О.Є. Лугінін

ЕКОНОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
2-е видання, перероблене та доповнене

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ
«Центр учбової літератури»
2008

ББК 65.01я73
Л 83
УДК 330.43(075.8)

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 14/18.2-1402 від 01.10.2001 р.)

Рецензенти:

В.М. Данілін – доктор економічних наук, професор (Херсонський державний технічний університет);

О.О. Петрова – кандидат економічних наук, доцент (Херсонський державний технічний університет).

О.Є. Лугінін

Л 83 Економетрія. Навч. пос. 2-е видання, перероб. та доп. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 278 с.

ISBN 978-966-364-556-8

У посібнику розглянуті основні економіко-математичні методи та моделі (оптимізаційні, сітьові, балансові та суто економетричні), які використовуються при обгрунтувані рішень в різних напрямках ринкової економіки. Наведена велика кількість прикладів типових задач та багаточисельних вправ і запитань для самостійної роботи.

Матеріали з опису прикладних програм для персональних комп'ютерів засобами EXCEL, в підготовці яких приймала участь І.Г. Імшеницька, частково використовують дані к.ф.-м.н., доцента М.С. Львова, описані в навчальному посібнику [10]. Автори висловлюють їм щиру подяку.

Наведено алфавітно-предметний вказівник термінів і понять.

Посібник розрахований на студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Може бути використаний фахівцями в дослідженнях та прогнозуванні економічних процесів і явищ в ринкових умовах.

ББК 65.01я73

ISBN 978-966-364-556-8

ЗМІСТ

ВСТУП

Особливістю нинішнього етапу розвитку вітчизняної економіки в ринкових умовах є збільшення інтересу фахівців до наукового вирішення проблем з використанням економіко-математичних методів і побудованих на їх основі моделей. Проявляється це наперед за все в тому, що математичні методи і моделі в економіці вимагають ретельного враховування всіх можливих ситуацій, що робить управлінські рішення науково обґрунтованими, динамічними для забезпечення збалансованого та стійкового господарського механізму. Використання сучасних методів дослідження економічних процесів і явищ дозволяє повніше і глибше обґрунтовувати темпи і пропорції розвитку на макро- і мікрорівні, домагатися оптимальності серед альтернативних рішень. При цьому зростає роль *економетрії* як науки про виміри в економіці та управлінні з використанням сучасних економіко-математичних методів, моделей та засобів їх реалізації.

Економіка - це прикладна наука і її важлива практична задача полягає в розробці методів обґрунтування і вибору тих або інших рішень. У загальному випадку для наукового пізнання якогось процесу чи явища можна користуватися в якості інструментаріїв такими чотирма методами: теоретичним аналізом; спостереженням; науковим експериментом; моделюванням. Якщо перші три інструменти успішно використовуються, наприклад, у технічних науках, то на долю економіки припадає останнє (за винятком спостереження, використовуємим у статистиці). Пояснити це можна тим, що економічні процеси достатньо тривалі. Для збору необхідного для теоретичного аналізу статистичного матеріалу часто необхідні роки і десятиліття; із-за цього ускладнюється вияв діючих закономірностей та вплив багаточисельнних окремих факторів. Те ж має відношення і до наукового експерименту: щоб результати були достовірні і надійні, економічний експеримент повинний бути тривалим і багатомасштабним. Таким чином, у розпорядженні економістів залишається тільки одне - *моделювання* економічних процесів і явищ. Тут мається на увазі не масштабне фізичне моделювання, як у технічних науках (моделі судів, що випробуються в дослідницьких басейнах; моделі літаків, що продуваються в аеродинамічних трубах і т.ін.), що для економіки нереально, а математичне моделювання.

Під *економіко-математичною моделлю* розуміється опис досліджуємого економічного процесу або явища за допомогою абстрактних математичних співвідношень. Використання математичного моделювання в економіці та управлінні дозволяє поглибшити кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації, інтенсифікувати економічні розрахунки. Розробка економіко-математичних моделей є остаточною продукцією в економетрії.

При вивченні економетрії як навчальної дисципліни, на думку авторів посібника, не слід розглядати її як зорієнтовану на розгляд тільки математико-статистичних засобів. Більш доцільним буде *розширене тлумачення економетрії як науки та навчальної дисципліни, яка вивчає зв'язок між економічними показниками за допомогою широкого спектру економічних моделей, заснованих на комплексному розгляданні найбільш розповсюджених економіко-математичних методів (оптимізаційних, сітьових, балансових та суто економетричних).* Обгрунтовується це перш за все тим, що при підготовці майбутніх фахівців з економіки та менеджменту відсутні навчальні дисципліни, де комплексно розглядаються основні економіко-математичні методи та побудовані на їх основі моделі. Тому цьому призначенню повинна відповідати економетрія. Опанування методиками з побудови економічних моделей, уміння використовувати відповідний математичний аппарат у вирішенні економічних та управлінських задач допоможе економістам та менеджерам у застосуванні моделювання в подальше вивчаємих професійно-орієнтованих дисциплінах, курсовому та дипломному проектуванні. Використання персональних комп'юторів (ПК) у моделюванні економічних процесів і явищ сприятиме у розвитку творчих та аналітичних навичок студентів. Тому зміст даного посібника відповідає описаному методичному спрямуванню у вивченні економетрії.

Посібник складається з трьох розділів. Кожен з них насичений прикладами рішень типових задач і багаточисельними вправами та контрольними запитаннями, корисними у самостійній роботі студентів.

У **першому розділі** обгрунтовуються предмет, мета та задачі економетрії. Надаються загальні відомості з моделювання систем. Коротко викладається історія розвитку економіко-математичних методів та економетрії.

Наведена загальна інформація із спеціальних частин вищої математики, які використовуються в економетрії: лінійної алгебри, геометрії випуклих множин, методу найменших квадратів, теорії ймовірностей.

Другой розділ присвячений розгляду оптимізаційних, сітьових та балансових методів і моделей.

Докладно описується побудування *лінійних оптимізаційних моделей* на основі методів лінійного програмування, теорії ігор, методу найскорішого спуску. Показано, як побудова *нелінійних оптимизационных моделей* засновується на методах математичного програмування (випуклого, динамічного, стохастического).

Враховуючи значне розповсюдження *сітьового планування та управління (СПУ),* описано використання моделей СПУ. Розглядаються правила побудови сітьових графіків, розрахунки відповідних параметрів, їх аналіз і оптимізація.

Сучасний економічний механізм на макрорівні складається з багатьох взаємозв'язаних галузей. Кількісний зв'язок збалансованості виробництва та споживання продукції галузей відображаєтсья у розглянутих *методах міжгалузевого балансу*.

Основна частина посібника присвячена розгляду у **третьому розділі** сучасних суто *економетричних методів та моделей*. Обгрунтовуються умови застосування методу найменших квадратів у кореляційно-регресивному аналізі для рівнянь парної та множинної регресії. Описуються підходи визначення мультиколінеарності, гетероскедастичності, автокореляції та методи оцінки параметрів моделей з цими ознаками. Розглядаються моделі розподіленного лагу та моделі, які описуються системами одночасних рівнянь. За всіми описанними моделями будуються прогнозні характеристики. Розділ завершується розглядом економетричних моделей з якісними пояснювальними змінними та наведенням прикладів визнаних економетричних моделей на макро- і мікрорівні.

Реальні задачі побудови та практичного використання математичних моделей в економіці та управлінні із-за їх складністі можуть бути реалізовані за допомогою ПК. Тому у **главі 12** дається опис пакетів прикладних програм засобами EXCEL 7.0, які включають рішення задач з використанням лінійного програмування та кореляційно-регресивного аналізу.

2-е видання посібника перероблено з урахуванням досвіду викладання економетрії та доповнено основними поняттями з теорії ймовірностей і тестами з контролю самостійної роботи студентів за кредитно-модульною системою організації навчального процесу.

Враховуючи обмежений об’єм посібника, автори не мали можливості описати у всій повноті економіко-математичні методи та моделі, які використовуються в економетрії при плануванні та управлінні. Вибрані найбільш важливі з них, які складають основу економетрії та необхідні в підготовці фахівців з економіки та менеджменту.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ЕКОНОМЕТРІЇ

Глава 1. Елементи моделювання економічних систем

1.1. Предмет, мета та задачі економетрії

У сучасній літературі, наприклад [1, 3, 5, 25, 28], має місце ряд трактувань поняття *економетрії*, або *економетрики* (що одне і те ж), як наукової дисципліни: від надмірно розширеного з виміру всього, що є в економіці, до вузько орієнтованого з розгляду лише математико-статистичних способів. Широкий спектр економіко-математичних методів і моделей, корисний майбутнім фахівцям, не вивчається ні в одному з циклів фундаментальних та професійно-орієнтованих дисциплін підготовки економістів і менеджерів. Тому, з нашої точки зору, доцільно при вивченні економетрії перевагу віддати її скорегованому першому тлумаченню, наведеному вище.

В даному навчальному виданні **економетрія розглядається як наукова дисципліна, що вивчає комплекс економіко-математичних методів і побудованих на їх основі моделей для кількісного вимірювання взаємозв'язків між економічними показниками.** Це складає **предмет економетрії** з розгляду основних економіко-математичних методів і моделей: *оптимізаційних, сітьових, балансових і суто економетричних.*

Економіко-математична модель – це математичний опис економічного процесу чи явища з метою його дослідження та управління.

Оптимізаційна модель дозволяє з декількох альтернативних варіантів вибрати найкращий варіант за будь-якою ознакою.

Сітьова модель заснована на використанні сітьового графіку, який дозволяє планувати виконання трудомістких робіт з великим числом виконавців.

Балансова модель узгоджує потреби споживачів товарів і послуг з обмеженням умов та спроможностей їх виробництва та надання.

Економетрична модель призначена для аналізу і прогнозування розглядаємих економічних процесів і явищ в умовах невизначеності інформації за допомогою методів математичної статистики.

Метою економетрії є набуття майбутніми фахівцями знань з методик побудови економіко-математичних моделей на макро- і мікрорівні, уміння використовувати відповідний математичний апарат у вирішенні економічних і управлінських задач та розвиток творчих і аналітичних навичок у економістів і менеджерів з математичного моделювання при використанні сучасних ПК для проведення досліджень.

Задачами економетрії є оволодіння студентами необхідними знаннями і навичками з моделювання економічних процесів і явищ, проведення аналізу з використанням економіко-математичних моделей в нових умовах господарювання і переходу до ринкової економіки.

1.2. Термінологія, яка використовується в економіко-математичному моделюванні

Кожна наукова дисципліна використовує свою систему понять і категорій. В основі понятійного апарату економетрії лежить термінологія такого наукового напрямку, як економіко-математичні методи з побудовою та реалізацією на їх основі математичних моделей. Такий науковий напрямок, за характерним виразом акад. Л.І. Лопатнікова, являє собою єднання економіки, математики і кібернетики. А тому як економічні методи та моделі є різновидом економіко-математичного моделювання, приведемо його основну термінологію, з якою будемо мати справу в подальшому викладанні.

Ціль - це фундаментальне поняття, тому що економічна діяльність завжди цілеспрямована. Під ціллю розуміють бажаний результат, що повинний бути досягнутий.

Захід - сукупність дій, об'єднаних загальною ціллю. В дослідженні операцій (відгалудженні кібернетики) замість терміну «захід» використовується поняття «операція».

Альтернативи - можливі варіанти заходів, на підставі яких приймається рішення. Таких варіантів може бути декілька. Альтернативи можуть бути дискретними або безперервними. Кількість дискретних альтернатив скінчена: наприклад, замінити певний вид устаткування або ні (у даному разі альтернативи дві). Альтернативи можуть вибиратися на безперервній множині: наприклад, коли замінити устаткування даного виду (через день, два, тиждень, місяць, рік і т.д.); тоді кількість альтернатив нескінченне і під рішенням розуміють вибір однієї альтернативи з безліч можливих.

Система (у перекладі з грецької - ціле, зіставлене з частин) – це множина взаємозв'язаних елементів, які складають певну єдність.

Елемент системи – частина системи, яка виходячи з цілі та функцій даної системи, є неділимою.

Складна система – це безліч різних структур і елементів цих структур.

Підсистема – частина системи, яка виділена з певною ціллю; може розглядатися як самостійна система.

Системний підхід – головний науковий принцип дослідження систем, згідно з яким необхідно враховувати взаємозв'язки між елементами системи, між системою та зовнішнім середовищем, між станом системи у даний час і майбутньому. Основне поняття в кібернетиці.

Модель – система, здатна замінити оригінал (тобто реальну систему) так, що її вивчення дає інформацію про оригінал. Модель може повністю або частково відтворювати структуру моделюємої системи та її функції.

Моделювання – процес побудови, реалізації та дослідження моделі, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї.

Математична модель – система математичних і логічних співвідношень, які описують структуру та функції реальної системи. Математична модель відрізняється за своєю природою від оригінала. Дослідження властивостей оригінала за допомогою математичної моделі зручніше, дешевше, займає менш часу порівняно з фізичним моделюванням, яке використовується в техніці (тобто має ту ж природу, що і оригінал). Більш того, цілий ряд економічних систем неможливо зобразити за допомогою фізичних моделей.

Економіко-математична модель, визначення якої надано в п. 1.1, включає в себе систему рівнянь та нерівностей математичного опису економічних процесів і явищ, які складаються з набору змінних і параметрів. *Змінні величини* характеризують, наприклад, обсяг виробленної продукції, капітальних вкладень, перевезень тощо. Змінні розділяються на дві групи: *пояснювальні* (залежні), які є наперед заданими та незалежними; *пояснювані* (незалежні), які є результативними показниками. Змінні величини можуть бути двох груп: *зовнішні змінні (екзогенні)*, коли вони визначаються поза даною моделлю та вважаються для моделі заданими; *внутрішні змінні (ендогенні)*, які визначаються в результаті дослідження даної моделі. *Параметри* – це чисельні ознаки показників, такі як норми витрат сировини, матеріалів, часу на виробництво тощо. В усіх випадках необхідно, щоб модель мала достатньо детальний опис об'єкту, який дозволяв би здійснювати вимір економічних величин та їх взаємозв'язок, щоб були виділені фактори, які впливають на досліджувані показники.

Економетрична модель – різновид економіко-математичної моделі, параметри якої оцінюються за допомогою методів математичної статистики. Одним з основних підходів у вимірі зв’язку між досліджувальними показниками в економетричній моделі є *кореляційно-регресійний аналіз*. Він являє собою комплекс методів, за допомогою яких визначається вид рівняння для досліджувальних показників та розрахунок їх параметрів (*регресивний аналіз*), а також встановлення тісноти та значимості зв’язку між змінними у рівнянні або рівняннях (*кореляційний аналіз*).

Економіко-математичні методи – узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

Процес моделювання поки що не алгоритмізований з причин величезної складності логічної побудови і математичного опису цієї роботи. Однак у практиці моделювання вироблені певні принципи, якими необхідно користуватися і які будуть розглянуті нижче.

1.3. Історія розвитку економіко-математичних методів і економетрії

XVIII ст. – початок використання математичних методів у економіці з опублікування роботи *“Економічні таблиці”* французьким економістом *Ф.Кене*, який вперше зробив спробу формалізації процесу суспільного відтворення. В подальшому наукове обгрунтування суспільного відтворення було здійснено *К. Марксом*.

XIX ст. – *формується економетрія* як наука з початку розробки *статистичних методів* у вигляді парної та множинної регресії, теорії кореляції, теорії помилок, вибіркових методів *(Р.Гамільтон, К.Пірсон, Р.Фішер та ін.)*.

У **1910** р. львівськими вченим П.Чомпою, а пізніше незалежно від нього норвезьким вченим Р.Фрішем (**1926** р.) запропоновано термін «економетрія» як науки про виміри в економіці.

У середині 30-40-х років ХХ ст. виникають лінійні методи оптимізації: *лінійне програмування*, скорочено ЛП (*Л.В.Канторович, Дж. Данціг*) та *теорія ігор* (*Дж. фон Нейман*).

У 30-і роки Я. Танбергом, Л. Кляйном, Р. Стоуном розроблені моделі економіки, які складаються з багатьох рівнянь, так званої *системи одночасних рівнянь* в економетрії. Дж. фон Непманом була конструйована одна з перших макроекономічних моделей у економетрії, яка увійшла в літературу під назвою *модель Неймана розширеної економіки*.

Досвід використання лінійних моделей показав, що вони далеко не завжди можуть бути використані для опису економічних процесів і явищ. Тому почитають розвиватися дослідження в інших напрямках *нелінійного програмування*: випуклого, геометричного, динамічного та ін.

У 1948 р. виникає нова наука – *кібернетика* (у перекладі з грецької – мистецтво управління), засновником якої став американський математик *Норберт Вінер*. *Кібернетика* – це наука про загальні закономірності процесів управління в різних системах: біологічних, економічних, технічних та ін. Одним з напрямків кібернетики, об’єктом якого виступають економічні системи, є *економічна кібернетика*. Вона лежить в основі побудови ряду оптимізаційних моделей. Пізніше розвиваються такі прикладні напрямки економічної кібернетики як *дослідження операцій* (пошук шляхів раціонального використання ресурсів для реалізації поставлених цілей), *теорія масового обслуговування* (яка розглядає різні явища в економіці як процеси обслуговування, тобто задовільнення будь-яких вимог, замовлень тощо).

У 50-60-х роках *макроекономічні дослідження у економетрії* проводять *Я.Тінберген, Р.Фріш*. Центром розвитку економетрії стала Комісія Коулса (США). Новий інструментарій економетрія получила в результаті подальшої розробки моделей *одночасних рівнянь* (*Т.Хаавельмо, Т.Купманс, Г.Гейл* та ін.). Серед нових економетричних систем, за якими розрахунки починають вестись з використанням ЕОМ, виникають такі макроекономічні моделі: *Брукінгська модель (США), Голандська модель, Уортонська модель (США)*, які використовуються для прогнозування та розробки економічної політики, для аналізу попиту та споживання.

У 60-х роках починається впровадження в практику планування СРСР нових методів, які получили назву “*Сітьові методи планування та управління*” (СПУ). Вони лежать в основі сітьових моделей.

Получають розвиток деякі розділи прикладної математики, які зв’язані з вирішенням оптимізаційних задач: *нелінійне математичне програмування; математична теорія оптимізаційних процесів.*

Відповідний внесок у розвиток економетрії вносять *вітчизняні вчені-економісти (Є.Є.Слуцький, Л.В.Канторович, В.С.Немчинов та ін.).* Так , акад. В.С.Немчинову належить значна роль у реабілітації в СРСР існуючого погляду на економетрію як “буржуазну”, “антимарксистську” та “шкідливу лженауку” (1965 р.).

У 70-90-х роках економіко-математичне моделювання стало визнаним засобом аналізу економічних проблем. У вітчизняній практиці у 70-х роках з’являються *автоматизовані* *системи управління* (*АСУ*), призначені для оптимізації управління складними виробничими процесами та економічними системами.

У наш час набувають впровадження у вітчизняну практику *економетричні підходи з використанням програмних комплексів ПК*. В України зростає роль використання економіко-математичних методів як одного із засобів розвитку динамічно розвинутої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку та прогнозами на майбутнє в ринкових умовах.

1.4. Сучасний стан економіко-математичного моделювання

У теперішній час сфера можливого використання економіко-математичних методів і моделей у плануванні та управлінні значна і з кожним роком вона розширюється, але область фактичного їх використання на практиці пов'язана з *труднощами*:

- *складність моделювання* економічних процесів і явищ з урахуванням виробничих відносин (поведінка людей, їх інтереси, індивідуально прийняті рішення);
- *необхідність "встроювання"* математичних моделей в існуючу систему планування та управління;
- *труднощі перевірки* у вирішенні нових соціально-економічних задач тощо.

До ефективних *засобів подолання цих труднощів* можна віднести такі:

- *імітаційне моделювання*, що дає змогу керівнику, який приймає рішення, за допомогою ПК включитися у процес побудови економіко-математичної моделі з прийняттям оптимального рішення на її основі (головний принцип імітаційного моделювання: "Що буде, коли...);
- *системний аналіз,* який припускає комплексне проведення дослідження економічних процесів з урахуванням усіх існуючих елементів та взаємозв'язків, вивчення окремих господарських об'єктів як структурних частин більш загальних систем, виявлення

ролі кожного з них у функціонуванні економічного процесу в цілому;

- *програмно-цільовий метод* планування, заснований на формуванні цілей та підцілей економічного розвитку, на які треба направити найбільші сили і засоби, та розробці програм їх досягнення.

1.5. Класифікація економіко-математичних моделей

Економіко-математичні моделі можна класифікувати за такими **ознаками**:

1) призначенням;
2) ступеню ймовірності;
3) способу опису;
4) способу обліку змінювання процесу за часом;
5) точності математичного відображення розглядаємих явищ.

За **призначенням** моделі доцільно розбити на чотири класи: *імітаційні; балансові; сітьові; оптимізаційні*.

За ступенем ймовірності моделі розділяються на два типи: *ймовірні (стохастичні),* параметри яких та зовнішні зміни носять випадковий характер; *детерміновані*, в яких ігнорується випадковий характер зміни параметрів.

За способом опису моделі діляться на три класи: *аналітичні*, в яких показники описуються математичними формулами або системою формул; *економетричні (статистичні),* які призначенні для аналізу і прогнозування розглядаємих економічних явищ в умовах невизначеності вхідних даних і реалізуються методами математичної статистики; *змішані*, в яких найбільш прості блоки описуються аналітичними залежностями, а в інших блоках, де опис аналітичними формулами може привести до значних викривлень, використовується економетричне моделювання.

За способом обліку *змінювання процесу за часом* моделі розділяються на три класи: *статичні*, у яких передбачається, що вхідні параметри не змінюються за часом; *багатокрокові*, у яких час протікання процесу ділиться на “кроки” (інтервали) і в рамках одного кроку процес розглядається статичним; *динамічні*, де враховується безперервна зміна часу.

За точністю *математичного відображення розглядаємих явищ* моделі діляться на дві групи: *лінійні*, залежності у яких мають змінні у першої степені, та не включають їх обернених величин та добуток змінних; *нелінійні*.

1.6. Етапи економіко-математичного моделювання

Процес побудови економіко-математичних моделей загального типу складається з таких взаємозв'язаних етапів:

Перший етап – постановка задачі, де формується ціль запланованого заходу, ставляться задачі дослідження, проводиться якісний опис об'єкту.

Другий етап – розробка описувальної моделі, де формулюються та обгрунтовуються показники та система основних припущень.

Третій етап – розробка математичної моделі вивчаємого об'єкту з вибором методів дослідження, програмного забезпечення ПК або складання алгоритму та програми для ПК за новими задачами.

Четвертий етап – рішення задачі на базі розробленої моделі, яке складається з реалізації пакету прикладних або розроблених програм для ПК.

П'ятий етап – перевірка та підстройка моделі, тобто встановлення відповідності моделі описаному економічному процесу.

Шостий етап – представлення результатів рішення у формі, зручної для вивчення, аналіз матеріалів моделі на основі обробки результатів.

Глава 2. Допоміжний математичний матеріал

2.1. Елементи лінійної алгебри

2.1.1. Матриці, визначники та дії з ними

Різні економічні дані часто надаються у вигляді таблиць. Математична обробка їх значно спрощується, якщо абстрагуватися від їх економічного змісту, тобто розглядати їх як математичний об’єкт – матрицю.

Матрицею називається таблиця чисел, яка складається з *m рядів* і *n стовпців* та записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), \tag{2.1}$$

де a_{ij} – числа, які називаються елементами матриці; i – номер рядка $(i=1 \dots m)$; j – номер стовпця $(j=1 \dots n)$.

Кількість рядків і стовпців матриці визначає її *розмір* $m*n$.

Якщо $m=n$, то матриця *квадратна* порядку n (або m); якщо $m \neq n$, то матриця – *прямокутна*.

Матриця може складатися з одного стовпця або рядка, тоді її називають *вектором* або відповідно *матрицею-стовпцем і матрицею-рядком:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \ A = \left(a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}\right). \tag{2.2}$$

Квадратна матриця, усі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною.* Якщо в діагональній матриці елементами головної діагоналі є одиниці, то матриця називається *одиничною* n-го порядку:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.)$$

Якщо у заданій матриці А поміняти місцями елементи рядків на відповідні елементи стовпців (або навпаки), то дістанемо *транспоновану* матрицю:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{1n}\ a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Додавання і віднімання виконуються тільки для матриць одного й того самого порядку. Якщо матриці $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ мають однаковий порядок, то матриця суми або різниці дорівнює відповідно $C=(a_{ij} \pm b_{ij})$.

Помножити матрицю А на скаляр $\boldsymbol{\lambda}$ (скаляр - дійсне число зі своїм знаком) означає, що у нової матриці $D=\lambda * A$ її елементи d_{ij} дорівнюють результатам помноження скляра на елементи матриці $A : d_{ij}=\lambda * a_{ij}$.

Дві матриці А і В можна помножити одна на одну, якщо кількість стовпців r першої матриці дорівнює кількості рядків r другої матриці. Тоді кожний елемент матриці добутку $C=A*B$ є сумою добутків відповідних елементів a_{ij} i-го рядка на відповідні елементи b_{ij} j-го стовпця: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$.

Наприклад, для матриць А та В

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

їх добуток $C=A*B$ дорівнює:

$$\begin{pmatrix} a_{11}*b_{11}+a_{12}*b_{21} & a_{11}*b_{12}+a_{12}*b_{22} & a_{11}*b_{13}+a_{12}*b_{23} \\ a_{21}*b_{11}+a_{22}*b_{21} & a_{21}*b_{12}+a_{22}*b_{22} & a_{21}*b_{13}+a_{22}*b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}.$$

Кожна матриця має скалярну характеристику – **ранг матриці** ***rgA*****,** яким називається максимальна кількість лінійно незалежних векторів-стовпців (рядків) матриці A.

Для квадратної матриці розмірності $n*n$ існують також скалярні характеристики: слід матриці та її визначник (детермінант).

Слідом квадратної матриці А є сума елементів на її головній діагоналі:

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,. \qquad (2.5)$$

Визначником (детермінантом) квадратної матриці A, що позначається

$$|A| = det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \;\; \dots \;\; \dots \;\; \dots \\ a_{n1} \; a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (2.6)$$

називається число, яке може бути отримане як алгебраїчна сума попарних додатків елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}; \end{aligned} \qquad (2.7)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}\,, \qquad (2.8)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента матриці a_{ij}, яке визначається розкриттям визначника $|A|$ викресленням i-го рядка та j-го стовпця.

Знак алгебраїчного доповнення “+” або “-“ залежить від того, парна або непарна сума номерів рядка та стовпця, на перехрещенні яких є даний елемент a_{ij}.

Мінором M_{ij} матриці A називається визначник, який одержується з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Мінор відрізняється від алгебраїчного доповнення тим, що він завжди додатний.

Квадратна матриця, для якої $|A|\neq 0$, називається *невиродженою*. Кожна невироджена матриця має єдину обернену матрицю A^{-1}, для якої виконується умова

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \qquad (2.9)$$

Обернена матриця знаходиться за умовами: переконуються у невиродженості матриці A (тобто $|A|\neq 0$); розраховуються алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів визначника матриці А; складається матриця В, елементами якої є алгебраїчні доповнення A_{ij}; складається нова матриця В', яка є транспонованою до матриці В; розраховуються елементи оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}B'. \qquad (2.10)$$

Приклад 2.1. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Розраховується визначник цієї матриці:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

де $a_{11}=2;\ a_{12}=1;\ a_{13}=-1$;

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6+2) = -8;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5; \; |A| = 2*2 - 1*8 + 1*5 = 1 \neq 0.$$

Так як $|A| \neq 0$, то матриця А – невироджена.

Знаходяться алгебраїчні доповнення елементів визначника:

$A_{11}=2;\ A_{12}=-8;\ A_{13}=-5$ (див. п. 1);

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(2-1)=-1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4+1=5;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-2-1)=3;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2+2=0;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-4+3)=1;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1.$$

2. Складається матриця B із алгебраїчних доповнень A_{ij}.

$$B=\begin{pmatrix}2 & -8 & -5\\ -1 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Формується транспонована матриця B', якщо поміняти місцями рядки та стовпці:

$$B'=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -8 & 5 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Розраховується елементи оберненої матриці A':

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}*B'=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -8 & 5 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

2.1.2. Системи лінійних рівнянь та методи їх вирішення

Рівняння є **лінійним**, якщо воно містить у собі змінні тільки у першій ступіні, відсутні їх обернені величини та добуток змінних.

Наприклад, рівняння виду $2x_1+5x_2+x_3=8$ є лінійним, а рівняння $3x_1x_2+4x_3-x_4=2$ та $x_1-4x^2{}_2+3x_3=6$ – нелінійні.

У загальному випадку система *m* лінійних рівнянь з *n* змінними записується у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.11)$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних (невідомих) x_j ($i=1,2,...,m;$ $j=1,2,...,n$); b_i – праві частини.

Система лінійних рівнянь у матричному вигляді при $m=n$ записується у вигляді:

$$A*X=B, \qquad (2.12)$$

де $$A = \begin{pmatrix} a_{11}\; a_{12} \;...a_{n1} \\ a_{21}\; a_{22} \;...a_{n2} \\ ...\;\; ...\;\; ...\;\; ... \\ a_{n1}\; a_{n2} \;...a_{nn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2.13)$$

Сукупність чисел ($k_1, \; k_2, ...k_n$) називається *рішенням системи* (2.11) або (2.12), якщо при підстановці їх замість змінних усі рівняння обертаються в тотожність (тобто ліві частини рівнянь відповідають правим). Коли праві частини b_i системи рівнянь дорівнює нулю, то система називається *однорідною*, у протилежному випадку – *неоднорідною*. Безліч тривіальних розв’язків $x_j=0$ система (2.12) має тоді, коли $|A| = 0$.

Система (2.11) називається *сумісною*, коли вона має хоча б одне рішення, та *несумісною*, якщо у неї відсутні рішення. Сумісна система рівнянь, яка має тільки одне рішення, називається *визначеною*, а більш одного – *невизначеною*.

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$$

- несумісна, так як ні одне рішення першого рівняння не є рішенням другого, і навпаки. Система ж рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - \ \ x_3 = 2; \\ \ x_1 - x_2 + \ \ x_3 = 6; \end{cases}$$

- сумісна, так як має рішення (2; 1; 5), і невизначена, тому що, крім вказаного, вона має ще інші рішення, наприклад, (2; -4; 0).

Рішення системи (2.11) називаються *незалежними*, якщо ні одне з них не є наслідком інших. У протилежному випадку рівняння (2.11) є *залежним* та “*зайві*” рівняння повинні бути виключені із залежної системи.

Дві системи рівнянь типу (2.11) називаються *еквівалентними*, якщо всі рішення однієї системи є рішеннями іншої, і навпаки. Якщо скінчене число разів із рівнянь системи (2.11) віднімати або прибавляти будь-які інші рівняння, помножені на постійні величини, то одержується система, еквівалентна первинної. Якщо при цьому виявляється, що в будь-якому рівнянні коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, то можливі два випадки: в першому випадку права частина дорівнює нулю, що означає залежність даного рівняння від інших і таке рівняння із системи необхідного виключати; у другому випадку права частина не дорівнює нулю, тоді система несумісна (не має рішень).

У вирішенні системи (2.11) m рівнянь з n невідомими можуть бути три випадки:

а) число рівнянь перевищує число невідомих $m>n$;

б) число рівнянь дорівнює числу невідомих $m=n$;

в) число рівнянь менше числа невідомих $m<n$.

Випадок $m>n$ не має самостійного значення для сумісної системи, так як послідовним виключенням змінних з рівнянь можна получити нову систему з числом рівнянь $p<n$, еквівалентну первинної системі. У випадку, коли система несумісна, вона не має рішень.

При $m=n$ неоднорідна система (2.12) сумісна і має ненульове рішення, коли її визначник відрізняється від нуля $|A| \neq 0$.

В економічній практиці розповсюджені такі три основні методи вирішення системи рівнянь (2.12): *метод Гауса*; *правило Крамера*; *метод оберненої матриці (або матричний метод)*.

Метод Гауса. Система n лінійних рівнянь з n змінними, матрична форма якої відповідає формулам (2.12) та (2.13), на основі (2.11) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Метод Гауса є одним з найбільш зручних способів рішення систем лінійних рівнянь і полягає в послідовному виключені змінних. На першому кроці за допомогою першого рівняння виключається змінна x_1 із інших рівнянь; на другому кроці за допомогою нового другого рівняння виключається змінна x_2 із усіх послідуючих рівнянь і т.д. Якщо при цьому не з'явиться ні одне рівняння с нульовими коефіцієнтами при змінних, то система рівнянь зводиться до трикутної форми і останнє рівняння буде мати тільки одну змінну:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2j}x_j + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{ij}x_j + \ldots + a'_{in}x_n = b'_i; \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n, \end{cases} \qquad (2.15)$$

де a'_{ij} - нові коефіцієнти при змінних ($i=2\ldots n;\ j=2\ldots n$); b'_i - нові праві частини рівнянь ($i=2\ldots n$).

Така система рівнянь має тільки одне рішення x_j ($j=1\ldots n$) і легко вирішується з кінця. Якщо при послідовному виключені змінних зустрінеться хоча б одне рівняння з нульовими коефіцієнтами при невідомих і нульовою правою частиною, то получимо систему рівнянь, яка еквівалентна системі (2.15). В отриманій системі число рівнянь m менше числа змінних n і така система буде невизначеною.

Приклад 2.2. Вирішити систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22; \\ \qquad x_2 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 = 11; \\ x_1 - 6x_2 \qquad - x_4 = 0. \end{cases}$$

1-й крок. Перше рівняння залишаємо без зміни. Для виключення x_1 із послідуючих за першим рівнянь від третього рівняння віднімемо учетверенне перше, а від четвертого – перше. Друге рівняння залишається без зміни, так як у ньому відсутня змінна x_1, яка виключається з третього та четвертого рівняння. Тоді получимо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \ \ 8x_3 - x_4 = 22; \\ \qquad x_2 + \ \ 3x_3 - x_4 = 10; \\ -10x_2 - 32x_3 + x_4 = -77; \\ -9x_2 - \ \ 8x_3 - x_4 = -22. \end{cases}$$

2-й крок. Перші два рівняння нової системи запишемо без зміни. За допомогою другого рівняння виключаємо змінну x_2 із послідуючих рівнянь. Для цього до третього рівняння додамо друге, помножене на 9:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \ \ 8x_3 \quad - x_4 = 22; \\ \qquad x_2 + \ \ 3x_3 \quad - x_4 = 10; \\ -2x_2 \qquad\qquad - x_4 = 23; \\ \qquad\qquad 10x_3 - 10x_4 = 68. \end{cases}$$

3-й крок. Зберігаючи без зміни перші три рівняння нової системи, за допомогою третього рівняння виключимо змінну x_3 із останнього. Для цього додамо до нього третє, помножене на 9,5. В результаті приходимо до системи рівнянь трикутної форми:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \;\; 8x_3 \quad - x_4 = 22; \\ \qquad x_2 + \;\; 3x_3 \quad - x_4 = 10; \\ \qquad\quad - 2x_3 \;\; - 3x_4 = 11; \\ \qquad\qquad\quad - 95{,}5x_4 = 286{,}5. \end{cases}$$

Рішення для останньої змінної одержимо з четвертого рівняння: $x_4=-3$. Знайдене значення x_4 підставимо у друге рівняння системи, получаємо $x_3=2$. В результаті підставлення x_3 та x_4 у друге рівняння системи получаємо $x_2=1$. На підставі отриманих значень $x_2,\ x_3,\ x_4$ із першого рівняння системи знаходимо $x_1=0$. Остаточно получаємо єдине рішення системи рівнянь (0; 1; 2; -3). Перевіркою можна переконатися, що отримані значення змінних задовольняють даній системі.

Метод Крамера. При наявності системи (2.14), яка складається з n рівнянь при n змінних, вона має єдине рішення, якщо визначник цієї системи відрізняється від нуля: $|A| \neq 0$. Введемо позначення: $|A_j|$ - визначник, отриманий з $|A|$ заміною стовпця, зіставленого з коефіцієнтів a_{ij} при змінній x_j, стовпцем, зіставленим із правих частин b_i ($i=1...n,\ j=1...n$). Наприклад,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тоді рішення лінійної системи рівнянь (2.14) описуються *формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|};\;\; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|};\; ...;\;\; x_n = \frac{|A_n|}{|A|}. \qquad (2.16)$$

Якщо $|A| = 0$ і не всі $|A_j| = 0$, то система (2.14) несумісна, тобто не має ні одного рішення.

У разі однорідної системи рівнянь ($b_i=0,\ i=1...n$), вона завжди має нульові рішення. Якщо система має ненульове рішення ($a_1, a_2, ..., a_n$), то вона має і безліч рішень виду ($ka_1, ka_2, ..., ka_n$), де k – любе число.

Приклад 2.3. Вирішити методом Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Знайдемо значення визначника системи через алгебраїчні доповнення (див. приклад 2.1):

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 * (-6) - 1 * (-1) + 3 * 8 = 13.$$

Так як $|A| \neq 0$, то система рівнянь має єдине рішення, яке знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}; \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

де $|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \; |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}; \; |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$

Розкриємо визначники $|A_j|$ ($j=1,2,3$):

$$|A_1| = 9\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 9 * (-6) - 1 * (-11) + 3 * 10 = 13;$$

$$|A_2| = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 * (-11) - 9 * (-1) + 3 * 13 = 26;$$

$$|A_3| = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 * (-10) - 1 * 13 + 9 * 8 = 39.$$

Тоді за формулами Крамера розраховуємо результати:

$$x_1 = \frac{13}{13} = 1; \quad x_2 = \frac{26}{13} = 2; \quad x_3 = \frac{39}{13} = 3.$$

Таким чином, система рівнянь має єдине рішення (1; 2; 3). Перевіркою можна переконатися, що знайдені значення змінних задовольняють розглядаємій системі.

Метод оберненої матриці (матричний спосіб). Система n лінійних рівнянь з n змінними, яка записана у матричному вигляді за формулами (2.12) та (2.13), має рішення:

$$X = A^{-1} * B, \qquad (2.17)$$

де A^{-1} – матриця, обернена до матриці A.

Приклад 2.4. Вирішити матричним способом систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1; \\ \ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Запишемо систему у матричній формі: $A*X=B$,

де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Визначник матриці A розрахований у прикладі 2.1: $|A| = 1 \neq 0$; отже система має єдине рішення. Обернена матриця також знайдена у прикладі 2.1:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рішення системи записується у вигляді (2.17):

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1 - 1*1 + 0*5 \\ -8*1 + 5*1 + 1*5 \\ -5*1 + 3*1 + 1*5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, єдине рішення системи рівнянь (1; 2; 3). Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що знайдені значення змінних задовольняють заданій системі.

Ми розглянули рішення систем лінійних рівнянь, у яких кількість рівнянь співпадає з числом змінних. Розглянемо тепер випадок, коли система загального виду (2.14) містить m рівнянь з n змінними та $m<n$.

За допомогою методу Гауса при послідовному виключені змінних можна встановити, чи є система сумісною, а коли вона сумісна, залежні її рівняння чи ні. Рівняння, які є слідством інших, повинні бути виключені. Будемо вважати, що така перевірка вже виконана, залежні рівняння з системи виключені та рівняння системи незалежні.

Будь-які m змінних систем лінійних рівнянь з n змінними ($m<n$) називають *основними*, якщо визначник матриці коефіцієнтів при них відрізняється від нуля. Тоді інші (m-n) змінних називають *неосновними (вільними)*.

Основними можуть бути різні групи з m змінних. Проте кількість способів вибору m змінних іх загальної кількості n скінчене. Воно дорівнює кількості сполучень із n елементів з m у кожному з них, тобто $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Якщо для системи m лінійних рівнянь з n змінними ($m<n$) існує хоча б один спосіб розподілу змінних на основні та неосновні, то система є сумісною, невизначеною та має безліч рішень. Із цих рішень при $m<n$ виділяються *базисні рішення,* в яких неосновні змінні мають нульові значення. Кожному розподілу змінних системи (2.14) на основні та неосновні відповідає одне базисне рішення.

Може статися, що в базисному рішенні деякі основні змінні теж дорівнюють нулю. Тоді базисне рішення називають *виродженим*.

Рішення системи m лінійних рівнянь з n змінними (у тому числі і базисні) називаються *допустимими*, якщо всі компоненти їх невід'ємні та *недопустимими*, якщо хоча б одна компонента невід'ємна.

Запитання дня самоконтролю

2.1.1. Що називають матрицею?
2.1.2. Як визначають розмір матриці?
2.1.3. Яка матриця називається квадратною? прямокутною?
2.1.4. Яку матрицю називають матрицею-стовпцем? матрицею-рядком?
2.1.5. Яка матриця називається діагональною? одиничною?
2.1.6. Як получити транспоновану матрицю?
2.1.7. Який порядок додавання та віднімання матриць одного порядку?
2.1.8. Коли можна помножити одну матрицю на іншу? Який порядок помноження матриць?
2.1.9. Яка характеристика матриці називаєтеся рангом? слідом?
2.1.10. Що називається визначником квадратної матриці?
2.1.11. Як визначаються алгебраїчні доповнення елемента матриці та як вони розкриваються?
2.1.12. Правило знаків для алгебраїчного доповнення.
2.1.13. Що називають мінором матриці і чим він відрізняється від алгебраїчного доповнення?
2.1.14. Яка матриця називається невиродженою?
2.1.15. Який порядок складання оберненої матриці?
2.1.16. Яка система рівнянь називається лінійною? нелінійною? однорідною?
2.1.17. Яка система рівнянь є сумісною? несумісною? визначеною? невизначеною?
2.1.18. Які рівняння системи називаються залежними? незалежними?
2.1.19. Які дві системи рівнянь є еквівалентними?
2.1.20. Які випадки у вирішенні систем лінійних рівнянь можуть мати місце за кількістю рівнянь та змінних?
2.1.21. Який порядок вирішення системи, коли кількість рівнянь перевищує число змінних?
2.1.22. У якому випадку квадратна система рівнянь має ненульові рішення?
2.1.23. Які існують методи вирішення квадратних систем рівнянь?
2.1.24. Принципова суть методу Гауса.
2.1.25. Принципова суть методу Крамера.

2.1.26. Принципова суть матричного методу.
2.1.27. Який порядок вирішення системи лінійних рівнянь, якщо кількість рівнянь менше числа змінних?
2.1.28. Які рівняння системи називають основними? неосновними?
2.1.29. Які рішення системи називають базисними?
2.1.30. Які базисні рішення системи називають виродженими?
2.1.31. Які рішення системи називають допустимими? недопустимими?

Вправи

Вирішити системи лінійних рівнянь з використанням методів Гауса, Крамера, оберненої матриці:

2.1.1. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 27. \end{cases}$ 2.1.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.1.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8; \\ 3x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$ 2.1.4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10; \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0; \\ 8x_1 - x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$

2.1.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 11. \end{cases}$ 2.1.6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -16; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = -14. \end{cases}$

2.1.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$ 2.1.8. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 19x_3 = 56; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 24; \\ 4x_1 - 8x_2 + 31x_3 = 107. \end{cases}$

2.1.9. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 27. \end{cases}$ 2.1.10. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 13x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18; \\ x_1 - 3x_2 = -16. \end{cases}$

2.1.11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 2.1.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

2.1.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 3; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 15. \end{cases}$

2.1.14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 13; \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -23; \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 5x_4 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 15. \end{cases}$

2.2. Основні поняття геометрії випуклих множин

2.2.1. Випуклі множини та їх геометрична інтерпретація на площині та в просторі

Геометрія випуклих множин – це розділ вищої математики, в якому вивчаються особливості, властивості та використання випуклих множин.

Множиною, під якою у подальшому розгляді будемо розуміти точкову множину, називається сукупність точок на площині або в просторі. Прикладами множин на площині є трикутник, прямокутник, многокутник, коло, пряма тощо; у трьомірному просторі – паралелепіпед, призма, многогранник, шар і т. ін.

Множини бувають випуклими та невипуклими. **Випуклою** є множина, де разом з її будь-якими двома точками їй належить і увесь відрізок, що з’єднує ці точки (рис. 2.1., а). У невипуклих множин існує хоча б одна пара точок, що відрізок, який з’єднує ці точки, не належить цілком даній множині (рис.2.1., б).

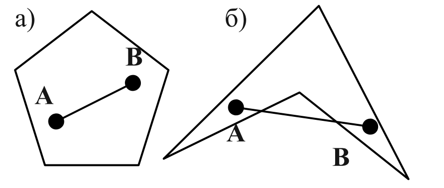


Рисунок 2.1 – Приклади множин

Випуклі множини мають важливу властивість: пересікання скінченого числа випуклих множин теж є випуклою множиною. Це і зумовило широке використання випуклих множин у практичних задачах.

Точка випуклої множини є **кутовою**, якщо через нею не можна провести ні одного відрізка, складаємого тільки з точок даної множини, і для якого вона була б внутрішньою.

Для випуклого многокутника на площині кутовими точками є його вершини і число їх скінченне. У n-мірному просторі випукла множина з скінченним числом кутових точок називається випуклим многогранником, або **сімплексом**, (у подальшому розгляді він є об'єктом геометричної інтерпретації сімплекс-метода задач ЛП). У відповідності з цими визначеннями до випуклого многокутника відносяться точка, луч, кут (мають по одній кутовій точці), відрізок (має дві кутові точки), трикутник, ромб, трапеція тощо. У трьохмірному просторі випуклими многогранниками є піраміда, призма, паралелепіпед тощо. Поняття кутовій точки вводиться тільки до випуклих множин.

Розглянемо геометричну інтерпретацію множинності допустимих рішень системи лінійних нерівностей, що пізніше буде використане в задачах ЛП.

2.2.2. Системи лінійних нерівностей та знаходження області допустимих рішень

Спочатку розглянемо систему з m лінійних нерівностей, які мають дві змінні *(n=2)* x_1 та x_2:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad i = 1...m, \qquad (3.1)$$

де a_{i1}, a_{i2} – відомі коефіцієнті при змінних, які задаються у вигляді дійсних чисел; b_i – праві частини.

При двох змінних область допустимих рішень системи нерівностей (2.18) може бути зображена на площині в осях координат x_1 та x_2 у вигляді замкненого або незамкненого випуклого многокутника. При відсутності рішень такий многокутник – пустий. Кожна з сторін многокутника графічно відображає пряму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 - b_i = 0$, яка розділяє площину на дві полуплощині, одна з яких відповідає області допустимих рішень даної i-ої нерівності. Тоді у випадку замкнутого многокутника (рис. 2.2) області множинності допустимих рішень системи лінійних нерівностей (2.18) буде відповідати область усередині многокутника та на його межі . Штриховкою на рисунку показаний напрям області допустимих рішень, що відповідає однієї з двох полуплощин для кожної i-ої нерівності системи (2.18).

Розглянемо на прикладі побудову області допустимих рішень на площині системи m лінійних нерівностей з числом змінних $n=2$.

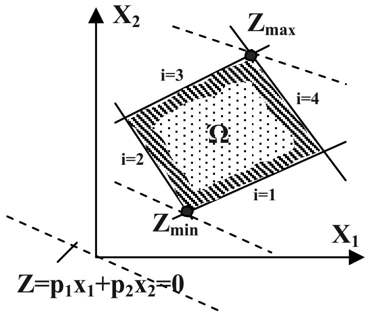


Рисунок 2.2 – Замкнений многокутник допустимих рішень

Приклад 2.5. Побудувати множину рішень системи лінійних нерівностей та знайти координати кутових точок випуклого многокутника:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 \le 0; \\ x_1 + x_2 - 1 \ge 0; \\ x_1 + x_2 \qquad \ge 0; \\ x_1 \qquad\qquad \le 2{,}5; \\ 0 \le x_2 \le 1. \end{cases}$$

Введемо на площині прямокутну систему координат $x_1 0 x_2$ (рис. 2.3). Відомо, що геометричне місце точок на площині, координати яких задовольняють системі лінійних нерівностей, утворює випуклий многокутник. Цей многокутник є многокутником рішень однієї системи нерівностей. Сторони цього многокутника розташовуються на прямих, рівняння яких одержуються, якщо в нерівностях системи їх знаки поміняти на знаки рівнянь. А сам многокутник є перетин полуплощин, на які розділяється площина кожною з вказаних прямих.

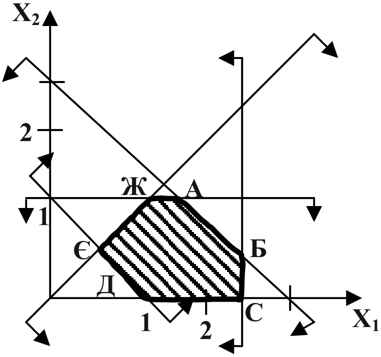


Рисунок 2.3 – Многокутник рішень системи нерівностей

1. Будуємо пряму **АБ** $x_1+x_2-3=0$: при $x_1=0$ $x_2=3$; при $x_2=0$ $x_1=3$. Вона проходить через точки (0;3) та (3;0) в осях координат x_1 та x_2. Для знаходження області рішень, яке дає перша нерівність, використуємо контрольну точку, наприклад, начало координат (0;0). Підстановка координат начала в строгу нерівність $x_1+x_2-3<0$ дає–3<0, тобто вона виконується. Таким чином, з двох полуплощин, на які розділяє площину пряма **АБ**, множиною рішень першої нерівності є нижня полуплощина, де розташовується начало координат; стрілки на прямій вказують полуплощину множини рішень першої нерівності.

2. Будуємо пряму **ЄД** $x_1+x_2-1=0$: при $x_1=0$ $x_2=3$; при $x_2=0$ $x_1=3$. Вона проходить через точки (0;1) та (1;0) в осях координат. Підстановка координат начала в строгу нерівність $x_1+x_2-1>0$ показує її невиконання: $-1< 0$. Тобто, з двох полуплощин, на які розділяються площина прямою **ЄД**, множиною рішень другої нерівності буде верхня полуплощина, що показується напрямком стрілок на прямої.

3. Будуємо пряму **ЄЖ** $x_1-x_2=0$. Так як вона проходить через начало координат, другу точку знайдемо, приймая, наприклад, $x_1=2$, тоді $x_2=2$. Пряма **ЄЖ** пройде через точки з координатами (0;0) та (2;2). Для знаходження полуплощин рішень строгої нерівності $x_1+x_2>0$ візьмемо контрольну точку з однієї сторони від прямої, так як координати начала в рівнянні з попередніми випадками не дозволяє досягнути поставленої цілі. За контрольну, наприклад, візьмемо точку з координатами (0;2). Підстановка її координат у строгу нерівність дає $-2>0$, тобто вона не виконується. Це означає, що полуплощина множини

рішень для третьої нерівності даної системи лежить нижче прямої **ЄЖ**, де знаходиться контрольна точка.

4. Будуємо пряму **СБ** $x_1=2,5$. Вона проходить через точку з координатами $x_1=2,5$ паралельно осі x_2. Значення x_1 лежать зліва від знайденої прямої, що і визначає полуплощину рішень нерівності $x_1 \le 2,5$.

5. Двійчаста нерівність $0 \le x_2 \le 1$ відповідає системі двох нерівностей: $x_2 \le 1;\ x_2 \ge 0$. Нерівності $x_2 \le 1$ відповідає полуплощина нижче прямої **АЖ** $x_2=1$, а нерівності $x_2 \ge 0$ – полуплощина вище осі x_1.

Таким чином, множині рішень системи з п’яти заданих нерівностей відповідає випуклий многокутник **АБСДЄЖ** область штрихування в якому відповідає області рішень системи нерівностей.

Знайдемо координати кутових точок многокутника як точки пересікання відповідних прямих.

Із рисунка очевидні координати точок **Д**(1;0) і **С**(2,5;0). Координати інших кутових точок знаходяться з рішень системи рівнянь прямих, на пересіканні яких знаходяться ці точки.

Точка **Є** лежить на пересіканні прямих **ЄД** та **ЄЖ**. Вирішуя спільно рівняння цих прямих $x_1 + x_2 = 1$ та $x_1 - x_2 = 0$, знаходимо $x_1 = x_2 = 0,5$, тобто координати т. **Є**(0,5;0,5).

Точка **Ж** лежить на пересіканні прямих **ЄЖ** та **АЖ**. Вирішуя спільно рівняння цих прямих $x_1 - x_2 = 0$, та $x_1 = 1$ знаходимо $x_1 = x_2 = 1$, тобто координати т. **Ж**(1;1).

Точка **А** лежить на пересіканні прямих **АЖ** та **АБ**. Вирішуя спільно рівняння цих прямих $x_2 = 1$ та $x_1 + x_2 = 3$, знаходимо $x_1 = 2,\ x_2 = 1$, тобто координати т. **А**(2;1).

Точка **Б** лежить на пересіканні прямих **АБ** та **БС**. Вирішуя спільно рівняння цих прямих $x_1 + x_2 = 3$ та $x_1 = 2,5$, знаходимо $x_1 = 2,5,\ x_2 = 0,5$. Таким чином, координати т. **Б**(2,5;0,5).

У загальному випадку для системи m лінійних рівнянь з n змінними

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = 1 \ldots m, \qquad (2.19)$$

область допустимих рішень $\acute{\mathbf{\Omega}}$ даної системи може відповідати випуклому многограннику (сімплексу), який побудований у *n*-мірному просторі. Кожна грань розглядаємого сімплексу геометрично відображує площину, яка відповідає *i*-му рівнянню з системи (2.19). Кожна з таких площин відокремлює у *n*-мірному просторі полупростір, який складається з точок $X(x_1, x_2, \ldots x_n)$, розміщених за однією з сторін від площини $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i = 0$ та на самій площині. Тоді сімплекс, побудований у *n*-мірному просторі як пересікання випуклих множин у вигляді окремих площин, відповідає у загальному випадку області допустимих рішень системи лінійних нерівностей (2.19).

Запитання для самоконтролю

2.2.1. Що вивчає геометрія випуклих множин?
2.2.2. Яка множина є точковою?
2.2.3. Навести приклади точкових множин на площині та в просторі.
2.2.4. Які множини є випуклими? невипуклими? Навести приклади.
2.2.5. Яка властивість випуклих множин зумовила їх широке використання в практичних задачах?
2.2.6. Які точки випуклих множин називаються кутовими?
2.2.7. Яка випукла множина називається сімплексом?
2.2.8. Навести приклади випуклих множин на полощині.
2.2.9. Що графічно відображає пряма многокутника допустимих рішень на полощині?
2.2.10. Як знаходиться область допустимих рішень для однієї з нерівностей при двох змінних?
2.2.11. Як знаходиться область допустимих рішень для системи нерівностей з двох змінних?
2.2.12. Як знайти координати кутових точок у випуклого многокутника на площині?
2.2.13. Що відображає кожна грань випуклого многокутника допустимих рішень?

2.2.14. Що відображає побудований многокутник у n-мірному просторі?

Вправи

Побудувати множину рішень системи лінійних нерівностей та знайти координати кутових точок многокутника допустимих рішень:

2.2.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 8 \geq 0; \\ x_1 - 2x_2 \leq 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 32 \geq 0; \\ x_2 \leq 0. \end{cases}$

2.2.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 \leq 3; \\ x_2 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 \geq 4. \end{cases}$

2.2.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6 \leq 0; \\ x_1 + x_2 - 2 \geq 0; \\ x_1 - 2x_2 \geq 0; \\ x_1 \leq 5; \\ 0 \leq x_2 \leq 3. \end{cases}$

2.2.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4 \geq 0; \\ x_1 + x_2 - 3 \geq 0; \\ x_1 + x_2 - 7 \leq 0; \\ x_1 \leq 6; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

2.2.5. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 24; \\ 4x_1 - x_2 \leq 0; \\ x_1 - 6x_2 \leq -6; \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$

2.2.6. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 15 \geq 0; \\ 0 \leq x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 - 17 \leq 0; \\ 0 \leq x_1 \leq 11. \end{cases}$

2.2.7. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 8 \geq 0; \\ x_1 + x_2 - 4 \geq 0; \\ x_1 + 3x_2 - 6 \geq 0; \\ x_1 \leq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

2.2.8. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 10 \leq 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 10 \geq 0; \\ x_1 + 2x_2 - 6 \geq 0; \\ x_1 \leq 0. \end{cases}$

2.2.9. $\begin{cases} 2x_1 + \quad x_2 - 2 \ge 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + 12 \ge 0; \\ x_1 \qquad\qquad \ge 0; \\ \qquad x_2 \qquad \ge 0. \end{cases}$ 2.2.10. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 - x_2 \le 2; \\ \qquad x_2 \le 0. \end{cases}$

2.2.11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 16; \\ x_1 + 2x_2 \ge 8; \\ \qquad x_2 \ge 1; \\ x_1 \qquad \ge 2. \end{cases}$ 2.2.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 12; \\ 2x_1 + \quad x_2 \le 6; \\ x_1 \qquad \ge 2; \\ \qquad x_2 \ge 2. \end{cases}$

2.3. Метод найменших квадратів

У ряді випадків при вирішенні економічних задач необхідно встановити теоретичну (аналітичну) залежність $y=f(x)$ на підставі фактичних спостережень. Результати їх можуть бути наведені у таблиці для *n* пар значень змінних: x_1, y_1; x_2, y_2; …; x_n, y_n.

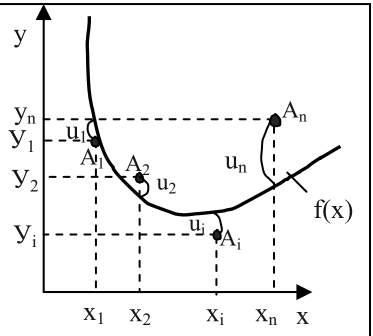


Рисунок 2.4 – Фактичні дані та апроксимуюча їх теоретична залежність

У системі координат *x* і *y* на рис. 2.4 показані точки A_i, координати яких x_i та y_i були отримані фактично.

Проаналізуємо, який вид кривої краще підійде для апроксимації емпіричних (фактичних) даних. У спрощеному випадку це може бути пряма, з кривих – парабола, гіпербола, ступенева залежність тощо.

Припустимо, що для даного розподілення емпірично получених точок вибраний вид залежності у вигляді безперервної лінії *f(x)* між точками. Функцію *f(x)* описують параметри a_i, знайшовши які можна получити рівняння апроксимуючої лінії. Наприклад, рівняння прямої задаються у вигляді $y=a_0+a_1x$, рівняння параболи – $y=a_0+a_1x^2$ тощо.

Відхилення ординат теоретичної лінії y від емпіричних даних y_i при тих же абсцисах відповідають різниці $u_i=y-y_i$ (при $i=1...n$). Чим менші ці різниці, тим краще вибрана теоретична лінія буде апроксимувати емпіричні дані.

Французьким математиком Лежандром у XIX ст. запропоновано в якості міри відхилення точок A_i від апроксимуючої теоретичної лінії брати мінімальну суму S квадратів відхилення їх ординат y_i від теоретичних значень y:

$$S=\sum_{i=1}^{n}u_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y-y_i\right)^2=min. \qquad (2.20)$$

З цього і назва методу – **метод найменших квадратів** (*або скорочено 1МНК*). Необхідною умовою мінімуму функції y, у праву частину якої входять невідомі параметри a_i, є обертання в ноль її часних похідних за цими параметрами:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i}=0,\ \ i=1...n. \qquad (2.21)$$

На підставі умов (2.21) можна получити *систему нормальних рівнянь*, лінійних відносно до невідомих параметрів a_i. З їх знаходженням стає відома теоретична залежність прийнятого виду $y=f(x)$, яка апроксимує емпіричні дані.

Застосування 1МНК далі буде проілюстровано при розгляді економетричних моделей.

2.4. Елементи теорії ймовірностей

2.4.1. Випадкові події та величини

Теорією ймовірностей називають один із розділів вищої математики, що вивчає закономірності масових подій, які носять випадковий характер. Такі закономірності називаються *ймовірними* (стахостичними). Розглядають також *детерміновані* закономірності, які жорстко визначені і мають певний результат.

Події явищ і процесів поділяються на вірогідні, неможливі та випадкові. *Вірогідна* подія в результаті експерименту (досвіду, спроби) обов’язково настає. *Неможлива* подія в експерименті не настає наколи. *Випадкова* подія за умовами експерименту може з'явитися або не з'явитися.

Ймовірністю випадкової події А називається числове значення *P(A)*, що знаходиться між двома межами – нулем (неможлива подія) та одиницею (вірогідна подія):

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (2.22)$$

Випадковою величиною X називається така величина, яка в результаті експерименту може прийняти те або інше (але тільки одне) значення, яке до експерименту невідоме. Розрізняють два типа випадкових величин – дискретні та неперервні. Якщо випадкова величина розглядається як ціле число, то вона називається дискретною. У противному разі (розглядається як дійсне число) її називають неперервною. Значення випадкових величин позначають як $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$.

Функцією розподілу, або інтегральним законом розподілу, випадкової величини *X* називається ймовірність виконання нерівності $X<x$, як функція аргументу *x*:

$$F(x) = P(X < x). \qquad (2.23)$$

Функція розподілу використовується для дискретних і неперервних величин і знаходиться в межах:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

З поняттям функції розподілу тісно пов'язана *щільність розподілу f(x)* випадкової величини, за допомогою якої зручно записувати закон розподілу ймовірностей. Щільність розподілу неперервної випадкової величини *X* дорівнює першої похідної від функції розподілу *F(x)*:

$$f(x) = F'(x). \qquad (2.24)$$

Щільність розподілу випадкової величини *f(x)* вказує на те, як часто з'являється випадкова величина *X* навколо точки *x* при проведенні експериментів.

Функція розподілу неперервної випадкової величини *F(x)* дорівнює інтегралу від щільності розподілу в інтервалі від -∞ до *x*:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (2.25)$$

Геометрично на графіку функція розподілу неперервної величини *F(x)* відповідає площі між кривою щільності розподілу *f(x)* та віссю абсцис для значення випадкової величини *x* (рис. 2.5):

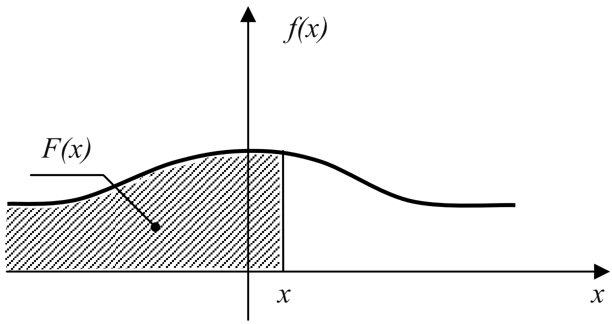


Рисунок 2.5 – Графік щільності ймовірностей

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі [α,β] обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx. \qquad (2.26)$$

2.4.2. Числові характеристики випадкових величин та нормальний закон розподілу ймовірностей

На практиці використовують такі *числові характеристики* дискретних і неперервних випадкових величин:

а) математичне сподівання;

б) дисперсія;

в) середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання M(X) являє собою середнє значення випадкової величини *X*.

Для дискретних випадкових величин математичне сподівання розраховується як сума добутків усіх можливих значень випадкової величини x_i на імовірності цих значень p_i:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,. \qquad (2.27)$$

Математичне сподівання для неперервних випадкових величин, які належать до інтервалу [*a*, *b*], визначається інтегралом виду

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \,. \qquad (2.28)$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать всій осі $0x$, то математичне сподівання дорівнює

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \,. \qquad (2.29)$$

Математичне сподівання випадкової величини позначається також як m_x.

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення використовуються для вимірювання розсіювання випадкової величини X відносно її середньої величини, тобто математичного сподівання $M(X)$.

Дисперсію випадкової величини називається математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини X від математичного сподівання m_x:

$$\sigma^2 = D(X) = M\left[(X-m_x)^2\right]. \qquad (2.30)$$

Для дискретної випадкової величини X дисперсія визначається сумою

$$\sigma^2 = D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i \,, \qquad (2.31)$$

а для непевної випадкової величини – інтегралом

$$\sigma^2 = D(X) = \int_a^b (x-m_x)^2 f(x)dx \qquad (2.32)$$

або

$$\sigma^2 = D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx . \qquad (2.33)$$

Дисперсія, як міра коливання випадкової величини відносно математичного сподівання, часто використовується в дослідженнях з випадковими величинами. Але дисперсія вимірюється у квадратах одиниць вимірювання випадкової величини і позбавлена наочності. Тому доцільно мати числовий параметр такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Середнє квадратичне відхилення дискретної або неперервної випадкової величини X називається корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} . \qquad (2.34)$$

Законом розподілу випадкової величини називають співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливим значенням випадкової величини X з такими параметрами:

- імовірність p_i для дискретних величин;
- щільність розподілу $f(x)$ для неперервних величин.

Зупинимось лише на *нормальному законі розподілу* (законі Гаусса) неперервних випадкових величин, який займає центральне місце в теорії ймовірностей.

Випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (2.35)$$

В цієї залежності математичне сподівання m_x та середнє квадратичне відхилення σ виступають параметрами закону розподілу і він називається *загальним*.

Нормальний закон розподілу широко розповсюджений на практиці і використовується у тих випадках, коли випадкова величина X є результатом прояву великої кількості факторів.

Основна особливість, що виділяє нормальний закон розподілу ймовірностей від інших законів (експотенціальне розподілення, рівномірне розподілення, розподілення Пуассона, біноміальне розподілення та ін.) полягає в тому, що він являє собою граничний закон, до якого наближаються інші закони.

Графік щільності нормального розподілу *f(x)* випадкової величини, який називається *нормальною кривою* (кривою Гауса), показана на рис. 2.6.

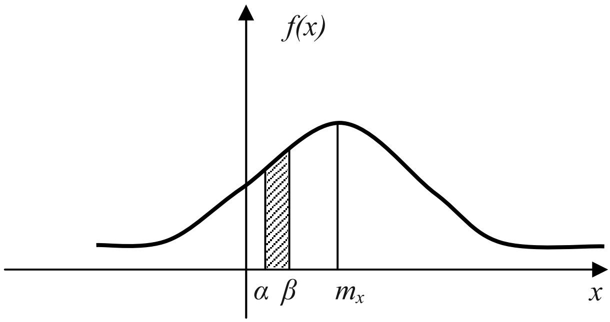


Рисунок 2.6 –Нормальний закон розподілу випадкової величини

З рисунку видно, що графік *f(x)* розміщений симетрично відносно умовно проведеного перпендикуляру в точці $x = m_x$, а його максимум в цій точці дорівнює $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Ймовірність попадання випадкової величини на заданий інтервал $[\alpha,\beta]$ визначається *функцією Лапласа*, або інтегралом ймовірності $\Phi(x)$:

$$\underline{\underline{P}}(\alpha < X < \beta), \tag{2.36}$$

де $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad t = \frac{x - m_x}{\sigma\sqrt{2}}$.

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, які властиві масовим випадковим явищам. Центральне місце тут займає *закон великих чисел*, згідно з яким при достатньо великий кількості експериментів характеристики випадкових подій вивчаємої величини постають майже невипадковими. Закон великих чисел базується на ряді *теорем* (Чебишева, Бернулі, Пуассона, Ляпунова).

РОЗДІЛ 2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ, СІТЬОВІ ТА БАЛАНСОВІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Глава 3. Оптимізаційні моделі

3.1. Задачі лінійного програмування (ЛП) в економічній практиці

3.1.1. Модель загальної задачі ЛП та її геометрична інтерпретація. Основна задача ЛП

Загальна задача ЛП полягає в знаходженні екстремуму (максимуму або мінімуму) лінійної цільової функції при наявності обмежень на n змінних у вигляді m лінійних нерівностей або рівнянь та умов невід'ємності змінних. Лінійне програмування найбільш розповсюджене в економіці та управлінні в прийнятті оптимальних рішень.

Економіко-математична модель загальної задачі ЛП представляється у вигляді:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \rightarrow max(min); \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i \ \ (i = 1...m); \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1...n); \tag{3.3}$$

або в матричній формі:

$$Z = PX \rightarrow max\ (min); \tag{3.4}$$

$$AX(\leq, \geq, =)B; \tag{3.5}$$

$$X \geq 0. \tag{3.6}$$

У наведених формулах позначено: вирази (3.1), (3.4) – цільова функція; (3.2), (3.5) – обмеження на змінні; (3.3), (3.6) – умови невід'ємності змінних; p_j, a_{ij}, b_i – відомі постійні коефіцієнти; x_j – змінні, які підлягають визначенню; $P=(p_j)$ – матриця-строка коефіцієнтів цільової функції; $B=(b_i)$ – матриця-стовпець правих частин обмежень; $X=(x_j)$ – матриця-стовпець змінних; $A=(a_{ij})$ – матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень; m – кількість обмежень; n – кількість змінних; позначення ($\leq$, $\geq$, $=$) свідчить про те, що можуть використовуватись обмеження-невірності ($\leq$, $\geq$) або (i) обмеження-рівняння ($=$).

Задача ЛП називається **основною**, якщо з її формулювання можуть бути получені всі окремі випадки. **Основна задача ЛП** формулюється так.

Знайти *максимум цільової функції* від n змінних

$$Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to max \qquad (3.7)$$

при заданні m обмежень, які складаються у загальному випадку з r нерівностей та $(m\text{-}r)$ рівнянь та умов невід'ємності змінних:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1...r); \ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = b_k \ (k = r+1,...m); \qquad (3.8)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1...n); \ b_k \geq 0 \ (k = r+1,...m). \qquad (3.9)$$

Формули (3.7)-(3.9) складають *економіко-математичну модель основної задачі ЛП*.

Якщо треба знайти *мінімум цільової функції* (3.7), то задачу мінімізації можна звести до розглянутої задачі максимізації.

При цьому слід при тих же обмеженнях помножити коефіцієнти цільової функції на (-1) та розшукувати $max(-Z)=Q$. Тоді

$$minZ=Q \qquad (3.10)$$

Геометрична інтерпретація задачі ЛП полягає в тому, що у n-мірному просторі кожне з обмежень на змінні інтерпретується як полупростір допустимих рішень, а система обмежень дає область допустимих рішень у вигляді випуклого многогранника-сімплекса. Кожна грань сімплекса – це площина, яка описується i-м обмеженням, яке перетворюється у рівняння.

Значення цільової функції Z у будь-якій точці $X_1\left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1\right)$ можна розглядати як відстань цієї точки від *площини рівня* $Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = 0$, яка проходить через начало координат. Переміщуя цю площину паралельно самій собі так, щоб вона проходила через вершини сімплекса, можна для найбільш віддаленої вершини від площини рівня знайти максимальне значення цільової функції Z_{max}, а для найменш віддаленої вершини - Z_{min}.

У випадку двох змінних x_1 та x_2, коли область допустимих рішень задачі ЛП зображується у вигляді многокутника (див. рис. 2.2), графічне знаходження максимального Z_{max}, та мінімального Z_{min} значень цільової функції показано на рисунку як найбільше та найменше ухилення вершин многокутника від сліду площини рівня $Z=p_1x_1+p_2x_2=0$.

3.1.2. Приклади задач ЛП і сформованих на їх основі оптимізаційних моделей

Задача оптимального використання ресурсів (оптимального планування)

Номенклатура продукції, яка випускається підприємством, складається з n найменувань. Для їх виробництва потрібно m видів ресурсів, запаси яких обмежені. Витрати i-го виду ресурсів на одиницю виду продукції складають $a_{ij}(i=1...m;\ j=1...n)$. Запаси i-го виду ресурсів є b_i одиниць. Прибуток від реалізації одиниці j-го виробу дорівнює p_j. Потрібно скласти такий оптимальний план випуску продукції кожного виду x_j, при якому підприємство отримує найбільший прибуток.

Економіко-математична модель буде мати такий вигляд: обчислити оптимальний план випуску продукції $X=(x_j)$, з реалізації якої підприємство отримає найбільший прибуток, що характеризується цільовою функцією $Z=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to max$,

при обмеженнях на наявність ресурсів $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i=1...m)$

та умовах невід'ємності змінних $x_j \ge 0 \ (j=1...n)$.

Задача оптимального розподілу завдань з випуску однорідної продукції

На n підприємствах галузі (в цехах одного заводу) випускається однорідна продукція, для якої є m запасів ресурсів. Витрати і-го ресурсу $(i=1...m)$ на j-му підприємстві або цеху $(j=1...n)$ в одиницю часу складають a_{ij}. Запаси ресурсів i-го виду дорівнюють b_i. Показники продуктивності праці характеризуються коефіцієнтами p_j. Потрібно скласти такий оптимальний план випуску кожного виду продукції x_j, за яким кожне підприємство (цех) забезпечило б максимальний обсяг випуску продукції.

Економіко-математична модель має вигляд як у попередній задачі: цільова функція Z буде відповідати обсягу продукції, який потрібно максимізувати; кожна нерівність системи обмежень характеризує запаси ресурсів, які при цьому повинні бути використані.

Задача оптимального використання потужностей

Підприємству заданий план за часом і номенклатурою випуску виробів: необхідно за термін часу (година, день тощо) випустити b_j одиниць продукції виду $j=1...n;$ продукція виготовляється на m станках, продуктивність яких задана коефіцієнтами $a_{ij}(i=1...m;\ j=1...n)$. Відомі коефіцієнти b_{ij}, які відображають усі витрати по виготовленню продукції виду j на i-му станку в одиницю часу. Необхідно скласти оптимальний план роботи станків, щоб витрати на виробництво продукції були мінімальними.

Економіко-математична модель задачі буде такою: цільова функція виражає мінімальні витрати на виробництво усієї продукції при витратах часу x_{ij} кожного i-го станка на виробництво j-ї продукції $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij} \rightarrow min$; обмеження за часом $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T\ \left(i=1...m\right)$; обмеження за номенклатурою виробів $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = b_j$; умови невід'ємності змінних $x_{ij} \geq 0 \ (i = 1...m, j = 1...n)$.

Задача оптимального розкрою матеріалів

Підприємство отримало полуфабрикати у вигляді m різних як за кількістю одиниць $b_i (i=1...m)$, так і за розмірами партій. У кожній партії полуфабрикат тільки одного розміру. Цей полуфабрикат необхідно розкроїти на необхідні заготівки, щоб максимізувати загальну кількість повних комплектів заготівель.

Відомо, що в один комплект заготівель s-го виду входить K_s штук полуфабрикатів $(s=1...l)$. Кожну одиницю полуфабрикату можна розкроїти на заготівки n різними засобами, при чому в розкрої одиниці i-ої партії j-м засобом $(j=1...n)$ можна получити a_{ijS} заготівель s-го виду.

Позначимо через x_{ij} кількість заготівель із i-ої партії полуфабрикатів, які заплановано розкроїти j-м засобом, так що із i-ої партії при j-му засобу розкрою буде виготовлено $a_{ijS}x_{ij}$ заготівель s-го виду; y – кількість повних комплектів заготівель.

Тоді *економіко-математична модель* оптимального розкрою матеріалу запишеться у вигляді максимізації кількості повних комплектів заготівель, що виражається цільовою функцією $Z=y \rightarrow max$ при обмеженнях: за кількістю заготівель для складання числа комплектів $\frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijS} x_{ij}}{K_S} \geq y \quad (s = 1...l)$; за кількістю заготівель у i-ої партії полуфабрикатів $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ (i = 1...m)$; за умовами невід'ємності $y \geq 0$; $x_{ij} \geq 0$ $(i=1...m, j=1...n)$.

Задача про суміші

Необхідно скласти суміш із n різних видів сировини, кожен з яких містить у собі m видів речовин (елементів). Кількість i-ої речовини ($i=1...m$) в одиниці j-го виду сировини ($j=1...n$) складає a_{ij}. Вартість одиниці j-го виду сировини є p_j. Допустима кількість i-ої речовини у суміші складає b_i.

Позначимо через x_j кількість сировини j-го виду, яку заплановано використати для виготовлення суміші.

Тоді *економіко-математична модель* задачі зведеться до такої: знайти такий оптимальний план змішування видів сировини, при якому загальна вартість суміші буде мінімальною, що виражається цільовою функцією $Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to min$, з умовою обмежень на кількість i-го виду речовин у суміші $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = 1...m)$ та невід'ємності змінних $x_{ij} \geq 0$ $(i=1...m, j=1...n)$.

Транспортна задача

Відомо, що є m постачальників $A_1, A_2, ..., A_m$ однорідного вантажу у кількості відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць і n споживачів вантажу $B_1, B_2, ..., B_n$, яким потрібно $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць цього вантажу. Вартість перевезень одиниці вантажу від i-го постачальника ($i=1...m$) до j-го споживача ($j=1...n$) складає c_{ij}.

Необхідно скласти такий оптимальний план перевезень вантажу, який забезпечив би мінімальні транспортні витрати.

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць вантажу, який перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача.

Розглянемо найбільш простий випадок *закритої транспортної моделі*, коли має місце баланс попиту і пропозиції з сторін постачальників і споживачів: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Тоді *закрита економіко-математична модель* транспортної задачі буде представлена таким чином. Треба мінімізувати транспортні витрати перевезень, що виражається цільовою функцією $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$, при обмеженнях на змінні: увесь вантаж від постачальників повинен бути вивезений $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = 1...m\right)$; попит споживачів у вантажах повинен бути задовільнений $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \left(j = 1...n\right)$; вимагається невід'ємність змінних $x_{ij} \geq 0$ *(i=1…m, j=1…n).*

Приклади побудови економіко-математичних моделей

Приклад 3.1. Задача оптимального використання ресурсів. Підприємству необхідно виготовити три види продукції $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ з використанням двох видів ресурсів $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, запаси яких обмежені. Чисельні дані задачі ілюструються таблицею:

Вид ресурсів	Запас ресурсів	Кількість ресурсів на виготовлення одиниці продукції		
		$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$
$\mathbf{R_1}$	40	4	4	2
$\mathbf{R_2}$	30	3	8	4
Прибуток від реалізації 1 од. продукції, г.о.	-	10	15	12

Скласти економіко-математичну модель випуску продукції, щоб при її реалізації отримати найбільший прибуток.

Розв'язання. За невідомими, які необхідно обчислити, позначимо: x_1 – кількість продукції виду $\mathbf{P_1}$; x_2 – кількість продукції виду $\mathbf{P_2}$; x_3 – кількість продукції виду $\mathbf{P_3}$.

В якості цільової функції $\boldsymbol{Z}$, яку необхідно в даній задачі максимізувати, приймається загальний прибуток від реалізації всіх відів продукції. Тоді частка прибутку від реалізації продукції $\mathbf{P_1}$ складає ($10x_1$), від продукції $\mathbf{P_2}$ – ($15x_2$), а від продукції $\mathbf{P_3}$ – ($12x_3$); в загалі прибуток від реалізації всіх видів продукції буде $\boldsymbol{Z=10x_1+15x_2+12x_3\rightarrow max}$.

При виготовленні продукції запаси ресурсів не можуть бути перевищені, що накладає обмеження на використання ресурсів. Так, витрати ресурсу виду $\mathbf{R_1}$ на виготовлення продукції $\mathbf{P_1, P_2, P_3}$ будуть дорівнювати відповідно ($4x_1$), ($4x_2$) та ($2x_3$). Тоді загальне обмеження для витрат ресурсу $\mathbf{R_1}$ має вигляд: $\boldsymbol{4x_1+4x_2+2x_3\leq 40.}$ За аналогією можна записати обмеження з витрат ресурсу $\mathbf{R_2}$ на виготовлення видів продукції $\mathbf{P_1, P_2, P_3}$: $\boldsymbol{3x_1+8x_2+4x_3\leq 30}$.

Очевидно, що невідомі x_1, x_2 та x_3 не можуть бути невід’ємними, тобто $\boldsymbol{x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0}$.

Остаточно, економіко-математична модель задачі оптимального використання ресурсів буде мати вигляд:

$$Z=10x_1+15x_2+12x_3\rightarrow max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 40; \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 30; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq;\ x_3 \geq 0.$$

Далі модель треба реалізувати (тобто обчислити) з використанням сімплекс-методу.

Приклад 3.2. Задача про суміші. Для відкорму тварин необхідно з трьох кормів $\mathbf{K_1, K_2, K_3}$ виготовити суміш. Відома вимагаєма годувальність порції суміші на одну тварину: годувальність речовини $\mathbf{V_1}$ – не менше 10 од.; годувальність речовини $\mathbf{V_2}$ – не менше 8 од. Інші дані задачі наведені у таблиці:

Речовини	Кількість годувальності речовини в 1 од. корму		
	$\mathbf{K_1}$	$\mathbf{K_2}$	$\mathbf{K_3}$
$\mathbf{V_1}$	2	3	1
$\mathbf{V_2}$	1	2	1
Вартість 1 од. корму, г.о.	4	2	3

Необхідно змішати корми у такої кількості для виготовлення суміші, щоб забезпечити задану гудувальність порції суміші з мінімальними витратами на корм.

Скласти економіко-математичну модель задачі.

Розв'язання. Невідомими задачі позначаються: x_1 – кількість корму **К₁** в суміші; x_2 – кількість корму **К₂**; x_3 – кількість корму **К₃**.

Цільова фінкція ***Z***, яку в даному разі треба мінімізувати, виражає витрати на корми **$К_1$, $К_2$, $К_3$** в суміші: ($4x_1$) – витрати на корм **$К_1$**; ($2x_2$) – витрати на корм **$К_2$**; ($3x_3$) – витрати на корм **$К_3$**. Тоді цільова функція має вигляд: $\boldsymbol{Z=4x_1+2x_2+3x_3\to min}$.

Обмеження на невідомі покладаються з метою забезпечення необхідної годувальності порції суміші з розрахунку на одну тварину. Так, щоб забезпечити годувальність речовини **V_1** не менш 10 од., необхідно взяти корму **$К_1$** у кількості ($2x_1$), корму **$К_2$** – у кількості ($3x_2$), корму **$К_3$** – у кількості (x_3). Тоді обмеження на годувальність порції суміші з речовини **V_1** запишеться у вигляді $\boldsymbol{2x_1+3x_2+x_3\geq 10}$. За аналогією обмеження на годувальність з речовини **V_2** буде таким: $\boldsymbol{x_1+2x_2+x_3\geq 8}$.

Треба також врахувати умови невід'ємності невідомих: $\boldsymbol{x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0}$.

Остаточно, економіко-математична модель задачі про суміші запишеться у вигляді:

$$Z=4x_1+2x_2+3x_3\to min;$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3\geq 10; \\ x_1+2x_2+\ \ x_3\geq 8; \end{cases}$$

$$x_1\geq 0;\ x_2\geq;\ x_3\geq 0.$$

Далі модель реалізується сімплекс-методом.

Приклад 3.3. Транспортна задача. На двох складах **$А_1$** та **$А_2$** є відповідно 11 і 14 од. однорідного вантажу. Попит у ньому магазинів **$В_1$, $В_2$** та **$В_3$** дорівнює відповідно 10, 8 і 7 од. Ці дані та вартість перевезень одиниці вантажу від складів до магазинів надані у таблиці:

	10	**8**	**7**
11	8	6	5
14	4	5	7

Скласти економіко-математичну модель плану перевезень вантажів, щоб витрати були мінімальними.

Розв'язання. За невідомі x_{ij} приймаються кількість одиниць вантажу, які перевозяться від *i*-го складу до *j*-го магазину (i=1,2; j=1,2,3). Тоді цільова функція $\boldsymbol{Z}$ виражає вартість перевезень з мінімальними витратами.

Обмеження на невідомі використовуються двох типів. По-перше, вантаж із складів повинен бути вивезений, що в даній задачі описується системою з двох рівнянь за числом складів (розглядаються рядки таблиці):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 14. \end{cases}$$

По-друге, кожен магазин повинен отримати стільки вантажу, скільки йому потрібно, що описується системою рівнянь за числом магазинів (розглядаються стовпці таблиці):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 10; \\ x_{12} + x_{22} = 8; \\ x_{13} + x_{23} = 7. \end{cases}$$

Крім того, слід враховувати умови невід'ємності невідомих: $x_{ij} \geq 0$ (i=1,2; j=1,2,3).

Тоді остаточно економіко-математична модель транспортної задачі буде мати вигляд:

$$Z = 8x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 14; \\ x_{11} + x_{21} \qquad\quad = 10; \\ x_{12} + x_{22} \qquad\quad = 8; \\ x_{13} + x_{23} \qquad\quad = 7; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2; \ j = 1,2,3).$$

Запитання для самоконтролю

3.1.1. У чому полягає загальна задача ЛП?
3.1.2. Який склад математичної моделі задачі ЛП?
3.1.3. Записати математичну модель загальної задачі ЛП.
3.1.4. Яка задача ЛП називається основною? Записати математичну модель основної задачі ЛП.
3.1.5. Як зміниться формулювання основної задачі ЛП при мінімізації цільової функції?
3.1.7. Навести приклади економічних задач, які можна звести до задачі ЛП.
3.1.8. Сформулювати задачу оптимального використання ресурсів.
3.1.9. Щоб в ній визначає цільова функція? обмеження на зміни? умови невід'ємності змінних?
3.1.10. Записати економіко-математичну модель задачі оптимального використання ресурсів.
3.1.11. Сформулювати задачу оптимального розподілу завдань з випуску однорідної продукції.
3.1.12. Що в ній визначає цільова функція? обмеження на зміні? умови невід'ємності змінних?
3.1.13. Записати економіко-математичну модель задачі оптимального розподілу завдань з випуску однорідної продукції.
3.1.14. Сформулювати задачу оптимального використання потужностей.
3.1.15. Що в ній визначає цільова функція? обмеження на зміні? умови невід'ємності змінних?
3.1.16. Записати економіко-математичну модель оптимального використання потужностей.
3.1.17. Сформулювати задачу оптимального розкрою матеріалів.
3.1.18. Що в ній визначає цільова функція? обмеження на зміні? умови невід'ємності змінних?
3.1.19. Записати економіко-математичну модель задачі оптимального розкрою матеріалів.
3.1.20. Сформулювати задачу про суміші.
3.1.21. Що в ній визначає цільова функція? обмеження на зміні? умови невід'ємності змінних?

3.1.22. Записати економіко-математичну модель задачі про суміші.
3.1.23. Сформулювати транспортну задачу.
3.1.24. Що в ній визначає цільова функція? обмеження на зміні? умови невід'ємності змінних?
3.1.25. Записати економіко-математичну модель транспортної задачі.

Вправи

3.1.1. Підприємству необхідно виготовити два види продукції P_1 та P_2, на які планується використати таку кількість ресурсів трьох типів, припадаючих на одиницю продукції: 6, 4, 4, од. та 6, 2, 8 од. На виготовлення продукції використовуються ресурси R_1, R_2, R_3, запаси яких обмежені та дорівнюють відповідно 36, 20 і 40 од. Прибуток від реалізації одиниці продукції виду P_1 дорівнює 12 г.о., а від одиниці продукції P_2 – 15 г.о. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб від її реалізації отримати найбільший прибуток.

3.1.2. На підприємстві виготовляються вироби двох видів: А, В. Для цього використовується сировина чотирьох типів I, II, III і IV, запаси яких дорівнюють відповідно 21, 4, 6, 10 од. Для виробу А необхідна така кількість одиниць сировини чотирьох видів: 2, 1, 0, 2 од. Для виробу В необхідна така кількість одиниць сировини відповідних видів: 3, 0, 1, 1 од. Випуск одного виробу типу А дає 3 г.о. прибутку, одного виробу типу В – 2 г.о. Скласти план виробництва, який забезпечує найбільший прибуток.

3.1.3. На підприємстві використовується сталь трьох марок: А, В, С. Запаси їх обмежені і становлять відповідно 10, 16 та 12 од. Підприємство випускає два вида виробів I, II. Для виробу I необхідно однієї одиниці сталі усіх марок. Для виробу II необхідно 2 одиниці сталі марки В, 1 одиниця марки С і не потрібна сталь марки А. Від реалізації одиниці виробу виду I підприємство отримує 3 г.о. прибутку, виду II – 2 г.о. Скласти план випуску продукції, який має забезпечити найбільший прибуток.

3.1.4. Підприємство має ресурси двох типів у кількості 120 і 80 од. Ці ресурси використовуються для випуску продукції видів I і II, при чому витрати на виготовлення одиниці продукції виду I дорівнює 2 од. ресурсу першого типу та 2 од. ресурсу другого типу; на виготовлення одиниці продукції виду II – 3 од. ресурсу першого типу та 1 од. ресурсу другого типу. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого виду складає 6 г.о., другого виду – 4 г.о. Скласти план випуску продукції, який забезпечує найбільший прибуток при умові, що продукції першого виду повинно бути випущено не менше продукції другого виду.

3.1.5. Фабрика виготовляє три види тканин. Добові ресурси фабрики складають 700 од. виробничого устаткування, 800 од. сировини та 600 од. електроенергії, витрати яких на одиницю тканини такі: для устаткування за видами тканини – 2, 3 і 4 од.; для сировини – 1, 4 і 5 од.; для електроенергії – 3, 4 і 2 од. Ціна одного метра тканини першого виду складає 8 г.о., другого виду – 7 г.о., третього виду – 6 г.о. Скільки треба виготовити тканини кожного виду, щоб прибуток від реалізації був найбільший?

3.1.6. Чотири станка I, II, III, IV обробляють два види деталей А та В. Кожна деталь проходить обробку на всіх чотирьох станках. Відомо, що час обробки деталі А на чотирьох станках дорівнює відповідно 1, 2, 1 та 3 години, а деталі В – 2, 3, 1 та 1 година. Час роботи станків за один цикл виробництва дорівнює для кожного станка 16, 25, 20 і 24 годин. Прибуток від випуску одної деталі А складає 4 г.о., а деталі В – 1 г.о. Скласти план виробництва, який забезпечує найбільший прибуток.

3.1.7. Для відкорму тварин необхідно з двох кормів K_1 і K_2 виготовити суміш. Задається годувальність порції суміші, яка розрахована на одну тварину: годувальність речовини V_1 потрібна бути не менш 12 од.; V_2 – не менше 6 од.; V_3 – не менш 9 од. У кожному кілограмі корму K_1 міститься 3 од. годувальної речовини V_1, 1 од. годувальної речовини V_2 і 3 од. годувальної речовини V_3. В одному кілограмі корму K_2 міститься 2 од. годувальної речовини V_1, 2 од. годувальної речовини V_2 і 1 од. годувальної речовини V_3. Вартість одиниці корму K_1 складає 2 г.о., одиниці корму K_2 – 3 г.о. Необхідно змішати наявні корми у такій кількості, щоб забезпечити задану годувальність порції суміші при мінімальних витратах на корми.

3.1.8. На птахофабриці використовуються два види кормів I і II. В одиниці маси корму I міститься 1 од. вітаміну А, 1 од. вітаміну В та 1 од. вітаміну С. В одиниці маси корму II міститься 4 од. вітаміну А, 2 од. вітаміну В і відсутній вітамін С. У денний раціон кожної птиці необхідно включати не менше 1 од. вітаміну А, не менше 4 од. вітаміну В і не менше 1 од. вітаміну С. Ціна одиниці маси корму I складає 3 г.о., корму II – 2 г.о. Скласти кожноденний раціон відкормлення птиці так, щоб забезпечити найбільш дешевий раціон годування.

3.1.9. У чотирьох постачальників I, II, III, IV є відповідно 60, 70, 30, 40 од. однорідного вантажу. Попит у них споживачів 1, 2 і 3 дорівнює відповідно 80, 80, 40 од. Ці дані та вартість перевезень одиниці вантажу від постачальників до споживачів надані у таблиці:

	80	**80**	**40**
60	4	3	5
70	8	7	6
30	4	5	9
40	10	9	7

Скласти план перевезень вантажів, щоб витрати були мінімальними.

3.1.10. Є умови транспортної задачі з перевезення однорідного вантажу з трьох станцій відправлення А, В і С в п’ять пунктів призначення $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ і $П_5$. Запаси вантажу на станціях, попит на них у пунктах призначення та вартість перевезень одиниці вантажу від пунктів відправлення в пункти призначення надані в таблиці:

	30	**5**	**25**	**15**	**25**
50	4	1	2	3	3
20	3	1	5	2	4
30	5	6	1	4	2

Скласти такий план перевезень вантажів, щоб витрати на ці перевезення були мінімальними.

3.2. Методи вирішення задачі ЛП та її додатки

3.2.1. Методи вирішення задач ЛП

До *методів* вирішення задач ЛП відносяться такі:

- графічний метод;
- сімплекс-метод.

Графічний метод відрізняється простотою та ілюстративністю. Але він може бути практично використаний лише при двох змінних x_1 та x_2, коли система обмежень сумісна (має хоча б одне рішення). Використання методу надано у п. 2.2.2. Узагальнений алгоритм графічного методу такий: будується многокутник допустимих рішень на підставі заданої системи обмежень; знаходяться координати вершин многокутника, як точки пересікання слідів полуплощин обмежень; вершина, в якої цільова функція набуває екстремального значення (максимального або мінімального) відповідає рішенню задачі, а координати цієї вершини дають значення змінних у оптимальному рішенні.

Використання графічного методу для трьохмірного простору ($n=3$), який відповідає трьом змінним x_1, x_2 та x_3 і потребує необхідності побудови многогранника допустимих рішень, є громіздкою операцією і метод не може бути рекомендованим для практичного застосування.

Сімплекс-метод є аналітичним методом знаходження рішення задач ЛП.

Сучасна електронно-обчислювальна техніка у вигляді персональних комп’ютерів (ПК) має потужне математичне забезпечення, яке підтримує економіко-математичні задачі. У тому числі це стосується такої програмної системи загального призначення як середовище EXCEL, де можуть бути реалізовані сімплекс-методом задачі ЛП. Таблична програма EXCEL дозволяє зберігати та обробляти інформацію задач ЛП у формі електронних таблиць [22]. За допомогою ПК оптимізаційні економічні задачі ЛП можуть бути реалізованими практично з любою розмірністю. Але при невеликій кількості змінних у задачі ЛП $\left(n \le 6...8\right)$ вона може бути вирішена сімплекс-методом і ручним способом.

Алгоритм сімплекс-методу докладно описаний у посібнику [22], інформація про що рекомендується для використання у самостійній та науковій роботі студентів. В розглядаємій темі доцільно показати основні етапи алгоритму методу, підкріплені їх геометричною інтерпретацією.

У загальному випадку *рішення основної задачі ЛП сімплекс-методом* складаються з трьох частин:

а) виключення обмежень-рівнянь, які у вхідних даних розглядаються як 0-рівняння;

б) знаходження опорного (або допустимого) рішення;

в) знаходження оптимального рішення.

У кожному з трьох частин використовується такий чисельний спосіб як *модифіковані жорданові виключення* [22]. Така схематизована операція складається із переміни ролями залежної змінної y_r та незалежної x_S в системі лінійних обмежень за певними правилами.

Виключення обмежень-рівнянь (3.8) має на меті наступний розгляд обмежень тільки з r нерівностями. При цьому $(m\text{-}r)$ змінних x_j набувають певного значення і стільки ж 0-рівнянь виключаються з подальшого розгляду.

Знаходження опорного рішення в геометричній інтерпретації відповідає тому, що досягається одна з вершин многогранника допустимих рішень.

Знаходження оптимального рішення геометрично означає цілеспрямований перехід після кожного шагу модифікованого жорданова виключення від однієї вершини многраннника допустимих рішень до другої його вершини вздовж ребер цього многогранника для того, щоб кожне наступне рішення уточнювало попереднє і в результаті була досягнута найбільш (найменш) віддалена вершина від площини рівня, що відповідає оптимальному рішенню для цільової функції.

Алгоритм сімплекс-методу є *монотонним* і *кінцевим* (рішення змінюється в одному напрямку і досягається за кінцевим числом кроків).

3.2.2. Двійчасті задачі ЛП та їх економічна інтерпретація

З кожною задачею ЛП можна зв'язати іншу лінійну задачу, яка називається **двійчастою**. При цьому розглядаєма первинна задача по відношенню до своєї двійчастої називається **прямою**.

Нижче наведемо економіко-математичні моделі прямої основної та двійчастої задач ЛП. Розглянемо випадок обмежень у вигляді нерівностей.

Пряма задача:	***Двійчаста задача:***	
$Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to max;$	$W = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to min;$	(3.11)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; (i = 1...m);$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge p_j \; (j = 1...n);$	(3.12.)
$x_j \ge 0 \; (j = 1...n);$	$u_i \ge 0 \; (i = 1...m),$	(3.13)

де W – цільова функція двійчастої задачі; u_i – змінні у цій задачі.

Двійчаста задача може бути получена з основної за такими правилами:

1) праві частини обмежень основної задачі $b_1, b_2, ..., b_m$ виступають коефіцієнтами цільової функції двійчастої задачі, а коефіцієнти цільової функції основної задачі $p_1, p_2, ..., p_n$ є правими частинами обмежень двійчастої задачі;
2) матриця коефіцієнтів обмежень двійчастої задачі A' може бути полученою транспонуванням матриці коефіцієнтів основної задачі A;
3) знаки обмежень двійчастої задачі $(\ge)$ протилежні знакам обмежень основної задачі $(\le)$;
4) максимізація цільової функції Z основної задачі змінюється на мінімізацію цільової функції W двійчастої задачі;
5) кількість обмежень однієї задачі співпадає з кількістю змінних у другій задачі;

6) умови невід'ємності змінних зберігаються в обох задачах.

Вирішуя основну задачу ЛП, ми одночасно вирішуємо двійчасту їй задачу і навпаки. При цьому максимум цільової функції основної задачі Z співпадає зі значенням мінімума цільової функції двійчастої задачі W. Рішення обох задач проводиться сімплекс-методом, хоча існує і другий шлях вирішення двійчастих задач з використанням двійчастого сімплекс-методу, який описаний у спеціальній літературі.

Двійчасті задачі використовуються в економічній практиці досить часто. Наведемо приклад економічної інтерпретації двійчастої задачі при вирішенні проблеми з оптимального використання ресурсів, що була описана раніше у п. 3.1.2.

У прямій задачі ЛП потрібно було знайти кількість випускаємої продукції кожного виду x_j $(j=1...n)$ при наявності обмежених ресурсів b_i $(i=1...m)$, щоб підприємство отримало максимальний прибуток Z_{max} від реалізації цієї продукції.

Припустимо, що з будь-яких причин підприємство відмовляється від виробництва даної продукції та вирішує продати свої ресурси деякій організації. Виникає питання: за якою ціною організація стала б купувати запропановані їй ресурси? Така задача розглядається як двійчаста до наведеної прямої.

Змінними у двійчастій задачі u_i $(i=...m)$ позначимо ціни за одиницю ресурсів i-го виду. Тоді кожна складова прибутку у обмеженнях (3.12) $a_{ij}u_i$ може розглядатися як прибуток від реалізації i-го виду ресурсів, який пішов би на виготовлення j-го виду одиниці продукції. Ліва частина обмежень (3.12) – це прибуток від реалізації всіх m ресурсів, які призначені для виготовлення одиниці j-го виду продукції. Ясно, що підприємство не стане продавати ресурси, якщо прибуток від цієї продажі буде менше прибутку p_j від переробки ресурсів на виготовлення одиниці продукції j-го виду. Цей факт ілюструється у цілому кожним обмеженням (3.12) двійчастої задачі. З другої сторони, загальна вартість усіх запасів ресурсів, які організація хоче придбати, складає W. В результаті формується економіко-математична модель двійчастої задачі за формулами (3.11)-(3.13).

3.2..3. Методи вирішення транспортної задачі та її моделі

Метою **транспортної задачі** є таке планування перевезень вантажу від постачальників до споживачів, щоб забезпечити мінімальні транспортні витрати.

Введемо позначення: x_{ij} - змінні, які підлягають розшуку та виражають кількість вантажу, який перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача ($i=1...m,\ j=1...n$); c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача; a_i – кількість одиниць вантажу у i-го постачальника; b_j – кількість одиниць вантажу, яка потрібна j-му споживачу.

На практиці при перевезенні вантажів може виникнути одна з трьох ситуацій.

1. Кількість одиниць вантажу у постачальників відповідає попиту з боку споживачів, що відображається в умові балансу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{3.14}$$

Така економіко-математична модель транспортної задачі називається **закритою** та з урахуванням умови (3.14) вона має вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min; \tag{3.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \ (i = 1...m); \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \ (j = 1...n); \tag{3.16}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1...m, j = 1...n). \tag{3.17}$$

Дана транспортна задача є **збалансованою**.

У наведених виразах формула (3.15) відповідає цільовій функції з мінімізації транспортних витрат. Формули (3.16) є обмеженнями задачі: перша формула характеризує те, що весь вантаж від постачальників має бути вивезеним; друга формула відтворює той факт, що попит споживачів задовільнений. Формули (3.17) є умовою невід'ємності змінних.

2. Кількість вантажу у постачальників більше попиту у ньому з боку споживачів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (3.18)$$

Це означатиме, що частина вантажу у постачальників залишиться, а споживачі отримають весь потрібний їм вантаж. Тому знак у першому обмеженню (3.16) зміниться з "=" на "$\leq$". Інші формули розглянутої моделі (3.15)-(3.17) залишаться такими ж.

3. Кількість вантажу у постачальників менше попиту в ньому у споживачів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (3.19)$$

Це означатиме, що кожен постачальник увесь свій вантаж вивезе, а частина споживачів отримає вантажу менше відповідної кількості. Тому друге обмеження у формулах (3.16) буде мати знак "$\leq$". Інші формули моделі (3.15)-(3.17) залишаться без зміни.

Економіко-математичні моделі у ситуаціях 2 і 3 називаються **відкритими**, а самі задачі – **незбалансованими**.

У всіх трьох розглянутих моделях *кількість основних змінних* складає $m*n$, а *кількість обмежень* – $(m+n)$.

Найбільш простою та часто використовуємою є закрита модель (3.15)-(3.17). З особливостями реалізації відкритих моделей можна познайомитися у спеціальній літературі [22].

До методів реалізації транспортної задачі можуть бути віднесені методи з двох груп:

1) спеціальні методи вирішення транспортної задачі;
2) симплекс-метод.

До **спеціальних методів** вирішення транспортної задачі відносяться такі: *метод північно-західного кута; метод мінімального елементу; метод потенціалів*. Вони докладно описані у посібнику [10] і призначені, в основному, для реалізації ручним способом при невеликої кількості постачальників (m) та споживачів (n).

У теперішній час, коли у практичній діяльності широко використовуються ПК, транспортна задача (як збалансована так і незбалансована) практично необмеженого розміру легко реалізується *сімплекс-методом* на ПК у середовищі EXCEL. Порядок задання вхідних даних для ПК та отримання результатів вирішення транспортної задачі надані у главі 12 посібника.

3.3. Інші лінійні та нелінійні методи знаходження оптимальних рішень економічних задач

3.3.1. Лінійні методи оптимізаційних задач

До **лінійних оптимізаційних методів**, крім розглянутого метода ЛП, можуть бути віднесені такі: цілочисельне програмування; параметричне програмування; дрібно-лінійне програмування; стохастичне програмування; теорія ігор; метод найскорішого спуску та ін.

Цілочисельне програмування, як частковий випадок ЛП, припускає, що значення змінних (наприклад, кількість одиниць обладнання, машин тощо) та цільової функції є дискретними, або цілочисельними. Такі задачі можуть бути вирішені сімплекс-методом. Але при цьому за пропозицією американського математика Р.Гоморі (1956 р.) система обмежень задачі ЛП доповнюється лінійними обмеженнями, які забезпечують цілочисельність рішення. Такі обмеження називають *перерізом Гоморі* і вони складаються з дрібної частини чисел.

Так, для лінійного обмеження у задачі ЛП

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;\left(i = 1...m\right) \qquad (3.20)$$

переріз Гоморі записується у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \le t_i \;\left(i = 1...m\right), \qquad (3.21)$$

де $t_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}]$; $t_i=b_i-[b_i]$; $[a_{ij}]$, $[b_i]$ – найбільша ціла частина коефіцієнтів a_{ij}, b_i; t_{ij}, t_i – невід’ємні дрібні частини коефіцієнтів a_{ij}, b_i.

Параметричне програмування використовується на практиці у випадках, коли досліджується стійкість рішення, тобто у вивченні поведінки оптимального рішення в залежності від варіації коефіцієнтів обмежень і цільової функції.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} & Z_t = \sum_{j=1}^{n} \left(p_j + tq_j\right) x_j \to max; \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i = 1 \ldots m\right); \\ & x_j \ge 0 \ \left(j = 1 \ldots n\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

де t – параметр, який змінюється у інтервалі $t_a \le t \le t_b$; t_a, t_b – деякі дійсні числа; q_j – коефіцієнти цільової функції ($j=1\ldots n$).

Для фіксованих за відповідною програмою значень параметра $t=\alpha$ в заданому інтервалі $[t_a, t_b]$ вирішується задача ЛП із знаходженням такого t, для якого досягається $max\ Z_t$.

Дрібно-лінійне програмування має значну роль у тих випадках, коли використовуються не абсолютні, а відносні показники, для яких треба знати екстремальне рішення (максимальне або мінімальне).

У такому разі математична модель задачі має вид:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j} \to max\left(min\right);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i = 1 \ldots m\right); \qquad (3.23)$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = 1 \ldots n\right),$$

де c_{1j}, c_{2j} – коефіцієнти, які задаються для цільової функції.

Задача вирішується сімплекс-методом.

Стохастичне програмування – це один з найперспективніших напрямків у розвитку математичного програмування. У вище розглянутих методах ЛП вхідні дані (коефіцієнти цільової функції та обмежень) і результати розрахунку (змінні, які забезпечують оптимальність рішення) є *детермінованими* величинами. Вони вибирались та знаходились в умовах визначеності та повної інформації. Але в ряді задач планування і управління доводиться часто зустрічатися з випадками, коли вхідні дані та рішення на їх основі носять випадковий (ймовірний характер). Такі задачі математичного програмування та засновані на них моделі називають *стохастичними (ймовірними).* Вони відрізняються від детермінованих задач тим, що рішення приймається в умовах *ризику* та *невизначеності* інформації. Особливістю задач стохастичного програмування є прийняття довірчих інтервалів вихідних даних та отримання значення цільової функції із певною мірою ймовірності.

Для вирішення задач стохастичного програмування існують методи, з якими можна познайомитись у спеціальній літературі, зазначеній у [22]. В останні роки набувають розвитку нелінійні методи і засновані на них моделі стохастичного програмування.

Теорія ігор була запропонована при розробці моделей економічних систем на початку XX ст. (Дж. фон Нейман) і в наступний час апарат теорії ігор, як і математичного програмування, використовується для знаходження оптимальних рішень.

Як і стохастичне програмування, особливістю теорії ігор є те, що вибір рішення здійснюється в умовах невизначеності та відсутності повної інформації про розглядаєме явище. Але на відміну від стохастичного програмування рішення в теорії ігор визначається в умовах *конфліктної ситуації* учасників процесу або явища. Гра цих учасників при неспівпаданні їх інтересів є моделлю конфліктної ситуації.

У простішому випадку гри двох партнерів, один з яких хоче виграти, а другий – не програти, перед кожним ігроком виникає задача вибору оптимальної змішаної стратегії, щоб математичне очікування виграшу (проіграшу) при найкращій ігрі суперника було б найбільшим (найменшим). Це математично означає, що оптимальна стратегія повинна максимізувати (мінімізувати) величину мінімума (максимума) математичного очікування виграшу. Докладно основні поняття теорії ігор надані у посібнику [22].

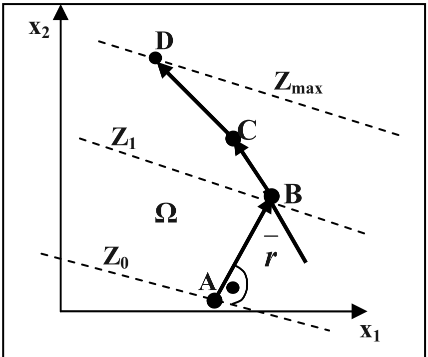


Рисунок 3.1 – Пошук оптимального рішення МНС

Метод найскорішого спуску (МНС) є обчислювальним інструментом у вирішенні оптимізаційних задач і виступає альтернативою до методу ЛП. Тут потрібно більше обчислень для кожної ітерації (знаходження цільової функції та змінних в однієї з вершин многогранника допустимих рішень) порівняно з симплекс-методом, однак оптимальне рішення може бути знайдено за меншу кількість ітерацій. Ідея МНС ілюструється на рис. 3.1.

Згідно з МНС пошук оптимального рішення починається з деякої точки ***A*** усередині області допустимих рішень *Ω*. Пошук продовжується в напрямі вектора-градієнта $\bar{r}$ цільової функції *Z* до тих пір, поки не буде досягнута точка ***B*** $(Z_1>Z_0)$ на границі області допустимих рішень. У знайденій точці напрям пошуку змінюється у відповідності з напрямом ребер многокутника області *Ω*. Подальший рух за напрямом вектора-градієнта $\bar{r}$ обгрунтовується тим, що в цьому напрямку збільшення цільової функції відбувається у найбільшій мірі $(Z_i>Z_{i-1})$. Нарешті досягається точка ***D***, де має місце Z_{max}.

Така ж процедура використовується в разі нелінійних обмежень та нелінійної цільової функції, де застосування цього методу найбільш доцільне.

3.3.2. Нелінійні методи оптимізації

До **нелінійних методів** знаходження оптимізаційних рішень, які використовуються в економічній практиці, відносяться такі методи нелінійного програмування: випукле програмування; динамічне програмування; стохастичне програмування та ін. У нелінійних задачах широко застосовується МНС.

Нелінійне програмування (НП) – це сукупність ряду спеціальних методів, у яких цільова функція і обмеження є нелінійними функціями відносно змінних.

У загальному вигляді задача НП може бути надана у такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} & z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \rightarrow max\left(min\right); \\ & g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le b_i \;\; \left(i = 1...m\right); \\ & x_j \ge 0 \;\; \left(j = 1...n\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3.24)$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – нелінійні залежності цільової функції та обмежень.

Окремі методи нелінійного програмування надані нижче.

Випукле програмування може бути розглянуте як спрощений метод загальної задачі НП.

У методі мінімізується *випукла цільова функція* і область допустимих рішень представляється *випуклою множиною*. Випукла цільова функція має важливу властивість: любий мінімум у області допустимих рішень є глобальним і відсутні локальні мінімуми. Для приклада у функції з одною незалежною змінною $y=f(x)$ її випуклість означає, що графік функції завжди знаходиться по один бік від відрізка прямої ***AB***, який з'єднує точки ***A*** та ***B*** (рис. 3.2): $f(\alpha)>f(\gamma)<f(\beta)$.

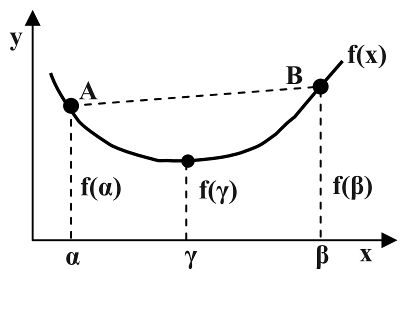


Рисунок 3.2 – Приклад випуклої функції

Різновидністю випуклого програмування є **квадратичне програмування**, де в якості цільової виступає квадратична функція, а обмеження – лінійні.

Динамічне програмування є одним із варіантів нелінійного програмування, предметом якого є *задачі оптимального планування*. Цей метод використовується в економічній практиці для знаходження оптимальних рішень в задачах за часом з багатошаговою структурою (типу п'ятирічки, року, кварталу, місяця тощо).

Однією з найбільш розповсюджених задач динамічного програмування є задача американського математика Р.Беллмана про *оптимальний розподіл капіталовкладень*, яка вирішує проблему такого розподілу ресурсів між підприємствами об'єднання за кількома етапами планування, щоб сумарний прибуток від цього розподілу для об'єднання був максимальним. Зокрема, у випадку об'єднання з двома підприємствами *функціональне рівняння Беллмана* визначає сумарний прибуток *F(x)* від *n* періодів планування:

$$F_n(x) = \max_{0 \le y \le x}\{f(y) + g(x-y) + F_{n-1}[ay + b(x-y)]\}, \qquad (3.25)$$

де x – об'єм ресурсів у розпорядженні об'єднання; y – кількість ресурсів, виділених для одного підприємства; $f(y)$, $g(x-y)$ – відомі функції, що виражають прибуток підприємств після одного періоду планування; a, b - параметри, які відповідають витратам виробництва на випуск і реалізацію продукції та зменшенню ресурсів до начала другого періоду планування $(0 \le a \le 1; 0 \le b \le 1)$.

Рішення задачі полягає у послідовному знаходженню функцій $F_1(x)$, $F_2(x)$, ...$F_n(x)$.

Запитання для самоконтролю

3.2.1. Які методи існують при вирішенні задач ЛП?
3.2.2. Пояснити суть графічного методу. Коли він може бути використаний?
3.2.3. Пояснити принципову суть сімплекс-методу.
3.2.4. Яка задача ЛП називається двійчастою?
3.2.5. Як із прямої задачі ЛП можна получити запис двійчастої задачі?
3.2.6. Навести приклад економічної інтерпретації двійчастої задачі ЛП.
3.2.7. Пояснити суть транспортної задачі.
3.2.8. Яка модель транспортної задачі називається закритою? відкритою?
3.2.9. Які випадки мають місце для відкритих моделей? Як це позначається на обмеженнях задачі?
3.2.10. Пояснити суть цілочисельного програмування.
3.2.11. Які обмеження називаються “перерізом Гоморі”? Яка їх структура?
3.2.12. В яких випадках використовується на практиці параметричне програмування?
3.2.13. В яких випадках використовується дрібно-лінійне програмування?
3.2.14. Пояснити суть стохастичного програмування.
3.2.15. В яких випадках може бути використаний апарат теорії ігор?
3.2.16. Пояснити суть методу найскорішого спуску.
3.2.17. В яких випадках використовується нелінійні методи знаходження оптимізаційних рішень?
3.2.18. Сформулювати задачу випуклого (квадратичного) програмування.
3.2.19. Яка функція називається випуклою?
3.2.20. В яких випадках використовується динамічне програмування?
3.2.21. Пояснити суть динамічного програмування на прикладі задачі про оптимальний розподіл капіталовкладень.

Глава 4. Сітьове моделювання

4.1. Сітьова модель та її елементи

4.1.1. Призначення та використання сітьового планування та управління

Для створення складної продукції та крупних об'єктів у відповідний термін необхідно зв'язати виконання робіт між багатьма виконавцями за часом, вартістю, ресурсами, іншими техніко-економічним показникам. Така зв'язка здійснюється за допомогою планування та управління в рамках спеціальної *економіко-математичної моделі*, де відображаються процеси проектування та виготовлення виробів. Така модель найбільш ефективно може бути описана *методами сітьового планування та управління* (СПУ) при використанні сітьових графіків.

Прообразом сітьового графіку були використовуємі у США на початку 50-х років ХХ ст. стрічкові графіки, які використовували лише перелік робіт. Наприкінці 50-х років у США використовують методи аналогічні сітьовому моделюванню: СРМ – метод критичного шляху, який використовувався при управлінні будівельними роботами; PERT – метод оцінки та огляду програм при розробці системи озброєння «Пала рис». Потім роботи з сітьового моделювання починають інтенсивно проводитись у СРСР.1ё

Сітьовий графік, або **сітьова модель**, являє собою безмасштабне графічне зображення плануємого процесу та відтворює взаємозв'язок і послідовність складаємих його робіт.

Система СПУ охоплює такі *етапи* планування та управління комплексом робіт:

1) *виявлення робіт*, які необхідно виконати в процесі проектування та виготовлення виробів;
2) *побудова сітьового графіку* на підставі попередньо зіставленого переліку робіт та зв'язків між ними;
3) *встановлення кількісних оцінок* з кожної роботи (час, вартість, ресурси);
4) *розрахунок параметрів* сітьового графіку;
5) *аналіз і оптимізація* сітьового графіку з метою отримання оптимальних показників (мінімальний час

робіт, мінімальна вартість робіт, максимальна економія ресурсів);

6) *використання* сітьового графіку для *управління ходом робіт*.

Найбільш розробленою у вітчизняній практиці є система СПУ, в якій для початкової інформації використовується тільки *час* (часові параметри) і відсутні дані про вартість робіт і витрачені ресурси. За допомогою такої системи здійснюється розрахунок і оптимізація за часом процесу виконання комплексу робіт.

4.1.2. Елементи сітьового графіку

В основі сітьового графіку лежить *теорія графів*. **Граф** це схема, що об'єднує задані точки - *вершини*, які з'єднуються між собою системою ліній. Ці лінії називаються *ребрами* або *дугами* графа.

В сітьових графіках використовуються *звичайні* (без кратних ребер), *орієнтовані* (дуги з стрілками), *плоскі* (зображені на площині) графи.

Головними елементами сітьового графіку є *роботи та події*.

Роботами називають любі простягнуті за часом дії, які приводять до досягнення певних результатів; роботи відповідають дугам графа. Тривалість роботи вимірюється в одиницях часу (години, дні, тижні, декади та ін.).

У сітьовому графіку можуть бути декілька різновидностей робіт: дійсна робота; очікування; фіктивна робота. *Дійсною* є робота, яка вимагає витрат часу і ресурсів (наприклад, виготовлення вузла машини, складання програми для ПК тощо). *Фіктивна робота* відображує логічний зв'язок між роботами і не вимагає витрат часу і ресурсів (наприклад, передача креслень від конструкторського бюро до цеху для виготовлення деталі, передача програми для ПК оператору з метою вводу її в оперативну пам'ять та наступного коректування і т.ін.). *Очікуванням* називається робота, яка потребує витрат часу, але не потребує витрат ресурсів (наприклад, процес затвердіння бетону, дозрівання вражаю тощо).

Дійсні роботи та очікування зображаються на графіку безперервними лініями; фіктивні роботи – пунктирними лініями; кількісні показники робіт (час) проставляються цифрами над стрілками (рис. 4.1).

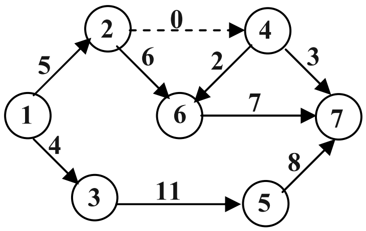


Рисунок 4.1 – Приклад сітьового графіку

Події являють собою момент звершення роботи; вони позначаються на сітьовому графіку кружками, усередені кружка – номер події (див. рис. 4.1).

Розрізняють *попередні* події для даної роботи *i* та *послідовні* події *j*. Робота між подіями *i* та *j* позначається як (*i, j*).

Подія у графіку, яка відображує начало комплексу робіт, називається *восхідною I* (подія 1 на рис. 4.1). Подія, яка відображує кінцеву мету комплексу робіт, називається *завершувальною C* (подія 7 на рис. 4.1).

Послідовність робіт, яка приводить від одної події до другої і в якій кожна робота зустрічається не більше одного разу, складає *повні шляхи*. Може бути декілька *повних шляхів* від восхідної події *I* до завершувальної події *C*. Повний шлях, який має найбільшу тривалість, називається *критичним*.

4.1.3. Порядок і правила побудови сітьового графіку

Порядок побудови сітьового графіку такий:

1) планує́мий процес на начальному етапі розбивається на окремі роботи, складається перелік робіт і послідовність їх виконання, роботи закріплюються за відповідальними виконавцями;
2) оцінюється тривалість кожної роботи;
3) складається сітьовий графік;
4) розраховуються параметри часу подій та робіт, визначаються резерви часу та критичний шлях;

5) проводиться аналіз і оптимізація сітьового графіку, який при необхідності викреслюється заново з перерахуванням параметрів подій та робіт.

Правила побудови сітьового графіку:

1) графік викреслюється зліва направо, від восхідної події до завершувальної;
2) довжина та нахил стрілок, які відображають роботи на графіку, значення не мають;
3) на графіку не повинно бути контурів, тобто замкнених шляхів, які з'єднують події з ними ж самими;
4) пара подій не може бути з'єднаною більше чим одною роботою (стрілкою), для усунення чого вводиться додаткова подія з фіктивною роботою;
5) на графіку не може бути хвостових подій (крім восхідної): наприклад, що б в подію 3 не входила ні одна з робіт;
6) на графіку не може бути тупікових подій (крім завершувальної): наприклад, що б із події 3 не виходила ні одна робота.

Нумерація под*ій* проводиться після побудови графіку. Перевага віддається такій нумерації, де номер попередньої події для кожної роботи менше номера наступної події. Для досягнення цього восхідної події присвоюється номер 1. Потім викреслюються всі роботи, які виходять із даної події, після чого декілька подій будуть без вхідних робіт. Таким подіям присвоюються номера 2, 3, 4, …N_1 (*події першого рангу*). Далі викреслюються всі роботи, які виходять із подій першого рангу. Подіям, які залишились без вхідних робіт, надають номери N_1+1, N_1+2, ..., N_1+N_2 (*події другого рангу*) і т.ін. до завершувальної події. Приклад нумерації подій в сітьовому графіку показаний на рис. 4.2.

В результаті нумерації подій зазначеним вище способом получено, що для кожної роботи номер попередньої події менше номера наступної події.

Події першого рангу – 2, 3; події другого рангу – 4, 5; події третього рангу – 6, 7; події четвертого рангу – 8, 9; подія п'ятого рангу – 10.

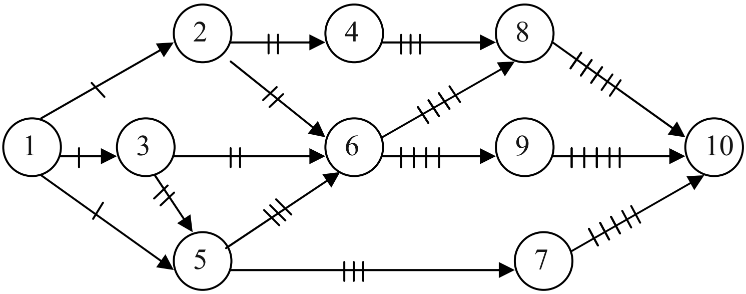


Рисунок 4.2 – Нумерація подій на сітьовому графіку

4.2. Параметри сітьової моделі

4.2.1. Параметри часу подій

Параметрами часу подій для сітьового графіку є такі:

1) найбільш ранній термін завершення події;
2) найбільш пізній термін завершення події;
3) резерв часу завершення події.

Подія розглядається *завершеною*, якщо закінчилось виконання всіх робіт, які входять у цю подію.

Найбільш ранній термін завершення події j показує мінімальний час завершення цієї події і знаходиться шляхом максимізації тривалості часу, попередної до цієї події. Розрахунок найбільш ранніх термінів завершення подій починається від восхідної події I і закінчується завершувальною подією C. Для любої події j, яка є наступною до події i, найбільш ранній термін її звершення T_j^p розраховується за формулою:

$$T_j^p = max\left(T_j^p + t_{ij}\right), \qquad (4.1)$$

де $T^p{}_i$ – найбільш ранній термін завершення події i, восхідної до j; t_{ij} – час виконання роботи (i, j).

Найбільш пізній термін завершення події i показує максимально допустимий час завершення цієї події, який знаходиться шляхом мінімізації тривалості часу, наступної за подією i. Розрахунок найбільш пізніх термінів завершення події

$T_j^П$ починається з завершувальної події C та закінчується восхідною подією I за такою формулою:

$$T_i^П = min\left(T_i^П - t_{ij}\right), \qquad (4.2)$$

де $T_j^П$ – найбільш пізній термін завершення події j, наступної до події i.

Резерв часу завершення події j показує, на який термін може бути збільшена тривалість роботи між подіями розглядаємого шляху L_{IC} без зміни терміну закінчення завершувальної події.

Резерв часу завершення події R_j розраховується за формулою:

$$R_j = T_j^П - T_j^P. \qquad (4.3)$$

В результаті проведенного розрахунку частка подій графіку, у тому числі події I та C, можуть мати резерв часу, рівний нулю. Ці події розглядаються критичними та всі повні шляхи, які проходять через ці події та мають максимальну тривалість $L_{кр}$, будуть *критичними*.

4.2.2. Параметри часу робіт

До **параметрів часу робіт** сітьового графіку відносяться:

1) ранній термін початку роботи;
2) ранній термін закінчення роботи;
3) пізній термін початку роботи;
4) пізній термін закінчення роботи;
5) повний резерв часу робіт.

Ранній термін початку роботи (i, j) співпадає з найбільшим раннім терміном завершення події i та розраховується за формулою:

$$T_{ij}^{РП} = T_i^P. \qquad (4.4)$$

Ранній термін закінчення роботи визначається формулою

$$T_{ij}^{РЗ} = T_i^P + t_{ij}. \qquad (4.5)$$

Пізній термін початку роботи характеризується виразом

$$T_{ij}^{ПП} = T_i^П - t_{ij}, \qquad (4.6)$$

Пізній термін закінчення роботи -

$$T_{ij}^{ПЗ} = T_i^{П}. \qquad (4.7)$$

В кожному сітьовому графіку існують роботи, у яких однакові терміни пізнього та раннього початку або закінчення робіт. Такі роботи лежать на критичному шляху та мають нульовий резерв часу. Роботи, які не лежать на критичному шляху, мають резерви часу. Такі резерви часу називають **повними резервами часу робіт**. Вони характеризують собою максимальні величини, на які може бути збільшений час виконання даної роботи без зміни терміну завершення комплексу робіт у цілому.

Повний резерв часу R_{ij} розраховується через параметри часу подій або робіт за одною з формул:

$$R_{ij} = T_j^{П} - T_i^{P} - t_{ij}; \qquad (4.8)$$

$$R_{ij} = T_{ij}^{ПН} - T_{ij}^{РН} \text{ або } R_{ij} = T_{ij}^{ПО} - T_{ij}^{РО}. \qquad (4.9)$$

4.2.3. Розрахунок параметрів часу сітьового графіку чотирьохсекторним способом

Для відображення параметрів часу подій на сітьовому графіку може бути використаний чотирьохсекторний спосіб (рис. 4.3). Він відрізняється від інших способів зручністю у практичному використанні та наочністю.

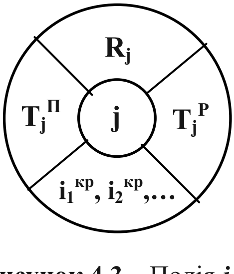


Рисунок 4.3 – Подія ***j*** у сітьовому графіку в чотирьохсекторному забраженні

В першу чергу для кожної події, починаючи з восхідної, за формулою (4.1) розраховується *найбільш ранній термін її завершення* T_j^P і записується у правий сектор відповідної події j.

У нижньому секторі позначаються *номери попередніх подій*, через які до даної йде шлях максимальної тривалості. Кількість таких номерів відповідає кількості попередніх подій, які лежать на шляху найбільшої тривалості. Далі для кожної події, починаючи з завершувальної, за формулою (4.2) розраховується *найбільш пізній термін її завершення* $T_j^П$ з записом у лівій сектор відповідної події. За формулою (4.3) розраховується *резерв часу* R_j , який записується у верхній сектор. Для знаходження **критичного шляху** необхідно продвигатися від завершувальної події до восхідної за номерами подій, які записані у нижньому секторі. Роботи критичного шляху виділяються на сітьовому графіку жирними лініями або подвійними стрілками.

4.2.4. Аналіз і оптимізація сітьового графіку

Аналіз сітьового графіку здійснюється для такого:

1) перевірки правільності оцінки часу критичних робіт і робіт, які мають максимальні резерви часу;
2) зіставлення встановленного терміну виконання комплексу робіт з терміном, який знайдений в результаті розрахунку параметрів часу сітьового графіку.

Головна ціль аналізу графіку з оцінкою часу подій та робіт полягає в знаходженні найбільш доцільних засобів досягнення оптимальних строків виконання комплексу робіт.

Головну увагу в сітьовому графіку необхідно звертати на критичні роботи. Збільшення або зменшення тривалості критичних робіт і критичного шляху може привести до зміни терміну завершення комплексу робіт у цілому. Для виконання запланованого комплексу робіт у заданий термін необхідно не тільки зв'язати цей термін із розрахованим на підставі сітьового графіку з відпущеними трудовими і матеріальними ресурсами, але й організувати виконання робіт, щоб складений за допомогою сітьового графіку план став реальністю.

Основою для *оптимізації сітьового графіку* є критичні шляхи (яких для графіка може бути декілька) і резерви часу.

Під **оптимізацією** сітьового графіка розуміють його послідовне перетворення, яке приведе до покращення організації комплексу робіт, більш розумному використанню ресурсів. Ці перетворення здійснюються за рахунок:

1) розподілу резервів часу між критичними роботами та роботами з мінімальним резервом часу, що фактично означає перекидання у розумних межах матеріальних і трудових ресурсів на вказані роботи, при чому технологічно однорідні і які виконуються в один і той же період часу;
2) прискорення використання робіт критичного шляху за допомогою залучення додаткових матеріальних і трудових ресурсів;
3) паралельного виконання робіт критичного шляху, якщо дозволяє технологія;
4) зміни технології виконання комплексу робіт.

Після проведення цих заходів сітьова модель перерозраховується з метою одержання нових значень параметрів часу та знаходження тривалості критичного шляху. Якщо новий варіант сітьового графіку теж не забезпечує виконання комплексу робіт у заданий строк, то процедура продовжується до отримання задовільненого результату.

Математичний апарат оптимізації сітьового графіку за декількома критеріями одночасно (наприклад, час, вартість, ресурси) відсутній. Тут можуть бути використані неформальні методи оптимізації – *евристичні*, які засновуються на попередньому досвіді, інтуїції робітника, на правдоподібних міркуваннях типу телевізійного “Клубу знавців”. Коли ж оптимізація проводиться за одним критерієм (наприклад, за часом), то можуть використовуватися методи математичного програмування.

Після оптимізації сітьового графіку за часом здійснюється прив’язування його до календаря. В результаті створюється план-графік проведення робіт, в якому вказуються дати наступу подій, початку та закінчення робіт, величини резерву часу і т.д. Цей документ передається відповідальним виконавцям, які розпочинають виконання робіт у відповідності з розробленим графіком.

Існують системи СПУ, де час виконання кожної роботи точно не відомий. Тоді тривалість робіт $\boldsymbol{t_{ij}}$ розглядаються як *випадкові* величини, а сіті – як *ймовірні* (на відміну від раніше розглядаємих детермінованих). Крім того, в умовах невизначеності невідомого наперед результату розглядаються *стохастичні* сіті.

Обробка реальних сітьових графіків (які містять у собі до десятка тисяч подій) виконуються за спеціально розробленими *пакетами прикладних програм для ПК*. Вони дозволяють контролювати правильність побудови сітьового графіка, об'єднувати часткові графіки в єдину сіть, нумерувати події, розраховувати параметри сіті, викреслювати графіки на механічних пристроях, прив'язувати до календаря.

Приклад 4.1. Для сітьового графіка на рис. 4.2 розрахувати параметри часу подій та робіт, визначити критичний шлях.

При визначенні параметрів часу подій використовується чотирьохсекторний спосіб фіксацій параметрів $\boldsymbol{j}$-ї події (див. рис. 4.3).

За формулою (4.1) розраховуються *найбільш ранні терміни завершення події* $\boldsymbol{T_j^P}$, які виносяться в правий сектор відповідних подій:

$\boldsymbol{T_1}^P = 0;$

$\boldsymbol{T_2}^P = \boldsymbol{T_1}^P + \boldsymbol{t_{1,2}} = 0+8=8;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 1;$

$\boldsymbol{T_3}^P = \boldsymbol{T_1}^P + \boldsymbol{t_{1,3}} = 0+2=2;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 1;$

$\boldsymbol{T_4}^P = \boldsymbol{T_2}^P + \boldsymbol{t_{2,4}} = 8+5=13;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 2;$

$\boldsymbol{T_5}^P = \mathbf{max}(\boldsymbol{T_1}^P + \boldsymbol{t_{1,5}},\ \boldsymbol{T_3}^P + \boldsymbol{t_{3,5}}) = \mathbf{max}(0+6,\ \underline{2+7})=9;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 3;$

$\boldsymbol{T_6}^P = \mathbf{max}(\boldsymbol{T_2}^P + \boldsymbol{t_{2,6}},\ \boldsymbol{T_3}^P + \boldsymbol{t_{3,6}},\ \boldsymbol{T_5}^P + \boldsymbol{t_{5,6}}) = \mathbf{max}(8+4,\ 2+10,\ \underline{9+12})=21;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 5;$

$\boldsymbol{T_7}^P = \boldsymbol{T_5}^P + \boldsymbol{t_{5,7}} = 9+9=18;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 5;$

$\boldsymbol{T_8}^P = \mathbf{max}(\boldsymbol{T_4}^P + \boldsymbol{t_{4,8}},\ \boldsymbol{T_6}^P + \boldsymbol{t_{6,8}}) = \mathbf{max}(13+4,\ \underline{21+3})=24;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 6;$

$\boldsymbol{T_9}^P = \boldsymbol{T_6}^P + \boldsymbol{t_{6,9}} = 21+5=26;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 6;$

$\boldsymbol{T_{10}}^P = \mathbf{max}(\boldsymbol{T_8}^P + \boldsymbol{t_{8,10}},\ \boldsymbol{T_9}^P + \boldsymbol{t_{9,10}},\ \boldsymbol{T_7}^P + \boldsymbol{t_{7,10}}) = \mathbf{max}(\underline{24+6},\ \underline{26+4}, 18+3) = 30;\ \boldsymbol{i_1}^{кр} = 8;\ \boldsymbol{i_2}^{кр} = 9.$

Знайдені величини заносимо у праві сектори подій сітьового графіка (рис. 4.4)

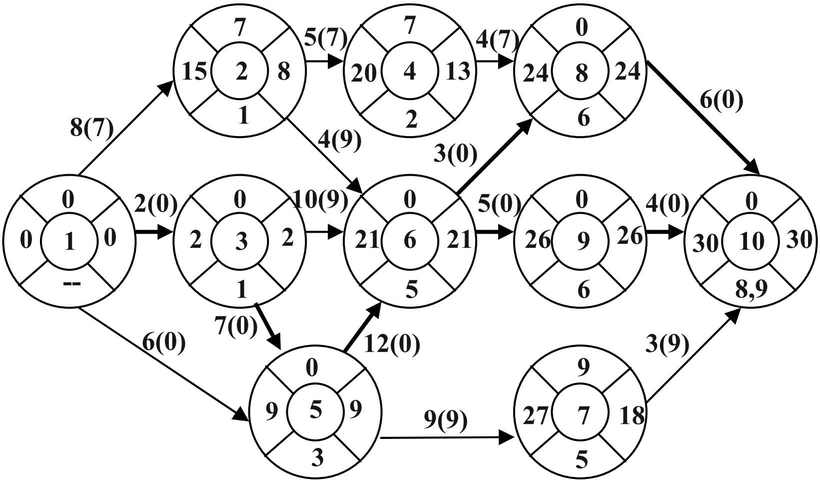


Рисунок 4.4 – Параметри часу подій та робіт сітьового графіка

Далі для кожної події, починаючи з завершальної, за формулою (4.2) визначаються *найбільш пізні терміни завершення подій* $\boldsymbol{T_j^{П}}$, які заносяться в лівий сектор відповідної події:

$$T_{10}^{П} = T_{10}^{р} = 30;$$
$$T_9^{П} = T_{10}^{П} - t_{9,10} = 30-4 = 26;$$
$$T_8^{П} = T_{10}^{П} - t_{8,10} = 30-6 = 24;$$
$$T_7^{П} = T_{10}^{П} - t_{7,10} = 30-3 = 27;$$
$$T_6^{П} = \min(T_8^{П} - t_{7,6},\ T_9^{П} - t_{6,9}) = \min(\underline{24-3},\ \underline{26-5}) = 21;$$
$$T_5^{П} = \min(T_6^{П} - t_{5,6},\ T_7^{П} - t_{5,7}) = \min(\underline{21-12},\ 27-9) = 9;$$
$$T_4^{П} = T_8^{П} - t_{4,8} = 24-4 = 20;$$
$$T_3^{П} = \min(T_6^{П} - t_{3,6},\ T_5^{П} - t_{3,5}) = \min(21-10,\ \underline{9-7}) = 2;$$
$$T_2^{П} = \min(T_4^{П} - t_{2,4},\ T_6^{П} - t_{2,6}) = \min(\underline{20-5},\ 21-4) = 15;$$
$$T_1^{П} = \min(T_2^{П} - t_{1,2},\ T_3^{П} - t_{1,3},\ T_5^{П} - t_{1,5}) = \min(15-8,\ \underline{2-2},\ 9-6) = 0.$$

Для кожної події за формулою (4.3) розраховуються *резерви часу* $\boldsymbol{R_j}$, заносяться у верхній сектор відповідної події:

$\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{T_1}^{П} – \boldsymbol{T_1}^{Р} = 0\text{-}0 = 0;$
$\boldsymbol{R_2} = \boldsymbol{T_2}^{П} – \boldsymbol{T_2}^{Р} =15\text{-}8 = 7;$
$\boldsymbol{R_3} = \boldsymbol{T_3}^{П} – \boldsymbol{T_3}^{Р} = 2\text{-}2 = 0;$
$\boldsymbol{R_4} = \boldsymbol{T_4}^{П} – \boldsymbol{T_4}^{Р} = 20\text{-}13 = 7;$
$\boldsymbol{R_5} = \boldsymbol{T_5}^{П} – \boldsymbol{T_5}^{Р} = 9\text{-}9 = 0;$
$\boldsymbol{R_6} = \boldsymbol{T_6}^{П} – \boldsymbol{T_6}^{Р} = 21\text{-}21 = 0;$
$\boldsymbol{R_7} = \boldsymbol{T_7}^{П} – \boldsymbol{T_7}^{Р} = 27\text{-}18 = 9;$
$\boldsymbol{R_8} = \boldsymbol{T_8}^{П} – \boldsymbol{T_8}^{Р} = 24\text{-}24 = 0;$
$\boldsymbol{R_9} = \boldsymbol{T_9}^{П} – \boldsymbol{T_9}^{Р} =26\text{-}26=0.$
$\boldsymbol{R_{10}} = \boldsymbol{T_{10}}^{П} – \boldsymbol{T_{10}}^{Р} =30\text{-}30=0.$

Для визначення *критичного шляху* $\boldsymbol{L_{кр}}$ необхідно просуватися від завершувальної події до восхідної за номерами подій, які записані в нижньому секторі. Роботи критичного шляху, які зустрічаються в процесі просування, виділяються жирними лініями (див. рис. 4.4).

Виявилося, що побудований сітьовий графік має два критичних шляхи:

а) *перший критичний шлях* проходить через події 1, 3, 5, 6, 8, 10 і має тривалість

$$L_{КР1} = 2+7+12+3+6=30;$$

б) *другий критичний шлях* проходить через події 1, 3, 5, 6, 9, 10 з тривалістю

$$L_{КР2} = 2+7+12+5+4=30.$$

Тривалість критичного шляху $L_{КР} = L_{КР1} = L_{КР2} = 30$. Події 2, 4 і 7 розглядаємого графіка мають резерви часу (відповідно 7, 7 і 9 одиниць часу). Резерви часу інших подій дорівнюють нулю. Якщо повністю використати, наприклад, резерв часу події 4, то резерв часу події 2, яка лежить на тому ж шляху, можна зробити рівним нулю.

Використавши значення параметрів часу, можна розрахувати *повні резерви часу робіт* за формулою (4.8):

$\boldsymbol{R_{1,2}} = \boldsymbol{T_2}^{П} – \boldsymbol{T_1}^{Р} – \boldsymbol{t_{1,2}} = 15\text{-}0\text{-}8 = 7;$
$\boldsymbol{R_{1,3}} = \boldsymbol{T_3}^{П} – \boldsymbol{T_1}^{Р} – \boldsymbol{t_{1,3}} = 2\text{-}0\text{-}2 = 0;$
$\boldsymbol{R_{1,5}} = \boldsymbol{T_5}^{П} – \boldsymbol{T_1}^{Р} – \boldsymbol{t_{1,5}} = 9\text{-}0\text{-}9 = 0;$
$\boldsymbol{R_{2,4}} = \boldsymbol{T_4}^{П} – \boldsymbol{T_2}^{Р} – \boldsymbol{t_{2,4}} = 20\text{-}8\text{-}5 = 7;$
$\boldsymbol{R_{2,6}} = \boldsymbol{T_6}^{П} – \boldsymbol{T_2}^{Р} – \boldsymbol{t_{2,6}} = 21\text{-}8\text{-}4 = 9;$

$\boldsymbol{R_{3,6}} = \boldsymbol{T}_6^{П} - \boldsymbol{T}_3^{Р} - \boldsymbol{t}_{3,6} = 21\text{-}2\text{-}10 = 9;$
$\boldsymbol{R_{3,5}} = \boldsymbol{T}_5^{П} - \boldsymbol{T}_3^{Р} - \boldsymbol{t}_{3,5} = 9\text{-}2\text{-}7 = 0;$
$\boldsymbol{R_{4,8}} = \boldsymbol{T}_8^{П} - \boldsymbol{T}_4^{Р} - \boldsymbol{t}_{4,8} = 24\text{-}13\text{-}4 = 7;$
$\boldsymbol{R_{6,8}} = \boldsymbol{T}_8^{П} - \boldsymbol{T}_6^{Р} - \boldsymbol{t}_{6,8} = 24\text{-}21\text{-}3 = 0;$
$\boldsymbol{R_{6,9}} = \boldsymbol{T}_9^{П} - \boldsymbol{T}_6^{Р} - \boldsymbol{t}_{6,9} = 26\text{-}21\text{-}5 = 0;$
$\boldsymbol{R_{5,6}} = \boldsymbol{T}_6^{П} - \boldsymbol{T}_5^{Р} - \boldsymbol{t}_{5,6} = 21\text{-}9\text{-}12 = 0;$
$\boldsymbol{R_{5,7}} = \boldsymbol{T}_7^{П} - \boldsymbol{T}_5^{Р} - \boldsymbol{t}_{5,7} = 27\text{-}9\text{-}9 = 9;$
$\boldsymbol{R_{8,10}} = \boldsymbol{T}_{10}^{П} - \boldsymbol{T}_8^{Р} - \boldsymbol{t}_{8,10} = 30\text{-}24\text{-}6 = 0;$
$\boldsymbol{R_{9,10}} = \boldsymbol{T}_{10}^{П} - \boldsymbol{T}_{10}^{Р} - \boldsymbol{t}_{9,10} = 30\text{-}26\text{-}4 = 0;$
$\boldsymbol{R_{7,10}} = \boldsymbol{T}_{10}^{П} - \boldsymbol{T}_7^{Р} - \boldsymbol{t}_{7,10} =3\ 0\text{-}18\text{-}3 = 9.$

Для зручності повні резерви часу можна записувати в сітьовому графіку у дужках поряд з тривалістю робіт (див. рис. 4.4).

У розглядаємому прикладі 7 робіт лежать на критичному шляху і повних резервів часу не мають. Інші 8 робіт лежать на ненапружених шляхах і тому мають повні резерви часу. Для кращого розуміння сутності повних резервів часу розглянемо подію 5. Вона лежить на трьох шляхах: (1, 3, 5, 6, 9, 10); (1, 3, 5, 6, 8, 10); (1, 3, 5, 7, 10). Перші два шляхи критичні і мають нульові резерви часу. Якщо повністю використати резерв часу роботи (5, 7), рівний 9, то резерв часу роботи (7, 10) можна зробити рівним нулю.

Повний резерв часу $\boldsymbol{R_{ij}}$ є важливим параметром сітьового графіка і поряд з тривалістю критичного шляху $\boldsymbol{L_{кр}}$ використовується при оптимізації сітьового графіка.

Запитання для самоконтролю

4.1. В яких випадках доцільно використовувати сітьові моделі?
4.2. Що являє собою сітьовий графік?
4.3. Які етапи планування та управління охоплює система СПУ?
4.4. Які елементи використовуються в сітьовому графіку?
4.5. Які види робіт використовуються в сітьових графіках?
4.6. Які події використовуються в сітьових графіках?
4.7. Які шляхи в сітьовому графіку називають повними? критичними?
4.8. Який порядок побудови сітьового графіку?

4.9. Які основні правила побудови сітьового графіку?
4.10. Як нумерують події в сітьовому графіку?
4.11. Які параметри часу подій використовуються в сітьовому графіку?
4.12. Що показує найбільш ранній термін завершення події і як він розраховується?
4.13. Що показує найбільш пізній термін завершення події і як він розраховується?
4.14. Що показує резерв часу завершення події і як він розраховується?
4.15. Які параметри часу використовуються в сітьовому графіку?
4.16. Як розраховується ранній термін початку та закінчення роботи?
4.17. Як розраховується пізній термін початку та закінчення роботи?
4.18. Що характеризують повні резерви часу робіт?
4.19. Як відображаються параметри часу подій з використанням чотирьохсекторного способу?
4.20. Як знаходиться критичний шлях сітьового графіку?
4.21. Для чого проводиться аналіз сітьового графіку?
4.22. В яких випадках здійснюється оптимізація сітьового графіку?
4.23. Що називають стохастичними сітями?
4.24. Як виконується обробка сітьових графіків за допомогою ПК?

Вправи

В задачах 4.1 та 4.2 побудувати сітьовий графік, знайти тривалість виконання комплексу робіт, параметри часу подій та робіт.

4.1. *Виготовити дерев'яний ящик*: розмітити доски у відповідності до розмірів ящика (15 хв.); розрізати доски (12); склеїти чистини ящика (40); прибити до кришки ящика петлі (8); почекати поки ящик висохне, протерти його (15); петлі з кришкою прибити до ящика (10).

4.2. *Замінити колесо машини*: достати домкрат та інструменти з багажника (40 с.); зняти диск колеса (30); висвободити колесо (50); поставити домкрат під машину (26); підняти машину (20); взяти запасне колесо з багажника (25); встановити запасне колесо на ось (10); не сильно загвинтити гайки на осі (40); опустити машину та забрати домкрат (25); поставити домкрат у багажник (10); загвинтити гайки на осі до кінця (20); покласти пошкоджене колесо та інструменти в багажник (40); поставити на місце диск колеса (10).

4.3. Для сітьового графіка (рис. 4.5) знайти всі повні шляхи; розрахувати ранні та пізні терміни завершення подій, початку та закінчення робіт; визначити резерви часу повних шляхів та подій, резерви часу робіт.

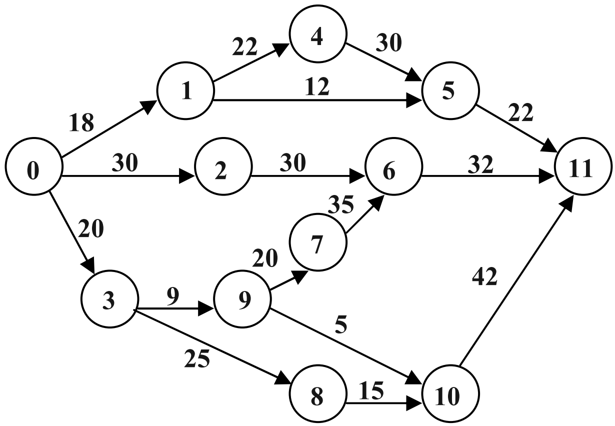


Рисунок 4.5 – Сітьовий графік виконання комплексу робіт проекту

4.4. Як зміниться термін виконання проекту (див. рис. 4.5), резерви часу робіт і подій, якщо збільшити тривалість роботи $t_{9,10}$ у 2 рази?

4.5. Як зміниться термін виконання проекту (див. рис. 4.5), резерви часу робіт і подій, якщо тривалість кожної роботи t_{ij} збільшити на величину повного резерву часу R_{ij}?

Глава 5. Балансовий метод і модель міжгалузевого балансу

5.1. Загальна постановка задачі міжгалузевого балансу

Суспільне виробництво повинно підпорядкуватись певним закономірностям і в першу чергу – збалансованості суспільного виробництва, коли кожен вироблений продукт повинен знаходити свого споживача і затарування наднормативними запасами недопустиме.

Баланси за продукцією різних галузей виявляються складно перемежованими між собою, тому при плануванні усередені галузі та між галузями в країні в цілому виникає потреба у розробці механізму, який враховував би ці перемежування. Таким механізмом є розробка моделі міжгалузевого балансу.

Суть **моделі міжгалузевого балансу** полягає у такому. Припускається, що кожна галузь, з однієї сторони, приймає участь у споживанні певного виду продукції як своєї, так і інших галузей. З другої сторони, одна частина продукції кожної галузі являє собою засоби виробництва, а друга частина – вибуває з сфери виробництва і надходить у фонди споживання та нагромадження. Якщо відомо, скільки продукції кожної галузі споживається в інших галузях і скільки має бути направлено у сферу споживання, то приступають до складання міжгалузевого балансу.

Метою рішення такої задачі є знаходження обсягу продукції в кожної *i*-ої галузі $X_i (i=1...n)$, якщо відомі обсяги продукції *i*-ої галузі, які споживаються у *j-ій* галузі x_{ij}, та обсяги продукції, які надходять безпосередньо у сферу споживання Y_i. У відповідності з балансовим принципом *виробництво має дорівнювати споживанню*, що приводить до **системи балансових рівнянь** *n*-го порядку розподілу продукції за галузями:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \ (i = 1...n). \quad (5.1)$$

5.2. Модель міжгалузевого балансу Леонтьєва. Коефіцієнти прямих витрат. Матрична форма балансових рівнянь

У системі балансових рівнянь (5.1) невідомими є не тільки обсяги виробництва галузей X_i, які підлягають знаходженню, а й обсяги споживання продукції в сфері виробництва x_{ij}. Тому у розглянутої системі рівнянь невідомих більше кількості рівнянь і вона має безмірну множину рішень.

Вихід із даної ситуації був запропонований американським економістом В.В.Леонтьєвим (1930 р.) на підставі вивчення структури економіки США у вигляді моделі міжгалузевого балансу.

Балансова модель Ле*онтьєва* базується на таких *припущеннях*:

1) розглядаємі галузі вважаються *чистими*, тобто продукція кожної галузі є однорідною (галузь випускає продукцію одного типу і різні галузі випускають різну продукцію);
2) розглядається *статична* технологія виробництва, яка не змінюється за певний період часу;
3) має місце *прямо пропорціональна* залежність між потоками продукції з одної галузі в другу x_{ij} та обсягами продукції X_i:

$$x_{ij} = a_{ij} X_i, \tag{5.2}$$

де a_{ij} – коефіцієнти прямих витрат ($a_{ij} \geq 0$).

Залежність (5.2) витікає із пропозиції В.В.Леонтьєва про те, що структура витрат у кожної галузі незмінна, тобто коефіцієнти a_{ij}, які характеризують структуру витрат, постійні: $x_{ij} / X_i = a_{ij} = cost.$

Коефіцієнти прямих витрат, як безрозмірні величини, мають подвійне економічне тлумачення. Якщо балансова модель розробляється у *натуральних вимірниках*, то величини a_{ij} характеризує кількість одиниць продукції i-ої галузі, необхідних для виготовлення одиниці j-го продукту. Якщо міжгалузевий баланс записується у *вартісних вимірниках*, то a_{ij} є доля вартості продукції i-ої галузі у вартості одиниці продукції j-ої галузі.

Підстановка залежності (5.2) у систему рівнянь (5.1) робить систему легко вирішувальною з одною групою невідомих - X_i.

Тоді остаточно *система рівнянь міжгалузевого балансу*, або економіко-математична **модель міжгалузевого балансу Леонтьєва**, буде мати вигляд:

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i = Y_i, \ (i = 1...n). \qquad (5.3)$$

Дана система рівнянь порядку *n* вирішується відносно *n* невідомих X_i.

Системі рівнянь (5.3) у *матричному запису* можна надати такого вигляду:

$$X = [E - A]^{-1} Y, \qquad (5.4)$$

де *X* – матриця-строка змінних $X=(x_j)$, $j=1...n$; *E* – одинична матриця порядку *n*; *A* – матриця коефіцієнтів прямих витрат порядку $n*n$; $[E-A]^{-1}$ – обернена матриця Леонтьєва; *Y* – матриця-стовпець правих частин рівнянь $Y=(b_i)$, $i=1...n$.

Приклад 5.1. Припустимо, що економіка регіону умовно розділена на чотири галузі: галузь промисловості, яка виробляє засоби виробництва (група А); галузь економіки, яка виробляє предмети споживання (група Б); сільське господарство; інші галузі. Міжгалузевий баланс цих галузей з вказівкою коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і кінцевої продукції наданий у виді умовних витрат даних у таблиці:

Таблиця 5.1

Споживаючі галузі / Виробляючі галузі	Валова продукція $\boldsymbol{X_i}$	Коефіцієнти прямих витрат $\boldsymbol{a_{ij}}$				Продукція у сфері споживання $\boldsymbol{Y_i}$
		Група А	Група Б	Сільське господарство	Інші галузі	
1. Група А	X_1	0,20	0,10	0,06	0,20	318
2. Група Б	X_2	0,05	0,20	0,04	0,15	76
3.Сільське господарство	X_3	0,10	0,05	0,04	0,10	67,5
4. Інші галузі	X_4	0,20	0,10	0,10	0,05	62

За наведеними даними необхідно знайти планове завдання випуску валової продукції X_i.

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь міжгалузевого балансу (5.3) з використанням наданих у таблиці коефіцієнтів прямих витрат a_{ij} (i, j=1…4) та значень продукції у сфері споживання Y_i:

$$\begin{cases} (1 - 0,2)\, X_1 - 0.1\, X_2 - 0.06\, X_3 - 0.2\, X_4 = 318\,, \\ -0.05\, X_1 + (1 - 0.2) X_2 - 0.04\, X_3 - 0.15\, X_4 = 76\,, \\ -0.1\, X_1 - 0.05\, X_2 + (1 - 0.04) X_3 - 0.1\, X_4 = 67.5\,, \\ -0.2\, X_1 - 0.1\, X_2 - 0.1\, X_3 + (1 - 0.05)\, X_4 = 62\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

Після спрощення система прийме вид:

$$\begin{cases} 0.8\, X_1 - 0.1\, X_2 - 0.06\, X_3 - 0.2\, X_4 = 318\,, \\ -0.05\, X_1 + 0.8\, X_2 - 0.04\, X_3 - 0.15\, X_4 = 76\,, \\ -0.1\, X_1 - 0.05\, X_2 + 0.96\, X_3 - 0.1\, X_4 = 67.5\,, \\ -0.2\, X_1 - 0.1\, X_2 - 0.1\, X_3 + 0.95\, X_4 = 62\,. \end{cases}$$

Вирішуя систему рівнянь, знаходимо значення невідомих: $\mathbf{X_1}$ = 480; $\mathbf{X_2}$ = 170; $\mathbf{X_3}$ = 150; $\mathbf{X_4}$=200. Це означає, що для получення заданих значень кінцевої продукції Y_i в умовних одиницях чотирьох галузей та задовільнення виробничо-експлуатаційних потреб цих галузей валова продукція промисловості за групою **А** повинна складати 480 од., галузі промисловості групи **Б** – 170 од., сільського господарства – 150 од. та інших галузей – 200 од.

Приклад 5.2. Використавши дані, получені в прикладі 5.1, розрахувати міжгалузеві постачання засобів виробництва x_{ij} та скласти міжгалузевий баланс для чотирьох розглянутих вище галузей економіки.

Розв'язання. Міжгалузеві потоки із однієї галузі в іншу x_{ij} розраховуються за формулою (5.2):

$$x_{ij} = a_{ij} X_j\,.$$

Помноживши надані у таблиці попередньої вправи коефіцієнти прямих витрат a_{ij} на получені значення валової продукції за галузями X_i (i= j=1…4), знайдемо розподіл продукції: галузі групи **А** для власних потреб x_{11} = 0,2 *480 = 96 од., галузі групи **Б** - x_{12} = 0,1 * 170 = 17 од., сільському господарству - x_{13} = 0,06*150 = 9 од., іншим галузям - x_{14} = 0,2*200 = 40 од. За аналогією знаходимо потоки галузі групи **Б** іншим галузям x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} та потоки інших галузей. Результати розрахунків розміщаємо в таблицю як баланс виробництва та розподілу продукції чотирьох галузей:

Таблиця 5.2

Споживаючі галузі / Виробляючі галузі	Валова продукція X_i	Коефіцієнти прямих витрат a_{ij}				Продукцію сфери споживання Y_i
		Група А	Група Б	Сільське господар-ство	Інші галузі	
Група А	480	96	17	9	40	318
Група Б	170	24	34	6	30	76
Сільське господарство	150	48	8,5	6	20	67,5
Інші галузі	200	96	17	15	10	62
Чиста продукція	-	216	93,5	114	100	-
Валова продукція	1000	480	170	150	200	-

Показники чистої продукції (передостанній рядок таблиці) знайдені як різниця валової продукції галузі та суми її виробничих витрат за своєю продукцією і продукції інших галузей (вони надані у відповідному стовпцю таблиці). Так, чиста продукція групи А є: 480 – (96 + 24 + 48 + 96) = 216. За аналогією обчислені інші показники цього рядка.

5.3. Коефіцієнти повних витрат

Обернену матрицю Леонтьєва $[E\text{-}A]^{-1}$ позначимо через B, а її елементи - через b_{ij}. Тоді система рівнянь міжгалузевого балансу буде мати вигляд

$$X=BY, \qquad (5.5)$$

де $B=(b_{ij})$, $i=1\ldots n$, $j=1\ldots n$.

Система рівнянь (5.5) виражає обсяг валової продукції виробляючих галузей X_i($i=1\ldots n$) через обсяги кінцевої продукції таких галузей Y_i, які надходять у сферу споживання.

Коефіцієнти b_{ij} матриці B називаються **коефіцієнтами повних витрат**. Їх економічне тлумачення полягає в тому, що вони показують, скільки потрібно випустити продукції в і-ої галузі, щоб була випущена одиниця кінцевої продукції *j*-ої галузі ($b_{ij} \geq 0$).

Матриця В рівняння (5.5) називається матрицею *повних витрат*.

Повні витрати включають у собі суму прямих та побічних витрат продукції галузі *i* на одиницю продукції галузі *j*. *Прямі* витрати виражають кількість засобів виробництва, витрачених безпосередньо на виготовлення даного продукту галузі. *Побічні* витрати мають відношення до попередніх стадій виробництва та входять у продукт не прямо, а через інші засоби виробництва.

Приклад 5.3. Розрахувати показники повних витрат за даними міжгалузевого балансу приклада 5.1.

Розв’язання. Як показано в п. 5.3, коефіцієнти повних витрат $\boldsymbol{b_{ij}}$ (i, j=1…n) відображають кількість продукції *i*-ої галузі, необхідної для випадку одиниці кінцевої продукції *j*-ої галузі. Тому, якщо в системі рівнянь (5.3) покласти $\boldsymbol{Y_1} = 1$, а $\boldsymbol{Y_2} = \boldsymbol{Y_3} = \ldots = \boldsymbol{Y_n} = 0$ та вирішити систему рівнянь відносно $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots , X_n}$, то це рішення дасть нам коефіцієнти повних витрат $\boldsymbol{b_{11}, b_{21}, \ldots , b_{n1}}$, які характеризують матеріальні витрати кожної галузі на випуск одиниці кінцевої продукції першої галузі. Таким же чином розраховуються інші коефіцієнти повних витрат: необхідно покласти в системі (5.3) $\boldsymbol{Y_2}$=1, а інші – рівними нулю, потім $\boldsymbol{Y_3}$=1, а інші – рівними нулю і так далі до $\boldsymbol{Y_n}$.

У відповідності до викладеного в розрахунках коефіцієнтів повних витрат $\boldsymbol{b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41}}$ в системі (5.6) замість обсягів продукції 318, 76, 67.5, 62 необхідно поставити відповідно 1, 0, 0, 0, а замість $\boldsymbol{X_1, X_2, X_3, X_4}$ – вказані коефіцієнти повних витрат:

$$\begin{cases} 0{,}8\ b_{11} - 0{,}1\ b_{21} - 0{,}06\ b_{31} - 0{,}2\ b_{41} = 1; \\ -0{,}05\ b_{11} + 0{,}8\ b_{21} - 0{,}04\ b_{31} - 0{,}15\ b_{41} = 0\ ; \\ -0{,}1\ b_{11} - 0{,}05\ b_{21} + 0{,}96\ b_{31} - 0{,}1\ b_{41} = 0; \\ -0{,}2\ b_{11} - 0{,}1\ b_{21} - 0{,}1\ b_{31} + 0.95\ b_{41} = 0\ . \end{cases}$$

Вирішуя систему, получимо перші чотири коефіцієнта повних витрат: $\boldsymbol{b}_{11}$ = 1,364; $\boldsymbol{b}_{21}$ = 0,1549; $\boldsymbol{b}_{31}$ = 0,1838; $\boldsymbol{b}_{41}$ = 0,323.

За аналогією, для получення коефіцієнтів повних витрат $\boldsymbol{b}_{12}$, $\boldsymbol{b}_{22}$, $\boldsymbol{b}_{32}$, $\boldsymbol{b}_{42}$ необхідно в системі (5.6) замість правих частин поставити відповідно 0, 1, 0, 0, а замість $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$, $\boldsymbol{X}_4$ записати вказані вище коефіцієнти повних витрат:

$$\begin{cases} 0{,}8\ b_{12} - 0{,}1\ b_{22} - 0{,}06\ b_{32} - 0{,}2\ b_{42} = 0\ ; \\ -0{,}05\ b_{12} + 0{,}8\ b_{22} - 0{,}04\ b_{32} - 0{,}15\ b_{42} = 1\ ; \\ -0{,}1\ b_{12} - 0{,}05\ b_{22} + 0{,}96\ b_{32} - 0{,}1\ b_{42} = 0\ ; \\ -0{,}2\ b_{12} - 0{,}1\ b_{22} - 0{,}1\ b_{32} + 0.95\ b_{42} = 0\ . \end{cases}$$

Вирішуя її, знаходимо: $\boldsymbol{b}_{12}$=0,221; $\boldsymbol{b}_{22}$=1,3060; $\boldsymbol{b}_{32}$=0,1114; $\boldsymbol{b}_{42}$=0,1956.

Для знаходження коефіцієнтів повних витрат $\boldsymbol{b}_{13}$, $\boldsymbol{b}_{23}$, $\boldsymbol{b}_{33}$, $\boldsymbol{b}_{43}$ необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}8\ b_{13} - 0{,}1\ b_{23} - 0{,}06\ b_{33} - 0{,}2\ b_{43} = 0\ ; \\ -0{,}05\ b_{13} + 0{,}8\ b_{23} - 0{,}04\ b_{33} - 0{,}15\ b_{43} = 0\ ; \\ -0{,}1\ b_{13} - 0{,}05\ b_{23} + 0{,}96\ b_{33} - 0{,}1\ b_{43} = 1\ ; \\ -0{,}2\ b_{13} - 0{,}1\ b_{23} - 0{,}1\ b_{33} + 0.95\ b_{43} = 0\ . \end{cases}$$

Із рішення системи маємо: $\boldsymbol{b}_{13}$=0,1294; $\boldsymbol{b}_{23}$=0,09; $\boldsymbol{b}_{33}$=1,075; $\boldsymbol{b}_{43}$= 0,1499.

Для знаходження коефіцієнтів повних витрат $\boldsymbol{b}_{14}$, $\boldsymbol{b}_{24}$, $\boldsymbol{b}_{34}$, $\boldsymbol{b}_{44}$ получимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}8\, b_{14} - 0{,}1\, b_{24} - 0{,}06\, b_{34} - 0{,}2\, b_{44} = 0\ ; \\ -0{,}05\, b_{14} + 0{,}8\, b_{24} - 0{,}04\, b_{34} - 0{,}15\, b_{44} = 0\ ; \\ -0{,}1\, b_{14} - 0{,}05\, b_{24} + 0{,}96\, b_{34} - 0{,}1\, b_{44} = 0\ ; \\ -0{,}2\, b_{14} - 0{,}1\, b_{24} - 0{,}1\, b_{34} + 0.95\, b_{44} = 1\ . \end{cases}$$

Її рішення є: $\boldsymbol{b_{14}}$=0,336; $\boldsymbol{b_{24}}$=0,248; $\boldsymbol{b_{34}}$=0,1695; $\boldsymbol{b_{44}}$ =1,167.

Якщо відомі коефіцієнти повних витрат і завдання з готової продукції кожної галузі, то за формулами (5.5) можна розрахувати валову продукцію кожної галузі $\boldsymbol{X_i}$.

Із розглянутого прикладу видно, що розрахунок коефіцієнтів повних витрат при великої кількості галузей без використання комп'ютерної техніки практично неможливен. Тому існують спеціальні інтераційні методи обчислення коефіцієнтів повних витрат [10].

5.4. Інші балансові моделі

Розглянута модель Леонтьєва носить *статичний характер*. В неї не враховується фактор часу, який має важливу роль у складанні плану.

Більш загальною є **динамічна модель** (Дж. фон Нейман). Вона включає модель Леонтьєва як частковий випадок і відрізняється від неї тим, що в ній допускається сумісне виробництво в кожній галузі декількох видів продукції. Тим самим усувається головний дефект моделі Леонтьєва в розгляданні лише "чистої" продукції.

Д.Гейл запропонував ще більш загальну конструкцію динамічної моделі, яка з математичної точки зору є зручнішою у вивченні.

Існують ще більш загальні моделі, які враховують реальні виробничі умови. Це **нелінійні балансові моделі**, які враховують ймовірний характер виробничої ситуації.

Запитання для самоконтролю

5.1. В яких випадках виникає потреба у використанні моделей міжгалузевого балансу?
5.2. В чому полягає суть моделі міжгалузевого балансу?
5.3. Поясніть структуру системи балансових рівнянь розподілу продукції за галузями.
5.4. На яких припущеннях базується балансова модель Леонтьєва?
5.5. Які галузі виробництва називаються чистими?
5.6. Яке тлумачення мають коефіцієнти прямих витрат?
5.7. Як записати систему балансових рівнянь у матричному вигляді? Поясніть структуру рівнянь.
5.8. Яке тлумачення мають коефіцієнти повних витрат?
5.9. Які існують балансові моделі?

Вправи

5.1. Економіка регіону розподілена на три галузі: промисловість: сільське господарство, інші галузі. На плановий період задані коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей, наведені в таблиці:

Таблиця 5.3

Споживаючі галузі / Виробляючі галузі	Промисловість	Сільське господарство	Інші галузі	Продукція у сфері споживання
Промисловість	0,30	0,25	0,20	56
Сільське господарство	0,15	0,12	0,03	20
Інші галузі	0,01	0,05	0,08	12

Розрахувати планові обсяги валової продукції, чисту продукцію галузей, міжгалузеве постачання.

5.2. За даними попередньої задачі скласти систему рівнянь міжгалузевого балансу та знайти коефіцієнти повних витрат.

РОЗДІЛ 3. ЕКОНОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Глава 6. Загальна лінійна економетрична модель та її кореляційно-регресивний аналіз

6.1. Загальний вигляд економетричної моделі, її структура та етапи побудування

Одною з головних задач економетрії в *ринковій економіці* є ретельне вивчення кількісних зв’язків між показниками для кращого розуміння господарських явищ і процесів, що в свою чергу дозволяє більш обгрунтовано сформулювати управлінські рішення та дати прогнози на майбутнє. Для вирішення цієї задачі потрібна побудова економетричної моделі.

У розглядаємому розділі зосередимо увагу на побудові загальної лінійної моделі.

Модель, що описує кореляційно-регресивний зв’язок між економічними показниками називається **загальною**, яка дійсна для всієї генеральної сукупності спостережень. У **лінійній** економетричні моделі має місце лінійний зв’язок між змінними, що характеризують розглядаємій економічний процес чи явище. Зауважимо, що лінійні регресійні моделі є найбільш прості і в переважній більшості випадків - достатні для практики. Ті з моделей, що базуються на методі найменших квадратів (1 МНК) при оцінюванні їх параметрів, називаються *класичними* і вивчаються у *класичній економетрії*; при порушенні умов використання 1МНК доводиться застосовувати інші методи оцінювання параметрів економетричних моделей. Такий підхід в їх побудові розглядається в даному навчальному посібнику. В той же час мають місце і інші підходи, вивчаємі в *байєсівській економетрії* (вони не розглядаються в посібнику), які потребують поглиблених математичних знань і з якими можна познайомитись у спеціальній літературі (наприклад, в [1]).

Економетрична модель *виступає як функція або система функцій, що описує зв’язок між вхідними та* *результативними показниками економічної системи за допомогою методів математичної статистики*.

У загальному матричному вигляді економетрична модель для **фактичних** даних записується так:

$$Y = AX + u, \tag{6.1}$$

де A – матриця параметрів моделі розміром $m*n$ (m – кількість незалежних змінних, n – число спостережень); Y – матриця значень залежної змінної; X – матриця незалежних змінних u – матриця випадкової складової.

Незалежні фактичні змінні X (*пояснювальні* змінні) найчастіше бувають детермінованими і вони є наперед заданими змінними, або *вхідними показниками* для розглядаємої економічної системи.

Випадкові складові u називають ще *стохастичними складовими*, *помилками* або частіше *залишками*. Вони є наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

З огляду того, що **залежні фактичні змінні** Y (*пояснювані змінні*), які є *результативними показниками*, залежать від випадкової складової u, то вони також є стохастичними (випадковими). Звідси і *економетрична модель є стохастичною.*

У ряді випадків економетричні моделі можуть бути описані методами **кореляційно-регресійного аналізу**. *Задачею регресійного аналізу* є встановлення виду залежності між змінними та вивчення залежності між ними. Основною *задачею кореляційного аналізу* є виявлення зв’язку між змінними та оцінка її тісноти та значимості. Але на застосування кореляційно-регресійного аналізу накладуються такі вимоги:

1) необхідність достатньо великої сукупності спостережень;
2) забезпечення однорідної сукупності спостережень;
3) наявність нормального закону розподілення сукупності вивчаємих одиниць, на якому побудовані всі положення кореляційно-регресійного аналізу.

Побудова будь-якої економетричної моделі базується на використанні таких специфічних послідовних етапів, загальний вид яких розглянутий у п. 1.6:

Етап 1. Постановка задачі.

Етап 2. Специфікація моделі, яка полягає у встановлені функції або системи функцій, що використовуються для побудови моделі з ймовірними характеристиками.

Етап 3. Формування вхідної інформації згідно з метою дослідження.

Етап 4. Оцінка параметрів моделі регресії за допомогою методу найменших квадратів.

Етап 5. Перевірка передумов виконання вимог до моделі; у разі порушення розглянутих вимог треба змінити специфікацію або застосувати інші методи оцінювання параметрів.

Етап 6. Проведення аналізу достовірності моделі та прогнозу за побудованою моделлю.

6.2. Передумови застосування методу найменших квадратів

Процедура однокрокового (звичайного) методу найменших квадратів (1МНК) розглянута у п. 2.3. Нагадаємо, що сутність методу полягає у знаходженні таких значень матриці параметрів A моделі загального вигляду (6.1), при яких сума квадратів залишків u була б мінімальною (2.20). Тоді для фактичних значень залежних змінних Y моделі (6.1) **теоретичні** (*розрахункові*) значення змінних Y будуть представлені у вигляді

$$Y = AX, \tag{6.2}$$

де A - оцінка параметрів теоретичної моделі.

Сукупність виразів (6.1) і (6.2) для фактичних і теоретичних значень пояснюваних змінних визначає економетричну модель загального виду: $Y = AX + u$; $Y = A\tilde{O}$.

Мінімізуя суму квадратів залишків u шляхом знаходження першої похідної за складовими $\grave{A}$ (2.20), можна знайти оцінки $\grave{A}$ для теоретичної моделі, які в матричному запису будуть мати вигляд

$$A = (X'X)^{-1} X'Y, \qquad (6.3)$$

де X' - матриця, транспонована до матриці *X*.

Вираз (6.3) є розв'язком так званої **системи нормальних рівнянь**

$$(X'X)\grave{A} = X'Y. \qquad (6.4)$$

Оцінювати параметри економетричної моделі за допомогою 1МНК можна за умов:

1. Математичне сподівання залишків, тобто середня величина випадкових значень, дорівнює нулю

$$M(u)=0. \qquad (6.5)$$

Якщо ця передумова не виконується, то йдеться про помилки специфікації.

Специфікацію моделі називають її аналітичну форму, яка складається з певного виду вибраної функції чи системи функцій для змінних. До помилок специфікації приводять:

1) відсутність у моделі основної пояснювальної (незалежної) змінної, що призводять до зміщення оцінок параметрів і може привести до хибних висновків щодо значень параметрів;

2) введення в модель пояснювальної змінної, яка не є істотною для вимірюваного зв'язку, що може привести до неправильно встановленого кількісного зв'язку між змінними;

3) використання невідповідних аналітичних форм вибраних функцій для моделі, що як і при першій помилці специфікації може привести до зміщення оцінок параметрів моделі.

2. Значення u_i в матриці залишків u незалежні між собою і мають постійну дисперсію σ^2:

$$M(uu') = \sigma^2 E, \qquad (6.6)$$

де E – одинична матриця; u' - матриця, транспонована до матриці u.

Нагадаємо, що дисперсія відображає “розсіювання” випадкових значень u_i навколо їх математичного сподівання.

Наявність сталої (постійної) дисперсії залишків називається **гомоскедастичністю**. Ця властивість може виконуватись лише тоді, коли залишки *u* є помилками вимірювання.

3. Незалежні змінні моделі не пов'язані із залишками:

$$M(X'u) = 0. \tag{6.7}$$

При порушенні цієї умови для оцінювання параметрів моделі використовуються не 1МНК, а інші методи, які будуть розглянуті пізніше.

4. Незалежні змінні моделі утворюють незалежну систему векторів, тобто ці змінні незалежні між собою:

$$\left|X'X\right| \neq 0. \tag{6.8}$$

Якщо незалежні змінні пов'язані між собою, то це явище називають **мультиколінеарністю** і воно є небажаним, так як робить оцінку параметрів за допомогою 1МНК ненадійною чутливою до вибраної специфікації моделі. Далі будуть розглянуті методи виявлення цього явища і способи його врахування.

6.3. Властивості оцінок параметрів рівнянь регресії

До **властивостей** оцінок параметрів $\grave{A}$ рівнянь регресії відносяться такі: незміщеність; обґрунтованість; ефективність; інваріантність.

Незміщеністю вибіркової оцінки $\grave{A}$ параметрів А називається така властивість, яка відповідає умові

$$\grave{I}\ (\grave{A}) = \grave{A} \tag{6.9}$$

Оцінка параметрів за допомогою 1МНК є незміщеною. Якщо оцінка незміщена, то при багаторазовому повторені випадкової вибірки середнє значення помилок дорівнює нулю.

Обгрунтованістю вибіркової оцінки $\grave{A}$ параметрів А називається така вимога, при якої виконується співвідношення

$$\lim P\left\{ \left|A - A\right| < \varepsilon \right\} = 1, \tag{6.10}$$

де P – ймовірність; ε - мале дійсне число *(ε>0)*.

Вираз (6.10) відповідає *закону великих чисел* і означає, що чим більшими розглядаються вибірки, тим більше ймовірність того, що помилка оцінки не перевищує достатньо малої величини ε.

Ефективність оцінки параметрів $\grave{A}$ пов'язана з величиною дисперсії оцінок і відповідає умові

$$\sigma^2_{\grave{A}} \leq \sigma^2_{\bar{A}}, \tag{6.11}$$

де $\sigma^2_{\grave{A}}$ - дисперсія оцінок $\grave{A}$ згідно з 1МНК; $\sigma^2_{\bar{A}}$ - дисперсія оцінок $\overline{A}$, визначених іншими методами.

Інваріантність оцінки параметрів $\grave{A}$ визначається тим, що для довільно заданої функції *f* оцінка параметрів функції *f(A)* подається у вигляді $f(\grave{A})$.

6.4. Види рівнянь регресії та визначення їх параметрів

В регресійному аналізі розрізняють рівняння *парної (простої) та множинної (багатофакторної) регресії*. Коли зв'язок із залежною змінною ***y*** здійснюється з одним видом незалежних змінних ***x***, то рівняння регресії є найпростішим і має назву рівняння **парної регресії** (проста модель). Якщо залежна змінна *y* пов'язана з декількома видами незалежних змінних $x_j (j=1...m)$, то така залежність має назву рівняння **множинної регресії**. Використовуються такі види рівнянь регресії:

Парна регресія: ***Множинна регресія:***

а) лінійна залежність:

$$y = a_0 + a_1 x; \qquad y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m; \tag{6.12}$$

б) параболічна залежність:

$$y = a_0 + a_1 x^2; \quad y = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + ... + a_m x_m^2; \tag{6.13}$$

в) гіперболічна залежність:

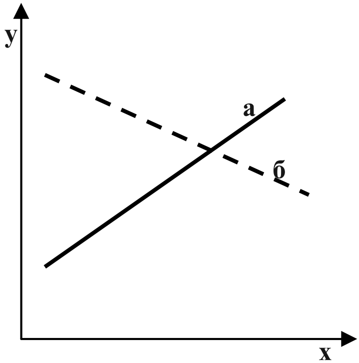
$$y = a_0 + a_1 \frac{1}{x}; \qquad y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + ... + \frac{a_m}{x_m}; \tag{6.14}$$

г) степенева залежність:

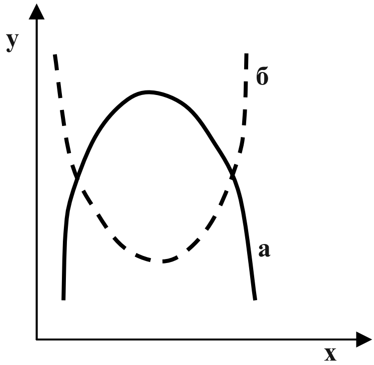
$$y = a_0 x^{a_1}; \qquad y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}. \tag{6.15}$$

Рівняння (6.13)-(6.15) є нелінійними, але відповідним перетворенням їх можна звести до лінійної форми.

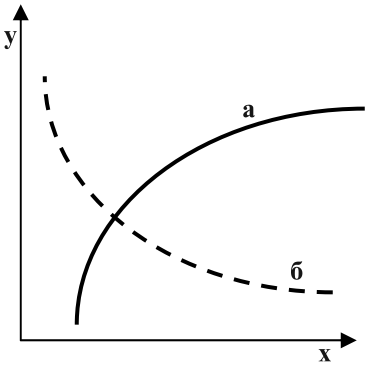
Графічні залежності між змінними для рівнянь парної регресії (6.12)-(6.15) мають такий вид:



а – прямий зв'язок;
б – обернений зв'язок.
Рисунок 6.1 – Лінійна залежність



а – парабола;
б – обернена парабола .
Рисунок 6.2 – Параболічна залежність



а – гіпербола;
б – обернена гіпербола .
Рисунок 6.3 – Гіперболічна залежність

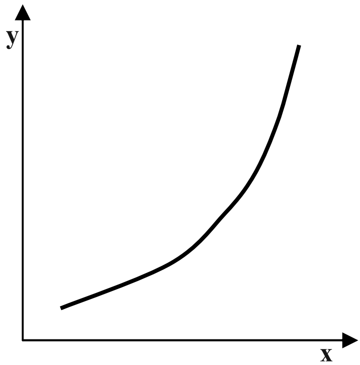


Рисунок 6.4 – Степенева залежність

Використання 1МНК для оцінки теоретичних параметрів моделі $\grave{a}_j(j = 0,1,2)$ розглянутих видів рівнянь *парної регресії* приводить до таких систем нормальних рівнянь:

- *лінійна залежність* (6.12):

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x = \sum_{i=1}^{n} y, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x + a_1 \sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} xy; \end{cases} \quad (6.16)$$

- *параболічна залежність* (6.13):

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_1 = \sum y, \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 = \sum x_1 y, \end{cases} \quad (6.17)$$

де $x_1 = x^2$;

- *гіперболічна залежність* (6.14):

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_1 = \sum_{i=1}^{n} y, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_1^2 = \sum_{i=1}^{n} x_1 y; \end{cases} \quad (6.18)$$

де $x_1 = \dfrac{1}{x}$;

- *степенева залежність* (6.15):

$$\begin{cases} nb_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_1 = \sum_{i=1}^{n} y_1, \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_1^2 = \sum_{i=1}^{n} x_1 y_1, \end{cases} \quad (6.19)$$

де $b_0 = \lg a_0$; $x_1 = \lg x$; $y_1 = \lg y$.

Рішення наведених систем нормальних рівнянь парної регресії дозволить знайти оцінки параметрів моделі.

У разі множинної регресії оцінка параметрів моделей видів (6.12)-(6.15) здійснюється за допомогою виразу (6.3), записаному у матричному вигляді.

Приклад 6.1 [23]. **Побудова та аналіз економетричної моделі**. Оцінити параметри економетричної моделі роздрібного товарообігу, що характеризує залежність між роздрібним товарообігом та доходами населення.

Вхідні дані в умовних грошових одиницях (г.о) наведені у таблиці:

Таблиця 6.1

Доходи населення	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31
Роздрібний товарооборот	17	18	19	20	21	23	24	25	26	27

Розв'язання

З початку за фактичними даними таблиці встановлюємо належність змінних до груп незалежних та залежних: очевидно, що за незалежні (вхідні) змінні ***x*** приймаються доходи населення, а за незалежну (результативну) ***y*** – роздрібний товарообіг.

Для специфікації економетричної моделі необхідно вибрати одну з аналітичних залежностей (6.12)-(6.15). Такий вибір здійснюється або на підставі досвіду побудови аналогічних моделей, або (при його відсутності) – шляхом графічного зображення залежності фактичних змінних та підбору за ним однієї з аналітичних формул (6.12)-(6.15).

Скористуємось останнім шляхом, показавши точками на рисунку фактичні дані таблиці:

Як видно з рисунку, розміщення точок краще всього відповідає лінійній залежності для парної регресії (6.9). Тоді економетрична модель специфікується у лінійній формі:

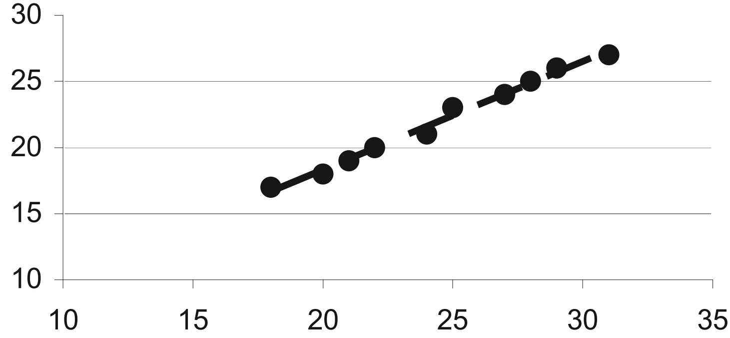
$$\acute{o} = \grave{a}_0 + \grave{a}_1\tilde{o} + \grave{e};$$

$$\acute{o} = \grave{a}_0 + \grave{a}_1\tilde{o},$$

де $\acute{o}$ - розрахункові значення роздрібного товарообігу;

$\grave{a}_0, \grave{a}_1$ - оцінки параметрів моделі;

u – випадкова складова (залишки).



● - фактичні данні;
– – – - теоретична залежність.

Рисунок 6.5 – Фактичні дані та теоретична залежність економетричної моделі

Перетворення вхідних даних для побудови моделі наведені у таблиці:

Таблиця 6.2

№ з/п	**y**	**x**	**x^2**	**xy**	*ó*
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	17	18	324	306	16,67
2	18	20	400	360	18,31
3	19	21	441	399	19,31
4	20	22	484	440	19,25
5	21	24	576	504	21,59
6	23	25	625	575	22,41
7	24	27	729	648	24,05
8	25	28	784	700	24,87
9	26	29	841	754	25,69
10	27	31	961	837	27,33
∑	220	245	6165	5523	-

Оцінемо параметри теоретичної моделі $\acute{o} = \grave{a}_0 + \grave{a}_1\tilde{o}$ за допомогою 1МНК. Для цього запишемо систему нормальних рівнянь (6.13) парної регресії для даної задачі:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum_{i=1}^{10} x = \sum_{i=1}^{10} y; \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x + a_1\sum_{i=1}^{10} x^2 = \sum_{i=1}^{10} xy. \end{cases}$$

Підставивши в цю систему значення $\sum_{i=1}^{10} x,\ \sum_{i=1}^{10} y,$ $\sum_{i=1}^{10} x^2,\ \sum_{i=1}^{10} xy$, обчислені згідно з вхідними даними таблиці, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10\grave{a}_0 + 245\grave{a}_1 = 220; \\ 245\grave{a}_0 + 6165\grave{a}_1 = 5523. \end{cases}$$

Розв’язання системи дає такі значення оцінок параметрів: $\grave{a}_0$ = 1,91; $\grave{a}_1$ =0,82.

Отже економетрична модель роздрібного товарообігу запишеться так:

$$\acute{o} = 1{,}91 + 0{,}82\tilde{o}.$$

Вона кількісно описує зв’язок роздрібного товарообігу та доходів населення. На рис. 6.5 пунктиром показана ця залежність.

Зробимо економічні висновки.

Параметр a_1=0,82 характеризує граничний розмір витрат на купівлю товарів у роздрібній торгівлі. Тобто, коли дохід збільшиться на одиницю, то обсяг роздрібного товару зросте на 0,82 одиниці: $\grave{a}_1 = {}^{\partial\acute{o}}\!/_{\partial\tilde{o}}$.

При цьому можна визначити *коефіцієнт еластичності* (відносний ефект впливу фактора ***x*** на результат ***y***) роздрібного товарообігу залежно від доходів населення:

$$\hat{E}_{å} = \frac{\partial ó}{\partial õ} \Big/ \frac{\vec{ó}}{\bar{õ}} = 0{,}82 : \frac{20}{24{,}5} = 0{,}82 : 0{,}898 = 0{,}91.$$

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки процентів у середньому зміниться результат ***y*** зі зміною фактора ***x*** на 1%.

На підставі коефіцієнту еластичності можна дістати висновку, що зі збільшенням доходів населення на 1% роздрібний товарообіг зростає на 0,91%.

Запитання для самоконтролю

6.4.1. Яка модель відноситься до категорії економетричних? Що таке загальна модель? лінійна модель?

6.4.2. Як записується економетрична модель у загальному вигляді для фактичних даних та який її склад?

6.4.3. Які змінні у моделі є незалежними? Чому вони називаються пояснювальними?

6.4.4. Які змінні у моделі є залежними? Чому вони називаються пояснюваними?

6.4.5. З яких причин у модель фактичних даних вводиться випадкова складна (залишки)?

6.4.6. Яка задача вирішується в регресійному аналізі?

6.4.7. Яка задача вирішується в кореляційному аналізі?

6.4.8. Які вимоги накладаються на застосування кореляційно-регресійного аналізу?

6.4.9. Які етапи побудови економетричної моделі?

6.4.10. Який вигляд має теоретична економетрична модель?

6.4.11. Що називається специфікацією економетричної моделі?

6.4.12. Що приводить до помилок специфікації?

6.4.13. За яких умов можливо використання 1МНК?

6.4.14. При виконанні якої умови застосування 1МНК має місце гомоскедастичність?

6.4.15. При порушенні якої умови застосування 1МНК має місце мультиколінеарність? До яких наслідків вона приводить?

6.4.16. Між якими змінними встановлює зв'язок рівняння парної регресії?

6.4.17. Між якими змінними встановлює зв'язок рівняння множинної регресії?
6.4.18. Які класи функцій в економетричній практиці описують взаємозв'язок між змінними у рівняннях регресії?
6.4.19. Записати рівняння парної та множинної регресії при лінійній залежності між змінними, пояснити їх склад.
6.4.20. Записати рівняння парної та множинної регресії при параболічній залежності між змінними, пояснити їх склад.
6.4.21. Записати рівняння парної та множинної регресії при гіперболічній залежності між змінними, пояснити їх склад.
6.4.22. Записати рівняння парної та множинної регресії при степеної залежності між змінними, пояснити їх склад.
6.4.23. Показати на графіку розповсюджені в економіці залежності між змінними.
6.4.24. Пояснити получення системи нормальних рівнянь при застосуванні 1МНК.

Вправи

Побудувати економетричну модель за даними, наведеними в таблицях 6.3-6.12. Оцінити параметри моделі. Зробити економічні висновки.

Таблиця 6.3

Номер магазину	1	2	3	4	5	6	7
Частка продовольчих товарів у товарообігу, %	74,2	73,5	77,0	84,3	67,3	70,1	83,1
Рівень рентабельності, %	3,62	3,80	2,77	2,12	4,33	4,01	2,01

Таблиця 6.4

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6	7	8
Продуктивність праці на 1 працівника, г.о	115540	2911	6630	8492	2901	9410	1920	2569
Рівень рентабельності, %	39,4	23,2	37,2	35,1	20,0	37,9	20,1	23,4

Таблиця 6.5

Номер сільхозпідп-риємства	1	2	3	4	5	6	7	8
Збір овочів з 1 га, ц	52,8	72,6	50,4	33,4	31,5	54,6	54,3	36,6
Рівень збитковості, %	31,4	40,9	37,1	45,7	57,7	66,7	13,3	63,8

Таблиця 6.6

Номер робітника	1	2	3	4	5	6	7	8
Стаж роботи, років	1	3	4	2	5	7	8	9
Виробітка 1 робітника за зміну, шт	80	90	120	100	110	150	160	130

Таблиця 6.7

Номер сім'ї	1	2	3	4	5	6	7	8
Доход на 1 члена сім'ї, г.о	100	120	110	115	125	130	125	140
Витрати на промислові товари, г.о	12	13	18	19	20	20	25	30

Таблиця 6.8

Номер сім'ї	1	2	3	4	5	6	7
Доход на 1 члена сім'ї, г.о	54	63	74	90	112	140	190
Споживан-ня молока в міс., л	8	10	11	13	15	17	19

Таблиця 6.9

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6
Випуск продукції, тис.шт..	2,0	3,5	4,0	4,5	5,5	6,0
Собівартість 1 виробу, г.о.	19	17	18	16	18	22

Таблиця 6.10

Номер магазину	1	2	3	4	5	6	7	8
Товарообіг, г.о.	40	55	64	75	82	94	104	110
Товарні запаси, тис.г.о.	2,8	4,3	4,6	4,9	5,6	6,4	5,7	4,9

Таблиця 6.11

Номер магазину	1	2	3	4	5	6	7	8
Товарообіг, г.о.	7	10	15	20	30	45	60	120
Рівень витрат у % товарообігу	10	9	7,5	6,0	6,3	5,8	5,4	5,0

Таблиця 6.12

Номер підп-риємства	1	2	3	4	5	6	7	8
Випуск продукції, тис.шт	1,0	0,5	0,7	0,3	0,25	0,34	0,13	0,08
Витрати матеріалу на 1 продукції, г.о.	1,6	1,0	8,5	5,0	4,4	2,0	6,0	7,5

6.5. Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у рівняннях парної регресії

Після вибору виду рівняння регресії та знаходження його параметрів розпочинають другий етап – кореляційний аналіз, тобто дають оцінку тісноти та значимості зв'язку змінних у регресійній моделі. У поняття "**тіснота зв'язку**" *(щільність) вкладається оцінка впливу незалежної змінної на залежну змінну*. Під терміном "**значимість зв'язку**" *(істотність, або значущість) розуміють оцінку відхилення вибіркових змінних від своїх значень у генеральній сукупності спостережень за допомогою статистичних критеріїв*.

Для характеристики тісноти та значимості зв'язку зручно користуватися перетвореними виразами дисперсій для розглядаємих коефіцієнтів, що і наведено далі.

Тісноту зв'язку між залежною змінною ***y*** та незалежною змінною ***x*** оцінюють за допомогою таких характеристик: *коефіцієнт детермінації; коефіцієнт кореляції (індекс кореляції*). За допомогою цих коефіцієнтів перевіряється відповідність побудованої регресійної моделі (теоретичної) фактичним даним.

Коефіцієнт детермінації показує, якою мірою варіація залежної змінної (результативного показника) ***y*** визначається варіацією незалежної змінної (вхідного показника) ***x***. Він використовується як при лінійному, так і при нелінійному зв'язку між змінними та розраховується за формулою:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}, \qquad (6.20)$$

де *ó* - теоретичні значення залежної змінної на підставі побудованої регресійної моделі; $\overline{y}$ - загальна середня фактичних даних результативного показника; y_i – фактичні індивідуальні значення результативного показника.

Коефіцієнт детермінації приймає значення від 0 (відсутній лінійний зв'язок між показниками) до 1 (відсутній кореляційний зв'язок між показниками).

Коефіцієнт кореляції, або *індекс кореляції*, показує, наскільки значним є вплив змінної x_i на y_i і розраховується так:

$$R = \sqrt{R^2}\,. \qquad (6.21)$$

Чим ближче коефіцієнт кореляції до одиниці, тим тісніше зв'язок між незалежною та залежною змінними.

Іноді для спрощення розрахунків тісноту кореляційного зв'язку характеризують коефіцієнтом кореляції, який розраховується за формулою:

$$R_1 = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}\,. \qquad (6.22)$$

Якщо зв'язок між результативним і вхідним показниками лінійний, то використовується **лінійний коефіцієнт кореляції**, який характеризує не тільки тісноту зв'язку, а і його напрям:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right] * \left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]}}, \qquad (6.23)$$

де n – число фактичних значень y_i; x_i – фактичні індивідуальні значення вхідного показника.

Значення r лежить у діапазоні від –1 до +1. При r=0 змінні не можуть мати лінійного кореляційного зв'язку. Ступінь тісноти їх лінійної залежності зростає при наближенні r до ±1. Кореляційний зв'язок між показниками відсутній при r=±1. Коли r>0, то зв'язок між показниками прямий, якщо r<0 – обернений.

Можуть бути визначені **стандартні похибки** оцінок параметрів моделі з урахуванням дисперсії залишків:

$$S_{a_j} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{kj}}, \qquad (6.24)$$

де σ_u^2 - дисперсія залишків

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - m_1}; \qquad (6.25)$$

c_{kj} – елемент матриці похибок С (матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь); m_1 – кількість параметрів моделі.

В залежності від значення стандартної похибки робиться висновок про ступінь незміщенності оцінок параметрів.

Після встановлення тісноти зв'язку між змінними моделі характеризують **значимість зв'язку**, яка в кореляційному аналізі частіше всього здійснюється за допомогою ***F*-критерія Фішера**. У випадку парної регресії цей критерій розраховується за формулою:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y - \bar{y})^2}{1} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y)^2}{(n-2)}, \qquad (6.26)$$

де 1, (n – 2) – число ступенів вільності відповідно чисельника та знаменника залежності.

Під терміном "**ступень вільності**" (*ступень свободи*) в економетрії розуміють число, яке показує, скільки незалежних елементів інформації із змінних $y_i \ (i = 1..n)$ потрібно для розрахунку розглядаємої суми квадратів. В кореляційному аналізі існує рівняння, яке пов'язує відхилення загальної суми квадратів із залишковою сумою квадратів та сумою квадратів, що пояснює регресію:

$$S_y = S_e + S_Y,$$

де S_y – загальна сума квадратів відхилень,

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2;$$

– залишкова сума квадратів відхилень,

$$S_{\mathring{a}} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2;$$

S_Y – регресійна сума квадратів відхилень,

$$S_Y = \sum_{i=1}^{n}(y - \bar{y})^2;$$

Кожна із зазначених сум пов’язана з ступенями вільності: для загальної суми квадратів S_y потрібно (n–1) незалежних чисел, тобто ступенів вільності; для залишкової суми квадратів S_e - (n–m_1) степенів вільності; для регресійної суми квадратів S_Y - (m_1-1) ступенів вільності.

За статистичними таблицями F-розподілу Фішера із ступенями вільності 1, (n-2) і рівнем довіри (1-α) вибирається $F_{табл.}$ Можлива помилка (рівень значимості) α може прийматися 0,05 або 0,01. Це означає, що у 5% або 1% випадків ми можемо помилитися, а у 95% або 99% випадків (рівень довіри) наші висновки будуть правільними. При умові $F>F_{табл}$ побудована регресійна модель відповідає реальній дійсності.

Приклад 6.2. За даними задачі прикладу 6.1 оцінити тісноту та значимість зв’язку між змінними.

Розв’язання. Допоміжні розрахунки до визначення характеристик тісноти та значимості зв’язку зручно проводить у табличній формі:

Таблиця 6.13

№ з/п	x	y	$\acute{o}$	$(\acute{o}-\bar{o})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$\grave{e} = \acute{o}-\acute{o}$	$\grave{e}^2 = (\acute{o}-\acute{o})^2$
1	18	17	16,67	28,41	25	0,33	0,1089
2	20	18	18,31	13,62	16	-0,31	0,0961
3	21	19	19,31	7,24	9	-0,31	0,0961
4	22	20	19,95	4,20	4	0,05	0,0961
5	24	21	21,59	0,17	1	-0,59	0,3481
6	25	23	22,41	0,17	1	0,59	0,3481
7	27	24	24,05	4,20	4	-0,05	0,0025
8	28	25	24,87	8,24	9	0,13	0,0169
9	29	26	25,69	13,62	16	0,31	0,0961
10	31	27	27,33	28,41	25	-0,33	0,1089
∑	245	220	-	108,28	110	-	1,224

Дамо оцінку тісноти зв'язку між змінними моделі.

Коефіцієнт детермінації розраховуємо за формулою (6.20):

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} = \frac{108,28}{110} = 0,984.$$

Значення коефіцієнта детермінації R^2=0,984 свідчить про те, що зв'язок між змінними в розглядаємому прикладі тісний (відмінність від 1 складає 1,6%). Значення R^2 показує, що варіація роздрібного товарообігу на 98,4% визначається варіацією доходів населення, а 1,6% - вплив неврахованих факторів.

Коефіцієнт кореляції розраховується за формулою (6.21):

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,984} = 0,992.$$

Значення коефіцієнта кореляції R=0.992 свідчить, що існує тісний зв'язок між цими соціально-економічними показниками (R наближається до одиниці).

Коефіцієнт кореляції за формулою (6.22)

$$R_1 = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{1,224}{110}} = 0,994$$

показує, що знайдене значення практично співпадає з розрахованим за формулою (6.21).

Значення R^2 та R для парної регресії економетричної моделі свідчить про достатню тісноту зв'язку, так як вони наближені до одиниці.

Знайдемо матрицю похибок C, яка є оберненою до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь A:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 245 \\ 245 & 6165 \end{pmatrix}; \quad C = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3,79 & -0,15 \\ -0,15 & 0,006 \end{pmatrix}.$$

Визначимо стандартні похибки оцінок параметрів моделі з урахуванням дисперсії залишків:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - m_1} = \frac{1,224}{8} = 0,153;$$

$$S_{a_0} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{00}} = \sqrt{0,153 * 3,79} = \sqrt{0,58} = 0,761;$$

$$S_{a1} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{11}} = \sqrt{0,153 * 0,006} = 0,030.$$

Порівняємо стандартні похибки оцінок параметрів моделі з їх значеннями $\grave{a}_0$=1,91 і $\grave{a}_1$=0,82. Так, стандартна похибка оцінки параметра $\grave{a}_0$ становить $\frac{0,761}{1,91} * 100 = 39,8\%$ абсолютного значення цієї оцінки (1,91), а тому цей параметр може мати зміщення, яке зумовлене невеликою сукупністю спостережень (n=10). Стандартна похибка оцінки параметра $\grave{a}_1$ становить $\frac{0,03}{0,82} = 3,6\%$ абсолютного значення оцінки (0,82), що свідчить про незміщеність такої оцінки параметра моделі.

Тепер оцінемо значимість зв’язку між змінними моделі за допомогою F-критерія Фішера (6.26):

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y - \bar{y})^2}{1} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y)^2}{n-2} = \frac{108,28}{1} \bigg/ \frac{1,224}{10-2} = 707,8.$$

Обчислене фактичне значення критерія Фішера F порівнюється з табличним $F_{табл.}$ (додаток А). При ступенях вільності чисельника (1) та знаменника (n-2)=(10-2)=8 при прийнятому рівню значимості α=0,05 та рівню довіри (1-α)=(1-0,05)=0,95 $F_{табл}$ для розглядаємої моделі дорівнює $F_{табл}$ =5,32. Так як F>$F_{табл}$ (707,8>5,32), то це означає значимість зв’язку між змінними в економетричній моделі.

Запитання для самоконтролю

6.5.1. Пояснити сутність поняття “тіснота зв’язку”.
6.5.2. Пояснити сутність поняття “значимість зв’язку”.
6.5.3. За допомогою яких характеристик перевіряються тіснота зв’язку між змінними моделі?
6.5.4. За допомогою якої характеристики перевіряються значимість зв’язку між змінними моделі?
6.5.5. Що показує коефіцієнт детермінації і в яких межах він приймає значення?
6.5.6. Що показує коефіцієнт кореляції?
6.5.7. З якою ціллю розраховуються стандартні похибки оцінок параметрів?
6.5.8. За якими характеристиками вибирається табличне значення критерія Фішера?
6.5.9. Що показує рівень значимості в критерії Фішера?
6.5.10. За яких умов робиться висновок про тісноту зв’язку між змінними моделі?
6.5.11. За якої умови робиться висновок про значимість зв’язку між змінними моделі?

Вправи

Для вправ, дані яких розміщені у таблицях 6.3-6.12, оцінити тісноту та значимість зв’язку між змінними у рівняннях парної регресії, визначити стандартні похибки оцінок параметрів моделі, зробити висновки.

6.6. Знаходження прогнозних значень змінних

Припустимо, що ми побудували модель та оцінили параметри методом найменших квадратів. На підставі побудованої моделі можна знайти прогнозні значення матриці залежних змінних Y_0, які відповідають очікуваним значенням матриці незалежних змінних X_0. Прогноз на перспективу буває двох видів: точковий та інтервальний.

Незміщена оцінка **точкового прогнозу** може розглядатися як точкова оцінка математичного сподівання прогнозного значення Y_0

$$M\left[Y_0(X_0)\right] = AX_0, \qquad (6.27)$$

а також як індивідуальне значення Y_0 для матриці незалежних змінних X_0, що лежать за межами базового періоду $Y_0 = AX_0$.

Дисперсія прогнозу дорівнює

$$\sigma_n^2 = \sigma_u^2 X_0' \left(X'X\right)^{-1} X_0, \ (6.28)$$

де σ_u^2 - дисперсія залишків *u*, яка розраховується за формулою (6.25);

$$\operatorname{var}(A) = \sigma_{\grave{e}}^2 (\tilde{O}'\tilde{O})^{-1} \tilde{O}_0 \ \text{-}$$

дисперсійно-коваріаційна матриця, яка записується у вигляді

$$\operatorname{var}(A) = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & \sigma_{a_1 a_2} & .... \ \sigma_{a_1 a_m} \\ \sigma_{a_2 a_1} & \sigma_{a_2}^2 & .... \ \sigma_{a_2 a_m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \sigma_{a_m a_1} & \sigma_{a_m a_2} & .... \ \sigma_{a_m} \end{pmatrix}. \qquad (6.29)$$

Елементи на головній діагоналі $\sigma_{\grave{a}_j}^2$ та за її межами $\sigma_{\grave{a}_j a_k}^2$ розраховуються за формулами:

$$\sigma_{a_j}^2 = \sigma_u^2 c_{jj}; \quad \sigma_{a_j a_k} = \sigma_u^2 c_{jk}, \qquad (6.30)$$

де c_{jj}, c_{jk} – елементи матриці помилок $(X'X)^{-1}$.

Тоді $\sigma_u^2 = X_0' \operatorname{var}(A) X_0$.

Середньоквадратична (стандартна) помилка прогнозу:

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2}\ . \qquad (6.31)$$

Довірчий інтервал для прогнозних значень:

$$Y_0 - t_\alpha \sigma_u \sqrt{X_0' \left(X'X\right)^{-1} X_0} \le \grave{I}\ (Y_0) \le Y_0 + t_\alpha \sigma_u \sqrt{X_0' \left(X'X\right)^{-1} X_0}, \qquad (6.32)$$

де t_α - табличне значення ***t*-критерія Ст'юдента** з (n-m_1) ступенями вільності ("Ст'юдент" – псевдонім англійського статистика В.Госсета); α - рівень значимості. Для використання *t*-критерія Ст'юдента необхідно обрати бажаний рівень значимості α (0,05 або 0,01) та число ступенів вільності (n-m_1).

Визначення **інтервального прогнозу** індивідуального значення Y_0 базується на знаходженні *середньоквадратичної помилки прогнозу*:

$$\sigma_{n_{(з)}} = \sigma_u^2 + \sigma_n^2 = \sigma_u \sqrt{1 + X_0'\left(X'X\right)^{-1} X_0} \quad (6.33)$$

Тоді інтервальний прогноз індивідуального значення буде відповідати такому *довірчому* інтервалу:

$$Y_0 - t_\alpha \sigma_{n_{(з)}} \le Y_0 \le Y_0 + t_\alpha \sigma_{n_{(з)}} . \qquad (6.34)$$

6.7. Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у множинній регресії

Тіснота зв'язку загального впливу всіх незалежних змінних *X* на залежну змінну *Y* визначається коефіцієнтами детермінації і множинної кореляції, а також парними коефіцієнтами кореляції.

Коефіцієнт детермінації характеризує, якою мірою варіація залежної змінної *Y* визначається варіацією незалежних змінних *X*.

Вигляд коефіцієнта детермінації у множинній регресії ідентичний коефіцієнту детермінації простої регресії (6.20). Оскільки введення нових незалежних змінних x_i ($i=1...m$) у множинну регресію, а значить і ступенів вільності моделі, приводить до зменшення коефіцієнта детермінації, то його розрахунок повинен бути відкорегований з урахуванням ступенів вільності дисперсії залишок та загальної дисперсії:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2},$$

де σ_u – дисперсія залишок $\sigma_{\grave{e}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y - Y)^2}{n - m_1}$; σ_y – загальна дисперсія моделі $\sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y - \overline{Y})^2}{n - 1}$.

Підстановка залежностей для дисперсій у формулу для коефіцієнта детермінації R^2 дає його вираз в залежності від ступенів вільності:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y - Y)^2}{n - m_1} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y - \overline{Y})^2}{n - 1}, \quad (6.35)$$

де (n-m_1) та (n-1) – ступені вільності чисельника та знаменника залежності.

Числові значення коефіцієнта детермінації лежать у діапазоні від 0 до 1. Чим ближчий він до одиниці, тим більше варіація залежної змінної визначається варіацією незалежних змінних**.**

Якщо виникає потреба в оцінкі точності моделі за рахунок кількості незалежних змінних, то це можна здійснити за допомогою **нормованого** (*оціненого*) **коефіцієнта детермінації**, який має вид

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - m_1} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y - \overline{Y})^2}{n - 1},$$

або

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n - 1}{n - m_1}.$$

Множинний коефіцієнт кореляції R розраховується за формулою (6.21): $R = \sqrt{R^2}$. Для нього характерна така сама зміна числового значення, як і для коефіцієнта детермінації.

Парні коефіцієнти кореляції дають оцінку тісноти зв’язку між парами змінних: залежною $\boldsymbol{y}$ та незалежною $\boldsymbol{x_j}$

змінними r_{yx_j}; незалежними змінними $\boldsymbol{x_k}$ та $\boldsymbol{x_j}$ - $r_{x_k x_j}$. Розраховуються вони за формулами:

$$r_{yx_j} = \frac{1}{n} y^* x_j^*; \; r_{x_k x_j} = \frac{1}{n} x_k^* x_j^*, \qquad (6.36)$$

де n – кількість спостережень; y^*, x_j^*, x_k^* - нормалізовані (стандартизовані) змінні.

$$y^* = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; \; x_j^* = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}; \; x_R^* = \frac{x_k - \bar{x}_k}{\sigma_{x_R}}; (6.37)$$

$\bar{y}, \bar{x}_j, \bar{x}_k$ - середні значення залежної та незалежних змінних; $\sigma_y, \sigma_{x_j}, \sigma_{x_k}$ - середньоквадратичні відхилення змінних.

Інформацію про парну залежність може дати симетрична матриця коефіцієнтів парної регресії між пояснювальними змінними:

$$r = \left(r_{x_j} r_{x_k} \right) = \begin{pmatrix} r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_m} \\ r_{x_2 x_1} & r_{x_2 x_2} & \dots & r_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_m x_1} & r_{x_m x_2} & \dots & r_{x_m x_m} \end{pmatrix} \qquad (6.38)$$

Значимість зв’язку між залежною Y та залежними змінними X у випадку множинної регресії можна перевірити за допомогою *F-критерія Фішера*:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y - \bar{Y})^2}{m_1 - 1} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y - Y)^2}{n - m_1}, \qquad (6.39)$$

де $(m_1\text{-}1)$ - ступені вільності загальної дисперсії (ступені вільності чисельника); $(n\text{-}m_1)$ – ступені вільності дисперсії залишок (ступені вільності знаменника).

Фактичне значення F-критерія Фішера порівнюється з табличним при ступенях вільності $(m_1\text{-}1)$ і $(n\text{-}m_1)$ та вибраному рівню значимості α. Якщо $F > F_{табл.}$, то гіпотеза про значимість зв’язку між залежною та незалежними змінними множинної регресії підтверджується, у противному разі – відкидається.

6.8. Значимість коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії

У кореляційному аналізі для характеристики *відхилень коефіцієнта кореляції*, як вибіркової величини, від свого "істотного" значення вимагається перевірка його значимості за *t-критерієм Ст'юдента*:

$$t = \frac{R\sqrt{n - m_1}}{\sqrt{1 - R^2}}, \qquad (6.40)$$

де R^2 – коефіцієнт детермінації моделі; R – коефіцієнт кореляції;$(n\text{-}m_1)$ – число ступенів вільності.

Розраховане за формулою (6.40) фактичне значення t-критерію зіставляється з табличним значенням $t_{табл.}$. Останнє обирається за статистичними таблицями на підставі прийнятого рівня значимості α та розрахованого числа ступеней вільності $(n\text{-}m_1)$. Якщо $t_{\alpha} > t_{табл.}$, то можна зробити висновок про значимість коефіцієнта кореляції між змінними.

У кореляційному аналізі може перевірятись також значимість оцінок параметрів моделі $\grave{A}$ із знаходженням їх довірчих інтервалів.

Припустивши, що залишки *u* розподілені за нормальним законом, приймається, що параметри моделі $\grave{A}$ також задовольняють нормальному розподілу. Тоді перевірку гіпотези про значимість оцінок параметрів моделі проводять згідно з t-критерієм Ст'юдента:

$$t_{j\alpha} = \frac{|a_j|}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}}, \qquad (6.41)$$

де a_j - індивідуальні параметри матриці $A(j = 1 \ldots m_1)$; σ_u^2 - дисперсія залишків; c_{jj} – діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$; $S_{\hat{a}_j} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}$ - стандартна помилка оцінки параметра моделі.

Обчислене значення t-критерію порівнюється з табличним $t_{табл.}$ при вибраному рівні значимості α і $(n\text{-}m_1)$

ступенях вільності. Якщо $t_\alpha > t_{табл}$, то оцінка значимості відповідного параметру моделі є достовірною.

На підставі t-критерію і стандартної помилки встановлюються довірчі інтервали для параметра a_j:

$$a_j - t_\alpha \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}} \le a_j \le a_j + t_\alpha \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}} \ . \qquad (6.42)$$

Коли стандартні помилки параметрів S_{α_j} не перевищують абсолютні значення цих параметрів a_j, то це може означати, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істотних значень.

Приклад 6.3 [28]. Побудувати економетричну модель множинної регресії, яка описує зв'язок між тижневими витратами на харчування, загальними витратами та розміром сім'ї. Оцінити тісноту та значимість зв'язку між змінними та параметрами моделі. Дані обстеження сімей наведені у таблиці:

Таблиця 6.14

№ з/п	**Витрати на харчування, г.о.**	**Загальні витрати, г.о**	**Розмір сім'ї (кількість)**
1	**2**	**3**	**4**
1	22	45	1,5
2	34	75	1,6
3	50	125	1,9
4	67	223	1,8
5	47	92	3,4
6	66	146	3,6
7	81	227	3,4
8	106	358	3,5
9	70	135	5,5
10	95	218	5,4
11	119	331	5,4
12	147	490	5,3
13	93	175	8,5
14	133	305	8,3
15	169	468	8,1
16	197	749	7,3

Розрахувати точковий та індивідуальний прогнози математичного сподівання індивідуального значення залежної змінної, коли для прогнозного періоду відомий вектор $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Ідентифікуємо змінні:

Y – витрати на харчування (залежна змінна);

X (x_1, x_2) – незалежні змінні: x_1 – загальні витрати, г.о.; x_2 – розмір сім'ї (кількість членів сім'ї).

Практикою спостережень, наприклад, встановлено, що дана модель може бути специфікована у лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u;$$
$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

де Y, Y - відповідно фактичні та розрахункові значення тижневих витрат на харчування за моделлю; u – залишки; $\grave{a}_0, \grave{a}_1, \grave{a}_2$ - оцінка параметрів моделі.

Оператор оцінки параметрів моделі $\grave{a}_j$ при використанні 1МНК має вигляд (6.3):

$$A = (X'X)^{-1} X'Y,$$

де
$$A=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} 1 & 45 & 1{,}5 \\ 1 & 75 & 1{,}6 \\ 1 & 125 & 1{,}9 \\ 1 & 223 & 1{,}8 \\ 1 & 92 & 3{,}4 \\ 1 & 146 & 3{,}6 \\ 1 & 227 & 3{,}4 \\ 1 & 358 & 3{,}5 \\ 1 & 135 & 5{,}5 \\ 1 & 218 & 5{,}4 \\ 1 & 331 & 5{,}4 \\ 1 & 490 & 5{,}3 \\ 1 & 175 & 8{,}5 \\ 1 & 305 & 8{,}3 \\ 1 & 468 & 8{,}1 \\ 1 & 749 & 7{,}3 \end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix} 22 \\ 34 \\ 50 \\ 67 \\ 47 \\ 66 \\ 81 \\ 106 \\ 70 \\ 95 \\ 119 \\ 147 \\ 93 \\ 133 \\ 169 \\ 197 \end{pmatrix};$$

X' - матриця, транспонована до X.

Одиниця в матриці незалежних змінних X дописується тоді, коли економетрична модель має вільний член a_0 (як у нашому випадку).

Згідно з оператором оцінювання обчисляємо матриці:

$$1)\ (X'X)=\begin{pmatrix} 16 & 416{,}2 & 74{,}5 \\ 416{,}2 & 1601562 & 23271 \\ 74{,}5 & 23271 & 436{,}7 \end{pmatrix};$$

$$2)\ (X'X)=\begin{pmatrix} 0{,}314 & -0{,}0017 & -0{,}0446 \\ -0{,}0017 & 0{,}00003 & -0{,}00012 \\ -0{,}0446 & -0{,}00012 & 0{,}0165 \end{pmatrix};$$

$$3)\ X'Y = \begin{pmatrix} 1495 \\ 520090 \\ 8368 \end{pmatrix}; \qquad 4)\ A = \begin{pmatrix} 8,8 \\ 0,2 \\ 6,97 \end{pmatrix}.$$

Отже, економетрична модель множинної регресії для тижневих витрат на харчування запишеться так:

$$Y = 8,8 + 0,2x_1 + 6,97x_2.$$

Зробимо економетричні висновки.

Коли за всіх однакових умов незалежна змінна x_1 (загальні витрати) змінюється (збільшується або зменшується) на одиницю, то залежна змінна Y змінюється на 0,2 одиниць. Якщо при тих же умовах незалежна змінна x_2 (розмір сім'ї) змінюється на одиницю, то залежна змінна Y змінюється на 6,97 одиниць.

Визначимо множинні коефіцієнти детермінації та кореляції:

Таблиця 6.15

№ з/п	Y	Y	$(Y-\overline{Y})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$	$\grave{e} = Y - Y$	$\grave{e}^2 = (Y-Y)^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	22	20,3	4225	4007	1,7	2,89
2	34	27,0	3399	2632	7	49
3	50	39,0	2144	1246	11	121
4	67	58,0	745	335	9	81
5	47	42,9	1798	1467	4,1	16,81
6	66	55,1	918	372	10,9	118,8
7	81	69,9	237	18,5	11,1	123,2
8	106	96,8	132.2	428	9,2	84,6
9	70	66,1	369	234	3,9	15,21
10	95	82,0	10,9	94,1	13	169
11	119	104,6	372	1136	14,4	207,4
12	147	131,7	2540	3807	11,3	127,7
13	93	95,0	94,1	59,3	-2	4
14	133	119,6	1176	2275	13,4	179,6
15	169	150,8	4267	7006	18,2	331,2
16	197	202,0	13519	12477	-5	25
$\sum$		1364,8	35940	37594	-	1656,4
У середньому		85,3	-	-	-	-

Визначимо коефіцієнти детермінації та кореляції, якщо (n-1)=(16-1)=15 і (n-m_1)=(16-3)=13:

$$R^2 = 1 - \frac{1656,4}{37594} * \frac{15}{3} = 0,950; \quad R = 0,975.$$

Коефіцієнти детермінації та кореляції наближені до одиниці, тому зв’язок між змінними X та Y – тісний. Значення коефіцієнта витрат на харчування на 95% визначається варіаціями загальних витрат та розміром сім’ї, а 5% припадає на невраховані фактори.

Визначимо значимість зв’язку між змінними X та Y за допомогою F-критерію Фішера (6.26):

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{16}(Y-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{16}(Y-\overline{Y})^2} * \frac{n-m_1}{m_1-1} = \frac{35940}{1656,4} * \frac{13}{2} = 141,0.$$

Обчислене фактичне значення критерія Фішера F порівнюється з табличним $F_{табл.}$ (див. додаток А). При ступенях вільності чисельника (m_1-1)=(3-1)=2 та знаменника (n-m_1)=(16-3)=13 і прийнятому рівню довіри (1-α)=(1-0,05)=0,95 $F_{табл}$ для розглянутої моделі дорівнює $F_{табл}$=3,81. Так як $F > F_{табл}$ (141,0>3,81), то це означає значимість зв’язку в економетричній моделі.

Для перевірки значимості коефіцієнта кореляції R розраховуємо t-критерій Ст’юдента:

$$t_\alpha = \frac{R\sqrt{n-m_1}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{0,975 * \sqrt{13}}{\sqrt{1-0,950}} = \frac{0,975 * 3,61}{0,224} = 15,71.$$

З використанням статистичних таблиць (додаток Б) при рівні значимості α=0,05 та числу ступенів вільності (n-m_1)=(16-3)=13 вибираємо $t_{табл.}$=1,771.

Оскільки $t_\alpha > t_{табл.}$, то можна зробити висновок про значимість коефіцієнта кореляції.

Для оцінки значимості оцінок параметрів моделі множинної регресії обчислимо t-критерій. Дисперсія залишок дорівнює

$$\sigma_{\grave{e}}^2 = \frac{\sum_{з=1}^{16} \grave{e}_з^2}{n - m_1} = \frac{1656,4}{13} = 127,4.$$

Тоді з урахуванням стандартної помилки оцінки параметрів розраховуєм значення *t*-критеріїв:

$$t_{1\alpha} = \frac{|a_0|}{\sqrt{\sigma_и^2 * c_{11}}} = \frac{8,8}{\sqrt{127,4 * 0,314}} = \frac{8,8}{6,32} = 1,392;$$

$$t_{2\alpha} = \frac{|a_1|}{\sqrt{\sigma_и^2 * c_{22}}} = \frac{0,2}{\sqrt{127,4 * 0,00003}} = \frac{0,2}{0,0618} = 3,24;$$

$$t_{3\alpha} = \frac{|a_2|}{\sqrt{\sigma_и^2 * c_{33}}} = \frac{6,97}{\sqrt{127,4 * 0,0165}} = \frac{6,97}{1,45} = 4,81.$$

Вище було визначене табличне значення *t*-критерію $t_{табл.}$=1,771. Порівняння розрахованих та табличного значень *t*-критеріїв приводить до такого: $t_{1\alpha}<t_{табл}$, що свідчить про нестійкість впливу змінної x_1 на результативну ознаку *Y*; $t_{2\alpha}>t_{табл}$. та $t_{3\alpha}>t_{табл}$., що показує істотний зв'язок цих залежних змінних (x_2, x_3) на залежну *Y*.

На основі *t*-критеріїв та стандартної помилки $S_{aj} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}$ можуть бути визначені довірчі інтервали для параметрів моделі:

$$a_0 - t_{1\alpha}\sqrt{\sigma_и^2 * c_{11}} \le a_0 \le a_0 + t_{1\alpha}\sqrt{\sigma_и^2 * c_{11}},$$

$$8,8 - 1,392 * 6,32 \le \grave{a}_0 \le 8,8 + 1,392 * 6,32,$$

$$0,003 \le \grave{a}_0 \le 17,60;$$

$$a_1 - t_{2\alpha}\sqrt{\sigma_и^2 * c_{22}} \le a_1 \le a_1 + t_{2\alpha}\sqrt{\sigma_и^2 * c_{22}},$$

$$0,2 - 3,24 * 0,0618 \le \grave{a}_1 \le 0,2 + 3,24 * 0,0618,$$

$$0 \le \grave{a}_1 \le 0,4;$$

$$a_2 - t_{3\alpha}\sqrt{\sigma_и^2 * c_{33}} \le a_2 \le a_2 + t_{3\alpha}\sqrt{\sigma_и^2 * c_{33}},$$

$$6,97 - 4,81 * 1,45 \le \grave{a}_2 \le 6,97 + 4,81 * 1,45,$$

$$0 \le \grave{a}_2 \le 13,94.$$

Так як значення стандартних помилок S_{aj} не перевищують абсолютні значення оцінок параметрів $\hat{a}_j$, то це означає, що оцінки параметрів є незміщеними.

Нарешті, побудуємо точковий та інтервальний прогнози для економетричної моделі.

Визначимо прогнозне значення залежної змінної при $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$Y_0 = 8{,}8 + 0{,}2\tilde{o}_1 + 6{,}97\tilde{o}_2 = 8{,}8 + 0{,}2 * 500 + 6{,}97 * 6 = 150{,}6.$$

Тоді $M(Y_0)$ можна розглядати як оцінку прогнозного значення математичного сподівання та індивідуального значення витрат на харчування при відомих загальних витратах x_1 та розміру сім'ї x_2.

Получимо інтервальний прогноз математичного сподівання $M(Y_0)$.

Визначимо для цього дисперсію прогнозну σ_n^2 (6.28) з урахуванням матриці похибок $(X'X)^{-1}$, яка для розглядаємого прикладу має наведений вигляд:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}314 & -0{,}0017 & -0{,}0446 \\ -0{,}0017 & 0{,}00003 & -0{,}0012 \\ -0{,}0446 & -0{,}00012 & 0{,}0165 \end{pmatrix}.$$

Елементи дисперсійно-коваріаційної матриці за формулами (6.30) мають значення:

$$\sigma_{\grave{a}_1}^2 = \sigma_{\grave{e}}^2 * \tilde{n}_{11} = 127{,}4 * 0{,}314 = 40;$$

$$\sigma_{\grave{a}_2}^2 = \sigma_{\grave{e}}^2 * \tilde{n}_{22} = 127{,}4 * 0{,}00003 = 0{,}00382;$$

$$\sigma_{\grave{a}_3}^2 = \sigma_{\grave{e}}^2 * \tilde{n}_{33} = 127{,}4 * 0{,}0165 = 2{,}10;$$

$$\tilde{n}_{12} = \tilde{n}_{21} = \sigma_{\grave{e}}^2 * \tilde{n}_{12} = -127{,}4 * 0{,}0017 = -0{,}216;$$

$$\tilde{n}_{13} = \tilde{n}_{31} = \sigma_{\grave{e}}^2 * \tilde{n}_{13} = -127{,}4 * 0{,}0446 = -5{,}68;$$

$$\tilde{n}_{23} = \tilde{n}_{32} = \sigma_{\grave{e}}^2 * \tilde{n}_{23} = -127{,}4 * 0{,}00012 = -0{,}01529.$$

Тоді дисперсіно-коваріаційна матриця запишеться у вигляді:

$$\mathrm{var}(A) = \begin{pmatrix} 40 & -0{,}216 & -5{,}68 \\ -0{,}216 & 0{,}00382 & -0{,}01529 \\ -5{,}68 & -0{,}01529 & 2{,}10 \end{pmatrix};$$

Знайдемо дисперсію помилок:

$$\sigma_n^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 & -0{,}216 & -5{,}68 \\ -0{,}216 & 0{,}00382 & -0{,}01529 \\ -5{,}68 & -0{,}01529 & 2{,}10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= (1*40 - 500*0{,}216 - 6*5{,}68 - 1*0{,}216 + 500*0{,}00382 -$$

$$6*0{,}01529 - 1*5{,}68 - 500*0{,}01529 + 6*2{,}10) \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} = (-102{,}1 +$$

$$+1{,}602 - 0{,}725) \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} = (-1*102{,}1 + 500*1{,}602 -$$

$$-6*0{,}725) = 694{,}5.$$

Стандартна помилка прогнозу математичного сподівання $M(Y_0)$:

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2} = \sqrt{694{,}5} = 26{,}4.$$

Тоді інтервальний прогноз математичного сподівання $M(\hat{Y}_0)$ буде у межах:

$$150{,}6 - 1{,}771 * 26{,}4 \le M(Y_0) \le 150{,}6 + 1{,}771 * 26{,}4;$$

$$103{,}8 \le M(Y_0) \le 197{,}4.$$

Обчислимо дисперсію та стандартну помилку прогнозу індивідуального значення Y_0:

$$\sigma_{u(i)}^2 = \sigma_n^2 + \sigma_u^2 = 694{,}5 + 127{,}4 = 821{,}9.$$

Визначимо індивідуальний прогноз індивідуального значення Y_0:

$$Y_0 - t_\alpha \sigma_{n(i)} \le Y_0 \le Y_0 + t_\alpha \sigma_{n(i)};$$

$$150{,}62 - 1{,}771 * 28{,}7 \le Y_0 \le 150{,}62 + 1{,}771 * 28{,}7;$$

$$99{,}8 \le Y_0 \le 201{,}4.$$

Отже, при α=0,05 рівні довіри (1-α)=0,95, що відповідає ймовірності p=0,95, прогноз математичного сподівання $M(Y_0)$ потрапляє в інтервал [103,8; 197,4], а прогноз індивідуального значення – в інтервал [99,8; 201,4]. В економічної інтерпретації це означає, що при прогнозних загальних витратах у 500 одиниць при сім'ї з шести осіб середні витрати на харчування потрапляють в інтервал

$$103{,}8 \le M(Y_0\,) \le 197{,}4.$$

Водночас окремі (інтервальні) витрати містяться в інтервалі

$$99{,}8 \le Y_0 \le 201{,}4.$$

Запитання для самоконтролю

6.8.1. Навіщо потрібен прогноз для економетричної моделі?
6.8.2. Які бувають види прогнозу?
6.8.3. Яка структура дисперсійно-коваріаційної матриці і для чого вона розраховується?
6.8.4. Які характеристики тісноти зв'язку змінних у множинній регресії?
6.8.5. Що показує коефіцієнт детермінації? Як він розраховується? У яких межах лежать його значення?
6.8.6. Що показує множинний коефіцієнт кореляції? Як він розраховується?
6.8.7. Що характеризують парні коефіцієнти кореляції?
6.8.8. Що характеризує F-критерій Фішера в кореляційному аналізі? Яка структура залежності, за якою він розраховується? Як вибирається F-критерій Фішера за статистичними таблицями?
6.8.9. Що характеризує t-критерій Ст'юдента в кореляційному аналізі? Як він вибирається за статистичними таблицями?
6.8.10. Що характеризують ступені вільності у встановленні тісноти та значимості зв'язку між змінними?

6.8.11. Яка структура залежності, що характеризує довірчі інтервали значень параметрів моделі в оцінці значимості зв'язку між змінними?
6.8.12. Як визначається стандартна помилка оцінки параметра моделі?

Вправи

Побудувати економетричну модель множинної регресії, фактичні змінні для якої наведені у таблицях 6.16-6.25. Оцінити тісноту та значимість зв'язку між змінними та параметрами моделі. Розрахувати точковий та індивідуальний прогнози математичного сподівання та індивідуального значення залежної змінної, коли для прогнозного періоду відомий вектор X_0. Зробити економічні висновки.

Таблиця 6.16

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 300 \\ 0,35 \end{pmatrix}$$

Номер цеху	Середньо-тижнева зарплата, ум.о.	Продуктивність праці, ум.о.	Фондомісткість продукції, ум.о.
1	45	265	0,20
2	42	236	0,04
3	50	257	0,30
4	55	279	0,20
5	40	226	0,10
6	70	350	0,10
7	56	278	0,25
8	57	262	0,03
9	55	269	0,15
10	53	250	0,32

Таблиця 6.17

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 320 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Номер цеху	Середньо-тижнева зарплата, ум.о.	Продуктивність праці, ум.о.	Викон. норми виробітку, %
1	45	265	130
2	42	236	127
3	50	257	151
4	55	279	149
5	40	226	140
6	70	350	141
7	56	278	152
8	57	262	188
9	55	269	120
10	53	250	126

Таблиця 6.18

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3100 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Номер підприємства	Рівень рентабельності, %	Продуктивність праці, ум.о.	Фондовіддача, ум.о.
1	10,7	3792	38,9
2	11,3	2983	33,3
3	12,2	3000	37,7
4	12,4	2537	31,1
5	10,9	2421	29,4
6	11,3	3047	37,2
7	11,1	3002	35,6
8	14,0	2887	34,1
9	6,8	2141	22,8
10	7,1	2005	21,7

Таблиця 6.19

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 85 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Номер торгового підприємства	Рівень рентабельності, %	Частка продовольчих товарів у товарообігу, %	Середньомісячна оплата праці, ум.о
1	3,62	74,2	156
2	3,80	73,5	162
3	2,77	77,0	149
4	2,12	84,3	133
5	4,33	67,3	197
6	4,01	70,1	182
7	2,01	83,1	127

Таблиця 6.20

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 26,8 \\ 77 \end{pmatrix}$$

Рік	Рівень рентабельності, %	Середньомісячний товарообіг, ум.о	Частка продовольчих товарів у товарообігу, %
Перший	3,03	24,3	70,8
Другий	3,21	24,5	70,3
Третій	3,37	24,8	75,0
Четвертий	3,61	26,3	75,8
П’ятий	3,77	26,5	76,7

Таблиця 6.21

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Номер підприємства	Рівень рентабельності, %	Затрати на 1 од. товарної продукції, ум.о.	Частка простоїв устаткування, %
1	9,5	0,93	18,1
2	19,4	0,85	7,8
3	8,7	0,91	17,4
4	18,3	0,84	6,4
5	16,4	0,83	7,8
6	8,8	0,94	17,1
7	17,8	0,80	10,2
8	13,7	0,84	14,1
9	7,0	0,95	20,0
10	10,2	0,87	16,7

Таблиця 6.22

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Номер підприємства	Продуктивність праці, ум.о.	Частка робітників з технічн. підготовкой, %	Частка механіз. робіт, %
1	43000	64	84
2	4150	61	83
3	3000	47	67
4	3420	46	63
5	3300	49	69
6	3400	54	70
7	3420	53	73
8	4100	61	81
9	3700	57	77
10	3500	54	72

Таблиця 6.23

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 75 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Номер району	Рівень збитковості, %	Збір з 1 га, ц	Затрати на 1 га посіву, ум.о.
1	31,4	52,8	47,4
2	40,9	72,6	16,1
3	37,1	50,4	31,7
4	45,7	33,4	29,3
5	57,7	31,5	30,9
6	66,7	54,6	25,6
7	13,3	54,3	19,2
8	63,8	36,6	36,3
9	68,8	15,6	46,2
10	2,8	73,2	7,3

Таблиця 6.24

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 75 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Номер району	Рівень збитковості, %	Збір з 1 га, ц	Затрати на 1 га посіву, ум.о.
1	31,4	52,8	21,83
2	40,9	72,6	19,09
3	37,1	50,4	20,26
4	45,7	33,4	28,57
5	57,7	31,5	17,96
6	66,7	54,6	15,32
7	13,3	54,3	20,19
8	63,8	36,6	24,26
9	68,8	15,6	20,47
10	2,8	73,2	18,95

Таблиця 6.25

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 34 \\ 175 \end{pmatrix}$$

Рік	Рівень рентабельності, %	Оборотність товарів, днів	Середньомісячний оплата праці, ум.о
Перший	3,03	40,3	142,7
Другий	3,21	40,2	154,3
Третій	3,37	39,3	160,8
Четвертий	3,61	36,6	163,2
П’ятий	3,77	35,0	169,0

Глава 7. Порушення умов використання 1МНК для загальної лінійної моделі, шляхи їх виявлення та подолання

7.1. Поняття мультиколінеарності та її ознаки

Однією з умов використання методу найменших квадратів (1МНК) для знаходження параметрів економетричної моделі є те, що пояснювальні змінні у матриці X мають бути незалежними між собою, тобто $|X'X| \neq 0$ (четверта умова застосування 1 МНК у п. 6.2). Проте на практиці можуть мати місце випадки, коли пояснювальні змінні пов'язані між собою, що стає перешкодою до використання 1МНК.

Явище існування тісної лінійної залежності, або сильної кореляції, між двома або більше пояснювальними змінними називається **мультиколінеарністю**. Термін "мультиколінеарність" вперше було впроваджено Р.Фрішем (1934 р.). Вона негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі або взагалі робить неможливою її побудову.

Основні *наслідки* мільтиколінеарності такі:

- падає точність оцінювання параметрів моделі;
- оцінки деяких параметрів моделі можуть показати порушення гіпотези про значимість зв'язку через наявність мільтиколінеарності пояснювальних змінних;
- оцінки параметрів моделі стають дуже чутливими до розмірів сукупності спостережень і навіть збільшення цієї сукупності іноді може призвести до значних змін в оцінках параметрів.

Головними ознаками мільтиколінеарності є такі:

- наявність високих значень парних коефіцієнтів кореляції $r_{x_i x_j} \geq 0,8$ (це означає, що пояснювальні змінні x_i та x_j пов'язані між собою лінійною залежністю та $r_{x_s x_j} \to 1, i \neq j$);

- значне наближення коефіцієнта кореляції до одиниці;
- наявність малих значень оцінки параметрів моделі при високому рівні коефіцієнта детермінації R^2 і F-критерія;
- істотна зміна оцінок параметрів моделі при додатковому введенні до неї пояснювальної змінної та ін.

7.2. Визначення мультиколінеарності та способи її усунення

Мультиколінеарність може бути досліджена за допомогою **алгоритму Фаррара-Глобера**. Основу алгоритму складають три види статистичних критеріїв, за якими перевіряється мультиколінеарність:

1. *Визначення критерія Пірсона* χ^2(“хі”-квадрат) усього масиву незалежних змінних *X*:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}\left(2m + 5\right)\right] ln\left|r\right|, \qquad (7.1)$$

де $\left|r\right|$ - визначник кореляційної матриці коефіцієнтів парної регресії $r\left(r_{x_j} r_{\bar{x}_k}\right)$.

Значення цього критерія порівнюється з данними статистичних таблиць χ^2 при $\frac{1}{2}m\left(m-1\right)$ ступенях вільності і рівні значимості α. Якщо $\chi^2 > \chi^2_{табл}$, то в масиві пояснювальних змінних існує мультиколінеарність.

2. *Обчислення F-критерія Фішера*:

$$F_k = \left(C_{kk} - 1\right)\frac{n - m_1}{m_1 - 1}, \qquad (7.2)$$

де C_{kk} – діагональні елементи матриці $C=r^{-1}$.

Фактичні значення критеріїв порівнюються з табличними при (n-m_1) і (m_1-1) ступенях вільності і рівні значимості α. Якщо $F_к>F_{табл}$, то відповідна *k*-та пояснювальна змінна мультиколінеарна з іншими.

3. *Обчислення t-критеріїв Ст'юдента*:

$$t_{kj} = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m_1}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}}. \qquad (7.3)$$

Фактичні значення критеріїв t_{kj} порівнюються з табличними при (n-m_1) ступенях вільності і рівні значимості α. Якщо $t_{kj}>t_{табл}$, то між пояснювальними змінними x_k та x_j існує мультиколінеарністю.

Усунути мультиколінеарність в економетричній моделі можна, відкинувши одну із змінних мультиколінеарної пари. Але такий засіб часто суперечить дійсності економічних зв'язків між чинниками. Тоді можна перетворити пояснювальні змінні моделі одним із підходів: узяти відхилення від середньої; замість абсолютних значень узяти відносні; стандартизувати пояснювальні змінні; змінити специфікацію моделі.

Коли жодний з розглянутих способів не дає змоги позбутися мультиколінеарності, то параметри моделі слід оцінювати **методом головних компонент**. Цей метод використовується для оцінювання параметрів моделей великого розміру. Ідея методу полягає в перетворенні множини пояснювальних змінних матриці X на нову множину попарно некорельованих змінних, серед яких перша відповідає максимально можливій дисперсії, друга – максимально можливій дисперсії у просторі, який є ортогональним до першого, і т.д. Алгоритм методу докладно описаний у підручнику [28].

Існують також інші статистичні методи виправлення мультиколінеарності, такі як *факторний аналіз*, *гребнева регресія*. Вони потребують спеціальних математичних знань і описані у підручнику [24].

Приклад 7.1 [28]. **Застосування алгоритму Фаррара-Глобера для виявлення мультиколінеарності незалежних змінних**

На середньомісячну заробітну плату (Y) впливає ряд незалежних змінних: продуктивність праці (x_1), фондомісткість (x_2) та коефіцієнт плинності робочої сили (x_3). Дослідити, що пойменовані незалежні змінні для моделі, яку необхідно побудувати, за допомогою 1 МНК, не мультиколінеарні. Вхідні дані наведені у таблиці:

Таблиця 7.1

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-днів	Фондомісткість, млн.г.о.	Коефіцієнт плинності робочої сили, %
1	32	0,89	19,5
2	29	0,43	15,6
3	30	0,70	13,5
4	31	0,61	9,5
5	25	0,51	23,5
6	34	0,51	12,5
7	29	0,65	17,5
8	24	0,43	14,5
9	20	0,51	14,5
10	33	0,92	7,5

Розв'язання

Крок 1. *Стандартизація змінних*

Стандартизація незалежних змінних x_i (i=1,2,3) здійснюється за формулою:

$$x^*_{i\kappa} = \frac{x_{i\kappa} - \bar{x}_\kappa}{\sqrt{n\sigma^2_{xk}}},$$

де n – кількість спостережень, n=10; $\bar{x}_\kappa$ - середнє арифметичне значення змінної x_κ; $\sigma^2_{x\kappa}$ - дисперсія змінної x_κ.

Розрахунки для стандартізації змінної x_1, x_2, x_3 згідно з наведеною формулою здійснюються в таблиці:

Таблиця 7.2

$(x_{i1}-\bar{x}_1)^2$	$(x_{i2}-\bar{x}_2)^2$	$(x_{i3}-\bar{x})^2$	x^*_{i1}	x^*_{i2}	x^*_{i3}
10,89	0,000016	11,56	0,2487	0,0091	-0,2518
0,09	0,0247336	2,56	0,0226	-0,3531	0,1185
1,89	0,012995	0,16	0,0980	0,2580	-0,0296
5,29	0,000576	19,36	0,1733	0,0543	-0,3258
13,89	0,005776	92,16	-0,2788	-0,1720	0,7108
28,09	0,005776	1,96	0,3994	-0,1720	-0,1037
0,09	0,004096	12,96	0,0226	0,1448	0,2666
22,09	0,024336	0,35	-0,3541	-0,3531	0,0444
75,89	0,005778	0,35	-0,6556	-0,1720	0,0444
14,49	0,111555	40,95	0,3240	0,7559	-0,4739
176,1	0,09524	182,4	-	-	-

Дисперсії кожної незалежної змінної мають значення:

$$\sigma^2_{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i1}-\bar{x}_1)}{n} = \frac{176,1}{10} = 17,61;$$

$$\sigma^2_{x_2} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i2}-\bar{x}_2)}{n} = \frac{0,19524}{10} = 0,0195;$$

$$\sigma^2_{x_3} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i3}-\bar{x}_3)}{n} = \frac{182,4}{10} = 18,24.$$

Матриця стандартизованих змінних подається у вигляді:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,2487 & 0,0091 & -0,2518 \\ 0,0226 & -0,3531 & 0,1185 \\ 0,0980 & 0,2580 & -0,0296 \\ 0,1733 & 0,0543 & -0,3258 \\ -0,2788 & -0,1720 & 0,7108 \\ 0,3994 & -0,1720 & -0,1037 \\ 0,0226 & 0,1448 & 0,2666 \\ -0,3542 & -0,3531 & 0,0444 \\ -0,6556 & -0,1720 & 0,0444 \\ 0,3240 & 0,7559 & -0,4739 \end{pmatrix}$$

Крок 2. *Знаходження кореляційної матриці*

Кореляційна матриця знаходиться за формулою:

$$r = X^{*\prime} X^*,$$

де $X^{*\prime}$ - матриця, транспонована до X^*.

Матриця $X^{*\prime}$ симетрична і має розмір 3х3:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,494 & -0,551 \\ 0,494 & 1 & -0,5168 \\ -0,551 & -0,5168 & 1 \end{pmatrix}$$

Елементами матриці є парні коефіцієнти кореляції, числові значення яких свідчать про тісноту зв'язку між незалежними змінними. Але чи можна стверджувати, що цей зв'язок є виявленням мультиколінеарності? Для цього існують статистичні критерії оцінки мультиколінеарності, які розглядаються нижче.

Крок 3. *Обчислення детермінанту матриці r та критерія* χ^2

$$D = |r| = 0,466;$$

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right] ln|r| = -\left[9 - \frac{1}{6}(6 + 5)\right] ln\, 0,466 = 5,48.$$

При ступенях вільності $\frac{1}{2}m(m-1) = \frac{1}{2} * 3 * 2 = 3$ та рівні довіри $(1\text{-}\alpha)=0,95$ $\chi^2_{табл.}=7,91$ (додаток В). Так як $\chi^2<\chi^2_{табл.}$, то для всього масиву незалежних змінних X не спостерігається мультиколінеарність.

Крок 4. *Знаходження матриці, оберненої до r:*

$$c = r^{-1} = (X^{*\prime} X^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,57 & -0,45 & 0,63 \\ -0,45 & 1,49 & 0,52 \\ 0,63 & 0,52 & 1,62 \end{pmatrix}$$

Крок 5. *Обчислення F-критерія Фішера:*

$$F_k = (c_{kk} - 1)\frac{n - m_1}{m_1 - 1},$$

де $c_{кк}$ – диагональні елементи матриці c; m_1 – число параметрів моделі, $.m_1 = 4$.

$$F_1 = (1,57 - 1)\frac{6}{3} = 1,14; \;\; F_2 = (1,49 - 1)\frac{6}{3} = 0,98;$$

$$F_3 = (1,62 - 1)\frac{6}{3} = 1,24.$$

Для рівня значимості α=0,05 і ступінів вільності чисельника $(n\text{-}m_1)=6$ та знаменника $(m_1\text{-}1)=3$ за статистичними таблицями знаходимо критичне (табличне) значення $F_{табл.}$=8,94 (див. додаток А). Оскільки $F_к<F_{табл.}$ ($к$=1,2,3), то кожна з незалежних змінних не мільтиколінеарна з двома іншими.

Крок 6. *Обчислення частинних коефіцієнтів кореляції*

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв'язку між двома незалежними змінними за умови, що третя не впливає на цей зв'язок. Вони обчислюються за елементами матриці c:

$$r_{12,3} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11} * c_{22}}} = \frac{0,45}{\sqrt{1,57 * 1,49}} = 0,293;$$

$$r_{13,2} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11} * c_{33}}} = \frac{-0,63}{\sqrt{1,57 * 1,62}} = -0,397;$$

$$r_{23,1} = \frac{-c_{22}}{\sqrt{c_{22} * c_{33}}} = \frac{-0,52}{\sqrt{1,49 * 1,62}} = -0,337.$$

Частинні коефіцієнти кореляції значно менші за парні. Це ще раз показує, що частинні і парні коефіцієнти кореляції не свідчать про наявність або відсутність мультиколінеарності.

Крок 7. *Визначення t-критеріїв Ст'юдента:*

$$t_{12} = \frac{r_{12,3}\sqrt{n-m_1}}{\sqrt{1-r_{12,3}^2}} = \frac{0{,}293\sqrt{6}}{\sqrt{1-0{,}0858}} = 0{,}750;$$

$$t_{13} = \frac{r_{13,2}\sqrt{n-m_1}}{\sqrt{1-r_{13,2}^2}} = \frac{0{,}39\sqrt{6}}{\sqrt{1-0{,}1521}} = 1{,}060;$$

$$t_{23} = \frac{r_{23,1}\sqrt{n-m_1}}{\sqrt{1-r_{23,1}^2}} = \frac{0{,}34\sqrt{6}}{\sqrt{1-0{,}1156}} = 0{,}896.$$

Табличне значення t-критерію при ступенях вільності $(n-m_1)=6$ і рівні значимості α=0,05 дорівнює $t_{табл.}$=1,943 (див. додатов Б). Усі числові значення t-критеріїв, знайдених для кожної пари змінних, менше за табличне значення. Звідси робимо висновок, що всі пари незалежних змінних не є мультиколінеарними.

7.3. Поняття гомо- і гетероскедастичності

Однією з чотирьох необхідних умов для застосування 1МНК при оцінюванні параметрів економетричної моделі (див. другу умову п. 6.2) є вимоги постійної дисперсії залишків для кожного спостереження, тобто $M(uu') = \sigma_u^2 E$. Ця властивість незмінної дисперсії в спостереженнях називається **гомоскедастичністю**.

Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження або групи спостережень, тобто $M(uu') \neq \sigma_u^2 S$, то це явище називається **гетероскедастичність.** Тут позначено: σ_u^2 - дисперсія залишків, яка виступає невідомим параметром; S – відома симетрична додатно визначена матриця. Зауважим, що обидва терміни – *гомоскедастичність та* *гетероскедастичність* – запропоновані відомим російським вченим-статистиком А.А. Чупровим.

При наявності гетероскедастичності залишків *u* оцінки параметрів моделі 1МНК будуть *незміщеними*, *обґрунтованими*, але *неефективними*. При цьому формулу для обчислення стандартної помилки спостережень застосовувати не можна.

При наявності гетероскедастичності в простій економетричній моделі, тобто $Y = a_0 + a_1 X + u$, щоб оцінити параметри 1МНК, достатньо змінити специфікацію моделі. Коли будується *модель множинної регресії* з багатьма змінними, то таке перетворення значно ускладнюється. Тому спочатку треба одним із методів визначити наявність гетероскедастичності, а потім оцінити параметри моделі із застосуванням спеціального підходу, який буде розглянутий пізніше.

Розглянемо на прикладі, як за рахунок перетворення вхідної інформації та зміни специфікації моделі можна обійти явище гетероскедастичності.

Приклад 7.2 [28]. Необхідно побудувати економетричну модель, що характеризує залежність між заощадженнями та доходами населення, млрд.г.о.:

Таблиця 7.3

Рік	Заощадження (*y*)	Дохід (*x*)	Рік	Заощадження (*y*)	Дохід (*x*)
1	0,36	8,8	10	0,59	15,5
2	0,20	9,4	11	0,90	16,7
3	0,08	10,0	12	0,95	17,7
4	0,20	10,6	13	0,82	18,6
5	0,10	11,0	14	1,04	19,7
6	0,12	11,9	15	1,53	21,1
7	0,41	12,7	16	1,94	22,8
8	0,50	13,5	17	1,75	23,9
9	0,43	14,3	18	1,99	25,2

Скориставшись оператором оцінювання 1МНК

$$A = (X'X)^{-1} X'Y,$$

знаходимо параметри моделі: $\grave{a}_0$=-1,081; $\grave{a}_1$=0,1178. Тоді економетрична модель має вигляд рівняння парної регресії: $\acute{o}$= *-1,081+0,1178x.*

Можна висунути гіпотезу, що відхилення заощаджень від норми можуть бути пропорціональними до доходу, тобто до цієї моделі ймовірне існування гетероскедастичності залишків.

Для того, щоб обійти явище гетероскедастичності можна, як варіант, перетворити вхідну інформацію, розглянувши такі нові змінні (таблиця 7.4.):

$$y^* = \frac{y}{x}; \quad x^* = \frac{1}{x}.$$

Таблиця 7.4

Рік	y*	x*	Рік	y*	x*
1	0,041	0,114	10	0,038	0,065
2	0,022	0,106	11	0,054	0,060
3	0,008	0,100	12	0,054	0,056
4	0,019	0,094	13	0,044	0,054
5	0,009	0,091	14	0,053	0,051
6	0,010	0,084	15	0,073	0,047
7	0,032	0,079	16	0,085	0,044
8	0,0037	0,074	17	0,073	0,042
9	0,0030	0,070	18	0,079	0,040

Нове рівняння регресії за даними таблиці має вигляд:

$$\hat{y}^* = -0,854 + 0,1026x^* .$$

В результаті перетворення вхідних даних повністю змінилась специфікація моделі: змінна $\hat{y}^*$ характеризує відносний показник рівня заощаджень на одиницю доходу. При цьому спостереження з меншими значеннями x* мають відносно більшу питому вагу при оцінюванні параметрів моделі, ніж у першому варіанті, а це означатиме, що явище гетероскедастичності не впливає на оцінки параметрів 1МНК.

7.4. Методи визначення гетероскедастичності

Використання того чи іншого методу перевірки економетричної моделі на наявність гетероскедастичності залежить від вхідних даних. Можуть бути запропоновані чотири таких методи: критерій μ; параметричний тест Гольдфельда-Квандта; непараметричний тест Гольдфельда-Квандта; тест Глейсера. Розглянемо послідовність тестування наявності гетероскедастичності.

Критерій μ. Цей метод використовується при великої кількості сукупності спостережень *n*, яких може бути удвічі більше, ніж оцінюваних параметрів. Вхідні дані залежної змінної *Y* розбиваються на *k* груп з номерами $r=1\dots k$. За кожною групою спостережень розраховується сума квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^{k} \left(y_{ir} - \bar{y}_r \right)^2 . \qquad (7.4)$$

Обчислюється сума квадратів відхилень у цілому для сукупності спостережень:

$$\sum_{r=1}^{k} S_r = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{i=1}^{k} \left(y_{ir} - \bar{y}_r \right)^2 , \qquad (7.5)$$

де n_r – кількість спостережень у кожній групі *r*.

Розраховується параметр λ:

$$\lambda = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{S_r}{n_r} \right)^{n_r/2} \Bigg/ \left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n} \right)^{n/2} , \qquad (7.6)$$

де $\prod$ - прибуток *k* виразів за цією позначкою.

Обчислюється критерій

$$\mu = -2 \ln \lambda , \qquad (7.7)$$

який наближено відповідає розподілу χ^2 при ступені вільності (*k*-1) та рівні довіри (1-α). Якщо $\mu > \chi^2_{табл.}$, то у розглядаємій множині спостережень має місце гетероскедастичність.

Приклад 7.3. Перевірка гетероскедастичності на основі критерію μ [28].

Для даних, які наведені в прикладі 7.2, перевірити наявність гетероскедастичності за критерієм μ.

Розв'язання

Крок 1. Дані таблиці 7.3 розбиваються на три групи по шість спостережень у кожній:

Група 1	Група 2	Група 3
0,36	0,41	0,82
0,20	0,50	1,04
0,08	0,43	1,53
0,20	0,59	1,94
0,10	0,90	1,75
0,12	0,95	1,99

Крок 2. Розраховуються середні значення змінних у кожній групі та суми квадратів відхилень індивідуальних значень кожної групи від середнього значення:

$$\overline{Y}_1 = 0{,}1767; \quad \overline{Y}_2 = 0{,}6300; \quad \overline{Y}_3 = 1{,}5117;$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{6} (Y_{i1} - \overline{Y}_1)^2 = 0{,}05313; \quad S_2 = \sum_{i=1}^{6} (Y_{i2} - \overline{Y}_2)^2 = 0{,}2822;$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{6} (Y_{i3} - \overline{Y}_3)^2 = 1{,}1703.$$

Крок 3. Обчислюється сума квадратів відхилень за трьома групами:

$$\sum_{r=1}^{3} S_r = S_1 + S_2 + S_3 = 0{,}05313 + 0{,}2822 + 1{,}1703 = 1{,}5056. .$$

Крок 4. Розраховується параметр λ:

$$\lambda = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{S_r}{n_r} \right)^{n_r/2} \Bigg/ \left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n} \right)^{n/2} = 0{,}00265 .$$

Крок 5. Знаходиться критерій μ:

$$\mu = -2\ln\lambda = 11{,}85\ .$$

За статистичними таблицями розподілу χ^2 вибирається $\chi^2_{табл.}$ з ступенями вільності ($к$-1)=2 та рівні довіри (1-α)=$0{,}99$: $\chi^2_{табл.}$=9,21 (див. додаток В). Оскільки μ>$\chi^2_{табл.}$, то спостерігається гетероскедастичність.

Параметричний тест Гольдфельда-Квандта. Метод застосовується при досить великої кількості спостережень n, коли дисперсія залишків зростає пропорційно квадрату однієї з незалежних змінних моделі. Тест починається з упорядкування за зменшенням незалежних змінних $x_j(j=1...m)$ відносно тієї змінної, яка підозрюється на гетероскедастичність. Виключають ***c*** середніх (у цьому упорядкуванні) спостережень. Оптимальне значення ***c*** за дослідженням авторів тесту

$$c = \frac{4}{15}n. \qquad (7.8)$$

Будуються дві економетричні моделі на основі 1МНК з розміром спостережень $(n-c)/2$ для першої моделі і таким же розміром для другої. Обчислюється сума квадратів залишків за першою S_1 та другою S_2 моделями:

$$S_1 =' u_1'u_1;\ S_2 = u_2'u_2\,, \qquad (7.9)$$

де u_1 та u_2 – залишки моделями (1) та (2).
Обчислються критерій

$$R^* = \frac{S_1}{S_2}, \qquad (7.10)$$

який наближено відповідає F-критерію Фішера. За статистичними таблицями знаходиться значення $F_{табл.}$ для ступенів вільності $(n-c-2m_1)/2,\ (n-c-2m_1)/2$ і вибраного рівня довіри, де m_1 – загальна кількість оцінюваних параметрів у моделі. Якщо $R^* > F_{табл.}$, то це свідчить про наявність гетероскедастичності.

Непараметричний тест Гольдфельда-Квандта базується на розгляді графічно зображеної залежності залишків u_i від упорядкованих спостережень за значеннями $x_j(j=1...m)$. Якщо для всіх значень змінної x_j залишки розподіляються нерівномірно і без певної закономірності, то дисперсія залишків є змінною величиною і спостерігається явище гетероскедастичності.

Тест Глейсера відповідає знаходженню параметрів регресійної моделі за допомогою 1МНК при використанні абсолютних значень залишків в функції від незалежної змінної x_j, яка може викликати зміну дисперсії σ_u^2. Для цього використовується одна з таких видів функцій:

$$|u| = a_0 + a_1 x_j ; \; |u| = a_0 + a_1 x_j^{-1} ; \; |u| = a_0 + a_1 x_j^{\frac{1}{2}} . \quad (7.11)$$

Рішення про гетероскедастичність на підставі значень параметрів $\grave{a}_0$ і $\grave{a}_1$ таке: чистій гетероскедастичності відповідає значення параметрів $\grave{a}_0 = 0, \grave{a}_1 \neq 0;$ змішаній гетероскедастичності - $\grave{a}_0 = 0, \grave{a}_1 \neq 0$.

Крім розглянутих методів визначення гетероскедастичності існують інші, з якими можна познайомитись у зазначеній літературі: графічний аналіз і тест рангової кореляції Спірмена [24]; тест Бреуша-Пагана [26].

7.5. Узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена). Прогноз за моделлю

Економетрична модель, в якої спостерігається явище гетероскедастичності, є узагальненою моделлю і для оцінювання її параметрів слід використовувати не метод найменших квадратів (1МНК), а **узагальнений метод найменших квадратів** (*метод Ейткена, або скорочено УМНК*).

Ідея УМНК полягає у знаходженні оцінок матриці параметрів *A* моделі з використанням додатково визначеної діагональної матриці *S*, за допомогою якої коригується вхідна інформація.

Матриця *S* має вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1}\ 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \frac{1}{\lambda_2}\ 0\ \dots\ 0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}, \qquad (7.12)$$

де λ_i - параметри, які обчислюються з використанням гіпотез:

а) дисперсія залишків пропорційна до змін пояснювальної змінної x_i, тоді $\lambda_i = \frac{1}{x_i}\left(i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m\right)$;

б) дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрату пояснювальної змінної x_i^2, тоді $\lambda_i = \frac{1}{x_i^2}$;

в) дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрату залишків за модулем $\left|u_i\right|^2$, тоді $\lambda_i = \left\{\left|u_i\right|\right\}^2$.

Оскільки матриця $S = P'P$, то матриця P має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

За наявністю гетероскедастичності узагальнена модель має вигляд

$$Y^* = AX^* + u^*, \qquad (7.13)$$

де $Y^* = P^{-1}Y;\ X^* = P^{-1}X;\ u^* = P^{-1}u.$

Використання для узагальненої моделі (7.13) 1МНК приводить до такого оператора оцінювання параметрів УМНК:

$$A = \left(X'S^{-1}X\right)^{-1} X'S^{-1}Y. \qquad (7.14)$$

Найкращий лінійний незміщений **прогноз за моделлю** УМНК визначається за співвідношенням

$$p = X_0 A + W'V^{-1}u, \qquad (7.15)$$

де $V = \sigma_u^2 S$ - відома симетрична додатково визначена матриця; W - матриця поточних і прогнозних значень залишків; X_0 – заданий вектор точкового періоду.

Величина $W'V^{-1}u$ визначає залишки прогнозного періоду і може розглядатися як помилка прогнозу на підставі моделі $Y = AX_0$.

Приклад 7.4 [28]. Використовуючи дані таблиці 7.5, де спостерігається гетероскедастичність, дати оцінки параметрів моделі згідно з методом Ейткена.

Таблиця 7.5

Номер спостереження	Витрати на харчування, г.о	Загальні витрати, г.о
1	2,30	15
2	2,20	15
3	2,08	16
4	2,20	17
5	2,10	17
6	2,32	18
7	2,45	19
8	2,50	20
9	2,20	20
10	2,50	22
11	3,10	64
12	2,50	687
13	2,82	72
14	3,04	80
15	2,70	85
16	3,94	90
17	3,10	95
18	3,99	100

Розв'язання

1. Ідентифікація змінних:

Y – витрати на харчування, залежна змінна;

X – загальні витрати, незалежна змінна.

Тоді загальний вигляд економетричної моделі такий:

$$Y = a_0 + a_1 X + u;$$

$$Y = a_1 + a_1 X; \;\; u = Y - \overline{Y}.$$

2. Згідно з першою гіпотезою припустимо, що в діагональній матриці S елементи λ_i пропорційні до зміни пояснювальної змінної x_i, тобто $\lambda_i = \dfrac{1}{x_i}$ (x_i – загальні витрати за і-м спостереженням). Тоді обернена матриця до S записується у вигляді (вище та нижче головної діагоналі – нулі):

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0667 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0667 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0625 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0588 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0588 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0556 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0526 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}05 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}05 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0454 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}01562 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}01471 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}01389 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0125 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0118 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0111 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}0105 \quad 0 \\ 0 \quad 0{,}01 \end{pmatrix}$$

3. Знайдемо матрицю, транспоновану до матриці пояснювальної змінної:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & 15 & 16 & 17 & 17 & 18 & 19 & 20 & 20 & 22 & 64 & 68 & 72 & 80 & 85 & 90 & 95 & 100 \end{pmatrix}$$

4. Добуток матриць:

$$X'S^{-1}X = \begin{pmatrix} 0{,}667 & 18 \\ 18 & 833 \end{pmatrix}.$$

5. Розрахунок оберненої матриці:

$$(X'S^{-1}X)^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}5934 & -0{,}0776 \\ -0{,}0776 & 0{,}0029 \end{pmatrix}.$$

6. Розрахунок матриці $(X'S^{-1}Y)$:

$$X'S^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1{,}5998 \\ 48{,}04 \end{pmatrix}.$$

7. Оцінка параметрів моделі за методом Ейткена:

$$A = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y = \begin{pmatrix} 3{,}5934 & -0{,}0776 \\ -0{,}0776 & 0{,}0029 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1{,}5998 \\ 48{,}04 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}0187 \\ 0{,}0141 \end{pmatrix}.$$

8. Економетрична модель витрат на харчування для теоретичних даних запишеться у вигляді:

$$Y = 2{,}0187 + 0{,}0141\tilde{O}.$$

9. Економічний аналіз характеристик моделі приводить до такого:

а) коефіцієнт детермінації R^2=0,722, а це означає, що 72,2% витрат на харчування залежить від загальних витрат;

б) коефіцієнт кореляції $R = \sqrt{R^2} = 0{,}850$, що свідчить про досить тісний зв’язок між витратами на харчування та загальними витратами;

в) залишкова дисперсія $\sigma_u^2 = 0{,}083$ показує, що розрахункові значення витрат на харчування дуже близькі до фактичних;

г) параметр моделі $\grave{a}_1 = 0{,}0141$ свідчить про те, що збільшення загальних витрат на одиницю сприятиме зростанню витрат на харчування на 0,0141 одиниць.

7.6. Природа і наслідки автокореляції

При побудові економетричних моделей з використанням динамічних (часових) рядів доводиться враховувати взаємозв’язок між собою випадкових величин у різні моменти часу. Такими випадковими величинами в моделях часто виступають залишки. Кореляційна залежність між послідовними значеннями залишків однієї вибірки множини спостережень через деякий період часу (запізнення, або лаг) називають **автокореляцією**. Наприклад, якщо між значеннями однієї вибірки $u_1, u_2, ..., u_p$ та $u_2, u_3, ..., u_{p+1}$ є залежність, то маємо справу з автокореляцією; залежність між значеннями двох різних вибірок $u_1, u_2, ..., u_p$ та $w_2, w_3, ..., w_{p+1}$ називається **серійною вибіркою** і до розглядаємої теми відношення не має.

При автокореляції математичне сподівання $M(u_i u_j) \neq 0$ для $i \neq j$, що свідчить про порушення другої умови використання 1МНК (див. п. 6.2), коли *дисперсія* залишків *постійна*, але спостерігається їх *коваріація*, тобто взаємозв’язок кожного наступного значення залишків з попереднім.

Виникнення автокореляції залишків може бути зв’язана з такими причинами:

- автокореляцією послідовних елементів матриць залежної та незалежних змінних;
- автокореляцію послідовних значень змінних, які не ввійшли до економетричної моделі;
- помилкою специфікації економетричної моделі.

Коваріація залишків у загальному вигляді економетричної моделі запишеться у вигляді

$$M(u_t u_{t-S}) = \rho^S \sigma_u^2, \qquad (7.16)$$

де t, s – моменти часу; ρ- коефіцієнт автокореляції, який характеризує рівень взаємозв'язку кожного наступного значення залишків u_{t-S} з попереднім u_t.

Вираз (7.16) означає, що за наявністю автокореляції залишків форма порушення другої необхідної умови для застосування 1МНК має вигляд:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S\,, \qquad (7.17)$$

де S – матриця коефіцієнтів автокореляції s-го порядку для динамічного ряду залишків u_t

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.18)$$

Якщо нехтувати наявністю автокореляції залишків, використання 1МНК може привести до таких наслідків:

- оцінки параметрів моделі будуть зміщеними;
- статистичні критерії Ст'юдента (t-критерій) і Фішера (F-критерій) не можуть бути використані для аналізу моделі;
- прогноз економетричної моделі буде неефективним.

7.7. Методи визначення автокореляції

Наявність автокореляції перевіряється за такими критеріями: Дарбіна-Уотсона; фон Неймана; нециклічного коефіцієнта автокореляції; циклічного коефіцієнта автокореляції.

Критерій Дарбіна-Уотсона. Цей критерій є найбільш відомим і поширеним для перевірки наявності автокореляції залишків:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}. \qquad (7.19)$$

Він може приймати значення в діапазоні від 0 до 4. Фактичні значення критерію за формулою (7.19) порівнюються з табличними, які вибираються в залежності від числа спостережень n та числа незалежних (пояснювальних) змінних m. Табличні значення мають нижню межу DW_1 і верхню DW_2.

Якщо $DW<DW_1$, то залишки мають автокореляцію. При $DW<DW_2$ автокореляція відсутня. Коли $DW_1<DW<DW_2$, то для конкретних висновків треба далі проводити дослідження, збільшивши сукупність спостережень.

Критерій фон Неймана використовується у вигляді:

$$Q = DW \frac{n}{n-1}. \qquad (7.20)$$

Фактичне значення критерія фон Неймана за формулою (7.20) порівнюється з табличними. Якщо $Q<Q_{табл.}$, то існує додатна автокореляція.

На практиці часто замість *нециклічного коефіцієнта автокореляції* обчислюють **циклічний коефіцієнт автокореляції**, який має вигляд:

$$r \approx \rho = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1} \right) \Bigg/ \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} u_t^2 \right) + \frac{m+1}{n}. \qquad (7.21)$$

Коефіцієнт r може набувати значень від –1 до +1. Від'ємні його значення свідчать про від'ємну автокореляцію, додатні – про додатну. Значення r близько нуля свідчать про відсутність автокореляції залишків.

Фактично обчислене значення r порівнюють з табличним (критичним) $r_{табл.}$ для вибраного з статистичних таблиць (додаток К) рівня значимості α і довжини динамічного ряду n. Якщо $r \geq r_{табл.}$, то існує автокореляція.

7.8. Методи оцінки параметрів моделі з автокореляцією. Прогноз за моделлю

Для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками можна застосувати такі методи: Ейткена; перетворення вхідної інформації; Кочрена-Оркатта; Дарбіна.

Метод Ейткена використовується тоді, коли залишки задовільнюють авторегресійну модель першого порядку. Він базується на скоригованій вхідній інформації з урахуванням коваріації залишків. Система рівнянь для оцінки параметрів моделі даного методу, який був розглянутий раніше, має вигляд:

$$\left(X'S^{-1}X\right)A = X'S^{-1}Y\,, \qquad (14.7)$$

де $\grave{A}$ - матриця (вектор) оцінок параметрів моделі; $X,\, X'$ - висхідна та транспонована до неї матриця незалежних змінних; Y – матриця залежних змінних; S^{-1} – матриця, обернена до матриці коваріації залишків.

Звідси оператор оцінювання за методом Ейткена має вигляд:

$$\grave{A} = \left(X'S^{-1}X\right)^{-1} X'S^{-1}Y\,. \; (7.23)$$

Оскільки коваріація залишків ρ^{S} при S>2 часто наближається до нуля, то обернену матрицю коваріації залишків доцільно використовувати у вигляді:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 \;...\; 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 - \rho & 0 & 0 & 0 \;...\; 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 - \rho & 0 & 0 \;...\; 0 \\ ... & ... & ... & ... & ...\;...\;... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;\; 0 \;\; 1 \end{pmatrix}.(7.24)$$

Метод перетворення вхідної інформації використовується при авторегресійній моделі першого порядку. Він дає оцінку параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

1) перетворення вхідної інформації за допомогою матриці перетворення Т;

2) застосування 1МНК для оцінки перетворених даних.

Економетрична модель представляється у вигляді

$$TY = TAX + Tu\,, \qquad (7.25)$$

щоб матриця перетворення Т відповідала умові

$$M(Tuu'T') = \sigma_u^2 E\,. \qquad (7.26)$$

Тому перетворення вхідної інформації виконується за допомогою такої матриці розміром $n * n$:

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.27)$$

Іноді для перетворення вхідної інформації виконується матриця Т розміром *(n-1)*n* , яка утворена з матриці (7.27) викреслюванням першого рядка.

Метод Корчена-Оркатта використовується тоді, коли залишки задовільняють автокореляційній моделі вищого порядку. Він є ітеративним методом оцінювання параметрів економетричної моделі, коли мінімізується сума квадратів залишків.

Для простішої моделі парної регресії

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t\,, \qquad (7.28)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (7.29)$$

сума квадратів залишків визначається так:

$$\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n} \left[\left(y_t - \rho y_{t-1} \right) - a_0 \left(1 - \rho \right) - a_1 \left(x_t - \rho x_{t-1} \right) \right]^2 .(7.30)$$

Далі використовується така ітераційна процедура послідовних наближень. Довільно обирається значення коефіцієнта автокореляції $\rho = r_1$, та на підставі залежності (7.30) у *першому наближенні* на основі 1МНК розраховуються оцінки параметрів $a_0^{(1)}$ та $a_1^{(1)}$. При підстановці цих параметрів у суму квадратів залишків (7.29) обчислюється $\rho = r_2$. На основі $\rho = r_2$ знаходяться нові оцінки параметрів у *другому наближенню* $a_0^{(2)}$ та $a_1^{(2)}$. Використовуються знайдені параметри для мінімізації суми квадратів залишків за новим коефіцієнтом $\rho = r_3$ і т.д. Процедура послідовних наближень триває доти, доки наступні значення a_0, a_1 і ρ не відрізнятимуться від попередніх на задану малу величину.

Метод Дарбіна використовується у випадку авторегресійної моделі вищого порядку. Він також є ітераційним методом і складається з двокрокової процедури, яку можна проілюструвати на прикладі попередньо розглянутої моделі.

На *першому кроці* з використанням залежностей (7.28) та (7.29) дістанемо авторегресивну модель у вигляді

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad (7.31)$$

$$u_{t-1} = y_{t-1} - a_0 - a_1 x_{t-1}.$$

Звідси

$$y_t = a_0(1-\rho) + \rho y_{t-1} + a_1 x_t + a_1 \rho x_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (7.32)$$

Згідно з 1МНК визначаються параметри цієї моделі, куди входить і коефіцієнт ρ. У результаті обчислень визначається $\rho = r$.

На *другому кроці* значення $\rho = r$ використовується для перетворення змінних $(y_t - r y_{t-1})$ і $(x_t - r x_{t-1})$, а 1МНК застосовується до перетворених даних. В результаті коефіцієнт при $(x_t - r x_{t-1})$ є оцінкою параметра a_1, а перший додаток, поділений на $(1-r)$, оцінює параметр a_0.

Метод Дарбіна поширюється на випадок кількох незалежних змінних у випадку множинної регресії та автокореляції вищих параметрів.

Для економетричної моделі з автокореляцією **оцінку прогнозного рівня** залежної змінної можна дістати, скориставшись формулою:

$$\acute{o}_{n+1} = x_{n+1}A + \rho u_n \,, \qquad (7.33)$$

де y_{n+1} - незміщений прогноз залежної змінної для періоду (n+1) у моделі, побудованої для n спостережень; x_{n+1} – прогнозне значення незалежної змінної; $\grave{A}$ - оцінка параметрів моделі.

Приклад 7.5 [28]. За допомогою двох взаємозв'язаних часових рядів про роздрібний товарооборот та доходи населення побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообороту від доходу за даними таблиці:

Таблиця 7.6

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Роздрібний товарооборот, г.о.	24,0	25,0	25,7	27,0	28,8	30,8	33,8	38,1	43,4	45,5
Доход, г.о	27,1	28,2	29,3	31,3	34,0	36,0	38,7	43,2	50,0	52,1

Необхідно визначити:

1. Ймовірну наявність автокореляції.
2. Оцінити параметри моделі методом перетворення вхідної інформації.
3. Визначити прогнозний рівень доходу.

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні моделі:
   y_t – роздрібний товарообіг у період t, залежна змінна;
   x_t – доход у період t, незалежна змінна.
2. Специфікуємо економетричну модель:
   $$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t;$$
   $$y_t = a_0 + a_1 x_t; \;\; u_t = y_t - y_t.$$
3. Визначимо оцінки параметрів моделі a_0 та a_1 за методом 1МНК, припускаючи, що залишки u_t некорельовані:
   $$\grave{A} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27,1 \\ 1 & 28,2 \\ 1 & 29,3 \\ 1 & 31,3 \\ 1 & 31,0 \\ 1 & 36,0 \\ 1 & 38,7 \\ 1 & 43,7 \\ 1 & 50,0 \\ 1 & 52,1 \end{pmatrix};$$

$$(\tilde{O}'\tilde{O}) = \begin{pmatrix} 10 & 370,4 \\ 370,4 & 14441,6 \end{pmatrix}; \quad (\tilde{O}'\tilde{O})^{-1} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix};$$

$$(\tilde{O}'Y) = \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,9 \end{pmatrix};$$

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,172 \\ 0,865 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель має вигляд:

$$y_t = 0,172 + 0865 x_t.$$

4. Визначимо залишки моделі u_t:

Рік	y_t	y_t	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
1	24,0	23,613	0,388	0,150	-	-	-
2	25,0	24,564	0,436	0,190	0,049	0,0024	0,1691
3	25,7	25,515	0,485	0,034	-0,252	0,0632	0,0806
4	27,0	27,245	-0,245	0,060	-0,430	0,1848	-0,045
5	28,8	29,581	-0,779	0,609	-0,535	0,2866	0,1913
6	30,8	31,310	-0,510	0,261	0,270	0,0729	0,3984
7	33,8	33,646	0,154	0,023	0,665	0,4417	-0,0787
8	38,1	37,971	0,129	0,017	-0,025	0,0006	0,0199
9	43,4	43,420	-0,020	0,0002	-0,149	0,0222	-0,003
10	45,5	42,236	0,264	0,070	0,284	0,0804	-0,005
∑	322,1	-	-	1,4152	-	1,1550	0,7276

Оцінка критерія Дарбіна-Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{10}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{10} u_t^2} = \frac{1,155}{1,4152} = 0,816.$$

Порівняємо значення критерію DW з даними статистичних таблиць (додаток Г): для рівня значимості $\alpha=0,05$, числа спостережень $n=10$ та числа незалежних змінних $m=1$ нижня межа критерію $DW_1=0,88$, верхня межа – $DW_2=1,32$.

Оскільки $DW<DW_1$, то можна стверджувати, що залишки u_t мають додаткову автокореляцію.

Наявність чи відсутність автокореляції залишків можна також визначити за критерієм фон Неймана: $Q = \frac{n}{n-1} DW = \frac{10}{9} * 0,816 = 0,906$. Це значення порівнюється з вибраними за статистичними таблицями (додаток Д): при $n=10$ та $\alpha=0,05$ $Q_{табл.}=1,18$. Оскільки $Q<Q_{табл.}$, то існує додаткова автокореляція залишків.

5. Використовуємо метод перетворення вхідної інформації для оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками.

Сформуємо матрицю T_1 для перетворення вхідних даних. Для цього визначимо величину коефіцієнта автокореляції:

$$\rho \approx \frac{n}{n-1} * \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} + \frac{m+1}{n} = \frac{10}{9} * \frac{0,7276}{1,4156} + \frac{2}{10} = 0,77 .$$

Тоді матриця T_1 буде мати вигляд:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0,64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перетворимо змінні y_t та x_t на основі матриці T_1:

$$T_1 y_t = \begin{pmatrix} 15,27 \\ 6,49 \\ 6,42 \\ 7,18 \\ 7,97 \\ 8,58 \\ 10,04 \\ 12,03 \\ 14,01 \\ 12,02 \end{pmatrix}; \quad T_1 x_t = \begin{pmatrix} 0,64 & 17,25 \\ 0,23 & 7,30 \\ 0,23 & 7,55 \\ 0,23 & 8,70 \\ 0,23 & 9,86 \\ 0,23 & 9,77 \\ 0,23 & 10,93 \\ 0,23 & 13,85 \\ 0,23 & 16,29 \\ 0,23 & 13,53 \end{pmatrix}.$$

Для перетворених даних скористаємось оператором 1МНК:

$$A = (X'_* \tilde{O}_*)^{-1} \tilde{O}'_* Y_*,$$

де $X_* = T_1 x_t$; $Y_* = T_1 y_t$.

Тоді маємо:

$$(X'_* \tilde{O}_*)^{-1} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix}; \quad \tilde{O}'_* Y_* = \begin{pmatrix} 71,815 \\ 3089,991 \end{pmatrix};$$

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 71,815 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\grave{a}_0 = 0,442$, $\grave{a}_1 = 0,861$, а економетрична модель запишеться у вигляді:

$$y_t = 0,442 + 0,861\tilde{o}_t \, .$$

6. Скориставшись економетричної моделлю, визначим прогнозний рівень товарообігу, коли дохід становить $x_{n+1}=55$:
$y_{n+1} = 0,442 + 0,861x_{n+1} = 0,442 + 0,861 * 55 = 47,8$.

Знайдемо оцінку залишків прогнозу ρu_n, де u_n - залишки за моделлю для $t=10$, $\rho=0,77$:

$$u_n = y_t - y_t;$$

$$y_t = 0,442 + 0,861 * 52,1 = 45,316;$$

$$u_n = 45,500 - 45,316 = 0,184;$$

$$\rho u_n = 0,77 * 0,184 = 0,14.$$

Тоді прогнозний рівень роздрібного товарообігу на одинадцятий рік (n+1):

$$y_{n+1} = 7,8 + 0,14 = 47,94 \, .$$

Запитання для самоконтролю

7.1. Що означає мультиколінеарність змінних?
7.2. Які наслідки мультиколінеарності?
7.3. Ознаки мультиколінеарності.
7.4. Які статичні критерії використовуються для виявлення мультиколінеарності?
7.5. Дати коротку характеристику алгоритму Фаррара-Глобера.
7.6. Які існують способи для усунення мультиколінеарності?
7.7. Для чого призначений метод головних компонент? В чому полягає ідея методу?
7.8. Дати означення гомоскедастичності і гетероскедастичності.

7.9. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі?
7.10. Які існують методи визначення гетероскедастичності?
7.11. Як перевіряються гетероскедастичність за критерієм μ?
7.12. Як і у яких випадках застосовується параметричний тест Гольдфельда-Квандта?
7.13. У чому сутність непараметричного тесту?
7.14. Яка сутність тесту Глейсера?
7.15. У яких випадках використовується УМНК (метод Ейткена)?
7.16. У чому полягає ідея УНМК?
7.17. Як використовується матриця *S* в методі Ейткена?
7.18. Які властивості має матриця *S*?
7.19. Як виконується прогноз за методом Ейткена?
7.20. Дати означення автокореляції.
7.21. При порушені якої умови застосування 1МНК виникає автокореляція залишків?
7.22. Які причини виникнення автокореляції?
7.23. До яких нпаслідків може привести автокореляція залишків?
7.24. За якими методами перевіряється наявність автокореляції?
7.25. Яка структура критерія Дарбіна-Уотсона? Як його використовують?
7.26. Яка структура критерія фон Неймана? Як його використовують?
7.27. Що являє собою циклічний коефіцієнт автокореляції? Як його використовують?
7.28. Які методи використовують для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками?
7.29. Коли використовується і на чому базується метод Ейткена?
7.30. Коли використовується метод перетворення вхідної інформації?
7.31. Коли використовується ітераційний метод Корчена-Оркатта? Дати коротку характеристику методу.
7.32. Коли використовується ітераційний метод Дарбіна? Дати коротку характеристику методу.
7.33. Як записати формулу прогнозу залежної змінної при автокореляції залишків?

Глава 8. Моделі розподіленого лагу

8.1. Поняття лагу та лагових змінних. Види лагових моделей

В ряді економетричних моделей з використанням динамічних рідів, які описують економічні процеси, типовим є проявлення впливу деякого фактору (або факторів) на результативний показник через якийсь період часу. Таке явище називається **лагом** (*запізненням*). Наприклад, у динамічних моделях необхідно враховувати лаг при встановленні зв'язку між обсягом продукції і капітальними вкладеннями, між затратами виробничих ресурсів і обсягом виробництва, між доходами та витратами і т. д. Лаг може проявлятися не лише через певний період часу, а й протягом кількох часових періодів. У такому разі маємо справу з економетричною **моделлю розподіленого лагу.**

Кількісне вимірювання взаємозв'язку між економетричними показниками з використанням динамічної моделі розподіленного лагу може визначатися такою залежністю:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-\tau} + u_t \ , \qquad (8.1)$$

де a_j – параметри моделі розподіленого лагу, або коефіцієнти лагу; послідовність коефіцієнтів a_j $(j=0,1,2,...)$ називається структурою лага; $x_{t-\tau}$ - пояснювальна лагова змінна; t – час; τ - період зрушення (часовий лаг); u_t – залишкі, які розподілені за нормальним законом, тобто мають нульове математичне сподівання і постійну дисперсію.

Моделі розподіленого лагу (8.1) задовільно описують економічні процеси лише в умовах відносної стабільності, в яких ці процеси відбуваються: стабільність відповідних індексів, процентних ставок за кредити, норм амортизації, термінів будівництва, структури ресурсів і т. ін. Така стабільність не завжди спостерігається для порівняно довгих періодів часу. Ця причина підводить до необхідності побудови **узагальненої моделі розподіленого лагу**, яка містить не тільки лагові змінні, а й пояснювальні змінні характеристики поточних умов функціонування економічних систем:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-\tau} + \sum_{s=1}^{m} b_s z_{t,s} + u_t \ , \qquad (8.2)$$

де $z_{t,s}$ – пояснювальні змінні поточних умов; b_s – коефіцієнти цих пояснювальних змінних.

8.2. Взаємна кореляційна функція. Лаги залежної та незалежних змінних

Для обгрунтування лагу (або лагів) пояснювальних змінних в динамічних моделях доцільно використовувати **взаємну кореляційну функцію**. Вона характеризує тісноту зв'язку кожного елемента залежної функції y_t з елементом незалежної змінної x_t, зсунутих на часовий лаг τ один відносно другого. Значення взаємної кореляційної функції r_τ лежать у діапазоні від –1 до 1. Найбільше значення $|r_\tau|$ (найближче до одиниці) визначає часовий лаг. Якщо серед ряду значень r_τ є кілька наближених до одиниці, то це означає, що запізнення впливу змінної x_t відбувається протягом певного періоду часу і в результаті маємо кілька часових лагів для взаємопов'язаних часових рядів. Знайшовши часові лаги для визначення взаємозв'язку між економічними показниками, можна побудувати економетричну модель розподіленного лагу.

Наявність мультиколінеарності між лаговими змінними в динамічній моделі ускладнює її побудову. Щоб звільнитись від мультиколінеарності необхідно ввести такі коефіцієнти при лагових змінних, які б мали однаковий знак і для яких можна було знайти суму:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = w; \ \ w_j = \frac{a_j}{w}; \ \sum_{j=0}^{\infty} w_j = 1, \ \ 0 \le w_j \le 1, \qquad (8.3)$$

де w – скінчене число; w_j – нормовані коефіцієнти лагу.

Тоді економетрична модель запишеться у вигляді:

$$y_t = w \sum_{j=0}^{1} w_j x_{t-\tau} + u_t \ . \qquad (8.4)$$

Для розрахунку нормованих коефіцієнтів лагу Л.Койк запропонував форму геометричної прогресії

$$w_j = (1-\lambda)\lambda_j, \ \ j = 0 \ldots \infty, \tag{8.5}$$

де $0 \le \lambda \le 1$.

З урахуванням цього економетричної моделі можна надати такий вигляд (**модель Койка**):

$$y_t = w(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}), \tag{8.6}$$

тобто в правій частині з'являється лагова змінна y_{t-1}.

Припущення, що зробив Л.Койк, приводять до значних спрощень співвідношення (8.1): замість оцінки цілого ряду параметрів a_j достатньо дати оцінки параметрам w і λ у рівнянні (8.6), де y_t розглядається як функція x_t і y_{t-1}.

Окрім схеми Л.Койка, лагову змінну у правій частині мають *моделі часткового коригування*

$$y_t = \alpha j + \beta j x_t + (1-j)y_{t-1} + u_t \tag{8.7}$$

і *адаптовних сподівань*

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + u_t(1-\lambda u_{t-1}), \tag{8.8}$$

де α, β, j – коефіцієнти в інтервалах $0 \le \alpha \le 1, \ 0 \le \beta \le 1, \ 0 \le j \le 1$.

8.3. Методи оцінювання параметрів лагової моделі

Методи оцінки параметрів лагової моделі залежать від прийнятої гіпотези відносно залишків.

Гіпотеза 1. Залишки u_t є випадковими величинами і розподіляються за нормальним законом. В цьому разі для оцінки параметрів моделі можна застосувати 1МНК.

Гіпотеза 2. Залишки описуються авторегресивною схемою першого порядку виду

$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}, \ 0 \le \lambda \le 1. \tag{8.9}$$

Для оцінки параметрів моделі у матриці $\hat{A}$ використовується *метод Ейткена,* згідно з яким

$$A = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y, \qquad (8.10)$$

де матриця V має вигляд:

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}. \qquad (8.11)$$

Гіпотеза 3. Залишки описуються авторегресивною схемою першого порядку виду

$$v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| > 1. \qquad (8.12)$$

Для оцінки параметрів моделі можна використовувати:

1) 1МНК;
2) метод Ейткена;
3) ітеративний метод;
4) двокрокову процедуру;
5) метод інструментальних змінних;
6) алгоритм Уолліса.

Розглянемо принципову суть цих підходів оцінювання параметрів моделі.

Метод найменших квадратів (1МНК) застосовується тоді, коли вхідні дані перетворені на основі параметрів λ і ρ. Ці параметри вибираються довільно в інтервалі [0, 1]. Для кожної пари λ і ρ послідовно обчислюються залишки. Параметри λ і ρ вибираються доти, поки не буде мінімізована сума відхилень залишків.

Метод Ейткена оцінює параметри моделі на підставі матриці параметрів

$$A = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y, \qquad (8.13)$$

де матриця S дорівнює

$$S=\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (8.14)$$

а матриця X має вигляд

$$X=\begin{pmatrix} 1 & y_0 & x_1 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_2 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}. \qquad (8.15)$$

Цей метод аналогічний оцінкам 1МНК для моделі

$$\begin{aligned}&(y_t-\rho y_{t-1})=a_0(1-\rho)+a_1(y_{t-1}-\rho y_{t-2})+\\&+a_2(x_t-\rho x_{t-1})+\varepsilon_t\end{aligned} \qquad (8.16)$$

відносно перетворених даних.

Ітеративний метод є альтернативою до методу Ейткена і його алгоритм базується на чотирьох кроках, які розглянемо на прикладі моделі

$$\begin{aligned}&y_t=a_0(1-\rho)+(a_1+\rho)y_{t-1}-a_1\rho y_{t-2}+\\&+a_2x_t-a_2\rho x_{t-1}+\varepsilon_t\end{aligned}. \qquad (8.17)$$

Крок 1. Вибирається початкове значення коефіцієнта $\rho=\rho_1$ і підставляється в рівняння (8.17).

Крок 2. Мінімізуєтся сума квадратів залишків рівняння і в результаті застосування 1МНК розраховуються оцінки у першому наближенні $a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$.

Крок 3. Підставляються значення $\grave{a}_0=a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$ в модель (8.17) і визначається параметр ρ, тобто застосовується 1МНК до рівняння $v_t=\rho v_{t-1}+\varepsilon_t$, що і дозволяє знайти $\rho=\rho_2$.

Крок 4. Заданням $\rho=\rho_2$ на основі 1МНК моделі (8.17) знаходяться оцінки параметрів у другому наближенні $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$, $a_2^{(2)}$.

Процес продовжується до тих пір, коли не буде досягнуто збіжності оцінок параметрів моделі з заданою точністю.

Алгоритм **двокрокової процедури** базується на такому.

Крок 1. Параметри (8.17) оцінюються 1МНК для

$\rho = \frac{-(\grave{a}_2\rho)}{\grave{a}_2}$, коли береться відношення коефіцієнта при змінній x_{t-1} до коефіцієнта при змінній x_t.

Крок 2. На основі $\rho = \rho$ перетворюється вхідна інформація $\left(y_t - \rho y_{t-1}\right)$ і $\left(\tilde{o}_t - \rho\tilde{o}_{t-1}\right)$, для якої будується модель (15.17) за допомогою 1МНК.

Метод інструментальних змінних, докладно описаний у підручнику [28], використовується тоді, коли залишки не автокорельовані, але існує залежність пояснювальних змінних із залишками. Якщо, наприклад, модель має вигляд $y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + a_3 y_{t-1} + u_t$, то можна замість змінної y_{t-1}, яка за припущенням не корельована із пояснювальними змінними, використовувати як інструментальну змінну y_{t-1}, що розраховується за допомогою 1МНК як функція $y_{t-1} = f(x_t)$.

Оцінка параметрів моделі з лагом на основі **алгоритму Уолліса** складається з трьох етапів.

На першому етапі оцінка параметрів виконується на основі метода інструментальних змінних, де x_{t-1} використовується як інструментальна змінна для y_{t-1}.

На другому етапі обчислюють коефіцієнт автокореляції r з урахуванням поправки на зміщення.

На третьому етапі за допомогою матриці $s = f(r)$ обчислюють оцінку вектора $\grave{A}$ узагальненим методом найменших квадратів (методом Ейткена).

Приклад 8.1 [28]. Необхідно побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами на харчування і доходом сім'ї згідно з даними таблиці:

Таблиця 8.1

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Витрати на харчування, г.о.	4	5	6	6	8	11	14	16	14	14
Дохід, г.о.	25	29	34	33	41	50	55	54	56	62

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні та визначимо специфікацію моделі:

Y_t – дохід в період t, залежна змінна;

X_t – витрати на харчування в період t, незалежна змінна;

Y_{t-1} – дохід в період (t-1), який виступає в якості залежної змінної.

Економетрична моделі має вигляд:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + a_2 Y_{t-1} + u_t;$$

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + a_2 Y_{t-1}.$$

Таким чином, витрати на харчування в період t залежить від доходу в період t та витрат на харчування в період (t-1).

2. Для оцінювання параметрів моделі застосовується алгоритм Уолліса, який базується на методі інструментальних змінних і методі Ейткена.

Згідно з методом інструментальних змінних X_{t-1} використовується як інструментальна змінна для Y_{t-1}. Тоді в операторі оцінювання $A = (Z'X)^{-1} Z'Y$ відповідні матриці запишуться так:

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 8 & 11 & 14 & 16 & 14 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 8 & 11 & 14 & 16 & 14 \end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 29 \\ 1 & 6 & 34 \\ 1 & 8 & 33 \\ 1 & 11 & 41 \\ 1 & 14 & 50 \\ 1 & 16 & 55 \\ 1 & 14 & 54 \\ 1 & 14 & 56 \end{pmatrix};$$

$$Z'X=\begin{pmatrix} 1\dot{1}26 & 4\dot{3}38 \\ 1020 & 3943 \end{pmatrix}; \quad (Z'X)^{-1}=\begin{pmatrix} 0,\dot{2}618 & -0,2\dot{8}82 \\ 0,0677 & 0,0748 \end{pmatrix};$$

$$Z'X=\begin{pmatrix} 4\dot{7}11 \\ 4255 \end{pmatrix}; \quad \grave{A}=\begin{pmatrix} 8,280 \\ 7,363 \\ -0,935 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель прийме вид:

$$Y_t=8,280+7,363X_t-0,935Y_{t-1}.$$

Визначимо розрахункові значення $\hat{Y}_t$ залишки $u_t=Y_t-\hat{Y}_t$ та їх комбінації:

Таблиця 8.2

Рік	Y_t	Y_t	u_t	u_t^2	u_t-u_{t-1}	$(u_t-u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	29	21,71	7,29	51,14	-	-	-
2	34	25,33	8,67	75,14	1,38	1,904	63,20

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8
3	33	20,65	12,35	152,42	3,68	13,542	107,07
4	41	36,32	4,68	21,94	-7,62	58,004	57,8
5	50	50,92	-0,920	0,85	-5,61	31,427	-4,31
6	55	64,89	-9,89	92,02	-8,97	80,479	9,12
7	54	74,64	-20,64	426,08	-10,45	115,500	198,74
8	56	60,85	-4,85	23,83	15,79	249,324	100,10
9	62	58,98	3,02	9,12	7,87	61,937	-14,65
$\sum$	-	-	-	852,54	-	612,12	517,07

Обчислимо критерій Дарбіна-Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{8}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{9} u_t^2} = \frac{612,12}{852,54} = 0,718.$$

Для рівня значимості $\alpha=0,05$, кількості спостережень $n=9$ та кількості пояснювальних змінних $m=2$ критичні значення Дарбіна-Уотсона дорівнюють (див. додаток Г): $DW_1=0,630;$ $DW_2=1,700$. Звідси $DW_1<DW<DW_2$, а це означає, що при даній кількості сукупності спостережень важко зробити висновок про наявність чи відсутність автокореляції. Але близість значення DW до нижньої критичної межі критерію DW_1 може свідчить про наявність автокореляції. Тому визначимо коефіцієнт автокореляції без урахування зміщення $\left(\frac{m+1}{n}\right)$:

$$r \approx \rho = \frac{n}{n-1} * \frac{\sum_{t=1}^{8} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{9} u_t^2} = \frac{9}{8} * \frac{517,07}{852,54} = 0,680.$$

Складемо матрицю S^{-1}:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} 1,86 & -1,265 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1,265 & 2,72 & -1,265 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1,265 & 2,72 & -1,265 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1,265 & 2,72 & -1,265 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1,265 & 2,72 & -1,265 & & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,265 & 2,72 & -1,265 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,265 & 2,72 & -1,265 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,265 & 2,72 & -1,265\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,86 \end{pmatrix}$$

Застосовуємо оператор Ейткена для оцінювання параметрів моделі

$$\hat{A}=\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}X'S^{-1}Y;$$

$$X'S=\begin{pmatrix} 1,710 & 2,405 & -1,390 & 0,286 & 2,090 & 3,925 & 8,100 & 0,130 & 8,330\\ 9,816 & 4,245 & 14,500 & -5,118 & 6,526 & 14,860 & 14,040 & 6,465 & 35,850 \end{pmatrix};$$

$$X'S^{-1}X=\begin{pmatrix} 342,66 & 1274,59\\ 1274,59 & 5021,82 \end{pmatrix}; \quad (X'S^{-1}X)^{-1}=\begin{pmatrix} 0,0522 & -0,1325\\ -0,1325 & 0,0037 \end{pmatrix};$$

$$X'S^{-1}Y=\begin{pmatrix} 1377,46\\ 5368,85 \end{pmatrix}; \quad \hat{A}=\begin{pmatrix} 1,1216\\ 0,7944\\ 0,8733 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель:

$$Y_t=1{,}1216+0{,}7944X_t+0{,}8733Y_{t-1}.$$

3. Проведемо аналіз економетричної моделі.

Розрахункові значення Y_t за моделлю та відхилення їх від фактичних даних наведено в таблиці:

Таблиця 8.3

Рік	Y_t	Y_t	u_t	u_t^2	$Y_t - \overline{Y}_t$	$(Y_t - \overline{Y}_t)^2$
1	29	26,920	2,080	4,341	-17	289
2	34	31,203	2,797	7,825	-12	144
3	33	35,568	-2,568	6,593	-13	169
4	41	36,283	4,717	22,250	-5	25
5	50	45,649	4,381	18,935	4	16
6	55	55,888	-0,888	0,788	9	81
7	54	61,841	-7,841	61,475	8	64
8	56	58,960	-2,960	8,750	10	100
9	62	61,126	0,874	0,768	16	256
$\sum$	-	-	-	131,734	-	-
У серед-ньому	46	-	-	-	-	1144

Залишкова дисперсія:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{t=1}^{9} u_t^2}{n-m} = \frac{131,73}{9-3} = 21,96 \, .$$

Загальна дисперсія:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{t=1}^{9} (Y_t - \overline{Y}_t)^2}{n-1} = \frac{1144}{9-1} = 143,0 \, .$$

Стандартні помилки оцінок параметрів моделі:

$$S_{a_1} = \sqrt{\sigma_u^2 * c_{11}} = \sqrt{21,96 * 0,0522} = 1,07;$$

$$S_{a_2} = \sqrt{\sigma_u^2 * c_{22}} = \sqrt{21,96 * 0,00366} = 0,078.$$

Коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{21,96}{143} = 0,847;$$

$$R = \sqrt{0,847} = 0,920.$$

F-критерій Фішера:

$$F = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_u^2} = \frac{143 - 21,96}{21,96} = 5,614;$$

$$F_{табл.} = F_{(0,95)} = 4,46 \ (див.\ додаток\ A); \qquad F > F_{табл.}$$

Наведені характеристики кореляційного аналізу моделі свідчать про тісноту і значимість зв'язку між витратами на харчування та доходом. Коефіцієнт детермінації показує, що на 84,7% витрати на харчування визначаються пояснювальними змінними моделі. Коефіцієнт кореляції показує, що зв'язок між змінними моделі – тісний.

Оцінки параметрів моделі мають порівняно високі стандартні помилки, що свідчать про їх неефективність. Це пов'язано з варіацією фактичних спостережень змінної Y_t в часі та кількістю спостережень.

При оцінці параметрів моделі були порушені дві необхідні умови для застосування 1МНК:

$$1) \ M(uu') \neq \sigma_u^2 E;$$

$$2) \ M(X'u) \neq 0.$$

Використання методу інструментальних змінних спочатку враховує умову $M(X'u) = 0$, а застосування методу Ейткена – умову $M(uu') = \sigma_u^2 E$.

Запитання для самоконтролю

8.1. Що таке лаг і що означає "лагова змінна"?
8.2. Привести приклади економічних процесів, де необхідно враховувати лаг.
8.3. Дати означення моделі розподіленого лагу.
8.4. Привести залежність динамічної моделі розподіленого лагу та пояснити її структуру.

8.5. Дати означення узагальненої моделі розподіленого лагу.
8.6. З якою метою в динамічних моделях використовується взаємна кореляційна функція?
8.7. Що потрібно робити, щоб звільнитись від мультиколінеарності між лаговими змінними?
8.8. Яку схему розподіленого лагу запропонував Койк?
8.9. Які гіпотези відносно залишків можуть мати місце при оцінці параметрів лагової моделі?
8.10. Перерахувати методи оцінки параметрів моделі розподіленого лагу.
8.11. У якому випадку для оцінки параметрів лагової моделі може бути використаний 1МНК?
8.12. Пояснити принципову суть методу Ейткена для лагової моделі.
8.13. Пояснити принципову суть ітеративного методу.
8.14. На чому базується двокрокова процедура у динамічних моделях?
8.15. Коли використовується метод інструментальних змінних і яка його головна ідея?
8.16. Пояснити принципову суть алгоритму Уолліса.

Глава 9. Системи одночасних структурних рівнянь

9.1. Системи рівнянь при побудові економетричних моделей

Економічні процеси і явища характеризуються складною системою зв'язків між чинниками. Ці зв'язки в ряді випадків слід описувати моделями, які побудовані на основі системи рівнянь. Оскільки найчастіше вони характеризують економічні процеси і явища, які відбуваються одночасно, то всі ці рівняння мають спільний зв'язок і називаються **системою одночасних (симультативних) структурних рівнянь**. Наведемо два приклади таких економетричних моделей, які використовуються для кількісного взаємозв'язку показників на макро- і мікрорівні.

Так, залежність обсягу національного доходу від основних виробничих фондів, робочої сили і матеріальних ресурсів відповідає економетричній моделі на основі системи одночасних структурних рівнянь, яку наведемо у загальній формі:

$$\begin{cases} X_t = f(F_t, L_t, u_t); \\ M_t = f(X_t, \nu_t); \\ Y_t = X_t - M_t, \end{cases} \qquad (9.1)$$

де X_t – випуск продукції; F_t – основні виробничі фонди; L_t – робоча сила; M_t – матеріальні ресурси; Y_t - валовий внутрішній продукт; u_t, ν_t – залишки; t – період часу.

Зміннні X_t і M_t виражаються через параметри a_i та b_i, які підлягають знаходженню. Два перших рівняння (9.1) є регресійними, а третє – тотожність.

Взаємозв'язок темпів зниження собівартості продукції на підприємстві з темпами росту продуктивності праці та підвищенням заробітної плати можна визначити на основі економетричної моделі, яка також описується системою одночасних структурних рівнянь:

$$\begin{cases} T_c = f(T_n, T_з, u); \\ T_c = k_1 T_з, \end{cases} \qquad (9.2)$$

де T_c – індекс зниження собівартості продукції; T_n - темпи росту продуктивності праці; $T_з$ – темпи росту заробітної плати; u – залишки; k_1 – рівень співвідношення між темпами зміни собівартості продукції і заробітної плати.

Змінні T_n і $T_з$ виражаються через розшукувані параметри. Модель містить два рівняння, одне з них є регресійними, а друге – тотожність.

Моделі (9.1) і (9.2) – найпростіші. Вони можуть бути доповненими лаговими змінними.

Узагальнюючи розглянуті моделі та розповсюджуючи їх на інші приклади, можна сказати, що взаємозв'язки між змінними можуть бути *стохастичними* і описуватися регресійними рівняннями та *детермінованими* і відповідати тотожностям.

Системи одночасних структурних рівнянь найчастіше включають *лінійні рівняння*, а нелінійність зв'язків здебільшого апроксимується лінійними співвідношеннями. *Динаміка* зв'язків між показниками враховується за допомогою часових лагів або лагових змінних.

Система одночасних рівнянь у матричній формі може бути записана у вигляді:

$$Y = AY + BX + u\ , \qquad (9.3)$$

де Y – матриця (вектор) залежних змінних; X – матриця незалежних змінних; u – матриця залишків; A – матриця коефіцієнтів при змінних Y розміром $k*k$; B – матриця коефіцієнтів при змінних X розміром $k*m$.

Економетрична модель (9.3) відображає структуру зв'язків між змінними і тому називається **структурною формою економетричної моделі.**

Якщо кожне рівняння системи (9.3) розв'язати відносно Y, то одержимо **зведену форму моделі**, яка має вигляд:

$$Y = RX + \nu\ , \qquad (9.4)$$

де ν - лінійна комбінація залишків u; R – матриця оцінок параметрів, якої за допомогою одиничної матриці E можна надати вид

$$R = (E - A)^{-1} B\ . \qquad (9.5)$$

До оцінок параметрів моделей (9.3) і (9.4) може бути застосований 1МНК, який приводить до зміщення оцінок параметрів.

9.2. Ідентифікація моделі. Рекурсивні системи

Чисельна оцінка параметрів моделі на основі одночасних структурних рівнянь пов'язана з проблемою **ідентифікації**. Якщо ніяка лінійна комбінація рівнянь структурної форми не може привести до рівняння, що має ті самі змінні, як і деяке рівняння в структурній формі, то модель буде ідентифікованою.

Необхідна умова ідентифікації системи – виконання такої нерівності для кожного рівня моделі (9.3):

$$k_s - 1 \leq m - m_s\,, \tag{9.6}$$

де k_s – кількість ендогенних змінних у s-му рівнянні структурної форми; m – загальна кількість екзогенних змінних моделі; m_s – кількість екзогенних змінних, які не входять в s-те рівняння структурної форми моделі.

Зауважимо, що змінні, які містяться в правій частині системи рівнянь (9.3) або (9.4), є наперед заданими (вхідними) і називаються **екзогенними**. Змінні, які знаходяться в лівій частині рівнянь і обчислюються в результаті реалізації моделі, називаються **ендогенними**.

Для ідентифікації моделей зведена форма (9.4) визначається однозначно.

Якщо співвідношення (9.6) виконується як рівність, то відповідне рівняння є **точно ідентифікованим**, а коли як нерівність, то це рівняння є **надідентифікованим**.

Коли в структурі форми моделі (9.3) матриця А при екзогенній змінній Y є трикутною, а залишки характеризуються диагональною матрицею, то така система рівнянь називається **рекурсивною**. Для знаходження її рішення відносно невідомих параметрів застосовувати 1МНК.

9.3. Методи оцінки параметрів моделі на основі системи рівнянь

Існують *альтернативні методи* оцінки параметрів моделей, основаних на системах одночасних структурних рівнянь, які порівняно з 1МНК дозволяють уникнути зміщення. До таких методів відносяться: непрямий метод найменших квадратів; двокроковий метод найменших квадратів; трикроковий метод найменших квадратів. Розглянемо суть даних методів.

Непрямий метод найменших квадратів (НМНК) використовується у випадку, коли кожне рівняння моделі є *точно ідентифікованим*. Алгоритм методу складається з чотирьох кроків.

Крок 1. Перевіряється умова ідентифікованості (9.6) для кожного рівняння. При виконанні умови виконується перехід до наступного кроку.

Крок 2. Здійснюється перехід від структурної форми моделі (9.3) до зведеної (9.4).

Крок 3. Дається оцінка параметрів кожного рівняння зведеної форми моделі 1МНК.

Крок 4. Розраховуються оцінки параметрів рівнянь структурної форми на підставі співвідношення $R = -A^{-1}B$.

Двокроковий метод найменших квадратів *(2МНК)* застосовується тоді, коли рівняння структурної форми моделі (9.3) *надідентифіковані* і НМНК застосовувати не можна, а користуватись 1МНК недоцільно. 2МНК призначений для оцінки параметрів окремих рівнянь системи моделі.

Ідея методу полягає в тому, щоб очистити поточні ендогенні змінні від стохастичної складової, бо вони пов'язані із залишками.

Розглянемо 2МНК для загальної економетричної моделі. Нехай окреме рівняння має вигляд:

$$Y = Y_1 a + X_1 b + u \ ,$$

де Y – вектор ендогенної змінної розміром ($n*1$); Y_1 – матриця поточних екзогенних змінних, які входять в праву частину рівняння розміром ($n*r$); X_1 – матриця екзогенних змінних розміром ($n*k$); a – вектор структурних параметрів розміром ($r*1$), який стосується змінних матриці Y_1; b – вектор ($k*1$), який застосовється до змінної X_1; u – вектор залишків розміром ($n*1$).

На *першому кроці* за допомогою 1МНК оцінюються параметри кожного рівняння регресії $Y_1 = f(X_1)$. Заміна елементів матриці Y_1 елементами матриці Y_1 в рівняннях моделі допоможе звільнитись від кореляції Y_1 та u. Розрахунок елементів матриці Y_1 виконується на основі співвідношення:

$$Y_1 = X(X'X)^{-1} X'Y_1, \tag{9.8}$$

де X – матриця, яка включає екзогенні змінні даного рівняння X_1 та значення екзогенних змінних, які не ввійшли в це рівняння .

На *другому кроці* знаходиться залежність $\hat{Y}_1$ від Y та X_1. Це приводить до процедури оцінювання системи рівнянь 2МНК у вигляді:

$$\delta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'X(X'X)^{-1} X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1} X'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix} \tag{9.9}$$

Визначаються асимптотичні стандартні помилки знайдених оцінок параметрів рівняння та довірчі інтервали:

$$S\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \sqrt{\sigma^2 Q_S^{-1}};$$

$$a - t_{(\alpha)}S \le a \le a + t_{(\alpha)}S; \quad b - t_{(\alpha)}S \le b \le b + t_{(\alpha)}S. \tag{9.10}$$

Приклад 9.1 [28]. Результати спостережень надані у вигляді таких матриць даних :

$$Y'Y = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 15 & 60 & -45 \\ -5 & -45 & -70 \end{pmatrix}; \quad Y'X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix}; \quad X'X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель, яка може бути побудована на основі цих даних, складається з чотирьох рівнянь, перше з яких має вигляд:

$$Y_{1t} = a_{12}Y_{2t} + a_{13}Y_{3t} + b_{11}X_{1t} + u_{1t}.$$

Модель має ще три екзогені змінні – X_{2t}, X_{3t}, X_{4t} , які входять в інші рівняння.

Необхідно знайти оцінки параметрів наведеного рівняння за допомогою двокрокового методу найменших квадратів (2МНК) та оцінити їх стандартні помилки, якщо дисперсія залишків дорівнює $\sigma_u^2 = 0,6$.

Розв'язання

1. Перевіримо рівняння моделі на ідентифікованість. Для цього розглядаємо нерівність:

$$k_s - 1 \le m - m_s ,$$

де k_s – кількість ендогенних змінних даного рівня, k_s=3; m – загальна кількість екзогенних змінних, m=4; m_s – кількість екзогенних змінних розглядає мого рівняння моделі, m_s=1:
$3\text{-}1<4\text{-}1$.

Таким чином, наведене рівняння моделі є надіндентифікованим і для оцінки параметрів потребує використання 2МНК.

2. Запишемо оператор оцінювання параметрів 2МНК:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix}.$$

В цьому операторі: $Y=Y_{1t}$ – вектор ендогенної змінної; $Y_1=(Y_{2t}, Y_{3t})$ – матриця поточних екзогенних змінних, які входять в праву частину рівняння; $X=(X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}, X_{4t})$ – матриця всіх екзогенних змінних моделі; $X_1=X_{1t}$ – матриця екзогенних змінних даного рівняння.

3. Знайдемо добуток матриці згідно з оператором оцінювання 2МНК:

$$Y_1'X = \begin{pmatrix} Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{pmatrix} * (X_{1t} \;\; X_{2t} \;\; X_{3t} \;\; X_{4t}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix};$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix};$$

$$Y_1'X(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \\ 12 & -12 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -50 \\ -50 & 58 \end{pmatrix};$$

$$Y_1'X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \;\; X_1'Y_1 = (0,0); \;\; X_1'X_1 = 1.$$

Звідси блочна матриця має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} Y'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -50 & 0 \\ -50 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1695 & 0{,}1462 & 0 \\ 0{,}1462 & 0{,}1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць в правій частині оператора:

$$Y'X(X'X)^{-1}X'Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}; \;\; X_1'Y = 2.$$

4. Визначимо оцінки параметрів рівняння:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1695 & 0{,}1462 & 0 \\ 0{,}1462 & 0{,}1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = (1{,}28\ 1{,}04\ 2).$$

Перше рівняння економетричної моделі запишеться так:

$$Y_{1t} = 1{,}28Y_{2t} + 1{,}04Y_{3t} + 2Y_{1t}.$$

5. Визначимо асимптотичні стандартні помилки знайдених оцінок:

$$S_{a_{11}} = \sqrt{0{,}6 * c_{11}} = \sqrt{0{,}6 * 0{,}1695} = 0{,}32;$$

$$S_{a_{22}} = \sqrt{0{,}6 * c_{22}} = \sqrt{0{,}6 * 0{,}1433} = 0{,}29;$$

$$S_{a_{33}} = \sqrt{0{,}6 * c_{33}} = \sqrt{0{,}6 * 1} = 0{,}78.$$

Стандартні помилки щодо абсолютного значення оцінок становить відповідно:

$$\frac{0{,}32}{1{,}28} * 100 = 25{,}0\%, \ \frac{0{,}29}{1{,}04} * 100 = 27{,}9\%, \ \frac{0{,}78}{2} * 100 = 39{,}0\%.$$

А це свідчить про те, що оцінки параметрів рівняння є зміщеними і неефективними.

Трикроковий метод найменших квадратів (3МНК). Розглянуті вище два методи – НМНК і 2МНК – застосовуються для оцінки параметрів кожного окремого рівняння моделі. 3МНК призначений для одночасної оцінки параметрів всіх рівнянь моделі.

Ідея методу, запропонованого Зельдером і Гейлом, полягає у такому.

На *першому кроці* застосовується 2МНК при оцінюванні параметрів $\delta_s = \begin{bmatrix} a_s \\ b_s \end{bmatrix}$ для кожного структурного рівняння системи

$$Y_s = Y_s a_s + X_s b_s + u_s, s = 1...r, \qquad (9.11)$$

де Y_s – матриця значень ендогенної змінної s-го рівняння розміром ($n*r$); X_s – матриця екзогенних змінних s-го рівняння розміром ($n*k$); a_s b_s – вектори параметрів; u_s – вектори залишків; r – кількість ендогенних змінних; k – кількість екзогенних змінних.

На *другому кроці* знайдені оцінки δ_s підставляються у модифіковані рівняння на основі (9.11), які об'єднують дві матриці Y_s і X_s у правій частині в матрицю $Z_s = [Y_s X_s]$.

На *третьому кроці* обчислюються значення Y_s, з допомогою яких можна знайти залишки $u_s (s = 1...r)$. На підставі значень u_s визначаються дисперсії залишків S_{rj}^2 для кожного рівняння та розраховується оператор оцінювання $\delta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$;

$$\delta = \begin{bmatrix} (S_{11}^2)^{-1} Z_1'(X'X)^{-1} X'Z_1 ...(S_{1r}^2)^{-1} Z_1'(X'X)^{-1} X''Z_r \\ .... \\ (S_{r1}^2)^{-1} Z_r'(X'X)^{-1} X'Z_1 ...(S_{rr}^2)^{-1} Z_r'(X'X)^{-1} X'Z_r \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{r} (S_{1j}^2)^{-1} Z_1' X (X'X)^{-1} X'Y_j \\ .... \\ \sum_{j=1}^{r} (S_{rj}^2)^{-1} Z_r' X (X'X)^{-1} X'Y_j \end{bmatrix} \qquad (9.12)$$

Для практичного використовування 3МНК необхідно виконання вимог:

1) розпочинаючи оцінювати параметри моделі, необхідно вилучити всі тотожності;
2) виключити з системи кожне неідентифіковане рівняння;
3) за наявності серед рівнянь системи точно ідентифікованих та надідентифікованих рівнянь доцільно застосовувати 3МНК до кожної з груп рівнянь окремо;

4) якщо група надідентифікованих рівнянь має тільки одне рівняння, то 3МНК перетворюється на 2МНК;
5) в разі блочно-діагональної матриці коваріацій залишків використання 3МНК може бути застосовано для кожної групи рівнянь, які відповідають одному блоку.

9.4. Прогноз та його довірчі інтервали

Одна з головних цілей побудови економетричних моделей на основі системи рівнянь полягає в тому, щоб одержати за допомогою моделі прогноз залежних змінних за певних припущень відносно майбутніх значень пояснювальних змінних.

Точковий прогноз залежних змінних при заданих значеннях пояснювальних змінних визначається на основі приведеної форми економетричної моделі:

$$Y_f = RX_f \,, \qquad (9.13)$$

де X_f – вектор прогнозних значень пояснювальних змінних; R - матриця оцінок параметрів.

Визначення *довірчих інтервалів* для цього прогнозу залежить від методу, за допомогою якого було одержано матрицю R.

Довірчі інтервали для кожної залежної змінної задаються співвідношенням

$$Y_{jf} \pm t_{(\alpha/2)}\sqrt{S_{ss}^2} \,, \qquad (9.14)$$

де S_{ss}^2 - дисперсія залишків s-го рівняння моделі; $t_{(\alpha/2)}=F_{(\alpha)}$.

Довірчі інтервали для всіх залежних змінних визначаються за формулою:

$$Y_{sf} = Y_{jf} \pm \sqrt{\frac{\left[1 + X_f'(X'X)^{-1}X_f\right](n-k)r}{n-k-r+1} \times S_{ss}^2} \,, \qquad (9.15)$$

де S_{ss}^2 - незміщена дисперсія залишків всіх рівнянь.

Запитання для самоконтролю

9.1. Що називають системою одночасних структурних рівнянь?
9.2. Навести приклади економетричних моделей, які побудовані на основі системи рівнянь.
9.3. Записати в загальному вигляді структурну форму моделі на основі одночасних рівнянь. Пояснити її структуру.
9.4. Що означає зведена форма моделі? Як її получити?
9.5. Які змінні моделі називають екзогенними? ендогенними?
9.6. Записати умову ідентифікованості системи рівнянь.
9.7. Яка система рівнянь називається точно ідентифікованою?
9.8. Яка система рівнянь називається надідентифікованою?
9.9. Дати визначення рекурсивних систем.
9.10. Які методи використовуються для оцінки параметрів моделей на основі системи рівнянь?
9.11. Який метод оцінки параметрів можна застосувати, коли всі рівняння моделі є точно ідентифікованими? Пояснити суть методу.
9.12. Який метод оцінки параметрів можна застосувати, якщо рівняння моделі є надідентифікованими? Пояснити суть методу.
9.13.На основі якого методу можна одночасно оцінити параметри всіх рівнянь моделі? Пояснити суть методу.
9.14. У чому полягає прогноз залежних змінних економетричних моделей на основі системи рівнянь?

Глава 10. Економетричні моделі з якісними пояснювальними змінними

10.1. Якісні змінні в економетричних моделях

При побудові економетричних моделей зустрічаються випадки, коли поряд з факторами, які набувають кількісних значень, мають місце *якісні фактори* (ознаки). Прикладами якісних факторів можуть бути: стать, сімейний стан, освіта, якість продукції, зміни в економічній політиці, соціологічні опитування, релігія, страйки, війни тощо. Такі фактори в регресійних моделях характеризуються **якісними змінними**, або *атрибутивними*, які в ролі пояснювальних змінних впливають на залежну змінну. Потрібно вміти вводити якісні змінні у регресійні моделі, оцінювати їх параметри та аналізувати отримані результати.

Часто якісні змінні є бінарними: вони отримують "*значення 1*" при наявності певної якості і "*значення 0*" при їх відсутності. Такі змінні називають **dummy-змінними** *(даммі-змінними)*.

Особливістю якісних змінних є те, що вони класифікують інформацію за моделлю на декілька підгруп (категорій), що базуються на атрибутивних ознаках, і окремо працюють з кожною підгрупою.

Взаємозв'язки між атрибутивними ознаками при парної регресії можуть бути проаналізовані на підставі *таблиць взаємної спряженності*, де можуть наводитися частоти розподілу f_{ij} якісної ознаки за підгрупами. За даними таблиць дається оцінка *тісноти зв'язку* між змінними за показниками: відхиленню χ^2 Пірсона; коефіцієнту взаємної спряженності Чупрова; коефіцієнту контингенції (асоціації).

Пропорційні теоретичні частоти показників розраховуються за формулою:

$$F_{ij} = \frac{f_{io} f_{oj}}{n}, \qquad (10.1)$$

де f_{io} – підсумкові частоти за ознакою x; f_{oj} – підсумкові частоти за ознакою y; n – обсяг сукупності спостережень.

Абсолютну величину відхилень частот f_{ij} від F_{ij} характеризує **квадратична спряженність χ^2 Пірсона**:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(f_{ij} - F_{ij})^2}{F_{ij}}, \qquad (10.2)$$

Фактичне значення χ^2 порівнюється з табличним. Останнє вибирається із статистичних таблиць χ^2 в залежності від рівня значимості α та числа ступенів вільності $k = (m_x - 1)(m_y - 1)$, де m_x – число груп за ознакою x, m_y - число груп за ознакою y. Зв'язок між ознаками тісний, якщо $\chi^2 > \chi^2_{табл.}$.

Коефіцієнт взаємної спряженності найчастіше обчислюється за *формумами Чупрова*

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\sqrt{(m_x - 1)(m_y - 1)}}} \qquad (10.3)$$

або *Крамера*

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\sqrt{(m_{min} - 1)}}}, \qquad (10.4)$$

де m_{min} – мінімальне число груп (m_x або m_y).

При 0,3<C<1 існує тісний зв'язок між ознаками.

В разі наявності 4-клітиної таблиці взаємної співзалежності розрахований коефіцієнт C називаєтья **коефіцієнтом контингенції** або *асоціації*. Цей коефіцієнт зв'язаний з χ^2 функціонально: $\chi^2 = nC^2$.

Dummy-змінні не обов'язково приймають значення (0,1). Пара (0,1) може трансформуватись у будь-яку іншу пару лінійним перетворенням $y=a+bz$ $(b \neq 0)$, де a та b - константи, а z=1 або 0.

Dummy-змінні можуть використовуватись у регресійних моделях у чистому вигляді або поряд з кількісними змінними. Моделі тільки з якісними змінними називаються **AOV-**

моделями (analysis of variance). Якщо в економетричних моделях є випадок змішаних факторів - якісних і кількісних, то такі моделі називають **ACOV-моделями** (analysis of covariance).

10.2. Регресійні моделі з кількісними та якісними змінними

Найпростіша лінійна регресійна модель *тільки з якісними змінними* має вид такої парної регресії (AOV-модель):

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \varepsilon_i\,, \qquad (10.5)$$

де y_i – залежна змінна; d_i - dummy-змінна, яка приймає значення 0 або 1; α_0 і α_1 – параметри, які характеризують математичне сподівання залежної змінної в залежності від якісних ознак у групах таких ознак: $M\left[y_i/(d_i = 1)\right] = \alpha_0 + \alpha_1$ або $M\left[y_i/(d_i = 0)\right] = \alpha_0$; ε_i – залишки (випадкові величини).

Базуючись на реальних даних, проводяться розрахунки за моделлю (10.5). Графічно отримані результати показані на рис. 10.1, а (наприклад, залежність рейтингу студентів від успішного навчання в школі відмінників і невідмінників).

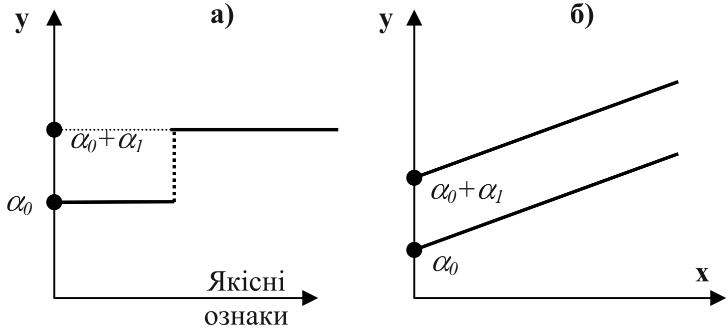


Рисунок 10.1 – Функція залежності результативної ознаки від пояснювальних змінних

Більш поширенними моделями є такі, які містять у собі сукупність кількісних і якісних пояснювальних змінних. Найпростіша ACOV-модель описується таким рівнянням парної регресії:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_{1i} + \beta_{1i} x_{1i} + \varepsilon_i\,, \qquad (10.6)$$

де d_{1i} - dummy-змінна (0,1); x_{1i} – кількісна пояснювальна змінна; α_0 і α_1 характеристики математичного сподівання в залежності від якісних ознак: $M\left[y_i/(d_i=1)\right]=(\alpha_0+\alpha_1)+\beta_{1i}x_{1i}$ або $M\left[y_i/(d_i=0)\right]=\alpha_0+\beta_{1i}x_{1i}$;

Кількісний параметр β_{1i} розраховується за допомогою 1МНК.

Геометрично ACOV-модель зображена на рис. 10.1, б (наприклад, залежність рейтингу студентів від відмінників і невідмінників у школі та середнього балу вступного іспиту). Як видно з рисунку, модель в залежності від двох обраних груп якісних ознак розпадається на дві функції з однаковим нахилом, але різним перетином (розміщенням).

Введення до регресії dummy-змінних має свої особливості, які полягають у такому: одна якісна змінна відокремлює дві атрибутивні ознаки; під час інтерпретації результатів моделей dummy-змінними важливо знати, які групи позначались 1, а які 0; група, позначена 0 (нулем), розглядається як базова категорія; коефіцієнт при dummy-змінної d_{1i} називається диференційним коефіцієнтом перетину і показує, наскільки значення перетину першої групи відрізняється від значення перетину базової категорії (групи).

У випадку порівняння двох або більше регресійних моделей з якісними змінними їх відмінність може бути в перетинах, нахилах або в обох випадках. У загальній методології знаходження відмінностей таких моделей може бути використаний **Chow-тест** (Чау-тест) або підхід з використанням dummy-змінної. Chow-тест заснований на використанні F-критерія Фішера у порівнянні, а підхід з використанням dummy-змінної – на аналізі параметрів моделей, які характеризують якісні ознаки за групами спостережень.

Економічні процеси дуже часто підпорядковані сезонним коливанням: різдв'яний розпродаж товарів, попит на морозиво і напої влітку і т.д. В економічному аналізі інколи виникає проблема вилучення сезоних коливань з метою виявлення тенденції. Одним з методів вилучення сезонних коливань є використання dummy-змінних в регресійних моделях.

Запитання для самоконтролю

10.1. Навести приклад якісних змінних в економетричних моделях.
10.2 Які якісні змінні називаються dummy-змінними?
10.3. Яку особливість мають якісні змінні?
10.4. Яка інформація наводиться у таблицях взаємної співзалежності?
10.5. За якими показниками оцінюється тіснота зв’язку між змінними на підставі таблиць взаємної співзалежності?
10.6. Як розраховуються пропорційні теоретичні частоти якісних показників?
10.7. Що характеризує спряженність χ^2 Пірсона для якісних показників? Яка умова тісноти зв’язку для χ^2?
10.8. Яка структура формул Чупрова та Крамера для коефіцієнта взаємної спряженності? Яка умова тісноти зв’язку між якісними змінними для коефіцієнта взаємної спряженності?
10.9. Що називається коефіцієнтом асоціації? Як він зв’язаний з χ^2?
10.10. Які регресійні моделі називаються AOV-моделями? Навести приклади.
10.11. Яка особливість ACOV-моделей?
10.12. Навести приклад рівняння парної регресії для AOV-моделі. Пояснити його структуру.
10.13. Пояснити на прикладі графічний вигляд AOV-моделі.
10.14. Навести приклад рівняння парної регресії для ACOV-моделі. Пояснити його структуру.
10.15. Пояснити на прикладі графічний вигляд ACOV-моделі.
10.16. Які особливості має введення до регресії dummy-змінних?
10.17. З якою метою використовується Чау-тест для моделей з якісними змінними?

Глава 11. Приклади економетричних моделей

11.1. Виробнича функція Кобба-Дугласа

Поняття “*виробнича функція*” введена американськими вченими Коббом і Дугласом у 1928 році за даними функціонування обробної промисловості США у період 1899-1922 роки. **Виробнича функція** – це економетрична модель про кількісний зв’язок результативних показників виробничо-господарської діяльності (наприклад, обсягу продукції, прибутку, рентабельності, продуктивності праці та ін.) з факторами, що визначають ці показники.

Функція Кобба-Дугласа (CDPF) належить до класичного прикладу економетричного моделювання і широко застосовується в економічних дослідженнях, особливо на макрорівні. Загальний вигляд виробничої функції такий:

$$Y = aF^{\alpha} L^{\beta}, \qquad (11.1)$$

де Y – обсяг продукції; F – основний капітал; L – робоча сила; a – параметр, який визначає ефективність виробничого процесу; α, β - параметри, що характеризують степінь однорідності виробничої функції ($0<\alpha<1$, $0<\beta<1$).

Сума параметрів ($\alpha+\beta$) свідчить про співвідношення термінів росту обсягу продукції та виробничих ресурсів: якщо $(\alpha+\beta)>1$, то темпи росту обсягу продукції вищі за темпи росту обох виробничих ресурсів; при $(\alpha+\beta)<1$ – навпаки, темпи росту обсягу продукції нижче за темпи росту ресурсів.

У випадку, наприклад, коли рівень матеріальних (F) та трудових (L) ресурсів збільшиться на $r\%$, на основі виробничої функції (11.1) обсяг продукції запишеться так:

$$Y_1 = Y\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\alpha+\beta}. \qquad (11.2)$$

Тоді при $(\alpha+\beta)>1$ обсяг продукції зростає більш як на $r\%$; якщо $(\alpha+\beta)<1$ - менш ніж на $r\%$; при $(\alpha+\beta)=1$ продукція збільшиться на $r\%$.

Перші похідні від виробничої функції $Y'_F = \dfrac{\partial Y}{\partial F}$ та $Y'_L = \dfrac{\partial Y}{\partial L}$ свідчать про приріст продукції за відповідним видом ресурсів. Їх співвідношення дає граничні норми заміщення ресурсів

$$h = \frac{Y'_F}{Y'_L} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{L}{F}, \qquad (11.3)$$

а швидкість зміни норми зміщення ресурсів у зв'язку зі зміною величин ресурсів обчислюється так:

$$\frac{\partial h}{\partial L} = \frac{\alpha}{\beta F}; \quad \frac{\partial h}{\partial F} = \frac{\alpha L}{\beta F^2}. \qquad (11.4)$$

Якщо метою господарської діяльності є максимізація прибутку, то відповідні обсяги ресурсів F і L та максимальне значення випуску продукції Y також можна получити за допомогою виробничої функції:

$$\left.\begin{aligned}
&F = \frac{(r+1)P\alpha Y}{r};\ L = \frac{(r+1)P\beta Y}{w};\\
&Y = a\left[\frac{(r+1)P\alpha Y}{r}\right]^{\alpha} \times \left[\frac{(r+1)P\beta Y}{w}\right]^{\beta};\\
&r = \frac{\lambda\alpha Y}{F};\ w = \frac{\lambda\beta Y}{L};\ b = \frac{\beta F}{\alpha L};\ \lambda = (r+1)P\\
&\text{при } r \neq -1;\ P = bY^{r},
\end{aligned}\right\}, \quad (11.5)$$

де *w, r, b* – параметри функції прибутку $\Pi = bY^{r+1} - wL - rF + \lambda\left[f(F,L) - Y\right]$, наведені формули для яких получені за умови максимізації прибутку; λ - множинник Лангранжа.

Приклади використання виробничої функції Кобба-Дугласа показують, що ця економетрична модель дає широкі можливості в аналізі виробничої діяльності, визначає шляхи вдосконалення з метою підвищення ефективності.

11.2. Моделі попиту і пропозиції на конкурентному ринку

Існуючі моделі обміну в ринковій економиці базуються на рівновазі (балансу) попиту і пропозиції на товари.

У простійшій **моделі попиту і пропозиції** на ринку припускається, що обсяги попиту g_1 і пропозиції g_2 деякого продукту в певний час на деякому ринку описуються функціями, які залежать тільки від ціни ρ, за якою реалізується продукція: $g_1=f(\rho,u)$ – функція попиту; $g_1=y(\rho,\varepsilon)$ – функція пропозиції, де $u,\ \varepsilon$ - залишки. Знаючи ціну ρ, можна визначити величину попиту і пропозиції. Тоді для рівноваги на ринку необхідно існування рівності між попитом і пропозицією, що описується моделлю:

$$g_1 = g_2;\ g_1 = f(\rho,u);\ g_2 = \varphi(\rho,\varepsilon). \quad (11.6)$$

У більш досконалих динамічних моделях, які враховують зміни цін попиту та пропозиції на товари у різні періоди часу t, обсяги попиту і пропозиції можуть змінюватись й від цін товарів $X_{jt}(j=1...m)$, які можуть зміняти та доповнювати даний товар. Тоді модель (11.6) можна записати так:

$$\left.\begin{aligned} g_{1t} &= g_{2t}; \\ g_{1t} &= f(\rho_t, X_{1t}, X_{2t}, ..., X_{mt}, u_t); \\ g_{2t} &= \varphi(\rho_{t-1}, X_{1t}, X_{2t}, ..., X_{mt}, \varepsilon_t) \end{aligned}\right\}. \quad (11.7)$$

У цій моделі попит у періоді t залежить від ціни в цьому періоді, а пропозиція в періоді t залежить від ціни попереднього переіоду (t-1).

В залежності від виду функцій f і φ можуть бути різні моделі типу (11.7). Для оцінки їх параметрів застосовуються розглянуті раніше економетричні методи.

11.3. Повна кейсіанська модель

Для прогнозування розвитку економіки на макрорівні та планування певних заходів для подальшого економічного розвитку потрібно знати співвідношення рівня випуску продукції та зайнятості трудових ресурсів. Поставив цю проблему та виклав свою економічну теорію, її пояснюючу, англійський вчений-економіст Дж. М.Кейнс, який у 1936 році опублікував відому роботу "Загальна теорія зайнятості, процента і грошей". У цій роботі він намагався пояснити рівень виробництва в період неповного завантаження робочої сили та обладнання у фазах безробіття, що не вивчалось класичною економічною теорією. На основі теорії Кейнса, яка получила назву "ефекта мультиплікатора", була побудована **повна кейсіанська модель** (або економетрична модель загальної економіки), яка складається з шести рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} & N^d\left(\frac{W}{p}\right) = N = N^s\left(\frac{W}{p}\right); \\ & Y = f(N);\ S(Y) = I(r); \\ & L(Y,r) = \frac{M}{p};\ W = \left(\frac{W}{p}\right)p, \end{aligned}\right\} \qquad (11.8)$$

де Y – валовий національний продукт; N – кількість робочих місць; W – заробітна плата; p – індекс цін; r – норма процента; (W/p) – норма реальної заробітної плати; $N^d(W/p)$ – функція попиту на ринку праці; $N^s(W/p)$ – функція пропозиції на ринку праці; M – загальна грошова маса.

Перше рівняння (11.8) є подвійним: це два рівняння ринку праці, за допомогою яких визначається кількість робочих місць (N) в залежності від попиту і пропозиції на ринку праці.

Друге рівняння (11.8) містить виробничу функцію, яка за умов повної зайнятості на ринку праці (N) дає значення рівноважного валового національного продукту (Y).

Третє та четверте рівняння (11.8) представляють модель сектора споживання в економиці. В цій моделі рівень цін (p) є залежною змінною, і він, як і норма процента (r), визначається з поданих рівнянь.

Останнє рівняння (11.8) дає номінальну заробітну плату W.

Для знаходження шести змінних N, r, W, (W/p), Y, P необхідно спочатку встановити явний вигляд функцій зв'язку $N^d(W/p)$, $N^s(W/p)$, $f(N)$, $S(Y)$, $I(r)$, $L(Y,r)$ та оцінити їхні параметри, вводячи випадкові величини (залишки) у праві частини рівнянь.

Остаточно система одночасних рівнянь (11.8) вирішується розглянутими раніше методами, що і дає кількісний опис моделі.

11.4. Економетричні моделі Укр-1-3

На Україні з метою аналізу та прогнозування узагальнених економічних показників розроблені економетричні моделі Укр 1-3 розвитку національної економіки. Їх розробка почалась з 60-70-х років і в сучасних умовах моделі зазнали значної трансформації.

Модель Укр-1 має відносно невелику кількість вхідних показників (екзогенних факторів). 13 вихідних показників (ендогенних факторів) розраховуються як розв'язок певної системи рівнянь, яка враховує функціональні взаємозв'язки і структурні співвідношення між економічними показниками. Більшість зв'язків враховується шляхом регресійного аналізу. В результаті реалізації моделі знаходять такі вихідні показники: P_t – сукупний суспільний проект; Φ_t – середньорічний обсяг основних виробничих фондів (ОВФ); M_t – матеріальні витрати; Y_t – вироблений національний доход; $\widetilde{Y}_t$ - національний доход, який використовується в державі; C_t – фонд споживання; S_t – фонд нагромадження; I_t – капітальні вкладення; A_t – амортизаційні відрахування; $\Delta\Phi_t$ – введені в дію ОВФ; R_t – чисельність робітників і службовців у галузях матеріального виробництва; ${B_t}/{L_t}$ - споживання матеріальних благ і послуг (B_t) на чисельність населення (L_t); ${Ж_t}/{L_{mt}}$ - житловий фонд у містах ($Ж_t$) на чисельність міського населення (L_{mt}).

У моделі Укр-2 система рівнянь поширюється на галузеві блоки: промисловість, сільське господарство, будівництво, транспорт і зв'язок, зведені показники та ін. Число результативних показників моделі Укр-2 дорівнює 101.

Модель Укр-3 розроблена на базі моделі Укр-2 з поширенням на економічні райони і адміністративногосподарські області, що дає можливість враховувати регіональний характер багатьох видів ресурсів.

Економічні моделі в нових умовах віддзеркалюють нові фактори сучасного господарювання. Так, на перше місце вийшли показники експорту, імпорту стратегічно важливих для України видів продукції – електроенергії, вугілля, нафти, газу, металу, цементу, тракторів, зерна тощо. Використання економетричних моделей типу Укр 1-3 з адаптацією до нових економічних і соціальних умов дозволить вирішувати питання комплексного прогнозування основних макроекономічних показників України, здійснювати перевірку нових концепцій, своєчасно виявляти вузькі місця в розвитку виробництва і готувати пропозиції щодо поліпшення використання виробничих ресурсів.

Запитання для самоконтролю

11.1. Дати означення поняття “виробничої функції”.

11.2. Навести вигляд виробничої функції Кобба-Дугласа, пояснити її структуру.

11.3. Для чого застосовується економетрична модель виробничої функції?

11.4. Як впливають значення параметрів α та β на результативний показник виробничої функції?

11.5. Яке економетричне тлумачення мають перші похідні від виробничої функції, їх співвідношення?

11.6. Навести приклади використання виробничої функції.

11.7. На підставі якої умови базуються моделі обміну в ринковій економіці?

11.8. Яка структура простійшої моделі попиту та пропозиції на конкурентному ринку?

11.9. Яка особливість динамічних моделей обміну на ринку товарів?

11.10. Що покладено в основу економічної теорії Дж. М. Кейнса, на базі якої була сформована модель загальної економіки?

11.11. Пояснити структуру повної кейнсіанської моделі за складом рівнянь.

11.12. Які показники зв'язують рівняння кейнсіанської моделі?
11.13. Яка структура економетричної моделі Укр-1?
11.14. Які показники розраховуються в результаті реалізації моделі Укр-1?
11.15. Яка особливість моделі Укр-2 у зрівнянні з моделлю Укр- 1?
11.16. Яка особливість моделі Укр-3?

Глава 12. Використання персонального комп'ютера в реалізації економетричних моделей

В цій главі розглядається реалізація на ПК двох типів економіко-математичних моделей за допомогою програмної системи EXCEL: *оптимізаційних* на основі рішення задач лінійного програмування (ЛП); *суто економетричних* при побудові та аналізі рівнянь парної та множинної лінійної регресії.

12.1. Загальний опис програмного забезпечення табличного процесора EXCEL

Табличний процесор EXCEL призначений для зберігання та обробки інформації, яка надається в табличній формі. Головною одиницею зберігання та обробки інформації є електронна таблиця (ЕТ). Вона являє собою двомірні масиви, які складаються з клітинок, збудованих за *рядками* та *стовпцями*. Кожна клітинка може містити в собі числа, тексти та формули.

Рядки та стовпці ЕТ ідентифікуються (пойменовуються) відповідно натуральними числами (1,2,3,…) і великими буквами або парами букв латинського алфавіту (A, B,…Z,AA,BB,…). Індентифікатори рядків і стовпців використовуються для адресації клітинок. Адреса клітинки складаються з ідентифікатора стовпця і номеру рядка, на перетині яких знаходиться клітинка:

<Адреса клітинки>=<ідентифікатор стовпця>:<номер рядка>

На рис. 12.1 показаний спосіб адресації клітинок ЕТ.

	A	**B**	**C**	**…**	**AA**	**AB**	**…**
1							
2					AA2		
3							
4		B4					
5							
.							

Рисунок 12.1 – Адресація клітинок ЕТ

Обробку даних у ЕТ можна здійснювати блоками. *Блок* – це прямокутний фрагмент таблиці. Група клітинок, об‘єднаних у блок, ідентифікується таким чином:

<Ідент. блоку>=<Адр. лів. верх. кл>:<Адр. прав. нижн. кл.>

На рис. 12.2 виділений блок **C3:G7**:

	A	B	C	D	E	F	G	…
1								
2								
3		**C3**						
4								
5								
6								
7							**G7**	
.								

Рисунок 12.2 – Блок клітинок ЕТ

З блоками, наприклад, виконуються операції копіювання, переміщування, виведення, вставки, форматування, сумування і т.ін.

До клітинок ЕТ можуть бути вміщені текст, число, формула, дата.

Текст – це будь-яка послідовність символів. Текст використовується у шапках таблиць, заголовків і стовпців, а також при коментуванні. Текст не може починатися зі знаків “=”, “+”. Ці знаки використовуються у формулах.

Число – це числова константа, яка записується відповідно до звичайних математичних правил. Числа використовують в якості даних для розрахунків.

Формула – це математичний вираз, зіставлений із чисел, адрес клітинок, ідентифікаторів блоків, функцій, знаків математичних виразів. Формули починають зі знака рівняння (=) або знака плюс (+). Усі розрахунки в ЕТ задаються формулами. Формула в ЕТ відображається у спеціальному рядку – *рядку формул*.

Дата – це дане спеціального типу, структуру якого описує число-місяць-рік у відповідності з одним із декількох форматів, використовуємих в ЕТ. З датами можна виконувати специфічні арифметичні та логічні дії у відповідності із спеціальними функціями.

У *Microsoft* працюють з такими типами документів: діаграмою, макротаблицею, рабочим аркушем, робочою книгою.

Діаграма – це графічне зображення даних, які містять у собі ЕТ або її блок. Діаграми дозволяють наочно ілюструвати кількісні співвідношення між порівнюваними величинами.

Макротаблиця (*макрос*) – це послідовність команд, які часто виконуються користувачем у процесі роботи для автоматизації виконання цієї послідовності.

Робочий аркуш використовується для організації, аналізу та обробки даних, оформлених у вигляді ЕТ, діаграми або макроса. Кожен робочий аркуш – це один із вишезгаданих документів.

Робоча книга складається із робочих аркушів, об‘єднаних подібно тому, як з‘єднуються швидкозшивачем окремі документи. Робоча книга зберігається у вигляді файлу і тому є основною одиницею зберігання інформації для табличного процесора EXCEL.

ЕТ, як правило, складається із таких елементів:

- заголовку (шапці) таблиці;
- заголовків стовпців;
- заголовків рядків;
- інформаційної частини (даних).

Тому процес проектування ЕТ можна описати як таку послідовність етапів:

- введення заголовка таблиці;
- введення заголовків стовпців та рядків;
- введення вхідних (початкових) даних;
- визначення та введення розрахункових формул;
- оформлення таблиці для придання їй професіонального вигляду;
- зберігання робочої книги з ЕТ на зовнішньому носії;
- підготовка до друку та друкування.

В роботі з ЕТ кожен з цих етапів може повторюватись неодноразово.

12.2. Рішення задач ЛП у середовищі EXCEL

На рис. 12.3 зображено загальна схема розміщення даних для рішення задачі ЛП довільного розміру. Викладемо коротко алгоритм дій користувача, який вирішує задачу ЛП.

	A	B	…	<N>	<N1>	<N2>
1			**Задача лінійного програмування**			
2	**Змінні**	**x1**	**…**	**Xn**		
3	**Рішення**	В рідку розміщені рішення задачі			**Обмеження**	
4		**Матриця коефіцієнтів системи обмежень**			**Ліва частина**	**Права частина**
5	**Обмеження 1**	Блок заповнюється коефіцієнтами обмежень			Стовпеці формул лівих частин обмежень	Стовпець коефіцієнтів правих частин обмежень
6	**Обмеження 2**					
	…					
	…					
К	**Обмеження k**					
К+1	**Цільова функція**	Рядки заповнюються коефіцієнтами цільової функції			**Формула цільової фінкції**	

Рисунок 12.3 – Загальна схема заповнення ЕТ для задачі ЛП

1. Створити ЕТ, яка відповідає розміру вирішуваній задачі ЛП.
2. Оформити таблицю шапкою, заголовками рядків і стовпців у відповідності до рис. 12.3.
3. Заповнити ЕТ даними:
   - рядок 2 – змінними задачі **X1, X2,…XN** у загальному вигляді (блок клітинок **B2:N2**);
   - блок **B5:NК** – коефіцієнтами лівих частин обмежень;
   - рядок (К+1) **Цільова фінкція** – коефіцієнтами цільової фінкції у блоці клітинок **B(К+1):N(К+1);**
   - стовпець **N2 Права частина** – коефіцієнтами правих чстин обмежень у блоці клітинок**:(N2)К.**
4. Заповнити стовпець **Ліва чстина** формулами лівих частин обмежень, які обчислюються спеціальною

функцією **СУММПРОИЗВ**, яка знаходиться у списку **Математические Мастера функций**. Аргументами функції є масиви змінних (x_1, x_2,…x_n) і коефіцієнти при них (a_1,a_2,…a_n). Функція обчислює суму додатків масивів для кожного обмеження у вигляді (a_1x_1 +a_2x_2 +…+a_nx_n).

Для автоматизації копіювання формул у стовпці **N1** зручно використовувати абсолютні адреси 2-го рядка змінних, які не змінюються у формулах: **B$2:N$2**. Значок **$** використовується для того, щоб зробити посилання на ці клитинки однозначними, так як в нашому випадку в них знаходяться постійні значення змінних задачі у всіх обчисленнях. Тоді, наприклад, в клітинці **(N1)5** ЕТ для лівої частини обмеження 1 записується формула

=СУММПРОИЗВ(B$2:N$2,B5:N5)

Аналогічно записуються формули для інших лівих частин обмежень, які копіюються в клітинки (**N1)6:** (**N1)К.**

5. Заповнити клитинку **N1(К+1) Цільова функція** формулою

=СУММПРОИЗВ(B$2:N$2),B(К+1):N(К+1))

Відмітити клитинку **N(К+1) Цільова функція** та ініціювати вікно **Поиск решения**, загальний вигляд якого показаний на рис. 12.4:

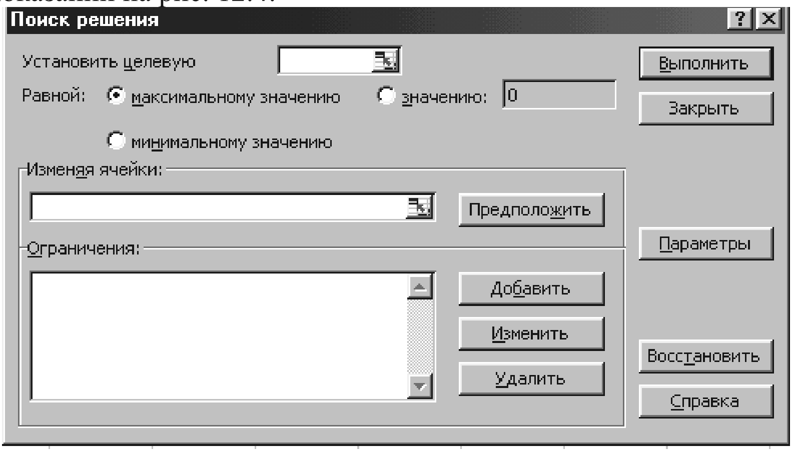


Рисунок 12.4 – Вікно **Поиск решения**

6. Заповнити строку **Установить целевую функцію** посиланням на клитинку цільової функції **N(К+1)** та вибрати один з варіантів оптимізації:

- максимальне значення цільової функції (MAX);
- мінімальне значення цільової функції (MIN).

7. Заповнити строку **Изменения ячейки** посиланням на блок ЕТ **Решение** (блок **B3:N3**).

8. Заповнити вікно **Ограничения** лівими, правими частинами та знаками обмежень, для чого треба натиснути кнопку **Добавить**, відкривши діалогове вікно **Добавление ограничения** (рис. 12.5), і в цьому вікні для кожного обмеження необхідно:

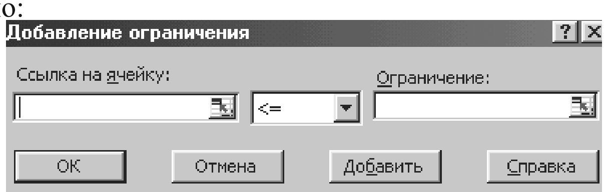


Рисунок 12.5 – Діалогове вікно **Добавление ограничения**

- заповнити рядок **Ссылка на ячейку**, встановивши курсор в цей рядок та клацнувши мишею на відповідній клитинці стовпця **Левая часть** обмежень ЕТ;
- в рядку **Знак** вибрати знак відношення, який відповідає розглянутому обмеженню **(≤, ≥, =);**
- заповнити стороку **Ограничение**, встановивши курсор на цей рядок та клацнувши мишею на відповідну клитинку стовпця **Права частина** обмежень ЕТ;
- заповнення строки вікна **Добавление ограничений** закінчується натиском кнопки **ОК**, додавши тим самим обмеження до списку обмежень вікна **Ограничение**.

9. Відкрити діалогове вікно **Параметры**. Встановити в ньому режим **Линейная модель** и **Неотрицательные значения** (для змінних задачі).

10. Ініціювати рішення задачі, натиснувши кнопку **Выполнить**.

11. Якщо рішення задачі існує та знайдене, оптимальне значення цільової функції буде виведене в клітинку

Целевая функция, а оптимальне значення змінних – у блок **Решение.**

За описаною схемою заповнення ЕТ (див. рис. 12.3) можуть бути реалізовані ряд оптимізаційних економіко-математичних задач, які описані у п. 3.1.2: **задача оптимального використання ресурсів** (**оптимального планування**); **задача про суміші** та ін. За аналогією можуть бути реалізовані такі напрями ЛП, як *задача цілочисельного ЛП, двійчаста задача ЛП*, що викладено в посібнику [23].

Крім того є широко розповсюджена в економічній практиці **транспортна задача**, яка може бути сформульована як частковий випадок задачі ЛП і вирішена симплекс-методом. На відміну від запропанової схеми заповнення ЕТ (див. рис. 12.3) більш зручним та наочним є схема, яка надана на рис. 12.6. Тому коротко опишемо процедуру рішення транспортної задачі з використанням цієї схеми [23].

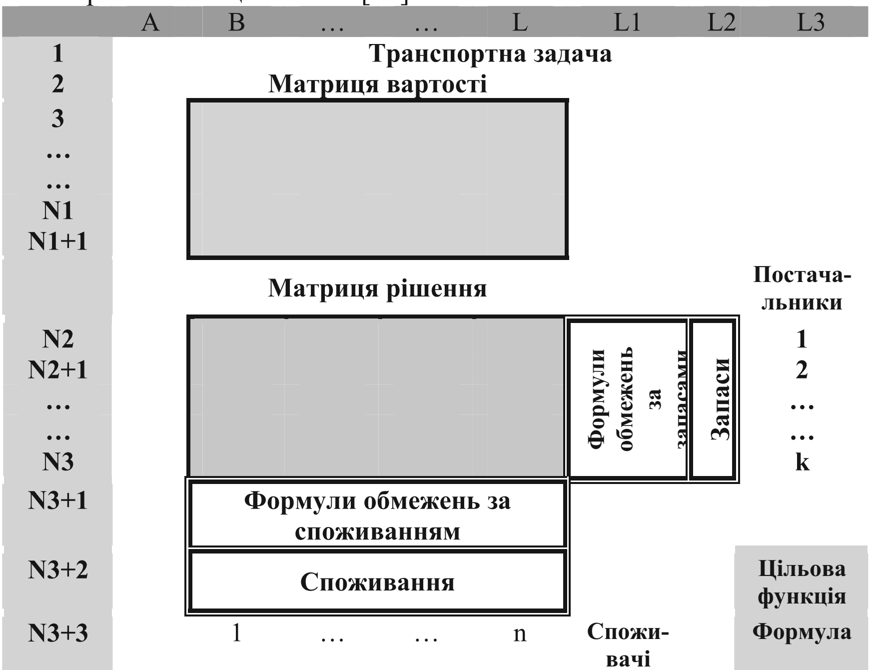


Рисунок 12.6 – Загальна схема заповнення ЕТ транспортної задачі

Нагадуємо, що сутність транспортної задачі полягає в тому, щоб забезпечити *мінімальні транспортні витрати* перевезень вантажу від постачальників до споживачів (*цільова функція*), і при цьому вантаж від постачальників має бути вивезеним (*обмеження на спроможність постачальників*), а потреби споживачів – задовільнені (*обмеження на потреби споживачів*).

Рішення транспортної задачі на ПК проводиться за таким алгоритмом.

1. Оформити шапку та заголовки рядків і стовпців, як це показано на рис. 12.6.

2. Заповнити ЕТ: блоки **Запаси (L2)N2:(L2)N3** та **Споживання B(N3+2):L(N3+2); Матриця вартості B3:L(N1+1).**

3. В клітинку **L3(N3+3)** за допомогою **Мастера функций** записати формулу цільової функції

=СУММПРОИЗВ(B3:L(N1+1), B(N2):L(N3))

для чого:

- натиснувши на кнопку $\boldsymbol{f_x}$ панелі інструментів **Стандартная**, ініціювати **Мастер функций**;
- вибрати функцію **Математическая/СУММПРОИЗВ;**
- встановити курсор у полі **Матриця вартості**, відмітити блок **B3:L(N1+1)** та зафіксувати перший аргумент функції;
- встановити курсор у полі **Матриця рішення**, відмітити блоки **B(N2):L(N3)** та зафіксувати другий аргумент функції;
- закінчити запис формули, клацнувши **ОК**.

4. В клітинах блоків **L1(N2):L1(N3)** та **B(N3+1):L(N3+1)** записуються формули сумування змінних відповідно за запасами постачальників та потребою споживачів.

5. Зв‘язати ЕТ з вікном **Поиск решения**, для чого:

- відмітити клитинку **L3(N3+3) (Цільова функція),** відкрити вікно **Поиск решения**;
- заповнити рядок **Установить целевую ячейку**;
- встановити режим **Равной** у стан **Минимальному значению**;

- заповнити рядок **Изменения ячейки** посиланням на блок **B(N2):L(N3)**;
- заповнити вікно **Ограничения** обмеженнями за рядками та стовпцями змінних, що відповідає запасим постачальників та потребам споживачів;
- у рядку **Знак** вибрати знак відношення розглядаємої транспортної задачі **(≤, ≥, =)**;
- заповнення рядків вікна **Добавить** закінчити натиском кнопки **ОК**;
- натиснувши кнопку **Параметры**, встановити у вікні **Параметры поиска решения** режим **Линейная модель** та **Неотрицательные значения;** натиснути кнопку **ОК**.

6. Ініціювати рішення задачі, натиснувши кнопку **Выполнить**.

Слід зауважити, що рішення транспортної задачі відкритого типу можна получити, змінив у списку обмежень відповідні рівняння нерівностями [21].

Розглянемо приклади рішень задач ЛП на ПК у середовищі EXCEL за побудованими економіко-математичними моделями.

Приклад 12.1. Задача оптимального використання ресурсів. Необхідно скласти такий план випуску продукції декількох видів, щоб підприємство мало найбільший прибуток від їх реалізації при обмежених запасах ресурсів з використанням такої економіко-математичної моделі:

$$Z = 8x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 6x_6 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 4x_6 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 8x_5 + 2x_6 \le 12, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 5x_6 \le 20, \\ 3x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 3x_6 \le 25, \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 3x_6 \le 20, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 \le 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 17x_3 + 6x_4 + 24x_5 + 4x_6 \le 40; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = 1 \ldots 6).$$

Алгоритм дій користувача

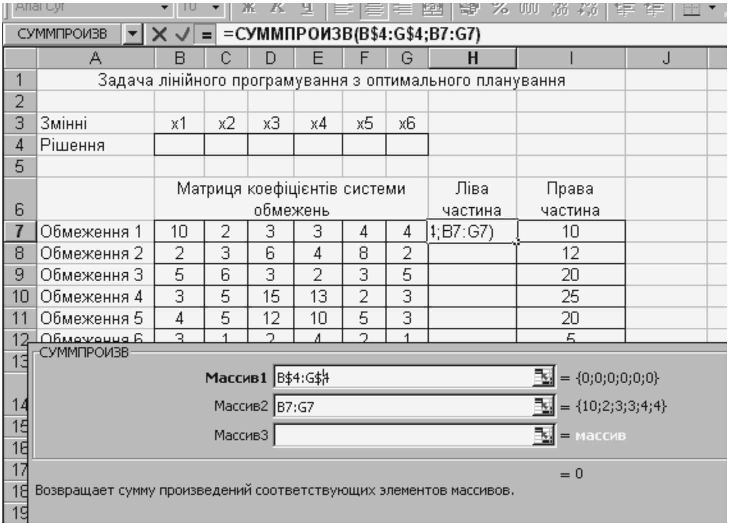
1. Заповнити вхідні дані за формою рис. 12.3:

K6 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Задача лінійного програмування з оптимального планування									
2										
3	Змінні	x1	x2	x3	x4	x5	x6			
4	Рішення									
5										
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень						Ліва частина	Права частина	
7	Обмеження 1	10	2	3	3	4	4		10	
8	Обмеження 2	2	3	6	4	8	2		12	
9	Обмеження 3	5	6	3	2	3	5		20	
10	Обмеження 4	3	5	15	13	2	3		25	
11	Обмеження 5	4	5	12	10	5	3		20	
12	Обмеження 6	3	1	2	4	2	1		5	
13	Обмеження 7	5	8	17	6	24	4		40	
14	Цільова функція	8	12	10	9	8	6		MAX	
15										

2. Для лівої частини **обмеження 1** відповідна їй формула має такий вигляд:

=СУММПРОИЗВ(B4:G4, B7:G7)



СУММПРОИЗВ =СУММПРОИЗВ(B$4:G$4;B7:G7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Задача лінійного програмування з оптимального планування									
2										
3	Змінні	x1	x2	x3	x4	x5	x6			
4	Рішення									
5										
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень						Ліва частина	Права частина	
7	Обмеження 1	10	2	3	3	4	4	4;B7:G7)	10	
8	Обмеження 2	2	3	6	4	8	2		12	
9	Обмеження 3	5	6	3	2	3	5		20	
10	Обмеження 4	3	5	15	13	2	3		25	
11	Обмеження 5	4	5	12	10	5	3		20	

для цільової функції:

=СУММПРОИЗВ(B4:G4, B14:G14)

3. Скопіювати клитинку **H7** у **Буфер обміну**.
4. Вставити в клітинки **H8:H14** з Буферу обміну формулу:

=СУММПРОИЗВ(B$4:G$4, B8:G8)

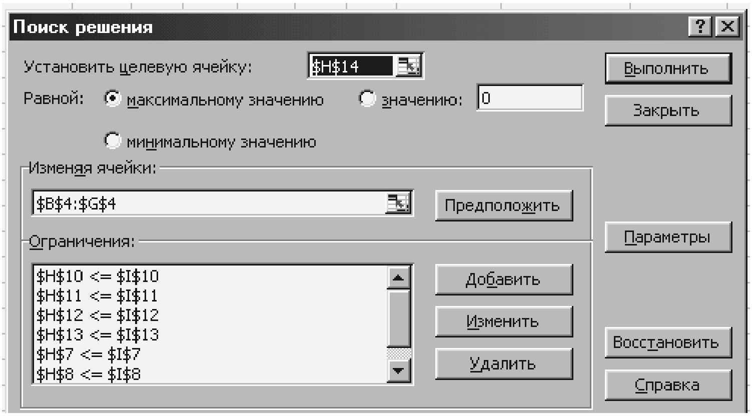
H7 = =СУММПРОИЗВ(B$4:G$4;B7:G7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Задача лінійного програмування з оптимального планування								
2									
3	Змінні	x1	x2	x3	x4	x5	x6		
4	Рішення								
5									
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень						Ліва частина	Права частина
7	Обмеження 1	10	2	3	3	4	4	0,0	10
8	Обмеження 2	2	3	6	4	8	2		12
9	Обмеження 3	5	6	3	2	3	5		20
10	Обмеження 4	3	5	15	13	2	3		25
11	Обмеження 5	4	5	12	10	5	3		20
12	Обмеження 6	3	1	2	4	2	1		5
13	Обмеження 7	5	8	17	6	24	4		40
14	Цільова функція	8	12	10	9	8	6		MAX

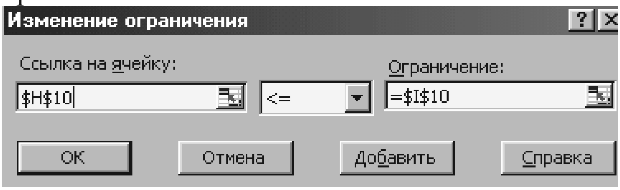
5. Відмітити клитинку **H14** (цільова функція) і активізувати режим **Сервис/Поиск решения**.
6. Заповнити рядок **Установить целевую ячейку.**

7. Включити один з варіантів оптимізації. В нашому випадку – **Максимальному значению**.

8. Заповнити рядок **Изменяя ячейки** посиланням на блок **B4:G4**.



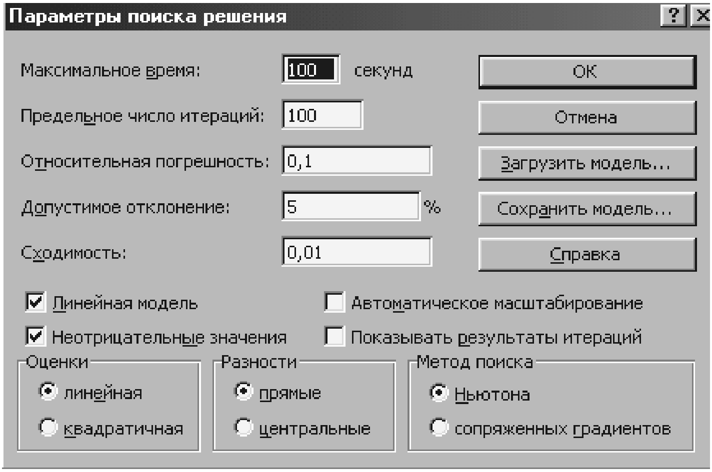
9. Заповнити вікно **Ограничения** рядками: відношенями лівої та правої частин обмежень.



10. У рядку **Знак (≤, ≥, =)** вибрати такий знак відношення, який відповідає обраному обмеженню. У нашому випадку - **≤.**

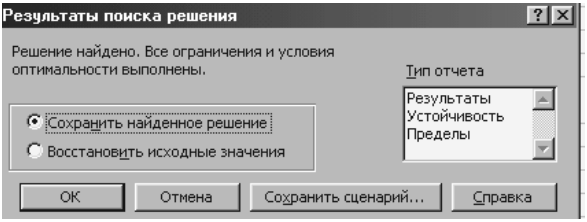
11. Заповнення рядка вікна **Добавить** закінчити натиском кнопки **ОК**, добавив інші обмеження (2,3,4,…7) до списку вікна **Ограничения.**

12. Натиснути кнопку **Параметри** та вибрати режим **Линейная модель** і **Неотрицательные значения.** Натиснути кнопку **ОК**.



12. Виконавши ці дії, натиснувши кнопку **Выполнить**.

13. Після закінчення обчислень ПК на екрані з'являється вікно **Результати поиска решений**, у якому відображено повідомлення про результат роботи. В нашому випадку: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**.



Рішення даної задачі ЛП має такий вигляд:

H14 = =СУММПРОИЗВ(B$4:G$4;B14:G14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Задача лінійного програмування з оптимального планування								
2									
3	Змінні	x1	x2	x3	x4	x5	x6		
4	Рішення	0	3,14	0	0,36	0,14	0		
5									
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень						Ліва частина	Права частина
7	Обмеження 1	10	2	3	3	4	4	7,9	10
8	Обмеження 2	2	3	6	4	8	2	12,0	12
9	Обмеження 3	5	6	3	2	3	5	20,0	20
10	Обмеження 4	3	5	15	13	2	3	20,6	25
11	Обмеження 5	4	5	12	10	5	3	20,0	20
12	Обмеження 6	3	1	2	4	2	1	4,9	5
13	Обмеження 7	5	8	17	6	24	4	30,7	40
14	Цільова функція	8	12	10	9	8	6	42,1	MAX
15									

Приклад 12.2. Задача про суміші. Необхідно скласти таку суміш із декількох видів кормів для добового раціону відгодування худоби, щоб витрати на виготовлення суміші були мінімальними з дотриманням умов заданої годувальності при використанні такої економіко-математичної моделі:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_4 \geq 250, \\ 2{,}5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 300, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 280, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 190; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1 \ldots 4).$$

Алгоритм дій користувача

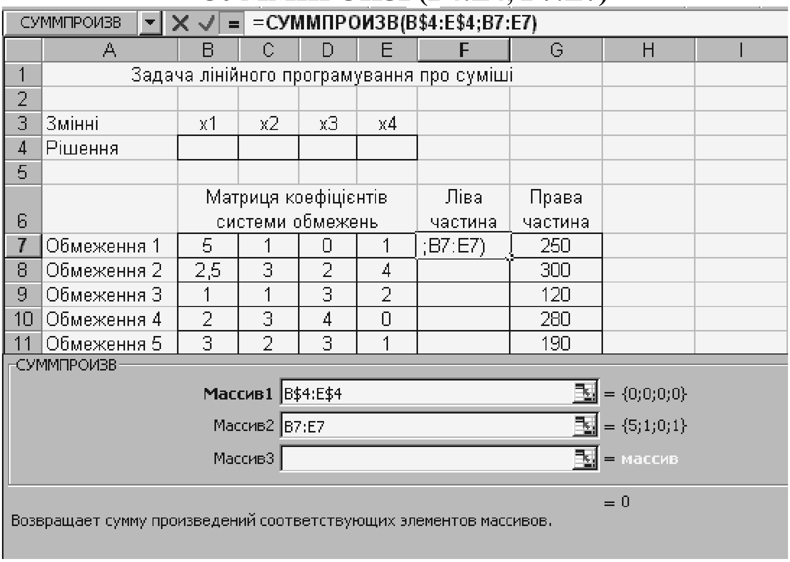
1. Заповнити вхідні дані за формою рис. 12.3.

F7	=					
	A	B	C	D	E	F	G

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача лінійного програмування про суміші						
2							
3	Змінні	x1	x2	x3	x4		
4	Рішення						
5							
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень				Ліва частина	Права частина
7	Обмеження 1	5	1	0	1		250
8	Обмеження 2	2,5	3	2	4		300
9	Обмеження 3	1	1	3	2		120
10	Обмеження 4	2	3	4	0		280
11	Обмеження 5	3	2	3	1		190
12	Цільова функція	5	2	1	1		MIN
13							

2. Для лівої частини **обмеження 1** відповідна їй формула має такий вигляд:

=СУММПРОИЗВ(B4:E4, B7:E7)



СУММПРОИЗВ =СУММПРОИЗВ(B$4:E$4;B7:E7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Задача лінійного програмування про суміші								
2									
3	Змінні	x1	x2	x3	x4				
4	Рішення								
5									
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень				Ліва частина	Права частина		
7	Обмеження 1	5	1	0	1	;B7:E7)	250		
8	Обмеження 2	2,5	3	2	4		300		
9	Обмеження 3	1	1	3	2		120		
10	Обмеження 4	2	3	4	0		280		
11	Обмеження 5	3	2	3	1		190		

для цільової функції:

=СУММПРОИЗВ(B4:E4, B12:E12)

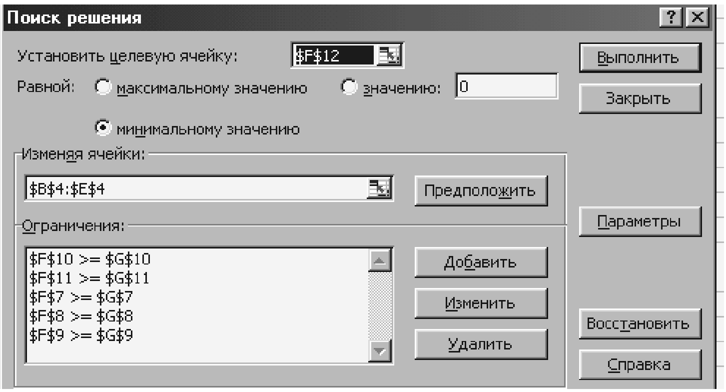
3. Скопіювати клитинку **F7** у **Буфер обміну**.
4. Вставити в клітинки **F8:F12** з Буферу обміну формулу:

=СУММПРОИЗВ(B$4:E$4, B8:E8)

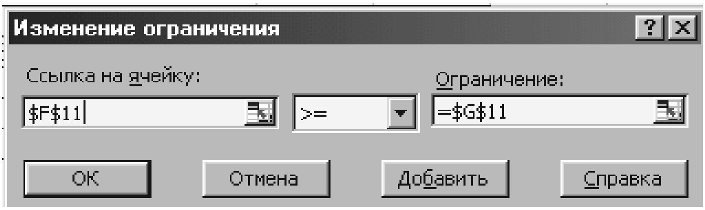

F7 = =СУММПРОИЗВ(B$4:E$4;B7:E7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача лінійного програмування про суміші						
2							
3	Змінні	x1	x2	x3	x4		
4	Рішення						
5							
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень				Ліва частина	Права частина
7	Обмеження 1	5	1	0	1	0,0	250
8	Обмеження 2	2,5	3	2	4		300
9	Обмеження 3	1	1	3	2		120
10	Обмеження 4	2	3	4	0		280
11	Обмеження 5	3	2	3	1		190
12	Цільова функція	5	2	1	1		MIN
13							

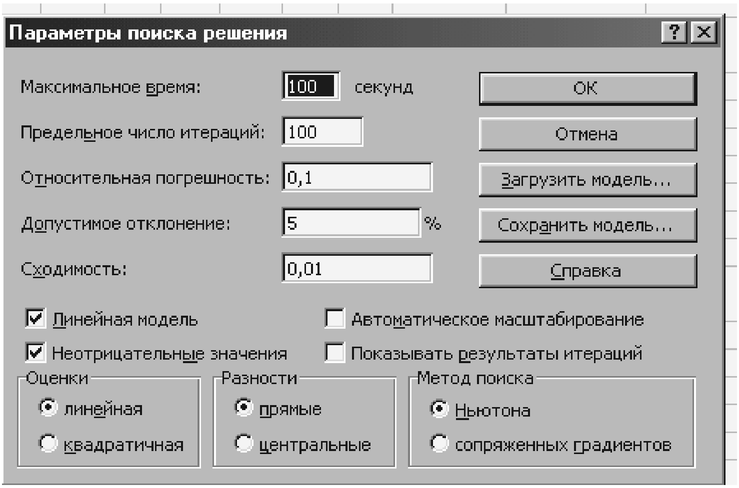
5. Відмітити клитинку **F12** (цільова функція) і активізувати режим **Сервис/Поиск решения**.
6. Заповнити рядок **Установить целевую ячейку.**
7. Включити один з варіантів оптимізації. В нашому випадку – **Минимальному значению**.
8. Заповнити рядок **Изменяя ячейки** посиланням на блок **B4:E4**.



9. Заповнити вікно **Ограничения** рядками: відношенями лівої та правої частин обмежень.

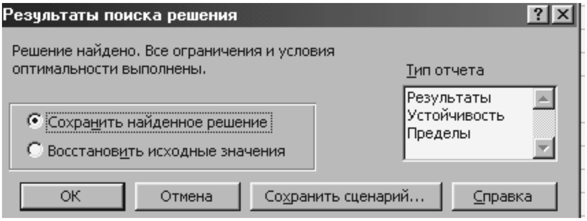


10. У строкі **Знак (≤, ≥, =)** вибрати такий знак відношення, який відповідає обраному обмеженню. У нашому випадку - **≥.**
11. Заповнення рядків вікна **Добавить** закінчити натиском кнопки **ОК**, добавив інші обмеження (2,3,…5) до списку вікна **Ограничения.**
12. Натиснути кнопку **Параметри** та вибрати режим **Линейная модель** і **Неотрицательные значения.** Натиснути кнопку **ОК**.



14. Виконавши ці дії, натиснувши кнопку **Выполнить**.

15. Після закінчення обчислень ПК на екрані з'являється вікно **Результати поиска решений**, у якому відображено повідомлення про результат роботи. В нашому випадку: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**.



Рішення даної задачі ЛП має такий вигляд:

F12 = =СУММПРОИЗВ(B$4:E$4;B12:E12)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача лінійного програмування про суміші						
2							
3	Змінні	x1	x2	x3	x4		
4	Рішення	45,41	0	47,3	22,97		
5							
6		Матриця коефіцієнтів системи обмежень				Ліва частина	Права частина
7	Обмеження 1	5	1	0	1	250,0	250
8	Обмеження 2	2,5	3	2	4	300,0	300
9	Обмеження 3	1	1	3	2	233,2	120
10	Обмеження 4	2	3	4	0	280,0	280
11	Обмеження 5	3	2	3	1	301,1	190
12	Цільова функція	5	2	1	1	297,3	MIN

Приклад 12.3. Транспортна задача. Скласти такий план перевезень вантажу від постачальників до споживачів, щоб вартість перевезень була мінімальною, вантаж від постачальників був вивезеним, а потреби споживачів – задовільнені з використанням такої економіко-математичної моделі:

$$Z = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} +$$
$$+ 5x_{23} + 2x_{31} + 3x3_{32} + 7x_{33} \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \quad x_{13} = 120, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (i = 1...3;\ j = 1...3).$$

Алгоритм дій користувача

1. Заповнити вхідні дані за формою рис. 12.6.

	A	B	C	D	E	F
1			**Транспортна задача**			
2						
3		Матриця вартості				
4	7	6	4			
5	3	8	5			
6	2	3	7			
7						
8		Матриця рішень			Запаси	
9					120	
10					100	
11					80	
12					Цільова функція	
13	90	90	120			
14		Споживання				
15						

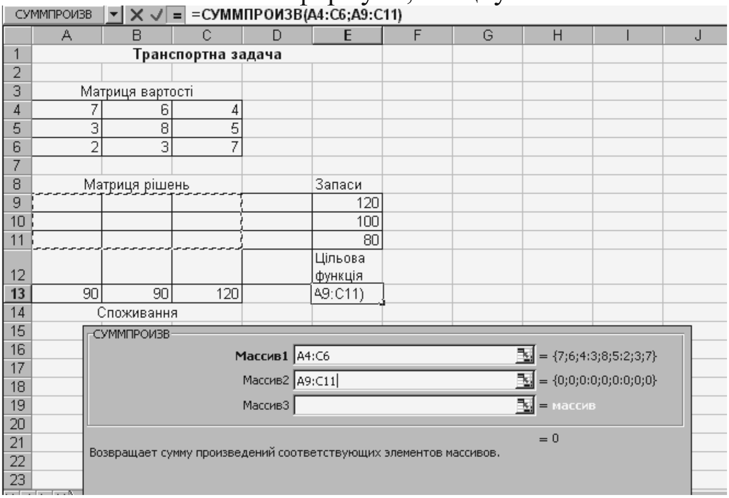
2. У клитинку **Е13** за допомогою **Мастера функций** записати формулу цільової функції

=СУММПРОИЗВ(А4:С6, А9:С11)

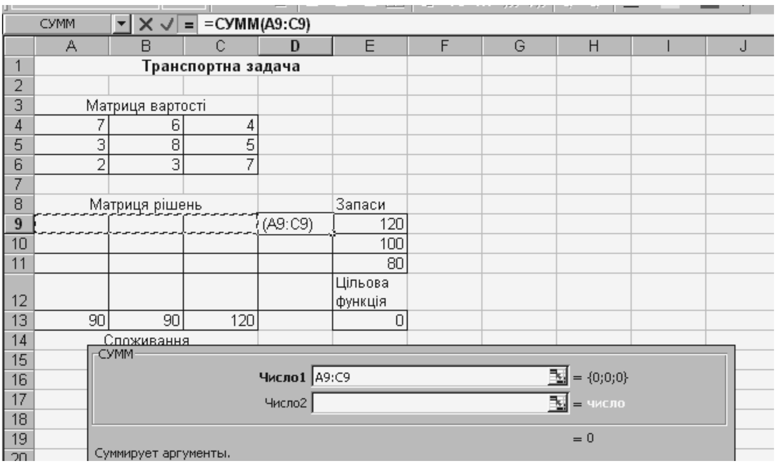
для чого:

- натиснути кнопку ***fx*** (**Мастер функций**) панелі інструментів **Стандартная;**
- вибрати функцію **Математическая / СУММПРОИЗВ**;

- встановити курсор у полі **Массив 1**, відмітити блок **A4:C6**;
- встановити курсор у полі **Массив 2**, відмітити блок **A9:C11**;
- закінчити запис формули, клацнувши **ОК**.

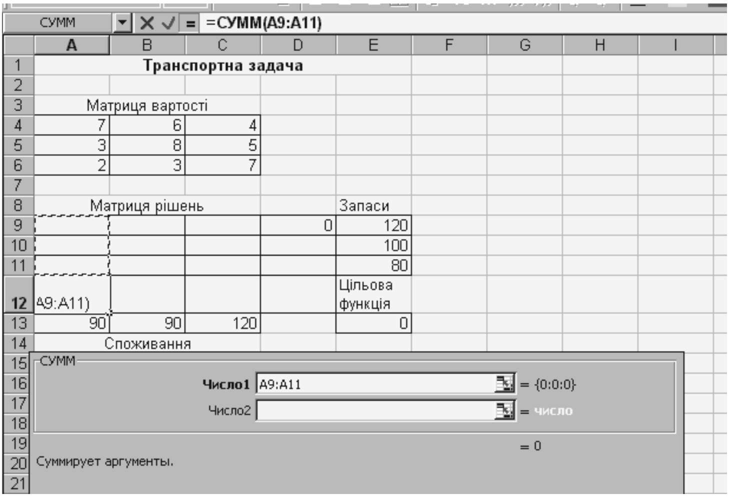


3. В клітинку **D9** записується формула сумування змінних у першому рядку, що відповідає запасам першого постачальника.



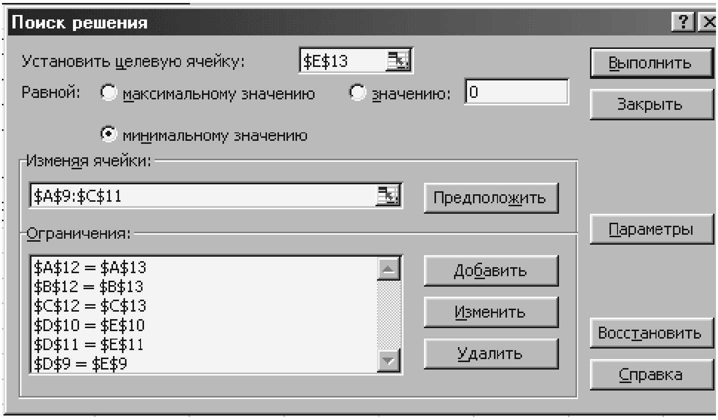
За аналогією здійснюється сумування змінних у другому та третьому рядках, що відповідає запасам інших постачальників даного прикладу.

4. В клітинку **А12** записується формула сумування змінних у першому стовпці, що відповідає потребі першого споживача.

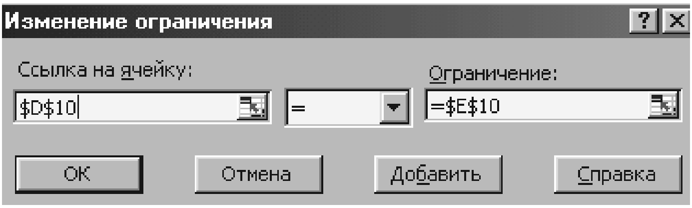


За аналогією здійснюється сумування змінних у другому та третьому стовпцях, що відповідає потребам інших споживачів для даного прикладу.

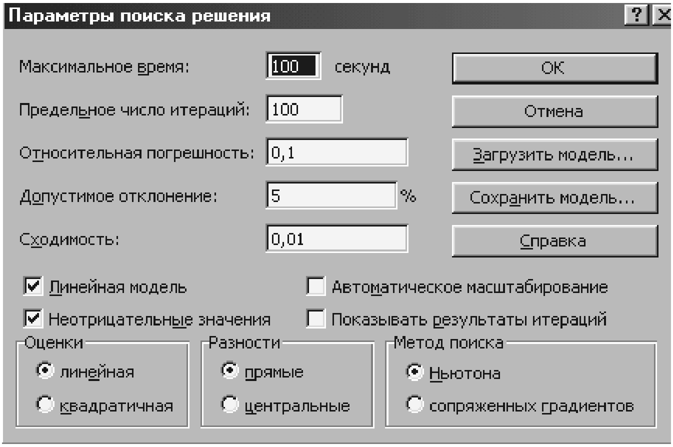
5. Відмітити клітинку **Е13** (цільова функція) і активізувати режим **Сервис/Поиск решения**.
6. Заповнити рядок **Установить целевую ячейку.**
7. Включити один з варіантів оптимізації. В нашому випадку – **Минимальному значению**.
8. Заповнити рядок **Изменяя ячейки** посиланням на блок **А9:С11**.



9. Заповнити вікно **Ограничения** обмеженнями за рядками та стовпцями змінних, що відповідає запасам постачальників та потребам споживачів.

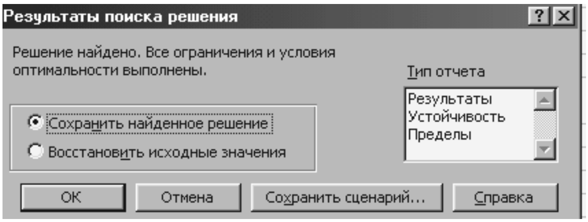


10. У рядку **Знак (≤, ≥, =)** вибрати такий знак відношення, який відповідає обраному обмеженню. У даному випадку **- =.**
11. Заповнення рядків вікна **Добавить** закінчити натиском кнопки **ОК.**
12. Натиснути кнопку **Параметри** та вибрати режим **Линейная модель** і **Неотрицательные значения.** Натиснути кнопку **ОК**.



12. Виконавши ці дії, натиснувши кнопку **Выполнить**.

13. Після закінчення обчисленнь ПК на екрані з'являється вікно **Результати поиска решений**, у якому відображено повідомлення про результат роботи. В нашому випадку: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**.



Рішення даної транспортної задачі ЛП має такий вигляд:

	A	B	C	D	E
1		**Транспортна задача**			
2					
3		Матриця вартості			
4	7	6	4		
5	3	8	5		
6	2	3	7		
7					
8		Матриця рішень			Запаси
9	0	10	110	120	120
10	90	0	10	100	100
11	0	80	0	80	80
12	90	90	120		Цільова функція
13	90	90	120		1060
14		Споживання			
15					

12.3. Лінійні регресійні моделі в програмах обробки ЕТ

Використовуються пакети прикладних програм EXCEL для розрахунку на ПК параметрів парної і множинної регресії за методом найменших квадратів (1МНК), а також оцінки тісноти та значимості зв'язку між змінними при проведенні дисперсійного (кореляційного) аналізу.

Алгоритм дій користувача для реалізації на ПК економетричної моделі з парної або множинної регресії наступний:

1. Створити ЕТ, яка відповідає розміру вхідних даних розглядаємої задачі.
2. Оформити таблицю шапкою та заголовками стовпців вхідних даних, як показано у **Прикладі 1** на рис. 12.7 (розглядається приклад множинної регресії) з побудови економетричної моделі реалізації продукції (***y***) в залежності від витрат на рекламу (x_1) та ціни товарів (x_2):

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Залежність обсягу продажу продукції від витрат на рекламу і ціни товарів**						
	Витрати на рекламу (x_1), г.о.	Ціна (x_2), г.о.	Продана продукція (y)	Регресійна статистика			$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$
				a_2	a_1	a_0	
2	6650	147,2	7175	-387,344	0,230784	64560,99	6493,4
3	19139	158,5	5836				5182,2
4	22468	161,5	9946				4837,3
5	63745	103,2	23627				37163,8
6	70680	191,9	8468				4843,8
7	10560	134,9	20509				35052,6
8	105574	107,8	49569				45515,3
9	126352	155,8	35895				32142,3
10	134900	117,8	52580				48773,9
11	145099	100,7	65392				57794,2
12	155990	172,9	27827				32754,9
13	156003	95,6	72058				62385,7
14	171942	98,8	80669				65013,4

15	190000	105,5	44880		66812,0
16	193990	99,9	69520		69923,1
17	251222	76,8	98643		92616,1
18	258964	95,2	75587		87436,0
19	264309	119,7	83475		79338,0
20	314593	125,5	91696		89274,1

Рисунок 12.7 – Вид робочого листа для розрахунку регресії

3. Виконати команду **Сервис/Анализ данных**.
4. У діалоговому вікні зі списку **Инструменты анализа** вибрати інструмент **Регрессия** та натиснути кнопку **ОК**.
5. Після появи діалогового вікна **Регрессия** (рис. 12.8) потрібно:

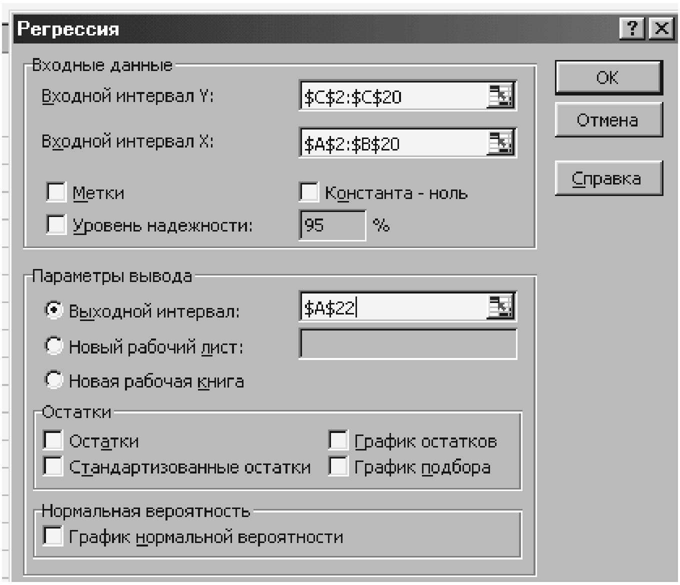


Рисунок 12.8 – Діалогове вікно інструмента **Регрессия**

1) у текстовому полі **Входной интервал Y** встановити діапазон клітинок залежної змінної **у** (для прикладу на рис. 12.7 це **C2:C20**) вводом з клавіатури або виділенням мишею цих клітинок на робочому аркуші;

2) у текстовому полі **Входной интервал X** встановити діапазон клітинок незалежних змінних (у прикладі для змінних $\mathbf{x_1}$ та $\mathbf{x_2}$ це блок **A2:B20**);
3) у полі **Уровень надежности** ввести число 95 (воно означає рівень довіри 95%);
4) перемикач **Параметры вывода** встановити в положення **Новый рабочий лист**;
5) клацнути кнопкою **ОК**.

Результати, отримані за допомогою інструмента **Регрессия**, будуть вміщувати всю потрібну інформацію (рис. 12.9).

	A	B	C	D	E	F	G
22	ВЫВОД ИТОГОВ						
23							
24	*Регрессионная статистика*						
25	Множественный R	0,958794					
26	R-квадрат	0,919287					
27	Нормированный R-квадрат	0,909197					
28	Стандартная ошибка	9339,282					
29	Наблюдения	19					
30							
31	Дисперсионный анализ						
32		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
33	Регрессия	2	15894698601	7947349300	91,11614	1,8012E-09	
34	Остаток	16	1395555112	87222194,5			
35	Итого	18	17290253713				
36							
37		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
38	Y-пересечение	64560,99	12920,47805	4,996795832	0,000132	37170,8072	91951,2
39	Переменная X 1	0,230784	0,027987318	8,246013072	3,74E-07	0,17145334	0,29011
40	Переменная X 2	-387,344	82,02450639	-4,722292941	0,00023	-561,227894	-213,46

Рисунок 12.9 – Інформація, яка видається інструментом **Регресія** для розглядаємого прикладу

У таблиці ***Регресійна статистика*** виводяться такі результати розрахунків:

- значення *множинного коефіцієнта кореляції R*, який виражає тісноту зв’язку між залежними та незалежними змінними;
- *коефіцієнт детермінації R-квадрат* (*R^2*) показує долю впливу комбінації незалежних змінних на залежну

змінну (у відносних величинах, які можна перевести у відсотки множенням на 100%);

- *нормований R-квадрат* враховує зв'язок кількості результатів спостережень і незалежних змінних та забезпечує інформацією про те, яке значення R^2 могло б бути отримано в значно більшому наборі даних, ніж аналізований; розраховується за формулою

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-m_1},$$

де n – кількість спостережень; m_1 – кількість параметрів моделі;

- *стандартна похибка* спостереження, яка характеризує варіацію залишкових величин:

$$S_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i \Big/ (n-m_1)};$$

- *спостереження* –показується їх кількість n.

У таблицях ***Дисперсійного аналізу*** показуються такі результати:

Перша таблиця:

- у першій колонці *df* означає *ступені вільності*:
  - для регресійної суми квадратів відхиленнь $df=m_1-1$;
  - для залишкової суми квадратів відхилень $df=n-m_1$;
  - для загальної суми квадратів відхилень $df=n-1$.
- у другій колонці *SS* означає:
  - *регресійна сума квадратів* відхиленнь $S_Y = \sum_{i=1}^{n}(y-\overline{y})^2$;
  - *залишкова сума квадратів* відхилень $S_e = \sum_{i=1}^{n}(y_i-y)^2$;
  - *загальна сума квадратів* відхилень $S_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$;

- у третій колонці *MS* є *середні суми квадратів* відхилень з урахуванням числа ступенів вільності:

$$MS = {SS}/{df};$$

- у четвертій колонці наведено значення F-критерія Фішера з рівнем довіри 95%;
- у п'ятій колонці наведена "*Значимість F*", яка показує, що при значенні цього показника менше 0,05 побудована регресійна модель відповідає реальній дійсності;

Друга таблиця:

- у першій колонці *Коефіцієнти* наведені значення параметрів рівняння регресії (зверху-вниз) $a_0, a_1, a_2, ...$;
- у другій колонці *Стандартна похибка* наведені середньоквадратичні відхилення параметрів моделі:

$$S_{a_j} = \sqrt{\sigma_u^2 C_{jj}},$$

де σ_u^2 - дисперсія залишків; C_{jj} - діагональний елемент матриці похибок *C* (матриця, обернена до матриці системи нормальтних рівнянь);

- у третій колонці *t-статистика* наводяться стандартизовані (нормовані) параметри рівняння регресії, які знаходяться діленням кожного фактично знайденого параметра (перша колонка) на його стандартну похибку (друга колонка);
- у четвертій колонці *P-значення* знаходяться функції, які розраховуються за такими аргументами: стандартизованними *t*-критеріями Ст'юдента, обчисленними шляхом ділення *t*-критеріїв на значення їх стандартних похибок; кількість ступенів вільності $(n-m_1)$; числами 1 або 2 (якщо між залежною та незалежними змінними існує позитивний або негативний зв'язок, то використовується число 1; якщо ж невідомо, якого зв'язку слід очикувати, то використовується число 2); в загалі, якщо $P<0,05$, то оцінки параметрів рівняння регресії є достовірними і модель відповідає реальній дійсності;
- останні колонки таблиці *Нижні 95%, Верхні 95%* вміщують нижні та верхні границі 95-відсоткового рівня довіри для кожного параметра регресії і виражають довірчі інтервали параметрів; якщо довірчі інтервали не вміщують в собі нуля, то

з 95-відсотковою упевненістю можна стверджувати, що всі незалежні змінні x_j додають рівнянню регресії значущу інформацію і можна досить точно описувати розглянутий економічний процес чи явище.

В таблиці вхідних даних (рис. 12.7) наводяться також результати регресійної статистики з розрахунку параметрів регресії (зправа-наліво): $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, **...** Для розглядаємого прикладу параметри $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ розміщені в ЕТ у клітинках відповідно **F2, E2, D2**.

Теоретичні значення залежної змінної $\hat{y} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x_1} + \boldsymbol{a_2 x_2}$ за отриманним рівнянням регресії (див. рис.12.7) обчислюються у клітинках **G2:G20**. Для цього в клітинку **G2** вноситься формула рівняння регресії:

=F$2+E$2*A2+D$2*B2

яка копіюється і вставляється в клітинки **G3:G20**.

Таким чином, рівняння множинної регресії для економетричної моделі получено у вигляді:

$$\hat{y} = 64561 + 0{,}2308x_1 - 387{,}34x_2 .$$

Приклад 2. Побудувати економетричну модель простої регресії залежності випуску готової продукції на 1 робітника (**y**) в залежності від електроозброєності праці на 1 робітника (**x**).

	A	B	C		D
	Залежність випуску готової продукції від електроозброєності праці				
1	Електроозбр. праці на 1 робіт-ника, квт-ч (***x***)	Випуск готов. продукції, тис.г.о (***y***)	Регресійна статистика		$\hat{y} = a_0 + a_1 x$
			$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_0}$	
2	2	3	0,796296	2,018519	3,611111
3	5	6			6
4	3	4			4,407407
5	7	6			7,592593
6	2	4			3,611111
7	6	8			6,796296
8	4	6			5,203704
9	9	9			9,185185
10	8	9			8,388889
11	4	5			5,203704

Рисунок 12.10 – Вид робочого листа для розрахунку парної регресії

	A	B	C	D	E	F	G
12							
13	ВЫВОД ИТОГОВ						
14							
15	*Регрессионная статистика*						
16	Множественный R	0,925212688					
17	R-квадрат	0,856018519					
18	Нормированный R-	0,838020833					
19	Стандартная ошибі	0,848473575					
20	Наблюдения	10					
21							
22	Дисперсионный анализ						
23		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
24	Регрессия	1	34,24074	34,24074	47,5627	0,00012496	
25	Остаток	8	5,759259	0,719907			
26	Итого	9	40				
27							
28		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
29	Y-пересечение	2,018518519	0,636617	3,170695	0,013181	0,55047613	3,486561
30	Переменная X 1	0,796296296	0,115463	6,896572	0,000125	0,530038825	1,062554
31							
32							

Рисунок 12.11 – Результати розрахунку для простої регресії

Теоретичні значення залежної змінної $ó$ за отриманним рівнянням регресії (див. рис. 12.10) обчислюються у клітинках **D2:D11**. Для цього в клітинку **D2** вноситься формула рівняння регресії:

=B$29+B$30*A2

яка копіюється і вставляється в клітинки **D3:D11.**

Таким чином, рівняння парної регресії для економетричної моделі получено у вигляді:

$$ó = 2{,}019 + 0{,}796õ.$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З СУТО ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ [21]

Варіант 1

1. Дайте визначення економетрії:

1) наука, що вивчає вимірність зв'язків у відповідному економічному аналізі;

2) наука, що застосовує математичні та математико-статистичні методи в економіці;

3) наука, що вивчає методи оцінювання параметрів моделей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними показниками.

2. Структуру економетричної моделі визначають:

1) незалежні змінні;

2) залежні змінні;

3) параметри.

3. Виробнича функція — це:

1) діяльність деякого підприємства, спрямована на виробництво певного виду продукції;

2) система взаємозв'язків, які встановлюються між виробничими одиницями (підрозділами підприємства) у процесі їх функціонування;

3) залежність між обсягом виробленої продукції та спожитими для цього певними ресурсами.

4. Економетрична модель є:

1) стохастичною;

2) детермінованою;

3) структурною.

5. Показник, що характеризує величину розкиду випадкової складової рівняння регресії, називається:

1) коефіцієнтом кореляції;

2) стандартною похибкою параметра;

3) стандартною похибкою рівняння.

6. Коефіцієнт детермінації визначається за формулою:

1) $R^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2}$; 2) $R^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_з)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$;

3) $R^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_з)^2}$

7. Критерій Фішера застосовується для перевірки значущості:

1) оцінок параметрів моделі;
2) економетричної моделі;
3) коефіцієнта множинної кореляції.

8. Якщо існує взаємозалежність послідовних членів часового чи просторового ряду, то маємо явище:

1) гетероскедастичності;
2) автокореляції;
3) мультиколінеарності.

9. Вимірювання зв'язку між економічними показниками з урахуванням часових зсувів виконується на основі:

1) динамічних моделей;
2) моделей розподіленого лага;
3) систем структурних рівнянь.

10. Для оцінювання параметрів систем одночасних рівнянь застосовується:

1) зважений метод найменших квадратів;
2) узагальнений метод найменших квадратів;
3) непрямий метод найменших квадратів.

Варіант 2

1. Зазначте найсуттєвішу задачу економетричного дослідження:
   1) побудова економетричних моделей;
   2) оцінка та перевірка економетричних моделей;
   3) прогнозування економічних процесів на основі економетричних моделей.

2. При побудові економетричної моделі необхідно:
   1) розглядати всі без винятку елементи, що впливають на результат процесу;
   2) виключати ті елементи, що видаються нетиповими стосовно даної проблеми;
   3) використовувати всю можливу інформацію, що стосується даного дослідження.

3. Для оцінювання параметрів економетричної моделі застосовують:
   1) закон нормального розподілу Гаусса;
   2) критерій Стьюдента;
   3) метод найменших квадратів.

4. Показник, що визначає міру зв'язку залежної змінної з усіма незалежними змінними, називається:
   1) коефіцієнтом кореляції;
   2) стандартною похибкою рівняння;
   3) коефіцієнтом детермінації.

5. Коефіцієнт детермінації обчислюється за формулою:

1) $R^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}$;   2) $R^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}$;   3) $R^2 = 1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_u^2}$

6. Критерій Фішера застосовують для перевірки значущості:

1) оцінок параметрів моделі;
2) економетричної моделі;
3) коефіцієнта кореляції.

7. Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень, то маємо явище:

1) автокореляції;
2) гетероскедастичності;
3) мультиколінеарності.

8. У разі мультиколінеарності при визначенні залежності між параметрами

1) F-критерій Фішера;
2) t-критерій Стьюдента;
3) критерій χ^2.

9. Для обгрунтування величини лага в дистрибутивно-лагових моделях застосовують:

1) кореляційну матрицю;
2) коваріаційну матрицю;
3) взаємну кореляційну функцію.

10. Системи одночасних рівнянь можуть містити:

1) регресійні та функціональні рівняння;
2) регресійні рівняння та тотожності;
3) функціональні рівняння та тотожності.

Варіант 3

1. Регресійні рівняння описують:

1) структурний зв'язок між показниками економічних процесів;
2) функціональний зв'язок між суб'єктами економічної діяльності;
3) кореляційний зв'язок між економічними показниками.

2. Екзогенні змінні:

1) визначаються як розв'язок системи рівнянь;

2) залишаються незмінними протягом усього періоду спостережень;

3) задаються за межами економетричної моделі.

3. Однією з передумов застосування методу найменших квадратів є:

1) математичне сподівання залишків моделі є сталою величиною;

2) сума залишків моделі відмінна від нуля;

3) математичне сподівання залишків моделі дорівнює нулю.

4. Показник, що визначає, яка частина руху залежної змінної описується даним регресійним рівнянням, називається:

1) коефіцієнтом детермінації;

2) коефіцієнтом кореляції;

3) оцінкою узгодженості (конкордації).

5. Коефіцієнт детермінації обчислюється за формулою:

1) $R^2 = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}}$; 2) $R^2 = \dfrac{cov^2(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}}$;

3) $R^2 = \dfrac{cov(x,y)}{var(x)var(y)}$

6. Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, то маємо явище:

1) автокореляції;

2) мультиколінеарності;

3) гомоскедастичності.

7. Наявність мультиколінеарності перевіряється за допомогою:

1) μ-критерію;
2) алгоритму Фаррара — Глобера;
3) методу Дарбіна.

8. У разі мультиколінеарності для виявлення залежної змінної від сукупності інших незалежних змінних застосовують:

1) F-критерій Фішера;
2) t-критерій Стьюдента;
3) критерій Пірсона.

9. Моделі, у яких па залежні змінні впливають значення незалежних змінних у попередні періоди, називаються:

1) динамічними;
2) дистрибутивно-лаговими;
3) структурними.

10. Для оцінювання параметрів систем одночасних рівнянь застосовують:

1) узагальнений метод найменших квадратів;
2) двокроковий метод найменших квадратів;
3) метод головних компонентів.

Варіант 4

1. Найпоширенішими функціями в економетричному моделюванні є:

1) показникові;
2) лінійні;
3) логарифмічні.

2. Економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники, називається:

1) показниковою функцією;
2) виробничою функцією;
3) моделлю розподіленого лага.

3. Оцінка параметра називається ефективною, якщо:

1) задовольняє закон великих чисел;
2) має найменшу дисперсію;
3) математичне сподівання її дорівнює значенню параметра.

4. Дисперсійно-коваріаційна матриця визначається на підставі:

1) матриці спостережень незалежних змінних;
2) матриці нормалізованих змінних моделі;
3) системи нормальних рівнянь.

5. Зв'язок між економічними характеристиками випуску продукції та спожитими для цього ресурсами визначається економіко-математичним співвідношенням:

1) $Y = \alpha(1+r)^x$;   2) $Y = \alpha F^{\alpha} L^{\beta}$;   3) $Y = e^{\alpha\beta+\gamma}$

6. Довірчі інтервали функції регресії визначаються за допомогою:

1) t-критерію Стьюдента та залишкової дисперсії;
2) стандартної похибки рівняння;
3) стандартної похибки параметрів.

7. Критерій Дарбіна-Уотсона застосовується для виявлення:

1) автокореляції;
2) гомоскедастичності;
3) мультиколінеарності.

8. За наявності гетероскедастичності параметри моделі оцінюються за:

1) умовним методом найменших квадратів:
2) узагальненим методом найменших квадратів;
3) двокроковим методом найменших квадратів.

9. Моделі, що містять лагові значення залежної змінної, називаються:

1) моделями розподіленого лага;
2) авторегресійними моделями;
3) моделями сезонних коливань.

10. Система одночасних рівнянь називається ідентифікованою, якщо:

1) параметри структурної форми моделі однозначно визначаються через параметри зведеної форми;
2) кількість змінних, виключених з кожного рівняння системи, дорівнює кількості рівнянь моделі;
3) параметри зведеної форми моделі визначаються через параметри структурної форми.

Варіант 5

1. Залежність між величинами *x* та *y* називається статистичною, якщо:

1) кожному значенню *x* відповідає лише одне значення *y,* яке обчислюється за відомою формулою;
2) змінювання однієї величини зумовлює змінювання розподілу іншої;
3) змінювання величини *x* зумовлює змінювання *y* за заданим законом.

2. Кореляційна матриця:

1) є матрицею парних коефіцієнтів кореляції;
2) характеризує щільність зв'язку всіх незалежних змінних із залежною змінною;
3) описує кореляційні зв'язки між незалежними змінними моделі.

3. Оцінка параметра називається обґрунтованою, якщо:

1) задовольняє закон великих чисел;
2) отримана за методом найменших квадратів;
3) має найменшу дисперсію.

4. Точковий прогноз - це:

1) побудова регресійної залежності за заданими точками;

2) значення залежної змінної, обчислене за моделлю при заданому значенні пояснюючих змінних;

3) визначення крайніх точок довірчого інтервалу для прогнозного значення залежної змінної.

5. Статистична значущість параметрів моделі визначається за допомогою:

1) стандартної похибки рівняння;

2) t-критерію Стьюдента;

3) F-критерію Фішера.

6. Якщо виникає явище гетероскедастичності, то оцінки параметрів моделі, отримані за 1МНК, будуть:

1) необґрунтованими;

2) зміщеними;

3) неефективними.

7. За наявності автокореляції для оцінювання параметрів застосовується:

1) непрямий метод найменших квадратів;

2) метод Фаррара — Глобера;

3) узагальнений метод найменших квадратів.

8. Для виявлення незалежної змінної, що залежить від усіх інших незалежних змінних, у разі мультиколінеарності застосовується:

1) F-критерій;

2) t-критерій;

3) критерій χ^2/

9. Умова ідентифікованості рівняння структурної форми має вигляд:

1) $k_S - 1 < m - m_S$; 2) $k_S - 1 = m - m_S$; 3) $k_S - 1 \leq m - m_S$

де k_s, m_s — відповідно кількість залежних і незалежних змінних, що входять до s-го рівняння структурної форми,

m — загальна кількість екзогенних змінних моделі.

10. Для оцінювання параметрів рекурсивних систем рівнянь застосовується:

1) метод найменших квадратів;
2) двокроковий метод найменших квадратів;
3) метод головних компонентів.

Варіант 6

1. Економетрична модель — це:

1) рівняння чи система рівнянь, що описують строгі функціональні залежності між економічними показниками;

2) функція чи система функцій, що описує кореляційно-регресійній зв'язок між економічними показниками;

3) система рівнянь і тотожностей, що описує існуючі зв'язки між показниками економічних процесів.

2. Застосування методу найменших квадратів можливе, якщо незалежні змінні:

1) містять стохастичну складову;
2) не пов'язані із залишками;
3) мають сталу дисперсію.

3. Оцінка параметра називається незміщеною, якщо:

1) задовольняє закон великих чисел;

2) математичне сподівання її не залежить від вибірки і близьке до значення параметра;

3) має найменшу дисперсію.

4. Дисперсія прогнозу для середнього значення залежної змінної обчислюється за формулою:

1) $\sigma^2 = \sigma_u^2 X_0'(X'X)^{-1} X_0$; 2) $\sigma^2 = \sigma_u \sqrt{X_0'(X'X)^{-1} X_0}$;

3) $\sigma^2 = \sqrt{\sigma_u^2 (1 + X_0'(X'X) X_0}$

5. Явище мультиколінеарності виникає, якщо:

1) існує лінійний зв'язок між незалежними змінними;

2) дисперсія залишків стала для кожного спостереження;

3) існує лінійна залежність між послідовними членами ряду залишків.

6. Критерій фон Неймана застосовується для виявлення:

1) автокореляції;
2) гетероскедастичності;
3) мультиколінеарності.

7. Кореляційна матриця обчислюється на підставі:

1) матриці спостережень незалежних змінних;
2) матриці нормалізованих змінних;
3) системи нормальних рівнянь.

8. За наявності гетероскедастичності для оцінювання параметрів застосовують метод:

1) .Дарбіна;
2) Ейткена;
3) Фаррара — Глобера.

9. Побудова моделей розподіленого лага ускладнена через наявність:

1) автокореляції;
2) мультиколінеарності;
3) гетероскедастичності.

10. Система рівнянь, розв'язана відносно ендогенних змінних, називається:

1) структурною формою моделі;
2) нормальною системою рівнянь;
3) зведеною формою моделі:

Варіант 7

1. Виробнича функція — це:

1) діяльність деякого підприємства, спрямована на виробництво певного виду продукції;
2) система взаємозв'язків, що встановлюються між виробничими одиницями (підрозділами підприємства) у процесі їх функціонування;
3) залежність між обсягом виробленої продукції та спожитими для цього певними ресурсами.

2. Незалежні змінні моделі:

1) визначаються як розв'язок рівняння чи системи рівнянь;
2) задаються за межами економетричної моделі;
3) залишаються незмінними протягом усього періоду спостереження.

3. Застосування методу найменших квадратів можливе, якщо незалежні змінні моделі утворюють:

1) систему нормальних рівнянь;
2) лінійно незалежну систему векторів;
3) однорідну систему рівнянь.

4. Коефіцієнт детермінації:

1) характеризує абсолютну величину розкиду випадкової складової рівняння;
2) показує, яка частина руху залежної змінної описується даним регресійним рівнянням;
3) визначає міру зв'язку залежної змінної з усіма незалежними факторами.

5. При визначенні загальної мультиколінеарності масиву незалежних змінних застосовують:

1) F-критерій Фішера;
2) t-критерій Стьюдента;
3) критерій Пірсона χ^2.

6. Явище гетероскедастичності виникає, якщо:

1) існує взаємозалежність послідовних членів часового ряду;
2) дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень;
3) існує лінійний зв'язок між незалежними змінними моделі.

7. Стандартна похибка рівняння обчислюється за формулою:

1) $S_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$; 2) $S_u^2 = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$; 3) $S_u = \sqrt{R^2}$.

8. Критерій Глейсера застосовується для виявлення:
1) автокореляції;
2) гетероскедастичності;
3) мультиколінеарності.

9. Якщо економетрична модель крім лагових змінних містить мінні, що характеризують поточні умови функціонування економічної системи, то маємо:
1) модель адаптивних сподівань;
2) узагальнену модель розподіленого лага;
3) модель часткового коригування.

10. Якщо рівняння структурної форми моделі надідентифіковані, то для оцінювання параметрів рівнянь застосовують:
1) непрямий МНК;.
2) двокроковий МНК;
3) трикроковий МНК.

Варіант 8

1. Залежні змінні моделі:
1) визначаються як розв'язок рівняння чи системи рівнянь;
2) змінюють свої значення залежно від періоду спостереження;
3) задаються за межами економетричної моделі.

2. Застосування методу найменших квадратів можливе, якщо виконуються передумови про відсутність:
1) автокореляції змінних;
2) автокореляції залишків;
3) гомоскедастичності.

3. Стандартна похибка рівняння:
1) показує, яка частина руху залежної змінної описується даним регресійним рівнянням;
2) характеризує величину розкиду випадкової складової рівняння;
3) визначає міру зв'язку залежної змінної з усіма незалежними факторами.

4. Мри визначенні залежності між парами незалежних змінних у разі мультиколінеарності застосовують:

1) F-критерій Фішера;
2) t-критерій Стьюдента;
3) критерій Пірсона χ^2.

5. Явище автокореляції виникає, якщо:

1) дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження;
2) існує нелінійний зв'язок між незалежними змінними;
3) існує взаємозалежність послідовних елементів ряду залишків.

6. Метод Фаррара — Глобера застосовується для виявлення:

1) автокореляції;
2) гомоскедастичності;
3) мультиколінеарності.

7. За наявності гетероскедастичності для оцінювання параметрів застосовують:

1) непрямий метод найменших квадратів;
2) умовний метод найменших квадратів;
3) узагальнений метод найменших квадратів.

8. Стандартна похибка інтервального прогнозу обчислюється за формулою:

1) $S_{їð} = \sigma_u^2 X_0'(X'X)^{-1} X_0$; 2) $S_{їð} = \sigma_u \sqrt{X_0'(X'X)^{-1} X_0}$;

3) $S_{їð} = \sqrt{\sigma_u^2 (1 + X_0'(X'X) X_0}$

9. Для оцінювання параметрів моделей розподіленого лага застосовують:

1) непрямий МНК;
2) трикроковий МНК;
3) ітераційний метод.

10. Система одночасних рівнянь називається надідентифікованою, якщо виконується умова:

1) $k_s - 1 < m - m_s$; 2) $k_S - 1 = m - m_S$; 3) $k_S - 1 \leq m - m_S$

де k_s, m_s — відповідно кількість залежних і незалежних змінних, що входять до s-го рівняння структурної форми,

m — загальна кількість екзогенних змінних моделі.

Варіант 9

1. Економіко-математичне співвідношення, що визначає в аналітичній формі зв'язок між економічними характеристиками випуску продукції та використаними для цього ресурсами, називається:
   1) структурною формою моделі;
   2) виробничою функцією;
   3) моделлю "витрати — випуск".

2. Параметри моделі:
   1) задаються за межами економетричної моделі;
   2) визначаються на основі статистичних даних;
   3) змінюються протягом усього періоду спостережень.

3. Коефіцієнт множинної кореляції:
   1) показує, яка частина руху залежної змінної описується даним регресійним рівнянням;
   2) визначає міру зв'язку залежної змінної з усіма незалежними факторами;
   3) визначає внесок кожної незалежної змінної в дисперсію результативної змінної.

4. Для перевірки значущості моделі застосовують:
   1) F- критерій Фішера;
   2) t-критерій Стьюдента;
   3) критерій Пірсона.

5. Точковий прогноз — це:

1) побудова регресійної залежності за заданими точками;

2) значення залежної змінної, обчислене за моделлю при заданому значенні пояснюючих змінних;

3) визначення крайніх точок довірчого інтервалу для прогнозного значення залежної змінної.

6. Явище гомоскедастичності має місце, якщо:

1) існує нелінійний зв'язок між незалежними змінними;

2) дисперсія залишків стала для кожного спостереження;

3) існує взаємозалежність послідовних членів часового ряду.

7. За наявності автокореляції параметри моделі оцінюються за методом:

1) найменших квадратів;

2) Ейткена,

3) Фаррара — Глобера.

8. Моделі, що містять лагові значення залежної змінної, називаються:

1) авторегресійними моделями;

2) моделями адаптивних сподівань;

3) моделями сезонних коливань.

9. Для обґрунтування величини лага в дистрибутивно-лагових моделях застосовують:

1) кореляційну матрицю;

2) коваріаційну матрицю;

3) взаємну кореляційну функцію.

10. Непрямий метод найменших квадратів застосовують при оцінюванні:

1) лагових коефіцієнтів багатофакторної моделі;

2) параметрів систем одночасних рівнянь;

3) параметрів моделей, що містять автокореляцію.

Варіант 10

1. Дайте визначення економетрії:

1) наука, що вивчає вимірність зв'язків у відповідному економічному аналізі;

2) наука, що застосовує математичні та математико-статистичні методи в економіці;

3) наука, що вивчає методи оцінювання параметрів моделей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними показниками.

2. При побудові економетричної моделі необхідно:

1) розглядати всі без винятку елементи, що впливають на результат процесу;

2) виключати елементи, ідо видаються нетиповими стосовно даної проблеми;

3) використовувати всю можливу інформацію, що стосується даного дослідження.

3. Для оцінювання параметрів економетричної моделі застосовують:

1) закон нормального розподілу Гаусса;

2) метод найменших квадратів;

3) метод виключення Жордана - Гаусса.

4. Стандартні похибки параметрів:

1) визначають внесок кожної незалежної змінної в дисперсію результативного фактора;

2) показують статистичну значущість параметрів;

3) визначають міру зв'язку кожного незалежного фактора із залежною змінною.

5. Критерій Фішера застосовують для перевірки значущості:

1) оцінок параметрів моделі;
2) економетричної моделі;
3) коефіцієнта множинної кореляції.

6. Дисперсія прогнозу обчислюється за формулою:

$$1)\ \sigma^2 = \sigma_u^2 X_0'(X'X)^{-1}X_0\ ;\ \ 2)\ \sigma^2 = \sigma_u\sqrt{X_0'(X'X)^{-1}X_0}\ ;$$
$$3)\ \sigma^2 = \sqrt{\sigma_u^2(1 + X_0'(X'X)X_0}$$

7. Якщо існує лінійний зв'язок між незалежними змінними, то це явище називається:

1) автокореляцією;
2) гомоскедастичністю;
3) мультиколінеарністю.

8. За наявності мультиколінеарності для оцінювання параметрів моделі застосовують:

1) узагальнений МНК;
2) метод головних компонентів;
3) непрямий метод найменших квадратів.

9. Ітераційний метод застосовують при оцінюванні:

1) параметрів багатофакторних моделей;
2) параметрів моделей, у яких спостерігається явище мультиколінеарності;
3) лагових коефіцієнтів багатофакторних динамічних моделей.

10. Якщо рівняння структурної форми моделі надідентифіковані, то для оцінювання параметрів рівнянь застосовують:

1) непрямий МНК;

2) двокроковий МНК;

3) узагальнений МНК.

АЛФАВІТНО-ПРЕДМЕТНИЙ ВКАЗІВНИК ТЕРМІНІВ І ПОНЯТЬ

Н

О

Т

У

Ф

Ц

Ч

Я

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. ***Айвазян С.А., Мхитарян С.В.*** Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов.-М.: ЮНИТИ, 1998. - 1022 с.
2. ***Бородич С.***А. Эконометрика: Учеб. пособие. - Минск: Новое знание, 2001. - 408 с.
3. ***Грубер Й.*** Економетрія. Том 1. Вступ до множинної регресії та економетрії: Навч. посібник. - К.: Нічлава, 1998. - 384с.
4. ***Грубер Й.*** Економетрія. Том 2. Економічні прогнозні та оптимізаційні моделі: Навч. посібник. - К.: Нічлава, 1999.-296с.
5. ***Джонсон Дж.*** Эконометрические методы. - М.: Статистика, 1980.-444 с.
6. ***Демиденко Е.З.*** Линейная и нелинейная регрессия. - М.: Финансы и статистика, 1981.-302 с.
7. ***Доугерти К.***Введение в эконометрику. Пер. с англ.-М.:ИНФРА-М, 1998.-402 с.
8. ***Єлейно В.*** Основи економетрії. - Львів: Марка Лтд, 1995. - 191 с.
9. ***Емельянов А.С.*** Эконометрия и прогнозирование. - М.: Экономика, 1985. - 352 с.
10. ***Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н***. Математические методы в экономике: Учеб. пособие. Под общ. ред. А.В.Сидоровича. - 3-е изд., перераб. - М.: Дело и сервис, 2001. - 368 с.
11. ***Кейн Э.*** Экономическая статистика и эконометрия. Введение в количественный экономический анализ. - М.: Статистика, 1997.-254с.
12. ***Корольов О.А., Рязанцева В.В.*** Практикум з економетрії: Навч. посібник. К.: ЦНТЕУ, 2000. - 249 с.
13. ***Корольов О.А.*** Економетрія: Навч. посібник. - К.: Європейський ун-т, 2002. - 660 с.
14. ***Кулинич О.І.*** Економетрія: Навч. посібник. - Хмельницький: Поділля, 1997. - 115 с.
15. ***Кулинич О.І.*** Економетрія: Практикум.-Хмельницький: Поділля, 1998.-157 с.
16. ***Кулинич Е.И***. Эконометрия: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 1999. - 304 с.
17. ***Кулян В.Р., Юнькова Е.А.*** Эконометрия: Учеб. пособие. -К: МАУП, 1997. - 68 с.
18. ***Курицкий Б.Я.*** Поиск оптимального решения средствами EXCEL 7.0. - СПб: BHV-Санкт-Петербург, 1997. - 704 с.

19. ***Ланге О***. Введение в эконометрию. - М.: Прогресс, 1964.-360 с.
20. ***Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М.*** *та ін*. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій статистиці. - К.: Інформтехнім, 1995. - 380 с.
21. ***Ліщинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О.*** Економетрія: Навч. посібник. - К.: МАУП, 2003. - 208 с.
22. ***Лугинин О.Е., Белоусова С.В., Львов М.С.*** Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие. - Херсон: МИБ, 1998. - 212 с.
23. ***Лугінін О.Є., Білоусова С.В., Білоусов О.М.*** Економетрія: Навч. посібник.-К.: ЦНЛ, 2005.-252 с.
24. ***Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І.*** Економетріка: Підручник. - К.: Товариство "Знання" КОО, 1998. - 494 с.
25. ***Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І.*** Економетріка: Практикум з використанням комп'ютера. - К.: Товариство "Знання", КОО, 1998. - 220 с.
26. ***Магнус Я.Р., Катышев П.К.***, ***Пересецкий А.А.*** Эконометрика: Учеб. пособие. - М.: Дело, 1998. - 248 с.
27. ***Маленко Э.*** Статистические методы в эконометрии. - М.: Статистика, 1975. - 423 с.
28. ***Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П***. Економетрія: Підручник. - К.: КНЕУ, 2000.- 296 с.
29. ***Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.*** Оптимальное управление системами. Пер. с англ. / Под ред. Б.Р. Левина. - М.: Радио и связь, 1992.-340 с.
30. ***Тинтнер Г.*** Введение в эконометрию.-М.: Статистика, 1965.-368 с.
31. ***Толбатов Ю.А.*** Економетрика: Підручник. - К.: Четверта хвиля, 1997. - 320 с.
32. ***Фишер Ф.*** Проблемы идентифики в эконометрии. - М.: Статистика, 1978. - 224 с.
33. ***Эддоуз М., Стэнфилд Р.*** Методы принятия решений. Пер. с англ. - М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. - 590 с.

ДОДАТКИ

СТАТИСТИЧНІ ТАБЛИЦІ

Пояснення до таблиць:

n –кількість спостережень;
m – кількість незалежних (пояснювальних) змінних;
α - рівень значимості (α=0,05; α=0,01);
(1-α) - рівень довіри (1-α=0,95; 1-α=0,99);
df_1 - число ступенів вільності чисельника *F*-критерія Фішера;
df_2 -число ступенів вільності знаменника *F*-критерія Фішера;
df – число ступенів вільності *t*-критерія Ст'юдента та критерія Пірсона χ^2;
d_L – нижня межа критерія Дарбіна-Уотсона *DW*;
d_U – верхня межа критерія Дарбіна-Уотсона *DW*
Q – критичні значення для відношення фон Неймана

Додаток А

F-критерії Фішера при α=0,05 ($F_{0,95}$)

df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19.4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5.86	5,80	5,77	5.75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5.79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4.77	4,74	4,68	4.62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4.37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4.00	3,94	3.87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3.57	3.51	3.44	3,41	3.38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3.63	3,48	3,37	3.29	3,23	3,18	3,14	3.07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2.91	2,85	2,77	2.74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2.79	2,72	2,65	2,61	2.57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2.75	2,69	2,62	2,54	2.51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,64	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,82	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2.35	3.31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2.64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2.25	2,20	2,16	2,11	2,07

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2.35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2.34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2.42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2.01	1,96	1.92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3.05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3.01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1.96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1.74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1.47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1.91	1.83	1.75	1.66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Додаток Б
t-крітерії Ст'юдента при α=0,05 ($t_{0,95}$) та α=0,01 ($t_{0,99}$)

df	$t_{0.95}$	$t_{0.99}$	*df*	$t_{0.95}$	$t_{0.99}$
1	6,314	31,821	18	1,734	2,552
2	2,920	6,965	19	1,729	2,539
3	2,353	4,541	20	1,725	2,528
4	2,132	3,747	21	1,721	2,518
5	2,015	3,365	22	1,717	2,508
6	1,943	3,143	23	1,714	2,500
7	1,895	2,998	24	1,711	2,492
8	1,860	2,896	25	1,708	2,485
9	1,833	2,821	26	1,706	2,479
10	1,812	2,764	27	1,703	2,473
11	1,796	2,718	28	1,701	2,467
12	1,782	2,681	29	1,699	2.462
13	1,771	2,650	30	1,697	2,457
14	1,761	2,624	40	1,684	2,423
15	1,753	2,602	60	1,671	2,390
16	1,746	2,583	120	1,658	2.358
17	1,740	2,567	∞	1,645	2,326

Додаток В

Критерії Пірсона χ^2 з рівнями довіри 0,95 та 0,99

$1-\alpha$ / df	**0,95**	**0,99**	$1-\alpha$ / df	**0,95**	**0,99**
1	3,84	6,63	13	22,36	27,69
2	5,99	9,21	14	23,68	29,14
3	7,81	11,34	15	25,00	30,58
4	9,49	13,28	16	26,30	32,00
5	11,07	15,09	18	28,87	34,81
6	12,59	16,81	20	31,41	37,57
7	14,07	18,48	24	36,42	42,98
8	15,51	20,09	30	43,77	50,89
9	16,92	21,67	40	55,76	63,69
10	18,31	23,21	60	79,08	88,38
11	19,68	24,73	120	146,57	158,95
12	21,03	26,22			

Додаток Г
Критичні значення критерію Дарбіна-Уотсона DW при α=0,05

n	Кількість незалежних змінних											
	m=l		m=2		m=3		m=4		m=5		m=6	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
6	0,61	1,40										
7	0,70	1,36	0,47	1,90								
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29						
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	0,30	2,59				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	0,38	2,41	0,24	2,82		
11	0,93	1,32	0,76	1,60	0,60	1,93	0,44	2,28	0,32	2,65	0,12	2,89
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	0,51	2,18	0,38	2,51	0,16	2,67
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	0,57	2,09	0,45	2,39	0,21	2,49
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	0,63	2,03	0,51	2,30	0,26	2,35
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,81	1,75	0,69	1,98	0,56	2,22	0,30	2,24
16	1,11	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,73	1,94	0,62	2,16	0,35	2,15
18	1,16	1,39	1,05	1,54	0,93	1,70	0,82	1,87	0,71	2,06	0,44	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,89	1,83	0,79	1,99	0,52	1,92
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0.86	1,94	1,57	1,85

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,65	1,04	1,77	0,95	1,89	1,68	1,78
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85	0,76	1,73
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82	0,86	1,69
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1.80	0,91	1,67
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1.34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79	1,00	1,64
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78	1,07	1,64
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77	1,12	1,64
60	1.55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77	1,21	1,64
70	1.58	1,64	1,55	1,67	1,53	1,70	1,49	1.74	1,46	1,77	1,28	1,65
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1.74	1,51	1,77	1,34	1,65
90	1,64	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1.75	1,54	1,78	1,38	1,66
100	1.65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1.76	1,57	1,78	1,42	1,67
150	1.72	1,75	1,71	1,76	1,69	1.77	1,68	1.79	1.67	1,80	1,54	1,71
200	1,76	1,78	1,75	1,79	1,74	1,80	1,73	1.81	1,72	1,82	1,61	1,74

Додаток Д

Критичні значення для відношення фон Неймана $Q = f(n, \alpha)$

Q \ n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25				0,00001	0,00001	0,00001	0,00001		0,00001
0,30				0,00007	0,00007	0,00005	0.00004	0,00002	0,00003
0,35			0,00006	0,00027	0,00021	0,00014	0,00009	0,00005	0,00007
0,40			0,00047	0,00065	0,00047	0,00031	0.00019	0.00012	0,00016
0,45			0,00126	0,00126	0,00088	0,00059	0,00038	0,00025	0,00031
0,50		0,00038	0,00246	0,00214	0,00150	0,00103	0,00069	0,00046	0,00055
0,55		0,00223	0,00409	0,00333	0,00237	0,00168	0.00116	0.00080	0,00094
0,60		0,00493	0,00615	0,00486	0,00355	0,00259	0,00185	0,00132	0,00152
0,65		0,00830	0,00865	0,00678	0,00511	0,00382	0,00282	0,00208	0,00235
0,70		0,01225	0,01161	0,00913	0,00710	0,00544	0,00414	0,00313	0,00351
0,75		0,01673	0,01505	0,01197	0,00958	0,00753	0,00587	0,00455	0,00508
0,80	0,00356	0,02171	0,01900	0,01534	0,01263	0,01015	0,00809	0,00642	0,00714
0,85	0,01302	0,02717	0,02348	0,01932	0,01631	0,01338	0,01089	0,00883	0.00980
0,90	0,02257	0,03310	0,02851	0,02403	0,02068	0,01729	0,01436	0,01188	0,01316
0,95	0,03223	0,03949	0,03412	0,02957	0,02579	0,02196	0,01858	0,01565	0,01733
1,00	0,04199	0,04634	0,04035	0,03598	0,03171	0,02745	0,02363	0,02025	0,02241
1,05	0,05186	0,05364	0,04728	0,04325	0,03849	0,03384	0,02959	0,02578	0,02852
1,10	0,06184	0,06140	0,05500	0,05137	0,04618	0,04120	0,03655	0,03232	0,03577
1,15	0,07194	0,06963	0,06361	0,06036	0,05482	0,04957	0,04458	0,03997	0,04425
1,20			0,07323	0,07020	0,06445	0,05901	0,05375	0,04882	0,05407
1,25						0,06956	0,06412	0,05894	0,06531
1,30								0,07040	

Продовження таблиці

Q	***n***						
	15	20	25	30	40	50	60
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0,35	0,00001						
0,40	0,00002						
0,45	0,00004						
0,50	0,00009	0,00001					
0,55	0,00018	0,00002					
0,60	0,00033	0,00005	0,00001				
0,65	0,00059	0,00012	0,00002				
0,70	0,00100	0,00024	0,00005	0,00001			
0,75	0,00161	0,00044	0,00011	0,00003			
0,80	0,00250	0,00076	0,00023	0,00007	0,00001		
0,85	0,00375	0,00127	0,00044	0,00015	0,00002		
0,90	0,00547	0,00206	0,00079	0,00030	0,00004	0,00001	
0,95	0,00778	0,00323	0,00135	0,00057	0,00010	0,00002	
1,00	0,01079	0,00489	0,00222	0,00102	0,00022	0,00005	0,00001
1,05	0,01465	0,00720	0,00355	0,00176	0,00044	0,00012	0,00003
1,10	0,01950	0,01033	0,00550	0,00294	0,00085	0,00026	0,00008

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8
1,15	0,02550	0,01448	0,00826	0,00474	0,00158	0,00054	0,00019
1,20	0,03280	0,01986	0,01208	0,00738	0,00280	0,00108	0,00043
1.25	0,04155	0,02670	0,01723	0,01117	0,00476	0,00206	0,00092
1,30	0,05189	0,03524	0,02402	0,01644	0,00780	0,00376	0,00185
1,35	0,06396	0,04571	0,03276	0,02357	0,01235	0,00656	0,00355
1,40	0,07787	0,05834	0,04379	0,03298	0,01892	0,01098	0,00649
1,45		0,07333	0,05743	0,04511	0,02810	0,01769	0.01133
1,50			0,07398	0,06038	0,04055	0,02750	0,01893
1,55				0,07920	0,05696	0,04131	0,03034
1,60					0,07797	0,06006	0,04675
1,65						0,08465	0,06942
1,70							0,09949

Додаток К

Критичні значення циклічного коефіцієнта автокореляції *r* при $\alpha = 0,05$

n	Додатні значення	Від'ємні значення	*n*	Додатні значення	Від'ємні значення
5	0,253	-0,753	20	0,299	-0,399
6	0,345	-0,708	25	0,276	-0,356
7	0,370	-0,674	30	0,257	-0,356
8	0,371	-0,625	35	0,242	-0,300
9	0,366	-0,593	40	0,229	-0,279
10	0,360	-0,564	50	0,208	-0,248
11	0,353	-0,539	60	0,191	-0,225
12	0,348	-0,516	70	0,178	-0,207
13	0,341	-0,497	80	0,170	-0,195
14	0,335	-0,479	90	0,161	-0,184
15	0,328	-0,462	100	0,154	-0,174

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Олег Євгенович ЛУГІНІН

ЕКОНОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів – *Б.А.Сладкевич*
Друкується в авторській редакції
Дизайн обкладинки – *Б.В. Борисов*

Підписано до друку 20.09.2007. Формат 60х84 1/16.
Друк офсетний. Гарнітура PetersburgC.
Умовн. друк. арк. 17,5
Наклад – 1000 прим.

Видавництво "Центр учбової літератури"
вул. Електриків, 23
м. Київ, 04176
тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: WWW.CUL.COM.UA

Свідоцтво ДК №2458 від 30.03.2006