаев можно измерить значения нескольких признаков. Таким образом получается *многомерная выборка.* Если многомерную выборку обработать по значениям отдельного признака, то получится обычная обработка одномерной выборки.

Смысл обработки многомерных выборок состоит в том, чтобы *установить связи между признаками.* Связи могут быть функциональными, т. е. каждому значению одной величины соответствует определенное значение другой величины.

Связь между случайными величинами часто носит случайный характер. Такая связь называется *стохастической* или *статистической*, если изменение одной величины вызывает изменение распределения другой величины. Если среднее значение одной случайной величины функционально зависит от значений другой случайной величины, то такая статистическая зависимость называется *корреляционной.*

Далее будем рассматривать в основном двумерные выборки.

2. Эмпирическая формула. Величины X и Y могут быть функционально зависимы, но на процесс измерения их значений влияют разные, в основном случайные, факторы. Установить по результатам измерений вид фактической зависимости не так просто.

Результаты измерений или наблюдений фиксируют в таблице наблюдений (табл. 25).

Таблица 25

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Представим эти результаты на координатной плоскости (корреляционном поле) в виде точек, координатами которых являются значения признаков X и Y одного объекта (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ (рис. 29).

Из рис. 29 видно, что в случае а) следует искать линейную зависимость, в случае б) — нелинейную зависимость, а в случае в) вряд ли какая-то зависимость существует.

Конкретный вид функциональной зависимости между величинами X и Y, установленный по двумерной выборке, называют *эмпирической формулой*. Если построить график эмпирической формулы на корреляционном поле, то он не должен пройти через все точки (x_i, y_i) выборки, а *быть наилучшим приближением к этим точкам*. Среднее расстояние этих точек от графика должно быть минимальным. При этом предпочтение отдается эмпирической формуле, имеющей более простой вид.

Простейшим видом эмпирической формулы является *линейная функция*

$$y = ax + b. \qquad (II.57)$$

Задача установления эмпирической формулы заключается в вычислении по выборке коэффициентов a и b в формуле (II.57). Аналогично можно получить и другие функции, например $y = ax^2 + bx + c$ и т. д.

3. Нахождение линейной эмпирической формулы. Для получения линейной эмпирической формулы (II.57) имеется несколько способов: метод «натянутой нити», метод сумм и метод наименьших квадратов.

В *методе «натянутой нити»* все результаты измерений изображают в виде точек на корреляционном поле (см. рис. 29). Поэтому следует мысленно натянуть между этими точками нить так, чтобы по обе стороны осталось примерно одинаковое количество точек (точнее, чтобы их суммарные отклонения в обе стороны были равными). Возьмем на прямой, совпадающей с направлением нити, две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), которые не обязательно должны присутствовать в выборке, но быть достаточно удаленными друг от друга (рис. 30). Подставив эти координаты в формулу (II.57), имеем систему линейных уравнений

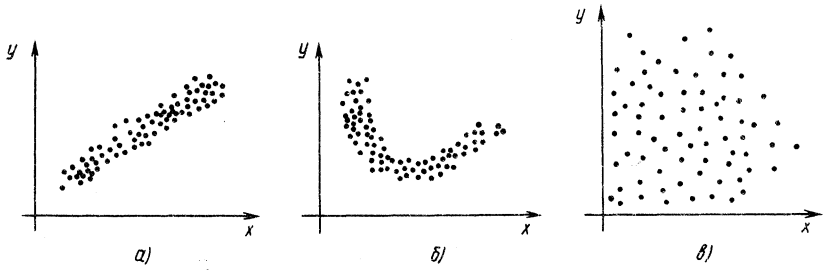


Рис. 29. Представление двумерной выборки на корреляционном поле

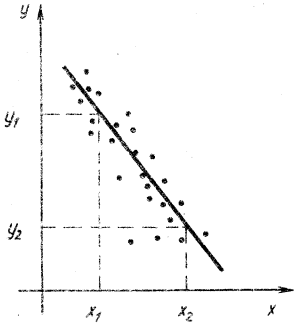


Рис. 30. Метод «натянутой нити»

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b; \\ y_2 = ax_2 + b, \end{cases} \qquad (II.58)$$

где неизвестными являются коэффициенты a и b. Решая систему (II.58), получаем эмпирическую формулу (II.57).

В *методе сумм* рассуждают следующим образом. Пусть имеется двумерная выборка, представленная в виде таблицы наблюдений (см. табл. 25). Предположим, что уже найдена эмпирическая формула (II.57). Подставим в нее значения случайной величины X из выборки и запишем соответствующие значения случайной величины Y в виде $\tilde{y} = ax_i + b$, $i = 1, \ldots, n$. Найдем отклонения между измеренными и вычисленными значениями Y:

$$\Delta_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - ax_i - b. \qquad (II.59)$$

Разумно потребовать, чтобы для всей выборки *сумма этих отклонений была бы равна нулю*:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0. \qquad (II.60)$$

Получено одно уравнение для определения коэффициентов a и b, чтобы иметь два уравнения, разделим таблицу наблюдений (см. табл. 25) на две части. Пусть в первой из них k наблюдений, тогда во второй части $n-k$ наблюдений. Потребуем, чтобы в обеих частях таблицы выполнялось условие (II.60). В результате получаем следующую *систему линейных уравнений*:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} (y_i - ax_i - b) = 0; \\ \sum\limits_{i=k+1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases} \qquad (II.61)$$

Если раскрыть скобки и просуммировать подобные члены, то получим

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{k} x_i - kb = 0; \\ \sum\limits_{i=k+1}^{n} y_i - a \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i - (n-k)b = 0. \end{cases} \qquad (II.62)$$

Отсюда видно, что в обеих частях таблицы наблюдений нужно просуммировать значения x_i и y_i и затем решить систему (II.62).

Метод наименьших квадратов будет рассмотрен далее. Этот метод является самым точным, но в то же время и самым трудоемким. Метод «натянутой нити» самый простой, но и самый неточный.

4. Корреляционная таблица. По таблице наблюдений (см. табл. 25) невозможно судить о распределении случайных величин X и Y, а также об их общем распределении. По одномерной выборке мы составляли вариационные ряды, а в двумерном случае будем составлять *корреляционные таблицы*.

Варианты или интервалы значений одной случайной величины записывают в первый столбец корреляционной таблицы, а варианты или интервалы другой случайной величины — в первую строку. По каждой паре значений (x_i, y_i) решают, в какую строку попадает первое значение и в какой столбец — другое. Клетку, находящуюся на пересечении соответствующих строки и столбца, отметим палочкой. Так поступаем со всеми наблюдениями (x_i, y_i). Затем подсчитываем палочки во всех клетках и заменяем их соответствующим числом n_{XY}. Далее суммируем числа n_{XY} по строкам и столбцам и находим частоты n_X и n_Y. Объем выборки n можно получить с помощью одной из сумм $n = \sum n_X = \sum n_Y = \sum\sum n_{XY}$ (см. табл. 26—28). В корреляционной таблице могут остаться пустые клетки, это означает, что в выборке отсутствуют соответствующие сочетания значений X и Y.

5. Регрессия. Фиксируем в двумерной случайной величине значение одной случайной величины, например $Y = y$; тогда совокупность соответствующих значений другой случайной величины X можно рассматривать как отдельную случайную величину со своим законом распределения и своими числовыми характеристиками распределения, которые, как и само распределение, называют *условными*. Условное среднее значение одной случайной величины при условии, что вторая случайная величина фиксирована, обозначим так:

$$E(X \mid Y = y) \text{ или } E(Y \mid X = x).$$

Если рассмотреть условные средние значения одной случайной величины при всех значениях другой случайной величины, то получим следующие функции

$$f(x) = E(Y \mid X = x); \qquad (II.63)$$

$$g(y) = E(X \mid Y = y), \qquad (II.64)$$

называемые *функциями регрессии*. Если функции регрессии известны, то можно *по значению одной случайной величины прогнозировать значение другой случайной величины*.

Обычно конкретный вид функции регрессии неизвестен и определяется по двумерной выборке. При этом используют те же методы, что и при установлении эмпирической формулы.

6. Эмпирическая регрессия. Эмпирическая регрессия показывает зависимость условного среднего арифметического от значений другой случайной величины. Все вычисления выполняют по корреляционной таблице, используя следующие формулы:

$$\bar{x}_{Y=y_j} = \frac{1}{n_Y}\sum x_i n_{XY}; \qquad (II.65)$$

$$\bar{y}_{X=x_i} = \frac{1}{n_X}\sum y_j n_{XY}. \qquad (II.66)$$

Если при составлении корреляционной таблицы использованы интервалы значений случайной величины, то представителями интервалов являются их середины x_i или y_j (см. табл. 29—31).

Таким образом получаются пары чисел: значения одной случайной величины и условные средние арифметические другой случайной величины. Эти пары чисел изобразим в виде точек на координатном поле. Соединяя соседние точки плавной линией, получаем *графики эмпирической регрессии* (см. рис. 34—36).

7. Линейная регрессия. Будем искать функцию регрессии [см. формулы (II.63) и (II.66)] в самом простом — *линейном виде*. Имеем

$$y = f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0; \qquad (II.67)$$

$$x = g(y) = \beta_1 y + \beta_0. \qquad (II.68)$$

Для определения этих функций, т. е. коэффициентов α_1, α_0, β_1, β_0, можно использовать приближенные методы, рассмотренные в п. 3. Здесь рассмотрим более точный способ — *метод наименьших квадратов*. Все рассуждения проводим для коэффициентов α_1 и α_0 первой функции. Формулы для вычисления β_1 и α_0 получаем из формул для α_1 и α_0, заменяя x на y, а y на x.

В методе наименьших квадратов первоначально рассуждаем так же, как и в методе сумм (см. п. 3). Находим отклонения между измеренными и вычисленными значениями Y [см. формулу (II.59)]:

$$\Delta_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - \alpha_1 x_i - \alpha_0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В методе наименьших квадратов коэффициенты α_1 и α_0 определяют исходя из требования, состоящего в том, чтобы *сумма квадратов отклонений Δ_i была минимальной*:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_1 x_i - \alpha_0)^2 = \min. \qquad (II.69)$$

Сумма (II.69) является функцией неизвестных коэффициентов α_1 и α_0. Для нахождения минимума запишем *частные производные*:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_1 x_i - \alpha_0)(-x_i);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_1 x_i - \alpha_0)(-1).$$

Приравняв эти частные производные нулю, получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов α_1 и α_0. В результате несложных преобразований получаем решение системы.

$$\alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1 \bar{x};$$
$$\alpha_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{S_X^2}}, \qquad (II.70)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\overline{S_X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$.

Эти формулы можно использовать для вычисления *коэффициентов функции линейной регрессии*, но последние часто вычисляют с помощью *коэффициента линейной корреляции*

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{S}_X \cdot \bar{S}_Y}, \qquad (II.71)$$

где многие величины определены выше, а

$$\bar{S}_X = \sqrt{\overline{S_X^2}}, \ \bar{S}_Y^2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2}.$$

Отсюда, подставляя в (II.70) формулу (II.71), получаем

$$\alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1 \bar{x}, \ \alpha_1 = r \cdot \frac{\bar{S}_Y}{\bar{S}_X}. \qquad (II.72)$$

Заменяя в этих формулах величины, связанные с x, соответствующими величинами, зависящими от y, и, наоборот, получим формулы для вычисления коэффициентов β_1 и β_0 функции линейной регрессии [см. формулы (II.68)]:

$$\beta_0 = \bar{x} - \beta_1 \bar{y}, \ \beta_1 = r \frac{\bar{S}_X}{\bar{S}_Y}. \qquad (II.73)$$

Формулы (II.72) и (II.73) пригодны для вычислений с помощью ЭВМ или микрокалькулятора. На ЭВМ можно в одном цикле на основании массивов x и y, т. е. таблицы наблюдений (см. табл. 25), найти суммы $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i^2$, $\sum y_i^2$, $\sum x_i y_i$, и затем — все величины, связанные с этими суммами. С помощью микрокалькулятора нужно также сначала вычислить указанные суммы. Некоторые микрокалькуляторы позволяют упростить эти вычисления, например микрокалькулятор «Электроника МК-51» при одном вводе допускает получение двух сумм $\sum x_i$ и $\sum x_i^2$.

Вычисления «вручную» по формулам (II.72) и (II.73) трудоемки; при этом используется корреляционная таблица. Для упрощения вычислений выполним замену переменных, аналогично тому, как это делалось при получении формул (II.7) и (II.10):

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{k_1}, \quad v_j = \frac{y_j - c_2}{k_2}. \qquad (II.74)$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные числа, но для простоты в качестве c_1 и c_2 обычно принимают соответствующие значения x_i или y_j, которые отвечают максимальной частоте n_{XY}. Желательно также, чтобы

эта частота находилась в середине таблицы. Величины k_1 и k_2 — шаг таблицы для X и Y соответственно. Переменные u_i и v_j получаются как целые числа, близкие к нулю. Частоты n_{XY}, n_X, n_Y будем записывать в новых переменных соответственно так: n_{UV}, n_U, n_V. Далее вычисления производим по следующим формулам:

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum u \cdot n_V, \quad \bar{v} = \frac{1}{n}\sum v \cdot n_V;$$

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{n}\sum u^2 \cdot n_V, \quad \bar{v}^2 = \frac{1}{n}\sum v^2 \cdot n_V;$$

$$\bar{S}_U = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2}, \quad \bar{S}_V = \sqrt{\bar{v}^2 - (\bar{v})^2};$$

$$\overline{uv} = \sum\sum u \cdot v \cdot n_{UV}; \qquad (II.75)$$

$$r = \frac{\overline{uv} - n \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}}{n \cdot \bar{S}_U \cdot \bar{S}_V};$$

$$\bar{x} = \bar{u} \cdot k_1 + c_1; \quad \bar{y} = \bar{v} \cdot k_2 + c_2;$$

$$\bar{S}_X = \bar{S}_U \cdot k_1; \quad \bar{S}_Y = \bar{S}_V \cdot k_2.$$

Затем для вычисления коэффициентов функций регрессии α_1, α_0, β_1, β_0 можно использовать формулы (II.72) и (II.73). Все вычисления по формулам (II.75) выполняем с помощью корреляционной таблицы (см. табл. 32—34). По найденным коэффициентам можно записать функции регрессии [см. формулы (II.67) и (II.68)] и построить их графики. Если все вычисления сделаны корректно и графики построены точно, то точка пересечения графиков имеет координаты $(\bar{x}, \bar{y})$.

8. Коэффициент линейной корреляции. Линейная функция регрессии — самый простой вид такой функции. Для оценки возможности применения линейной функции существует несколько способов: приближенных и более точных.

Самым простым способом является *оценка по расположению точек на корреляционном поле*, полученном на основании выборки (см. рис. 29). На рис. 29, *а* точки находятся вблизи воображаемой прямой и поэтому здесь разумно искать линейную функцию регрессии. На рис. 29, *б* и 29, *в* изображены ситуации, в которых линейная функция плохо соответствует действительности.

Такую же приближенную картину дает и *корреляционная таблица*. Если заполнены клетки вблизи той или другой диагонали, то стоит искать линейную функцию регрессии. Если заполнены большинство клеток или заполненные клетки образуют какую-то кривую, то использовать линейную функцию не следует.

Более точную оценку можно получить с помощью *коэффициента линейной корреляции* r. Сформулируем свойства этого коэффициента:

1) Если случайные величины X и Y независимы, то теоретически $r = 0$. Противоположное утверждение неверно и не всегда выполняется.

2) Если в формуле (II.71) поменять местами величины, зависящие от X и Y, то значение r не изменяется, значит, $r_{XY} = r_{YX}$.

3) Если случайные величины X и Y линейно зависимы, т. е. $Y = aX + b$, то

$$r = \begin{cases} +1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Если значение $|r|$ близко к единице, то надо найти линейную функцию регрессии. Если $|r| < 0{,}5$, то обычно не стоит использовать линейную функцию. В этом случае можно попробовать найти нелинейную функцию, например квадратичную функцию

$$y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \qquad \text{(II.76)}$$

коэффициенты которой вычисляют также методом наименьших квадратов. Вычисление коэффициентов α_2, α_1, α_0 «вручную» трудоемко, но программа их вычисления на ЭВМ несложна.

9. Идея дисперсионного анализа. Случайные величины вызываются разными факторами, причинами. *В дисперсионном анализе исследуется значимость влияния факторов, сравнивается их влияние между собой* и т. д. С этой целью *разделяют дисперсию на независимые слагаемые*, которые потом сравнивают между собой.

Пусть, например, в результате измерения величины M получено значение X и пусть на процесс измерения влияют случайные независимые факторы A и B. Тогда отклонение $M - X = \alpha + \beta + \gamma$, где α — отклонение под влиянием фактора A, β — под влиянием фактора B, а γ — под влиянием остальных, неучтенных факторов, причем α, β и γ независимы.

Найдем дисперсию $D(M - X) = D(\alpha + \beta = \gamma)$. На основании свойств дисперсии (см. п. 4.2 § 2) получим $DX = D\alpha + D\beta + D\gamma$, где $D\alpha$ характеризует влияние фактора A, $D\beta$ — влияние фактора B, а $D\gamma$ — влияние остальных, неучтенных факторов. Дисперсия $D\gamma$ называется остаточной дисперсией. Для оценки значимости факторов A и B сравнивают соответствующие дисперсии $D\alpha$ и $D\beta$ с остаточной дисперсией $D\gamma$.

Если исследуется влияние одного фактора, то говорят об однофакторном (дисперсионном) анализе, при исследовании влияния двух факторов — о двухфакторном анализе и т. д.

10. Однофакторный анализ

10.1. Решение задачи однофакторного анализа. Рассмотрим пример. Пусть в каком-то цехе несколько станков выполняют одинаковые операции. Для планирования дальнейшей обработки деталей нужно знать, все ли станки дают одинаковую продукцию или нет. Иначе говоря, можно ли игнорировать влияние фактора (т. е. станков) на продукцию или нет?

Пусть фактор имеет m уровней (в цехе m станков). Из каждого уровня (продукции каждого станка) сделаем выборку из n элементов. Общее количество выбранных элементов обозначим $N = m \cdot n$. Вся выборка представляет собой матрицу

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Полагая, что эта выборка сделана из нормально распределенной генеральной совокупности, и задавая уровень значимости α, нужно проверить гипотезу о равенстве средних значений на всех уровнях фактора: H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$. При альтернативной гипотезе H_1 не все средние значения μ_i не должны быть равными.

В качестве статистики используем величину

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \qquad (II.77)$$

где S_1^2 — дисперсия, характеризующая влияние исследуемого фактора (*факторная дисперсия*): S_2^2 — дисперсия, характеризующая влияние остальных факторов (*остаточная дисперсия*). Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина F имеет *F-распределение со степенями свободы* $m-1$ и $N-m = m(n-1)$.

При проверке гипотезы H_0 используем правостороннюю критическую область (см. п. 6 § 5), определяемую условием

$$P(F > f_\alpha) = \alpha.$$

Если значение статистики [см. формулу (II.77)] входит в критическую область, то гипотезу H_0 о равенстве средних значений на всех уровнях фактора отвергаем, т. е. *считаем влияние исследуемого фактора значимым*. В противном случае принимаем гипотезу H_0, т. е. считаем, что *значимость влияния фактора не установлена*.

Для нахождения величины F найдем сумму квадратов отклонений элементов выборки относительно общего среднего арифметического

$$Q = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x})^2, \qquad (II.78)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$. Эту общую сумму можно разделить на два независимых слагаемых:

$$Q_1 = n \sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_j - \bar{x})^2; \qquad (II.79)$$

$$Q_2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \qquad (II.80)$$

так, чтобы выполнялось равенство $Q = Q_1 + Q_2$. Здесь $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, m$ (групповые средние). *Суммой квадратов*

межгрупповых отклонений, характеризующей влияние фактора, является сумма квадратов отклонений групповых средних относительно общей средней (сумма Q_1); Q_2 представляет собой сумму квадратов отклонений значений выборки относительно групповых средних и называется *суммой квадратов внутригрупповых отклонений*. Эта сумма характеризует влияние остальных, неучтенных факторов.

На основании сумм Q, Q_1, Q_2 можно вычислить соответствующие *дисперсии*:

$$S^2 = \frac{Q}{m \cdot n - 1}, \quad S_1^2 = \frac{Q_1}{m-1}, \quad S_2^2 = \frac{Q_2}{m(n-1)} \quad . \qquad (II.81)$$

Две последние дисперсии используют при вычислении F [см. формулу (II.77)].

При практических вычислениях обычно по выборке находят Q и Q_1, а Q_2 определяют как разность Q и Q_1:

$$Q_2 = Q - Q_1. \qquad (II.82)$$

10.2. Решение задачи при одинаковом количестве элементов на всех уровнях. В простейшем случае на каждом уровне фактора выбирают одинаковое количество объектов исследования. Но вычислять суммы по формулам (II.78)—(II.80) достаточно сложно. Более удобные формулы получаем преобразуя выражения (II.78) и (II.79). Имеем

$$Q = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2\right) - \frac{1}{mn}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)\right]^2;$$

$$Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{mn}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)\right]^2.$$

Обозначая $R_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$ и $L_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, окончательно получаем

$$Q = \sum_{j=1}^{m} R_j - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{m} L_j\right)^2; \qquad (II.83)$$

$$Q_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} L_j^2 - \frac{1}{mn}\left(\sum_{j=1}^{m} L_j\right)^2. \qquad (II.84)$$

По исходной матрице (выборке) вычислим суммы элементов и их квадратов по столбцам (L_j и R_j, $j = 1, 2, \ldots, m$). Если x_{ij} — многоразрядные числа, то такие вычисления следует выполнять на микрокалькуляторе.

Воспользуемся заменой переменных $y_{ij} = x_{ij} - c$, где c целесообразно выбрать близким к общему среднему [в данном пособии c — целая часть $(x + 0{,}5)$]. В результате замены для y_{ij} получим следующие формулы:

$$Q = \sum_{j=1}^{m} P_j - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{m} T_j\right)^2; \qquad (II.85)$$

$$Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_j^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{m} T_j\right)^2, \qquad (II.86)$$

где $N = m \cdot n$, $P_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2$ и $T_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Все эти суммы можем вычислить «вручную» (см. табл. 36).

10.3. Решение задачи при неодинаковом количестве элементов на различных уровнях. На практике не всегда удается гарантировать одинаковое количество элементов на каждом уровне фактора. Обозначим количество элементов на j-м уровне через n_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда объем выборки

$$N = \sum_{j=1}^{m} n_j,$$

формула (II.86) запишется в виде

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j} T_j^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{m} T_j\right)^2, \qquad (II.87)$$

а суммы P_j и T_j — в виде $P_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2$ и $T_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$. Таблица для вычислений сумм аналогична табл. 36. Дисперсии [см. формулу (II.81)] таковы:

$$S^2 = \frac{Q}{N-1}, \quad S_1^2 = \frac{Q_1}{m-1}, \quad S_2^2 = \frac{Q_2}{N-m}. \qquad (II.88)$$

Остальные формулы, используемые при решении задач, не изменяются.

РАБОТА 6 4

Задание

В следующих задачах использовать выборки из § 7.

Задача 6.1. По последним столбцам X, Y, Z выборки C построить корреляционные поля для двумерных выборок XY, XZ и YZ.

Задача 6.2. На основании результатов задачи 6.1 найти методом «натянутой нити» соответствующие линейные функции регрессии.

Задача 6.3. По выборке C найти с помощью метода сумм линейные функции регрессии для двумерных выборок XY, XZ и YZ и построить их графики.

Задача 6.4. По выборке C составить корреляционные таблицы для двумерных выборок XY, XZ и YZ, используя заданные при выборке начала и длины интервалов.

Задача 6.5. Используя корреляционные таблицы, полученные в задаче 6.4, вычислить условные средние арифметические и построить графики эмпирической регрессии.

Задача 6.6. Используя корреляционные таблицы, полученные в задаче 6.4, найти линейные функции регрессии и построить их графики.

Задача 6.7. По выборке D проверить с уровнем значимости α гипотезу о равенстве средних значений для всех уровней фактора F, т. е. о значимости влияния фактора F, где

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}05, & V \text{ четное}, \\ 0{,}01, & V \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Задача 6.8. По выборке E решить такую же задачу, как в задаче 6.7, при условии

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}01, & V \text{ четное}, \\ 0{,}05, & V \text{ нечетное}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 0

Задача 6.1. Найдем минимальные и максимальные значения случайных величин X, Y, Z в последних столбцах выборки C. Имеем

$$x_{\min} = 55,\ y_{\min} = -279,\ z_{\min} = 437,$$
$$x_{\max} = 70,\ y_{\max} = -213,\ z_{\max} = 558.$$

Корреляционное поле целесообразно построить на миллиметровой бумаге. На осях изобразим только тот промежуток, где находятся значения соответствующей случайной величины. Единицу измерения выбираем так, чтобы максимально точно и в наиболее крупном масштабе изобразить корреляционное поле. Построить корреляционные поля XY, XZ и YZ, представляя в виде точек на каждом из них соответствено пары чисел $(x_i;\ y_i)$, $(x_i;\ z_i)$ и $(y_i,\ z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, из последних столбцов выборки C (рис. 31—33).

Задача 6.2. На рис. 31—33 точки корреляционных полей находятся почти на прямой, значит, есть смысл искать линейную функцию. Согласно методу «натянутой нити», проведем среди этих точек прямые и возьмем на них достаточно далеко друг от друга две точки.

Используя двумерную выборку XY (см. рис. 31), возьмем точки (57, —220) и (69, —270) и подставим соответствующие значения X и Y в функцию $y = ax + b$. В результате получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -220 = a \cdot 57 + b, \\ -270 = a \cdot 69 + b, \end{cases} \Bigg| \cdot(-1) \qquad \begin{cases} -220 = 57a + b, \\ 270 = -69a - b, \end{cases}$$

$$50 = -12a,\ a = -4{,}17,$$

$$b = -220 - 57 \cdot (-4{,}17) = -220 + 237{,}69 = 17{,}69.$$

Искомая функция регрессии имеет вид $y = -4{,}17x + 17{,}69$.

Аналогично, используя выборку XZ и взяв за основу точки с

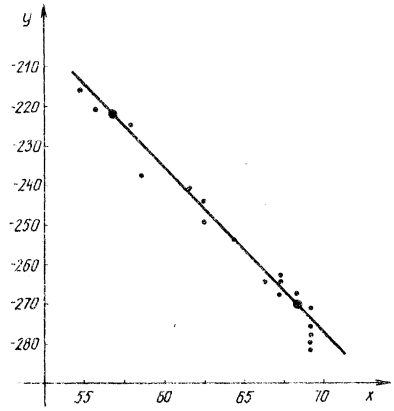


Рис. 31. Корреляционное поле XY

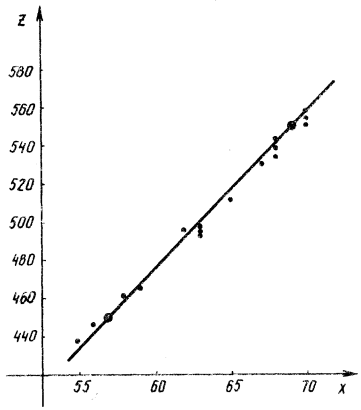


Рис. 32. Корреляционное поле XZ

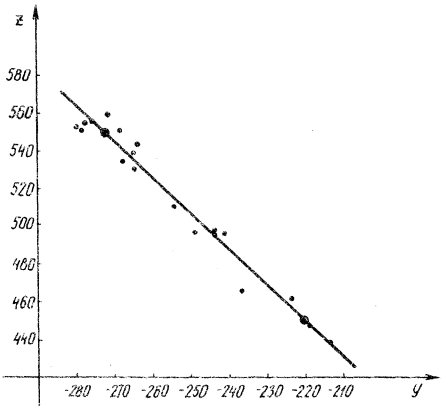


Рис. 33. Корреляционное поле YZ

координатами (57, 450) и (69, 550) (см. рис. 32), для определения коэффициентов c и d функции $z = cx + d$ получим систему

$$\begin{cases} 450 = c \cdot 57 + d, \\ 550 = c \cdot 69 + d \end{cases} \Bigg| \cdot (-1) \qquad \begin{cases} -450 = -57c - d, \\ 550 = 69c + d, \end{cases}$$

$$100 = 12c, \quad c = 8{,}3,$$

$$d = 450 - 57 \cdot 8{,}3 = 450 - 473{,}1 = -23{,}1.$$

Таким образом, функция регрессии имеет вид $z = 8{,}3x - 23{,}1$.

Наконец, используя выборку YZ (—220, 450) и (—272, 550) (см. рис. 33), имеем

$$z = ey + f,$$

$$\left.\begin{aligned}450 &= e(-220)+f\\ 550 &= e(-272)+f\end{aligned}\right| \cdot(-1) \qquad \begin{cases}-450 = 220e - f,\\ 550 = -272e + f,\end{cases}$$

$$100 = -52e,\ e = -1{,}9.$$

$$f = 450 + 220\cdot(-1{,}9) = 450 - 418 = 32.$$

Функция регрессии $z = -1{,}9y + 32$.

Задача 6.3. С помощью метода сумм разбиваем выборку C на две части так, чтобы в первой из них находились первые два столбца всех выборок, а во второй — остальные столбцы. Значит, $k = 40$ и $n - k = 38$. Вычислим суммы всех случайных величин в обеих частях:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 2714, \quad \sum_{i=1}^{k} y_i = -10675, \quad \sum_{i=1}^{k} z_i = 21515,$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i = 2529, \quad \sum_{i=k+1}^{n} y_i = -9913, \quad \sum_{i=k+1}^{n} z_i = 20009.$$

Используя в формуле (II.62) заданную систему линейных уравнений, найдем функции регрессии.

Выборка XY

$$y = a_1x + a_0,$$

$$\begin{cases}-10675 - 2714a_1 - 40a_0 = 0,\\ -9913 - 2529a_1 - 38a_0 = 0,\end{cases}$$

$$40a_0 = -10675 - 2714a_1,\ a_0 = -266{,}875 - 67{,}85a_1,$$

$$-9913 - 2529a_1 + 10141{,}25 + 2578{,}3a_1 = 0,$$

$$49{,}3a_1 = -228{,}25,\ a_1 = -4{,}63,$$

$$a_0 = -266{,}875 - 67{,}85(-4{,}63) = -266{,}875 + 314{,}146 = 47{,}27.$$

Функция регрессии имеет вид $y = -4{,}63x + 47{,}27$. График этой функции изображен на рис. 34.

Выборка XZ

$$z = b_1x + b_0$$

$$\begin{cases}21515 - 2714b_1 - 40b_0 = 0,\\ 20009 - 2529b_1 - 38b_0 = 0,\end{cases}$$

$$40b_0 = 21515 - 2714b_1,$$

$$b_0 = 537{,}875 - 67{,}85b_1$$

$$20009 - 2529b_1 - 20439{,}25 + 2578{,}3b_1 = 0,$$

$$49{,}3b_1 = 430{,}25,\ b_1 = 8{,}73,$$

$$b_0 = 537{,}875 - 67{,}85\cdot 8{,}73 =$$
$$= 537{,}875 - 592{,}330 = -54{,}45.$$

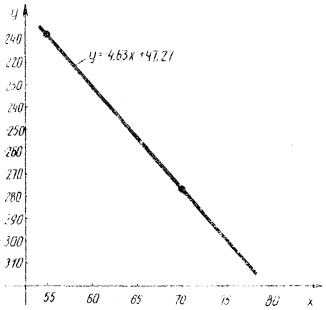


Рис. 34. График функции регрессии $y = f(x)$, полученной методом сумм

График функции регрессии $z = 8{,}73x - 54{,}45$ представлен на рис. 35.

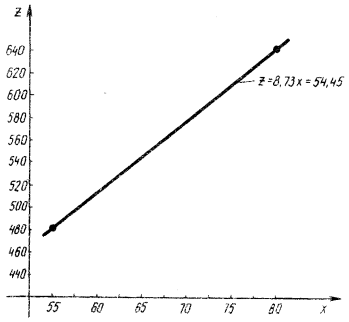


Рис. 35. График функции регрессии $z = f(x)$, полученной методом сумм

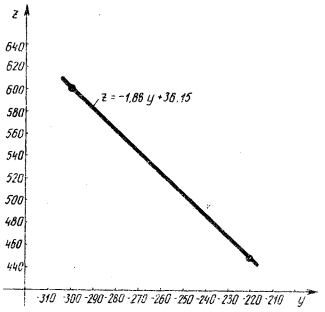


Рис. 36. График функции регрессии $z = f(y)$, полученной методом сумм

Выборка YZ

$$z = c_1 y + c_0,$$

$$\begin{cases} 21515 + 10675c_1 - 40c_0 = 0, \\ 20009 + 9913c_1 - 38c_0 = 0, \end{cases}$$

$$40c_0 = 21515 + 10675c_1, \quad c_0 = 537{,}875 + 266{,}875c_1,$$

$$20009 + 9913c_1 - 20439{,}25 - 10141{,}25c_1 = 0,$$

$$228{,}25c_1 = -430{,}25, \quad c_1 = -1{,}88,$$

$$c_0 = 537{,}875 + 266{,}875 \cdot (-1{,}88) = 537{,}875 - 501{,}725 = 36{,}15.$$

График функции регрессии $z = -1{,}88y + 36{,}15$ изображен на рис. 36.

Задача 6.4. Найдем минимальные и максимальные значения случайных величин X, Y, Z в выборке C:

$$x_{\min} = 55, \quad y_{\min} = -313, \quad z_{\min} = 437,$$
$$x_{\max} = 80, \quad y_{\max} = -213, \quad z_{\max} = 635.$$

Составим корреляционные таблицы (табл. 26—28), считая, что начало интервала входит в интервал, а конец — не входит.

Задача 6.5. Используя корреляционные таблицы, полученные в предыдущей задаче, вычислим условные средние арифметические одной случайной величины при условии, что другая случайная величина фиксирована в середине каждого интервала. В корреляционных таблицах используем вместо интервалов значений случайной величины середины интервалов. В каждую таблицу добавим один столбец и одну строку для условных средних арифметических, которые вычислим по формулам (II.65) и (II.66). Так, из корреляционной таблицы XY (см. табл. 26) получим

$$\bar{y}_{X=55,5} = \frac{-227{,}5 \cdot 1 - 210{,}5 \cdot 4}{5} = -213{,}9;$$

$$\bar{y}_{X=60,5} = \frac{-244{,}5 \cdot 4 - 227{,}5 \cdot 5}{9} = -235{,}1 \text{ и т. д.}$$

Таблица 26

X \ Y	— 321... — 304	— 304... — 287	— 287... — 270	— 270... — 253	— 253... — 236	— 236... — 219	— 219... — 202	
53...58						1	4	5
58...63					4	5		9
63...68				9	11			20
68...73			24	9				33
73...78		7	1					8
78...83	3							3
n_X	3	7	25	18	15	6	4	78

Таблица 27

X \ Z	420... 454	454... 488	488... 522	522... 556	556... 590	590... 624	624... 658	n_Y
53...58	4	1						5
58...63		8	1					9
63...68			16	4				20
68...73				21	12			33
73...78					6	2		8
78...83						1	2	3
n_Z	4	9	17	25	18	3	2	78

Таблица 28

Y \ Z	420...454	454...488	488...522	522...556	556...590	590...624	624...658	n_Y
— 321... — 304						1	2	3
— 304... — 287					5	2		7
— 287... — 270				12	13			25
— 270... — 253			5	13				18
— 253... — 236		3	12					15
— 236... — 219	1	5						6
— 219... — 202	3	1						4
n_Z	4	9	17	25	18	3	2	78

Результаты запишем в таблицу (табл. 29). Вместо формул (II.65) и (II.66) для вычисления среднего арифметического можно использовать и другие формулы, например (II.7) или (II.6а).

Таблица 29

X \ Y	—312,5	—295,5	—278,5	—261,5	—244,5	—227,5	—210,5	n_X	$\bar{y}_{X=x}$
55,5						1	4	5	— 213,9
60,5					4	5		9	— 235,5
65,5				9	11			20	— 252,2
70,5			24	9				33	— 273,9
75,5		7	1					8	— 293,4
80,5	3							3	— 312,5
n_Y	3	7	25	18	15	6	4	78	
$\bar{x}_{Y=y}$	80,5	75,5	70,7	68,0	64,2	59,7	55,5		

После заполнения таблицы построим на миллиметровой бумаге графики эмпирической регрессии (рис. 37). Аналогично поступаем и при вычислении и построении эмпирической регрессии по корреляционным таблицам XZ и YZ (табл. 30, 31 и рис. 38, 39).

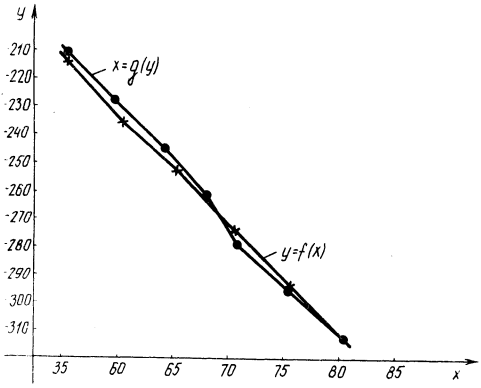


Рис. 37 Графики эмпирической регрессии XY

Задача 6.6. Коэффициенты функции линейной регрессии [см. формулы (II.67) и (II.68)] вычислим по формулам (II.74), (II.75), (II.72) и (II.73). Исходные данные содержатся в корреляционных таблицах, полученных при решении задачи 6.4 (см. табл. 26—28). В первой строке и в первом столбце заменим интервалы их серединами, а внизу запишем новые переменные u_i и v_j. Дополнительно добавим еще два столбца и две строки.

Начнем с корреляционной таблицы XY (см. табл. 26). Максимальная частота $n_{XY} = 24$, по ней найдем значения констант c_1 и c_2: соответствующее значение x_i есть $c_1 = 70{,}5$, а соответствующее значение y_j есть $c_2 = -278{,}6$. Шаги таблицы для X и для Y таковы: $k_1 = 5$, $k_2 = 17$. По формулам (II.74) находим u_i и v_j и записываем их значения в табл. 32.

По формулам (II.75) вычисляем:

$$\bar{u} = \frac{1}{78}(-3\cdot 5 - 2\cdot 9 - 1\cdot 20 + 0\cdot 33 + 1\cdot 8 + 2\cdot 3) = -\frac{39}{78} = -0{,}5;$$

$$\bar{v} = \frac{1}{78}(-2\cdot 3 - 1\cdot 7 + 0\cdot 25 + 1\cdot 18 + 2\cdot 15 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4) = \frac{69}{78} = 0{,}9;$$

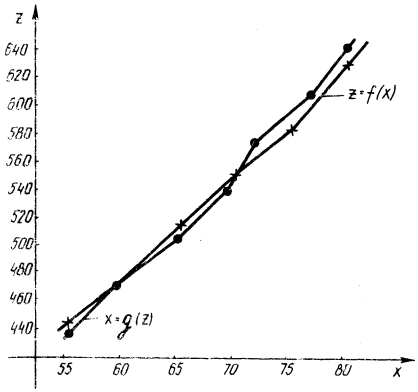


Рис. 38. Графики эмпирической регрессии XZ

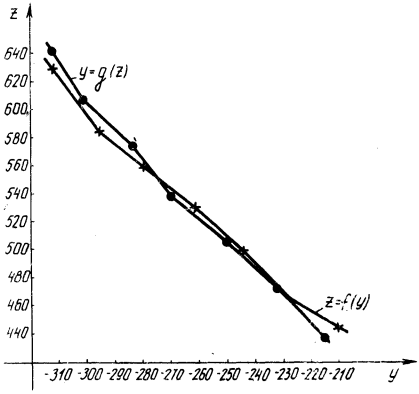


Рис. 39. Графики эмпирической регрессии YZ

Таблица 30

X \ Z	437	471	505	539	573	607	641	n_X	$\bar{z}_{X=x}$
55,5	4	1						5	443,8
60,5		8	1					9	474,8
65,5			16	4				20	511,8
70,5				21	12			33	551,4
75,5					6	2		8	581,5
80,5						1	2	3	629,7
n_Z	4	9	17	25	18	3	2	78	
$\bar{x}_{Z=z}$	55,5	59,9	65,2	69,7	72,2	77,2	80,5		

Таблица 31

Y \ Z	437	471	505	539	573	607	641	n_Y	$\bar{z}_{Y=y}$
— 312,5						1	2	3	629,7
— 295,5					5	2		7	582,7
— 278,5				12	13			25	556,7
— 261,5			5	13				18	529,6
— 244,5		3	12					15	498,2
— 227,5	1	5						6	465,3
— 210,5	3	1						4	445,5
n_Z	4	9	17	25	18	3	2	78	
$\bar{y}_{Z=z}$	—214,8	—231,3	—249,5	—269,7	—283,2	—301,2	—312,5		

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{78}(9\cdot 5 + 4\cdot 9 + 1\cdot 20 + 0\cdot 33 + 1\cdot 8 + 4\cdot 3) = \frac{121}{78} = 1{,}55,$$

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{78}(4\cdot 3 + 1\cdot 7 + 0\cdot 25 \cdot 1\cdot 18 + 4\cdot 15 + 9\cdot 6 + 16\cdot 4) = \frac{215}{78} = 2{,}76;$$

$$\bar{S}_U = \sqrt{1{,}55 - (-0{,}5)^2} = \sqrt{1{,}55 - 0{,}25} = \sqrt{1{,}30} = 1{,}14;$$

$$\bar{S}_V = \sqrt{2{,}76 - (0{,}9)^2} = \sqrt{2{,}76 - 0{,}81} = \sqrt{1{,}95} = 1{,}40.$$

Для нахождения суммы $\overline{uv}$ разобьем корреляционную таблицу по нулевым значениям U и V на четыре части (поля) (см. табл. 32).

Таблица 32

Y / V \ X U	—312,5 —2	—295,5 —1	—278,5 0	—261,5 1	—244,5 2	—227,5 3	—210,5 4	n_X n_U	I	II
55,5 —3		I			II	I —9	4 —12	5	—	—57
60,5 —2					4 —4	5 —6		9	—	—46
65,5 —1				9 —1	11 —2			20	—	—31
70,5 0			24	9				33	III	IV
75,5 1		7 —1	1					8	—7	—
80,5 2	3 —4	III			IV			3	—12	—
$n_Y n_V$	3	7	25	18	15	6	4	78		
I	—	—	II	—9	—38	—39	—48		0	—134
III	—12	—7	IV	—	—	—	—		—19	0

В каждой клетке, где $n_{UV} \neq 0$, вычислим $u \cdot v$. Затем вычислим произведения $u \cdot v \cdot n_{UV}$ и просуммируем по строкам и столбцам для каждого поля. Наконец, получим общую сумму: $u \cdot v \cdot n_{UV} = -153$. Дальнейшие вычисления выполняем по формулам (II.75):

$$r = \frac{-153 - 78 \cdot (-0{,}5) \cdot 0{,}9}{78 \cdot 1{,}14 \cdot 1{,}40} = \frac{-117{,}9}{124{,}488} = -0{,}95;$$

$$\bar{x} = -0{,}5 \cdot 5 + 70{,}5 = -2{,}5 + 70{,}5 = 68{,}0;$$

$$\bar{y} = 0{,}9 \cdot 17 - 278{,}5 = 15{,}3 - 278{,}5 = -263{,}2;$$

$$\bar{S}_X = 1{,}14 \cdot 5 = 5{,}7, \quad \bar{S}_Y = 1{,}4 \cdot 17 = 23{,}8.$$

По формулам (II.72) и (II.73) вычислим теперь коэффициенты регрессии. Имеем:

$$\alpha_1 = -0{,}95 \cdot \frac{23{,}8}{5{,}7} = -3{,}97;$$

$$\alpha_0 = -263{,}2 + 3{,}97 \cdot 68{,}0 = 6{,}76;$$

$$\beta_1 = -0{,}95 \cdot \frac{5{,}7}{23{,}8} = -0{,}23;$$

$$\beta_0 = 68{,}0 + 0{,}23 \cdot (-263{,}2) = 7{,}46.$$

Получены следующие функции регрессии:

$$y = -3{,}97x + 6{,}76; \qquad x = -0{,}23y + 7{,}46.$$

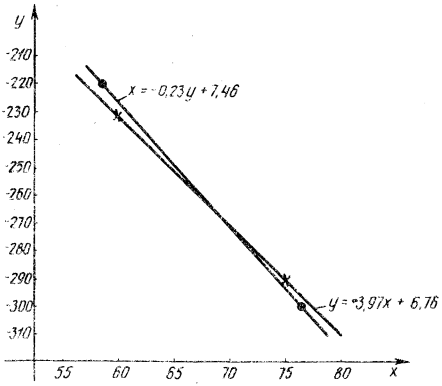


Рис. 40. Графики функций линейной регрессии XY

Определим координаты двух точек этих функций и построим их графики (рис. 40).

x	60	75
y	— 231,4	— 291,0

y	— 300	— 220
x	76,46	58,06

Значение коэффициента линейной корреляции r по абсолютной величине близко к единице, поэтому графики функции линейной регрессии почти совпадают и трудно определить точку их пересечения.

По корреляционной таблице XZ (см. табл. 27) получаем табл. 33. Здесь максимальная частота $n_{XZ} = 21$; по ней определим c_1 и c_2.

Таблица 33

X \ Z (U / V)	437 — 3	471 — 2	505 — 1	539 0	573 1	607 2	641 3	n_X / n_U	I	II
55,5 — 3	4 [9]	1 [6]						5	42	—
60,5 — 2		8 [4]	1 [2]					9	34	—
65,5 — 1			16 [1]	4				20	16	—
70,5 0				21	12			33	III	IV
75,5 1					6 [1]	2 [2]		8	—	10
80,5 2						1 [4]	2 [6]	3	—	16
n_Z / n_V	4	9	17	25	18	3	2	78		
I	36	38	18	11	—	—	—		92	0
III	—	—	—	IV	6	8	12		0	26

Во всех используемых формулах заменим y на z и не будем переписывать формулы. Имеем:

$$c_1 = 70{,}5,\ c_2 = 539,\ k_1 = 5,\ k_2 = 34,$$

$$\bar{u} = \frac{1}{78}(-3\cdot 5 - 2\cdot 9 - 1\cdot 20 + 0\cdot 33 + 1\cdot 8 + 2\cdot 3) = -\frac{39}{78} = -0{,}5;$$

$$\bar{v} = \frac{1}{78}(-3\cdot 4 - 2\cdot 9 - 1\cdot 17 + 0\cdot 25 + 1\cdot 18 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2) = -\frac{17}{78} =$$

$$= -0{,}2;$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{78}(9\cdot 5 + 4\cdot 9 + 1\cdot 20 + 0\cdot 33 + 1\cdot 8 + 4\cdot 3) = \frac{121}{78} = 1{,}55;$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{78}(9\cdot 4 + 4\cdot 9 + 1\cdot 17 + 0\cdot 25 + 1\cdot 18 + 4\cdot 3 + 9\cdot 2) = \frac{137}{78} = 1{,}76;$$

$$uvn_{uv} = 118;$$

$$\bar{S}_u = \sqrt{1{,}55 - (-0{,}5)^2} = \sqrt{1{,}55 - 0{,}25} = \sqrt{1{,}30} = 1{,}14;$$

$$\bar{S}_v = \sqrt{1{,}76 - (-0{,}2)^2} = \sqrt{1{,}76 - 0{,}04} = \sqrt{1{,}72} = 1{,}31;$$

$$r = \frac{118 - 78\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}2)}{78\cdot 1{,}14\cdot 1{,}31} = \frac{110{,}2}{116{,}48} = 0{,}95;$$

$$\bar{x} = -0{,}5\cdot 5 + 70{,}5 = -2{,}5 + 70{,}5 = 68{,}0;$$

$$\bar{z} = -0{,}2\cdot 34 + 539 = -6{,}8 + 539 = 532{,}2;$$

$$\bar{S}_x = 1{,}14\cdot 5 = 5{,}7, \qquad \bar{S}_z = 1{,}31\cdot 34 = 44{,}54;$$

$$\alpha_1 = 0{,}95\cdot\frac{44{,}54}{5{,}7} = 7{,}42;$$

$$\alpha_0 = 532{,}2 - 7{,}42\cdot 68{,}0 = 27{,}64;$$

$$\beta_1 = 0{,}95\cdot\frac{5{,}7}{44{,}54} = 0{,}12; \quad \beta_0 = 68{,}0 - 0{,}12\cdot 532{,}2 = 4{,}14.$$

Получены следующие функции регрессии:

$$z = 7{,}42x + 27{,}64,$$

$$x = 0{,}12z + 4{,}14.$$

Определим координаты двух точек этих функций и построим их графики (рис. 41).

x	60	75
z	472,8	584,1

z	450	600
x	58,1	76,1

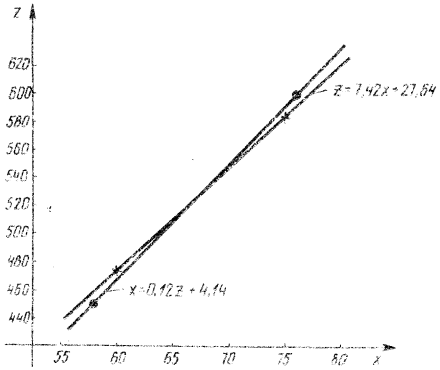


Рис. 41. Графики функций линейной регрессии XZ

По корреляционной таблице YZ (см. табл. 28) составим табл. 34. Максимальная частота $n_{YZ} = 13$ встречается в двух клетках этой таблицы. Для определения c_1 и c_2 используем ту клетку, которая ближе к середине таблицы. Во всех формулах заменим y на z и x на y. Имеем:

$$c_1 = -261{,}5, \quad c_2 = 539, \quad k_1 = 17, \quad k_2 = 34;$$

$$\bar{u} = \frac{1}{78}(-3\cdot 3 - 2\cdot 7 - 1\cdot 25 + 0\cdot 18 + 1\cdot 15 + 2\cdot 6 + 3\cdot 4) = -\frac{9}{78} = -0{,}1;$$

$$\bar{v} = \frac{1}{78}(-3\cdot 4 - 2\cdot 9 - 1\cdot 17 + 0\cdot 25 + 1\cdot 18 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2) = -\frac{17}{78} = -0{,}2;$$

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{78}(9\cdot 3 + 4\cdot 7 + 1\cdot 25 + 0\cdot 18 + 1\cdot 15 + 4\cdot 6 + 9\cdot 4) = \frac{155}{78} = 1{,}99;$$

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{78}(9\cdot 4 + 4\cdot 9 + 1\cdot 17 + 0\cdot 25 + 1\cdot 18 + 4\cdot 3 + 9\cdot 2) = \frac{137}{78} = 1{,}76;$$

$$\bar{S}_U = \sqrt{1{,}99 - (-0{,}1)^2} = \sqrt{1{,}55 - 0{,}01} = \sqrt{1{,}98} = 1{,}41;$$

$$\bar{S}_V = \sqrt{1{,}76 - (-0{,}2)^2} = \sqrt{1{,}76 - 0{,}04} = \sqrt{1{,}72} = 1{,}31.$$

Таблица 34

Y \ Z (V)	437 −3	471 −2	505 −1	539 0	573 1	607 2	641 3	n_Y (n_U)	I	II
−312,5 −3						1 [−6]	2 [−9]	3	—	−24
−295,5 −2					5 [−2]	2 [−4]		7	—	−18
−278,5 −1				12	13 [−1]			25	—	−13
−261,5 0			5	13				18	III	IV
−244,5 1		3 [−2]	12 [−1]					15	−18	—
−227,5 2	1 [−6]	5 [−3]						6	−26	—
−210,5 3	3 [−9]	1 [−6]						4	−33	—
n_Z (n_V)	4	9	17	25	18	3	2	78		
I	—	—	—	II	−23	−14	−18		0	−55
III	−33	−32	−12	IV	—	—	—		−77	0

$$u \cdot v \cdot n_{UV} = -132;$$

$$r = \frac{-132 - 78 \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}2)}{78 \cdot 1{,}41 \cdot 1{,}31} = \frac{-133{,}56}{144{,}07} = -0{,}93;$$

$$\bar{y} = -0{,}1 \cdot 17 - 261{,}5 = -1{,}7 - 261{,}5 = -263{,}2;$$

$$\bar{z} = -0{,}2 \cdot 34 + 539 = -6{,}8 + 539 = 532{,}2;$$

$$\bar{S}_Y = 1{,}41 \cdot 17 = 23{,}97, \quad \bar{S}_Z = 1{,}31 \cdot 34 = 44{,}54;$$

$$\alpha_1 = -0{,}93 \cdot \frac{44{,}54}{23{,}97} = -1{,}73;$$

$$\alpha_0 = 532{,}2 - (-1{,}73) \cdot (-263{,}2) = 76{,}86;$$

$$\beta_1 = -0{,}93 \cdot \frac{23{,}97}{44{,}54} = -0{,}50;$$

$$\beta_0 = -263{,}2 - (-0{,}5) \cdot 532{,}2 = 2{,}9.$$

Получены следующие функции регрессии:

$$z = -1{,}73y + 76{,}86, \qquad y = -0{,}5z + 2{,}9.$$

Вычислим координаты двух точек этих функций и построим их графики (рис. 42).

y	-300	-220
z	595,9	457,5

z	450	600
y	$-222{,}1$	$-297{,}1$

Задача 6.7. По выборке D при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве средних значений

$$H_0\colon\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4.$$

Для выборки D имеем $n = 6$, $m = 4$, значит, $N = 24$. Используя формулу (II.5а), запишем в табл. 35 групповые средние по уровням фактора, а затем по групповым средним — общее среднее $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{-4{,}2 - 0{,}5 + 0{,}8 - 2{,}0}{4} - 30 = -31{,}5.$$

Так как c есть целая часть числа $\bar{x} + 0{,}5$, то $c = -31$. Суммы в формулах (II.85) и (II.86) вычисляем в табл. 36.

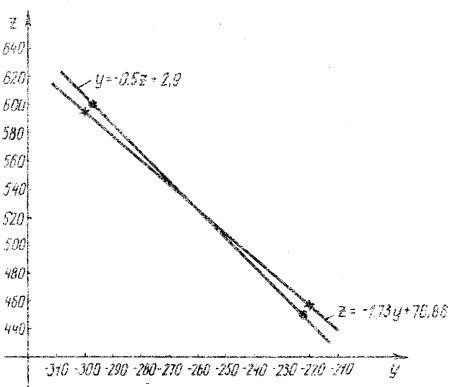


Рис. 42. Графики функций линейной регрессии YZ

Таблица 35

№ испытания	Уровни фактора			
	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$
1	—19	—31	35	31
2	—28	—33	—32	—27
3	—39	—35	—26	—28
4	—36	—25	—35	—35
5	—44	—28	—30	—40
6	—39	—31	—17	—31
$\overline{x}_j$	—34,2	—30,5	—29,2	—32,0

Таблица 36

i \ j	$F1$		$F2$		$F3$		$F4$		Σ
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	y_{i4}	y_{i4}^2	
1	12	144	0	0	—4	16	0	0	
2	3	9	—2	4	—1	1	4	16	
3	8	64	—4	16	5	25	3	9	
4	5	25	6	36	—4	16	—4	16	
5	—13	169	3	9	1	1	—9	81	
6	—8	64	0	0	14	196	0	0	
T_j	—19		3		11		—6		—11
T_j^2/n	60,2		1,5		20,2		6		87,9
P_j		475		65		255		122	917

По формулам (II.85), (II.86) и (II.82) находим:

$$Q = 917 - \frac{121}{24} = 917 - 5{,}0 = 912{,}0;$$

$$Q_1 = 87{,}9 - \frac{121}{24} = 87{,}9 - 5{,}0 = 82{,}9;$$

$$Q_2 = 912{,}0 - 82{,}9 = 829{,}1.$$

Далее по формулам (II.81) и (II.77) получаем

$$S_1^2 = \frac{82{,}9}{4-1} = 27{,}63, \quad S_2^2 = \frac{829{,}1}{24-4} = 41{,}46, \quad F = \frac{27{,}63}{41{,}46} = 0{,}67.$$

По известным степеням свободы $m-1=3$, $N-m=20$ и уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ находим с помощью таблиц F-распределения (см. приложение 6) критическую область $F > 3{,}10$. Значение статистики F не входит в критическую область, поэтому нет оснований отвергать гипотезу H_0 о равенстве средних значений по уровням. Итак, влияние фактора незначимо.

Таблица 37

№ испытания	Уровни фактора							Σ
	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$	
1	75	104	96	92	76	92	89	
2	80	89	88	89	89	87	85	
3		92	105		90	88	93	
4		90	90		77	82		
5		81	91		75	90		
6						86		
Σ	161	456	470	181	407	525	267	2467

Задача 6.8. По выборке E проверить с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о равенстве средних значений

$$H_0\colon\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7.$$

Для выборки E имеем $m = 7$ и $n_1 = n_4 = 2$, $n_2 = n_3 = n_5 = 5$, $n_6 = 6$, $n_7 = 3$, отсюда $N = 28$. Найдем по табл. 37 суммы по группам, общую сумму и общее среднее $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{2467}{28} = 88{,}1.$$

Здесь $c = 88$. Суммы в формулах (II.85) и (II.86) вычисляем в табл. 38.

По формулам (II.85), (II.86) и (II.82) находим:

$$Q = 1417 - \frac{9}{28} = 1417 - 0{,}3 = 1416{,}7;$$

$$Q_1 = 578{,}5 - \frac{9}{28} = 578{,}5 - 0{,}3 = 578{,}2;$$

$$Q_2 = 1416{,}7 - 578{,}2 = 838{,}5.$$

Далее по формулам (II.81) и (II.77) имеем

$$S_1^2 = \frac{578{,}2}{7-1} = 96{,}4, \quad S_2^2 = \frac{838{,}5}{28-7} = 39{,}9, \quad F = \frac{96{,}4}{39{,}6} = 2{,}42.$$

По степеням свободы $m - 1 = 6$, $N - m = 21$ и уровню значимости $\alpha = 0{,}01$ с помощью таблиц F-распределения (см. приложение 6) определяем критическую область: $F > 3{,}81$. Значение статистики F не входит в критическую область и поэтому нет оснований отвергать гипотезу H_0 о равенстве средних значений по уровням. Таким образом, влияние фактора незначимо.

Таблица 38

i \ j	F1		F2		F3		F4		F5		F6		F7		Σ
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	y_{i4}	y_{i4}^2	y_{i5}	y_{i5}^2	y_{i6}	y_{i6}^2	y_{i7}	y_{i7}^2	
1	— 13	169	16	256	8	64	4	16	— 12	144	4	16	1	1	
2	— 2	4	1	1	0	0	1	1	1	1	— 1	1	— 3	9	
3			4	16	17	289			2	4	0	0	5	25	
4			2	4	2	4			— 11	121	— 6	36			
5			— 7	49	3	9			— 13	169	2	4			
6											— 2	4			
T_j	— 15		16		30		5		— 33		— 3		3		3
T_j^2/n_j	112,5		51,2		180		12,5		217,8		1,5		3		578,5
P_j		173		326		366		17		439		61		35	1417

§ 7. ВЫБОРКИ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Для каждого варианта заданы пять выборок: A и B — одномерные выборки, C — трехмерная выборка, D и E — выборки для дисперсионного анализа. Все выборки одного варианта расположены последовательно, но необязательно в указанном выше порядке. После названия выборки задан номер варианта, например $A10$, $B10$ и т. д.

Вслед за выборками A, B, C указаны объем выборки N, начало первого интервала и его длина. Их желательно использовать при составлении вариационных рядов.

Использование выборок по работам показано в табл. 39.

Таблица 39

Выборка / Работа	A	B	C												D			E
			X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	F_1F_2	$F3\ F4$	...	
3	1	1	3	3	3										2			
4	4	4	3			2 3 5	2 5	2 5	3			3				1 5 6		
5	7	8	1 6	2	3	6									4	5		
6									3	3	3	1 2	1 2	1 2	7			8
			4			5			6									

Вариант 9

Объем 40

1	5	3	3	3	2	0	6	1	2	3	2	2	4	3	3	3	1
1	3	2	2	3	3	1	3	3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
1	4	2	3	2	3	3	1	4	3	1	4	3	3	4	2	4	3
1	1	3	2	4	1	3	1	0	3	4	3	4	7	4	1	3	

X = 20. Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка 60

1	67	70	68	68	72	68	67	70	78	74	79	65	72
1	76	77	69	78	71	63	77	75	70	74	63	71	68
1	62	66	73	63	72	74	80	69	73	76	69	69	67
1	68	74	60	70	66	70	68	64	75	78	71	70	59
1	73	72	69	72	69	66	71	70	73	65	66	67	69
1	72	71	72	75	66	73	71	76	68	69	75	76	73
1	66	77	72	69	68	63	76	70	75	76	73	73	67
1	65	72	66	71	71	65	72	69	73	76	66	72	75
1	73	72	66	74	73	74	72	76	71	66	62	69	74
1	62	66	73	71	76	65	68	76	71	71	68	67	72
1	72	66	72	71	73	70	69	61	74	66	70	72	67
1	78	75	71	76	73	71	72	68	67	69	69	77	65
1	73	67	65	62	74	64	67	74	66	74	74	69	75	70
1	67	77	73	78									

X = 20. Начало первого интервала: 59 Длина интервала: 2

Выборка 60

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
70	— 281	577	67	— 219	454	61	— 241	480	68	— 264	568
69	— 279	578	71	— 281	566	62	— 243	486	62	— 210	496
72	— 279	555	66	— 262	532	63	— 245	500	70	— 277	554
72	— 282	573	70	— 302	599	71	— 282	560	70	— 279	552
65	— 254	518	70	— 275	554	65	— 252	517	65	— 255	511
67	— 264	530	68	— 267	542	70	— 276	558	70	— 275	555
70	— 216	433	74	— 290	588	70	— 276	559	63	— 248	496
70	— 276	555	68	— 256	537	63	— 246	496	63	— 213	495
65	— 248	502	69	— 270	550	75	— 284	580	67	— 264	530
64	— 253	506	71	— 283	559	68	— 271	542	68	— 267	534
70	— 276	551	60	— 267	479	59	— 227	462	55	— 213	457
67	— 262	535	56	— 222	446	64	— 256	504	56	— 218	446
60	— 234	478	71	— 281	565	79	— 309	627	58	— 223	460
63	— 243	495	68	— 269	538	77	— 300	607	70	— 278	551
59	— 313	635	66	— 257	520	78	— 310	618	59	— 236	465
71	— 278	564	60	— 235	478	66	— 255	521	68	— 263	543
74	— 292	583	70	— 275	554	63	— 252	497	69	— 268	550
68	— 271	534	69	— 276	542	69	— 274	546	63	— 243	497
65	— 256	518	72	— 282	566	74	— 291	582	70	— 271	558
73	— 291	574	70	— 277	558						

X = 78	X	Y	Z
Начало первого интервала	53	— 321	420
Длина интервала	2	17	34

Выборка D0

	F1	F2	F3	F4
1	— 19	— 31	— 35	— 31
2	— 28	— 33	— 32	— 27
3	— [illegible]	— 37	— 25	— 28
4	— 30	— 25	— 35	— 37
5	— 44	— 28	— 30	— 40
6	— 32	— 31	— 17	— 31

Выборка E0

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
1	75	102	94	92	70	92	59
2	86	84	88	89	80	87	65
3		92	106		90	88	95
4		90	97		77	82	
5		81	91		75	90	
6						86	

Вариант 1

Выборка A1

1	4	2	6	3	1	1	6	0	2	2	1	3	2	6	5	1	4	5	1
2		5	1	3	1	1	5	1	2	2	1	2	1	2	1	5	1	5	4
3	5	5	2	2	0	2	1		1	2	1	3	3	5	2	2	2	1	1
4	1	4	1	1	2	2	3												

N = 69 Начало первого интервала 0 Длина интервала 1

Выборка C1

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
67	— 261	662	82	— 267	739	78	— 226	697	95	— 269	801
68	— 192	612	79	— 268	629	75	— 218	672	95	— 279	847
70	— 236	635	83	— 245	757	82	— 245	729	88	— 256	782
76	— 221	674	80	— 259	716	85	— 247	769	89	— 251	775
80	— 258	718	76	— 221	681	68	— 201	608	71	— 207	685
87	— 266	761	81	— 268	721	72	— 215	643	87	— 257	777
75	— 222	668	80	— 238	710	71	— 209	637	77	— 227	683
79	— 236	702	76	— 223	680	72	— 212	638	73	— 214	647
78	— 236	701	79	— 237	626	68	— 203	611	82	— 243	739
73	— 217	645	79	— 237	708	86	— 252	773	74	— 214	659
88	— 256	773	74	— 210	658	85	— 251	764	67	— 196	599
78	— 225	692	77	— 228	690	71	— 206	632	82	— 239	735
72	— 210	648	65	— 196	579	72	— 214	641	72	— 210	640
67	— 201	596	80	— 234	714	76	— 227	675	74	— 221	664
79	— 237	702	79	— 221	704						

	X	Y	Z
N = 58			
Начало первого интервала	62	— 280	557
Длина интервала	0	15	45

Выборка D1

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	52	36	43	52	37	45
2	49	42	51	12	15	50
3	45	46	44	40	55	46
4	44	37	47	38	47	36
5	34	37	34	37	39	37

Выборка E1

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	61	56	59	59	52	51
2	57	56		56	58	56
3	55	54		54	53	55
4	52	55		52	56	
5	51			54	55	
6	54			51	52	
7				50	50	

Выборка *B1*

[illegible]	[illegible]	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124
[illegible]	[illegible]	133	129	121	122	125	131	147	124	137	112
[illegible]	[illegible]	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
[illegible]	[illegible]	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
[illegible]	[illegible]	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
[illegible]	[illegible]	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118
[illegible]	[illegible]	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
[illegible]	[illegible]	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122
[illegible]	[illegible]	116	118	132	136	125	126	119	126	129	127
[illegible]	124	127	132	126	131	127	130	126	124	135	127
[illegible]	[illegible]	123	130	132	143	122	139	120	134	108	132
[illegible]	[illegible]	123	140	137	120	125	131	118	120	120	136
[illegible]	127	116	138	128	133	122	131	128	140	138	134
[illegible]	[illegible]	109	137	111	115	117	130	113	126	115	124
[illegible]	[illegible]	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135

[illegible] = 181 Начало первого интервала: 102 Длина интервала: 4

Вариант 2

Выборка *A2*

7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
1	5	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3
5	7	6	6	1														

[illegible] = 66 Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B2*

95	96	103	89	72	105	85	85	91	101	82	91
80	85	91	87	101	94	98	85	82	94	86	72
88	83	100	86	85	95	95	83	87	92	92	79
93	88	77	92	92	103	85	90	83	86	104	104
85	85	80	95	91	93	70	83	93	95	95	78
11	95	94	84	64	87	85	87	87	81	82	97
91	86	89	80	88	85	93	79	95	90	107	93
96	83	88	91	95	94	88	80	96	93	77	71
88	97	90	86	93	91	98	95	83	84	91	99
109	80	95	87	89	85	87	72	77	90	97	87
95	91	88	91	81	88	78	75	80	97	95	83
91	78	87	92	103	77	101	66	71	90	105	76
97	75	95	88	84	96	79	89	94	100	87	100
92	100	79	96	104	84	89	82	93	92	85	80
104	87	90	85	89	83	84	98	81	97	86	81
96	82	102	73	100	81	86	84	86	88	90	94
81	99	100	81	95	88	90	87	97	90	100	94
88	85	95	74	85	88	78	97	74			

[illegible] = 213 Начало первого интервала: 62 Длина интервала: 4

Выборка $C2$

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
48	99	520	61	128	664	52	112	564	50	105	542
40	83	435	42	88	456	32	67	345	49	99	538
52	106	564	55	117	601	48	97	518	54	113	588
50	107	541	52	110	567	40	82	430	45	99	485
39	79	424	44	94	475	40	81	436	36	75	387
47	100	516	41	82	450	46	92	504	41	91	441
38	80	413	47	97	516	41	90	450	46	101	503
46	96	505	43	91	468	54	110	584	38	83	416
47	98	514	55	118	602	48	96	521	44	89	483
44	97	479	43	87	472	53	110	580	35	79	376
45	92	490	49	104	538	47	97	509	47	99	512
44	90	483	42	89	459	50	102	542	44	93	474
53	108	577	31	71	333	46	101	498	57	120	624
52	107	569	40	86	432	56	112	608	53	107	579
45	96	493	47	97	516	42	93	461	51	108	554
42	86	461	43	89	471	41	84	445	48	100	519
45	98	486	48	101	527	55	112	595	46	92	496
45	97	492	44	93	483	40	80	431	43	89	467

$N = 72$

	X	Y	Z
Начало первого интервала	28	62	305
Длина интервала	6	11	56

Выборка $D2$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$
1	48	45	41	49
2	33	41	41	46
3	53	49	34	41
4	43	42	38	41
5	38	43	50	47
6	47	41	45	47

Выборка $E2$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$
1	89	92	91	107	102	113
2	106	105	101	99	104	109
3	88	94		76	74	89
4	102	92		101	97	99
5	107	100		101	103	92
6	89			96		100
7	101					

Вариант 3

Выборка $A3$

0	0	2	0	1	3	0	1	0	1	2	1	3	0	0	2	1	3	2	2
1	3	3	2	0	2	4	3	2	1	2	2	2	2	3	3	1	1	1	3
2	1	0	1	2	1	4	4	2	3	3	5	5	2	1	2	3	2	3	1
1	0	1	0	4	1	1	0	2	2	4	2	1	4	3	0	2	0	2	0
3	1																		

$N = 82$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка $D3$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$
1	114	106	110	88	99
2	96	107	92	94	100
3	113	99	113	100	114
4	98	95	110	99	95

Выборка $E3$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$
1	59	60	53	51	60	59	46
2		56	69	64		59	61
3		52	67	56		49	65
4			59	54		62	57
5			61	66		60	47
6			62	67		69	

Выборка *B3*

29	22	16	20	16	18	28	20	32	22	23	26	10	25	25
29	29	19	12	26	18	20	9	24	20	19	26	23	11	26
30	23	30	18	20	13	17	24	28	26	21	21	26	24	36
23	24	25	20	23	17	11	22	19	19	25	29	23	16	25
15	18	17	19	21	12	24	30	33	22	15	18	26	22	19
25	23	21	22	22	25	16	25	19	17	30	13	25	19	24
17	24	16	23	15	22	22	19	20	19	33	14	17	21	16
24	13	20	19	17	13	27	25	25	19	22	22	22	23	9
11	22	24	18	19	18	31	16	18	24	14	23	26	25	19
23	24	21	26	25	18	16	30	16	24	13	14	18	22	22
28	18	21	27	31	23	23	27	21	21	22	34	24	20	24
21	32	16	18	15	22	15	15	22	18					

$N = 175$ Начало первого интервала: —37 Длина интервала: 2

Выборка *C3*

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
46	50	411	59	59	524	56	62	500	58	62	513
55	57	491	57	60	511	52	58	464	57	57	510
57	61	508	48	52	422	42	46	373	46	49	406
55	58	491	41	47	367	48	50	423	54	63	476
51	51	454	57	57	507	60	63	539	67	72	602
62	70	552	50	57	449	62	64	554	60	64	538
53	43	377	64	67	567	46	47	413	53	53	467
64	71	567	43	45	381	51	59	450	57	65	507
56	64	496	57	62	507	69	76	620	41	45	362
55	67	580	54	56	478	60	60	531	58	61	513
56	63	502	50	51	444	57	61	511	43	45	384
51	58	458	59	66	529	62	65	551	55	57	488
58	60	516	48	51	427	58	66	518	40	43	358
42	47	374	45	54	404	54	60	483	67	74	601
46	54	405	51	53	450	57	63	506	57	57	511
54	60	485	40	41	358	44	45	392	48	54	425
62	67	554	59	65	530	55	62	494	56	57	500
57	58	512	46	54	404	50	54	445	57	65	506
68	68	610	47	52	417	63	67	566	73	79	652
47	56	421	55	59	486	44	48	391	54	56	485
69	74	613	49	55	437	51	60	456	57	66	508
75	72	578	64	70	572	47	55	416	63	67	557

$N = 88$	*X*	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	37	38	333
Длина интервала	6	7	50

Вариант 4

Выборка *A*4

3	3	1	0	0	3	3	5	3	0	0	4	1	5	1	6	5	4	7	4
5	3	3	0	2	3	1	4	1	2	4	3	4	5	4	0	5	6	6	3
5	4	1	3	3	6	3	1	1	5	2	3	5	3	3	4	1	5	6	1
3	3	3	5	6	1	2	1	3	4										

$N = 70$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*4

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70	66	89
71	92	71	93	83	42	110	110	56	96	95	87
88	102	104	88	64	96	92	67	78	95	71	105
50	66	73	76	100	72	86	46	102	95	98	84
82	46	60	94	109	93	79	74	62	97	94	91
81	71	89	78	85	80	93	64	65	109	89	55
103	98	108	68	65	71	82	70	84	73	65	79
99	81	92	76	82	95	75	45	94	81	84	68
77	90	103	119	57	102	100	83	68	69	68	81
83	69	90	99	69	85	84	70	80	117	76	104
78	114	79	70	56	62	73	71	77	98	86	82
54	62	82	103	91	61	93	68	109	96	67	110
84	82	56	78	80	88	66	78	65	50	88	72
94	92	89	109	69	58	75	72	101	92	75	77
85	76	85	84	68	74	78	87	69	75	61	53
70	106	68	81	61	64	100	73	74	57	63	102
96	80										

$N = 194$ Начало первого интервала: 39 Длина интервала: 6

Выборка *C*4

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
67	207	529	75	225	597	62	195	486	68	208	538
57	171	449	68	207	542	71	220	566	71	220	562
82	246	648	65	201	518	67	205	531	76	231	601
62	191	487	80	241	631	66	207	520	77	234	610
57	172	446	71	219	565	67	201	534	73	225	580
83	255	656	61	183	483	70	215	558	65	198	516
69	213	547	77	239	612	64	197	510	70	217	557
86	261	681	69	209	546	66	206	523	74	225	587
66	203	519	64	201	505	78	241	622	73	224	580
79	242	629	68	208	539	65	197	511	77	237	612
82	248	646	52	159	413	63	196	501	77	236	612
73	221	574	59	183	470	69	216	549	49	154	388
55	195	516	63	197	496	59	180	471	63	189	499
55	172	437	56	176	447	71	214	558	71	222	565
[illegible]	185	482	62	192	486	59	185	466	69	214	549
[illegible]	[illegible]	[illegible]	67	204	535	64	196	505	52	160	409
[illegible]	[illegible]	[illegible]									

$N =$ [illegible]

	X	*Y*	*Z*
[illegible]	46	145	363
[illegible]	[illegible]	19	50

Выборка *D*4

F1	F2	F3	F4	F5
[illegible]	— 8	— 18	— 26	— 29
— 28	— 7	— 12	— 23	— 8
— 4	— 19	— 18	— 16	— 21
— 11	— 26	— 20	— 13	— 21
— 20	— 11	— 21	— 22	— 8
— 26	— 11	— 19	— 28	— 28
— 24	— 15	— 18	— 18	— 17

Выборка *E*4

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
1	70	67	67	81	82	66	70
2	74	70	71	69	82	77	67
3	59	66		73		62	68
4				77		73	76
5				71		74	
6				87		54	
7						67	

Вариант 5

Выборка *A*5

2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1

N = 81 Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*5

34	14	—14	10	9	29	27	—1	—4	17	23	13	18	—17	—22
1	8	—9	3	—11	6	26	6	8	16	19	22	—8	23	—5
17	—21	—20	—17	16	3	6	25	0	4	5	6	—21	—2	8
—6	11	3	—2	17	13	8	27	11	9	12	12	—1	25	4
19	—8	29	0	—13	0	9	26	19	29	9	22	30	13	19
—1	—10	20	—7	21	10	8	—5	—2	9	—10	1	12	8	35
14	15	13	2	—5	—12	11	9	34	9	—2	—20	—4	—2	19
31	31	—11	—7	23	—20	—2	—12	—3	13	—7	15	8	—9	19
—8	—12	8	30	—22	18	—9	19	17	28	26	6	—7	0	—9
7	11	20	23	12	19	52	—10	32	29	33	3	—8	5	—4
9	18	—16	0	—8	25	32	26	—1	—5	6	—5	21	9	17
21	33	7	19	—2	6	14	8	14	27	16	—6	8	—2	—3
—16	—22	—7	13	20	18	1	4	—4	2	20	14	28	—9	—2
34	—16	—9	5	20	—8	25	7	19	5	12	—2	5	25	1
6	—7	4	—14	3	2	24	—5	4	24	30	21	7	27	12
36	13	—2	18											

N = 229 Начало первого интервала: — 25 Длина интервала: 6

Выборка *C5*

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
31	318	−37	23	231	−32	28	284	−34	31	316	−38
28	280	−36	28	288	−30	26	265	−29	25	251	−30
30	305	−32	26	269	−35	29	298	−38	27	278	−31
23	234	−30	26	267	−34	26	264	−30	26	268	−32
25	255	−32	28	284	−29	23	232	−33	27	273	−31
25	258	−33	27	277	−35	27	272	−30	28	280	−38
25	258	−27	25	253	−34	29	292	−39	24	244	−32
27	272	−28	26	268	−30	24	245	−25	24	243	−32
31	317	−40	27	270	−35	27	274	−32	26	269	−28
25	252	−33	28	289	−30	25	256	−35	25	255	−34
28	280	−31	27	278	−35	29	291	−30	22	229	−29
25	258	−31	29	295	−36	29	290	−34	27	272	−35
30	304	−39	24	246	−33	25	257	−33	26	263	−32
28	289	−30	23	238	−24	25	258	−31	24	249	−30
28	288	−34	27	279	−29	30	309	−34	25	252	−29
31	317	−37	27	273	−32	25	257	−29	22	220	−31

N = 64

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	21	221	−41
Длина интервала	2	16	3

Выборка *D5*

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4
1	46	45	49	45
2	49	43	43	46
3	48	43	47	46
4	47	42	43	44
5	45	48	46	43
6	48	44	45	45

Выборка *E5*

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	123	125	113	115	122	127	109
2	117	113		108	123	104	
3	115	98		116	131	111	
4	97	103		123	116	103	
5	108	95		124	102		
6				132	98		
7				113	105		

Вариант 6

Выборка *A6*

4	10	7	6	3	7	8	7	4	7	10	7	3	9	3
1	5	8	10	11	6	5	7	6	3	8	4	3	8	4
10	6	8	7	8	7	7	7	4	6	7	10	4	4	0
5	4	4	8	5	5	10	7	3	8	5	6	6	6	3
5	7	8	5	7	10	9	10	8	2	3	6	9		

N = 75 Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

313	323	312	321	322	301	337	322	329	307
312	319	327	315	319	317	309	334	323	340
311	335	315	322	319	325	312	300	323	335
305	308	337	322	303	314	315	310	316	321
311	322	321	330	325	315	338	318	327	323
307	310	322	314	317	330	318	320	312	333
325	316	307	305	316	330	318	335	327	321
322	324	305	318	329	305	310	304	326	319
316	307	309	309	328	317	317	322	316	304
319	307	345	329	338	311	316	324	310	306
315	314	343	320	304	310	345	312	330	324
318	320	325	309	306	300	308	324	312	300
315	330	330	315	320	313	302	295	337	346
307	305	323	331	345	315	318	331	322	315
317	322	312	314	308	303	333	321	312	322
317	327	302	316	326	316	313	328	313	306
324	318	320	301	329	319	342	316	300	340
314	325	318	347	325	321	322	358	313	311
302	300	316	321	315	323	311	318	324	310
298	312	312	307	321	332	310			

Начало первого интервала 298 Длина интервала 7

Таблица 26

	F2	F3	F4	F5	F6	F7
15	— 22	— 30	14	— 21	— 14	— 31
26	— 21	— 22	— 24	— 11	— 18	— 32
22	— 14	— 28	— 23	— 22	— 18	— 27
12	— 25	— 17	— 22	— 30	— 33	— 18
24	— 17	— 31	— 17	— 17	— 29	— 15
31	— 27	— 10	— 30	— 27	— 35	— 16
29	— 21	— 34	— 31	— 23	— 25	— 17

Выборка Б

N0	F1	F2	F3	F4
1	219	227	225	249
2	227	212	224	231
3	237			241
4	223			218
5	225			232
6				219
7				226

Выборка $C6$

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
89	— 262	533	88	— 256	520	92	— 273	550	93	— 270	555
90	— 261	537	96	— 288	573	89	— 270	537	91	— 264	536
91	— 268	537	92	— 269	549	99	— 266	530	92	— 266	551
87	— 255	520	92	— 276	549	90	— 264	531	90	— 265	534
89	— 261	533	91	— 266	536	91	— 270	536	90	— 262	539
95	— 275	551	85	— 248	508	93	— 285	562	94	— 289	562
90	— 263	537	94	— 281	556	92	— 268	544	90	— 265	539
94	— 279	558	89	— 260	531	92	— 268	547	97	— 289	572
92	— 269	550	94	— 282	563	91	— 272	537	95	— 278	567
93	— 276	548	94	— 281	554	91	— 269	542	94	— 279	561
94	— 274	560	90	— 265	539	92	— 273	542	91	— 265	540
92	— 272	551	96	— 288	573	97	— 283	580	93	— 273	550
97	— 284	575	97	— 290	577	92	— 269	543	95	— 283	568
93	— 276	555	94	— 278	554	95	— 284	572	87	— 252	516
94	— 275	550	95	— 282	562	92	— 270	548	96	— 283	566
92	— 276	547	93	— 276	550	93	— 271	549	95	— 285	581
85	— 250	501	91	— 271	540	92	— 271	547	93	— 275	557
95	— 278	566	93	— 279	554	97	— 284	576	88	— 264	520
92	— 267	545	91	— 273	538	99	— 294	587	92	— 270	544
99	— 288	585	91	— 271	536	92	— 271	544	95	— 281	564
89	— 266	526	91	— 264	536	91	— 271	545	91	— 268	541
94	— 275	562	92	— 270	556	93	— 279	551	95	— 277	568
98	— 285	587	87	— 261	518	93	— 277	551	93	— 273	552
89	— 259	530									

	X	Y	Z
$N = 93$			
Начало первого интервала	84	— 298	494
Длина интервала	3	8	15

Вариант 7

Выборка $A7$

2 2 1 3 4 2 1 1 3 3 4 3 2 4 2 1 4 3 1 4
0 4 2 3 4 3 7 1 3 3 3 4 3 2 1 2 3 3 1 5
3 0 2 1 2 3 6 0 3 6 2 4 3 4 2 4 1 2 0 3
1 0 0 2

$N = 64$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка $B7$

61 59 60 50 58 71 57 61 55 75 68 65 63 68 60
66 52 70 69 62 58 50 54 65 61 67 64 58 61 64
71 60 51 54 57 66 55 57 65 56 61 49 67 64 59
65 63 72 67 54 53 58 59 63 60 55 57 68 53 61
55 69 54 64 54 51 66 55 67 60 72 62 68 61 62
52 62 53 79 72 64 71 54 58 71 66 55 66 62 68
60 64 63 61 60 64 65 68 64 66 69 53 57 59 62
60 63 65 60 66 68 66 64 64 67 62 55 65 62 60
55 65 56 57 72 53 62 68 63 57 55 68 59 61 63
62 63 62 59 67 76 55 67 56 69 63 53 55 67 61
54 68 59 63 67 57 64 68 76 64 64

$N = 161$ Начало первого интервала: 48 Длина интервала: 3

	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
[illegible]	250	38	— 145	223	53	— 204	309	41	— 162	238
[illegible]	221	34	— 135	203	29	— 110	169	40	— 151	239
[illegible]	342	44	— 172	254	40	— 152	230	30	— 111	171
[illegible]	266	47	— 181	275	41	— 161	238	38	— 143	222
[illegible]	237	65	— 259	387	44	— 167	259	51	— 201	304
[illegible]	237	34	— 133	196	28	— 109	158	45	— 180	269
[illegible]	347	42	— 161	244	48	— 186	283	43	— 167	248
[illegible]	244	48	— 189	285	53	— 203	316	44	— 176	254
[illegible]	302	54	— 208	318	26	— 99	149	46	— 176	269
[illegible]	346	55	— 220	323	43	— 168	256	59	— 234	344
[illegible]	364	50	— 191	291	42	— 159	251	42	— 163	242
[illegible]	256	37	— 141	218	68	— 266	401	43	— 166	249
[illegible]	273	43	— 163	252	42	— 159	242	49	— 188	287
[illegible]	256	47	— 188	279	60	— 237	355	34	— 130	201
[illegible]	272	44	— 170	254	56	— 222	334	54	— 215	314
[illegible]	321	51	— 203	300	39	— 147	225	49	— 191	293
[illegible]	357	51	— 204	299	47	— 188	278	44	— 176	256
[illegible]	279	48	— 186	286	55	— 211	329	43	— 170	248
[illegible]	347	43	— 172	256	35	— 138	208	42	— 161	248
[illegible]	238	64	— 255	381	41	— 157	244	59	— 232	351
[illegible]	280	53	— 207	308	47	— 183	274	42	— 163	247
[illegible]	271	43	— 168	252	56	— 217	330	39	— 150	224
[illegible]	242	45	— 174	268	42	— 167	251	33	— 123	191
[illegible]	299	43	— 172	252	53	— 208	309	64	— 256	378
[illegible]	262									

	X	Y	Z
[illegible] первого интервала	22	— 280	128
[illegible] интервала	8	29	43

[illegible]борка D7

F1	F2	F3	F4	F5	F6
[illegible] 20	— 9	— 17	— 16	10	— 21
[illegible] 18	— 14	— 15	8	— 15	— 19
— 23	— 8	— 15	20	18	— 21
— 19	— 25	— 14	— 17	10	— 13
— 16	— 12	— 18	— 14	— 20	— 11

Выборка E7

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	19	27	29	43	17	8
2	35	38	37	39	31	
3	25	36	29	22	12	
4	43	44	25	36	24	
5		11	22	23		
6		33				
7		19				

Вариант 8

Выборка *A8*

8	4	4	7	5	5	5	3	10	2	3	6	7	6	10
6	7	7	6	10	7	6	8	10	7	7	9	1	3	4
7	4	4	5	4	9	6	5	9	5	6	5	6	4	7
2	5	7	6	7	3	8	8	7	4	7	5	7	6	6
5	6	8	6	12	5	11	8	1	10	10	9	1	4	5
6	2	4	10	8										

$N = 80$ Начало первого интервала: 1 Длина интервала: 1

Выборка *B8*

78	85	52	53	62	56	58	68	98	58	94	84	57	68	64
61	64	62	53	89	66	54	62	57	64	66	35	53	73	57
62	54	75	52	59	72	54	66	46	44	57	63	86	63	61
59	54	83	53	71	64	60	48	77	47	51	54	60	67	85
54	66	64	82	78	70	88	61	63	77	41	62	69	60	64
64	66	80	71	53	99	58	63	43	56	51	70	73	76	73
60	58	59	67	53	56	74	71	86	30	55	58	67	76	69
73	85	50	63	50	74	78	60	78	68	72	65	87	62	72
51	68	65	64	72	72	70	70	78	50	56	66	73	67	60
65	59	64	58	71	76	51	52	67	71	61	73	45	82	64
63	53	76	58	58	77	68	67	60	69	64	53	70	79	79
80	53	83	51	46	63	74	45	73	70	92	79	82	73	64
69	56	48	64	75	62	67	49	58	73	52	64	67	57	46
70	64	75	78	59	51	86	74	72	43	53	65	53	98	64
66	54	70	81	47	68	85	93	70	51	71	87	56	63	49
79	46	54	49	63	96	63	61	82	61					

$N = 235$ Начало первого интервала: 28 Длина интервала: 5

Выборка D5

	X	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
[illegible]	275	44	57	342	55	56	338	46	68	415	59
[illegible]	242	39	45	274	39	48	297	47	47	282	39
[illegible]	354	49	53	336	50	44	268	36	40	242	38
[illegible]	212	25	46	277	41	49	294	44	35	210	29
[illegible]	523	47	53	320	47	50	309	40	60	360	55
[illegible]	236	42	45	278	44	46	284	36	37	227	35
[illegible]	240	32	43	266	38	46	276	41	41	248	37
[illegible]	301	53	48	294	45	47	289	41	46	284	36
[illegible]	235	29	50	308	47	39	234	31	46	278	38
[illegible]	246	39	44	271	35	49	298	43	53	320	45
[illegible]	557	54	38	228	33	41	264	37	43	260	34
70	361	55	68	414	66	49	302	45	53	321	48
[illegible]	343	50	54	325	44	53	323	51	54	328	48
[illegible]	590	55	57	348	54	44	272	41	50	304	44
[illegible]	208	28	34	211	28	47	284	43	45	278	39
[illegible]	391	42	59	356	52	51	315	41	50	303	44
[illegible]	277	36	57	350	50	56	340	52	25	159	23
[illegible]	306	47	57	350	50	39	236	33	44	266	43
55	334	52	40	301	41	46	285	38	54	331	47

N = 76

	X	Y	Z
Начало первого интервала	21	138	19
Длина интервала	8	43	8

Выборка D8

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	50	55	57	58	57	57
2	58	58	59	60	57	57
3	58	56	57	58	56	59
4	59	59	59	57	57	57

Выборка E8

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
1	37	25	30	29	42	38	23
2	37	31	28	26	30	40	29
3	41	36		35	22	25	39
4	29	31		37	33	39	33
5				33	30	42	

Вариант 9

Выборка *A*9

2	1	2	3	1	1	0	2	2	4	3	3	0	3	0	3	2	3	1	2
2	3	0	2	3	0	2	3	3	4	4	1	4	0	0	1	2	4	4	3
0	0	0	2	2	3	2	1	0	0	0	3	1	0	1	2	1	2	2	4
3	2	0	0	1	0	3	0	0	3	1	3	4	2	3	3	2	0	4	

$N = 79$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*9

56	76	65	66	76	62	89	48	62	50	47	80	67	87	78
55	67	51	73	75	61	88	46	57	65	60	72	28	75	51
69	68	65	34	77	63	57	61	42	85	49	41	62	63	80
62	65	75	56	66	92	60	43	52	80	68	70	76	62	55
42	87	81	67	65	81	90	38	58	60	79	79	50	64	70
58	77	73	54	58	77	86	52	61	42	70	93	54	65	51
53	64	65	76	88	59	62	67	62	90	88	69	61	81	65
72	58	68	94	54	58	58	81	57	70	71	78	52	93	89
57	68	70	58	72	57	62	63	87	61	91	57	57	66	68
40	63	86	48	75	66	83	64	55	75	65	67	54	70	44
51	86	67	58	73	71	46	86	68	79	50	58	66	69	61
64	78	78	60	46	71	71	74	79	65	61	62	84	53	67
83	43	64	67	50	60	83	61	83	67	67	58	46	73	58
47	76	81	72	66	83	73	71	70	60	68	52	51	63	63
75	61	80	51	63	62	46								

$N = 217$ Начало первого интервала. 26 Длина интервала: 5

Выборка *C*9

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
77	619	72	74	605	66	67	549	57	72	583	58
76	626	58	77	632	68	69	568	56	66	529	49
62	505	45	69	554	66	66	530	62	80	647	63
83	680	80	72	594	60	71	568	53	72	585	62
83	673	71	76	612	58	71	574	69	68	561	61
79	637	70	69	556	60	77	628	60	76	619	57
77	629	61	84	679	76	78	631	72	81	667	79
81	649	66	77	629	61	77	631	73	69	567	55
71	568	51	72	582	59	67	542	63	83	667	64
83	669	70	76	611	56	73	587	65	77	634	70
73	591	56	78	626	61	67	542	53	69	565	62
81	648	75	87	703	69	83	681	69	81	664	80
82	663	71	79	650	70	67	544	53	65	528	62
77	616	60	80	655	68	76	616	66	71	579	55
82	672	63	70	577	54	71	579	59	69	564	65
83	677	77	80	657	70	74	604	69	85	688	68
80	655	61	75	613	71	73	594	58	81	656	62
77	619	60	69	557	54	75	601	60	72	578	56
69	568	57	77	619	61	80	659	61	84	675	77
78	624	74									

$N = 77$

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	60	488	42
Длина интервала	5	34	7

Выборка *D*9

№	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	120	123	114	120	106	102
2	95	111	105	113	101	109
3	110	127	103	109	108	118
4	105	97	122	111	116	107
5	89	103	118	102	94	114
6	108	116	113	116	94	116
7	91	110	107	113	121	100

Выборка *E*9

№	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	−34	−40	−40	−34	39	2
2	−41	−41	−46	−37	−39	[illegible]
3	−42	−41	−41	−40	−37	−4
4	−35			−37		

Вариант 10

Выборка *A*10

3	5	6	8	4	5	4	7	2	7	7	3	7	4	4
5	4	4	5	2	4	8	8	4	6	5	9	4	6	4
4	4	9	3	3	2	1	5	2	5	5	3	4	4	7
8	9	11	4	5	2	5	7	6	1	2	5	6	3	1
2	6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5
2	8	3	6	4	6	6	8	7	3	3	7	3		

$N = 88$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *C*10

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
72	152	574	69	140	546	71	149	561	75	159	599
72	152	575	70	145	554	73	148	577	73	152	581
73	155	577	73	155	580	69	139	545	75	152	596
68	144	538	68	140	541	73	147	574	80	164	634
71	145	567	70	144	555	68	139	540	71	151	566
77	155	612	69	145	551	67	135	535	75	158	596
74	154	584	71	150	563	69	139	544	79	164	626
67	136	552	71	142	567	80	168	634	76	153	[illegible]
68	142	536	71	142	566	77	157	615	73	152	576
71	147	561	65	139	517	74	149	584	65	137	514
74	153	590	67	137	532	78	161	615	70	141	555
69	145	548	68	144	542	68	137	535	66	141	524
69	143	548	66	139	520	73	153	580	68	143	534
81	168	645	71	144	558	64	131	506	74	156	583
68	145	536	72	148	572	67	139	530	74	151	586
67	134	531	66	134	522	67	143	531	71	149	562
76	152	607	72	151	571	70	144	551	70	146	559
67	139	533	73	150	577	67	142	533	73	146	583
68	141	540	67	134	535	67	137	527	70	147	557
69	146	548	75	155	596	74	153	582	75	157	597
70	146	556	66	139	523	66	139	521	63	130	498
69	142	546	73	150	582	65	136	510	68	136	543

$N = 88$

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	61	127	486
Длина интервала	4	7	25

Выборка $B10$

71	62	43	80	70	44	42	25	48	55	58	44	74	55	56
49	54	63	60	57	76	52	74	65	61	60	72	69	68	47
39	62	81	56	55	38	68	55	74	50	29	35	55	52	27
58	50	62	80	49	68	68	81	66	64	41	45	48	68	79
56	82	76	84	47	44	72	58	58	89	61	55	66	56	69
44	88	88	73	39	70	70	35	51	69	50	59	35	43	71
54	65	85	63	59	52	88	64	60	61	31	64	48	49	50
41	62	42	76	81	76	70	76	75	53	66	87	74	61	68
73	44	61	53	46	69	71	58	63	73	56	65	53	77	39
83	45	55	77	61	42	72	49	52	67	62	68	72	46	76
67	53	70	76	56	62	38	59	53	50	76	52	73	34	51
60	61													

$N = 167$ Начало первого интервала: 23 Длина интервала: 5

Выборка $D10$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$
1	49	48	50	46	51	50	47
2	46	49	51	49	52	49	47
3	46	50	51	51	48	49	51
4	47	44	51	49	47	51	48
5	49	50	46	56	52	51	48

Выборка $E10$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$
1	30	33	29	36	36
2	27	26	27	30	24
3	30	34	31	42	31
4		31	31		39
5		30			33

Вариант 11

Выборка $A11$

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7
3	3	4	4	3	8	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3
1	0	2	2	1	7	5	2	6	2	1	1	8	4	5	4	1	4	5	4
4	2	3	4	3	3	9	2	6	2	3	2	7	1	4	7	3	5	7	2
5	5	4	4	6	1														

$N = 86$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка $B11$

127	141	121	131	145	139	141	131	139	137	128	132
129	134	140	143	140	127	132	136	134	133	121	133
136	126	138	144	138	138	157	137	127	139	140	141
125	136	136	129	136	135	142	132	129	128	134	139
130	137	132	140	125	127	129	133	134	135	124	132
127	133	140	135	140	130	130	130	131	133	133	131
129	127	138	128	122	137	136	137	140	138	117	114
132	137	126	137	136	130	148	130	140	132	127	125
134	136	116	120	125	136	124	144	133	132	123	136
131	130	130	134	132	131	125	138	130	146	132	131
138	135	133	126	134	137	141	136	126	125	135	139
150	130	136	132	127	131	122	125	133	133	123	136
131	135	130	123	133	123	140	133	138	124	129	129
128	126	128	138	127	120	144	135	126	126	144	125
123	132	138	155	139	137	133	129	124	140	131	128
130	130	124	142	124	129	131	143	129	127		

$N = 190$ Начало первого интервала: 112 Длина интервала: 5

Выборка $C11$

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
7	23	38	6	19	28	6	20	35	11	42	58
11	38	63	5	18	27	10	37	55	9	35	45
10	34	55	10	31	56	14	47	79	12	45	64
4	16	16	10	31	55	12	42	65	10	32	58
11	42	64	13	43	74	6	25	29	7	30	33
12	44	70	15	49	84	6	22	35	8	32	46
9	33	50	6	26	31	8	28	47	9	30	46
5	18	22	11	42	58	6	26	28	9	34	50
8	29	44	10	31	54	6	25	31	11	36	63
13	42	76	14	45	78	13	46	77	13	42	70
12	39	71	8	28	47	11	42	59	9	27	52
10	36	58	14	49	79	9	32	45	9	29	49
9	27	45	6	23	35	10	36	58	10	38	57
9	30	49	16	57	95	8	31	45	13	41	77
11	36	65	8	29	39	12	43	66	7	21	32
9	31	44	6	23	33	14	44	75	9	32	50
10	38	55	8	25	41	14	49	76	8	27	40
10	35	54	8	32	40	7	28	38	16	53	92
13	45	75	7	25	39	16	50	90	12	42	65
15	48	89	8	29	38	11	34	63	15	50	81
4	18	22	10	36	59	11	40	59	13	39	75
9	30	48	12	39	69	12	42	70	11	37	62
14	50	76									

	X	Y	Z
N = 89			
Начало первого интервала	3	12	9
Длина интервала	3	8	14

Выборка $D11$

№	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	98	98	87	104	101	110
2	106	88	94	93	95	97
3	95	96	92	100	99	100
4	94	96	98	96	97	96
5	110	100	90	98	101	96
6	102	90	95	96	93	100
7	93	100	94	100	102	98

Выборка $E11$

N0	F1	F2	F3	F4
1	25	31	26	21
2	21	35	25	20
3	17	23	22	22
4	28	22	26	30
5	29			12
6				24
7				21

Вариант 12

Выборка $A12$

11	6	7	8	7	3	7	3	3	12	7	9	12	5	10
4	7	2	7	7	4	5	11	5	5	6	4	5	8	9
8	12	5	6	7	10	11	9	13	9	3	8	11	9	7
12	6	6	14	11	9	8	14	6	4	10	8	4	6	8
3	6	6	7	7	6	10	11	3	11	8	5	8	11	11
6	11	7	8	7	12	5	5	9	5	7	10	5	7	

N = 89 Начало первого интервала: 2 Длина интервала: 1

Выборка *B*12

103	120	129	105	134	138	113	87	117	109	109	113
102	139	101	98	114	116	94	125	108	119	130	127
116	124	137	110	151	102	115	127	121	110	131	106
112	96	112	112	120	100	118	104	106	123	112	134
109	107	115	130	149	104	127	125	117	109	106	109
112	90	111	138	112	97	124	128	105	122	118	126
84	138	123	119	121	116	120	101	118	102	102	129
145	117	110	138	107	127	119	127	128	90	95	92
105	131	118	127	105	139	92	122	116	111	111	101
99	98	103	123	114	126	132	125	142	92	103	109
138	115	94	116	138	125	91	132	98	111	154	129
140	125	96	112	104	111	108	89	128	111	140	145
135	102	116	105	135	96	102	106	94	116	99	129
128	125	97	97	96	114	148	133	126	98	107	130
95	125	112	117	87	98	79	97	136	121	100	127
115	116	117	115	97	108	110	110	103	128	86	126
98	121	119	99	134	114	157	135	109	120	129	129
147	116	129									

$N = 207$ Начало первого интервала: 76 Длина интервала: 6

Выборка *C*12

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
40	209	272	40	212	266	41	224	279	40	219	270
40	201	269	39	204	265	40	213	275	40	204	266
42	213	282	41	224	271	41	216	276	41	205	274
41	222	271	42	223	282	40	213	278	40	217	278
42	216	289	41	215	280	41	209	273	41	217	278
41	219	277	42	214	279	42	225	282	40	202	263
40	208	264	40	210	264	42	219	287	41	219	283
41	208	280	41	207	268	40	215	267	39	213	257
41	206	280	42	215	293	40	214	275	41	219	279
39	200	267	40	203	276	41	223	277	41	208	267
38	209	256	41	207	278	40	209	270	40	201	264
39	202	263	40	212	271	41	220	271	41	216	284
42	212	293	42	226	290	41	205	267	39	212	257
40	206	277	40	204	265	40	212	273	41	217	278
40	216	261	42	221	287	41	218	284	40	216	276
41	222	280	41	220	268	39	210	255			

$N = 63$

	X	Y	Z
Начало первого интервала	38	198	252
Длина интервала	1	5	7

Выборка *D*12

№	F1	F2	F3	F4
1	75	54	38	35
2	66	62	65	46
3	71	59	43	65
4	66	47	37	59

Выборка *E*12

№	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
1	29	31	22	18	26	22	26
2	24	26	27	27	22	24	24
3		22	29	19	29	26	28
4			30	27	31	28	
5				21			

Вариант 13

Выборка *A*13

1 0 1 1 1 2 0 2 1 0 0 0 1 0 3 2 1 1 1 0
0 0 1 1 0 2 0 3 1 2 1 3 2 1 0 0 1 0 1 1
0 2 3 1 0 3 1 1 1 2 1 1 0 0 1 1 3 0 2 3
2 1 1 0 4 2 2 1 1 2 0

V = 71 Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*13

—71	—74	—51	—87	—37	—72	—64	—77	—63	—58	—50	—39	—71	—48	—39
—44	—62	—59	—50	—91	—51	—65	—54	—70	—50	—46	—66	—44	—71	—72
—58	—52	—58	—72	—62	—47	—58	—69	—58	—72	—42	—70	—84	—65	—65
—49	—45	—53	—50	—73	—47	—21	—40	—74	—35	—49	—58	—44	—50	—74
—53	—66	—67	—64	—62	—49	—67	—41	—67	—57	—56	—60	—71	—46	—79
—72	—48	—38	—51	—37	—60	—58	—52	—58	—55	—50	—64	—68	—53	—70
—59	—59	—90	—72	—61	—74	—36	—79	—65	—68	—39	—54	—86	—49	—48
—59	—44	—68	—52	—60	—42	—78	—29	—68	—79	—78	—68	—70	—66	—45
—62	—56	—36	—67	—64	—45	—63	—59	—59	—58	—67	—69	—44	—69	—69
—78	—58	—53	—58	—71	—52	—59	—27	—46	—56	—72	—50	—55	—30	—56
—62	—34	—35	—38	—64	—67	—59	—59	—58	—62	—88	—30	—41	—59	—54
—47	—55	—50	—79	—63	—50	—77	—23	—73	—63	—63	—67	—74	—59	—60
—46	—57	—74	—54											

V = 184 Начало первого интервала: —95 Длина интервала: 8

Выборка *C*13

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
48	200	237	52	216	258	65	269	324	60	246	297
46	188	226	65	261	319	70	281	346	54	224	264
62	249	305	65	265	319	58	232	282	67	277	332
63	261	314	49	196	235	70	287	344	57	237	281
51	213	253	69	276	336	63	258	305	66	265	324
61	253	295	55	229	269	60	249	291	58	236	286
62	252	302	47	192	232	77	311	384	63	261	308
56	230	278	61	246	302	63	261	311	58	234	282
50	204	243	53	212	261	49	199	241	70	282	343
54	225	262	58	237	289	59	242	289	59	239	290
53	220	256	68	273	335	65	262	316	62	255	309
47	192	232	48	192	239	65	267	324	51	204	250
66	273	324	52	214	256	61	244	299	61	245	304
58	236	284	52	212	255	64	260	311	71	286	351

V = 56

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	43	178	213
Длина интервала	6	21	27

Выборка *D*13

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	126	112	133	131	135	143
2	133	137	139	143	148	132
3	140	152	157	127	151	112
4	118	140	142	121	139	142
5	167	121	155	127	140	142

Выборка *E*13

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	41	25	22	32	29	25
2		33	29	35	30	14
3		29	38	22		
4		33	24	37		
5				36		

Вариант 14

Выборка *A*14

9	6	4	6	11	8	7	9	6	8	3	2	3	9	7
6	5	7	8	8	7	10	8	5	9	6	10	3	10	5
7	6	4	9	9	3	8	4	11	4	8	9	2	8	7
7	7		4	3	6	12	10	2	3	4	6	8	2	3
8	5	3	6	9	4	4	7	6	9	6				

$A = 71$ Начало первого интервала: 2 Длина интервала: 1

Выборка *B*14

58	49	46	53	63	64	53	46	59	64	50	55	57	55	68
48	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47	50	43	62	48
40	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45	50	44	45	57
65	52	60	58	27	41	60	44	38	44	59	72	43	60	50
55	53	51	33	53	70	55	60	50	51	55	55	57	58	61
52	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54	53	64	58	68
52	52	47	48	55	58	72	53	69	42	41	59	56	28	50
47	54	52	60	47	55	48	64	63	72	51	55	59	65	56
42	63	59	60	76	54	40	58	49	66	59	55	50	46	58
73	41	68	54	48	52	52	50	67	39	43	64	57	71	67
54	63	63	65	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43	45
45	40	54	77	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47	38
54	57	52	63	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71	57
47	52	51	59	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71	63
59	46	42	48	59	53	64	53	54	72	55				

$N = 221$ Начало первого интервала: 25 Длина интервала: 4

Выборка *C*14

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
59	426	57	61	435	46	63	460	53	62	444	58
71	509	67	63	457	55	65	462	50	62	437	54
61	435	43	59	422	57	64	456	61	64	458	50
67	469	60	64	454	49	68	485	50	64	453	63
62	449	55	60	458	55	70	490	63	62	413	43
62	450	59	62	449	47	57	409	41	56	410	38
61	437	59	68	486	67	65	472	53	65	475	49
59	422	54	65	468	57	69	502	66	66	464	49
65	463	49	68	478	56	62	436	59	64	458	44
63	455	47	65	463	45	66	457	64	61	431	54
65	472	62	62	441	46	66	475	62	62	434	42
62	448	56	68	491	50	66	474	65	69	486	54
62	443	49	64	450	55	62	452	45	65	465	61
65	462	55	60	432	47	60	435	41	62	439	45
67	484	50	64	453	59	64	465	44	66	466	62
63	442	50	67	478	59	60	431	40	63	453	48
58	419	54	68	481	58	60	432	55	57	408	39
64	456	53	62	438	54	63	446	43	55	396	51
64	451	45	67	487	59						

$N = 74$

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	51	386	35
Длина интервала	3	20	6

Выборка *D*14

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	46	31	41	48	43	53
2	46	50	66	65	59	55
3	48	62	44	60	76	66
4	46	36	52	61	58	59
5	34	66	48	61	72	58
6	67	39	55	65	55	46
7	58	31	66	53	69	51

Выборка *E*14

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	48	37	52	35	38	49
2	50		52	43		55
3	51		45	46		38
4			43			47
5			48			48
6			46			45
7			51			45

Вариант 15

Выборка *A*15

2 0 1 2 0 0 2 2 1 1 0 0 0 0 1 2 0 4 0 0
1 0 4 1 1 0 2 1 0 0 2 1 1 1 1 0 1 1 0 3
1 2 1 0 1 2 1 2 3 0 2 4 0 0 0 3 0 2 0 2
2 2 1 1

N = 64 Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*15

174 166 157 161 165 162 151 164 172 158 161 165
160 154 171 160 168 171 161 162 168 164 166 159
172 154 154 154 153 159 190 173 150 166 157 177
165 168 152 168 163 158 153 164 174 170 159 165
167 168 161 168 159 174 166 189 170 159 162 153
175 173 177 170 174 169 159 154 165 167 161 168
157 182 175 170 155 164 174 167 170 153 160 153
151 169 155 143 163 155 173 166 161 195 161 158
150 159 167 163 166 155 139 157 164 165 171 172
154 161 169 164 173 164 162 174 156 155 160 156
165 149 175 150 162 179 154 167 158 155 147 161
161 173 166 156 171 158 164 158 173 166 148 174
179 173 167 162 166 167 164 158 160 165 161 151
151 156 150 157 163 168 170 155 174 149 161 162
155 164 156 157 170 173 165 160 156 166 160 165
159 157 162 173 173 151 151 169 167 145 166 168
161 169 170 172 159 161 162 151 165 161 151 155
167 148 167 179 148 162 169 157 167 169 174 165
164 169 161 164 171 160 154 156 166 170 164 166
161 149 158 168 176 155

N = 234 Начало первого интервала: 141 Длина интервала: 5

Выборка *D*15

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
1	46	88	83	64	69	85	76
2	75	63	66	61	68	66	64
3	63	69	49	65	54	60	81
4	56	79	79	66	64	65	86
5	70	47	71	71	76	76	75
6	67	67	73	64	83	64	85

Выборка *E*15

N0	F1	F2	F3	F4
1	−11	−12	−12	−11
2	−11	−12	−11	−10
3	−10	−13	−14	−12
4	−11		−11	−14
5	−10			−11
6	−11			
7	−13			

Выборка $C15$

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
76	304	218	89	364	259	81	326	239	80	325	232
85	340	249	78	318	226	84	338	248	85	344	254
77	315	225	87	353	253	80	326	236	77	312	224
74	303	216	83	332	243	83	338	245	85	340	252
83	341	240	82	331	240	88	361	254	77	313	221
73	297	209	83	332	244	79	317	228	93	373	272
77	316	225	84	341	248	81	325	238	78	313	230
78	318	224	81	324	241	81	332	233	74	298	220
85	348	246	91	364	272	83	339	245	78	312	225
82	329	239	85	343	253	90	368	262	86	351	257
81	325	234	80	320	233	73	300	211	75	307	217
85	349	251	86	345	254	80	323	232	79	317	227
79	320	228	84	345	244	75	303	222	93	372	274
83	337	248	88	355	261	77	313	227	84	339	250
81	330	240	87	356	252	80	320	232	82	337	243
87	357	256	82	333	245	85	341	250	85	343	246
84	337	242	85	347	248	83	338	248	80	328	235
80	321	235	77	310	227	90	362	269	75	305	220
81	328	235	79	320	234	84	343	242	83	341	243
81	324	236	81	329	239	78	315	224	75	309	224
74	303	216	90	366	264	75	303	222	71	284	211

$N = 84$	X	Y	Z
Начало первого интервала	69	276	203
Длина интервала	4	16	12

Вариант 16

Выборка $A16$

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5
3	2	3	6	6	2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1
3	6	7	7	2	0	4	6	1	1	6	7	1	3	4	6	6	3	2	1
7	2	5	4	2	3	4	5	6	6	5	3	2							

$N = 73$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка $B16$

79	56	46	50	67	37	53	49	42	57	49	20	45	83	15
54	43	82	54	49	27	56	49	26	46	72	41	38	29	65
59	61	41	32	42	71	55	46	71	68	37	67	36	33	38
39	59	39	42	45	55	45	54	87	72	68	44	33	47	63
69	52	67	66	7	54	56	39	40	61	73	50	49	72	57
77	54	70	45	49	50	41	39	61	70	44	42	43	71	57
70	55	45	36	40	71	17	48	49	48	72	48	53	28	44
64	11	66	37	12	36	15	55	39	72	61	68	42	48	72
48	28	40	32	26	69	33	50	78	56	61	36	44	36	52
25	67	50	60	69	63	60	58	46	11	59	53	77	38	54
41	76	56	46	26	58	40	43	55	45	73	47	76	46	16
86	25	27	43	26	61	64	10	50	24	42	36	33	51	34
54	80	56	27	57	76	43	49	43	67	75	64	39	64	53
62	88	27	37	56	67	63	56	48	28	24	42	43	48	49

$N = 210$ Начало первого интервала: 3 Длина интервала: 9

Выборка *C*16

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
25	233	— 7	49	443	— 9	43	392	— 10	52	473	— 8
47	432	— 6	22	201	— 6	27	245	— 7	43	392	— 1
42	385	— 10	48	440	— 2	49	445	— 1	49	442	— 2
38	347	— 1	30	274	— 2	35	323	— 2	39	356	— 7
30	274	— 2	29	261	— 8	36	331	— 10	42	386	— 3
30	276	— 6	29	270	— 9	15	140	— 2	37	338	— 5
32	294	— 6	38	345	— 2	33	303	— 6	30	277	— 4
38	348	— 5	37	334	— 8	27	247	— 7	27	247	— 4
34	315	— 10	55	498	— 9	43	387	— 3	18	170	— 5
34	307	— 4	38	342	— 7	47	426	— 7	42	380	— 7
41	377	— 9	27	250	— 2	33	304	— 6	24	221	— 8
37	338	— 5	44	403	— 5	28	257	— 9	31	287	— 10
39	353	— 7	48	434	— 3	41	377	— 5	27	244	— 5
36	332	— 3	35	320	— 6	59	535	— 1	34	313	— 6
34	307	— 10	35	318	10	23	208	— 5	24	219	— 5
29	264	— 1	28	256	— 4	39	357	— 4	43	392	— 5
31	285	— 3	39	358	— 7	37	337	— 3	46	415	— 4
41	377	— 5	38	347	— 2	49	447	— 2	37	341	— 8
15	137	— 5	35	318	— 4	26	238	— 7	35	321	— 6
27	245	— 1	40	369	— 10	20	182	— 3	28	255	— 7
46	421	— 1	44	400	— 10	48	437	— 9	22	206	— 1
34	313	— 10	30	277	— 9	32	292	— 10	35	324	— 10
39	359	— 3	43	395	— 10						

N = 90

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	11	104	— 11
Длина интервала	8	67	2

Выборка *D*16

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	71	71	83	70	70	70	84
2	75	72	77	79	63	72	75
3	79	75	66	71	77	68	69
4	72	61	76	77	62	67	73

Выборка *E*16

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4
1	147	148	176	171
2	178	162	123	173
3	166	164	176	172
4			153	173
5			131	171
6			147	154

Вариант 17

Выборка *A*17

4	8	4	11	7	7	5	8	9	6	7	1	6	5	8
4	7	4	8	4	6	5	7	4	8	7	4	3	2	8
7	5	0	4	7	6	3	5	7	2	6	6	5	8	1
3	8	6	6	8	8	9	6	8	7	5	12	5	3	9
5	7	7	8	3	7	9	6	5	4	4	4	7	7	4
7	5	9	5	9	3	4	4	8	5	1	10	6	1	7
6	8	6	7	9										

N = 95 Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*17

−21	−69	−28	−46	−37	−58	−44	−32	−60	−33	−47	−55	−47	−37	−31
−41	−45	−45	−41	−42	−27	−33	−33	−63	−51	−53	−46	−17	−23	−36
−43	−78	−38	−43	−46	−37	−46	−47	−48	−59	−30	−37	−60	−42	−49
−32	−61	−37	−54	−42	−26	−30	−60	−40	−65	−50	−63	−56	−47	−61
−67	−34	−50	−62	−41	−39	−25	−49	−48	−51	−43	−50	−44	−64	−45
−54	−21	−49	−25	−59	−46	−48	−54	−38	−42	−34	−46	−31	−46	−75
−76	−50	−35	−57	−45	−33	−51	−47	−58	−32	−36	−42	−37	−47	−32
−28	−69	−33	−45	−38	−42	−30	−29	−18	−57	−46	−45	−57	−37	−58
−72	−38	−50	−51	−49	−47	−63	−52	−34	−47	−63	−53	−65	−55	−39
−60	−50	−57	−46	−70	−42	−39	−43	−60	−52	−52	−46	−34	−33	−51
−33	−16	−54	−63	−63	−27	−48	−38	−34	−40	−49	−43	−32	−54	−56
−38	−34	−39	−31	−46	−52	−80	−21	−54	−50	−50	−55	−47	−26	−34
−54	−35	−43	−46	−23	−56	−28	−36	−35	−52	−51	−58	−65	−23	−58
−53	−54	−44	−43	−37	−49	−63	−52	−50	−58	−51	−58	−40	−40	−19
−51	−81	−42	−52	−50	−20	−53	−49	−40	−55	−55	−48	−28	−49	−15
−65	−63	−37	−47	−43	−35	−81	−44	−18	−41	−53				

N = 236 Начало первого интервала: −84 Длина интервала: 7

Выборка *C*17

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
13	71	88	17	87	117	13	69	76	20	96	134
11	62	72	15	70	110	16	78	102	15	64	94
18	91	123	17	80	117	15	65	97	16	74	110
13	60	90	16	67	97	22	95	149	19	69	101
15	79	93	17	68	117	14	69	85	10	40	57
21	85	135	13	67	82	15	77	95	15	61	102
17	79	112	18	86	112	12	49	64	25	102	153
13	54	75	14	57	88	12	62	74	15	63	93
16	71	110	13	67	71	11	49	63	17	70	105
13	67	74	11	48	60	16	76	109	17	83	102
19	90	115	15	60	102	17	70	105	17	76	109
17	81	116	16	51	69	15	77	92	19	86	119
15	61	87	15	63	93	14	72	83	16	73	102
12	54	76	14	67	93	13	57	82	11	52	64
17	77	118	9	54	59	17	79	101	13	55	75
20	82	120	19	85	127	15	64	91	17	87	101
17	72	107	18	87	107	14	61	91	20	88	123
18	91	115	15	61	101	12	67	78	19	85	132
17	81	116	15	71	93	12	51	72			

N = 75

	X	Y	Z
Начало первого интервала	8	35	51
Длина интервала	3	11	18

Выборка *D*17

№0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4
1	93	87	100	83
2	79	86	94	91
3	93	88	112	97
4	96	97	102	92
5	91	99	89	91
6	96	84	101	105

Выборка *E*17

№0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	196	194	195	191	201	194	189
2	197	200	194	199	202	181	207
3	203	190	182	199	207	205	
4	192	172	192	185		179	
5		185	193	176			
6		190	196	195			

Вариант 18

Выборка *A*18

5	3	3	3	5	4	5	3	3	[illegible]	2	1	5	2	4	0	2	2	[illegible]	2
1	3	3	1	2	4	0	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	1	5	[illegible]
4	5	1	1	2	0	2	3	3	2	4	2	1	2	3	1	2	4	5	
6	3	1	4	3	7	1	1	0	2	3	1	1							

$N = 73$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*18

52	40	47	54	40	54	41	74	45	45	51	76	58	37	47	
42	53	54	65	46	65	61	55	38	66	42	56	53	40	[illegible]	
43	49	77	64	53	64	58	54	56	53	43	33	56	34	50	
58	66	49	49	57	48	42	46	52	59	50	62	50	53	58	
46	53	51	50	69	30	48	56	23	74	32	60	44	62	[illegible]	
34	46	33	29	55	42	61	51	41	45	25	39	41	51	47	
51	52	62	63	65	49	48	63	52	46	44	55	60	54	[illegible]	
[illegible]	57	68	54	56	51	56	48	55	47	36	51	39	[illegible]	[illegible]	
71	42	54	33	39	47	46	47	73	63	31	44	51	[illegible]	[illegible]	
43	53	60	61	55	47	42	56	70	48	45	65	48	[illegible]	[illegible]	
41	57	56	33	44	43	45	35	35	56	36	56	56	52	[illegible]	
53	49	55	25	53	48	73	38	58	52	57	49	51	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	53	48	68	35	53	41	55	51	50	45	50	29	[illegible]	[illegible]	
50	56	55	65	49	31	70	56	56							

$N = 204$ Начало первого интервала: 17 Длина интервала: [illegible]

Выборка *C*18

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
47	482	— 103	52	529	— 105	56	576	— 133	[illegible]	[illegible]	[illegible]
49	504	— 111	47	479	— 110	48	487	— 113	[illegible]	[illegible]	[illegible]
50	513	— 109	53	532	— 121	52	522	— 117	[illegible]	[illegible]	[illegible]
50	500	— 111	57	580	— 129	50	507	— 117	[illegible]	[illegible]	[illegible]
52	526	— 124	48	491	— 108	51	521	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
49	493	— 101	51	516	— 115	51	527	— 124	[illegible]	[illegible]	[illegible]
49	505	— 114	46	465	— 106	53	540	— 124	[illegible]	[illegible]	[illegible]
54	552	— 125	57	578	— 128	49	506	— 108	[illegible]	[illegible]	[illegible]
50	503	— 114	50	507	— 103	50	515	— 125	[illegible]	[illegible]	[illegible]
52	529	— 109	53	539	— 119	51	511	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
54	546	— 122	51	510	— 109	59	598	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
58	560	— 124	55	566	— 121	52	522	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
55	550	— 122	53	533	— 122	51	515	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
49	491	— 109	51	528	— 108	52	521	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
55	567	— 116	54	549	— 119	51	527	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
50	512	— 117	53	537	— 107	52	524	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
51	512	— 105	48	492	— 108	51	[illegible]	— [illegible]	[illegible]	534	— [illegible]
56	564	— 127	54	546	— 115	52	[illegible]	— [illegible]	57	586	— 131
50	515	— 101	51	527	— 120	47	[illegible]	— [illegible]	54	554	— 124
53	538	— 115	50	500	— 118	54	[illegible]	— [illegible]	52	537	— 121
49	492	— 112	55	559	— 127						

$N = 82$

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	45	475	— 135
Длина интервала	3	24	6

Выборка Б18

№	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	58	57	60	52	51	59
2	59	54	54	56	54	58
3	53	56	51	53	57	61
4	51	53	56	53	54	61
5	56	54	53	53	60	57
6	49	58	53	58	59	54
7	54	60	58	52	52	57

Выборка Б16

№	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
1	228	235	234	234	[illegible]	227	[illegible]
2	233	232	233	232	[illegible]		[illegible]
3	235	234	235	234			[illegible]
4	231	232	235	234			[illegible]
5	234	232	235	234			[illegible]
6	234	236		236			[illegible]
7	231						

Вариант 19

Выборка А19

2	2	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0
0	2	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0
0	0	0	2	1	1	1	1	3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0

$N = 80$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка Б19

144	106	120	85	108	140	143	126	119	125	161	140
168	133	131	132	133	166	131	120	127	105	136	145
154	105	173	97	113	150	143	107	133	139	127	138
107	107	127	127	159	170	120	120	106	126	152	128
160	120	109	106	134	127	107	106	95	91	113	128
120	99	160	137	143	103	138	143	131	157	148	146
112	141	174	109	173	91	148	123	133	117	122	139
107	139	169	125	141	132	115	157	127	158	115	161
165	145	168	107	105	115	113	138	113	145	104	99
137	144	122	93	124	120	112	159	135	145	137	115
98	159	158	125	125	121	145	130	168	132	118	139
184	153	133	122	138	117	147	115	134	102	107	85
159	139	156	123	138	136	112	101	114	141	164	142
96	137	161	153	123	147	137	129	140	171	115	155
126	145	109	147	112	98	144	114	109	149	114	173
118	138	102	168	116	125	151	86	129	166	115	106
120	133	159	158	156	114	109	138	108	155	129	145
139	161	116	110	155	122	181	151	129	128	137	104
107	115	131	146	119	125	164	145				

$N = 224$ Начало первого интервала: 80 Длина интервала: 11

Выборка $D19$

N0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
1	199	225	199	190	201	205	210
2	187	208	200	203	211	201	204
3	207	209	213	214	197	197	211
4	210	212	194	195	201	215	215

Выборка $E19$

N0	F1	F2	F3	F4
1	239	238	238	233
2	237	237	231	233
3	235	238		234
4	235	236		232
5	237	234		237
6	237	237		236
7	236	232		

Выборка $C19$

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
42	299	205	41	295	199	34	247	161	45	316	219
52	373	250	41	289	196	53	374	255	41	295	197
46	325	227	36	254	176	41	296	200	30	216	145
39	277	187	39	273	191	50	354	243	43	302	208
54	383	267	32	224	152	21	148	99	45	322	221
41	291	198	45	320	218	51	359	245	57	399	276
47	331	229	46	331	229	40	284	194	35	254	174
34	240	168	36	260	170	46	323	222	48	345	237
62	435	300	40	281	197	50	355	242	58	408	287
46	327	229	52	373	257	48	337	233	34	239	164
35	251	173	36	252	175	28	198	136	39	279	193
43	310	205	56	401	274	55	386	271	52	372	250
21	152	96	41	288	195	60	420	294	42	298	208
44	310	212	41	296	198	48	342	231	40	287	198
28	198	136	37	265	176	45	320	218	49	343	243
52	365	250	52	371	250	47	329	228	42	302	203
59	416	288	43	306	213	40	283	196	33	240	160
59	413	286	41	296	199	58	414	288	45	322	218
50	353	240	42	294	209	57	400	279	52	369	254
57	404	276	53	377	262	35	252	168	38	273	182
58	409	281	41	293	197	34	238	162	43	302	214
41	288	196	24	174	113	43	301	209	45	323	219
41	288	204	48	337	237	33	239	157	38	272	188
43	310	205	48	340	230	33	233	160	41	287	202

$N = 96$

	X	Y	Z
Начало первого интервала	17	124	79
Длина интервала	8	49	35

Вариант 20

Выборка $A20$

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2
5	3	6	6	5	5	3	5	6	7	8	9	5	2	5
4	5	6	6	3	6	5	3	4	5	10	3	7	5	3
3	3	7	5	3	4	9	2	1	4	4	4	2	4	3
4	4	5	5	3	7	5	3	2	6	2	4	4	4	0
6	1	3	4	4	5	4	8	3	5	4	11	9	9	

$N = 89$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка $D20$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$	$F7$
1	133	138	138	128	144	138	147
2	134	125	143	134	146	145	135
3	141	131	135	140	142	134	135
4	132	137	137	141	144	133	142
5	139	151	145	126	139	143	129
6	132	140	128	139	140	144	122

Выборка $E20$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$
1	91	73	51	64	21
2	47	69		70	43
3	95	36			66
4	83	38			59
5	53				65
6	78				63
7	77				

Выборка $B20$

107	78	93	81	80	92	126	93	67	50	104	110
120	91	101	91	120	88	69	74	102	65	48	71
103	67	95	112	112	86	99	99	103	122	112	102
92	69	105	106	124	46	72	75	126	73	106	75
80	92	68	112	127	88	93	74	131	51	117	145
96	76	71	138	104	120	67	92	130	99	94	92
97	105	84	78	100	98	114	113	94	108	76	88
91	78	96	81	116	75	120	75	62	113	109	111
127	63	87	86	66	100	75	84	95	121	103	95
70	98	67	148	95	92	105	114	98	102	41	76
114	90	97	111	93	110	79	63	109	69	108	71
111	100	136	92	84	123	84	125	102	96	72	102
90	136	87	132	137	100	102	88	65	75	114	79
122	63	115	90	78	86	122	119	87	115	96	137
106	105	88	75	100	84	71	123	121	94	114	94
93	118	94	102	109	86	45	97	93	43	48	114
85	79	124	89	104	108	108	100	106	102	105	119
71	86	115	82	101							

$N = 209$ Начало первого интервала: 36 Длина интервала: 11

Выборка C20

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
28	298	— 69	29	308	— 59	27	270	— 63	30	301	— 69
29	291	— 73	30	310	— 67	30	304	— 76	32	338	— 73
30	301	— 68	30	308	— 71	29	295	— 62	31	318	— 78
28	283	— 60	32	326	— 65	28	293	— 69	30	316	— 77
32	337	— 82	30	305	— 63	30	307	— 74	30	306	— 69
31	311	— 78	30	316	— 79	32	332	— 82	30	318	— 62
29	306	— 68	29	308	— 63	30	302	— 64	30	304	— 70
30	307	— 71	31	328	— 73	30	309	— 72	31	320	— 77
28	293	— 60	30	300	— 62	29	303	— 64	30	306	— 79
29	291	— 64	29	299	— 73	30	303	— 66	29	294	— 66
29	307	— 74	29	290	— 71	27	283	— 66	30	305	— 80
30	306	— 73	29	293	— 68	32	324	— 74	30	312	— 62
29	298	— 66	30	303	— 68	30	303	— 67	29	304	— 63
30	310	— 72	29	303	— 78	29	297	— 77	29	300	— 72
29	292	— 68	28	294	— 71	31	310	— 80	28	284	— 58
30	311	— 73	29	309	— 63	29	309	— 73	30	304	— 80
28	298	— 58	29	302	— 66	30	303	— 61	30	303	— 64
30	315	— 75	27	286	— 66	29	299	— 71	30	307	— 67
29	303	— 63	27	274	— 58	30	303	— 70	29	304	— 66
31	329	— 76	28	289	— 67	29	293	— 76	30	316	— 67
29	309	— 76	32	336	— 73	31	328	— 75	29	307	— 71
30	306	— 77	29	297	— 73	31	310	— 77	28	289	— 62
29	292	— 69	31	327	— 80	30	315	— 67	30	301	— 64
29	297	— 63	33	343	— 83	30	306	— 76	29	297	— 69

$N = 96$

	X	Y	Z
Начало первого интервала	26	264	— 85
Длина интервала	2	13	5

Вариант 21

Выборка A21

4	5	3	4	5	2	3	3	3	4	4	5	3	1	4	1	4	5	5	1
2	5	5	5	3	4	3	5	5	4	0	2	6	7	1	3	2	2	4	2
3	3	6	0	6	2	4	3	6	1	5	4	4	4	5	2	4	5	3	5
5	6	2	2	3	2	2	5	2	5	5	0	7	1	0	0	0	5	3	2
7	6	3	5	3															

$N = 85$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*21

110	115	122	128	115	118	116	124	120	127	136	129
119	124	131	116	108	122	118	132	118	118	116	132
124	120	124	124	118	127	126	119	115	122	131	129
128	122	103	125	115	122	114	109	132	122	121	129
108	111	104	115	105	135	132	133	119	137	126	102
114	109	125	121	112	131	115	122	118	116	130	126
131	127	116	120	119	128	104	131	115	140	115	124
126	115	104	125	131	117	118	102	127	120	102	120
130	128	106	132	129	131	126	116	128	134	132	124
107	119	132	117	120	122	114	125	139	116	125	132
111	122	120	113	123	119	122	112	125	101	121	124
110	123	141	115	121	113	125	139	111	117	114	109
128	126	139	114	123	125	123	118	129	123	124	122
123	120	115	115	127	115	114	133	128	123	104	124
105	124	112	135	117	127	134	117	120	97	123	105
108	119	112	114	133	112	120	145	121	126	127	118
129											

$N = 193$ Начало первого интервала: 95 Длина интервала: 5

Выборка *C*21

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
17	117	97	15	97	80	16	107	77	16	110	92
16	103	94	18	112	104	16	113	84	17	121	94
17	108	97	16	98	86	16	111	94	16	96	91
16	102	90	18	114	94	17	120	91	18	112	103
15	91	75	18	113	91	18	127	103	15	98	76
17	110	99	15	99	70	16	100	94	16	111	89
17	111	88	18	121	99	17	110	97	17	120	100
16	111	82	17	103	85	14	86	79	19	128	107
17	109	83	18	120	101	17	110	90	15	99	80
16	96	81	15	95	85	15	101	76	16	98	77
16	96	85	17	116	100	18	110	94	15	95	79
18	108	95	17	116	84	17	112	84	18	127	98
15	97	73	16	112	80	16	99	77	15	96	85
16	108	82	18	117	105	18	108	94	16	106	93
16	102	93	16	104	88	15	90	76	15	108	73
17	109	89	18	121	100						

$N = 62$	*X*	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	13	82	67
Длина интервала	2	8	7

Выборка *D*21

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	92	98	93	93	101	91
2	95	98	94	92	96	94
3	96	93	93	103	104	92
4	99	95	92	95	95	94

Выборка *E*21

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	58	17	53	67	23	49	11
2	59		46	37	56	46	
3	47		54			50	
4	50		23				
5			30				
6			36				

Вариант 22

Выборка *A* 22

2 3 1 6 4 6 3 3 1 3 1 2 4 4 4 3 0 3 2 4
2 3 2 3 3 2 0 6 1 0 2 2 6 2 0 2 4 3 1 5
3 0 4 4 3 5 3 2 5 2 0 2 0 2 5 0 1 3 3 2
0 2 2 2 5

$N = 65$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*22

184 181 201 178 190 188 181 180 186 180 176 186
185 184 187 176 189 194 196 190 193 180 186 195
197 189 197 190 176 200 196 188 203 191 180 181
188 185 188 173 184 180 189 178 190 175 193 184
177 179 177 203 185 182 191 183 183 211 189 177
195 196 175 188 189 187 193 185 184 193 181 185
214 177 196 195 193 172 190 200 176 179 185 182
175 180 179 170 206 181 197 197 180 193 192 200
175 196 174 171 160 187 185 206 187 182 175 172
191 179 191 199 197 177 175 170 174 194 188 182
179 186 190 183 196 183 185 174 195 179 197 182
183 184 185 172 193 175 172 179 179 184 190 183
178 192 186 157 172 185 180 193 177 174 200 195
184 186 185 206 192 189 189 184 183 182 179 186
184 169 189 180 183 192 186 200 176 191 186 182
202 184 192 179 204 197 194 182 172 185 175 187
182 184 186 201 197 188 188 194 184 193 178 191
203 193 190 185 181 187 181 196 204 177 178 167
178 194 188 182 182 199 180 181 187 187 178 181
180 182 160 183 193 189 193 191

$N = 236$ Начало первого интервала: 154 Длина интервала: 6

Выборка *D*22

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	63	50	65	35	46	43
2	51	40	45	34	57	60
3	40	44	34	47	36	53
4	47	43	53	46	41	57

Выборка *E*22

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	—35	—32	—40	—29	—28	—35	—30
2	—46	—30		—34	—30	—36	—34
3	—37	—34		—32	—39	—36	
4		—35		—34	—35		
5				—33	—37		
6					—40		
7					—34		

Выборка *C*22

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
37	159	58	41	182	72	42	176	72	40	169	73
39	174	63	31	127	51	39	173	60	35	147	56
30	133	59	44	191	71	34	138	56	24	115	31
32	137	59	38	159	63	36	154	71	37	160	69
40	173	67	28	126	55	31	133	52	42	168	78
34	145	53	42	181	81	29	125	44	38	153	63
33	150	53	31	132	46	41	182	77	35	159	69
40	162	69	26	116	42	27	109	47	38	162	74
38	157	68	32	140	58	27	124	51	32	146	58
35	140	55	31	143	59	37	154	66	38	154	60
37	157	67	40	163	61	38	157	72	37	167	71
35	149	53	31	126	43	47	198	90	41	182	81
26	114	37	34	139	53	40	176	67	33	139	60
29	118	45	45	185	74	33	149	65	32	128	58
37	166	73	36	161	65	36	154	62	42	178	72
31	134	50	38	153	63	36	150	69	28	129	50
38	154	66	35	150	62	41	179	81	44	178	73
38	159	59	32	129	51	41	172	75	42	180	75
33	151	54	37	157	63	35	150	52	35	142	63
36	144	68	40	161	67	39	169	70	33	136	60
37	158	58	31	134	59	33	133	49	35	141	61
48	202	93									

$N = 85$	*X*	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	22	101	26
Длина интервала	5	16	11

Вариант 23

Выборка *A*23

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	6	3
2	0	2	2	2	3														

$N = 66$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*23

5	—25	13	29	28	24	—8	40	24	—7	42	—49	30	—31	—7
—3	53	—6	14	46	—16	3	2	19	31	—26	10	46	—4	—5
5	8	6	30	39	14	3	32	6	25	—13	—12	20	26	5
33	2	—20	5	29	5	39	36	24	38	—2	30	53	52	7
20	—35	27	11	—12	23	1	—10	—3	—5	31	21	6	—15	—2
17	—15	26	17	0	46	13	21	—3	6	9	31	—15	43	4
19	—8	9	37	43	—3	20	20	24	17	3	43	—19	—36	19
—6	14	6	24	5	—50	4	—24	—6	43	17	—22	37	19	—28
9	3	—34	—7	19	18	—14	19	15	26	—6	52	5	26	29
28	—4	8	—1	30	65	1	25	—3	1	30	53	35	9	—11
1	35	1	21	76	29	—15	6	—31	—6	58	18	—10	3	60
17	23	3	3	27	—2	9	88	6	—1	21	—6	30	12	1
24	28	7												

$N = 183$ Начало первого интервала: —57 Длина интервала: 14

Выборка *C*23

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
58	122	339	63	133	373	62	138	365	72	151	420
62	138	353	68	148	396	62	137	352	61	137	359
65	137	377	64	144	375	66	141	378	58	131	340
61	133	349	70	154	419	73	160	429	63	128	363
66	132	394	63	140	372	70	151	412	65	148	373
67	143	385	67	153	396	64	131	373	70	151	417
67	137	395	65	148	385	69	141	407	58	130	331
65	131	389	71	150	423	70	157	405	62	138	368
62	142	353	64	145	376	59	121	334	66	140	384
68	138	405	62	124	368	65	145	385	64	137	365
64	143	365	64	135	383	65	149	377	64	137	369
55	114	310	72	160	421	64	137	376	64	140	364
68	136	395	66	135	394	64	130	379	64	147	374
64	130	368	63	139	362	63	144	358	67	148	386
63	143	361	67	151	386	68	148	388	64	140	374
64	137	383	59	123	338	67	145	396	65	145	371
67	138	401	69	139	404	63	131	373	67	149	388
69	140	398	67	134	388	63	143	372	75	158	446
70	153	401	69	148	405	68	145	404	63	130	375
68	152	388	64	129	364	77	158	450	60	137	347
69	153	408	64	130	374	62	138	353	73	159	432
68	149	388	65	144	376	59	123	343	73	159	420
70	158	417	65	147	372	67	152	387	66	138	379
63	126	375	61	128	360	63	139	374			

	X	*Y*	*Z*
$N = 95$			
Начало первого интервала	53	110	298
Длина интервала	4	8	24

Выборка *D*23

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	86	91	97	96	88	88	95
2	103	93	95	94	91	87	90
3	100	94	99	93	106	90	91
4	97	97	94	95	87	86	94

Выборка *E*23

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	70	56	48	58	51	62
2	79	48	58		41	75
3	67	51	62		50	56
4			76		49	74
5					59	
6					68	
7					65	

Вариант 24

Выборка *A*24

7	11	5	5	5	5	9	4	5	3	8	5	3	8	3
11	3	9	6	8	3	3	6	2	7	4	4	3	5	7
4	6	5	2	9	5	8	6	1	1	7	7	4	4	9
7	4	3	1	6	6	4	5	4	5	5	7	8	6	8
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6
8														

$N = 76$ Начало первого интервала: 1 Длина интервала: 1

Выборка *B*24

—64	5	—53	—29	—61	—49	—1	—22	—25	—38	—73	—20	—8	—37	—47
0	—37	—50	—46	—13	7	—13	—42	—1	—44	—27	—20	—33	—37	—30
—20	—73	—57	—40	—4	—40	—83	—33	—37	—26	—79	—16	—77	—5	—51
—28	—63	—24	—25	—21	—38	16	—38	—15	29	—11	—14	—34	—31	—23
—16	—58	—73	—43	—31	—65	—12	—4	—38	—25	—31	—7	—9	—60	—61
—47	—46	—33	—15	—79	—48	1	—62	—14	—49	—31	—25	—33	—38	—27
—51	—30	—43	—64	—24	—59	—22	—37	—6	—11	—78	—51	—1	—9	—34
1	—17	—33	11	—54	—31	—34	—38	—22	—2	—9	—15	—6	—87	—45
—22	—30	—15	—30	—18	—77	6	—47	—33	—21	—86	—31	—45	—43	—19
—36	—46	—69	—22	—59	—30	—22	5	—29	—42	—47	—5	—17	—71	—36
6	—6	—7	—41	—37	—11	—11	—65	—36	—58	—36	—30	—46	—15	—49
—88	—12	—8	—83	—13	—30	—48	—66	—9	—31	—13	—32	—21	—47	—50
—25	—6	—31	—75	—48	—77	—13	—55	—26	—9	—32	—41	—68	—55	—53
25	—77	1	—65	—35	—51	—24	—42							

$N = 203$ Начало первого интервала: —94 Длина интервала: 12

Выборка *C*24

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
70	702	471	70	715	477	72	721	487	72	729	484
72	739	492	73	730	509	77	788	528	78	785	541
75	760	506	71	712	488	75	755	524	76	777	518
68	699	464	71	716	484	70	719	482	71	711	481
68	688	457	69	700	474	72	434	486	78	780	544
71	713	478	71	722	493	72	725	493	77	784	527
69	700	475	66	662	454	70	717	470	74	755	505
71	719	490	74	752	514	76	779	529	67	684	457
69	706	480	76	765	522	80	800	553	70	706	488
68	696	457	78	798	543	65	662	443	75	756	511
68	696	470	74	746	507	70	710	475	67	678	467
69	703	468	79	797	534	70	718	476	79	808	533
75	755	515	78	787	544	70	702	479	75	756	511
83	838	578	72	737	484	80	804	541	67	683	460
73	748	508	70	708	476	65	655	439	74	741	517
71	715	493	75	753	516	72	739	499	69	696	479
82	831	556	77	775	537	70	707	483	70	705	478
69	709	463	68	695	463	75	752	512	71	719	482
73	734	497	68	697	475	69	702	469	74	751	515
73	736	502	71	713	489	73	747	503	68	682	472
72	736	498	72	730	499	73	744	498			

$N = 83$	*X*	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	63	640	427
Длина интервала	4	31	24

Выборка *D*24

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	83	83	83	84	83	84	82
2	83	83	83	83	82	83	82
3	81	83	83	83	82	83	83
4	84	84	82	83	81	81	83
5	85	82	82	83	82	82	82
6	84	81	81	81	81	83	81

Выборка *E*24

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5
1	158	163	162	161	161
2	160	163	164	162	157
3	161		159	162	161
4	162		159	164	
5			164	163	
6				161	

Вариант 25

Выборка $A25$

2	0	2	6	2	3	5	3	8	3	6	4	5	2	6	6	5	5	8	8
3	5	3	2	4	5	2	1	6	9	7	6	7	4	5	6	5	6	8	3
6	5	5	1	7	6	4	1	5	6	4	7	2	8	8	2	8	2	1	6
5	2	3	6	3	3	5	3	3	7	5	6	6	3	4	6	7	4	6	2
7	7	1	2	3	6	6	3	2	6	4	2	4	8						

$N = 94$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка $B25$

100	51	80	83	83	67	55	84	78	83	101	75
78	99	69	99	71	67	56	74	51	78	34	67
107	66	106	70	117	67	116	79	120	47	113	113
59	100	78	31	68	66	91	85	64	55	83	77
68	83	38	89	88	58	75	60	89	111	42	104
33	96	50	42	81	78	42	64	89	60	32	46
82	33	72	93	94	49	153	68	85	78	95	51
76	81	67	50	75	99	114	111	108	127	110	91
77	85	102	101	79	118	132	130	79	88	76	73
82	75	118	50	100	70	42	79	64	78	137	83
92	71	84	77	73	100	69	77	74	98	79	102
83	66	59	67	87	60	91	68	91	103	73	93
69	54	82	71	60	88	82	82	41	68	53	78
96	97	81	86	69	52	77	66	100	119	84	102
46	54	77	129	87	106	84	96	81			

$N = 177$ Начало первого интервала: 25 Длина интервала: 13

Выборка $C25$

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
32	177	56	40	212	72	34	180	64	35	181	52
40	201	69	39	208	63	34	180	66	34	187	61
36	189	56	28	142	55	33	177	61	42	218	73
40	213	60	39	196	69	31	159	53	27	145	49
36	180	63	28	143	44	33	182	50	41	206	74
34	185	51	32	162	63	42	223	72	40	204	79
33	177	53	40	200	67	26	130	40	32	172	45
35	175	58	37	191	63	43	224	76	40	219	69
36	189	63	30	163	45	38	205	59	36	197	53
43	229	82	32	177	44	40	205	72	32	173	45
29	153	53	34	187	52	33	181	47	40	211	73
41	208	67	40	208	61	29	147	57	33	177	49
44	221	70	40	213	75	38	202	62	36	187	61
36	186	58	36	196	59	39	210	61	32	179	49
37	185	69	36	199	61						

$N = 58$

	X	Y	Z
Начало первого интервала	24	122	36
Длина интервала	4	17	8

Выборка *D*25

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6	*F*7
1	57	67	55	47	60	65	47
2	60	67	55	59	45	51	59
3	51	64	61	61	56	55	56
4	67	49	62	60	41	54	32

Выборка *E*25

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5
1	107	108	108	110	107
2	110	107	109	110	107
3	108	107	109	111	108
4		109		109	109
5				109	109
6					108
7					109

Вариант 26

Выборка *A*26

2	0	0	3	1	2	2	2	3	4	1	2	3	3	2	1	1	3	3	0
4	1	3	3	0	1	0	0	1	2	1	1	3	2	3	0	1	0	4	2
3	1	2	1	1	1	1	2	1	2	5	2	1	3	2	3	1	1	1	1
2	1	1	1	3	1	3	1	2	1	2	1	1	0	0	3	3	1	2	3

$N = 80$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*26

22	49	18	44	52	31	18	20	27	35	41	28	29	45	36
40	41	37	18	40	25	38	46	37	50	41	37	37	21	37
27	27	32	34	28	40	31	20	22	25	31	34	56	35	37
47	40	29	28	29	3	27	12	41	24	40	57	49	37	34
23	38	19	29	27	32	21	21	13	40	24	37	7	24	34
52	38	32	49	43	25	16	33	22	6	41	48	35	55	35
4	31	18	19	17	23	6	36	40	12	66	26	23	30	28
49	30	50	13	33	46	26	37	30	46	41	18	28	14	50
26	25	30	53	46	30	11	40	40	24	16	24	28	29	25
10	19	35	27	22	38	32	41	21	46	27	49	34	53	32
31	15	24	38	25	34	22	35	42	38	33				

$N = 161$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 7

Выборка *C*26

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
89	542	—13	89	544	—15	88	536	—8	90	546	—4
89	549	—13	91	564	—14	90	549	—13	92	568	—11
89	550	—18	88	535	—18	90	542	—4	90	555	—6
90	556	—12	90	559	—16	91	546	—5	90	544	—11
89	550	—20	91	564	—12	88	545	—1	86	519	—3
90	540	—18	90	555	—12	90	556	—7	90	550	—3
91	553	—17	88	545	—6	88	546	—19	89	550	—16
88	544	—2	89	535	—14	87	527	—1	89	537	—19
89	541	—14	89	543	—19	92	559	—7	88	528	—16
90	556	—19	90	554	—4	89	545	—20	90	553	—15
89	541	—10	89	548	—7	88	530	—5	90	551	—1
90	552	—4	91	553	—20	90	542	—2	90	553	—4
89	548	—15	89	536	—1	89	547	—11	88	535	—13
89	534	—13	90	553	—11						

$N = 54$

	X	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	85	515	—22
Длина интервала	2	9	4

Выборка $C26$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$
1	169	175	177	175	176
2	170	181	172	176	172
3	171	179	174	176	184
4	174	175	171	177	177
5	176	179	170	177	180
6	176	175	164	173	169
7	179	173	177	178	177

Выборка $E26$

$N0$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	$F6$
1	108	76	73	100	117	91
2	92	88	107	84	108	84
3	102	94	83	82	79	90
4	119	94	91	96	82	86
5	95	89	69	100	83	
6	114	73	86	92		
7	102	96	114	82		

Вариант 27

Выборка $A27$

1	0	1	3	1	1	4	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	0	1
1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	2	3	0	1
0	2	2	0	2	2	0	1	0	0	0	0	3	2	2	3	1	2	0	1
2	1	1	0	1	2	0	2	2	1	0	0	2	0	0	0	3	1	2	2
2	0	2	0	2	1	0	3	1	1	3									

$N = 91$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка 27

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
93	298	— 194	83	251	— 177	90	279	— 186	87	261	— 189
88	281	— 178	87	273	— 180	89	270	— 190	88	271	— 191
91	283	— 199	91	284	— 196	81	261	— 168	85	270	— 173
83	254	— 178	87	266	— 187	87	276	— 186	83	268	— 181
89	271	— 188	87	265	— 177	88	266	— 187	88	266	— 190
86	260	— 183	91	280	— 191	89	278	— 186	88	282	— 192
85	262	— 175	86	274	— 186	89	268	— 198	89	273	— 196
88	275	— 182	93	286	— 206	82	265	— 170	92	284	— 201
85	265	— 188	89	278	— 192	86	276	— 189	88	267	— 195
87	277	— 188	85	269	— 172	84	262	— 180	90	274	— 197
82	256	— 183	87	268	— 186	86	258	— 179	91	288	— 199
91	280	— 187	87	269	— 192	92	295	— 189	84	264	— 184
86	263	— 179	88	264	— 181	92	280	— 186	82	261	— 171
86	264	— 191	84	263	— 185	80	243	— 170	83	263	— 176
87	279	— 176									

$N = 57$	X	Y	Z
Начало первого интервала	79	238	— 209
Длина интервала	3	10	7

Выборка *D*27

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5
1	178	180	176	181	176
2	174	179	173	171	176
3	172	183	173	184	176
4	175	180	173	182	179

Выборка *E*27

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	82	79	124	131	151	99
2	166	117	106	154	109	101
3	132	107	112		128	108
4	153	128	119		130	124
5		97				107
6		67				
7		100				

Выборка *B*27

187	193	199	197	196	184	200	193	198	191	193	188
193	195	197	199	202	193	190	197	195	182	201	202
184	197	205	178	191	200	223	188	192	188	194	183
207	183	195	184	175	195	212	197	194	184	175	198
189	194	185	213	192	200	194	173	206	163	204	174
183	199	203	185	199	196	196	188	169	196	190	205
189	189	190	175	190	193	209	190	183	191	193	191
190	192	191	185	202	173	184	176	199	182	186	189
193	185	168	192	193	205	171	193	191	206	187	193
192	189	191	190	182	194	194	197	207	198	180	175
193	191	188	187	191	191	192	192	214	171	208	185
195	190	214	193	183	193	193	187	198	203	181	173
189	195	180	180	205	194	179	191	201	195	195	189
185	199	194	187	173	211	190	165	182	182	194	168
176	192										

$N = 170$ Начало первого интервала: 160 Длина интервала: 7

Вариант 28

Выборка *A*28

0	0	0	1	0	0	1	3	1	1	1	0	3	0	2	0	0	0	0	1
1	1	1	3	2	0	0	1	4	1	0	0	0	2	0	1	2	1	2	0
1	2	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	2	0	1	0	0	0	2
1	2	0	1	1	1	2	0	0	2	2	1	2	2	0	0	0	2	0	0
0	1	0	0																

$N = 84$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *C*28

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
39	242	—82	34	215	—71	27	165	—70	29	181	—73
36	235	—89	31	198	—70	31	196	—78	32	206	—72
35	228	—72	34	209	—72	28	183	—60	31	205	—80
20	136	—41	36	225	—82	30	196	—64	27	174	—63
31	204	—78	19	132	—40	38	229	—81	41	252	—93
41	249	—83	34	218	—74	34	205	—69	44	274	—97
24	160	—62	28	174	—76	35	221	—80	22	142	—45
22	140	—49	30	197	—74	22	143	—63	33	200	—79
38	229	—88	24	162	—49	38	242	—92	38	236	—81
35	213	—74	17	104	—41	28	181	—69	30	184	—68
26	172	—65	27	175	—65	30	199	—77	30	186	—66
34	207	—88	29	176	—61	36	225	—84	31	205	—81
16	98	—52	33	203	—67	32	201	—68	28	178	—72
35	225	—74	32	210	—78	26	159	—58	27	166	—57
22	141	—57	30	188	—79	26	163	—72			

$N = 59$	*X*	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	14	83	—102
Длина интервала	5	30	10

Выборка *B*28

—50	—39	—48	—56	—49	—44	—39	—42	—56	—46	—39	—50	—52	—48	—55
—46	—37	—51	—52	—45	—46	—51	—43	—49	—35	—57	—48	—42	—42	—54
—33	—44	—56	—44	—43	—41	—47	—42	—47	—59	—54	—53	—55	—34	—53
—50	—36	—53	—53	—55	—54	—39	—53	—42	—49	—45	—48	—50	—48	—56
—52	—46	—53	—56	—57	—42	—53	—50	—44	—46	—59	—62	—57	—36	—43
—46	—59	—52	—52	—64	—46	—46	—49	—53	—44	—49	—62	—50	—42	—53
—41	—44	—49	—52	—62	—44	—53	—44	—50	—47	—48	—51	—55	—64	—52
—48	—50	—53	—30	—41	—48	—55	—35	—66	—37	—58	—59	—42	—51	—54
—47	—52	—44	—61	—39	—54	—60	—58	—45	—54	—38	—50	—61	—46	—31
—40	—49	—52	—36	—52	—41	—54	—50	—59	—44	—40	—47	—61	—41	—53
—47	—44	—43	—51	—48	—48	—43	—39	—45	—54	—41	—55	—42	—37	—45
—59	—47	—43	—56	—48	—43	—66	—60	—51	—44	—48	—46	—43	—51	—43
—43	—50	—48	—56	—54	—56	—61	—60	—42	—34	—40	—46	—45	—59	—47
—61	—41	—54	—45	—48	—52	—55	—49	—51	—52	—49	—48	—47	—62	—43
—55	—53													

$N = 212$ Начало первого интервала: —68 Длина интервала: 4

Выборка *D*28

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4
1	161	147	143	160
2	167	154	151	153
3	153	169	150	165
4	155	144	156	157
5	176	155	171	156
6	174	170	159	163
7	174	166	149	153

Выборка *E*28

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	105	111	105	121	98	111
2	118	116	128	128	112	117
3		123	102	126	113	101
4			116			119
5			112			120
6			126			
7			130			

Вариант 29

Выборка *A*29

1	1	9	6	11	14	6	5	10	4	10	10	12	10	9
6	6	8	4	10	2	5	6	8	6	7	2	2	6	12
2	8	8	11	9	6	7	4	5	9	7	9	5	9	10
5	8	6	10	8	8	6	9	10	8	6	1	3	10	4
8	6	10	9	10	3	6	11							

$N = 68$ Начало первого интервала: 1 Длина интервала: 1

Выборка *D*29

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	50	77	67	64	80	67
2	84	60	72	62	62	67
3	71	58	75	66	73	73
4	74	60	73	71	82	48
5	74	72	75	61	77	53
6	54	81	66	67	70	58

Выборка *E*29

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5
1	88	82	91	107	99
2	104	114	69	94	109
3	89	90	104	97	112
4	92	104		102	88
5	94	103		98	98
6		98		100	
7		108			

Выборка *B*29

17	25	25	25	32	32	23	24	23	26	29	34	29	26	23
21	21	19	27	17	22	31	23	23	26	37	15	12	32	23
25	9	27	38	8	10	25	15	24	23	39	21	29	22	22
24	21	24	31	22	23	31	24	26	19	17	26	25	30	18
32	32	37	28	29	17	17	24	28	18	38	18	28	25	14
18	26	27	26	20	33	24	33	33	36	22	19	25	23	23
33	25	32	24	33	17	15	26	25	21	37	24	36	28	37
19	25	21	23	27	32	12	25	23	28	18	41	21	26	35
31	21	16	27	34	16	30	20	24	16	20	33	21	31	22
17	23	14	28	37	18	29	26	26	19	28	31	22	28	23
22	27	20	29	24	17	24	15	24	21	22	30	19	42	33
27	23	9	25	26	12	19	33	24	35	22	26			

$N = 177$ Начало первого интервала: 6 Длина интервала: 4

Выборка *C*29

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
16	96	—34	13	75	—14	12	66	—24	14	86	—26
16	86	—20	16	80	—36	15	84	—18	16	86	—28
16	96	—35	15	92	—22	14	71	—21	16	80	—33
18	68	—28	17	86	—29	16	86	—25	15	80	—23
16	92	—35	15	77	—31	14	85	—23	15	88	—17
10	54	—13	16	99	—22	13	78	—33	13	74	—20
16	81	—19	17	94	—34	13	75	—16	17	86	—26
15	89	—31	17	104	—32	17	97	—18	14	80	—21
14	78	—25	16	86	—29	12	67	—31	13	79	—26
13	71	—26	12	74	—15	15	83	—19	15	92	—26
12	77	—24	13	75	—17	13	74	—17	14	77	—16
13	79	—27	13	84	—33	15	93	—22	14	81	—24
15	81	—27	14	88	—22	19	109	—35	16	87	—31
14	81	—17	12	67	—30	17	99	—20	11	71	—24
13	66	—23	14	78	—27	15	76	—17	13	81	—18
14	85	—30	16	87	—19	15	77	—30	15	76	—19
17	92	—37	13	74	—27	14	70	—19	13	77	—27
13	68	—21	19	107	—27	16	92	—31	16	95	—17
18	104	—35	14	76	—34	15	79	—29	15	78	—21
15	83	—31	17	102	—18	17	101	—22	16	99	—26
13	81	—27	13	79	—28	15	93	—21	15	78	—35
17	102	—18	16	86	—36	13	74	—28	15	94	—31
15	92	—33	11	70	—20						

$N = 90$	*X*	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	9	49	—39
Длина интервала	2	10	5

Вариант 30

Выборка *A*30

4	6	0	2	1	3	3	1	2	5	3	1	2	2	4	4	4	3	2	5
2	5	1	2	3	0	3	0	5	1	2	1	3	0	4	0	2	2	1	0
5	1	4	2	4	2	1	3	1	0	6	1	2	1	4	2	2	0	2	4
2	2	1	2	2															

$N = 65$ Начало первого интервала: 0 Длина интервала: 1

Выборка *B*30

57	61	60	63	68	68	64	72	69	59	71	62	69	57	61
58	60	66	59	62	64	53	50	50	55	70	61	77	70	65
66	72	71	60	73	62	19	62	76	66	84	62	60	53	65
49	79	58	73	67	63	54	59	55	70	62	61	68	69	67
64	42	73	62	59	60	64	69	62	67	57	72	57	51	77
58	63	71	73	68	80	54	64	52	64	68	58	73	68	61
54	73	59	69	60	67	57	54	69	55	70	65	61	65	62
71	55	67	57	64	70	55	65	69	65	65	60	66	63	74
60	54	75	62	74	63	61	76	59	71	68	55	68	61	57
73	54	57	56	65	53	64	58	67	48	66	68	55	77	59
58	58	62	58	52	62	65	71	64	66	65	58	66	73	73
72	43	63	59	76	67	63	71	66	59	69	65	66	50	65
57														

$N = 181$ Начало первого интервала: 40 Длина интервала: 4

Выборка *C*30

X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
90	192	172	92	186	164	95	195	173	92	189	173
83	171	147	79	158	143	97	207	187	81	169	156
81	162	142	82	176	146	83	182	146	92	201	183
83	175	149	103	211	193	97	208	192	93	196	175
86	178	166	93	188	181	79	161	146	108	229	200
87	185	157	89	194	176	91	193	171	78	169	137
90	185	168	93	188	182	85	186	152	98	201	193
85	189	167	91	186	165	90	187	160	99	210	186
99	214	191	83	174	150	89	185	177	90	191	172
91	192	168	104	211	194	91	193	174	93	193	177
92	189	166	95	199	176	80	169	149	92	195	178
98	201	193	97	204	178	86	190	158	79	169	140
87	178	156	100	204	199	90	199	167	90	193	173
89	179	167	92	187	173	91	192	179	90	190	170
108	225	212	92	184	173	90	193	178	87	177	154
82	180	148	84	175	154	92	191	171	85	186	[illegible]
79	159	142	93	205	180	84	174	148	88	185	[illegible]
93	200	182	98	197	183	77	156	148	103	211	[illegible]
91	195	168	97	199	193	88	190	158	91	[illegible]	[illegible]
98	203	185	104	218	207	89	183	159	94	[illegible]	[illegible]
90	182	168	84	177	167						

$N = 82$	*X*	*Y*	*Z*
Начало первого интервала	73	150	131
Длина интервала	6	13	13

Выборка *D*30

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5	*F*6
1	89	71	74	73	70	60
2	43	67	48	73	74	69
3	54	61	60	62	110	79
4	79	77	44	60	74	90

Выборка *E*30

*N*0	*F*1	*F*2	*F*3	*F*4	*F*5
1	95	96	98	92	89
2	92	91	98	88	83
3		98	93	99	97
4		93	89	88	89
5		100	98	93	88
6		94	84	94	89
7		95			

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Распределение Пуассона

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066
1	0905	1638	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0019	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0002	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3679	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0153	0902	1680	1954	1766	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12			0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15					0002	0009	0035	0098	0194	0347
16						0003	0014	0045	0109	0217
17						0001	0006	0021	0058	0128
18							0002	0009	0029	0071
19							0001	0004	0014	0037
20								0002	0006	0019
21								0001	0003	0009
22									0001	0004
23										0002
24										0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Функция плотности вероятности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20327	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00015	00015	00014	00014
4,0	00013	00009	00006	00004	00002	00002	00001	00001	00000	00000

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Функция распределения нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84134	84375	84614	84850	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92786	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997
4,0	99997	99998	99999	99999	99999					

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

χ^2-распределение (распределение Пирсона)

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = \alpha$$

k \ α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00016	0,0063	0,393	0,0158	0,0642	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,112	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

t-распределение (распределение Стьюдента)

$$P(t > t_\alpha) = \alpha \text{ и } P(|t| > t_\alpha) = \alpha$$

	Односторонняя критическая область (α)							
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
	Двусторонняя критическая область (α)							
k	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,30	636,61
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,85	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	3,69	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,65	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,58	3,88
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,53	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,51	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,48	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,47	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08	3,45	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,44	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,42	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,41	3,67
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,04	3,40	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,31	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,23	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,85	3,16	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,09	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

F- распределение (Фишера)

$$P(F > f_\alpha) = \alpha, \ \alpha = 0{,}05$$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

$\alpha = 0{,}01$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,47	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	6,83
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,43	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,00	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,75	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,52	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,66	2,34	1,95	1,38
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,00

ОГЛАВЛЕНИЯ

Учебное издание

Колде Яан Каарелович

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Зав. редакцией *Е. С. Гридасова.* Научный редактор *Б. И. Селиванов.*
Редактор *Ж. И. Яковлева.* Младший редактор *Н. А. Власова.*
Художественный редактор *В. И. Пономаренко.*
Технический редактор *Г. А. Виноградова.* Корректор *Г. А. Чечетина*

ИБ № 9130

[illegible] ФМ—10. Сдано в набор 15.11.90. Подп. в печать 15.08.91. Формат [illegible] 90 1/16. [illegible] № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем [illegible] усл. печ. л. [illegible] кр.-отт. 9.65 уч.-изд. л. Тираж 40 000 экз. Зак. № 1352. Цена [illegible]

[illegible] «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная [illegible]

[illegible] ассоциация предприятий, объединений
[illegible] полиграфической промышленности «АСПОЛ».
[illegible] полиграфкомбинат, 150049, Ярославль, ул. Свер[illegible]

Колде Я. К.

К 60 Практикум по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для техникумов. — М.: Высш. шк., 1991. — 157 с.: ил.

ISBN 5-06-002069-X

Практикум предназначен для выполнения самостоятельных практических заданий по предмету «Математическая статистика». Он состоит из семи параграфов и приложений. В начале каждого параграфа дается теоретический материал и формулы для решения задач. Затем приведены 30 вариантов заданий по 10 задач в каждом и решения задач одного варианта. При решении задач предусматривается использование микрокалькуляторов и ЭВМ.

К $\frac{4306020500-394}{001(01)-91}$ 33—91

ББК 22.17
6 7.8