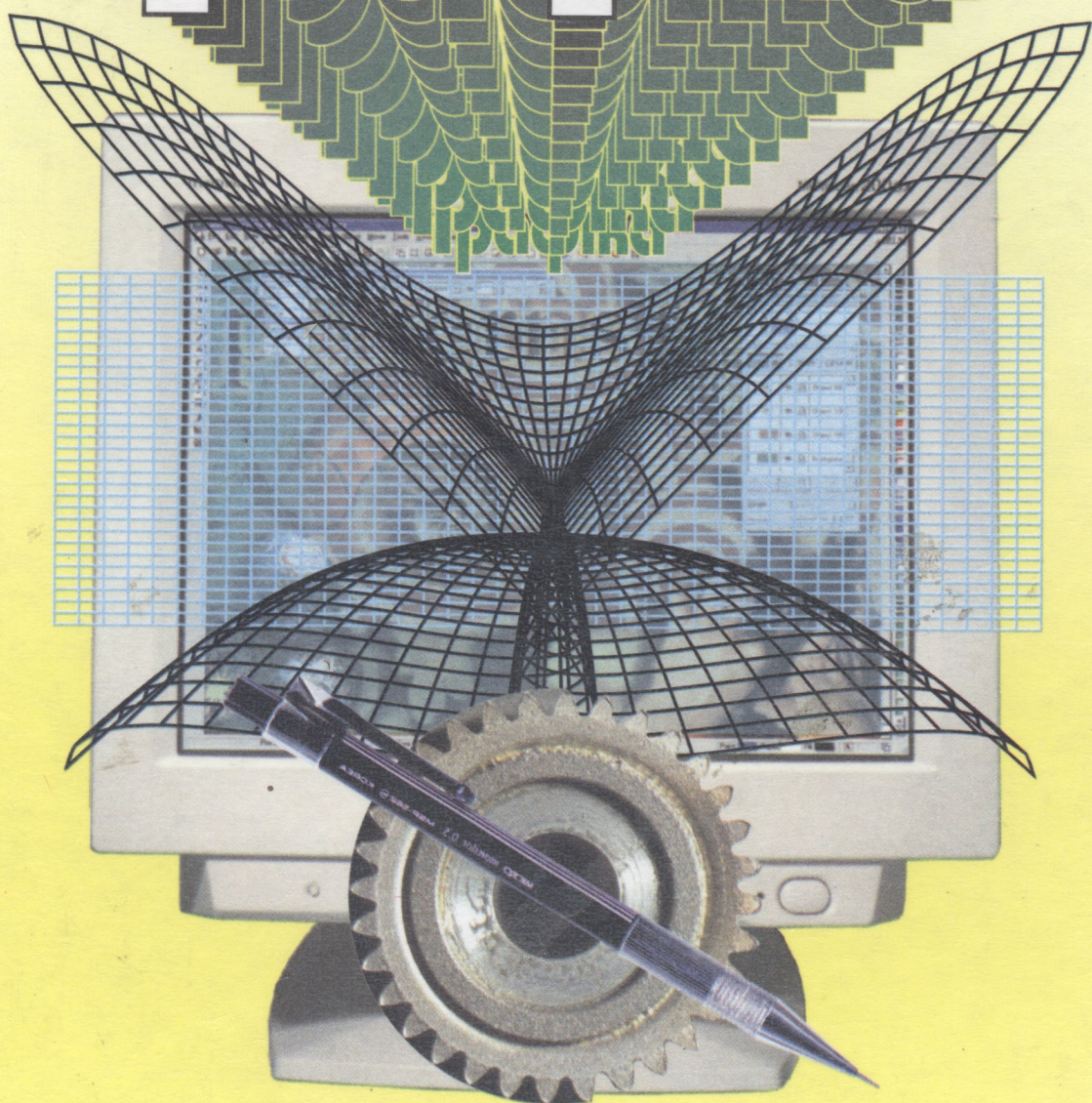


Інженерна  
та КОМП'ютерна

Графіка



3105-24

76(111)  
162

В. Є. МИХАЙЛЕНКО  
В. М. НАЙДИШ  
А. М. ПІДКОРИТОВ  
І. А. СКИДАН

# Інженерна та КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА



За редакцією заслуженого  
діяча науки України,  
доктора технічних наук,  
професора В. Є. Михайленка

*Допущено  
Міністерством освіти України*

*Підручник для студентів  
вищих закладів освіти*

Київ  
"ВИЩА ШКОЛА"  
2000

УДК 514.18:681.3.067(075.8)

ББК 30.11я73

I-62

Рецензенти: д-р пед. наук і канд. техн. наук, проф. *А. П. Верхола* (УДУХТ), канд. техн. наук, доц. *В. М. Нігора* (КТІХП), д-р техн. наук, проф. *А. В. Павлов* (НТУУ "КПІ")

Редакція літератури з фундаментальних і прикладних наук  
Редактор *Л. М. Орішч*

**Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник / В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан; За ред. В. Є. Михайленка. — К.: Вища шк., 2000. — 342 с.: іл.**  
ISBN 5-11-004746-4.

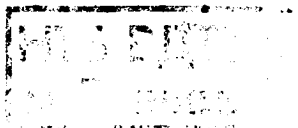
У підручнику розглянуто чотири складові курсу: "Нарисна геометрія", "Інженерна графіка", "Обчислювальна геометрія", "Комп'ютерна графіка". Особливість курсу — намагання викладення матеріалу всіх розділів відповідно до інженерної практики. Значну увагу приділено геометричному моделюванню на основі теорії параметризації.

Для студентів вищих закладів освіти.

ББК 30.11я73

ISBN 5-11-004746-4

© В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш,  
А. М. Підкоритов, І. А. Скидан, 2000



# ПЕРЕДМОВА

---



Запропонована книга — перший український підручник з інженерної та комп'ютерної графіки, який, можна сподіватися, істотно поліпшить науково-методичне забезпечення навчального процесу та сприятиме підвищенню якості підготовки майбутніх фахівців передусім з технічних спеціальностей.

За програмою в підручнику висвітлено чотири розділи курсу: "Нарисна геометрія", "Інженерна графіка", "Обчислювальна геометрія" та "Комп'ютерна графіка".

Раніше перед нарисною геометрією ставилися два основних завдання: 1) зображення тривимірних об'єктів на площині (поверхні) та 2) розв'язування за проєкційними рисунками метричних і позиційних задач, пов'язаних з тривимірними об'єктами. Зараз з'явилася можливість використати апарат нарисної геометрії як моделюючий інженерний. При цьому слід зазначити дві обставини: по-перше, студенту надається можливість самостійного конструювання, по-друге, при доборі завдань для самостійної роботи може браться до уваги майбутня спеціальність студента.

Можливість моделювання ґрунтується на методі параметризації геометричних фігур — методі М. Ф. Четверухіна.

З метою логічного переходу від нарисної до обчислювальної геометрії та комп'ютерної графіки графічні методи в окремих випадках супроводжуються аналітичним описом, що дасть можливість студентам використати знання з аналітичної геометрії в поєднанні з наочністю рисунка, тобто опанувати ефективний графоаналітичний апарат для розв'язування інженерних задач, що є математичною основою комп'ютерного проектування. Підручник містить новітні досягнення вітчизняних і зарубіжних вчених у галузі обчислювальної та прикладної геометрії. Це, зокрема, питання дискретизації, інтерполяції та апроксимації кривих ліній і поверхонь, а також формування дискретних каркасів поверхонь.

Кожна глава закінчується запитаннями та завданнями для самоконтролю, що дає змогу користуватися цим підручником не тільки при денній, а й при заочній формі навчання.

Зміст підручника ґрунтується на матеріалах багаторічного передового досвіду викладання графічних дисциплін у вищих закладах освіти України.

Матеріал підручника розподілено між авторами так: професор В. Є. Михайленко підготував "Передмову" та розд. I, професор В. М. Найдиш — розд. II, професор А. М. Підкоритов — розд. IV, професор І. А. Скидан — розд. III.

Автори висловлюють вдячність рецензентам за вагомий внесок щодо поліпшення якості підручника.

Перше видання цього підручника може мати певні недоліки, тому автори будуть вдячні за пропозиції щодо його поліпшення, які слід надсилати безпосередньо авторам.



# УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ



- $A, B, C, D, E, F, \dots, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  — точки  
 $a, b, c, d, e, \dots$  — прямі та криві лінії  
 $h$  — горизонталь  
 $f$  — фронталь  
 $p$  — профільна пряма  
 $\theta, \Lambda, \Sigma, \Gamma, \Phi, \Omega$  — поверхні (площини)  
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  — кути  
 $\Pi_1$  — горизонтальна площина проєкцій  
 $\Pi_2$  — фронтальна площина проєкцій  
 $\Pi_3$  — профільна площина проєкцій  
 $K$  — бісекторна площина четвертої та другої чвертей простору  
 $A \in \Phi$  — точка  $A$  належить фігурі  $\Phi$   
 $A \notin \Phi$  — точка  $A$  не належить фігурі  $\Phi$   
 $\Phi_k \subset \Phi$  — фігура  $\Phi_k$  — підмножина фігури  $\Phi$   
 $\Phi_k \not\subset \Phi$  — фігура  $\Phi_k$  не є підмножиною фігури  $\Phi$   
 $\Phi_k \equiv \Phi_i$  — фігури  $\Phi_k$  та  $\Phi_i$  збігаються  
 $\Phi_k \not\equiv \Phi_i$  — фігури  $\Phi_k$  та  $\Phi_i$  не збігаються  
 $\Phi_k \cup \Phi_i$  — об'єднання фігур  $\Phi_k$  та  $\Phi_i$   
 $\Phi_k \cap \Phi_i$  — перетин фігур  $\Phi_k$  та  $\Phi_i$   
 $\parallel$  — паралельно  
 $\nparallel$  — непаралельно  
 $\perp$  — перпендикулярно  
 $\div$  — мимобіжність прямих  
 $\sphericalangle$  — плоский або двогранний кут  
 $x, y, z$  — осі проєкцій. Індекси при  $x, y, z$  означають відповідні площини проєкцій. Наприклад, вісь  $x_{12}$  означає, що вісь  $x$  поділяє поле горизонтальних проєкцій (індекс 1) і поле фронтальних проєкцій (індекс 2). Позначення проєкцій фігур таке саме, як і написання відповідного індексу.

# Розділ I

## НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ.

### ПРЯМОКУТНІ ПРОЕКЦІЇ ТА АКСОНОМЕТРІЯ

---



#### Глава 1

### ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

#### 1.1. Предмет нарисної геометрії та комп'ютерної графіки. Зображення як геометрична модель простору

*Інженерна графіка* — це дисципліна, яка складається з двох дисциплін: нарисної геометрії та технічного креслення.

*Нарисна геометрія* є розділом геометрії, в якому вивчають способи подання просторових фігур або оригіналів за допомогою їхніх зображень (графічних моделей) на площині чи на поверхні.

Предметом нарисної геометрії є розробка методів побудови та читання креслень, способів розв'язування за допомогою креслень геометричних задач, методів геометричного моделювання, тобто створення проєкцій об'єкта, який відповідав би наперед заданим геометричним та іншим вимогам, а також побудова зображень предметів та об'єктів деякої конкретної галузі інженерної діяльності. Для розв'язування інженерних задач методами геометричного моделювання в різних галузях науки й техніки методи нарисної геометрії мають бути доповнені методами *обчислювальної геометрії*, що лежить в основі комп'ютерної графіки. У свою чергу, методи обчислювальної геометрії ґрунтуються на досягненні окремих математичних наук.

*Комп'ютерна графіка* — це сукупність технічних, програмних, мовних засобів і методів зв'язку користувача з ЕОМ на рівні зорових образів при розв'язуванні різних задач.

Для відтворення форми, розмірів об'єктів та положення їх у просторі з метою ство-

рення оригіналу за його проєкціями застосовують геометричні моделі. При цьому велику роль відіграє теорія параметризації, яка розглядає задання форми та положення геометричної фігури за допомогою набору даних або умов.

Новітні сучасні технології передбачають знання багатьох нових питань, методів та задач, зокрема застосування складних кривих поверхонь. Це сприяло вивченню та конструюванню цих поверхонь каркасно-параметричним, каркасно-кінематичним та іншими методами, в яких додатково використовується апарат аналітичної та диференціальної геометрії.

Комп'ютеризація різних галузей народного господарства, широке використання електронно-обчислювальної техніки, дисплеїв та графопобудовників показали принципіальну можливість виконання графічних зображень за допомогою персональних комп'ютерів.

Зараз уже стало очевидним, що комп'ютерна графіка може розвиватися на основі широкого використання законів та правил нарисної геометрії, інженерної графіки та обчислювальної геометрії.

#### 1.2. Короткий історичний огляд

Перші рисунки, близькі до сучасних прямокутних проєкцій, трапляються вже на стінах давніх храмів і палаців Єгипту та Ассирії. За часів Стародавньої Греції та Риму для побудови зображень також використовувалися прямокутні та центральні проєкції на одну площину. Зодчі Київської

Русі створили такі всесвітньо відомі пам'ятки архітектури, як Софію Київську, Золоті Ворота, які й зараз викликають захоплення. Правила будівництва були викладені в "Будівельному статуті" та в Руській Правді (1020 р.) Ярослава Мудрого. Там же були наведені зображення, побудовані за проєкційним принципом.

Новий період розвитку нарисної геометрії починається в епоху Ренесансу, коли з розквітом архітектури та живопису особливого значення набуває перспектива.

У Росії плани Пскова (XV ст.) та Москви (XVII ст.) свідчать про те, що вже тоді було уявлення не тільки про способи виконання фасадів та планів, а й про аксонометрію.

Креслень зодчих Київської Русі не збереглося, хоч є підстави вважати, що майстри користувалися схематичними рисунками. Винятковий інтерес становить креслення будови, виконане гострим предметом на лесовому ґрунті біля Десятинної церкви в Києві.

Окремі види проєкцій використовувалися в техніці до кінця XVIII ст., коли в 1799 р. з'явилася знаменита "Geometrie descriptive" Гаспара Монжа (1746—1818). У цій геометрії окремі прямокутні проєкції на вертикальні та горизонтальні площини були зведені в єдину систему. В Росії перший курс нарисної геометрії був прочитаний у 1810 р. в інституті (корпусі) інженерів шляхів сполучення учнем Монжа інженером К. І. Потьє. В 1821 р. вийшов перший російський підручник з нарисної геометрії Я. О. Севастьянова (1796—1849). У ньому було вміщено велику кількість задач прикладного характеру. Схему курсу Я. О. Севастьянова використав М. І. Макаров (1824—1904), а вдосконалив її В. І. Курдюмов (1853—1904). Послідовниками цього курсу були професори М. О. Ринін (1877—1942) та О. І. Добряков (1895—1947).

Новий етап розвитку нарисної геометрії та інженерної графіки почався в 40-ві роки ХХ ст., коли в Москві професор М. Ф. Четверухін (1891—1974), а в Києві професор С. М. Колотов (1880—1965) опублікували ряд наукових праць, які започаткували систематичні наукові та науково-методичні дослідження в цій галузі знань.

Професор І. І. Котов (1909—1976) перший застосував апарат нарисної геометрії до розв'язування прикладних задач у різних галу-

зях техніки. Він розробив також основні принципи застосування ЕОМ у курсі нарисної геометрії, заснувавши московський семінар "Кібернетика графіки". У результаті діяльності цього семінару, а також завдяки активній праці передових кафедр України та Росії усталився етап розвитку нарисної геометрії, який можна назвати етапом геометричного моделювання, або інженерної геометрії, коли за наперед заданими умовами та вимогами формуються оптимальні геометричні моделі майбутнього виробу.

### 1.3. Геометричні фігури. Геометричний простір. Відображення

Довільну множину точок називають *геометричною фігурою*. Геометричних фігур дуже багато, але основними є три: точка, пряма, площина. Між основними фігурами існують різні співвідношення, які можна визначити словами: належати, бути паралельними, міститися "між", бути конгруентними. Три співвідношення характеризують позиційні властивості геометричних фігур, а вираз "бути конгруентним" означає метричну властивість.

Позиційна властивість визначає розміщення геометричних фігур на площині та в просторі на основі взаємної належності (інцидентності) одних фігур до інших або якщо такої належності немає. Належність може бути повною (наприклад, пряма лежить у площині), частковою (пряма перетинається з площиною в точці) або її може не бути взагалі (дві мимобіжні прямі).

Метричні властивості пов'язуються з визначенням метричних характеристик (розмірів) відстаней, кутів та площ.

Залежно від характеру властивостей розрізняють позиційні та метричні задачі.

Основою нарисної геометрії є метод проєкцій, який дає змогу діставати зображення просторових фігур на площині чи поверхні. Якщо взяти в просторі довільну точку  $S$  і сполучити її прямими з іншими точками простору, то дістанемо в'язку прямих. Точку  $S$  називають *центром*. Якщо центр задано, то через нього та кожную точку простору можна провести єдину пряму, яку називають *проєкціовальним променем*. Перетин проєкціовального променя з площиною проєкцій дає проєкцію точки.

# 1.4. Метод проєкціювання. Центральне та паралельне проєкціювання. Основні властивості

Для центрального та паралельного проєкціювання характерна прямолінійність проєкційвальних ліній, які у своїй сукупності утворюють в'язки. Центр в'язки — точка  $S$  може бути власною (при центральному проєкціюванні) та невласною (при паралельному проєкціюванні).

Якщо в просторі визначити об'єкт проєкціювання, наприклад кілька точок, задати центр проєкціювання  $S$  та площину проєкцій, то проєкціями заданих точок є точки перетину проєкційвальних променів, що проходять через відповідні точки, з площиною проєкцій (рис. 1.1, *a...в*). При невла-

ному центрі проєкціювання, заданому напрямом  $S_\infty$ , проєкційвальні промені паралельні між собою, а з площиною проєкцій вони можуть утворювати гострі чи прямі кути. Залежно від цього розрізняють косокутне та прямокутне проєкціювання.

За способом проєкціювання проєкції називають центральними, косокутними чи прямокутними. Ці проєкції характеризуються певними властивостями.

Проєкцією прямої в загальному випадку є пряма, що проходить через точку її перетину з площиною проєкцій. Якщо задано проєкції хоча б двох точок прямої, то можна визначити проєкцію всієї прямої (рис. 1.2, *a*). Якщо пряма паралельна площині, то її центральна та паралельна проєкції паралельні цій прямій (рис. 1.2, *б*).

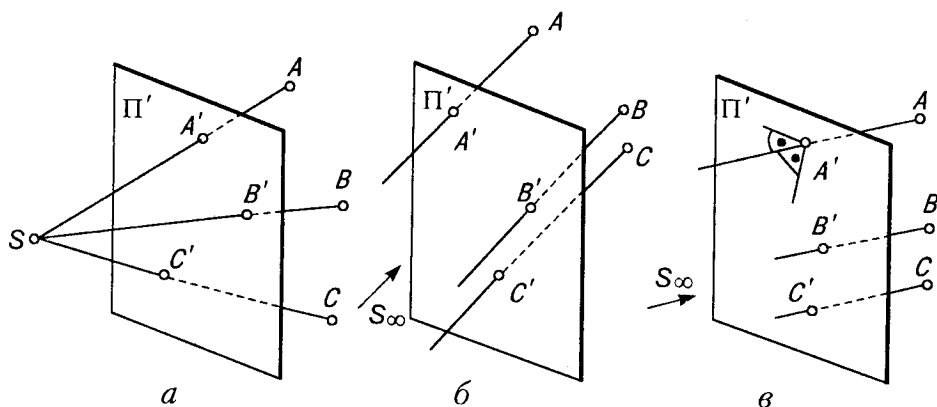


Рис. 1.1

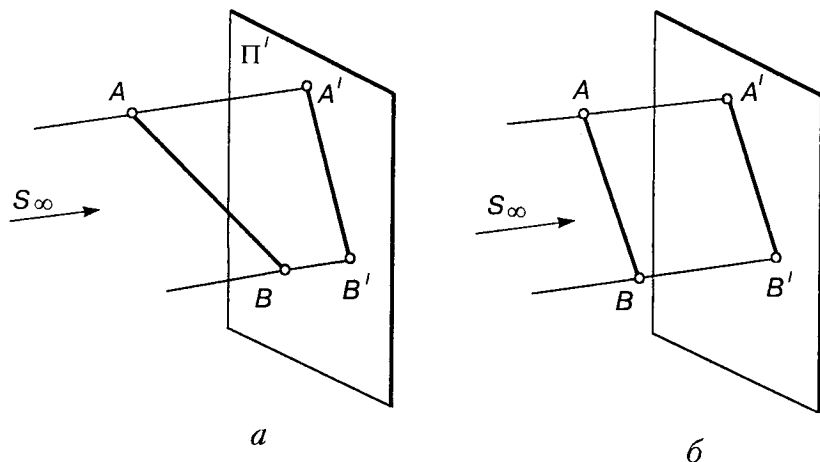


Рис. 1.2



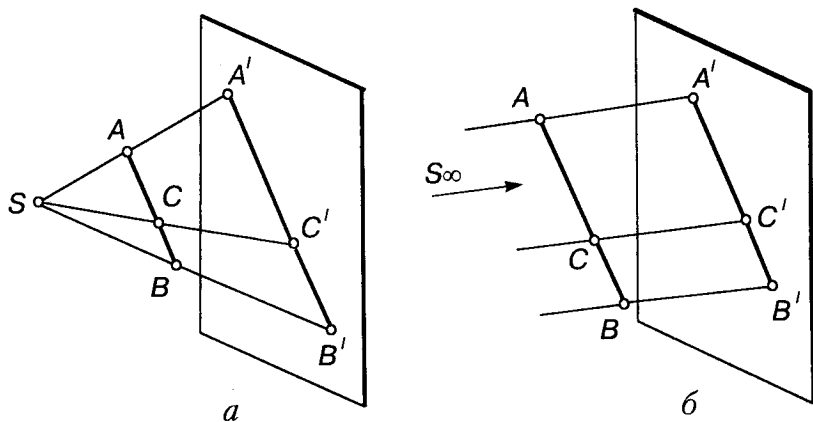


Рис. 1.3

Якщо на відрізку прямої, паралельної площині проєкцій, задати точку, що лежить між даними точками, то проєкції утворених відрізків при центральному проєкціюванні будуть пропорційні до заданих (рис. 1.3, а), а при паралельному — дорівнюватимуть їм (рис. 1.3, б).

Згідно з рис. 1.3 при паралельному проєкціюванні відношення довжин відрізків прямої та їхніх проєкцій зберігається:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Це відношення називають *простим відношенням трьох точок*. Воно є інваріантом (незмінною властивістю) паралельного проєкціювання. Отже, при паралельному проєкціюванні відношення проєкцій відрізків паралельних прямих заданого напрямку до дійсних довжин відрізків є сталою величиною. Цю величину називають *коефіцієнтом спотворення* відрізків заданого напрямку.

Якщо задано центр проєкціювання та площину проєкцій, то проєкція точки простору визначається однозначно — це точка перетину проєкціювального променя з площиною проєкцій. Обернена задача (визначення точки в просторі за її проєкцією) є неоднозначною, бо в одній ту саму точку на площині проєкцій проєкціюється безліч точок, що належать проєкціювальному променю. Так само за однією проєкцією геометричної фігури, що складається з безлічі точок, не можна

визначити її форму та положення в просторі.

Візьмемо дві довільні площини проєкцій  $\Pi'$  і  $\Pi''$  та два центри проєкціювання  $T$  і  $S$  (рис. 1.4). Спроекціюємо точку  $A$  з цих центрів на дані площини. Дістанемо проєкції  $A'$  і  $A''$ . Тепер, коли відомий апарат проєкціювання, тобто дві площини проєкцій та два центри проєкціювання, можна розв'язати обернену задачу. Для цього проведемо два проєкціювальні промені через точки  $A'$  і  $A''$ . Ці промені лежать в одній площині  $\Lambda$ , що за-

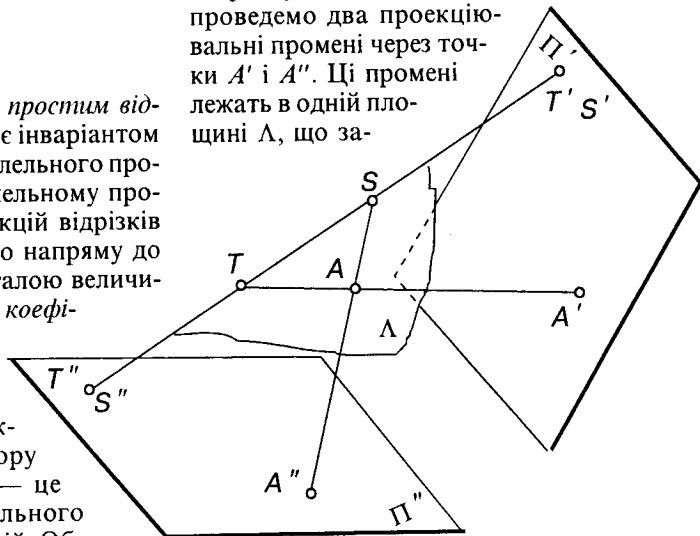


Рис. 1.4

дається точками  $A'$ ,  $A''$  і точкою перетину їх  $A$ . Отже, точка  $A$  є шуканою.

Таким чином, зображення, побудовані на двох площинах проєкцій з двох центрів, задають оборотну проєкційну модель.

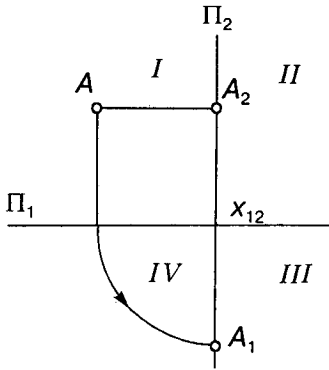


Рис. 1.5

Іншими словами, кожній точці в тривимірному просторі відповідає пара точок на двох площинах проєкцій. Аналогічні результати можна дістати, якщо площини  $\Pi'$  і  $\Pi''$  збігаються, тобто за умови однієї площини проєкцій та двох центрів.

Залежно від положення площин проєкцій та центрів проєкціювання можна діставати різні проєкційно-зображувальні системи. Найбільш поширеною системою в техніці є система прямокутних проєкцій, або *метод Монжа*. За цим методом площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  взаємно перпендикулярні, а центри проєкціювання віддалені в нескінченність у напрямі, перпендикулярному до площин проєкцій. Сукупність кількох зв'язаних між собою проєкцій фігури (мінімум двох) називають *системою прямокутних (ортогональних) проєкцій*.

На рис. 1.5 площини проєкцій показано збоку у напрямі лінії їх перетину  $x_{12}$ . Необмежені площини проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  поділяють тривимірний простір на чотири чверті (I—IV).

Щоб побудувати проєкції точки на одній площині, суміщеній з площиною рисунка, досить горизонтальну площину проєкцій  $\Pi_1$  сумістити з фронтальною площиною проєкцій  $\Pi_2$  обертанням навколо їхньої лінії перетину  $x_{12}$ . Існує й інший спосіб побудови горизонтальної проєкції. Треба провести бісекторну площину  $K$  між площинами  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Точка  $A$  проєкціюється спочатку у вертикальному напрямі на цю площину, а потім на фронтальну площину у напрямі, перпендикулярному до неї (рис. 1.6).

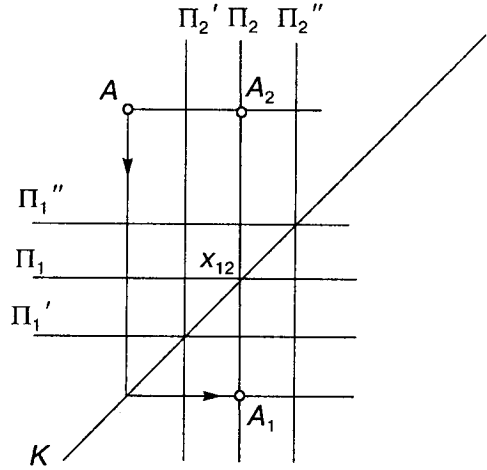


Рис. 1.6

Оскільки положення осі  $x_{12}$  не впливає на проєкції об'єкта, то на багатьох рисунках цього підручника осі  $x_{12}$  немає. Ця вісь стає необхідною при розв'язуванні задач інженерної графіки за допомогою ЕОМ на основі комп'ютерних алгоритмів, бо при цьому зображення слід задавати в координатній системі. Нанесення всіх трьох координатних осей на рисунок стане необхідним з розвитком систем комп'ютерної графіки.

### 1.5. Координатний метод. Проекційно-зображувальні системи: прямокутні проєкції, аксонометрія

*Прямокутні проєкції* відзначаються точністю та однозначністю зображення. Проте вони не мають достатньої наочності, яка в ряді випадків, особливо при зображенні складних об'єктів, є вирішальною. Тому застосовують аксонометричні або перспективні зображення.

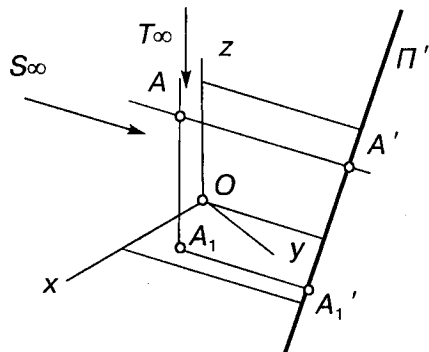


Рис. 1.7

**АксонOMETричне зображення** — це наочне зображення об'єкта, пов'язане з прямокутною системою координат. При цьому зображуваний об'єкт разом із системою координат проєкціюється на площину аксонOMETричних проєкцій. Залежно від положення координатних осей щодо цієї площини, а також від кута, що утворюється між напрямом проєкціювання та площиною аксонOMETричних

проєкцій, використовуються різні аксонOMETричні системи, які розглядаються нижче. Схему побудови аксонOMETричних проєкцій показано на рис. 1.7. Тут точка  $A$  віднесена до прямокутної декартової системи координат шляхом побудови її вторинної проєкції на площину  $xOy$ . Точка разом з системою координат проєкціюється в напрямі  $S_\infty$  на площину аксонOMETричних проєкцій  $\Pi'$ .

### Запитання та завдання

1. Що таке геометрична модель об'єкта? Які її особливості?
2. Що називають геометричним простором?
3. Який метод є основою нарисної геометрії?
4. Чому одне зображення об'єкта не дає уявлення про його форму та розміри?
5. Який основний недолік системи прямокутних проєкцій (методу Монжа)?



## Глава 2 ПРЯМОКУТНІ ПРОЄКЦІЇ ОСНОВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Як уже відомо, точка, пряма та площина є основними (непохідними) геометричними фігурами. Більш складні геометричні фігури та тіла можуть бути утворені з основних. Пряма та площина можуть мати як загальне положення, так і окреме (бути паралельними або перпендикулярними до площин проєкцій). Загальне чи окреме положення площин визначається їхніми прямокутними проєкціями.

### 2.1. Параметризація основних геометричних фігур

**Параметром** (від гр. — “відмірювальний”) називають незалежну величину, за допомогою якої в геометричних задачах виділяють певну фігуру (підмножину) з множини фігур, яка відповідає її означенню. Процес вибору та підрахунку числа параметрів називають **параметризацією**.

Так, для виділення трикутника заданої форми з множини трикутників досить задати три числа (три сторони, одну сторону та два кути тощо). При цьому треба враховувати область існування параметрів.

Щодо трикутника, то сума будь-яких двох сторін має бути більшою від третьої, жодна з сторін не може дорівнювати нулю.

Для оцінки параметрів слід прийняти зафіксовану систему віднесення. В нарисній геометрії такою системою є прямокутна декартова система координат, яка визначає тривимірний простір  $R^3$ .

Розглянемо в тривимірному просторі множини основних геометричних фігур. Як відомо, в просторі  $R^3$  (рис. 2.1, *a, б*) положення довільної точки визначається трьома координатами —  $x, y, z$ . Отже, множина точок у тривимірному просторі є трипараметричною, тобто  $\infty^3$ .

Прирівнюючи до нуля значення однієї з координат, дістанемо відповідну площину проєкцій. Зокрема, якщо  $z = 0$ , то матимемо горизонтальну площину  $xOy$  (поле) проєкцій. У площині кожна точка визначається вже двома координатами. Отже, множина точок у площині є двопараметричною, тобто  $\infty^2$ .

Розглянемо множину прямих у просторі  $R^3$ . Як відомо, для задання прямої загального положення в аксонOMETрії та прямо-

кутних проекціях треба мати чотири параметри: по дві координати на двох площинах проекцій (рис. 2.2, а, б). Таким чином, множина прямих у тривимірному просторі є чотирипараметричною, тобто  $\infty^4$ .

Якщо у тривимірному просторі розглянути площину, то легко переконалися, що для задання площини загального положення досить трьох параметрів. На рис. 2.3, а подано аксонометричне зображення площини загального положення, заданої трьома точками її перетину з координатними осями, а на рис. 2.3, б показано площину в прямокутних проекціях.

В інженерній та комп'ютерній графіці роль параметрів можуть виконувати розміри. Параметрам також можуть бути еквівалентні такі геометричні умови, як належність, паралельність, перпендикулярність або дотик.

Розглянемо, наприклад, паралельні прямі на площині. Всього на площині є  $\infty^2$  прямих, а прямих, що задовольняють умову паралельності заданій прямій, є  $\infty^1$ . Таким чином,  $\frac{\infty^2}{\infty^1} = \infty^1$ , тобто умова паралельності на площині замінює один параметр. Геометричні умови можуть виражатися як графічно, так і словами.

Розрізняють параметри форми та параметри положення. Параметри форми дають змогу з множини фігур виділити підмножину конгруентних фігур (наприклад, квадрат за даною стороною). Визначення параметрів форми називають *внутрішньою параметризацією*. При цьому положення фігури в просторі до уваги не беруть. Позначимо число параметрів форми через  $P$ . Точка, пряма й площина не мають параметрів форми і називаються *елементарними фігурами*.

Параметри положення визначають положення фігури в просторі. Визначення параметрів положення та підрахунок їх називають *зовнішньою параметризацією*. Число параметрів положення становить  $Q$ .

Суму параметрів форми та параметрів положення називають *параметричним числом*:

$$P + Q = E.$$

Розглянемо параметри положення на площині та в просторі. На площині (рис. 2.4, а)

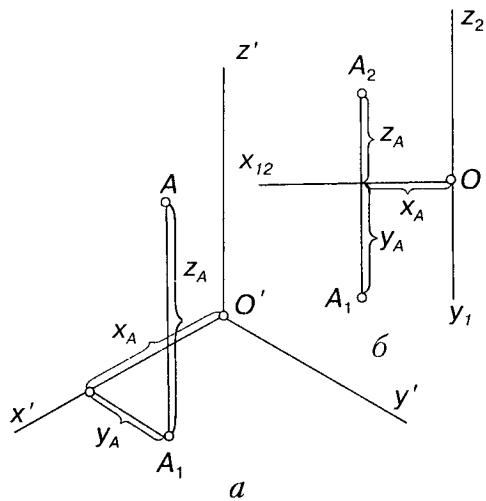


Рис. 2.1

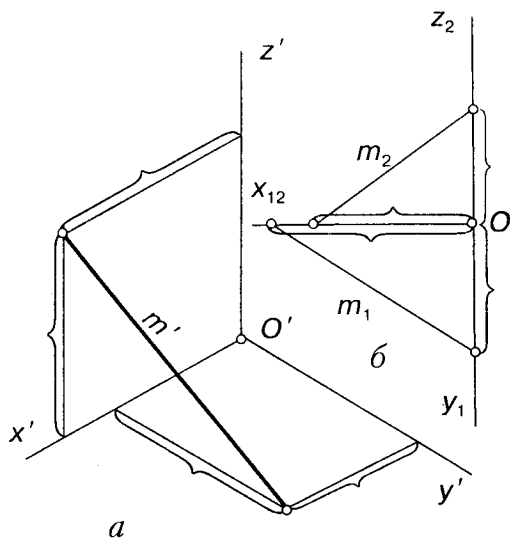


Рис. 2.2

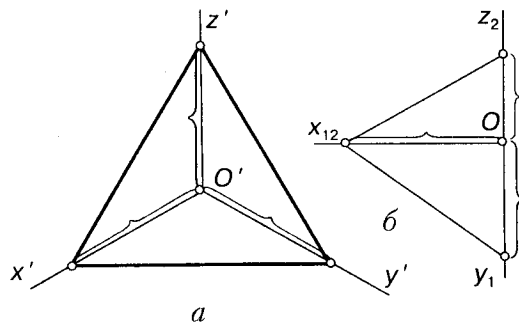
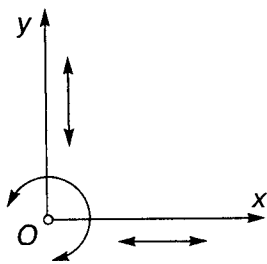
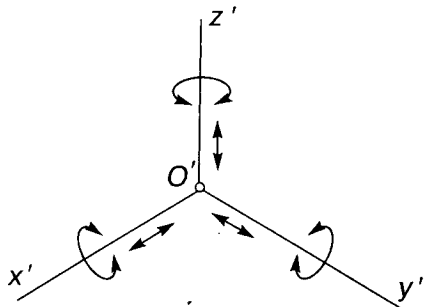


Рис. 2.3





a



б

Рис. 2.4

можливі три параметри положення: рух уздовж осей та поворот навколо початку координат. У тривимірному просторі параметрів положення, або ступенів вільності, шість — рух уздовж трьох координатних осей та поворот навколо них (рис. 2.4, б). Число цих параметрів максимальне.

Як відомо, число параметрів, що визначають пряму загального положення в просторі, — чотири. Якщо пряма паралельна площині проєкції, то ця умова еквівалентна одному параметру, вільними залишаються три параметри. Якщо пряма перпендикулярна до площини проєкції, то ця умова еквівалентна двом параметрам, отже треба задати ще два параметри.

Розглянемо деякі приклади. Пряма на площині задається двома параметрами, наприклад, точками перетину з осями координат. Для визначення на цій прямій відрізка  $AB$  необхідні вже чотири параметри (координати кінців відрізка). З цих чотирьох параметрів три є параметрами положення (дві координати точки  $A$  та кут між прямою та віссю  $Ox$ ), а один — параметром форми (довжина відрізка). Трикутник на площині задається трьома параметра-

ми — довжинами трьох сторін. У тривимірному просторі відрізок прямої задається шістьма параметрами, оскільки чотири параметрами задається пряма, а двома параметрами — кінці відрізка. З шести параметрів п'ять є параметрами положення (три координати точки  $A$  та два кути, утворені прямою з двома осями координат), а один — параметром форми (довжина відрізка).

## 2.2. Проєкції точки

Проєкцією точки є точка. При двох напрямках проєкціювання, які вибрано в системі прямокутних проєкцій, точка зображується парою точок. Винятком є точки, що належать осі  $x_{12}$ , оскільки їхні проєкції збігаються (рис. 2.5). Проєкції точки мають таку властивість: фронтальна та горизонтальна проєкції точки належать одній вертикальній лінії сполучення. Площини проєкцій несуть інформацію про параметри положення точки, а саме: відстань від горизонтальної проєкції точки до осі  $x_{12}$  є її ординатою, а відстань від фронтальної проєкції до цієї самої осі є абсцисою точки.

Рисунок, що містить проєкції на двох полях проєкцій, є позиційно повним та метрично визначеним; він визначає форму та розміри зображуваної фігури. Проте, оскільки просторова фігура є тривимірною, а також у зв'язку з тим, що за двома зображеннями не завжди просто визначити конструкцію складного об'єкта, то доцільно крім двох основних проєкцій давати ще проєкцію на третю площину. За таку площину (поле проєкцій) часто беруть про-

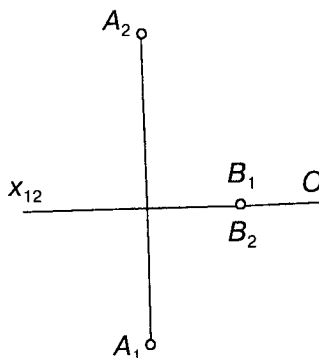


Рис. 2.5

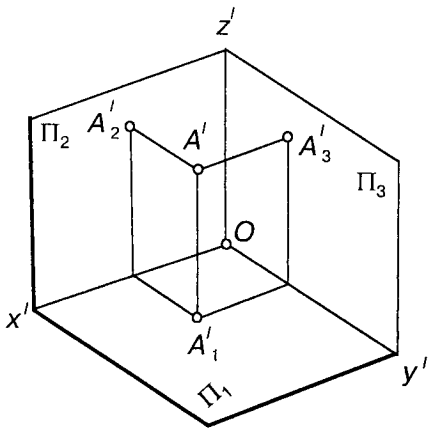


Рис. 2.6

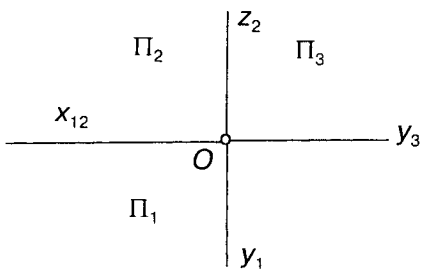


Рис. 2.7

фільну площину проєкцій  $\Pi_3$ , перпендикулярну до  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  (рис. 2.6), і тому третю проєкцію називають *профільною*. Відстань від точки до площини  $\Pi_3$  є її абсцисою.

При побудові системи з трьох прямокутних проєкцій площину  $\Pi_2$  вважають нерухомою, а площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_3$  суміщують з нею обертанням навколо осей  $x_{12}$  та  $z_{23}$  відповідно.

Площини (поля) проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$ , перетинаючись по трьох лініях, задають просторову декартову систему координат (рис. 2.7). Точка  $O$  є початком координат, вісь  $x$  — віссю абсцис, вісь  $y$  — віссю ординат, вісь  $z$  — віссю аплікат.

Площини проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ , продовжені за вісь абсцис, поділяють тривимірний простір на чотири чверті. Якщо точка  $A$  лежить у I чверті простору, то її горизонтальна проєкція лежить нижче, а фронтальна — вище від осі  $x_{12}$ . Різні положення проєкцій точок, що лежать у I, II, III та IV чвертях простору, показано на рис. 2.8. Точка  $B$  лежить у II чверті, точка  $C$  — у III, точка

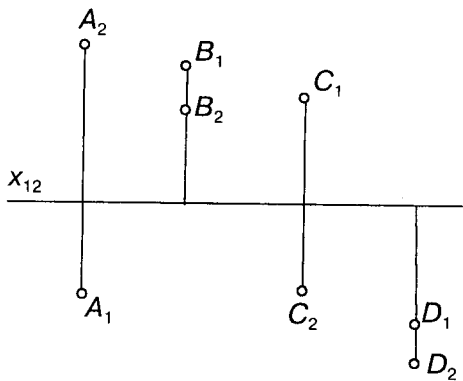


Рис. 2.8

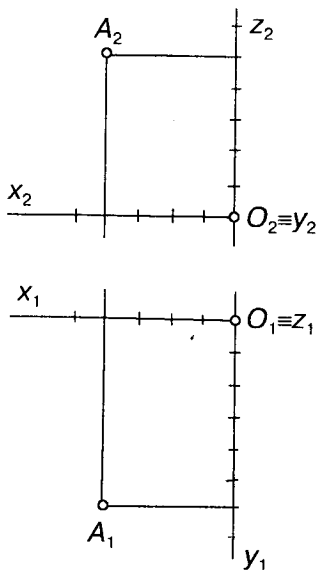


Рис. 2.9

$D$  — у IV. Надалі міркування стосуватимуться I чверті, де всі координати додатні.

Якщо задано три прямокутні декартові координати точки, то легко побудувати її прямокутні проєкції. На рис. 2.9 показано дві прямокутні проєкції точки  $A$  з координатами 4, 6, 5. Додатні значення координат відкладають від початку координат відповідно по осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

### 2.3. Проєкції прямої

Пряму в геометрії розглядають як множину точок. Проєкціями прямої є, як правило, також прямі. У системі площин  $\Pi_1$

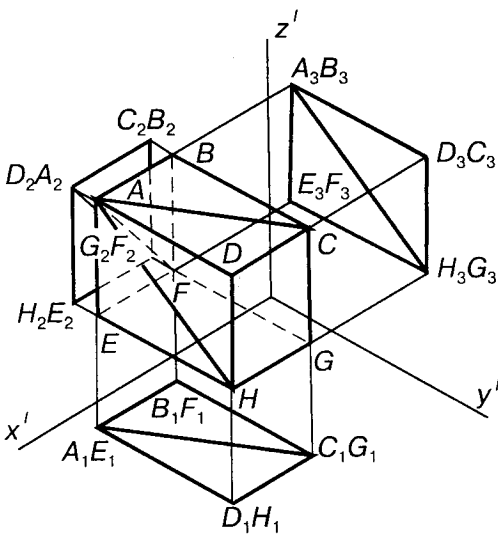


Рис. 2.10

і  $\Pi_2$  пряму загального положення (не паралельна жодній з площин проєкцій) зображують двома прямими, кожна з яких задають двома параметрами, а отже, — всього чотирма.

Перетин прямої з площинами проєкцій називають *слідами прямої*. Перетин прямої з площиною  $\Pi_1$  називають *горизонтальним слідом*. Якщо пряма паралельна площині проєкції, то відрізок прямої зображується на одній з площин проєкцій в натуральну величину; якщо пряма перпендикулярна до площини проєкції, то вона проєкціюється в точку. Прямі, паралельні площинам проєкцій, називають *лініями рівня*. Прямі, перпендикулярні до площин проєкцій, називають

проекціювальними:  $AE$  — горизонтально проєкціювальна,  $AD$  — фронтально проєкціювальна,  $AB$  — профільно проєкціювальна (рис. 2.10, 2.11).

Точки, що належать (інцидентні) одній проєкціювальній прямій, називають *конкуруючими*. На одному з полів проєкцій їхні проєкції збігаються (рис. 2.12). За допомогою таких точок визначають видність геометричних фігур на рисунку в прямокутних проєкціях. Далі буде показано, як використовують конкуруючі точки при визначенні видності геометричних фігур.

Візьмемо в декартовій системі координат дві точки  $M(x_1, y_1, z_1)$  і  $N(x_2, y_2, z_2)$  (рис. 2.13, а) і визначимо переміщення від  $M$  до  $N$  або навпаки.

Позначимо переміщення від точки  $M$  до точки  $N$  через  $\overrightarrow{MN}$ , а переміщення від  $N$  до  $M$  — через  $\overrightarrow{NM}$ . Якщо  $MN$  розкласти на складові, паралельні осям координат, то переміщення  $MN$  визначатиметься координатами  $x_{MN}$ ,  $y_{MN}$ ,  $z_{MN}$ , точки  $N$  відносно точки  $M$ , тобто відносні координати.

Як бачимо (рис. 2.13, а),  $x_{MN} = x_2 - x_1$ ,  $y_{MN} = y_2 - y_1$ ,  $z_{MN} = z_2 - z_1$ . Напрявлене переміщення  $MN$  називають вектором відносного положення точки  $N$  відносно точки  $M$  і зображують стрілкою, що виходить з  $M$  і закінчується в  $N$ .

Вектори  $\overrightarrow{OM}$  і  $\overrightarrow{ON}$  називають радіусами-векторами абсолютного положення точок  $M$  і  $N$  у декартовій системі координат  $Oxyz$  і графічно зображують відповідними стрілками.

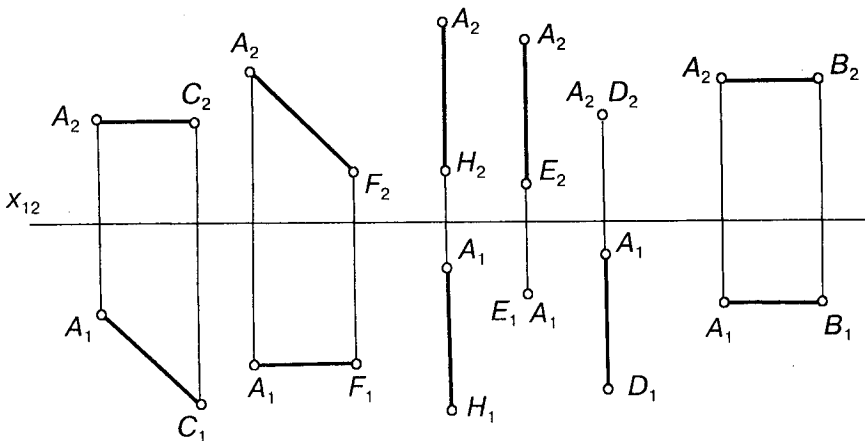


Рис. 2.11

Пряму в просторі можна задати аналітично за допомогою рівнянь. Якщо, наприклад, задано радіус-вектор однієї з точок прямої та напрямний вектор (рис. 2.13, б)  $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$ , то довільну точку прямої  $N$  визначають векторним рівнянням

$$\vec{r}_N - \vec{r}_A = u\vec{p},$$

де  $u$  — змінна (параметр), яка відповідає дійсним значенням точок прямої.

Векторному рівнянню відповідають три скалярні рівняння:

$$\begin{cases} x - x_A = up_x; \\ y - y_A = up_y; \\ z - z_A = up_z, \end{cases}$$

де  $y, x, z$  — координати будь-якої точки прямої.

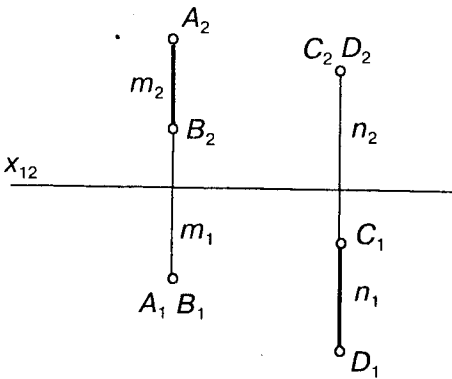


Рис. 2.12

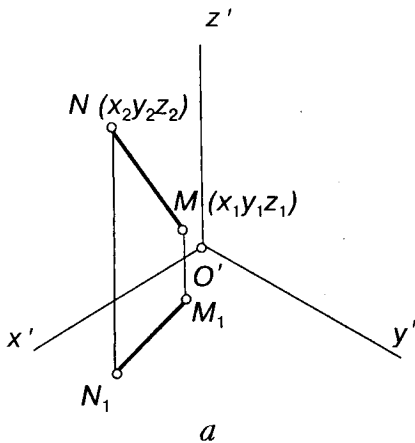
Пряму в просторі можна задати також рівняннями площин, що її проєкціюють:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1; \\ A_2x + B_2z = C_2. \end{cases}$$

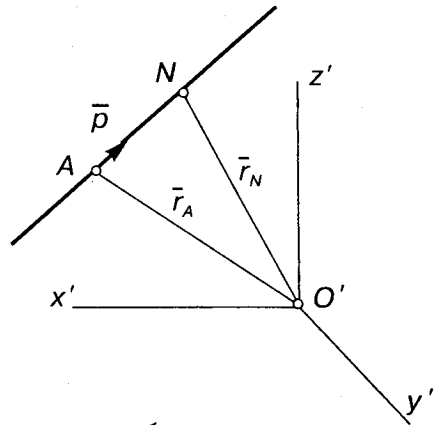
Тут перше рівняння задає горизонтально проєкціювальну площину, а друге — фронтально проєкціювальну.

При розгляді відрізка прямої часто виникає потреба у визначенні його натуральної величини та кутів нахилу до площин проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ , тобто доводиться розв'язувати метричну задачу. Так називають будь-яку задачу, в умові чи при розв'язанні якої є числова характеристика. Розв'язання всіх метричних задач ґрунтується на двох основних задачах, першою з яких є визначення натуральної величини відрізка прямої. Для цього треба виконати деякі побудови.

На рис. 2.14, а показано відрізок  $AB$  та дві площини проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Якщо від точки  $A$  відкласти відрізок  $AC$ , паралельний горизонтальній проєкції  $A_1B_1$ , то утвориться прямокутний трикутник  $ABC$  з гіпотенузою  $AB$ . Отже, натуральна величина відрізка прямої загального положення дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, один катет якого є проєкцією відрізка, а другий — різницею відстаней кінців другої проєкції до осі  $x_{12}$  (в безосній системі — до довільної горизонтальної прямої). Відповідну побудову виконано на рис. 2.14, б,



а



б

Рис. 2.13



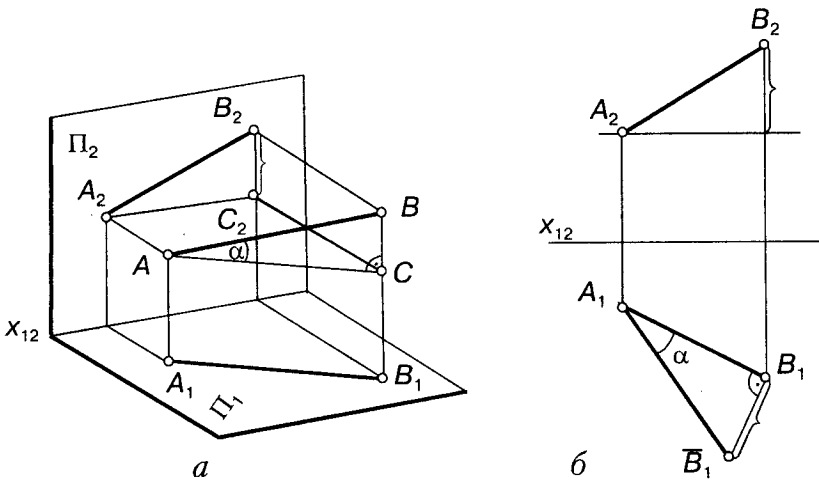


Рис. 2.14

де визначається й кут нахилу прямої до горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ . Щоб визначити кут нахилу прямої до фронтальної площини проєкцій, треба виконати відповідну побудову прямокутного трикутника на фронтальній площині проєкцій. Цей спосіб визначення величини відрізка прямої називають *способом прямокутного трикутника*.

#### 2.4. Проекції площини

Якщо точка є нуль-вимірною геометричною фігурою, тобто такою, що не має розмірів, пряма — одновимірною, то площина буде двовимірною геометричною фігурою. Площину можна задавати: трьома точками, що не лежать на одній прямій; прямою та точкою, що не лежить на прямій; двома прямими, які перетинаються або паралельні. Найбільш наочним є задання площини куском або відріком, найпростіший з яких — трикутник (рис. 2.15).

Сформулюємо властивість проєкцій площини загального положення: *проєкції площини збігаються з полями проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  так, що проєкції їхніх точок вертикально відповідні*.

Залежно від положення, що займає площина відносно площин проєкцій, розрізняють: проєкціювальні площини  $\theta$ ,  $\Lambda$  та  $\Sigma$ , які перпендикулярні до площин проєкцій; площини, паралельні площинам проєкцій, або площини рівня  $\Gamma$ ,  $\Phi$  та  $ABC$  (рис. 2.16);

площини загального положення (див. рис. 2.15), які не перпендикулярні, а отже, й не паралельні площинам проєкцій.

При розв'язуванні різних задач нарисної геометрії часто використовують головні лінії площини: лінії рівня та лінії найбільшого нахилу до площин проєкцій.

*Лінії рівня площини* називають лінії, що належать даній площині та паралельні одній з площин проєкцій.

*Горизонталь* — це лінія, що належить площині і паралельна горизонтальній площині проєкцій  $\Pi_1$ . На рис. 2.17 проведено горизонталь  $DC$ , для задання якої досить одного параметра.

*Фронталь* — це лінія, що належить площині та паралельна фронтальній площині

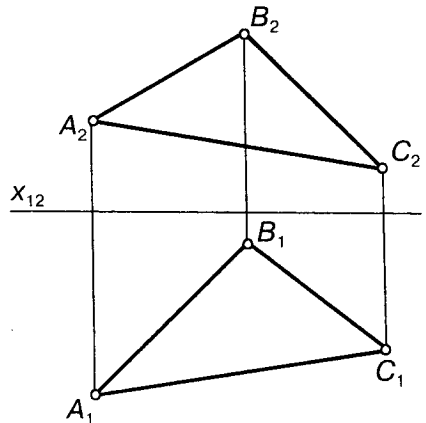


Рис. 2.15

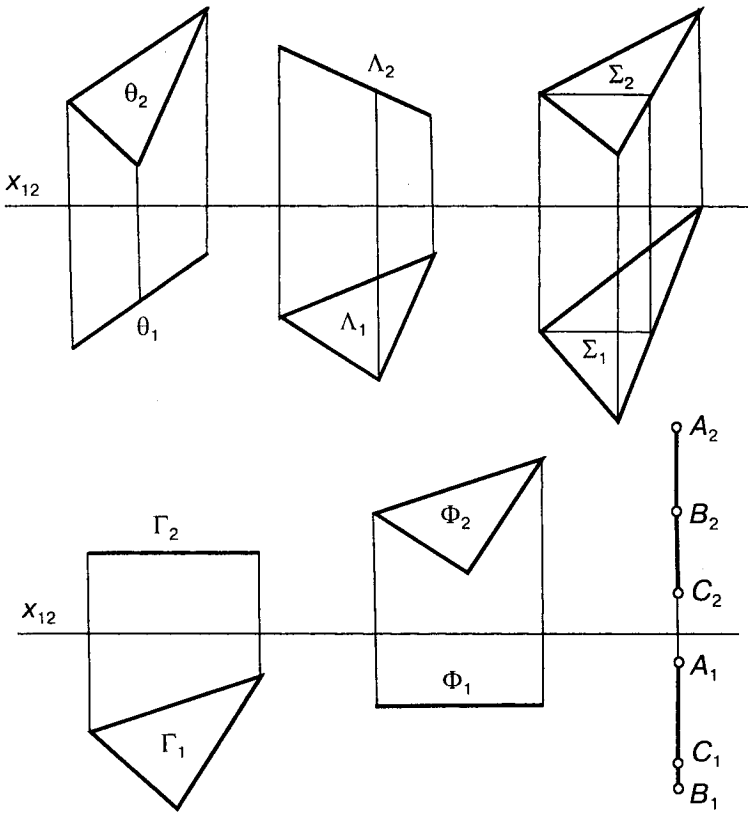


Рис. 2.16

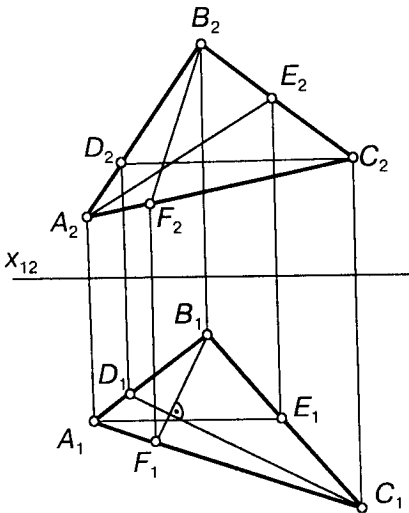


Рис. 2.17

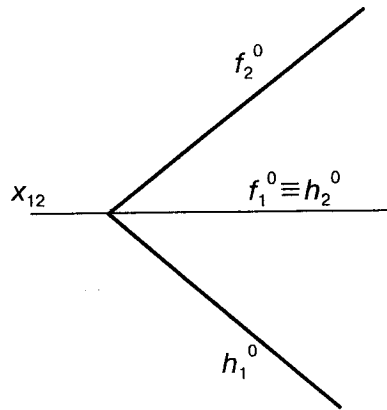


Рис. 2.18

LIBRARY  
UNIVERSITY OF TORONTO  
1965

проекції  $\Pi_2$ . На рис. 2.17 проведено фронталь  $AE$ , її також визначають одним параметром. Інші три параметри замінюються належністю площині (два) та паралельністю одній з площин проекцій (один).

Горизонталь і фронталь використовують для задання площини, що дає змогу визначити орієнтацію площини відносно площин проекцій. Лінії перетину площини з площинами (полями) проекцій — сліди площини — також є горизонталлю  $h$  та фронталлю  $f$ . Їх у цьому випадку називають *нульовими* (рис. 2.18).

Задання площини слідами — найекономічніший спосіб при переході до аналітичного задання площини і для кодування геометричних фігур при геометричному моделюванні за допомогою ЕОМ.

**Лінії найбільшого нахилу площини до площин проекцій** — це лінії, що належать площині та утворюють найбільший кут з відповідною площиною проекцій. Відносно поля  $\Pi_1$  їх ще називають *лініями найбільшого скату*, або *лініями скату*.

На рис. 2.17 проведено лінію скату  $BF$ . Горизонтальна проекція утворює прямий кут з горизонтальною проекцією фронталі, для її задання досить одного параметра. Лінія найбільшого нахилу відносно фронтальної площини проекцій зберігає прямий кут з фронтальною проекцією фронталі.

Якщо площина загального положення задається трьома дійсними параметрами, то для задання площин окремого положення досить меншої кількості.

Всього площин у просторі є  $\infty^3$ , а площин, перпендикулярних до будь-якої площини, —  $\infty^2$ . Отже, умова перпендикулярності площин еквівалентна заданню одного параметра:  $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty^1$ . Тому для задання конкретної проєкціовальної площини досить мати два параметри.

Щодо площин рівня, тобто паралельних площинам проєкцій, то всього площин у просторі є  $\infty^3$ , а площин, паралельних площині проєкцій —  $\infty^1$ . Отже, умова паралельності площини площині проєкцій еквівалентна заданню двох параметрів  $\frac{\infty^3}{\infty^1} = \infty^2$ . Тому для задання певної площини рівня досить одного параметра. На рис. 2.16 по-

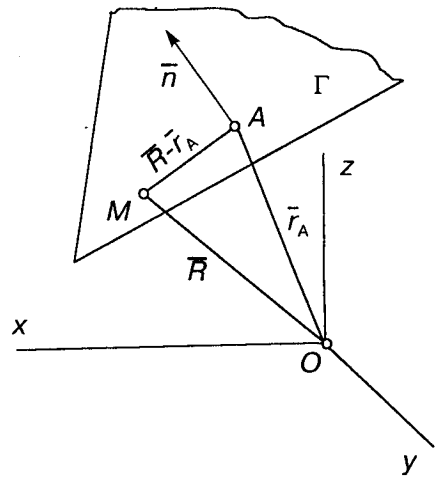


Рис. 2.19

казано шість випадків розміщення площин окремого положення: проєкціовальних та площин рівня. Площина буде проєкціовальною щодо площини проєкцій, якщо вона містить хоча б одну відповідну проєкціовальну пряму.

Для аналітичного задання площини  $\Gamma$  треба шість параметрів: три координати точки і три координати вектора  $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$ . Векторне рівняння площини має вигляд скалярного добутку:

$$(\vec{R} - \vec{r}_A)\vec{n} = 0,$$

де  $\vec{R}$  — радіус-вектор будь-якої точки  $M$  площини (рис. 2.19);  $(\vec{R} - \vec{r}_A)$  — вектор, інцидентний площині  $\Gamma$  та ортогональний вектору  $\vec{n}$ .

Якщо множники скалярного добутку виразити через їхні компоненти, то

$$(x - x_A)n_x + (y - y_A)n_y + (z - z_A)n_z = 0.$$

Це лінійне рівняння щодо координат  $x, y, z$ , воно може бути перетворене до такого вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

## 2.5. Умови взаємної інцидентності, паралельності та перпендикулярності як параметри

Точка, пряма та площина попарно можуть бути інцидентними, паралельними або взаємно перпендикулярними. Ці три умови еквівалентні заданню певного чис-

ла параметрів. Тому, визначаючи загальне число параметрів для комбінацій даного виду, слід враховувати розмірність конкретної умови.

**Інцидентність.** Інцидентність точки прямій на площині еквівалентна одному параметру, тому для задання такої точки досить одного параметра (наприклад, відстані від точки відліку). Інцидентність точки прямій, розміщеній у просторі, еквівалентна двом параметрам. Отже, для задання точки залишається вільним один параметр, тому досить задати, наприклад, її абсцису (рис. 2.20), а за допомогою вертикальної лінії сполучення визначити ординату та аплікату точки.

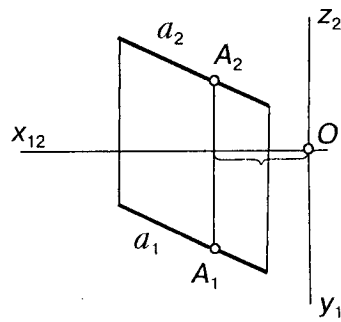


Рис. 2.20

Інцидентність точки площині еквівалентна заданню одного параметра, тому для задання точки на площині залишаються вільними два параметри, які можна реалізувати, наприклад, заданням фронтальної чи горизонтальної проекції точки (рис. 2.21).

Інцидентність прямої площині еквівалентна заданню двох параметрів, а оскільки прямих у просторі  $\infty^4$ , то вільними залишаються два параметри, за допомогою яких задається фронтальна чи горизонтальна проекція прямої.

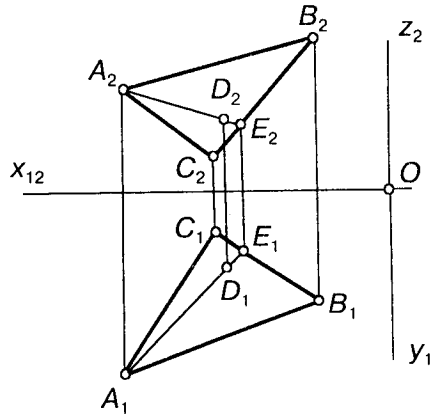


Рис. 2.21

**Паралельність.** Можливі три випадки паралельності: двох прямих; прямої та площини; двох площин.

Паралельність двох прямих на площині еквівалентна заданню одного параметра. Тому для зображення прямої  $b$ , паралельної прямій  $a$ , досить одного параметра (рис. 2.22).

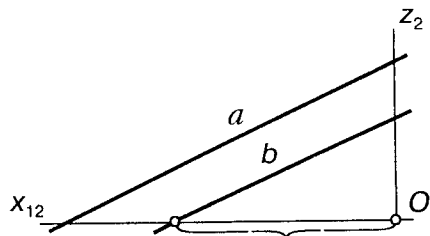


Рис. 2.22

Паралельність двох прямих у просторі еквівалентна заданню двох параметрів (рис. 2.23, а). Справді, всього прямих у просторі  $\infty^4$ , а прямих, паралельних даній,  $\infty^2$  (за кількістю точок площини  $\Pi$ , через кожен з яких можна провести пряму, паралельну даній). Таким чином, паралельність двох прямих у просторі еквівалентна заданню двох параметрів, тому для побудови прямої  $b$ , паралельної даній  $a$ , досить двох параметрів (рис. 2.23, б).

Паралельність прямої та площини еквівалентна заданню одного параметра. Справді, всього прямих в просторі  $\infty^4$ , а прямих, паралельних площині, —  $\infty^3$ . Отже, для задання прямої, паралельної площині, потрібні три параметри. На рис. 2.24 показано побудову прямої,

паралельної площині. У площині  $\Pi_2$  двома параметрами задано довільну точку  $D$ , через яку проведено пряму  $m$ , паралельну будь-якій прямій площини (у даному випадку паралельну  $AC$ ), — ще один параметр.

Паралельність двох площин еквівалентна заданню двох параметрів. Отже, для задання площини, паралельної даній, досить одного параметра (рис. 2.25). На рисунку площину  $\Lambda$  задано слідами. Для побудови площини  $\Phi$ , що паралельна їй, досить на осі абсцис задати



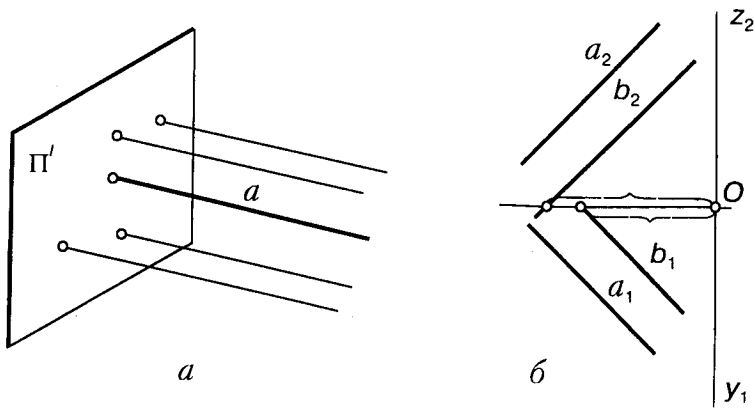


Рис. 2.23

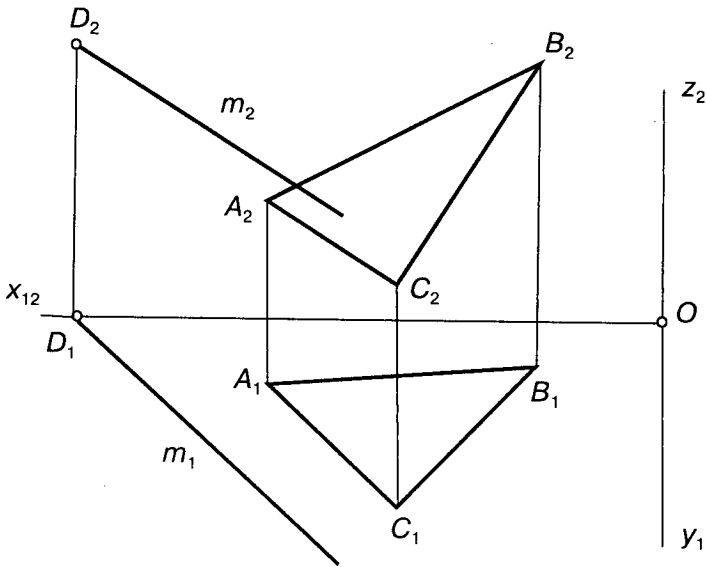


Рис. 2.24

точку і провести через неї сліди площини, паралельно заданим.

**Перпендикулярність.** Можливі три випадки перпендикулярності: двох прямих; прямої та площини; двох площин.

**Перпендикулярність двох прямих,** що лежать у площині, еквівалентна заданню одного параметра. Отже, щоб побудувати пряму  $b$ , перпендикулярну до даної прямої  $a$ , досить одного параметра (рис. 2.26).

У просторі перпендикулярність двох прямих еквівалентна теж заданню одного параметра. Справді, всього прямих в просторі

є  $\infty^4$ , а прямих, перпендикулярних до даної, —  $\infty^3$ . Тому, щоб побудувати пряму, перпендикулярну до прямої, мимобіжної з нею, слід мати три параметри, а для побудови прямої, перпендикулярної до прямої, яка перетинає її, досить двох параметрів. На рис. 2.27,  $a$  побудовано пряму, перпендикулярну до даної, і таку, що перетинає її. На рис. 2.27,  $b$  побудовано пряму, перпендикулярну до мимобіжної з нею прямої. У першому випадку використано один параметр, а в другому — два. Достатність одного (двох) параметра пояснюється тим, що одна з прямих паралельна площині проєкцій.

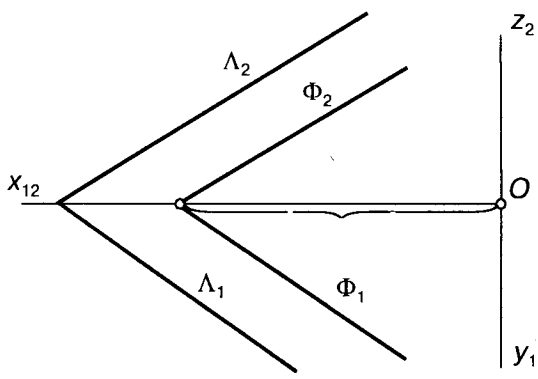


Рис. 2.25

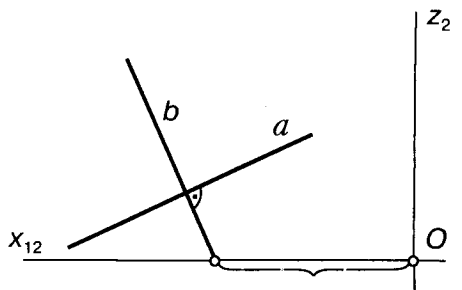
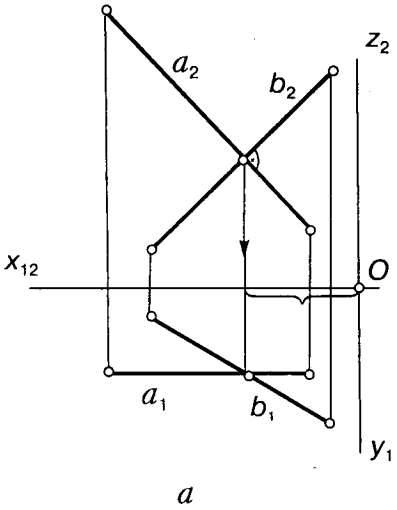
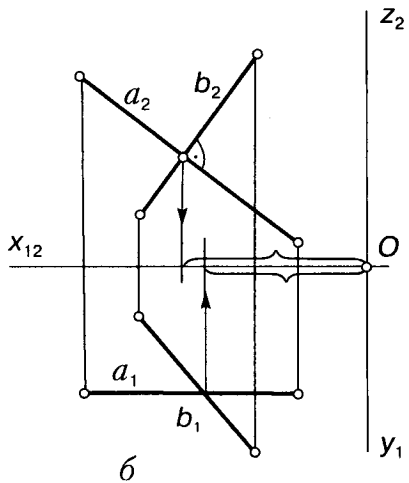


Рис. 2.26

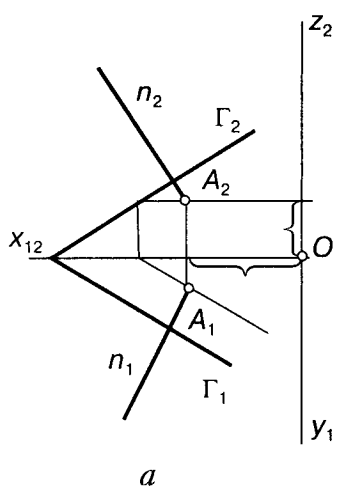


a

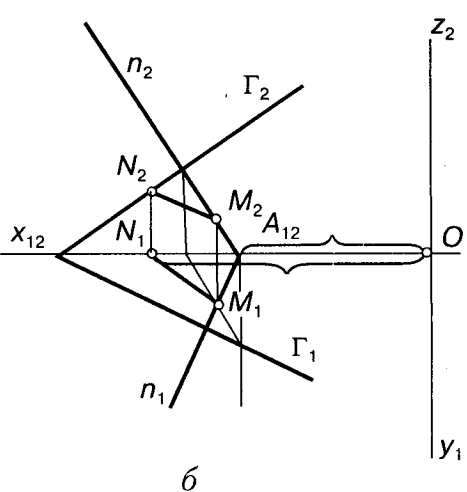


б

Рис. 2.27



a



б

Рис. 2.28

Таблиця 2.1. Геометричні умови та еквівалентні їм параметри

Геометричні умови	Параметри	
	на площині	у просторі
Точка належить прямій	1	2
Точка належить поверхні (площині)	—	1
Пряма належить поверхні	—	2
Паралельність прямих	1	2
Перпендикулярність прямих	1	1
Перпендикулярність прямої та площини	—	2
Перпендикулярність двох площин	—	1
Паралельність двох площин	—	2
Паралельність прямої та площини	—	1
Дотик фігур	1	1
Дотик фігур у заданій точці	2	3

Перпендикулярність прямої та площини. Всього прямих у просторі  $\infty^4$ , а прямих, що задовольняють умову перпендикулярності до площини, —  $\infty^2$  (за кількістю точок у площині). Таким чином, умова перпендикулярності прямої

до площини еквівалентна заданню двох параметрів. Для задання прямої, перпендикулярної до площини, потрібно два параметри, що залишились (рис. 2.28, а). У площині, заданій слідами, взято фронтальну проекцію точки  $A$  (за якою визначають горизонтальну проекцію). Після цього ставлять перпендикуляр  $n$ .

Перпендикулярність двох площин. Всього площин у просторі  $\infty^3$ , а площин, перпендикулярних до даної, —  $\infty^2$  (відповідно до кількості прямих, що належать площині). Отже, перпендикулярність двох площин еквівалентна заданню одного параметра. Для задання площини, перпендикулярної до даної, потрібні два параметри, що залишились. Оскільки площина, перпендикулярна до даної, містить перпендикуляр до неї, то на осі  $x_{12}$  одним параметром задають точку  $A_{12}$ . Проводять з неї перпендикуляр до площини  $\Pi$  і знаходять його основу  $M$ . Задаючи в площині  $\Gamma$  ще одну точку  $N$  (другий параметр), визначають пряму  $NM$ , яка разом з  $n$  задає перпендикулярну площину (рис. 2.28, б).

У табл. 2.1 подано деякі геометричні умови та еквівалентні їм параметри у двота тривимірному просторах.

### Запитання та завдання

1. Які елементи має тривимірний простір?
2. Що називають параметром? Як розрізняються параметри?
3. Скількома параметрами можна задати: тривісний еліпсоїд загального положення? еліпсоїд обертання загального положення? сферу?
4. Чим відрізняються площини рівня від проекціовальних площин?
5. Побудувати точки, симетричні даній відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .
6. Побудувати прямокутну проекцію відрізка прямої  $AB$ , яка утворює з площиною проекцій кут  $\alpha$ . Виразити довжину відрізка  $AB$  через її проекцію  $A_1B_1$  та кут  $\alpha$ .
7. Побудувати проекції піраміди на  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  за даними, поданими в табл. 2.2, та знайти кути нахилу ребер до зазначених площин.

Таблиця 2.2. Дані для побудови проекції піраміди

Ребро	Положення в просторі	Натуральна величина ребра, мм	Кут нахилу	
			До $\Pi_1$	До $\Pi_2$
$AB$	Профільно проекціовальне	60		
$BC$	Фронтально проекціовальне	40		
$CD$	Профільно проекціовальне	40		
$AD$	Горизонтальне			
$AS$	Фронтальне	60		
$BS$	Фронтальне	60		
$CS$ та $DS$	Загальне			



## Глава 3

# ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ ПАР ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

### 3.1. Дві основні групи задач нарисної геометрії

У нарисній геометрії розглядають дві основні групи задач: позиційні та метричні. Розв'язання їх часто ґрунтується на позиційних та метричних властивостях пар проєкцій.

До позиційних належать задачі на:  
1) взаємне розміщення геометричних фігур;  
2) взаємну належність геометричних фігур;  
3) перетин геометричних фігур, а саме: двох прямих; прямої і площини; двох площин.

Пара проєкцій двох геометричних фігур дає змогу встановити метричні характеристики цих фігур, тобто визначити відстань між ними, їхні кути, а також знайти площі плоских фігур. Різних видів метричних задач багато, але в розв'язанні майже кожної з них є дві задачі: 1) визначення відстані між двома точками, тобто знаходження натуральної величини відрізка прямої; 2) побудова перпендикуляра до площини.

Розглянемо попарно елементарні геометричні фігури для з'ясування їхніх позиційних та метричних властивостей.

Що ж до відстані між двома точками, то цю задачу було розглянуто вище.

**Точка й пряма.** Точка може належати прямій або не належати їй. Точка належить прямій, якщо її проєкції належать проєкціям прямої, і не належить прямій, якщо хоча б одна її проєкція не належить проєкції прямої (рис. 3.1). Щодо відстані від точки до прямої загального положення, то відрізок, що її вимірює, проєкціюється в натуральну величину, якщо пряма є лінією нахилу площини, заданої цими точкою та прямою, до однієї з площин проєкцій (рис. 3.2).

**Дві прямі.** Прямі перетинаються, якщо мають спільну власну чи невласну точку. Прямі мимобіжні, якщо вони не мають спільної точки (рис. 3.3, а...в). Через дві мимобіжні прямі можна провести одну пару паралельних площин (площин паралеліз-

му). Положення цих площин визначається двома прямими, які проходять через довільну точку простору і паралельні мимобіжним прямим.

На рис. 3.4 зображено дві мимобіжні прямі  $m$  і  $n$ . Фронтальні проєкції їх перетинаються в точці  $1_2 \neq 2_2$ , а горизонтальні — в точці  $3_1 \neq 4_1$ . Для визначення “перекривання” відрізків на проєкціях позначено конкуруючі точки  $1$  і  $2$  відносно поля  $\Pi_2$  та  $3$  і  $4$  відносно поля  $\Pi_1$ . При цьому точки  $1$  і  $3$  належать відрізку  $m$ , а точки  $2$  і  $4$  — відрізку  $n$ . Оскільки точка  $3$  розміщена вище від точки  $4$  на полі  $\Pi_1$ , то відрізок  $m$

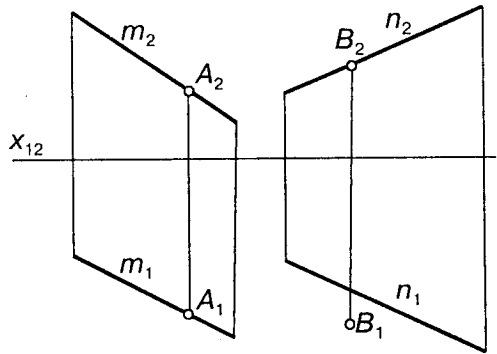


Рис. 3.1

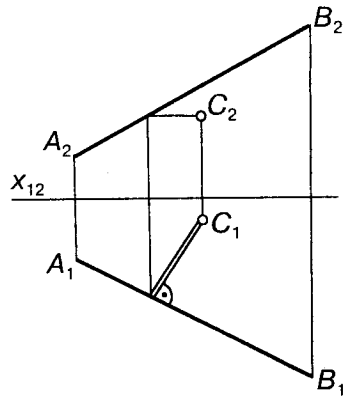


Рис. 3.2

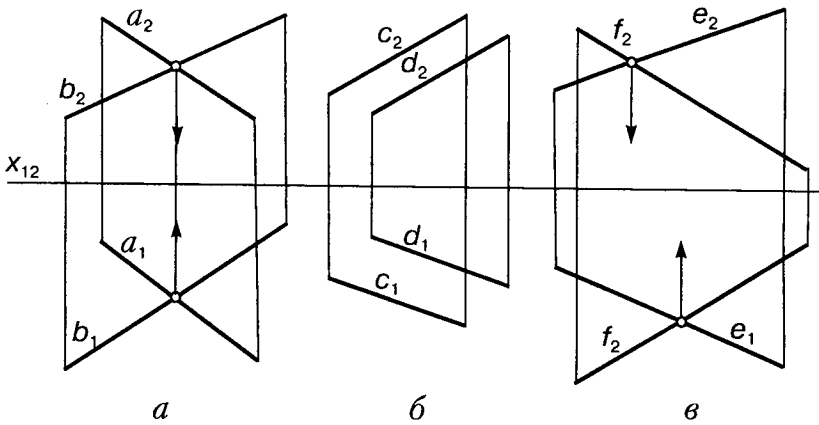


Рис. 3.3

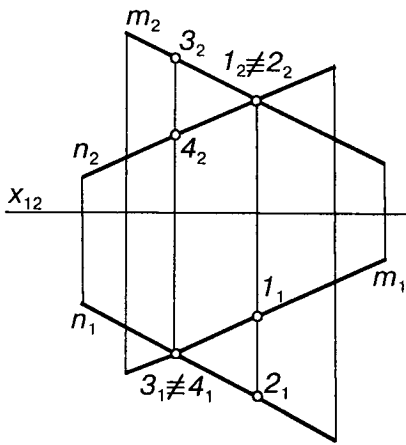


Рис. 3.4

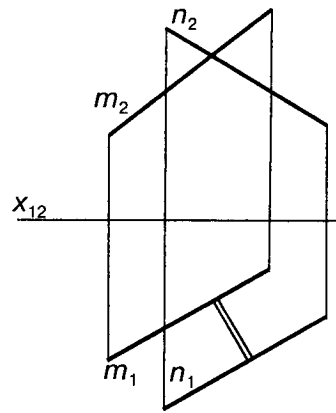


Рис. 3.5

“перекриває” відрізок  $n$ . Точка 2 лежить ближче, ніж точка 1, тому на полі  $\Pi_2$  відрізок  $n$  “перекриває” відрізок  $m$ .

Визначення відстані між двома паралельними чи мимобіжними прямими є метричною задачею.

За допомогою властивості проєкціювання відстані між прямою та точкою в натуральну величину визначають відстань між двома паралельними прямими загального положення, коли вони є лініями найбільшого нахилу площини, яку задають, до однієї з площин проєкцій. Для цього на одній з прямих беруть довільну точку, і тоді задача зводиться до тієї, яку розглядали вище (див. рис. 3.2).

Відстань між двома мимобіжними прямими зображується в натуральну величину,

якщо їхні площини паралелізму є проєкціювальними (рис. 3.5).

Що ж до кутів між перетинними та мимобіжними прямими, то вони проєкціюються без спотворення, якщо обидві прямі паралельні одній з площин проєкцій.

**Пряма та площина.** Задача на перетин прямої з площиною є першою основною позиційною задачею. При розв’язанні її розглядають три випадки розміщення фігур:

1) фігури є проєкціювальними відносно різних площин проєкцій (рис. 3.6);

2) одна з фігур, що перетинаються, є проєкціювальною, а друга — загального положення (рис. 3.7);

3) обидві фігури займають загальне положення (рис. 3.8).

У першому і другому випадках точка перетину прямої з площиною визначається на підставі інцидентності, бо одна проекція шуканої точки перетину вже є, а треба визначити другу проекцію.

У третьому випадку для знаходження точки перетину прямої з площиною доцільно скористатися допоміжною січною площиною. Алгоритм розв'язання задачі складається з трьох операцій: 1) пряму поміщують у допоміжну площину; 2) знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною; 3) визначають точку перетину двох прямих (заданої та лінії перетину).

Через пряму проводять горизонтально проєкціювальну площину  $\Gamma(l_1 \equiv \Gamma_1)$ , знаходять лінію перетину двох площин — пряму  $l_2-2_1$  (див. рис. 3.8). Її горизонтальна проєкція  $l_1-2_1$ . За горизонтальною проєкцією визначають фронтальну проєкцію  $l_2-2_2$ . У перетині  $l_2$  з  $l_2-2_2$  знаходять шукану точку  $D_2$  — перетин прямої з площиною. Її горизонтальну проєкцію визначають за вертикальною відповідністю. Видність відрізків прямої  $l$  визначають за допомогою конкуруючих точок 3 і 4.

Графічні дії, що застосовувалися для визначення точки перетину прямої з площиною, можна інтерпретувати аналітично, що необхідно при розв'язуванні задач за допомогою ЕОМ. При цьому дістають систему з трьох рівнянь, два з яких визначають пряму, а третє — площину:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1; \\ A_2x + B_2z = C_2; \\ Ax + By + Cz = D. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є координати шуканої точки перетину. Для з'ясування взаємного розміщення прямої та площини загального положення слід скористатися способом побудови прямих, інцидентних площині. При визначенні взаємного положення заданої прямої та знайденої лінії можливі три випадки: 1) дві прямі перетинаються в точці, тобто задана пряма перетинається в цій точці із заданою площиною (див. рис. 3.8); 2) дві прямі паралельні, тобто пряма паралельна площині (рис. 3.9); 3) дві прямі збігаються, тобто пряма є підмножиною площини (рис. 3.10).

Метричні характеристики комбінації пряма й площина стосуються визначення

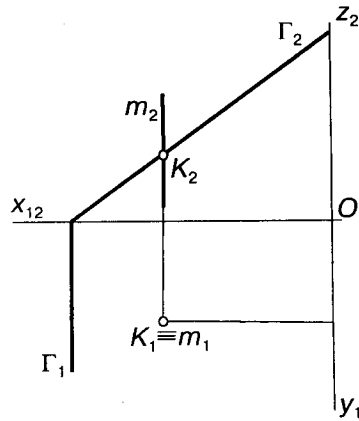


Рис. 3.6

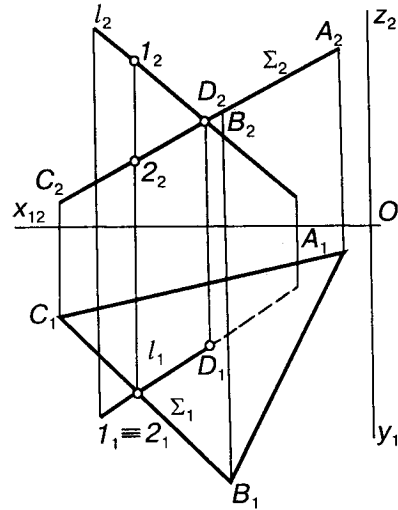


Рис. 3.7

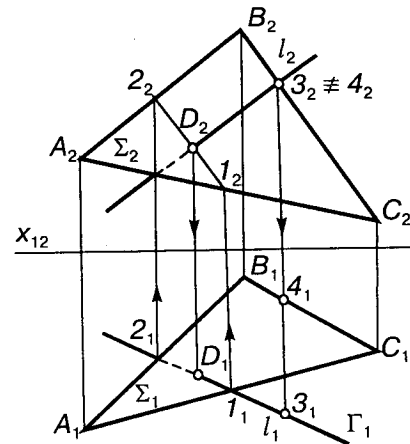


Рис. 3.8

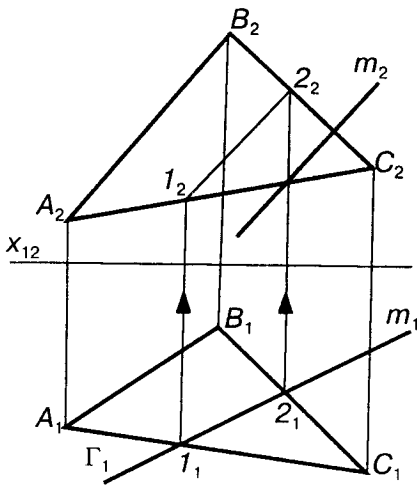


Рис. 3.9

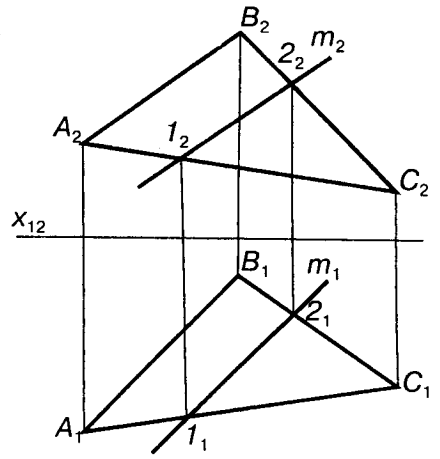


Рис. 3.10

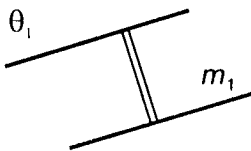
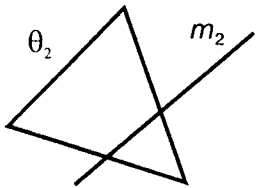


Рис. 3.11

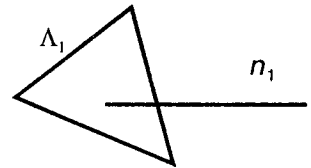
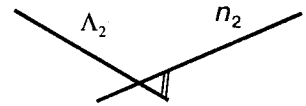


Рис. 3.12

відстані між прямою та паралельною їй площиною, а також кута, що утворюється прямою з площиною, якщо пряма й площина не паралельні.

Відстань від прямої до паралельної їй площини проєкціюється в натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо площина горизонтально проєкціувальна, та на фронтальній, якщо вона фронтально проєкціувальна. На рис. 3.11 показано відстань між горизонтально проєкціувальною площиною  $\theta$  та прямою  $m$ .

У загальному випадку пряма й площина утворюють кут, який проєкціюється в натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо площина горизонтально проєк-

ціувальна, а пряма горизонтальна, або на фронтальній проєкції, якщо площина фронтально проєкціувальна, а пряма фронтальна. На рис. 3.12 показано кут між фронтально проєкціувальною площиною  $\Lambda$  та фронтальною прямою  $n$ .

Вище було показано, що пряму, перпендикулярну до площини, задають двома параметрами. Як відомо, пряма є перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до двох перетинних прямих, що належать цій площині. Беручи до уваги властивості проєкцій прямого кута між двома прямими, з усієї множини прямих у площині доцільно за такі лінії взяти лінії рівня, тобто горизонталь та фронталь. На рис. 3.13

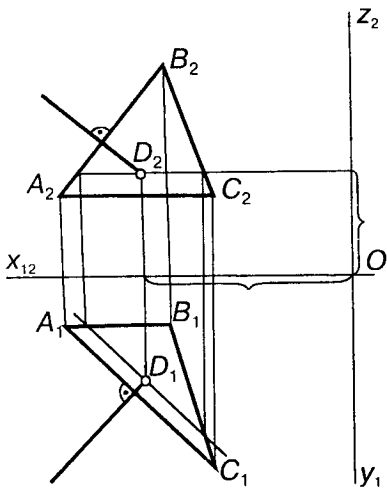


Рис. 3.13

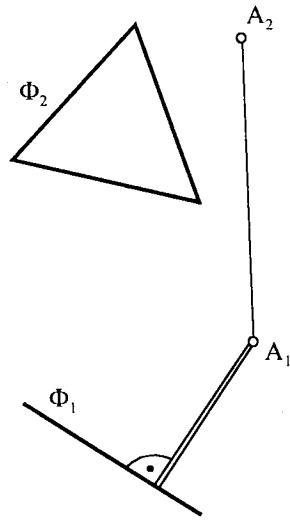


Рис. 3.14

показано трикутний відсік, сторона якого  $AC$  є горизонталлю, а  $AB$  — фронталлю. Щоб з точки  $D$ , заданої двома параметрами, поставити перпендикуляр до площини відсіку, досить провести його фронтальну проекцію перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі  $A_2B_2$ , а горизонтальну — перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі  $A_1C_1$ . Якщо на рисунку площини горизонталі та фронталі немає, то їх треба провести.

**Точка і площина.** Точка може належати площині або не належати їй. Це визначається за допомогою прямої, яка проходить через точку та інцидентна площині. Відрізок, що вимірює відстань від точки до площини, проєкціюється в натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо площина горизонтально проєкціювальна, та на фронтальній проєкції, якщо площина фронтально проєкціювальна (рис. 3.14).

**Дві площини.** Дві площини завжди перетинаються. Якщо лінією перетину їх є не-власна пряма, то площини — паралельні. Щоб з'ясувати взаємне положення двох площин, знаходять лінію їхнього перетину. Це друга основна позиційна задача. Тут можливі три випадки:

- 1) площини є проєкціювальними відносно однієї й тієї самої площини проєкцій;
- 2) одна з площин — проєкціювальна, а друга — загального положення;

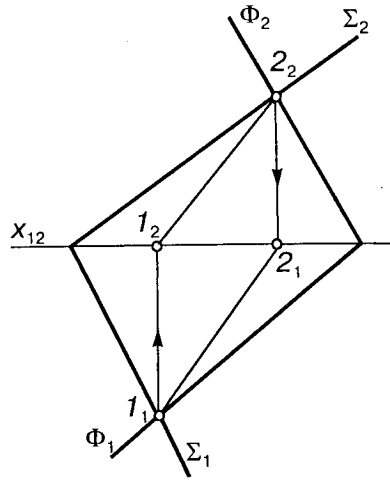


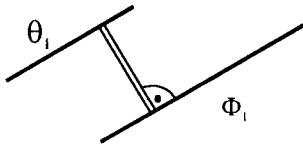
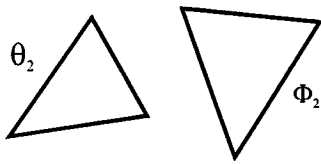
Рис. 3.15

3) обидві площини є площинами загального положення.

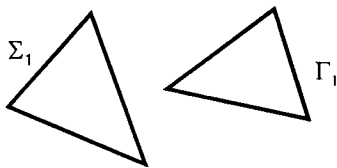
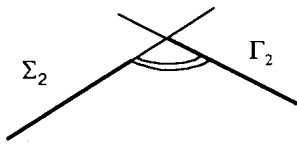
У першому та другому випадках лінія взаємного перетину вже є на кожній з проєкцій і за нею знаходять другу проєкцію лінії. У третьому випадку для знаходження лінії перетину шукають дві точки перетину прямих однієї площини з другою.

На рис. 3.15 показано визначення лінії перетину двох площин загального положення, заданих слідами. У цьому найпростішому випадку лінію перетину  $1-2$  визначено за точками перетину слідів площин.





a



б

Рис. 3.16

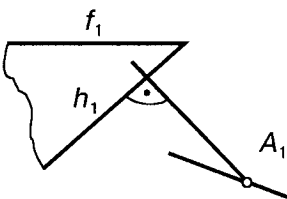
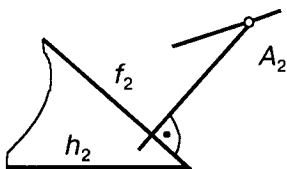


Рис. 3.17

Розглянемо відстані та кути між двома площинами. Відрізок, що вимірює відстань між паралельними площинами, проєкціюється в натуральну величину на поле  $\Pi_1$ , якщо площини горизонтально проєкціювальні, та на поле  $\Pi_2$ , якщо площини фронтально проєкціювальні (рис. 3.16, а).

Кут між двома площинами (двогранний кут) проєкціюється в натуральну величину на поле  $\Pi_1$ , якщо площини горизонтально проєкціювальні, та на поле  $\Pi_2$ , якщо площини фронтально проєкціювальні (рис. 3.16, б).

Як відомо, площина, перпендикулярна до даної, задається двома параметрами. Площина перпендикулярна до другої площини, якщо вона містить перпендикуляр до неї (рис. 3.17).

### 3.2. Побудова проєкцій відстаней та кутів між геометричними фігурами

Щоб знайти відстань від точки  $A$  до прямої  $m$ , через точку  $A$  проводять площину, перпендикулярну до цієї прямої, і знаходять точку перетину прямої і площини. Знайдену точку сполучають з точкою  $A$  (рис. 3.18). Натуральну величину утвореного відрізка визначають способом прямокутного трикутника. На рисунку площину задано го-

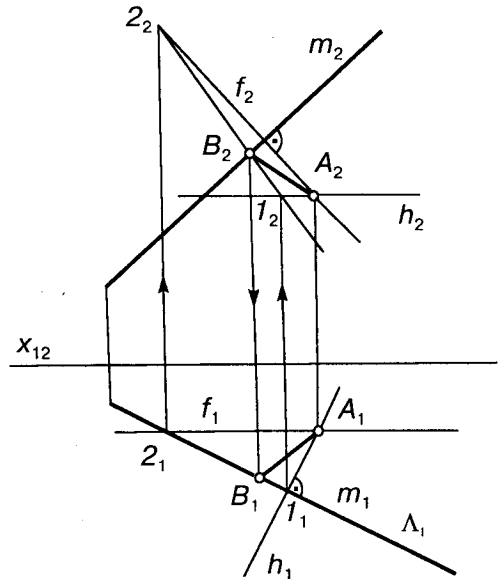


Рис. 3.18

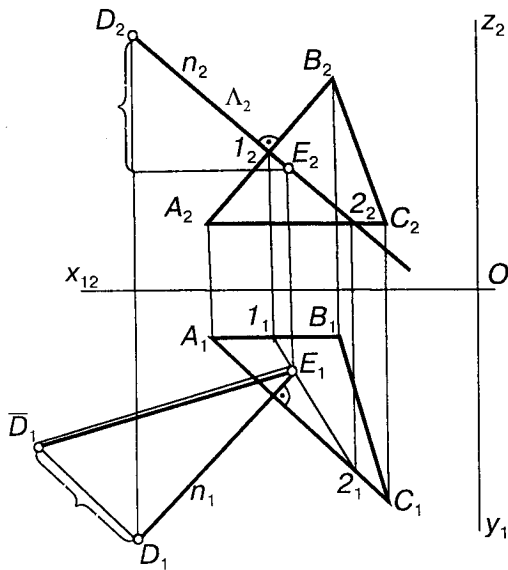


Рис. 3.19

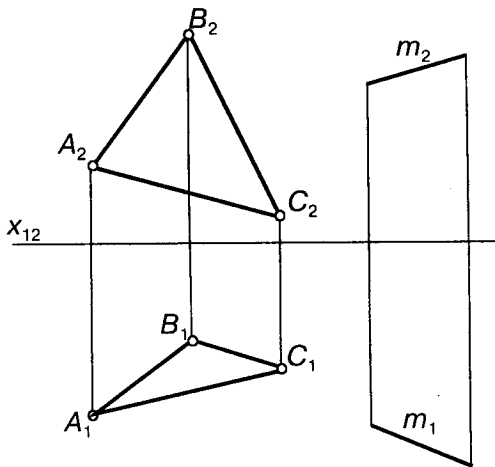


Рис. 3.20

ризонталлю  $h$  та фронталлю  $f$ . При цьому на полі  $\Pi_1$  горизонтальна проекція горизонталі перпендикулярна до  $m_1$ , а на полі  $\Pi_2$  фронтальна проекція фронталі перпендикулярна до  $m_2$ .

Для визначення точки перетину прямої  $m$  з площиною застосовано горизонтально проєкційовальну площину  $\Lambda$ , що проходить через  $m_1$ . Ця площина перетне задану площину по прямій  $l_1-2_1$ . Шукану точку  $B$  визначають як перетин фронтальної проєкції  $l_2-2_2$  і  $m_2$ .

Щоб знайти відстань між двома паралельними прямими загального положення, на одній з прямих вибирають довільну точку і зводять цю задачу до попередньої.

Для визначення відстані від точки до площини загального положення треба з цієї точки опустити перпендикуляр на площину, визначити його основу та знайти натуральну величину відрізка цього перпендикуляра. На рис. 3.19 показано трикутний відрізок, сторона  $AC$  якого — горизонталь, а  $AB$  — фронталь. З точки  $D$  побудовано проєкції перпендикуляра  $n$ . Його проєкція на полі  $\Pi_1$  перпендикулярна до горизонталі, а на полі  $\Pi_2$  — до фронталі. Основу перпендикуляра визначено за допомогою допоміжної фронтально проєкційовальної площини  $\Lambda$ , яка перетинає відрізок по прямій  $l-2$ . Основою перпен-

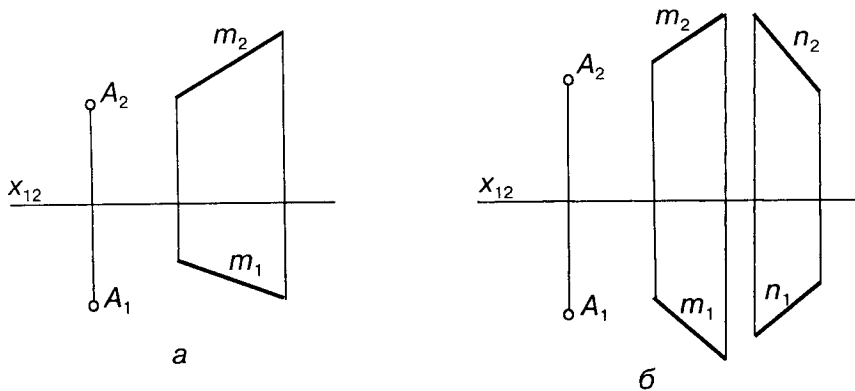


Рис. 3.21

дикуляра є точка  $E$ , а проєкції відстані від точки до площини —  $D_1E_1$  і  $D_2E_2$ . Отже, способом прямокутного трикутника визначено натуральну величину відрізка, що вимірює відстань.

Визначення відстані від прямої до паралельної їй площини та відстані між паралельними площинами можна звести до попередньої задачі, якщо на прямій чи площині взяти точку і знайти відстань від цієї точки до площини. Довжина відрізка перпендикуляра є шуканою відстанню.

Відомо, що відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між їхніми площинами паралелізму. Звідси такий алгоритм визначення відстані:

— через одну з прямих провести площину паралелізму, для чого через довільну точку однієї з прямих провести пряму, паралельну другій прямій;

— якщо на другій прямій взяти довільну точку  $C$ , то задача зводиться до розглянутої вище (визначення відстані від точки до площини).

### Запитання та завдання

1. Чи можна довільно задати фронтальну та горизонтальну проєкції точки, інцидентної профільній прямій? профільній площині?
2. Визначити відносне розміщення заданих прямої та площини (рис. 3.20).
3. Побудувати проєкції площини, яка проходить через точку  $A$  та паралельна:
  - а) прямій загального положення (рис. 3.21, а). Скільки розв'язків має задача?
  - б) двом заданим прямим загального положення (рис. 3.21, б).
4. Які дві задачі є основою всіх метричних задач?
5. Чим відрізняється проєкціювання в натуральну величину прямого кута перетину (мимобіжності) від непрямого кута?
6. Чи може прямокутна проєкція гострого кута бути тупим кутом та навпаки?



## Глава 4 ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО РИСУНКА

### 4.1. Загальні відомості

Як було показано, метричні та позиційні властивості геометричних фігур визначити легко при їх окремому положенні відносно площин проєкцій. На практиці часто геометричні фігури займають загальне положення, тому треба привести положення фігур із загального в окреме. Таке перетворення в математиці називають *відображенням*. У геометрії найчастіше застосовують відображення, при яких область визначення (площина) збігається з областю значень (площиною).

При розв'язанні задач використовують як окремі перетворення, так і послідовний ланцюжок або добуток перетворень.

Перетворення тривимірного простору можна задати аналітично системою трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha(x, y, z); \\ \bar{y} = \beta(x, y, z); \\ \bar{z} = \gamma(x, y, z). \end{cases}$$

Оскільки в основі перетворення лежить площина, то, за Клейном, наведену вище систему можна інтерпретувати двояко:

1) якщо  $x, y, z$  — координати довільної точки  $M$  відносно системи координат  $Oxyz$ , а  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  — координати тієї самої точки  $M$  відносно другої системи  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , то наведену вище систему рівнянь можна трактувати як формули перетворення координат (рис. 4.1). На цьому принципі ґрунтується

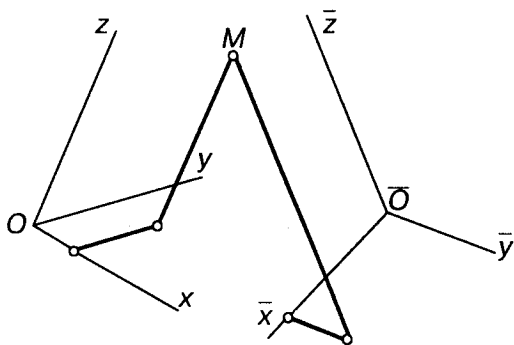


Рис. 4.1

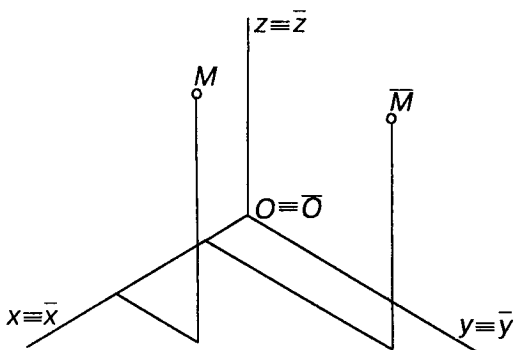


Рис. 4.2

спосіб заміни площин проєкцій та спосіб допоміжного проєкціювання (прямокутного й косокутного);

2) якщо  $x, y, z$  є координатами довільної точки  $M$  відносно системи координат  $Oxyz$ , а  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  — точки  $\bar{M}$  відносно тієї самої системи координат, то наведену вище систему рівнянь можна трактувати як формули перетворення простору (рис. 4.2). На цьому

принципі ґрунтується спосіб плоскопаралельного переміщення, а також способи обертання навколо прямих, перпендикулярних до площин проєкцій.

Розв'язання геометричних задач зводиться до розв'язання чотирьох основних задач:

1) перетворення прямої загального положення в пряму рівня;

- 2) перетворення прямої загального положення в проєкціювальну;
- 3) перетворення площини загального положення в проєкціювальну;
- 4) перетворення площини загального положення в площину рівня.

#### 4.2. Заміна площин проєкцій

Розглянемо точку  $A$  в системі площин  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  (рис. 4.3, а). Введемо нову вертикальну площину  $\Pi_4$ , слід якої на площині  $\Pi_1$  є  $x_{14}$ . Цим самим від системи площин проєкцій  $\Pi_1 - \Pi_2$  перейдемо до системи  $\Pi_1 - \Pi_4$ . При цьому горизонтальна проєкція точки не зміниться, а фронтальною проєкцією стане точка  $A_4$ . Як бачимо (див. рис. 4.3), відстань від проєкції  $A_2$ , що замінюється, до осі  $x_{12}$  дорівнює відстані від нової проєкції  $A_4$  до нової осі  $x_{14}$ . Цю саму операцію показано на комплексному рис. 4.3, б.

На рис. 4.4 зображено розв'язання перших двох задач перетворення прямої загального положення в пряму рівня та перетворення її в проєкціювальну. Задано відрізок прямої загального положення  $AB$ . Для перетворення його в пряму рівня, або для визначення його натуральної величини, на довільній відстані від відрізка вибирають площину, паралельну проєкції відрізка. У даному випадку взято вертикальну площину  $\Pi_4$ . Щоб дістати натуральну величину відрізка, від осі  $x_{14}$  відкладають відстані, що дорівнюють відстаням від точок  $A_2$  і  $B_2$  до осі  $x_{12}$ .

Щоб пряма зайняла проєкціювальне положення, досить перпендикулярно до прямої рівня провести нову площину  $\Pi_5$ , її слідом буде  $x_{45}$ . Проєкція прямої у вигляді

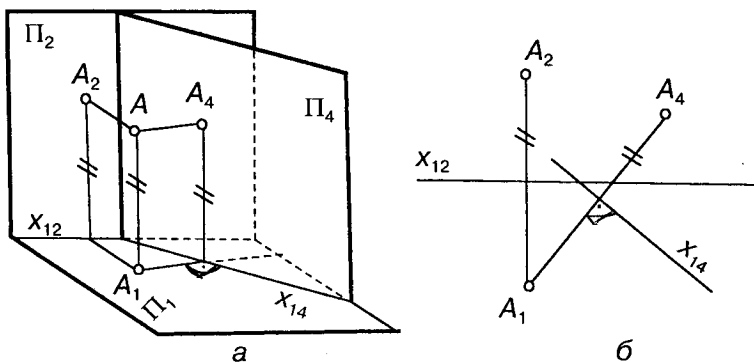


Рис. 4.3

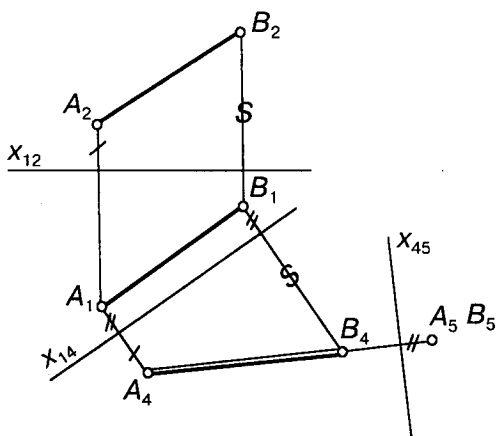


Рис. 4.4

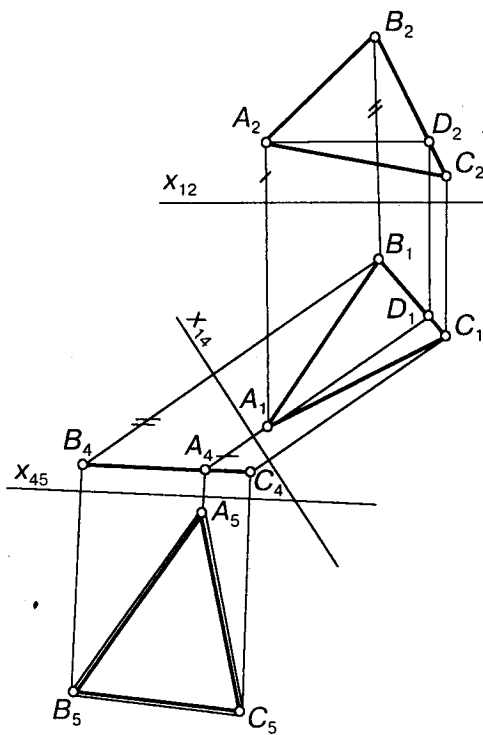


Рис. 4.5

точки розмістяться від осі  $x_{45}$  на відстані, що дорівнює відстані від проекції  $A_1B_1$  до осі  $x_{14}$ .

Визначення натуральної величини трикутного відсіку показано на рис. 4.5. При цьому здійснено дві заміни площин проєкцій. Першою заміною відсік переведено в проєкціовальне положення, а другою знайдено його натуральну величину. Щоб пере-

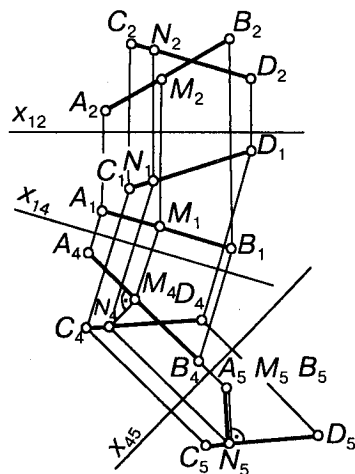


Рис. 4.6

вести відсік у проєкціовальне положення, необхідно й достатньо, щоб будь-яка пряма, що належить йому, спроєкціювалася в точку. За таку пряму доцільно взяти лінію рівня, бо для її перетворення в точку досить однієї заміни. На рисунку у відсіку проведено горизонталь  $AD$ , нову вертикальну площину (її слід  $x_{14}$ ) взято перпендикулярно до горизонтальної проєкції горизонталі ( $A_1D_1$ ). При цьому відсік спроєкціювався у відрізок прямої  $B_4C_4$ . При другій заміні вісь  $x_{45}$  проводять паралельно відрітку  $B_4C_4$ , а від осі  $x_{45}$  відкладають відрізки, що дорівнюють відстаням від точок горизонтальної проєкції до осі  $x_{14}$ . Остаточний вигляд відсіку — трикутник  $A_5B_5C_5$ .

Визначення натуральної величини відстані між двома мимобіжними прямими показано на рис. 4.6. Тут за допомогою двох замін площин проєкцій одну з прямих переводять у проєкціовальне положення. Це є відрізок прямої  $AB$ . Алгоритм використано такий самий, що й на рис. 4.4, тобто спочатку визначають натуральну величину відрізка  $A_4B_4$ , а потім перпендикулярно до нього проводять другу площину, слідом якої є  $x_{45}$ . У результаті двох замін відрізок  $AB$  спроєкціювався точкою  $A_5 \neq B_5$ , а відрізок  $CD$  — відрізком  $C_5D_5$ . Перпендикуляр, опущений з точки  $A_5 \neq B_5$  на відрізок  $C_5D_5$ , є шуканою відстанню.

За допомогою рис. 4.6 можна визначити також дві найближчі точки  $M$  і  $N$  на мимобіжних прямих або кінці їхнього спільного перпендикуляра. Точку  $N_4$  визначають без-

посередньо на відрізку  $C_4D_4$ , а для визначення другої точки з точки  $N_4$  опускають перпендикуляр на натуральну величину відрізка  $A_4B_4$ , дістають точку  $M_4$ . Використовуючи відповідність між проєкціями та переміщаючись у зворотному напрямі, знаходять спочатку їхні горизонтальні проєкції — точки  $M_1$  і  $N_1$ , а потім фронтальні.

### 4.3. Обертання (поворот) навколо проєкціювальних осей. Плоскопаралельне переміщення

Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення способом обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проєкції, показано на рис. 4.7. Через точку  $A$  проведено вертикальну вісь  $i$ , навколо якої повернуто відрізок до положення, паралельного фронтальній площині проєкцій  $\Pi_2$ . Точка  $A$ , що належить осі обертання, залишається на місці, а точка  $B$  повертається навколо вертикальної осі в площині, перпендикулярній до неї, тобто в горизонтальній. Відрізок  $A_2\bar{B}_2$  — його натуральна величина.

Оскільки положення осі обертання не впливає на остаточний результат, то вибір її довільний. Саме такий спосіб показано на рис. 4.8. Щоб встановити відрізок прямої в проєкціювальне положення, треба повернути його навколо “невиявлених” осей, перпендикулярних до площин проєкцій. При першому повороті відрізок зайняв положення, паралельне фронтальній площині, а на полі  $\Pi_2$  дістали його натуральну величину. При другому повороті навколо “невиявленої” фронтально проєкціювальної осі до положення, перпендикулярного до горизонтальної площини проєкцій, відрізок переведено у вертикальне положення.

Визначення натуральної величини трикутного відсіку показано на рис. 4.9. Для цього відсік спочатку за допомогою горизонталі  $AD$  поворотом навколо вертикальної осі встановлено у фронтально проєкціювальне положення, а потім поворотом навколо фронтально проєкціювальної осі — в горизонтальне положення, при якому він зобразиться на полі  $\Pi_1$  в натуральну величину.

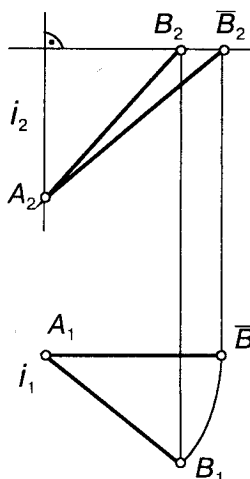


Рис. 4.7

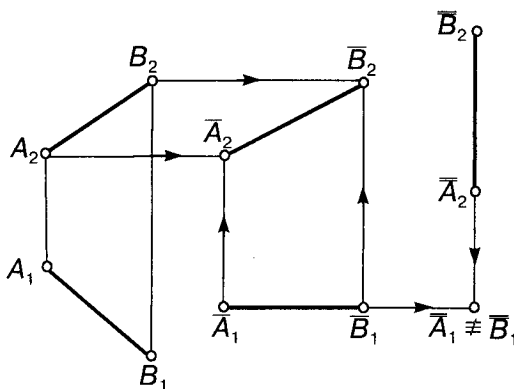


Рис. 4.8

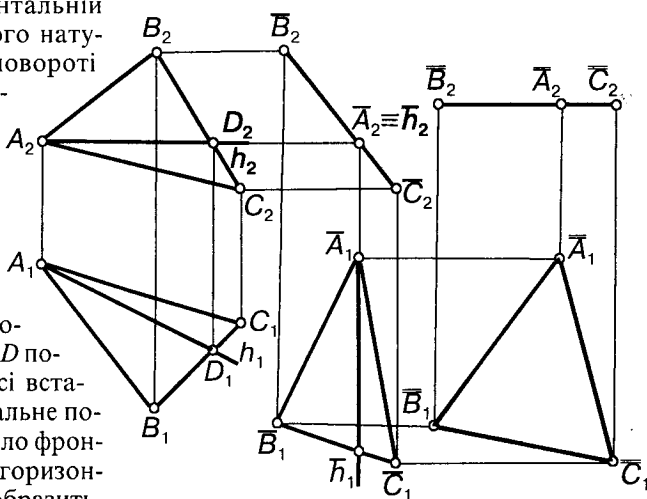


Рис. 4.9

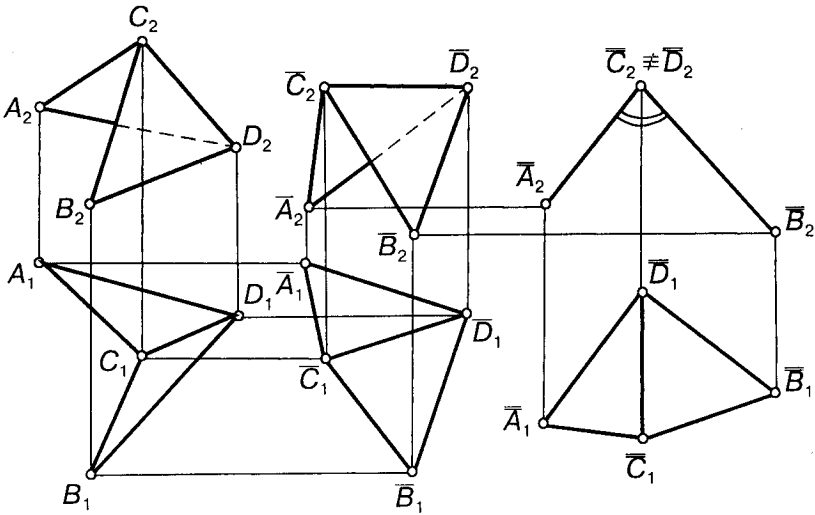


Рис. 4.10

Визначення натуральної величини двогранного кута показано на рис. 4.10. Щоб ребро двогранного кута поставити у проєкціювальне положення, при якому він зобразиться в натуральну величину, виконують два плоскопаралельних переміщення: спочатку навколо фронтально проєкціювальної “невиявленої” осі до переведення ребра в горизонтальне положення, а потім навколо вертикальної “невиявленої” осі до його фронтально проєкціювального положення.

#### 4.4. Обертання навколо ліній рівня

Для розв’язування ряду задач використовують спосіб обертання навколо ліній рівня, тобто горизонталей чи фронталей. Визначення натуральної величини трикутного відсіку обертання навколо фронталі  $AD$  показано на рис. 4.11. При такому обертанні точки  $A$  і  $D$  залишаються на місці, а точки  $B$  і  $C$  обертатимуться у фронтально проєкціювальних площинах, перпендикулярних до фронтальної проєкції фронталі. Для визначення натуральної величини радіуса обертання для точки  $B$  застосовують спосіб прямокутного трикутника. При цьому гіпотенузою роблять засічку на лінії траєкторії руху точки  $B$ . Щоб визначити положення точки  $C$ , користуються точкою  $D_2$ , інцидентною прямої  $BC$ , яка після обер-

тання залишається на місці. Точку  $\bar{C}_2$  визначають як перетин прямої  $B_2D_2$  з траєкторією руху точки  $C$ .

Натуральну величину перерізу трикутної піраміди фронтальною проєкціювальною площиною визначають обертанням перерізу навколо горизонтального сліду  $h_1$  січної площини (рис. 4.12). При цьому горизонтальні проєкції точок  $1_1, 2_1, 3_1$  повертаються у фронтальних площинах, перпендикулярних до осі обертання — сліду  $h_1$ .

Розв’яжемо таку задачу: в площині загального положення, заданій слідами, по-

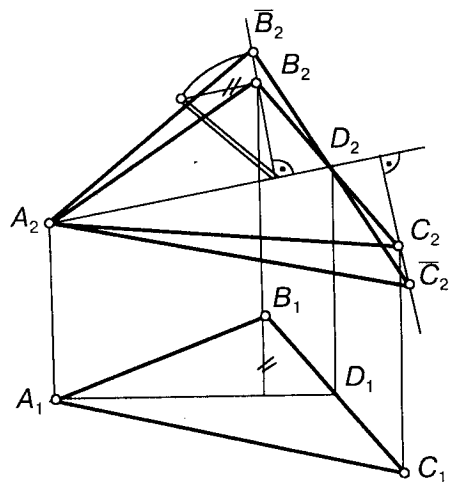


Рис. 4.11

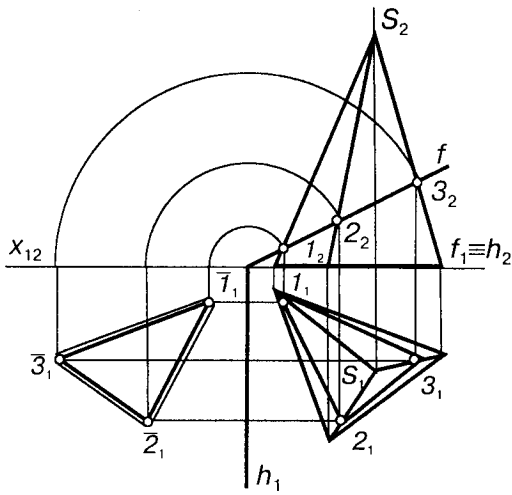


Рис. 4.12

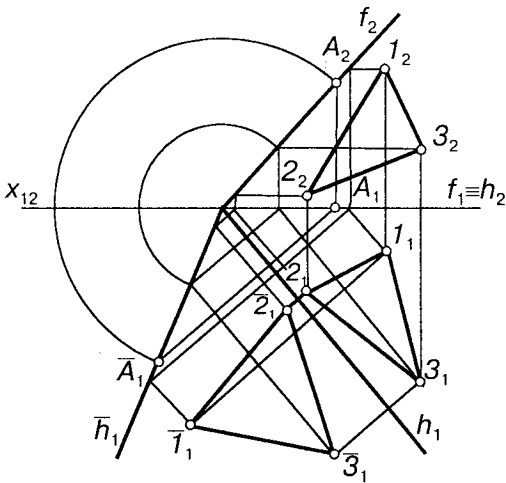


Рис. 4.13

будувати проєкції рівностороннього трикутника. Спочатку суміщаємо задану площину з полем  $\Pi_1$  обертанням навколо горизонтального сліду  $h_1$  (рис. 4.13). Для цього на фронтальному сліді площини беремо довільну точку  $A$  (її горизонтальна проєкція — точка  $A_1$ ). Точку  $A_1$  обертаємо навколо горизонтального сліду в площині, перпендикулярній до цього сліду. Суміщене з  $\Pi_1$  положення точки  $A$  дістанемо, якщо з точки збігу слівів зробимо дугою засічку на траєкторії повороту точки  $A$ . При цьому матимемо точку  $A_1$ .

На суміщеному положенні площини довільно розмістимо рівносторонній трикутник  $\bar{1}_1 \bar{2}_1 \bar{3}_1$ . Через його вершини проведемо суміщені проєкції головних ліній (на рисунку проведені проєкції горизонталей).

Здійснивши поворот у зворотному напрямі, дістанемо горизонтальні та фронтальні проєкції горизонталей, на яких і визначають відповідні проєкції вершин трикутного відсіку.

#### 4.5. Допоміжне косокутне проєціювання

Засновник української школи в галузі нарисної геометрії та інженерної графіки професор С. М. Колотов є автором способу допоміжного проєціювання, зокрема косокутного. Спосіб використовують при розв'язуванні позиційних задач. Суть допоміжного проєціювання полягає у тому, щоб геометрична фігура зайняла проєкціовальне положення, при якому пряма проєціюється в точку, а площина чи поверхня — в пряму чи криву лінію. Зручність та ефективність цього способу значною мірою залежить від вдалого вибору напрямку проєціювання та площини допоміжних проєкцій. Напрямок проєціювання, як правило, має загальне положення відносно площин проєкцій, а за площину допоміжних проєкцій часто беруть фронтальну чи горизонтальну площину проєкцій або площину відповідності, тобто бісекторну площину  $\Pi$  та  $IV$  чвертей простору.

На рис. 4.14 показано випадок, коли профільна пряма перетинається з трикутним відсіком загального положення. Для визначення точки перетину пряму й відсік проєціюють на площину відповідності в напрямі сторони відсіку  $BC$ . Пряма  $BC$  спроеціюється в точку  $B_4 \neq C_4$ , відсік — у лінію  $A_4B_4 \neq C_4$ , а відрізок прямої — у відрізок  $I_4D_4$ . Як перетин двох відрізків дістають допоміжну проєкцію шуканої точки, а саме  $D_4$ . Проєціюванням у зворотному напрямі визначають фронтальну й горизонтальну проєкції: точки  $D_2$  і  $D_1$ .

Перетин двох трикутних відсіків зображено на рис. 4.15. Лінію перетину визначають способом косокутного допоміжного проєціювання на площину відповідності (бісектор-



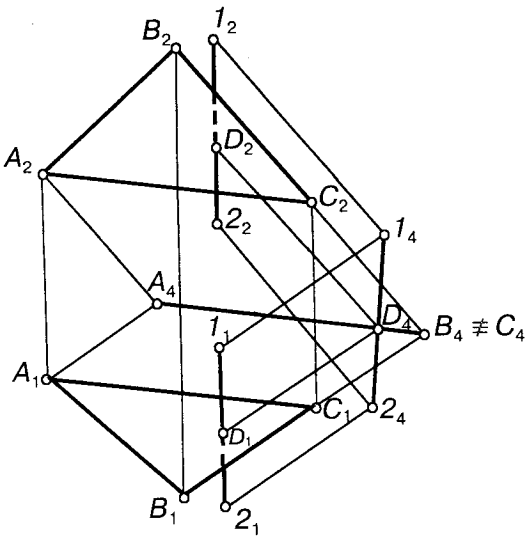


Рис. 4.14

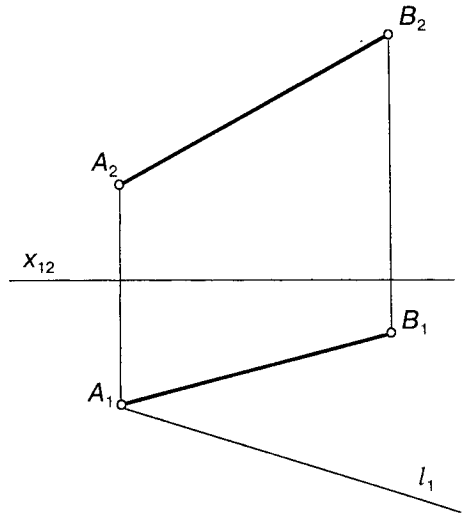


Рис. 4.16

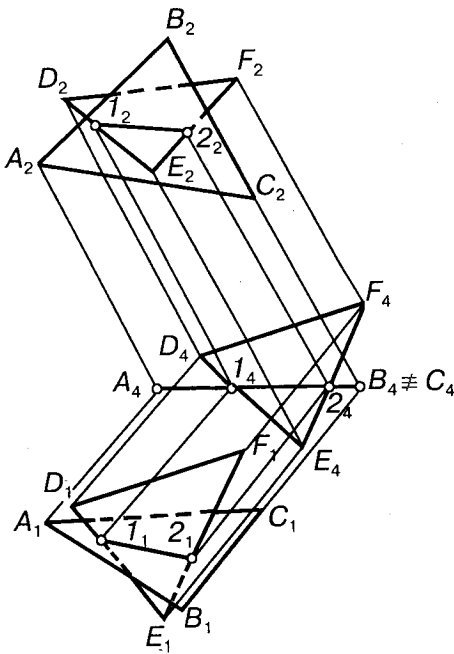


Рис. 4.15

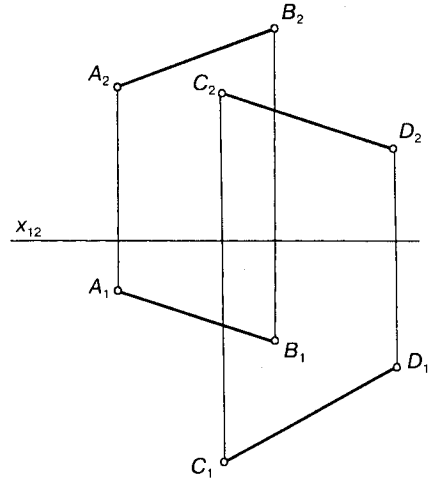


Рис. 4.17

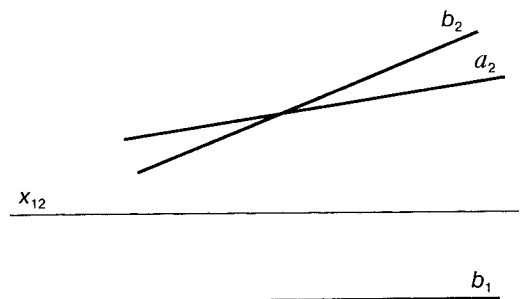


Рис. 4.18

ну площину II та IV чвертей простору). За напрям проєкціювання беруть напрям сторони одного з трикутників  $BC$ . Сторона  $BC$  спроекціюється в точку  $B_4 \neq C_4$ , а весь відрізок  $ABC$  — в лінію  $A_4B_4 \neq C_4$ . У тому самому напрямі на ту саму площину проєкціюється

відрізок  $DEF$ . Його проєкцією є  $D_4E_4F_4$ . Лінією перетину відрізків є пряма  $l_42_4$ . Точки 1 і 2 у зворотному напрямі проєкціюють на відповідні сторони трикутника  $DEF$ . Ураховуючи видність окремих відрізків трикутників, дістають остаточний характер перетину.

### Зпитання та завдання

1. Яка мета перетворення комплексного рисунка?
2. Які чотири задачі є основою розв'язування всіх метричних задач?
3. Для розв'язування яких задач доцільно застосовувати допоміжне проєкціювання?
4. Побудувати квадрат  $ABCD$  за стороною  $AB$  та напрямом  $l_1$  горизонтальної проєкції сторони  $AD$  (рис. 4.16).
5. Побудувати сферу найменшого радіуса, дотичну до мимобіжних прямих, заданих відрізками  $AB$  та  $CD$  (рис. 4.17).
6. Повернути площину трикутника  $ABC$  навколо фронталі, що проходить через точку  $A$  так, щоб кут нахилу його до площини  $\Pi_2$  збільшився вдвоє.
7. Побудувати горизонтальну проєкцію прямої  $a$ , мимобіжної з прямою  $b$  під кутом  $45^\circ$  та віддаленою від неї на 20 мм (рис. 4.18).



## Глава 5 БАГАТОГРАННИКИ

### 5.1. Задання та зображення багатогранників

Перш ніж розглядати зображення предметів та деталей на рисунку, зазначимо, що вони обмежені поверхнями, зокрема багатогранними.

**Багатогранною поверхнею**, або **багатогранником**, називають сукупність кінцевого числа плоских багатокутників, що не лежать в одній площині. Твірні багатокутники називають *гранями*, їхні сторони — *ребрами*, а вершини — *вершинами* багатогранника.

Багатогранники можуть бути замкненими й незамкненими. Для незамкнених багатогранників (наприклад призм і пірамід) задання поверхні її проєкціями зводять, як правило, до задання відріку цієї поверхні. На рис. 5.1, *а* зображено призматичну поверхню, а на рис. 5.1, *б* — багатогранний кут (пірамідальну поверхню), які задано їхніми ребрами.

Дві півплощини, що перетинаються, утворюють двогранний кут. Якщо в будь-якій точці простору перетинається більше ніж два плоских відріки, то в результаті перетину утворюється багатогранний просторовий кут. Якщо всі грані просторового кута лежать по один бік від кожної його грані, то такий кут називають *опуклим*. На рис. 5.2, *а* зображено чотиригранний кут.

Проте спосіб задання проєкціями ребер не є єдиний. Так, пірамідальну поверхню можна задати її вершиною та плоскою ламаною, що не лежать у одній площині, або просторовою ламаною. Ламана є прямою лінією пірамідальної поверхні. Призматичну поверхню можна утворити рухом прямої твірної, напрямленої в невласну вершину поверхні, що перетинає довільну ламану напрямну, як плоску, так і просторову. Невласна вершина призматичної поверхні може бути задана напрямом у просторі.

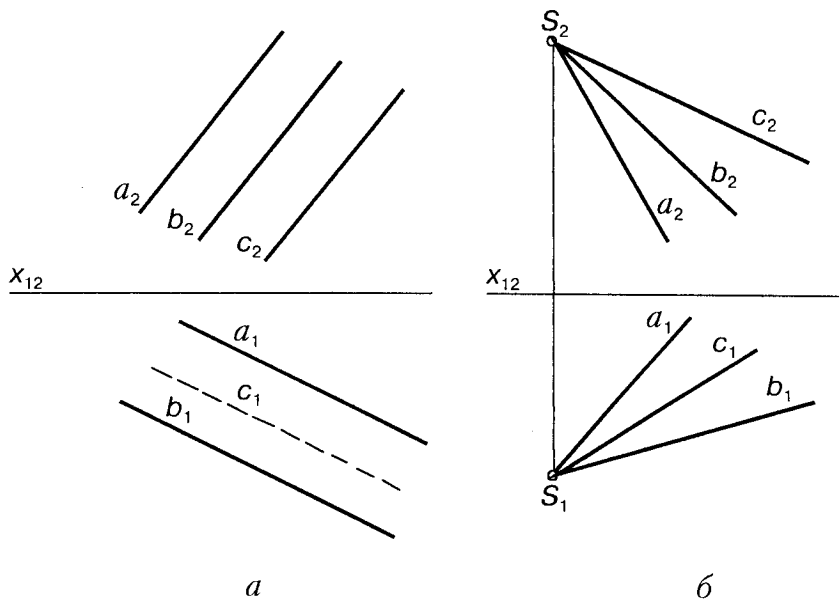


Рис. 5.1

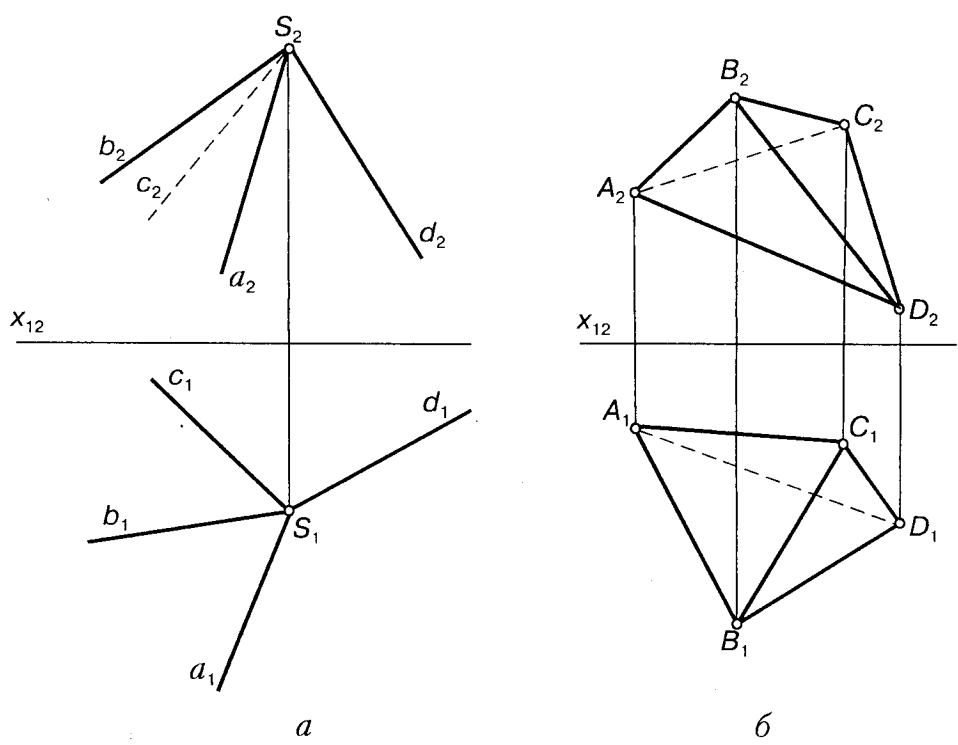


Рис. 5.2

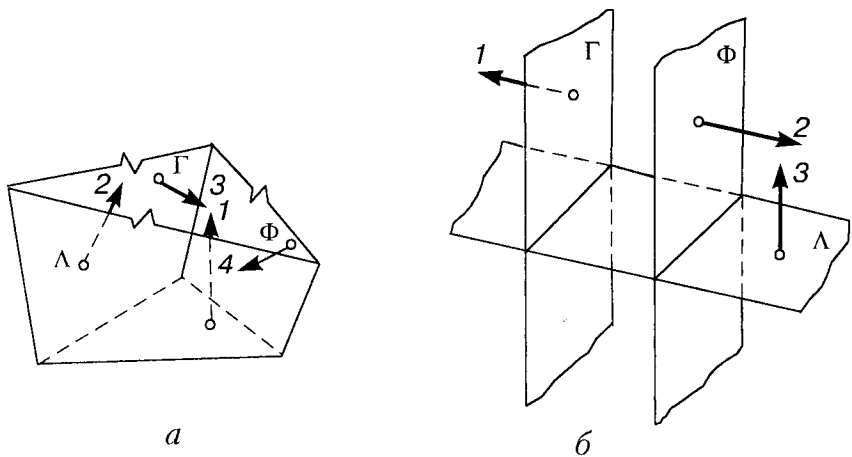


Рис. 5.3

Якщо площини, що утворюють багатогранну поверхню, замкнені, то вони утворюють замкнений багатогранник (рис. 5.2, б). Сукупність усіх ребер багатогранника називають його *сіткою*. Багатогранники повно та однозначно при непроекціовальних гранях задають сіткою їхніх ребер. Багатогранник, розміщений по один бік від площини будь-якої його грані, називають *опуклим*, у протилежному разі — *неопуклим*. Гранями опуклого багатогранника є опуклі багатокутники. Багатогранний кут при будь-якій вершині опуклого багатогранника також опуклий.

Число граней  $\Gamma$ , вершин  $B$  та ребер  $P$  будь-якого опуклого замкненого багатогранника визначають теоремою Декарта — Ейлера:

$$\Gamma + B - P = 2.$$

Опуклий багатогранник можна також задати системою лінійних нерівностей з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z \geq d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z \geq d_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_nz \geq d_n. \end{cases}$$

У тривимірному просторі кожній з нерівностей відповідає півпростір з граничною площиною. Рівняння такої площини можна дістати, якщо змінити знак нерівності на знак рівності. Перетин площин визначає опуклий багатогранник. Область простору може бути замкненою (рис. 5.3, а) або порожньою (рис. 5.3, б). Тут площини задано разом з перпендикулярами до них, що визначають відповідний півпростір.

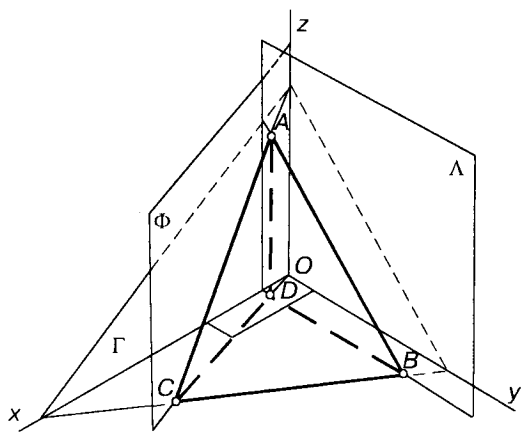


Рис. 5.4

Як приклад розглянемо чотиригранник, заданий системою лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z \leq 18; \\ x \geq 1; \\ x - 3y \leq 0; \\ z \geq 0. \end{cases}$$

На рис. 5.4 зображено чотиригранник, обмежений чотирма площинами. Перша нерівність задає площину загального положення  $\Gamma$ , друга — профільну площину  $\Lambda$ , третя — вертикальну площину  $\Phi$ , що проходить через вісь  $Oz$ , а четверта — горизонтальну площину проекції  $xOy$ . Перетин цих площин визначає ребра та вершини чотиригранника ( $A, B, C, D$ ).

## 5.2. Правильні багатогранники

Із множини багатогранників в окрему групу виділяють правильні опуклі багатогранники, або *тіла Платона*. У таких багатогранників усі ребра, грані, кути (плоскі, двогранні та просторові) рівні між собою. Розрізняють п'ять видів правильних багатогранників:

**тетраєдр** (чотиригранник), гранями якого є чотири рівносторонніх трикутники (рис. 5.5, а). Побудову його доцільно починати з горизонтальної проєкції;

**октаєдр** (восьмигранник), гранями якого є вісім рівносторонніх трикутників (рис. 5.5, б). В окремому положенні на двох проєкціях октаєдр зображується квадратом з діагоналями;

**ікосаєдр** (двадцятигранник), утворений з 20 рівносторонніх трикутників (рис. 5.6). Побудову цього багатогранника також доцільно починати з горизонтальної проєкції, де зображуються дві співвісні правильні п'ятикутні піраміди, основи яких повернуті одна відносно іншої. На полі  $\Pi_1$  обрис ікосаєдра є правильним десятикутником, на полі  $\Pi_2$  проводять спільну вер-

тикальну вісь, з точки  $D_2$  радіусом, що дорівнює стороні п'ятикутника, роблять засічку на осі. Так знаходять вершину верхньої піраміди. З точки  $C_2$  цим самим радіусом роблять засічку на вертикальній лінії зв'язку, що проходить через  $B_1$ , і дістають точку  $B_2$ . Отже, площину основи нижньої піраміди визначено. Вершину нижньої піраміди визначають, зробивши засічку тим самим радіусом з точки  $A_2$ ;

**гексаєдр** (шестигранник), або **куб**, гранями якого є шість квадратів (рис. 5.7);

**додекаєдр** (дванадцятигранник), утворений з 12 правильних п'ятикутників (рис. 5.8). Побудову доцільно починати з горизонтальної проєкції. В результаті дістають нижню основу у вигляді правильного п'ятикутника. З точок нижньої основи проводять бісектриси всіх п'яти кутів. Нижню основу повертають навколо фронтально проєкціювального ребра. Щоб знайти точку  $C_2$ , визначають спочатку її горизонтальну проєкцію  $C_1$  як перетин фронтальної траєкторії обертання точки  $A_1$  з бісектрисою, проведеною через точку  $F_1$ . З точки  $C_1$  проводять вертикальну лінію зв'язку до перетину з дугою радіуса  $F_2A_2$

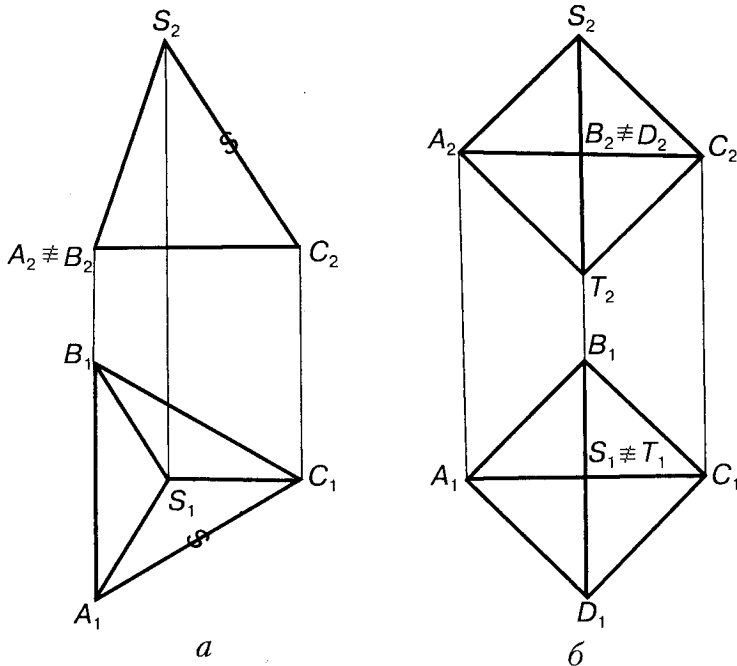


Рис. 5.5

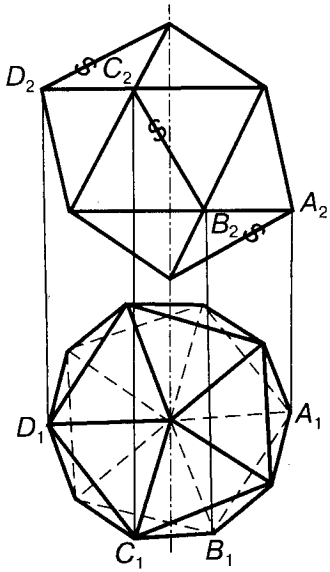


Рис. 5.6

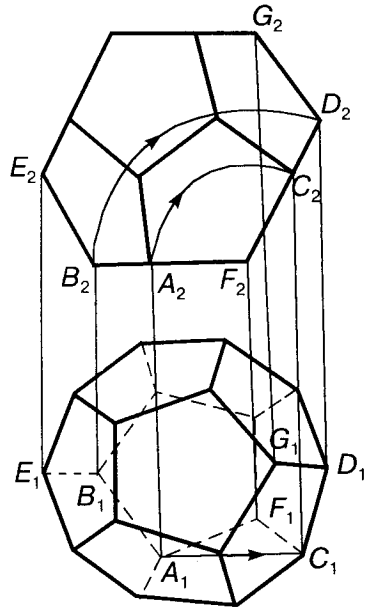


Рис. 5.8

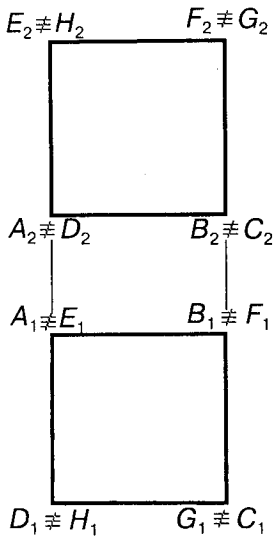


Рис. 5.7

з центром у точці  $F_2$ . У фронтально проекційвальній грані визначають точку  $C_2$ . На горизонтальній проекції точки зовнішнього контуру  $C_1, D_1, E_1$  визначають за допомогою кола, описаного з центра п'ятикутника. Побудову верхньої основи додекаедра показано на рис. 5.8. При цьому роблять засічку  $D_2G_2$ , що дорівнює сторони п'яти-

кутника, на вертикальній лінії зв'язку, проведеної з точки  $G_1$ .

Навколо всіх правильних багатогранників можна описати сферу. Форма кожного з них визначається одним параметром — довжиною ребра. Положення кожного з багатогранників, одна грань якого належить площині  $\Pi_1$ , задається трьома параметрами.

### 5.3. Піраміди, призми, призматоїди

На практиці часто застосовують прості багатогранники. Багатогранник називають простим, якщо: а) всі його грані є простими багатокутниками, тобто такими, в яких жодна пара несуміжних сторін не має спільних точок; б) жодні дві несуміжні грані не мають спільних точок, крім, може, спільної вершини; в) дві суміжні грані мають лише одне спільне ребро і не мають інших спільних точок. Крім правильних багатогранників широко застосовують також піраміди, призми та призматоїди.

**Піраміда** — це багатогранник, усі грані якого, крім однієї, мають спільну вершину, яку називають *вершиною* піраміди (рис. 5.9). Піраміду можна дістати, якщо перетнути багатогранний кут площиною, яка не проходить через вершину кута і перети-

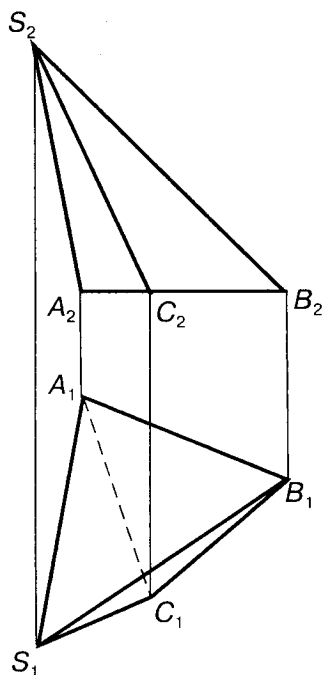


Рис. 5.9

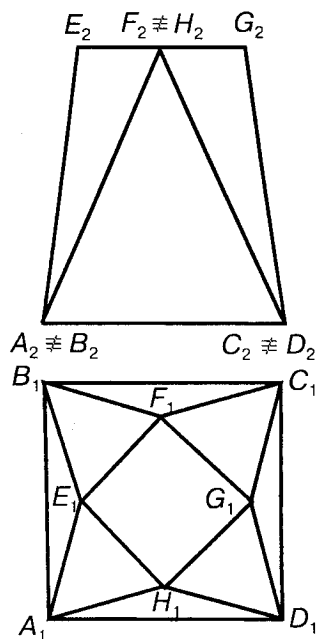


Рис. 5.11

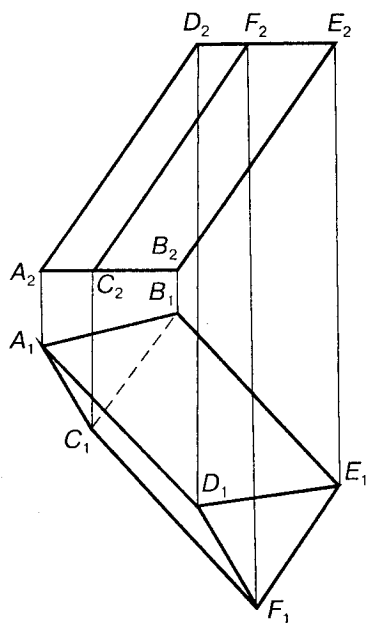


Рис. 5.10

нає всі ребра цієї поверхні. Оскільки всі бічні грані піраміди є трикутниками, піраміда цілком визначається заданням її основи та вершини.

**Призмою** називають багатогранник, обмежений призматичною поверхню та двома паралельними площинами, які не паралельні ребрам призми (рис. 5.10). Ці дві грані називають *основами* призми, грані призматичної поверхні — *бічними гранями*, а її ребра — *ребрами* призми. Основами призми є рівні між собою багатокутники, бічні ребра призми дорівнюють одне одному. Якщо основи не паралельні між собою, то призма є *зрізаною*. Якщо основами призми є перпендикулярні перерізи призматичної поверхні, то призму називають *прямою*, у разі невиконання цієї умови — *похилою*.

Призми та піраміди розрізняють за числом кутів основи. Якщо основою є правильний багатокутник, а висота збігається з віссю, то піраміду й призму називають *правильними*.

**Призматойд** — це опуклий багатогранник, усі бічні грані якого є трикутниками або трапеціями. Основи призматойда паралельні одна одній і є будь-якими багатокутниками. На рис. 5.11 зображено призматойд, основами якого є квадрати  $ABCD$  та  $EFGH$ .

### 5.4. Перетин багатогранників з прямою та площиною

При перетині багатогранників прямою лінією можливі два випадки: 1) грані багатогранника проєкціювальні; 2) грані багатогранника займають загальне положення. У першому випадку точки перетину прямої з гранями відразу визначають на одній з проєкцій, а в другому — слід виконати ще додаткові побудови.

Нехай пряма загального положення  $l$  перетинає пряму трикутну призму  $ABC$  (рис. 5.12). Точки перетину  $l$  і  $2$  прямої з гранями визначають безпосередньо на полі  $\Pi_1$ . Фронтальні проєкції їх визначають за вертикальною відповідністю. Відрізок між точками входу та виходу невидимий на обох проєкціях.

Перетин прямої загального положення з похилою призмою зображено на рис. 5.13. При цьому доцільно застосувати косокутне проєкціювання у напрямі ребер призми на площину її нижньої основи. Призма спроекціюється своєю основою, а пряма — відрізком  $\bar{A}_1\bar{B}_1$ . Перетин допоміжної проєкції прямої з основою визначає допоміжні проєкції точок перетину прямої з гранями призми: точки  $\bar{1}_1$  і  $\bar{2}_1$ . Зворотним проєкціюванням визначають горизонтальні проєкції шуканих точок  $1_1$  і  $2_1$ . Фронтальні проєкції визначають за вертикальною відповідністю.

Перетин прямої з поверхнею трикутної піраміди показано на рис. 5.14. Тут також

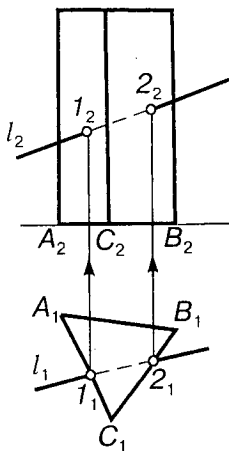


Рис. 5.12

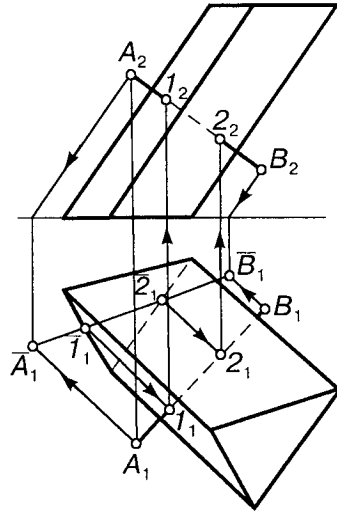


Рис. 5.13

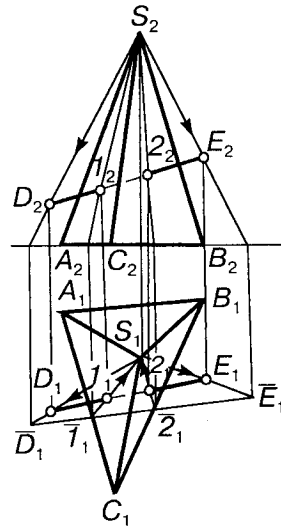


Рис. 5.14

застосовано допоміжне проєкціювання, але не паралельне, а центральне з вершини піраміди  $S$  на горизонтальну площину її основи. При цьому піраміда спроекціюється своєю основою, а відрізок прямої — відрізком  $\bar{D}_1\bar{E}_1$ . У перетині з основою визначають допоміжні проєкції шуканих точок  $\bar{1}_1$  і  $\bar{2}_1$ , які також центральньо повертаються на пряму  $D_1E_1$ . Це точки  $1_1$  і  $2_1$ . Фронтальні проєкції визначають за вертикальною відповідністю або повертають оберне-



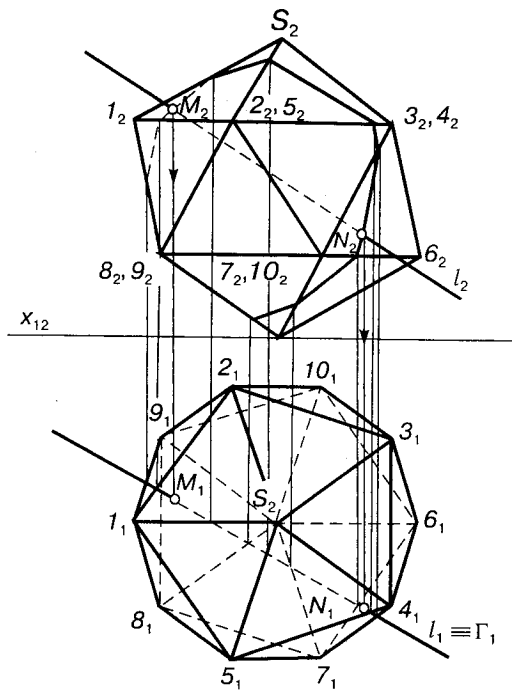


Рис. 5.15

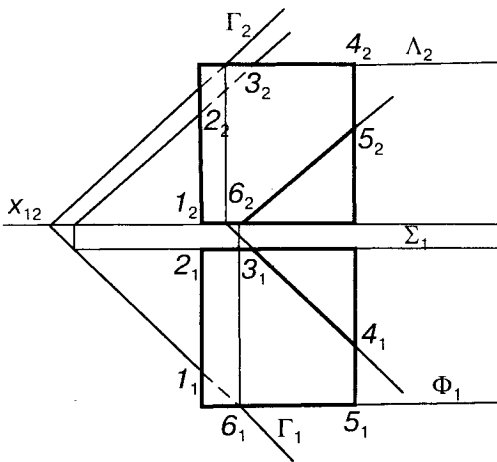


Рис. 5.16

ним центральним допоміжним проєкціюванням на поле  $\Pi_2$ .

Допоміжне проєкціювання доцільно застосовувати для найпростіших фігур: для призм — косокутне; для пірамід — центральне. Для більш складних поверхонь застосовують допоміжні перерізи проєкцію-

вальними площинами. Так, на рис. 5.15 зображено перетин поверхні ікосаедра з прямою загального положення. Тут через пряму проведено вертикальну площину  $\Gamma$ , проєкція якої на полі  $\Pi_1$  збігається з горизонтальною проєкцією прямої. Позначаючи точки перетину площини  $\Gamma$  з ребрами ікосаедра, за допомогою вертикальної відповідності ці точки визначають на полі  $\Pi_2$ . Сполучивши всі точки, дістають десятикутник, який в перетині з фронтальною проєкцією прямої дає дві точки  $M_2$  і  $N_2$ . Горизонтальні проєкції цих точок визначають за допомогою вертикальної відповідності.

Розглянемо перетин багатогранників і площини. Тут можливі чотири випадки: 1) багатогранник і січна площина перебувають у проєкціювальному положенні; 2) багатогранник перебуває в загальному положенні, а площина — в проєкціювальному; 3) багатогранник перебуває в проєкціювальному положенні, а площина — в загальному; 4) багатогранник і січна площина перебувають у загальному положенні. На рис. 5.16 зображено куб, який перетинається з площиною загального положення  $\Gamma$ , заданою слідами. В результаті перетину утворюється шестикутник  $1-2-3-4-5-6-1$ , вершини якого визначають за допомогою проєкціювальних площин, що проходять через грані куба. Так визначено відрізок  $3-4$  за допомогою горизонтальної січної площини  $\Lambda$ , що проходить через верхню грань куба. Ця площина перетне площину  $\Gamma$  по горизонталі, яка в перетині з горизонтальною основою куба визначає точки  $3$  і  $4$ . Відрізок шестикутника перерізу  $5-6$  дістанемо за допомогою фронтальної площини  $\Phi$ , а відрізок  $2-3$  — за допомогою фронтальної площини  $\Sigma$ .

Якщо січна площина займає загальне положення, а призма є трикутною, розміщеною вертикально, то горизонтальна проєкція лінії перетину  $1-2-3$  збігається з горизонтальною проєкцією призми (рис. 5.17). При цьому слід визначити її фронтальну проєкцію. Це можна зробити за допомогою фронталей, проведених через вершини горизонтальної проєкції призми, які в перетині з ребрами призми дадуть точки  $1_2$ ,  $2_2$  і  $3_2$ . На рис. 5.18 зображено похилу трикутну призму, яка перетинається фрон-

тально проєкціовальною площиною. Фронтальна проєкція трикутника перерізу  $1_2 2_2 3_2$  збігається з фронтальним слідом площини. Горизонтальна проєкція перерізу визначена за допомогою вертикальної відповідності.

Перетин похилої трикутної призми площиною загального положення зображено на рис. 5.19. Тут використано косокутне допоміжне проєкціювання на горизонтальне поле проєкцій  $\Pi_1$  у напрямі фронталі площини. При такому проєкціюванні площина спроекціюється своїм горизонтальним слідом  $h_1$ , а ребра призми — пучком паралельних прямих. Напрямок пучка дістанемо, якщо візьмемо, наприклад, на ребрі  $AD$  точку  $D$  та спроектуємо її в напрямі фронталі на поле  $\Pi_1$  у точку  $\bar{D}_1$ . Напрямок  $A_1 \bar{D}_1$  є напрямом двох ребер, що проходять через точки  $B_1$  і  $C_1$ . У перетині цих ребер з проєкцією площини  $h_1$  матимемо три допоміжні проєкції:  $\bar{1}_1, \bar{2}_1$  і  $\bar{3}_1$  точок перетину ребер призми з січною площиною. Зворотним проєкціюванням у напрямі фронталі знаходимо точки  $1_1, 2_1$  і  $3_1$ , а потім — фронтальні проєкції цих точок. Сполучаючи їх, дістанемо трикутник перерізу.

Перетин піраміди площиною загального положення зображено на рис. 5.20. Площину задано двома паралельними прямими  $m$  і  $n$ . Тут застосовано косокутне допоміжне проєкціювання на площину основи піраміди у напрямі цих прямих. При такому проєкціюванні пряма  $m$  спроекціюється точкою  $\bar{m}_1$ , а пряма  $n$  — точкою  $\bar{n}_1$ . Сполучивши ці точки, дістанемо допоміжну проєкцію січної площини. У цьому самому напрямі спроектуємо вершину піраміди  $S$ . Дістанемо точку  $\bar{S}_1$ . Сполучивши її з вершинами основи піраміди, визначимо допоміжні проєкції ребер піраміди, які в перетині з допоміжною проєкцією площини дають точки  $\bar{1}_1, \bar{2}_1$  і  $\bar{3}_1$ . Зворотним проєкціюванням знаходимо горизонтальні й фронтальні проєкції точок на ребрах піраміди. Сполучивши їх, знайдемо проєкції трикутника перерізу.

Перетин площиною загального положення, заданою двома паралельними прямими, і тетраедра загального положення зображено на рис. 5.21. Тут використано косокутне допоміжне проєкціювання на площину відповідності (бісекторну площину  $\Pi$  та IV

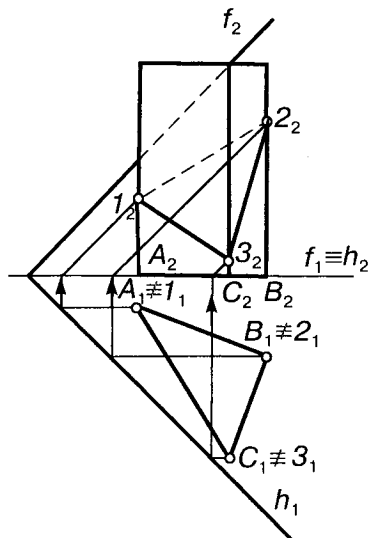


Рис. 5.17

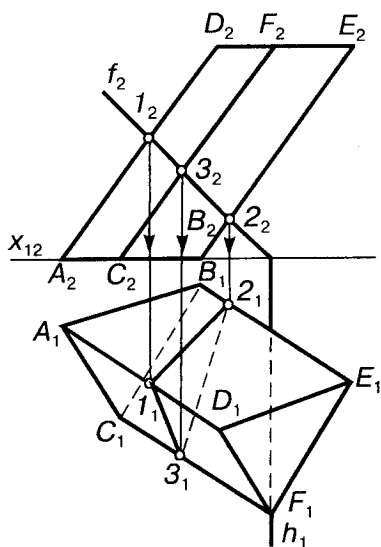


Рис. 5.18

чвертей простору) у напрямі прямих, що задають січну площину. Пряма  $m$  спроекціюється точкою  $m_4$ , а пряма  $n$  — точкою  $n_4$ . Ці дві точки визначають допоміжну косокутну проєкцію площини. В цьому напрямі на цю саму площину проєкціюються вершини тетраедра. Їхніми допоміжними проєкціями є точки  $A_4, B_4, C_4, D_4$ . Сполучивши ці точки відрізками, визначимо косокутну проєкцію тетраедра. Як бачимо, площи-

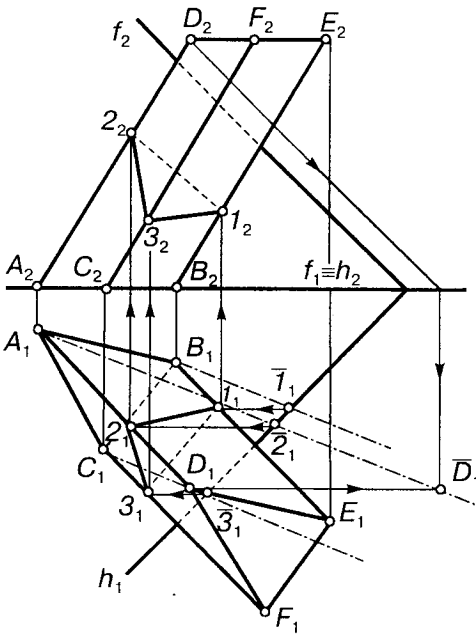


Рис. 5.19

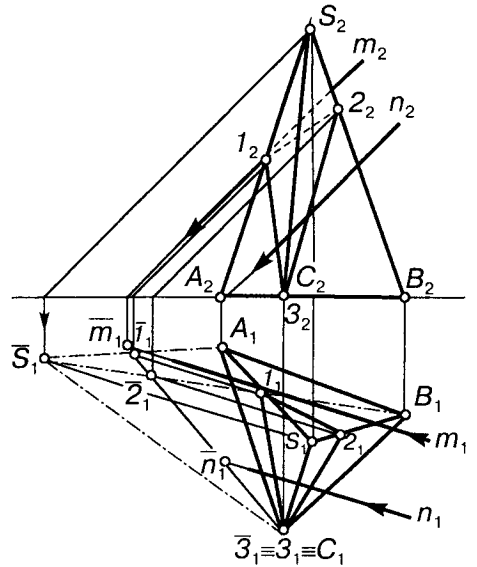


Рис. 5.20

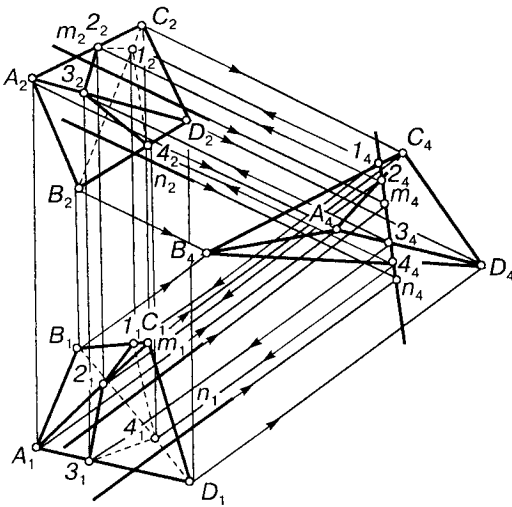


Рис. 5.21

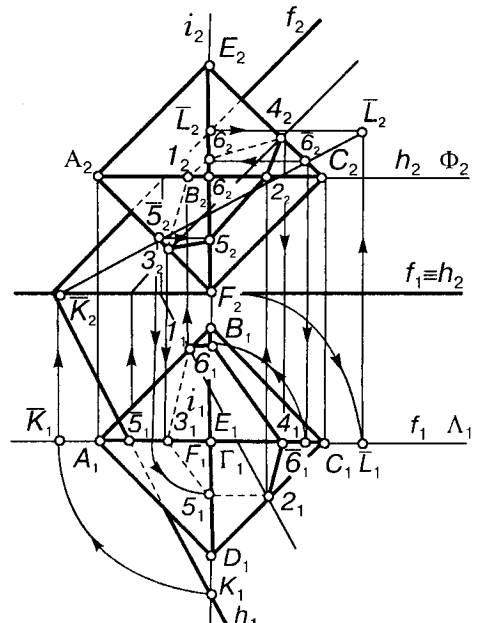


Рис. 5.22

на перетинає тетраедр по чотирикутнику  $1_4 2_4 3_4 4_4$ . Провівши зворотні промені до перетину з відповідними ребрами, знайдемо основні проекції вершин чотирикутника

перерізу. При правильній побудові фронтальні й горизонтальні проекції відповідних вершин чотирикутника лежатимуть на спільних вертикальних ліній сполучення.

Перетин октаедра площиною загально-го положення зображено на рис. 5.22. Щоб знайти фігуру перерізу, використаємо проєкціювальні площини, які проходять через центр октаедра і паралельні трьом площинам проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$ .

Горизонтальна площина  $\Phi$  перетне октаедр по квадрату, а січну площину — по горизонталі. При перетині на полі  $\Pi_1$  квадрата  $A_1B_1C_1D_1$  з цією горизонталлю дістанемо точки  $1_1$  і  $2_1$ . За горизонтальними проєкціями визначимо їх фронтальні проєкції. Щоб знайти точки  $3$  і  $4$  на фронтальному обрисі октаедра, проведемо через нього фронтальну площину  $\Lambda$ , яка перетне октаедр по фронтальному обрисі, а січну площину — по фронталі. Дістанемо точки  $3_2$  і  $4_2$ . Їхні горизонтальні проєкції визначимо за допомогою вертикальних ліній сполучення. Для визначення точок  $5$  і  $6$ , інцидентних профільній площині, яка проходить через центр октаедра, повернемо цю площину на  $90^\circ$  навколо вертикальної осі  $I$ , що проходить через даний центр. При цьому профільний обрис повністю суміститься з фронтальним квадратом, а профільна пряма  $L_1K_1$  перейде в положення  $\bar{L}_1\bar{K}_1$ . За горизонтальною проєкцією цієї прямої визначимо її фронтальну проєкцію  $\bar{L}_2\bar{K}_2$ , яка в перетині з фронтальним обрисом утворить повернуті проєкції шуканих точок  $\bar{5}_2$  та  $\bar{6}_2$ . Відновлюючи їх в профільній площині, дістанемо точки  $5_2$  і  $6_2$ . Сполучаючи послідовно шість точок, матимемо проєкції фігури перерізу.

Перетин додекаедра площиною загально-го положення  $\theta$ , заданою слідами, зображено на рис. 5.23. Для знаходження перерізу використовуємо три горизонтальні січні площини  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  і  $\Phi$ . Площину  $\Gamma$  проведемо через верхню основу додекаедра. Вона перетне площину  $\theta$  по горизонталі, відрізок якої в межах верхньої основи визначає сторону  $A_1B_1$  шуканого перерізу. Площину  $\Lambda$  проведемо через точки  $15$ ,  $13$ ,  $11$ ,  $19$ ,  $17$ . У перетині горизонталі площини  $\Lambda$  з лінією

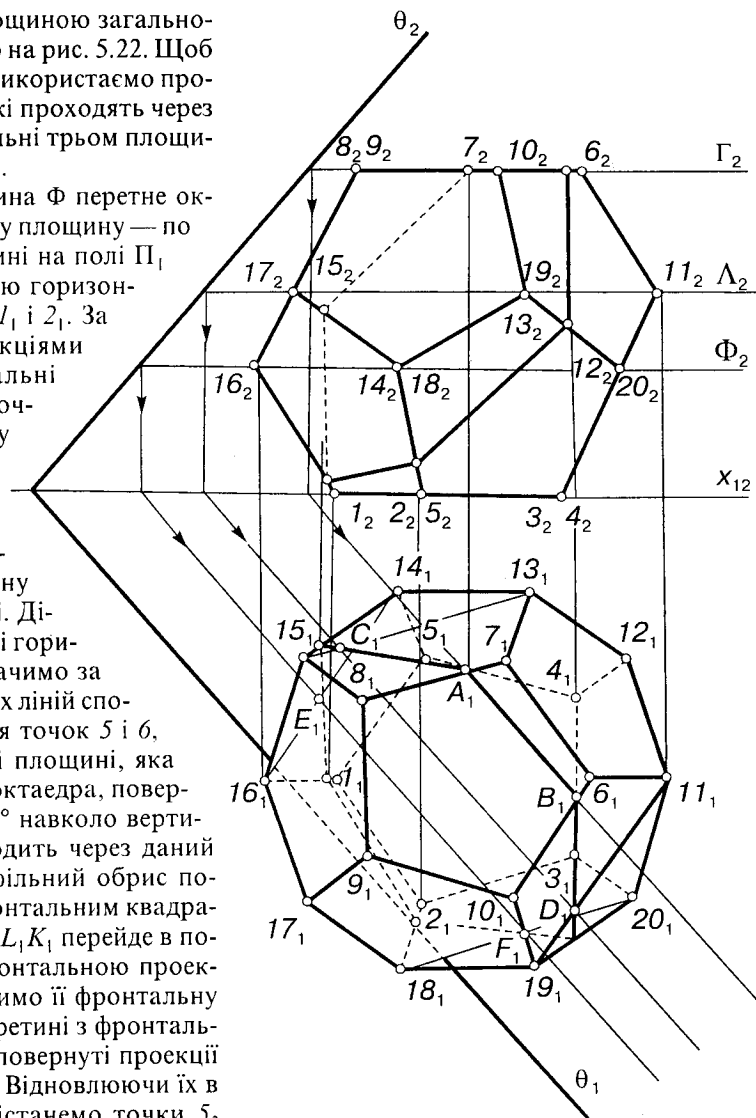


Рис. 5.23

$15-13$  дістанемо точку  $C_1$ , яка разом з точкою  $A$  визначає відрізок в грані  $8-7-13-14-15$ , а в перетині цієї самої горизонталі з відрізком  $11-19$  матимемо точку  $D$ , яка разом з точкою  $B$  визначає відрізок в грані  $6-10-19-20-11$ . За допомогою січної площини  $\Phi$  так само знайдемо точки  $E_1$  і  $F_1$ . Побудову перерізу шестикутника закінчено.

## 5.5. Взаємний перетин багатогранників

Лінію, спільну для двох багатогранників, що перетинаються, називають *лінією взаємного перетину*. Для її знаходження визначають проєкції точок, спільних для багатогранників, що розглядаються. Сполучаючи точки в межах однієї грані відрізками прямих, дістають шукану лінію.

При взаємному перетині можливі два випадки: 1) один з багатогранників перебуває у проєкціювальному положенні; при цьому одна проєкція лінії перетину вже є, залишається визначити другу проєкцію; 2) треба визначити обидві проєкції. У цьо-

му випадку доцільно застосувати допоміжне проєкціювання або спосіб допоміжних січних площин. Ламана лінія перетину двох багатогранників може складатися з однієї замкненої вітки ("урізування") чи з двох замкнених віток ("проникнення").

При перетині граней багатогранника визначають точки перетину ребер одного з них з гранями іншого та навпаки. Знайдені точки сполучають відрізками прямих. Причому сполучати можна лише ті точки, які належать одній грані як одного, так і другого багатогранника.

На рис. 5.24, *а* зображено перетин двох граней пірамідальної поверхні площиною  $\Gamma$  по ламаній 1—2—3, а на рис. 5.24, *б* —

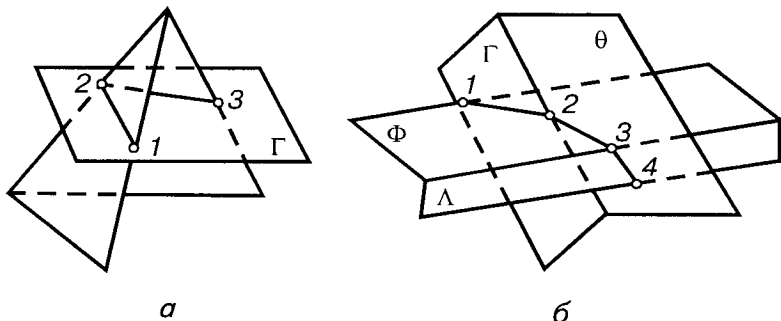


Рис. 5.24

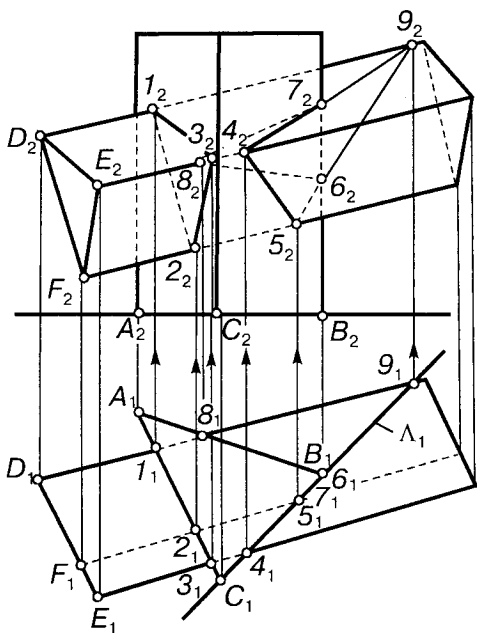


Рис. 5.25

взаємний перетин двогранних кутів, утворених відповідно площинами  $\Phi$  і  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  і  $\theta$ . Лінія перетину є просторовою ламаною 1—2—3—4.

Перетин двох призм, коли одна з них перебуває в проєкціювальному положенні (призма  $ABC$  розміщена вертикально), зображено на рис. 5.25. Розглядаючи горизонтальну проєкцію, бачимо, що це "проникнення", тобто маємо лінії входу та виходу. Призма  $DEF$  перетинається з гранню  $AC$  по трикутнику  $1_1 2_1 3_1$ , фронтальні проєкції якого визначають за вертикальною відповідністю. Лінія виходу є просторовим п'ятикутником  $4-5-6-8-7-4$ , що належить двом вертикальним граням  $AB$  і  $BC$ . При цьому точки  $4$ ,  $5$  і  $8$  визначають так само, як і три попередні, за допомогою вертикальних ліній сполучення. Для знаходження двох точок на вертикальному ребрі  $B$  використаємо вертикальну січну площину  $\Lambda$ , яка збігається з гранню  $CB$  і перетинає похилу призму по трикутнику  $4-5-9$ .

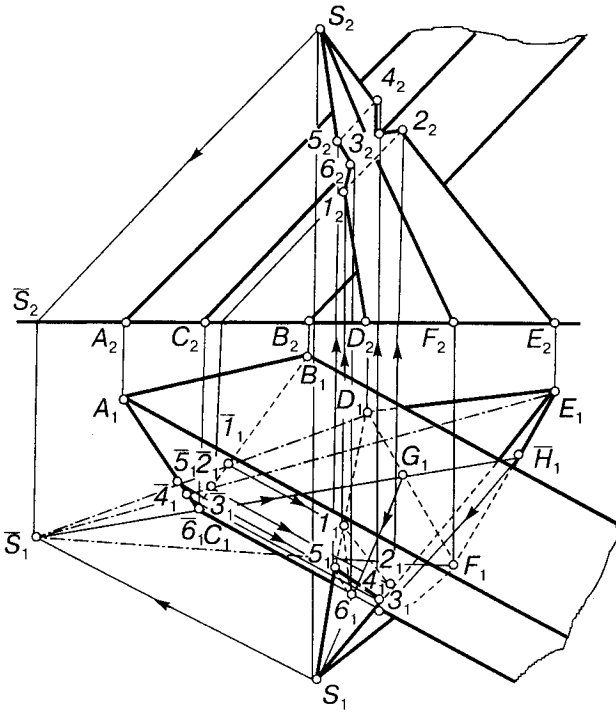


Рис. 5.26

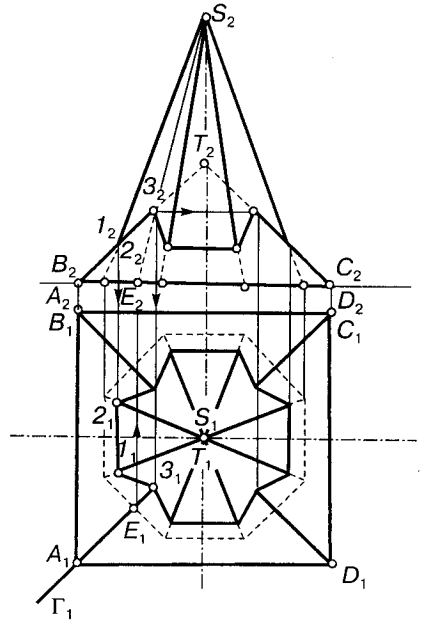


Рис. 5.27

У перетині цього трикутника з вертикальним ребром  $B$  дістаємо точки  $6$  і  $7$ . Знайдені п'ять точок сполучаємо просторовою ламаною. При цьому слід мати на увазі таке правило: *видимим та відповідній проекції буде лише той відрізок лінії перетину, який належить одночасно двом видимим граням.* Тому видимими на фронтальній проекції є відрізки  $1-3$  і  $3-2$ , а також  $4-7$  і  $4-5$ . Визначаючи видимість на полі  $\Pi_2$ , слід також урахувувати перекривання ребер однієї призми гранями іншої.

Перетин трикутної призми та піраміди загального положення зображено на рис. 5.26. Основи цих багатогранників лежать у горизонтальній площині проекції. Тому доцільно скористатися косокутним допоміжним проєкціюванням на площину основ обох фігур у напрямі ребер призми. При цьому призма спроектується основою  $A_1B_1C_1$ , вершина піраміди  $S$  спроектується в точку  $\bar{S}_1$ , яку сполучимо з вершинами основи піраміди точками  $D_1, E_1$  та  $F_1$ . Тому маємо "урізування", піраміда і призма перетинаються по просторовому шестикутни-

ку. Дві його точки належать ребру  $SD$  (точки  $\bar{1}_1$  і  $\bar{5}_1$ ), дві — ребру  $SE$  (точки  $\bar{2}_1$  і  $\bar{4}_1$ ), а дві точки належать ребру призми, що проходить через точку  $C$  (точки  $\bar{3}_1$  і  $\bar{6}_1$ ). Горизонтальні проєкції точок  $1, 2, 4, 5$  визначають зворотним допоміжним проєкціюванням на відповідні ребра. Щоб знайти точки  $3$  і  $6$ , треба через точки  $\bar{S}_1$  і  $C_1$  провести пряму, яка визначить на основі піраміди точки  $G_1$  і  $\bar{H}_1$ . Як перетин твірних піраміди  $SG$  і  $SH$  з ребром призми, що проходить через точку  $C_1$ , дістанемо точки  $3$  і  $6$ . Сполучивши всі знайдені точки, дістанемо просторову ламану  $1-2-3-4-5-6-1$ . Фронтальні проєкції точок знаходять за вертикальною відповідністю. Визначаючи видимість відрізків лінії перетину, користуються наведеним вище правилом.

Перетин двох співвісних пірамід (чотирикутної та восьмикутної) зображено на рис. 5.27. Ліві фронтально проєкційовальні грані перетинаються по фронтально проєкційовальному ребру  $1-2$ , яке безпосередньо визначають на горизонтальній проекції. Враховуючи наявність двох площин

симетрії, знаходимо ще три відрізки лінії взаємного перетину на правій, передній та задній грані чотирикутної піраміди. Для визначення точки перетину ребра  $AT$  з лівою гранню восьмикутної піраміди проводимо через ребро  $AT$  вертикальну січну площину  $\Gamma$ , яка перетне ліву грань піраміди на полі  $\Pi_2$  по лінії  $E_2S_2$ . Як перетин фронтальних проєкцій прямих  $E_2S_2$  та  $A_2T_2$  визначаємо точку  $3_2$ , а внаслідок симетрії — ще три точки на ребрах чотирикутної піраміди. Сполучаючи знайдені точки, дістаємо лінію взаємного перетину пірамід.

### 5.6. Розгортки багатогранників

Для виготовлення гранних форм з листового матеріалу потрібно мати розгортки багатогранників. Дістають ці розгортки за допомогою послідовного суміщення граней багатогранника з площиною.

На рис. 5.28 показано побудову розгортки неправильної трикутної піраміди, основа якої лежить на горизонтальній площині. Розгортку виконано розрізанням по-

верхні піраміди вздовж бічних ребер та суміщенням трьох бічних граней піраміди з площиною її основи. Для суміщення, наприклад, грані  $ASB$ , її обертають навколо горизонтального ребра  $A_1B_1$ . Для цього знайдемо висоту трикутника грані  $ASB$ . Ця висота є гіпотенузою прямокутного три-

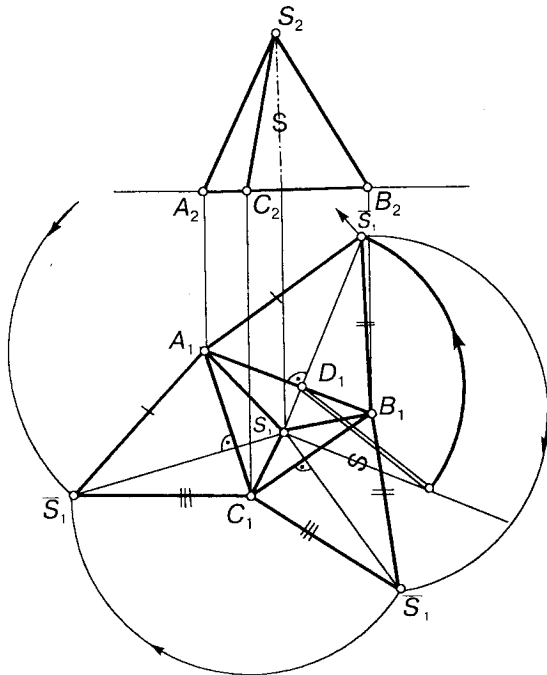
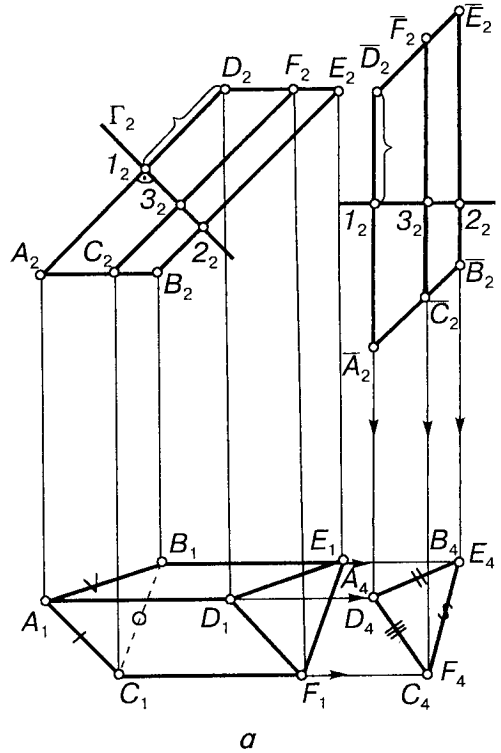
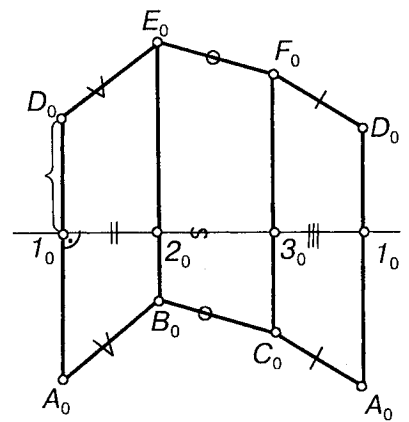


Рис. 5.28



а



б

Рис. 5.29

кутника, один катет якого є горизонтальною проекцією висоти грані  $S_1D_1$ , а другий — висотою піраміди. Вершина піраміди  $S_1$  обертається в площині, перпендикулярній до  $A_1B_1$ . Відкладаючи на цій траєкторії обертання висоту грані, знайдемо суміщену вершину піраміди  $\bar{S}_1$ , а отже, й суміщену грань  $ASB$ . Грані  $CSB$  та  $CSA$  також обертаються відповідно навколо ребер  $CB$  і  $AC$ . При цьому слід скористатися натуральною величиною ребер  $SB$  і  $SA$ , зробивши засічки на траєкторіях обертання відповідними радіусами.

Розгортку похилої трикутної призми зображено на рис. 5.29, а, б. Для зручності побудови розгортки призми доцільно розміщувати так, щоб її бічні ребра були фронтальними, а отже, зображалися на полі  $\Pi_2$  в натуральну величину. Щоб знайти нормальний переріз призми, повернемо її так,

щоб бічні ребра розмістилися вертикально, при цьому на горизонтальній проекції дістанемо фігуру поперечного перерізу. Таким чином, маємо всі дані для побудови натуральних величин бічних граней.

Перетнемо призму фронтальною проекціоувальною площиною  $\Gamma$  перпендикулярно до ребер по трикутнику поперечного перерізу  $1_22_23_2$ .

Нехай січна площина  $\Gamma$  розміщена горизонтально. Відкладемо на ній послідовно відрізки трикутника поперечного перерізу. Від точки  $1$  відкладемо відрізки ребра вгору та вниз, взяті з фронтальної проекції. Відповідні відрізки відкладемо від точок  $2$  та  $3$ . Сполучивши знайдені точки, матимемо шукану розгортку бічної поверхні призми.

Отже, розгортка гранної поверхні будується як сукупність натуральних величин усіх її граней.

### Запитання та завдання

1. Який дістанемо багатогранник, якщо сполучимо центри граней правильного тетраедра?
2. Який дістанемо багатогранник, якщо сполучимо центри граней октаедра? центри граней куба?
3. За якою теоремою можна перевірити правильність виконання проекційного рисунка опуклого багатогранника?
4. У яких випадках доцільно застосовувати спосіб допоміжного проекціювання, а в яких — спосіб допоміжних перерізів?
5. Які плоскі фігури можуть утворитися при перетині тетраедра і площини?
6. Коли ділянка лінії перетину двох багатогранників буде видимою?
7. Побудувати похилу піраміду, основою якої є горизонтальний рівносторонній трикутник зі стороною 40 мм, якщо одна із сторін основи є профільно проекціоувальною прямою, а одне з бічних ребер — відрізком вертикальної прямої завдовжки 50 мм.
8. Побудувати п'ятикутну призму, основами якої є фронтальні правильні п'ятикутники, а бічні ребра — горизонтальні прямі, що утворюють з площиною  $\Pi_2$  кут  $60^\circ$ ; довжина ребра п'ятикутника становить 20 мм, а довжина бічного ребра 50 мм.



✦  
Глава 6  
КРИВІ ЛІНІЇ

Криві лінії широко використовують у різних галузях техніки. У нарисній геометрії криву розглядають як множину точок тривимірного простору, координати яких є функціями однієї змінної, наприклад, довжини кривої. Дістати криві можна як траєкторію руху точки, коли відомо закон руху; як лінію перетину двох кривих поверхонь; як множину точок, що відповідають заданим властивостям, а також графічно, наприклад, як результат експерименту. В нарисній геометрії криві вивчають за їхніми проєкціями.

### 6.1. Властивості проєкцій кривих ліній

Серед різних класифікацій кривих ліній найбільш поширена та, основою якої є природа рівнянь кривих. Залежно від того, алгебраїчними чи трансцендентними є рівняння кривих у прямокутній системі координат, криві поділяють на алгебраїчні та трансцендентні. В свою чергу, алгебраїчні криві розрізняють залежно від порядку кривої, який виражається степенем її рівняння, наприклад, криві другого, третього, четвертого та більш високих порядків. Якщо всі точки кривої належать одній площині, то криву називають *плоскою*; якщо ця умова не виконується, то — *просторовою*.

Для дослідження локальних властивостей кривої користуються такими лініями, як січна, дотична та нормаль. *Січною* називають пряму, що перетинає дугу кривої

в двох точках  $A$  і  $B$  (рис. 6.1). Якщо точку  $B$  наближати до точки  $A$ , то січна переміщатиметься і в граничному положенні зіллється з точкою  $A$ . Таке положення прямої називають *дотичною* до кривої в заданій на ній точці. Точку кривої, в якій можна провести лише одну дотичну, називають *звичайною* (регулярною). Напрям кривої в кожній точці визначають напрямом її півдотичної. Величину викривлення кривої в кожній її звичайній точці визначають кривиною в цій точці. Якщо на кривій взяти дві точки  $M_1$  та  $M_2$  (рис. 6.2) і при цьому точка  $M_2$  наближатиметься до  $M_1$ , то їхні півдотичні утворять кут суміжності  $\alpha$ . Гранницю відношення цього кута до розміру дуги  $\Delta S$ , яка наближається до нуля, називають *мірою кривини*:

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta S}.$$

Кривину вимірюють радіусом кривини, який є радіусом кола, проведеного через три точки, тобто через точку на кривій і дві нескінченно близькі точки по обидва боки від неї. Кривина є величиною, оберненою до радіуса кола кривини  $R$ :

$$k = \frac{1}{R}.$$

Кривою сталої кривини є коло.

Плоска крива має такі локальні характеристики:

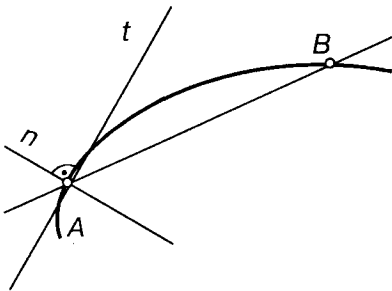


Рис. 6.1

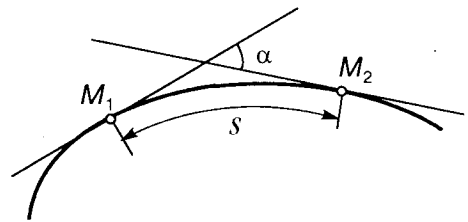


Рис. 6.2

— нульового порядку, тобто значення функції за фіксованим значенням аргументу, іншими словами — відомі координати точки кривої;

— першого порядку — положення дотичної в точці  $M$ , тобто значення першої похідної в цій точці;

— другого порядку — величину радіуса кривини або значення другої похідної в точці  $M$ .

Цим локальним характеристикам можуть відповідати певні геометричні або конструктивні умови. Умова нульового порядку — це проходження кривої через задану точку, умова першого порядку — проведення кривої, яка дотикається до заданої прямої. Кожна з цих умов відповідає заданню одного параметра. Якщо ставиться умова дотику кривої до прямої в заданій на ній точці, то такій умові відповідають

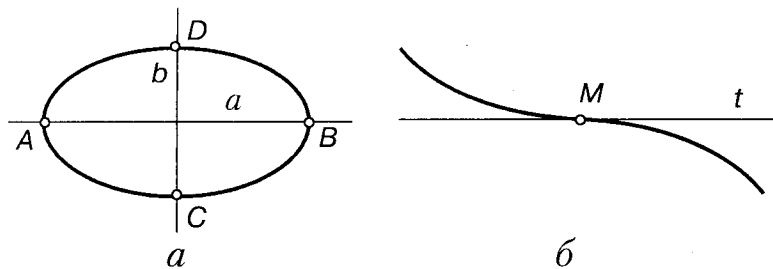


Рис. 6.3

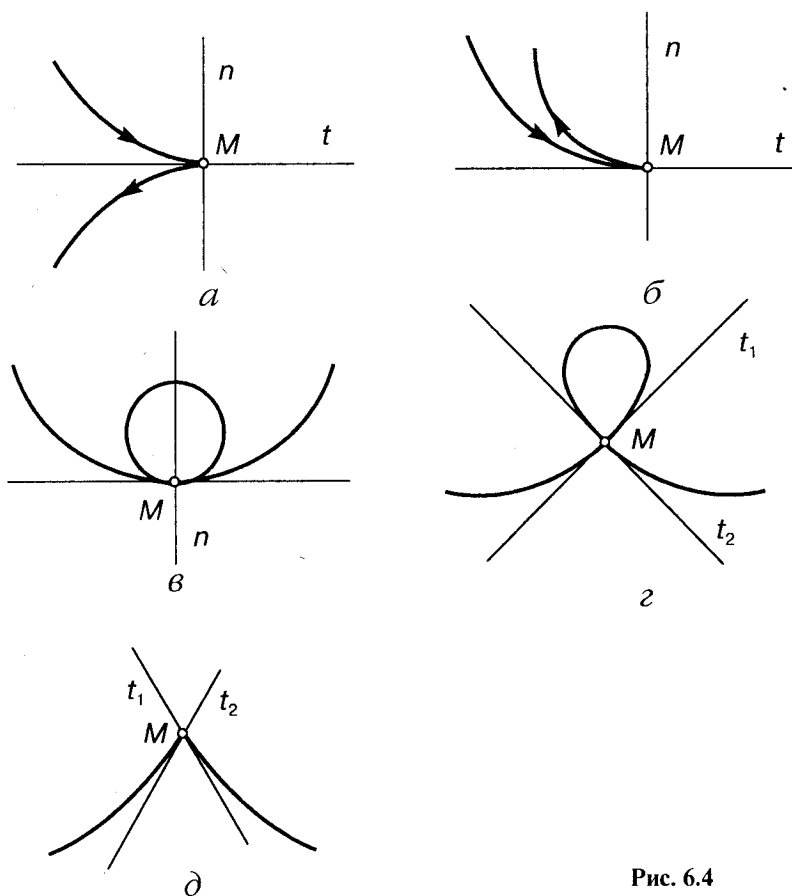


Рис. 6.4

уже два параметри. Сукупність незалежних умов, що однозначно визначають криву, називають її визначником.

На плоских кривих, крім звичайних, розрізняють спеціальні або особливі точки, в якій кривина має найбільше (найменше) значення (рис. 6.3, а) або порушуються властивості дотичної до кривої (рис. 6.3, б). Найбільше значення кривини еліпс має на кінцях великої осі, а найменше — на кінцях малої осі. Відомо, наприклад, що радіус кривини еліпса в кінці його великої осі становить  $\rho_A = \frac{b^2}{a}$ , а в кінці малої осі  $\rho_C = \frac{a^2}{b}$ ,

де  $a$  і  $b$  — півосі еліпса. Кривина дорівнює нулю в так званій точці перегину  $M$  (див. рис. 6.3, б). Невласна точка кривої — це перетин кривої з невласною прямою площини, наприклад, гіпербола має дві невласні точки, які задаються асимптотами.

До особливих точок належать також: точки звороту першого роду, або вістря (рис. 6.4, а); точки звороту другого роду, або дзьоб (рис. 6.4, б); точки самодотику, або повторення (рис. 6.4, в); подвійні, або вузлові, точки, в яких крива сама себе перетинає (рис. 6.4, г); точки злому, де порушується плавність кривої (рис. 6.4, д), та деякі інші.

## 6.2. Плоскі криві.

### Еволюта, евольвента та еквідистанта плоскої кривої

Множина нормалей до плоскої кривої утворює пучок, обвідною якого є крива, яку називають *еволютою* (рис. 6.5). Криву відносно своєї еволюти називають *евольвентою*. На еволюті плоскої кривої міститься однопараметрична множина центрів кривини точок кривої. Дотичні до еволюти є нормаллями у відповідних точках евольвенти, одній еволюті відповідає множина евольвент. Ці криві, особливо евольвенти кола, широко використовують у технічних формах, зокрема профілі зубців зубчастих передач мають форму евольвенти кола (рис. 6.6).

У техніці також часто використовують криві, які називають *еквідистантними*. Такі криві є однопараметричною множиною точок на однакових відстанях від кривої, ці відстані відкладаються по нормаллях.

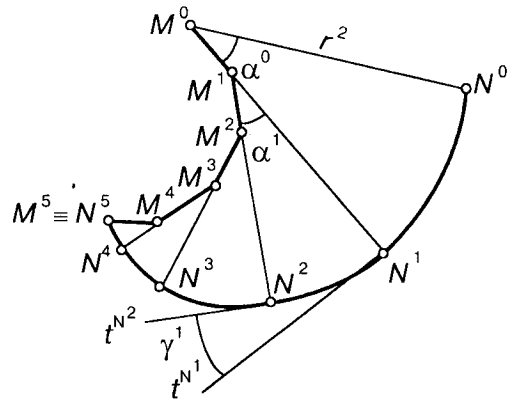


Рис. 6.5

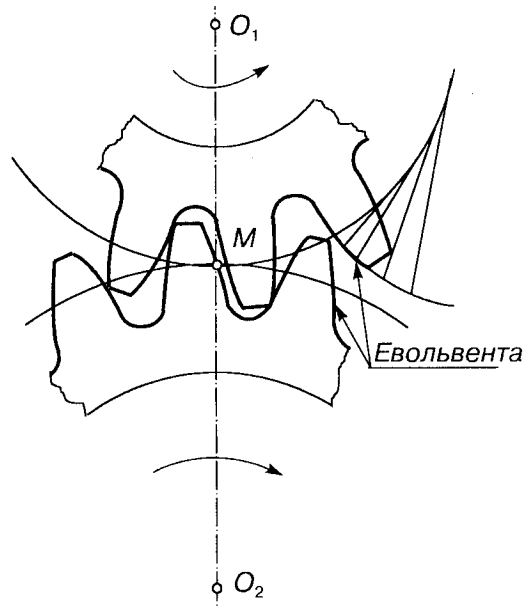


Рис. 6.6

При паралельному проєкціюванні проєкції плоских кривих зберігають деякі властивості своїх оригіналів. Наприклад, зберігається порядок плоскої алгебраїчної кривої та її проєкції. Дотична до кривої проєкціюється дотичною до проєкції. Нескінченно віддалена точка кривої проєкціюється також нескінченно віддаленою точкою.

Маючи проєкції плоскої кривої, треба впевнитися, що вона справді є плоскою. Для цього є простий спосіб використан-

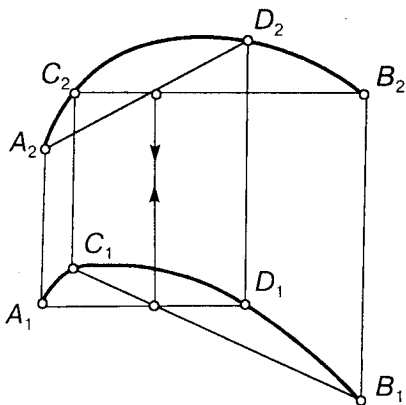


Рис. 6.7

кут нахилу великої осі еліпса по осі  $Ox$ ) і два параметри форми (осі еліпса).

Нехай у загальному рівнянні  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $B = 0$ ,  $C = \frac{1}{b^2}$ ,  $D = 0$ ,  $E = 0$ ,  $F = -1$ , тоді дістанемо рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Якщо в цьому рівнянні  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $B = 0$ ,  $C = -\frac{1}{b^2}$ ,  $D = 0$ ,  $E = 0$ ,  $F = -1$ , то матимемо рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Якщо в загальному рівнянні  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = -p$ ,  $E = 0$ ,  $F = 0$ , то матимемо рівняння параболи

$$y^2 = 2px.$$

Щоб задати еліпс та гіперболу, потрібно п'ять параметрів, для задання параболи досить чотирьох, а для задання кола — трьох параметрів.

Є багато способів побудови кривих другого порядку. Зокрема, еліпс можна задати як множину точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок (фокусів еліпса) є величина стала, що дорівнює  $2a$  або великій осі еліпса.

Гіпербола є множиною точок площини, різниця відстаней від кожної з яких до двох даних точок (фокусів гіперболи) є величина стала, що дорівнює  $2a$  або відстані між вершинами гіперболи.

ня двох прямих, що перетинаються та спираються на точки плоскої кривої. На рис. 6.7 показано відрізок кривої  $AB$ , на якому взято ще дві точки  $C$  і  $D$ , через які проведено дві січні кривої  $AD$  і  $CB$ . У випадку плоскої кривої проекції довільної пари січних перетинаються в точці, проекції якої належать одній вертикальній лінії сполучення.

### 6.3. Криві другого порядку. Інженерний спосіб побудови їх

Криві другого порядку широко застосовують у техніці та будівництві. Це пояснюється простотою побудови їх і аналітичного виразу. Оскільки такі криві можна дістати в результаті перерізу конуса другого порядку площиною, то ці криві називають ще *конічними перерізами*.

Загальне рівняння другого степеня з двома змінними має вигляд:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Якщо всі члени рівняння розділити на вільний член  $F$ , то матимемо рівняння з п'ятьма незалежними коефіцієнтами, тобто крива другого порядку в загальному випадку визначається п'ятьма параметрами. До них належать як параметри форми, так і параметри положення. На рис. 6.8 зображено в декартовій системі координат еліпс. Для його визначення потрібні три параметри положення (два параметри визначають центр еліпса, а один параметр —

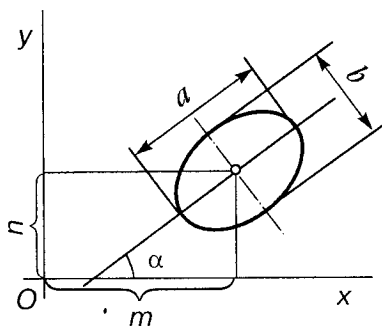


Рис. 6.8

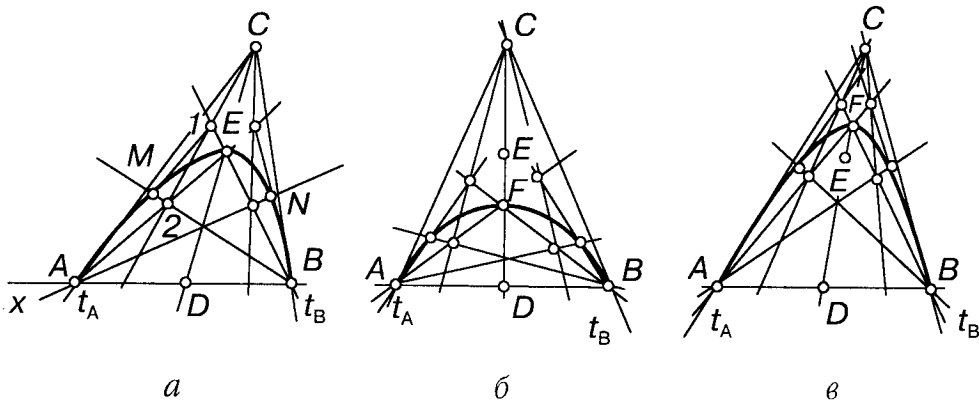


Рис. 6.9

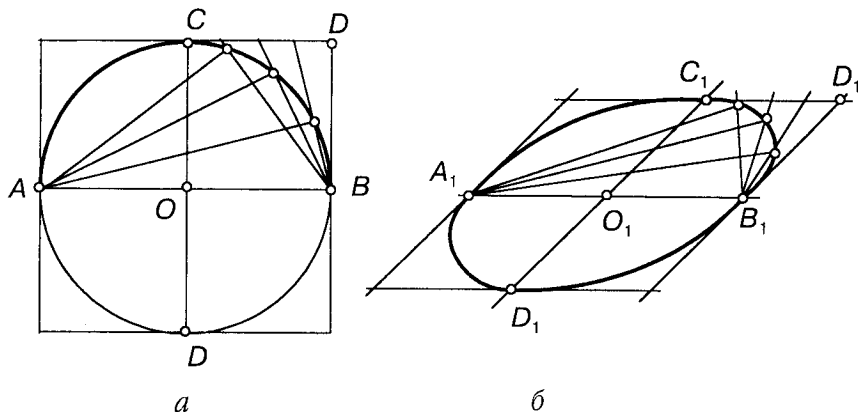


Рис. 6.10

Парабола є множиною точок площини, рівновіддалених від заданої точки (фокуса параболи) та даної прямої (директриси).

З наведених означень випливають способи побудови еліпса, гіперболи і параболи.

Крім загальновідомих способів, в інженерній практиці використовують спосіб побудови, який називають *інженерним*.

Нехай задано дві дотичні прямі з точками дотику  $A$  і  $B$  на них. Цим самим визначено чотири параметри кривої. Сполучимо точки  $A$  і  $B$  та продовжимо дотичні до перетину в точці  $C$ . Проведемо медіану трикутника  $CD$  і знайдемо її середину — точку  $E$ . В трикутнику  $ACB$  тепер можна провести безліч кривих другого порядку. При цьому через будь-яку точку на відрізку  $DE$  пройдуть дуги еліпса, через точку  $E$  пройде єдина парабола (наводимо цей факт без

доведення), а через будь-яку точку на відрізку  $EC$  пройдуть дуги гіперболи.

На рис. 6.9 показано побудову параболи, еліпса та гіперболи. Для побудови параболи через точку  $E$  (рис. 6.9, *a*) проводимо два промені  $AE$  та  $BE$ . Через точку  $C$  проводимо довільну пряму, яка перетне побудовані два промені в точках  $1$  і  $2$ . Тепер досить через точки  $A$  і  $1$  провести одну пряму, а через точки  $B$  і  $2$  — другу. У перетині цих прямих маємо шукану точку  $M$  параболи. Так само визначаємо точку  $N$  справа від медіани  $CD$ .

Для проведення дуги еліпса до чотирьох заданих параметрів (дві дотичні з точками  $A$  і  $B$ ) додається довільна точка  $F$ , що лежить на медіані нижче від її середини. Через неї проводять прямі  $AF$  та  $BF$ , далі побудова аналогічна побудові параболи (рис. 6.9, *б*).

На рис. 6.9, в показано побудову дуги гіперболи. Для цього було як п'ятий параметр взято точку  $F$  на медіані вище від її середини.

Відношення  $\frac{ED}{CD}$  називають *інженерним дискримінантом*. Для параболи  $\frac{ED}{CD} = 0,5$ , для еліпса  $\frac{ED}{CD} < 0,5$ , для гіперболи  $\frac{ED}{CD} > 0,5$ .

Крім розглянутого способу, є ще багато способів побудови кривих другого порядку. Зокрема, на властивості паралельного проєкціювання кола, вписаного в квадрат, можна побудувати еліпс, вписаний у косокутну проєкцію квадрата — паралелограм (рис. 6.10, а, б). При цьому використовують властивість прямих кутів, що спираються на діаметр кола. Ці кути утворюються, якщо розбити відрізки  $CO$  та  $CD$  на однакову кількість рівних частин і провести через точки поділу та точки  $A$  і  $B$  пучки прямих. При паралельному проєкціюванні поділ цих відрізків на рівні частини зберігається, а отже, дістанемо точки еліпса в точках перетину відповідних променів двох пучків прямих.

#### 6.4. Обводи з кривих другого порядку

У різних галузях техніки широко використовують криві, що складаються з дуг кривих другого порядку. Криві, складені з дуг різних кривих, сполучених між собою певним чином, називають *обводами*. Точки стику називають *вузлами обводу*. Гладкість обводу визначають гладкістю в його вузлах. Якщо через вузол проходить дотична до обох дуг, то такий обвід називають *обводом першого порядку гладкості*, якщо, крім спільної дотичної, у вузлі радіуси кривини обох дуг однакові, то такий обвід називають *обводом другого порядку гладкості*. Залежно від вимог, що ставляться до кривих, в інженерній практиці використовують обводи різного порядку гладкості.

Вище зазначалося, що крива задається своїм визначником. Число умов, що визначають криву, називають її *параметричним числом*.

Плоска алгебраїчна крива  $n$ -го порядку має параметричне число, що становить

$\frac{n(n+3)}{2}$ , тобто для кривих другого порядку — це число 5. Для кривих третього порядку воно дорівнює 9 і т. д. При цьому параметрів положення буде три, крім прямої та кола, які мають по два параметри положення.

Дуги обводу можна задавати трьома способами: аналітичним, табличним та графічним. При першому способі криву задають рівнянням, при другому — координатами точок, а при третьому — криву креслять на папері або на іншому носіїві.

Якщо обвід задано координатами його точок, то його називають *дискретним*. При розв'язуванні інженерних задач, пов'язаних із зображенням кривих ліній, на ЕОМ слід від дискретно заданої кривої переходити до її аналітичного виразу. Як правило, цей перехід виконують з певним наближенням, обумовленим допущеннями. В геометричному моделюванні зустрічаються задачі двох видів: а) наближена заміна дискретної кривої більш простою аналітичною; б) проведення кривої через заздалегідь задані точки. Задачі першого виду називають *апроксимацією*, а задачі другого виду — *інтерполяцією*.

На рис. 6.11 показано два найпростіші способи апроксимації кривої. На відрізку кривої взято п'ять точок (рис. 6.11, а), їх сполучено хордами кривої. Якщо ці хорди невеликі, то відхилення утвореної ламаної від кривої може бути в межах заданого допуску. Нехай на довільній кривій взято три точки, що визначають коло (рис. 6.11, б), і знайдено центр кола, яке замінює криву на цьому відрізку. Як і в попередньому випадку, беручи невеликі відрізки, можна всю криву апроксимувати дугами кіл. Крім кіл, криву можна апроксимувати дугами парабол другого порядку та іншими кривими.

Часто при побудові обводів використовують інтерполяцію, яка буває локальною, глобальною та послідовною. При локальній інтерполяції функцію на кожному відрізку обводу визначають незалежно від інших. При глобальній інтерполяції функція на конкретному відрізку залежить від усіх вихідних даних. При послідовній інтерполяції поточне значення функції залежить від попереднього її значення.

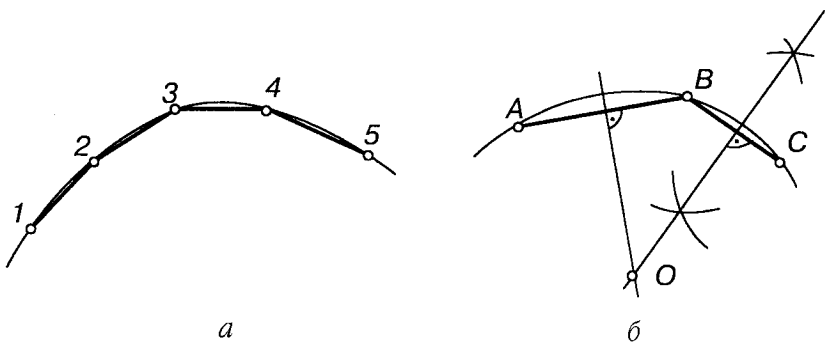


Рис. 6.11

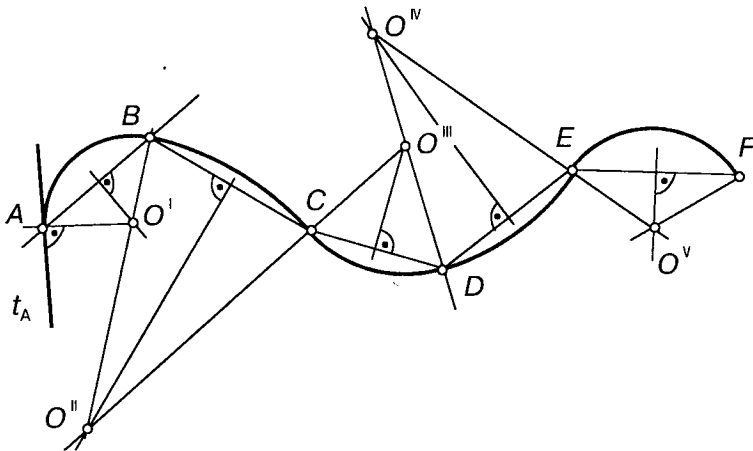


Рис. 6.12

Основна задача інтерполяції полягає в тому, щоб за координатами вузлових точок  $(x_i, y_i)$  деякої кривої знайти коефіцієнти інтерполюючої функції. Серед багатьох способів проведення кривої через задану множину точок виділяють спосіб, який ґрунтується на використанні полінома Лагранжа. Алгебраїчний порядок цього полінома на одиницю менший, ніж кількість заданих точок.

Найпростішим прикладом локальної інтерполяції є заміна кривої відрізками прямих, тобто двопараметричними лініями. Якщо треба побудувати обвід з гладкістю першого порядку, то задають, наприклад, послідовність дотичних з точками дотику на них. Тоді на кожному відрізку обводу є чотири параметри, і обвід можна побудувати з парабол другого порядку.

При глобальній інтерполяції існує залежність між параметрами всіх дуг обво-

ду, тому її виконують тільки аналітичними способами.

При послідовній інтерполяції необхідна інформація для кожної дуги випливає з інформації попередньої дуги. На рис. 6.12 показано побудову обводу з дуг кіл способом послідовної інтерполяції. На площині задано ряд точок і дотична в першій з них. Як відомо, коло є трипараметричною кривою. Отже, для побудови першої дуги маємо необхідне число параметрів. Щоб знайти центр  $O^I$  першої дуги, з точки  $A$  проводять нормаль до дотичної і поділяють відрізок  $AB$  навпіл. Через середину відрізка  $AB$  проводять перпендикуляр, який перетне нормаль у шуканій точці  $O^I$ . Потім проводять першу дугу з центром  $O^I$ . Сполучивши точки  $B$  і  $O^I$ , дістають пряму, на якій лежить другий центр  $O^{II}$ . Щоб знайти його, через середину відрізка  $BC$  проводять перпендикуляр і т. д.

## 6.5. Просторові криві лінії

Як відомо, точки просторової кривої не належать одній площині. Для аналізу просторової кривої використовують так звані *просторовий триєдр*, або *тригранник Френе* (рис. 6.13). На цьому рисунку зображено відрізок просторової кривої  $AB$  та його горизонтальна проекція  $A_1B_1$ . Точку  $C$  відрізка кривої суміщено з початком координат. Уявімо тепер дві точки на кривій, що лежать по обидва боки від точки  $C$ . Як відомо, через три точки можна провести єдину площину. Нехай ці точки прямують до точки  $C$  з обох боків. Тоді в граничному положенні, коли ці точки будуть нескінченно близькими до точки  $C$ , через них пройде площина  $\Sigma$ , що найбільш щільно прилягає до кривої в точці  $C$ . Таку площину називають *стичною*, в ній лежать як дотична до плоскої кривої  $t$ , так і головна нормаль до неї  $n_1$ . У диференціальній геометрії доведено, що крива в околі точки стику лежить по обидва боки від стичної площини.

Вертикальну площину  $\Lambda$ , перпендикулярну до стичної площини, що проходить через нормаль  $n_1$ , називають *нормальною*. У цій площині лежить як головна нормаль  $n_1$ , так і бінормаль  $n_2$ , перпендикулярна в точці  $C$  до стичної площини. Третю площину  $\Gamma$ , перпендикулярну до перших двох, називають *спрямною*. Вона визначається дотичною  $t$  та бінормаллю  $n_2$ .

Якщо плоска крива визначається в кожній своїй точці кривиною, то просторова, крім того, характеризується ще й скрутом. *Скрут* — це границя відношення кута між двома нескінченно близькими положеннями бінормалі до довжини відповідної дуги, коли величина цієї дуги прямує до нуля. Якщо розглядати цей кут у напрямі дотичної, то бінормаль може повертатися за стрілкою годинника або проти неї. Як відомо, в техніці відповідно до цього розрізняють праву й ліву різьби. Радіус скруту в довільній точці  $M$  можна визначити як радіус сфери, що проходить через чотири нескінченно близькі точки просторової кривої в околі точки  $M$ .

Якщо для плоских кривих еталоном кривої, що має сталу кривину в кожній точці, є коло, то для просторових кривих таким еталоном, що має сталі кривину і скрут, є *циліндрична спіраль*, або *геліса*. Ця крива утворюється при рівномірному русі точки вздовж прямої, яка, в свою чергу, рівномірно обертається навколо осі (рис. 6.14). Геліса визначається двома параметрами: кроком  $h$ , що дорівнює висоті циліндра (точка переміститься на величину кроку при повному обертанні твірної навколо осі циліндра), та радіусом циліндра  $r$ . На рис. 6.14 коло на горизонтальній проекції і висоту поділено на однакову кількість рівних частин, у даному випадку — на 12. Обертаючись на  $1/12$  довжини кола, точка піднімається на  $1/12$  по висоті. Фронтальна проекція геліси є синусоїдою. На прямокутнику розгортки циліндра геліса зобразиться його діагоналлю.

Геліса є найкоротшою лінією на циліндрі між його двома точками. Крім геліси, на циліндрі таку саму властивість мають також пряма та коло.

На відміну від плоских кривих, просторову криву задають двома проекціями. При цьому особливі точки на проекціях можуть виявитися звичайними точками на кривій. Спроекціємо криву  $AB$  (див. рис. 6.13) у напрямі дотичної на нормальну площину  $\Lambda$ . Крива  $A_3CB_3$  спроектувалася двома

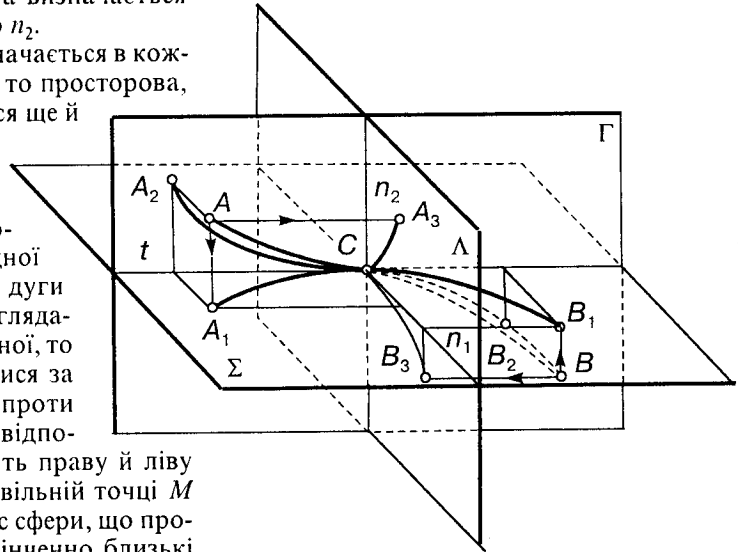


Рис. 6.13



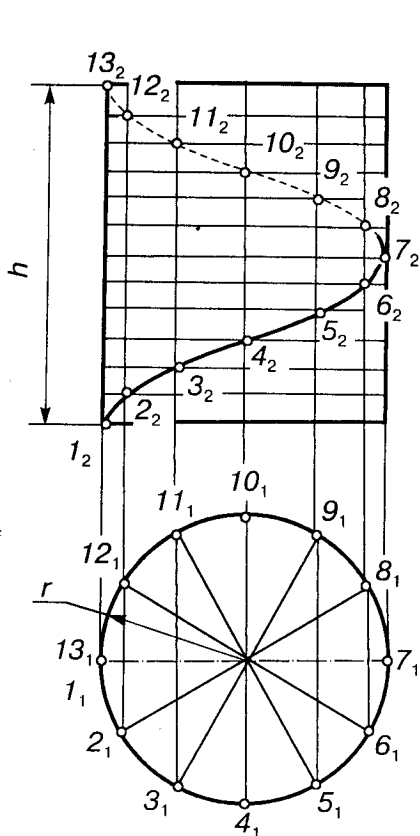


Рис. 6.14

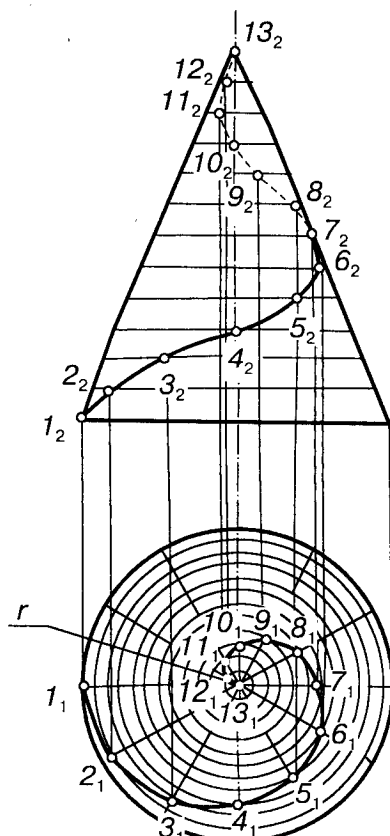


Рис. 6.15

вітками, які в точці  $S$  утворюють точку звороту першого роду. На фронтальній проекції кривої  $AB$  на спрямну площину  $\Gamma$  точка  $S$  буде точкою перегину.

На рис. 6.15 зображено конічну спіраль, яка утворюється при рівномірному русі точки вздовж твірної, що рівномірно обер-

тається навколо осі конуса. Ця просторова крива також визначається двома параметрами: кутом, що утворюється твірною та віссю конуса, і кроком. Горизонтальна проекція конічної спіралі є спіраллю Архімеда, а фронтальна — синусоїдою із затухаючою амплітудою.

### Запитання та завдання

1. Які параметри впливають на форму та розміри еліпса?
2. Яка крива визначається рівнянням  $7x^2 + 3y^2 = 4$ ? Чи можна привести його до канонічної форми?
3. Що називають кривиною плоскої кривої?
4. Чому дорівнює радіус кривини еліпса з півосями  $a = 5$  та  $b = 3$  в кінцях великої та малої осей?
5. Скільки еліпсів, парабол та гіпербол можна побудувати, якщо задано дві дотичні та точки дотику?
6. Як розміщені стична, нормальна та спрямна площини в довільній точці кола?
7. Побудувати тригранник Френе в точці  $4$  (див. рис. 6.14), що належить передній твірній циліндра.



## Глава 7 КРИВІ ПОВЕРХНІ

### 7.1. Каркасно-кінематичний та каркасно-параметричний способи утворення поверхні

У попередніх главах розглядалися елементарні геометричні фігури: точки, прямі, площини, плоскі та просторові криві, багатогранники. Усі ці фігури повно й однозначно зображалися на двох проєкціях. Іншу ситуацію маємо при зображенні кривих поверхонь або їхніх відсіків. У ряді випадків на них немає певних точок або ліній, і для однозначності зображення користуються так званим визначником кривої поверхні.

Є кілька способів задання поверхні. В аналітичній геометрії основним є аналітичний спосіб, при якому поверхню розглядають як множину точок, координати яких у певній координатній системі задовольняють задане рівняння. Залежно від виду рівняння розрізняють алгебраїчні та трансцендентні поверхні. Оскільки метод нарисної геометрії ґрунтується на побудові зображень відповідних фігур, то в ній застосовуються два основні способи утворення поверхні: каркасно-параметричний та каркасно-кінематичний. В обох методах, а точніше інтерпретаціях, на кривій поверхні задається неперервна множина відповідних ліній, які, збільшуючи наочність поверхні, утворюють на ній лінійний або сітчастий каркас. При цьому поверхня розглядається як двопараметрична множина точок або однопараметрична множина ліній. Оскільки зобразити всі точки та лінії кривої поверхні неможливо, то вони зображуються з певним інтервалом. Форму та величину конкретної лінії на поверхні визначають параметром каркаса.

При *каркасно-параметричному способі* зв'язують параметри множини твірних ліній, які в своїй сукупності утворюють поверхню. Для цього використовують параметричне число (див. параграф 2.1), яке дорівнює сумі параметрів положення та параметрів форми кривої поверхні. Задають

умови, що зв'язують  $p - 1$  параметр множини твірних, а один вільний параметр каркаса визначає однопараметричну множину ліній каркаса поверхні.

На рис. 7.1 наведено приклад утворення поверхні з горизонтальних кіл. Задано дві просторові криві  $m$  і  $n$ . Як відомо, множина кіл у тривимірному просторі є шестипараметричною, з них п'ять параметрів — положення і один — форми. Для утворення поверхні слід зв'язати п'ять параметрів. Два параметри встановлюють горизонтальність усіх кіл, ще два параметри визначають центр кожного кола на кривій  $m$ , оскільки з двопараметричної множини виділяється єдина точка — центр. Оскільки крива  $n$  належить поверхні, то в кожній горизонтальній площині визначається певний радіус твірного кола, це зв'яже п'ятий параметр. Шостим вільним параметром є відстань кожної з площин до горизонтальної площини проєкції. Задаючи цей пара-

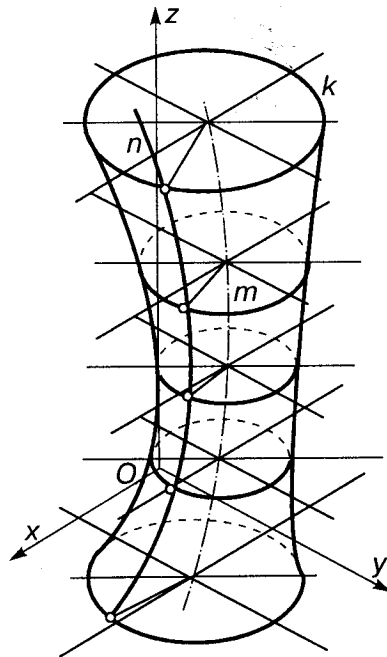


Рис. 7.1

## 7.2. Принципи систематизації кривих поверхонь

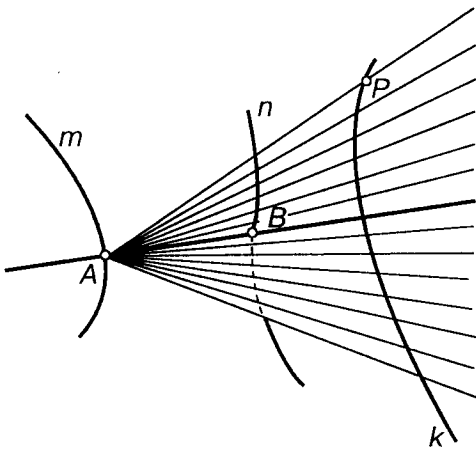


Рис. 7.2

метр, можна дістати неперервний каркас горизонтальних кіл на поверхні.

**Каркасно-кінематичний спосіб** полягає у заданні визначника поверхні і звільненні одного параметра положення твірної лінії. В результаті цього дістають однопараметричну множину ліній, що також утворює неперервний каркас поверхні. Найчастіше цей параметр вилучають, задаючи закон руху твірної.

На рис. 7.2 показано утворення лінійчатої поверхні, коли напрямними є три довільні просторові криві:  $m$ ,  $n$  і  $k$ . На напрямній  $m$  візьмемо довільну точку  $A$ , яка разом з напрямною  $k$  утворює конічну поверхню. Перетин останньої з напрямною  $n$  у точці  $B$  визначає другу точку твірної  $AB$ , яка належить лінійчатій поверхні. Ці три напрямні є визначником поверхні. **Визначником поверхні** називають сукупність умов як необхідних, так і достатніх для задання поверхні. Визначник складається з двох частин: геометричної та алгоритмічної. Найпростіші геометричні фігури мають лише геометричну частину. Наприклад, визначник прямої — дві точки, визначник площини — три точки, що не лежать на одній прямій. Для задання циліндра обертання потрібні вже обидві частини визначника: геометрична (вісь циліндра та одна твірна) і алгоритмічна (вказівка на те, що твірна обертається навколо осі). Поверхню вважають заданою в тривимірному просторі, якщо відносно будь-якої точки цього простору можна сказати, належить вона цій поверхні чи ні.

Різноманітність кривих поверхонь можна систематизувати за різними ознаками (за формою та характером руху твірної, за розгортваністю на площину тощо). При цьому часто одна й та сама поверхня може належати до різних класів чи груп. Так, циліндр обертання можна віднести й до лінійчатих, і до циклічних поверхонь, утворених рухом кола. На рис. 7.3 наведено одну з можливих загальних схем систематизації. За цією схемою всі поверхні поділяють на три класи: утворені каркасно-кінематичним способом; утворені каркасно-параметричним способом; подані дискретним каркасом, тобто наближено.

Перший та другий класи залежно від виду твірної поділяють на два підкласи: лінійчаті поверхні, утворені прямими лініями; криволінійчаті поверхні, утворені кривими лініями сталої чи змінної форми. Поверхні, подані дискретним каркасом, також поділяють на два підкласи: подані лінійним та точковим каркасами. Дві або три сім'ї лінійних каркасів утворюють сітчастий каркас. Ще нижчий рівень систематизації, названий групою, поділяє поверхні на розгортні та нерозгортні, а також на поверхні обертання, гвинтові та паралельного перенесення (трансляційні). Щодо каркасних поверхонь, то розрізняють поверхні, подані регулярним та нерегулярним каркасами. Кожна група містить певну множину поверхонь.

Найбільш поширеними є поверхні, утворені каркасно-кінематичним способом з твірними лінійчатої чи криволінійчатої форми. Як уже зазначалося, найзручніше задавати поверхню за допомогою визначника, який дає змогу будувати на поверхні неперервну множину ліній. Так називають множину ліній, які доповнюють поверхню таким чином, що через довільну точку поверхні проходить одна з ліній множини.

Іноді виникає задача перезадання каркаса, тобто перехід від множини одних ліній до множини інших. Наприклад, на конусі другого порядку можна задати множини всіх кривих другого порядку, тобто каркас кіл, еліпсів, парабол, гіпербол та прямих, як вироджених кривих другого порядку.

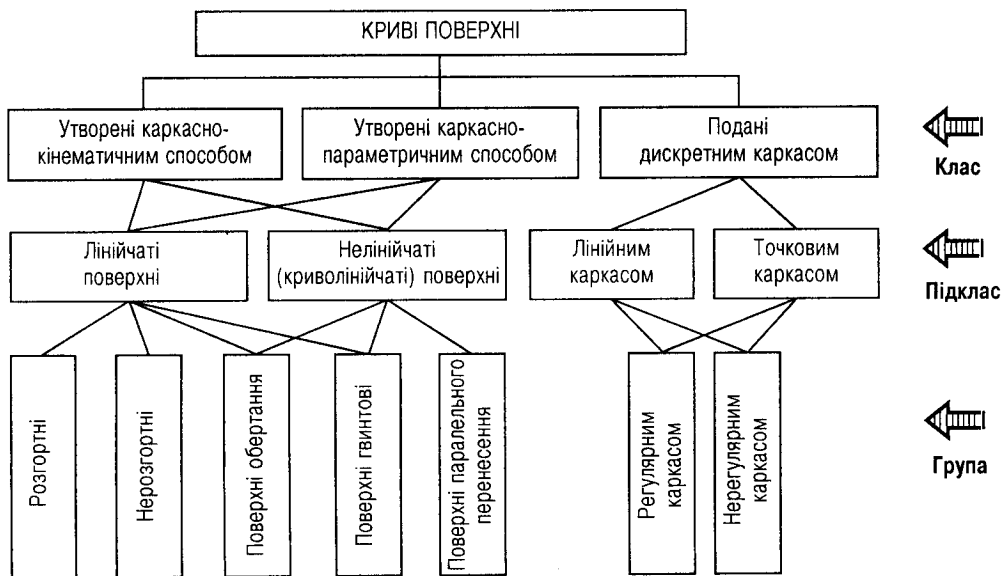


Рис. 7.3

### 7.3. Розгортні та нерозгортні лінійчаті поверхні

*Лінійчатою* називають поверхню, утворену прямою лінією. При каркасно-параметричному способі утворення множина прямолінійних твірних поверхні виділяється заданням певного числа параметрів, а при каркасно-кінематичному способі прямолінійна твірна при русі перетинає в загальному випадку три напрямні (рис. 7.4, а...в). Залежно від виду та розміщення кривих і прямих напрямних у просторі дістають ту або іншу лінійчатую поверхню.

Лінійчаті поверхні залежно від того, чи можна їх розгорнути на площину без розривів і складок, поділяють на розгортні та нерозгортні. Якщо дві нескінченно близькі прямолінійні твірні перетинаються у власній чи невластній точці, то поверхню вважають *розгортною* (рис. 7.5, а, б). Якщо ці твірні мимобіжні, то поверхня *нерозгортна*.

На рис. 7.5, в показано поверхню з ребром звороту, або торс. Тут ребром є циліндрична спіраль, або геліса. При утворенні цієї поверхні є ніби-то протиріччя, а саме: немає визначника у вигляді трьох напрямних. Проте слід узяти до уваги, що тут пря-

молінійні твірні не просто перетинають гелісу, а є дотичними до неї, а ця умова замінює дві інші напрямні. Утворення поверхні розгортного гелікоїда показано на рис. 7.5, в. Усі дотичні до геліси мають сталий кут нахилу до площини  $\Pi_1$ , що дорівнює куту, який розгортка геліси у вигляді прямої утворює з горизонтальним напрямом. Цей кут зобразиться в натуральну величину, якщо провести дотичну до геліси в точці  $Z$ . За вертикальною відповідністю визначають піддотичну  $t_1$ . Оскільки дотичну проведено з точки  $Z$ , яка віддалена від основи циліндра на  $2/8h$ , то піддотичну поділено на дві рівні частини, кожна з яких відповідає збільшенню піддотичної при зміщенні точки на  $1/8h$  по висоті. Лінія перетину розгортного гелікоїда з горизонтальною площиною є евольвентою кола. Такий гелікоїд називають ще *евольвентним*. На рис. 7.5, в показано лише одну полу гелікоїда, друга пола утворюється продовженими вгору дотичними. Геліса у цій поверхні є ребром звороту, тобто множиною точок звороту. Якщо перетнути утворену поверхню площиною в області ребра звороту, то кожна пола перетнеться по кривій, і ці дві криві утворюватимуть точку звороту першого роду.

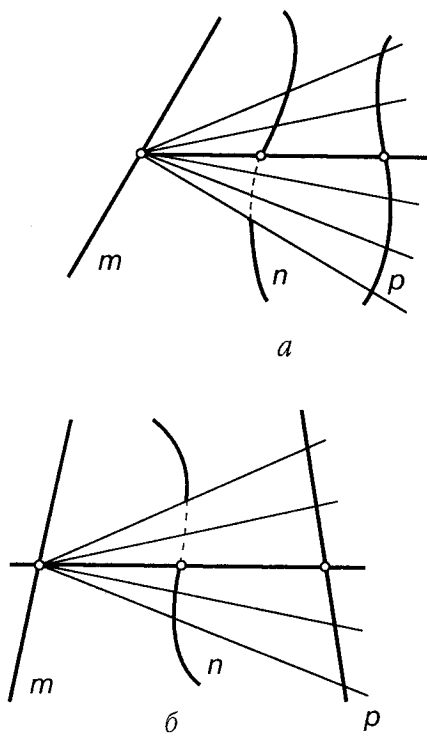


Рис. 7.4

Розглянемо тепер нерозгортні лінійчаті поверхні. Як було показано, лінійчатую поверхню можна дістати рухом прямої лінії по трьох напрямних лініях, в загальному випадку, кривих.

Залежно від виду та положення напрямних можна дістати безліч різних лінійчатих поверхонь. Одна з напрямних, зокрема, може бути невласною. Якщо це невласна пряма напрямна, то вона задається площиною паралелізму, якій паралельні всі твірні поверхні. На рис. 7.6 зображено дві мимобіжні прямі  $m$  та  $n$  і горизонтальну площину паралелізму  $\Gamma$ , яка замінює невласну пряму напрямну. При невласній кривій напрямній її часто задають напрямним конусом, тоді кожна твірна поверхні паралельна відповідній твірній цього конуса.

Алгебраїчні лінійчаті поверхні можна задати й аналітично. Порядок такої поверхні залежить від порядку кривих напрямних, його визначають за формулою

$$n = 2n_1n_2n_3,$$

де  $n$  — порядок поверхні;  $n_1, n_2, n_3$  — порядки напрямних ліній.

Якщо напрямними є, наприклад, дві прямі та крива другого порядку, то утворена лінійчатая поверхня має четвертий порядок. Якщо всі три напрямні є прямими, то поверхня матиме другий порядок. Таку поверхню називають *однопорожнинним*, або *лінійчатим*, *гіперboloїдом* (рис. 7.7). Визначником гіперboloїда є три мимобіжні прямі  $m, n, k$ . Для зручності побудови твірних одну з напрямних  $m$  візьмемо в проєкціовальному положенні. Хоча поверхню гіперboloїда повністю задано визначником,

для підсилення її наочності проведемо ряд твірних гіперboloїда. Це зручно зробити на горизонтальній проєкції, фіксуючи точки перетину твірних з напрямними  $n$  і  $k$  та визначаючи їхні відповідні фронтальні проєкції, через які проходять фронтальні проєкції твірних.

Якщо із серії твірних вибрати будь-які три та зробити їх напрямними, то дістанемо таку саму поверхню. Особливістю цієї поверхні є те, що вона має найвужче місце, яке називають *горлом*, або *стрикційною лінією*. Ця крива в загальному випадку є еліпсом, тобто множиною точок, в яких одна твірна розміщена найближче до сусідніх твірних. Іншими словами, всі перпендикуляри, що вимірюють відстань між сусідніми твірними, дотикаються до цього еліпса.

На рис. 7.8 наведено ще один приклад такої поверхні. Тут добре видно горло, або стрикційну лінію, у вигляді еліпса. Особливістю поверхні є ще те, що через кожен її точку проходять дві твірні, які належать до різних лінійчатих сімей. Якщо стрикційною лінією є коло, то лінійчатий гіперboloїд називають *однопорожнинним гіперboloїдом обертання*. Цю поверхню широко застосовують у техніці та будівництві для конструкцій висотних споруд (башт, шогл) і називають *баштою Шухова* (за ім'ям видатного інженера, який вперше застосував цю конструкцію в будівництві).

Поверхню, визначником якої є дві власні прямі та одна невласна, що замінюється

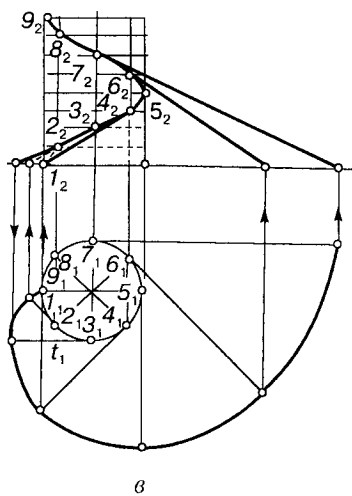
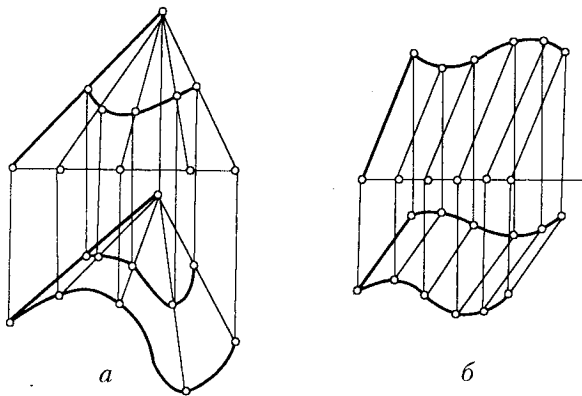


Рис. 7.5

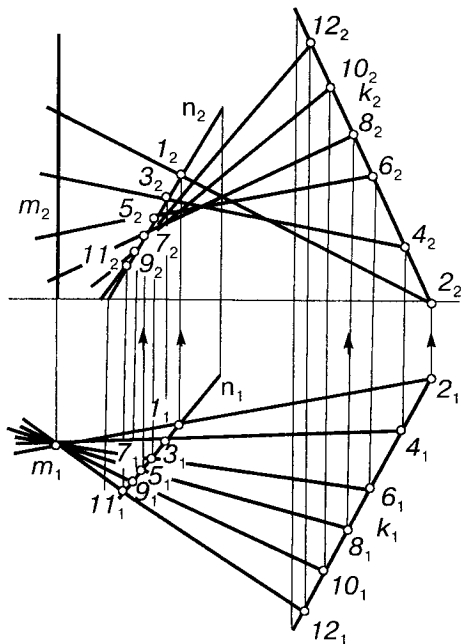


Рис. 7.7

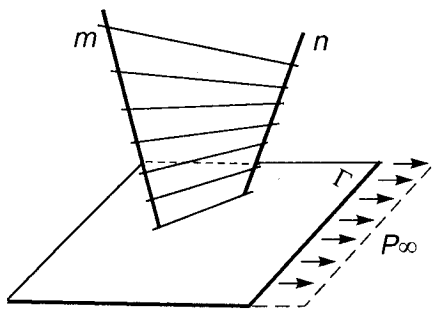


Рис. 7.6

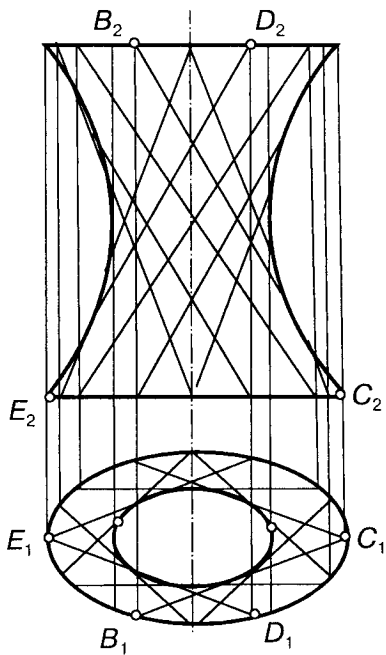


Рис. 7.8

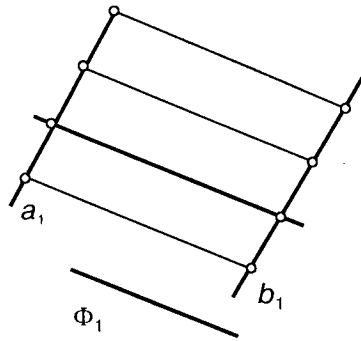
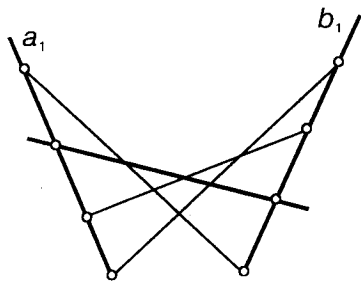


Рис. 7.9

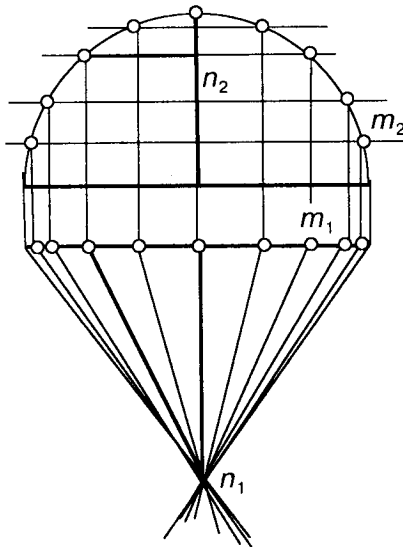


Рис. 7.10

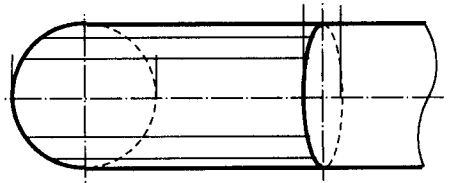
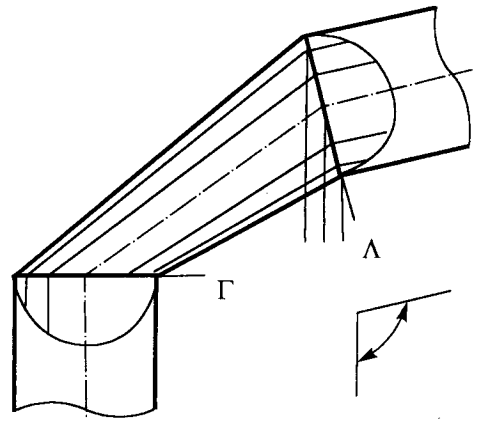


Рис. 7.11

площиною паралелізму, називають *гіперболічним параболоїдом*, або *гіпаром* (рис. 7.9). Її широко застосовують у вигляді комбінацій різних відсіків при конструюванні великопрогонових тонкостінних оболонок — покриттів.

Якщо одну з прямих напрямних замінити кривою лінією, то дістанемо так звані косі циліндри з трьома напрямними. На рис. 7.10 зображено окремий випадок такої поверхні, яку називають *коноїдом*. Її визначником є вертикальна пряма напрямна  $n$ , фронтальне півколо  $m$  та площина паралелізму  $\Pi_1$ , що замінює невласну пряму напрямну.

Якщо обидві напрямні — криві, а третя є площиною паралелізму, то утворюється поверхня, яку називають *циліндроїдом* (рис. 7.11). На цьому рисунку циліндроїд є коліном повітропроводу, що з'єднує два циліндричні патрубки, краї яких мають вигляд кіл. Ці дві криві та фронтальна площина паралелізму становлять визначник циліндроїда.

Поверхні з площиною паралелізму — циліндроїд, коноїд та гіперболічний параболоїд називають ще *поверхнями Каталана*.

## 7.4. Нелінійчаті поверхні. Циклічні поверхні

У нелінійчатих поверхонь лінія каркаса — крива сталого або змінного виду. Найбільш поширеними на практиці є поверхні, утворені колом або його частиною. Такі поверхні називають *циклічними*. Вони мають неперервний каркас кіл.

У техніці часто застосовують поверхню, яку називають *тором*. Вона утворюється при обертанні кола навколо осі, що лежить в площині кола, але не проходить через його центр. На рис. 7.12 подано три різновиди тора: відкритий, закритий, із самоперетином. Тор має четвертий алгебраїчний порядок відповідно до властивості: при обертанні алгебраїчної кривої  $n$ -го порядку навколо прямої, що не збігається з віссю, утворюється поверхня обертання порядку  $2n$ . Справді, поверхня тора перетинається з прямою в чотирьох точках.

Циклічна поверхня може утворюватися колом сталого чи змінного радіуса. Прикладом циклічної поверхні змінного радіуса є звичайний конус обертання, утворений рухом кола вздовж осі конуса. Площина кола при цьому весь час залишається перпендикулярною до осі, а радіус змінюється від розміру радіуса основи до нуля у вершині конуса.

Окремим випадком циклічної поверхні є так звана *трубчаста поверхня*, утворена рухом кола сталого радіуса, центр якого переміщується по довільній кривій, а площина кола нормальна до осі поверхні в кожній точці.

Нехай задано відрізок осі  $l$  трубчастої поверхні та точка  $A$  на ній (рис. 7.13). Треба побудувати лінію каркаса в цій точці, якщо відомий радіус твірного кола  $R$ .

Для розв'язання цієї задачі через точку  $A$  проведемо проєкції дотичної до осі. Оскільки площина твірного кола в кожній точці нормальна до осі, то через точку  $A$  проведемо площину, перпендикулярну до дотичної. Площину доцільно задати горизонталлю  $h$  та фронталлю  $f$ . Натуральні величини радіуса відкладемо на  $h_1$  та  $f_2$ . За двома спряженими діаметрами будемо проєкції кола у вигляді еліпсів.

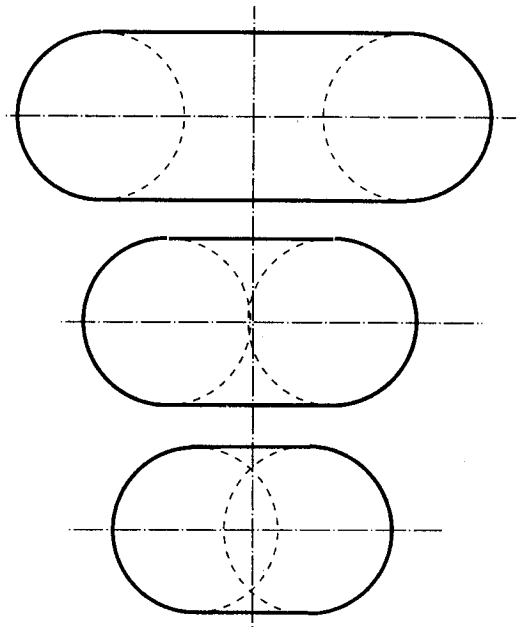


Рис. 7.12

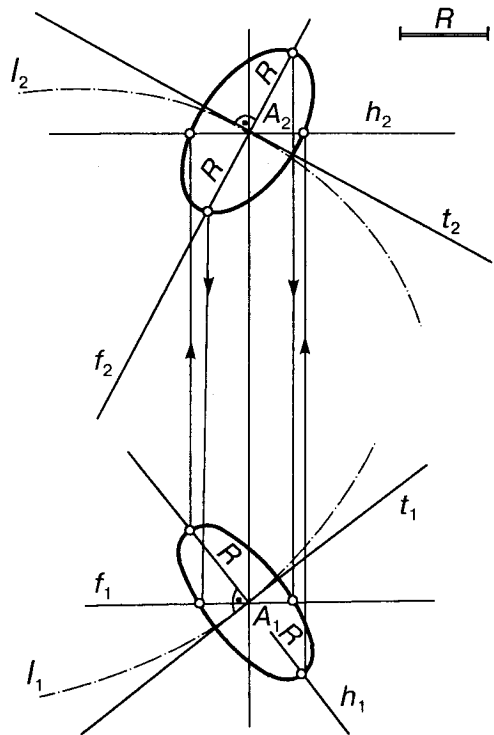


Рис. 7.13



## 7.5. Поверхні обертання

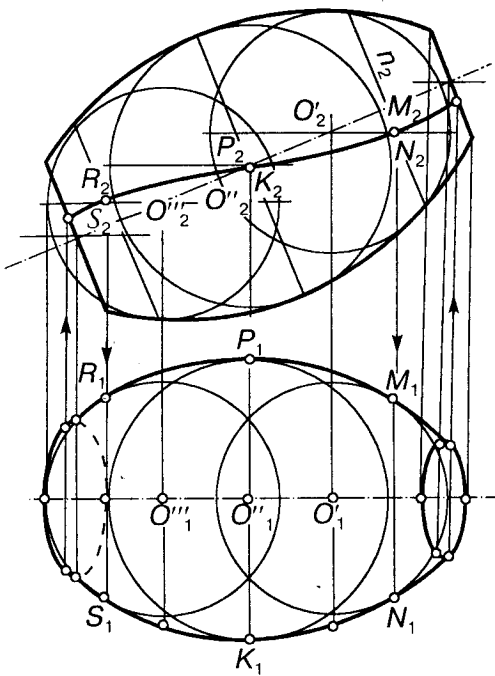


Рис. 7.14

Циклічні поверхні та поверхні обертання, розміщені під кутом до площини проєкцій, мають обрис, який не збігається з формою меридіана. На рис. 7.14 зображено циклічну поверхню обертання, вісь якої розміщена фронтально. Для з'ясування її обрису на горизонтальній проєкції в циклічну поверхню вписано три сферичні поверхні, з центрами  $O'_2$ ,  $O''_2$ ,  $O'''_2$  на осі. За допомогою цих центрів визначають точки, що належать обрису поверхні на проєкції  $\Pi_1$ . Покажемо це на прикладі сфери з центром  $O'_2$ . Вона дотикається до поверхні обертання по колу  $n_2$ . Горизонтальному обрису поверхні з цього кола належать лише дві точки  $M_2$  та  $N_2$ , які утворюються в перетині кола  $n_2$  з горизонтальним екватором сфери, що на проєкції  $\Pi_1$  спроекціюється без спотворення. Так само знайдемо ще чотири точки  $P$ ,  $K$ ,  $R$ ,  $S$ . Побудуємо еліпси верхнього та нижнього кіл поверхні обертання. За трьома точками як дотичні до цих еліпсів проведемо дві криві горизонтального обрису. Як показує фронтальна проєкція, ці криві не збігаються з меридіаном поверхні, а є просторовими кривими з точкою перегину.

Деякі поверхні обертання вже розглянуто. У техніці та будівництві широко застосовують *поверхні обертання зі сталою криволінійною твірною*. Так називають поверхні, утворені обертанням будь-якої лінії навколо прямої, що є віссю поверхні. Таким чином, геометрична частина визначника поверхні — вісь та одна твірна, а алгоритмічна — вказівка на те, що це поверхня обертання.

Найчастіше при зображенні поверхні обертання її вісь розміщують перпендикулярно до площини проєкції  $\Pi_1$  чи  $\Pi_2$ . При цьому точки твірної, обертаючись навколо осі, описують кола, які називають *паралелями*, а криві, утворені в результаті перетину поверхні обертання площинами, що проходять через її вісь, називають *меридіанами* (рис. 7.15). Поверхня симетрична відносно будь-якої меридіанальної площини, а всі меридіани конгруентні. На рисунку показано два меридіани — фронтальний  $m$  та довільний  $n$ . Меридіан поверхні обертання є найкоротшою (геодезичною) лінією на поверхні. Якщо вісь перпендикулярна до  $\Pi_1$ , то фронтальний меридіан називають *головним*. Не всі твірні поверхні обертання називають меридіанами. Ця сама поверхня може бути утворена будь-якою просторовою кривою, що належить поверхні, але вона не буде меридіаном.

Паралелі та меридіани утворюють на поверхні неперервний сітчастий каркас. Через будь-яку точку поверхні проходить один меридіан та одна паралель. Кожна паралель перетинає всі меридіани під прямим кутом. Отже, паралелі та меридіани утворюють на поверхні обертання ортогональну сітку, аналогічну прямокутній декартовій сітці на площині. Паралелі, в точках яких дотичні паралельні осі обертання, тобто найбільша та найменша паралелі, називають *екватором* та *горловиною поверхні*. Вони проєкціюються на  $\Pi_1$  у вигляді кіл обрису. Для побудови другої проєкції точки, що належить поверхні, через неї проводять криву, інцидентну поверхні. Найпростішою кривою є коло певного радіуса. Так, на рис. 7.15 побудовано горизонтальну проєкцію точки  $A$ , що належить видимій на  $\Pi_2$  половині поверхні обертання.

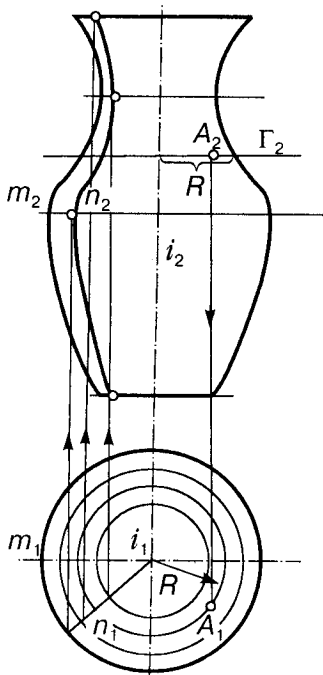


Рис. 7.15

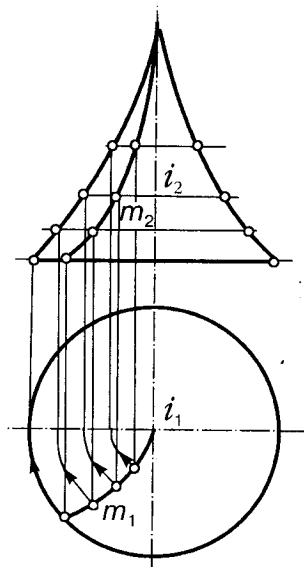


Рис. 7.16

ня. Для цього через точку  $A$  проведено горизонтальну площину  $\Gamma_2$ , яка перетинає поверхню по колу радіуса  $R$ . Цим радіусом зображено коло на горизонтальній проекції і знайдено другу проекцію точки  $A$ .

Поверхні обертання мають важливі властивості, які застосовують у техніці та машинобудуванні, наприклад, властивість зсування, коли поверхня при обертанні не змінює своєї форми. Це пояснюється й простою обробки таких поверхонь на токарних верстатах.

Іноді поверхню обертання задають елементами її визначника і треба побудувати головний меридіан. Нехай поверхню задано вертикальною віссю  $i$  та просторовою кривою  $m$  (рис. 7.16). Щоб знайти головний меридіан, досить на кривій взяти кілька точок і повернути їх до фронтальної площини, що проходить через вертикальну вісь обертання. Дістанемо меридіан, а за ним і фронтальну проекцію поверхні обертання.

Щоб скласти рівняння поверхні обертання навколо осі, досить у рівняння головного меридіана  $z = f(x)$  замість значення  $x$  підставити значення  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Розглядаючи горизонтальну проекцію сфери (рис. 7.17),

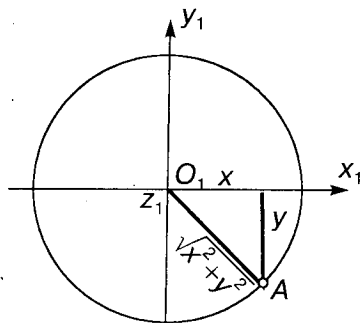


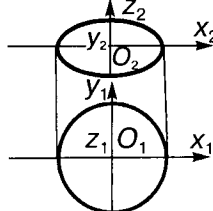
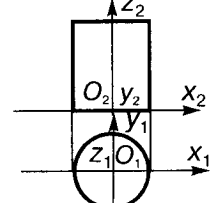
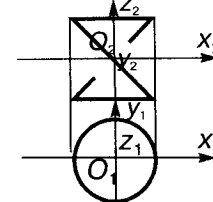
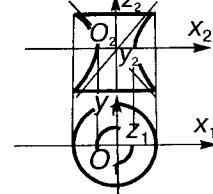
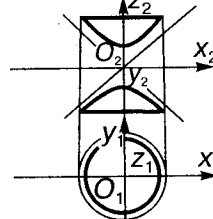
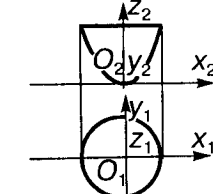
Рис. 7.17

бачимо, що точка  $A$  на поверхні (в даному випадку на екваторі) віддалена від центра на величину  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Так, при обертанні кола  $x^2 + z^2 = R^2$  навколо вертикальної осі дістаємо сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

## 7.6. Поверхні обертання другого порядку

Окремим випадком поверхонь обертання є *поверхні обертання другого порядку*. Вони можуть утворюватися кривими другого порядку та прямими, як виродженими кривими. Обертанням прямої навколо

Таблиця 7.1. Поверхні обертання другого порядку

Поверхня	Зображення	Рівняння
Еліпсоїд обертання		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $2a = 2b$
Циліндр обертання		$x^2 + y^2 = R^2$
Конус обертання		$k^2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$
Одно-порожнинний гіперолоїд обертання		$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $2a = 2b$
Дво-порожнинний гіперолоїд обертання		$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$ $2a = 2b$
Параболоїд обертання		$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$

## 7.7. Гвинтові поверхні

осі утворюється поверхня другого порядку. Якщо пряма перетинає вісь, то утворюється конус, якщо пряма паралельна осі — то циліндр, а якщо пряма і вісь мимобіжні — то однопорожнинний гіперболоїд обертання. Як відомо, його поверхня містить дві сім'ї прямолінійних твірних. При обертанні кола навколо осі, що проходить через його центр, матимемо сферу. Еліпс, обертаючись навколо однієї зі своїх осей, утворює стиснутий або витягнутий еліпсоїд обертання, а парабола, обертаючись навколо осі, утворює параболоїд обертання.

При обертанні гіперболи утворюються дві поверхні другого порядку. Якщо гіпербола обертається навколо уявної осі, то маємо однопорожнинний гіперболоїд обертання, а якщо навколо дійсної осі — то двопорожнинний гіперболоїд обертання. Асимптоти гіперболи утворюють при цьому асимптотичний конус обертання.

Крім поверхонь другого порядку обертання, є велика група поверхонь другого порядку загального вигляду. Ці поверхні визначають рівнянням другого степеня в тривимірній декартовій системі координат:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0.$$

Якщо всі члени цього рівняння розділити на вільний член, то матимемо дев'ять відношень, або дев'ять незалежних коефіцієнтів (параметрів), що визначають дану поверхню. Отже, визначник такої поверхні має дев'ять незалежних елементів. Наприклад, дев'ять точок, дев'ять дотичних площин або комбінацію одних з іншими.

У табл. 7.1 наведено поверхні обертання другого порядку та їхні аналітичні вирази в декартовій системі координат. Серед цих поверхонь виділяють так звані центральні поверхні, які мають єдиний центр симетрії: конуси, циліндри, еліпсоїди, гіперболоїди. Початок координат є центром симетрії цих поверхонь, а площини координат — площинами симетрії. Якщо сумістити площини симетрії поверхні з площинами проєкцій, то для графічного задання поверхні другого порядку досить задати її обриси на цих двох площинах проєкцій.

*Гвинтовою* називають поверхню, що утворюється при гвинтовому русі твірної. У техніці часто використовують гвинтові лінійчаті поверхні (гелікоїди). Одна з них (розгортний гелікоїд) описана вище. Розглянемо косі гвинтові лінійчаті поверхні. У них можна виділити дві сім'ї ліній: сім'ю прямих твірних та сім'ю гвинтових паралелей, так називають криві лінії руху точок твірної. Гвинтові паралелі поверхні характеризуються кроком  $h$  та параметром (одичинним кроком)  $p$ , при цьому  $p = \frac{h}{2\pi}$ , де  $h$  — крок гвинтової лінії.

Важливою властивістю гвинтових поверхонь є зсування. Поверхня під час гвинтового руху зсувається без деформації, вздовж самої себе. Цю саму властивість, як уже зазначалося, мають поверхні обертання ( $h = 0$ ) та циліндри ( $h = \infty$ ).

Перерізи поверхні площинами, що проходять через вісь  $i$ , називають *меридіанами*, а перерізи поверхні площинами, перпендикулярними до осі, називають *нормальними перерізами*.

Розглянемо кілька прикладів. На рис. 7.18 показано побудову гвинтової поверхні,

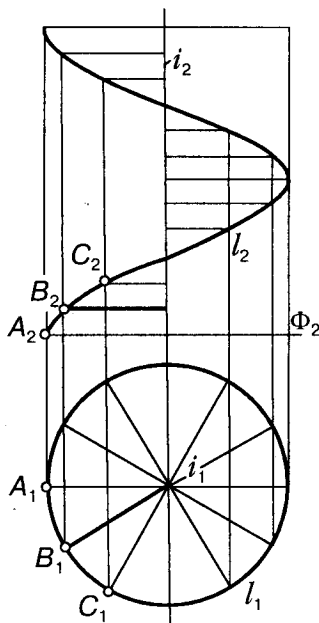


Рис. 7.18

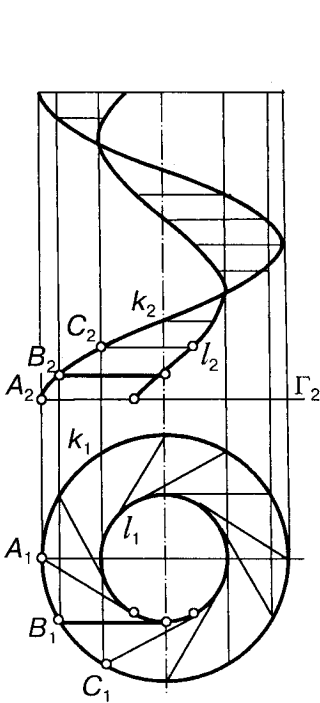


Рис. 7.19

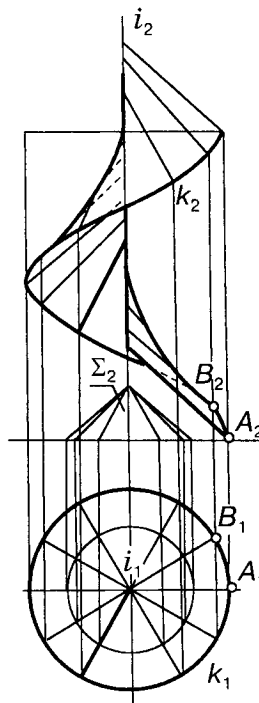


Рис. 7.20

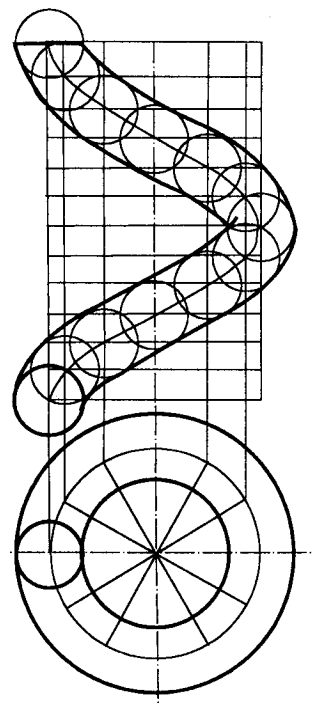


Рис. 7.21

визначником якої є геліса  $l$ , її вісь  $i$  та горизонтальна площина паралелізму  $\Pi_1$ . Усі горизонтальні твірні перетинають гелісу та її вісь. Утворену поверхню — *гвинтовий коноїд*, або *прямий гелікоїд*, широко застосовують у техніці.

Гвинтовий циліндроїд, визначником якого є дві співвісні геліси  $k$  і  $l$  та горизонтальна площина паралелізму  $\Pi_1$ , зображено на рис. 7.19. Тут внутрішня геліса  $l$  утворилася точками дотику горизонтальних твірних, що проходять через точки зовнішньої геліси і дотикаються до внутрішнього циліндра.

Якщо невласна пряма напрямна задається площиною паралелізму, то невласну криву напрямну можна задати напрямним конусом. При цьому кожна твірна поверхні паралельна відповідній твірній напрямного конуса. Так, на рис. 7.20 подано поверхню косоного гелікоїда, визначником якого є геліса  $k$ , її вісь  $i$  та напрямний конус  $\Sigma$ , співвісний з гелісою.

Побудову твірних гелікоїда виконують так. Проводять твірну через точку геліси  $A$

на горизонтальній проекції. Відповідна твірна напрямного конуса лежить у тій самій вертикальній площині, тобто є крайньою правою твірною конуса. Проводять також твірні через точку  $B$ , для чого визначають відповідну твірну напрямного конуса. Оскільки всі твірні однаково нахилені до горизонтальної площини проєкцій, що дорівнює нахилу твірних напрямного конуса, то вони перетинають вісь геліси  $i$  через однакові проміжки.

Гвинтові поверхні утворюються не лише прямими лініями. Так, на рис. 7.21 зображено поверхню, утворену рухом кола по гелісі. Цю поверхню називають *гелікоїдальним циліндром*. Оскільки в кожній точці геліси площина кола перпендикулярна до дотичної і має свій нахил, то воно зображується еліпсами (див. рис. 7.13). Контур цієї поверхні можна побудувати, якщо за її твірну взяти сферу, діаметр якої дорівнює діаметру кола. Розмістивши в точках геліси послідовні положення сфери, побудуємо обгортну поверхню, яка й є поверхнею гелікоїдального циліндра. Звернемо увагу

на деякі особливості її контуру. Побудова "зовнішньої" кривої не викликає труднощів, а при побудові двох віток "внутрішньої" кривої слід звернути увагу на те, що вони на фронтальній проекції перетинаються. При цьому нижня крива проходить вище від точки перетину і там обривається в так званій точці зникнення видимого контуру. Гелікоїдальний циліндр застосовують в техніці у вигляді різних пружин.

### 7.8. Поверхні паралельного перенесення

Поверхні, утворені неперервним паралельним переміщенням твірної  $n$  уздовж напрямної  $m$ , називають *поверхнями паралельного перенесення*, або *трансляційними*. При такому переміщенні всі точки напрямної переміщуються в одному напрямі на одну й ту саму відстань.

На рис. 7.22 зображено так звану біркузову поверхню, в якій профільна твірна  $n$  переміщається вздовж фронтальної напрямної  $m$ , залишаючись весь час у профільному положенні, а твірна й напрямна є дугами кола. На рисунку зображено також регулярний сітчастий каркас, утворений твірними та напрямними. Через кожну точку поверхні проходить одна твірна та одна напрямна. Твірні й напрямні поверхні паралельного перенесення взаємозамінні, тобто їх можна поміняти ролями, але поверхня від цього не зміниться. Поверхні паралельного перенесення використовують у будівництві при спорудженні тонкостінних великопрогонових оболонки — покриттів. Незмінність форми твірної дає великі переваги при конструюванні таких поверхонь.

Серед поверхонь другого порядку є, крім циліндра, дві поверхні паралельного перенесення. Це еліптичний та гіперболічний параболоїди, утворені рухом однієї параболіди вздовж іншої. У еліптичного параболоїда параболіди опуклі в один бік, а у гіперболічного параболоїда — в різні боки. Якщо обидві параболіди, опуклі в один бік, конгруентні, то дістанемо параболоїд обертання.

Рівняння поверхні паралельного перенесення таке:

$$z = f_1(x) + f_2(y),$$

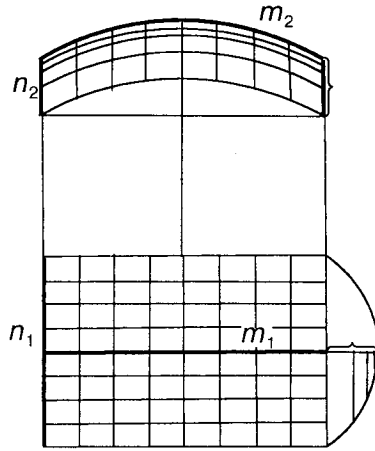


Рис. 7.22

де  $f_1(x)$  — рівняння твірної;  $f_2(y)$  — рівняння напрямної.

Зокрема, якщо параболола  $x^2 = 2pz$  переміщується паралельно самі собі вздовж параболіди  $y^2 = 2qz$ , то рівняння еліптичного параболоїда матиме вигляд

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

### 7.9. Поверхні, подані дискретним каркасом

Поверхні, подані дискретним лінійним чи точковим каркасом, називають ще *неперервно топографічними*. Такими поверхнями є, зокрема, топографічні поверхні, зображені горизонталями, тобто кривими лініями перетину поверхні Землі з горизонтальними площинами, що проходять на певній віддалі одна від одної.

*Точковим каркасом* називають сукупність точок на поверхні, заданих так, щоб, орієнтуючись на них, можна було уявити форму поверхні в усіх її частинах. При точковому каркасі поверхні окремі точки можна сполучати між собою прямими, дістаючи сітку з трикутників, яку називають *триангуляційною*. Якщо лінії триангуляційної сітки вважати ребрами багатогранника, то вписаний (описаний) багатогранник буде частковою моделлю поверхні. Модель буде тим повнішою, чим густіше та рівномірніше буде задано точковий каркас поверхні.

Поверхні, подані деякою кількістю (скупністю) ліній, що належать їй, або так званим *лінійним каркасом*, можуть бути визначені лише наближено. Такий самий каркас можуть мати інші поверхні, які так чи інакше відрізняються від заданої.

Лінійні каркаси характеризуються щільністю. Чим щільніший каркас, тим він швидше наближається до поверхні. На одній і тій самій поверхні можна задати безліч каркасів. Звичайно намагаються задати лінії каркаса найпростішої форми. За допомогою ліній, що належать поверхні, зображують обтічні поверхні суден, автомобілів, літа-

ків, лопатки парових та газових турбін тощо.

Конструюючи робочу лопатку парової турбіни, профільну її частину задають рисунками окремих перерізів, кількість яких залежить від довжини лопатки і становить 5...25. Рисунок перерізів виконують у базовій системі координатних осей, віднесених до хвоста лопатки.

Контур перерізів може бути заданий дугами кіл і спряженими прямими або координатами точок. На рис. 7.23 зображено дві проекції лопатки та три її перерізи.

Крім каркасів, утворених однією сім'єю ліній, використовують сітчасті каркаси, ут-

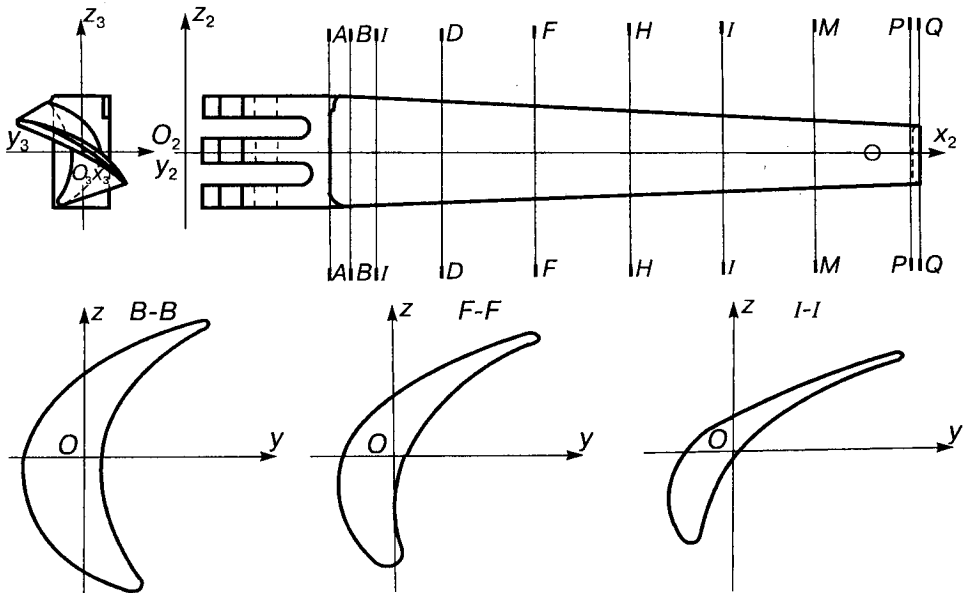


Рис. 7.23

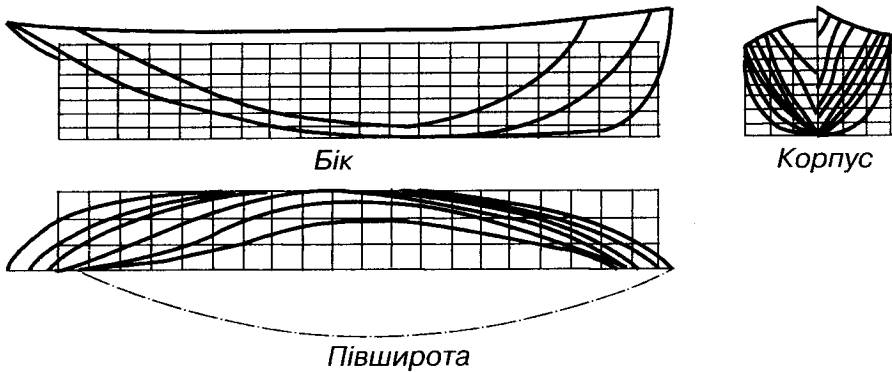


Рис. 7.24

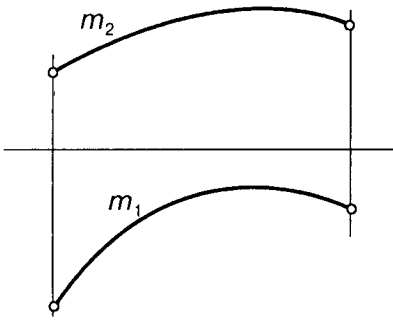


Рис. 7.25

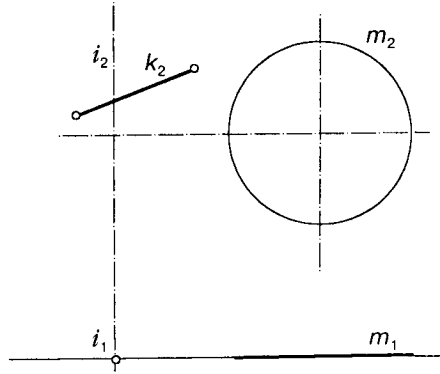


Рис. 7.26

ворені двома або трьома сім'ями кривих ліній. Сітчастий каркас дає більш повну інформацію про поверхню, зокрема, в точках перетину ліній різних сімей можна провести дотичну площину до поверхні, а до неї — нормаль.

Щоб зобразити, наприклад, форму поверхні корпусу судна, використовують теоретичний рисунок корпусу, який має дати повне уявлення про форму корпусу. Для цього корпус судна перетинають трьома взаємно перпендикулярними площинами (рис. 7.24): горизонтальною, що поділяє корпус на надводну та підводну частини; вертикальною поздовжньою (діаметральною), що поділяє корпус на дві симетричні половини — правий та лівий борти; вертикальною поперечною (площиною мідель-

шпангоута), що поділяє судно на носову та кормову частини. Ці перерізи теоретичної поверхні судна називають відповідно *півширотою*, *бокком* та *корпусом*. Проте вони не можуть дати повного уявлення про поверхню корпусу, тому корпус розтинається системами площин, паралельних цим трьом основним площинам. Такі площини проводять на однаковій відстані одна від одної. Лінії, що утворюються в результаті перетину корпусу горизонтальними площинами, називають *ватерлініями* (*горизонталлями*). Лінії, що утворюються в результаті перетину корпусу вертикальними поперечними площинами, називають *шпангоутами* (*профілями*), а в результаті перетину вертикальними поздовжніми площинами — *батоксами* (*фронталлями*).

### Запитання та завдання

1. Які є способи задання поверхні?
2. Скільки прямих твірних проходить через довільну точку гіперболічного параболоїда?
3. Що таке визначник поверхні?
4. Як задати еліптичний конус, щоб він належав до кінематичних поверхонь зі сталою твірною? зі змінною твірною?
5. Як у визначнику задати невласну пряму напрямну? невласну криву напрямну?
6. Визначити за бровкою  $m$  насипу поверхні схилів насипу, якщо кут схилу становить  $45^\circ$ . Побудувати проєкції ребра звороту поверхні одного зі схилів (рис. 7.25).
7. Поверхню відкритого тора задано віссю обертання та твірним колом у фронтальному положенні. Відома фронтальна проєкція лінії  $k$ , що належить поверхні. Знайти її горизонтальну проєкцію. Скільки розв'язків має задача? Чи є ця лінія кривою другого порядку (рис. 7.26)?





## Глава 8 ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОВЕРХОНЬ

На практиці під час конструювання технічних форм часто виникає потреба подати поверхні як неперервним, так і дискретним каркасом. При цьому доводиться виконувати операцію перезадання каркаса.

Фіксацію на поверхні дискретної множини точок або ліній, положення яких відповідає певним умовам, називають *дискретизацією поверхні*. Дискретизація потрібна також при розрахунках конструкції на міцність та стійкість методом кінцевих елементів, а також на стадії технології її виготовлення, коли теоретична поверхня виконана з елементів, що мають певні розміри.

Задачу, протилежну дискретизації, називають *інтерполяцією поверхні*.

### 8.1. Дискретне подання поверхонь

Пошук конкретної форми кривої поверхні, що задовольняє певні вимоги, є першим етапом створення будь-якого виробу. Далі завдання інженера-конструктора полягає в тому, щоб цю форму можна було виготовити з певного матеріалу. Для цього кожен конструкцію розраховують на міцність та стійкість, а також розробляють технологію її виготовлення з конкретного матеріалу. Наприклад, оптимальна форма великих ємкостей для різноманітних рідин є краплеподібною. Для її здійснення треба цю форму розбити на окремі ділянки, які можуть бути виготовлені з листового металу. При цьому слід урахувувати такі фактори, як кількість різновидів окремих кусків поверхні (вона має бути мінімальною), довжина зварювальних стикових швів (вона також має бути мінімальною), заміна криволінійної форми двоякої кривини окремими кусками одинарної кривини або плоскими кусками (не можна відходити від ідеальної серединної поверхні більше ніж на задану величину допуску) тощо. Розбиття суцільної (континуальної) форми на окремі ділянки (куски) і є *дискретизацією*. Аналогічну операцію виконують також,

розбиваючи поверхню корпусу корабля на окремі сталеві листи, а також при виготовленні великопрогонової тонкостінної оболонки — покриття в архітектурі з окремих залізобетонних панелей. При цьому серединну поверхню також розбивають на певну кількість типоелементів.

Дискретизація необхідна також при операціях з поверхнями, що здійснюють за допомогою ЕОМ. При цьому, щоб відтворити поверхню, слід мати алгоритми обчислення координат точок, які належать поверхні. Тому на рисунку поверхню задають дискретним каркасом, в якому точки та лінії вибрано з кроком, потрібним для розв'язання конкретної задачі.

### 8.2. Дискретизація, паркетування та апроксимація поверхонь

Дискретний каркас поверхні визначають за допомогою січних площин. На рис. 8.1 зображено дискретний каркас сферичного сегмента, апроксимованого трикутними гранями, вписаними в поверхню. Сітка в плані має регулярний характер, вершини трикутників на поверхні знайдені за допо-

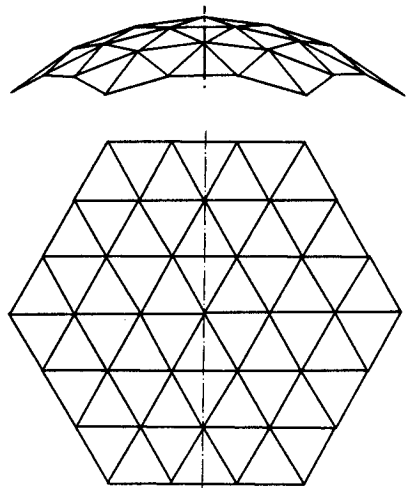


Рис. 8.1

могою фронтальних січних площин. Грані багатогранника, який апроксимує сегмент, мають різні розміри, які повторюються завдяки кільком площинам симетрії сегмента.

На основі дискретизації здійснюють так зване *паркетування*, тобто наближену заміну кривої поверхні плоскими фігурами одного або кількох типів.

На рис. 8.2 показано паркетування півсфери плоскими фігурами. Для цього чверть кола на полі  $\Pi_2$  розбито на чотири рівні частини, а коло в плані — на 16. Утворилося чотири пояси, три з яких складаються з трапецій, а четвертий (верхній) — з трикутників. Трапеції кожного поясу різні.

Геометричне моделювання використовують при розв'язуванні оптимізаційних задач, які мають важливе значення в народному господарстві. Оптимізуючи будь-яку задачу, намагаються при мінімальних затратах матеріалу та праці здобути максимальний результат. У більшості випадків оптимізаційна задача має кілька параметрів і критеріїв оптимізації. Найчастіше йдеться про визначення так званого локального оптимуму при заданих обмеженнях. Так, при паркетуванні тонкостінної оболонки можна як елемент паркету використати різні плоскі фігури.

Розглянемо циліндричну оболонку, поперечним перерізом якої є чверть кола. Оболонка покривається множиною однієї з чотирьох рівновеликих фігур, площа яких дорівнює умовній одиниці. Вважатимемо, що радіус дуги оболонки дорівнює  $5\sqrt{2}$  умовних одиниць (рис. 8.3, *a...d*). Фігурами паркету вибрано квадрат, прямокутник, рівносторонній трикутник та правильний шестикутник. Прямокутниками оболонка покривалася у двох варіантах: якщо з прямолінійною твірною оболонки збігається менша або більша сторона. Сторони прямокутника відносяться між собою в золотому перерізі, тобто  $0,618/1$ .

За критерій оптимальності паркетування взято відношення площі оболонки до площі паркету, яке залежить від апроксимації дуги кола проекціями паркетуючих фігур, що утворюють вписаний у поперечний переріз багатокутник, оскільки від того, як близько багатокутник підходить до дуги кола, залежить сумарна площа паркету. За міру сторони взято центральний кут

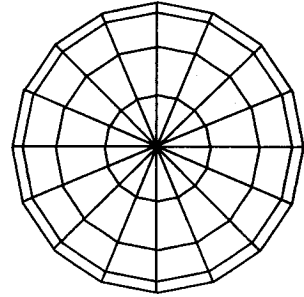
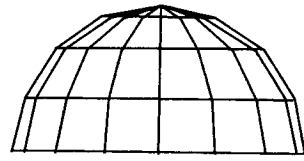


Рис. 8.2

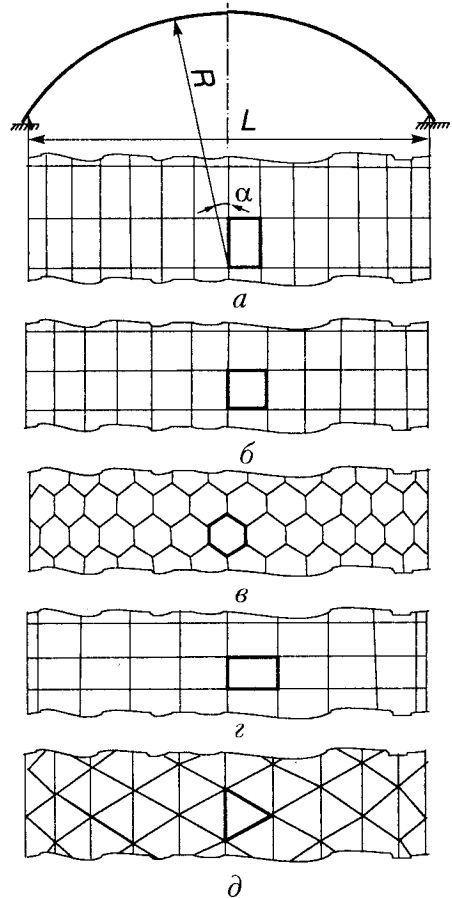


Рис. 8.3

$\alpha$  між двома радіусами кола, проведеними в крайні точки багатокутника. Максимальне наближення до серединної поверхні циліндричної оболонки дає паркетування її прямокутником, більші сторони якого збігаються з прямолінійними твірними оболонки.

Крім наближення до поверхні оболонки, важливим показником ефективності апроксимації є загальна довжина сітки на поверхні, тобто погонаж стикових швів між типоелементами оболонки. При рівновеликих площах паркетуючих фігур довжина сітки прямо пропорційна до периметра  $p$  кожної з цих фігур. За цим показником найкращим є паркетування з правильних шестикутників.

Для правильних шестикутників  $p = 3,72$ ; для квадрата  $p = 4,00$ ; для прямокутника  $p = 4,11$ ; для рівностороннього трикутника  $p = 4,56$ .

За сумою двох наведених показників (відношення площ та погонаж стикових швів) кращим є паркетування циліндричної оболонки прямокутником, більша сторона якого збігається з твірною, та правильним шестикутником. Найгіршим за цими самими показниками є паркетування циліндричної оболонки рівносторонніми трикутниками (тріангуляція).

### 8.3. Інтерполяція дискретних каркасів поверхонь

Для побудови неперервної поверхні треба мати певну кількість заданих елементів поверхні, яка відповідає її параметричному числу. Наприклад, поверхня другого порядку визначається дев'ятьма параметрами, які можуть бути задані точками або дотичними площинами. Проте цей спосіб не завжди зручний для практики конструювання поверхні, оскільки, по-перше, треба, щоб усі ці точки належали одному відсіку поверхні, а по-друге, необхідно виконувати досить складні побудови. Тому застосовують конструювання поверхні, що складається з кусків відомих кривих поверхонь,

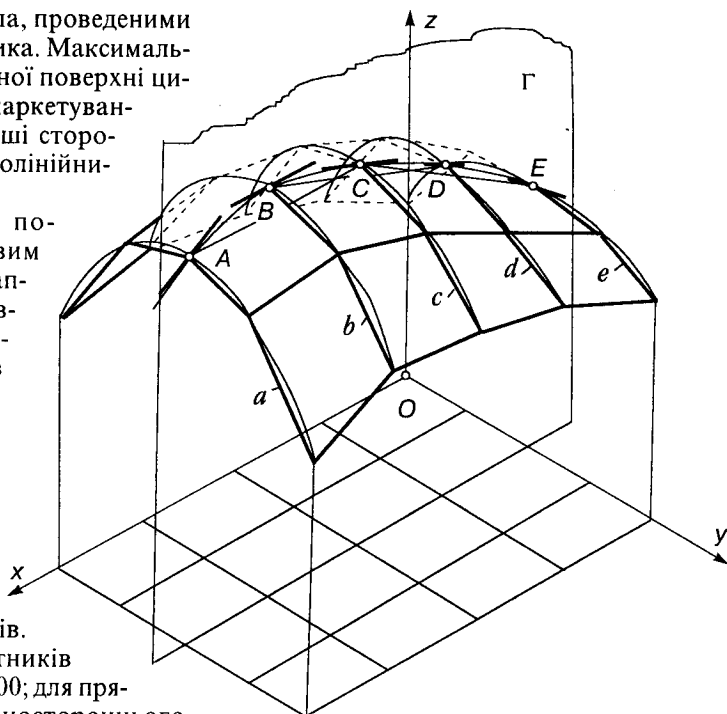


Рис. 8.4

які можуть стикуватися між собою гладко або негладко з ребром перетину.

На рис. 8.4 поверхню подано плоскими кривими лініями  $a, b, c, d, e$ , розміщеними в пучку площин, паралельних площині  $yOz$ . Перетнемо ці криві площинами, паралельними площині  $xOz$ . В результаті перетину, наприклад, площини  $\Gamma$  і кривих, дістанемо точки  $A, B, C, D, E$ , які треба сполучити кривою лінією.

Куски поверхні, що відповідають регулярним чарункам на плані, можуть стикуватися по цих лініях гладко або перетинатися по ребру. У разі гладкого стику в точках  $A, B, C, D, E$  задаються дотичні, які разом з двома точками, інцидентними цим дотичним, визначають чотири параметри. Як відомо (див. параграф 6.3), цих параметрів досить для побудови параболи другого порядку.

Напрямо дотичної вибирають паралельно хорді, що сполучає дві сусідні точки. Так, дотична в точці  $B$  паралельна хорді  $AC$ , дотична в точці  $C$  паралельна хорді  $BD$ , дотична в точці  $D$  паралельна хорді  $CE$

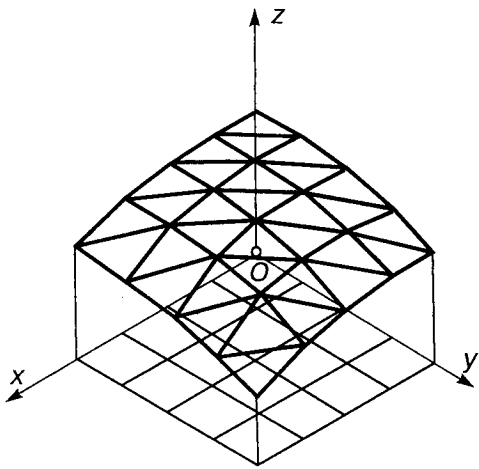


Рис. 8.5

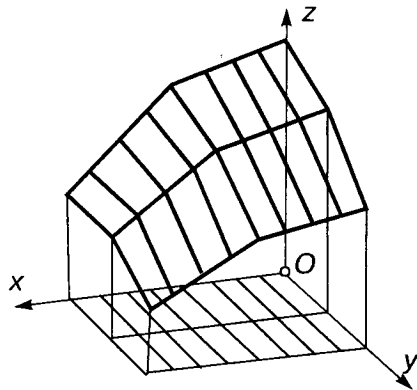


Рис. 8.6

і т. д. Так будують складений обвід з кусків параболи другого порядку. Далі ще проводять площини, паралельні площині  $\Gamma$  на відстані, визначеній у плані. Вони перетинають ці самі криві у відповідних точках, і все починається спочатку. В результаті побудови кривих у цих площинах матимемо сітчастий каркас з кривих ліній, чарунки яких стикаються між собою з гладкістю першого порядку.

Якщо вимога гладкості не ставиться, то за даними кривими  $a, \dots, e$  можна кожну чарунку заповняти циліндроїдами. Визначником кожного циліндроїда є відрізки названих кривих та площина паралелізму  $xOz$ . Твірні циліндроїда зручно проводити спочатку на горизонтальній проекції кожної чарунки, а потім за вертикальними лініями сполучення визначати їх у просторі.

Часто в інженерній практиці доводиться розв'язувати задачі інтерполяції дискретного каркаса точок. При цьому проекції точок каркаса є вузлами квадратної, прямокутної або іншої регулярної сітки з правильними чарунками на одній з площин проекцій. Якщо не ставиться вимога гладкого стикування чарунок, то найпростішими способами кускової інтерполяції дискретного каркаса є триангуляція (рис. 8.5) або інтерполяція гіперболічними параболоїдами, визначником яких є дві мимобіжні прями та вертикальна пло-

щина паралелізму, паралельна одній з координатних площин (рис. 8.6). У першому випадку елементи поверхні є плоскими, тобто матимемо багатогранник, а в другому — кусками поверхні другого порядку, які мають негладкі лінії стику у вигляді відрізків прямих.

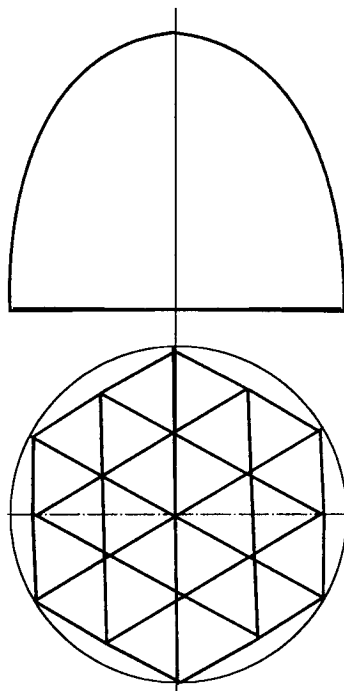


Рис. 8.7

1. На якій поверхні можна задати лінійний каркас з усіх кривих другого порядку?
2. Чим відрізняється дискретизація від інтерполяції кривої поверхні?
3. Якими правильними багатокутниками можна виконати дискретизацію сфери?
4. Чи задається точно поверхня дискретним каркасом точок або ліній?
5. Виконати триангуляцію відсіку еліпсоїда обертання за даною на полі  $\Pi_1$  сіткою (рис. 8.7).



## Глава 9 РОЗГОРТКИ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

У різних галузях техніки та будівництва при виготовленні виробів з листового матеріалу часто мають справу з розгортками кривих поверхонь. Розгортні поверхні можна згинанням сумістити з площиною без розривів і складок, а нерозгортні поверхні як лінійчаті, так і криволінійчаті можна розгорнути на площину лише наближено.

Розгортки поверхонь характеризуються певними інваріантними властивостями. Однією з них є збереження площі відсіку поверхні, обмеженої замкнутою лінією на розгортці цього відсіку. Таке відображення називають *ізометричним*, або *еквіареальним*.

З властивості збереження площ випливають ще дві властивості:

- 1) довжини відповідних ліній на поверхні та розгортці однакові;
- 2) кути, утворені лініями поверхні, дорівнюють кутам, що утворюють ці самі лінії на розгортці.

Отже, можна зробити такий висновок: *прями на поверхні зображується прямою на розгортці, а паралельні прямі на поверхні — паралельними прямими на розгортці*. На цих властивостях ґрунтуються важливі практичні задачі. Наведемо дві з них.

1. Як відомо, найменшою відстанню між двома точками є пряма. Так, якщо на поверхні задано дві точки і їх треба сполучити найкоротшою лінією, яку називають *геодезичною*, то будують розгортку такої поверхні, наносять на неї дані точки, сполу-

чають їх прямою, а потім результат переносять на поверхню.

2. Треба побудувати лінію, яка зберігає сталий кут з усіма меридіанами поверхні обертання. Таку лінію називають *локсодромою*. Побудувати її можна, скориставшись розгорткою поверхні обертання.

### 9.1. Побудова розгортки розгортних поверхонь

До розгортних поверхонь, крім багатограних, належать циліндричні, конічні та торсові поверхні. Характерною ознакою їх є те, що вони мають ребро звороту, і дві нескінченно близькі твірні розгортної поверхні перетинаються у власній точці.

Елементарними графічними побудовами точно розгортаються лише дві розгортні поверхні: прямий круговий конус і прямий круговий циліндр. Розгортка бічної поверхні першого є сектором круга, радіус якого дорівнює твірній конуса, а кут сектора обчислюють за формулою  $\alpha = \frac{360^\circ \cdot R}{l}$ ,

де  $R$  — радіус основи конуса;  $l$  — довжина твірної конуса. Розгортка прямого циліндра обертання є прямокутником, висота якого дорівнює висоті циліндра, а ширина — довжині кола основи, тобто  $2\pi R$ . Для всіх інших торсових поверхонь будують наближені розгортки за допомогою описування чи вписування багатограних поверхонь. Криві лінії поверхонь спрямляються



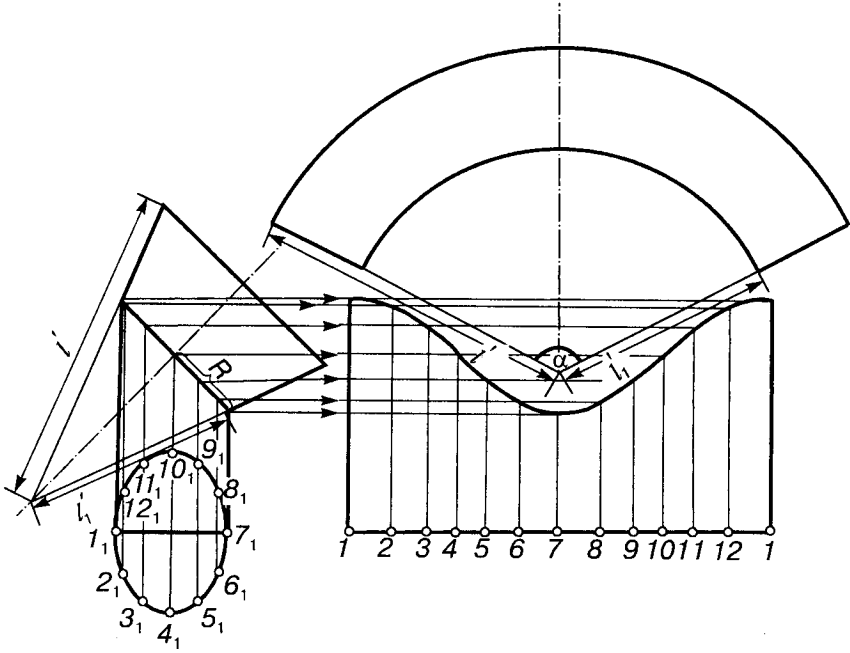


Рис. 9.3

ризонціальних прямих, проведених через верхні точки твірних циліндра.

Розгортка конуса обертання є сектором круга з центральним кутом, що дорівнює  $\alpha = \frac{360^\circ \cdot R}{l}$ , де  $R$  — радіус стичного кола;  $l$  — довжина твірної конуса. Розгортка зрізаного конуса обмежена двома колами радіусами  $l'$  та  $l'_1$ .

## 9.2. Побудова умовних розгорток нерозгортних поверхонь

Алгоритм побудови умовних розгорток складається з таких операцій:

1. Розрізати нерозгортну поверхню на кілька частин залежно від необхідної точності побудови.

2. Замінити ці частини розгортними поверхнями.

3. Шукана умовна розгортка є сукупністю розгорток окремих кусків.

При цьому для криволінійчатих поверхонь використовують спосіб циліндрів або спосіб конусів. Для лінійчатих нерозгортних поверхонь користуються способом триангуляції, тобто заміною кривих поверхонь багатогранною поверхнею, що складається з трикутників.

На рис. 9.4 показано умовну розгортку сфери. Щоб побудувати цю розгортку, сферу розбивають по меридіанах на рівні частини. Дістають сегменти (на рис. 9.4 таких сегментів 12). Кожен з них замінюється циліндричною поверхнею. Півколо розбивають на рівні частини (на рис. 9.4 їх 12). Як відомо, довжина півкола дорівнює  $\pi R$ , тому проводять вертикальний відрізок завдовжки  $\pi R$  і розбивають його на 12 рівних частин. Через точки поділу проводять горизонтальні прямі, на яких відкладають довжини відрізків, взяті з горизонтальної проєкції. За визначеними точками будують дві криві, що обмежують сегмент. Умовна розгортка сфери є в цьому випадку 12-ма такими сегментами.

На рис. 9.5, а побудовано розгортку поверхні відкритого тора (кільця). Поверхню тора розбивають на 12 рівних частин вертикальними площинами, що проходять через вертикальну вісь поверхні. Кожна з таких частин замінюється циліндричною поверхнею. На рис. 9.5, а показано побудову розгортки 1/12 частини поверхні тора, обмеженої двома вертикальними площинами  $\Gamma$  та  $\Lambda$ . Вісь цього сегмента є фронтальним колом, розбитим на вісім рівних частин.

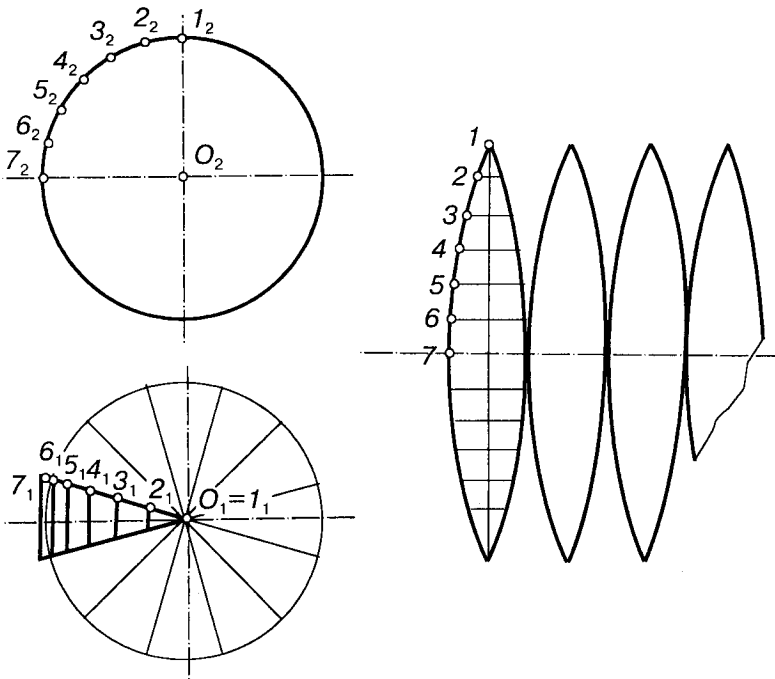


Рис. 9.4

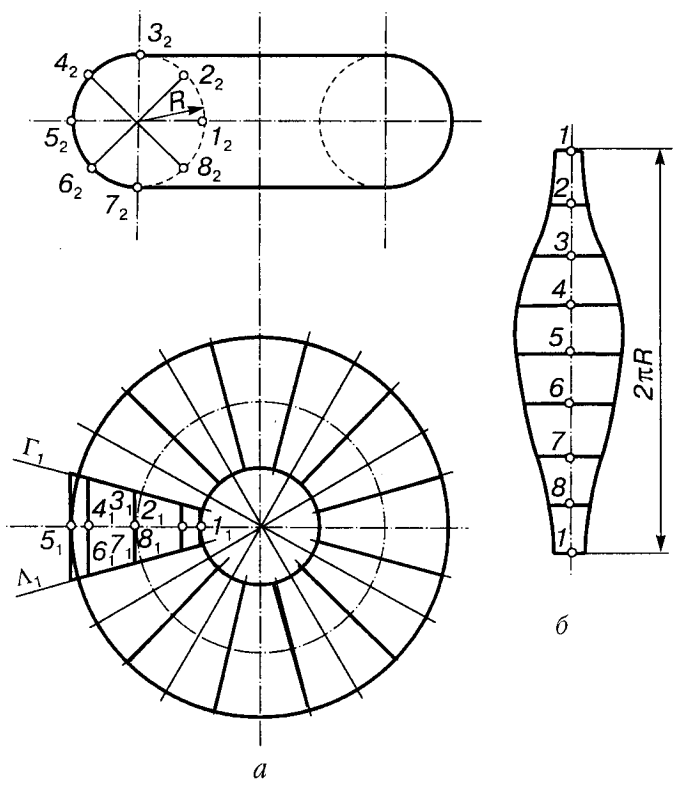


Рис. 9.5



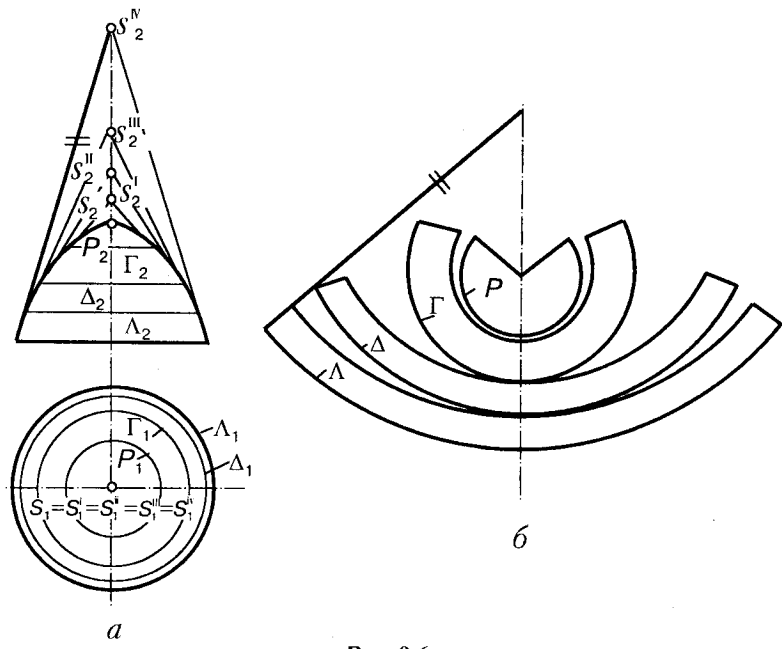


Рис. 9.6

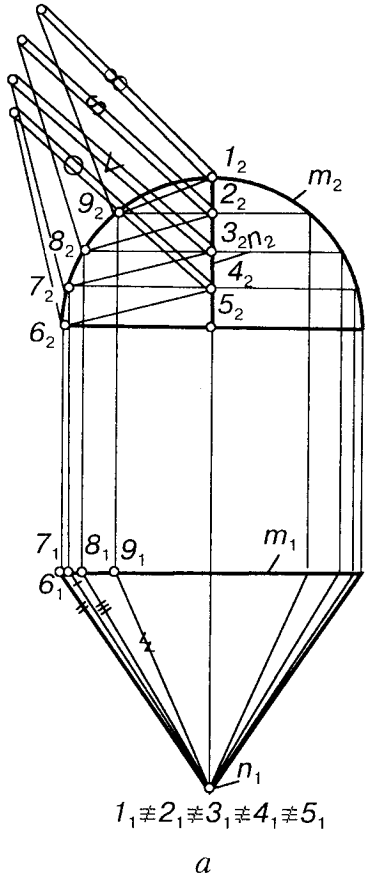


Рис. 9.7

Твірні фронтально проєкціювальної поверхні збігаються на фронтальній проєкції з точками 1...8.

На рис. 9.5, б зображено вертикальну пряму, на якій відкладено відрізок  $2\pi R$  — поперечний переріз апроксимуючого циліндра. Коло розділено на вісім рівних частин і по обидва боки від точок 1, 2, ..., 1 відкладено половину твірних апроксимуючого циліндра. Сполучаючи здобуті точки, дістають дві криві, що обмежують розгортку  $1/12$  поверхні тора. Повна розгортка складається з 12-ти таких частин.

На рис. 9.6, а показано спосіб конусів для побудови умовної розгортки тіла обертання. Висоту тіла розбито на чотири рівні частини і через точки поділу проведено горизонтальні перерізи. Побудовано чотири конуси обертання та дотичні до тіла обер-

тання по цих перерізах. Як відомо, розгортка конуса обертання має вигляд сектора, а зрізаного конуса — частини сектора, обмеженої двома колами. Розгортка поверхні обертання, яку зображено на рис. 9.6, б, становить чотири фігури.

При розгортці нерозгортних лінійчатих поверхонь їх замінюють багатогранником, гранями якого є трикутники. Такий метод називають *триангуляцією*.

На рис. 9.7, а зображено коноїд, визначником якого є фронтальне півколо, верти-

кальна пряма та горизонтальна площина паралелізму  $\Pi_1$ . Вертикальний радіус півкола поділено на чотири рівні частини. Верхню частину замінено трикутником  $1_22_29_2$ , а в трьох інших частинах проведено діагоналі. Таким чином, ліву половину коноїда розбито на сім трикутників, кожен з яких будується за трьома сторонами. На рис. 9.7, а показано визначення натуральних величин прямих 1—9, 2—8, 3—7, 4—6. На рис. 9.7, б послідовно побудовано ці сім трикутників.

### Запитання та завдання

1. Якими властивостями характеризуються розгортки поверхонь?
2. Які бувають розгортки?
3. Який спосіб використовують при побудові розгорток еліптичних циліндра та конуса?
4. Побудувати розгортку прямого кругового конуса з вертикальною віссю, зрізаного похилою фронтальною проекціовальною площиною.
5. Побудувати розгортку відсіку гвинтового коноїда, в якого напрямними є гвинтова лінія та її вертикальна вісь, а площина паралелізму горизонтальна.



## Глава 10 ПЕРТИН КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ З ЛІНІЄЮ, ПЛОЩИНОЮ ТА МІЖ СОБОЮ

При розв'язуванні практичних задач з кривими поверхнями доводиться знаходити перетин їх прямою чи кривою лінією, площиною, а також розглядати перетин між собою. Ці задачі називають *узагальненими позиційними задачами*, якщо під звичайними позиційними задачами розуміють перетин багатогранників з прямою, площиною та між собою. Для розв'язування узагальнених позиційних задач застосовують спосіб допоміжного проекціювання та спосіб січних поверхонь, а іноді й спосіб перетворення проекцій. Ідея застосування всіх цих способів полягає в досягненні такого положення, при якому безпосередньо знаходять точку чи групу точок.

Значну частину узагальнених позиційних задач можна поділити на дві групи:

1) задачі на побудову точки перетину лінії з поверхнею; 2) задачі на побудову лінії перетину двох поверхонь.

### 10.1. Перетин кривої поверхні з прямою та кривою лініями

Алгоритм розв'язання цієї задачі такий:  
1) провести через дану лінію проекціовальну площину або циліндричну поверхню;  
2) побудувати лінію перетину поверхні з проведеною проекціовальною поверхнею;  
3) знайти точку перетину даної лінії зі знайденою лінією перетину.

Розглянемо на прикладі застосування цього алгоритму. На рис. 10.1 показано перетин прямої загального положення з похилим еліптичним циліндром. Використає-

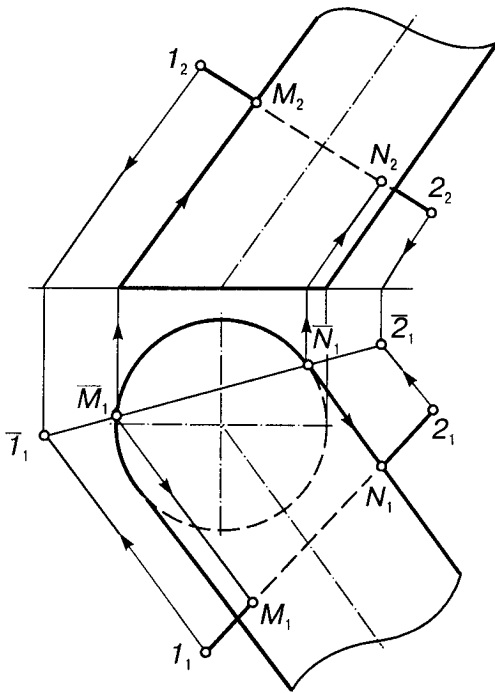


Рис. 10.1

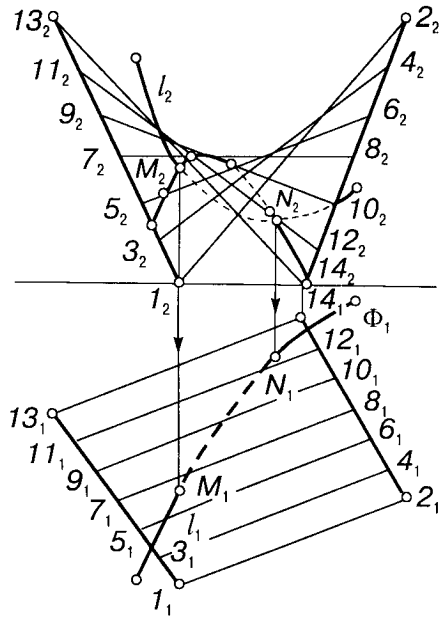


Рис. 10.3

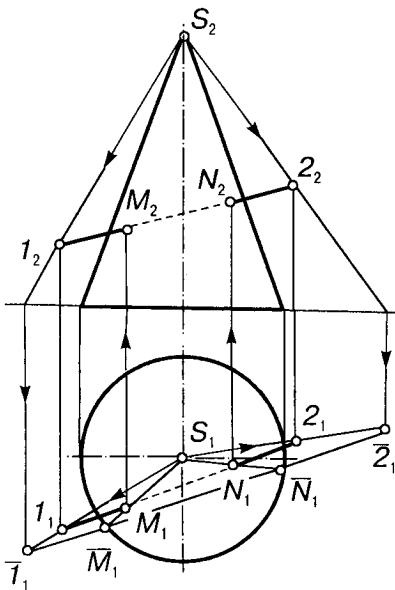


Рис. 10.2

мо косокутне допоміжне проєкціювання на горизонтальну площину проєкцій у напрямі твірних циліндра. При такому проєкціюванні циліндр спроекціюється колом

своєї основи, а пряма — відрізком  $\bar{I}_1\bar{2}_1$ . У перетині цього відрізка з колом визначаємо допоміжні проєкції точок перетину  $M_1$  і  $N_1$ . Проєкціюючи їх у зворотному напрямі на пряму, знаходимо точки перетину прямої з поверхнею циліндра. Беремо до уваги при цьому видимість відрізків прямої.

Якщо пряма перетинається з конусом, то доцільно скористатися центральним допоміжним проєкціюванням з вершини конуса на площину його основи (рис. 10.2). При цьому конус спроекціюється своєю основою, а пряма — відрізком  $\bar{I}_1\bar{2}_1$ . У перетині цього відрізка з колом визначимо допоміжні проєкції точок входу та виходу:  $M_1$  і  $N_1$ . Зворотним проєкціюванням у вершину конуса знайдемо точки перетину прямої з конічною поверхнею. Це точки  $M$  і  $N$ .

Допоміжне проєкціювання (паралельне або центральне) доцільно використовувати лише для циліндричних та конічних поверхонь. Більш універсальним є спосіб допоміжних перерізів кількома проєкційовальними площинами.

На рис. 10.3 зображено перетин відрізка просторової кривої з поверхнею гіпербо-

## 10.2. Перетин кривих поверхонь площиною

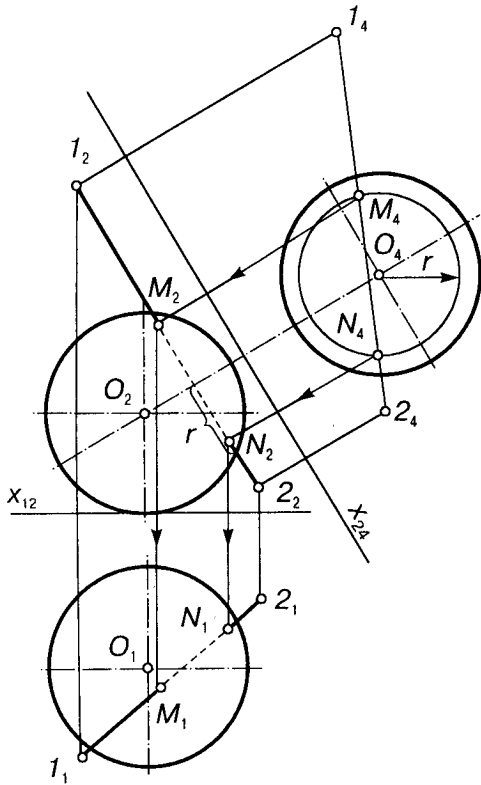


Рис. 10.4

лічного параболоїда. Через криву проводять проєкціювальну циліндричну поверхню, на рисунку це горизонтально проєкціювальна поверхня  $\Phi_1$ . Фіксують точки перетину поверхні з твірними гіперболічного параболоїда і визначають фронтальні проєкції цих точок. Через ці точки на фронтальній проєкції проводять плавну криву, яка в перетині з фронтальною проєкцією кривої  $l$  визначає шукані точки  $M$  і  $N$ .

Іноді доцільно скористатися способом перетворення проєкцій. На рис. 10.4 показано побудову перетину відрізка прямої  $l_2 2_2$  зі сферою. При цьому зроблено заміну горизонтальної проєкції. Нова вісь проходить паралельно фронтальній проєкції відрізка прямої. Через пряму проведено фронтально проєкціювальну площину, яка перетинає сферу по колу радіуса  $r$ . Це коло на допоміжній проєкції зображується без спотворення, перетин його з проєкцією відрізка прямої дає допоміжні проєкції шуканих точок, які проєкціюються в зворотному напрямі на проєкції прямої.

При плоскому перетині кривих поверхонь утворюється фігура, обмежена відповідною кривою. Зокрема, при плоскому перетині поверхонь другого порядку утворюються криві другого порядку. Найбільш характерною в цьому відношенні поверхнею є конус другого порядку. При перетині конуса другого порядку площиною можна дістати всі криві другого порядку. Тому криві другого порядку називають ще *конічними перерізами*.

Так, при перетині конуса обертання площиною, перпендикулярною до осі конуса, дістанемо коло. Якщо площина перетинає всі твірні конуса і нахилена до осі, то дістанемо еліпс. При перетині конуса площиною, паралельною одній з твірних, утворюється парабола. Як відомо, парабола має одну невласну точку, яка належить саме цій твірній. При перетині конуса площиною, паралельною двом твірним, утворюється гіпербола. Як відомо, гіпербола має дві нескінченно віддалені точки, які належать цим твірним. При перетині кривої поверхні проєкціювальною площиною одна проєкція кривої вже є, треба знайти тільки другу.

На рис. 10.5 зображено перетин конуса обертання площиною  $\Gamma$ , паралельною лівій контурній твірній. В результаті перетину утворюється парабола (п'ять точок якої позначено на рисунку). Точки  $1$  і  $2$  визначають у перетині проєкціювальної площини з основою конуса, вершина параболи  $3$  лежить на правій контурній твірній, а довільні точки  $4$  і  $5$  знайдені за допомогою горизонтального перерізу конуса площиною  $\Lambda$ .

Перетин сфери проєкціювальною площиною  $\Phi$  показано на рис. 10.6. В результаті перетину утворюється коло, яке проєкціюється на фронтальну проєкцію як еліпс. Точки  $1$  і  $2$  на екваторі сфери визначають за вертикальною відповідністю. Точки на фронтальному меридіані  $3$  і  $4$  є точками, що відділяють на полі  $\Pi_2$  видиму частину еліпса від невидимої. Кінці великої осі еліпса лежать на вертикальній прямій, що проходить через середину малої осі  $l_2 2_2$ , а довжина її дорівнює діаметру кола.

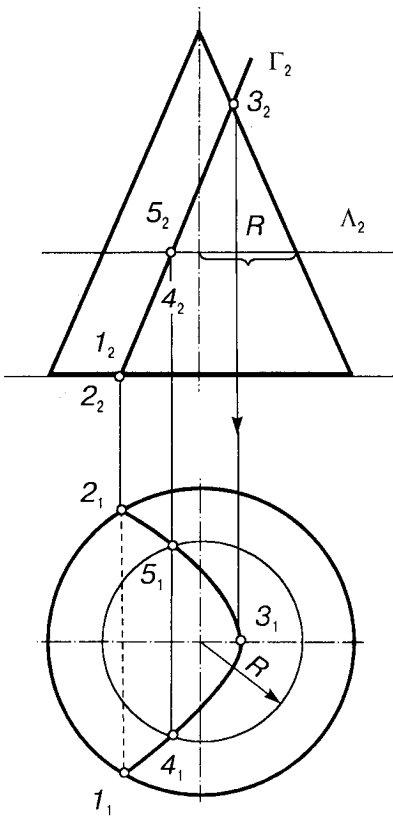


Рис. 10.5

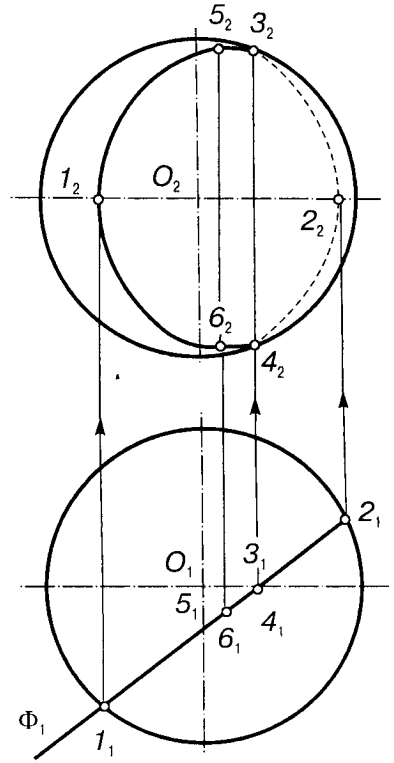


Рис. 10.6

Перетин гіперболічного параболоїда вертикальною площиною  $\Lambda$  показано на рис. 10.7. Як відомо, плоский переріз цієї поверхні може бути параболою, гіперболою або прямою, якщо січна площина паралельна одній з двох площин паралелізму. В розглядуваному випадку парабола визначена за точками перетину вертикальної площини з твірними поверхні, які знайдені на фронтальній проекції за вертикальною відповідністю.

При перетині кривих поверхонь площиною загального положення доцільно користуватися косокутним допоміжним проєкціюванням або способом допоміжних січних площин. Допоміжним косокутним проєкціюванням площину загального положення зводять до проєкціювальної і знаходять допоміжні точки лінії перетину, які проєкціюють у зворотному напрямі на відповідні твірні.

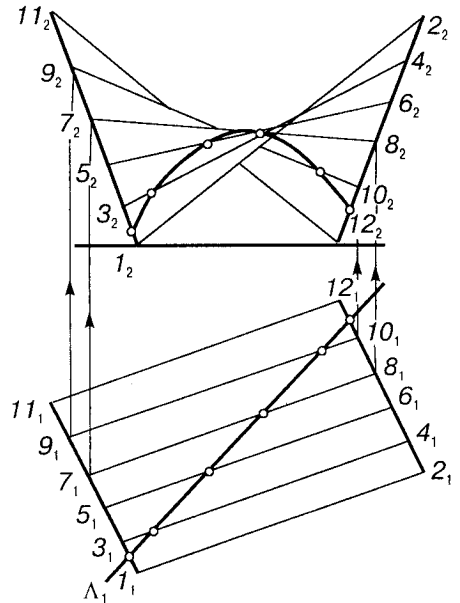


Рис. 10.7

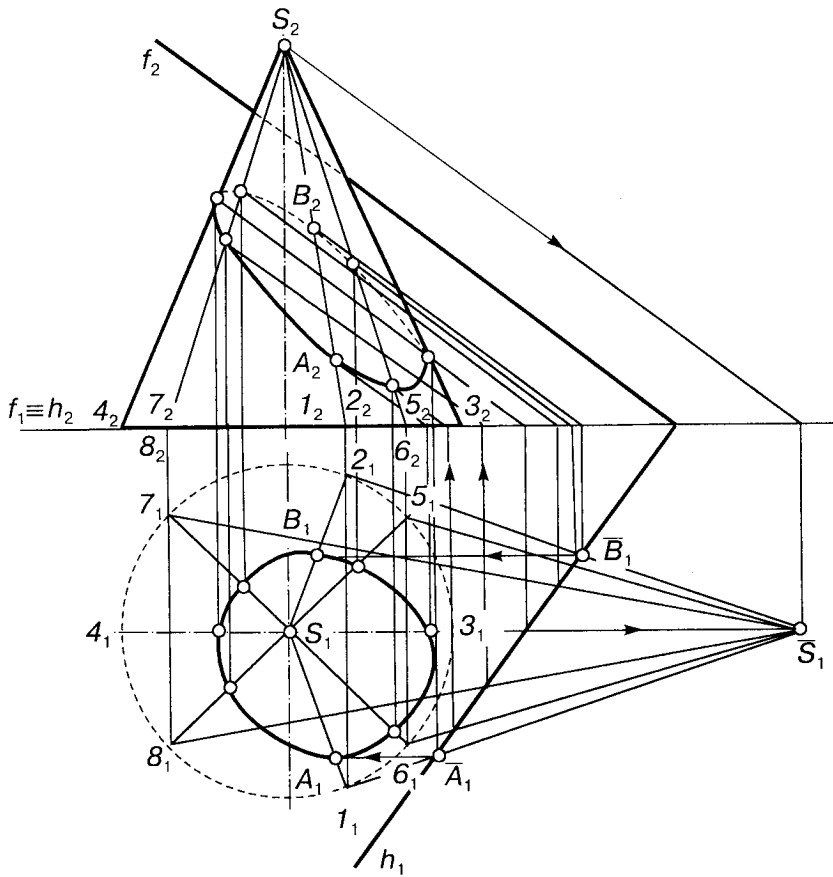


Рис. 10.8

На рис. 10.8 показано перетин конуса обертання площиною загального положення. Тут використано косокутне допоміжне проєкціювання площини та конуса у напрямі фронталі площини на горизонтальну площину його основи. При цьому площина зображується своїм горизонтальним слідом  $h_1$ , а вершина конуса  $S_1$  проєкціюється в точку  $\bar{S}_1$ . Провівши з точки  $\bar{S}_1$  дві дотичні до основи конуса, визначимо його косокутну проєкцію. Якщо на цій проєкції взяти достатню кількість твірних, то в перетині з  $h_1$  визначаться допоміжні проєкції точок фігури перерізу, які повертаються у зворотному напрямі на відповідні твірні. Так, у перетині  $l_1 \bar{S}_1$  з  $h_1$  визначається точка  $A_1$ , яка у напрямі фронталі проєкціюється на твірну  $S_1 l_1$ . Так само знайдено точку  $B_1$  на твірній  $2_1 S_1$  та інші точки. Всього на рис. 10.8 визначено кілька точок, за якими

побудовано проєкції еліпса як на полі  $\Pi_1$ , так і на полі  $\Pi_2$ .

Косокутне допоміжне проєкціювання на фронтальну площину проєкцій показано на рис. 10.9. Тут похилий еліптичний циліндр перетинається площиною загального положення, заданою горизонтальними паралельними прямими  $m$  і  $n$ . За напрям допоміжного проєкціювання взято напрям цих прямих, а за площину допоміжних проєкцій — площину  $\Pi_2$ . Тоді площина спроєкціюється прямою  $m_4 n_4$ , а твірні циліндра — пучком паралельних прямих. Для визначення напрямку косокутних проєкцій твірних циліндра у вибраному напрямі на  $\Pi_2$  проєкціюють вісь циліндра, на якій беруть довільну точку  $C$ . У результаті проєкціювання вісь матиме напрям  $O_4 C_4$ , всі твірні циліндра будуть паралельні цьому напрямку. На основі циліндра взято вісім точок

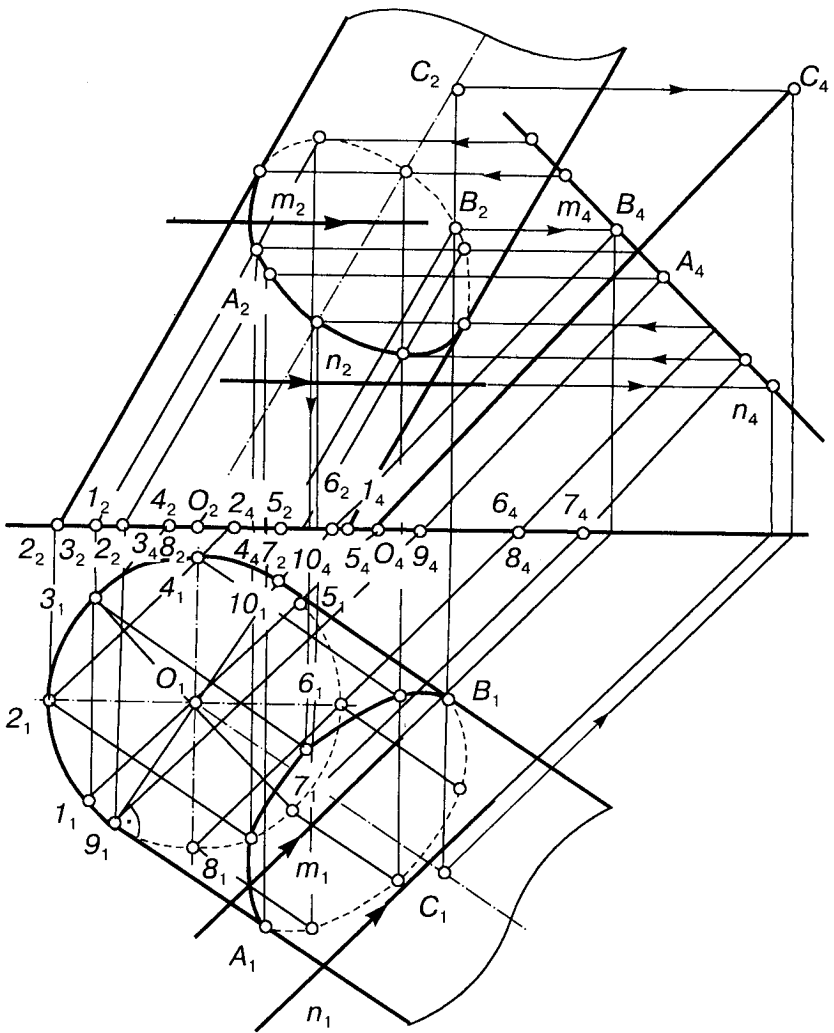


Рис. 10.9

1...8, усі вони спроекційовані на  $\Pi_2$  і через них проведено допоміжні проєкції твірних. У перетині їх з проєкцією площини  $m_4n_4$  визначаються допоміжні проєкції шуканих точок. Розглянемо, наприклад, контурні твірні циліндра на полі  $\Pi_1$ . Їхніми основами є точки 9 і 10. Допоміжні проєкції цих твірних на  $\Pi_2$  проходять через точки  $9_4$  і  $10_4$ , утворюючи в перетині з  $m_4n_4$  точки  $A_4$  і  $B_4$ , зворотнім проєкціонуванням знаходять їх на контурних твірних.

Застосування способу січних площин при перетині тора площиною загального

положення показано на рис. 10.10. Тут точки 1 і 2 визначаються безпосередньо на перетині горизонтального сліду площини  $h_1$  з колом основи тора. Для визначення найвищої точки перерізу 3, яка лежатиме в площині симетрії перерізу, перпендикулярній до  $h_1$ , через вісь тора проведено вертикальну площину  $\Phi$ , яка перетне площину по лінії найбільшого скату  $KL$ . Якщо обернути цю лінію навколо вертикальної осі тора до фронтального положення, то обрис тора залишиться тим самим, а лінія найбільшого скату займе положення  $\bar{K}_2\bar{L}_2$  (точка пе-

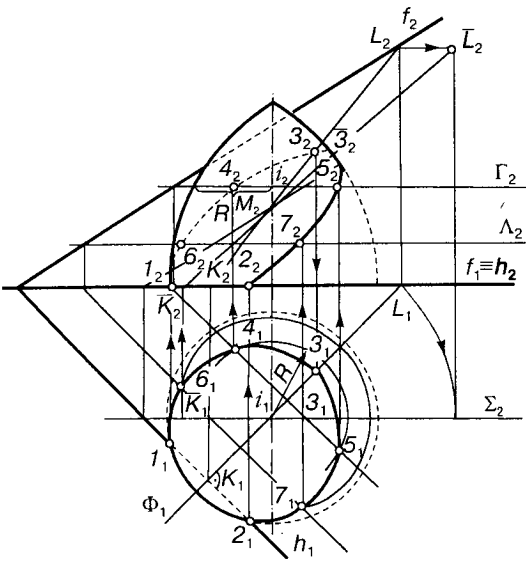


Рис. 10.10

ретину лінії найбільшого скату з віссю залишиться на місці). На продовженні цієї прямої в перетині з обрисом тора визначиться повернуте положення найвищої точки  $3_2$ , яка повертається на своє місце. Це точка  $3_2$ , за якою визначають її горизонтальну проекцію  $3_1$ . За допомогою горизонтальної січної площини  $\Gamma$ , яка перетинає тор по колу радіуса  $R$ , а січну площину — по горизонталі, знайдено точки  $4$  та  $5$ , а за допомогою горизонтальної січної площини  $\Lambda$  так само визначено точки  $6$  і  $7$ . За знайденими точками проводять обидві проекції кривої плоского перерізу.

### 10.3. Взаємний перетин кривих поверхонь

При конструюванні складних форм машинобудівних деталей або інженерних конструкцій виникає необхідність у побудові ліній перетину простих форм, що утворюють ці складні форми. Лінію, спільну для двох поверхонь, що перетинаються, називають *лінією перетину (переходу)*. Щоб визначити проекції цієї лінії, треба знайти проекції точок, спільних для поверхонь, що розглядаються. Лінію взаємного перетину будують за точками перетину ліній однієї поверхні з іншою або з її лініями. Це мож-

на зробити двома способами: 1) перетворенням проекцій, наприклад заміною площин проекцій або косокутним допоміжним проєкціюванням; 2) побудовою допоміжних перерізів.

При першому способі обидві проекції поверхонь, що перетинаються, перетворюються так, щоб хоч одна з них зайняла проєкціювальне положення і, таким чином, визначилася б проекція лінії перетину, яку у зворотному напрямі повертають на основні проекції.

При другому, більш універсальному способі криві поверхні перетинаються третьою поверхнею  $\theta$ , яку називають *посередником* (рис. 10.11). Дві криві лінії перетину  $m$  і  $n$ , що належать поверхні-посереднику, перетинаючись, утворюють точки шуканої лінії взаємного перетину. Виконавши таку операцію кілька разів, дістають потрібну кількість точок для проведення кривої взаємного перетину.

Як січні часто беруть такі площини, що перетинають дані поверхні по таких простих лініях, як прямі чи кола. Точки перетину цих ліній належать шуканій лінії взаємного перетину. Після цього визначають видимість окремих ділянок кривої: ділянка кривої буде видимою лише при перетині обох видимих ділянок поверхонь. При побудові лінії взаємного перетину та визначенні видимості велике значення мають характерні точки цієї лінії, які треба визначити спочатку. До таких точок належать найвища та найнижча, а також точки на контурі кожної поверхні, бо вони відділяють видиму ділянку лінії перетину від невидимої.

Лінія взаємного перетину може бути плоскою або просторовою. При взаємно-

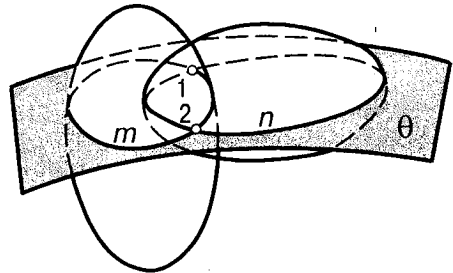
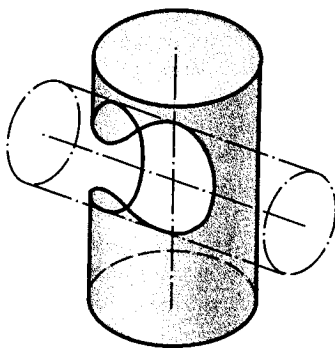
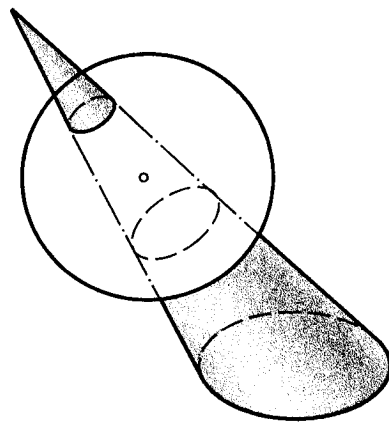


Рис. 10.11

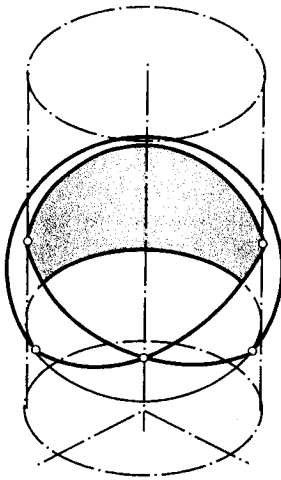




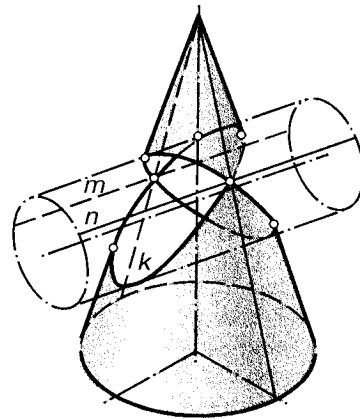
*a*



*б*



*в*



*г*

Рис. 10.12

му перетині двох кривих поверхонь можливі чотири випадки взаємного перетину: 1) наскрізне проникнення, коли лінія взаємного перетину розпадається на дві — лінію входу та виходу (рис. 10.12, б); 2) урізання, коли є тільки одна лінія взаємного перетину (рис. 10.12, а); 3) однобічне внутрішнє стикання, коли крива сама себе перетинає в точці дотику (рис. 10.12, в); 4) подвійне стикання, або розпад кривої четвертого алгебраїчного порядку на дві плоскі криві (рис. 10.12, г).

#### 10.4. Взаємний перетин кривих поверхонь, з яких одна є проєкціовальною

Оскільки проєкціовальною може бути тільки циліндрична поверхня, то розглянемо два приклади, в яких однією з поверхонь, що перетинаються, є саме така поверхня.

На рис. 10.13 зображено циліндр і конус обертання, які перетинаються. Тут маємо однобічне внутрішнє стикання, а саме: в точці *M* можна провести спільну дотичну площину до обох поверхонь. Фронтальна про-

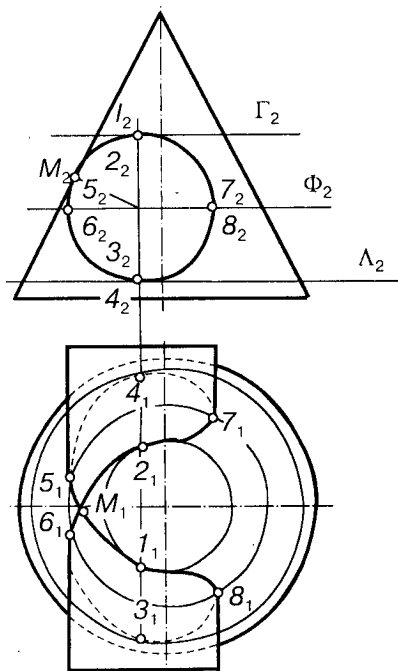


Рис. 10.13

екція лінії взаємного перетину збігається з фронтальною проекцією циліндра. Горизонтальну проекцію визначають за точками, які знаходять за допомогою горизонтальних допоміжних січних площин, що перетинають конус по колу відповідного радіуса, а циліндр — по твірних. Найвищі дві точки 1 і 2 визначають за допомогою горизонтальної площини  $\Gamma$ , що дотикається до циліндра по найвищій твірній. Найнижчі дві точки 3 та 4 знаходять за допомогою горизонтальної січної площини  $\Lambda$ , яка дотикається до циліндра знизу. Точки на контурних твірних циліндра 5, 6, 7, 8 визначають за допомогою горизонтальної січної площини  $\Phi$ . У разі потреби можна ще провести кілька горизонтальних січних площин. Сполучаючи знайдені точки, проводять криву, яка в точці  $M$  має точку самоперетину. При взаємному перетині двох поверхонь другого порядку результуюча крива має четвертий алгебраїчний порядок. Як відомо, таку криву можна перетнути площиною в чотирьох точках (див. рис. 10.13).

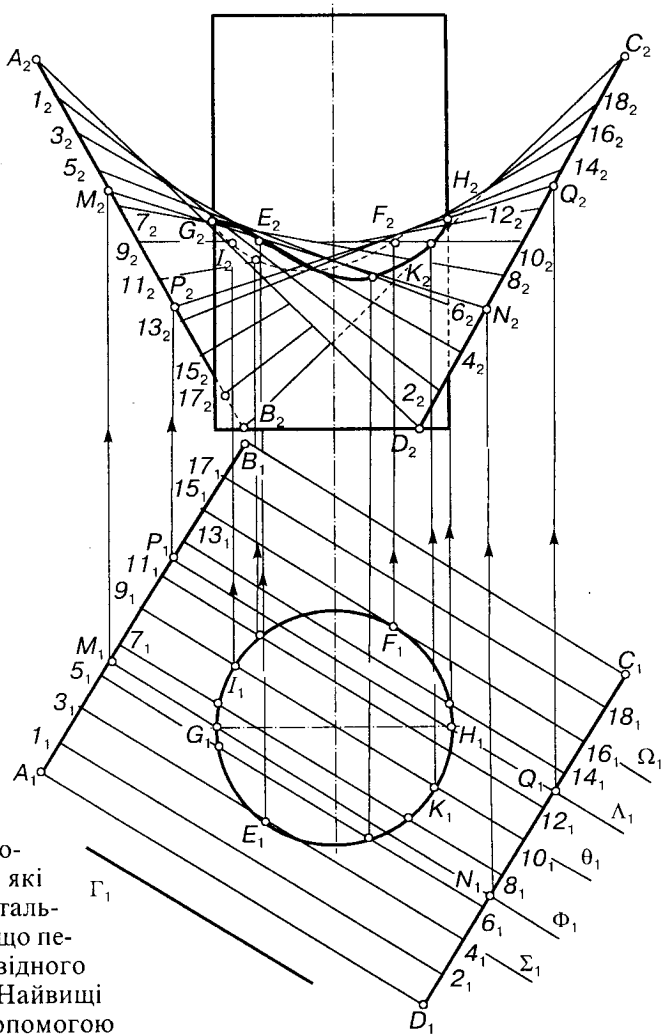


Рис. 10.14

Побудову взаємного перетину вертикального циліндра з гіперболічним параболоїдом показано на рис. 10.14. Горизонтальна проекція лінії перетину збігається з проекцією циліндра. Для визначення фронтальної проекції доцільно скористатися вертикальними січними площинами, паралельними площині паралелізму. Кожна така площина перетне гіперболічний параболоїд по прямолінійних твірних, а циліндр — по вертикальних твірних. Так, допоміжна площина  $\Phi_1$  перетне ліву контурну твірну циліндра, гіперболічний параболоїд вона перетне по прямій  $M_1N_1$ . У перетині лівої

твірної з прямою  $M_2N_2$  знаходять точку  $G_2$ . Так само проводять допоміжну площину  $\Lambda_1$  через праву контурну твірну циліндра, яка перетинає гіперболічний параболоїд по твірній  $PQ$ . У перетині фронтальних проєкцій їх матимемо точку  $H$ . Точки  $E$  та  $F$  визначають за допомогою вертикальних площин, дотичних до циліндра  $\Sigma_1$  та  $\Omega_1$ . Точки  $K$  та  $I$  визначають за допомогою січної площини  $\theta_1$ . За знайденими точками будують фронтальну проєкцію лінії взаємного перетину, яка також має четвертий алгебраїчний порядок.

### 10.5. Взаємний перетин кривих поверхонь у загальному положенні

Вище вже зазначалося, що для визначення лінії взаємного перетину двох поверхонь загального положення доцільно скористатися допоміжним косокутним або центральним проєціюванням. Цей спосіб ефективний, коли перетинаються циліндричні та конічні поверхні.

На рис. 10.15 показано побудову лінії взаємного перетину двох еліптичних циліндрів. При цьому використано косокутне допоміжне проєціювання обох циліндрів на площину їхньої основи. За напрям проєціювання взято напрям осі циліндра більшого діаметра. При такому проєціюванні більший циліндр спроеціюється колом своєї основи. Для визначення допоміжної проєкції циліндра меншого діаметра на його осі взято довільну точку  $M$ , яку спроеціювано в напрям осі більшого циліндра в точку  $M_1$ . Сполучивши її прямою з центром основи меншого циліндра, дістанемо напрям допоміжної проєкції твірних меншого циліндра. Якщо паралельно цьому напрямку провести дві дотичні до основи меншого циліндра, то матимемо його косокутну проєкцію. В перетині її з основою більшого циліндра визначиться тип взаємного перетину двох поверхонь. У цьому випадку дістаємо урізування, тобто буде одна просторова крива, яку визначають за точками.

Неважко показати, що знайдений напрям допоміжних проєкцій твірних буде такий самий, якщо обидва циліндри спроеціювати на площину їхньої основи у напрямі осі меншого циліндра. Дістанемо точки перетину допоміжних проєкцій твірних

з основою другого циліндра, які повертаються в зворотному напрямі на свої місця. Наприклад, контурна твірна меншого циліндра перетинається з колом більшого в точках  $\bar{1}_1$  та  $\bar{2}_1$ . Ці точки в зворотному напрямі проєціюються на саму твірну в точки  $1_1$  та  $2_1$ . Фронтальні проєкції їх визначають за вертикальною відповідністю. Як відомо, визначаючи точки перетину, треба насамперед знайти характерні точки, а саме: точки на контурних твірних обох проєкцій. Так, на полі  $\Pi_1$  на лівій контурній твірній меншого циліндра визначено точки 3 та 4, а на правій контурній кривій меншого циліндра на полі  $\Pi_1$  — точки 5 і 6.

Отже, якщо провести пряму, паралельну допоміжній проєкції твірних циліндра так, щоб вона перетинала обидва кола основи, то визначаться чотири точки, через які пройдуть чотири твірні, які, перетинаючись, дадуть чотири точки лінії перетину.

Побудову лінії взаємного перетину двох еліптичних конусів показано на рис. 10.16.

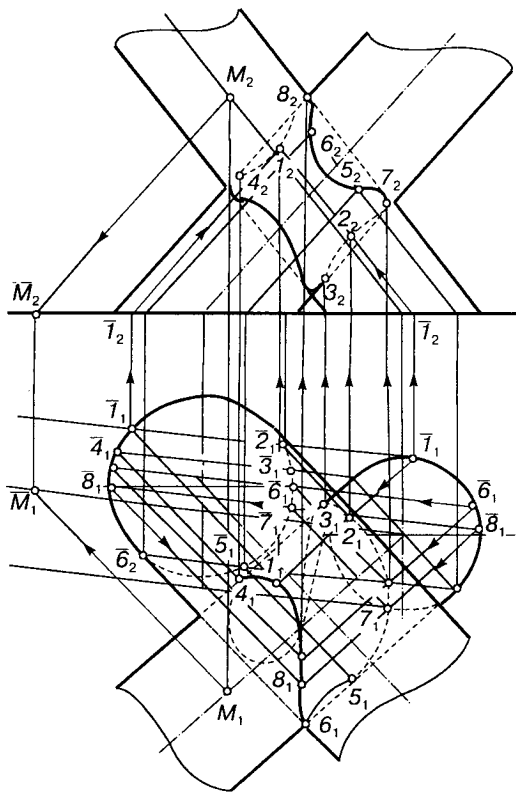


Рис. 10.15

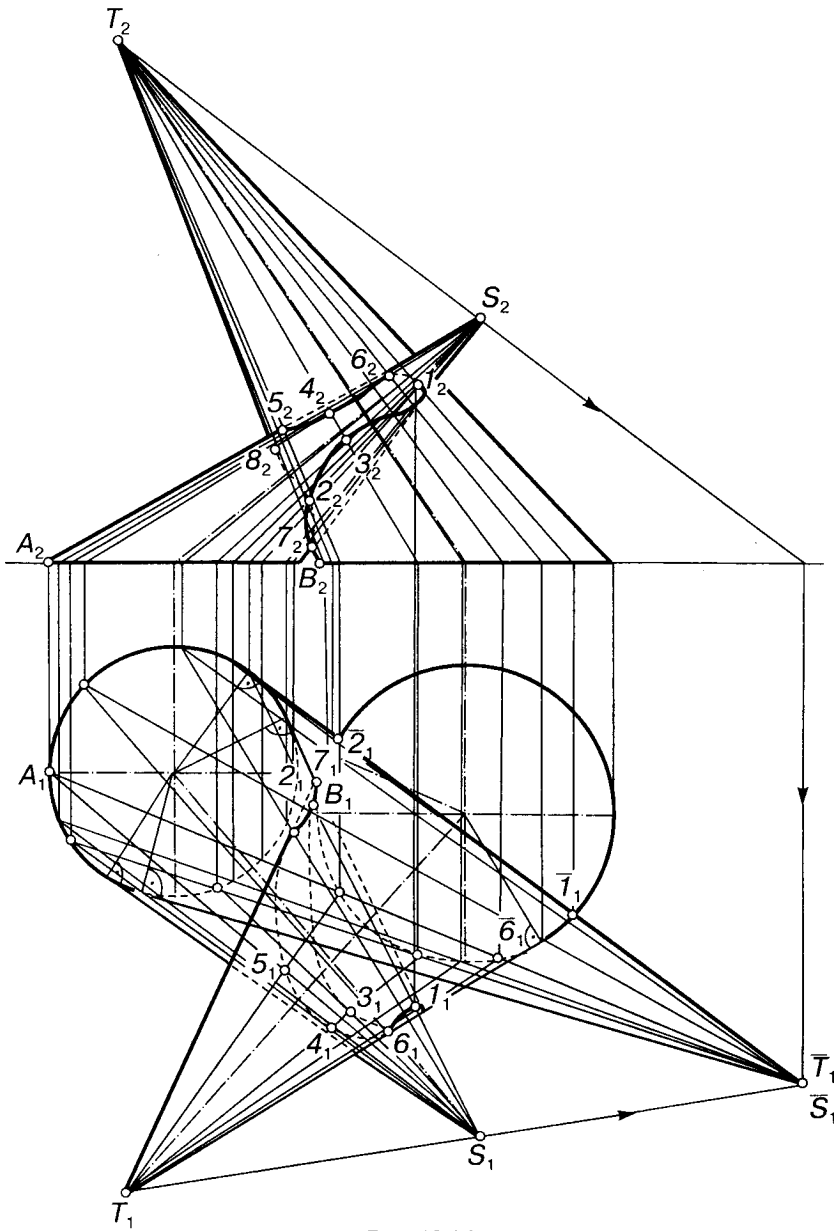


Рис. 10.16

Тут використане допоміжне центральне проєкціювання з вершин конусів. Так, обидва конуси центральньо проєкціюються з вершини  $T$  на горизонтальну площину їхніх основ. При цьому допоміжною проєкцією вершини  $S$  буде точка  $\bar{S}_1$ . Ця сама точка буде також центральньою проєкцією вершини  $T$  при проєкціюванні її з вершини  $S$ .

При проєкціюванні обох конусів з вершини  $T$  конус  $T$  спроєкціюється колом своєї основи, а менший конус — фігурою, яку одержимо, якщо проведемо з точки  $\bar{T}_1 \equiv \bar{S}_1$  дотичні до основи меншого конуса. Розглядаючи допоміжну проєкцію, бачимо, що маємо випадок урізування, тобто одну криву взаємного перетину. Її точки визнача-

ють спочатку на допоміжній проекції, а потім їх проєкціюють центрально у зворотному напрямі на своє місце. Наприклад, на допоміжній проєкції контурна твірна меншого конуса перетинається з колом основи більшого в точках  $\bar{1}_1$  та  $\bar{2}_1$ . Проєкціюючи їх у вершину  $T$  до перетину з горизонтальною проєкцією твірної, знаходять точки  $1_1$  та  $2_1$ , а за вертикальною відповідністю і фронтальні проєкції цих точок. Як і в попередньому прикладі, будь-яка пряма, що проходить через точку  $\bar{T}_1 \equiv \bar{S}_1$  та перетинає обидва кола основи, дасть чотири точки лінії взаємного перетину.

Використання центрального допоміжного проєкціювання з вершини конуса на площину його основи на прикладі побудови лінії взаємного перетину конуса обертання з гіперболічним параболоїдом показано на рис. 10.17. При центральному проєкціюванні з вершини конуса він спроекціюється колом своєї основи, а відсік гіперболічного параболоїда — фігурою  $A_1\bar{B}_1C_1\bar{D}_1$ . На рисунку показано знаходження точок лінії взаємного перетину на твір-

ній гіперболічного параболоїда  $MN$ . Для цього цю твірну спроекціювано на горизонтальну площину основи з вершини конуса в проєкцію  $\bar{M}_1\bar{N}_1$ . В перетині цієї прямої з колом основи конуса визначають точки  $\bar{1}_1$  та  $\bar{2}_1$ , які центрально проєкціюються у зворотному напрямі на твірну  $M_1N_1$  у точки  $1_1$  та  $2_1$ . Їхні фронтальні проєкції визначають за вертикальною відповідністю. Так само знаходять точки лінії взаємного перетину і на інших твірних. За визначеними точками будують криву взаємного перетину, яка має четвертий алгебраїчний порядок.

Більш універсальним є спосіб допоміжних перерізів. На рис. 10.18 показано визначення лінії взаємного перетину конуса обертання з гвинтовим коноїдом. Точки лінії взаємного перетину визначають за допомогою горизонтальних січних площин, які перетинають конус по колах відповідних радіусів, а гвинтовий коноїд — по твірній. Лінія взаємного перетину на полі  $\Pi_1$  буде спіраллю Архімеда, а на полі  $\Pi_2$  — синусоїдою із затухаючою амплітудою.

Крім січних площин, для визначення лінії взаємного перетину кривих поверхонь обертання використовують спосіб січних сфер, який розпадається на два способи: концентричних та ексцентричних сфер.

На рис. 10.19 показано використання способу концентричних сфер для визначення лінії перетину між конусом обертання та однопорожнинним гіперболідом обертання. Для використання способу концентричних сфер мають виконуватися дві умови: 1) осі поверхонь обертання мають перетинатися; 2) ці осі мають бути паралельні одній з площин проєкції. У розглядуваному випадку обидві умови виконуються: осі перетинаються та паралельні фронтальній площині проєкції. Спочатку визначають точки перетину контурів обох поверхонь. Це точки 1, 2, 3 та 4. Тут маємо наскрізне проникнення, тобто лінія перетину складається з двох симетричних кривих. Для визначення точок взаємного перетину з точки  $O$  перетину осей проводимо кілька сфер, які перетинають обидві поверхні по колах, що проєкціюються своїми діаметрами. На рисунку менша сфера вписана в конус і має з ним одне спільне горизонтальне коло. Вона перетинається з однопорожнин-

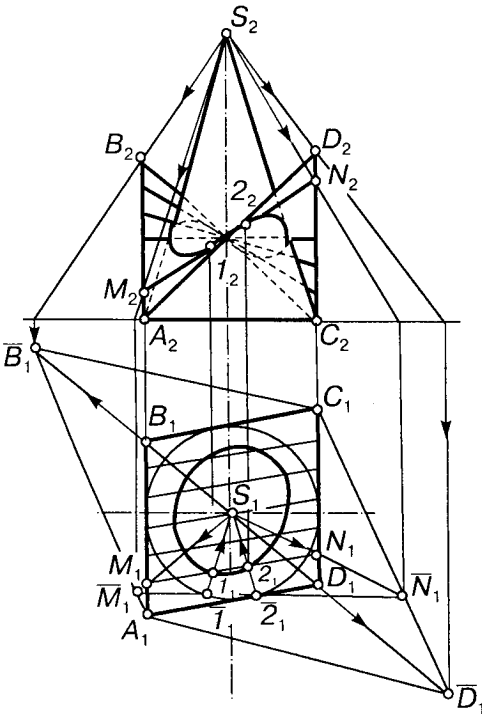


Рис. 10.17

ним гіперболоїдом по двох профільних колах. У перетині горизонтального кола з двома профільними відстанемо чотири точки: 5, 6, 7, 8.

На рис. 10.19 зображено ще одну — більшу сферу, яка перетинає гіперболоїд по двох профільних колах, а конус — по горизонтальному колу. В результаті перетину їх відстанемо ще чотири точки: 9, 10, 11, 12. У горизонтальному перерізі, що проходить через вісь гіперболоїда, можна дістати ще чотири точки при перетині кола, що лежить у площині  $\Gamma$ , з лініями обрису гіперболоїда на полі  $\Pi_1$ . За визначеними точками проводимо дві криві четвертого порядку.

На рис. 10.20 показано застосування способу ексцентричних сфер при визначенні лінії взаємного перетину вертикального зрізаного конуса й тора. Цей спосіб можна використовувати при взаємному перетині поверхонь обертання та циклічних поверхонь, що мають спільну площину симетрії, яка паралельна одній з площин проєкцій. Найвищу точку  $1_2$  та найнижчу  $2_2$  визначають безпосередньо на полі  $\Pi_2$  як перетин контурних твірних конуса та контурної твірної тора.

Для визначення інших точок лінії взаємного перетину обидві поверхні перетинаються пучком фронтально проєкціювальних площин, що проходять через вісь тора, перпендикулярну до  $\Pi_2$ . На рис. 10.20 зображено дві з таких площин:  $\Gamma_2$  та  $\Lambda_2$ . Площина  $\Gamma_2$  перетинає вісь тора в точці  $S_2$ , а тор — по колу з центром у цій точці. Якщо поставити перпендикуляр у точці  $S_2$  до площини кола, то він перетне вісь конуса в точці  $O'$ , яка разом з точкою  $S_2$  визначить вісь "миттєвого" циліндра. Тепер досить з точки  $O'$  провести сферу, що перетне цей циліндр по колу з центром  $S_2$ , щоб визначити коло перетину цієї сфери з конусом. У перетині двох кіл при фронтально проєкціювальному положенні визначаться дві точки лінії перетину:  $3_2$  і  $4_2$ . На рисунку показано, як за допомогою площини  $\Lambda_2$  знайти також вісь "миттєвого" циліндра  $T_2O''$ , а за нею визначити відповідний радіус сфери і знайти точки  $5_2$  та  $6_2$ .

Слід звернути увагу на таку закономірність при взаємному перетині двох алгебраїчних поверхонь другого порядку: якщо дві алгебраїчні поверхні другого поряд-

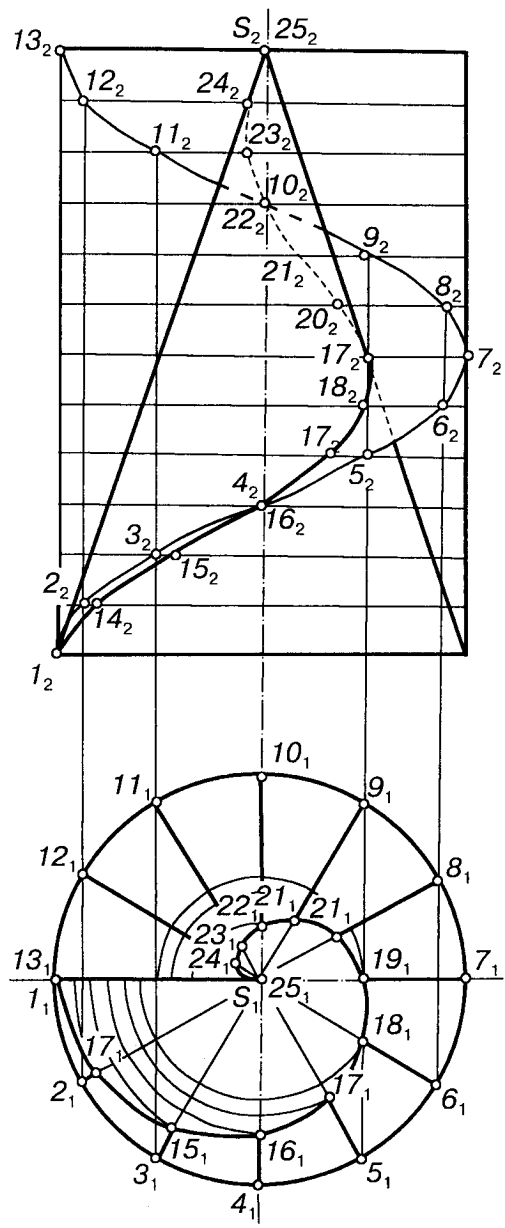
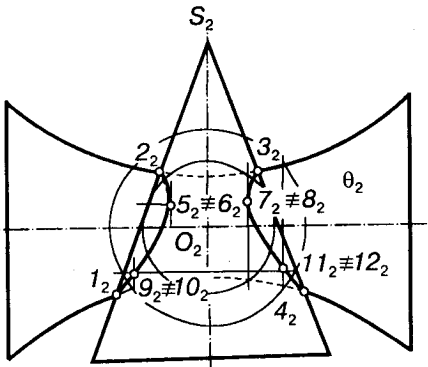


Рис. 10.18

ку, що перетинаються, мають спільну площину симетрії, то лінія перетину їх (в загальному випадку четвертого порядку) проєкціюється на цю та іншу паралельну їй площину у вигляді кривої другого порядку. Зокрема, гіпербола утворюється при взаємному перетині циліндрів, конусів, параболоїдів, гіперболоїдів, еліпсоїдів, параболу,

ла — при перетині сфери з будь-якою поверхнею другого порядку. Еліпсом крива четвертого порядку проєкціюється при перетині стиснутого еліпсоїда з циліндром, конусом, розтягнутим еліпсоїдом, параболоїдом, гіперболоїдом.



$\Gamma_2$

### 10.6. Взаємний перетин кривих поверхонь другого порядку по плоских кривих

Перетин поверхонь другого порядку по плоских кривих становить не тільки теоретичний інтерес, а й широко застосовується при розв'язуванні багатьох технічних задач.

Якщо перетнути площиною дві поверхні другого порядку, що перетинаються між собою, то дістанемо дві криві другого порядку, які в загальному випадку перетинаються між собою в чотирьох точках, що належать кривій взаємного перетину четвертого порядку. Для інженерної практики важливе значення мають випадки, коли крива четвертого порядку розпадається на більш прості лінії, наприклад, на чотири прями, пряму та криву третього порядку або на дві

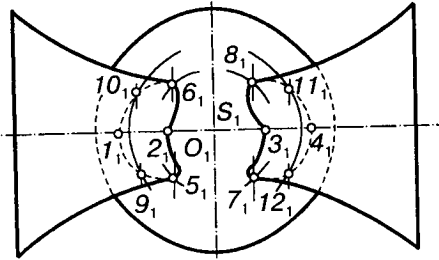


Рис. 10.19

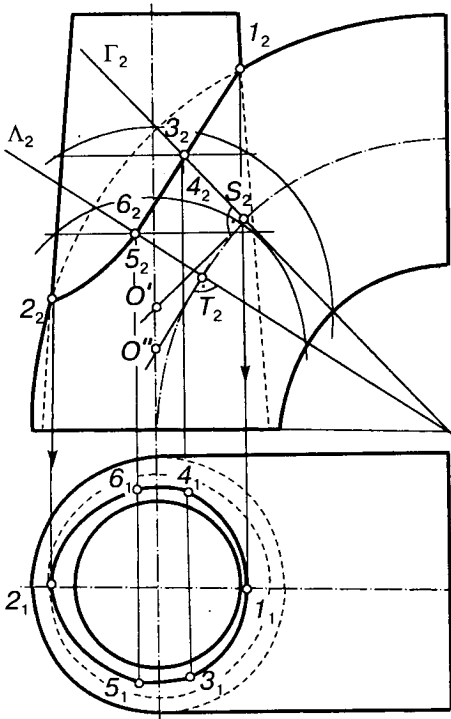


Рис. 10.20

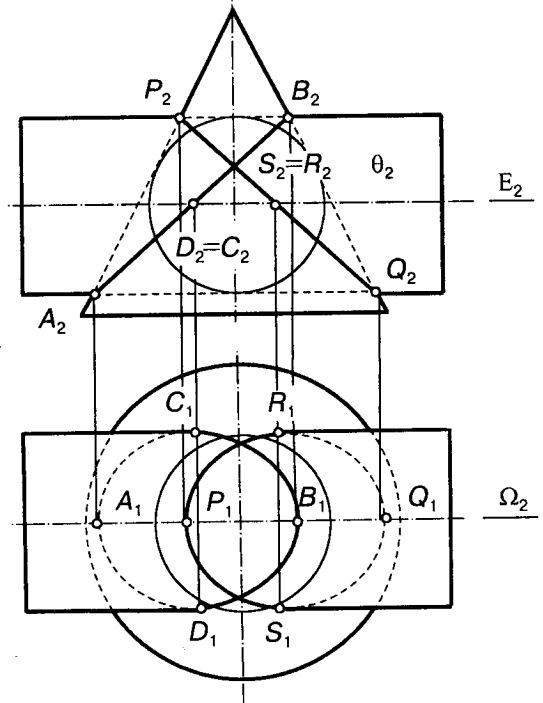


Рис. 10.21

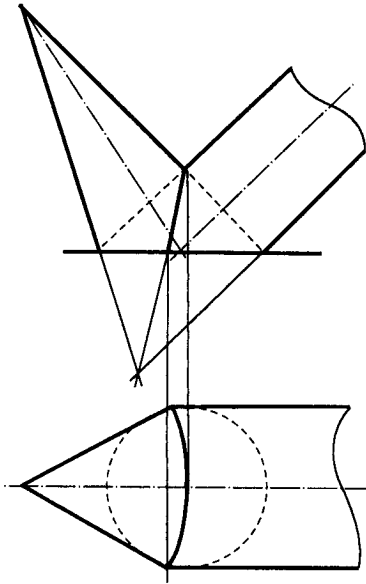


Рис. 10.22

криві другого порядку. Одна з двох кривих може бути також уявною.

Ознаки розпаду кривої четвертого порядку на дві криві другого порядку форму-

люються в трьох теоремах, які подаємо без доведення.

1. Теорема Монжа. Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку або вписані в неї, то вони перетинаються по двох плоских кривих, площини яких проходять через пряму, що сполучає точки перетину ліній дотику.

2. Якщо дві поверхні другого порядку мають дві точки дотику, то лінія перетину їх розпадається на дві криві другого порядку, площини яких проходять через пряму, що сполучає ці точки.

3. Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній плоскій кривій, то вони перетинаються ще по одній кривій, яка також є плоскою.

Перетин циліндра з конусом по плоских кривих показано на рис. 10.21. Обидві поверхні описані тут навколо однієї сфери і перетинаються по двох еліпсах, що лежать у фронтально проєкціювальних площинах.

Перетин еліптичного циліндра та конуса, що мають спільне коло основи, показано на рис. 10.22. Тут друга крива взаємного перетину їх також є плоскою (частина еліпса).

### Запитання та завдання

1. В яких випадках при перетині кривих поверхонь другого порядку з прямою лінією доцільно використовувати допоміжне проєкціювання, а в яких — спосіб допоміжних перерізів?
2. По яких кривих можна перетнути поверхню гіперболічного параболоїда площиною?
3. У чому полягає суть спрощення при побудові лінії взаємного перетину двох поверхонь, якщо одна з поверхонь проєкціювальна?
4. Який спосіб є найбільш раціональним при розв'язанні задачі на взаємний перетин конуса обертання з вертикальною віссю і сфери?
5. Коли дві поверхні другого порядку перетинаються по плоских кривих?
6. В яких випадках доцільно використовувати спосіб концентричних сфер, а в яких — спосіб ексцентричних сфер?
7. В яких випадках крива четвертого порядку розпадається на простіші криві?
8. Два еліптичних конуси мають спільне горизонтальне коло основи. Задати їх так, щоб другою кривою взаємного перетину була парабола.





## Глава 11 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

### 11.1. Основні поняття та визначення

Прямокутні проекції об'єктів у різних галузях промисловості дають змогу розв'язувати різноманітні позиційні та метричні задачі щодо цих об'єктів, а також виконувати вимірювання. Проте недоліком способу прямокутних проекцій є відсутність одного з вимірів об'єкта на кожній з проекцій, а це призводить до зменшення наочності зображень.

Систему, при якій зображуються всі три виміри об'єкта, називають *аксонометричною*, або просто *аксонометрією*. Отже, аксонометрії властиві наочність та оборотність. Ідея аксонометрії полягає в тому, що об'єкт жорстко зв'язується з просторовою декартовою системою координат, яка разом з об'єктом проєкціюється центрально або паралельно на площину аксонометричних проєкцій. При центральному проєкціюванні аксонометрію називають *центральною*, а при паралельному — *паралельною*. Нижче буде розглянуто паралельну аксонометрію.

На рис. 11.1 показано точку  $A$  в системі прямокутних декартових координат. Щоб зв'язати точку з системою координат, її проєкціюють на одну з координатних площин (найчастіше на горизонтальну). Таку проєкцію називають *вторинною*. При цьому відразу визначаються всі три декартові координати точки.

Напрямок аксонометричного проєкціювання вибирають так, щоб він не збігався з напрямком координатних осей або площин, бо інакше матимемо вироджену проєкцію осі чи площини. При цьому відрізки, паралельні координатним осям, будуть спотворюватися залежно від кута нахилу відрізка до аксонометричної площини проєкцій. Міру спотворення виражають так званими *коефіцієнтами*, або *показниками спотворення*.

На рис. 11.2 прямокутна декартова система координат спроекційована на площину аксонометричних проєкцій  $\Pi_1$ . На кож-

ній з осей задалегідь відкладено від початку координат по одиничному відрізку  $e$ , кожен з яких проєкціюється відповідним відрізком:  $e'_x, e'_y, e'_z$ .

Якщо скласти відношення аксонометричних проєкцій до дійсних величин, то дістанемо коефіцієнти спотворення по трьох осях:

$$\frac{e'_x}{e} = p, \quad \frac{e'_y}{e} = q, \quad \frac{e'_z}{e} = r.$$

Залежно від кута, що утворюється між напрямком проєкціювання та площиною аксонометричних проєкцій, розрізняють косокутну та прямокутну аксонометрії. В першому випадку цей кут є непрямым, а в другому — прямим.

У косокутній аксонометрії залежність між показниками спотворення виражають формулою

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

де  $\alpha$  — кут між напрямком проєкціювання та площиною аксонометричних проєкцій.

У прямокутній аксонометрії ця формула набуває такого вигляду:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2.$$

Отже, якщо відомі два показники спотворення та кут між напрямком проєкціювання і площиною аксонометричних проєкцій, то можна за наведеними формулами знайти третій показник спотворення.

Основною теоремою паралельної аксонометрії є *теорема Польке — Шварца*. Будь-які три відрізки прямої на площині, що виходять з однієї точки, можна розглядати як паралельні проєкції трьох рівних та взаємно перпендикулярних відрізків у просторі.

Спочатку цю теорему сформулював К. Польке, а потім К. Шварц узагальнив її.

На основі цієї теореми при побудові аксонометричного зображення передбачається свобода вибору осей та аксонометричних показників. Якщо показники спотворення по всіх трьох осях однакові, тобто

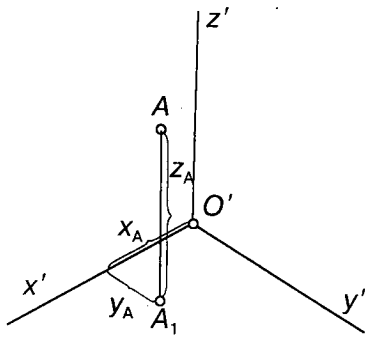


Рис. 11.1

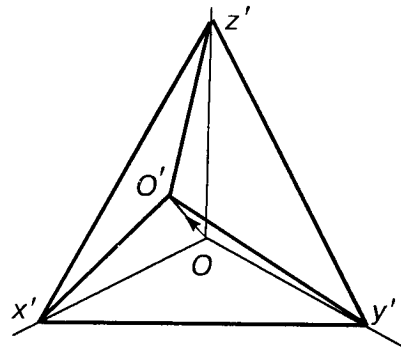


Рис. 11.3

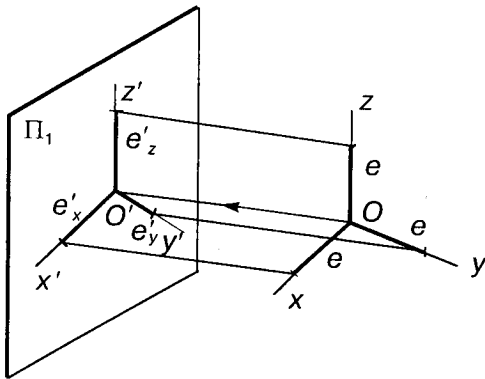


Рис. 11.2

$p = q = r$ , то аксонометрію називають *ізометрією*; якщо  $p = q \neq r$ , то аксонометрію називають *диметрією*; якщо  $p \neq q \neq r$ , то аксонометрію називають *триметрією*.

Якщо в косокутній аксонометрії показники спотворення лежать у межах від 0 до  $\infty$ , тобто

$$0 \leq p < \infty, 0 \leq q < \infty, 0 \leq r < \infty,$$

то в прямокутній аксонометрії

$$0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1, 0 \leq r \leq 1.$$

Справді, при косокутному проєкціюванні відрізок прямої може зобразитися як завгодно великим порівняно з натуральною величиною, а при прямокутному — не більше від своєї натуральної величини.

Якщо виключити граничні значення коефіцієнтів, то можна стверджувати, що в прямокутній аксонометрії сума квадратів двох будь-яких коефіцієнтів спотворення більша ніж 1, але менша ніж 2. У косокутній

аксонометрії сума квадратів двох будь-яких коефіцієнтів спотворення також більша ніж 1.

Сліди координатних площин на аксонометричній площині проєкцій утворюють так званий *трикутник слідів* (рис. 11.3). З багатьох систем аксонометричних проєкцій на практиці часто користуються трьома її видами, а саме: прямокутною ізометрією (співвідношення показників спотворення  $1 : 1 : 1$ ), прямокутною диметрією ( $1 : \frac{1}{2} : 1$ ) та косокутною фронтальною диметрією ( $1 : \frac{1}{2} : 1$ ). Використовують також косокутну ізометрію, або “воєнну перспективу” ( $1 : 1 : 1$ ).

## 11.2. Прямокутні ізометрія та диметрія

Найбільш поширеним і простим видом аксонометрії є прямокутна аксонометрія, зокрема *прямокутна ізометрія*. В цій системі всі три показники спотворення дорівнюють один одному, а це можливо тільки тоді, коли всі три координатні осі однаково нахилені до площини аксонометричних проєкцій. При цьому трикутник слідів є рівнобічним. Вісь  $Oz$ , як правило, розміщують вертикально, а осі  $Ox$  та  $Oy$  утворюють з нею кути по  $120^\circ$ .

Узагальнюючи, слід зазначити, що в прямокутній аксонометрії осі координат є висотами трикутника слідів. Показник спотворення в прямокутній ізометрії визначають за формулою  $3p^2 = 2$ , де  $p = \sqrt{2/3} \approx 0,82$ . На практиці при побудові аксонометричних зображень користуються так званими

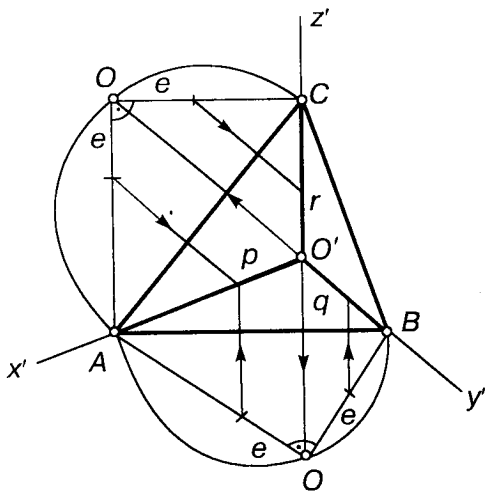


Рис. 11.4

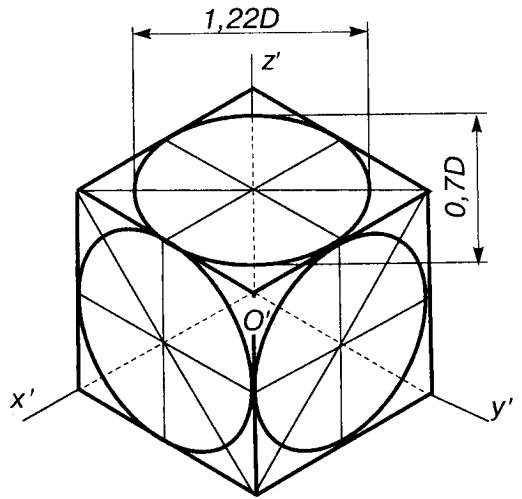
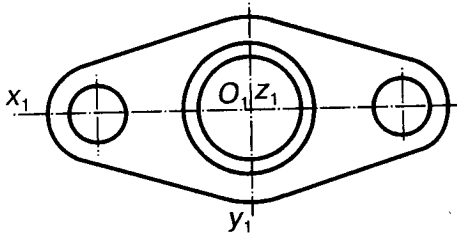
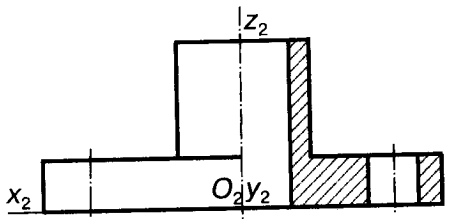


Рис. 11.5

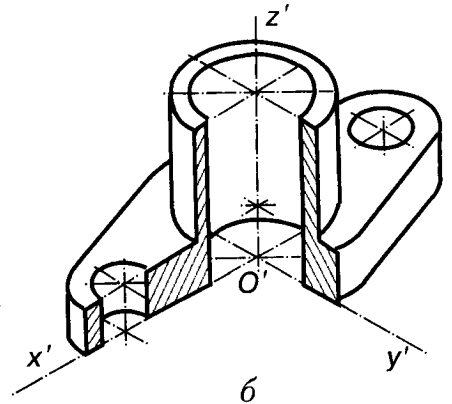
зведеними показниками спотворення. Зокрема, в прямокутній ізометрії при побудові зображень відкладають паралельно координатним осям натуральні величини. В результаті дістають аксонометричне зображення, збільшене в 1,22 рази ( $1 : 0,82 = 1,22$ ).

У прямокутній аксонометрії за напрямом аксонометричних осей координат можна визначити показники спотворення (рис. 11.4). Нехай задано три осі, що утворюють між собою довільні кути. Вісь  $O'z'$  розмістимо вертикально, оскільки в прямокутній

аксонометрії осі координат є висотами трикутника слідів. Побудуємо цей трикутник, взявши на будь-якій з осей довільну точку і провівши сторони трикутника слідів перпендикулярно до відповідних осей. Для визначення показників спотворення сумістимо дві грані з площиною рисунка. Так, при суміщенні грані  $AO'B$  урахуємо, що кут  $AOB$  у просторі — прямий. Тому на стороні  $AB$ , як на діаметрі, будуємо півколо і обертанням навколо  $AB$  знаходимо на півколі точку  $O$ , що спирається на діаметр півкола.



a



б

Рис. 11.6

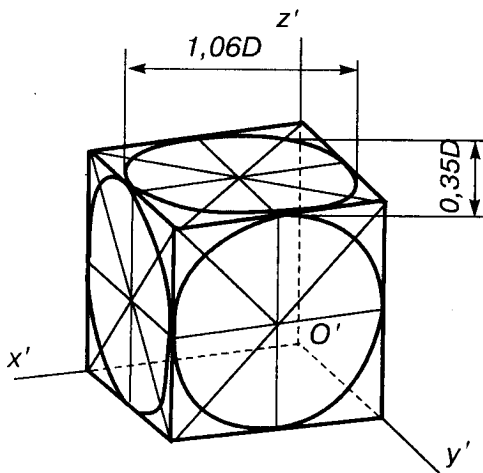


Рис. 11.7

Тепер досить на осях  $OA$  та  $OB$  відкласти одиниці масштабу  $e$  і в зворотному напрямі знайти ці відрізки на осях  $O'A$  та  $O'B$ . Отже, ми визначили показники спотворення  $p$  і  $q$  по осях  $Ox$  та  $Oy$ . Щоб визначити показник спотворення  $r$  по осі  $Oz$ , грань  $AO'C$  суміщаємо з площиною рисунка.

Зображення куба в прямокутній ізометрії подано на рис. 11.5. Тут у грані куба вписані кола, які зображуються еліпсами. Осі еліпсів в прямокутній аксонометрії мають певний напрям, велика вісь еліпса перпен-

дикулярна до третьої координатної осі, а мала вісь паралельна їй. Наприклад, якщо коло паралельне площині  $x'O'y'$ , то третьою віссю є вісь  $O'z'$ .

Відкладаючи паралельно координатним осям натуральні величини відрізків, дістаємо, що великі осі еліпсів дорівнюють  $1,22 D$ , а малі —  $0,7 D$ .

На рис. 11.6, *a* зображено дві проєкції втулки, а на рис. 11.6, *б* побудовано ізометрію цієї втулки з вирізом передньої чверті. Побудову рекомендується починати із зображення в ізометрії горизонтальної проєкції деталі. Маючи горизонтальну проєкцію, легко за допомогою вертикальних ліній, на яких відкладаються розміри, взяті з фронтальної проєкції, завершити побудову. Напрям ліній штриховки визначають після відкладання на осях однакових відрізків.

Поряд з перевагами прямокутна ізометрія має й недоліки, а саме: всі координатні площини нахилені однаково до площини аксонометричних проєкцій і всі сторони предмета чи деталі зменшуються однаково.

Якщо потрібно показати одну грань предмета більш повно, а другу подати скорочено, то застосовують другу прямокутну аксонометричну систему — **прямокутну диметрію**. Показники спотворення у цій системі такі:  $p = 0,94$ ,  $q = 0,47$ ,  $r = 0,94$ .

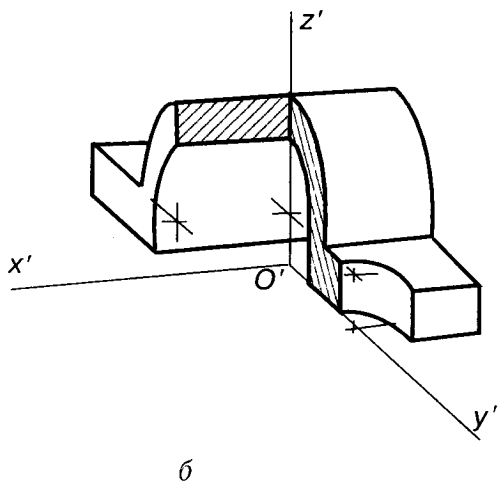
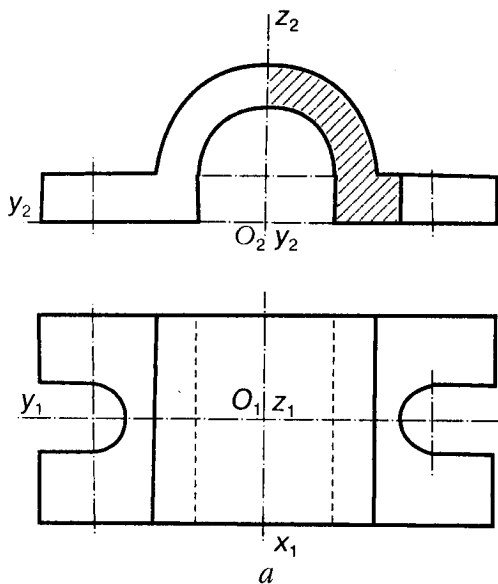
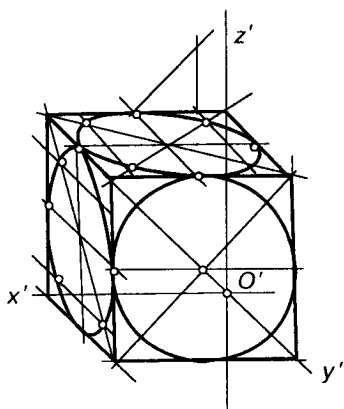
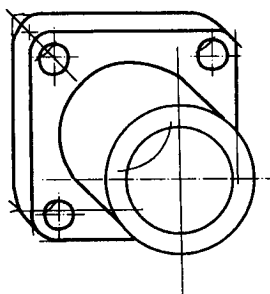


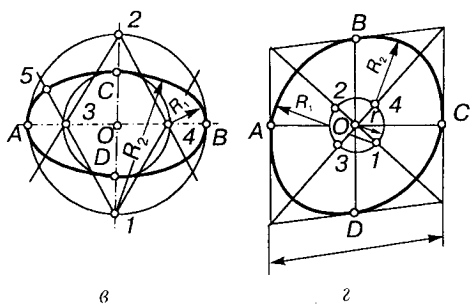
Рис. 11.8



a

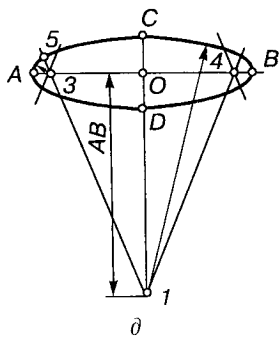


b



a

b



a

Рис. 11.9

Відкладаючи натуральні та половинні розміри, дістаємо зображення, збільшене в 1,06 рази ( $1 : 0,94 = 1,06$ ).

На рис. 11.7 зображено куб у прямокутній диметрії. У грані куба вписано коло. Еліпси, вписані у верхню та ліву грані, однакові, великі осі їх перпендикулярні до третьої осі, як і в ізометрії. Велика вісь еліпса дорівнює  $1,06 D$ , а мала — втричі менша. Вісь  $O'x'$  у диметрії утворює з горизонтальним напрямом кут  $7^\circ$ , а вісь  $O'y'$  — кут  $41^\circ$ . Проте їх можна побудувати без транспортира. Для цього досить з початку координат провести дугу кола довільним радіусом  $R$ , а з точки перетину цієї дуги з віссю  $O'z'$  зробити засічку на проведеній дузі радіусом, що дорівнює  $1,5R$ . Через цю точку та початок координат проходить вісь  $O'x'$ . Що ж до осі  $O'y'$ , то вона є бісектрисою кута  $x'O'z'$ . Така побудова більш точна, ніж за допомогою транспортира.

На рис. 11.8, a зображено два види машинобудівної деталі, а на рис. 11.8, б — її прямокутну диметрію. Оскільки деталь витягнута в одному напрямі, то при виборі аксонометричних осей їх взято так, щоб більша сторона деталі була напрямлена вздовж  $O'y'$ , на якій розміри зменшуються вдвоє. Побудову доцільно починати з горизонтальної проекції. На рис. 11.8, б показано деталь з вирізаною передньою чвертю.

### 11.3. Косокутна фронтальна диметрія

Крім прямокутних різновидів аксонометрії, використовують косокутну аксонометрію, зокрема, *косокутну фронтальну диметрію*. В цій системі осі  $O'x'$  та  $O'z'$  взаємно перпендикулярні, а вісь  $O'y'$  утворює з горизонтальним напрямом кут  $45^\circ$ .

Таку аксонометричну систему застосовують тоді, коли необхідно зберегти велику кількість фронтальних кіл або інших фронтальних криволінійних контурів об'єкта. Її розміщують паралельно координатній площині  $x'O'z'$ .

На рис. 11.9, a у косокутній фронтальній диметрії зображено той самий куб, що й на рис. 11.7. Коло у фронтальній грані зображується без спотворення; кола у верхній та лівій гранях зображуються еліпсами, але їхні осі не горизонтальні й не вертикальні.

Тому для поверхонь обертання, розміщених вертикально, косокутну фронтальну диметрію використовують рідко.

На рис. 11.9, б зображено деталь з колами у фронтальній площині. Тут використано косокутну фронтальну диметрію. Ця система ефективна також при зображенні в аксонометрії багатограних форм.

При побудові кіл в аксонометрії еліпси часто замінюють овалами, які будуються інструментально і є спряженням дуг кіл. Практично еліпс в ізометрії будують так. На великій осі  $AB$  (рис. 11.9, в) та на малій  $CD$  будують два кола, які перетинають продовження малої осі в точках 1 і 2, а велику вісь — у точках 3 і 4. З центром у цих точках будують овали радіусів  $R_1 = OB - OC$  та  $R_2 = CD + R_1$ . Точки спряження дуг цих радіусів знаходять, сполучивши точки 1 і 3 прямою, яку продовжують до перетину з дугами в точці 5.

У прямокутній диметрії в площині  $xOz$  побудуємо ромб (рис. 11.9, г), його середні лінії та діагоналі. З центра  $O$  радіусом  $r = d/7$  проводимо допоміжне коло, яке перетинає діагоналі в точках 1, 2, 3, 4. З центра 1 проведемо дугу  $AB$ , з центра 2 — дугу  $DC$ , з центра 3 — дугу  $AD$ , а з центра 4 — дугу  $BC$ . Розміри великої та малої осей овала визначаємо при проведенні дуг.

Для побудови овала, який замінює еліпс у площині  $xOy$ , за даними осями  $AB$  і  $CD$  (рис. 11.9, д) відкладаємо від центра  $O$  на продовженні малої осі довжину великої осі  $AB$ . Дістаємо точку 1 — центр верхньої дуги овала, тим самим радіусом проводимо нижню дугу овала. Зліва та справа від центра  $O$  проводимо дуги радіусом  $r = OC/2$ , для цього з точок  $A$  і  $B$  засічками радіусом  $r$  знаходимо точки 3 і 4. Точку спряження 5 знаходимо за допомогою прямої 1—3.

#### 11.4. Розв'язування позиційних задач в аксонометрії

На рис. 11.10, а, б зображено перетин двох призм: вертикальної та фронтально проекційовальних. Оскільки грані однієї призми перпендикулярні до горизонтальної площини проекцій, а грані другої перпендикулярні до фронтальної площини проекцій, то проекції ліній перетину збігаються на полі  $\Pi_1$  і на полі  $\Pi_2$  з проекціями відповідних призм.

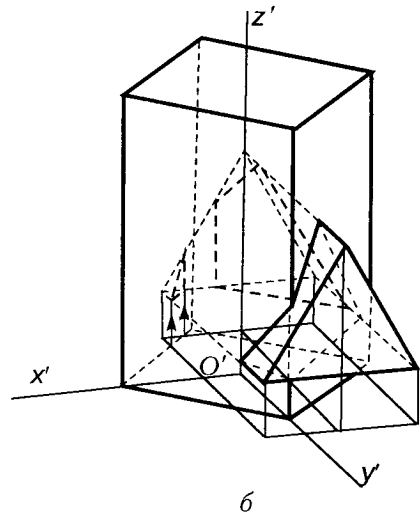
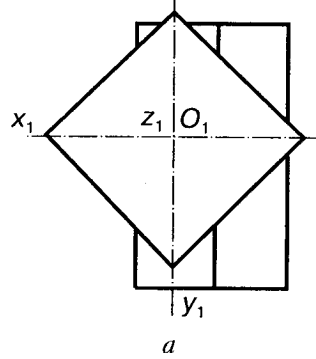
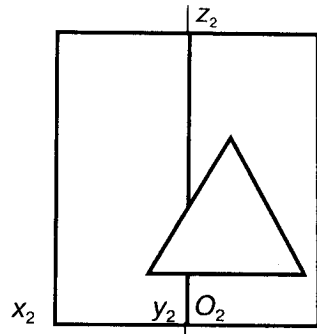


Рис. 11.10

При побудові взаємного перетину в аксонометрії треба насамперед вибрати відповідну аксонометричну систему. Якщо це прямокутна ізометрія, то слід врахувати, що основою вертикальної призми є квадрат з вершинами на осях  $Ox$  та  $Oy$ , тому ізометрична проекція буде невдалою, бо дві грані

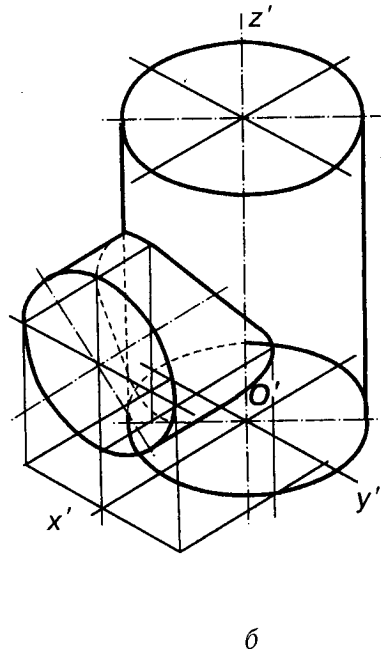
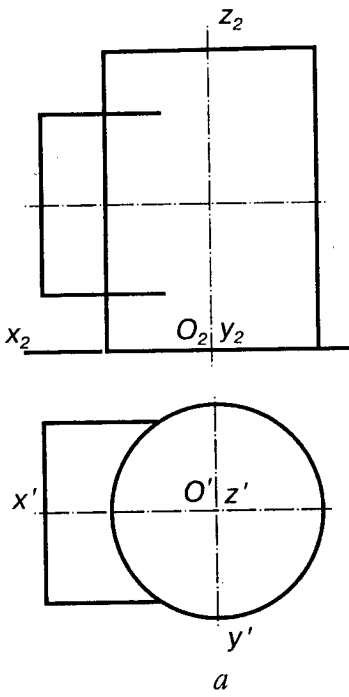


Рис. 11.11

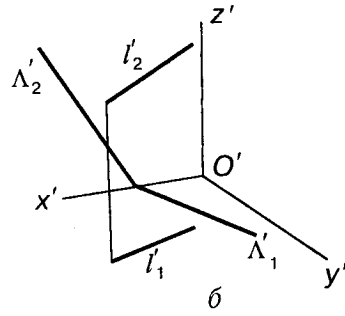
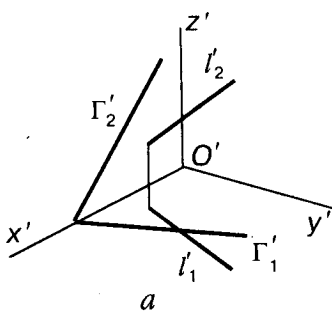


Рис. 11.12

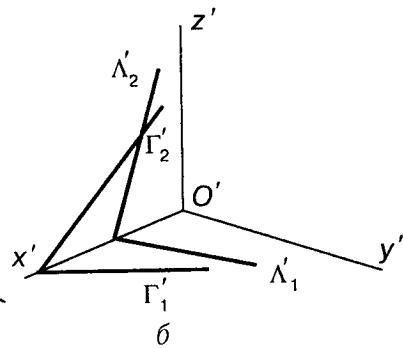
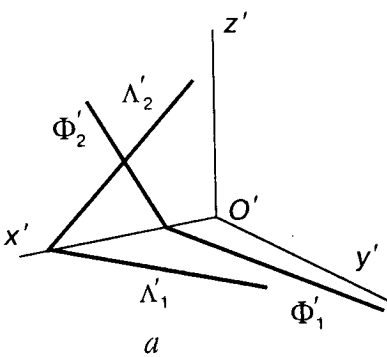


Рис. 11.13

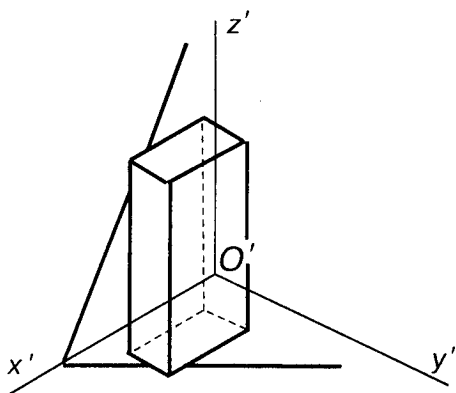


Рис. 11.14

вертикальної призми зобразяться в проєкціювальному положенні. Отже, слід вибрати прямокутну диметрію. Спочатку будують горизонтальну проєкцію призми, що перетинаються. Потім через відповідні точки проводять вертикальні прямі, на яких відкладають розміри, взяті з фронтальної проєкції. У даному випадку маємо наскрізне проникнення, тобто лінія взаємного перетину розпадається на дві лінії: входу та виходу.

На рис. 11.11, *a* зображено перетин двох циліндрів обертання. Один циліндр займає вертикальне положення, а другий — профільно проєкціювальне. На рис. 11.11, *б* у прямокутній ізометрії побудовано лінію

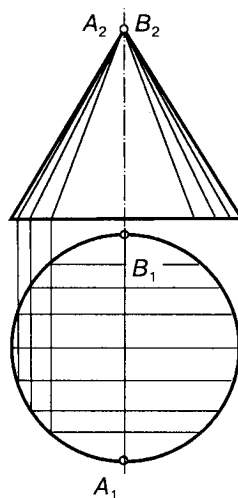


Рис. 11.15

взаємного перетину цих циліндрів. Як і в попередньому випадку, спочатку будують горизонтальну проєкцію, на якій лінія взаємного перетину збігається з проєкцією вертикального циліндра. Лінію взаємного перетину четвертого алгебраїчного порядку будують за окремими точками. Для цього на горизонтальній проєкції проводять кілька твірних горизонтального циліндра, які в певних точках перетинаються з вертикальним. Тепер через ці точки треба провести вертикальні твірні до перетину з відповідними твірними горизонтального циліндра. Утворену криву перетину контурні твірні горизонтального циліндра поділяють на видимі та невидимі частини.

### Запитання та завдання

1. Чи можуть у прямокутній аксонометрії дві або одна вісь зобразитися неспотворено?
2. Що називають вторинною проєкцією точки в аксонометрії?
3. Чи можна в аксонометрії розв'язати дві основні позиційні задачі на перетин прямої з площиною та перетин двох площин?
4. Через точку  $A(2, 4, 8)$  провести пряму, що перетинатиме горизонтальну площину в точці  $B(8, 5, 0)$ . Вибрати аксонометричний масштаб. Побудову виконати в прямокутній ізометрії.
5. На аксонометричному рисунку побудувати точку перетину прямої  $l$  з площинами  $\Gamma$  та  $\Lambda$  (рис. 11.12, *a, б*).
6. На аксонометричному рисунку побудувати лінії взаємного перетину двох площин (рис. 11.13, *a, б*).
7. На аксонометричному рисунку побудувати лінію перетину призми і площини загального положення (рис. 11.14).
8. У прямокутній диметрії побудувати поверхню коноїда (рис. 11.15).



# Розділ II

## ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА



### Глава 12

#### ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ВИРОБИ ТА КРЕСЛЕННЯ

##### 12.1. Відомості про державні стандарти

Вивчення інженерної графіки полягає в засвоєнні правил виконання та оформлення креслень відповідно до правил ортогонального проєкціювання та діючих стандартів єдиної системи конструкторської документації.

За Державною системою стандартизації України нормативні документи зі стандартизації поділяють на такі категорії: державні стандарти України (ДСТУ); галузеві стандарти України (ГСТУ); стандарти науково-технічних та інженерних товариств і спілок України (СТТУ); технічні умови України (ТУУ); стандарти підприємств (СТП). Державні стандарти колишнього СРСР (ГОСТ) на території СНД визнані міждержавними і зберігають таку саму аббревіатуру.

Зараз у народному господарстві України діє близько 30 систем (комплексів) стандартів, розроблених за часів існування СРСР. Додержання вимог цих систем забезпечує належний рівень виробництва та якість продукції, що випускається. Від систем стандартів залежить термін функціонування машин, обсяг витрат на підтримання їх працездатності, проведення ремонту та заміну агрегатів. Зміст стандартів значною мірою залежить від рівня розвитку виробничих сил та інтеграції їх. З розвитком виробництва змінюється та доповнюється зміст стандартів. Застарілі стандарти замінюються новими. Кожен із міждержавних стандартів має позначення, що складається з індексу (ГОСТ) і відокремлених через тире реєстраційного номера та

двох останніх цифр року прийняття стандарту. Систему міждержавних стандартів ЄСКД позначають так: індекс (ГОСТ), реєстраційний номер, перші цифри з крапкою якого визначають систему стандартів, а цифри, що стоять після крапки, є номером стандарту в даній системі, потім тире і дві останні цифри року затвердження. Наприклад: ГОСТ 2.306—68.

Система ЄСКД — Єдина система конструкторської документації є найбільш поширеною. Вона має цифровий індекс 2 і 10 класифікаційних груп (від 0 до 9). Наприклад, третя група (загальні правила виконання креслень) містить ГОСТ 2.301—68 та всі наступні до ГОСТ 2.321—84.

Розробка і впровадження стандартів — це тривалий процес. У міру розробки системи державних стандартів України буде здійснюватися перехід на виготовлення креслень за цими стандартами.

Креслення є міжнародною мовою техніки. Фахівець, що вміло виконує та може грамотно прочитати креслення, здатний висловити свою інженерну думку, втілити в кресленнях конструкторські рішення. Згідно з кресленнями виготовляється задуманий конструктором виріб.

##### 12.2. Вироби та їхні складові частини

Предмет виробництва, що виготовляється на підприємстві, називають *виробом*. Розрізняють вироби основного та допоміжного виробництва.

Вироби основного виробництва — це такі, що включені в номен-

клатуру продукції підприємства та призначені для реалізації. Для автомобільного заводу — це автомобіль, для моторного заводу — це двигуни, для заводу кріпильних виробів — гайки, болти, шпильки та ін.

До виробів допоміжного виробництва належать такі, що виготовляються підприємством для власних потреб. Це вироби оснастки, різноманітні пристосування, штампи, кондуктори, вимірювальні та різальні інструменти.

Для виготовлення або комплектації своїх виробів підприємство може придбати вироби інших підприємств. Придбані вироби називаються *покупними*.

Згідно з ГОСТ 2.101—68 вироби поділяють на деталі, складальні одиниці, комплекси, комплекти. Крім того, залежно від наявності чи відсутності у виробах складових частин їх поділяють на неспецифіковані (деталі), що не мають складових частин, та специфіковані, які складаються з двох і більше складових частин.

*Деталь* — це виріб, виготовлений з однорідного матеріалу без застосування складальних операцій.

*Складальна одиниця* — це виріб, окремі частини якого з'єднуються між собою на підприємстві-виготовлювачі складальними операціями.

*Комплекс* — це два і більше специфікованих виробів, не з'єднаних між собою на підприємстві складальними операціями, але призначених для виконання взаємозв'язаних експлуатаційних функцій.

*Комплект* — це два і більше виробів, не з'єднаних на підприємстві складальними операціями. Це набір виробів, що мають загальне експлуатаційне призначення допоміжного характеру.

### 12.3. Конструкторські документи та стадії проектування

Згідно з ГОСТ 2.102 — 68 до конструкторських документів належать графічні та текстові документи, що містять усі дані про склад і будову виробу, а також про його розробку, виготовлення, контроль, експлуатацію та ремонт.

Залежно від змісту розрізняють такі основні види конструкторських документів для загального машинобудування:

*креслення деталі*, що містить зображення деталі та необхідні дані про її виготовлення і контроль;

*складальний рисунок (креслення)*, що містить зображення виробу та всі необхідні дані про його складання (виготовлення) і контроль;

*рисунок (креслення) загального вигляду*, що визначає конструкцію виробу, взаємодію його складових частин та пояснює принцип його роботи;

*теоретичний рисунок (креслення)*, що містить дані про форми виробу (обводи) та координати його складових частин;

*габаритний рисунок (креслення)*, що містить спрощене зображення виробу з габаритними, встановлювальними та приєднувальними розмірами;

*монтажний рисунок*, що містить спрощене зображення виробу та необхідні дані для монтажу його на місці застосування;

*схема*, на якій показано умовні зображення або позначення складових частин виробу та зв'язки між ними;

*специфікація* — це документ, що визначає зміст складальної одиниці, комплексу або комплекту;

*пояснювальна записка* — це документ, в якому описано будову та принцип дії виробу і приведено обґрунтування прийнятих при його розробці технічних та техніко-економічних рішень;

*технічні умови* — це документ, що містить експлуатаційні показники виробу та методи контролю його якості.

Крім перелічених, до конструкторських документів належать різноманітні відомості, таблиці, розрахунки, експлуатаційні та ремонтні документи.

Залежно від способу виконання та характеру використання конструкторські документи поділяють на такі види:

*оригінали* — це документи, виконані на будь-якому матеріалі й призначені для виготовлення вихідних рисунків;

*вихідні рисунки* — це креслення, які допускають багаторазове зняття з них копій, вони оформлені справжніми підписами посадових осіб;

*дублікати* — це креслення-копії вихідних рисунків, призначені для зняття з них копій; *копії* — це креслення, ідентичні вихідним рисункам або дублікатам, призначені для

безпосереднього використання на виробництві, в умовах проектування, експлуатації, ремонту виробу тощо.

Перелічені документи при одноразовому використанні на виробництві дозволяється виконувати в ескізному вигляді.

Відповідно до ГОСТ 2.103—68 залежно від стадії розробки конструкторську документацію поділяють на проектну та робочу:

До проектних документів належать:

*технічна пропозиція*, що містить технічне та техніко-економічне обґрунтування доцільності розробки документації виробу на основі аналізу поданого замовником технічного завдання відповідно до ГОСТ 2.118—73;

*технічне завдання* — це документ, що має дані про призначення, технічні й тактико-технічні характеристики виробу, показники його якості та склад конструкторської документації;

*ескізний проект* — це сукупність документів, що містять принципіальні конструкторські рішення, дані про призначення, будову та принцип дії виробу, його основні параметри та габаритні розміри (ГОСТ 2.118—73);

*технічний проект* — сукупність документів, що містять остаточні технічні рішення та вихідні дані для розробки робочої документації (ГОСТ 2.120—73).

Робоча документація складається на всі види виробів, передбачених стандартом, і призначена для їх безпосереднього виготовлення, контролю й ремонту.

Основний конструкторський документ для деталей — це креслення деталі, а для складальних одиниць, комплексів — специфікація.

## 12.4. Позначення виробів та конструкторських документів

Починаючи з проектування і закінчуючи експлуатацією, кожному виробу, а також конструкторським документам, що супроводжують його, присвоюють певні позначення, які не можуть бути викорис-

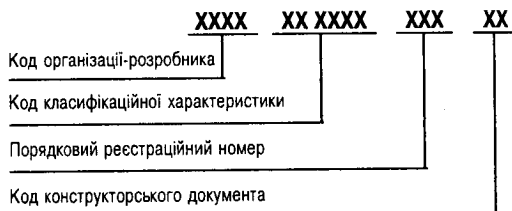


Рис. 12.1

тані для інших виробів. Ці позначення присвоюють централізовано організації, яким це доручено, або децентралізовано організації-розробника. В основу позначення виробів та їх конструкторських документів покладено класифікаційну систему за структурою, зображеною на рис. 12.1.

Код організації-розробника призначається відповідно до її кодифікатора.

Код класифікаційної характеристики визначає конкретний виріб і призначається за класифікатором виробів та конструкторських документів машинобудування (класифікатором ЄСКД), відповідно до якого всі вироби за виробничою ознакою поділяють на класи, які, в свою чергу, залежно від характеру виробництва, природних властивостей продукції та призначення її поділяють на підкласи, групи, підгрупи та види. Для позначення класу передбачено перші два розряди шифру, що відділяються інтервалом від останніх чотирьох розрядів, призначених по одному для підкласів, груп, підгруп та видів.

Порядковий реєстраційний номер е, як правило, тризначним і присвоюється організацією-розробником в інтервалі 001...999. Окремим виробам може надаватися чотиризначний номер.

Окремі коди та порядковий реєстраційний номер відокремлюються один від одного крапками. Наприклад, ОКВС. 42 3893.030. Допоміжні конструкторські документи мають, крім того, допоміжні позначення відповідно до стандартів ЄСКД. Наприклад, ОКВС. 42 3893.030 СБ.

### Запитання та завдання

1. За якою ознакою розрізняють вироби основного та допоміжного виробництва?
2. Які вироби називають деталями?
3. Що називають складальною одиницею?

4. Що називають комплексом? Навести приклади.
5. Що називають комплектом?
6. Чим відрізняється креслення деталі від складального рисунка? Від креслення загального вигляду?
7. Чим відрізняється оригінал від вихідного рисунка? Який з них виконують першим?
8. Для чого призначені копії?
9. Назвати види проектних документів залежно від стадії розробки.
10. Чим відрізняється проектна документація від робочої?
11. Що покладено в основу позначення виробів та конструкторських документів? Написати позначення виконуваних Вами креслень.



## Глава 13 ОФОРМЛЕННЯ КРЕСЛЕНЬ

### 13.1. Формати креслень. Основний напис та додаткова графа

Формати креслярських аркушів вибирають залежно від габаритних розмірів креслення. Розміри форматів визначаються розмірами зовнішньої рамки креслення (рис. 13.1). Згідно з ГОСТ 2.301—68 регламентуються п'ять основних форматів: А0, А1, А2, А3, А4, розміри сторін яких подано в табл. 13.1. У разі потреби можна користуватися форматом А5 зі сторонами 148 × 210 мм.

Площа формату А0 (841 × 1189) дорівнює одному квадратному метру. Інші основні формати можуть бути одержані по-

слідним діленням формату А0 на дві рівні частини паралельно меншій стороні відповідного формату.

Крім п'яти основних форматів, дозволяється користуватися додатковими, що утворюються кратним збільшенням меншої сторони основного формату (табл. 13.2).

Позначення додаткового формату складається з позначення основного формату та числа, що вказує кратність збільшення. Наприклад, А1 × 2, А3 × 5.

Поле креслення обмежується рамкою, товщина лінії якої не менше ніж 0,7 мм, на відстані 20 мм від лівої межі аркуша (поле для підшивання) та на відстані 5 мм від інших сторін зовнішньої рамки (див. рис. 13.1). У правому нижньому куті незалежно від розмірів сторін поля креслення розміщується основний напис (рис. 13.2) за винятком формату А4, де він розміщується тільки вздовж сторони 210 мм.

Для геометричного та проекційного креслень основний напис можна заповнювати спрощено, для інших креслень усі гра-

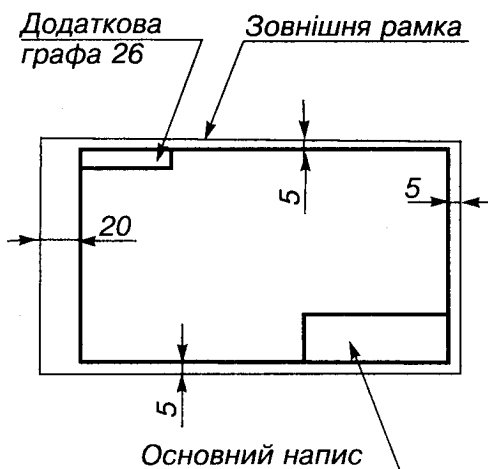


Рис. 13.1

Таблиця 13.1. Розміри основних форматів

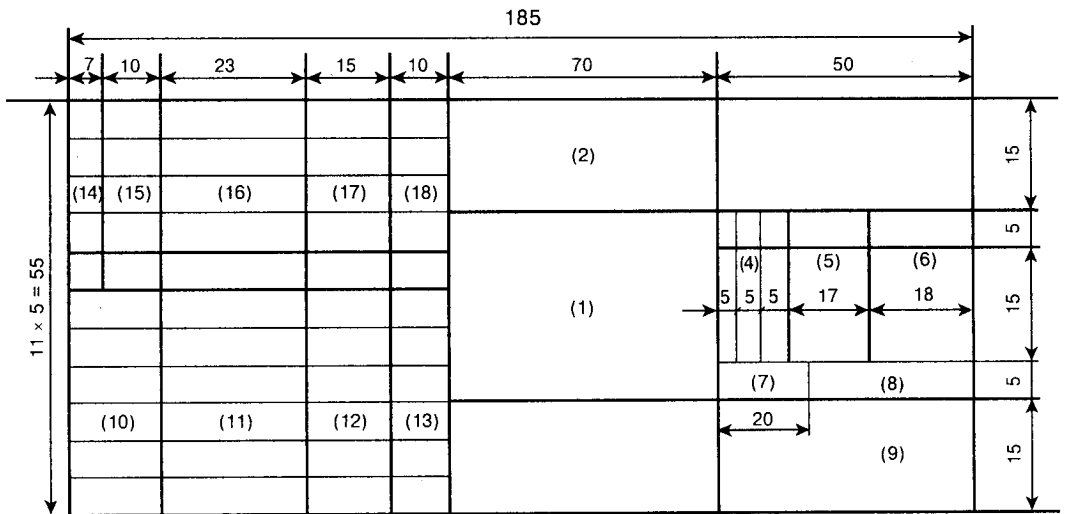
Формат	Розміри сторін формату, мм
А0	841 × 1189
А1	594 × 841
А2	420 × 594
А3	297 × 420
А4	210 × 297

Таблиця 13.2. Розміри додаткових форматів

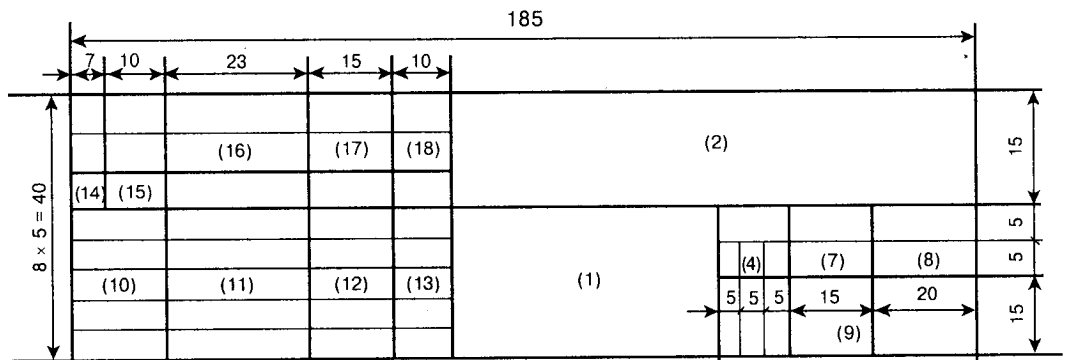
Кратність	Формат, мм				
	A0	A1	A2	A3	A4
2	1189 × 1682	—	—	—	—
3	1189 × 2523	841 × 1783	594 × 1261	420 × 891	297 × 630
4	—	841 × 2378	594 × 1682	420 × 1189	297 × 841
5	—	—	594 × 2102	420 × 1486	297 × 1051
6	—	—	—	420 × 1783	297 × 1261
7	—	—	—	420 × 2080	297 × 1471
8	—	—	—	—	297 × 1682
9	—	—	—	—	297 × 1892

фи основного напису мають бути заповнені відповідно до ГОСТ 2.104—68. Крім того, для цих креслень обов'язкова додаткова графа 26 розміром 70 × 14 мм у лівому верх-

ньому куті (див. рис. 13.1), де записують (повернутим на 180° відносно основного напису) позначення конструкторського документа (графта 2 основного напису).



Форма 1



Форма 2

Рис. 13.2

## 13.2. Типи ліній


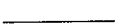

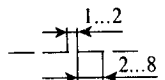
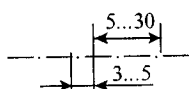
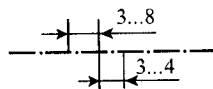
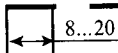
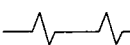
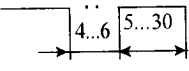
ГОСТ 2.303—68 регламентує різні типи ліній, що використовуються при побудові креслень. У табл. 13.3 наведено типи ліній, їх найменування, накреслення і розміри конструктивних елементів ліній, товщина ліній відносно суцільної товстої лінії та основне призначення. Товщина всіх ліній на одному рисунку залежить від товщини  $s$  лінії видимого контуру, яку вибирають у межах 0,5...1,4 мм залежно від розмірів, складності та призначення рисунка, розмірів формату.

Вибрані товщини ліній мають бути однаковими для всіх зображень на даному кресленні.

Штрихи штрихових та штрихпунктирних ліній, а також відстані між штрихами мають бути однакової довжини. Штрихпунктирні лінії повинні закінчуватися штрихами. Центр кола позначають перетином штрихів. Для кола, діаметр якого менший ніж 12 мм, центрові штрихпунктирні лінії замінюють суцільними тонкими лініями.

На рис. 13.3 наведено приклади застосування різних типів ліній при виконанні різноманітних креслень.

Таблиця 13.3. Лінії, що використовуються при побудові креслень

Найменування лінії	Накреслення лінії	Товщина лінії відносно товщини основної лінії	Основне призначення
Суцільна товста основна		$s$	Лінії видимого контуру
Суцільна тонка		$s/2...s/3$	Лінії переходу видимі Лінії контуру перерізу (винесеного і такого, що входить до складу розрізу) Лінії контуру накладеного перерізу Лінії розмірні та виносні Лінії штриховки Лінії-виноски Полічки ліній-виносок Лінії для зображення примезових деталей Лінії обмеження виносних елементів на виглядах, розрізах, перерізах Сліди площин, лінії побудови характерних точок
Суцільна хвиляста		$s/3...s/2$	Лінії обриву
Штрихова		$s/3...s/2$	Лінії розмежування вигляду та розрізу Лінії невидимого контуру Лінії переходу невидимі
Штрихпунктирна тонка		$s/3...s/2$	Лінії осьові та центрові Лінії перерізів, що є осями симетрії для накладених або винесених перерізів
Штрихпунктирна потовщена		$s/2...2/3s$	Лінії, що позначають поверхні, які підлягають термообробці або покриттю Лінії для зображення елементів, розмішених перед січною площиною («накладена проекція»)
Розімкнена		$s...1,5s$	Лінії розрізу
Суцільна тонка із зламами		$s/2...s/3$	Довгі лінії обриву
Штрихпунктирна з двома крапками тонка		$s/2...s/3$	Лінії згину на розгортках Лінії для зображення частин виробів у крайніх або проміжних положеннях Лінії для зображення розгортки, суміщеної з виглядом

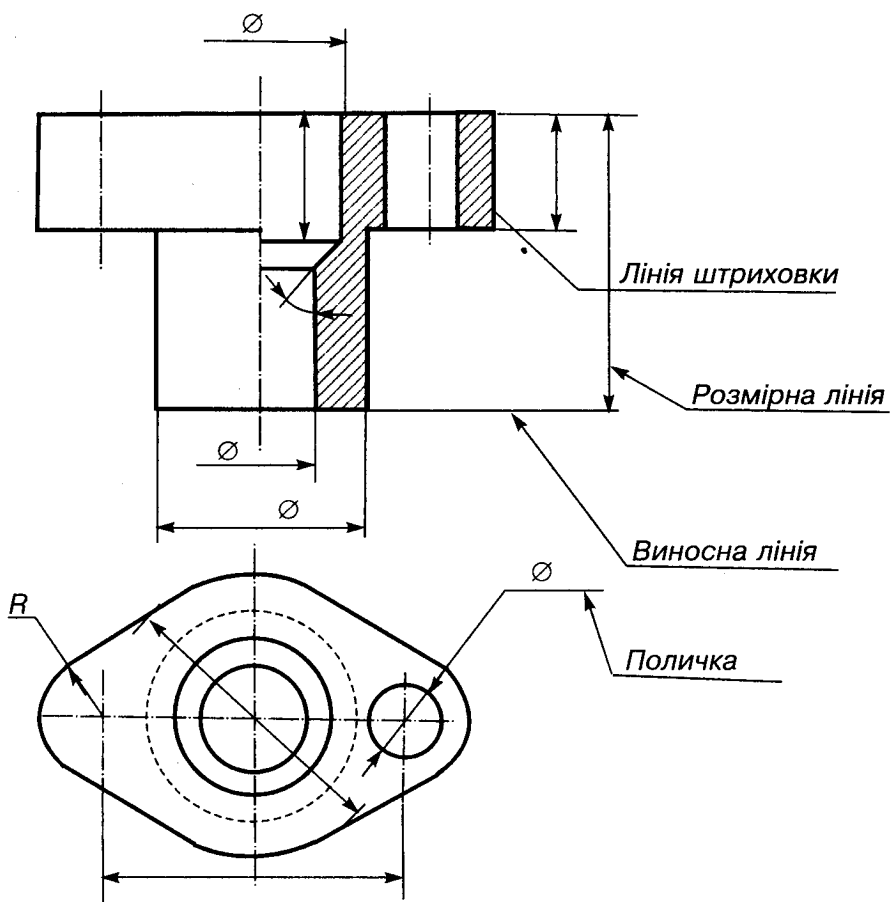
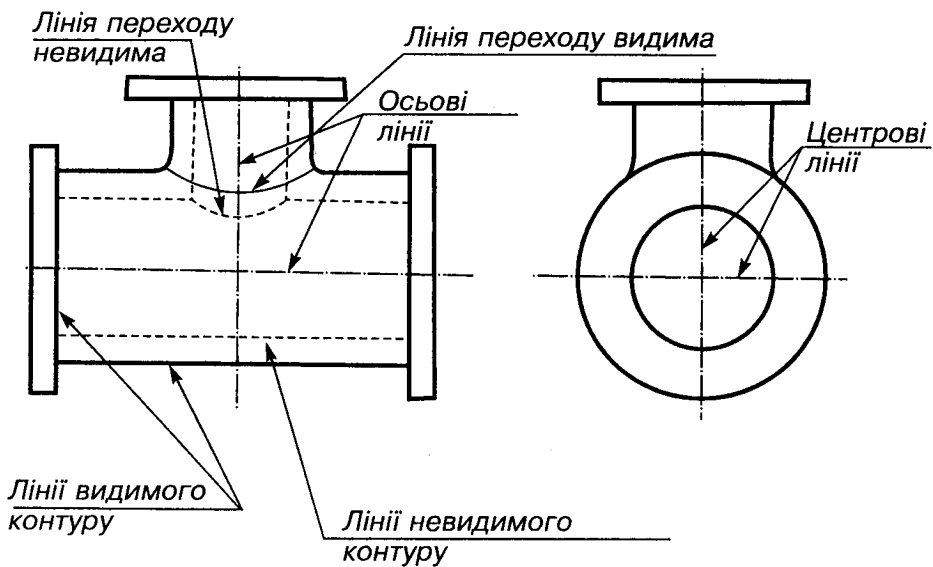


Рис. 13.3

### 13.3. Масштаби

**Масштабом** називають відношення лінійних розмірів зображення предмета до відповідних розмірів самого предмета.

Перевагу віддають зображенню предмета в натуральну величину, тобто в масштабі 1 : 1. Однак, якщо треба зменшити або збільшити зображення, то застосовують такі масштаби:

*масштаби зменшення* — 1 : 2; 1 : 2,5; 1 : 4; 1 : 5; 1 : 10; 1 : 20; 1 : 25; 1 : 40; 1 : 50; 1 : 75; 1 : 100; 1 : 200; 1 : 400; 1 : 500; 1 : 800; 1 : 1000;  
*масштаби збільшення* — 2 : 1; 2,5 : 1; 4 : 1; 10 : 1; 20 : 1; 40 : 1; 50 : 1; 100 : 1.

Під час проектування генеральних планів великих об'єктів допускається застосовувати масштаби 1 : 2000; 1 : 5000; 1 : 10 000; 1 : 20 000; 1 : 25 000; 1 : 50 000.

Масштаб на рисунку позначається в призначеній для цього графі основного напису за типом 1 : 1; 1 : 2; 2 : 1 тощо, в інших випадках — за типом (1 : 1); (1 : 2); (2 : 1) тощо.

Якщо окреме зображення виконано в масштабі, що відрізняється від масштабу всього креслення, то масштаб позначається безпосередньо біля напису, що стосується цього зображення, наприклад, А(5 : 1), Б—Б(1 : 2).

На табличках, "німих" та аналогічних кресленнях масштаб у графі основного напису не показують.

### 13.4. Шрифти креслярські

На кресленнях усі написи виконують шрифтами за ГОСТ 2.304 — 81.

У стандарті подано основні розміри та конструкція літер. Висоту  $h$  великих літер називають *розміром шрифту*. Встановлено такі розміри шрифтів: (1,8); 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40. Використовувати шрифт (1,8) не рекомендується.

Щоб зручніше було вивчати форми літер і цифр, шрифти виконують на допоміжній сітці (рис. 13.4). Крок  $d$  сітки залежить від типу шрифту та його розміру.

Встановлено такі типи шрифтів:

тип А без нахилу (рис. 13.4, а), товщина  $d$  лінії шрифту дорівнює  $1/14$  висоти  $h$  великих літер;

тип А з нахилом літер та цифр приблизно  $75^\circ$  ( $d = 1/14h$ ), основні параметри наведено в табл. 13.4 (див. рис. 13.5);

тип Б без нахилу (рис. 13.4, б), товщина ліній  $d = 1/10h$ ; тип Б з нахилом, товщина ліній  $d = 1/10h$ , основні параметри наведено в табл. 13.5.

Форма великих і малих літер латинського (рис. 13.6) та грецького (рис. 13.7) алфавітів для відповідних шрифтів та форма арабських і римських цифр для шрифтів типів А та Б також регламентується ГОСТ 2.304—81.

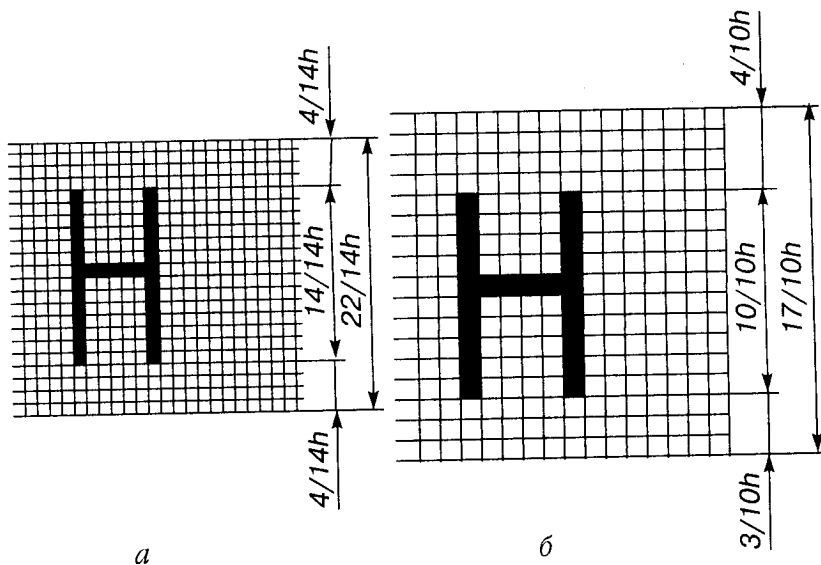


Рис. 13.4



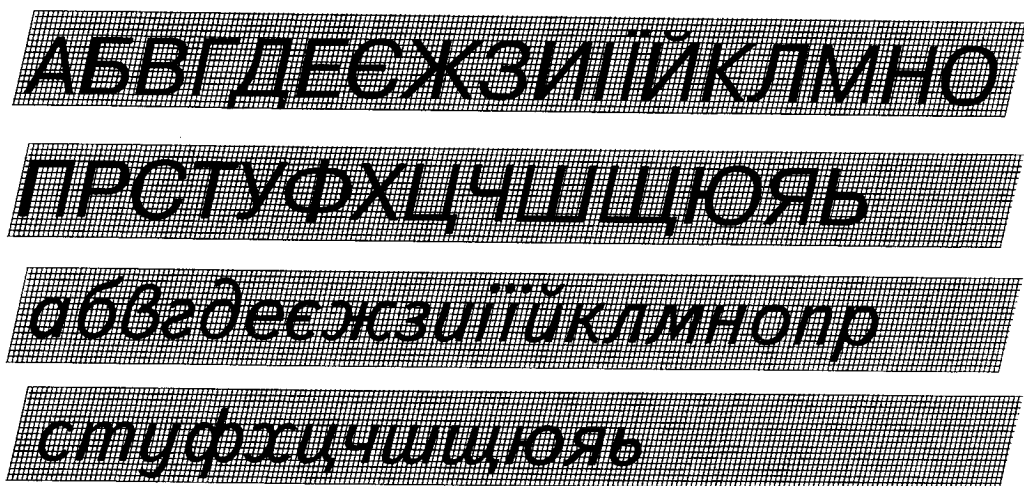


Рис. 13.5

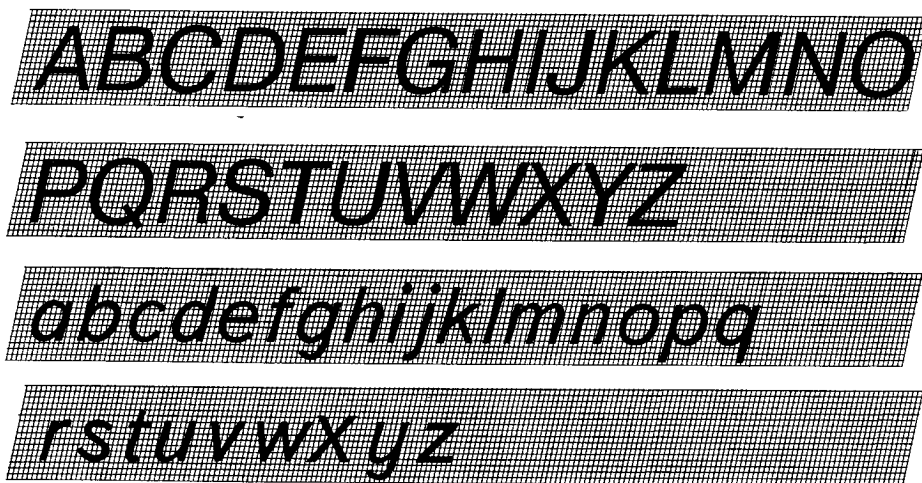


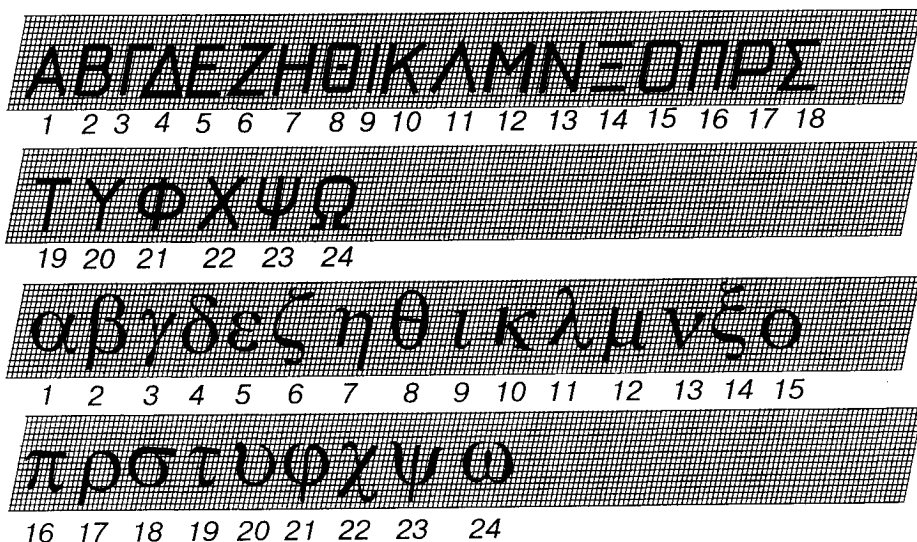
Рис. 13.6

Таблиця 13.4. Основні параметри та розміри шрифту типу А

Параметр шрифту	Позначення	Відносний розмір		Розмір шрифту, мм							
				2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	
Висота великих літер	<i>h</i>	$(14/14)h$	$14d$	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	
Висота малих літер	<i>c</i>	$(10/14)h$	$10d$	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	
Відстань між літерами	<i>a</i>	$(2/14)h$	$2d$	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	
Мінімальний крок рядків (висота допоміжної сітки)	<i>b</i>	$(22/14)h$	$22d$	4,0	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	31,0	
Мінімальна відстань між словами	<i>e</i>	$(6/14)h$	$6d$	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	
Товщина ліній шрифту	<i>d</i>	$(1/14)h$	<i>d</i>	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	

Таблиця 13.5. Основні параметри та розміри шрифту типу Б

Параметр шрифту	Позначення	Відносний розмір		Розмір шрифту, мм							
				1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0
Висота великих літер	$h$	$(10/10)h$	$10d$	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0
Висота малих літер	$c$	$(7/10)h$	$7d$	1,3	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0
Відстань між літерами	$a$	$(2/10)h$	$2d$	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0
Мінімальний крок рядків (висота допоміжної сітки)	$b$	$(17/10)h$	$17d$	3,1	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0
Мінімальна відстань між словами	$e$	$(6/10)h$	$6d$	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	12,0
Товщина ліній шрифту	$d$	$(1/10)h$	$d$	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0



- |             |              |              |
|-------------|--------------|--------------|
| 1 - альфа   | 9 - йота     | 17 - ро      |
| 2 - бета    | 10 - каппа   | 18 - сигма   |
| 3 - гамма   | 11 - ламбда  | 19 - тау     |
| 4 - дельта  | 12 - мю      | 20 - іпсилон |
| 5 - епсилон | 13 - ню      | 21 - фі      |
| 6 - дзета   | 14 - ксі     | 22 - хі      |
| 7 - ета     | 15 - омікрон | 23 - пси     |
| 8 - тета    | 16 - пі      | 24 - омега   |

Рис. 13.7

При написанні слів трапляються винятки. Якщо сусідні лінії літер розміщені так, що при дотриманні стандартної відстані між ними складається візуальне враження розриву між літерами в слові (наприклад, ГД, РЛ та ін.), то можна зменшувати цю відстань удвоє, тобто взяти таку, що дорівнюватиме  $d$ .

У разі написання одного й того самого тексту на рисунку товщина ліній літер і цифр має бути однаковою.

Щоб швидко й правильно писати літери та цифри, слід вивчати конструкцію їх та тренуватися писати за допомогою сітки (див. рис. 13.4...13.7).

### 13.5. Штриховка в розрізах та перерізах

Штриховку в розрізах та перерізах за ГОСТ 2.306 — 68 застосовують для умовного графічного позначення матеріалів. На рис. 13.8 подано штриховки на машинобудівних кресленнях для найбільш поширених матеріалів. Для матеріалів, яких немає в ГОСТ 2.306—68, можна застосовувати свої умовні позначення, які пояснюють це на рисунку. Загальним графічним позначенням матеріалів у перерізі (незалежно від виду матеріалу) є похилі під кутом  $45^\circ$  до контуру зображення, осі симетрії або рамки креслення тонкі прямі лінії завтовшки  $s/2$ ,  $s/3$ . Якщо вибрані під кутом  $45^\circ$  до рамки креслення лінії штриховки збігаються за напрямом з лініями контуру деталі, то їх слід проводити під кутом  $30^\circ$  або  $60^\circ$ .

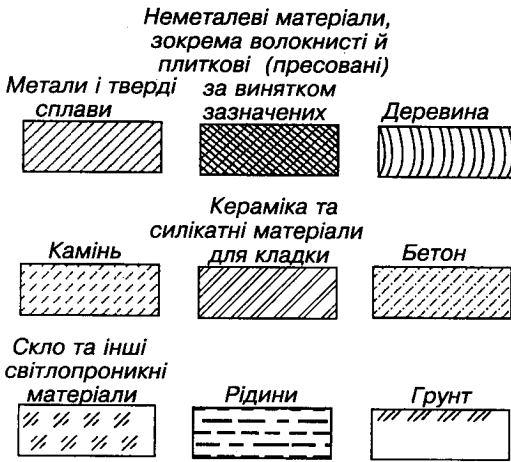


Рис. 13.8

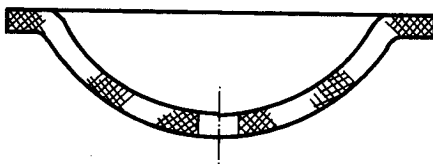


Рис. 13.10

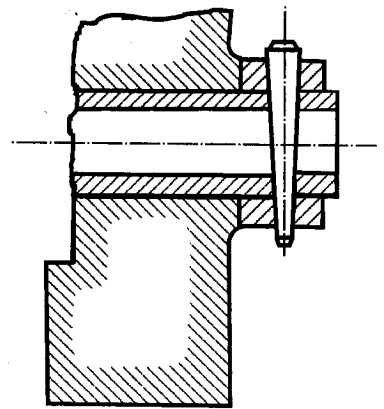


Рис. 13.9

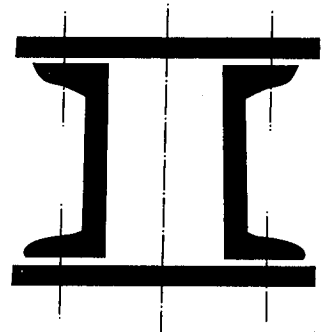


Рис. 13.11

Лінії штриховки треба наносити з нахилом або вліво, або вправо, але, як правило, в один і той самий бік на всіх перерізах щодо однієї й тієї самої деталі незалежно від кількості аркушів, на яких ці перерізи розміщені.

Відстань між лініями штриховки має бути  $1 \dots 10$  мм та, як правило, однаковою на всіх перерізах деталі, що виконуються в одному масштабі.

Для суміжних деталей нахил штриховки має бути протилежним. Якщо це неможливо, то слід зсунути штриховку однієї деталі відносно іншої або замінити відстань між штрихами (рис. 13.9).

Виконуючи штриховку “в клітинку”, відстань між штрихами різних деталей роблять різною.

Якщо треба заштрихувати велику площу, то можна наносити позначення тільки

біля контуру вузькою смугою однакової ширини (див. рис. 13.9).

Вузькі та довгі площі перерізу, ширина яких на зображенні не перевищує 2...4 мм, рекомендується штрихувати повністю тільки на кінцях деталі, біля отворів, а решту площі — невеликими частинами в кількох місцях (рис. 13.10).

Вузькі площі перерізів (вужчі ніж 2 мм) допускається затемнювати (рис. 13.11), залишаючи просвіт між деталями не менше ніж 0,8 мм.

### 13.6. Нанесення розмірів

Для з'ясування справжньої величини зображуваного предмета на рисунках наносять розміри (ГОСТ 2.307—68).

Розміри поділяють на лінійні (довжина; ширина; значення радіуса, діаметра; довжина хорди, дуги тощо) та кутові (розміри кутів).

Процес нанесення розмірів включає дві операції: проведення виносних та розмірних ліній і написання розмірного числа.

Розмірну лінію, що показує межі вимірювання, проводять паралельно вимірюваному елементу і закінчують стрілками (рис. 13.12). Її межами є виносні лінії, лінії контуру, осьові, центрові та інші лінії. Виносна лінія виступає за вістря стрілки на 1...5 мм. Розмірні лінії проводять переважно поза контуром зображення, якщо можна, то справа або знизу від зображення. Лінії видимого контуру, осьові, центрові, виносні не дозволяється використовувати як розмірні. Прийнято такі основні правила та випадки проведення розмірних ліній:

а) при нанесенні розміру прямолінійного відрізка розмірну лінію проводять паралельно цьому відрізку, а виносні лінії — перпендикулярно до розмірних (рис. 13.13, а);

б) при нанесенні розміру кута розмірну лінію проводять у вигляді дуги з центром у його вершині, а виносні лінії — радіально (рис. 13.13, б);

в) при нанесенні розміру дуги розмірні лінії проводять концентрично контуру дуги, а виносні лінії — паралельно бісектрисі кута; над розмірним числом ставлять знак дуги  $\frown$  (рис. 13.13, в). Виносні лінії можна проводити радіально. Якщо є кілька

концентричних дуг, то слід показати, до якої дуги належить розмір (рис. 13.13, з);

г) при нанесенні розміру радіуса або діаметра кола розмірну лінію проводять через центр кола (рис. 13.13, з, е) або паралельно одному з його діаметрів. Якщо треба провести кілька радіусів або діаметрів через один центр, то розмірні лінії двох довільних радіусів не розміщують на одній прямій (рис. 13.13, е). Розмірну лінію для діаметра кола проводять з обривом незалежно від того, повністю проведено коло чи ні (рис. 13.13, е).

Можна проводити розмірні лінії безпосередньо до ліній видимого контуру, осьових, центрових та інших ліній. На рис. 13.13, д...е показано, як правильно наносити розміри криволінійного профілю. Мінімальна відстань між паралельними розмірними лініями має бути 7 мм, а між розмірною лінією та лінією контуру — 10 мм. Її вибирають залежно від розмірів зображення та насиченості рисунка.

У випадках, показаних на рис. 13.14, а, б, виносні лінії проводять через точки перетину продовжених ліній скругленого кута або через центри кіл заокруглення.

Якщо на розмірних лініях не вистачає місця для стрілок, то їх замінюють засічками під кутом  $45^\circ$  до розмірної лінії (рис. 13.15, а) або точками (рис. 13.15, б). Якщо лінії видимого контуру розміщені близько одна до одної, то для нанесення стрілок лінії можна переривати (рис. 13.16).

Якщо довжина розмірної лінії недостатня для нанесення стрілок, то їх дозволяється виконувати зовні вимірюваного відрізка (рис. 13.17).

Зображуючи предмет з розривом, розмірну лінію не розривають (рис. 13.18).

Розмірні числа характеризують величину вимірюваного елемента в міліметрах для лінійних розмірів та в градусах, мінутах, секундах для кутових розмірів. Розмірні

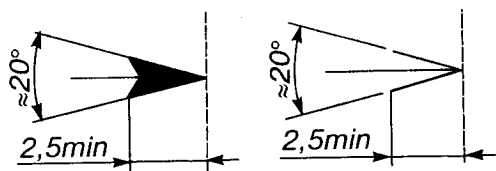


Рис. 13.12

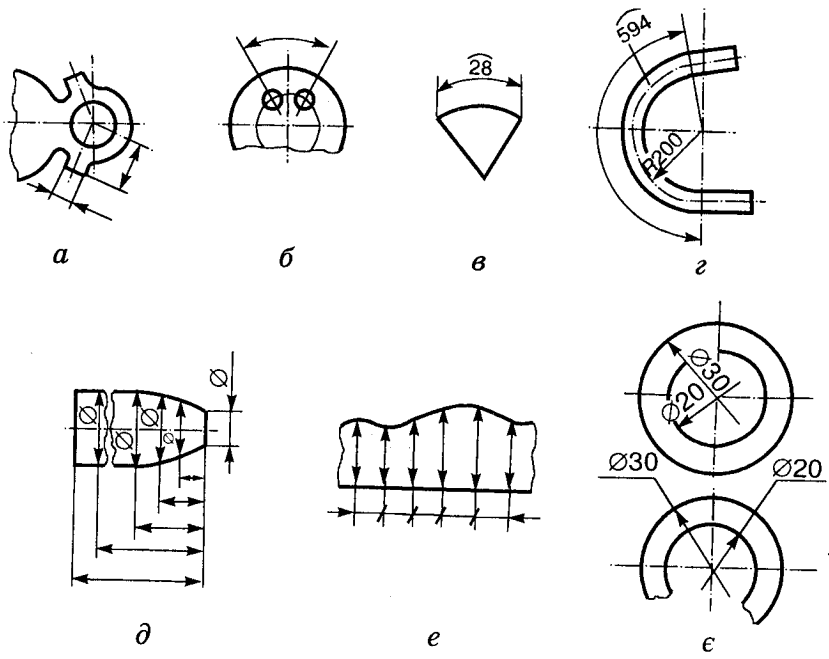


Рис. 13.13

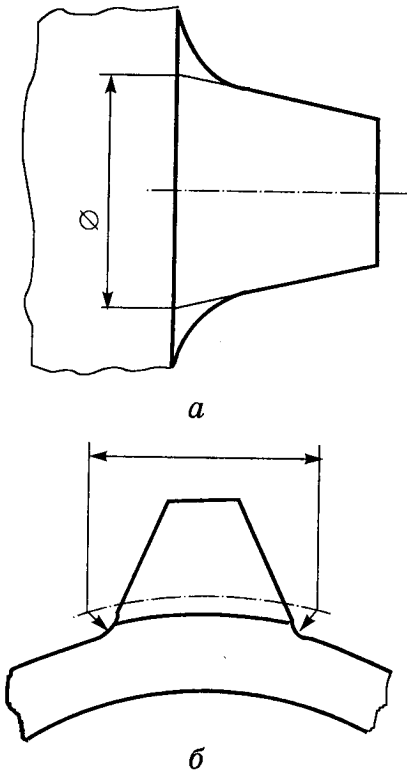


Рис. 13.14

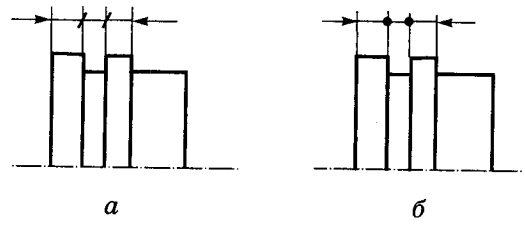


Рис. 13.15

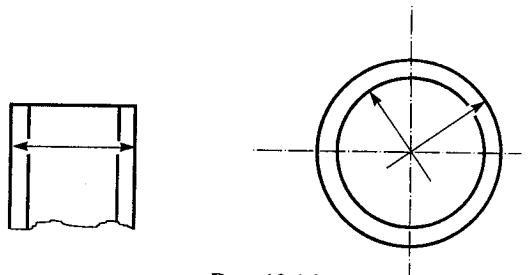


Рис. 13.16

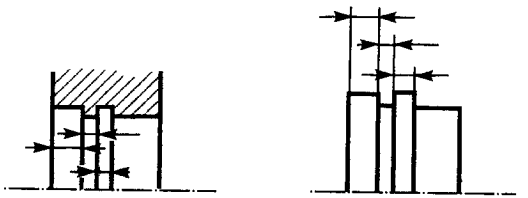


Рис. 13.17

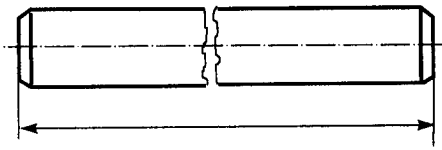


Рис. 13.18

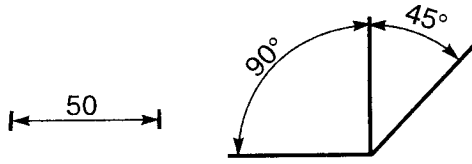


Рис. 13.19

Для малих кутів розміри можна виносити на полічку незалежно від зони розміщення.

Розмірне число не повинно відокремлювати або перетинати будь-які лінії креслення. Не можна розривати лінію видимого контуру для нанесення розмірного числа. Не дозволяється також розміщувати розмірне число в місці перетину розмірних, осевих та центрових ліній. У разі потреби можна переривати лінії штриховки для нанесення розмірного числа (рис. 13.23).

Діаметр кола позначають знаком  $\varnothing$ , що є колом, діаметр якого становить  $5/7$  від висоти цифр розмірного числа, перекресленим прямою, нахиленою під кутом приблизно  $75^\circ$  до розмірної лінії. Різні варіанти нанесення розмірів кола показано на рис. 13.24.

Перед розмірним числом радіуса обов'язково ставлять знак  $R$ . Правила нанесення радіуса показано на рис. 13.25, а. Якщо при цьому потрібно координувати центр кола, то його позначають перетином центрових та виносних ліній, до яких проводять розмірні лінії, та ставлять розмірні числа. Якщо центр кола лежить на великій відстані, то його можна наблизити до дуги, а радіус позначити зі зломом під кутом  $90^\circ$

числа слід розміщувати над розмірною лінією паралельно їй та якомога ближче до її середини (рис. 13.19).

Наносячи кілька паралельних або концентричних розмірних ліній на невеликій відстані одна від одної, розмірні числа розміщують у шаховому порядку (рис. 13.20).

Розмірні числа лінійних та кутових розмірів при різних нахилах розмірних ліній розміщують так, як показано на рис. 13.21. Приклади розміщення розмірних чисел кутових розмірів показано на рис. 13.22, а, б.

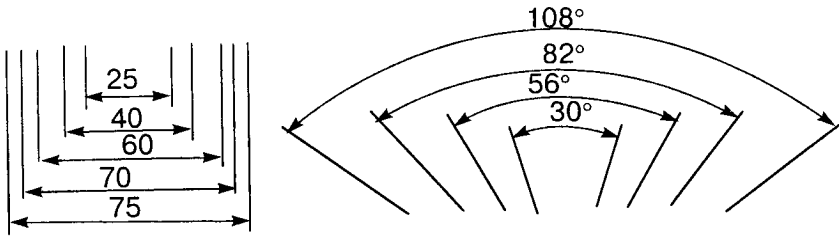


Рис. 13.20

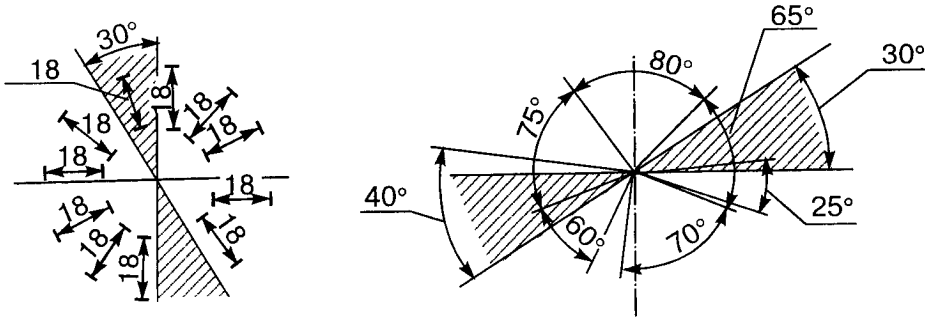
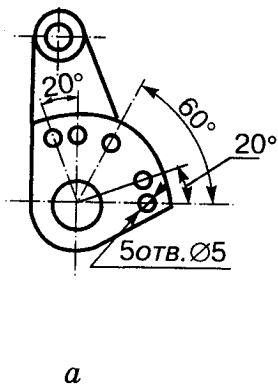
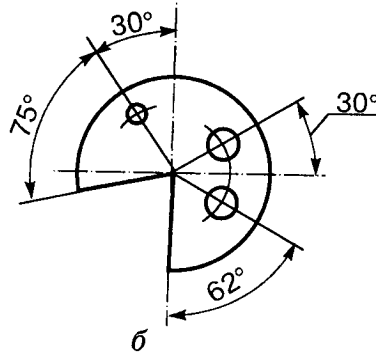


Рис. 13.21



*a*



*б*

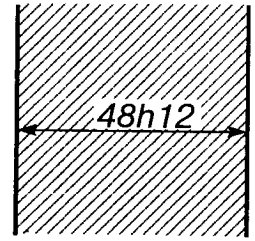


Рис. 13.23

Рис. 13.22

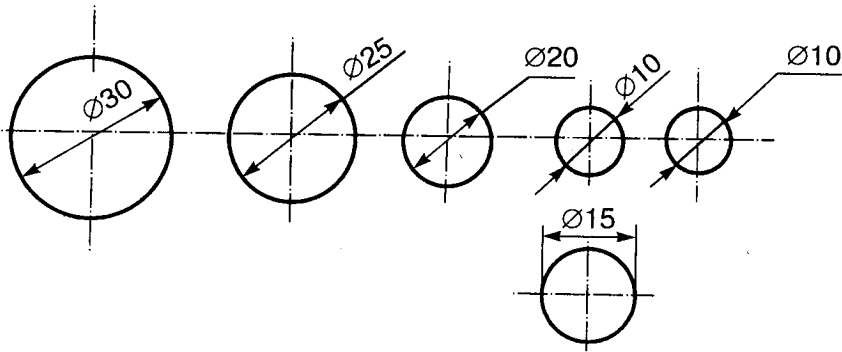


Рис. 13.24

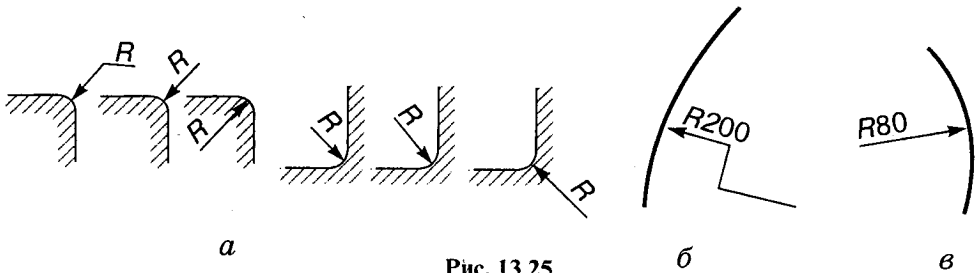


Рис. 13.25

(рис. 13.25, б). Якщо центр кола не фіксується на рисунку, то розмірну лінію радіуса можна не проводити до центра (рис. 13.25, в).

Розмірне число діаметра (радіуса) сфери також супроводжується знаком  $\varnothing$  ( $R$ ) без напису слова "Сфера" (рис. 13.26). Слово "Сфера" пишуть тоді, коли на зображенні важко відрізнити сферу від іншої поверхні.

Розміри квадрата та квадратного отвору позначають знаком перед розміром сторони квадрата (рис. 13.27). При цьому грані

зображуються суцільними тонкими лініями, проведеними по діагоналі.

Якщо не вистачає місця для розмірних чисел над розмірною лінією, то їх розміщують на продовженні розмірної лінії або виносять на полицку, розміщену паралельно основному напису рисунка.

Для кінцевих поверхонь обертання характерним параметром є конусність. Це відношення різниці діаметрів основ конуса до його висоти. Конусність позначають

знаком  $\triangleleft$ , вершина якого напрямлена в бік вершини конуса (рис. 13.28). Значення конусності записують над віссю конуса або на полиці, паралельній осі конуса. Розмірне число біля знака  $\triangleleft$  подають як відношення (1 : 15) або у відсотках (20 %).

Положення лінії відносно горизонталі чи вертикалі характеризується нахилом. Це відношення є тангенсом кута нахилу і позначається на рисунку знаком  $<$ , вершина знака напрямлена в бік вершини кута, а нижня риска паралельна основі кута. Після знака записують значення нахилу як відношення (рис. 13.29, а), або у відсотках (рис. 13.29, б), або в промілі (рис. 13.29, в).

Важливим конструктивним елементом машинобудівних деталей є фаска. На циліндричних та конічних поверхнях це зрізаний конус. Розміри фасок під кутом  $45^\circ$  по-

казано на рис. 13.30, а. Розміри фасок, що мають інші кути нахилу твірної до осі конуса, позначають двома розмірами: лінійним (висота конуса) та кутовим (рис. 13.30,

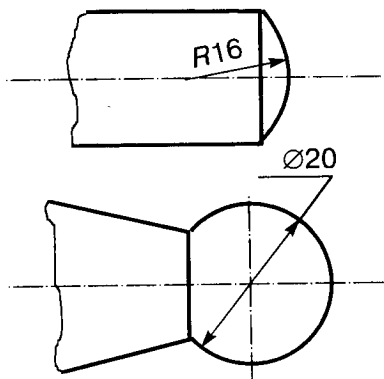


Рис. 13.26

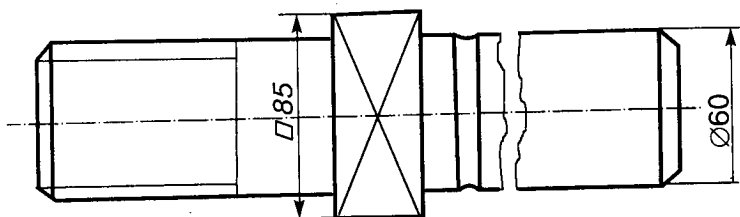


Рис. 13.27

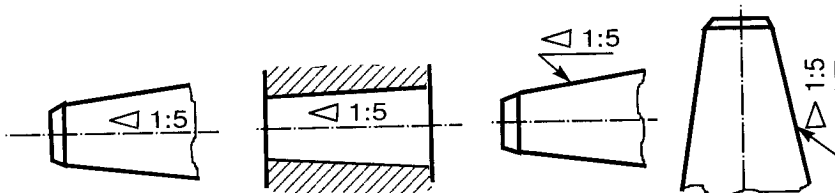


Рис. 13.28

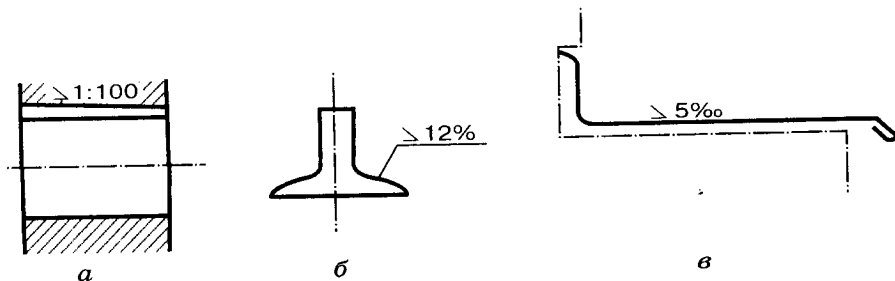


Рис. 13.29



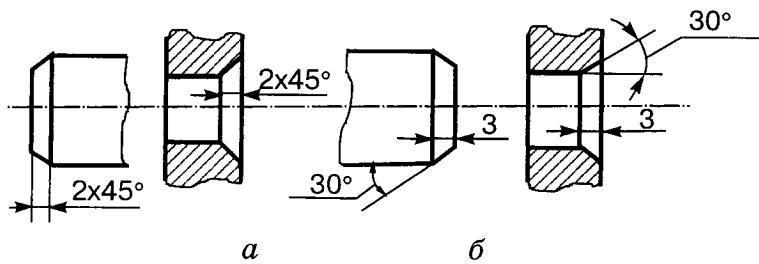


Рис. 13.30

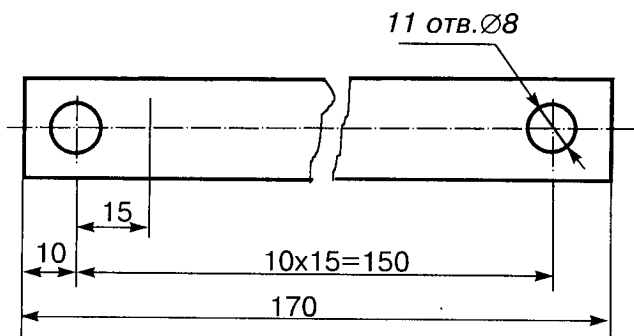


Рис. 13.31

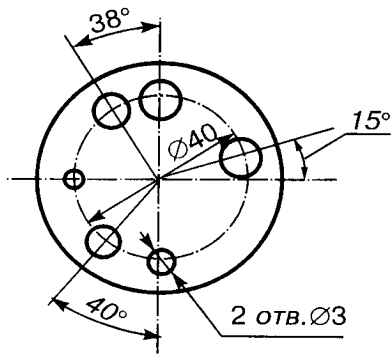


Рис. 13.32

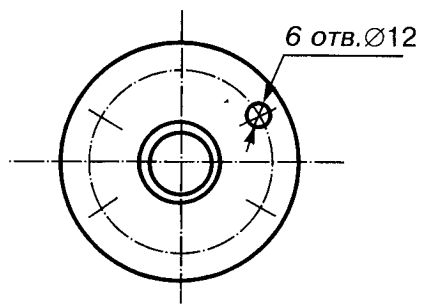
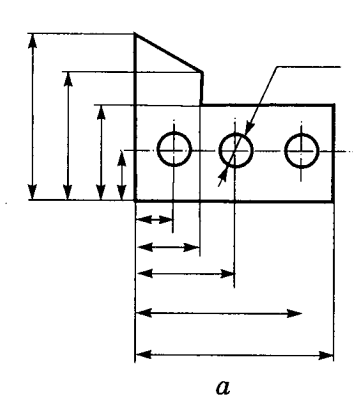
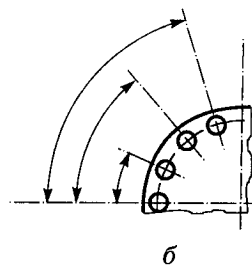


Рис. 13.33



а



б

Рис. 13.34

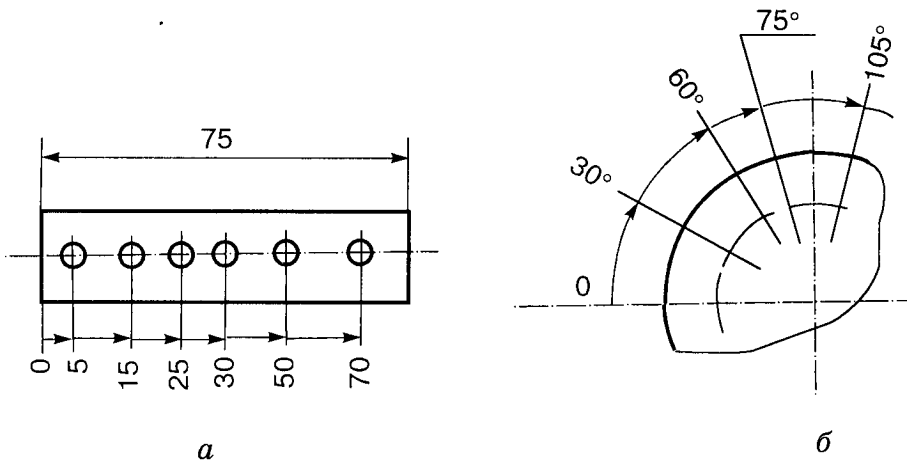


Рис. 13.35

відстань між центрами при прямолинійному розміщенні центрів або кутові розміри при розміщенні центрів на одному колі — рис. 13.31 і 13.32). Якщо отвори розміщені на колі рівномірно, то кутові розміри між центрами не показують, а зазначають лише кількість отворів (рис. 13.33). При цьому допускається показувати лише один елемент і наносити всі його розміри, а інші елементи позначати їхніми центрами (рис. 13.33).

Ряд суміжних лінійних чи кутових розмірів можна наносити від однієї бази (рис. 13.34, а, б). Якщо отворів багато, то проводять одну розмірну лінію від бази, на якій наносять позначки, що відповідають відстані центра отвору від бази (рис. 13.35, а, б).

На рис. 13.36 наведено приклад нанесення розмірів на машинобудівній деталі. Нанесення розміру 62 на невидимому контурі дає змогу уникнути побудови зайвого зображення.

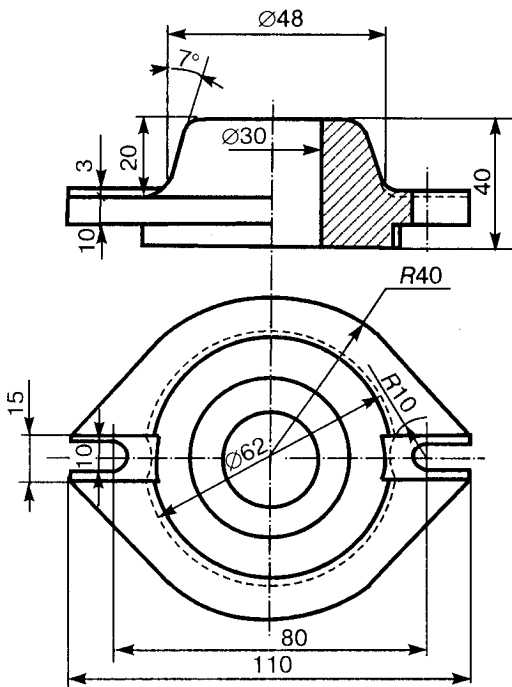


Рис. 13.36

б). Якщо є кілька однакових фасок, то розмір фаски наносять один раз з написом типу: 2 фаски, 4 фаски тощо.

Якщо є кілька однакових елементів (отворів, пазів тощо), то наносять розмір одного елемента, зазначаючи кількість цих елементів та взаємне розміщення їх (лінійна

### 13.7. Елементарні геометричні побудови

**Побудова кутів.** Довільний кут можна будувати за допомогою транспортира, але точність побудови при цьому буде невисокою. Для побудови найбільш поширених в інженерній графіці кутів користуються способами, показаними на рис. 13.37, а...в.

**Поділ кола на рівні частини.** Ця операція тісно пов'язана з побудовою правильних багатокутників. Поділ кола на три, чо-

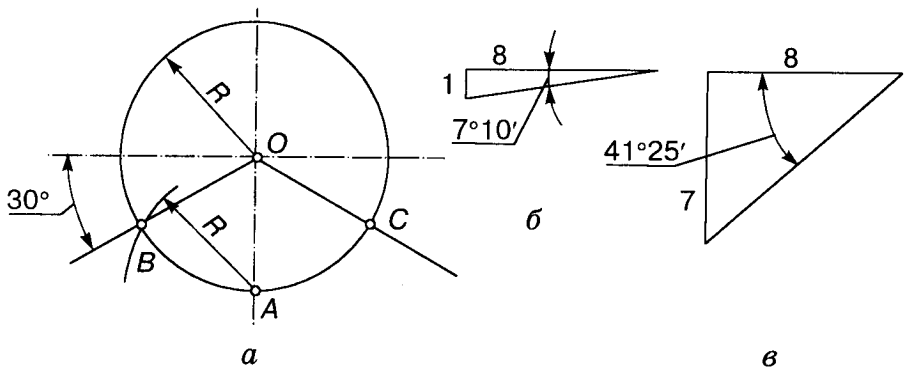


Рис. 13.37

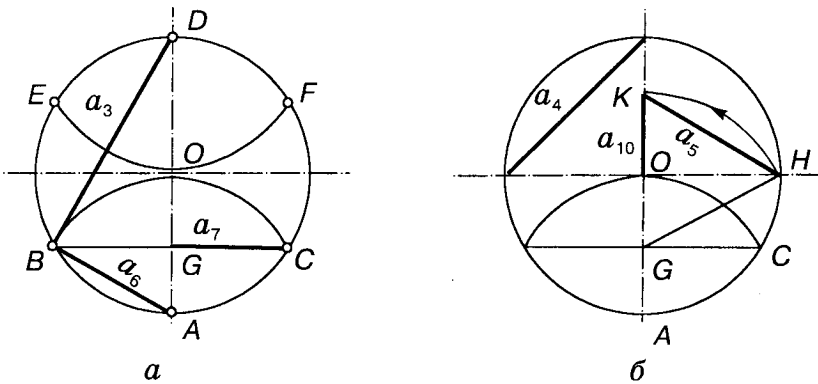


Рис. 13.38

тири, шість частин елементарні, вони відомі з курсу математики середньої школи. Часто виникає необхідність побудови правильних п'яти- і семикутників. На рис. 13.38, а показано визначення довжини сторін правильних три-, шести- і семикутників, вписаних в коло, а на рис. 13.38, б — п'яти- і десятикутників.

Для поділу кіл на довільну кількість рівних частин користуються значеннями довжини хорд для радіуса кола  $R = 1$  см:

Число поділок	5	6	7	8	9	10	11
Довжина хорди	1,176	1,000	0,868	0,765	0,684	0,618	0,563

Щоб дістати довжину хорди кола довільного радіуса, треба помножити відповідне число з наведених вище даних на значення радіуса кола.

**Спряження.** Плавний перехід від однієї кривої до іншої називають *спряженням*. Спряження, як правило, здійснюється за допомогою дуги кола (спряження двох прямих, прямої й дуги кола, дуг двох кіл) та за допомогою прямої лінії дуг двох кіл.

Дугу кола, за допомогою якої виконується спряження, називають *дугою спряження*. Для побудови дуги спряження слід мати її центр, радіус і точки спряження, в яких дуга переходить у спряжувані лінії. Досить задати один з цих трьох параметрів, і побудова спряження стає можливою.

Розглянемо спряження за допомогою дуги кола заданого радіуса.

**Спряження двох прямих.** Центр дуги спряження має бути на однаковій відстані від кожної з прямих. Кожна з точок спряження є основою перпендикуляра, опущеного з центра спряження на відповідну пряму.

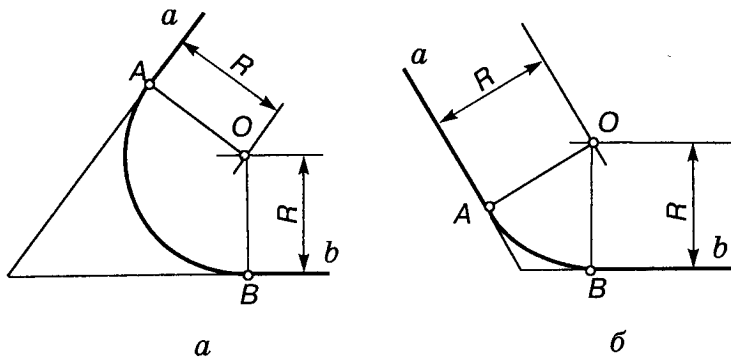


Рис. 13.39

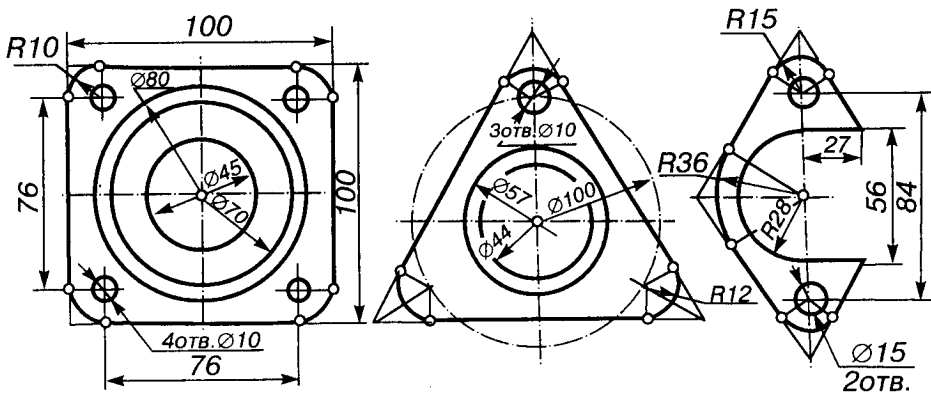


Рис. 13.40

Алгоритм побудови спряження (рис. 13.39, *а, б*) такий:

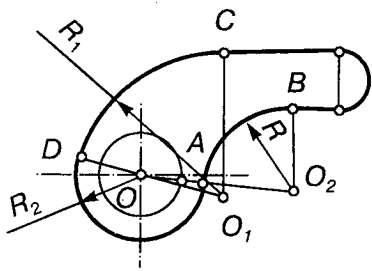
1. Провести дві прямі, паралельні заданим, на відстані  $R$  від кожної з них.
2. Визначити точку перетину їх — центр спряження  $O$ .
3. Провести перпендикуляри і визначити точки спряження  $A$  та  $B$ .
4. Побудувати дугу спряження від точки  $A$  до точки  $B$ .

Типовими прикладами спряжень є контури деталей, зображених на рис. 13.40.

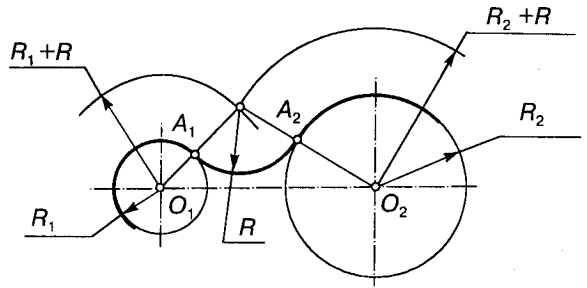
**Спряження прямої лінії та дуги кола.** Розрізняють зовнішнє (рис. 13.41, *а*) та внутрішнє (рис. 13.41, *б*) спряження. Центр спряження лежить на перетині концентричної дуги кола, віддаленої від заданого кола на відстань  $R$ , та прямої, паралельної заданій, на відстані  $R$  від неї. Точка спряження  $B$  на колі (рис. 13.41, *в*) лежить на прямій, що сполучає центр спряження та центр кола.

**Спряження дуг двох кіл між собою.** Розрізняють зовнішнє (рис. 13.42, *а*), внутрішнє (рис. 13.42, *б*) та змішане (рис. 13.42, *в*) спряження. У першому випадку центр спряження є точкою перетину дуги кіл радіусів  $R_1 + R$  і  $R_2 + R$ , у другому — на перетині кіл радіусів  $R - R_1$  і  $R - R_2$ , у третьому — на перетині дуг кіл радіусів  $R + R_1$  і  $R - R_2$ . Точки спряження  $A_1$  і  $A_2$  лежать на прямих, що сполучають центр спряження з центром відповідного кола. Звичайно, наведені розв'язання не єдині. Можна побудувати також спряження, симетричні відносно осі  $O_1O_2$ , що сполучає центри кіл.

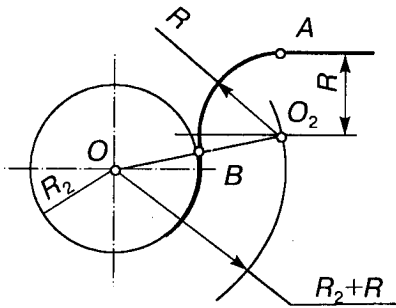
**Спряження дуг двох кіл за допомогою прямої.** Суть розв'язання цієї задачі полягає в побудові дотичної до кола з довільної зовнішньої точки  $M$  (рис. 13.43). Для цього на відрізку  $OM$ , як на діаметрі, будують півколо, що перетинає задане коло в точці спряження  $A$ , і проводять дотичну  $MA$ .



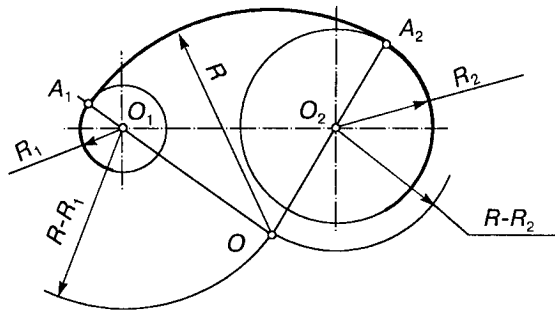
a



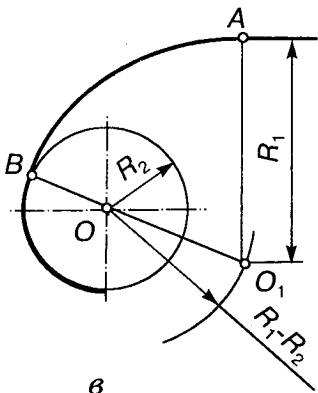
a



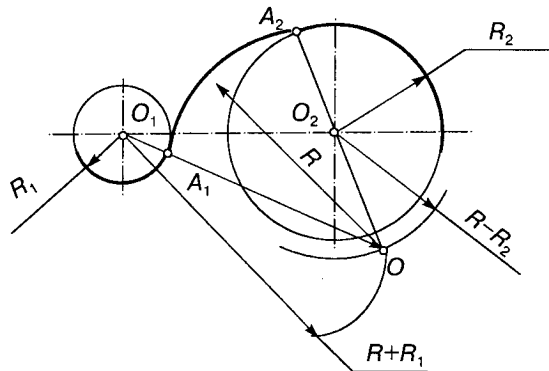
б



б



б



б

Рис. 13.41

Рис. 13.42

Спряження дуг двох кіл може бути зовнішнім, якщо дуги розміщені по один бік від прямої (рис. 13.44, а), або внутрішнім, якщо дуги розміщені по обидва боки від прямої (рис. 13.44, б). У першому випадку з центра дуги меншого радіуса будують дотичну до кола радіуса  $R_1 - R_2$ , а в другому — до кола  $R_1 + R_2$ . Точка спряження  $A$  лежить на перетині променя  $O_1A'$  із заданим колом. Пряма спряження  $A_1A_2$  паралельна дотичній  $O_2A'$ .

**Побудова коробових кривих.** *Коробовими* називають криві, складені з дуг кіл. До них належать: овали, овоїди, завитки тощо.

*Овал* — це замкнена коробова крива, що має дві осі симетрії (рис. 13.45). Овал визначається трьома параметрами. Звичайно, це довжина, ширина і один з радіусів або два радіуси і довжина (ширина) овала. Іноді задають тільки довжину й ширину овала, не визначаючи його радіусів, тоді задача має безліч розв'язків (див. рис. 13.45, а...г).

Застосовують також способи побудови овалів на основі двох однакових опорних кіл, що стикаються (рис. 13.46, а), перетинаються (рис. 13.46, б) або не перетинаються (рис. 13.46, в). При цьому фактично задають два параметри: довжину овала і один з його радіусів. Задача має безліч розв'язків. Очевидно, що  $R > OA$  і не має верхньої межі. Зокрема  $R = O_1O_2$  (див. рис. 13.46, а і рис. 13.46, в), а центри  $O_3$  і  $O_4$  визначають як точки перетину базових кіл (див. рис. 13.46, б). Згідно із загальною теорією точки спряження визначаються на прямій, що сполучає центри дуг, які стикаються.

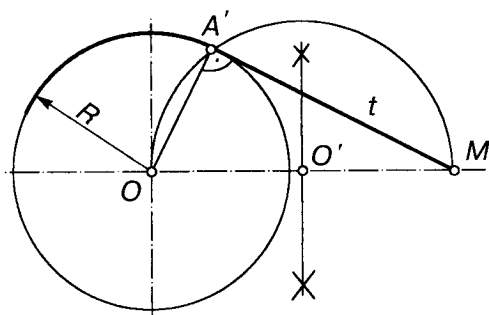


Рис. 13.43

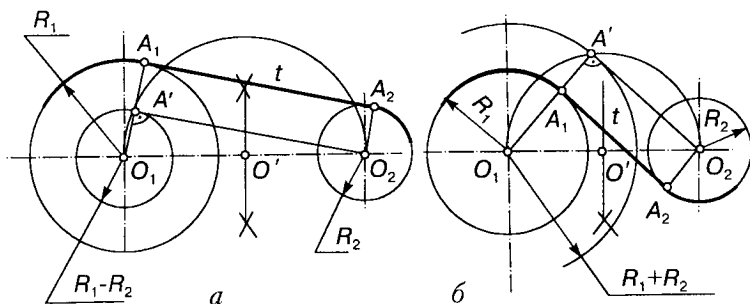


Рис. 13.44

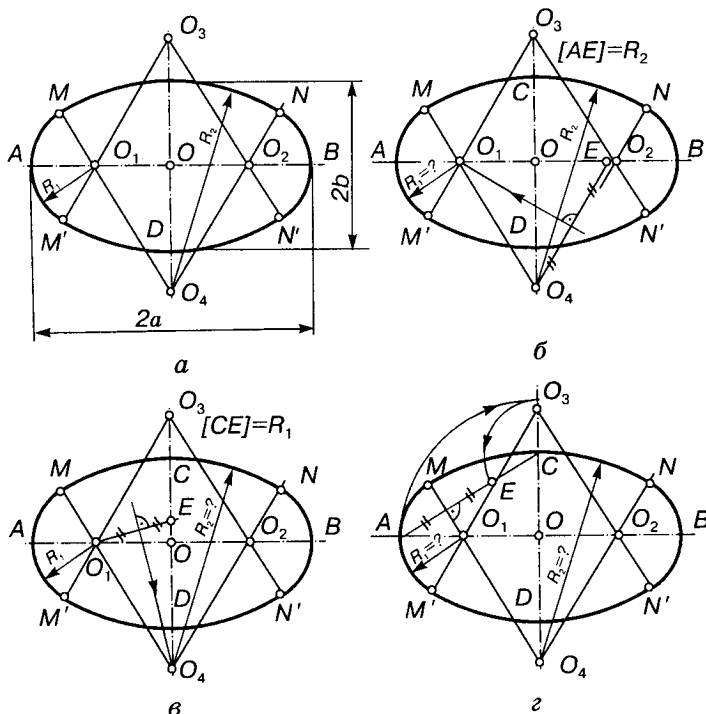


Рис. 13.45

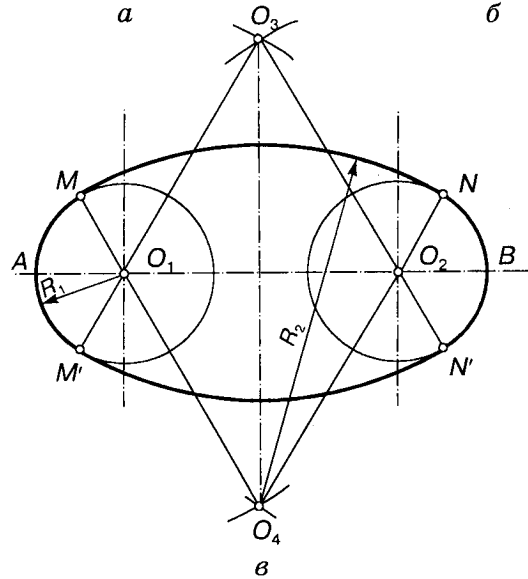
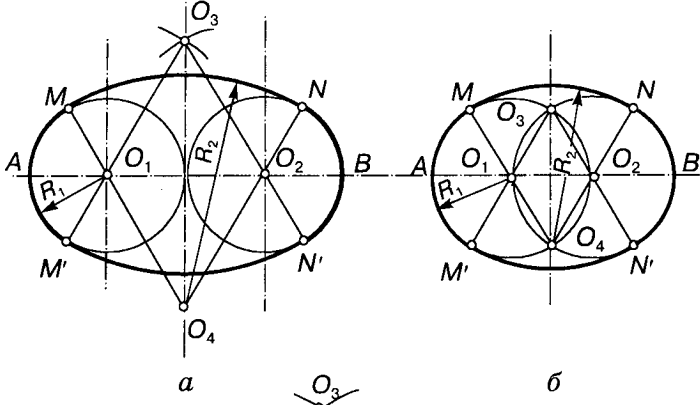


Рис. 13.46

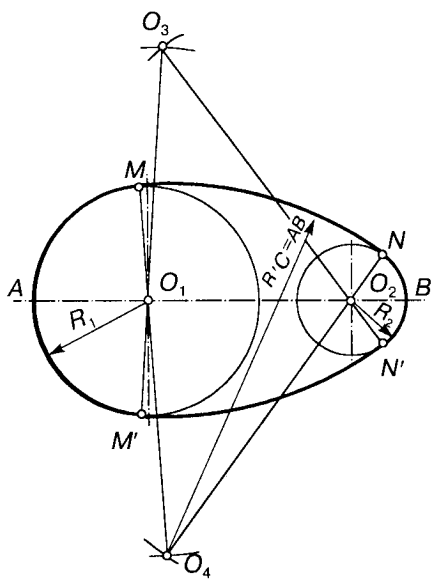


Рис. 13.47

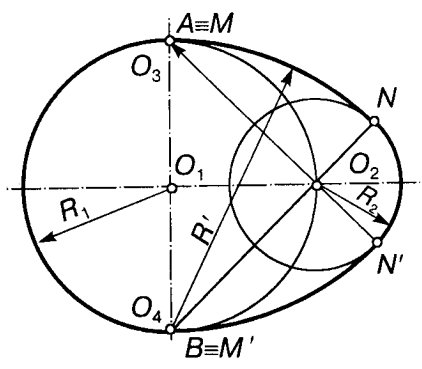


Рис. 13.48

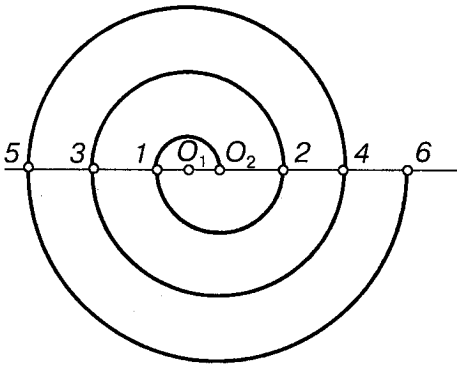


Рис. 13.49

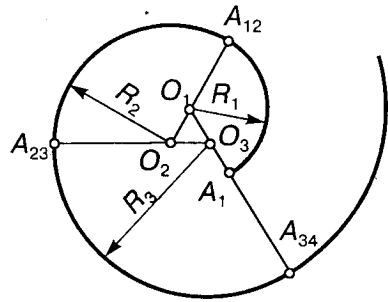


Рис. 13.50

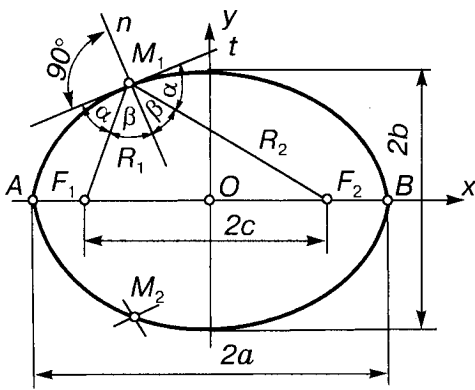


Рис. 13.51

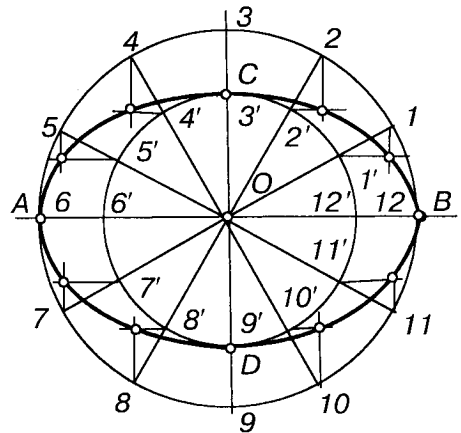


Рис. 13.52

Коробову криву, що має одну вісь симетрії, називають *овоїдом* (рис. 13.47). Він визначається чотирма параметрами. Звичайно задають радіуси  $R_1$ ,  $R_2$  і довжину овоїда. Тоді задача має безліч розв'язків. Четвертий параметр — радіус спряження  $R'$  дуг  $R_1$  і  $R_2$  визначають конструктивно. Зокрема,  $R' = AB$ .

Частіше трапляється овоїд, центр  $O_2$  якого лежить на колі  $R_1$  (рис. 13.48), а радіус спряження визначається конструктивно. Центри  $O_3$  та  $O_4$  лежать на діаметрі  $AB$ .

На практиці використовують також спіралі, складені з дуг кіл, їх називають *завитками*. Вони можуть мати два центри і більше, розміщені у вершинах правильних багатокутників. На рис. 13.49 показано завиток, побудований з центрів  $O_1$  і  $O_2$ , а на рис. 13.50 — з центрів  $O_1$ ,  $O_2$  і  $O_3$ .

**Лекальні криві.** Лекальні криві дістають за рядом точок, які послідовно сполучають дугами кривих за допомогою лекал. До лекальних належать криві другого порядку (К2П), циклоїдні криві, графіки тригонометричних функцій тощо.

Кривими другого порядку, крім кола, є: еліпс, парабола, гіпербола.

**Еліпс** — це плоска крива, для довільної точки якої сума відстаней до двох фіксованих точок (фокусів  $F_1$  і  $F_2$ ) є величина стала і дорівнює довжині  $2a$  великої його осі (рис. 13.51). Мала вісь еліпса дорівнює  $2b$ . Відстань  $2c$  між фокусами  $F_1$  і  $F_2$  називають *фокусною*. Точка перетину осей еліпса є його центром, кінці осей — вершинами еліпса.

Теорія кривих другого порядку була створена ще в III—IV ст. до н. е. З того часу



з'явилося багато методів графічної побудови цих кривих на основі їхніх властивостей, способів утворення, практичного застосування. Розглянемо найпростіші з них.

Перший спосіб побудови точок показано на рис. 13.51. Виберемо довільну, але меншу ніж  $2a$  величину першого радіуса-вектора  $R_1$  (відстань від шуканої точки до фокуса  $F_1$ ) і проведемо дугу кола з центром у точці  $F_1$ . Визначимо довжину другого радіуса-вектора  $R_2 = 2a - R_1$  і проведемо дугу кола з центром у точці  $F_2$ . Точки перетину дуг є шуканими точками  $M_1$  і  $M_2$ .

Другий спосіб побудови точок еліпса ґрунтується на косокутній проекції кола, яке стискають у напрямі малої осі (одна точка зору) або розтягають у напрямі великої осі (друга точка зору). При цьому задають осі еліпса  $AB$  і  $CD$  (рис. 13.52). На кінцях їх, як на діаметрах, будують велике й мале кола. В центрі еліпса проводять пучок променів, що перетинають кола у відповідних точках  $1-1', 2-2', \dots$ . З точок на великому колі проводять вертикальні прямі, а з точок на малому колі — горизонтальні прямі. Точками еліпса є точки перетину відповідних пар цих прямих.

Часто при побудові плоских перерізів тіл обертання треба побудувати еліпс за його спряженими діаметрами, тобто такими діаметрами, кожен з яких поділяє навпіл хорди еліпса, паралельні іншому діаметру. При проєкціюванні кола, розміщеного в площині загального положення, серед множин взаємно перпендикулярних діаметрів кола тільки одна пара діаметрів проєкціюється в пару також взаємно перпендикулярних діаметрів (тобто осей) еліпса. Один з діаметрів збігається з лінією рівня, а другий —

з лінією найбільшого нахилу площини. Решта пар взаємно перпендикулярних діаметрів кола буде проєкціюватися в спряжені діаметри еліпса.

На рис. 13.53 еліпс задано спряженими діаметрами  $EF$  і  $GH$ . Для побудови його точок сторону паралелограма, що охоплює еліпс, а також відповідний півдіаметр поділяють в одному й тому самому відношенні на довільну кількість відрізків. Точки еліпса лежать на перетині відповідних променів пучків з вершинами в точках  $G$  і  $H$ .

Якщо треба побудувати дотичну до еліпса, то слід скористатися загальним для всіх К2П правилом; *дотична в заданій точці К2П утворює однакові кути з її радіусами-векторами* (див. рис. 13.51), *а нормаль перпендикулярна до дотичної і, отже, є бісектрисою кута між радіусами-векторами*.

**Параболу** називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданих точки (фокуса  $F$ ) і прямої (директриси  $d$ ), розміщених у тій самій площині (рис. 13.54). Побудувати параболу можна так: на довільній відстані  $R$  від директриси  $d$  проводять паралельну їй пряму, що перетинає дугу кола радіуса  $R$  з центром у фокусі  $F$  у шуканих точках  $M_1$  і  $M_2$ .

Дотична до параболи є бісектрисою кута  $FCD$  і перетинає вісь у точці  $T_c$ , так, що

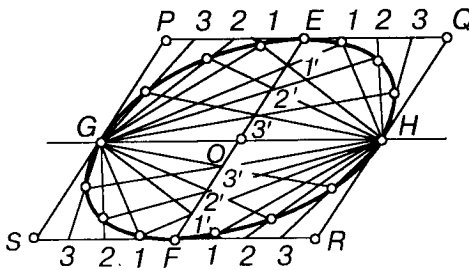


Рис. 13.53

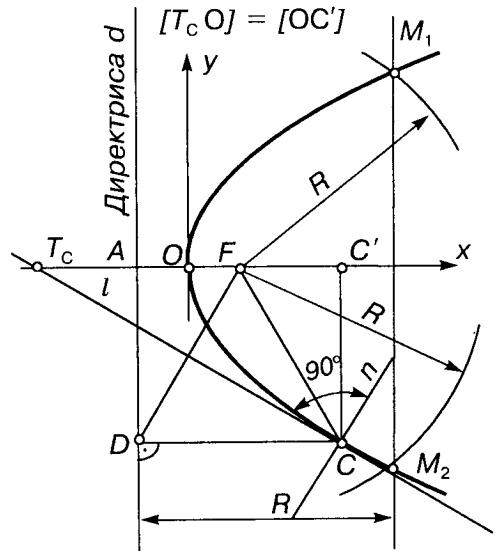


Рис. 13.54

$T_1O = OC'$ , де  $C'$  — проекція точки  $C$  на вісь параболі.

Другий спосіб побудови параболі передбачає задання вершини  $A$ , осі  $AB$  і довільної точки  $C$  (рис. 13.55). За цими даними будують прямокутник  $CDEG$ , сторони якого поділяють на довільну кількість однакових відрізків. Шукані точки параболі лежать на перетині відповідних променів двох пучків: пучка прямих, паралельних осі параболі, та пучка прямих з вершиною у точці  $A$  (ліва частина) та в точці  $C$  (права частина).

При побудові обводів технічних форм часто застосовують третій спосіб побудови параболі, коли задано дві дотичні  $t_M$ ,  $t_N$  і точки дотику  $M$  і  $N$  на них (рис. 13.56). Відрізки  $TM$  і  $TN$  поділяють на довільну кількість рівних відрізків. Відповідні точки поділу сполучають відрізками прямих. Шукана парабола є кривою, вписаною в цей пучок прямих.

**Гіпербола** — це плоска крива, для довільної точки якої різниця її відстаней від двох фіксованих точок площини (фокусів  $F_1$  і  $F_2$ ) стала і дорівнює величині дійсної осі  $2a$  гіперболи (рис. 13.57). Уявна вісь параболі дорівнює  $2b$ , діагоналі прямокутника зі сторонами  $2a$  і  $2b$  є асимптотами гіперболи.

Гіпербола може бути заданою двома осями або однією з них і фокусною відстанню  $c$ .

Спосіб побудови точок гіперболи ґрунтується на її визначенні. З центра  $F_1$  проводять дугу довільного радіуса  $R_1$ , а з центра  $F_2$  — дугу радіуса  $R_1 + 2a$ . Перетин їх визначає точки  $E_1$  і  $E_2$ . Так само будують праву гілку кривої.

Дотична до кривої в заданій точці є бісектрисою кута між двома радіусами-векторами.

**Циклоїдні криві (рулетти)** — це криві, які є траєкторією руху точки кола, що без ковзання котиться по прямій або по другому колу. У першому випадку криву називають *циклоїдою*. Якщо рухоме коло (твірне) розміщене поза нерухомим (напрямним) колом, то криву називають *епіциклоїдою*, а якщо всередині, то — *гіпоциклоїдою*.

На рис. 13.58 показано побудову точок циклоїди. За один оберт твірного кола точка  $A$  знову опиниться на прямій  $l$  у точці  $A_8$  на відстані  $\pi d$  від її початкового поло-

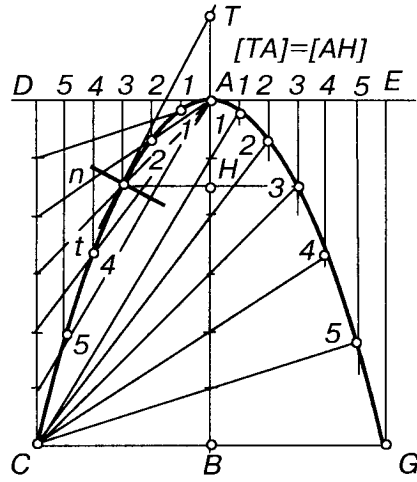


Рис. 13.55

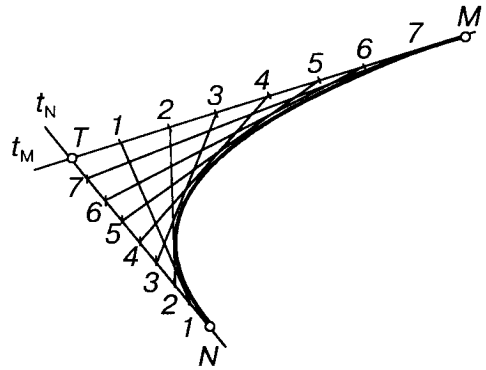


Рис. 13.56

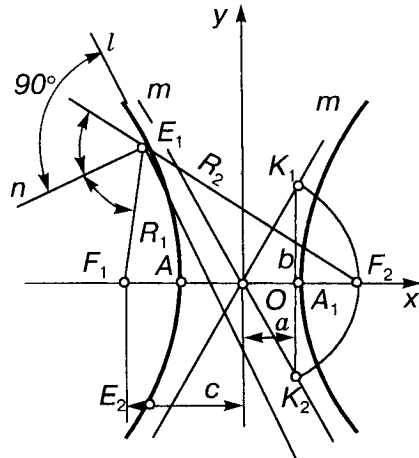


Рис. 13.57

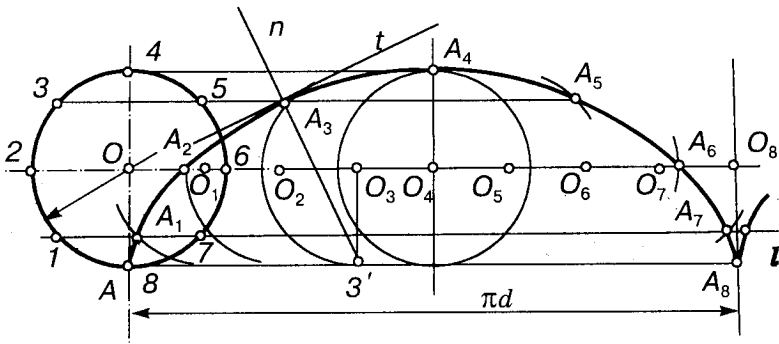


Рис. 13.58

ження. Поділимо цю відстань, як і саме коло, на довільну кількість однакових частин (наприклад на вісім). Через точки поділу кола проведемо горизонтальні прямі, а в точках поділу  $O_1, \dots, O_8$  горизонтальної прямої, що інцидентна центру кола, — дуги радіуса твірного кола. Точки циклоїди ле-

жать на перетині відповідних прямих і дуг кіл. Нормаль до циклоїди в заданій точці  $A_3$  сполучає цю точку з точкою дотику  $3'$  відповідного їй кола з прямою. Дотична перпендикулярна до нормалі.

Якщо точка  $A$  лежить на радіальному промені твірного кола, але всередині або зовні його, то дістають вкорочені або подовжені циклоїди, що називають *трохоїдами*.

Для побудови точок епіциклоїди (рис. 13.59, а) спочатку визначають центральний кут  $\alpha = R_1 \cdot 360^\circ / R$ , де  $R_1$  — радіус твірного кола;  $R$  — радіус дуги напрямного кола. Потім дугу, інцидентну центру твірного кола, в межах кута  $\alpha$  поділяють, як і саме твірне коло, на вісім рівних частин. Точки епіциклоїди лежать на перетині дуг, проведених з центра напрямного кола через точки поділу твірного кола, і відповідних дуг твірного кола, проведених з точок поділу  $O_1 \dots O_8$ . Побудову нормалі та дотичної показано на рис. 13.59, а.

Залежно від співвідношення радіусів твірного та напрямного кіл епіциклоїда має різну кількість точок на нерухомому колі. Якщо  $R_1 = R$ , то епіциклоїда має одну точку і називається *кардіоїдою* (рис. 13.60). Вкорочені або подовжені кардіоїди називають *завитками Паскаля*. Якщо радіус твірного кола дорівнює  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$  тощо радіуса напрямного кола, то таких точок є відповідно 2, 3, 4 і т. д.

Побудова точок гіпоциклоїди (рис. 13.59, б) така сама, як і побудова точок епіциклоїди. Центральний кут  $\alpha$  визначають так само, як і для епіциклоїди.

Вкорочені або подовжені гіпоциклоїди називають *гінотрохоїдами*. Кількість точок

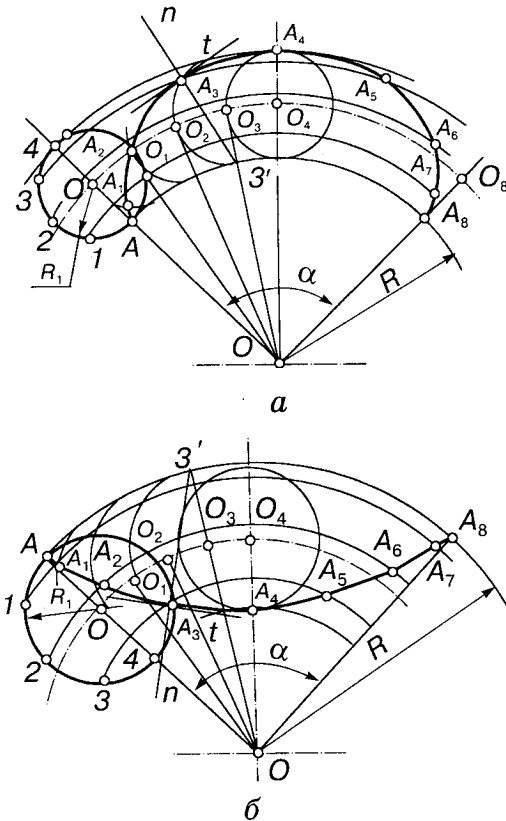


Рис. 13.59

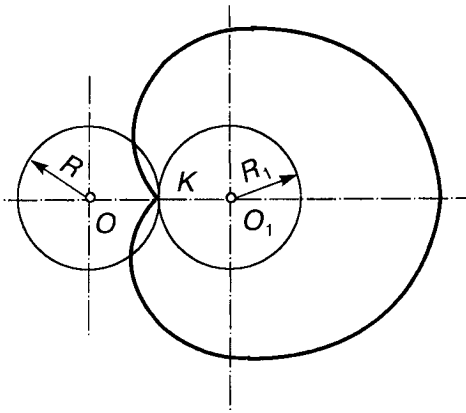


Рис. 13.60

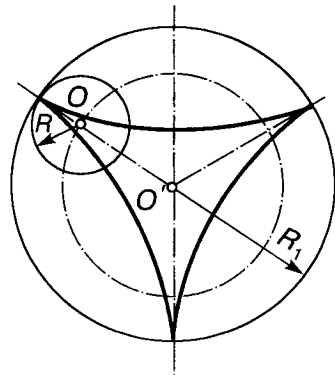


Рис. 13.61

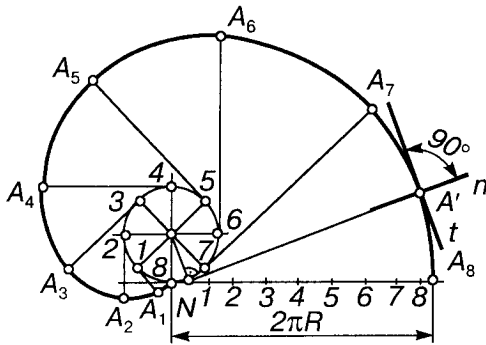


Рис. 13.62

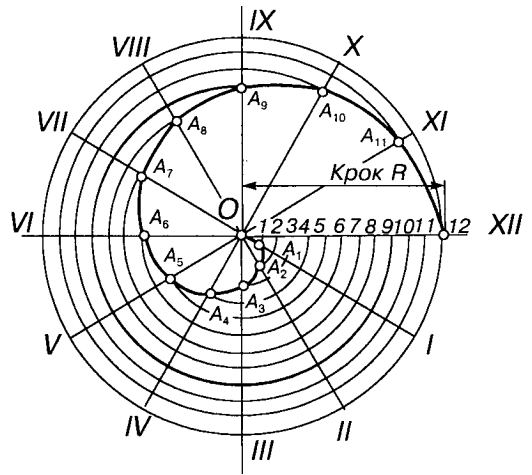


Рис. 13.63

на нерухомому колі залежить від співвідношень радіусів твірного й нерухомого кіл. На рис. 13.61 показано гіпоциклоїду, для якої  $R/R_1 = 1/3$ . Гіпоциклоїду, для якої  $R/R_1 = 1/4$ , називають *астроїдою*. Якщо  $R/R_1 = 1/2$ , то маємо відрізок прямої.

**Побудова точок евольвенти кола.** *Евольвентою* (розгорткою) кола називають криву, що є траєкторією точки прямої лінії, що котиться без ковзання по нерухомому колу (рис. 13.62). Щоб побудувати множину точок евольвенти, коло поділяють на довільну кількість (наприклад на вісім) рівних частин. З кожної точки поділу проводять дотичну до кола, на якій відкладають відрізок, що дорівнює довжині дуги кола від

початкової точки до заданої. Здобута точка належить евольвенті.

Відносно евольвенти нерухоме коло є еволютою, тобто геометричним місцем центрів кривини евольвенти. Відрізок від точки кола до точки евольвенти дорівнює радіусу кривини евольвенти.

Нормаль до евольвенти в довільній точці  $A'$  є дотичною до нерухомого кола з точки  $A$  (спосіб побудови — див. рис. 13.43).

Евольвента є базисною кривою при профілюванні зубців однойменного зачеплення зубчастих кіл.

**Побудова точок спіралі Архімеда.** *Спіраллю Архімеда* називають криву, утворену траєкторією точки, що рівномірно ру-

хається вздовж радіуса-вектора, який, у свою чергу, рівномірно обертається навколо нерухомого центра (рис. 13.63). Відстань, на яку переміститься точка від центра за один оберт радіуса-вектора, є кроком спіралі. Спіраль має дві гілки залежно від напрямку обертання радіуса-вектора (за або проти руху стрілки годинника).

Якщо задано крок спіралі, то для побудови її точок проводять коло радіусом, що дорівнює кроку, і поділяють крок спіралі та коло на довільну кількість рівних частин. Точки спіралі лежать на перетині радіальних променів, що сполучають точки поділу кола та його центр, і дуг кіл, проведених через відповідні точки поділу кроку спіралі (рис. 13.63).

Спіраль Архімеда застосовують у техніці, проектуючи самоцентруючі патрони, кулачкові механізми, ексцентриків та інші пристрої.

**Побудова точок синусоїди.** Синусоїда — це плоска крива, утворена траєкторією точ-

ки кінця радіуса-вектора, який рівномірно обертається навколо центра і одночасно рівномірно поступально переміщується вздовж осі  $Ox$ . Синусоїда є графіком тригонометричної функції  $y = \sin x$  у прямокутній декартовій системі координат (рис. 13.64).

Спосіб побудови точок синусоїди ґрунтується на способі її утворення. Коло заданого діаметра  $d$ , що дорівнює амплітуді синусоїди (максимальному значенню ординати), поділяють на довільну кількість рівних частин. На продовженні горизонтального діаметра кола відкладають довільний відрізок, що відповідає періоду синусоїди, і поділяють його на таку саму кількість рівних частин. Точки синусоїди знаходять як перетин горизонтальних прямих, проведених через точки поділу кола, і вертикальних прямих, проведених через точки поділу відрізка періоду синусоїди (рис. 13.64).

Для побудови дотичної в довільній точці  $N$  знаходять відповідну їй точку  $N'$  на колі

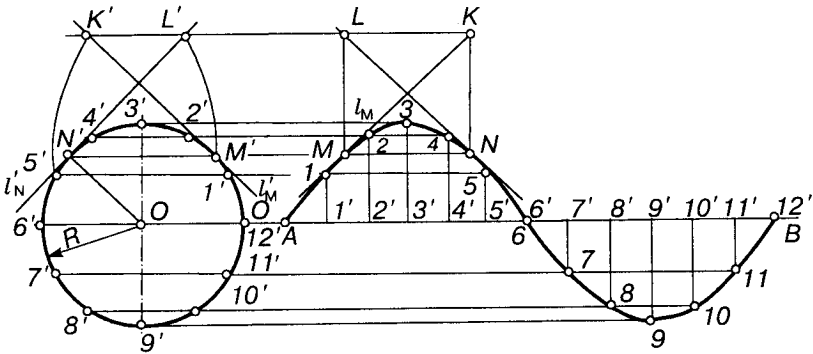


Рис. 13.64

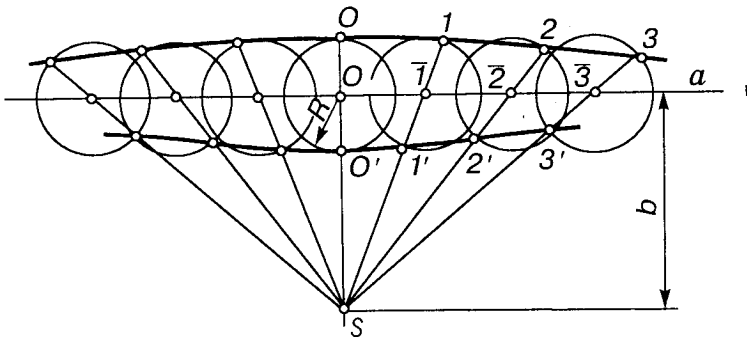


Рис. 13.65

та симетричні їм точки  $M$  і  $M'$ . Через точку  $M'$  проводять евольвенту кола до перетину з дотичною, що проходить через точку  $N'$ . Точку перетину  $L'$  проєкціюють на вертикальну пряму, проведenu через точку  $M$ . Дістають точку  $L$ , яку сполучають з  $N$ . Це і є дотична. Так само будують дотичну в симетричній точці  $M$ . Цей спосіб побудови дотичної до синусоїди ґрунтується на властивостях гвинтової лінії.

Синусоїди застосовують при аналізі коливальних процесів, в кулачкових механізмах тощо.

Спіралі, циклоїдні криві, синусоїди є нескінченними трансцендентними кривими, тобто такими, що не можуть бути описаними алгебраїчними рівняннями в прямокутній декартовій системі координат.

Розглянемо побудову ще однієї кривої — конхоїди. Точки конхоїди лежать на радіусах-векторах і віддалені на однаковій відстані від точок перетину цих радіусів-векторів з довільною кривою. Якщо ця кри-

ва є прямою (рис. 13.65), то матимемо конхоїду Нікомеда.

Конхоїда має дві гілки. Побудова точок конхоїди ґрунтується на її визначенні: на заданій прямій  $a$  вибирають довільну точку  $T$  і через неї проводять радіус-вектор, на якому відкладають по обидва боки від точки  $T$  задану відстань  $R$ . Це і є точки конхоїди. Пряма  $a$  є асимптотою конхоїди.

Наприкінці зробимо деякі зауваження щодо побудови графіків розглянутих кривих за допомогою лекал. Спочатку здобуті точки кривої “від руки” сполучають плавною кривою. Потім на лекалі вибирають ділянку, що відповідає кривині зображуваної ділянки; вибирають середню частину цієї ділянки; вибирають наступну ділянку лекала, щоб вона стикалася з проведеною вже по першому порядку гладкості (мала спільну дотичну) і проходила через наступні дві або три точки кривої і т. д. Проведення графіка слід починати з ділянок найбільшої кривини.

### Запитання та завдання

1. Що називають форматом? Чим відрізняється основний формат від додаткового?
2. Як проводять рамку рисунка?
3. Де розміщують основний напис та графу 26? Які їхні розміри?
4. Назвати основні типи ліній, які застосовують під час виконання креслень, а також співвідношення їхніх товщин.
5. В яких межах можна вибирати довжину штрихів для штрихової та штрихпунктирної ліній?
6. Що таке масштаб зображення? Які масштаби рекомендує ГОСТ 2.302—68?
7. Які розміри та типи шрифтів застосовують у машинобудівному кресленні?
8. Які загальні правила виконання штриховки на кресленнях?
9. Як виконують штриховку двох суміжних деталей?
10. Як проводять розмірні та виносні лінії для прямолінійного відрізка? кола? дуги? кута?
11. На якій мінімальній відстані проводять розмірну лінію від контуру? від паралельної розмірної лінії?
12. Як записують розмірні числа при різних нахилах розмірних ліній для лінійних розмірів? для кутових розмірів?
13. Як виконують розмірні лінії та наносять розмірні числа, якщо не вистачає місця для стрілок та чисел?
14. Які правила нанесення розмірів конусності та нахилу?
15. Що називають спряженням? Які його основні елементи?
16. Що таке коробова крива?
17. Які ви знаєте криві другого порядку? Охарактеризуйте їх.
18. Яку криву називають циклоїдною?
19. Побудова циклоїди, епіциклоїди, гіпоциклоїди.
20. Як утворюються евольвента, спіраль Архімеда, синусоїда, конхоїда?



## Глава 14 ЗОБРАЖЕННЯ

Правила побудови зображень предметів (вироби, споруди та їхні складові частини) на кресленнях усіх галузей промисловості регламентує ГОСТ 2.305—68.

Зображення предмета має давати повне уявлення про його форму, розміри та інші дані, необхідні для його виготовлення й контролю.

Для побудови зображень користуються методом прямокутного проєкціонування, коли предмет розміщують між оком спостерігача та площиною проєкції. Основними площинами проєкцій вибирають шість граней пустотілого куба, всередині якого розміщують предмет, який проєкціюється на внутрішні грані куба. Потім основні площини проєкцій суміщуються з фрон-

тальною площиною (рис. 14.1). У результаті утворюється плоский комплексний рисунок (рис. 14.2).

Зображення на фронтальній площині проєкцій вважають головним. Відносно цієї площини проєкцій предмет розміщують так, щоб зображення на ній (головне зображення) давало найбільш повне враження про форму та розміри предмета.

Залежно від змісту зображення поділяють на вигляди, розрізи та перерізи. Кількість їх має бути мінімальною, але достатньою для повного уявлення про зображуваний предмет.

### 14.1. Вигляди

*Виглядом* називають зображення повернутої до спостерігача видимої частини поверхні предмета. Для зменшення кількості зображень допускається лінії невидимої контуру зображати штриховими (рис. 14.3). Вигляди на основних площинах проєкцій є *основними*. Вони мають такі назви (див. рис. 14.2): 1 — вигляд спереду (головний вигляд); 2 — вигляд зверху; 3 — вигляд зліва; 4 — вигляд справа; 5 — вигляд знизу; 6 — вигляд ззаду.

Якщо всі вигляди розміщені на одному аркуші в безпосередньому проєкційному

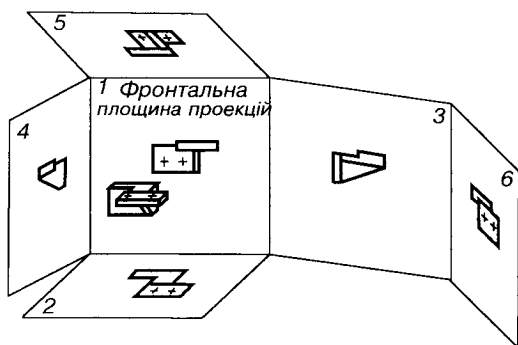


Рис. 14.1

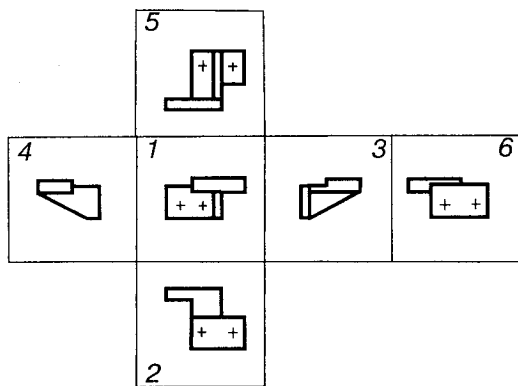


Рис. 14.2

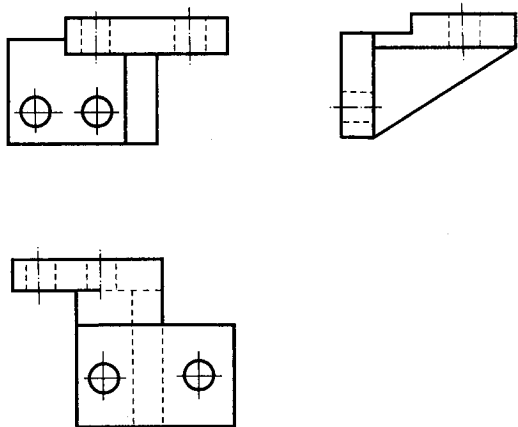


Рис. 14.3

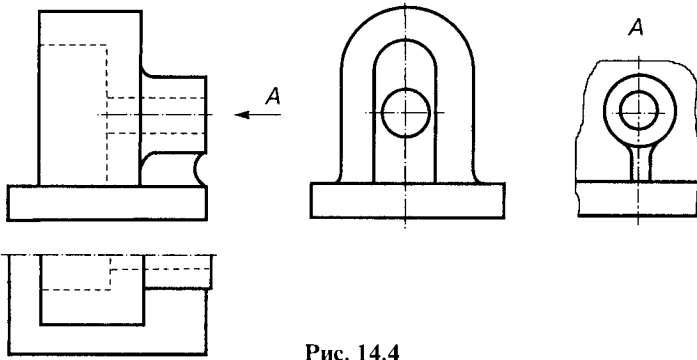


Рис. 14.4

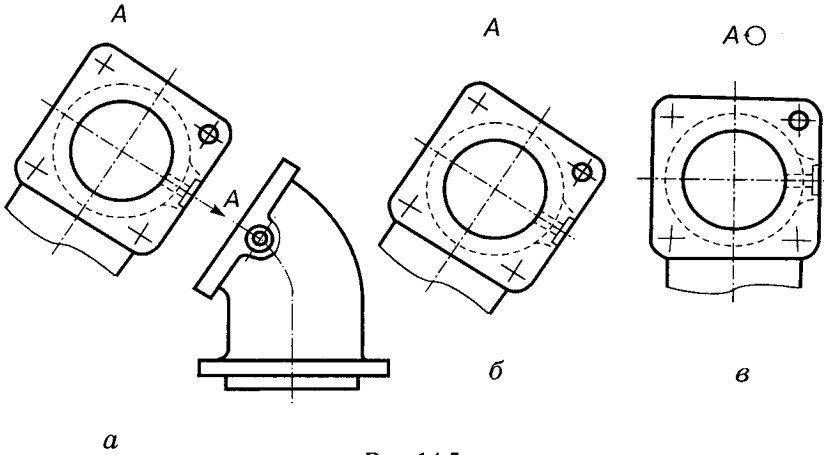


Рис. 14.5

зв'язку, то їх не надписують. Якщо порушено проєкційний зв'язок або вигляди відокремлені іншими зображеннями чи виконані на різних аркушах, то вигляд супроводжують великою літерою українського алфавіту, а напрям зору (проєкціонування) показують стрілкою (рис. 14.4) з тією самою великою літерою.

Крім основних, розрізняють додаткові та місцеві вигляди.

Якщо деяку частину предмета не можна показати без спотворення форми та розмірів на жодному з основних виглядів, то застосовують *додаткові* вигляди, які дістають на площинах, не паралельних основним площинам проєкцій (рис. 14.5, а...в; 14.6). Додатковий вигляд теж позначають стрілкою та літерою. Якщо додатковий вигляд розміщено в безпосередньому зв'язку з відповідним зображенням, то стрілку й напис над виглядом не наносять (див. рис. 14.6). Додатковий вигляд можна поверта-

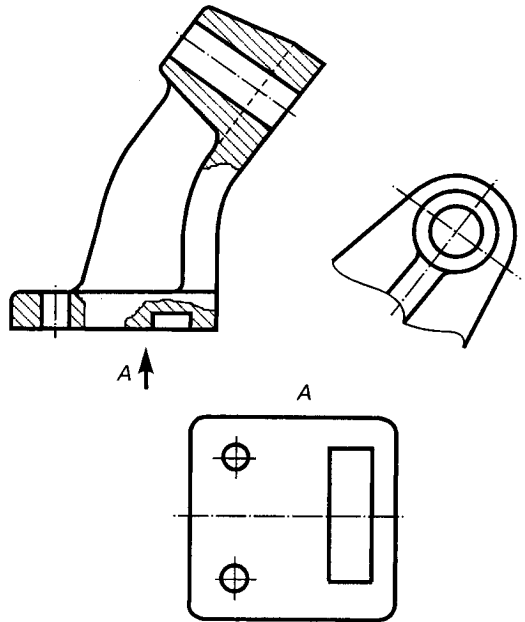


Рис. 14.6



ти. Тоді до його напису додається знак  $\odot$  (див. рис. 14.5, в).

Зображення окремої обмеженої частини поверхні предмета називають *місцевим* виглядом. Він може обмежуватися хвилястою лінією обриву (див. рис. 14.5), а може не обмежуватися (вигляд А, див. рис. 14.6). Місцевий вигляд позначають на рисунку так само, як і додаткові вигляди (вигляд А, див. рис. 14.6).

## 14.2. Розрізи, перерізи

**Розріз** — це зображення предмета, який умовно перетнуто однією площиною або кількома (рис. 14.7). Умовне розсікання стосується тільки зображуваного розрізу і не впливає на інші зображення того самого предмета. При цьому на розрізі зображують те, що розміщено в січних площинах та за ними. Можна показувати не все, що розміщено за січними площинами, якщо це не суттєво для повного уявлення предмета (рис. 14.8).

**Переріз** — це зображення плоскої фігури, що утворюється при умовному перетині предмета однією площиною або кількома. При цьому зображується тільки те, що розміщено в січних площинах.

Отже, існує відмінність між розрізом та перерізом: переріз є складовою частиною розрізу (рис. 14.9).

Розрізи дають змогу виявити внутрішню форму предмета, коли лінії невидимого контуру не дають однозначної картини або їх читання на зображенні ускладнене.

На розрізі внутрішні форми зображують лініями видимого контуру, а переріз заштриховують відповідно до матеріалу деталі.

**Класифікація розрізів.** 1. Залежно від положення січної площини відносно горизонтальної площини проєкції розрізи поділяють на:

а) **горизонтальні** — січна площина горизонтальна (рис. 14.10);

б) **вертикальні** — січна площина вертикальна. У свою чергу, вертикальні розрізи бувають *фронтальні*, якщо січна площина фронтальна (рис. 14.11), та *профільні*, якщо січна площина профільна;

в) **похилі** — січна площина утворює з горизонтальною площиною кут, що відрізняється від прямого (див. рис. 14.9). По-

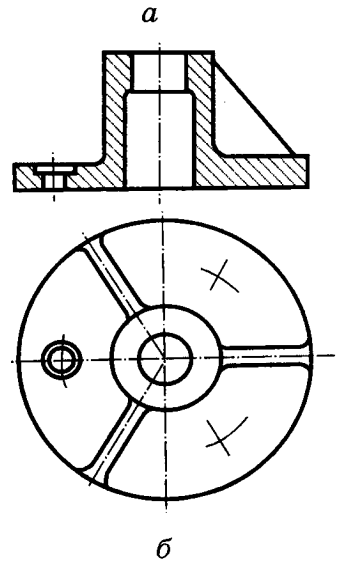
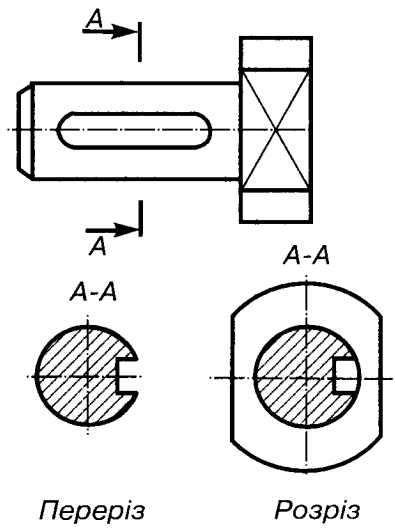


Рис. 14.7

хилий розріз проєкціюється на додаткову площину, паралельну січній, яка потім суміщується з площиною рисунка. Його можна розміщувати на довільному місці аркуша в безпосередньому проєкційному зв'язку.

2. Залежно від положення січної площини відносно предмета розрізи поділяють на:

а) **поздовжні** — січна площина напрямлена вздовж предмета (рис. 14.12);

б) **поперечні** — січна площина розміщена уперек предмета (рис. 14.13).

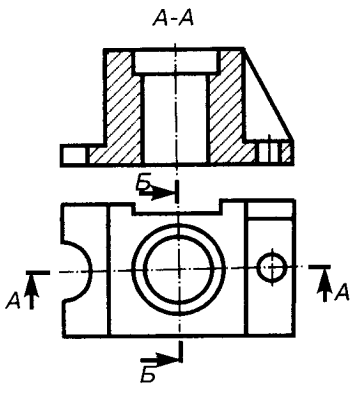


Рис. 14.8

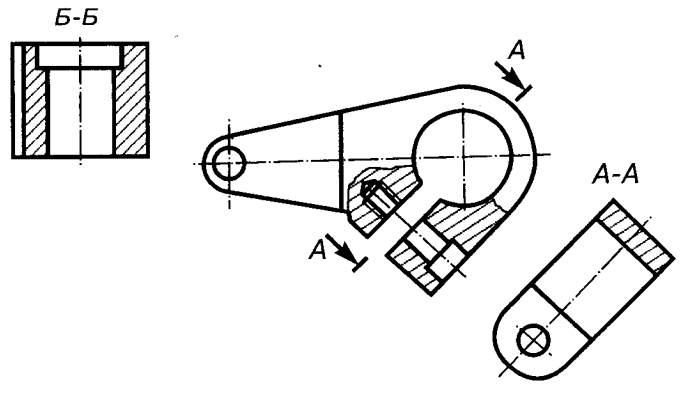


Рис. 14.9

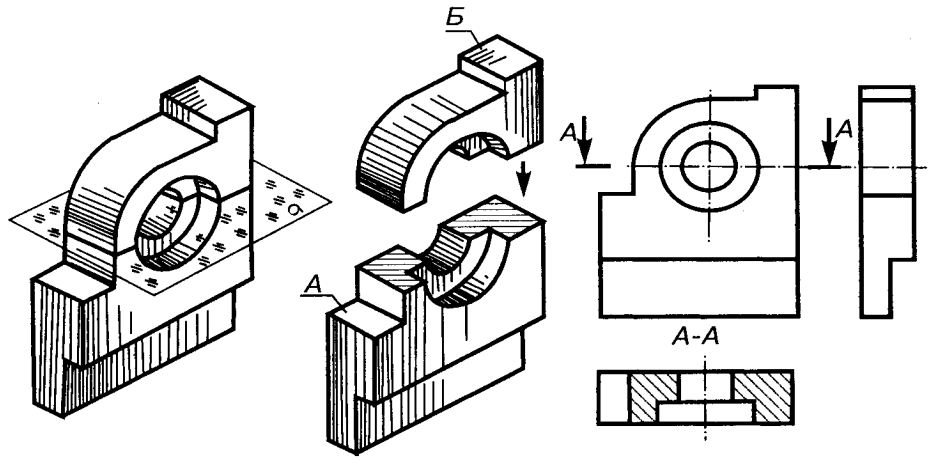


Рис. 14.10

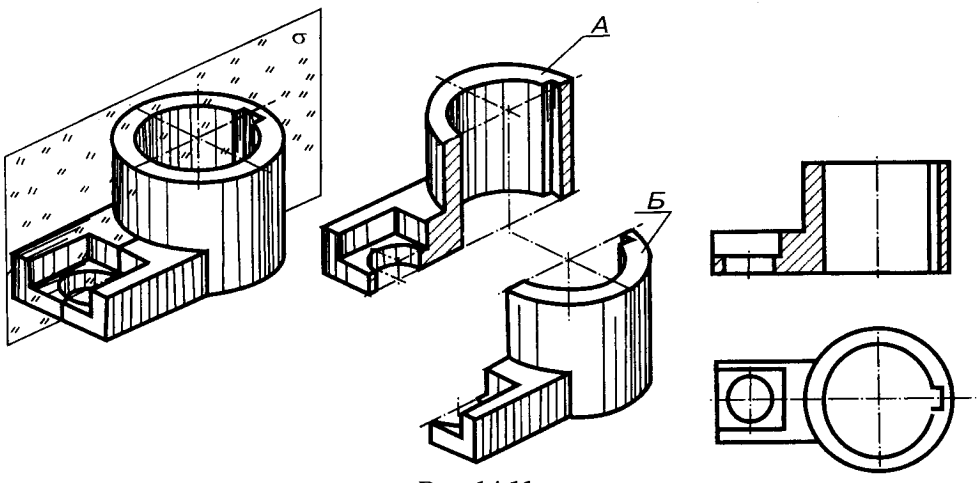


Рис. 14.11

При ламаних розрізах січні площини умовно повертають до суміщення з однією площиною, при цьому напрям повороту може не збігатися з напрямом погляду (рис. 14.14, б). При повороті січної площини елементи предмета, що розміщуються за нею, зображуються так, як вони проєкціюються на відповідну площину, з якою виконується суміщення.

Крім розглянутих, розрізняють ще *місцевий* розріз (рис. 14.15), який дає змогу виявити будову предмета в окремому обмеженому місці (див. рис. 14.13). Місцевий розріз на вигляді виділяють хвилястою лінією, яка не має збігатися з лініями контуру.

Позначення розрізу містить три елементи:

1. Позначення положення січної площини розімкненою лінією (лінія перетину), початковий і кінцевий штрихи якої не повинні перетинати контур відповідного зображення. При складних розрізах штрихи проводять також у місцях перетину січних площин.

2. Позначення стрілкою напрям зору на початковому та кінцевому штрихах на відстані 2 або 3 мм від кінця штриха. На початку та в кінці лінії перетину, а якщо треба, то й у місцях перетину січних площин, ставлять горизонтально одну й ту саму велику літеру українського алфавіту з боку зовнішнього кута.

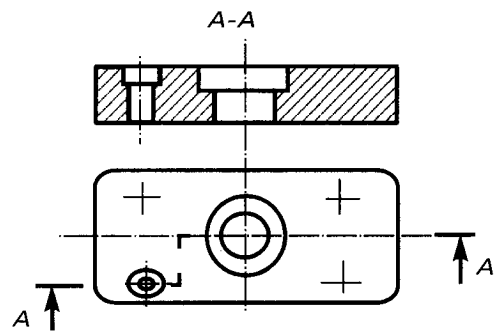


Рис. 14.12

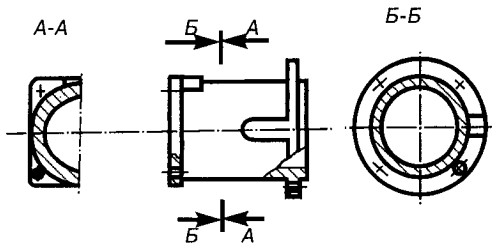


Рис. 14.13

3. Залежно від кількості січних площин розрізи бувають:

- а) п р о с т і — при одній січній площині;
- б) с к л а д н і — при двох і більше січних площинах. Ці розрізи бувають *ступінчасті* (див. рис. 14.12) та *ламани* (рис. 14.14, а).

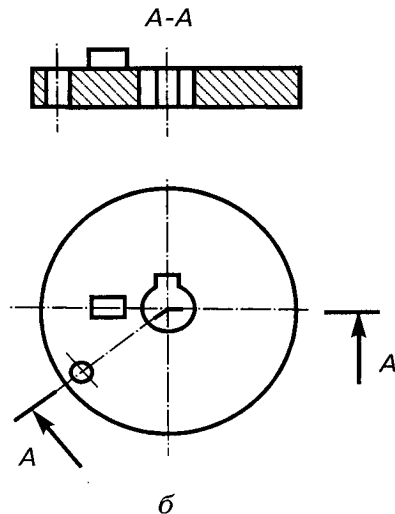
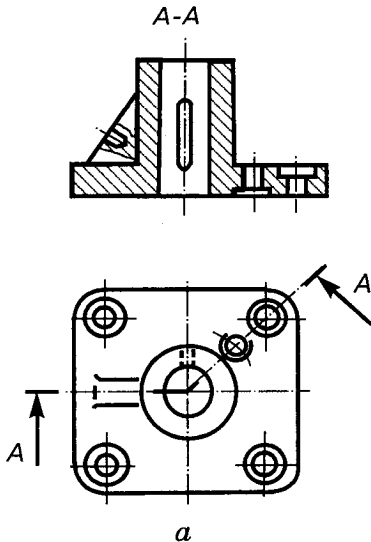


Рис. 14.14

3. Напис розрізу безпосередньо над його зображенням за типом  $A - A$  без підкреслення. Якщо січна площина збігається з площиною симетрії предмета в цілому, а відповідні зображення розміщені на місці основного вигляду на одному й тому самому аркуші в безпосередньому проекційному зв'язку та не відокремлені іншими зображеннями, то для горизонтальних, фронтальних та профільних розрізів не показують положення січної площини, а сам розріз написом не супроводжують.

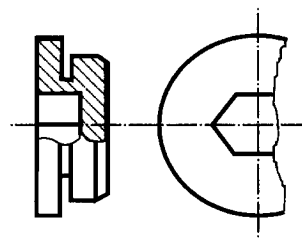


Рис. 14.15

Частину вигляду та частину розрізу можна сполучати, розділяючи їх хвилястою лінією (див. рис. 14.15). Якщо при цьому сполучаються половина вигляду та половина розрізу, кожен з яких має одну й ту саму вісь симетрії, то лінією, що їх розділяє, є вісь симетрії (рис. 14.16), крім випадку, коли вісь збігається з лінією видимого контуру.

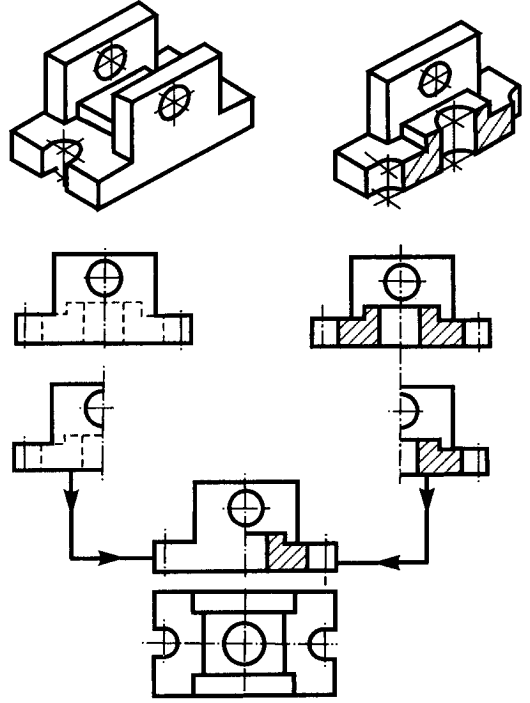


Рис. 14.16

Перерізи, що не входять до складу розрізів, поділяють на:

а) *в и н е с е н і*, тобто такі, що виконані окремо від основного зображення (рис. 14.17);

б) *н а к л а д е н і*, тобто такі, що розміщені на самому зображенні предмета (рис. 14.18). Такі перерізи обводять тонкою суцільною лінією.

Винесені перерізи є переважними, їх можна розміщувати в розриві між частинами одного і того самого вигляду (рис. 14.19, а, б).

Для симетричного винесеного або накладеного перерізу літерні позначення та лінії перетину не наносять, обмежуючись проведенням осі симетрії (див. рис. 14.18, а). У решті випадків для позначення лінії перетину проводять розімкнену лінію та показують стрілками напрям зору, позначаючи їх однаковими великими літерами українського алфавіту. На місці зображення перерізу його надписують за типом  $A - A$ , не підкреслюючи.

У випадках, зображених на рис. 14.19, б, літери не наносять.

Для кількох однакових перерізів, що стосуються одного предмета, лінії перетину позначають однією літерою і зображують один переріз (рис. 14.20). Якщо при цьому січні площини нахилені під різними кутами, то знак  $\odot$  не наносять (рис. 14.21).

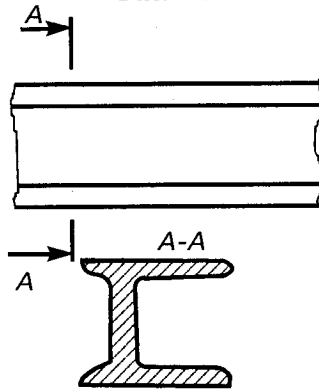


Рис. 14.17

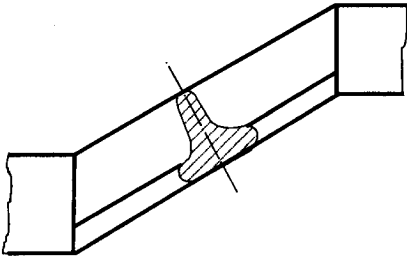
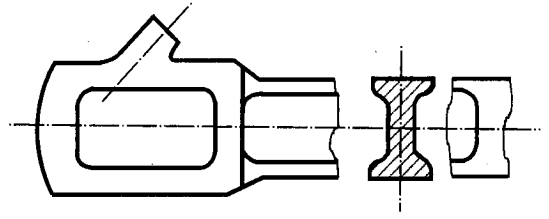
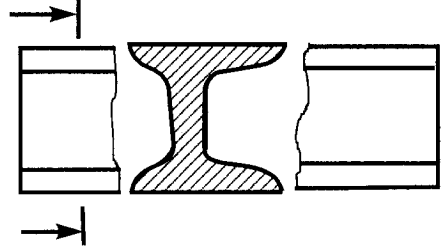


Рис. 14.18



*a*



*б*

Рис. 14.19

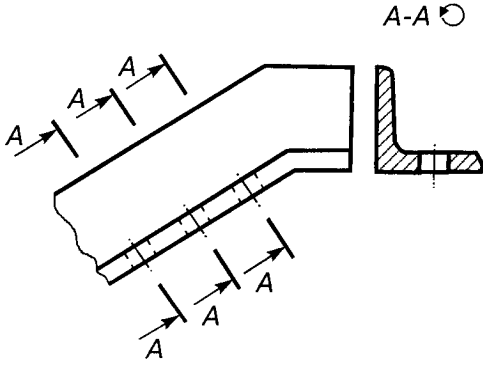


Рис. 14.20

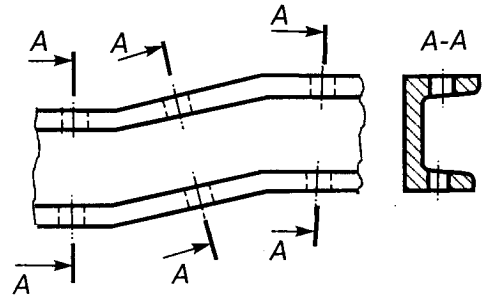


Рис. 14.21

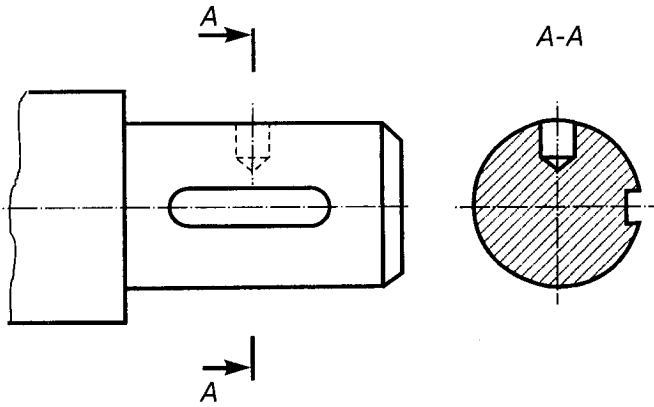


Рис. 14.22

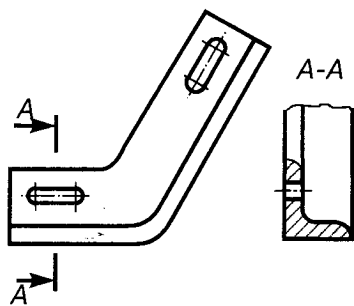


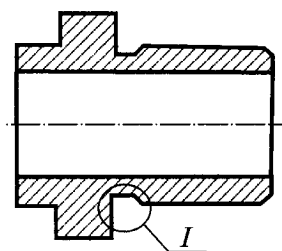
Рис. 14.23

Якщо січна площина проходить через вісь поверхні обертання, що обмежує отвір чи заглиблення, то контур отвору чи заглиблення в перерізі показують повністю (рис. 14.22).

Якщо січна площина перетинає некруглий отвір і переріз складається з кількох окремих частин, то слід застосувати розріз, а не переріз (рис. 14.23).

### 14.3. Виносні елементи

*Виносний елемент* — це зображення в збільшеному масштабі частини предмета, що містить елементи, яких немає на основному зображенні. Виносні елементи застосовують тоді, коли потрібні додаткові по-



I (5:1)

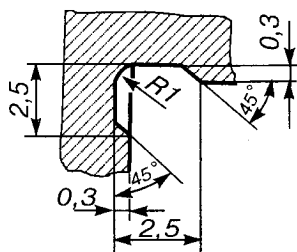


Рис. 14.24

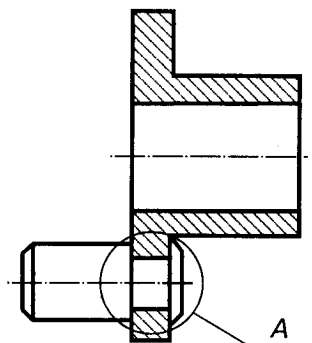


Рис. 14.25

яснення щодо форми, розмірів та інших даних або елементів складних контурів деталей: проточок, галтелей, розточок, профілю спеціальної різьби тощо.

Приклад позначення виносного елемента для пояснення форми та розмірів канавки для виходу шліфувального круга наведено на рис. 14.24.

Виносний елемент може відрізнятись за змістом від основного зображення (рис. 14.25).

### 14.4. Умовності та спрощення при побудові зображень

ГОСТ 2.305—68 рекомендує деякі умовності та спрощення при побудові зображень.

1. Якщо зображення є симетричною фігурою, то допускається зображати його половину, обмежуючи її осью або хвилястою лінією (див. рис. 14.16 і 14.26).

2. Якщо предмет має кілька однакових, рівномірно розміщених елементів, то на зображенні цього предмета повністю пока-

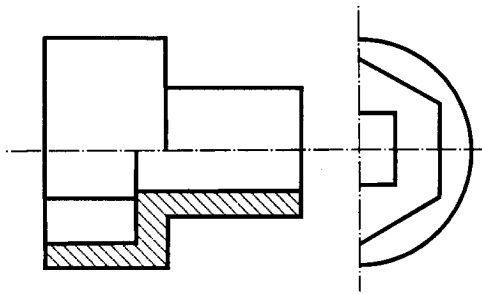


Рис. 14.26

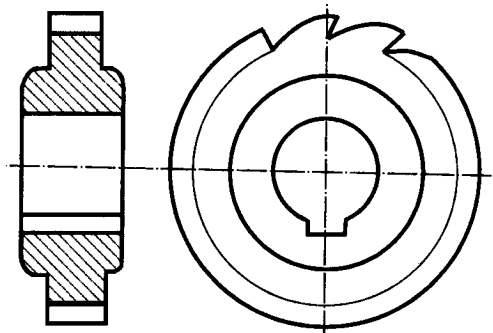


Рис. 14.27

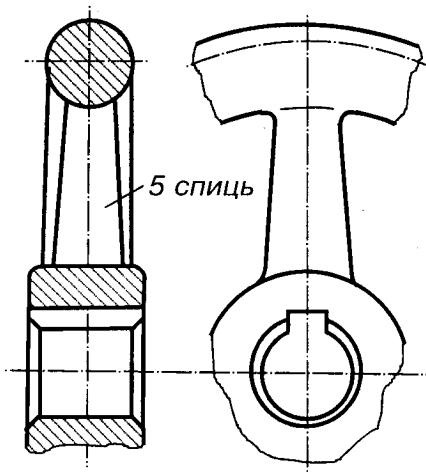


Рис. 14.28

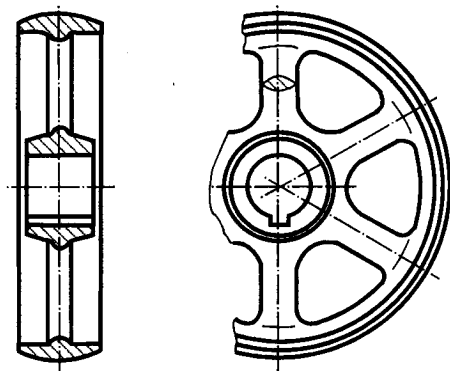


Рис. 14.29

зують один або два таких елементи, а решту — спрощено або умовно (рис. 14.27). Можна також зображати частину предмета, зазначаючи кількість елементів, їх розміщення тощо (рис. 14.28).

3. На виглядах та розрізах допускається спрощено зображати проєкції ліній перетину поверхонь, якщо точна побудова їх не обов'язкова (див. рис. 14.27 і 14.28).

4. Плавний перехід від однієї поверхні до іншої зображується умовно (рис. 14.29) або зовсім не зображується.

Гвинти, заклепки, шпонки, непустотілі вали та осі, шатуни, рукоятки при поздовжньому розрізі зображуються нерозрізаними. Спиці маховиків, шківів, зубчастих коліс, ребра жорсткості, тонкі стінки тощо не заштриховують, якщо січна площина

розміщена вздовж осі або довжини такого елемента (рис. 14.29 і 14.30).

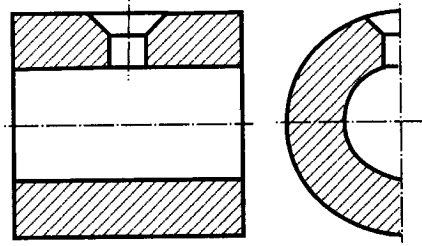
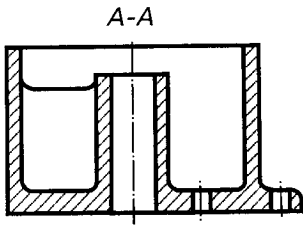
Допускаються спрощення, аналогічні тим, що на рис. 14.31, *а, б*.

5. Незначну конусність або нахил допускається зображати зі збільшенням. При цьому на площині, перпендикулярній до основи нахилу або осі конуса, показують лінії, що відповідають меншому розміру нахилу або меншій основі конуса (рис. 14.32, *а, б*).

6. Деталі, що мають велику довжину, сталий поперечний переріз або такий, що змінюється закономірно, можна показувати з розривом (рис. 14.33).

7. Для спрощення рисунка та зменшення кількості зображень допускається:

а) частину предмета, розміщену між спостерігачем і січною площиною, показува-



*a*

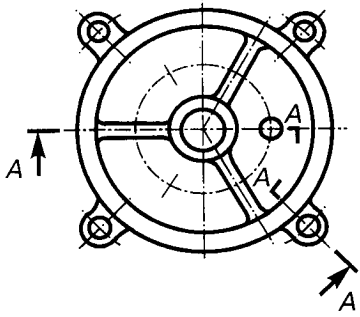
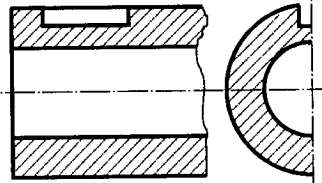
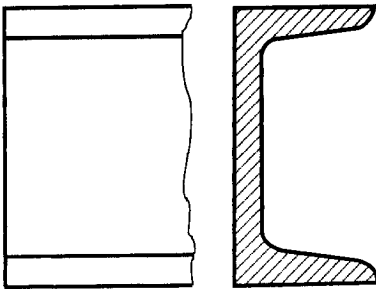


Рис. 14.30



*б*

Рис. 14.31



*a*

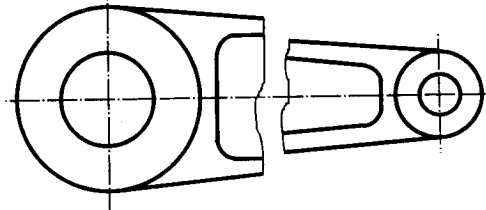
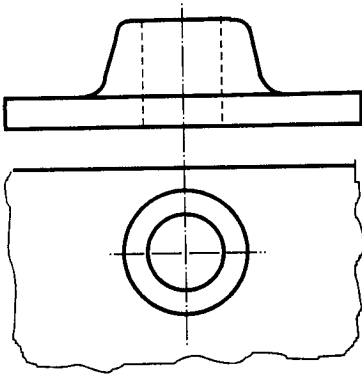


Рис. 14.33



*б*

Рис. 14.32

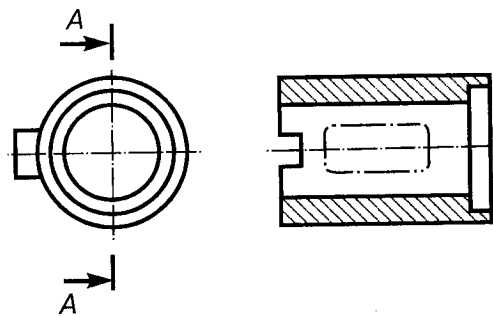


Рис. 14.34



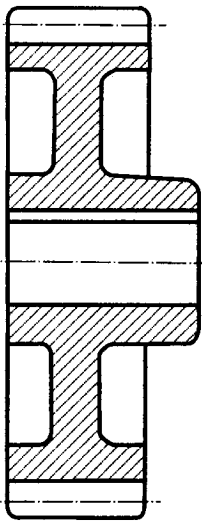


Рис. 14.35

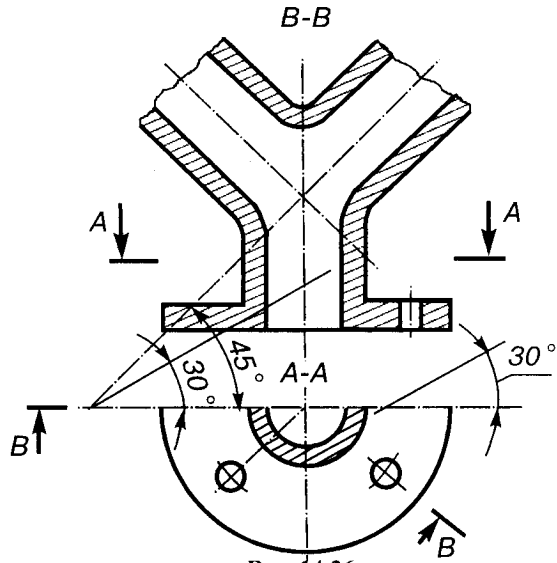
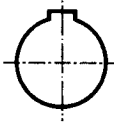


Рис. 14.36

ти безпосередньо на розрізі потовщеною штрихпунктирною лінією — так звана “накладена проекція” (рис. 14.34);

б) робити складні розрізи;

в) для показу отворів у маточних зубчастих колісах, шківів тощо, а також для шпон-

кових пазів замість повного зображення деталі давати лише контур отвору (рис. 14.35; див. рис. 14.31, б);

г) зображати в розрізі отвори, розміщені на круглому фланці, якщо вони не попадають у січну площину (див. рис. 14.36).

### Запитання та завдання

1. Що називають виглядом? Які є основні вигляди?
2. Як розміщують та позначають основні вигляди?
3. Які вигляди називають додатковими? Як їх розміщують та позначають?
4. Чим відрізняються місцеві вигляди від додаткових?
5. У чому відмінність між розрізом і перерізом?
6. Як поділяють розрізи залежно від кількості січних площин?
7. Як виконують місцевий розріз?
8. В яких випадках прості розрізи не позначаються?
9. Як оформити поєднання частини вигляду з частиною розрізу?
10. Чим відрізняється накладений переріз від винесеного? Коли переріз не позначається?
11. Як виконують кілька однакових перерізів, що належать одному предмету?
12. Що називають виносним елементом і як його виконують?
13. Яка умовність дозволяється при зображенні симетричних зображень?
14. Як зображують кілька однакових рівномірно розміщених елементів?
15. Як показують у розрізі болти, гвинти, шпильки, вали, шатуни тощо?
16. Як зображують на розрізі тонкі стінки та ребра жорсткості?



## Глава 15 РОБОЧІ КРЕСЛЕННЯ ТА ЕСКІЗИ ДЕТАЛЕЙ

Машини, механізми, різноманітне обладнання та апарати складаються з деталей, які виготовляють за кресленнями (рисунками). **Робоче креслення (рисунок)** деталі — це документ, що містить зображення деталі та всі дані, необхідні для виготовлення, контролю та випробування виробу.

На виробництві деталей виготовляють безпосередньо за поопераційними картами, які складають на основі робочих креслень деталі.

Робоче креслення виконують на основі креслення загального вигляду або за ескізом, знятим з природи. Як і робоче креслення, такі ескізи мають відповідати певним вимогам.

### 15.1. Вимоги до робочого креслення деталі

Робоче креслення кожної деталі виконують на окремому аркуші стандартного формату, що має рамку, основний напис, додаткову графу 26 відповідно до ГОСТ 2.301—68. За ГОСТ 2.302—68 вибирають масштаб зображень.

Робочі креслення розробляють, як правило, на всі деталі, що входять до складу виробу. Допускається не розробляти робочі креслення на деталі:

- а) круглої або прямокутної форми, що виготовляються з листового матеріалу;
- б) одержані відрізанням під прямим кутом з прокату або фасонного матеріалу;
- в) із складу нерознімного з'єднання, якщо конструкція деталі зрозуміла із складально-го креслення.

Деталі на робочому кресленні зображують у тому вигляді, з тими розмірами та іншими даними, з якими деталь надходить до складальної операції.

Технологічні вказівки на робочих кресленнях не розміщують, крім випадку, коли це єдиний спосіб досягнення потрібної точності, якості виробу (сумісна обробка, припасування на місці тощо). Якщо деталі виготовляють з матеріалів, що мають пев-

ний напрям волокон, основи тощо, то це зазначають на кресленні відповідним написом (наприклад, “напрямок прокату” для металу, “напрямок волокон” для деревини).

На робочих кресленнях застосовують умовні позначення, встановлені відповідними стандартами. При цьому можна посилатися на стандарти, нормативні документи, технічні умови, якщо це не ускладнює роботу з документом на виробництві.

Не слід посылатися на документи, що регламентують конструктивні елементи деталі (фаски, галтелі, проточки, канавки та ін.). Їх треба щоразу стосовно даної деталі показувати на робочому кресленні.

Дозволяється позначати вид і спосіб виконання швів зварних з'єднань.

Робоче креслення деталі, як правило, містить: зображення; масштаб; основний напис та графу 26; розміри та граничні відхилення; позначення шорсткості поверхні, покриття, термічної та іншої обробки; матеріал деталі; технічні вимоги.

Кожну з цих складових виконують за певними правилами.

### 15.2. Правила оформлення робочих креслень

Кількість зображень на робочому кресленні має бути мінімальною, але достатньою для уявлення форми деталі з урахуванням умовностей та спрощень, відповідних знаків і написів. Для складних деталей доцільно виконувати додаткові та місцеві вигляди, місцеві розрізи, перерізи, щоб уникнути виконання повних виглядів і розрізів.

Зображення деталі на фронтальній площині проєкції називають **головним виглядом**. Головний вигляд має давати якомога повне уявлення про форму та елементи деталі. Правильний вибір головного вигляду дає змогу досягти мінімальної кількості решти зображень. На вибір головного вигляду впливають різноманітні конструктивні та технологічні чинники. Основні з них будуть розглянуті в параграфі 15.4.

Масштаб зображень вибирають відповідно до ГОСТ 2.302—68 за умови вдалого використання поля рисунка, а також можливостей зображення та нанесення розмірів, відхилень тощо для всіх елементів деталі.

Основний напис для креслень і схем встановлено за формою 1 (ГОСТ 2.104—68), для текстових конструкторських документів першого та заголовного аркушів основний напис і додаткові графи виконують за формою 2 (див. рис. 13.2).

Основний напис на титульному аркуші не виконують.

### 15.3. Нанесення розмірів

Розміри на робочих кресленнях та ескізах деталей наносять з урахуванням конструктивних особливостей роботи деталі в з'єднанні, технології її виготовлення, а також необхідності контролю розмірів. Виходячи з цього, вибирають бази, від яких обмірюють деталь під час її виготовлення, контролю та складання. Розрізняють конструкторські, технологічні та вимірвальні бази, які можуть бути основними та допоміжними.

*Конструкторськими базами* називають сукупності точок, ліній, поверхонь, відносно яких встановлюється та орієнтується деталь у механізмі (рис. 15.1, а).

*Технологічна база* — це поверхня, відносно якої орієнтується деталь під час її виготовлення. Крім основної бази А, на рис. 15.1, б показано допоміжну базу Б, яка пов'язана з виготовленням деталі на токарному верстаті.

*Вимірвальними базами* називають сукупності точок, ліній, поверхонь, від яких відлічують розміри при обмірюванні деталі (рис. 15.1, в).

Кожна із зазначених баз може бути складальною.

*Складальні бази* — це сукупності точок, ліній, поверхонь, відносно яких орієнтуються інші деталі виробу під час його складання.

Одна й та сама деталь може мати кілька конструкторських, технологічних та інших баз. У навчальній практиці під час виконання ескізів та робочих креслень часто користуються технологічними базами, оскільки положення деталі в механізмі, як правило, не визначене.

Розглянемо найбільш загальні вимоги щодо нанесення розмірів на робочих кресленнях деталі.

Кількість розмірів на кресленні має бути мінімальною, але достатньою для виготовлення та контролю деталі. Розміри деталі, граничні відхилення та позначення шорсткості мають відповідати її стану перед складальною операцією або сумісною обробкою однієї деталі з іншою. Якщо який-небудь елемент деталі виготовляють у процесі складання або сумісного оброблення, то розміри цього елемента на робочому кресленні не наносять.

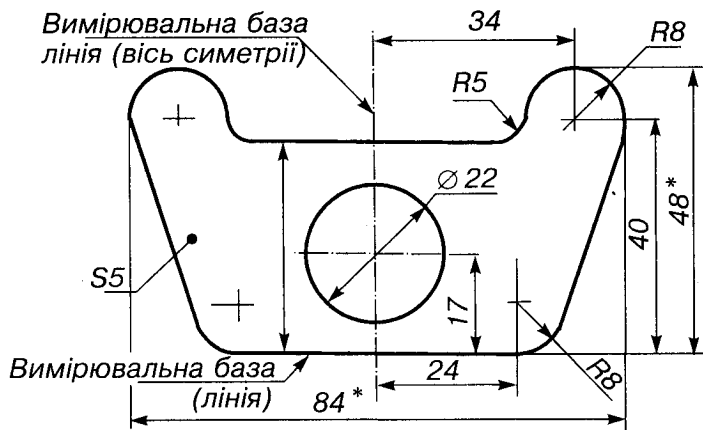
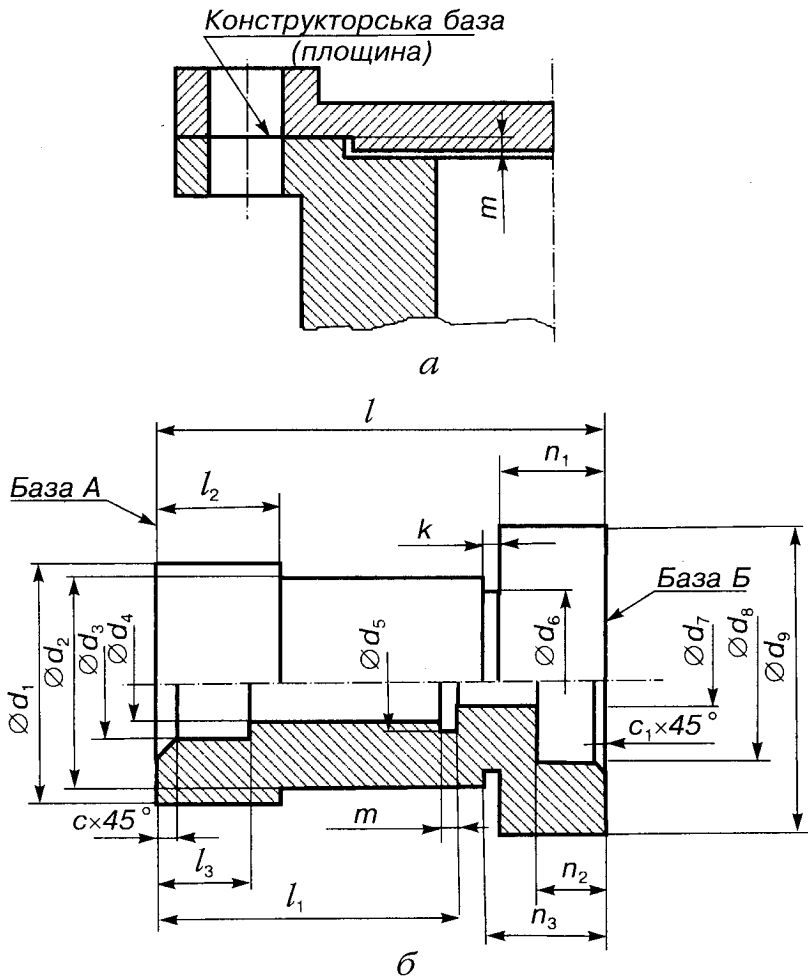
Усі розміри на кресленні мають відповідати ГОСТ 2.307—68. Кожний розмір наносять лише один раз і в тому місці, де він найповніше підкреслює форму деталі чи її елемента. Якщо розміри стосуються одного й того самого конструктивного елемента (канавка, ребро, отвір тощо), то їх наносять в одному місці, де цей елемент відображено якомога повніше. Якщо деталь має кілька однакових за формою та розмірами елементів, то розмір наносять один раз (рис. 15.1, а).

Розмір кола слід ставити у вигляді діаметра, а не радіуса відповідно до його оброблення та вимірювання. Це стосується частин циліндра, що разом із сумісно оброблюваною деталлю утворюють повний циліндр (вкладиші підшипників ковзання, сухарі цангового патрона тощо).

Наносити розміри відносно невидимого контуру деталі, що зображується штриховою лінією, не рекомендується.

Розміри, що характеризують три найбільші виміри деталі (довжину, висоту, ширину), називають *габаритними*. Вони завжди є на кресленні. Необхідність нанесення цих розмірів спричинена розробкою технологічних процесів та оснащення (зокрема, розміри ливарних деталей, а також деталей, що підлягають термообробці; розміри точених деталей, оскільки вони пов'язані із застосуванням відповідних верстатів), оптимізацією процесу розкroювання деталей з листового матеріалу тощо.

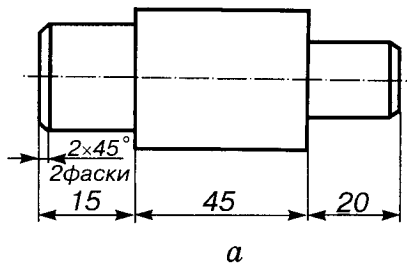
Розміри, які не виконуються за даним робочим кресленням деталі, а призначені лише для більшої зручності в користуванні кресленням, називають *довідковими*. На кресленні їх позначають знаком \*. Якщо такі



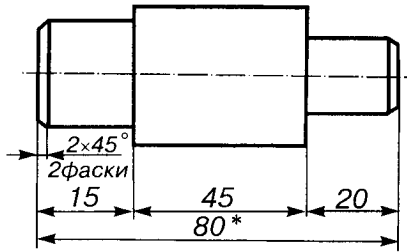
\* Розміри для довідок

*в*

Рис. 15.1

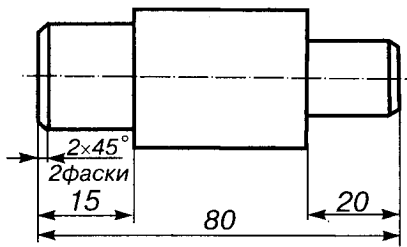


*a*



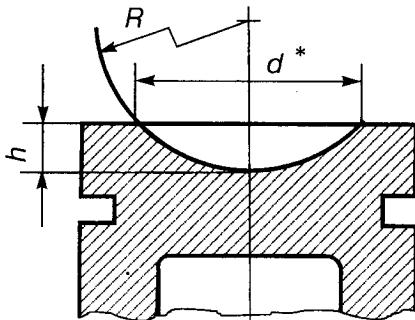
\* Розміри для довідок

*б*



*в*

Рис. 15.2



\* Розміри для довідок

Рис. 15.3

розміри  $\epsilon$ , то у технічних вимогах записують “\* Розміри для довідок” (рис. 15.2, б).

До довідкових розмірів, зокрема, належать:

а) один з розмірів замкненого розмірного ланцюга (рис. 15.2, а);

б) розміри деталей або їхніх елементів із сортового, фасонного, листового прокату, якщо ці розміри повністю визначені записом у відповідній графі основного напису;

в) один з розмірів, пов’язаних певною функціональною залежністю (рис. 15.3).

Якщо розміру для довідок немає, то наносити розміри ланцюгом не можна (див. рис. 15.2, б), бо це призведе до завищених вимог щодо точності виконання розмірів і вартості виготовлення деталі. Рекомендується наносити розміри так, як показано на рис. 15.2, в. Взагалі лінійні розміри слід наносити за ГОСТ 2.307—68 та ГОСТ 6636—69. Є три способи нанесення розмірів на кресленнях: ланцюговий, координатний та комбінований.

Ланцюговий спосіб полягає в послідовному розміщенні розмірів — ланцюгом (рис. 15.4, а). При цьому ставлять габаритний розмір, а остаточний розмір ланцюга опускають.

Координатний спосіб полягає в нанесенні розмірів від бази так, що кожен розмір є координатою елемента відносно бази (рис. 15.4, б). Цей спосіб переважає на практиці.

Комбінований спосіб об’єднує ланцюговий і координатний способи (рис. 15.4, в).

З нанесенням розмірів тісно пов’язані центрові та осьові лінії на зображеннях. Осьові лінії часто є також вимірювальними базами. За допомогою їх координують елементи деталі, що мають площину або вісь симетрії. Відстань центрових ліній від баз координують положення центра отвору чи іншого елемента, якого стосуються ці лінії. Якщо деталь має кілька циліндричних отворів і на одній з проєкцій центри кіл цих отворів розміщені на спільному колі, то однією з центрових ліній отворів вважають це коло, а другу центрову — радіальною лінією, що сполучає центр отвору з центром кола (див. рис. 13.20, рис. 13.30, рис. 13.31).

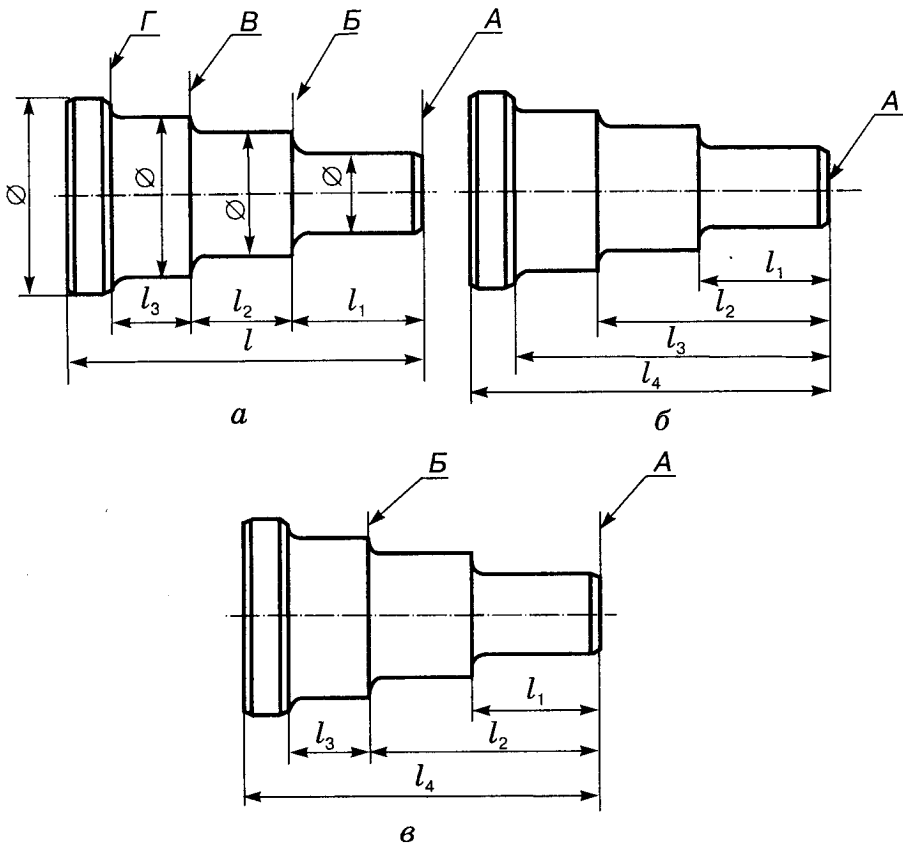


Рис. 15.4

#### 15.4. Технологічні особливості конструкцій деталей машин

Конструкція будь-якої деталі в машинобудуванні має відповідати трьом вимогам: бути конструктивно обґрунтованою, технічно здійсненою та економічно доцільною. *Технологічність деталі* — це цілий комплекс конструктивних особливостей, що залежать від форми, засобів виробництва, рівня автоматизації тощо. Її характеризують такі чинники:

1. Найпростіша форма деталі, що має поверхні обертання та площини, які не вимагають великих затрат на обробку. Слід уникати кривих поверхонь та складних форм, для оброблення яких потрібне спеціальне устаткування.

2. Мінімальний обсяг механічних робіт під час обробки поверхонь деталі.

3. Конструкція деталі має протистояти деформаціям при силових та швидкісних

режимах обробки, а також при її експлуатації.

4. Мінімально можливий рівень вимог до точності спряжених розмірів, шорсткості поверхонь тощо.

Ці чинники враховують при виконанні таких вимог:

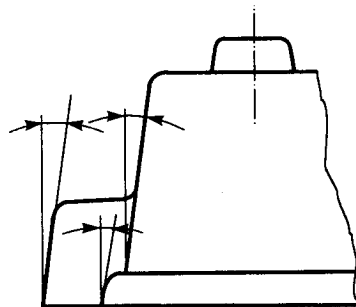


Рис. 15.5

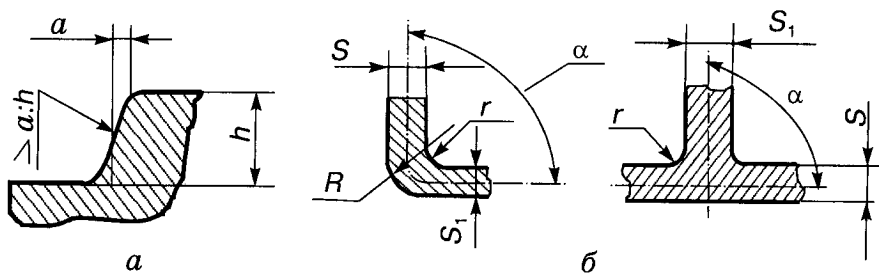


Рис. 15.6

1. Деталі, що виготовляються литвом, повинні мати ливарні похили (рис. 15.5). Один з варіантів регламентації величини цих похилів показано на рис. 15.6, а: якщо  $h < 25$  мм, то  $\frac{a}{h} = \frac{1}{5}$ , якщо  $h = 25 \dots 500$  мм, то  $\frac{a}{h} = \frac{1}{10} \dots \frac{1}{20}$ .

2. Щоб уникнути зайвих внутрішніх напружень і ливарних дефектів, треба здійс-

нювати плавний перехід від однієї поверхні до іншої, так звані галтелі (рис. 15.6, б):  $S \leq 1,25S_1$ ,  $\alpha = 75 \dots 105^\circ$ ,  $R = r + S_1 \approx 0,8S_1$  (для сталі),  $r \approx 0,5S_1$  (для чавуну).

3. Фланці мають бути більшої товщини, ніж основні стінки деталі. Між ними треба здійснювати перехід згідно з п. 2 (рис. 15.7, а).

4. Поверхні, що слід обробити, підіймають над необроблюваними і, якщо можна, то розміщують їх на одному рівні (рис. 15.7, б, в).

5. Для поверхонь, у яких передбачається свердління отворів, виконують спеціальні бобишки, приливки, торцеві площини, перпендикулярні до осі свердла (рис. 15.8). Це підвищує точність та запобігає руйнуванню свердла.

Для деталей, що виготовляються переважно в процесі механічної обробки, слід виконувати такі вимоги:

1. Перехід між циліндричними поверхнями різних діаметрів має супроводжуватися галтелями (рис. 15.9, а, б).

2. Для забезпечення можливості складання та зручності в роботі на кінцях деталей виконують фаски (рис. 15.10). Якщо  $d < 100$  мм, то  $c = 0,05d$ ;  $a = 0,1d$ ;  $\alpha = 30^\circ$ . Якщо  $d > 100$  мм, то  $c = 0,03d$ ;  $a = 0,05d$ ;  $\alpha = 10^\circ$ . Розмір катета  $c$  вибирають за ГОСТ 10498—64. Фрагмент ряду чисел має такий вигляд: 0,25; (0,30); 0,40; (0,50); 0,60; (0,80); 1,0; (1,2); 1,6; (2,0); 2,5; (3,0); 4,0; (5,0) і т. д. (розміри, зазначені в дужках, застосовувати не рекомендується).

3. Для забезпечення нормального шліфування на поверхні передбачаються канавки для виходу шліфувального круга: шліфування по циліндру (рис. 15.11, а, в); шліфування по торцю (рис. 15.11, б, г); шліфування по торцю й циліндру (рис. 15.11, д, е). Якщо  $d = 10 \dots 50$  мм, то  $b = 3$  мм;  $d_1 = d - 0,5$  мм;

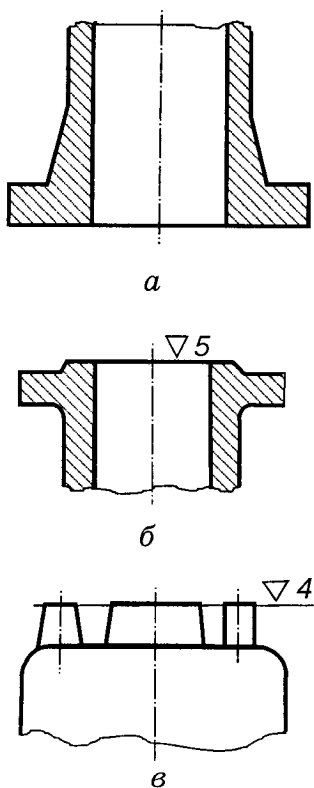


Рис. 15.7

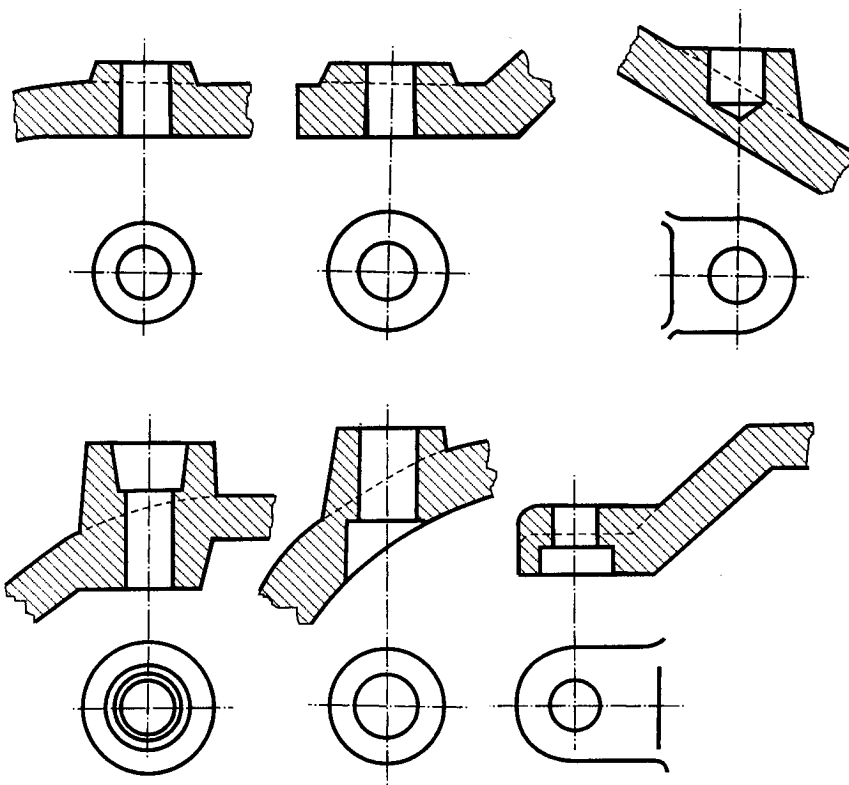


Рис. 15.8

*Радіуси заокруглень для вільних поверхонь деталей*

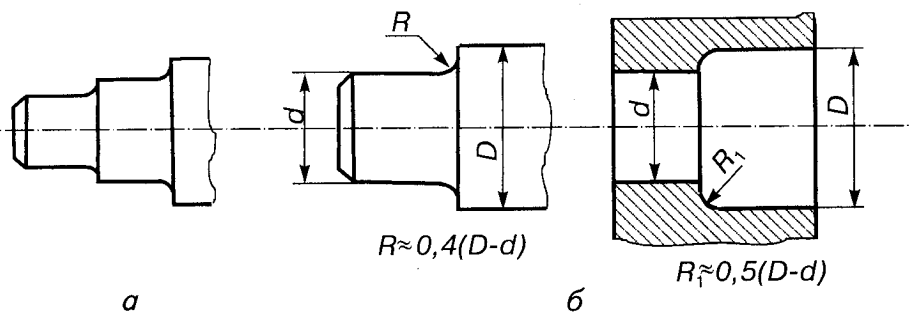


Рис. 15.9

$d_2 = d + 0,5$  мм;  $h = 0,25$  мм;  $R = 1$  мм;  $R_1 = 0,5$  мм. Якщо  $d = 50 \dots 100$  мм, то  $b = 5$  мм;  $d_1 = d - 1$  мм;  $d_2 = d + 1$  мм;  $h = 0,5$  мм;  $R = 1,5$  мм;  $R_1 = 0,5$  мм.

Це саме стосується й канавок для виходу різьбонарізувального інструменту (проточок), параметри яких для метричної

різьби вибирають за ГОСТ 10549—80 (рис. 15.12).

4. Для вдосконалення технологічного процесу виготовлення та контролю в деталях типу вал, вісь тощо роблять центрові отвори (рис. 15.13):  $D \approx 0,7D_0$ ;  $d = 0,25D_0$ ;  $l = 0,3D_0$ ;  $L = 0,7D_0$ ;  $a \approx 1 \dots 2$  мм. На крес-



Фаски і скоси деталей, що оброблюються

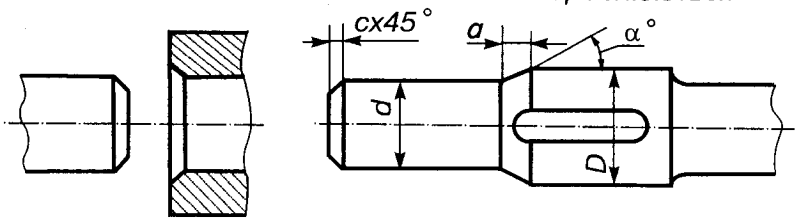


Рис. 15.10

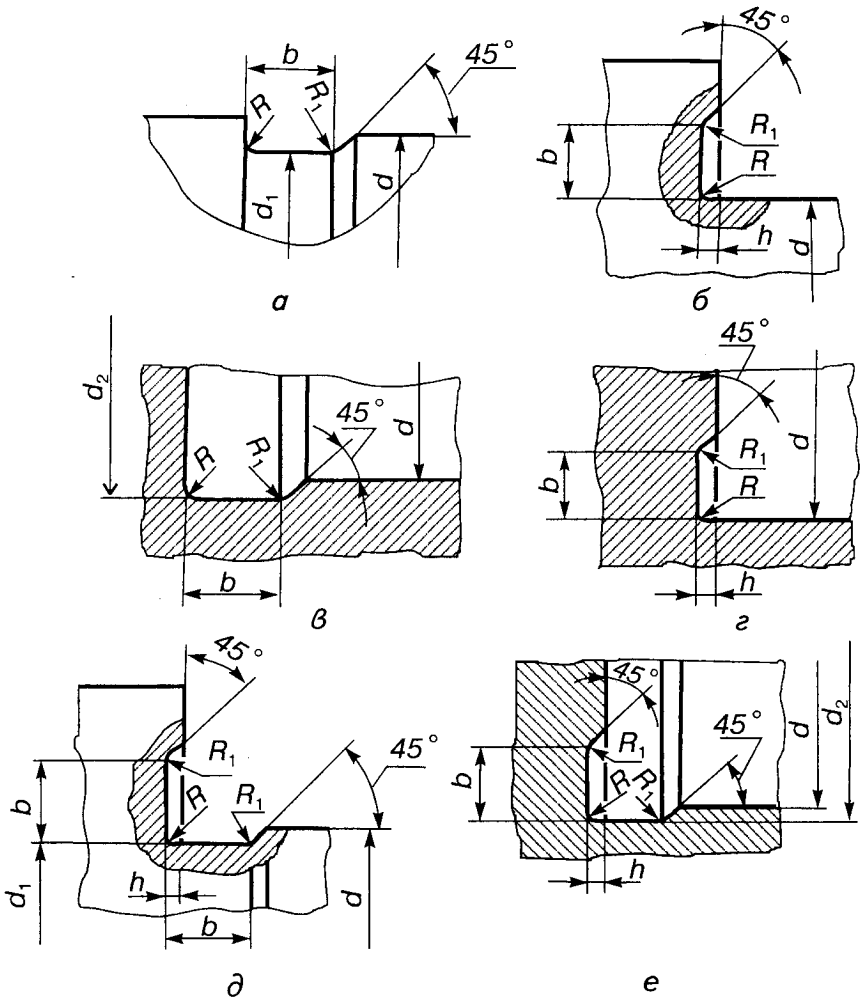


Рис. 15.11

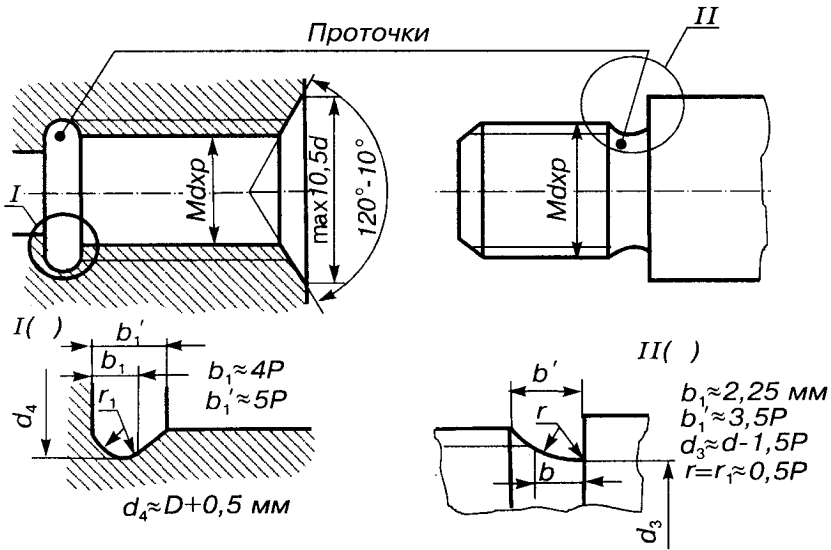


Рис. 15.12

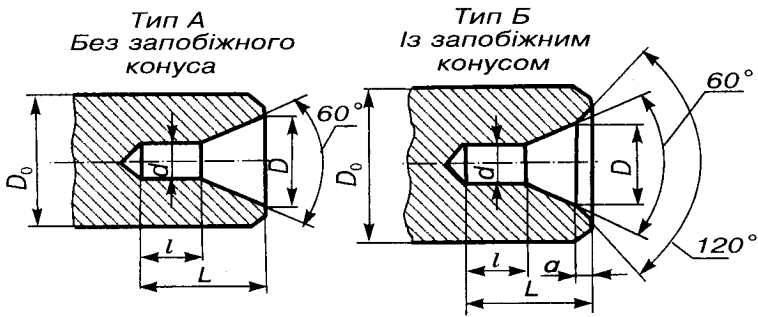


Рис. 15.13

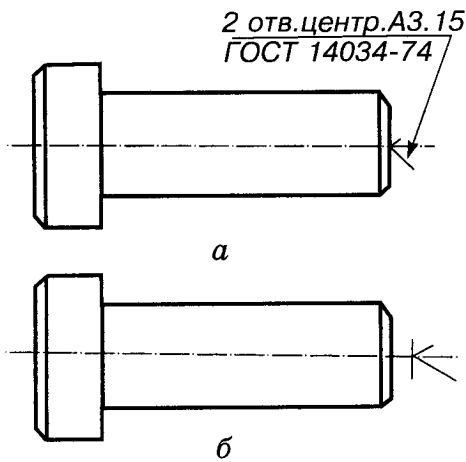


Рис. 15.14

ленні їх позначають умовним знаком (рис. 15.14, а). Якщо центрові отвори недопустимі, то це показують знаком, наведеним на рис. 15.14, б.

Усі ці особливості слід враховувати, виконуючи робочі креслення та ескізи деталей.

### 15.5. Вибір та позначення матеріалів на робочих кресленнях

Вибір матеріалу є важливим процесом при конструюванні деталі. Він здійснюється з урахуванням властивостей матеріалу, умов роботи деталі (середовище, вид навантаження, довговічність роботи тощо), можливостей її виготовлення, вартості деталі тощо.

Позначення матеріалу містить вид матеріалу, його марку та стандарт, що регламентує властивості цього матеріалу.

Нижче наведено найбільш поширені види матеріалів та їхні марки.

Ч а в у н и поділяють на сірі, ковкі, високоміцні та ін. Найбільш поширеними є вилівки з сірого чавуну марок 10, 15, 18, 20, 25, 30, 35 (ГОСТ 1412—85). Чим більше число, тим міцніший чавун на розтягання та згинання.

Приклад позначення: СЧ 25 ГОСТ 1412—85.

Для навантажуваних деталей складної конфігурації застосовують високоміцні чавуни марок 35...100 (ГОСТ 7293—85).

Приклад позначення: ВЧ 50 ГОСТ 7293—85.

Ковкий чавун застосовують для деталей, що піддаються динамічним навантаженням. Ці чавуни бувають двох видів (ГОСТ 1215—79): феритовий (Ф) марок 30—6, 33—8 і т. д. та перлітовий (П) марок 45—7, 50—5 і т. д. Перше число означає граничне напруження на розтягання (у кілограмах на квадратний міліметр), друге — відносно подовження (у відсотках).

Приклади позначення: КЧ 30—6 ГОСТ 1215—79; КЧ 60—3П ГОСТ 1215—79.

С т а л ь за хімічним складом поділяють на вуглецеву та леговану, а за призначенням — на конструкційну, інструментальну та спеціальну.

Сталь вуглецеву звичайної якості (ДСТУ 2651—94) виготовляють семи марок — 0...6 (чим більше число, тим сталь твердіша, але більш крихка) і трьох груп: А — що постав-

ляється за механічними властивостями, Б — за хімічним складом, В — за механічними властивостями та хімічним складом. Групи поділяють на категорії — 1...6. Сталі всіх марок і груп, крім марки 0, залежно від ступеня розкислення виплавляють киплячою (кп), напівспокійною (пс) і спокійною (сп).

Приклади позначення: Ст3пс ДСТУ 2651—94 — сталь групи А (не показують), марки 3, категорії 1 (не показують), напівспокійна; БСт5кп3 ДСТУ 2651—94 — група Б, марка 5, кипляча, категорії 3.

Позначення без зазначення групи, ступеня розкислення та категорії застосовують тоді, коли умови не вимагають якісної характеристики сталі.

Із сталі марок 0 і 1 виготовляють малонавантажувані деталі (кожухи, труби); із сталі Ст3 — прокат, гайки, шайби; із сталі Ст5 та Ст6 — деталі, що витримують велике навантаження (заклепки, шпонки, вали, зубчасті колеса).

Сталь вуглецеву якісну конструкційну виготовляють за ГОСТ 1050—88 з гарантованим хімічним складом та механічними властивостями марок 08, 10, 15, 20...60. Тут число означає вміст вуглецю в сотих частках відсотка.

Приклад позначення: Сталь 45 ГОСТ 1050—88.

Із сталі марок 10, 15, 20 виготовляють болти, гвинти, гайки; із сталі марок 45...60 — вали, шестерні та інші важливі деталі.

Ливарні сталі поділяють на три групи (ГОСТ 977—88): I — звичайного призначення; II — відповідального призначення; III — особливо відповідального призначення.

Приклад позначення: Сталь 25 Л-II ГОСТ 977—88.

А л ю м і н і є в і с п л а в и, призначені для литва, позначають АЛ1, АЛ2 і т. д.; для кування — АК1, АК2 і т. д.; оброблювані тиском — Д1, Д2 і т. д. (дюралюміній). Сплав алюмінію з кремнієм називають силуміном — СИЛ-00, СИЛ-0 і т. д.

Приклади позначення: АК9 ГОСТ 4784—74; Д16 ГОСТ 4784—74.

Б р о н з а — це сплав міді, олова та інших металів. У позначенні бронзи зміст літер такий: О — олово, Ц — цинк, С — свинець, Н — нікель, Ф — фосфор, А — алюміній, Ж — залізо, Мц — марганець. Цифри показують середній вміст елемента у відсотках.

Приклад позначення: БрОЦСНЗ-7-5-1  
ГОСТ 613—79.

Бронзи досить широко застосовуються від арматури до антифрикційних деталей та пружин.

Л а т у н ь — це сплав міді з цинком та іншими металами. Позначення містить літеру Л та цифру, що відповідає відсотковому вмісту міді.

Приклад позначення: Л65ГОСТ 15527—70.  
Якщо у сплаві є інші метали, то їх позначають так само, як і для бронзи.

Приклад позначення: ЛС59-1 ГОСТ 15527—70 (містить 59 % міді, 1 % свинцю, решта — цинк).

Із латуні виготовляють трубки, прутки, дріт.

Б а б і т — сплав олова і свинцю з міддю, сурмою та ін. Марки бабіту: Б6, Б16, Б88 та ін. Число показує відсотковий вміст олова.

Приклад позначення: Б88 ГОСТ 1320—74.  
Бабіт застосовують у вигляді заливки в підшипники ковзання як антифрикційний матеріал.

П р е с - м а т е р і а л АГ-4 застосовують для виготовлення різноманітних деталей та електроізоляції.

Приклад позначення: Прес-матеріал АГ-4В ГОСТ 20437—89.

С к л о органічне конструкційне має товщину листів 0,8...24,0 мм.

Т е к с т о л і т конструкційний випускають за ГОСТ 5—78, електротехнічний — за ГОСТ 2910—74.

Приклади позначення: Текстоліт ПТК — 40 сорт І ГОСТ 5—78 (ПТК — марка, 40 — діаметр стержня). Текстоліт А-10,0 ГОСТ 2910—74 (А — марка, 10,0 — товщина листа, мм).

Г е т и н а к с випускають для виготовлення втулок підшипників, трубок. Є сім марок гетинаксу, що використовуються залежно від вологості, температури та інших умов (ГОСТ 2718—74).

Приклад позначення: Гетинакс VI 12,0 ГОСТ 2718—74 (12,0 — товщина листа).

П а р о н і т випускають як прокладний матеріал, за ГОСТ 481—80 є сім марок, ПОН — загального призначення, ПМБ — маслобензиностійкий.

Приклад позначення: Пароніт ПОН 0,8 × 300 × 400 ГОСТ 481—80.

Крім того, випускають вініпласт (ГОСТ 9639—71) марок ВН, ВП, ВНТ; фенопласт (ГОСТ 5689—79) групи 32 марки К-21-22; фторопласт (ГОСТ 10007—80) марок: С — для спецвиробів, П — електроізоляції, О — загального призначення, Т — товстостінних виробів; поліуретан марки ПУ-1; поліетилен (ГОСТ 16388—70) марок 20306, 21006 та ін.

Приклади позначення: Фторопласт — 4П ГОСТ 10007—80; Фенопласт Э2 К-21-22 ГОСТ 5689—79.

П л а с т и н и г у м о в і (I) та г у м о т к а н и н н і (II) за ГОСТ 7338—90 — марки МС — маслостійка, МБС — маслобензиностійка.

Приклад позначення: Пластина І лист МС-М-3 × 200 × 250 ГОСТ 7338—90 (М — м'яка, 3 × 200 × 250 — розміри листа).

П о в с т ь т е х н і ч н а: тонкошерста (ГОСТ 288—72), напівгрубошерста (ГОСТ 6308—71), грубошерста (ГОСТ 6418—81).

Приклади позначення: Повсть ТС7 ГОСТ 288—72 (Т — тонкошерста, С — сальникова, 7 — товщина, мм).

Кільце СТ 75-50-7 ГОСТ 288—72 (числа — це розміри кільця, мм).

Для деталі, що виготовляють із сортового матеріалу визначеного профілю, наводять дані про сортамент (у чисельнику) та матеріал (у знаменнику) за типом:

Шестигранник  $\frac{8-h10 \text{ ГОСТ } 8560-78}{45-B-5-T \text{ ГОСТ } 1050-88}$ ,

де в чисельнику подано позначення розмірів прутка (8 — діаметр вписаного в профіль кола, h10 — поле допуску), у знаменнику — дані про матеріал прутка.

Позначення матеріалу деталі записують за стандартом у графі 3 основного напису.

## 15.6. Поняття про граничні відхилення розмірів та нанесення їх на кресленнях

Кожний розмір виготовленої деталі відхиляється від заданого (розрахункового), так званого номінального, розміру в той чи інший бік. Якщо ці відхилення не перевищують задані межі (граничні відхилення), то деталь вважається придатною. Відповідні відхилення називають *верхнім і нижнім граничними відхиленнями*, а алгебраїч-

на різниця їх — *допуском розміру*. Інтервал значень розмірів, обмежений граничними розмірами, називають *полем допуску*.

Поверхні деталі, що не стикаються у виробі чи механізмі з поверхнями інших деталей, називають *вільними*. Поверхні деталі, що стикаються з поверхнями інших деталей, називають *спряженими*. Розміри їх також називають *спряженими*.

Характер з'єднання спряжених поверхонь називають *посадкою*. Залежно від поєднання розмірів спряжених поверхонь може виникнути рухома, нерухома або перехідна посадка.

З 1983 р. діє Єдина система допусків та посадок (ЄСДП). За цією системою після позначення номінального розміру дають позначення поля допуску літерою латинського алфавіту: великою для отворів — *A, B, ..., G, H* (посадки із зазором); *I, S, ..., M, N* (для перехідних посадок); *P, R, ..., 2B, 2C* (посадок з натягом) та малою для валів — *a, b, ..., g, h* (посадки з зазором) тощо.

ЄСДП передбачає 19 квалітетів — 0; 1,0; 1,2; ..., 17, що записують після літери, наприклад *G6, H7, p8, c9*. Для поля допуску різьби записують квалітет, потім літеру: *6g, 7H*.

На рисунку розміри з граничними відхиленнями наносять за типом  $\varnothing 54 \begin{smallmatrix} +0,02 \\ -0,01 \end{smallmatrix}$ , де

відхилення записуються дрібніше, ніж номінальний розмір (але не менше ніж 2,5). При симетричних відхиленнях їх записують так само, як і розмір, наприклад,  $\varnothing 54 \pm 0,02$ .

При нанесенні розміру з полем допуску за ЄСДП його записують за типом:  $\varnothing 10h9, R54H6$ . Посадку записують відношенням полів допуску:  $\varnothing 46H9/s7$ .

Для поверхонь відносно низької точності в технічних вимогах записують: "Незазначені граничні відхилення розмірів:  $H14, h14, \pm \frac{t_2}{2}$ ".

З допусками розмірів тісно пов'язані допуски форми та розміщення поверхонь (ГОСТ 24643—81 та ГОСТ 2.308—68). За ГОСТ 2.308—68 вид допуску позначають так: — допуск прямолінійності,  $\perp$  — перпендикулярності,  $\parallel$  — паралельності,  $\circ$  — круглості,  $\odot$  — співвісності,  $/\circ/$  — циліндричності,  $\equiv$  — симетричності,  $\sphericalangle$  — радіального або торцевого биття (сумарний допуск форми та розміщення).

Дані про відхилення форми та розміщення поверхонь наводять у прямокутній рамці, поділеній на дві частини або більше. У першій частині записують знак допуску, в другій — числове значення в міліметрах, яке беруть з відповідних таблиць ГОСТ 24643—81, а у третій — позначення бази (рис. 15.15). Шрифт цифр і літер такий самий, як і розмірних чисел. Рамку сполучають з відповідним елементом тонкою суцільною лінією, що закінчується стрілкою. Якщо допуск стосується осі поверхні або площини симетрії, то лінія сполучення має бути продовженням розмірної (див. рис. 15.15). Перед числовим значенням допуску записують знак діаметра, якщо кругове поле допуску позначають діаметром; знак *R*, якщо поле допуску позначають його радіусом; знак *T*, якщо поле допуску симетричності позначають в діаметральному виразі, і знак  $T/2$  в радіусному виразі.

Якщо допуски форми та розміщення поверхонь не зазначені на кресленні, то їх вибирають у межах поля допуску розміру самого елемента.

Числові значення відхилень розміщення поверхонь та сумарні вибирають з таблиць ГОСТ 25069—81.

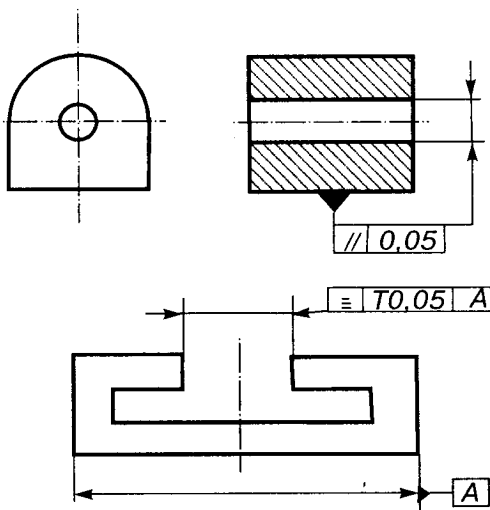


Рис. 15.15

## 15.7. Позначення шорсткості поверхні, покриття, термічної та іншої обробки деталі

Кожна реальна поверхня не є абсолютно гладкою. Вона містить мікронерівності, сліди механічної обробки тощо, від яких залежить надійність та довговічність роботи з'єднання. Характеристикою мікрогеометрії поверхні є її шорсткість. ГОСТ 2789—73 встановлює шість параметрів оцінки якості поверхні, основними серед яких є:

1) середнє арифметичне відхилення профілю (символ  $R_a$ ), що визначається як середнє арифметичне значення ординат  $y_i$  (рис. 15.16) деякої кількості точок на базовій довжині  $L$ :

$$R_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i|;$$

2) середня висота нерівностей по 10 точках (символ  $R_z$ ). Це сума середніх абсолютних значень висот п'яти найбільших виступів та глибини п'яти найбільших западин профілю в інтервалі базової довжини (див. рис. 15.16):

$$\begin{aligned} R_z &= \frac{1}{5} \left( \sum_{i=1}^5 |H_{i\max}| + \sum_{i=1}^5 |H_{i\min}| \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( \sum_{i=1}^5 h_{i\max} - \sum_{i=1}^5 h_{i\min} \right). \end{aligned}$$

На практиці здебільшого користуються параметром  $R_a$ , не позначаючи його на кресленнях. У табл. 15.1 подано наближені значення параметрів  $R_a$  та  $R_z$  для поверхонь різноманітних виробів. На кресленнях

рекомендується користуватися значеннями параметра  $R_a$  в інтервалі 0,010...5, а параметра  $R_z$  — в інтервалах 0,025...0,1 і 10...320. При цьому віддають перевагу значенням 400; 200; 100; 50; 25; 12,5; 6,3; 3,2; 1,6; 0,8; 0,4; 0,2; 0,1; 0,05; 0,025; 0,012.

Правила позначення шорсткості поверхні на кресленнях регламентує ГОСТ 2.309—73. Застосовують знаки трьох видів (рис. 15.17) для таких випадків:

а) вид обробки поверхні конструктор не встановлює (рис. 15.17, а);

б) поверхня має бути створена зняттям шару металу точенням, фрезеруванням, шліфуванням тощо (рис. 15.17, б);

в) поверхня має бути створена без зняття шару металу — литвом, прокатуванням, куванням тощо (рис. 15.17, в). Цим самим знаком позначають поверхні, що не обробляють за даним кресленням, тобто зберігають “в стані поставки”.

Висота  $h$  знака приблизно дорівнює висоті цифр розмірних чисел,  $H = (1,5...3)h$ . Товщина ліній знаків становить  $0,5s$ , де  $s$  — товщина основної лінії на кресленні.

Позначення шорсткості поверхні на кресленнях розміщують на лініях контуру, виносних лініях (якомога ближче до розмірної лінії) або на полчках ліній-виносів. Якщо не вистачає місця, то позначення шорсткості розміщують на розмірних лініях або на їхніх продовженнях, а також розривають виносні лінії (рис. 15.18). На лінії невидимого контуру наносять знак шорсткості тільки тоді, коли від цієї лінії нанесено розмір.

Знаки шорсткості, що не мають полочки, наносять відносно основного напису так, як це показано на рис. 15.19.

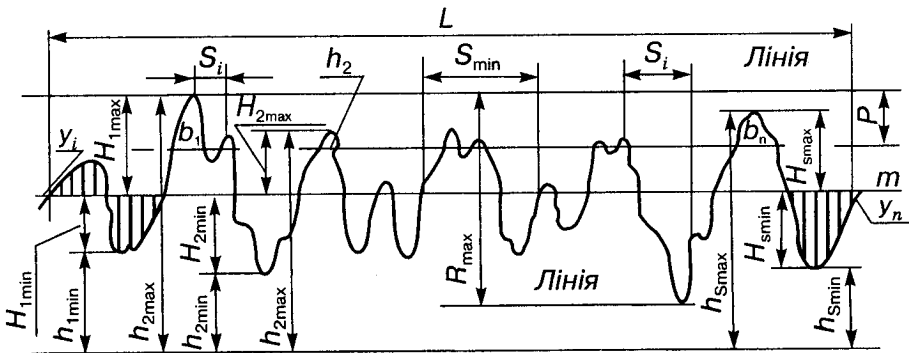


Рис. 15.16

Таблиця 15.1. Значення параметрів Ra і Rz для типових поверхонь деталей

Параметри, мкм		Базова довжина, мм	Деякі типові поверхні деталей
Ra	Rz		
80...40 40...20 20...10	320...160 160...80 80...40	8,0	Поверхні, утворені після різання на пресах та ножицях Поверхні під зварні шви. Вільні неспряжені поверхні невідповідальних деталей Опорні поверхні станин, корпусів. Болти, гайки нормальної точності, фаски, галтели, канавки
10...5 5...2,5 2,5...1,25	40...20 20...10	2,5	Болти й гайки підвищеної точності, гвинти, штифти. Поверхні отворів під болти, гвинти та шпильки діаметром до 15 мм Неробочі поверхні зубчастих коліс. Поверхні муфт, маточин, втулок, що не дотикаються до інших деталей
1,25...0,63	6,3...3,2	0,8	Зовнішні неспряжені поверхні деталей, до вигляду яких ставляться високі вимоги Поверхні сферичних опор. Посадочні поверхні зубчастих коліс, втулок, черв'яків
0,63...0,32	3,2...1,6	0,8	Робочі поверхні ходових валів. Посадочні поверхні осей, зубчастих коліс Робочі поверхні передавальних валів, центрів. Поверхні валів під підшипники кочення
0,32...0,16 0,16...0,08 0,08...0,04 0,04...0,02	1,6...0,1	0,25	Робочі поверхні колінчастих та розподільних валів швидкохідних двигунів. Робочі поверхні клапанів Шарики та ролики підшипників кочення. Внутрішні поверхні циліндрів поршневих машин Шарики та ролики високошвидкісних відповідальних передач
0,02...0,01	0,100...0,050 0,050...0,025	0,08	Вимірювальні поверхні деталей вимірювальних приладів Вимірювальні поверхні плиток. Металеві дзеркала в оптичних приладах

Якщо всі поверхні деталі мають однакову шорсткість, то її на зображеннях не наносять, а розміщують у правому верхньому куті (рис. 15.20). Розміри й товщина ліній знака та цифр мають бути приблизно в 1,5 раза більші, ніж розміри цифр на зображеннях.

Для позначення однакової шорсткості частини поверхонь деталі в правому верхньому куті поміщають знак цієї шорсткості, збільшений у 1,5 раза, та умовне позначення — знак у круглих дужках (рис. 15.21). Це означає, що всі поверхні, для яких не зазначена шорсткість або які не перебувають “у стані поставки”, повинні мати шорсткість, зазначену перед круглими дужками. Шорсткість поверхні профілю зубчастих коліс, різьби тощо, якщо ці профілі зображені, позначають за загальними правилами.

Шорсткість робочих поверхонь зубчастих коліс та шліців, якщо їхній профіль не зображено, наносять на лінії поверхні поділу або розрахункового кола (рис. 15.22, а...в).

При умовному зображенні різьби шорсткість її профілю позначають так, як показано на рис. 15.23, а, б.

Для поверхонь, що мають однакову шорсткість по контуру, застосовують знак кола діаметром 4...5 мм (рис. 15.24).

У промисловості широко застосовують різноманітні покриття (захисні, декоративні, електроізоляційні, зносостійкі та ін.). На кресленнях покриттів поверхонь деталей наносять позначення за ГОСТ 2.310—68. Позначення включають:

а) позначення поверхонь, що підлягають покриттю (стрілка з поличкою та велика літера українського алфавіту, рис. 15.25);

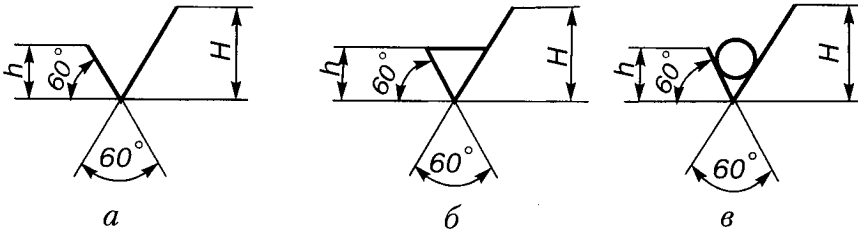


Рис. 15.17

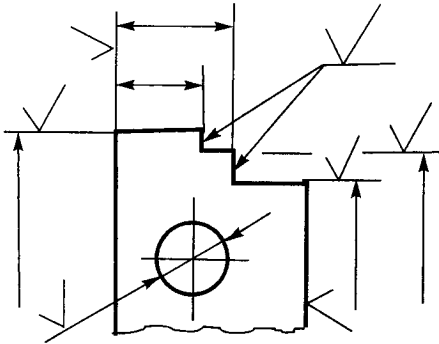


Рис. 15.18

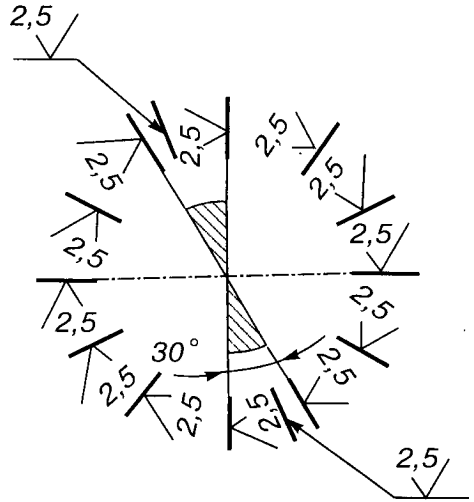


Рис. 15.19

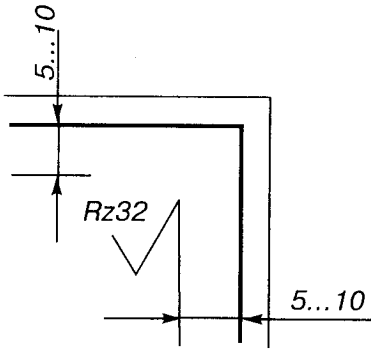


Рис. 15.20

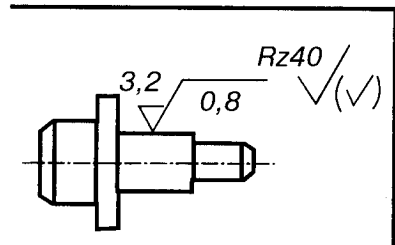


Рис. 15.21

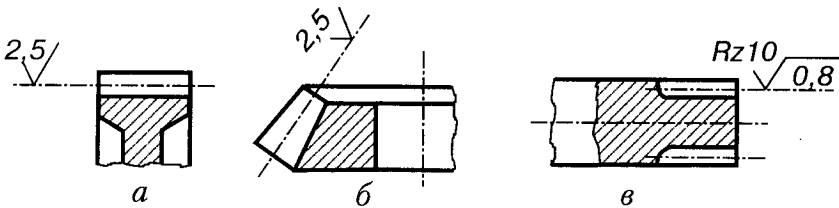
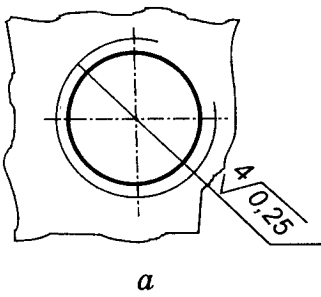
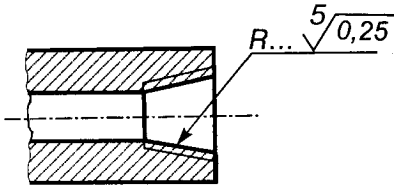


Рис. 15.22





a



б

Рис. 15.23

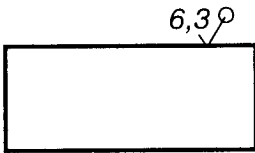


Рис. 15.24

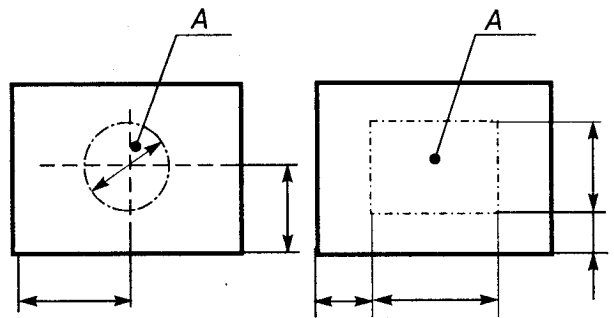


Рис. 15.26

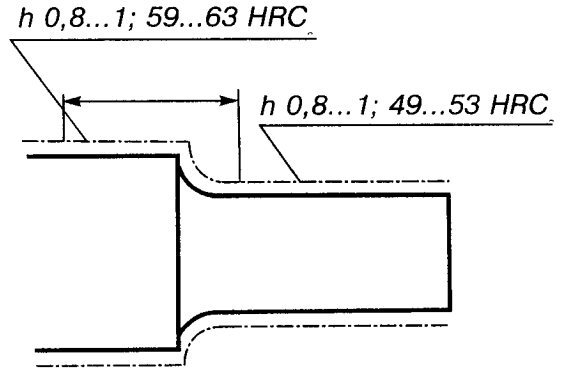


Рис. 15.27

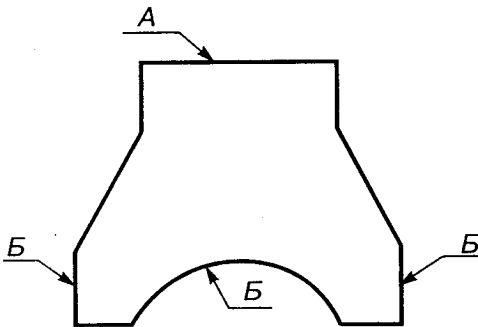


Рис. 15.25

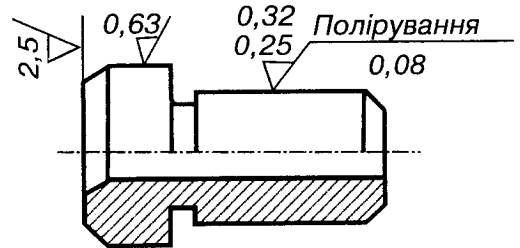


Рис. 15.28

б) запис у технічних вимогах за типом: “Покриття поверхні А... (далі йде позначення покриття)”;

“Покриття поверхні Б...”.

Якщо покриттю підлягає вся деталь, то в технічних вимогах пишуть: “Покриття...”.

Якщо покриття стосується лише деяких ділянок поверхні, то їх виділяють штрихпунктирною потовщеною лінією і наносять

розміри форми та положення цих ділянок (рис. 15.26).

Аналогічно покриттю наносять позначення термічної та іншої обробки. При цьому наводять дані про властивості матеріалу після оброблення: твердість (HRC<sub>e</sub>, HB, HV), межу міцності  $\sigma_b$ , межу пружності  $\sigma_y$  та ін. Глибину обробки позначають літе-

рою  $h$ . Глибину та твердість наводять граничними значеннями (рис. 15.27). Дозволяється наводити вид обробки, якщо цей вид гарантує зазначені властивості (рис. 15.28). Для ділянок, що мають різні показники параметрів після оброблення, дають їхні розміри (див. рис. 15.27).

Замість позначень на зображеннях можна користуватися записом у технічних вимогах, якщо це не призведе до непорозуміння. Наприклад, "Хвостовик  $h = 0,8...1,0$ ; 48...52 HRC<sub>e</sub> і 40...45 HRC<sub>e</sub>, крім поверхні А" тощо.

### 15.8. Написи та технічні вимоги на робочих кресленнях

Правила нанесення на кресленнях написів технічних вимог і таблиць регламентує ГОСТ 2.316—68, за яким написи наводять тоді, коли відомості, що мають бути на кресленні, неможливо або недоцільно виражати умовними позначеннями.

Написи виконують на поличці лінії-виноски, яка розміщується, як правило, горизонтально. Лінія-виноска закінчується точкою, якщо лінія починається з невиродженої проєкції поверхні, або стрілкою, коли лінія починається від лінії видимого чи невидимого контуру (рис. 15.29), а також від ліній, що позначають поверхні (див. рис. 15.27, рис. 15.30).

Написи, що стосуються безпосередньо зображення, мають містити не більше двох рядків, що розміщуються над поличкою лінії-виноски та під нею (рис. 15.30, а, б).

Розмір шрифту літерних позначень (зображень, поверхонь, баз тощо) має бути приблизно вдвічі більшим від висоти цифр розмірних чисел на даному кресленні.

Таблиці виконують за ГОСТ 2.105—95. Їх розміщують на вільному полі креслення справа від зображення, якого вони стосуються, крім випадку, коли форми таблиць і розміщення їх регламентуються відповідним стандартом на виробі (зубчасті колеса, черв'яки тощо).

Кожне робоче креслення, як правило, має технічні вимоги, які розміщують над основним написом на першому аркуші креслення незалежно від кількості аркушів. Між технічними вимогами (ТВ) та основним написом не повинно бути ніяких зоб-

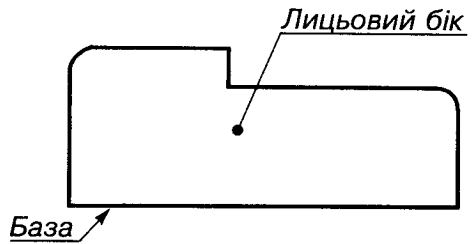


Рис. 15.29

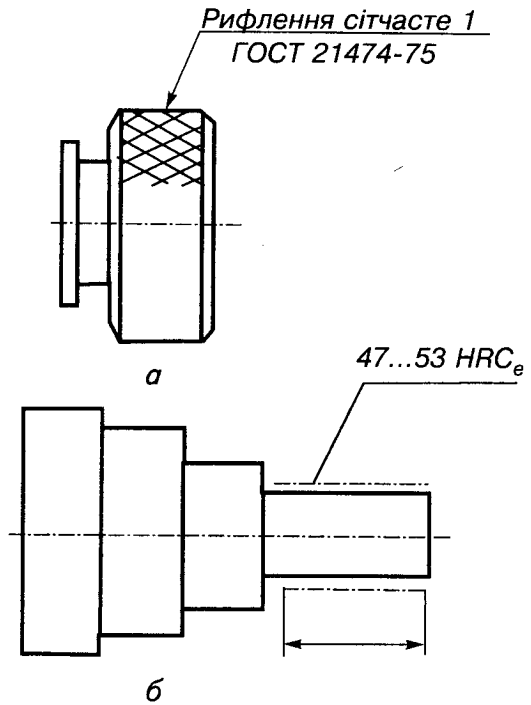


Рис. 15.30

ражень, таблиць тощо. Якщо ТВ не вміщаються над основним написом, то їх продовжують зліва від нього, відділивши колонку завширшки 185 мм. Нумерація пунктів має бути наскрізною, справа наліво, зверху вниз.

Близькі за змістом технічні вимоги подають на робочому кресленні як окремі пункти, бажано в такій послідовності:

а) вимоги до матеріалу, заготовки, термічної обробки, властивостей матеріалу готової деталі, вказівки щодо матеріалу-замінника;

б) розміри, граничні відхилення розмірів, форми, розміщення поверхонь, маси тощо;



- в) вимоги до якості поверхонь, вказівки щодо покриття, оздоблення тощо;
- г) зазори, розміщення окремих елементів конструкції;
- д) вимоги щодо настройки та регулювання виробу;
- е) інші вимоги до якості виробу (безшумність, вібростійкість, самогальмування тощо);
- є) умови та методи випробування;
- ж) вказівки щодо маркування та таврування;
- з) правила транспортування та зберігання;
- и) окремі умови експлуатації;
- і) посилання на інші документи, які містять технічні вимоги щодо даного виробу, але незначені на кресленні. Приклади написання ТВ стосовно конкретних деталей наведено у параграфі 15.9.

### 15.9. Приклади виконання робочих креслень деталей

На рис. 15.31...15.38 зображено робочі креслення різних типів деталей, під час виготовлення яких треба дотримуватися певних правил.

На рис. 15.31 зображено робоче креслення корпусу, виготовленого литвом. Для нього характерні плавні переходи та ливарні похили. Гострі кромки є лише в тих місцях, які піддаються механічній обробці. Це видно з регламентованої шорсткості поверхонь (насамперед площини основи), прохідних отворів  $\varnothing 9$  та  $\varnothing 13$  для кріпильних деталей, посадочного місця під підшипник та канавки під ущільнення, а також отвору  $M10 \times 1$  для маслянки. Нанесені розміри відносно основи (по висоті), осі отвору під підшипник (основна вимірювальна база), площини рознімання корпусу й кришки (по глибині), а також площини симетрії (по ширині) деталі дають змогу скласти повну розмірну модель корпусу та виготовити його. На кресленні наведено технічні вимоги, характерні для ливарних деталей, а також матеріал, з якого відливається корпус.

На рис. 15.32 зображено корпус, що виготовляється відливанням зі сталі. Для нього характерні ті самі особливості, що й для рис. 15.31, але ставляться більш жорсткі вимоги щодо привалкових поверхонь та взаємного розміщення їх. Підвищено також вимоги щодо шорсткості поверхонь.

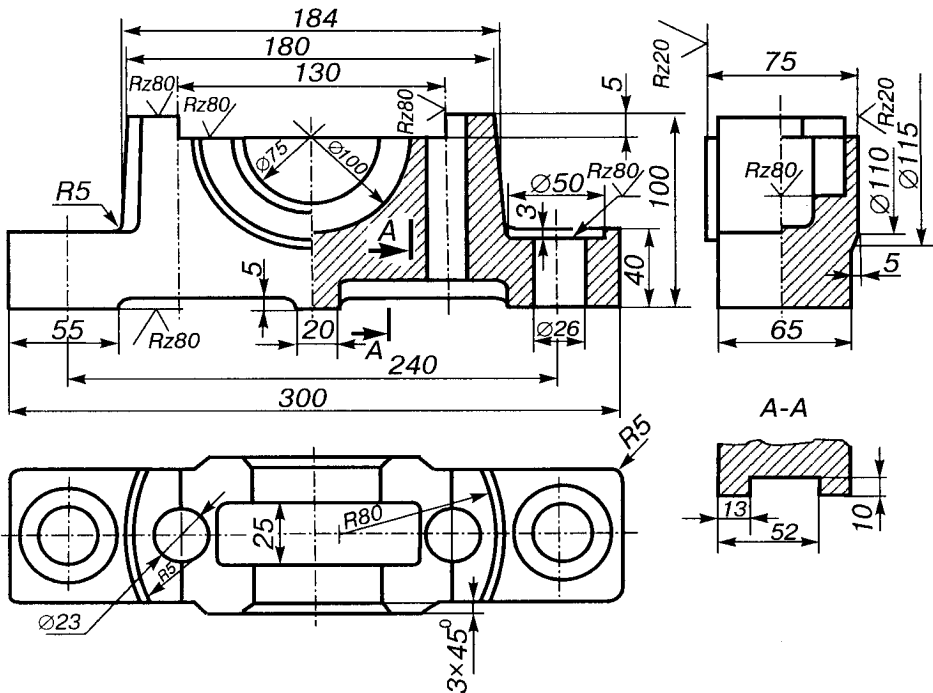
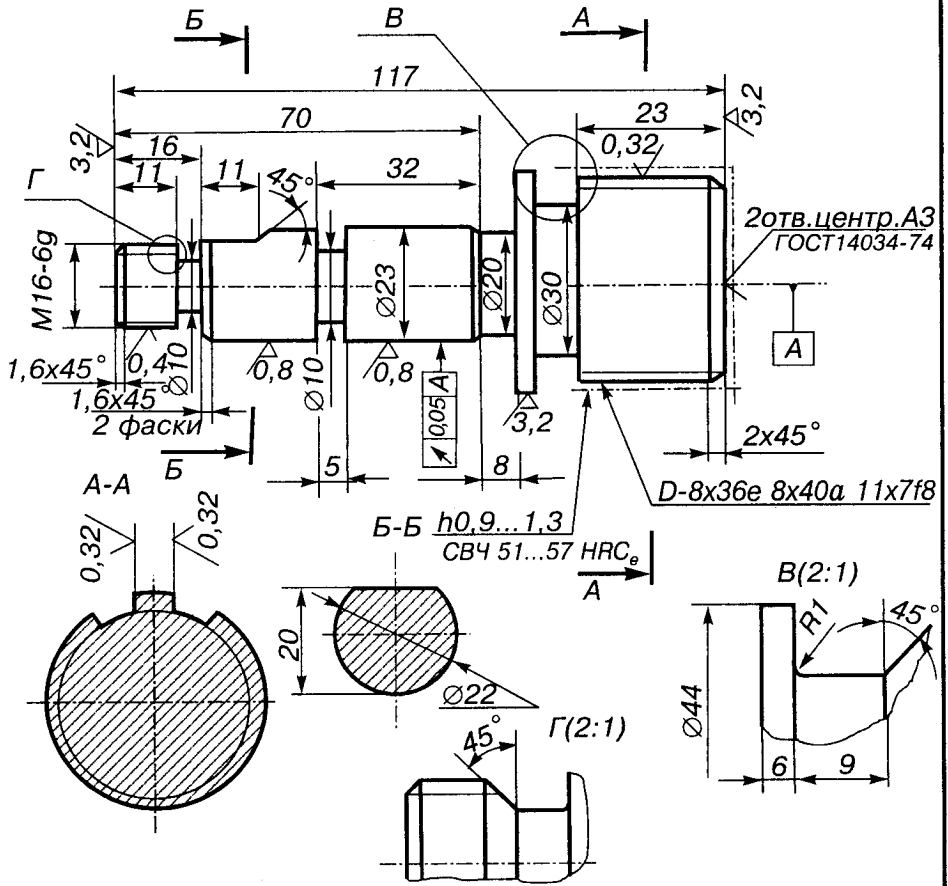


Рис. 15.32

МТ.512 502.004

12,5/√(√)



1. Матеріал-замінник - Сталь 40 ГОСТ 1050-88.
2. H14, h14, ±t/2.
3. Гострі кромки заокруглити R=0,5 мм.
- 4.\* Розміри для довідок.

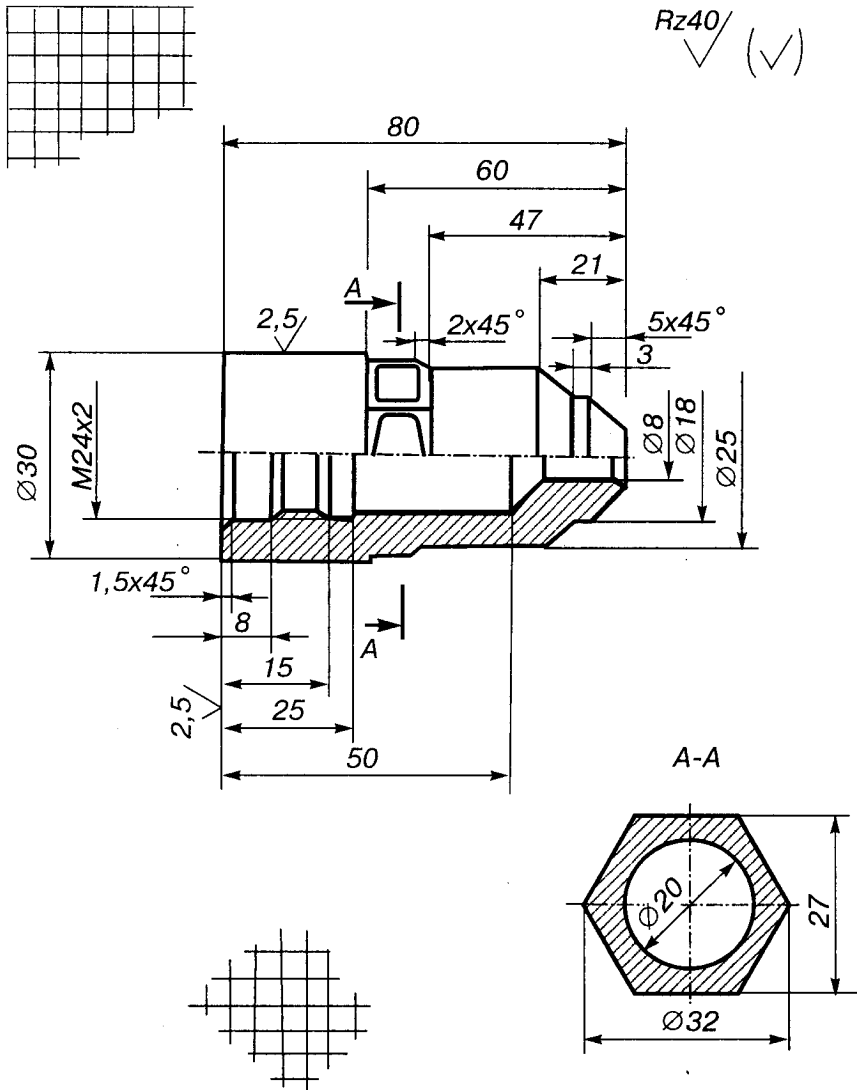
				МГР. 512 502.004			
Зм. Арк.	№ докум.	Підп.	Дата	Вал	Літера	Маса	Масшт.
Розроб.							1:1
Перевір.					Аркуш 1	Аркушів 1	
Т.контр.					Сталь 40 ГОСТ 1050-88		
Н.контр.							
Затверд.							

Рис. 15.33

На рис. 15.33 наведено робоче креслення вала. Його виготовляють з круглого прокату на токарному верстаті в центрах. Тому головним зображенням валів, як правило, є вигляд спереду, причому вісь вала розміщують горизонтально згідно з установленням на верстаті. Для виявлення форми та розмірів окремих частин вала засто-

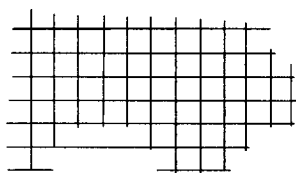
совують поперечні перерізи та виносні елементи. Технічні вимоги характерні для деталі, виготовленої точенням.

На рис. 15.34 показано деталь, виготовлену механічною обробкою сталльної заготовки. На відміну від креслення вала вісь обертання переважної більшості поверхонь деталі розміщена вертикально з метою ра-

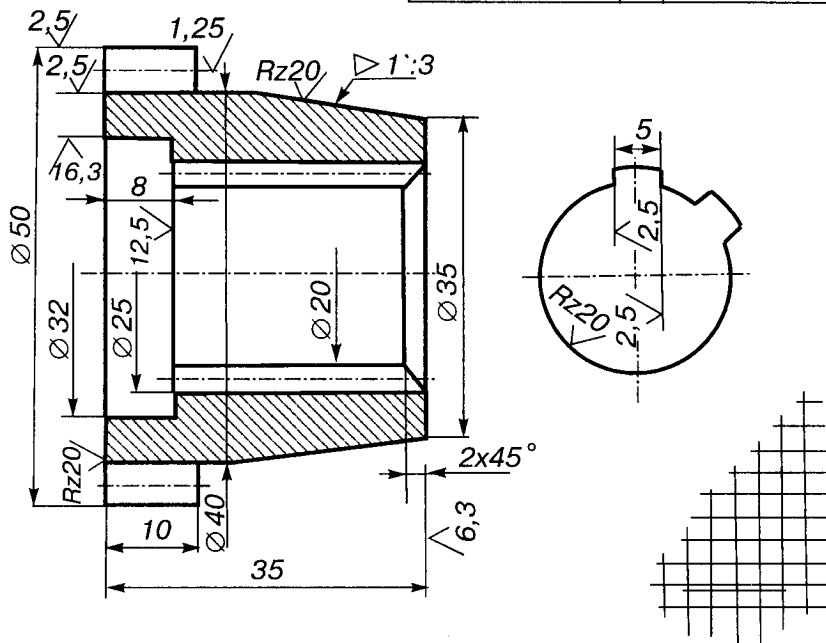


1. Матеріал-замінник - Сталь 15 ГОСТ 1050-88.
2. H14, h14,  $\pm t_z/2$ .

Рис. 15.34



Модуль	<i>m</i>	2,5
Число зубців	<i>z</i>	18
Вихідний контур	-	ГОСТ13956-74



1.  $h$  0,8...1,2 мм; 51...56 HRC<sub>e</sub>.
2. Матеріал-замінник - Сталь 45 ГОСТ 1050-88.
3. Н14,  $h_{14}$ ,  $\pm t_j/2$ .
4. Незазначені допуски форми і розташування поверхонь за ГОСТ 25069-80.

Рис. 15.35

ціонального використання поля креслення, хоча, як і раніше, основними операціями є токарні, де вісь розміщується горизонтально.

На рис. 15.35 зображено зубчасте колесо-півмуфту. Звернемо увагу на: 1) зображення зубців колеса та заповнення таблиці (виконують тільки ті рядки, що несуть суттєву інформацію про колесо); 2) проєкційний характер зображення зубців півмуфти. Користуючись умовностями та спрощеннями, можна було накреслити один зуб, а розміщення решти зубців показати осьовими лініями і супроводити написом "5 зубців".

На рис. 15.36 та 15.37, *а, б* наведено робочі креслення гвинтових пружин стискан-

ня та розтягання. Згідно з ГОСТ 2.401—68 дотримуються таких умовностей та спрощень:

1. Витки пружин на вигляді та в розрізі зображують прямими лініями, при цьому для пружин розтягання зазор між витками не показують.

2. Для пружин, що мають понад чотири витки, креслять по одному — два витки з кожного боку, не рахуючи опорних. Решту витків умовно замінюють осьовими лініями центрів перерізів витків.

3. Якщо товщина витків (на зображенні) становить 2 мм і менше, то пружини зображують умовно (ГОСТ 2.401—68).

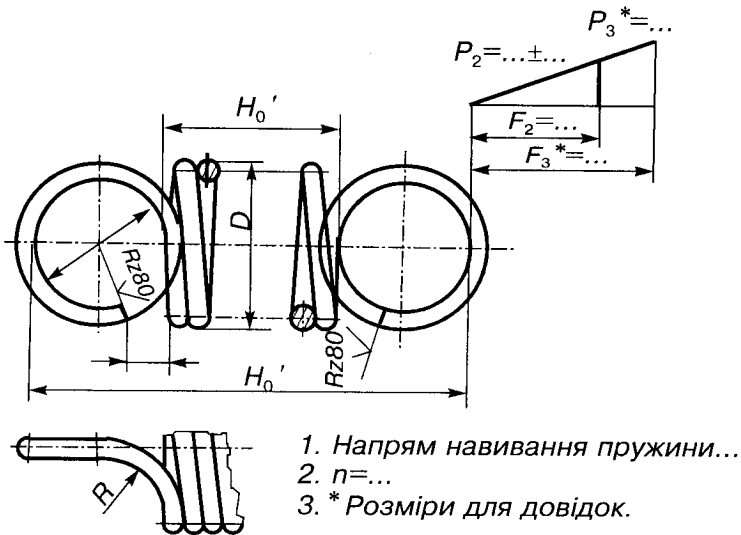


Рис. 15.36

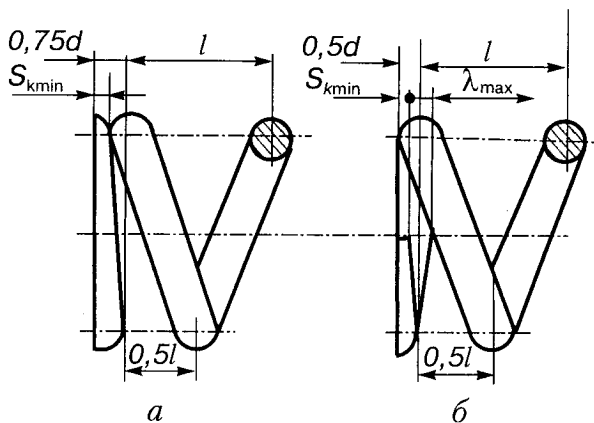


Рис. 15.37

Виконуючи робочі креслення пружин, дотримуються таких правил:

1. Пружини на головному зображенні розміщують горизонтально.

2. Зображення відповідає пружині з правим напрямом навивання. Напрямок навивання зазначають у технічних вимогах.

3. Зображення пружин супроводжують діаграмами випробування.

4. Технічні вимоги повинні мати дані про: міцність матеріалу пружини; твердість матеріалу готової пружини; довжину розгорнутої пружини; число робочих витків; повне число витків; напрям навивання; діаметр контрольної стержня або діаметр

контрольної гільзи; решту технічних вимог за нормативним документом; довжину пружини у вільному стані (розмір для довідок); характеристику пружини (зусилля або момент), якщо діаграма не наведена на зображенні.

### 15.10. Особливості, послідовність та правила виконання ескізів деталей

В умовах одиничного або тимчасового виробництва, зокрема під час виконання ремонтних робіт, широко застосовують ескізи деталей. Вони відрізняються від робочих креслень лише тим, що їх виконують



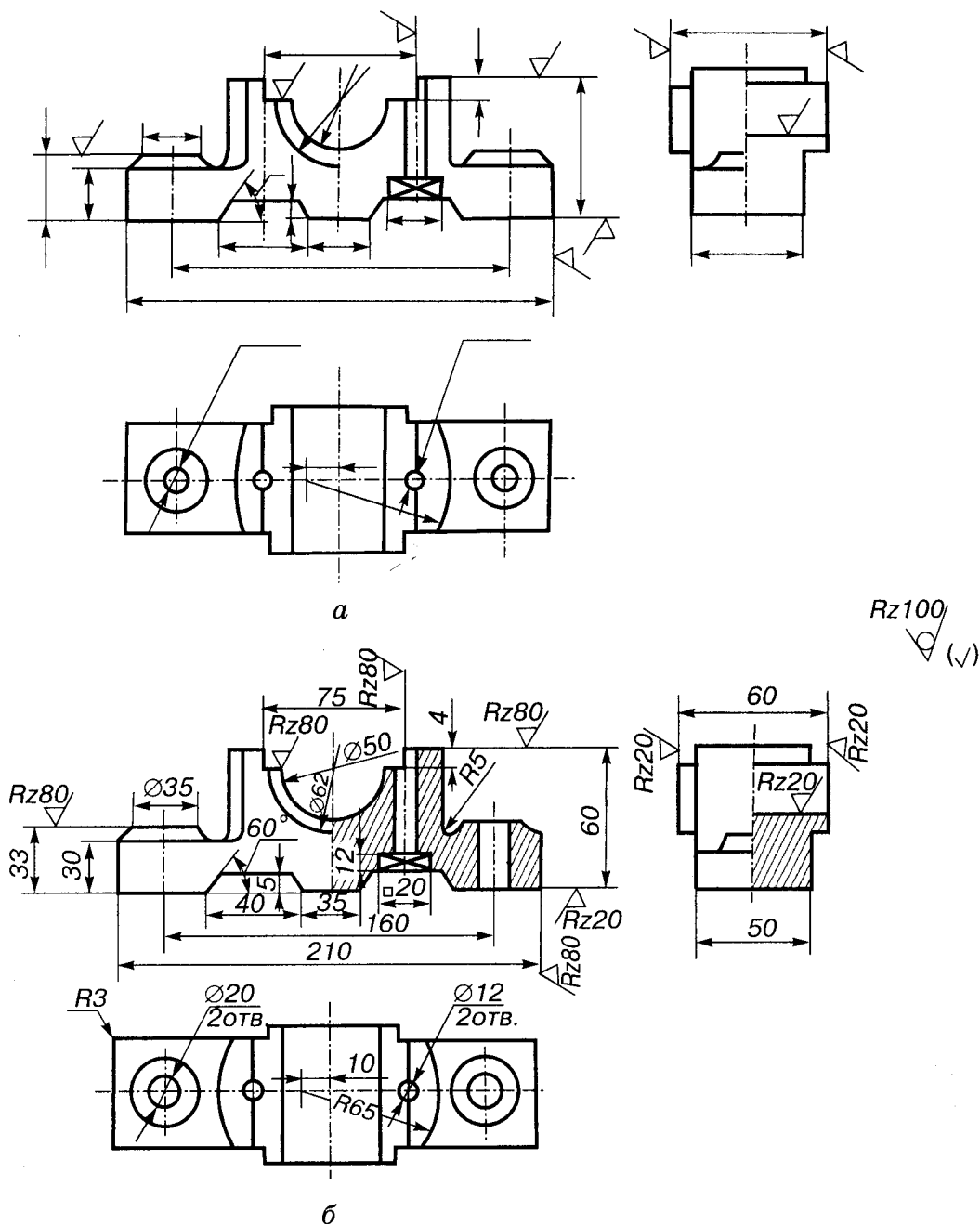


Рис. 15. 38

від руки, без застосування креслярських інструментів, з дотриманням лише пропорційності розмірів деталі, а не їх величини. Решта вимог щодо ескізів повністю збігається з аналогічними вимогами щодо робочих креслень.

У навчальних цілях ескізи деталей виконують з натури. Послідовність такого виконання становить дві стадії: підготовчу та основну.

Підготовча стадія — це ознайомлення з деталлю, її найменуванням,

призначенням, будовою, конструктивними та технологічними особливостями, матеріалом, з якого вона виготовлена. Після цього визначають головне зображення деталі (вигляд, розріз або їх поєднання), види інших зображень та їхню кількість. Головне зображення, як і в робочому кресленні, має давати якомога повну інформацію про зображувану деталь. Вибираючи його, слід також враховувати робоче положення деталі, технологію її виготовлення, наявність та розміщення технологічних, конструкторських і вимірювальних баз. Від цього залежить кількість зображень (виглядів, розрізів, перерізів, вносних елементів тощо).

Основну стадію ескізування виконують у такій послідовності:

1. Вибирають формат аркуша для виконання ескіза залежно від складності деталі, кількості та вигляду зображень, а також від того, у збільшеному або зменшеному масштабі, чи в натуральну величину виконуватимуть зображення. Ескіз виконують на папері в клітинку, щоб легше було дотримуватися проєкційного зв'язку та пропорційності розмірів елементів деталі. Від руки наносять рамку креслення, основний напис та допоміжну графу 26.

2. На полі рисунка наносять габаритні прямокутники для основних зображень, осі симетрії, осьові та центрові лінії для отворів і елементів поверхонь обертання (рис. 15.38, а). При цьому поверхню деталі розбивають на складові геометричні елементи, враховуючи взаємне розміщення їх.

3. Тонкими лініями, щоб мати змогу робити виправлення, наносять контури основних зображень відразу на всіх проєкціях. Основою побудови зображень є зображення геометричних елементів зовнішніх форм деталі.

4. Виконують необхідні розрізи, перерізи та інші види зображень, намічені в підготовчій стадії. Лінії видимого контуру наводять суцільною товстою основною лінією, лінії невидимого контуру видаляють.

5. Проводять вносні, розмірні лінії, наносять знаки шорсткості (рис. 15.38, а). Розміри наносять у такій послідовності: габаритні; положення елементів деталі; форми елементів; решта розмірів. При цьому розміри зовнішніх форм наносять з боку вигляду, а розміри внутрішніх форм — з боку розрізу.

6. Виконують штриховку в розрізах і перерізах, проводять обмір деталі, записують розмірні числа та параметри шорсткості (рис. 15.38, б).

7. Записують технічні вимоги над основним написом колонкою не ширше ніж 185 мм, роблять інші написи.

8. Заповнюють графі основного напису, звертаючи увагу на позначення матеріалу. Вид матеріалу в навчальних цілях визначають наближено, на око, а марку вибирають з відповідного стандарту згідно з функціональним призначенням деталі.

Найменування деталі має бути коротким, якщо можна, то однослівним. Записують його в називному відмінку однини. Якщо найменування містить два слова і більше, то першим записують іменник.

### Запитання та завдання

1. З чого складається робоче креслення деталі?
2. Які вимоги ставлять до зображень деталі на робочому кресленні?
3. Що таке технологічні, конструкторські та вимірювальні бази деталі?
4. Як наносять розміри при ланцюговому, координатному та комбінованому способах?
5. У чому полягає загальне правило позначення матеріалів на кресленнях? Навести приклади деяких з них.
6. Назвати місце розміщення й послідовність запису технічних вимог на робочому кресленні деталі.
7. Які розміри називають довідковими та як їх наносять на кресленні?
8. Які є параметри оцінки шорсткості поверхні деталі?
9. Якими знаками позначають шорсткість поверхні деталі? Навести приклади застосування їх.
10. Чим відрізняється ескіз деталі від її робочого креслення?



## Глава 16 З'ЄДНАННЯ ТА ПЕРЕДАЧІ

### 16.1. Класифікація з'єднань

З'єднання та передачі є основою функціонування будь-якої машини та взаємодії деталей, що входять до її складу.

З'єднання бувають рознімними та нерознімними.

**Рознімними** називають з'єднання, для яких операції складання та розбирання можливі без руйнування їхніх складових частин. З'єднання, які не можна скласти або розібрати без руйнування їхніх складових частин, називають **нерознімними**. Рознімними є різбові, шпонкові, шліцьові з'єднання. Нерознімними є зварні, заклепкові, паяні, клейові та інші з'єднання.

### 16.2. Різбові з'єднання

Різбові з'єднання є найбільш поширеними в техніці. Геометричною основою цих з'єднань є гвинтова поверхня, особливістю яких є гвинтова лінія. У різбових з'єднаннях застосовуються циліндричні та конічні гвинтові лінії, які є напрямними. Робоча по-

верхня гвинта утворюється переміщенням профілю різьби як її твірної лінії вздовж гвинтової лінії.

**Гвинтом** називають сукупність циліндра чи конуса з одержаною таким чином поверхнею різьби.

**Класифікація та параметри різьби.** **Різьбою** називають один або кілька рівномірно розміщених гвинтових виступів сталого перерізу, утворених на боковій поверхні прямого кругового циліндра або прямого кругового конуса (ГОСТ 11708—82).

Зовнішні різьби виконують нарізанням гвинтових поверхонь на циліндричних або конічних стержнях. Внутрішні різьби виконують нарізанням гвинтових поверхонь у циліндричних або конічних отворах. При цьому утворюється ділянка різьби з неповним профілем, так званий **збіг різьби** (рис. 16.1, а). Якщо, крім того, існують такі конструктивні особливості нарізання різьби, що інструмент не може дійти до кінця, натикаючись на перешкоду, то з'являється так званий **недовод різьби**. Збіг різьби плюс недовод називають **недорізом різьби** (рис. 16.1,

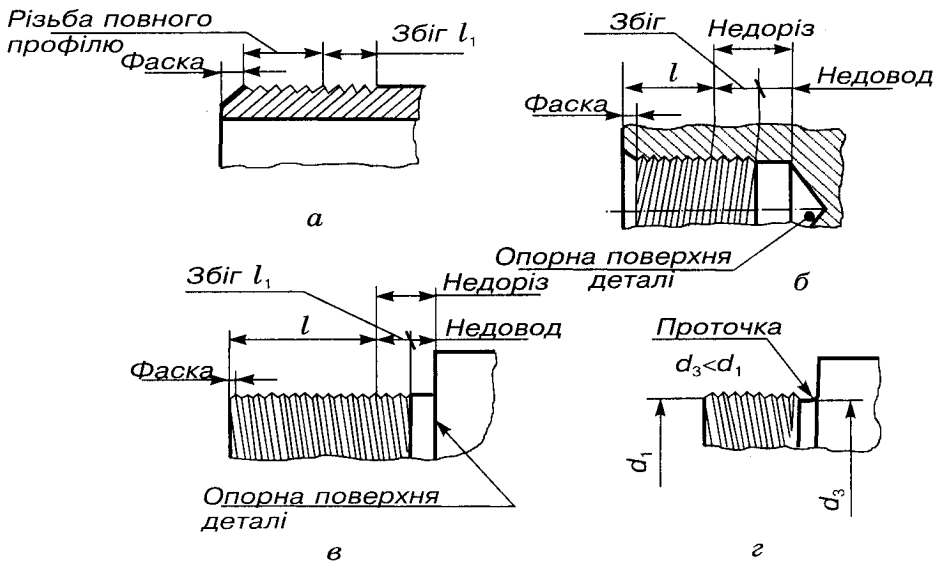


Рис. 16.1

б, в). Якщо треба виконати різьбу повного профілю на всій довжині, то для виведення різьбонарізного інструмента виконують проточку (рис. 16.1, з; рис. 16.2).

Для полегшення процесів нарізання різьби та з'єднання на початку стержня або отвору виконують фаску (рис. 16.1; рис. 16.2).

Розміри фасок, збігів, недорізів і проточок регламентує ГОСТ 10549—80.

**Довжина різьби** — це довжина ділянки деталі, де нарізана різьба, включаючи збіг і фаску. На кресленнях звичайно зображують тільки ділянку з повним профілем. Якщо є проточка, то її ширину включають у довжину різьби.

Залежно від напрямку гвинтової лінії різьби поділяють на праві та ліві. У техніці застосовують в основному праві різьби.

За числом ходів, тобто за кількістю напрямних гвинтових ліній, різьби бувають одно- та багатоходовими.

Залежно від виду профілю розрізняють такі різьби: трикутну — метричну з кутом при вершині  $60^\circ$  (рис. 16.3, а) або дюймову з кутом  $55^\circ$ ; трапецеїдальну (рис. 16.3, б), зокрема, упорну, круглу, прямокутну (рис. 16.3, в, г), та ін.

За призначенням різьби поділяють на кріпильні, ходові та спеціальні.

Циліндричну різьбу характеризують такі параметри:

1. Зовнішній діаметр, який дорівнює діаметру умовного циліндра, що містить вершини зовнішньої різьби або западини внутрішньої різьби.

2. Внутрішній діаметр.

3. Середній діаметр різьби — це діаметр умовного циліндра, вздовж твірних якого ширина виступу профілю дорівнює ширині западини.

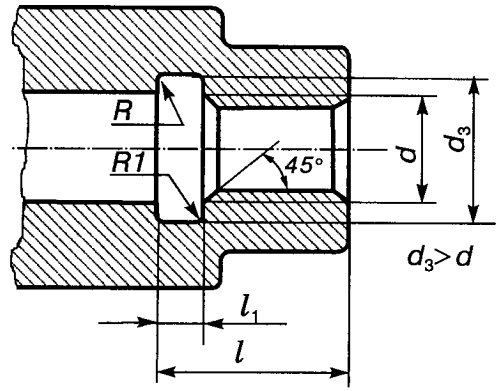


Рис. 16.2

4. Крок різьби  $p$  — це виміряна паралельно осі різьби відстань між відповідними точками двох сусідніх витків.

5. Хід різьби  $t$  — це виміряна паралельно осі різьби відстань між відповідними точками на одній гвинтовій поверхні за один оберт профілю. Хід різьби дорівнює відстані переміщення гайки за один повний оберт. Для одноходової різьби  $t = p$ , для багатоходової  $t = np$ , де  $n$  — число ходів.

6. Кут профілю різьби  $\alpha$  — кут між бічними сторонами профілю.

7. Висота вихідного профілю дорівнює  $H$ .

8. Висота робочого профілю  $H_1$  — відстань між вершиною та западиною профілю в напрямі, перпендикулярному до осі різьби.

Номінальні значення зовнішнього, внутрішнього та середнього діаметрів мають відповідати ГОСТ 24705—81.

На рис. 16.4 зображено переріз з'єднання трикутною метричною різьбою з відповідними позначеннями параметрів з'єднання. Тут  $d$  — зовнішній ді-

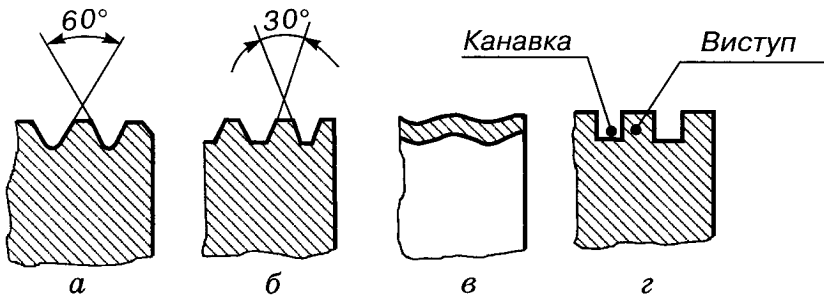


Рис. 16.3

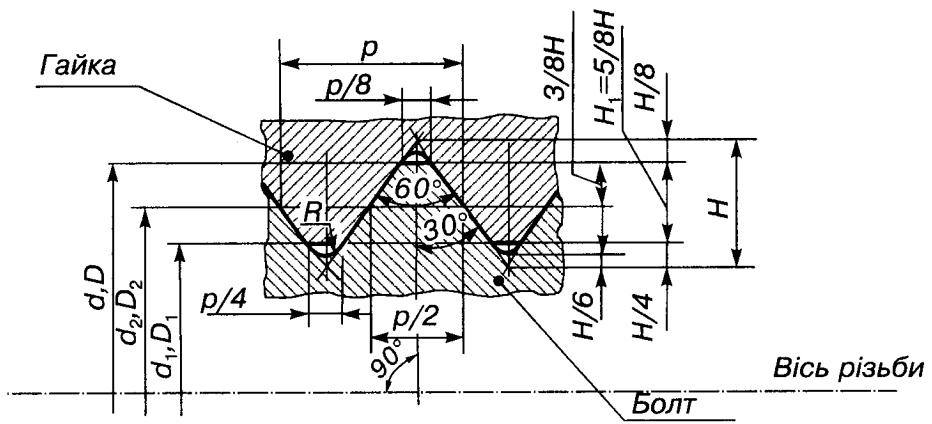


Рис. 16.4

метр зовнішньої різьби (болта);  $D$  — зовнішній діаметр внутрішньої різьби (гайки);  $d_2$  — середній діаметр болта;  $D_2$  — середній діаметр гайки;  $d_1$  — внутрішній діаметр різьби болта;  $D_1$  — внутрішній діаметр різьби гайки;  $p$  — крок різьби;  $H$  — висота початкового трикутника;  $R$  — номінальний радіус заокруглення впадин болта;  $H_1$  — робоча висота профілю:

$$H = \sqrt{\frac{3}{2}} p = 0,866p; \quad \frac{H}{4} = 0,216p;$$

$$H_1 = \frac{5}{8} H = 0,541p; \quad \frac{H}{8} = 0,108p;$$

$$\frac{3}{8} H = 0,325p; \quad R = \frac{H}{6} = 0,144p.$$

Метричну різьбу застосовують як кріпильну і поділяють на різьбу з великим та дрібним кроком. Різьбу з великим кроком позначають літерою  $M$  та числом, що дорівнює зовнішньому діаметру. Наприклад,  $M24 - 6g$ ,  $M64 - 7H$ , де  $6g$  і  $7H$  — поля допуску для робочих поверхонь різьби на стержні ( $6g$ ) та в отворі ( $7H$ ). Позначення їх на кресленні обов'язкове. Різьбу з дрібним кроком позначають літерою  $M$  та числами, що дорівнюють зовнішньому діаметру та кроку. Наприклад,  $M24 \times 2 - 7H$ ,  $M64 \times 3 - 8g$ . Для лівої різьби після позначення ставлять літери  $LH$  (наприклад,  $M24LH - 6g$ ,  $M64 \times 3LH - 7H$ ); на гвинтах —  $L$  ( $M12 \times 1,25 - L - 6e \times \dots$ ).

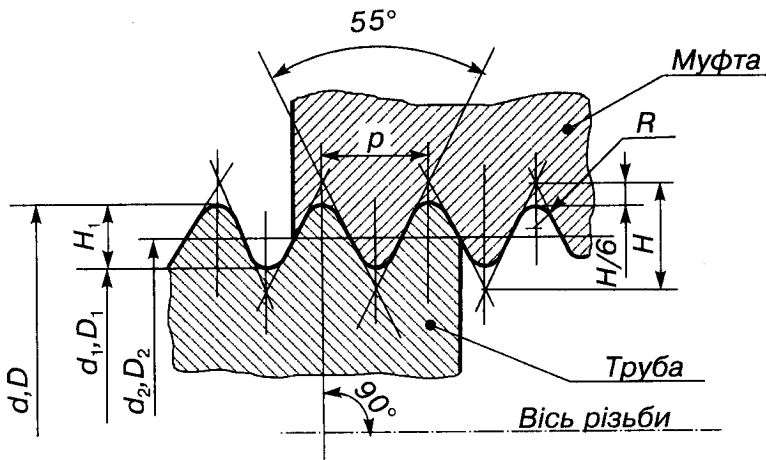


Рис. 16.5

Трубна циліндрична різьба (ГОСТ 6357—81) має профіль рівнобедреного трикутника з кутом при вершині  $55^\circ$ , що має заокруглення (рис. 16.5, де  $H = 0,96p$ ,  $H_1 = 0,64p$ ,  $R = 0,14p$ ) і застосовується для з'єднання арматури, труб, тонкостінних деталей (пробки, заглушки, штуцери тощо). Позначають її умовно літерою  $G$  та числом, що характеризує не зовнішній діаметр різьби, а умовний прохід у дюймах, що наближено дорівнює внутрішньому діаметру труби, зовні якої нарізана трубна різьба. Наприклад,  $G1/2-A$ ;  $G3/4-B$ , де  $A$  і  $B$  — класи точності різьби (клас  $A$  більш точний). Якщо довжина різьби перевищує ту, що регламентує стандарт, то в позначенні включають число, що показує, чому дорівнює довжина згвинчування. Наприклад,  $G1LH-A-40$  — трубна циліндрична різьба з умовним проходом 1 дюйм, ліва, клас  $A$ , довжина згвинчування 40 мм.

Різьба трапецеїдальна з профілем (ГОСТ 9484—81), яку показано на рис. 16.6, є ходовою і застосовується для перетворення руху в ходових гвинтах верстатів, супортів, штурвальних гвинтах тощо. Кут профілю дорівнює  $30^\circ$ .

Позначення містить: позначення трапецеїдальної різьби  $Tr$ , номінальний діаметр, крок, поле допуску. Наприклад,  $Tr 40 \times 6 - 8e$  або для триходової лівої різьби в отворі  $Tr 40 \times 9(p3)LH - 6H$ , де 40 — номінальний діаметр, мм; 9 — хід; 3 — крок, мм.

Різьбу упорну з профілем (рис. 16.7) застосовують у гвинтах з односторон-

ньою дією навантаження (домкрати). Умовний знак  $S$ .

Приклад позначення:  $S80 \times 20(p5) - 7h$ , де 80 — номінальний діаметр; 20 — хід; 5 — крок (у чотириходової різьби);  $7h$  — поле допуску на стержні.

Різьбу прямокутну застосовують у з'єднаннях, де не повинно бути самозгинчування під дією прикладеного осьового зусилля. Профіль цієї різьби не стандартизовано, тому на кресленні наводять усі дані, потрібні для її виготовлення та контролю (рис. 16.8).

Для з'єднань, що вимагають підвищеної герметичності або працюють під великим тиском, застосовують конічну різьбу. Оскільки діаметр конічної різьби регулярно змінюється, то її розмір належить до перерізу в основній площині (приблизно посередині довжини зовнішньої різьби, рис. 16.9). При з'єднанні нестандартних деталей положення основної площини позначають на кресленні.

Стандартизовано два види конічної трикутної різьби.

Різьбу конічну дюймову (кут профілю  $60^\circ$ , конусність 1 : 16) за ГОСТ 6111—52 (рис. 16.10) застосовують у з'єднаннях топливних, масляних, водяних та повітряних трубопроводів, що працюють при невисокому тиску.

Приклад позначення:  $K3/4$  ГОСТ 6111—52. Записують його на поличці-виносці.

Різьбу метричну конічну за ГОСТ 25229—82 (рис. 16.11) застосовують для з'єднання трубопроводів з підвищеним

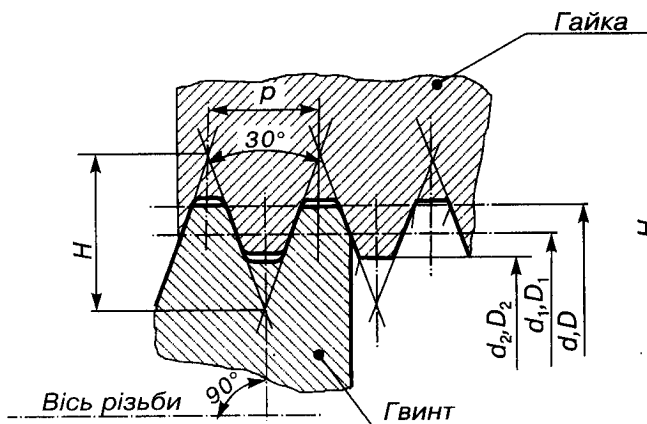


Рис. 16.6

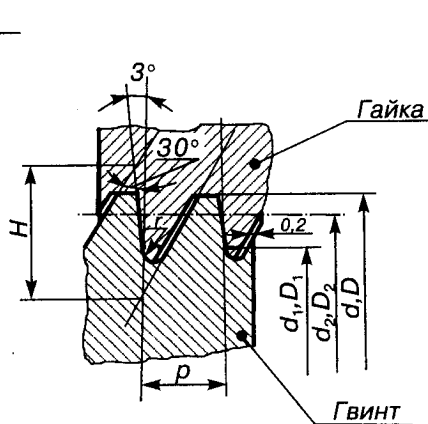
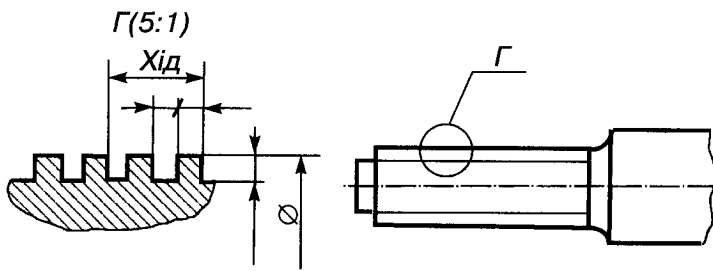


Рис. 16.7



Різьба двоходова ліва

Рис. 16.8

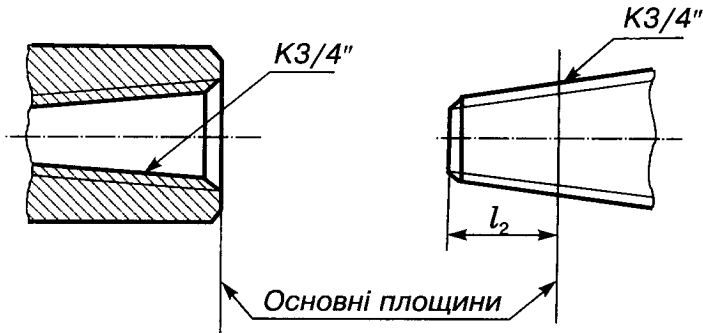


Рис. 16.9

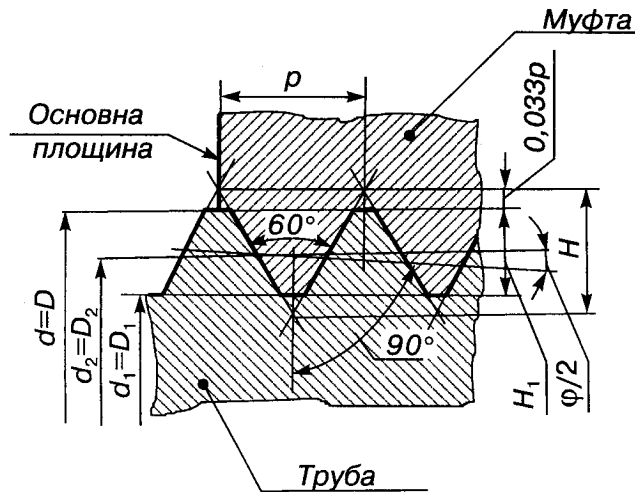


Рис. 16.10

тиском. Вона має в основній площині спільні розміри з метричною різьбою (ГОСТ 9150—81). Це дає змогу утворювати з'єднання деталей з зовнішньою конічною та внутрішньою циліндричною різьбою.

Приклади позначення:  $MK20 \times 1,5$ ;  $MK20 \times 1,5LH$ .

**Зображення різьби на кресленнях.** Будь-які різьби незалежно від їхнього типу зображують на кресленні умовно (ГОСТ 2.311—68). Умовність полягає в проведенні суцільної основної лінії замість виступів різьби і тонкої суцільної лінії замість западин (рис. 16.12, а...с), що проводять на всю довжину різьби

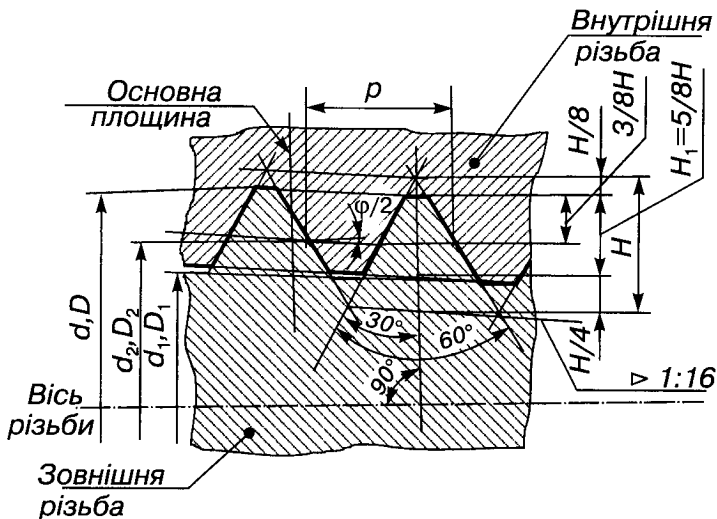


Рис. 16.11

без збігу, захоплюючи фаски. На площині, перпендикулярній до осі різьбового стержня, суцільну тонку лінію внутрішнього діаметра різьби проводять на  $3/4$  довжини кола, причому розімкнути її можна в будь-якому місці. Відстані між лініями зовнішнього та внутрішнього діаметрів різьби на всіх проекціях виконують не менше ніж  $0,8$  мм і не більше від кроку різьби.

Різьбу, показану як невидиму, зображують аналогічно поданій на рис. 16.12, *д*.

Позначення циліндричної різьби стосується зовнішнього діаметра і виконується за стандартом. Приклади нанесення розмірів різьби показані на рис. 16.12, *а, б*.

Спеціальну різьбу зі стандартним профілем позначають скорочено так:  $CnM24 \times 1,5 - 6g$ ;  $Cn, Tr40 \times 6 - 8e$ .

**Стандартні кріпильні деталі з різьбою.** Ці вироби поділяють на деталі загального призначення та спеціальні. Нижче розглядатимемо тільки деталі загального призначення. Болти, гвинти, шпильки, гайки виготовляють зі сталі та кольорових сплавів. Для сталевих болтів, гвинтів, шпильок та шурупів встановлено 12 класів міцності: 3,6; 4,6; 4,8; 5,6; 5,8; 6,6 і т. д. Перше число, помножене на 100 (10), визначає мінімальний тимчасовий опір у мегапаскалях, друге, помножене на 100 (10), визначає відношення межі текучості до тимчасового опору у відсотках; добуток чисел визначає

межу текучості в мегапаскалях. У позначеннях кому між цифрами не ставлять, а пишуть 36, 46 і т. д.

Для гайок встановлено сім класів міцності; 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14. Помноживши ці числа на 100 (10), дістають напруження від випробувального навантаження в мегапаскалях.

Залежно від умов експлуатації кріпильні деталі випускають з покриттям, яке має цифрове або літерне позначення. В позначенні кріпильної деталі включається цифрове позначення покриття (якщо воно є).

Найбільш широко застосовують болти і з шестигранною головкою підвищеної, нормальної та грубої точності (класів А, В, С) з нормальною чи зменшеною головкою, з великим або дрібним кроком різьби, що випускають в одному або в кількох виконаннях.

Болти випускають з шестигранною головкою номінальним діаметром різьби 6...48 мм, завдовжки 8...300 мм у кількох виконаннях (ГОСТ 7798—70). Перше з них зображено на рис. 16.13. Болт у другому виконанні має отвір у стержні для фіксування корончатої гайки, у третьому — отвори в головці і т. д.

Приклад позначення: Болт 3М16 × 2 — 6g × 80. 109.40X.01.6 ГОСТ 7798—70, де 3 — виконання; 16 — номінальний діаметр; 2 — крок; 6g — поле допуску; 80 — довжина



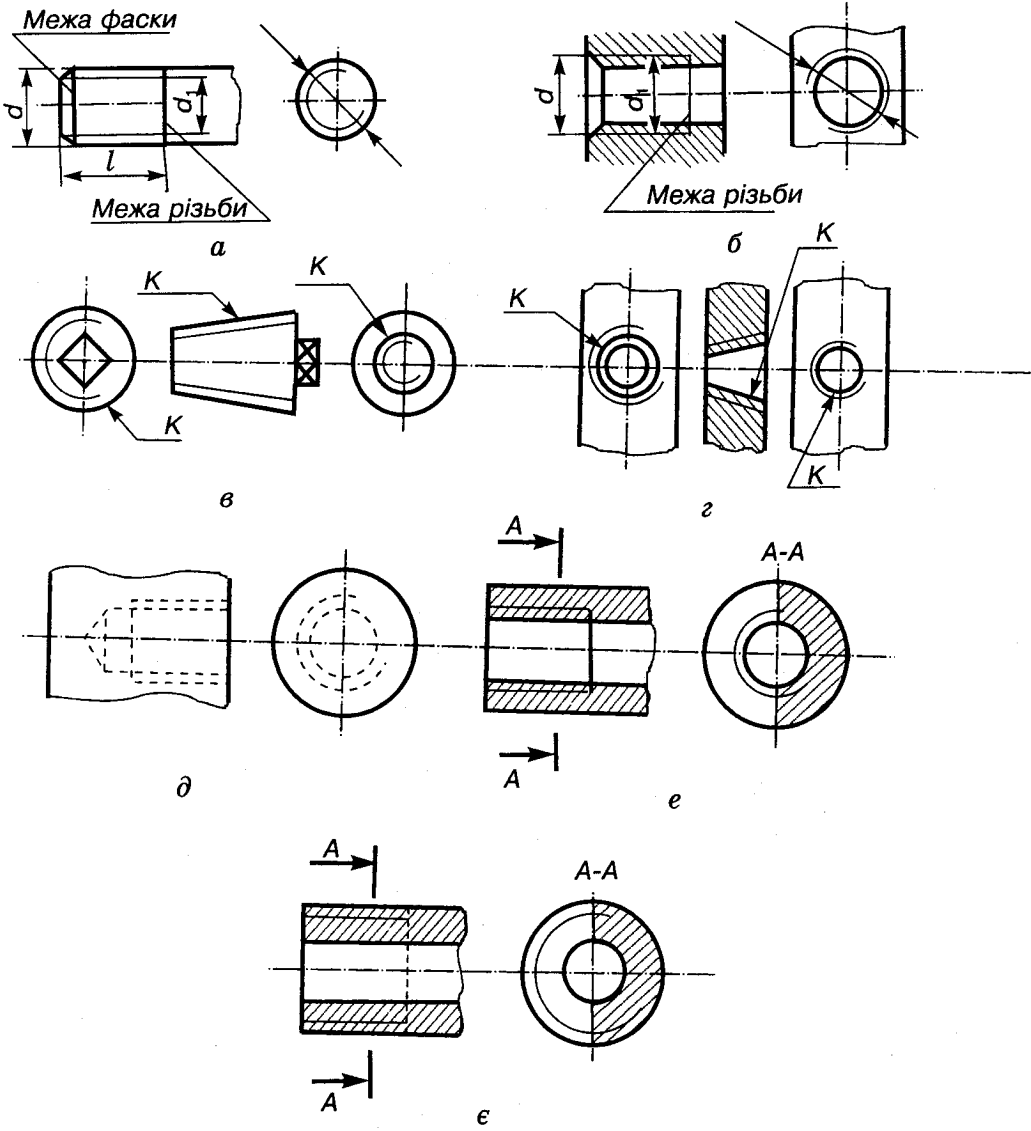


Рис. 16. 12

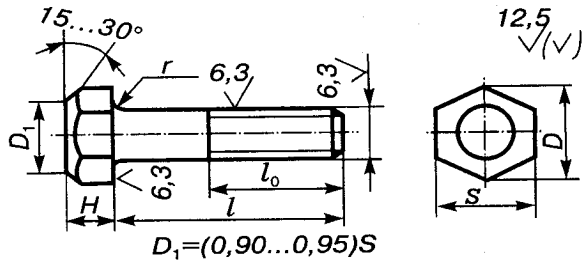


Рис. 16. 13

болта; 109 — клас міцності 10.9; 40X — марка сталі; 01 — вид покриття (цинкове, хромоване); 6 — товщина покриття, мкм.

Клас точності (нормальний, тобто В) та розміри головки (нормальна) не зазначають.

У навчальних цілях можна вважати, що всі болти виготовлено з матеріалу класу міцності 5.8 без покриття.

Залежно від призначення та умов експлуатації гайки бувають шестигранні, шестигранні прорізні, корончасті тощо (рис.

16.14, а...г). Найширше застосовують шестигранні гайки (ГОСТ 5915—70 і ГОСТ 5927—70), що випускаються в одному, двох, трьох виконаннях (рис. 16.14, а), підвищеної, нормальної та грубої точності (класи А, В, С); нормальної висоти, низькі, високі, особливо високі; з нормальним або зменшеним розміром “під ключ”; з великим або дрібним кроком.

Приклад позначення: Гайка 2М10 × 1 — 6Н.12.45Х.01.4 ГОСТ 5915—70, де 2 — виконання; 1 — крок; 6Н — поле допуску;

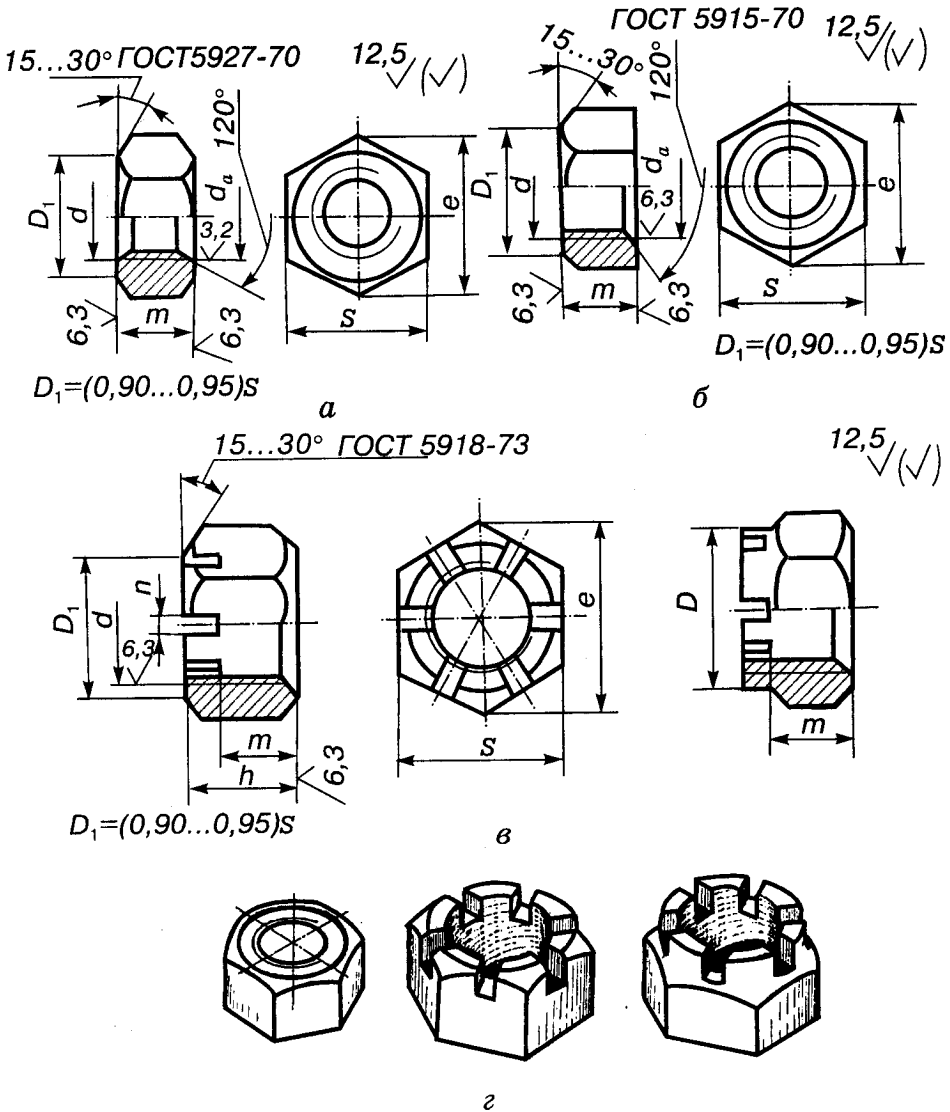


Рис. 16.14

12 — клас міцності; 45X — марка сталі; 01 — вид покриття; 4 — товщина покриття, мкм. Клас точності (нормальний, тобто В), висоту гайки (нормальну, тобто  $0,8d$ ), розмір "під ключ" (нормальний) визначає ГОСТ 5915—70.

У промисловості широко застосовують кріпильні та встановлювальні гвинти. Залежно від призначення гвинти мають напівкруглу, циліндричну, напівпотайну та потайну головки (рис. 16.15, *a...e*). Крім того, є гвинти з головкою під гайковий ключ.

Приклад позначення: Гвинт А2.М6 × 1 — 6g × 50.48 ГОСТ 1491—80, де А — клас точності; 2 — виконання.

Аналогічно позначаються гвинти встановлювальні (рис. 16.16), що мають повністю нарізані стержні та різну форму кінця — плоску, циліндричну, конічну.

Приклад позначення: Гвинт А.М8 × 1 — 6g × 25, 45Н.ОЛ5 ГОСТ 1488—84, де А — клас точності; 45Н — клас міцності; ОЛ5 — покриття.

Шпильки (ГОСТ 22032—76) випускають класів точності А і В діаметром різьби 2...48 мм і завдовжки 10...300 мм. На рис. 16.17, *a, б* подано шпильки, які мають довжину кінця, що загвинчується,  $l_1$ ; довжину шпильки  $l$  та довжину гайкового кінця  $l_0$ . Глибина загвинчування  $l_1 = d$  для сталевих, бронзових, латунних корпусів, куди загвинчується посадочний кінець шпильки;  $l_1 = 1,25d$ ,  $l_1 = 1,6d$  — для корпусів із ковкого та сірого чавуну;  $l_1 = 2d$ ,  $l_1 = 2,5d$  — для корпусів з легких сплавів.

Приклад позначення: Шпилька 2М16 × 1,5—6g × 100.109.40Х.015 ГОСТ 22032—76,

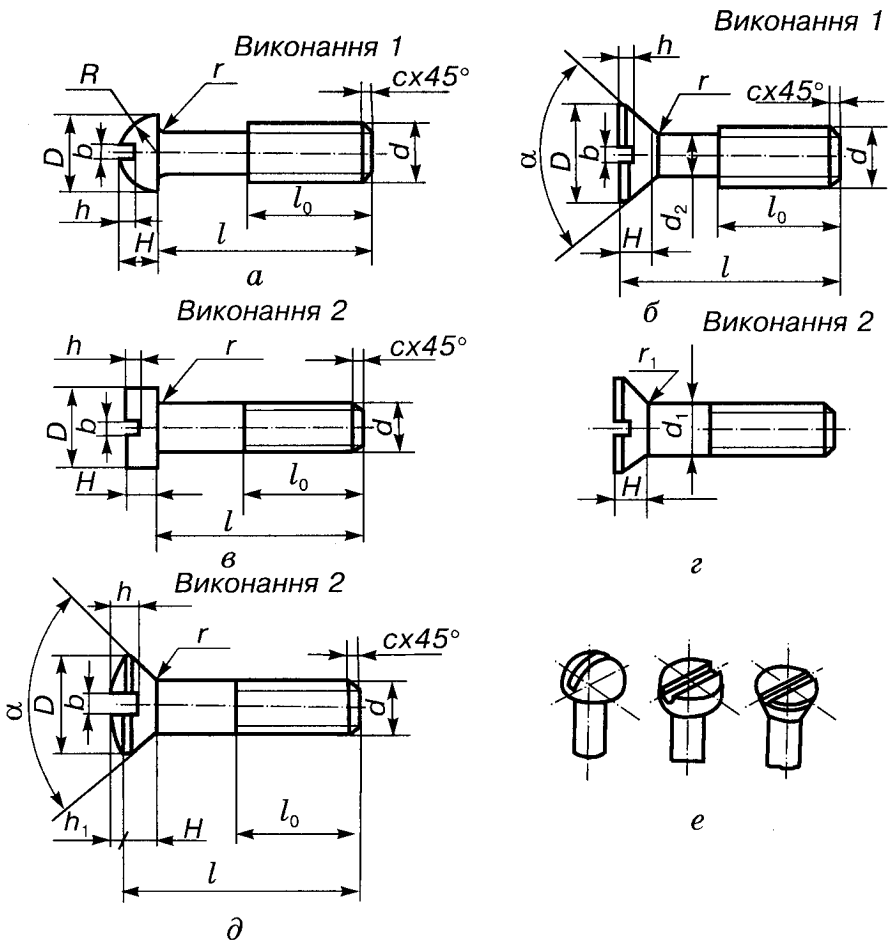


Рис. 16.15

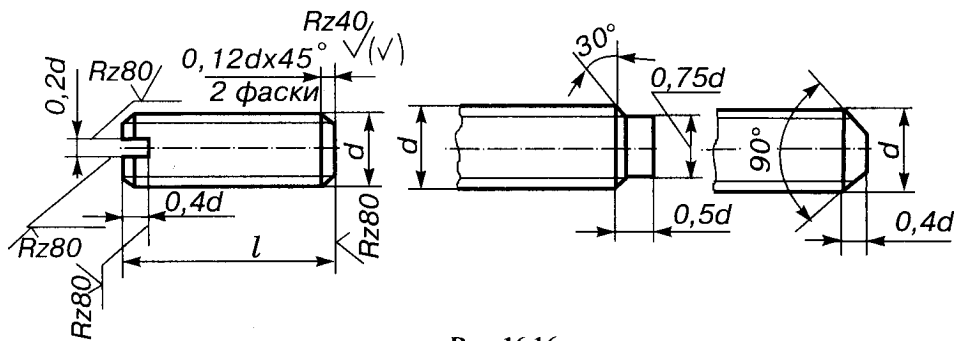


Рис. 16.16

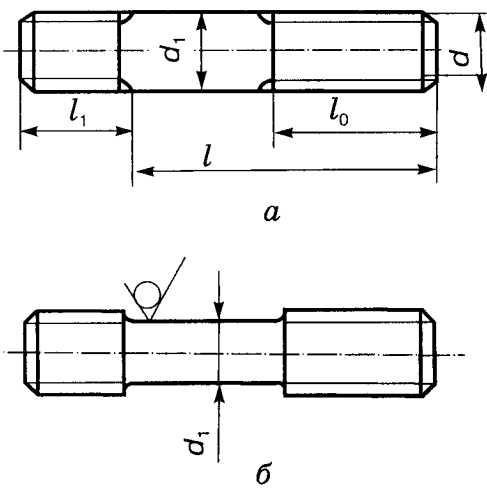


Рис. 16.17

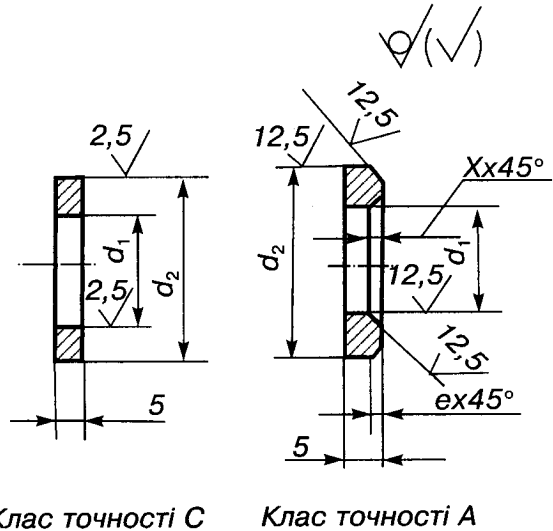


Рис. 16.18

де 2 — друге виконання (рис. 16.17, б). Решта позначень така сама, як у болтів і гвинтів.

У різьбових з'єднаннях широко застосовують різноманітні шайби, які не мають різьби і призначені для запобігання пошкодженню поверхні деталі від гайки при її затягуванні, а також для збільшення опорної площі гайки, головки болта чи гвинта, для запобігання самовідгвинчуванню гайок тощо.

Розрізняють шайби:

— круглі (рис. 16.18) двох виконань (ГОСТ 11371—78).

Приклад позначення: Шайба 2.10.01, 08кп01.6 ГОСТ 11371—78, де 2 — виконання (виконання 1 не позначають); 10 — діаметр різьби кріпильної деталі (болта, шпильки); 01 — група матеріалу; 08 кп —

марка сталі; 01 — покриття, 6 — товщина покриття, мкм;

— пружинні (рис. 16.19) чотирьох типів (ГОСТ 6402—70): легкі (Л), нормальні (Н), важкі (Т), особливо важкі (ОТ).

Приклад позначення: Шайба 10Т65Г ГОСТ 6402—70, де 10 — діаметр різьби кріпильної деталі; 65Г — марка сталі (пружинна марганцевиста); Т — шайба важкого типу (для нормальних Н не зазначають), без покриття.

Крім того, є шайби стопорні, сферичні, квадратні та ін.

Слід зазначити, що діаметр отвору шайби завжди більший від діаметра різьби на 0,5...2,0 мм і залежить від діаметра різьби, але в позначенні завжди дають діаметр різьби.

**Болтові з'єднання.** Важливим елементом зображення різьбових з'єднань є показ різь-

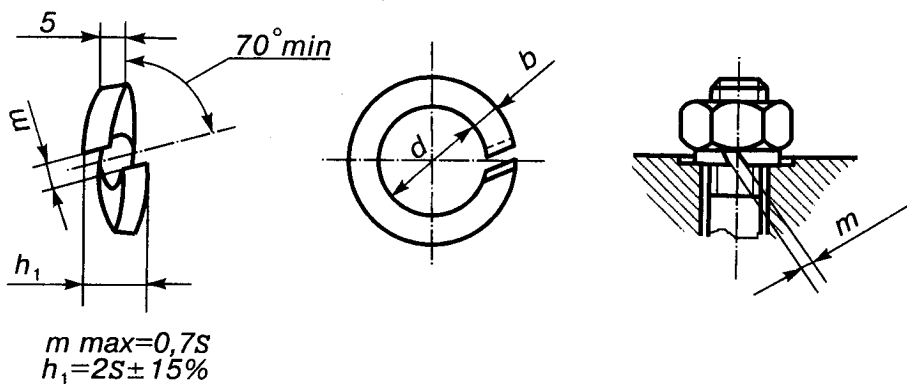


Рис. 16.19

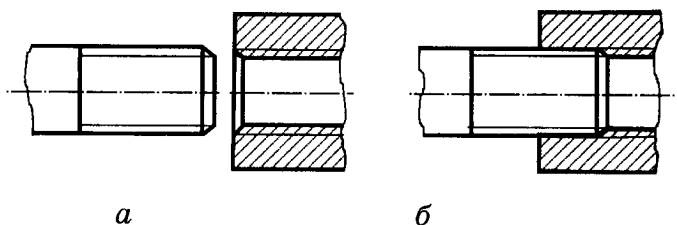


Рис. 16.20

бових деталей у розрізі. Зовнішній діаметр різьби стержня відповідає зовнішньому діаметру різьби в отворі, а внутрішній діаметр різьби стержня — діаметру отвору (рис. 16.20, а). На зображенні різьбового з'єднання перевагу віддають різьбі стержня, а різьбу отвору показують лише там, де вона не закрита зображенням стержня (рис. 16.20, б).

Болтове з'єднання деталей (рис. 16.21, а...е) виконують за допомогою болта, шайби та гайки (рис. 16.21, б). У деталях, що скріплюються, свердлять отвір для болта (рис. 16.21, в). Діаметр отвору залежить від характеру та умов роботи з'єднання, які визначають точність складання (ГОСТ 11284—75). Цим стандартом регламентується зазор між стержнем болта та отвором. Якщо при цьому зазор буде менше ніж 1 мм, то на зображенні його можна дещо збільшити.

В одержаний отвір вставляють болт, на нього надівають шайбу (рис. 16.21, з) і нагвинчують гайку (рис. 16.21, д). Довжину болта розраховують за умов достатньої довжини нарізаної частини для нормального затягування та наявності вільного кінця болта над гайкою  $K$  (рис. 16.21, е), де  $d$  — зовнішній діаметр різьби;  $d_1 = 0,85d$ ;  $D =$

$= 2d$ ;  $D_{\text{ш}} = 2,2d$ ;  $H = 0,7d$ ;  $l_0 = (1,5 \dots 2,0)d$ ;  $S = 0,15d$ ;  $c = 0,15d$ ;  $l = b + b_1 + b_2 + S + H + K$ .

Розрахункову довжину болта округляють до ближчого більшого за відповідним стандартом або в навчальних цілях до ближчого більшого числа, кратного 5 або 10 (при довжині болта понад 120 мм).

У навчальних цілях параметри болтового з'єднання розраховують залежно від діаметра болта та товщини деталей за наведеними вище формулами для рис. 16.21. На кресленні болтового з'єднання головки болта та гайки зображують спрощено, дуги гіпербол (фасок на їхніх гранях) умовно замінюють дугами кіл, зазор між цими дугами та торцем, як правило, не показують. Болт, гайку, шайбу зображують нерозсіченими.

На кресленні болтового з'єднання наносять три розміри: діаметр різьби, діаметр отвору, довжину болта.

Креслення болтового з'єднання, якщо його виконують як окреме завдання, бажано оформити як складальне креслення, доповнюючи специфікацією, форму й вимоги до якої наведено в параграфі 18.2. Приклад такої специфікації подано на рис. 16.22.

Елементи болтового з'єднання

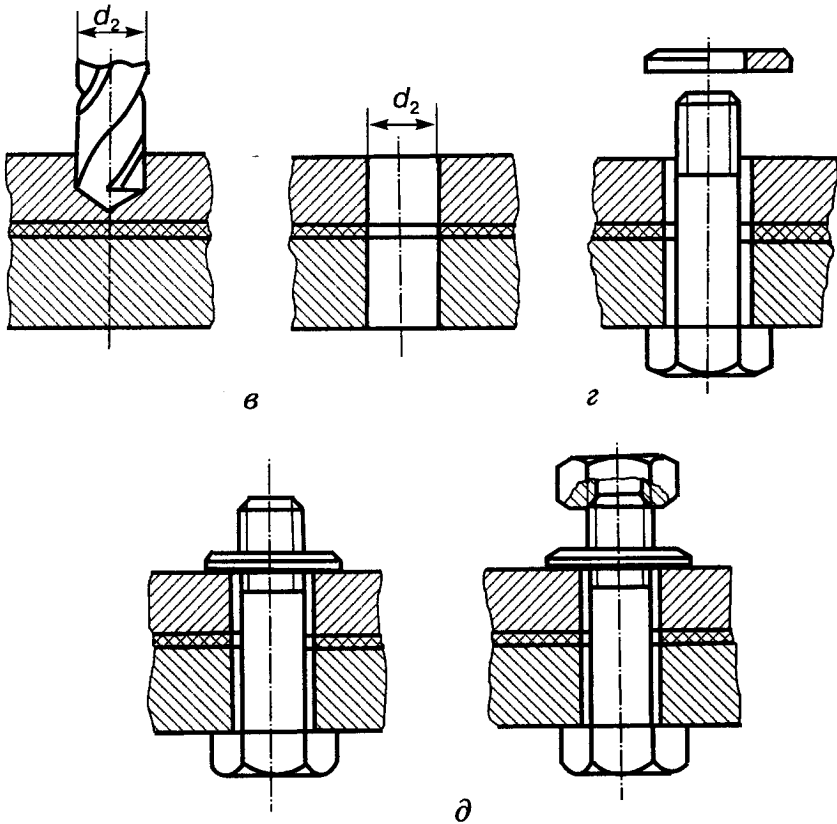
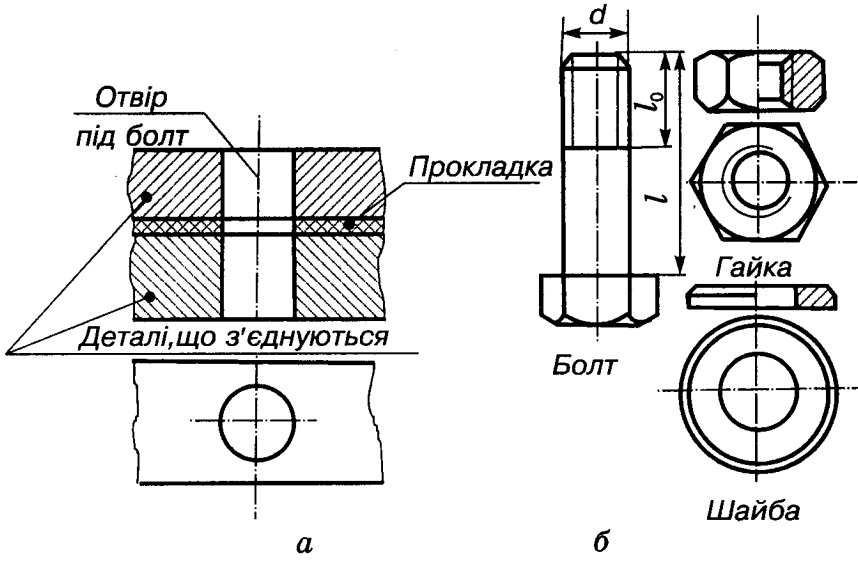
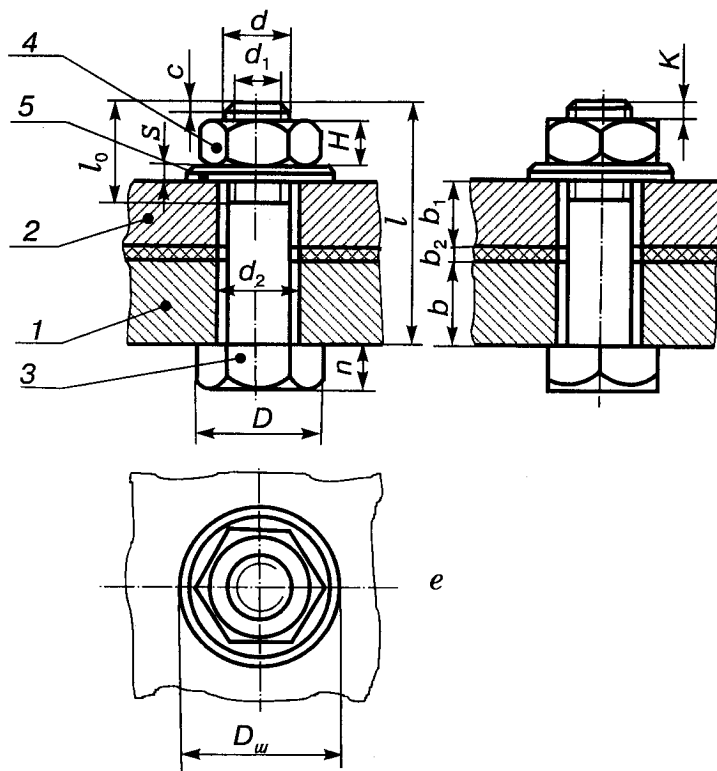


Рис. 16.21



Продовження рис. 16.21

У відповідності з ГОСТ 2.315—68 на складальних кресленнях та кресленнях загальних видів кріпильні деталі можна зображувати спрощено (без фасок на кріпильних деталях та зазорів між отвором і стержнем), як показано на рис. 16.23.

**З'єднання шпилькою.** Таке з'єднання (рис. 16.24, а...ж) виконують за допомогою шпильки, шайби та гайки. В одній з деталей свердлять глухий отвір (рис. 16.24, в), в ньому нарізують різьбу (рис. 16.24, г), куди закручують посадочний кінець шпильки (рис. 16.24, д). Потім на шпильку встановлюють приєднану деталь (рис. 16.24, е), в якій заздалегідь просвердлено отвір, діаметр якого вибирають з урахуванням ступеня точності складання. Зверху на шпильку надівають шайбу (рис. 16.24, є) і нагвинчують гайку (рис. 16.24, ж), де:  $d$  — діаметр шпильки;  $d_1 = 0,85d$ ;  $d_2 = (1,05...1,10)d$ ;  $l_0 = 1,5d$ ;  $l_1 = d$  або  $1,35d$ ;  $l_2 = l_1 + 0,5d$ ;  $S = 0,15d$ ;  $H = 0,8d$ ;  $K = 0,25...0,50d$ ;  $l = b_1 + S + H + K$ .

На зображенні з'єднання шпилькою застосовують такі самі спрощення, як і при виконанні зображень болтового з'єднання.

У навчальних цілях параметри з'єднання та його зображення розраховують за формулами, наведеними для рис. 16.24. Розрахункову довжину шпильки округляють до ближчого більшого за відповідним стандартом або до числа, кратного 5.

На кресленні з'єднання шпилькою наносять три розміри: діаметр різьби, діаметр отвору в приєднаній деталі та довжину шпильки.

Бажано доповнити зображення з'єднання специфікацією.

Спрощене зображення з'єднання за ГОСТ 2.315—68 показано на рис. 16.25.

**З'єднання гвинтом.** Це з'єднання виконують у такій послідовності. У деталі свердлять отвір (головним чином, глухий) — рис. 16.26, а, нарізують у ньому різьбу. В приєднаній деталі свердлять отвір, діаметр якого вибирають залежно від діаметра гвинта





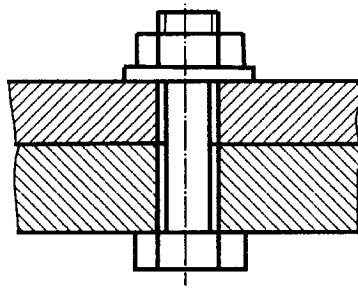


Рис. 16.23

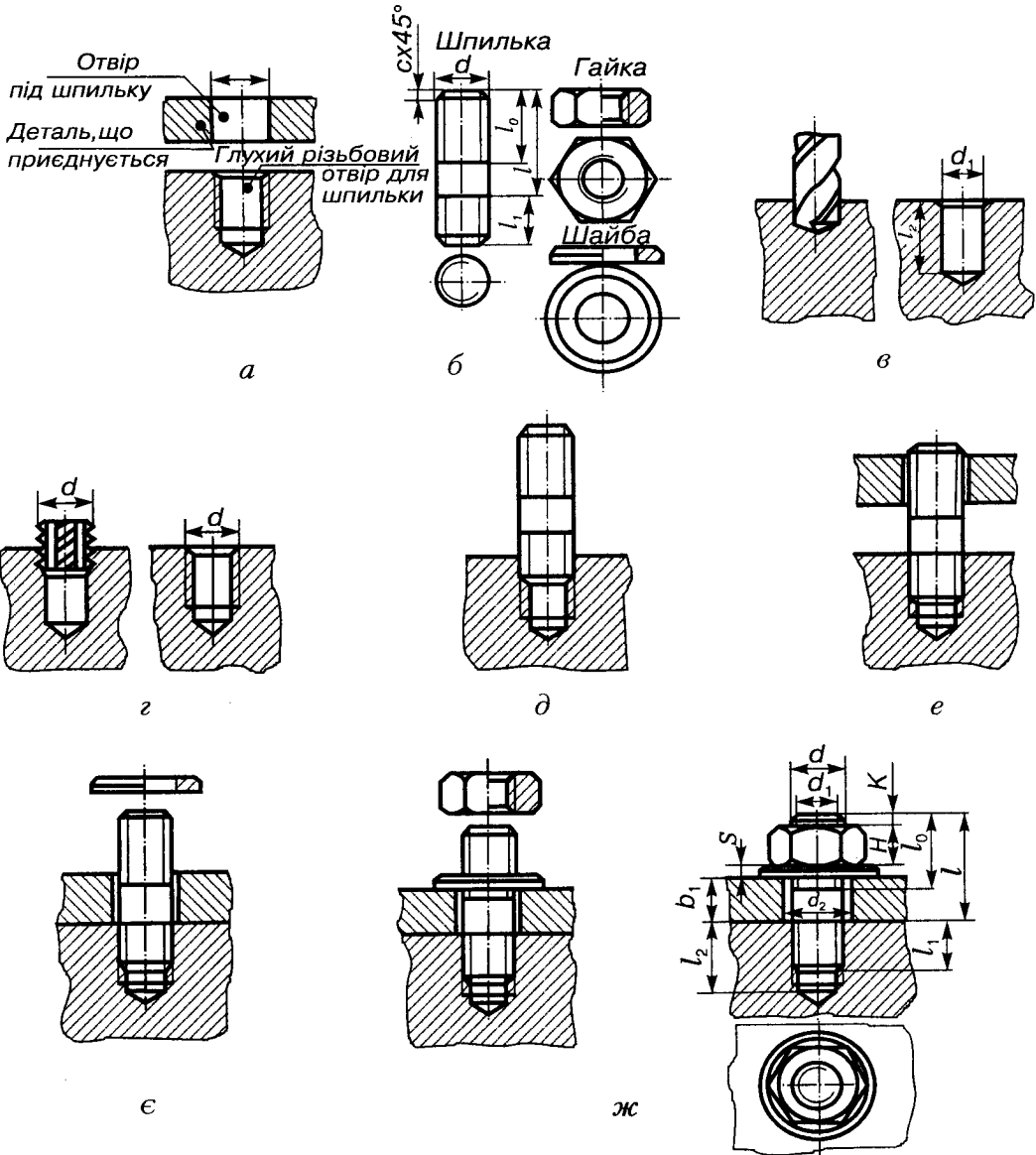


Рис. 16.24

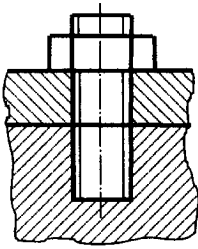


Рис. 16.25

та ступеня точності складання, і виконують гніздо (зенковку) під головку гвинта (циліндричне — для циліндричної головки і конічне — для конічної головки). В отвір приєднуваної деталі вставляють гвинт і закручують в отвір першої деталі (рис. 16.26, б, в) доти, доки деталі не з'єднаються.

з'єднання гвинтом спрощено (рис. 16.27). Тут різьбу умовно зображують на всій довжині гвинта, а шліци під викрутку — на площині, перпендикулярній до осі гвинта, однією потовщеною до  $2s$  лінією під кутом  $45^\circ$ .

**Трубне з'єднання.** Таке з'єднання можна виконувати для труб однакового або різних діаметрів за допомогою муфт, кутників, трійників, хрестовин тощо. На з'єднуваних трубах нарізають трубну різьбу (рис. 16.28, а). На одну із труб, де довжина нарізаної частини довша, ніж на другій трубі, нагвинчують контргайку, а потім муфту (рис. 16.28, б) так, щоб звільнився торець труби. З'єднують торці труб і, частково згвинчуючи муфту з правої труби, закручують її на ліву трубу (рис. 16.28, в) до упору. Із спеціально-

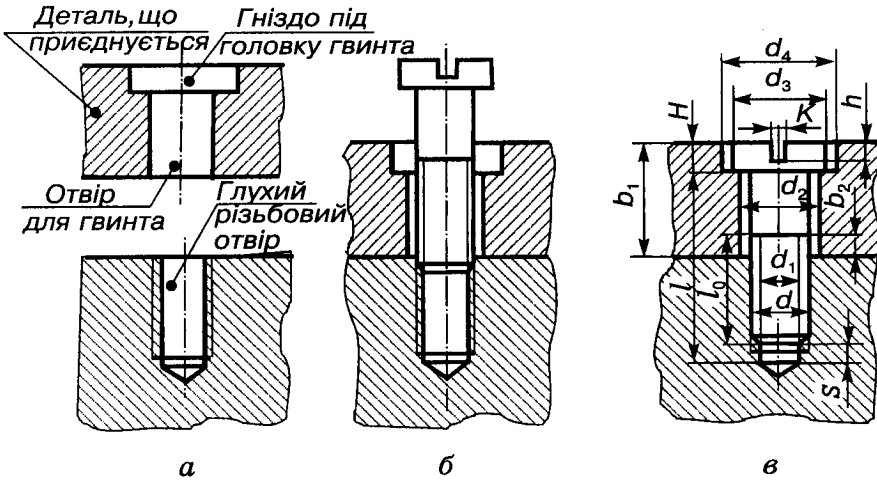


Рис. 16.26

Виконуючи зображення, можна користуватись умовними співвідношеннями. Початковими при цьому є діаметр гвинта та товщина приєднуваної деталі (рис. 16.26, в), де  $d$  — діаметр різьби;  $d_1 = 0,85d$ ;  $d_2 = 1,1d$ ;  $d_3 = 1,5d$ ;  $d_4 = 1,1d_3$ ;  $H = 0,6d$ ;  $h = 0,25d$ ;  $K = 0,25d$ ;  $l_0 = (2,0 \dots 2,5)d$ ;  $S = 0,5d$ ;  $l = l_0 + b_1 - H$ ;  $b_2 = 0,5d$ .

На кресленні гвинтового з'єднання наносять три розміри: діаметр різьби гвинта, діаметр отвору в приєднуваній деталі та довжину гвинта.

На складальних кресленнях та кресленнях загальних видів рекомендується пока-

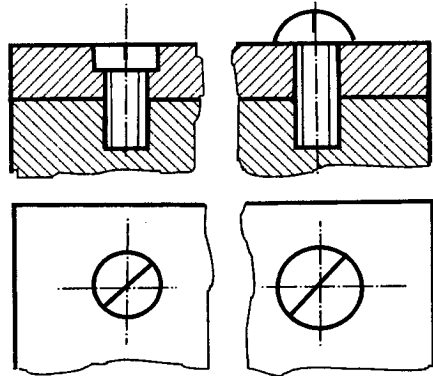


Рис. 16.27

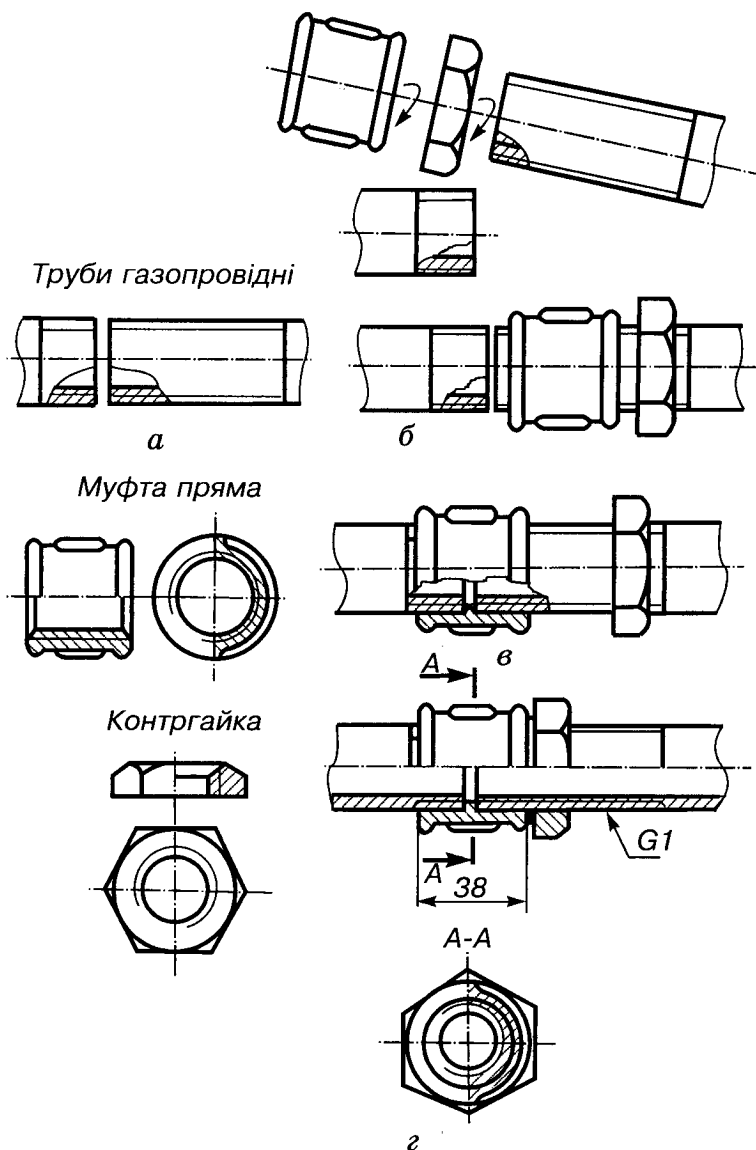


Рис. 16.28

го матеріалу формують прокладку між муфтою і контргайкою, яку затискають контргайкою, щоб запобігти проникненню назовні рідини, газу або пари, що транспортується по трубах. Остаточне зображення трубного з'єднання та переріз А—А показано на рис. 16.28, г. На з'єднання наносять розмір трубної різьби та ширину муфти.

На рис. 16.29, а, б показано трубне з'єднання, виконане за допомогою кутника та трійника.

Звернемо увагу на деякі особливості побудови.

1. Для приєднуваної труби, на яку нагвинчується муфта до упору, за межами муфти зображується тільки збіг різьби тонкими лініями (див. рис. 16.28; рис. 16.29).

2. Довжина різьби на другій трубі має бути на 5...7 мм більшою від сумарного розміру ширини муфти та висоти контргайки.

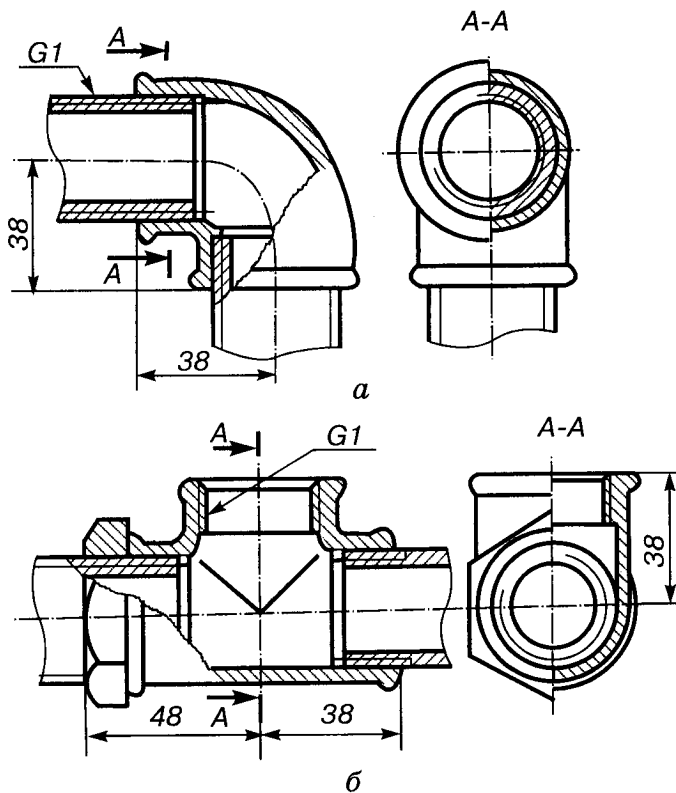


Рис. 16.29

3. Креслення трубного з'єднання, як правило, виконують з конструктивними подобицями (буртики, фаски, ребра).

Елементи трубного з'єднання стандартизовані. Труби звичайні, звичайної точності, виготовлені із сталей Ст0, Ст1 (ДСТУ 2651—94).

Приклади позначення: Труба немірної довжини — Труба 20 × 2,8 ГОСТ 3262—75, де 20 — умовний прохід; 2,8 — товщина стінки. Така сама труба з циліндричною (Ц) або конічною (К) різьбою: Труба Ц20 × 2,8 ГОСТ 3262—75; у комплекті з муфтою: Труба М — 20 × 2,8 ГОСТ 3262—75; завдовжки 4 м: Труба М — 20 × 2,8 — 4000 ГОСТ 3262—75.

Для підсилених труб після слова “труба” ставлять літеру “У”, для легких труб і труб під накатку — літеру “Н”, для труб підвищеної точності — літеру “П”.

З'єднувальні деталі виготовляють з ковкого чавуну.

Приклади позначення: Кутник 40 ГОСТ 8946—75 (кутник прямий з ковкого чавуну без покриття, з умовним проходом  $D_y = 40$  мм); Трійник 25 × 15 × 20 ГОСТ 8950—75 (трійник з двома переходами без покриття з  $D_2 = 20$ ;  $D_1 = 15$ ;  $D_y = 25$ ).

Якщо є цинкове покриття, то перед позначенням ставлять літеру “Ц”.

Приклад позначення: Муфта довга Ц — 40 ГОСТ 8955—75 (муфта пряма довга з цинковим покриттям з  $D_y = 40$ ).

### 16.3. Шпонкові з'єднання

Елементами шпонкового з'єднання є вал, шпонка, колесо. Шпонка призначена для передачі крутного моменту і осьового зусилля від вала до колеса або навпаки.

Розрізняють призматичні, клинові та сегментні шпонки.

Найбільш широко застосовують призматичні шпонки: нормальної висо-

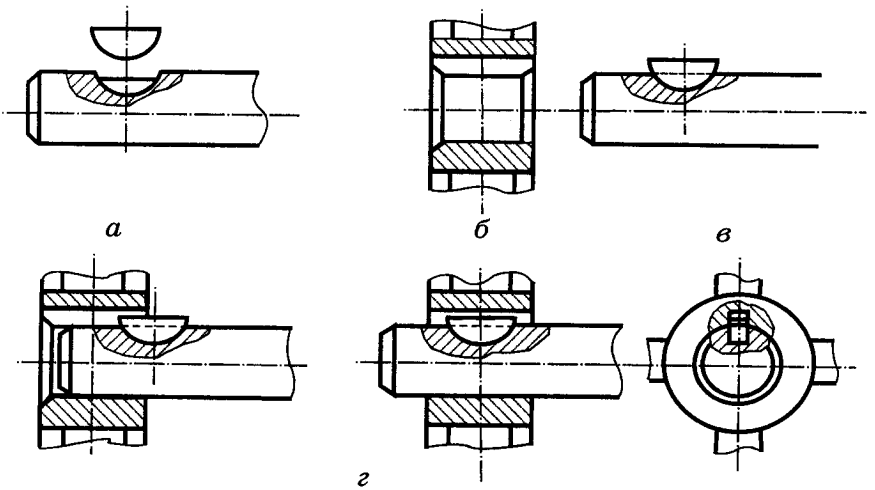


Рис. 16.30

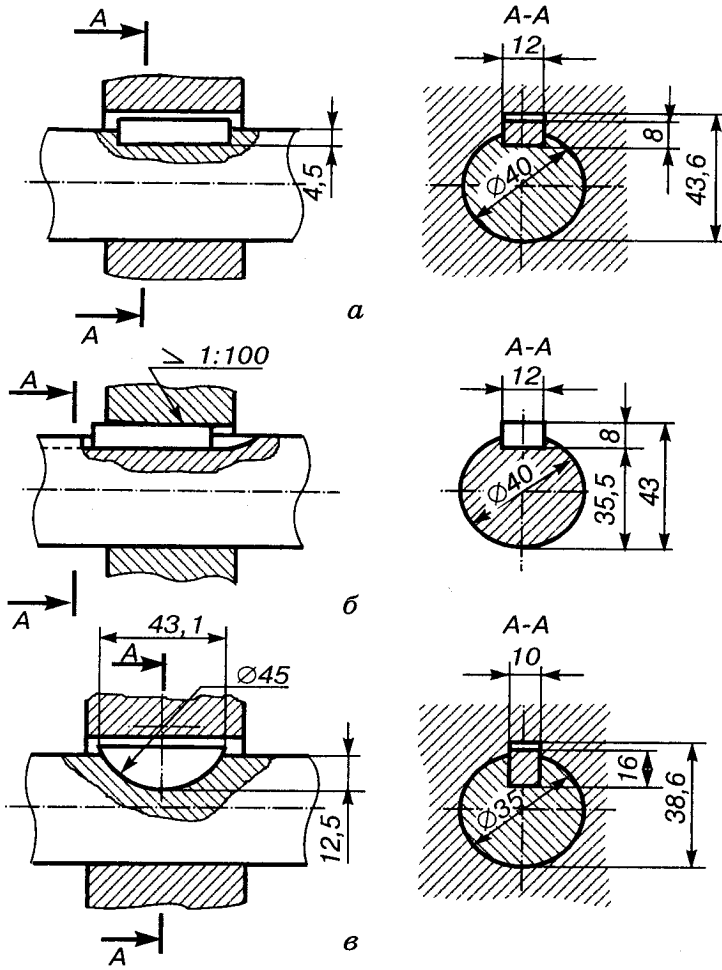


Рис. 16.31

ти в трьох виконаннях (ГОСТ 23360—78), високі (ГОСТ 10748—79) на напрямні шпонки з кріпленням на валу (ГОСТ 8790—79). Бічні грані цих шпонок — робочі, над шпонкою є зазор. Розміри перерізу шпонки залежать від діаметра вала, а довжина — від крутного моменту. Осьове зусилля ці шпонки не передають.

Приклад позначення: Шпонка 2 - 18 × 11 × 100 ГОСТ 23360—78, де 2 — виконання (один торець скруглений, другий — прямий); 18 × 11 — переріз; 100 — довжина шпонки.

Клинові шпонки мають похил верхньої грані 1 : 100 і випускаються у чотирьох виконаннях (ГОСТ 24068—80). Застосовують їх у тихохідних механізмах при передачі крутного моменту й осьового зусилля. Робочими поверхнями є верхня й

нижня грані, між бічними гранями шпонки і паза — зазор.

Приклад позначення: Шпонка 4 - 18 × 11 × 100 ГОСТ 24068—80, де 4 — виконання.

Сегментні шпонки випускають у двох виконаннях (ГОСТ 24071—80). Застосовують їх при передачі невеликих крутних моментів. Робочі поверхні — бічні грані, над шпонкою — зазор.

Приклад позначення: Шпонка 5 × 6,5 ГОСТ 24071—80, де 5 — ширина; 6,5 — висота шпонки (виконання 1).

Розглянемо утворення шпонкового з'єднання (рис. 16.30). На валу циліндричною дисковою фрезою роблять паз. Діаметр цієї фрези дорівнює діаметру циліндричної частини сегментної шпонки з урахуванням посадки шпонки на валу (рис. 16.30, а).

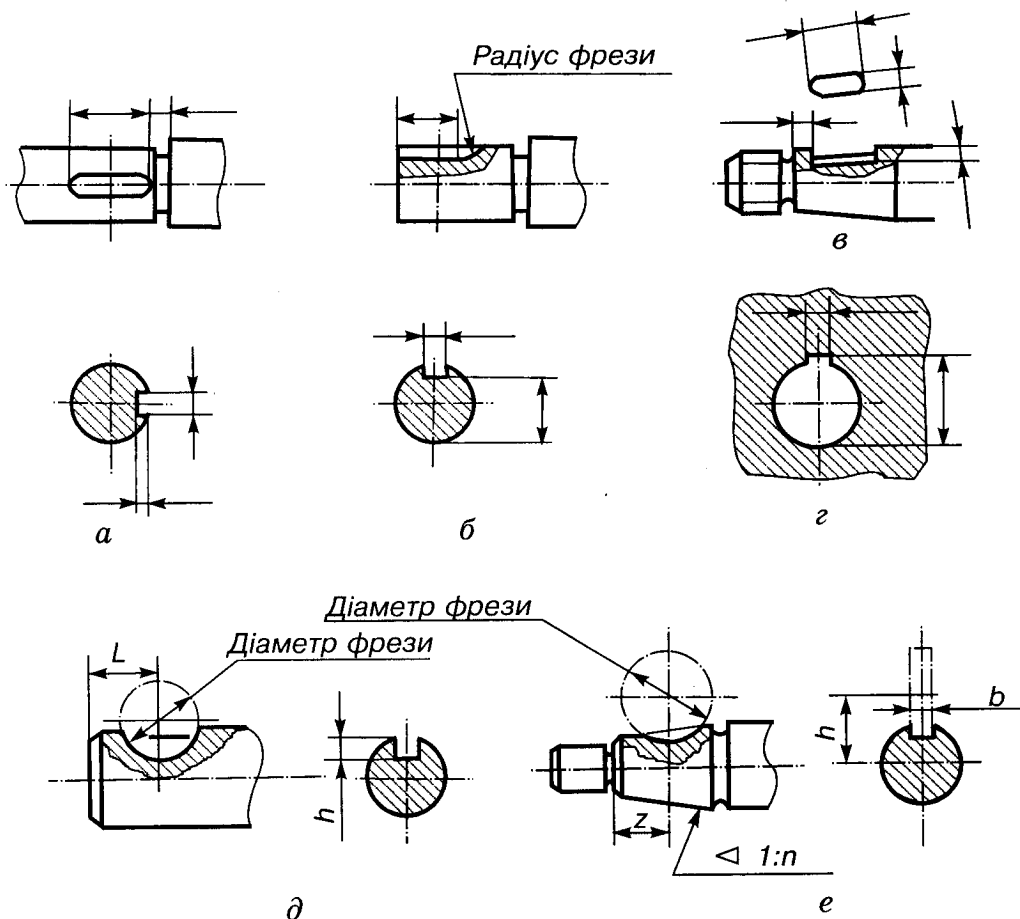


Рис. 16.32

У маточині колеса фрезерують або виготовляють протяжкою паз, ширина якого дорівнює ширині шпонки з урахуванням ходової посадки шпонки в маточині колеса (рис. 16.30, б).

У паз вала вставляють шпонку і насаджують колесо на вал (рис. 16.30, в, г).

Для призматичних і клиноподібних шпонок паз на валу фрезерують циліндричними або кінцевими фрезами. Довжина паза під клинову шпонку приблизно дорівнює подвійній довжині шпонки. Довжина паза під призматичну шпонку дорівнює її довжині, що, в свою чергу, коротша за ширину маточини колеса (рис. 16.31, а). Паз у маточині колеса для клиноподібної шпонки виконують з похилом 1 : 10.

Глибину пазів на валу та в маточині колеса вибирають для кожного типу шпонки з відповідних стандартів.

Первинними при розрахунку параметрів шпонкового з'єднання є діаметр вала та ширина маточини колеса.

Шпонкове з'єднання звичайно зображують у двох проекціях (рис. 16.31, б, в).

Умовності при зображенні шпонкових з'єднань полягають у тому, що зазор між верхніми неробочими поверхнями дещо збільшують порівняно з дійсними його розмірами.

Приклади нанесення розмірів шпонкових пазів на валах наведено на рис. 16.32, а...е.

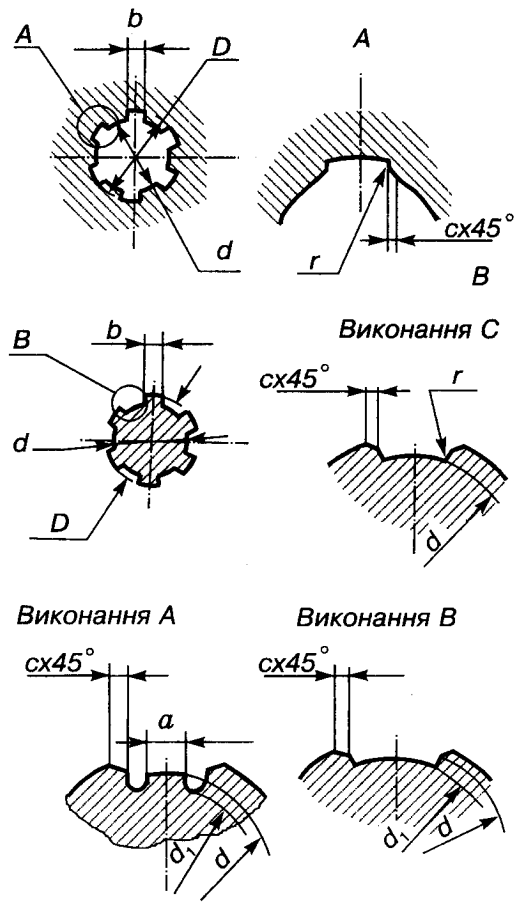


Рис. 16.33

#### 16.4. Шліцьові з'єднання

Шліцьові з'єднання називають багатошпонковими, зубці (шліці) виконані разом з валом і розміщені паралельно його осі. Тому ці з'єднання можуть передавати значні крутні моменти. Крім того, вони забезпечують добре центрування колеса і вала, що має важливе значення для швидкохідних передач.

Шліці бувають прямокутного, трикутного та евольвентного профілів. Найбільш поширені прямокутні шліці (ГОСТ 1139—80), де передбачається три виконання А, В, С і три серії виконання: легка, середня, важка. Основні параметри (рис. 16.33): число зубців  $z$ , внутрішній діаметр  $d$ , зовнішній діаметр  $D$ , ширина зуба  $b$ .

Характер виконання западин (А чи В) залежить від способу центрування з'єднання:

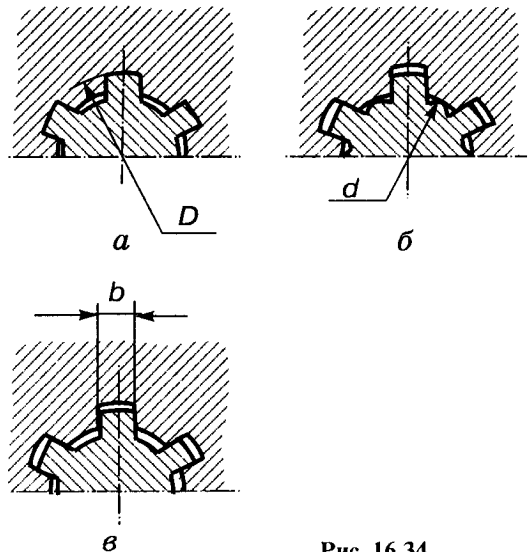


Рис. 16.34

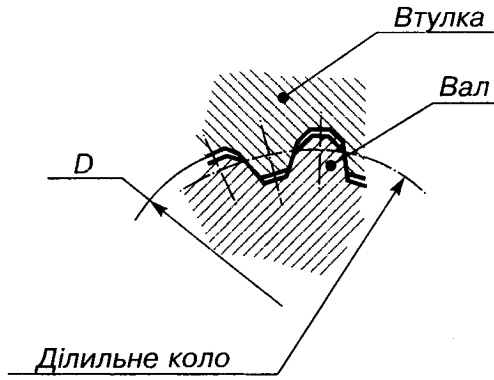


Рис. 16.35

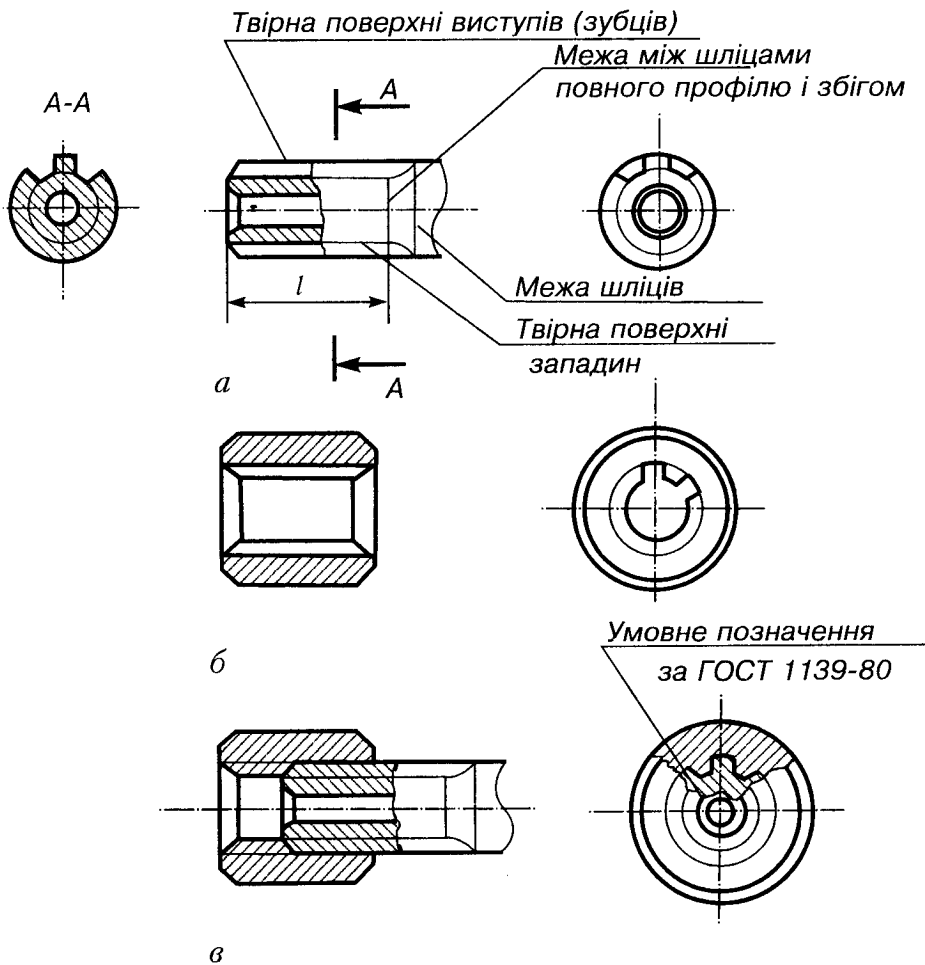


Рис. 16.36



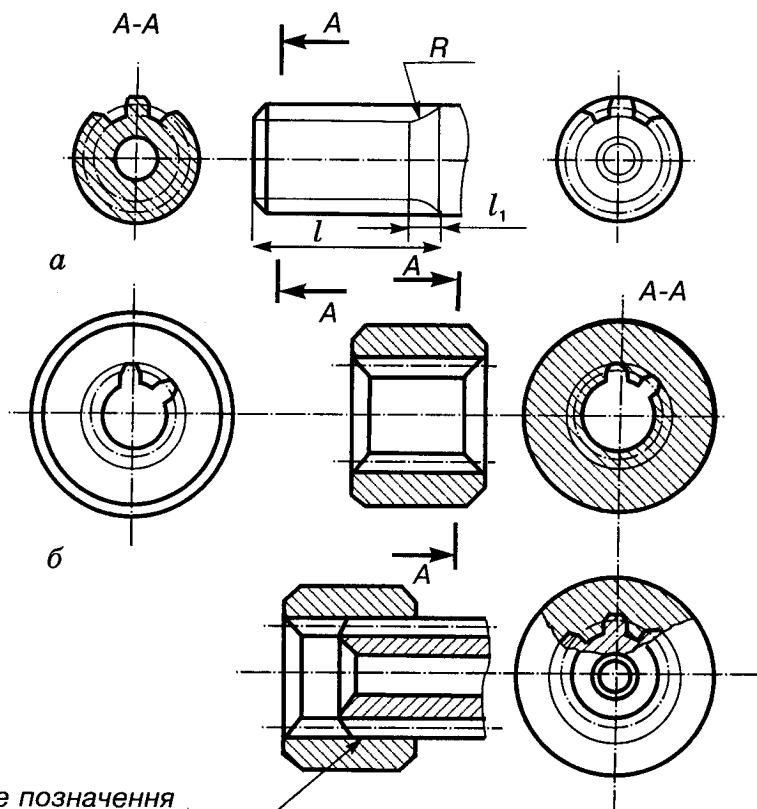


Рис. 16.37

а) за товщиною зуба  $b$  (рис. 16.34, в);  
 б) за зовнішнім діаметром  $D$  (рис. 16.34, а);  
 в) за внутрішнім діаметром  $d$  (рис. 16.34, б).

Позначення втулки при centruванні за внутрішнім діаметром  $d$  (ГОСТ 1139—80) таке:  $d - 8 \times 36H7 \times 40H12 \times 709$ , де  $d$  — вид centruвання; 8 — число зубців; 36 — внутрішній діаметр з полем допуску  $H7$ ; 40 — зовнішній діаметр з полем допуску  $H12$ ; 7 — ширина зуба з полем допуску 09.

Позначення для вала:  $d - 8 \times 36e8 \times 40a11 \times 718$ .

У цих позначеннях немає вказівок на виконання зуба (визначає технолог при виготовленні), а також серію (ця інформація задається числом зубців і значеннями діаметрів, які визначають міцність деталей).

Шліцьове з'єднання з евольвентним профілем зубців (ГОСТ 6033—80) передбачає основне centruвання за бічними поверхнями зубців (рис. 16.35). Основні параметри його: номінальний діаметр  $D$ , модуль  $m$ , число зубців  $z$ .

Приклади позначення: з'єднання —  $50 \times 2 - 9H/9g$  ГОСТ 6033—80; втулки —  $50 \times 2 - 9H$  ГОСТ 6033—80; вала —  $50 \times 2 - 9g$  ГОСТ 6033—80, де 50 — номінальний діаметр; 2 — модуль; 9H, 9g — поля допусків.

Згідно з ГОСТ 2.409—74 на кресленнях шліцьові з'єднання та їхні деталі зображують спрощено (рис. 16.36, а...в).

Для евольвентних шліців показують, крім того, штрихпунктирною тонкою лінією твірні та кола дільного діаметра (рис. 16.37).

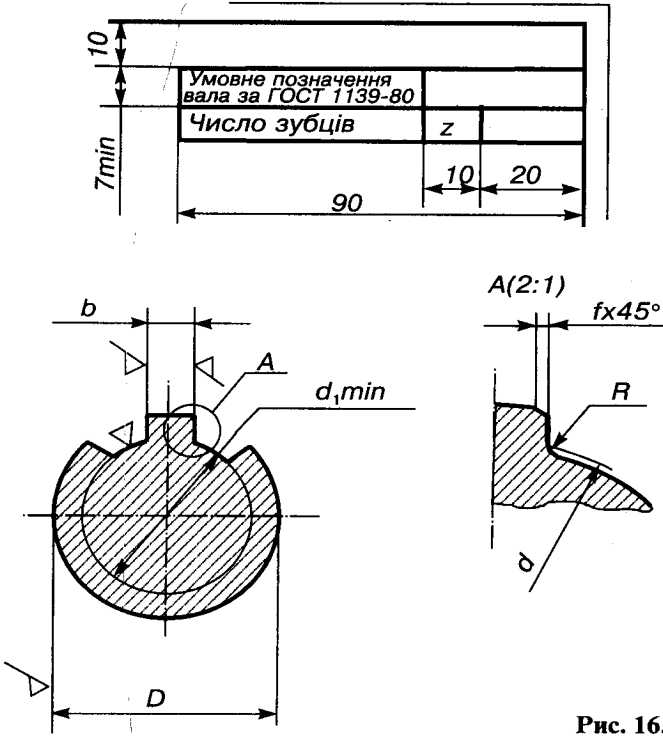


Рис. 16.38

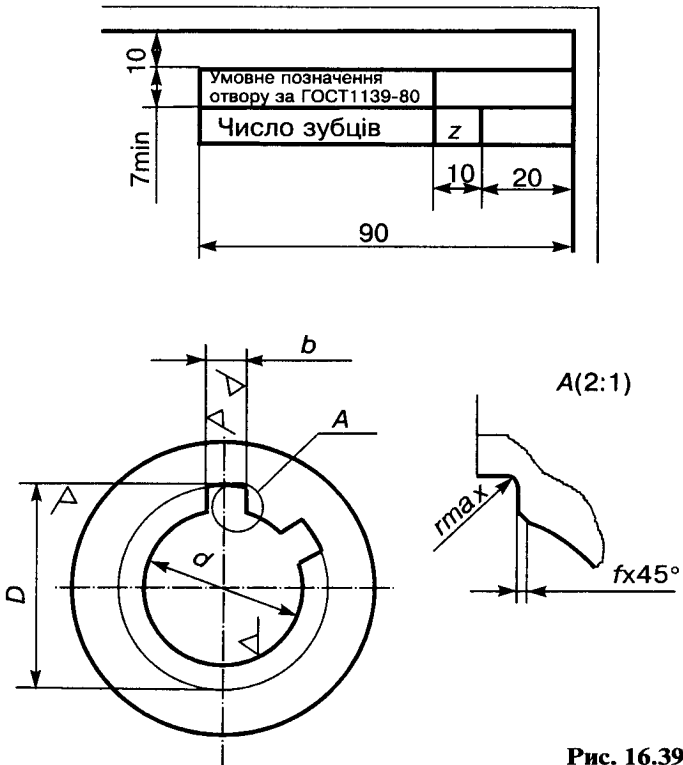


Рис. 16.39

Робочі креслення шліцьових деталей виконують за ГОСТ 2.409—74. На зображеннях деталей зубчастих з'єднань прямобічного профілю, утворених проєкціюванням на площину, перпендикулярну до осі, показують розміри та граничні відхилення діаметрів виступів  $D$ , западин  $d$ , товщину зубців валів  $b$ , а також ширину  $b$  западин отворів (рис. 16.38 і рис. 16.39). Звертаємо увагу на обов'язкове виконання й заповнення таблиці у правому верхньому куті креслення.

### 16.5. Зварні з'єднання

Зварні з'єднання є найбільш поширеними нерознімними з'єднаннями. Вони утворюються при розплавленні металу в зоні стику і його подальшому затвердінні. Метал, що затвердів після розплавлення, називають *зварним швом*. Зварні шви дістають зварюванням, плавленням і тиском. У першому випадку застосовують електродугове (Е), ручне (Р), напівавтоматичне (П), автоматичне (А) або газове (Г) зварюван-

ня. Одним з видів зварювання тиском є контактне (КТ) зварювання, що поділяється на точкове, роликове, рельєфне та стикове.

Зварні шви класифікують за такими ознаками:

1) за способом взаємного розміщення зварюваних деталей (рис. 16.40,  $a...z$ ) — стикові (С), кутові (У), таврові (Т), внапусток (Н);

2) за формою підготовки кромок — без скосу кромок (рис. 16.41,  $a$ ); з відбортовуванням (рис. 16.41,  $б, в$ ); з різноманітними скосами кромок (рис. 16.41,  $г$ );

3) за характером виконання — суцільні, переривчасті, точкові, одnobічні й двобічні.

Зварні шви на кресленнях зображують умовно за правилами ГОСТ 2.312—72, а саме:

а) незалежно від способу зварювання видимі шви зображують суцільною товстою основною лінією, а невидимі — штриховою (рис. 16.42,  $a$ );

б) видиму одиничну зварну точку умовно показують знаком +, виконаним суцільною товстою основною лінією, невидимі одиничні точки не зображують (рис. 16.42,  $б$ ).

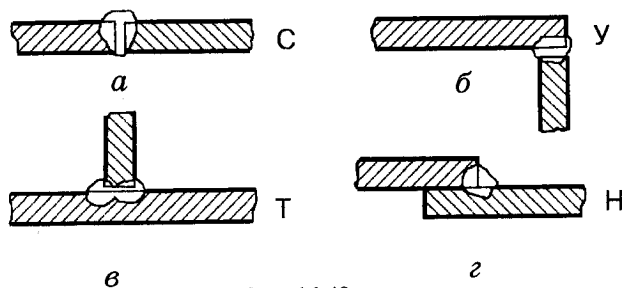


Рис. 16.40

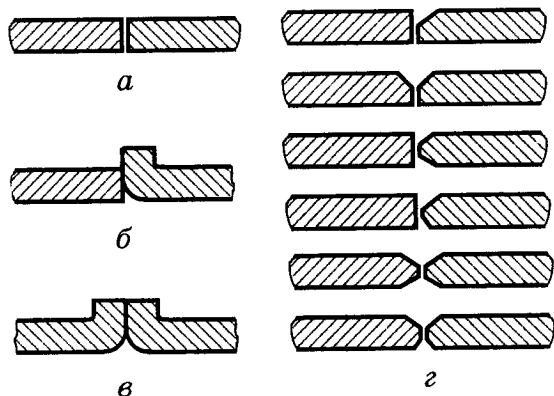


Рис. 16.41

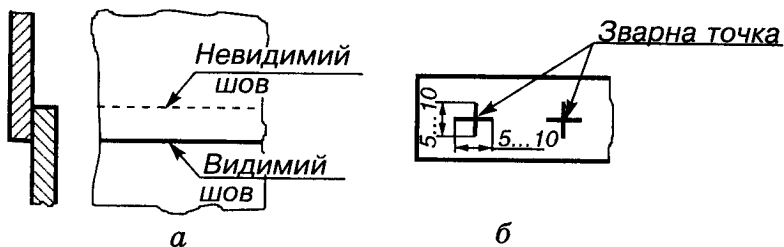


Рис. 16.42

Для позначення типу зварного шва від його зображення проводять лінію-виноску, що починається односторонньою стрілкою. Для видимого шва над полчиною, а для невидимого — під полчиною записують необхідні параметри стандартного зварного шва:

- номер стандарту на тип і конструктивні елементи зварного шва;
  - літерно-цифрове позначення шва за цим стандартом (беруть з таблиць);
  - спосіб виконання зварювання (можна не зазначати);
  - знак і розмір катета шва;
  - знак і параметри переривчастих швів.
- Наприклад, позначення

ГОСТ 5264—80-ТЗ-РнЗ-Δ6-50Z100  $\ominus$   $\nabla^{2,5/}$

означає шов, виконаний по периметру (знак  $\ominus$ , ще є знак  $\lrcorner$  — монтажний шов відповідно до ГОСТ 5264—80); ТЗ — тавровий двобічний без скосу кромки; РнЗ — спосіб зварювання (можна не позначати); 6 — катет шва, мм; 50Z100 — переривчастий шаховий шов; 50 — відстань між швами; 100 — крок шва;  $\ominus$  — підсилення шва зняти (є ще знак  $\omega$  — напливи та нерівності шва обробити з плавним переходом до ос-

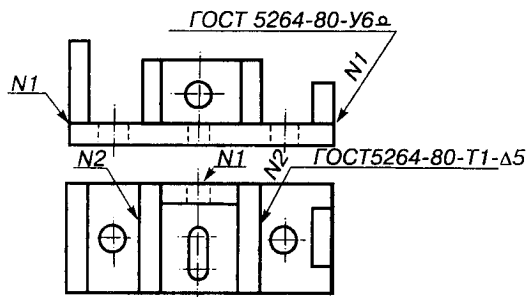


Рис. 16.43

новного металу);  $\nabla^{2,5/}$  — знак шорсткості поверхні для оброблюваних швів.

У кінці може стояти знак  $\square$  — шов уздовж незамкнутої лінії, якщо знака  $\circ$  немає, а із зображення зрозуміла конфігурація незамкнутої лінії.

Якщо у виробі є кілька однакових зварних швів, то їх позначають одним номером. На одному із швів наносять повне його позначення, а на решті — присвоєний номер (рис. 16.43).

## 16.6. Заклепкові з'єднання

Нерознімне з'єднання деталей, яке виконують за допомогою заклепки, називають *заклепковим*. У скріплюваних деталях свердять отвір, діаметр якого дорівнює 1,05 діаметра заклепки (рис. 16.44, а). В одержаний таким чином отвір вставляють заклепку (рис. 16.44, б) і виступну її частину розклепують до утворення замикальної головки (рис. 16.44, в, г).

Заклепки виготовляють з досить пластичних матеріалів: сталей марок Ст2 (умовне позначення — 00), Ст3 (02), сталі — 10 і 10кп (01), з нержавіючої сталі — 12Х18Н9Т (21), латуні — Л63 (32), міді — М3 (38), алюмінієвих сплавів — Д18 (36), АД1 (37) та ін.

Випускають заклепки з напівкруглою (ГОСТ 10299—80), потайною (ГОСТ 10300—80), напівпотайною (ГОСТ 10301—80) і плоскою головками (ГОСТ 10303—80) класів точності В і С, з покриттям і без нього.

Приклад позначення: Заклепка С8 × 20, 38.М3.136 ГОСТ 10299—80, де С — клас точності (клас В не записують); 8 — діаметр; 20 — довжина; 38 — група матеріалу; М3 — марка матеріалу (мідь); 136 — вид (13) і товщина (6) покриття.

Діаметр  $d$  заклепки залежить від товщини  $\delta$  скріплюваних листів і спочатку виз-

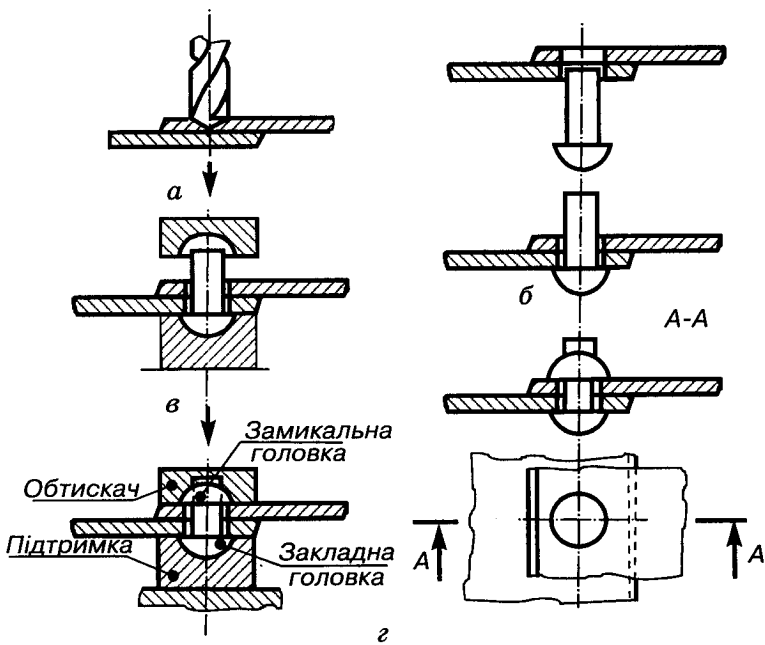


Рис. 16.44

начається за формулою  $d = \delta + (6 \dots 8)$ , мм, а потім уточнюється за таблицями стандарту, що рекомендує такі значення: 1,2; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12 і т. д.

Довжину  $l$  стержня заклепки приблизно визначають за формулою  $l = 2\delta + 1,5d$  або за таблицями (ГОСТ 14802—85) із такого ряду: 2...20; 22; 24; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 46; 48; 50 і т. д.

У з'єднанні заклепки розміщуються рядами, сукупність яких утворює заклепковий шов. Ці шви можуть бути однорядними (рис. 16.45, а, з), дворядними (рис. 16.45, б, в) та багаторядними. Залежно від розміщення заклепок у рядах їх поділяють на паралельні та шахові (рис. 16.45, б). За взаємним розміщенням з'єднаних деталей шви бувають внапусток (рис. 16.45, а...в) і стикові (рис. 16.45, з).

Заклепковий шов зображують у двох проєкціях: головне зображення (простий або ступінчастий розріз) та вигляд зверху.

На рис. 16.45 показано однорядний та різноманітні дворядні шви. Розраховують їх за такими формулами:

— шов внапусток однорядний (рис. 16.45, а):  $d = \delta + 8$  мм;  $d_1 = 1,1d$ ;  $t = 2d + 8$  мм;  $l_1 = 1,5d$ ;  $L = 2\delta + 1,5d$  ( $L$  — тут і далі довжина непоставленої заклепки);

— шов внапусток дворядний шаховий (рис. 16.45, б):  $d = \delta + 8$  мм;  $d_1 = 1,1d$ ;  $t = 2,6d + 15$  мм;  $l_1 = 1,5d$ ;  $l = 0,6t$ ;  $L = 2\delta + 1,5g$ ;

— шов внапусток дворядний паралельний (рис. 16.45, в):  $d = \delta + 8$  мм;  $d_1 = 1,1d$ ;  $t = 2,6d + 10$  мм;  $l_1 = 1,5d$ ;  $l = 0,8t$ ;  $L = 2\delta + 1,5d$ ;

— шов стиковий однорядний з двома накладками (рис. 16.45, з):  $d = \delta + 8$  мм;  $d_1 = 1,1d$ ;  $t = 2d + 8$  мм;  $l_1 = 1,5d$ ;  $\delta_1 = 0,8d$ ;  $L = \delta + 2\delta_1 + 1,5d$ .

На складальних кресленнях і кресленнях загальних виглядів заклепкові шви можна показувати умовно. При цьому кожен тип заклепки має свій умовний знак. На вигляді зверху наносять розміри між заклепками та між рядами, а положення заклепок позначають умовними знаками (рис. 16.46, а), центровими або осьовими лініями. Якщо є різні типи заклепок, то роблять так, як показано на рис. 16.46, б, в.

Позначення заклепок виконують на полиці-виносці або записують у специфікації чи в спеціальній таблиці.

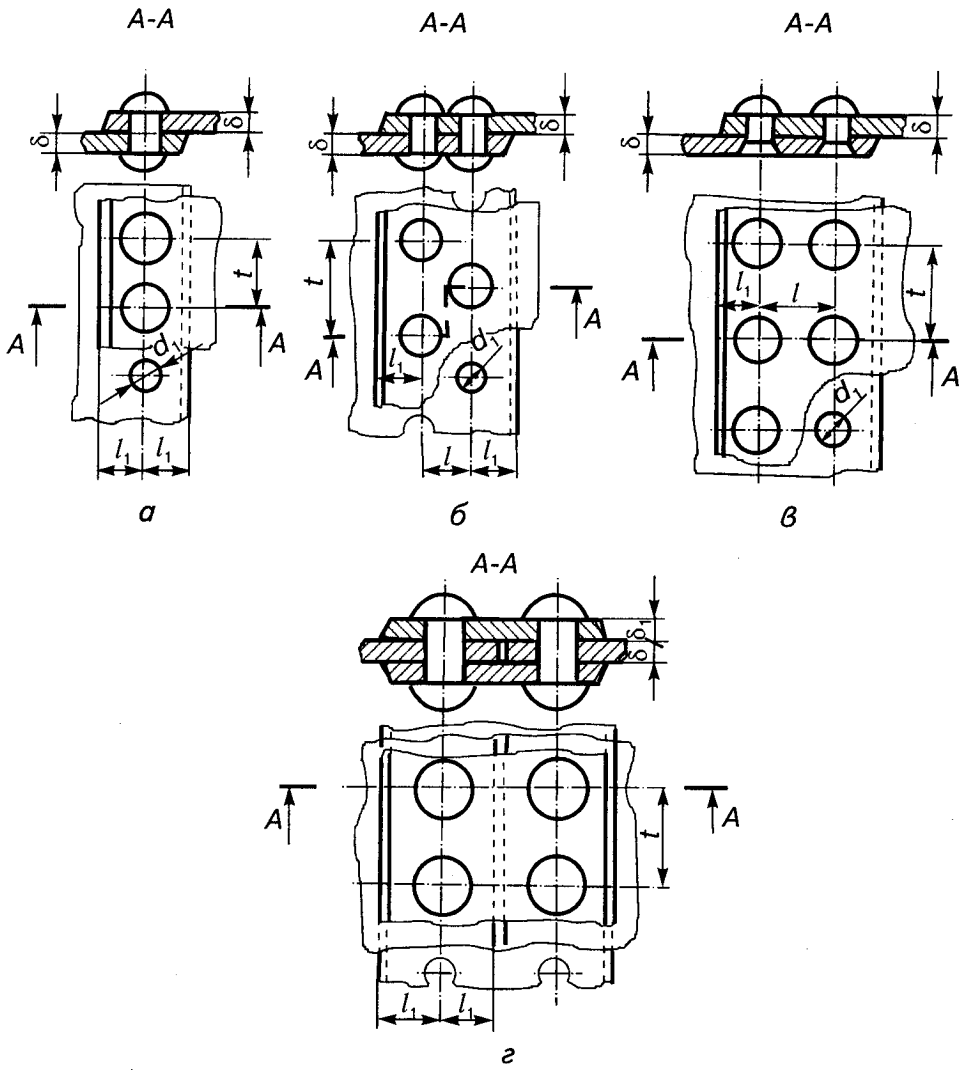


Рис. 16.45

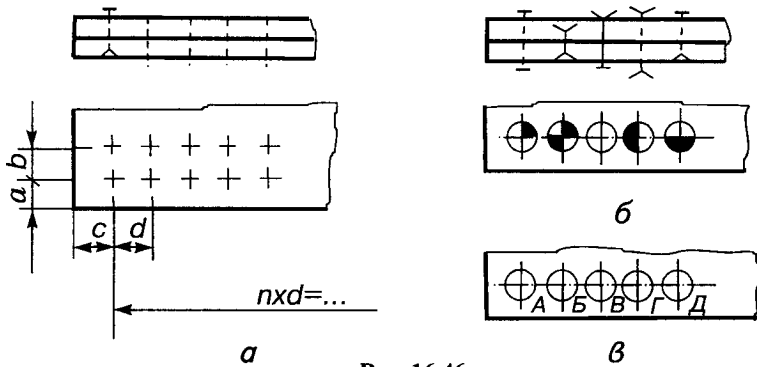


Рис. 16.46

## 16.7. З'єднання паянням, склеюванням та зшиванням

Під час паяння деталі з'єднуються завдяки розплавленню та охолодженню припою.

Припої бувають: олов'яні (ПО), олов'яно-свинцеві (ПОС), цинкові (ПЦ) та ін. Марку припою записують у технічних вимогах за типом: ПОС 40 ГОСТ 21931—76.

Незалежно від способу паяння шви на виглядах та розрізах зображують згідно з ГОСТ 2.313—82 суцільною лінією завтовшки  $2s$  (рис. 16.47). На лінії-виносці, що починається від шва двосторонньою стрілкою, розміщують умовний знак паяння, схожий на літеру С, який виконують суцільною основною лінією. Шов по замкненій лінії позначають тим самим знаком, що й зварні шви.

Так само зображують клейові з'єднання, проте знак тут схожий на літеру К (рис. 16.48).

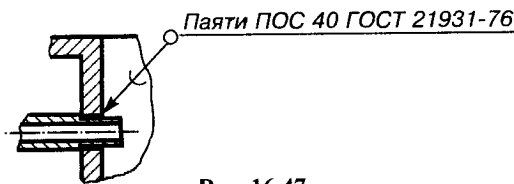


Рис. 16.47

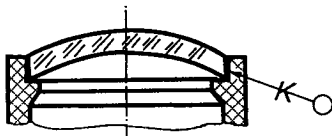


Рис. 16.48

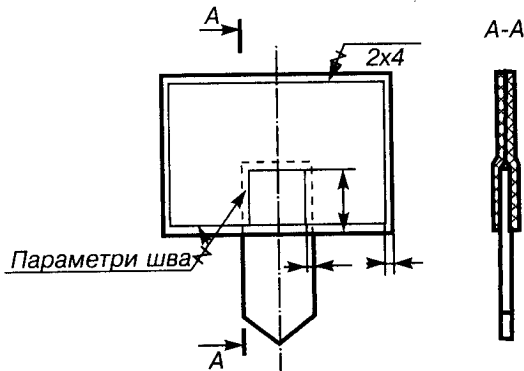


Рис. 16.49

Марку клею записують у технічних вимогах: "Клей БФ6 ГОСТ..." або в специфікації в розділі "Матеріали".

Шви з'єднань, одержаних зшиванням, зображують тонкою суцільною лінією, від якої відводиться лінія-виноска з умовним знаком зшивання, схожим на латинську літеру N. Товщина лінії знака —  $s$  (рис. 16.49).

Якщо з'єднання має кілька однакових швів, то зображують тільки один, який розміщується ближче до краю, а кількість швів і відстань між ними показують під поличкою лінії-виноски.

Усі необхідні дані про шов розміщують у технічних вимогах (ТВ), а номер пункту ТВ зазначають на поличці лінії-виноски.

## 16.8. Зубчасті передачі

Зубчасті передачі призначені для передавання обертального руху з одного вала на інший або для перетворення обертального руху в поступальний. Їхніми елементами є зубчасті колеса.

Залежно від взаємного розміщення валів застосовують циліндричні (прямозубі, косозубі або шевронні) зубчасті колеса, якщо вали паралельні (рис. 16.50, а), і конічні (прямозубі або косозубі) колеса, якщо осі валів перетинаються (рис. 16.50, б). Для передачі руху між мимобіжними валами застосовують головним чином черв'ячні передачі (рис. 16.51).

**Циліндрична зубчаста передача.** Крутий момент між валами передається в результаті взаємодії виступів (зубців) коліс. На рис. 16.52 зображено основні елементи зубчастого колеса. Поверхню, на якій розміщуються вершини зубців, називають *поверхнею виступів*. Западини розміщуються на поверхні западин. Розрізняють вершину зуба та його основу.

При нормальному зачепленні двох циліндричних коліс основними геометричними фігурами є початкові циліндри, тобто такі умовні поверхні, які при обертанні коліс перекочуються одна по одній без ковзання. Цим циліндром є, наприклад, ділильне коло, що поділяє зуб на головку та ніжку (див. рис. 16.52).

Згідно з ГОСТ 16531—83 основними параметрами зубчастого евольвентного колеса є:

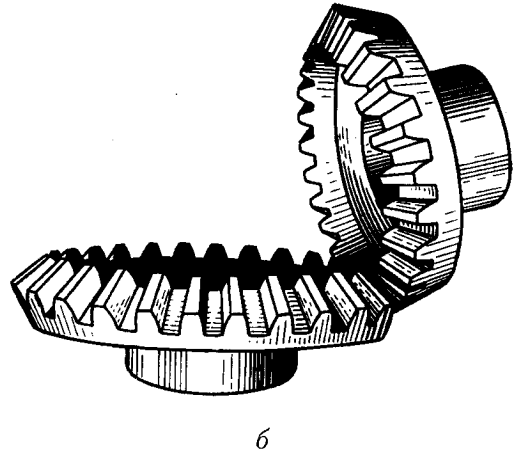
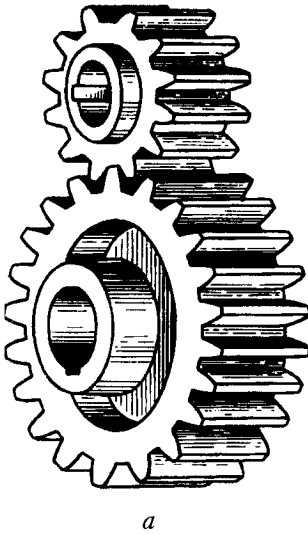


Рис. 16.50

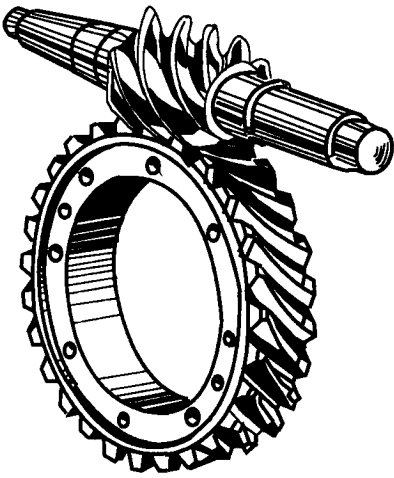


Рис. 16.51

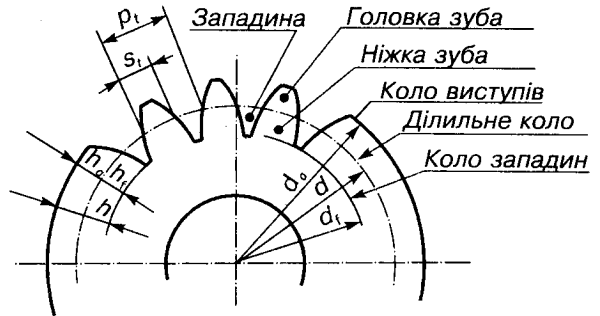


Рис. 16.52

1) діаметр ділильного кола  $d$ ;  
 2) модуль зачеплення — число, яке показує, скільки міліметрів діаметра ділильного кола припадає на один зуб, тобто  $m = d/z$ .

Ряд цих величин стандартизовано. Найбільш поширені такі значення (ГОСТ 9563—60): 0,5; 0,6; 0,8; 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12.

За допомогою наведених параметрів можна повністю розрахувати решту величин, що характеризують зачеплення.

Висота головки зуба  $h_a = m$ , висота його ніжки  $h_f = 1,25m$ , діаметр кола виступів  $d_a =$

$= m(z + 2)$ , а діаметр кола западин  $d_f = m(z - 2,5)$ . Використовуючи ці співвідношення, можна обчислити значення модуля для реального нормального циліндричного колеса:  $m = d_n/(z + 2)$ . У навчальних цілях так і роблять, округляючи потім здобуте значення до найближчого за ГОСТ 9563—60.

Крок зачеплення  $p_f$  — це відстань між однаковими точками профілю суміжних зубців, виміряна по дузі ділильного кола. Зрозуміло, що  $p_f = nd/z$ .

Параметри зубчастих коліс різних видів задають на робочих кресленнях у спеціальних таблицях, на самих зображеннях,



у технічних вимогах (ГОСТ 2.403—75, ГОСТ 2.404—75, ГОСТ 2.405—75, ГОСТ 2.406—76, ГОСТ 2.407—75 і ГОСТ 2.408—68).

При зображенні циліндричних зубчастих коліс дозволяються такі умовності:

1. Поверхню вершин та її твірну зображують суцільною основною лінією, а поверхню западин та її твірну — суцільною тонкою

лінією. Ділильну поверхню та її твірні зображують штрихпунктирною тонкою лінією.

2. Зубці креслять тільки в осьових розрізах, зображуючи їх нерозсіченими. На інших зображеннях показують тільки поверхню їхніх виступів. Якщо треба показати профіль зуба, то оформляють це виносним елементом або зображують його на обмеженій ділянці деталі.

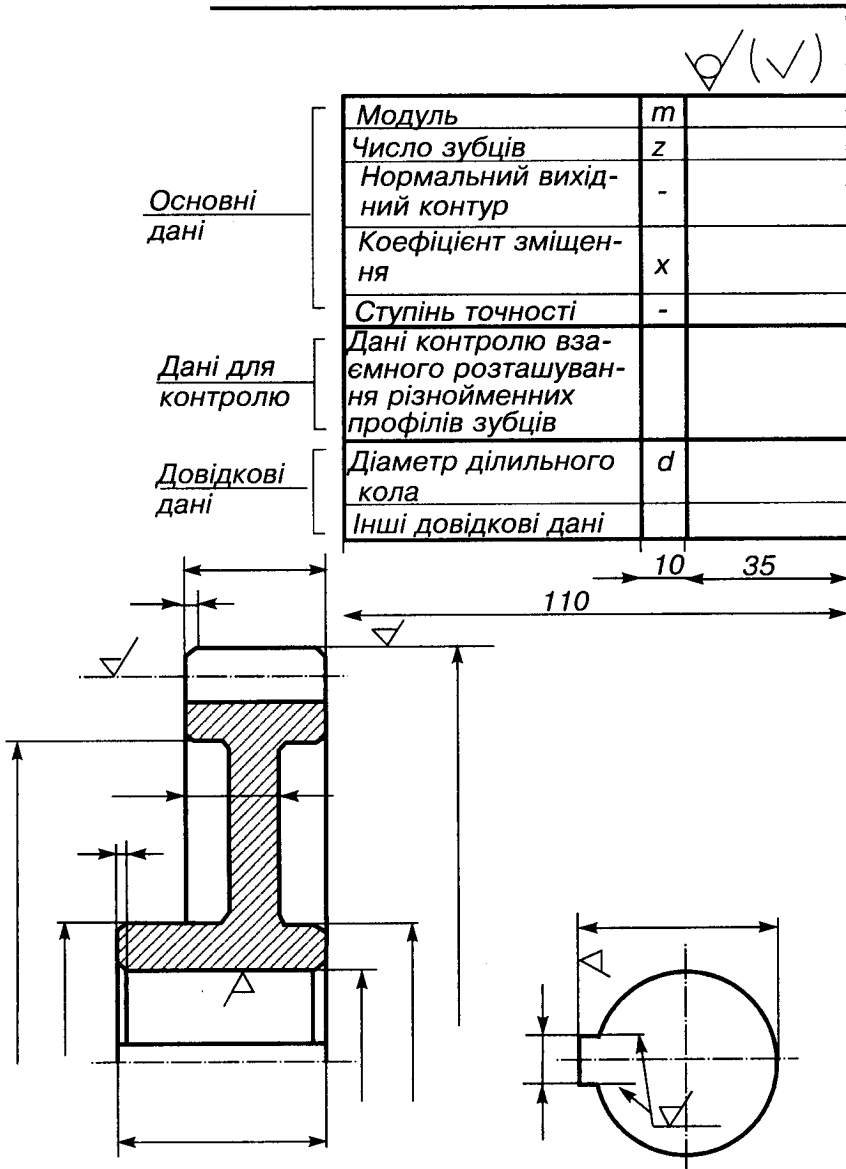


Рис. 16.53

3. Напрямок зубців для косозубих коліс показують у разі потреби трьома тонкими лініями з нахилом поблизу осі колеса.

На рис. 16.53 зображено фрагмент робочого креслення прямозубого зубчастого колеса, де показано розміщення та розміри таблиці параметрів. У разі потреби окремі рядки з неї можна опускати.

Зазначимо, що для нормальних коліс початкове коло збігається з ділительним. Для коліс, що зазнають корекції з метою поліпшення властивостей зачеплення, співвід-

ношення між висотою головки та ніжки зуба стає іншим, і початкове коло не збігається з ділительним, яке стає зв'язаним з розрахунками та модулем зачеплення. У таблиці подано діаметри ділительного кола, щоб урахувати необхідність запису параметрів коригованих коліс.

У циліндричній зубчастій передачі менше колесо (ведуче) називають *шестернею*, більше (ведене) — *зубчастим*. Обидва колеса повинні мати однакові модуль та геометричні параметри зуба. Передача характери-

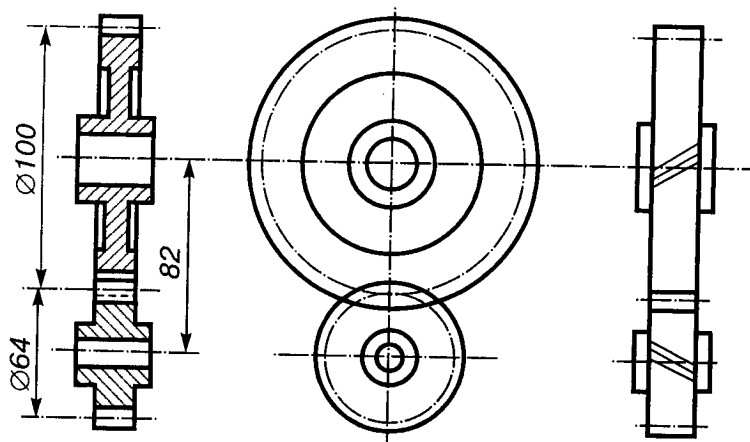


Рис. 16.54

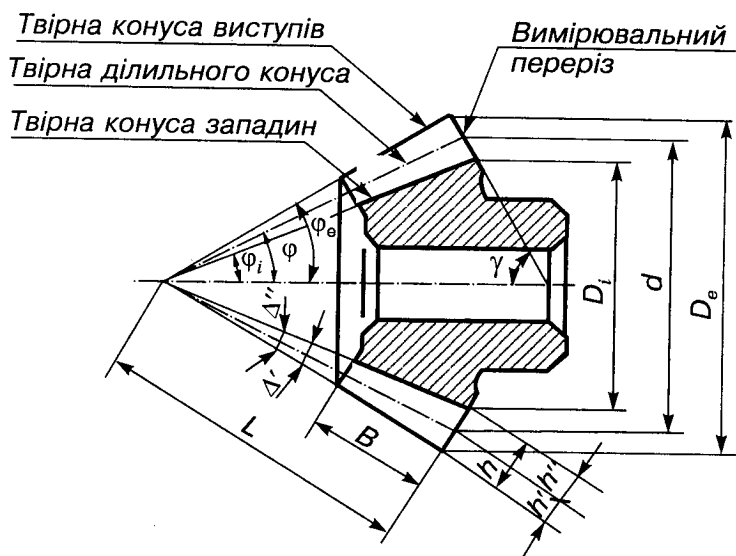


Рис. 16.55

$20$ $7\text{min}$		$\checkmark$ ( $\checkmark$ )
Зовнішній модуль кола	$m_e$	
Число зубців	$z$	
Тип зуба	-	
Вихідний контур	-	
Коефіцієнт зміщення	$x_e$	
Коефіцієнт зміни товщини зуба	$x_t$	
Кут ділильного конуса	$\delta$	
Ступінь точності	-	
Розміри зуба у вимірюваль- ному перерізі		
Міжосьовий кут передачі	$\Sigma$	
Середній окружний модуль	$m_m$	
Зовнішня конусна відстань	$R_e$	
Середня конусна відстань	$R$	
Середній ділильний діаметр	$d$	
Кут кінця западин	$\delta_f$	
Зовнішня висота зуба	$h_e$	
Позначення рисунка спря- женого зубчастого колеса		

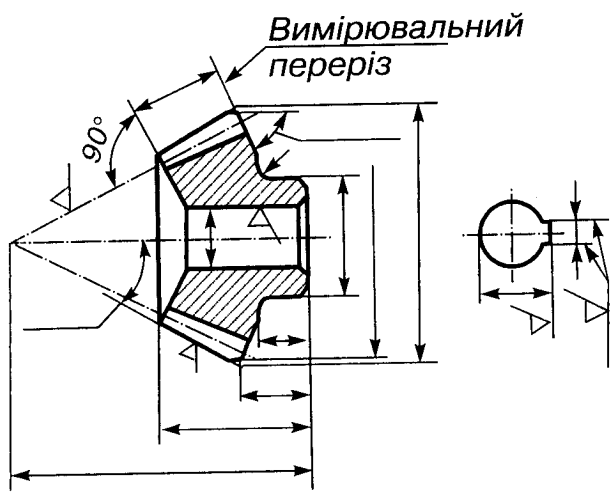


Рис. 16.56

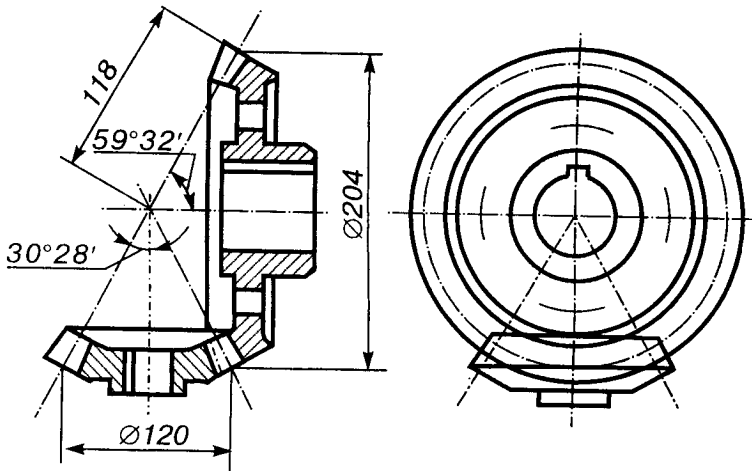


Рис. 16.57

зується передаточним числом — відношенням кількості обертів  $n_1$  ведучого колеса до кількості обертів  $n_2$  веденого колеса, тобто

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Для зображення передачі треба, крім формул зачеплення, мати конструктивні розміри елементів вала та маточини колеса.

Будуючи зображення, враховують такі основні положення (ГОСТ 2.402—68):

1. Циліндричну передачу зображують у фронтальному осьовому розрізі та вигляді зліва. При цьому проставляють розміри (рис. 16.54), а також діаметри валів зовні коліс та в зоні посадки коліс.

2. Лінії початкових кіл ведучого та веденого коліс стикаються.

3. Лінії кіл виступів обох коліс зовні зачеплення зображують суцільною основною лінією.

4. На головному зображенні в розрізі зуб ведучого колеса показують перед зубом веденого колеса (рис. 16.54).

**Конічна зубчаста передача.** Кут між осями валів конічної зубчастої передачі може бути як прямим, так і непрямым.

Конічні колеса можуть мати прямий або косий зуб.

Крім понять та параметрів, спільних з циліндричними колесами, конічні колеса мають ряд специфічних понять, зокрема, початковий конус, конус виступів тощо (рис. 16.55). Для конічних коліс *початковим* називається коло, що є основою початкового конуса. Діаметри кола виступів, западдини, висоту головки та ніжки зуба визначають за допомогою так званого вимірювального перерізу (рис. 16.55), в якому розміщене початкове коло.

Зображення конічних коліс регламентує ГОСТ 2.405—75. Фрагменти зображення і таблицю параметрів наведено на рис. 16.56.

Для зображення конічного зачеплення (рис. 16.57) застосовують ті самі правила та спрощення, що й для зображення циліндричних передач.

На основі цих правил можна самостійно ознайомитися з правилами зображення інших зубчастих коліс, черв'яків, рейок і передач (ГОСТ 2.402—68, ГОСТ 2.404—75, ГОСТ 2.406—76, ГОСТ 2.407—75 і ГОСТ 2.408—68).

### Запитання та завдання

1. Які рознімні та нерознімні з'єднання найбільше застосовують у техніці?
2. Які види різьби розрізняють залежно від її профілю?
3. Які основні види кріпильних деталей? Призначення їх.
4. Записати позначення стандартного болта, гвинта, шпильки та розшифрувати їх.

5. Як спрощення допускають при зображенні різьбових з'єднань?
6. Побудувати ескіз гвинта, наполовину загвинченого в глухий отвір.
7. Що таке трубна різьба, які її параметри, як вона позначається на кресленні?
8. Що таке збіг різьби і яке його застосування?
9. Назвати основні види шпонок. Призначення їх.
10. У чому полягають умовності при зображенні шліцьових деталей та їх з'єднання?
11. Як записати позначення шліцьового вала, втулки?
12. Як умовно позначити заклепки на кресленні?
13. За якими ознаками класифікують зварні шви?
14. Як умовно зображують та позначають зварні шви?
15. Як умовно позначають з'єднання паянням, склеюванням і шиванням?
16. Які основні параметри циліндричного зубчастого колеса?
17. Як умовно зображують циліндричне зубчасте колесо та циліндричні передачі? Які при цьому існують правила?
18. Як умовно зображують конічні зубчасті колеса та їхні передачі?



## Глава 17 КРЕСЛЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Креслення загального вигляду (надалі — “креслення ВО”) належать до конструкторської документації, що виконується на стадії проєкціювання виробу і призначається (після розробки конструктором і внесення змін у результати узгодження зі службами підприємства-виробника) для деталювання й складання робочої документації (складальні креслення, робочі креслення деталей, маршрутні та технологічні карти тощо). Характерною рисою креслення загального вигляду є якомога повна інформація відносно кожної деталі й складальної одиниці в цілому щодо форми, розмірів, взаємодії деталей, характеру з'єднань їх тощо.

### 17.1. Читання креслень загального вигляду

Складовими частинами креслень загального вигляду є:

— зображення складальної одиниці, доповнене відповідними розмірами та посадками для спряжених поверхонь;

— текстова частина, що містить технічну характеристику, технічні вимоги, а також інші пояснення і вказівки;

— схема розподілу складальної одиниці на складові частини (у разі потреби). Схему оформляють у вигляді чотирикутників (ГОСТ 2.711—82), що відповідають розподілу складальної одиниці на розроблювані (оригінальні), запозичені та куповані деталі (рис. 17.1). Чотирикутники сполучають між собою лініями, які характеризують зв'язки між деталями;

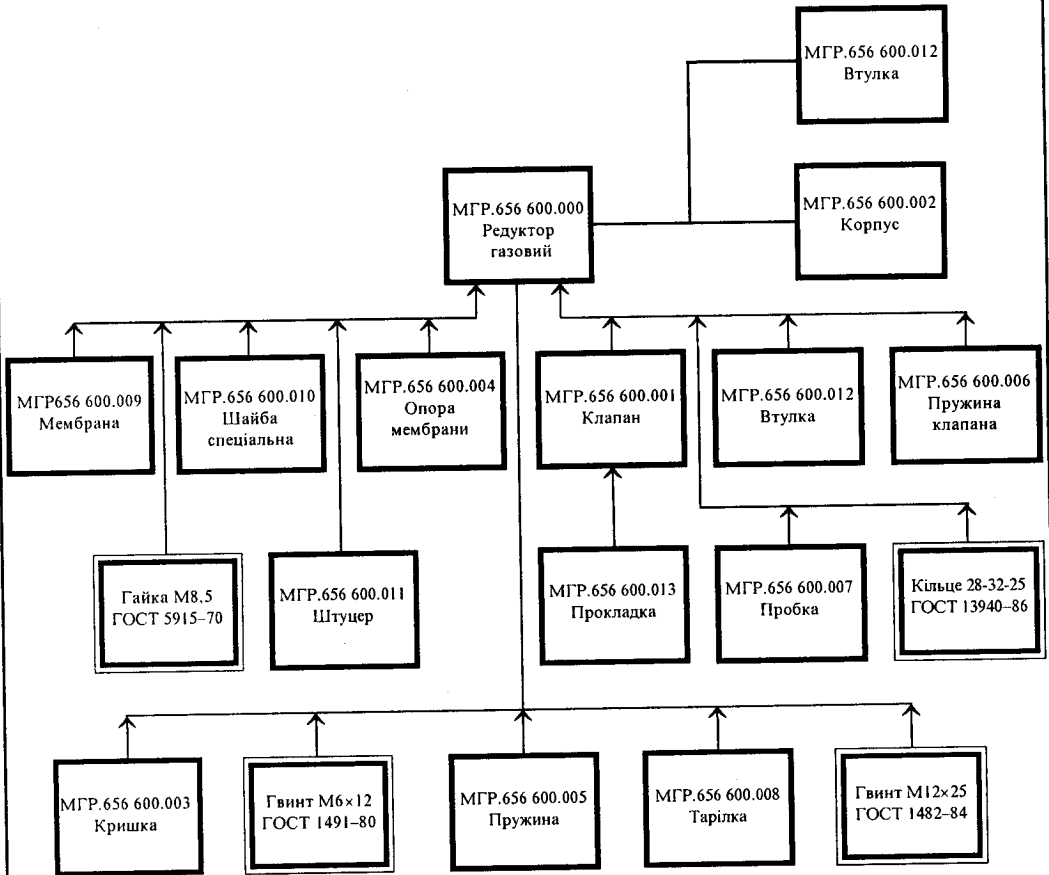
— таблиця переліку та позначення складових частин виробу, що розміщується на тому самому аркуші, що й зображення, або на окремих аркушах А4 як наступних аркушах креслення ВО і згідно з розподілом складальної одиниці на складові частини містить дані про розроблювані, запозичені та покупні деталі (рис. 17.2).

Рекомендується така послідовність читання креслення ВО:

1. Ознайомлення з найменуванням і призначенням складальної одиниці, її розмірами, масою, масштабом зображення.

2. Вивчення за таблицею переліку співвідношення кількості деталей у кожній складовій частині, зіставлення їхніх найменувань з номерами позицій та вивчення конструкції взагалі.

МГР. 656 600. 000



					МГР. 656 600. 000			
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підп.	Дата				
Розроб.					Редуктор газовий Схема розподілу структурна	Літера	Аркуш	Аркушів
Перевір.								
Н. контр.								
Затверд.								

Рис. 17.1



3. Вивчення зображень, уявлення форми, призначення й розмірів оригінальних деталей.

4. Вивчення способів взаємодії деталей, їхніх з'єднань, способу передачі руху, взаємодії виробу з іншими виробами.

5. З'ясування способу розбирання й складання виробу та його складових частин.

Читання креслення ВО передує його деталюванню.

### **17.2. Деталювання креслень загального вигляду**

Деталювання креслення ВО полягає в побудові робочих креслень оригінальних деталей. Це творчий процес, а не просте копіювання зображень та нанесення розмірів. Він складається з таких послідовних етапів:

1. Вивчення зображень деталі, її внутрішньої та зовнішньої форм.

2. Вибір головного зображення (згідно з вимогами параграфа 15.2).

3. Вибір вигляду та розміщення інших зображень (вигляди, розрізи, перерізи, виносні елементи) деталі за умов повного відображення її форм та розмірів. Ці зображення, як і головне, можуть збігатися або не збігатися із зображеннями тієї самої деталі на кресленні ВО.

4. Складання текстової частини робочого креслення (технічні вимоги, примітки тощо).

5. Вибір формату аркуша залежно від масштабу зображень та об'єму текстової частини.

6. Виконання зображень, крім штриховки.

7. Нанесення розмірних і виносних ліній. Обчислення дійсного масштабу зображень ВО та розмірів деталі й нанесення розмірних чисел на робочому кресленні деталі.

8. Позначення шорсткості поверхонь деталі, виходячи з умов її роботи, функціонального призначення, технології виготовлення.

9. Нанесення штриховки на розрізах та перерізах.

10. Виконання рамки креслення, графі 26 та основного напису.

11. Виконання текстової частини робочого креслення, заповнення графі 26 та основного напису. В графі "Матеріал" записують його позначення з таблиці переліку.

Робочі креслення на запозичені та стандартні деталі не виконують.

### **17.3. Врахування умовностей та спрощень креслень загального вигляду при деталюванні їх**

Під час розробки креслень ВО відповідні стандарти допускають ряд умовностей і спрощень, які слід враховувати при деталюванні креслень.

1. Деталі зображують у тому вигляді, в якому вони надходять на складання, тобто з'єднувальні деталі (заклепки, гвинти тощо) мають бути відокремленими.

2. На робочому кресленні обов'язково зображують усі ті подробиці, які можна показувати на кресленнях ВО (фаски, проточки, галтелі, недоріз різьби, ливарні та штампувальні похили і конусності тощо). Їхні розміри беруть з відповідних стандартів та інших нормативних документів.

3. Наводять позначення або зображення стандартизованих елементів деталі (центрові отвори, шпонкові пази тощо), пов'язуючи конструкцію та розміри їх з відповідними стандартами.

4. Наносячи розміри, слід враховувати технологічні та конструктивні вимоги й особливості:

а) розміри, зняті з креслення ВО, узгоджують з нормальними рядами довжин, кутів, діаметрів, фасок і т. д.;

б) діаметри прохідних отворів під болти, гвинти, шпильки тощо визначають за стандартами залежно від діаметра кріпильної деталі та ступеня складання.

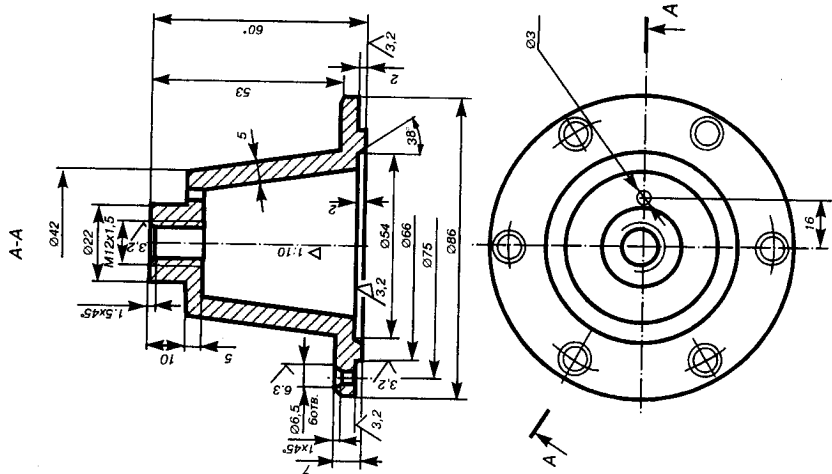
Особливу увагу слід звернути на узгодження розмірів спряжених поверхонь та відповідність їхніх граничних відхилень характеру посадки.

5. Шорсткість поверхонь призначають залежно від характеру їх з'єднання. Спряжені поверхні мають більш високі вимоги щодо шорсткості, ніж вільні. Практика виробила межі шорсткості щодо конкретних видів з'єднань (див. табл. 15.1).

6. Граничні відхилення розмірів і допуски форми та розміщення поверхонь позначають на навчальних кресленнях за аналогією із зразковими деталями з альбомів, враховуючи характер функціонування поверхні в складальній одиниці (див. рис. 17.3, рис. 17.4, рис. 17.5).



МГР.656.600.003



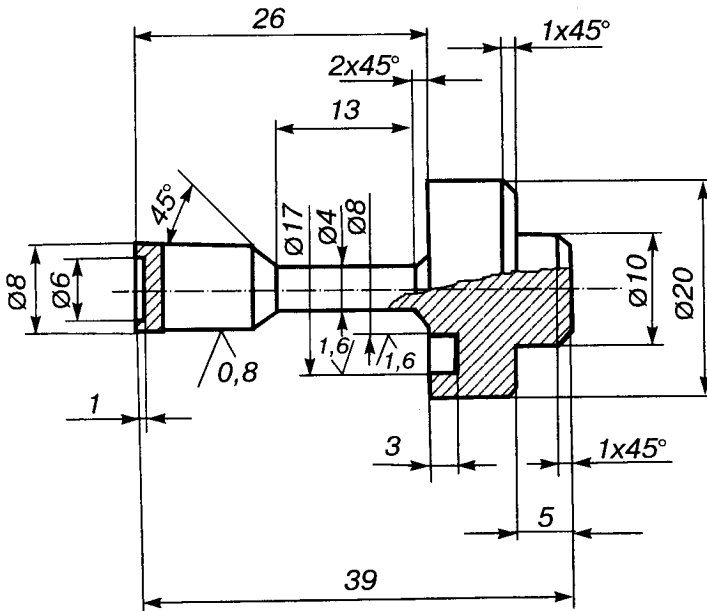
1. Матеріал-замінник.
2. Граничні відхилення розмірів відливка - за II класом точності.
3. Незазначені ливарні радіуси - 1...3 мм.
4. Незазначені ливарні похили - не більше ніж 3%.
5. Н14, h14, ±t/2.
6. Покриття - емаль ХВ 124, сіро-зелений.
7. \* Розміри для довідок.

МГР.656.600.003		Літера	Маса	Масшт.
Кришка		Літера	Маса	1:1
Зм. Абр.	№ дохм.	Діагн. Ціка	Автом.	Автом.
Розроб.	Лаврент.			
І. контр.				
ІІ. контр.				
Затверд.				

Рис. 17.3

M.P. 656 600. 001

3,2/√(√)



1. Матеріал-замінник - БрА5 ГОСТ 18175-78.

2. Н14, h14, ±t<sub>2</sub>/2.

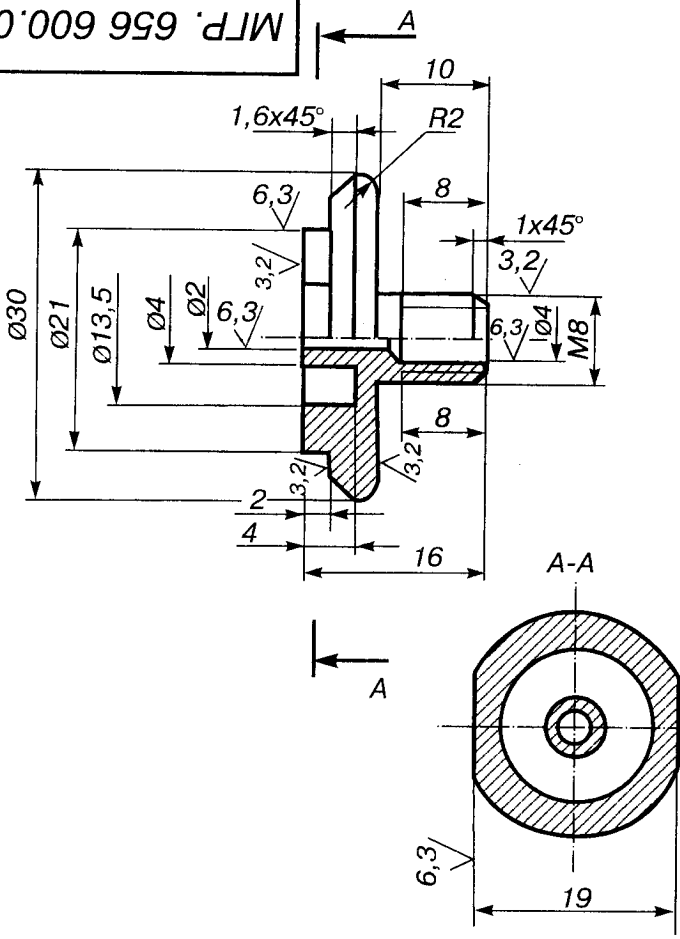
3. Гострі кромки заокруглити R 0,2.

				<b>МГР. 656 600. 001</b>		
				<b>Клапан</b>		
Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	<b>2:1</b>	
Розроб.						
Перевір.						
Т.контр.						
Н.контр.				<b>БрА7 ГОСТ 18175-78</b>		
Затверд.						

Рис. 17.4

M.P. 656 600.004

12,5/ (✓)



1. Матеріал-замінник - БрА7 ГОСТ 18175-78.
2. Н14,н14,±t<sub>2</sub>/2.
3. Гострі кромки заокруглити R 0,2.

<b>МГР. 656 600.004</b>				
Зм.	Арк.	Нодокум.	Підпис	Дата
<b>Опора мембрани</b>				
<b>БрА5 ГОСТ 18175-78</b>				
		Літера	Маса	Масшт.
		Аркуш 1	Аркушів 1	<b>2:1</b>

Рис. 17.5

## Запитання та завдання

1. Які є складові частини креслення ВО?
2. Розкажіть про схему розподілу складальної одиниці на складові частини.
3. Як оформляється таблиця переліку складових частин? Які розділи вона має?
4. На які деталі виконують робочі креслення?
5. Які умовності та спрощення при зображенні деталей на кресленні ВО вимагають розробки подробиць на робочому кресленні?
6. Як визначають розміри елементів при деталюванні та які їхні значення наносять на робочому кресленні?
7. Які вимоги слід виконувати, наносячи спряжені розміри?
8. Як визначають шорсткість поверхонь при деталюванні?



## Глава 18 СКЛАДАЛЬНІ КРЕСЛЕННЯ

Складальне креслення (надалі — “креслення СБ”) виконується на стадії розробки робочої конструкторської документації (КД) на основі технічного або ескізного проекту і призначене для складання (виготовлення) та контролю виробу. Складальне креслення має давати повне уявлення про будову виробу та його роботу.

Залежно від рівня виробництва, стадії розробки, складності виробу тощо креслення СБ може мати різні рівні деталізації подробиць щодо графічної, текстової, числової та іншої інформації про складальну одиницю. Чим ближче рівень виробництва до індивідуального та чим простіший виріб, тим ближче креслення СБ до креслення ВО. Можлива ситуація, коли креслення СБ відповідає вимогам щодо креслення ВО і може бути вихідним документом при деталюванні. Проте креслення СБ і ВО відрізняються не тільки за змістом і кількістю зображень, а й за текстовою інформацією. Креслення ВО супроводжує таблиця переліку складових частин, креслення СБ є доповненням до специфікації (рис. 18.1), що є основним конструкторським документом для складальної одиниці.

У навчальних цілях креслення СБ виконують на основі наявної складальної одиниці, для оригінальних деталей якої виготовляють ескізи, які використовують для

креслення СБ. При цьому, як правило, виконують креслення СБ, що відповідає вимогам креслення ВО.

### 18.1. Зміст складальних креслень

Креслення СБ має містити такі дані:

1) зображення складальної одиниці, яке дає повне уявлення про розміщення та взаємозв'язок її складових частин і забезпечує можливість складання та контролю виробу. На кресленні СБ дозволяється подавати:

— схеми з'єднань і розміщення складових частин виробу; кінематичну, гідравлічну, електричну тощо схеми для пояснення принципу роботи;

— операційний ескіз “оброблюваної” деталі з розмірами, необхідними для даної операції. Його розміщують у правому верхньому куті або зліва від технічної характеристики, як правило, на кресленнях СБ виробів допоміжного виробництва (штампи, прес-форми тощо);

— зображення рухомих частин виробу не тільки в робочому, а й у крайніх та проміжних положеннях з відповідними розмірами;

— зображення сусідніх, граничних деталей (“обстановка”);

— зображення захисних деталей (пробок, заглушок тощо), тимчасово встановлених при транспортуванні та зберіганні;

Формат	Зона	Поз.	Позначення	Найменування	Кільк.	Примітка
				<u>Документація</u>		
			МГР. 690 600. 000 СБ	Складальне креслення		
				<u>Складальні одиниці</u>		
		1	МГР. 690 600. 100	Клапан зворотний	1	
		2	МГР. 690 600. 200	Відбивач	1	
				<u>Деталі</u>		
		4	МГР. 690 600. 001	Картер	1	
		5	МГР. 690 600. 002	Кришка	1	
		6	МГР. 690 600. 003	Пробка	1	
		7	МГР. 690 600. 004	Шайба упорна	1	
		8	МГР. 690 600. 005	Прокладка	1	
		9	МГР. 690 600. 006	Прокладка	1	
		10	МГР. 690 600. 007	Клапан зворотний	1	
		11	МГР. 690 600. 008	Пружина	1	
		12	МГР. 690 600. 009	Сідло пружини	1	
		13	МГР. 690 600. 010	Пружина зворотна	1	
		14	МГР. 690 600. 011	Тримач	1	
		15	МГР. 690 600. 012	Поршень	1	
		16	МГР. 690 600. 013	Зірочка поршня	1	
		17	МГР. 690 600. 014	Кільце стопорне	1	
				<u>Стандартні вироби</u>		
		21		Манжета 32 × 22 ГОСТ 14896—84	1	

Рис. 18.1



— зображення деяких деталей із сортового та фасонного прокату, на які не виконуються робочі креслення, з відповідними розмірами та написом, що містить номер позиції та масштаб зображення (в дужках), якщо він не збігається з основним масштабом;

— розмішувати дані про підготовку зварних та стикових кромок під нерознімні з'єднання, якщо їх немає на робочих кресленнях деталей;

2) розміри, граничні відхилення та інші параметри, що виконують і контролюють під час складання;

3) вказівки про характер одержання нерознімних з'єднань, спряження поверхонь і методи його одержання в процесі складання;

4) номери позицій складових частин;

5) технічну характеристику;

6) технічні вимоги.

Нижче буде розглянуто вимоги до креслення СБ.

## 18.2. Вибір кількості зображень

Щоб забезпечити складання й контроль виробу, зображення на кресленні СБ мають давати уявлення про розміщення складових частин цілої одиниці, їхню взаємодію, порядок з'єднання. При цьому не обов'язково виявляти форму кожної деталі, тому на кресленні СБ для того самого виробу може бути значно менше зображень, ніж на кресленні ВО. Навіть зміст цих зображень може відрізнитися від зображень на кресленні ВО. Іншими словами, креслення СБ — це не частина, не фрагмент з креслення ВО, а креслення, призначене зовсім для інших, ніж у ВО, цілей. В умовах одиничного та допоміжного виробництва креслення СБ і ВО можуть збігатися, виконуючи відразу дві функції.

Отже, визначається зміст та кількість зображень, серед якої вибирають головне, що дає найповніше уявлення про взаємодію складових частин виробу та виконання операцій складання. Кількість зображень має бути мінімальною, але достатньою для виконання умов. При масовому виробництві для одного креслення ВО можна розробляти кілька креслень СБ для різних складових частин виробу. Сукупність цих креслень також має бути мінімальною,

але достатньою для складання всього виробу та його контролю.

Вибираючи зображення, бажано, щоб виріб мав таке положення, в якому він перебуває під час виконання складальних операцій або надходить до складання машини чи механізму. При цьому враховують різноманітні умовності та спрощення у виконанні зображень, нанесенні розмірів та інших елементів креслення.

Головне зображення (фронтальний розріз) дає повне уявлення про принцип роботи, наприклад, гальмового циліндра, про з'єднання його складових частин та будову виробу в цілому. Інші зображення несуть інформацію щодо посадочних місць виробу, вигляду окремих його деталей, виду й кількості кріпильних виробів.

Отже, виконуючи креслення СБ, доцільно використовувати додаткові та місцеві зображення, щоб уникнути зайвої роботи при виконанні зображень виробу в цілому.

## 18.3. Умовності та спрощення на складальних кресленнях

Наведені раніше умовності й спрощення за ГОСТ 2.305—68 у зображеннях предметів та їхніх елементів застосовують до зображень складальних одиниць, їхніх частин і елементів, а саме:

якщо зображення виробу симетричне, то допускається креслити його половину або більшу частину, проводячи в останньому випадку лінію обриву;

болти, гвинти, штифти, заклепки, важелі, клапани, шатуни, рукоятки, контакти, спиці шківів, маховиків, зубці зірочок, зубчастих коліс, тонкі стінки типу ребер жорсткості тощо показують нерозсіченими і не штрихують їх, якщо розріз поздовжній; щоб показати в них місцеві свердління, застосовують місцеві розрізи;

пластини, дрібні конструктивні елементи деталей типу фасок, пазів, отворів тощо, якщо розміри їхніх зображень на кресленні становлять 2 мм і менше (або та сама різниця у розмірах), зображують збільшеними, відступаючи від масштабу; так само збільшують незначний похил або конусність;

частини вузлів і деталей (рукоятки, важелі, вали, тяги, деталі з фасонного прока-

ту, шатуни, ланцюги та ін.), що надмірно виступають на кресленнях, зображують з розривами, зближуючи їх паралельно самим собі і зберігаючи проєкційні зв'язки між їхніми елементами;

з однакових за формою й розмірами рівномірно розміщених частин виробу або їхніх елементів (коліс, опорних катків, кріпильних виробів, отворів, зубців, шліців, спиць, ребер жорсткості та ін.) одну частину (елемент) зображують повністю, а решту — спрощено або умовно за відповідними стандартами, зовнішніми обрисами або зовсім не зображують, показуючи тільки отвори або розміщення їх осьовими чи центровими лініями.

Згідно з ГОСТ 2.109—73 можна не показувати:

принципально незначні зазори між стержнями й стінками отворів;

аналогічні фаски (наприклад, у штифтів), галтелі та інші дрібні конструктивні елементи (заокруглення, проточки, заглиблення, виступи, рифлення, насічки тощо);

написи на шкалах, табличках, планках тощо, зображуючи лише їхній контур;

видимі складові частини виробів та їхніх елементів, які розміщені за сіткою або пружиною, а також частково закриті розміщеними спереду складовими частинами виробів;

різноманітні кришки, кожухи, перегородки, ключі й рукоятки, наприклад, пробкових кранів, маховики й штурвали керування клапанними пристроями засувок, вентилів тощо, коли потрібно показати, що ними затулені частини виробу. При цьому над зображенням роблять напис типу “Кришку поз. 5 не показано”. Згадану кришку зображують окремо з позначенням “А поз. 5”.

На виглядах:

місця дотику деталей можна зображати однією лінією;

зазор між деталями до 1 мм рекомендується не показувати, якщо у цьому немає потреби, а якщо є, то зображати з порушенням масштабу (збільшено) незалежно від величини зазору;

шайби, пластини тощо завтовшки на кресленні до 2 мм зображують однією суцільною товстою основною лінією;

виріб з прозорого матеріалу зображують непрозорим, але, щоб показати стрілки,

шкали тощо, які розміщуються за ним, можна показувати їх видимими;

пакети з листів або секцій у виробих типу трансформаторів подають як монолітне тіло;

багатоланкові предмети або предмети, утворені з однакових елементів (секції радіаторів), можна зображати умовно осьовою штрихпунктирною тонкою лінією, яка проходить через центри відповідних елементів;

“обстановку” показують спрощено суцільною тонкою лінією. Предмети “обстановки” можна зазначати на її зображенні або на полиці лінії-виноски, що проведена від нього, за типом “Патрубок водовідділювача ...”. Частини виробу, розміщені за “обстановкою”, зображують як видимі, але у разі потреби можна подавати їх як невидимі;

рухомі частини виробу показують, як правило, в робочому положенні. Крайні та проміжні положення окремих частин пристрою зображують по контуру штрихпунктирною з двома крапками тонкою лінією; дозволяється з'єднувати половину вигляду (розрізу) виробу в одному з його положень з половиною вигляду (розрізу) в іншому положенні;

вироби, розміщені за гвинтовою пружиною, зображують видимими до зони, що окреслена осьовими лініями перерізів витків (рис. 18.2);

тарілчасті пружини, число пакетів яких більше від чотирьох, показують частково, по дві — три пружини з кожного кінця, а контур умовно видаленої частини — суцільними тонкими лініями.

На розрізах і перерізах:

можна застосовувати особливі розрізи, так звані рознімання (січна площина проходить між з'єднаними деталями, перетинаючи лише кріпильні вироби);

складові частини виробу, які часто застосовуються у виробництві, виконують, як правило, нерозсіченими і показують контурними обрисами;

предмети “обстановки” в розрізі дозволяється не штрихувати;

деталі, що в процесі складання з'єднані зварюванням або паянням, штрихують у розрізі згідно із загальними правилами. У разі надходження цих деталей для складання у



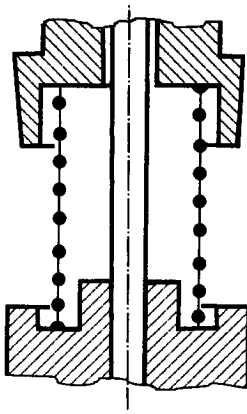


Рис. 18.2

вигляді готового з'єднання їх штрихують в один бік без зображення складових частин (як монолітне тіло), якщо деталі виготовлені з однорідного матеріалу, або із зображенням складових частин, якщо вони виготовлені з різних матеріалів; шви при цьому не показують;

складові частини виробу або їхні елементи, розміщені не в січній площині (отвори на круглих кришках, фланцях тощо), можна в розрізі або перерізі поміщати в січну площину.

Конструктивні елементи складових частин виробу слід показувати з урахуванням деяких умовностей і спрощень, а саме:

диски, грані, інші плоскі елементи позначають суцільними тонкими лініями по діагоналі;

розміщення деяких елементів (граней, спиць маховиків) на зображенні має бути

симетричним незалежно від їхнього фактичного розміщення, яке підкреслюється додатковим зображенням або вказівками в технічних вимогах;

рифлення спеціальних профілів показують додатково на виносних елементах.

Різьбові з'єднання зображують, як правило, спрощено, не показуючи зазорів, фасок, деталей різьбових глухих отворів тощо. Конусність конічної різьби на зображенні подають зі збільшенням проти фактичної. "Змішані" різьбові з'єднання (конічної труби з циліндричною муфтою) зображують як циліндричні.

У з'єднаннях штифтами можна не показувати фаски в отворах і на штифтах.

У з'єднаннях зварюванням, паянням, клеєнням, зшиванням, а також у зубчастих передачах застосовують умовності та спрощення, викладені в главі 16.

Підшипники кочення зображують конструктивно або спрощено і позначають за відповідними стандартами. На конструктивному зображенні не показують сепаратори, фаски, а товщину кілець і проміжків між ними вважають однаковими. В осьовому розрізі підшипник зображують спрощено за ГОСТ 2.420—69 (рис. 18.3, а...г). При цьому контур креслять суцільною товстою основною лінією, а всередині контуру проводять діагоналі суцільними тонкими лініями. Дозволяється суміщати конструктивне зображення зі спрощеним.

Мастильні пристрої (наприклад, пресмаслянки) показують нерозсіченими. Ковпачок маслянки умовно зображують у ви-

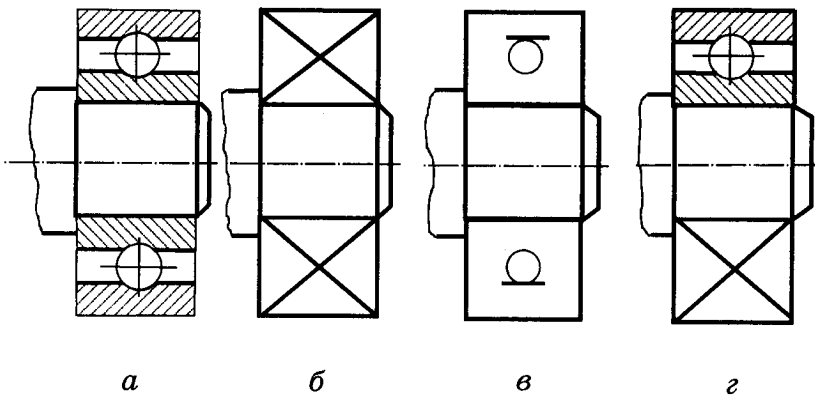


Рис. 18.3

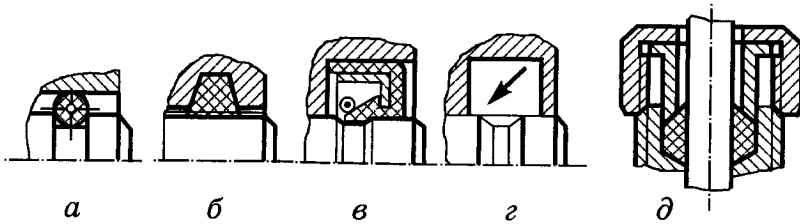


Рис. 18.4

хідному положенні (при повному заправленні мастилом).

Ущільнення дозволяється показувати зі спрощеннями, що випливають з умов їхньої роботи. Кільця гумові зображують недеформованими (рис. 18.4, а), а повстяні — “ідеально деформованими” в пазу трапецієвидного перерізу (рис. 18.4, б). Манжети гумові, часто армовані, іноді обладнані стягувальними кільцями (пружинами — браслетами тощо), можна показувати в робочому стані конструктивно (рис. 18.4, в) або умовно, показуючи стрілкою напрям дії ущільнення (рис. 18.4, г). Прокладки зображують потовщеною лінією. Сальникові пристрої допускається умовно показувати в крайньому положенні, коли набивка “не стиснена” (рис. 18.4, д). При цьому набивку зображують як суцільне тіло, штрихуючи так само, як неметалеві матеріали. Характеристику набивки подають у специфікації в розділі “Матеріали”.

Наводячи арматуру трубопроводів, допускається:

трубопроводи зображати спрощено за ГОСТ 2.411—72 та умовно за ГОСТ 2.704—76 і ГОСТ 2.705—70;

крани показувати відкритими, а вентиля, водяні та інші засувки — закритими.

Спеціальні умовності та спрощення, не передбачені стандартами, пояснюють на полі складального креслення.

#### 18.4. Розміри на складальних кресленнях

На складальних кресленнях треба показувати такі розміри:

1. Довідкові (виконують, як правило, із “зірочкою”), а саме:

габаритні (якщо є рухомі частини, то враховують їхні крайні положення);

установлювальні та приєднувальні для встановлення виробу на місці монтажу або приєднання до іншого виробу;

експлуатаційні, конструктивні, що вказують на розрахункову або конструктивну характеристику виробу (хід поршня, штока, діаметри прохідних отворів гідроапаратури тощо).

2. Розміри, що виконують при складанні: монтажні — вказують на взаємозв'язок і розміщення в складальній одиниці (відстані між осями валів, монтажні зазори тощо); ці розміри подають з граничними відхиленнями;

елементів деталей — забезпечуються складальними операціями (сумісне свердління, шліфування тощо, механічна обробка після зварювання, паяння, запресовування та ін.);

допустимі відхилення форми й розміщення поверхонь при контролі складальних операцій (у зварних, клепаєних та інших виробках); їх зазначають безпосередньо на кресленні або в технічних вимогах.

Граничні відхилення розмірів спряжених поверхонь подають у вигляді дробів: у чисельнику — позначення допуску й граничних відхилень отвору, а в знаменнику — те саме, для вала. Наприклад,  $\varnothing 40 \frac{H11(+0,016)}{d11 \begin{smallmatrix} (+0,08 \\ -0,24) \end{smallmatrix}}$ , або спрощено  $\varnothing 40 \frac{H11}{d11}$ .

Для встановлювальних штифтів показують діаметр отвору й координати центра. Використовуючи конічні штифти, зазначають тільки параметри шорсткості отворів, а під поличкою лінії-виноски з номером позиції штифта пишуть їхню кількість.

Для окремих деталей, що є тільки на складальному кресленні, зазначають розміри й інші дані для виготовлення і контролю їх.

## 18.5. Оформлення складальних креслень

Основними елементами оформлення складальних креслень є заповнення специфікації та основного напису, нанесення номерів позицій, виконання текстової частини креслення (примітки, допоміжні написи, технічна характеристика, технічні умови тощо). При цьому передбачається, що зображення, розміри, граничні відхилення та інша інформація, яка може бути виражена графічно або умовними позначеннями, виконана.

Усі частини складальної одиниці нумерують відповідно до номерів позицій, зазначених у специфікації.

Номери позицій наносять на полчках ліній-виносок, які проводять від зображення відповідних складових частин. Одним кінцем лінія-виноска має заходити на зображення і закінчуватися точкою або стрілкою, іншим кінцем — сполучатися з полчкою (рис. 18.5, а).

Точку замінюють стрілкою, якщо лінія-виноска виходить із затемненої або вузь-

кої смуги лінії видимого та невидимого контурів з умовних зображень, осьової лінії перерізів (рис. 18.5, б...е). У деяких випадках (рис. 18.6, а...д) дозволяється не дотримуватися цих правил.

Лінії-виноски не повинні бути горизонтальними, вертикальними або паралельними лініям штриховки (рис. 18.7, а); вони не мають перетинатися між собою або перетинати (у міру можливості) розмірні та виносні лінії, а також зображення інших складових частин. Їх можна виконувати зі зломом і проводити кілька ліній від однієї полочки (рис. 18.7, б). Лінії-виноски й полочки проводять суцільною тонкою лінією. Довжина полочки становить 10...12 мм. Полочки розміщують паралельно основному напису поза зображеннями і групують у рядки й стовпці, бажано на однаковій відстані одну від одної.

Номери позицій записують шрифтом у 1,5—2 рази більшим, ніж цифри розмірних чисел на кресленні і, як правило, один раз на тому зображенні, де відповідна складо-

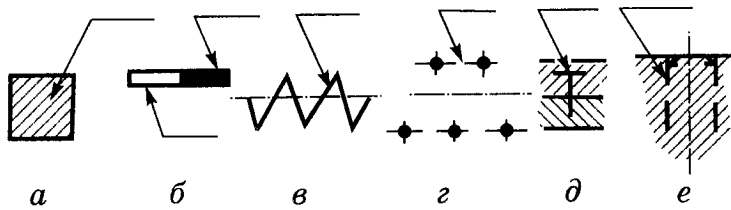


Рис. 18.5

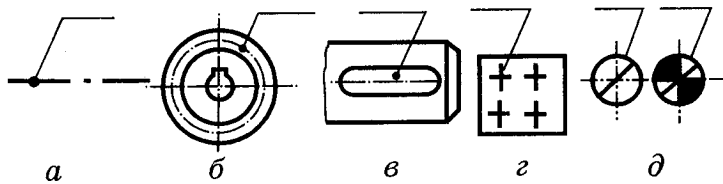


Рис. 18.6

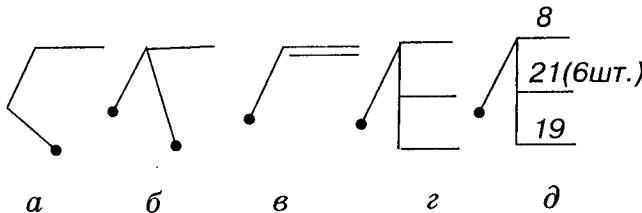


Рис. 18.7

ва частина є видимою. В окремих випадках можна повторно зазначити номери позицій, виділяючи їх подвійною поличкою (рис. 18.7, в).

Спільну лінію-виноску проводять для групи кріпильних та інших деталей, що мають виразний взаємозв'язок або однозначне його тлумачення (рис. 18.7, з, д). При цьому на верхній поличці зазначають номер позиції деталі, з якої проведена лінія-виноска. Пояснювальні слова біля номерів позицій або параметри складової частини розміщують на тій самій поличці (наприклад, для змінних деталей — рис. 18.8, а) або на паралельних поличках (рис. 18.8, б, в).

Для спрощення запису технічних вимог на поличках біля зображення подають літерні позначення складових частин або їхніх конструктивних елементів чи ділянок поверхонь (рис. 18.9, а...в). Іноді на поличках показують характер сполучення деталей (рис. 18.9, з, д).

У технічній характеристиці виробу зазначають його основні параметри (робочий хід, тиск, продуктивність, частота обертання тощо), а також габаритні розміри. Записують її на вільному місці креслення колонкою завширшки не більше ніж 185 мм у вигляді заголовка та пунктів з наскрізною нумерацією або без неї.

Технічні вимоги (ТВ) групують за аналогічними ознаками і розміщують у такій послідовності:

вимоги до властивостей складових частин виробу перед складанням та підготовкою їх до складання (доробка, очищення, промивання, комплектування тощо);

особливості складання, особливості вимоги щодо нього;

вимоги щодо зазорів, розміщення окремих елементів конструкції;

вимоги щодо налагодження та регулювання виробу;

інші вимоги щодо якості виробу (самогальмування, безшумність тощо);

умови й методи випробувань;

вказівки щодо маркування і таврування;

правила транспортування та зберігання; особливі умови експлуатації;

посилання на інші документи, які містять ТВ щодо даного виробу, але не зазначені на кресленні.

Пункти ТВ повинні мати наскрізну нумерацію, кожен з яких записують з нового рядка. Заголовок "Технічні вимоги" пишуть, якщо на кресленні є ще "Технічна характеристика". Обидва заголовки не підкреслюють.

Текстову частину розміщують колонкою завширшки до 185 мм над основним написом, на відстані 12...15 мм або над специфікацією, коли вона суміщена з кресленням СБ. Якщо формат аркуша більший від А4, то текст розміщують у дві колонки і більше, ширина кожної з них становить не більше ніж 185 мм. При цьому пункти ТВ нумерують зверху вниз і справа наліво.

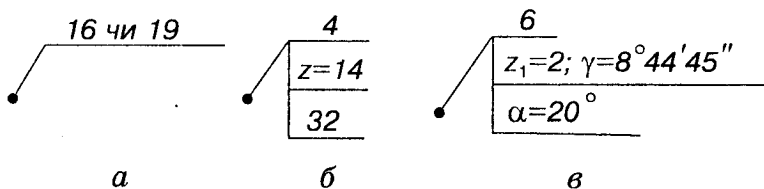


Рис. 18.8

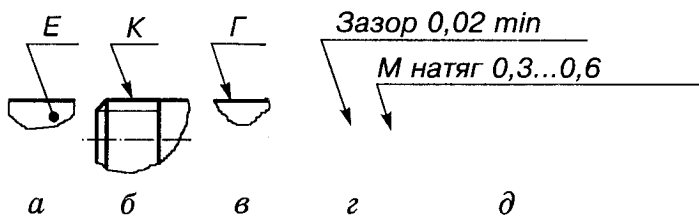


Рис. 18.9

Технологічні вказівки не допускаються, крім виробів одиничного та допоміжного виробництва, коли, на думку конструктора, тільки виконання цих вказівок гарантує якість виробу. Для виготовлення деталей, що не мають робочих креслень, у ТВ наводять допоміжні дані до зазначених у специфікації (про шорсткість поверхні, відхилення форми тощо).

Текстову частину розмішують на першому аркуші, навіть тоді, коли вимоги стосуються зображень на інших аркушах.

Якщо у ТВ є посилання на таблиці, то їх нумерують і розмішують на вільному полі креслення справа від зображення або нижче від нього і виконують за ГОСТ 2.105—95.

Літерні позначення зображень, поверхонь, розмірів тощо надаються в алфавітному порядку без повторів і пропусків незалежно від кількості аркушів.

## 18.6. Специфікація

Зміст складальної одиниці, комплексу та комплекту визначає специфікація, що є їхнім основним конструкторським документом. Її виконують за ГОСТ 2.108—68 на аркушах формату А4: заголовний аркуш — за формою 1 (див. рис. 18.1) з основним написом за формою 2, а наступні аркуші — за формою 1а з основним написом за формою 2а.

Загалом специфікація містить таку послідовність розділів: документація, комплекси, складальні одиниці, деталі, стандартні вироби, інші вироби, матеріали, комплекти. Розділи визначаються складом виробу.

Найменування кожного розділу зазначають у графі “Найменування” і підкреслюють суцільною тонкою лінією. Під кожним заголовком залишають вільний рядок, а в кінці кожного розділу — не менше ніж один рядок для додаткових записів.

*Документація* — основний комплект КД (складальне креслення, схема структурна тощо).

*Складальні одиниці* — елементи, що входять у специфікований виріб. На складальні одиниці виготовляють самостійні креслення з відповідною специфікацією.

*Деталі* — нестандартні деталі, що безпосередньо входять у виріб.

Складальні одиниці та деталі записують у порядку зростання цифр їхніх позначень.

*Стандартні вироби* — вироби, регламентовані державними, галузевими стандартами та стандартами підприємства. У кожній категорії стандартів запис виконують згідно з групами виробів, що об'єднуються за функціональним призначенням (підшипники, кріпильні вироби тощо), у межах кожної групи — в алфавітному порядку найменування виробів (болти, гайки, гвинти, шайби тощо), у межах найменування — в порядку зростання позначення стандартів, а в межах кожного позначення — в порядку зростання основних параметрів або розмірів (діаметрів, довжин болтів тощо).

*Матеріали* — ті матеріали, що безпосередньо входять до специфікованого виробу. Записують їх у такій послідовності: чорні метали, кольорові метали, проводи, шнури, пластмаси і т. д. Матеріали кожного виду записують в алфавітному порядку, а кожного найменування — в порядку зростання розмірів або інших параметрів. Не записують такі матеріали, як лаки, фарби, мастила, клей, припої тощо, кількість яких визначає не конструктор, а технолог. Вказівки про застосування таких матеріалів записують у технічних вимогах.

Графи специфікації заповнюють зверху вниз:

*“Формат”* — формат документа (аркуша, на якому виконане креслення), позначення його записано в графі “Позначення”. Якщо документ складається з кількох аркушів, то в графі ставлять “зірочку”, а в графі “Примітка” перераховують усі формати в порядку їх зростання (якщо вони різні). Для деталей, на які не випущені креслення, в графі пишуть “БЧ”. Графу не заповнюють для розділів “Стандартні вироби”, “Інші вироби” і “Матеріали”;

*“Зона”* — позначення зони, в якій є номер позиції складової частини виробу (при поділі поля креслення на зони);

*“Поз.”* — порядкові номери складових частин виробу в послідовності запису їх у специфікацію. Для розділу “Документація” графу не заповнюють;

*“Позначення”* в розділі “Документація” — це позначення документів, що записують; у

розділах “Складальні одиниці” і “Деталі” — це позначення основних конструкторських документів на них. У розділах “Стандартні вироби”, “Інші вироби”, “Матеріали” графу “Позначення” не заповнюють;

“Найменування” для документів основного комплекта КД — це тільки найменування їх (“Складальне креслення”, “Схема розподілу структурна”, “Технічні умови”); для складальних одиниць і деталей — найменування їх відповідно до основних написів на їхніх кресленнях; для деталей, на які не виконані креслення, — це найменування матеріалів і розмірів, необхідних для виготовлення; для стандартних виробів і матеріалів — найменування і позначення їх відповідно до стандартів;

“Кільк.” — кількість складових частин на один виріб. У розділі “Матеріали” — це загальна кількість матеріалу на один виріб із зазначенням одиниць фізичних величин. У розділі “Документація” цю графу не заповнюють.

Після кожного розділу специфікації слід лишати кілька вільних рядків та резервувати номер позицій.

Специфікацію можна суміщати з кресленням СБ за умови розміщення їх на аркуші формату А4, а для виробів допоміжного та одиничного виробництва — на аркушах довільного формату. Такому документу надають позначення основного конструкторського документа, а код СБ не записують.

### Запитання та завдання

1. Які креслення називають складальними? Чим вони відрізняються від креслення ВО?
2. Що, крім зображень, містить креслення СБ?
3. Чим керуються, вибираючи кількість та зміст зображень на кресленні СБ?
4. Назвати основні умовності та спрощення на складальних кресленнях.
5. Які розміри проставляють на кресленні СБ?
6. Як наносять номери позицій на кресленні СБ?
7. Де розміщують технічну характеристику виробу на кресленні СБ і з чого вона складається?
8. Де розміщують технічні вимоги на кресленні СБ і з чого вони складаються?
9. Які графи містить специфікація?
10. Які форми основних написів застосовують при оформленні специфікації?
11. В яких випадках можна суміщувати специфікацію з кресленням СБ? Як тоді позначають документ?



## Глава 19 ВИКОНАННЯ ТА ЧИТАННЯ СХЕМ

*Схеми* — це спеціальні креслення, що містять умовні зображення складових частин виробів та зв'язків між ними.

Схеми використовують у різноманітних галузях промисловості як робочу конструкторську документацію, що супроводжує складання, регулювання та контроль ви-

робів електроніки, радіотехніки, сантехніки, вентиляції тощо, а також пояснює принцип дії механізмів і пристроїв.

Залежно від виду елементів та зв'язків між ними схеми поділяють на електричні (Е), гідравлічні (Г), пневматичні (П), кінематичні (К), комбіновані (С), а залежно від

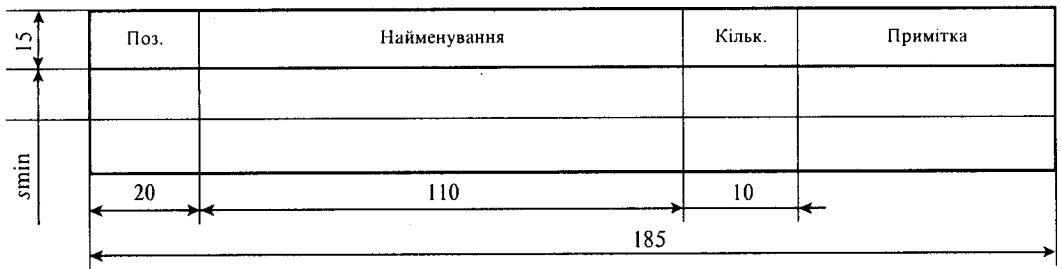


Рис. 19.1

змісту — на структурні (1), функціональні (2), принципіальні (3), монтажні (4), підключення (5) та ін. (ГОСТ 2.701—84).

Код схеми містить літерне та цифрове позначення згідно із зазначеною класифікацією.

Схеми виконують на аркушах відповідного формату без дотримання масштабу та без урахування розміщення елементів у виробі. Лінії, що сполучають умовні позначення елементів, розміщують тільки горизонтально й вертикально з найменшим числом точок злому та перетину. Відстань між паралельними лініями зв'язку становить не менше ніж 3 мм, між сусідніми лініями графічного позначення — не менше ніж 1 мм, а між окремими позначеннями — не менш як 2 мм. Товщина ліній графічних позначень та зв'язків між ними вважається однаковою в межах 0,2...1,0 мм і залежить від формату схеми, її складності та розмірів графічних позначень.

У кінематичних схемах лінії кінематичних зв'язків (вали, осі та ін.) зображують суцільною лінією завтовшки  $s$ , підшипники, шківви, зубчасті колеса, муфти тощо показують лінією завтовшки  $s/2$ , а лініями завтовшки  $s/3$  виконують осьові, кола зубчастих коліс, шпонки, ремені тощо.

В електричних схемах лінії електричних зв'язків зображують суцільними лініями завтовшки  $s/2$ , лінії умовних графічних позначень приладів —  $1,5s...2s$ .

Умовні графічні позначення можуть мати вигляд: 1) встановлений стандартами ЄСКД; 2) прямокутників; 3) спрощених зовнішніх контурів, елементів, зокрема аксонометричних зображень їх. Іноді застосовують інші графічні позначення, які по-

яснюють у технічних вимогах або в спеціальних таблицях.

Таблицю переліку елементів (рис. 19.1) розміщують на першому аркуші схеми або виконують у вигляді самостійного документа з основним написом за формою 2 (ГОСТ 2.104—68). Відстань між таблицею та основним написом становить не менше ніж 12 мм. Таблицю можна доповнювати графою “Зона” завширшки 8 мм за рахунок графі “Примітка”.

Креслення схеми супроводжується основним написом за формою 1 (ГОСТ 2.104—68). Найменування схеми в графі 2 поряд з найменуванням виробу можна не писати.

### 19.1. Кінематичні схеми

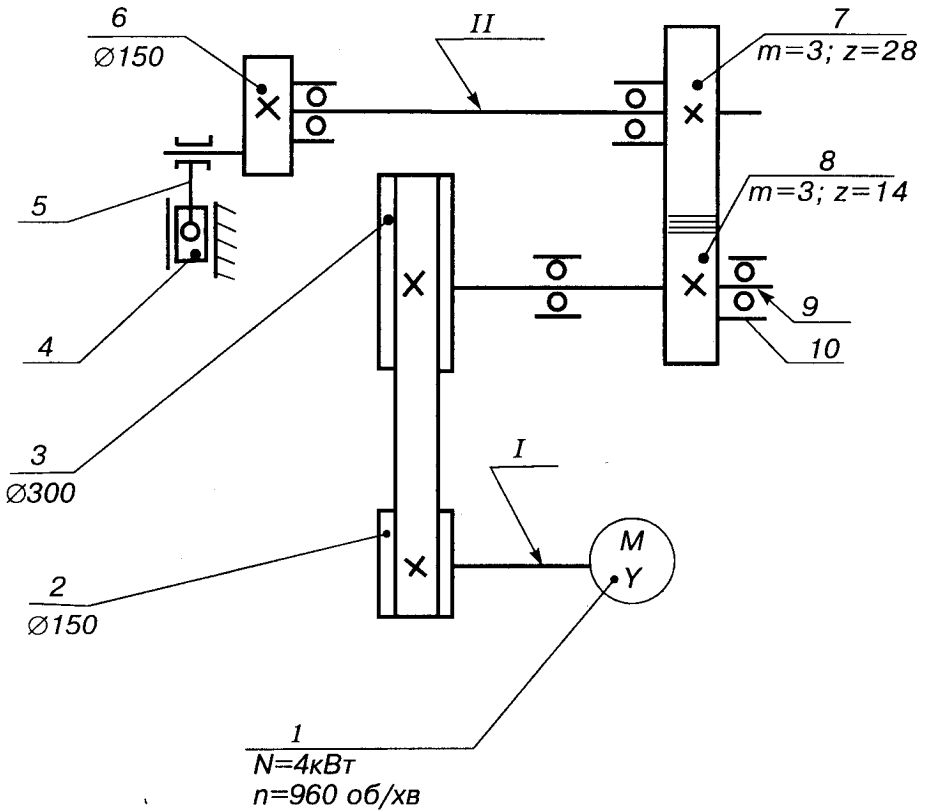
Правила виконання кінематичних схем подано в ГОСТ 2.703—68. Найпоширенішими є схеми передач редукторів, коробок, верстатів. Умовні графічні позначення деталей для кінематичних схем встановлені ГОСТ 2.770—68. Крім цього, застосовують текстові та цифрові написи. Вали нумерують римськими цифрами в порядку передачі руху, рахуючи від двигуна; для шківів задають діаметр і ширину, для зубчастих коліс — модуль і число зубців, для ходових гвинтів — число заходів і напрям різьби. Біля електродвигуна зазначають його потужність і кількість обертів за хвилину.

Номерами позицій позначають складові елементи схеми, а їхні найменування записують у таблиці переліку.

Приклад принципіальної кінематичної схеми (КЗ) приводу зображено на рис. 19.2.

Застосовують також наочні схеми, виконані в аксонометричній проекції.

ЭУ XXX'XXX XXX'XXXX



Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата
Розроб.				
Перевір.				
Т.контр.				
Н.контр.				
Затверд.				

XXXX.XXX XXX.XXX K3

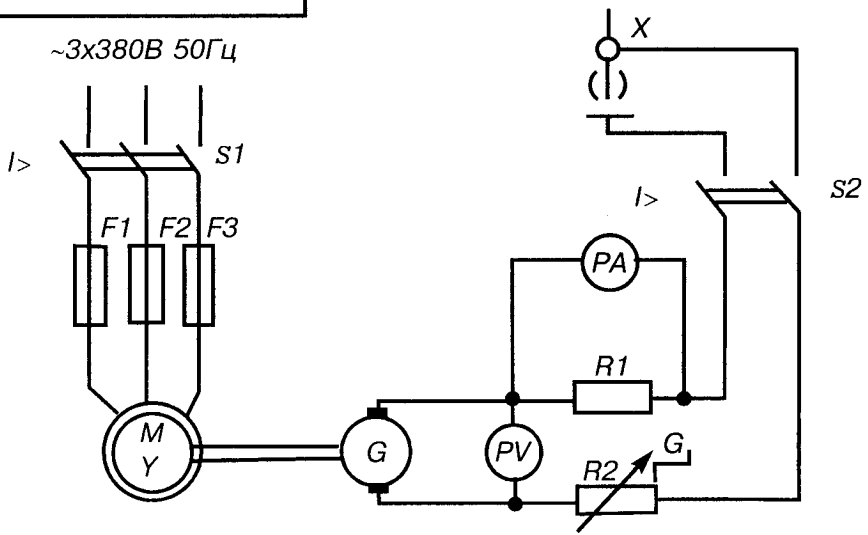
Механізм приводу  
 Схема кінематична  
 принципiальна

Літера	Маса	Масшт.
Аркуш		Аркушів

Рис. 19.2



ЗЕГР. 938 620 ЕЗ



Позначення	Найменування	Кількість	Примітка
G	Генератор ПР-200	1	
F1,F2,F3	Запобіжник ПН-2	3	
M	Електродвигун АО-72	1	
PA	Амперметр	1	
PV	Вольтметр	1	
R1	Шунт зовнішній типу ШН-300	1	
R2	Реостат баластний РБ-02	1	
S1	Вимикач триполюсний	1	
S2	Вимикач двополюсний	1	
X	Електротримач	1	

<b>ЗЕГР. 938 620 ЕЗ</b>				
Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата
Розроб.				
Перевір.				
Т.контр.				
Н.контр.				
Затверд.				
Пост електрозварювальний. Схема електрична принципiальна				
Літера		Маса		Масшт.
Аркуш			Аркушів	

Рис. 19.3

## 19.2. Електричні схеми

Правила виконання електричних схем подано в ГОСТ 2.702—75. Умовні графічні позначення елементів на схемах виконують за ГОСТ 2.721—74, ГОСТ 2.758—81. Умовні позначення елементів, які входять до одного ланцюга, розміщують послідовно вздовж прямої, а окремі ланцюги — поряд, утворюючи рядки або стовпці. Різні функціональні ланцюги на одній схемі можна виконувати лініями різної товщини.

Кожен елемент повинен мати позиційне позначення, що складається з літерного кода латинським шрифтом та цифрового (порядкового) номера і задається в межах даної схеми чи виробу. Літерний код вказує на вид елемента або пристрою. Наприклад, *C* — конденсатор; *F* — захисний елемент або пристрій; *G* — генератор; *K* — реле електромагнітне, пускач; *L* — котушка індуктивності; *M* — електродвигун; *P*, *PA*, *PV* — прилади вимірювальні; *R* — резистор; *T* — трансформатор і т. д.

Порядковий номер позиційного позначення надається пристрою чи елементу відповідно до його розміщення на схемі (зверху вниз, зліва направо).

Перелік елементів записують групами в алфавітному порядку літерних кодів. У кожній групі елементи розміщують у порядку зростання номерів.

Приклад електричної принципальної схеми (ЕЗ) наведено на рис. 19.3.

## 19.3. Гідравлічні та пневматичні схеми

Правила виконання гідравлічних і пневматичних схем встановлені ГОСТ 2.704—76.

У гідравлічних схемах застосовують умовні позначення насосів, гідродвигунів, гідроапаратів. Гідравлічні принципальні схеми можуть бути двох видів: функціональні, де з'ясується функціональне призначення кожного апарата без показу його конструктивних особливостей (рис. 19.4, *а*), та конструктивні, де ілюструються конструктивні особливості й будова гідравлічних апаратів (рис. 19.4, *б*).

Система символічних і умовних позначень гідроапаратури включає: гідроприводи та з'єднання їх; апаратуру насоса, силових циліндрів і гідромоторів; апаратуру регулювання тиску, витрати рідини, розподілу її потоку та ін. Вона регламентується рядом стандартів, зокрема ГОСТ 2.780—68.

Крім зображень, принципальні гідравлічні схеми містять технічні дані насосів: модель, продуктивність, тиск, кількість обертів за хвилину, потужність електродвигунів. У технічних даних гідроапаратів зазначають приєднувальні розміри, умовні проходи, тиск, допустиму витрату рідини.

Усім елементам і пристроям надаються номери, необхідні дані записують у таблицю переліку (рис. 19.5), яку виконують на одному аркуші зі схемою (див. рис. 19.4, *а*, *б*) або як окремий документ.

Пневматичні схеми відрізняються від гідравлічних апаратами, арматурою та позначеннями їх. Приклад пневматичної схеми наведено на рис. 19.6.

### Запитання та завдання

1. Які бувають схеми залежно від виду елементів та зв'язків між ними?
2. Назвати види схем залежно від змісту.
3. Що включає позначення елементів на схемах?
4. Як проводять лінії зв'язку на схемах?
5. Як оформляють таблицю переліку елементів?
6. Як вибирають і зображують умовні графічні позначення елементів?

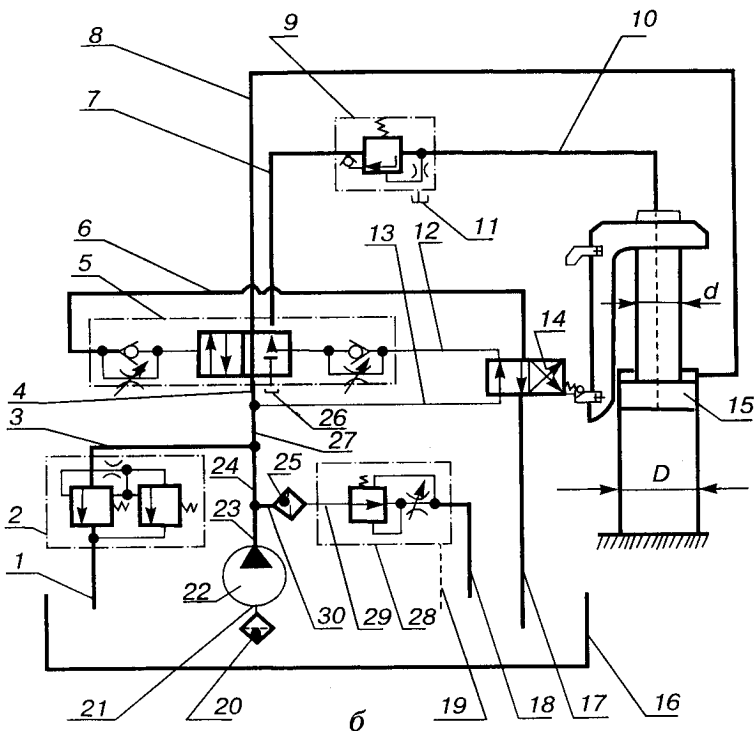
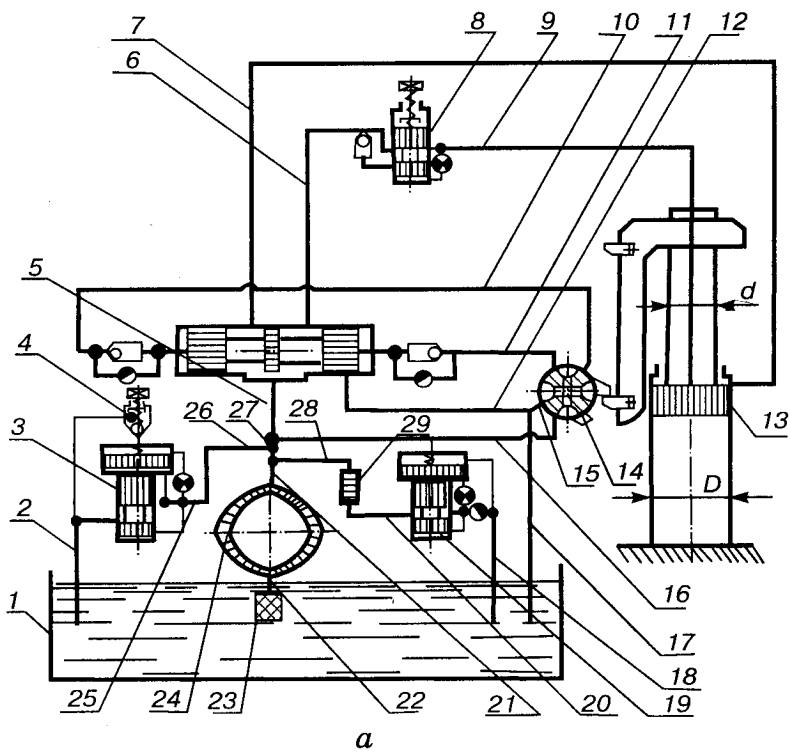
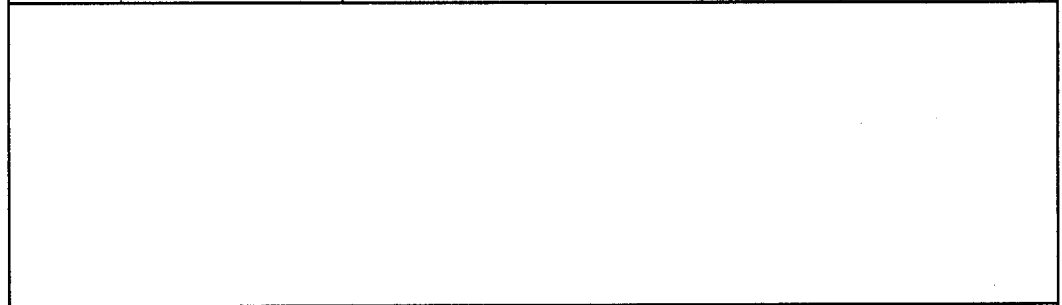


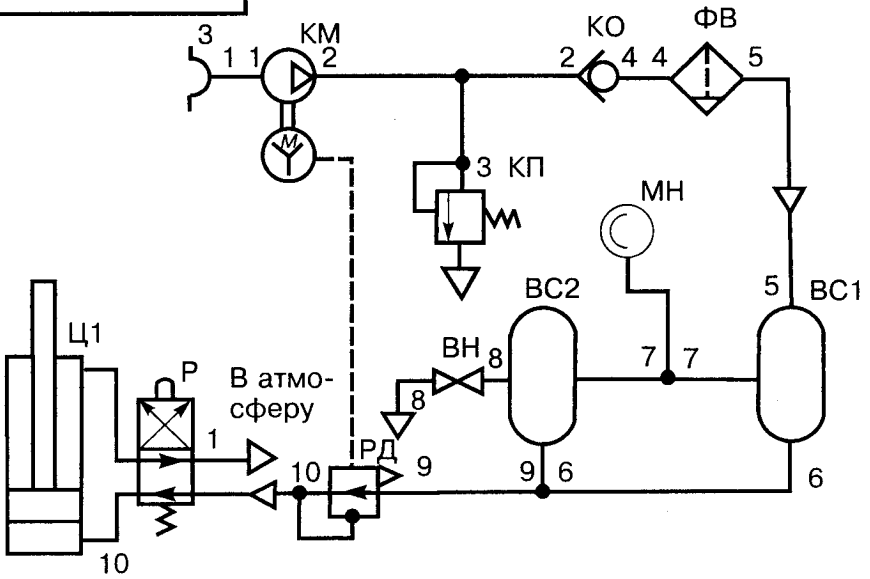
Рис. 19.4

Поз.	Позначення	Найменування	Кільк.	Примітка
1	...	Бак	1	
2	—	Фільтр сітчастий СЧ1—12	1	
3	—	Насос лопатевий Г12—13	1	
4	—	Фільтр 0,2 Г41—23	1	
5	—	Дросель з регулятором Г55—23	1	
6	—	Клапан запобіжний Г52—13	1	
7	—	Клапан керування Г71—21	1	
8	—	Золотник реверсивний ЗГ72—13	1	
9	—	Золотник напірний Г66—23	1	
10	...	Гідроциліндр	1	
11—24	—	Лінії зв'язку	14	
25—29	—	Лінії зливу	5	
30—31	—	Лінії дренажу	2	



					АКЖТ. 538 600. 000 ГЗ					
					Гідропривод Схема гідравлічна принципальна	Літера		Маса	Масшт.	
Зм.	Арк.	№ докум.	Підп.	Дата						
Розроб.										
Перевір.										
						Аркуш		Аркушів		
Н. контр.										
Затверд.										

Рис. 19.5



Позначення	Найменування	Кількість	Примітка
BC1, BC2	Повітрозбирач	2	
ВН	Вентиль	1	
З	Забирач повітря	1	
КО	Клапан зворотний	1	
KM	Компресор	1	
КП	Клапан запобіжний	1	
МН	Манометр	1	
Р	Розподільник 4/2	1	
РД	Розподільник тиску	1	
ФВ	Фільтр вологовідділювальний	1	
Ц	Циліндр пневматичний		

				<b>ЗРГР. 921 700. 000 ПЗ</b>				
Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	<b>Пристрій керування.                  Схема пневматична                  принципiальна</b>	Літера	Маса	Масшт.
Розроб.								
Перевір.								
Т.контр.						Аркуш	Аркушів	
Н.контр.								
Затверд.								

Рис. 19.6



## Глава 20 ЕЛЕМЕНТИ БУДІВЕЛЬНОГО КРЕСЛЕННЯ

Інженерам багатьох машинобудівних та експлуатаційних спеціальностей часто доводиться читати або виготовляти будівельні креслення. Це пояснюється насамперед плануванням технологічного процесу, розміщенням технологічного обладнання, плануванням реконструкції виробничих приміщень, майстерень, необхідністю вибору або замовлення проекту деякої забудови тощо.

За змістом будівельні креслення поділяють на архітектурно-будівельні (креслення будинків, цехів, шкіл тощо) та інженерно-будівельні (креслення доріг, гребель, гідротехнічних споруд тощо).

Об'єкт проектують звичайно в три етапи: складання техніко-економічного обґрунтування будівництва; складання проектного завдання; розробка проектної документації.

Проектна документація може містити технічний проект і робочі креслення або технічний проект, суміщений з робочими кресленнями. Технічний проект містить розробки планів, фасадів, розрізи будівлі (без деталізації конструкції) та техніко-економічні показники. Виконуючи робочі креслення, уточнюють і деталізують рішення, розроблені в технічному проекті.

При проектуванні всі розміри об'ємно-планувальних та конструктивних елементів будівель, розміщення координатних осей мають відповідати вимогам будівельних норм і правил (СНиП) та єдиної модульної системи (ЄМС), яка передбачає взаємозв'язування всіх розмірів будівель, їхніх елементів та обладнання на основі єдиного розмірного модуля 100 мм. Усі основні розміри мають бути кратними 100 мм.

### 20.1. Особливості оформлення будівельних креслень

Креслення проекту виконують за тими самими правилами, що й машинобудівні креслення. Проте специфіка розмірів елементів і технології будівельно-монтажних

робіт вимагає деяких особливостей. Це стосується насамперед масштабів. Найбільш поширеними є такі:

для планів будівель — 1 : 50, 1 : 100, 1 : 200;  
для фасадів і розрізів — 1 : 50, 1 : 100;  
для генеральних планів — 1 : 1000, 1 : 2000;  
для деталей конструкцій — 1 : 5, 1 : 10, 1 : 20.

Особливістю будівельних креслень є різна товщина ліній видимого контуру на одному й тому самому кресленні, а саме: елементи конструкцій, що потрапили в січну площину, обводять суцільною основною лінією завтовшки не більше ніж 0,8 мм, а контури елементів, розміщених за січною площиною, — суцільною тонкою лінією. Наприклад, для контурів будівлі на фасадах беруть товщину лінії до 0,8 мм; вікон на фасаді — 0,3 мм; устаткування на планах — 0,2 мм. Взагалі, елемент, заради зображення якого виконане креслення, обводять більш товстою лінією.

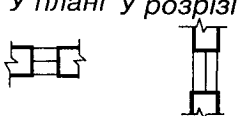

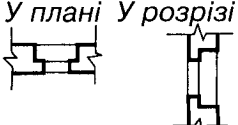
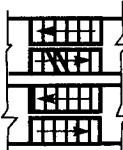
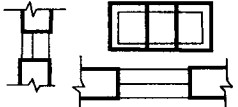
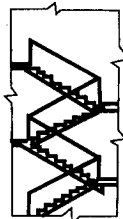
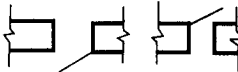
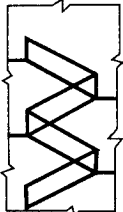
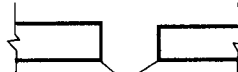

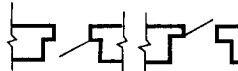
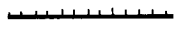
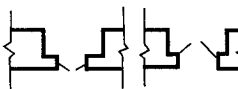


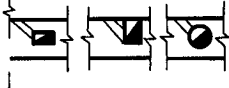
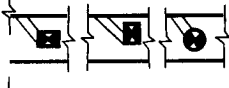
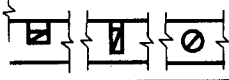
Розміри на будівельних кресленнях показують у міліметрах, крім генеральних планів і висотних позначок на розрізах, де розміри задають у метрах. Розмірні лінії можуть перетинатися, закінчуватися засічками під кутом 45°, при цьому вони мають виступати за крайні виносні лінії на 2—3 мм. Дозволяється повторювати розміри та розміщувати їх у вигляді замкненого ланцюга.

### 20.2. Умовні графічні позначення на будівельних кресленнях















Для зображення планів, розрізів та фасадів будинків застосовують умовні графічні позначення вікон, дверей тощо.

У табл. 20.1 наведено деякі умовні позначення вікон, дверей, сходових маршів, перегородок та каналів. Умовні графічні зображення виконують у масштабі креслення відповідно до розмірів елементів. При цьому коробки, віконні рами, дверні полотна не показують. Для зображення дверей умовну лінію полотна проводять під кутом 30° у бік відкривання дверей. На кресленні

Таблиця 20.1. Умовні графічні позначення деяких конструктивних елементів

Позначення	Найменування	Позначення	Найменування
<p>У плані У розрізі</p> 	Проріз віконний без четвертей		Сходи у плані: нижній марш
<p>У плані У розрізі</p> 	Проріз віконний з четвертями		проміжний марш верхній марш
	Проріз віконний глухий без позначення відкривання		Сходи (у розрізі):  у масштабі 1:100 і дрібніше
	Двері у прорізу одностулкові без четвертей (у плані)		у масштабі понад 1:100
	Двері у прорізу двостулкові без четвертей (у плані)		Перегородка (у плані)
	Двері у прорізу одностулкові з четвертями (у плані)		Перегородка збірна (у плані)
	Двері у прорізу (ворота) двостулкові з четвертями		Перегородка із світлопроникних матеріалів (у плані)
			Отвір прямокутний (круглий)
			Димохід (у плані)
			Канал для витяжки газів від газових приладів (у плані)
			Канал вентиляційний (у плані)

Таблиця 20.2. Умовні графічні позначення санітарно-технічного устаткування

Позначення	Найменування	Позначення	Найменування
	Раковина прямокутна		Плита кухонна (газова)
	Мийка кухонна на одне відділення		Водонагрівач газовий
	Мийка кухонна на два відділення		Варочний котел
	Умивальник		Плита електрична
	Умивальник кутовий		Холодильник електричний
	Умивальник - корито		Ванна звичайна
	Унітаз		Пральна машина

в масштабі 1 : 200 і дрібніше четверті дверей та вікон не зображують, а в масштабі 1 : 400 і дрібніше не показують також дверні полотна.

На позначеннях сходових маршів у плані зображують стрілку в напрямі піднімання, а на пандусі (похилий в'їзд в будинок) — у напрямі спуску.

На кресленнях у масштабі 1 : 200 та дрібніше перегородки показують однією лінією, а димоходи та канали не показують.

У табл. 20.2 наведено деякі умовні позначення санітарно-технічних пристроїв, печей і плит.

За призначенням будівельні креслення поділяють на окремі групи, яким надають



літерні позначення-марку, а саме: архітектурні креслення — АР; креслення конструкцій — КС, залізобетонних — К, сталевих — КМ, дерев'яних — КД; водопровід та каналізація — ВК; опалення та вентиляція — ОВ.

### 20.3. Плани, розрізи та фасади будівель

**Плани будівель.** Виконання будівельного креслення починається з плану. Це зображення, яке дістають після умовного перетину будинку горизонтальною площиною на висоті 20...30 см вище від підвіконня. Кількість планів залежить від кількості поверхів. На одному аркуші плани розміщують у порядку зростання поверхів знизу вгору або зліва направо (ДСТУ Б А.2:4-4-95).

На плані зображують розміщення сходів, стін, перегородок, вентиляційних каналів тощо.

На планах поверхів мають збігатися координаційні осі зовнішніх та капітальних внутрішніх стін, місця печей, димоходів, вентиляційних каналів, а також осі віконних прорізів.

*Координаційною віссю* називають вісь, що йде вздовж зовнішніх та внутрішніх стін і колон. Будівництво починається з розбивання цих осей на місцевості та наступного розміщення всіх елементів будівельної конструкції й технологічного обладнання відносно цих осей.

Координаційні осі будівель та споруд зображують штрихпунктирними тонкими лініями і позначають марками в кружках діаметром 6 мм для креслень у масштабі 1 : 400 і дрібніше, а діаметром 8 мм для креслень М1 : 200 і крупніше.

Цифрами позначають осі з боку будівлі, який має більшу кількість координаційних осей, а літерами українського алфавіту — з іншого боку. Послідовність позначень — зліва направо, зверху вниз, у правій та нижній частинах плану.

Місця розміщення колон на плані будівлі позначають точкою перетину взаємно перпендикулярних осей, що утворюють сітку колон. Відстань між поздовжніми осями сітки називають *прогонами будівлі*, а відстань між поперечними осями — *кроком колон*. Ці значення регламентовані і вважа-

ються кратними 3, 12, 15, 18 мм і т. д. Крок найчастіше дорівнює 6 м.

Зовнішні цегляні стіни мають товщину 640 мм (2,5 цеглини), 510 мм (2 цеглини); внутрішні капітальні — 380 мм (1,5 цеглини), перегородки — 250 мм (1 цеглина) і 125 мм (0,5 цеглини). Застосовують також перегородки із гіпсобетону, фібролітових плит тощо завтовшки 100...120 мм.

На плані будівлі проставляють розміри:

- прорізів та простіноків;
- прив'язування граней простіноків до координаційних осей;
- прив'язування осей стін і колон до координаційних осей;
- відстані між кратними координаційними осями;
- товщин внутрішніх стін і перегородок;
- прив'язування граней внутрішніх стін і перегородок до координаційних осей;
- прорізів у внутрішніх стінах і перегородках та прив'язування їх до координаційних осей;
- прив'язування осей залізничних шляхів та монорельсів до координаційних осей.

Першу лінію розмірів наносять на відстані 15...20 мм від контурної лінії. Відстань між паралельними лініями становить не менше ніж 8 мм.

На плані приміщення його площу в квадратних метрах зазначають справа внизу цифрою з рискою знизу без одиниць виміру.

На планах записують умовні позначення воріт, дверей, вікон. У межах приміщень записують їх найменування, яке можна замінити експлікаційним номером у колі діаметром 5...7 мм.

Дверні та віконні прорізи прив'язують до однієї з осей. Замість розміру вікна або дверей наносять марку (0—1, 0—2; Д—1, Д—9 і т. д.).

Вентиляційні канали показують у стінах кухонь, туалетів, ванн. На плані та в розрізі перетнуті стіни не штрихують.

**Розрізи будівель.** Розрізи виконують після того, як виконані плани та покрівля. Січну площину вибирають так, щоб у зображенні були прорізи вікон, зовнішніх воріт, дверей. У розрізі зображують тільки елементи, розміщені безпосередньо за січною площиною (елементи конструкції будівлі, підйомно-транспортне обладнання, відкриті сходи та площадки). При цьому

елементи конструкцій, розміщених нижче від фундаментних балок і верхньої частини стрічкових фундаментів, не показують.

Підлогу на ґрунті зображують однією суцільною товстою основною лінією, підлогу на перекритті та покрівлю — суцільною тонкою лінією незалежно від кількості та товщини шарів в їхній конструкції (їх зазначають у виносному написі).

Масштаб розрізу може відрізнятися від масштабів планів та фасадів будівлі.

На розрізі наносять розміри, що характеризують висоту приміщень і окремих частин будівлі, внутрішні розміри — всередині контуру будівлі, зовнішні розміри — зовні.

Висотні розміри наносять на поличках-виносках, що закінчуються стрілкою, кут між сторонами якої становить  $45^\circ$ , а вершина лежить на горизонтальній лінії вимірюваного рівня. Цифри, що характеризують висоту рівня, записують у метрах з трьома знаками після коми. Площину, від якої починається відлік висоти, позначають нульовою позначкою. Рівні, нижчі від нульового, позначають зі знаком мінус.

На розрізах наносять маркіровку в колі діаметром 10...12 мм окремих вузлів, креслення яких виконують в окремому альбомі. Коло поділяють горизонтальною лінією навпіл. У верхній частині записують номер вузла, а в нижній — позначення аркуша із зображенням даного вузла.

**Фасади будівель.** Фасад є проекцією будівлі на фронтальну або профільну площину проєкцій і має давати уявлення про зовнішній вигляд будівлі.

У найменуванні фасаду зазначають крайні координаційні осі зображеної ділянки будівлі, наприклад, "Фасад 1—4".

На фасадах зображують вікна, двері, пожежні сходи, арматуру водовідведення тощо.

На фасадах наносять крайні координаційні осі, позначки рівня зовнішніх елементів, які не зазначено на розрізах.

Фасад може бути виконаний як третя проєкція в безпосередньому зв'язку з планом і розрізом або окремо і в іншому масштабі. Звичайно зображують головний фасад, а також бокові та дворовий фасади.

### *Запитання та завдання*

1. Чим відрізняються архітектурно-будівельні креслення від інженерно-будівельних?
  2. Які етапи проектування будівлі?
  3. У чому суть єдиної модульної системи?
  4. Які масштаби застосовують у будівельному кресленні?
  5. У чому особливості застосування ліній різної товщини на будівельних кресленнях?
  6. У чому особливості нанесення розмірів на будівельних кресленнях?
  7. Що таке план будинку і в чому його призначення?
  8. Для яких цілей виконують розрізи будинку?
  9. Що дає креслення фасаду будинку?
-

# Розділ III

## ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ



### Глава 21

#### ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

З появою обчислювальної техніки починається новий етап науково-технічного прогресу. Нині комп'ютер є могутнім інструментом, що, по-перше, інтегрує знання, по-друге, прискорює та полегшує їх використання та, по-третє, підвищує темпи здобуття нових знань. Комп'ютер захопив майже всі галузі науки та техніки перекласти їхні досягнення на сприятливу для себе мову комп'ютерного моделювання. Так, поряд з класичними дисциплінами з'явилися обчислювальна математика, комп'ютерна графіка тощо.

Виникнення обчислювальної геометрії зумовлене використанням ЕОМ у галузях наукових досліджень та проектування. Сьогодні обчислювальна геометрія перебуває на стадії свого бурхливого розвитку.

#### 21.1. Предмет і метод обчислювальної геометрії

Грунтуючись на знаннях аналітичної, проективної, диференціальної, нарисної, багатовимірної та інших галузей геометрії, обчислювальна геометрія вивчає способи комп'ютерного геометричного моделювання виробів, споруд, процесів, проектних процедур. Геометричним моделям надається властивість, яка дає змогу в межах інших дисциплін розробляти на їхній основі комп'ютерні моделі графічного, розрахункового, технологічного, економічного характеру з кінцевим результатом комп'ютерного виготовлення проектної документації, включаючи програму керування системи з ЧПК.

Аналіз багатьох об'єктів проектування за їхньою геометричною формою свідчить

про те, що їх можна віднести до одного з трьох класів, які відрізняються технологією проектування.

В основі відображення форми на проектних документах для більшості деталей машин та споруд лежить графічний метод, який можна реалізувати застосуванням тільки двох креслярських приладів: циркуля та лінійки.

Щодо другого класу виробів (пропелери, гвинти, лопатки турбін, корпуси суден, автомобілів, літаків), то їхня геометрична форма спочатку неповно подається точковим каркасом, потім вона довізнається одним з аналітичних способів (задача інтерполяції), а в результаті за допомогою розрахунків виконується креслення.

До третього класу об'єктів проектування належать вироби чи споруди, поверхня яких у процесі проектування перевизначається за технологічними, розрахунковими та іншими умовами в термінах задачі апроксимації. Деякі точки чи лінії після перевизначення залишаються інцидентними базовій поверхні. Завдяки цьому проєктована поверхня у глобальному відношенні має вигляд базової, а в локальному відсіки базової поверхні з певним наближенням замінюються відсіками іншої поверхні, а іноді — дискретним лінійним каркасом. Наведемо кілька прикладів.

З умови технологічності конструкції поверхня подвійної кривини апроксимується багатогранною поверхнею, грані якої мають фіксовані розміри та форму (задача паркетування).

З метою застосування розрахункового методу скінченних елементів на поверхні за

певною схемою визначаються вузли, що з'єднуються між собою ідеальними прямими стрижнями.

Зв'язки обчислювальної геометрії із суміжними дисциплінами мають три рівні.

1. Вхідні зв'язки з дисциплінами геометричного циклу. Геометричне моделювання ґрунтується на способах задання, співвідношеннях, відображеннях і перетвореннях елементарних геометричних образів.

2. Зв'язки з дисциплінами "Теорія алгоритмів", "Програмування" визначають метод обчислювальної геометрії як аналітичний, орієнтований на комп'ютерне моделювання.

3. Вихідні зв'язки з автоматизованим проектуванням, комп'ютерною графікою, автоматизацією наукових досліджень. Кінцева мета — використання геометричної моделі — визначається саме цими дисциплінами.

Різноманітність типів ЕОМ ставить під сумнів прив'язування змісту обчислювальної геометрії до одного з них. Тому наведені далі матеріал не залежить від конкретної комп'ютерної реалізації.

Тепер зробимо ряд зауважень, що відіграють важливу методологічну роль як для викладання, так і для сприйняття змісту дисципліни. Фахівців, що мають справу з комп'ютером, поділяють на користувачів і розробників. Перші розв'язують задачі, зумовлені наявністю штатного та прикладного програмного забезпечення ЕОМ, а другі розробляють програми розв'язання оригінальних задач. Як перші, так і другі мають володіти прикладною галуззю, проте рівень володіння комп'ютерною грамотою у других має бути значно вищим, ніж у перших. Щодо студента чи фахівця, то для глибокого сприйняття та ефективного застосування знань він має бути одночасно і користувачем, і розробником.

Надалі будуть подані відомості про рівень користувача, а також ідеї основних алгоритмів, обчислювальні формули для розробника.

## 21.2. Системи координат, що застосовуються в обчислювальній геометрії

Кількість та склад координатних систем, що найбільше підходять до розгляду задач обчислювальної геометрії, визначаються множиною геометричних образів, які вико-

ристовуються при геометричному моделюванні, та множиною операцій над ними. Як буде показано далі, один і той самий геометричний образ у рамках одного алгоритму доцільніше відносити до одних координат, а в рамках іншого — до інших.

Вирази аналітичного опису геометричних фігур на площині розглядатимемо в прямокутних декартових координатах  $x, y$  або в полярних координатах  $u, t$  (рис. 21.1), що задаються функціями залежності перших від других,

$$x = u \cos t, \quad y = u \sin t, \quad (21.1)$$

де  $u$  — радіус-вектор точки  $M$ ;  $t$  — кут між векторами  $Ox$  та  $OM$ .

Функції оберненої залежності мають такий вигляд:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad t = f(x, y). \quad (21.2)$$

Як відомо, функція  $t = f(x, y)$  має вигляд  $\text{tg} t = \frac{y}{x}$ . Цей запис має два істотних недоліки. По-перше, при його програмуванні з'являється необхідність запобігти випадку, коли  $x = 0$ . По-друге, ця функція має два значення  $t$  на інтервалі  $0 \leq t \leq 2\pi$  при фіксованих значеннях  $x$  і  $y$ . Оскільки тут йдеться про координати, то однозначність прямої й оберненої залежностей є бажаною. Тому запишемо другу з формул (21.2) у розгорнутому вигляді, застосувавши головне значення оберненої тригонометричної функції:

$$\begin{aligned} x = 0, y > 0, & \quad t = \frac{\pi}{2}; \\ x = 0, y < 0, & \quad t = \frac{3\pi}{2}; \\ x > 0, y > 0, & \quad t = f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}; \\ x < 0, & \quad t = \arctg \frac{y}{x} + \pi; \\ x > 0, y < 0, & \quad t = \arctg \frac{y}{x} + 2\pi. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Просторові координатні системи, що походять від розглянутих систем на площині, утворюються доданням третьої лінійної координати у напрямі, перпендикулярному до площини розміщення плоских систем.



ють змогу узагальнити деякі алгоритми та розширити задання класу елементарних поверхонь без ускладнення їхніх рівнянь.

Узагальнені *циліндричні координати* (рис. 21.4) та зв'язок їх з прямокутними декартовими:

пряма залежність

$$\begin{aligned} x &= O'O_x - O_xA_x = r \cos t - u \sin t, \\ y &= O'O_y + O_yA_y = r \sin t + u \cos t, \\ z &= AA_u = v; \end{aligned} \quad (21.6)$$

обернена залежність

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}; \quad v = z, \\ t &= f(x, y) - \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r}. \end{aligned} \quad (21.7)$$

*Гіперболічні координати* (рис. 21.5) та зв'язок їх з прямокутними декартовими:

пряма залежність

$$\begin{aligned} x &= O'A'_{vx} - A'_{vx}A'_x = v \sin \alpha \cos t - u \sin t, \\ y &= O'A'_{vy} + A'_{vy}A'_y = v \sin \alpha \sin t + u \cos t, \\ z &= v \cos \alpha; \end{aligned} \quad (21.8)$$

обернена залежність

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

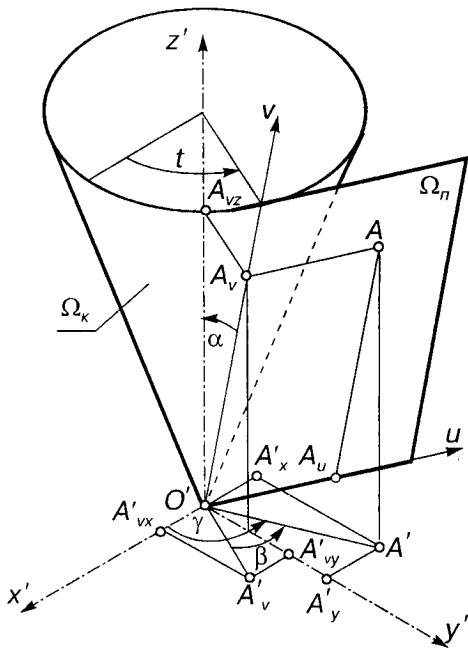


Рис. 21.5

$$v = \frac{z}{\cos \alpha}, \quad (21.9)$$

$$t = f(x, y) - \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{z \operatorname{tg} \alpha}.$$

У формулах (21.5), (21.7) і (21.9) функція  $f(x, y)$  згідно з формулами (21.3) має розгорнутий вигляд.

### 21.3. Перетворення координат і деякі точкові перетворення

Майже всі наведені вище формули відіграють подвійну роль: по-перше, вони задають деяку систему координат, спеціальну відносно прямокутної декартової системи. По-друге, вони встановлюють пряму й обернену залежності прямокутних декартових координат від спеціальних. Фактично це формули задання й перетворення спеціальних координат.

Будь-який геометричний образ задають у відповідній координатній системі та у відповідному його розміщенні відносно системи. Ця система локальна для геометричного образу. Якщо йдеться про відношення між прийнятими двома геометричними образами, то з'являється потреба перевести їх у загальну (глобальну) систему координат. Оскільки вже було розглянуто перетворення будь-яких спеціальних координат у прямокутні декартові, то обмежимося розглядом випадку, коли локальна  $x'O'y'$  і глобальна  $xOy$  системи — прямокутні декартові.

Пряма задача полягає у визначенні глобальних координат  $x, y$  будь-якої точки за її локальними координатами  $x', y'$  при фіксованому розміщенні другої системи відносно першої. Обернена задача — у визначенні локальних координат за глобальними.

**Паралельне перенесення.** Залежності глобальних координат від локальних, якщо одну з систем можна сумістити з іншою паралельним перенесенням (рис. 21.6), мають такий вигляд:

пряме перетворення

$$\begin{aligned} x &= OM_x = OO'_x + O'M'_x = x' + x_0, \\ y &= OM_y = OO'_y + O'M'_y = y' + y_0; \end{aligned} \quad (21.10)$$

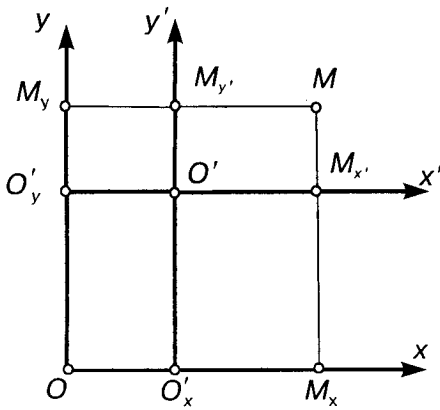


Рис. 21.6

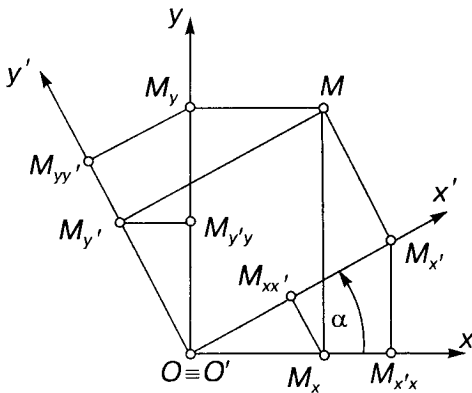


Рис. 21.7

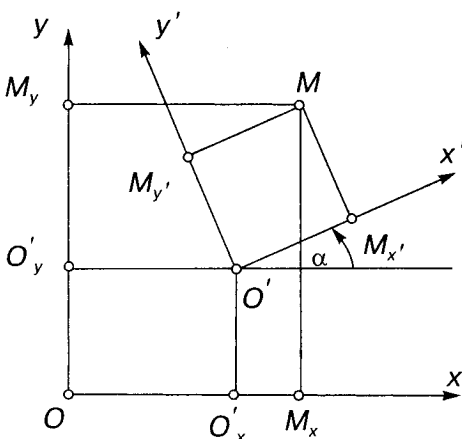


Рис. 21.8

обернене перетворення

$$\begin{aligned}x' &= OM_x - OO'_x = x - x_0, \\y' &= OM_y - OO'_y = y - y_0,\end{aligned}\quad (21.11)$$

де  $x_0, y_0$  — координати початку локальної системи відносно глобальної.

**Поворот.** Якщо праву глобальну систему можна сумістити з такою самою локальною поворотом на кут  $\alpha$  (рис. 21.7), де  $\alpha$  — кут між  $Ox$  та  $O'x'$ , що вимірюється проти руху стрілки годинника, то матимемо:

пряме перетворення

$$\begin{aligned}x &= OM_x = OM_{x'x} - M_x M_{x'x} = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y &= OM_y = OM_{y'y} + M_y M_{y'y} = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha;\end{aligned}\quad (21.12)$$

обернене перетворення

$$\begin{aligned}x' &= OM_{x'} = OM_{xx'} + M_{xx'} M_{x'} = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y' &= OM_{y'} = OM_{yy'} - M_{y'} M_{yy'} = y \cos \alpha - x \sin \alpha.\end{aligned}\quad (21.13)$$

У загальному випадку, коли від глобальної до локальної системи можна перейти послідовним використанням першого, а потім другого перетворень (рис. 21.8), то

$$x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad (21.14)$$

$$y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha - x_0, \quad (21.15)$$

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha - y_0.$$

Щодо перетворень просторових координат, то їхні вирази досить складні. Надалі застосовуватимемо лише паралельне перенесення:

пряме перетворення

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0; \quad (21.16)$$

обернене перетворення

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0, \quad (21.17)$$

а також поворот відносно координатних осей та комбінацію їх. При цьому функції залежності можна дістати, скориставшись виразами (21.12)...(21.15). Так, паралельне перенесення початку в точку  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  та поворот на кут  $\alpha$  відносно осі  $O'y'$  у напрямі проти руху стрілки годинника від  $O'x'$  до  $O'z'$ , з огляду на  $+y'$ , мають такі вирази:

для прямого перетворення

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos \alpha - z' \sin \alpha, \\ y &= y' + y_0, \end{aligned} \quad (21.18)$$

$$z = z_0 + x' \sin \alpha + z' \cos \alpha;$$

для оберненого перетворення

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + z \sin \alpha - x_0, \\ y' &= y - y_0, \end{aligned} \quad (21.19)$$

$$z' = z \cos \alpha - x \sin \alpha - z_0.$$

Розглянутий клас перетворень координат характеризується тим, що одну й ту саму точку визначають у двох координатних системах.

Другий клас перетворень встановлює відповідність між точкою-оригіналом, віднесеною до просторової системи  $xOy$ , та точкою-проекцією, яка віднесена до плоскої системи і лежить на площині проєкцій. Як відомо з нарисної геометрії, обернене перетворення у цьому випадку невизначене.

Розглянемо перетворення цього класу на прикладах стандартних аксонометричних систем.

**Прямокутна ізометрія** (рис. 21.9). Нагадаємо, що кути між осями  $\alpha = \beta = 30^\circ$ , а зведені показники спотворення  $U = V = W = 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} x_i &= -OA_{xx_u} + A_{xx_u}A_{1x_u} = -Ux \cos 30^\circ + \\ &+ Vy \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x), \end{aligned} \quad (21.20)$$

$$\begin{aligned} y_i &= -A_{xy_u}A_x - A_{xy_u}A_{1y_u} + AA_1 = \\ &= -Ux \sin 30^\circ - Vy \sin 30^\circ + Wz = z - \frac{x + y}{2}. \end{aligned}$$

**Прямокутна диметрія** (рис. 21.10) при  $\alpha = 7^\circ 10'$ ,  $\beta = 41^\circ 25'$ ,  $U = W = 1$ ,  $V = 0,5$ :

$$\begin{aligned} x_n &= -OA_{xx_n} + A_{xx_n}A_{1x_n} = \\ &= -Ux \cos 7^\circ 10' + Vy \cos 41^\circ 25' = -0,99x + 0,37y, \end{aligned} \quad (21.21)$$

$$\begin{aligned} y_n &= -A_{xy_n}A_x - A_{xy_n}A_{1y_n} + AA_1 = \\ &= -Ux \sin 7^\circ 10' - Vy \sin 41^\circ 25' + Wz = \\ &= -0,12x - 0,33y + z. \end{aligned}$$

**Косокутна диметрія** при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $U = W = 1$ ,  $V = 0,5$ ,

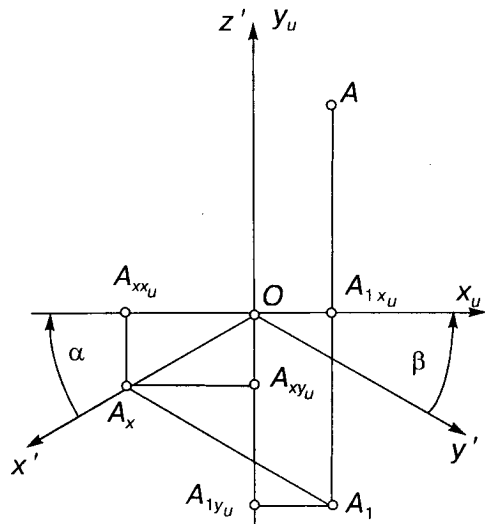


Рис. 21.9

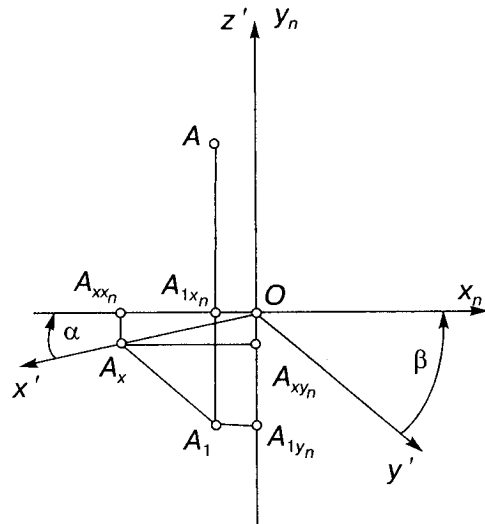


Рис. 21.10

$$x_k = -x + 0,35y, y_k = -0,35y + z. \quad (21.22)$$

Третій клас перетворень характеризується тим, що точка-оригінал  $(x_1, y_1, z_1)$  та точка-образ  $(x_c, y_c, z_c)$  віднесені до загальної системи координат. Таке перетворення називають *точковим*. Найбільш поширеними точковими перетвореннями є косокутне проєкціювання на площину рівня та перетворення симетрії, яке застосовується при



формуванні зображень на площині засоба-ми діалогової комп'ютерної графіки.

*Косокутне проєкціювання на площину рівня.* Задамо напрям косокутного проєкціювання координатами напрямного вектора  $l, m, n$ .

Рівняння променя, що проєкціює точку  $M(x_1, y_1, z_1)$ , має такий вигляд:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = s, \quad (21.23)$$

де  $s$  — параметр.

Якщо проєкціювання здійснюється на площину рівня  $z = c$ , то з рівняння (21.23) можна знайти параметр  $s$ :

$$s = \frac{c - z_1}{n} \quad (21.24)$$

та координати проєкції точки  $M$  на площину рівня  $z = c$ :

$$x_c = x_1 + ls, y_c = y_1 + ms, z_c = c. \quad (21.25)$$

На площині рівня  $x = c$  або  $y = c$  формули обчислювання координат косокутної проєкції  $M_k(x_c, y_c, z_c)$  точки  $M(x_1, y_1, z_1)$  дістають аналогічно.

*Перетворення симетрії.* Симетрія відносно початку координат:

$$x_c = -x_1, y_c = -y_1. \quad (21.26)$$

Симетрія відносно осі  $Ox$ :

$$x_c = x_1, y_c = -y_1. \quad (21.27)$$

Симетрія відносно осі  $Oy$ :

$$x_c = -x_1, y_c = y_1. \quad (21.28)$$

Перш ніж перейти до розгляду симетрії відносно прямої, паралельної осі координат, наведемо формули визначення координат  $x_n, y_n$  середини відрізка з кінцями  $(x_1, y_1)$  та  $(x_c, y_c)$ :

$$x_n = \frac{x_1 + x_c}{2}, y_n = \frac{y_1 + y_c}{2}. \quad (21.29)$$

Симетрія відносно прямої, паралельної осі  $Ox$  ( $y = y_n$ ):

$$x_c = x_1, y_c = 2y_n - y_1. \quad (21.30)$$

Симетрія відносно прямої, паралельної  $Oy$  ( $x = x_n$ ):

$$x_c = 2x_n - x_1, y_c = y_1. \quad (21.31)$$

Формули (21.30) та (21.31) дістали з рівнянь (21.29).

Щоб дістати формули для симетрії відносно прямої загального положення

$$y = kx + b \quad (k \neq 0), \quad (21.32)$$

знайдемо координати  $x_n, y_n$  точки перетину прямої (21.32) та перпендикулярної до неї прямої

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1), \quad (21.33)$$

що проходить через точку  $(x_1, y_1)$ . Шукана точка є розв'язком системи (21.32) і (21.33):

$$x_n = \frac{x_1 + ky_1 - kb}{1 + k^2}, y_n = \frac{kx_1 + k^2y_1 + b}{1 + k^2}. \quad (21.34)$$

З виразів (21.29) матимемо

$$x_c = 2x_n - x_1, y_c = 2y_n - y_1, \quad (21.35)$$

де  $x_n, y_n$  обчислюють за формулами (21.34).

## 21.4. Геометричні образи: вимірність і функціональна параметризація

Як відомо, всі предмети мають свої розміри. Розмірами у трьох взаємно перпендикулярних напрямках є довжина, ширина та висота. Ті предмети, які мають один з основних розмірів значно менший ніж два інших (наприклад, скло, тканина), характеризуються лише довжиною та шириною. Предмети, в яких два розміри значно менші ніж третій, характеризуються лише довжиною.

Майже те саме маємо при класифікації геометричних образів за вимірністю. Відмінність лише в тому, що, хоча деякими розмірами реальних предметів і нехтують, вони все-таки існують, а у випадку з геометричними образами їхні значення дорівнюють нулю.

Точка має нульову вимірність. Вимірність інших геометричних образів визначається кількістю ступенів свободи при переміщенні по ньому точки або числом параметрів, що при заданому геометричному образі визначає на ньому точку. Отже, лінія — одновимірна, поверхня та площина — двовимірні.

Межею геометричного образу будь-якої вимірності є геометричний образ, вимір-

ність якого на одиницю менша. Так, поверхня обмежує тривимірний простір, межею поверхні чи площини є лінія, а лінію обмежує точка. Звідси й походить поняття від- різка лінії, відсіку поверхні та тіла.

У розділі “Нарисна геометрія” були розглянуті поняття конструктивної параметризації та визначника геометричного образу. Показано, що число конструктивних параметрів геометричного образу визначають за формулою

$$E_k = P + Q,$$

де  $P$  — число параметрів положення;  $Q$  — число параметрів форми.

Якщо геометричний образ задано аналітично, то маємо справу з функціональною параметризацією.

*Функціональним параметром* називають незалежну змінну, яка визначає положення точки на геометричному образі при його аналітичному заданні.

Функціональні параметри відіграють таку саму роль в аналітичній формі задання геометричного образу, що й алгоритмічна частина визначника в графічній формі задання.

Максимальне число незалежних параметрів, що містить формула функціональної параметризації геометричного образу, є

$$E_\phi = P + Q + R, \quad (21.36)$$

де  $P$  і  $Q$  — параметри конструктивної параметризації;  $R$  — число функціональних параметрів, що дорівнює вимірності геометричного образу.

Наведемо кілька важливих властивостей функціональної параметризації.

1. При спеціальному розміщенні геометричного образу відносно системи координат деякі або навіть усі параметри положення можуть не міститися в рівнянні. При цьому можна прийняти, що їхні значення дорівнюють нулю.

Так, рівняння еліпса, довільно розміщеного на площині, має такий вигляд:

$$x = x_0 + acost \cos \varphi - bsint \sin \varphi, \quad (21.37)$$

$$y = y_0 + acost \sin \varphi + bsint \cos \varphi.$$

Тоді маємо  $P = 3(x_0, y_0, \varphi)$ ,  $Q = 2(a, b)$ ,  $R = 1(t)$ ,  $E_k = 5$ ,  $E_\phi = 6$ .

Якщо осі еліпса збігаються з осями  $Ox$  і  $Oy$ , то  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\varphi = 0$ . Отже,  $x = acost$ ,  $y = bsint$ .

2. Конструктивні параметри форми чи положення можуть входити у формулу функціональної параметризації неявно.

Так, рівняння (21.37) еліпса може набувати такого вигляду:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (21.38)$$

Тут параметри положення  $x_0, y_0, \varphi$  та параметри форми  $a, b$  можуть бути визначені через параметри  $A, B, C, D, E, F$ , що входять у рівняння, засобами аналітичної геометрії.

3. Число незалежних параметрів, що входять у рівняння геометричного образу, не може перевищувати число параметрів функціональної параметризації  $E_\phi$ . Як уже встановлено, еліпс на площині функціонально параметризується п'ятьма конструктивними та одним функціональним параметрами. Може здатись на перший погляд, що їх у рівнянні (21.38) відповідно шість ( $A, B, C, D, E, F$ ) та два ( $x, y$ ). Доведемо, що один з шести параметрів  $A, B, C, D, E, F$  та один з параметрів  $x$  чи  $y$  — залежні.

Нехай  $F \neq 0$ , тоді його можна вважати залежним. Покажемо, як його можна позбавитися. Розділимо рівняння (21.38) на  $F$  і введемо нові позначення:  $A' = A/F, B' = B/F, C' = C/F, D' = D/F, E' = E/F$ . Рівняння (21.38) матиме такий вигляд:

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + 1 = 0,$$

де число незалежних конструктивних параметрів дорівнює п'яти.

Розв'язавши це рівняння відносно  $x$  чи  $y$ , визначимо залежний параметр, що входить у ліву частину рівняння та функціональний параметр, що міститься в правій частині.

4. Ефект втрати вимірності та засоби його запобігання. Існують геометричні образи, спеціально розміщені відносно системи координат, функціональні параметри яких частково чи повністю не входять у рівняння.

Так, перетворимо рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

до вигляду

$$y = -A'x - C'z - D', \quad (21.39)$$

де  $A' = A/B, C' = C/B, D' = D/B (B \neq 0)$ .

У рівнянні (21.39) містяться три конструктивних параметри  $A'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , що наявно задають положення площини, та два функціональних параметри  $x$  і  $z$ .

**В и п а д о к 1.** Нехай  $C' = 0$ , тоді рівняння (21.39) набуває такого вигляду

$$y = -A'x - D'. \quad (21.40)$$

Це рівняння задає горизонтально проекційовальну площину, воно має два конструктивні параметри  $A'$  і  $D'$  та один функціональний параметр  $x$  (так само, як і пряма на площині).

Якщо треба підкреслити, що рівняння (21.40) задає площину, а не пряму, то його записують в одному з двох виглядів без втрати функціонального параметра:

$$y = -A'x - C'z - D' \quad (C' = 0), \quad (21.41)$$

або

$$y = -A'x - D', \quad z = z. \quad (21.42)$$

Рівняння (21.41) відповідає формулі (21.36) обчислення параметрів функціональної параметризації. Рівняння (21.42) знову набуло функціональний параметр  $z$ , який був втрачений разом з  $C'$ . Це рівняння має два конструктивні параметри  $A'$  і  $D'$ . Третій параметр  $C' = 0$  зв'язаний умовою перпендикулярності до площини  $xOy$ .

Щоб задати точку на площині (21.41) або (21.42), треба задати значення функціональних параметрів  $x$  і  $z$  та обчислити  $y$  за формулою (21.41) або (21.42).

**В и п а д о к 2.** Нехай  $A' = 0$  і  $C' = 0$ , тоді рівняння (21.39) набуває вигляду

$$y = -D'. \quad (21.43)$$

Воно не містить жодного функціонального параметра, це рівняння краще записати без втрати функціональних параметрів

$$y = -A'x - C'z - D' \quad (A' = 0, C' = 0) \quad (21.44)$$

або

$$y = -D', \quad x = x, \quad z = z. \quad (21.45)$$

Щоб задати точку на площині (21.44) або (21.45), треба задати значення функціональних параметрів  $x$  і  $y$  та обчислити  $z$  за формулою (21.44) або (21.45).

## 21.5. Форми задання геометричних образів

Форми задання геометричних образів розглянемо на прикладі прямокутних декартових координат. Найбільш поширени-

ми формами задання є: явна, неявна та параметрична.

Задання лінії на площині у формах:

явній

$$y = f(x), \quad (21.46)$$

неявній

$$F(x, y) = 0, \quad (21.47)$$

параметричній

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (21.48)$$

Лінію в просторі задають у параметричній формі

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (21.49)$$

У багатьох випадках лінію задають за допомогою поверхні, якій вона належить, або двох поверхонь, що визначають її як лінію перетину.

Задання поверхонь у формах:

явній

$$z = z(x, y), \quad (21.50)$$

неявній

$$F(x, y, z) = 0, \quad (21.51)$$

параметричній

$$x = x(u, t), \quad y = y(u, t), \quad z = z(u, t). \quad (21.52)$$

Як відомо, лінія задається за допомогою одного функціонального параметра, а поверхня — за допомогою двох функціональних параметрів. При заданні лінії (21.47) або поверхні (21.51) у неявній формі число функціональних параметрів залишається без змін, а роль залежного відіграє будь-який з них, а точніше той, що міститься у лівій частині при переході від неявної до явної форми задання.

Слід зазначити, що явна форма задання є окремим випадком параметричної форми, коли роль функціональних параметрів відіграють змінні координати: одна — для лінії, дві — для поверхні.

Існують ще інші форми задання ліній та поверхонь, що пов'язані з системою координат, до якої вони віднесені. Йдеться про випадки, коли один функціональний параметр (або й два) не входить до рівняння (ефект втрати вимірності). Так, рівняннями у формі (21.46), (21.47) чи (21.48) задають не тільки лінію на площині  $xOy$ , а й циліндричну поверхню, для якої ця лінія відіграє роль напрямної, а прямолінійна твірна паралельна осі  $Oz$ . Щоб запобігти втраті функ-

ціонального параметра, до наведених рівнянь додають тотожність  $z = z$ .

У координатних системах на площині є клас ліній, а в просторових координатах — клас поверхонь, які називають *координатними лініями* або *координатними поверхнями* чи *лініями* або *поверхнями рівня*. Так, у декартовій системі на площині  $x = \text{const}$  — лінія рівня, паралельна  $Oy$ ;  $y = \text{const}$  — лінія рівня, паралельна  $Ox$ . У полярній системі лініями рівня є:  $u = \text{const}$  — коло,  $t = \text{const}$  — промінь.

Для просторових систем поверхнями рівня є:

у декартовій прямокутній системі координат —  $x = \text{const}$  — площина,  $y = \text{const}$  — площина,  $z = \text{const}$  — площина;

у циліндричних координатах —  $u = \text{const}$  — циліндр,  $t = \text{const}$  — півплощина,  $v = \text{const}$  — площина;

в узагальнених циліндричних координатах —  $u = \text{const}$  — циліндр,  $v = \text{const}$  — площина з отвором,  $t = \text{const}$  — півплощина;

у гіперболічних координатах —  $u = \text{const}$  — однопорожнинний гіперболоїд,  $v = \text{const}$  — площина з отвором,  $t = \text{const}$  — півплощина.

Задаючи поверхні рівня, слід враховувати зауваження щодо форм запису рівнянь (21.43)...(21.45).

У цих трьох видах координат зручно задавати поверхні, що за кінематичним принципом утворення мають плоску твірну, розміщену в площині  $t = \text{const}$  та віднесену до декартових координат  $u, v$  на цій площині. Площина  $t = \text{const}$  обертається навколо осі  $Oz$  просторової декартової системи та належить цій площині, якщо координати циліндричні (див. рис. 21.3), вона паралельна їй у випадку узагальнених циліндричних координат (див. рис. 21.4) та перетинає її під кутом  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , якщо координати гіперболічні (див. рис. 21.5).

Поверхні в цих системах задаються функцією в явній чи неявній формі, що зв'язує

координати  $u, v, t$ :

$$v = v(u, t), \quad (21.53)$$

$$F(u, v, t) = 0. \quad (21.54)$$

У сукупності з відповідними функціями прямої залежності (21.4), (21.6), (21.8) функція (21.53) або (21.54) приводить до параметричної форми задання поверхні в прямокутних декартових координатах.

Повернемося до поняття межі та неявної форми задання.

Лінія (21.47) поділяє площину на дві області. Якщо у формулу (21.47) підставити координати будь-якої точки однієї області, то замість знака рівності дістанемо знак нерівності, нехай

$$F(x, y) > 0 \quad (21.55)$$

або

$$F(x, y) < 0. \quad (21.56)$$

Відомо, що при множенні обох частин нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний. Тому завжди можна застосувати множення на  $-1$ , поставивши цим самим у відповідність фіксовану область та знак нерівності. Звідси випливає орієнтування лінії.

Наприклад, можна прийняти, що при однакових лівих частинах форм задання межі та області межа орієнтована так, що область (21.55) лежить зліва, а область (21.56) — справа від межі. Щоб орієнтувати межу в протилежному напрямі, треба помножити ліву частину рівняння (21.47) на  $-1$ .

Аналогічно від рівняння (21.51) поверхні можна перейти до нерівності й визначити просторову область (тіло), для якої ця поверхня є межею. Щодо орієнтації поверхні, то тут поняття “зліва”, “справа” неприйнятні. Замість них застосовують поняття “внутрішність” і “зовнішність”, маючи на увазі розміщення спробної точки області відносно точки перетину нормалі, що проходить через неї, з межею.

### Запитання та завдання

1. Що вивчає обчислювальна геометрія?
2. Яка істотна відмінність методу обчислювальної геометрії?
3. Навести геометричну класифікацію об'єктів вивчення обчислювальної геометрії.
4. Проаналізувати зв'язки обчислювальної геометрії з суміжними дисциплінами.

5. Які координатні системи застосовують в обчислювальній геометрії?
6. У якій формі задають циліндричну, узагальнену циліндричну та гіперболічну системи координат?
7. Навести означення вимірності геометричного образу.
8. Який зв'язок між вимірностями області та її межі?
9. Перелічити форми задання ліній і поверхонь.
10. Визначити форму задання області.
11. Як переорієнтувати лінію чи поверхню?



## Глава 22 ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ПЛОЩИНІ

### 22.1. Пряма

Різноманітність форм задання прямої, взагалі будь-якого геометричного образу, зумовлена зручністю застосування тієї чи іншої форми при розв'язанні конкретних задач. Тому перелік форм задання буде супроводжуватися даними про галузі застосування.

Пряма в явній формі

$$y = kx + b, \quad (22.1)$$

де  $k$  — тангенс кута нахилу прямої до осі абсцис;  $b$  — початкова ордината.

Рівняння (22.1) називають *рівнянням з кутовим коефіцієнтом*. Ця форма дуже зручна для виразу умов паралельності ( $k_1 = k_2$ ) та перпендикулярності ( $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ ) двох прямих з кутовими коефіцієнтами  $k_1$  та  $k_2$ .

В алгоритмі покриття замкненої області штриховкою рівнянням (22.1) задають сім'ю паралельних ліній штриховки, змінюючи  $b$  з фіксованим кроком.

В алгоритмі обчислення площі замкненої області підінтегральна функція є правою частиною рівняння (22.1).

Форму (22.1) застосовують також в алгоритмі перетворення симетрії відносно прямої загального положення.

Пряма в неявній формі

$$Ax + By + C = 0. \quad (22.2)$$

Ліву частину цього рівняння застосовують для задання півплощин

$$Ax + By + C > 0 \quad (22.3)$$

і

$$Ax + By + C < 0. \quad (22.4)$$

Якщо прийняти, яка з цих півплощин розміщена зліва, а яка справа від прямої, то цим самим можна орієнтувати пряму (22.2). Для зміни напрямку прямої (22.2) на протилежний треба обидві частини рівняння (22.2) помножити на  $-1$ . При цьому півплощини (22.3) і (22.4) поміняються місцями.

Сукупністю нерівностей, кожна з яких задає півплощину, задають область, обмежену опуклим багатокутником на площині, якщо кількість нерівностей менша від трьох. При цьому можна використовувати нерівності лише одного знака.

Наприклад, внутрішність квадрата, зображеного на рис. 22.1, моделюється системою нерівностей

$$-y + 2 > 0, -x + 2 > 0, y + 2 > 0, x + 2 > 0, \quad (22.5)$$

а зовнішність квадрата, зображеного на рис. 22.2, — системою нерівностей

$$y - 1 > 0, x - 1 > 0, -y - 1 > 0, -x - 1 > 0. \quad (22.6)$$

“Кільцева” область (рис. 22.3), яка обмежена двома попередніми квадратами, моделюється системою з восьми нерівностей (22.5) і (22.6).

**Обчислення координат точки перетину двох прямих.** Якщо прямі задані формою (22.2)

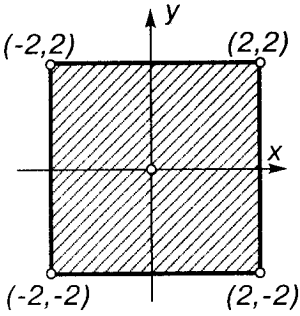


Рис. 22.1

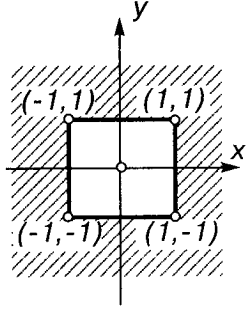


Рис. 22.2

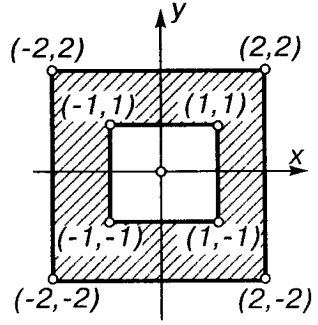


Рис. 22.3

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (22.7)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то координати точки перетину їх обчислюють за формулами

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (22.8)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1B_1 \\ -C_2B_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1-C_1 \\ A_2-C_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо  $\Delta = 0$ , а  $\Delta_x \neq 0$  або  $\Delta_y \neq 0$ , то прямі паралельні.

Якщо  $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0$ , то прямі збігаються.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (22.9)$$

Це рівняння доцільно застосовувати тоді, коли впорядкована послідовність точок сполучається ламаною. Ця послідовність задається масивами координат  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Рівняння ланок ламаної дістанемо у вигляді

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (22.10)$$

Рівняння (22.9) можна звести до вигляду (22.1), якщо обчислити  $k$  і  $b$  за формулами

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, b = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2 - x_1}, \quad (22.11)$$

та до вигляду (22.2), якщо обчислити  $A, B$  і  $C$  за формулами

$$A = y_2 - y_1, B = x_2 - x_1, C = y_1x_2 - x_1y_2. \quad (22.12)$$

Розглянемо ще параметричну форму задання прямої. Запишемо рівняння (22.9) у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = s. \quad (22.13)$$

Звідси

$$x = x_1(1 - s) + x_2s, y = y_1(1 - s) + y_2s, \quad (22.14)$$

де  $s$  є параметром. Якщо  $s = 0$ , то  $x = x_1, y = y_1$ . Якщо  $s = 1$ , то  $x = x_2, y = y_2$ . Якщо  $0 \leq s \leq 1$ , то точка лежить усередині відрізка  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ . Якщо  $s < 0$  або  $s > 1$ , то точка лежить зовні відрізка.

Параметричне рівняння (22.14) застосовують у багатьох алгоритмах комп'ютерної графіки: в алгоритмі покриття області штриховкою, в алгоритмах визначення видимості — рухомого та нерухомого екранів тощо.

Нехай область, яку треба покрити штриховкою (рис. 22.4), задана масивами координат  $x_{i+1}, y_{i+1}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Рівняння ланок, що обмежують область, дістанемо у вигляді (22.10) при  $i = 1, 2, 3, 4$ . Визначивши інтервал, який пробігає параметр  $b$  у рівнянні (22.1) сім'ї ліній штриховки, задамо крок зміни  $b$ . На кожному кроці треба розв'язати систему чотирьох рівнянь (22.10) і (22.1). У результаті дістанемо координати точок I...IV. Підставимо у формули (22.14) замість  $x$  та  $y$  знайдені координати  $x_{ni}$  та  $y_{ni}$ . Матимемо

$$s_i = \frac{x_{ni} - x_i}{x_{i+1} - x_i}, s_i = \frac{y_{ni} - y_i}{y_{i+1} - y_i}. \quad (22.15)$$

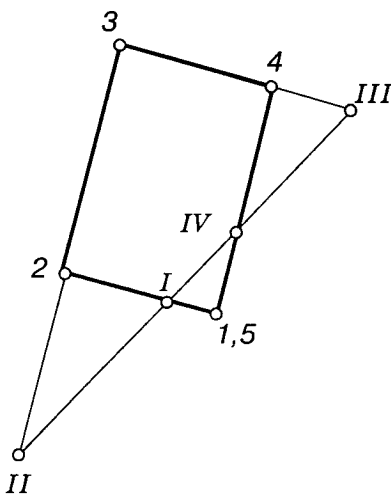


Рис. 22.4

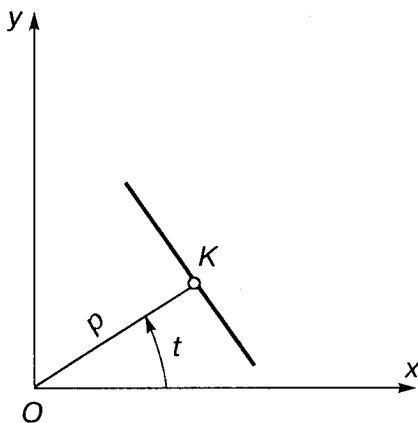


Рис. 22.5

Якщо  $x_{i+1} - x_i = 0$ , то слід скористатися другою формулою з (22.15), а якщо  $y_{i+1} - y_i = 0$ , то — першою.

У результаті для точок II і III дістанемо значення  $s_2$  та  $s_3$  за межами інтервалу  $0 \leq s \leq 1$ , тобто їх не враховують при визначенні того відрізка лінії штриховки, що належить області.

**Полярні параметри прямої.** Відстань  $\rho$  початку координат від прямої (22.2) та кут між віссю  $Ox$  і відрізком перпендикуляра  $OK$  (рис. 22.5) називають *полярними параметрами прямої*.

Відстань  $\rho$  визначають за формулою

$$\rho = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (22.16)$$

Кут  $t$  визначають не безпосередньо, а за допомогою функцій синуса та косинуса:

$$\cos t = \frac{-C}{|C|} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (22.17)$$

$$\sin t = \frac{-C}{|C|} \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Умова паралельності прямих (22.7) впливає з формул (22.8) при  $\Delta = 0$ :

$$A_1 B_2 - B_1 A_2 = 0. \quad (22.18)$$

Умова перпендикулярності прямих (22.7):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (22.19)$$

Рівняння прямої, яка проходить через точку  $M(x_1, y_1)$  і перпендикулярна до прямої (22.2):

$$A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0. \quad (22.20)$$

Відстань точки  $M(x_1, y_1)$  до прямої (22.2):

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (22.21)$$

Якщо в цю формулу підставити координати початку  $0(0,0)$ , то відстань  $d$  матиме знак  $C$ , чим і пояснюється знак абсолютної величини. Точки, розміщені по той самий бік від прямої (21.2), що й початок координат, дають той самий знак для  $d$ . Точки, розміщені по різні боки від прямої, дають протилежні знаки для  $d$ . Тому відстань  $d$  називають *орієнтованою*.

## 22.2. Коло

Рівняння кола, центр якого збігається з початком координат, має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (22.22)$$

У параметричній формі

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad (22.23)$$

де  $t$  — кут між  $Ox$  та радіусом-вектором точки.

Якщо центр кола має координати  $(a, b)$ , то рівнянням кола є (рис. 22.6):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (22.24)$$

та

$$x = a + R \cos t, \quad y = b + R \sin t. \quad (22.25)$$

**Орієнтація кола.** Перейдемо від форми задання (22.22) чи (22.24) до неявної форми задання:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (22.26)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0. \quad (22.27)$$

Якщо координати точок, які лежать усе-редині кола, підставити в рівняння (22.26) або (22.27), то матимемо зміну знака “=” на “<”.

Можна вважати, що коло (22.26) або (22.27) має такий напрям, що точки, координати яких змінюють знак “=” на знак “<” у рівнянні (22.26) чи (22.27), розміщені, наприклад, зліва від напрямку кола, тим самим визначити його орієнтацію. Щоб змінити напрям кола на протилежний, треба помножити рівняння на  $-1$ . Тоді матимемо

$$-x^2 - y^2 + R^2 = 0, \text{ або}$$

$$-(x - a)^2 - (y - b)^2 + R^2 = 0.$$

**Поділ кола на рівні частини.** Щоб поділити коло на  $n$  рівних частин, треба ввести параметр  $s$ :

$$s_i = \frac{i-1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1). \quad (22.28)$$

Кутовий параметр точок поділу

$$t_i = 2\pi s_i. \quad (22.29)$$

Змінюючи  $i$  від 1 до  $n+1$ , обчислюємо спочатку  $s_i$  за формулою (22.28), а потім  $t_i$  за формулою (22.29). Підставивши  $t_i$  у рівняння (22.23) або (22.25), знайдемо координати  $x_i, y_i$  точок поділу.

Перша точка поділу ( $i = 1, s_i = 0, t_i = 0$ ) збігається з останньою ( $i = n+1, s_i = 1, t_i = 2\pi$ ). Цей збіг, як і кінцеве значення  $i = n+1$ , зроблено навмисно: при кресленні кола чи багатокутника графопобудовником креслярський пристрій міститься у початковій точці двічі — на початку та наприкінці креслення.

Наведений алгоритм застосовують у програмах креслення правильних багатокутників і кіл. У другому випадку  $n$  вибирають значно більшим, щоб візуально багатокутник не відрізнявся від кола.

**Дуга (відрізок) кола.** Параметрами, що визначають будь-яку дугу кола є:  $x_c, y_c$  — координати центра;  $R$  — радіус;  $t_n$  — кутовий параметр початкової точки дуги;  $t_d$  —

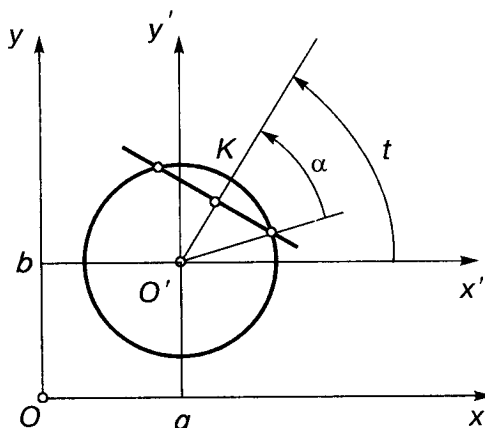


Рис. 22.6

центральный кут, що охоплює дугу, або кутовий параметр дуги. Кути  $t_n$  та  $t_d$  орієнтовані. Перший — від напрямку  $+x$  до радіуса-вектора початкової точки, другий — від радіуса-вектора початкової до радіуса-вектора кінцевої точки. Якщо вони спрямовані проти ходу годинникової стрілки, то значення беруть зі знаком “+”, а якщо за ходом — зі знаком “-”.

**Поділ дуги кола на рівні частини.** Наведений вище алгоритм для кола треба модернізувати, замінивши формулу (22.29) на

$$t = t_n(1 - s) + (t_d + t_n)s. \quad (22.30)$$

Решта — без змін. На цьому алгоритмі ґрунтується програма креслення дуги кола.

**Перетин кола та прямої.** Щоб знайти координати точок перетину прямої (див. рис. 22.6), заданої у формі (22.2)

$$Ax + By + C = 0, \quad (22.31)$$

та кола, заданого формою (22.25), знайдемо рівняння прямої у локальній системі  $x'O'y'$  з початком у центрі кола  $O'(a, b)$  (рис. 22.6). За формулами (21.10) рівняння прямої у локальній системі  $x'O'y'$

$$A(x' + a) + B(y' + b) + C = 0$$

або

$$Ax' + By' + C + Aa + Bb = 0. \quad (22.32)$$

Згідно з (22.16) та (22.17) визначимо полярні параметри прямої (22.32) у системі  $x'O'y'$

$$p = \frac{|C + Aa + Bb|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (22.33)$$



$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{C + Aa + Bb}{|C + Aa + Bb|} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \sin t &= -\frac{C + Aa + Bb}{|C + Aa + Bb|} \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned} \quad (22.33)$$

Очевидно, якщо  $p > R$ , то розв'язків не існує, якщо  $p = R$ , то маємо один розв'язок (дотик). Знайдемо синус та косинус кута

$$\cos \alpha = \frac{p}{R}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{p^2}{R^2}}. \quad (22.34)$$

Координати точок перетину прямої з колом у системі

$$x'_1 = R \cos(t - \alpha), \quad y'_1 = R \sin(t - \alpha), \quad (22.35)$$

$$x'_2 = R \cos(t + \alpha), \quad y'_2 = R \sin(t + \alpha),$$

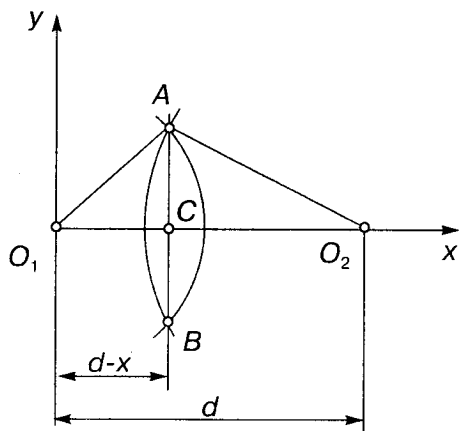


Рис. 22.7

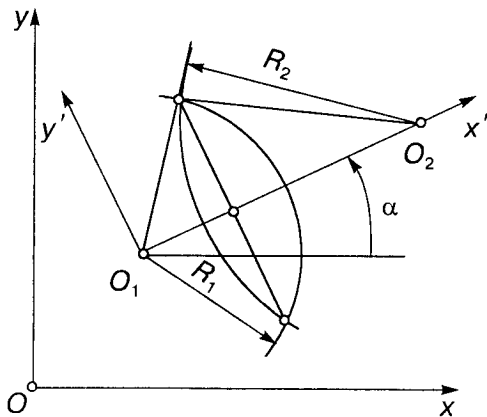


Рис. 22.8

де

$$\sin(t - \alpha) = \sin t \cos \alpha - \cos t \sin \alpha,$$

$$\sin(t + \alpha) = \sin t \cos \alpha + \cos t \sin \alpha,$$

$$\cos(t - \alpha) = \cos t \cos \alpha + \sin t \sin \alpha,$$

$$\cos(t + \alpha) = \cos t \cos \alpha - \sin t \sin \alpha.$$

Координати точок перетину у системі  $xOy$  знаходимо за формулами (21.10). Маємо:

$$x_1 = x'_1 + a, \quad y_1 = y'_1 + b, \quad (22.36)$$

$$x_2 = x'_2 + a, \quad y_2 = y'_2 + b.$$

**Пряма, дотична до кола та паралельна заданій прямій.** Форми задання прямої та кола, віднесення їх до локальної системи  $x'O'y'$  та вирази (22.32) і (22.33) такі самі, як і в попередньому алгоритмі. Для дотичних прямих  $p = R$ , а кутовий параметр однієї з точок дотику дорівнює куту нахилу до осі  $O'x'$  полярного параметра  $p$ . Звідси координати точки дотику однієї з шуканих прямих у системі  $x'O'y'$  є такими:

$$x'_1 = R \cos t, \quad y'_1 = R \sin t, \quad (22.37)$$

де  $\cos t$  і  $\sin t$  визначають за формулами (22.33).

Координати точки дотику другої прямої у системі  $x'O'y'$

$$x'_2 = -x'_1, \quad y'_2 = -y'_1 \quad (22.38)$$

знаходимо як для точки, симетричної точці  $(x'_1, y'_1)$  відносно початку  $O'$ .

Перехід у глобальну систему  $xOy$  здійснюється за формулами (22.36). Якщо  $x_i, y_i$  — знайдені координати точок дотику у системі  $xOy$ , то рівняння дотичних прямих дістанемо у вигляді

$$A(x - x_i) + B(y - y_i) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (22.39)$$

тобто коефіцієнти  $A$  і  $B$  такі самі, як і в рівнянні заданої прямої, а вільний член  $C$  набуває значення

$$C_i = -Ax_i - By_i. \quad (22.40)$$

**Перетин двох кіл.** Розглянемо спочатку випадок окремого розміщення кіл, коли центр першого збігається з початком, а центр другого лежить на осі  $Ox$  (рис. 22.7). Задача має два розв'язки, якщо міжцентрова відстань  $d$  задовольняє умову (при  $R_1 > R_2$ )

$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2.$$

Тут не розглядаємо тривіальні випадки, коли  $d = R_1 - R_2$  або  $d = R_1 + R_2$ .

Рівняння першого кола

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (22.41)$$

Рівняння другого кола

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (22.42)$$

Координати шуканих точок перетину знайдемо як розв'язок системи рівнянь (22.41) і (22.42)

$$2ax - a^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

звідки

$$x_{n1,2} = \frac{a^2 + R_1^2 - R_2^2}{2a}, \quad y_{n1,2} = \pm \sqrt{R_1^2 - x_{n1,2}^2}. \quad (22.43)$$

У загальному випадку розміщення (рис. 22.8) при заданих координатах центрів і радіусах знаходимо міжцентрову відстань

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (22.44)$$

та компонент повороту локальної системи з початком у центрі першого кола й віссю  $O'x'$ , що збігається з  $O_1O_2$ , відносно глобальної системи  $xOy$  згідно з рівняннями (21.3):

$$t = f(x, y). \quad (22.45)$$

Далі знаходимо  $x_{n1,2}, y_{n1,2}$  за формулами (22.43) у локальній системі та зводимо результат згідно з рівняннями (21.14) до глобальної системи, враховуючи, що  $x_0 = x_1, y_0 = y_1, \alpha = t$ .

### 22.3. Задача спряження двох кіл третім

Задача спряження двох кіл третім зводиться до побудови кола, дотичного до двох заданих кіл. При цьому радіус шуканого кола задано, а треба знайти його центр і точки спряження.

Розв'язати цю задачу креслярськими приладами нескладно. Певні труднощі виникають при розробці програмного розв'язування цієї задачі засобами комп'ютерної графіки.

Загальна вимога до програмного забезпечення розв'язування будь-якої задачі — включати аналіз сумісності поставлених умов. Це означає, що перш ніж застосувати алгоритм розв'язку, треба визначити, яким умовам мають відповідати вхідні дані.

У задачі спряження формулювання умов сумісності вхідних даних та складання алгоритму розв'язування виникають труднощі, спричинені багатоваріантністю.

Як відомо, дотик двох кіл може бути зовнішнім або внутрішнім. У загальному випадку існує чотири варіанти дотику шуканого кола з двома заданими. Ці варіанти формалізуються наданням знака “-” чи “+” радіусам заданих кіл. Якщо дотик відповідного кола і шуканого є зовнішнім, то його радіус від'ємний, а якщо внутрішнім, то — додатний.

Ще два варіанти, що відрізняються розміщенням центра шуканого кола відносно лінії центрів заданих кіл, формалізуємо наданням знака радіусу спряжувального кола. Якщо центри  $O_1$  і  $O_2$  заданих кіл не збігаються, то радіус спряжувального кола додатний, коли його центр лежить зліва, та від'ємний, коли його центр лежить справа від вектора  $O_1O_2$ .

Центр спряжувального кола, його радіус і точки спряження ще не однозначно визначають кутовий параметр спряжувальної дуги. Точки дотику поділяють спряжувальне коло на дві дуги, сума яких дорівнює  $2\pi$ . Отже, значенням коефіцієнта  $k$  можна поставити у відповідність кожен з двох дуг спряжувального кола. Наприклад, значенню  $k = 0$  відповідає менша дуга,  $k = 1$  — більша.

**Алгоритм розв'язання** в цілому наводимо з урахуванням прийнятої формалізації.

Вх і дні дані:  $x_1, y_1$  і  $R_1$  — координати центра  $O_1$  і радіус першого кола;  $x_2, y_2$  і  $R_2$  — координати центра і радіус другого кола;  $R$  — радіус спряжувального кола;  $k$  — коефіцієнт вибору спряжувальної дуги.

Вихідні дані:  $x_c, y_c$  — координати центра спряжувальної дуги;  $t_n$  — кутовий параметр початкової точки спряжувальної дуги;  $t_d$  — кутовий параметр спряжувальної дуги.

Обчислення міжцентрової відстані:

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (22.46)$$

Нехай

$$A = \frac{R_1 + R_2 + a}{2}, \quad B = \frac{R_1 + R_2 - a}{2}. \quad (22.47)$$

Перевірка сумісності умов. Задача має розв'язок, якщо:

$$a > |R_1| + |R_2|, |R| > a, \quad (22.48)$$

або

$$a < \||R_1| - |R_2|\|, B < |R| < A, \quad (22.49)$$

або

$$\||R_1| - |R_2|\| < a < |R_1| + |R_2|, \quad (22.50)$$

$$R_1 > 0, R_2 > 0, |R| > A \text{ чи } |R| < B,$$

або

$$\||R_1| - |R_2|\| < a < |R_1| + |R_2|, R_1 R_2 < 0, B < |R| < A. \quad (22.51)$$

За допомогою алгоритму визначення координат точок перетину двох кіл, радіуси яких  $\||R| - R_1|$  та  $\||R| - R_2|$  (див. параграф 22.2), знаходять у локальній системі з початком у  $O_1$  та віссю  $O'x'$ , що збігається з  $O_1O_2$  (рис. 22.9),

$$x'_c = \frac{a^2 + (|R| - R_1)^2 - (|R| - R_2)^2}{2a}, \quad (22.52)$$

$$y'_c = \frac{R}{|R|} \sqrt{(|R| - R_1)^2 - x'^2_c}.$$

Координати точки контакту спряжувального кола з першим колом:

$$x'_{k_1} = \frac{x'_c R_1}{R_1 - |R|}, y'_{k_1} = \frac{y'_c R_1}{R_1 - |R|}. \quad (22.53)$$

Координати точки спряження з другим колом:

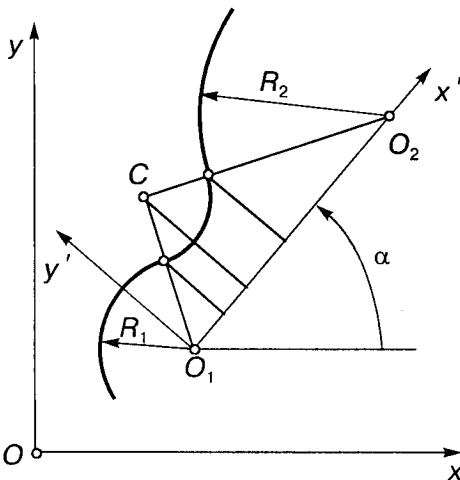


Рис. 22.9

$$x'_{k_2} = \frac{x'_c R_2 - a|R|}{R_1 - |R|}, y'_{k_2} = \frac{y'_c R_2}{R_2 - |R|}. \quad (22.54)$$

Співвідношення (22.53) та (22.54) дістає з розрахунку подібних трикутників.

Визначення компонент повороту локальної системи  $x'O'y'$  відносно глобальної  $xOy$  згідно з рівняннями (21.3):

$$\alpha = f(x, y) = f(x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (22.55)$$

Обчислення глобальних координат центра спряжувального кола та координати точок спряження за формулами (21.14):

$$x_c = x_1 + x'_c \cos \alpha - y'_c \sin \alpha,$$

$$y_c = y_1 + x'_c \sin \alpha + y'_c \cos \alpha,$$

$$x_{k_1} = x_1 + x'_{k_1} \cos \alpha - y'_{k_1} \sin \alpha, \quad (22.56)$$

$$y_{k_1} = y_1 + x'_{k_1} \sin \alpha + y'_{k_1} \cos \alpha,$$

$$x_{k_2} = x_1 + x'_{k_2} \cos \alpha - y'_{k_2} \sin \alpha,$$

$$y_{k_2} = y_1 + x'_{k_2} \sin \alpha + y'_{k_2} \cos \alpha.$$

Обчислення кутового параметра точок спряження відносно центра спряжувального кола згідно з формулами (21.3):

$$t_{k_1} = f(x_{k_1} - x_c, y_{k_1} - y_c), \quad (22.57)$$

$$t_{k_2} = f(x_{k_2} - x_c, y_{k_2} - y_c).$$

Визначення кутового параметра спряжувальної дуги:

$$t = t_{k_2} - t_{k_1}, t_d = t. \quad (22.58)$$

Якщо  $k = 0$  і  $|t| > \pi$  або  $k = 1$  і  $|t| < \pi$ , то

$$t_d = -\frac{t}{|t|} (2\pi - |t|).$$

## 22.4. Екстремальні випадки задачі спряження

Під *екстремальними* розуміють випадки, коли деякі вхідні дані досягають екстремальних значень. Так, наведений вище алгоритм повною мірою можна застосовувати в екстремальних випадках, коли  $R_1 = 0$  або  $R_2 = 0$ . При цьому задача зводиться до знаходження кола заданого радіуса, яке проходить через фіксовану точку та дотикається до другого кола. Цей алгоритм застосовують також тоді, коли одночасно  $R_1 = 0$  та  $R_2 = 0$ . Тут йдеться про знаходження кола заданого радіуса, яке проходить через дві фіксовані точки.

Випадок, коли радіус спряжувального кола дорівнює нулю, тривіальний. Розглядуваний алгоритм до формул (22.52) включено збігається з алгоритмом знаходження координат точок перетину двох кіл, а формули (22.53)...(22.58) втрачають зміст.

Розглянемо випадки, коли радіус спряжувального кола  $R$  досягає екстремальних значень, що дістанемо з виразів (22.47)...(22.51) при зміні в них знаків нерівності на знаки рівності, тобто  $R = A$  та  $R = B$ . Тут радіус спряжувального кола перетворюється в залежну величину, яка не може входити у вхідні дані.

Знаходження координат центра спряжувального кола, що ґрунтувалося на алгоритмі визначення координат точок перетину двох кіл, також не може бути здійснений у такому вигляді через перетворення перетину до дотику. Комп'ютерний розв'язок у цьому екстремальному випадку привів би до визначення комп'ютерного нуля, що, в свою чергу, призвело б до значних ускладнень програми. У зв'язку з цим наведений екстремальний випадок вимагає окремого алгоритму та суттєвих змін навіть при формулюванні задачі, а саме: знайти коло, екстремально дотичне до двох заданих кіл.

Неважко показати, що центр шуканого кола та точки його спряження з заданими колами лежать на лінії їхніх центрів. Тому, не змінюючи умови формалізації щодо знаків  $R_1$  та  $R_2$ , накладемо нову умову на коефіцієнт  $k$ : при  $k = 1$  спряжувальна дуга розміщена зліва, а при  $k = -1$  — справа від вектора  $\vec{O_1O_2}$ .

Нарешті, варіант екстремального значення радіуса спряжувального кола форма-

лізуємо за допомогою коефіцієнта  $p$ , при  $p = 1$  маємо  $R = A$ , а при  $p = -1$  —  $R = B$ .

**Алгоритм розв'язання** цієї задачі (рис. 22.10).

В х і д н і д а н і:  $x_1, y_1, R_1, x_2, y_2, R_2, k, p$ .

В и х і д н і д а н і:  $x_c, y_c, R, t_k, t_d$ .

Обчислення міжцентрової відстані

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (22.59)$$

Якщо  $p = -1$  і  $a \geq |R_1| + |R_2|$ , то задача не має розв'язку.

Визначення

$$R = \frac{R_1 + R_2 + pa}{2} \quad (22.60)$$

та координат центра спряжувального кола в локальній системі  $x'O'y'$ :

$$x'_c = p(R - R_1), y'_c = 0. \quad (22.61)$$

Знаходження компонента повороту локальної системи відносно глобальної згідно з формулами (21.3)

$$\alpha = f(x, y) = f(x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (22.62)$$

Визначення координат центра спряжувального кола в глобальній системі

$$x_c = x_1 + x'_c \cos \alpha, y_c = y_1 + x'_c \sin \alpha. \quad (22.63)$$

Знаходження кутового параметра точки спряження спряжувального кола з першим колом:

$$\begin{aligned} \text{якщо } \alpha > \pi, & \text{ то } t_{k1} = |\alpha - \pi|; \\ \text{якщо } \alpha < \pi, & \text{ то } t_{k1} = |\alpha + \pi|. \end{aligned} \quad (22.64)$$

Визначення кутового параметра спряжувальної дуги:

$$t_d = -k\pi.$$

Як і в загальній постановці задачі спряження, наведений алгоритм "працює" при  $R_1 = 0$ , або при  $R_2 = 0$ , або при  $R_1 = R_2 = 0$ .

Другий екстремальний випадок дістаємо при  $R = \infty$ . При цьому задача формулюється так: знайти прями, дотичні до двох заданих кіл.

**Алгоритм розв'язання** цієї задачі (рис. 22.11).

В х і д н і д а н і:  $x_1, y_1$  — координати центра  $O_1$ ;  $R_1$  — радіус більшого кола;  $x_2, y_2$  — координати центра  $O_2$ ;  $R_2$  — радіус меншого кола;  $k$  — коефіцієнт розміщення точки спряження першого кола: при  $k = 1$

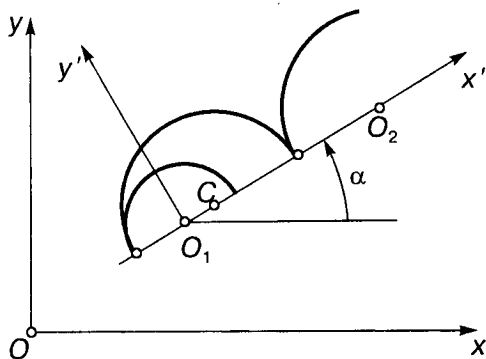


Рис. 22.10

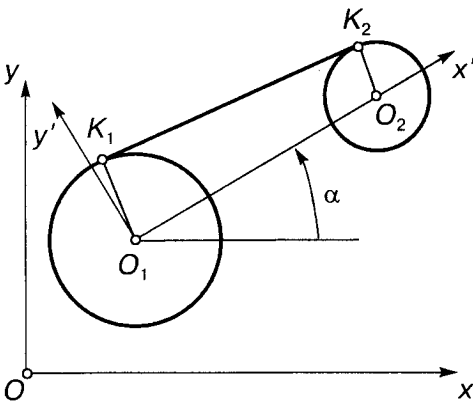


Рис. 22.11

точка спряження лежить зліва, а при  $k = -1$  — справа від вектора  $\vec{O_1O_2}$ , при  $k = 0$  вона лежить на лінії центрів;  $n$  — коефіцієнт розміщення кіл відносно дотичної прямої: при  $n = 1$  кола лежать по один бік від дотичної, при  $n = -1$  — по обидва боки.

Вихідні дані:  $x_{k1}, y_{k1}, x_{k2}, y_{k2}$  — координати точок спряження.

Визначення міжцентрової відстані

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (22.65)$$

Аналіз сумісності умов. Якщо  $\alpha < R_1 - R_2$ , то задача розв'язків не має. Якщо  $\alpha = R_1 - R_2$  і  $n = 1$ , то задача має один розв'язок. Якщо  $R_1 - R_2 \leq \alpha \leq R_1 + R_2$  і  $n = 1$ , то задача має два розв'язки. Якщо  $a = R_1 + R_2$ , то задача має три розв'язки (при  $k = 1$  мають  $n = 1$ ; при  $k = -1$  мають  $n = 1$ ; при  $k = 0$  мають  $n = -1$ ). Якщо  $a > R_1 + R_2$ , то задача має чотири розв'язки.

Визначення косинуса та синуса кута між дотичною та лінією центрів

$$\cos t = \frac{R_1 + nR_2}{a}, \quad \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}. \quad (22.66)$$

Обчислення координат точок спряження в локальній системі  $x'O'y'$ :

$$\begin{aligned} x'_{k1} &= R \cos t, & x'_{k2} &= a + nR_2 \cos t, \\ y'_{k1} &= kR_1 \sin t, & y'_{k2} &= -kR_2 \sin t. \end{aligned} \quad (22.67)$$

Визначення кутового компонента положення локальної системи відносно глобальної згідно з формулами (21.3):

$$\alpha = f(x, y) = f(x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (22.68)$$

Обчислення координат точок спряження в глобальній системі згідно з формулами (21.14):

$$\begin{aligned} x_{k1} &= x_1 + x'_{k1} \cos \alpha - y'_{k1} \sin \alpha, \\ y_{k1} &= y_1 + x'_{k1} \sin \alpha + y'_{k1} \cos \alpha, \\ x_{k2} &= x_1 + x'_{k2} \cos \alpha - y'_{k2} \sin \alpha, \\ y_{k2} &= y_1 + x'_{k2} \sin \alpha + y'_{k2} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (22.69)$$

Алгоритм “працює” також при  $R_2 = 0$ . У цьому випадку параметр  $n$  зайвий, розв'язок дістають при будь-якому його значенні.

## 22.5. Спряження двох прямих колом

Задача спряження двох прямих колом має чотири розв'язки, якщо прямі перетинаються, та безліч розв'язків, якщо прямі паралельні.

*Алгоритм розв'язання* цієї задачі.

Вихідні дані:  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — координати точок, що попарно визначають прямі;  $R$  — радіус спряжувального кола;  $k$  — параметр вибору дуги: при  $k = 0$  відповідає меншій дузі, при  $k = 1$  — більшій дузі.

Вихідні дані:  $x_c, y_c$  — координати центра спряжувального кола;  $t_k$  — кутовий параметр однієї з точок спряження відносно центра спряжувального кола;  $t_d$  — кутовий параметр дуги спряження.

Якщо прямі паралельні, то  $R$  стає величиною, залежною від відстані між прямими.

Згідно з формулами (22.12) неявні форми задання прямих мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (22.70)$$

Якщо прямі (22.70) перетинаються, то вони поділяють площину на чотири частини. Щоб дістати розв'язок у бажаній частині площини, треба вибрати в ній поза межею спробну точку  $P(x_p, y_p)$  і за допомогою виразів (22.70) знайти

$$P_i = \frac{A_i x_p + B_i y_p + C_i}{|A_i x_p + B_i y_p + C_i|} \quad (i = 1, 2). \quad (22.71)$$

Легко побачити, що  $P_i$  може мати лише два значення: 1 та  $-1$ .

Застосуємо формулу (22.21) відстані точки до прямої. Оскільки від центра шукано-

го кола до прямих (22.70) відстані однакові за абсолютною величиною і мають знаки  $P_i$ , то

$$\frac{A_1x_c + B_1y_c + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = P_1R, \quad (22.72)$$

$$\frac{A_2x_c + B_2y_c + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = P_2R.$$

Маємо два рівняння з двома невідомими  $x_c, y_c$ . Щоб скористатись алгоритмом розв'язання системи рівнянь, треба замість  $C_1$  і  $C_2$  підставити у формули (22.8)  $C_i - P_iR\sqrt{A_i^2 + B_i^2}$  ( $i = 1, 2$ ).

Для визначення координат точок спряження спряжувального кола скористаємося рівнянням (22.20) прямої, що проходить через точку  $(x_c, y_c)$  та перпендикулярна до однієї з прямих (22.70). Дістанемо

$$A_i(y - y_c) - B_i(x - x_c) = 0. \quad (22.73)$$

Запишемо рівняння (22.73) у неявній формі:

$$A'_ix + B'_iy + C'_i = 0, \quad (22.74)$$

де  $A'_i = -B_i$ ;  $B'_i = A_i$ ;  $C'_i = B_ix_c - A_ix_c$ .

Координати точок спряження дістанемо як розв'язок двох систем згідно з формулами (22.8). У кожну з них входить по одному рівнянню з виразів (22.70) та (22.74). Маємо

$$A_ix + B_iy + C_i = 0, \quad (22.75)$$

$$A'_ix + B'_iy + C'_i = 0,$$

де  $i$  — індекс рівняння та системи.

Кутові параметри точок спряження та спряжувальної дуги знаходимо за формулами (22.57) і (22.58).

## 22.6. Алгоритми нерухомого та рухомого екранів

Екранування ефективно застосовують в алгоритмах визначення видимості, коли одні елементи об'єкта закривають (екранують) собою інші при проєкційному відображенні. Екранування ґрунтується на алгоритмі визначення належності точки до півплощини чи внутрішності замкненого багатокутника.

**Екранування замкненим багатокутником (нерухомим екраном).** Нехай  $n$ -кутник за-

дано масивами координат його вершин  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) так, що вершини впорядковані в напрямі проти руху стрілки годинника, а  $x_1 = x_m, y_1 = y_m$ . Щоб визначити належність точки  $M(x_0, y_0)$  до внутрішності  $n$ -кутника, обчислимо суму кутів між суміжними променями, що сполучають точку  $M$  з вершинами  $n$ -кутника. Маємо

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \arcsin \frac{\begin{vmatrix} x_i - x_0 & y_i - y_0 \\ x_{i+1} - x_0 & y_{i+1} - y_0 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \sqrt{(x_{i+1} - x_0)^2 + (y_{i+1} - y_0)^2}}. \quad (22.76)$$

Цю формулу дістали, застосувавши формулу площі трикутника з вершинами  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , а саме:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i - x_0 & y_i - y_0 \\ x_{i+1} - x_0 & y_{i+1} - y_0 \end{vmatrix}, \quad (22.77)$$

де знак "+" відповідає впорядкуванню вершин у напрямі проти руху стрілки годинника.

Ту саму площу можна обчислити також за формулою

$$S = \frac{1}{2} a_i a_{i+1} \sin \alpha_i, \quad (22.78)$$

де  $a_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$ ,  $a_{i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_0)^2 + (y_{i+1} - y_0)^2}$  — сторони трикутника, що проходять через спробну точку  $M(x_0, y_0)$ .

Точка  $M(x_0, y_0)$  належить внутрішності  $n$ -кутника, якщо за формулою (22.76) дістаємо  $\alpha = 2\pi$ . Якщо точка  $M$  лежить зовні  $n$ -кутника, то  $\alpha = 0$ .

Екран може обмежуватися двома багатокутниками, які не перетинаються. Якщо один з них лежить усередині іншого, то маємо екранувальне кільце. Спробна точка екранується, якщо для зовнішнього багатокутника за формулою (22.76) маємо  $\alpha = 2\pi$ , а для внутрішнього — 0. Якщо багатокутники розмішені один зовні іншого, то екран складається з об'єднання двох областей. У цьому разі спробна точка екранується, якщо принаймні для однієї з них  $\alpha = 2\pi$ .

Крім наведеного алгоритму, можна застосувати для екранування опис плоских областей нерівностями (див. параграф 22.1). Проте в цьому разі, по-перше, багатокутники мають бути опуклими, а по-друге,

структура вхідних даних значно ускладнюється.

Проаналізуємо тепер видимість при екрануванні. Нехай спробним буде відрізок з початком  $n$  та кінцем  $K$ . Точки перетину (якщо вони є) відрізка зі сторонами екранувального багатокутника (багатокутників) дістаємо способом, описаним у параграфі 22.1 [див. формули (22.8)...(22.15)]. Надамо точкам перетину, розміщеним у порядку зростання параметра  $s$ , послідовні номери 1, 2, ...,  $k$ . Розглянемо можливі ситуації. Зазначимо, що відрізок напрямлений від  $n$  до  $K$ .

Точка  $n$  не екранується. Відрізок  $nK$  розбивається на частини так, що видимі частини закінчуються непарною точкою. Кінець  $K$  спробного відрізка є видимим при парному  $k$  та невидимим при непарному  $k$ .

Точка  $n$  екранується. Видима частина починається непарною точкою. Кінець  $K$  є видимим при непарному  $k$  і невидимим при парному  $k$ .

У проєкційних задачах екран формується контурами, які є обвідними проєкції об'єкта, розміщеного ближче до спостерігача. Випробування екраном проходять усі відрізки, що формують зображення другого об'єкта, розміщеного далі від спостерігача.

Задачу, обернену екрануванню, розв'язують у разі покриття штриховкою області з простою чи складною топологією. Спробними відрізками є необмежені лінії штриховки. Тут видимими є саме ті ланки лінії штриховки, які лежать усередині визначеної області. Питання, пов'язані з розв'язком цієї задачі, розглядалися раніше.

**Рухомий екран.** Оскільки основним примітивом комп'ютерної графіки є відрізок, а криві лінії інтерполюються ламаними, то криві лінії є основними у задачах комп'ютерного відображення як гранних, так і кривих поверхонь.

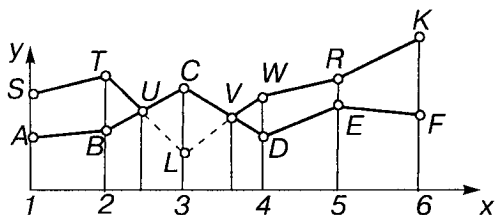


Рис. 22.12

Нехай на площину  $xOy$  проєкціюються лінії рівня деякої поверхні (рис. 22.12).  $ABCDEF$  — найближча лінія, видима всіма своїми вузлами та ланками. Наступну лінію рівня  $STLWRK$  екрануємо попередньою лінією. Вузол  $L$  лежить у зоні екрана. Знайдемо точку перетину  $U$  ланок  $BC$  та  $TL$ , а також точку перетину  $V$  ланок  $CD$  та  $LW$ . Ці точки, по-перше, обмежують видимі частини ланок  $TL$  та  $LW$ , а по-друге, їх включають як вузли в екран  $STUCVWRK$ , за допомогою якого визначатимуть видимість наступної лінії рівня.

Випробування точок та відрізків на належність екрану в межах цієї задачі можна спростити порівняно з попереднім алгоритмом, а саме:

— вузли ліній рівня слід брати на однакових інтервалах, тобто  $1-2=2-3=\dots=5-6$ ;

— належність точок до екрана визначають порівнянням ординат відповідних вузлів, наприклад  $y_L < y_C$ , тому вузол  $L$  екранується;

— якщо на деякому інтервалі з'являється додатний вузол, наприклад вузол  $U$  на інтервалі 2-3, то відповідну ланку при наступному екрануванні треба випробувувати не тільки на порівняння ординати  $y$  на межах інтервалу, а й на перетин з двома підланками  $TU$  та  $UC$ .

## 22.7. Площа та координати центра ваги плоскої фігури

Як відомо, площу елементарної фігури, обмеженої графіком  $y = f(x)$ , віссю  $Ox$  та прямими  $x = c$ ,  $x = d$ , визначають як

$$S = \pm \int_c^d f(x) dx. \quad (22.79)$$

Координати центра ваги елементарної фігури:

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S}, \quad (22.80)$$

де

$$M_x = \pm \frac{1}{2} \int_c^d f^2(x) dx \quad (22.81)$$

статичний момент площі елементарної фігури відносно осі  $Ox$ ;

$$M_y = \pm \int_c^d x f(x) dx \quad (22.82)$$

$$k_{ij} = \frac{y_{i+1,j} - y_{ij}}{x_{i+1,j} - x_{ij}}, \quad (22.87)$$

статичний момент площі елементарної фігури відносно осі  $Oy$ .

У формулах (22.79), (22.81) і (22.82) верхній знак відповідає  $f(x) > 0$ , а нижній —  $f(x) < 0$ .

За умов розглядуваної задачі під *плоскою фігурою* розуміють плоску область, обмежену замкненими контурами, що не перетинаються між собою. Кожний контур є замкнутою ламаною. Якщо деякі з контурів криволінійні, то вони заздалегідь з достатньою точністю апроксимуються ламаними.

Вважатимемо, що вузли  $p$  контурів, які обмежують область, визначаються масивами координат  $x_{ij}, y_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m^i; j = 1, 2, \dots, p$ ) та умовами замкненості  $x_{1j} = x_{m^i j}, y_{1j} = y_{m^i j}$ . Отже, кожний контур містить  $n^i$  вузлів ( $n^i = m^i - 1$ ), які не збігаються. Нехай також вузли обмежувальних контурів упорядковані так, що матеріальна площа лежить справа від напрямку впорядкування.

Тоді згідно з означенням плоскої фігури та прийнятими домовленостями знак перед правими частинами виразів (22.79), (22.81) і (22.82) можна опустити. Елементарною фігурою буде трапеція, а підінтегральною функцією — лінійна функція

$$f(x) = kx + b. \quad (22.83)$$

Вирази для площі та статичних моментів площі набувають вигляду

$$S = \int_c^d (kx + b) dx, \quad (22.84)$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_c^d (kx + b)^2 dx, \quad (22.85)$$

$$M_y = \int_c^d x(kx + b) dx. \quad (22.86)$$

Коефіцієнти  $k, b$  і межі інтегрування  $c, d$  можна виразити через координати вузлів:

$$b_{ij} = y_{ij} - k_{ij} x_{ij}, \quad c_{ij} = x_{ij}, \quad d_{ij} = x_{i+1,j}.$$

Для визначення площі плоскої фігури в цілому та статичних моментів площі  $M_x, M_y$  спочатку виконують інтегрування для кожної ланки окремого контуру, потім беруть алгебраїчну суму результатів для кожного контуру, а після цього — алгебраїчну суму результатів для всіх контурів. Знаки кожного доданка визначаються автоматично відповідно з наведеними вище означеннями та умовами. Таким чином,

$$S = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n^i} \left[ \frac{1}{2} k_{ij} (x_{i+1,j}^2 - x_{ij}^2) + b_{ij} (x_{i+1,j} - x_{ij}) \right], \quad (22.88)$$

$$M_x = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n^i} \left[ \frac{1}{6} k_{ij}^2 (x_{i+1,j}^3 - x_{ij}^3) + \frac{1}{2} k_{ij} b_{ij} (x_{i+1,j}^2 - x_{ij}^2) + \frac{1}{2} b_{ij} (x_{i+1,j} - x_{ij}) \right], \quad (22.89)$$

$$M_y = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n^i} \left[ \frac{1}{3} k_{ij} (x_{i+1,j}^3 - x_{ij}^3) + \frac{1}{2} b_{ij} (x_{i+1,j}^2 - x_{ij}^2) \right], \quad (22.90)$$

де  $k_{ij}$  та  $b_{ij}$  обчислюють за формулами (22.87). Координати центра ваги обчислюють за формулою (22.80).

Якщо всі  $p$  контурів лежать одні зовні інших, то їх треба орієнтувати за рухом стрілки годинника. Якщо один чи кілька контурів лежать усередині деякого з  $p$  контурів, то зовнішній треба орієнтувати за рухом стрілки годинника, а внутрішні — проти. Однак це не суперечить умові щодо такого напрямку орієнтації, коли матеріальна площа лежить справа від кожного з обмежувальних контурів.

### Запитання та завдання

1. Які є основні форми задання прямої?
2. Як дістати аналітичний вираз півплощини?
3. Навести аналітичний опис кільцевої області, розміщеної між колом радіуса  $R$  та квадратом, вершини якого лежать на осях  $Ox$  та  $Oy$ , який вписаний у коло радіуса  $r$ , концентричне з першим колом.



4. Навести вхідні дані для виконання спряження більшою дугою кола радіуса  $R$ , центр якого лежить справа від лінії центрів  $O_1O_2$  двох заданих кіл, якщо з першим колом  $O_1(x_1, y_1, R_1)$  спряжувальне коло має внутрішній дотик, з другим  $O_2(x_2, y_2, R_2)$  — зовнішній.
5. Навести алгоритм спряження двох паралельних прямих колом.
6. Яких екстремальних значень може набувати: радіус спряжувального кола; радіуси кіл, що спряжуються.
7. Якою є спробна точка в алгоритмі спряження двох прямих колом?
8. Як визначити належність точки внутрішності чи зовнішності замкненого багатокутника?
9. Для опису яких багатокутників можна застосовувати систему нерівностей?
10. Як визначити точки, що обмежують відрізки ліній штриховки при покритті області складної топології?
11. Назвати галузі застосування алгоритмів рухомого та нерухомого екранів.



## Глава 23 ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У ПРОСТОРИ

### 23.1. Задання площини та лінії

Дістанемо

**Площина у просторі.** Площину в прямокутних декартових координатах задають у неявній формі

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (23.1)$$

Ця площина поділяє простір на два півпростори, які можна визначити коефіцієнтом

$$p = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}. \quad (23.2)$$

Для координат  $x_1, y_1, z_1$  будь-якої точки першого півпростору  $p = 1$ , для точки, яка належить другому півпростору,  $p = -1$ , а якщо точка належить площині [див. формулу (23.1)], то  $p = 0$ .

У нарисній геометрії площину задають проєкціями її визначника: трьома точками, що не належать одній прямій; точкою та прямою, що не проходить через точку; двома перетинними прямими; двома паралельними прямими; плоскою фігурою; слідами. Від графічної форми задання будь-яким визначником до форми (23.1) доцільно перейти, взявши на площині три неколінійні точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  та підставивши координати їх у формули для визначення коефіцієнтів  $A, B, C, D$ .

$$A = \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}, \quad (23.3)$$

$$D = x_1 \begin{vmatrix} y_0 z_0 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_0 z_0 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_0 y_0 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}.$$

Як уже зазначалося (див. параграф 21.4), окремим випадком задання площини є той, коли вона за своїм положенням відносно деякої координатної системи є площиною рівня.

Ідея поширення класичних координатних систем спеціальними системами та склад спеціальних систем зумовлені віднесенням будь-якої площини [див. формулу (23.1)] до такої системи координат, в якій вона була б площиною рівня. Реалізація цієї умови дає змогу в компактній формі задавати плоскі лінії у просторі; діставати рівняння ліній перетину поверхні з площиною; задавати кінематичні поверхні з плоскою твірною; розв'язувати позиційні задачі на цій поверхні, використовуючи допоміжні січні площини загального (у термінах нарисної геометрії) положення.

Розглянемо з іншої точки зору зміст функцій (21.4), (21.6) та (21.7), що задають відповідно циліндричні, узагальнені циліндричні та гіперболічні координати. Якщо  $t$  набуває значення  $t = c = \text{const}$ , то наведені рівняння задають площину в параметричній формі з функціональними параметрами  $u$  та  $v$ . Якщо  $t$  є незалежним, то наведені рівняння виражають сім'ю площин з параметром  $t$ . Рівняння цієї сім'ї у прямокутних декартових координатах має вигляд

$$x \sin t - y \cos t = 0, \quad z = z, \quad (23.4)$$

де  $t$  — кут між площиною  $xOz$  та площиною  $t = \text{const}$ . Рівняння (23.4) дістали з виразів (21.4), вилучивши  $u$ . Вилучивши з рівняння (21.6) параметр  $u$ , матимемо

$$x \cos t + y \sin t - r = 0, \quad z = z, \quad (23.5)$$

де  $t$  — кут між віссю  $Ox$  та нормаллю до площини  $t = \text{const}$ . Вилучивши з рівняння (21.6) параметри  $u$  та  $v$ , дістанемо

$$x \cos t + y \sin t - z \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (23.6)$$

де  $t$  — кут між віссю  $Ox$  та проекцією нормалі до площини  $t = \text{const}$  на площину  $xOy$ .

Розглянемо задачу переходу від рівняння площини у формі (23.1) до визначення типу спеціальної системи, її внутрішніх параметрів та значення параметра  $t$  за умови, що площина (23.1) є площиною рівня  $t = \text{const}$  у цій системі. Алгоритм розв'язання цієї задачі зведемо в табл. 23.1.

Зазначимо, що за умов поставленої задачі розміщення спеціальної системи відносно прямокутної декартової системи, до якої віднесено площину (23.1), фіксоване, крім випадку  $C \neq 0, D \neq 0$ , коли гіперболічна система має бути паралельно перенесена на відстань  $v_0 = -D/C$  уздовж осі  $Oz$  відносно декартової системи.

Отже, щоб дістати рівняння площини (23.1) в параметричній формі, треба визначити внутрішні параметри відповідної системи та параметр  $t$  площини (23.1) у цій системі, скориставшись даними табл. 23.1.

Підстановка одержаних значень у формули третього стовпця приводить до параметричної форми задання площини.

**Лінії в просторі.** Пряма у просторі в параметричній формі (21.41) задається функціями

Таблиця 23.1. Алгоритм зведення неявної форми задання площини до параметричної

Значення $A, B, C, D$ у рівнянні площини	Тип спеціальної системи координат	Функції залежності $x, y, z$ від $u, v, t$	Внутрішні параметри системи	Значення параметра $t$
$A \neq 0; B \neq 0; C \neq 0;$ $A = 0; B \neq 0; C \neq 0;$ $A \neq 0; B = 0; C \neq 0.$	Гіперболічна	$x = v \sin \alpha \cos t - u \sin t;$ $y = v \sin \alpha \sin t + u \cos t;$ $z = v \cos \alpha + v_0$	$\sin \alpha = \frac{ C }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$ $v_0 = -\frac{D}{C}$	$t = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$
$A \neq 0; B \neq 0; C = 0;$ $D \neq 0$ $A = 0; B \neq 0; C = 0$ $D \neq 0$ $A \neq 0; B = 0; C \neq 0;$ $D \neq 0$	Узагальнена циліндрична	$x = r \cos t - u \sin t;$ $y = r \sin t + u \cos t;$ $z = v$	$r = \frac{ D }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	$t = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$
$A \neq 0; B \neq 0; C \neq 0;$ $D = 0$	Циліндрична	$x = u \cos t;$ $y = u \sin t;$ $z = v$	—	$t = -\operatorname{arctg} \frac{A}{B}$
$A = 0; B = 0; C \neq 0;$ $D = 0$	Прямокутна декартова	$x = u;$ $y = v;$ $z = t$	—	$t = -\frac{D}{C}$

$$x = x_1 + lt, y = y_1 + mt, z = z_1 + nt, \quad (23.6a)$$

де  $l, m, n$  — координати напрямного вектора;  $x_1, y_1, z_1$  — координати точки, через яку проходить пряма.

Якщо пряма проходить через дві точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то

$$l = x_2 - x_1, m = y_2 - y_1, n = z_2 - z_1. \quad (23.7)$$

Зберігаючи позначення (22.13) і (22.14) та узагальнюючи їх на тривимірний простір, надамо рівнянням (23.6a) і (23.7) вигляду

$$\begin{aligned} x &= x_1(1-s) + x_2s, y = y_1(1-s) + y_2s, \\ z &= z_1(1-s) + z_2s. \end{aligned} \quad (23.8)$$

Завдяки введеним спеціальним системам координат та їхнім властивостям щодо віднесення будь-якої площини до такої системи, де вона є площиною рівня, з'являється практично доцільний спосіб задання прямої та плоскої кривої лінії у відповідній системі спеціальних координат виразами

$$t = \text{const}, v = f(u) \quad (23.9)$$

або

$$t = \text{const}, v = v(\varphi), u = u(\varphi). \quad (23.10)$$

Ці рівняння можна віднести до відповідних функцій (21.4), (21.6) чи (21.8) залежності прямокутних декартових координат від спеціальних.

Застосовуючи рівняння інцидентності площин прямої чи плоскої кривої, визначимо тип системи та значення  $t$  за наведеним алгоритмом. Підставивши формули (23.9) або (23.10) у відповідні вирази функції (21.4), (21.6) чи (21.8), дістанемо параметричні рівняння прямої чи плоскої кривої.

Функція (23.9) для прямої має вигляд

$$v = ku + b, \quad (23.11)$$

де  $k$  і  $b$  відіграють ту саму роль на площині  $t = \text{const}$  у декартовій прямокутній системі  $uOv$ , що й у системі  $xOy$  [див. рівняння (22.1)].

Для кола радіуса  $r$ , координати центра якого в системі  $uOv$  є  $(a, b)$ , функція (23.9) має вигляд

$$v = b \pm \sqrt{r^2 - (u - a)^2}. \quad (23.12)$$

Для цього самого кола функції (23.10) набувають вигляду

$$v = b + r \sin \varphi, u = ar \cos \varphi. \quad (23.13)$$

Розглянемо тепер форми задання ще одного класу просторових кривих: гвинтових та квазігвинтових ліній.

Гвинтову циліндричну лінію задають функціями залежності прямокутних декартових координат від циліндричних (21.4) або від узагальнених циліндричних (21.6) координат, де

$$u = c, v = kt. \quad (23.14)$$

Якщо в циліндричній системі координат радіус гвинтової лінії дорівнює  $r$ , то в узагальненій циліндричній системі він дорівнює  $\sqrt{r^2 + c^2}$ . В обох випадках крок гвинтової лінії становить  $2k\pi$ .

Квазігвинтовою називають лінію, що зі сталим кроком навивається на поверхню обертання. Квазігвинтова лінія в гіперболічних координатах (21.6) задається функціями (23.14). Якщо  $u = c = 0$ , то вона розміщена на конусі, якщо  $u = c \neq 0$ , то вона розміщена на однопорожнинному гіперболоїді.

## 23.2. Задання поверхонь

У неявній формі (21.51) центральні поверхні обертання другого порядку задають функцією

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + p \frac{z^2}{c^2} - q = 0. \quad (23.15)$$

Залежно від значень параметрів, що входять у рівняння (23.15), воно визначає:

стиснений еліпсоїд ( $p = 1, q = 1, a > c$ );

витягнутий еліпсоїд ( $p = 1, q = 1, a < c$ );

сферу ( $p = 1, q = 1, a = c$ );

однопорожнинний гіперболоїд ( $p = -1, q = 1$ );

двопорожнинний гіперболоїд ( $p = -1, q = -1$ );

конус ( $p = -1, q = 0$ ).

Після переходу згідно з залежністю (21.4) до циліндричних координат та розв'язання рівняння відносно  $u$  дістанемо

$$u = \frac{a}{c} \sqrt{qc^2 - pv^2} \quad (23.16)$$

або після підстановки  $u$  в рівняння (21.4) матимемо рівняння цього класу поверхонь у параметричній формі:

$$x = \frac{a}{c} \sqrt{qc^2 - pv^2} \cos t,$$

$$y = \frac{a}{c} \sqrt{qc^2 - pv^2} \sin t, z = v. \quad (23.17)$$

Рівняння циліндра, вісь якого збігається з  $Oz$ , у неявній формі має вигляд

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, z = z, \quad (23.18)$$

а в параметричній формі —

$$x = r \cos t, y = r \sin t, z = z. \quad (23.19)$$

Рівняння гіперболічного параболоїда в явній формі

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}. \quad (23.20)$$

Розглянемо інші класи поверхонь, що задають внутрішнім рівнянням у спеціальних координатах. Внутрішні рівняння класів та підкласів поверхонь в узагальнених циліндричних та гіперболічних координатах, як правило, збігаються. Якщо вони відрізняються, то про це буде сказано окремо. Внутрішні рівняння можна діставати в явній, неявній та параметричній формах. У параметричній формі параметр  $t$  є одним з функціональних параметрів, а другим параметром є інший, який відрізняється від змінних  $u$  та  $v$ .

Для переходу до параметричної форми задання у прямокутних декартових координатах треба внутрішні рівняння підставити у формули (21.6), (21.8), що виражають залежність прямокутних декартових координат від узагальнених циліндричних чи гіперболічних координат.

Лінійчаті поверхні задають рівнянням

$$v = \varphi(t)u + f(t). \quad (23.21)$$

Внутрішні рівняння підкласів лінійчатих поверхонь дістають при певних значеннях функцій  $\varphi(t)$  та  $f(t)$ . Якщо

$$\varphi(t) = k = \text{const}, v = ku + f(t), \quad (23.22)$$

то маємо поверхні однакового нахилу до площини  $xOy$ .

Якщо

$$\varphi(t) \equiv 0, v = f(t), \quad (23.23)$$

то маємо поверхні з площиною паралелізму  $xOy$ .

Якщо

$$\varphi(t) = k, f(t) = b, v = ku + b, \quad (23.24)$$

то маємо однопорожнинний гіперболоїд обернання.

Розгортні поверхні в узагальнених циліндричних координатах задають рівняннями

$$\varphi(t) = \frac{f'(t)}{r}, v = \frac{f'(t)}{r} u + f(t), \quad (23.25)$$

а в гіперболічних координатах — рівняннями

$$\varphi(t) = \frac{f'(t)}{f(t)\sin\alpha}, v = \frac{f'(t)}{f(t)\sin\alpha} u + f(t). \quad (23.26)$$

Внутрішні рівняння ребра обернання цієї поверхні знайдемо підстановкою  $u = 0$  в рівняння (23.25) або (23.26) відповідно.

Циліндр в узагальнених циліндричних координатах, однопорожнинний гіперболоїд у гіперболічних:

$$u = c = \text{const}, v = v. \quad (23.27)$$

Гвинтові поверхні в узагальнених циліндричних та квазігвинтові поверхні в гіперболічних координатах:

$$v = f(u) + kt. \quad (23.28)$$

Зокрема, якщо  $f(u) = bu$  ( $b = \text{const}$ ), то маємо лінійчату поверхню

$$v = bu + kt. \quad (23.29)$$

Розгортні гвинтові поверхні в узагальнених циліндричних координатах:

$$v = \frac{ku}{r} + kt. \quad (23.30)$$

Розгортні квазігвинтові поверхні в гіперболічних координатах:

$$v = \frac{u}{t \sin\alpha} + kt. \quad (23.31)$$

Циклічними називають поверхні, що утворюються колом.

Якщо коло як твірна має сталий радіус, то циклічну поверхню називають *трубчастою*.

Циклічну поверхню, циклічний каркас якої збігається із сім'єю ліній кривини, називають *каналовою*.

Циклічні поверхні в неявній формі задають рівнянням

$$[v - \psi(t)]^2 + [u - f(t)]^2 - \varphi^2(t) = 0. \quad (23.32)$$

При  $\varphi(t) = \text{const}$  маємо трубчасті поверхні:

$$[v - \psi(t)]^2 + [u - f(t)]^2 - R^2 = 0. \quad (23.33)$$

Якщо  $\Psi(t) = a$ ,  $f(t) = b$ ,  $\varphi(t) = R$ , то дістаємо поверхні обертання:

$$(v - a)^2 + (u - b)^2 - R^2 = 0. \quad (23.34)$$

Якщо  $\Psi(t) = kt$ ,  $f(t) = b$ ,  $\varphi(t) = R$ , то маємо гвинтові чи квазігвинтові циклічні поверхні:

$$(v - kt)^2 + (u - b)^2 - R^2 = 0. \quad (23.35)$$

Якщо  $\Psi(t) = a$ ,  $\varphi(t) = \sqrt{2} \int f(r + f') dt + c$ , то маємо каналові поверхні в узагальнених циліндричних координатах:

$$(v - a)^2 + [u - f(t)]^2 - 2 \int f(r + f') dt + c = 0, \quad (23.36)$$

а якщо  $\Psi'(t) = f(t) \sin \alpha$ ,  $\varphi(t) = \sqrt{2} \int (\Psi \Psi' + f f') \times dt + c$ , то каналові поверхні в гіперболічних координатах:

$$(v - \int f(t) \sin \alpha dt)^2 + (u - f)^2 - 2 \int (\Psi \Psi' + f f') dt + c = 0. \quad (23.37)$$

Різьблену поверхню Монжа в узагальнених циліндричних координатах задають рівнянням

$$u = f(v) - rt, \quad (23.38)$$

зокрема, циклічну

$$f(v) = \sqrt{b^2 - (v - a)^2}, u = \sqrt{b^2 - (v - a)^2} - rt, \quad (23.39)$$

а гелікоїд

$$f(v) = \frac{rv}{k}, u = \frac{rv}{k} - rt. \quad (23.40)$$

**Багатогранні поверхні.** Узагальнені циліндричні й гіперболічні координати застосовують відповідно для задання правильних призм і пірамід.

Визначником правильної призми доцільно вважати:  $r$  — радіус вписаного в призму циліндра, який може бути внутрішнім параметром узагальненої циліндричної системи;  $t_n$  — кутовий параметр однієї з граней (кут між площиною  $xOz$  та променевою площиною, що проходить через  $Oz$  і лінію дотику деякої грані призми та циліндра системи);  $h$  — висота призми. При цьому вважають, що нижня основа призми лежить на площині  $xOy$ , а верхня — на площині  $z = h$ ;  $n$  — кількість граней.

Рівняння граней призми дістанемо у вигляді (23.5), надаючи  $t$  таких значень:

$$t_i = t_n + 2\pi s, s = \frac{i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23.41)$$

Якщо підставимо у рівняння (21.6) значення  $t_i$  з рівняння (23.41) та

$$u = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad (23.42)$$

то матимемо рівняння ребер призми.

Визначником правильної піраміди є:  $\alpha$  — кут нахилу грані до осі  $Oz$ , що збігається з внутрішнім параметром гіперболічної системи;  $t_n$  — кутовий параметр однієї з граней (кут між площиною  $xOz$  і променевою площиною, що проходить через  $Oz$  та лінію дотику деякої грані до конуса системи);  $h$  — висота піраміди. Вважають, що вершина піраміди лежить у початку координат, а основа — на площині  $z = -h$ ;  $n$  — кількість граней.

Рівняння граней піраміди дістанемо у вигляді (23.6), надаючи  $t$  значення з рівняння (23.41).

Рівняння ребер піраміди знайдемо як рівняння прямих, що проходять через дві точки  $S(0, 0, 0)$  та  $A_i(x_i, y_i, z_i)$ :

$$\frac{x - x_i}{-x_i} = \frac{y - y_i}{-y_i} = \frac{z + h}{h}, \quad (23.43)$$

де  $x_i, y_i$  визначають підстановкою в рівняння (21.8) значень  $t_i$  з формули (23.41):  $v = -h$  та

$$u = \left| h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right|. \quad (23.44)$$

### 23.3. Алгоритми розв'язання позиційних задач

**Перетин кривих поверхонь площиною.** Якщо поверхня задана у прямокутних декартових координатах явною чи неявною формою [див. вираз (21.50) або (21.51)], а січна площина — будь-яким визначником, то взявши координати трьох неколінійних точок, що належать січній площині, обчислимо коефіцієнти  $A, B, C, D$  за формулами (23.3) і дістанемо рівняння січної площини в неявній формі (23.1).

За табл. 23.1 визначимо тип системи, в якій січна площина є площиною рівня, а також обчислимо параметр  $t$  і внутрішні парамет-

ри відповідної системи спеціальних координат. У результаті матимемо рівняння січної площини в параметричній формі. Підставивши здобуті вирази  $x, y$  і  $z$  у рівняння поверхні (21.50) чи (21.51), зведемо його до рівняння з двома змінними  $u$  та  $v$ . Якщо це рівняння можна розв'язати відносно однієї із змінних, тобто знайти функцію  $v = v(u)$ , то, надаючи  $u$  значення з деяким кроком, матимемо відповідні значення  $v$ . Оскільки  $uOv$  є прямокутною декартовою системою на січній площині, то лінія перетину, віднесена до цієї системи, визначається в натуральному вигляді. Щоб скласти її рівняння у просторі, треба підставити відповідні значення  $u$  та  $v$  в параметричні рівняння січної площини. Наведемо приклад.

Нехай треба знайти рівняння лінії перетину центральної поверхні обертання другого порядку (23.15) і площини, заданої трьома точками  $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Застосувавши формулу (23.3), дістанемо:  $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ . З першого рядка табл. 23.1 знаходимо

$$\sin \alpha = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (23.45)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\sin t = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos t = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad v_0 = -\frac{D}{C}.$$

Підставивши ці вирази у третій стовпець першого рядка табл. 23.1, дістанемо параметричні рівняння січної площини:

$$x = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left( \frac{vA|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - uB \right),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left( \frac{vB|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + uA \right),$$

$$z = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + C^2}} v - \frac{D}{C}. \quad (23.46)$$

Тепер підставимо вирази (23.46) у рівняння поверхні (23.15). У результаті матимемо

$$u^2 c^2 + \frac{v^2 [C^2 c^2 + pa^2 (A^2 + B^2)]}{A^2 + B^2 + C^2} -$$

$$- 2v \frac{pa^2 \sqrt{A^2 + B^2} \cdot D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot C} + pa^2 \frac{D^2}{C^2} - qa^2 c^2 = 0. \quad (23.47)$$

Це рівняння другого ступеня відносно  $u$  та  $v$ , тобто його можна розв'язати відносно будь-якої з цих змінних.

Натуральний вигляд лінії перетину знайдемо побудовою графіка функції (23.47) за її рівнянням у системі  $uOv$ . Масиви координат  $u_i, v_i$ , що визначаються в процесі побудови, підставимо в параметричні рівняння січної площини (23.46). Дістанемо просторові координати  $x_i, y_i, z_i$  точок, які визначають лінію перетину. Наведемо приклади програмної реалізації цього алгоритму для двох поверхонь, що перетинаються площиною. Креслення виконані графопобудовником.

На рис. 23.1 наведено в ізометричній проекції поверхню еліпсоїда обертання за функцією (23.15) при  $a = 3, c = 5, p = 1, q = 1$ , що перетинається площиною [див. рівняння (23.1)] при  $A = 1, B = 3, C = 16, D = -16$ .

На рис. 23.2 зображено в ізометричній проекції поверхню однопорожнинного гіперолоїда, що перетинається тією самою січною площиною. Порівняно з попередніми вхідні дані відрізняються тільки значенням  $p$ , яке в цьому випадку набуває значення  $-1$ .

Застосуємо наведений алгоритм для побудови лінії перетину прямої призми та

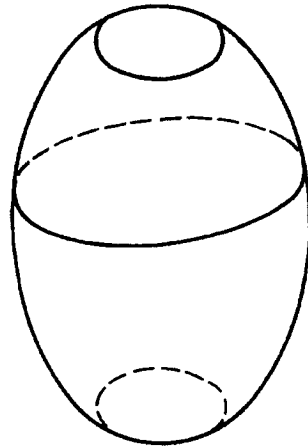


Рис. 23.1

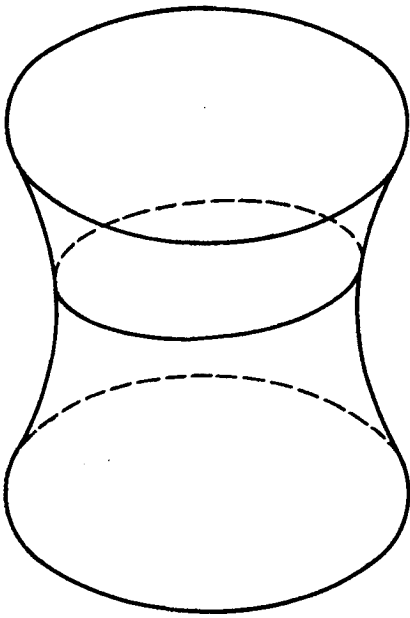


Рис. 23.2

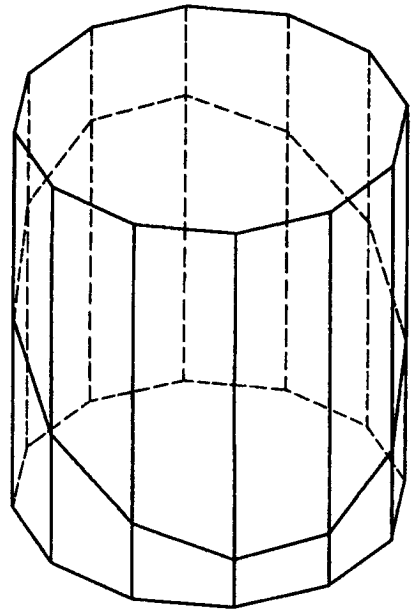


Рис. 23.3

площини. Нехай січна площина має такі коефіцієнти  $A, B, C, D$ , при яких виконуються рівності (23.45) і (23.46). Позначимо  $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = w$ ,  $\sqrt{A^2 + B^2} = d$  і підставимо вирази (23.46) у рівняння (23.5), що при значеннях  $t$  згідно з рівнянням (23.41) є рівнянням граней призми. В результаті матимемо

$$\frac{v|C|}{dw} (A \cos t + B \sin t) + \frac{u}{d} (A \sin t - B \cos t) - r = 0. \quad (23.47a)$$

Це є рівнянням лінії перетину грані призми із січною площиною у системі  $uOv$  на січній площині. Підставляючи замість  $u$  його значення з рівняння (23.42), знайдемо координати  $u_i$  та  $v_i$  точок перетину ребер призми із січною площиною. Нагадаємо, що замість  $t$  треба підставляти в рівняння (23.47a) послідовно значення з формули (23.41).

Масиви просторових координат  $x_i, y_i, z_i$  вершин шуканої лінії перетину знайдемо підстановкою  $u_i$  та  $v_i$  у рівняння (23.46).

Приклади програмної реалізації наведеного алгоритму показано на рис. 23.3, який виконано графопобудовником. В ізометричній проекції подано правильну дванадцятигранну призму, висота якої 12 см, ра-

діус описаного циліндра 5 см, а кутовий параметр однієї з вершин нижньої основи становить 0,13 рад. Призму перетинає площина

$$-x - 2y + 3z - 16 = 0.$$

Використовуючи замість (23.5) рівняння сім'ї площин (23.6), матимемо алгоритм побудови лінії перетину правильної піраміди та площини. На рис. 23.4 подано виконану графопобудовником ізометричну проекцію правильної дванадцятигранної піраміди, висота якої 12 см, кут між бічною гранню і висотою 0,35 рад, а кутовий параметр однієї з вершин основи становить 0,26 рад. Піраміду перетинає площина

$$-x - 4y + 3z + 16 = 0.$$

В алгоритмі розв'язання позиційних задач на перетин прямої чи кривої лінії з поверхнею, площини з поверхнею та взаємний перетин двох поверхонь передбачається розв'язання системи рівнянь заданих геометричних образів. Алгоритм ґрунтується на ідеї належності точки до внутрішності чи зовнішності поверхні.

Якщо лінія та поверхня задані в одній системі координат, то завжди можна за-

стосувати один з двох алгоритмів (площинний чи просторовий) визначення належності будь-якої точки внутрішності чи зовнішності поверхні.

**Площинний алгоритм.** Позначимо функціональний параметр рівняння лінії через  $s$ . Нехай розв'язок лежить в інтервалі  $s_1 \leq s \leq s_2$ . Визначимо координати  $x, y, z$  точки  $M$ , що відповідає значенню

$$s = \frac{s_2 - s_1}{2}. \quad (23.48)$$

За формулами (21.5), (21.7) або (21.9) обчислимо значення спеціальних координат  $u, v, t$  у системі, до якої віднесено поверхню. Підставляючи значення  $t$  у внутрішнє рівняння поверхні, дістанемо рівняння лінії рівня  $t = \text{const}$  цієї поверхні. Скориставшись формулами (22.3), (22.4) або (22.26), (22.27) та враховуючи, що роль  $x$  і  $y$  відіграють  $u$  і  $v$  відповідно, визначимо належність точки  $M$  до внутрішності чи зовнішності лінії рівня  $t = \text{const}$  заданої поверхні.

Якщо точка  $M$  належить до зовнішності лінії рівня, то функціональний параметр наступної довільної точки  $M$  визначаємо за формулою (23.48), надаючи  $s_1$  значення  $s_M$ . Якщо точка  $M$  належить до внутрішності, то значення  $s_M$  надаємо  $s_2$ . Ітераційний процес продовжуємо доти, доки виконується умова  $\frac{|s_2 - s_1|}{2} \leq \epsilon$ , де  $\epsilon$  визначає наперед задану точність.

Значення функціонального параметра довільної точки, при якому виконується ця умова, треба підставити в рівняння лінії, щоб дістати просторові координати  $x, y, z$  шуканої точки перетину.

Зазначимо, що одна й та сама лінія може перетинати поверхню більше, ніж в одній точці. При цьому треба позначити той функціональний параметр  $s_M$  довільної точки  $M$ , при якому вона вперше опинилася всередині поверхні, а після знаходження розв'язку для однієї точки перетину за наведеним алгоритмом слід повернутися до цього значення та направити ітераційний процес у протилежний бік.

**Просторовий алгоритм.** Для поверхонь другого порядку (23.15), (23.18) при розгляді питання про належність довільної точки до внутрішності чи зовнішності по-

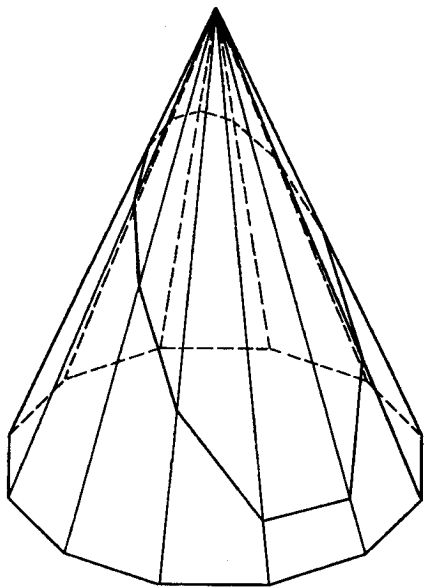


Рис. 23.4

верхні не обов'язково переходити до рівняння лінії рівня цієї поверхні. Досить підставити координати  $x, y, z$  довільної точки в рівняння (23.15) або (23.18). Якщо знак "=" змінюється на знак ">", то довільна точка належить до зовнішності, якщо на знак "<", то до внутрішності поверхні.

Просторовий алгоритм більше нічим не відрізняється від площинного.

Якщо поверхня перетинається площинною чи іншою поверхнею, то до алгоритму додається визначення на площині чи на поверхні сім'ї ліній рівня. Розв'язок шукають для кожної лінії, а масиви координат точок перетину впорядковують згідно із зростанням чи спаданням значення параметра сім'ї.

#### 23.4. Візуалізація ліній та поверхонь

Геометричну модель відображення ліній чи поверхні засобами комп'ютерної графіки дістають методом проєкціювання та сполучення точок, які лежать на лінії, впорядкованих відповідно із зростанням або спаданням значення функціонального параметра. Вхідні дані у вигляді рівняння лінії та інтервалу значень функціонального па-



раметра дають змогу обчислити координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$  послідовності точок.

Щодо візуалізації поверхні, то проєкції відтворюють деякі характерні для поверхні лінії: ребра багатогранників, лінію, обвідну проєкції кривої поверхні, межі відсіку поверхні. Ефективний спосіб візуалізації кривої поверхні полягає в попередньому визначенні на поверхні сім'ї або сітки координатних ліній та відображенні на проєкції їхніх видимих відрізків (рис. 23.5... ..рис. 23.24).

Точкове відображення простору на площину за аксонометричним проєціюванням визначено формулами (21.20), (21.21)

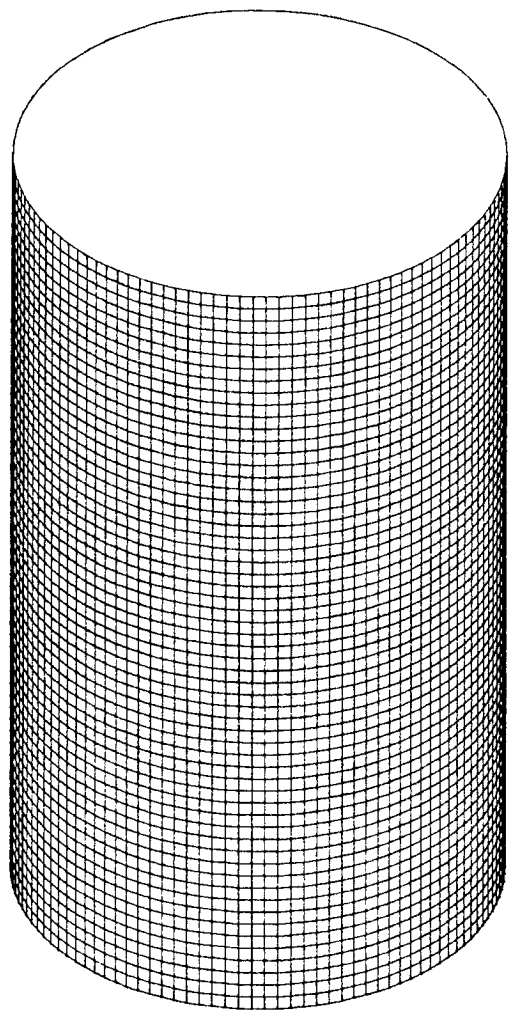


Рис. 23.5

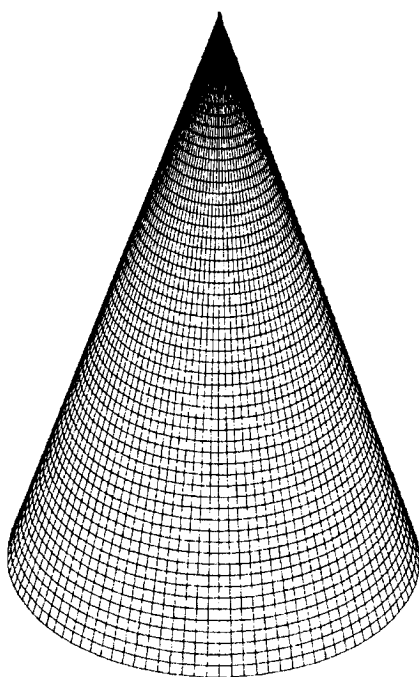


Рис. 23.6

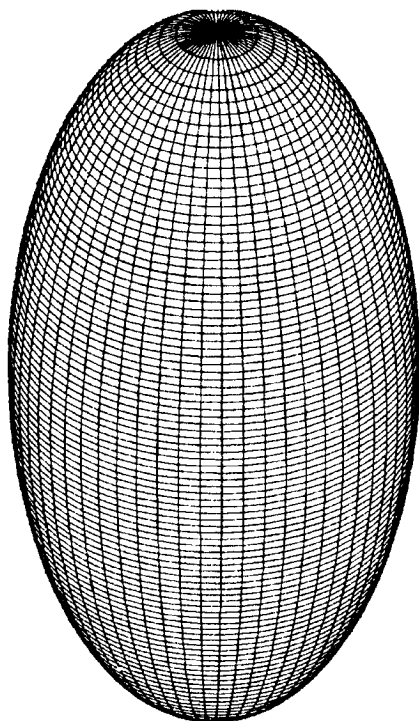


Рис. 23.7

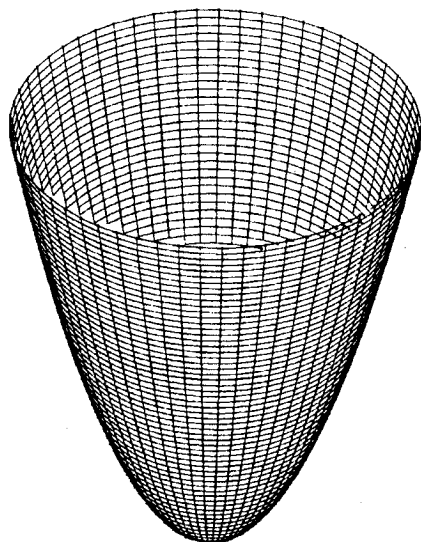


Рис. 23.8

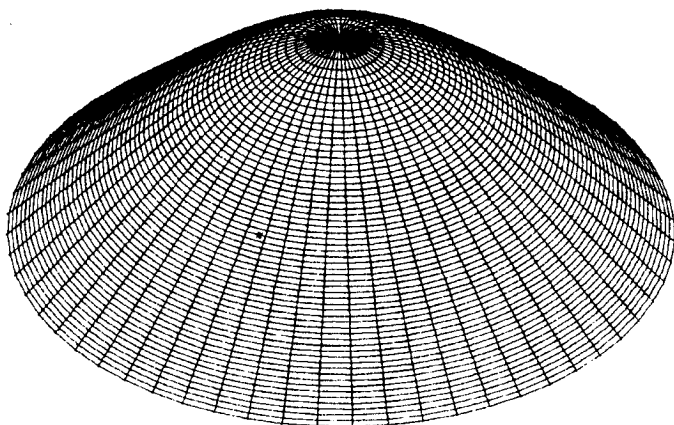
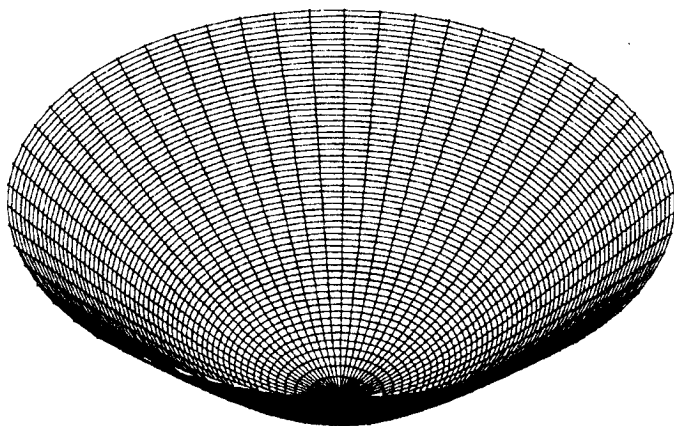


Рис. 23.9

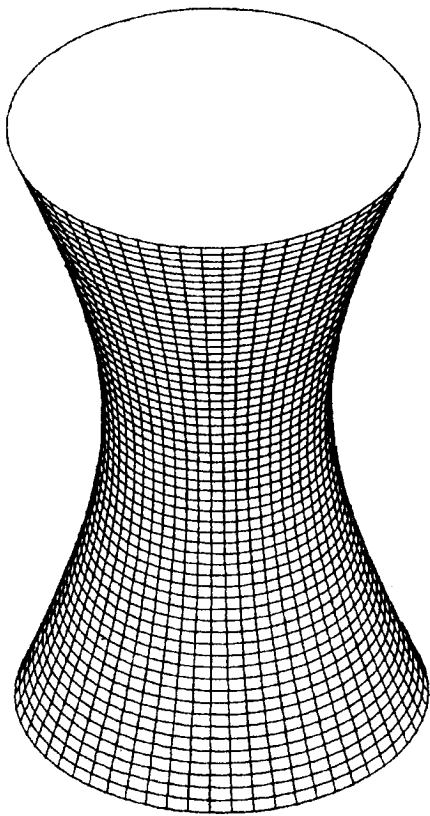


Рис. 23.10

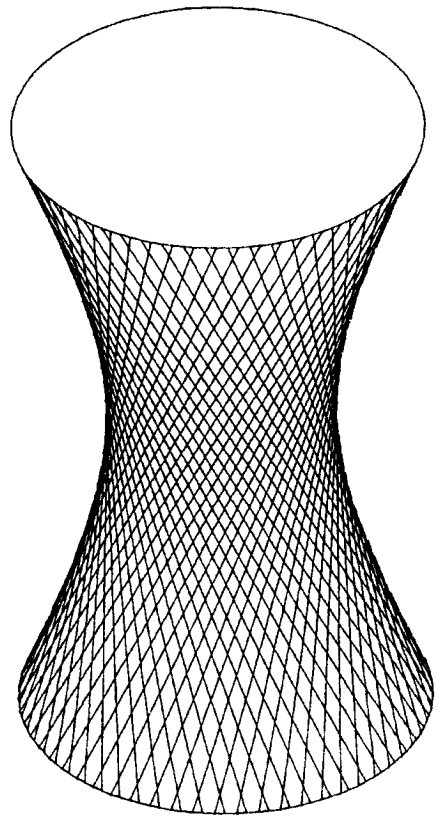


Рис. 23.11

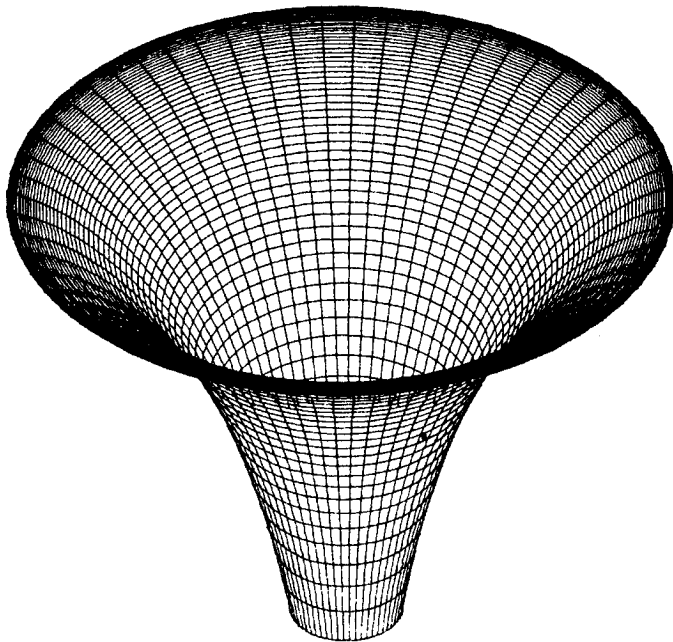


Рис. 23.12

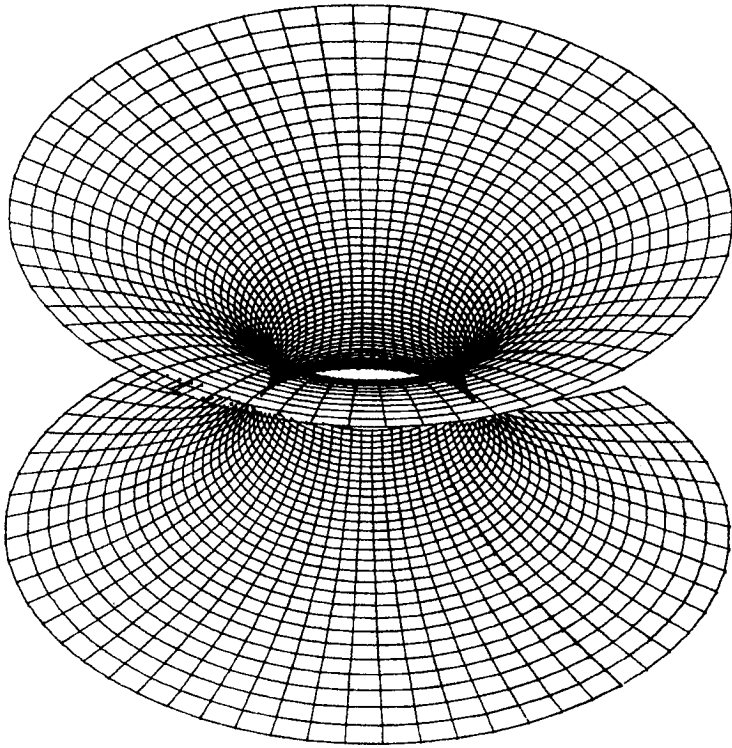


Рис. 23.13

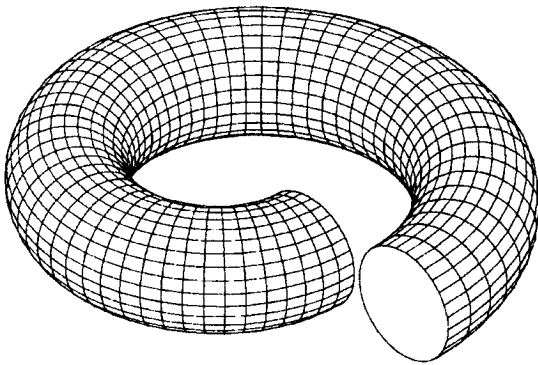


Рис. 23.14

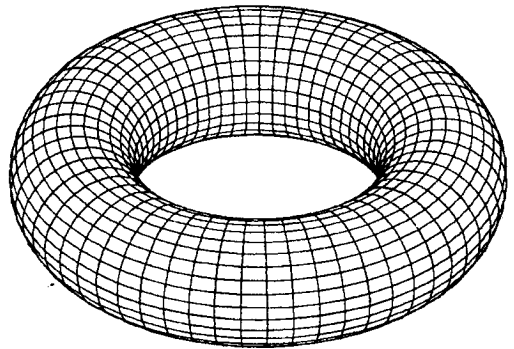


Рис. 23.15

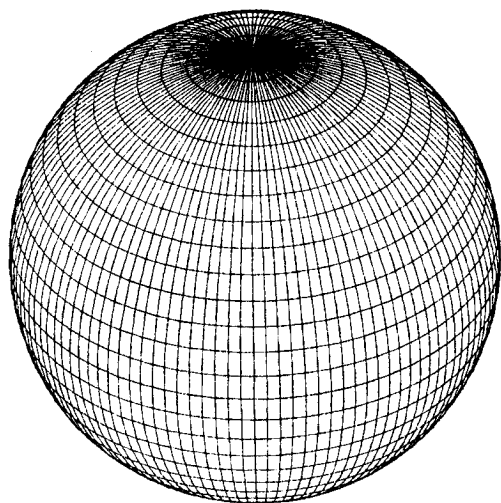


Рис. 23.16

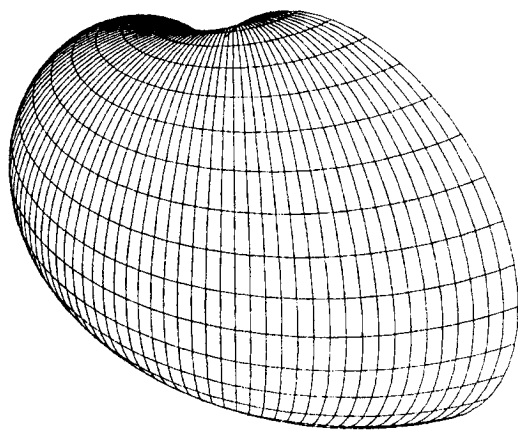


Рис. 23.17

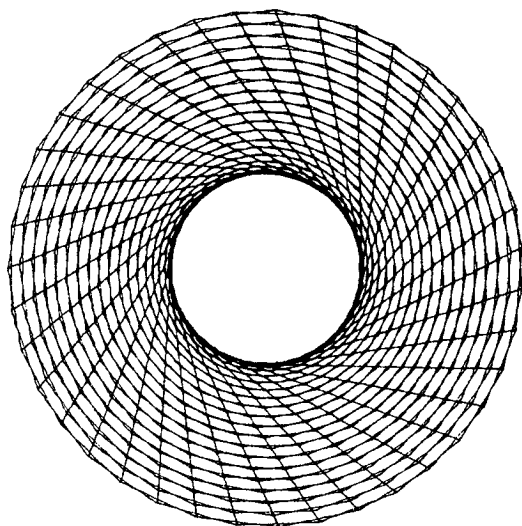
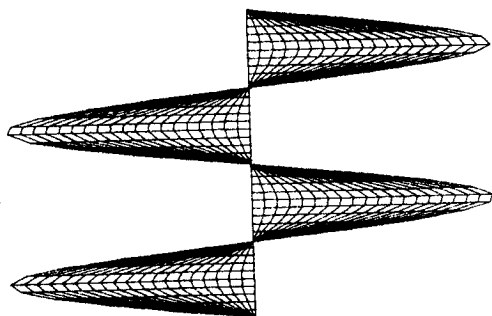
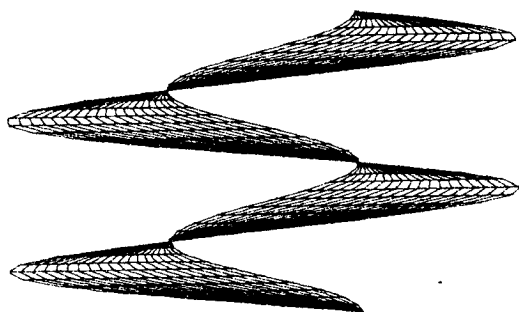


Рис. 23.18

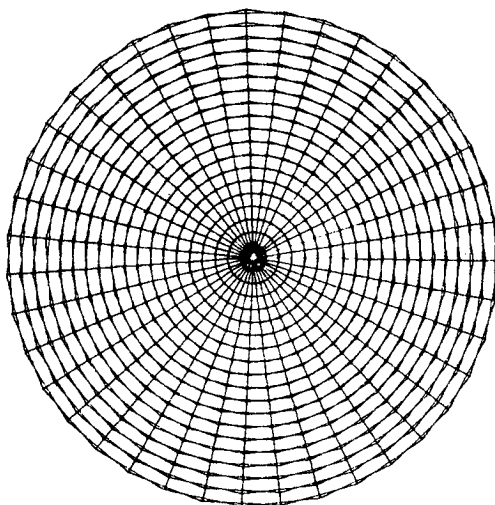


Рис. 23.19

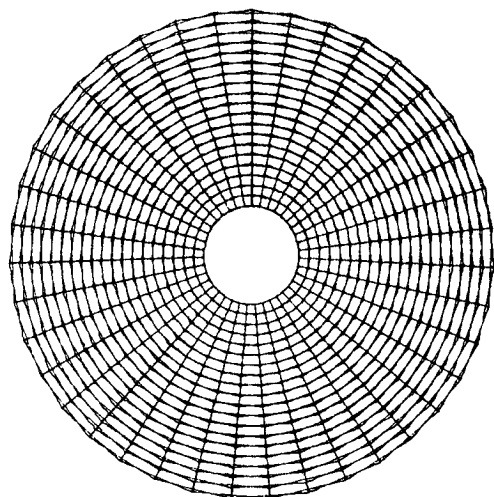
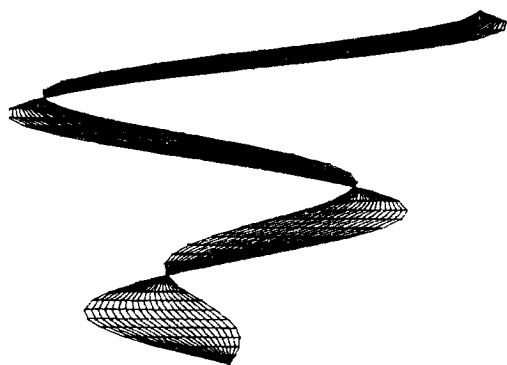
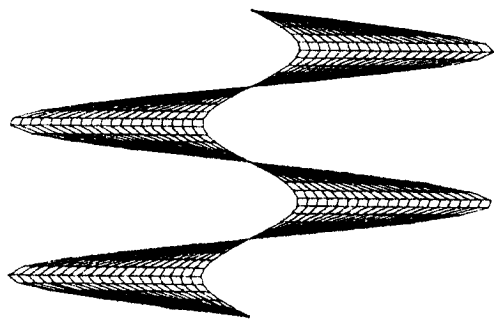


Рис. 23.20

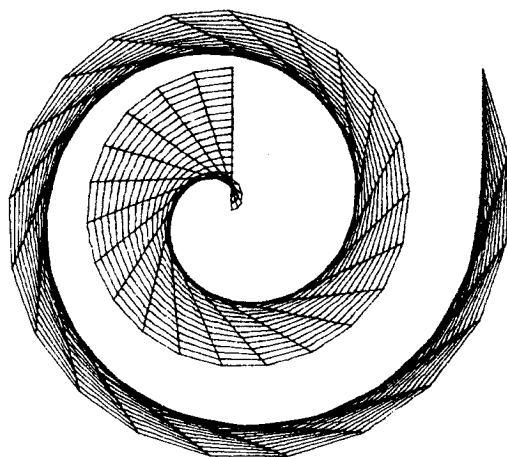


Рис. 23.21

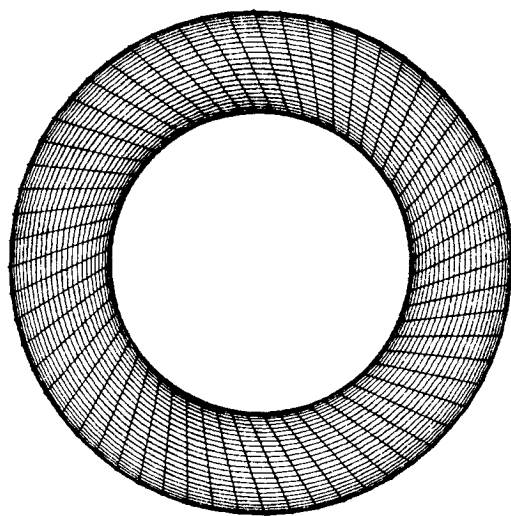
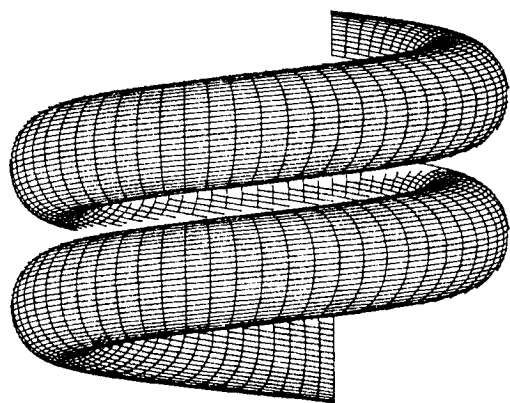


Рис. 23.22

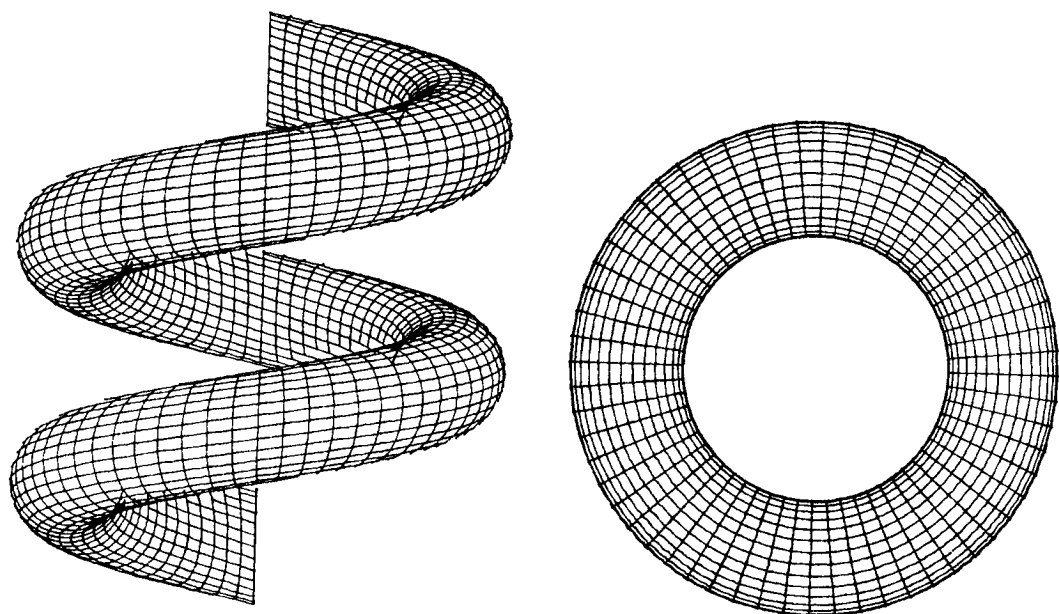
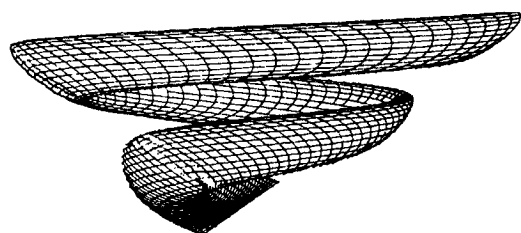


Рис. 23.23



та (21.22) відповідно для прямокутних ізометрії, диметрії та косокутної диметрії.

Точкове відображення простору на фронтальну площину проєкцій визначено формулами

$$x_{\phi} = -x, y_{\phi} = z, \quad (23.49)$$

а на горизонтальну площину проєкцій — формулами

$$x_{\Gamma} = -x, y_{\Gamma} = -y. \quad (23.50)$$

**Визначення лінії, обвідної проєкції поверхні.** Нехай поверхня задана в параметричній формі:

$$x = x(u, t), y = y(u, t), z = z(u, t). \quad (23.51)$$

Як було показано, явна форма задання поверхні є окремим випадком задання у формі (23.51). До форми (23.51) приводить також задання поверхні внутрішнім рівнянням у спеціальних координатах.

Застосовуючи формули відповідного точкового перетворення простору при проєкціюванні [див., наприклад, рівняння (21.20), (21.21) та (21.22)], можна записати

$$x = f(u, t), y = \varphi(u, t), \quad (23.52)$$

де  $x, y$  — прямокутні декартові координати проєкцій точок;  $f, \varphi$  — функції, що реа-

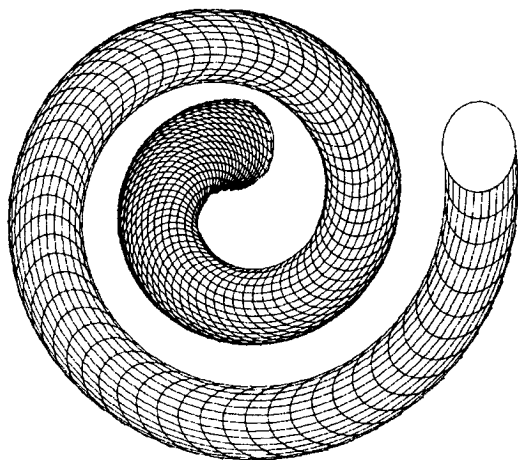


Рис. 23.24

лізують ланцюжок: (21.53) — одну з функцій (21.4), (21.6) або (21.8) — одну з функцій (21.20), (21.21), (21.22), (23.49), (23.50).

Проаналізувавши вирази (23.52), дійдемо висновку, що ці рівняння відповідають рівнянням двох сімей ліній  $u = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$ . Кожна сім'я залежить від одного параметра. Як відомо, такі сім'ї мають обвідну, рівняння якої

$$I = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{vmatrix} = 0. \quad (23.53)$$

Обвідна (23.53) поділяє точки на поверхні (23.51) на два класи, що визначаються знаком нерівності, в яку перетворюється ліва частина (23.53) після підстановки внутрішніх координат  $u, t$  довільної точки на поверхні. Отже, в результаті підстановки внутрішніх координат  $u, t$  точки на по-

верхні в ліву частину (23.53) дістанемо один з трьох випадків:

$$I = 0, \quad (23.54)$$

коли точка належить обвідній. За цієї умови можна скласти рівняння обвідної і побудувати її;

$$I > 0, \quad (23.55)$$

коли точка є видимою на проекції;

$$I < 0, \quad (23.56)$$

коли точка невидима на проекції.

Випадок (23.55) або (23.56) завжди можна дістати множенням лівої частини (23.53) на  $-1$ .

Підкреслимо, що тут ідеться про потенціальну видимість, тобто не враховується випадок, коли інша поверхня закриває собою розглядувану поверхню при проєкціюванні.

У табл. 23.2 наведено приклади застосування форм задання та алгоритму визначення видимості найпоширеніших повер-

Таблиця 23.2. Поверхні в ортогональних проєкціях та в ізометрії

Поверхня	Номер рисунок	Тип спеціальної системи	Тип проєкції	Внутрішнє рівняння	Вираз $I$ в рівнянні (23.53)
Циліндр	23.5	(21.6) $r \neq 0$	(21.20)	$u = 0$	$\sin t + \cos t$
Конус	23.6	(21.8) $\alpha \neq 0$	(21.20)	$u = 0$	$\cos \alpha (\sin t + \cos t) - \sin \alpha$
Еліпсоїд	23.7	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$u = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - v^2}$	$\frac{c}{b} v - (\sin t - \cos t) \sqrt{b^2 - v^2}$
Параболоїд	23.8	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$u = \sqrt{2pv}$	$-u(\sin t - \cos t) - p$
Двопорожнинний гіперболоїд	23.9	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$u = \frac{b}{c} \sqrt{v^2 - c^2}$	$-\frac{b}{c} v - (\sin t - \cos t) \sqrt{v^2 - c^2}$
Однопорожнинний гіперболоїд	23.10	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$u = \frac{c}{b} \sqrt{v^2 + b^2}$	$-\frac{c}{b} v - (\sin t - \cos t) \sqrt{v^2 + b^2}$
Однопорожнинний гіперболоїд	23.11	(21.6) $r \neq 0$	(21.20)	$v = \pm bu$ $u = b \sin \alpha$	$b(\sin t + \cos t) +$ $+ \operatorname{tg} \frac{b+t}{2} [1 + b(\sin t - \cos t)]$
Псевдосфера	23.12	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$v = b \cos \alpha +$ $+ \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ $u = \frac{b}{2} (e^{\frac{v}{b}} + e^{-\frac{v}{b}})$	$-(\sin t - \cos t) - \operatorname{tg} \alpha$
Катеноїд	23.13	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$u = \frac{b}{2} (e^{\frac{v}{b}} + e^{-\frac{v}{b}})$	$-(\sin t - \cos t) \frac{e^{\frac{v}{b}} + e^{-\frac{v}{b}}}{2}$



Поверхня	Номер рисунок	Тип спеціальної системи	Тип проекції	Внутрішні рівняння	Вираз $I$ в рівнянні (23.53)
Різьблена поверхня Монжа Тор	23.14	(21.6) $r \neq 0$	(21.20)	$u = c + d \cos \alpha - rt,$ $v = d \sin \alpha$	$\sin \alpha - (\sin t - \cos t) \operatorname{tg} \alpha$
Сфера	23.15	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$u = c + d \cos \alpha,$ $v = d \sin \alpha$	$\sin \alpha - (\sin t - \cos t) \operatorname{tg} \alpha$
Каналова поверхня	23.16	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$u = d \cos \alpha,$ $v = d \sin \alpha$	$\sin \alpha - (\sin t - \cos t) \operatorname{tg} \alpha$
С-циліндроїд	23.17	(21.6) $r \neq 0$	(21.20)	$u = d +$ $+ \cos \alpha \sqrt{2rdt + c}$ $v = \sin \alpha \sqrt{2rdt + c}$	$\operatorname{arctg}(\cos t - \sin t)$
Мінімальний гелікоїд	23.18	(21.6) $r \neq 0$	(23.49) (23.50)	$v = bt, 0 \leq u \leq u_{II}$	---
Кільцевий гелікоїд	23.19	(21.6) $r = 0$	(23.49) (23.50)	$v = bt, 0 \leq u \leq u_{II}$	---
G-циліндроїд	23.20	(21.6) $r = 0$	(23.49) (23.50)	$v = bt, u_1 \leq u \leq u_2$	---
Циклічна С-поверхня	23.21	(21.8) $\alpha \neq 0$	(23.49) (23.50)	$v = bt, 0 \leq u \leq u_{II}$	---
Гелікоїдаль- ний циліндр	23.22	(21.6) $r \neq 0$	(23.49) (23.50)	$u = c + d \cos \beta$ $v = bt + d \sin \beta$	$I_r = \sin \beta (c + d \cos \beta)$ $I_\phi = -y \cos \beta + b \sin \beta \sin t$
Циклічна G-поверхня	23.23	(21.6) $r = 0$	(23.49) (23.50)	$u = c + d \cos \beta$ $v = bt + d \sin \beta$	$I_r = \sin \beta (c + d \cos \beta)$ $I_\phi = -y \cos \beta + b \sin \beta \sin t$
Правильна піраміда	23.24	(21.8) $\alpha \neq 0$	(23.49) (23.50)	$u = c + d \cos \beta$ $v = bt + d \sin \beta$	$I_r = \sin \beta (u - b \sin \alpha) +$ $+ v \cos \beta \sin^2 \alpha$ $I_\phi = -y \cos \beta - b \sin \beta \sin t$
Правильна піраміда	23.3	(21.6) $r = 0$	(21.20)	$t = t_{II} + 2\pi s$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ $u = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$ $0 \leq v \leq h$	$\sin t + \cos t$
Правильна піраміда	23.4	(21.8) $\alpha \neq 0$	(21.20)	$t = t_{II} + 2\pi s$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ $u = h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ $0 \leq v \leq \frac{h}{\cos \alpha}$	$\sin \alpha - \cos \alpha (\sin t - \cos t)$

хонь (ортогональні проекції та ізометрія виконані графопобудовником). Для більшої наочності на поверхнях відтворено сітку координатних ліній. Завдяки застосуванню алгоритму визначення видимості на проекціях відтворена зовнішність поверхні, а для таких поверхонь, як параболоїд, катеноїд, псевдосфера відтворена також їхня внутрішність, яку видно крізь отвір. У цьому разі контур отвору є нерухомим екраном, що обмежує видиму внутрішність поверхні.

Щодо побудови проекції обвідної, то в багатьох випадках це можна зробити, розв'язуючи рівняння (23.53) відносно однієї з двох змінних. Так, для циліндра та конуса

(див. табл. 23.2) обидва розв'язки не залежать від другої змінної; для центральних поверхонь другого порядку рівняння (23.53) є квадратним відносно лінійної змінної. Розв'язки цього рівняння використано також для каналової поверхні, різьбленої поверхні Монжа, тора, катеноїда, псевдосфери.

Для гранних поверхонь алгоритм визначення видимості полягає в порівнянні знаків лівої частини (23.53) для суміжних граней.

Якщо

$$I_i > 0, I_{i+1} > 0, \quad (23.57)$$

то ребро, по якому перетинаються ці грані, будемо;

якщо  $I_i I_{i+1} < 0$ , (23.58)

то ребро контурне;

якщо  $I_i < 0, I_{i+1} < 0$ , (23.59)

то ребро невидиме.

$$p = \frac{\beta - t_j}{|\beta - t_j|}. \quad (23.65)$$

Тоді координата  $u$  точки на поверхні призми в узагальненій циліндричній системі виражається рівністю

$$u = p\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}. \quad (23.66)$$

### 23.5. Моделювання розгортки

До розгортних належать такі поверхні: багатогранники, циліндри, конуси та торси. Задача розгорткування полягає в знаходженні функцій

$$x_p = x_p(x, y, z), y_p = y_p(x, y, z) \quad (23.60)$$

або з урахуванням залежності прямокутних декартових координат точки на циліндрі чи конусі від відповідних спеціальних координат, в яких ці поверхні мають рівняння  $u = 0$ ,

$$x_p = x_p(u, t), y_p = y_p(u, t). \quad (23.61)$$

У формулах (23.60) та (23.61)  $x_p, y_p$  — декартові прямокутні координати на площині розгортки;  $x, y, z$  — декартові прямокутні координати точки, що належить розгортній поверхні.

**Циліндр.** Для циліндра, радіус основи якого  $r$ , формули (23.61) мають вигляд

$$x_p = rt, y_p = v. \quad (23.62)$$

Якщо циліндр задано в прямокутній декартовій системі, то  $t$  визначається за формулою (21.3), а  $v$  — (21.7).

**Правильна призма.** Нехай правильна  $n$ -гранна призма описана навколо циліндра радіуса  $r$  і має висоту  $h$ . Кутівий параметр однієї з її вершин відносно площини  $xOz$  позначимо через  $t_n$ . Апофеми бічних граней призми мають узагальнену циліндричну координату

$$t_i = t_n + \frac{2\pi i}{n} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (23.63)$$

За формулою (21.3) знайдемо  $\beta = f(x, y)$ , а з умови

$$t_i - \frac{\pi}{n} \leq \beta \leq t_i + \frac{\pi}{n} \quad (23.64)$$

дістанемо таке значення  $j = 1$ , при якому ця умова виконується. Позначимо

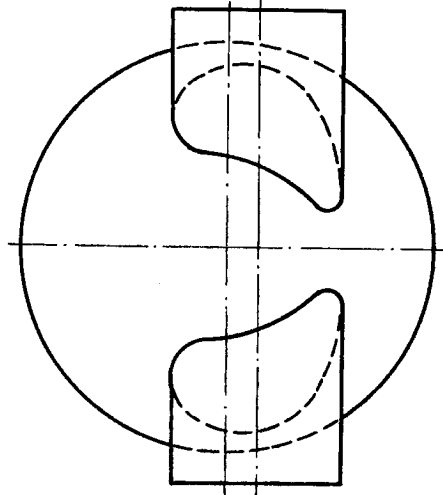
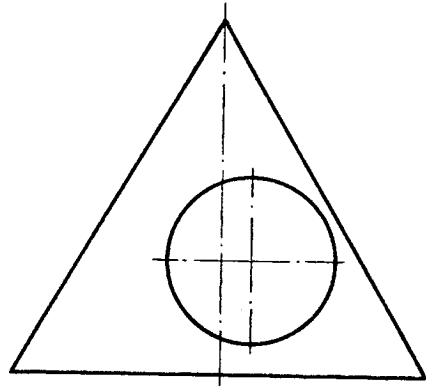


Рис. 23.25

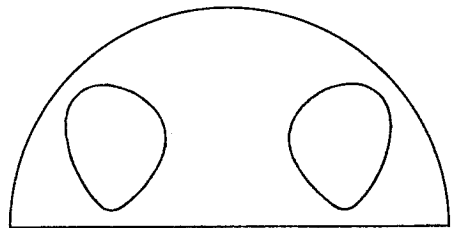


Рис. 23.26

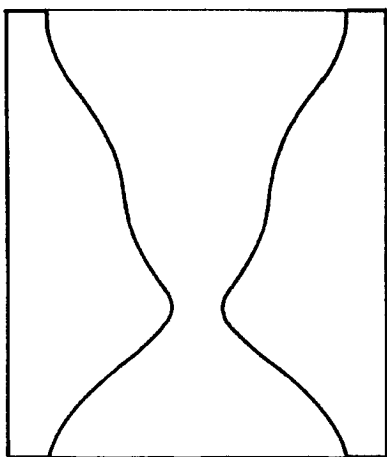


Рис. 23.27

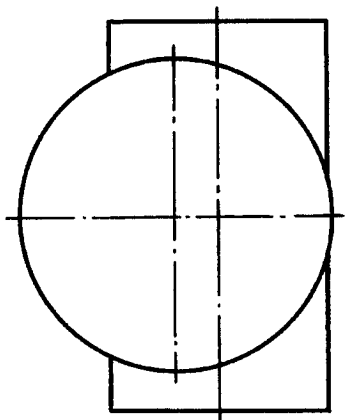
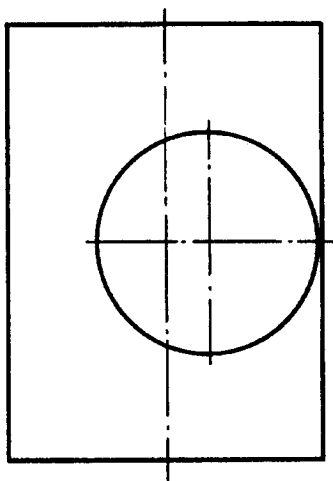


Рис. 23.28

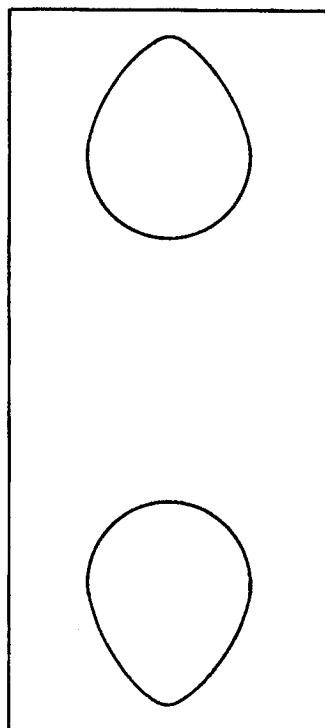


Рис. 23.29

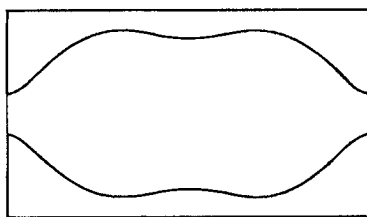


Рис. 23.30

Формули (23.61) мають вигляд

$$x_p = rt_j + u, \quad y_p = v, \quad (23.67)$$

де  $v = z$ .

Нагадаємо, що координати точки  $x, y, z$  на поверхні призми вважаємо заданими.

**Конус.** У гіперболічних координатах рівнянням конуса є  $u = 0$ . Знаходимо  $v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  та  $t = f(x, y)$  за формулою (21.3). Формули (23.61) набувають вигляду

$$x_p = v \cos(t \sin \alpha), \quad y_p = v \sin(t \sin \alpha), \quad (23.68)$$

де  $\alpha$  — кут між віссю та твірною конуса.

**Правильна піраміда.** Правильну  $n$ -гранну піраміду віднесемо до вписаного в неї конуса. Кут  $\alpha$  між його твірною та віссю входить до визначника піраміди. Як і для призми,  $t_n$  — кутовий параметр однієї з вершин основи піраміди відносно площини  $xOz$ . Обчислимо  $t_i$  за формулою (23.63),  $\beta$  і  $j$  — за формулою (23.64) та  $p$  — за формулою (23.65). Потім знаходимо:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \frac{z}{\cos \alpha}, \quad \varphi = p \arccos \frac{v}{p}.$$

Функції (23.61) мають вигляд

$$x_p = r \cos(t_i \sin \alpha + j), \quad y_p = r \sin(t_i \sin \alpha + j). \quad (23.69)$$

На рис. 23.25...23.30, виконаних графопобудовником, наведено приклади програмної реалізації алгоритму визначення лінії взаємного перетину поверхонь та алгоритмів моделювання розгортки. На рис. 23.25 зображено конус і циліндр, які перетинаються. На рис. 23.26 і рис. 23.27 подано розгортки конуса й циліндра відповідно з визначенням на розгортці лінії взаємного перетину.

На рис. 23.28 показано два циліндри, які перетинаються, а на рис. 23.29 і рис. 23.30 — розгортки поверхонь циліндра з горизонтальною та вертикальною осями відповідно з визначенням на розгортці лінії перетину.

### 23.6. Геометричне моделювання наближеними методами

У різних галузях виробництва застосовують об'єкти, геометрична форма яких не може бути описана таким самим за змістом рівнянням, що й рівняння форм класичної геометрії. Приклади таких об'єктів — літаки, судна, автомобілі, пропелери, гвинти, лопатки турбін. Форма їх зумовлена функціональними аерогідродинамічними властивостями чи естетичними вимогами. Характерною рисою проектування таких об'єктів є наявність етапів випробування та коригування форми за його результатами. Фізична модель (масштабна чи в натуральну величину) після випробування є єдиним джерелом для визначення вхідних даних для проектної форми об'єкта чи його чергової фізичної моделі.

Слід зазначити, що вимоги до методу геометричного моделювання таких об'єктів часто суперечать одна одній. Так, з одного боку, геометрична модель має якнайшльїніше наближатися до фізичної моделі, з іншого — вона має містити мінімальне число параметрів, з третього — локальна зміна форми фізичної моделі має відтворюватись у зміну значень лише деяких (а не всіх) параметрів геометричної моделі.

Склад вхідних даних геометричної моделі зумовлений вимірюванням на фізичній моделі. Вимірюють насамперед координати точок, які називають *опорними*. Найпростіша схема визначення опорних точок на поверхні передбачає розміщення їх у сім'ї площин рівня. Так, щоб визначити опорні точки на фізичній моделі, на неї наносять  $n + 1$  лінію її перетину з площинами рівня однієї сім'ї та  $m + 1$  лінію перетину з площинами рівня другої сім'ї. Ці лінії називають *координатними*, або *лініями каркаса*.

Координати опорних точок  $x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}$  мають індекси, які відповідають номерам ліній каркаса, що проходять через відповідну опорну точку ( $i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$ ). Оскільки вимірюють координати лише опорних точок, то до визначення лінії в проміжках між суміжними опорними точками та до визначення поверхні в проміжках між двома парами суміжних ліній каркаса різних сімей називають *інтерполяцією*. Якщо до визначення виконують у проміжках перед початковою опорною точкою (початковою лінією каркаса) або після кінцевої точки (кінцевої лінії каркаса), то його називають *екстраполяцією*.

З математичної точки зору рівняння лінії каркаса на площині рівня  $j = k$  можна дістати у вигляді

$$y = \sum_{i=0}^n a_{i,k} x^i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (23.70)$$

Коефіцієнти  $a_{i,k}$  знайдемо підстановкою замість  $x$  і  $y$  значень  $x_{i,k}$  і  $y_{i,k}$  та розв'язанням системи  $n + 1$  лінійних рівнянь. Аналогічно можна дістати рівняння лінії каркаса  $i = l$ , який належить іншій сім'ї, у вигляді

$$y = \sum_{j=0}^m a_{l,j} \Delta^j \quad (j = 0, 1, \dots, m). \quad (23.71)$$

Здобуті рівняння дають змогу обчислити значення коефіцієнта  $a_{i,j}$ . У сукупності з

координатами  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ ,  $z_{i,j}$  рівняння (23.70) та (23.71) визначають цифрову геометричну модель поверхні. Алгоритм обчислення координати  $y$  точки, яка належить поверхні і не збігається з жодною опорною точкою, тобто  $x = b$  та  $b \neq x_{i,j}$  при будь-яких значеннях  $i$ ,  $z = c$  та  $c \neq z_{i,j}$  при будь-яких значеннях  $j$ , має такий вигляд.

1. Користуючись  $n + 1$  рівнянням (23.70) та значеннями коефіцієнта  $a_{i,j}$ , підставимо в кожне з них замість  $x_j$  значення  $b_j$ . Дістанемо значення  $y_{b,j}$ .

2. Користуючись  $n + 1$  рівнянням (23.71) та значеннями  $z_{i,j}$  і  $y_{c,j}$  знаходимо значення  $n + 1$  коефіцієнта  $a_{b,j}$  як результат розв'язання системи  $n + 1$  лінійних рівнянь.

3. Підставивши в нове рівняння (23.71), коефіцієнти якого ( $a_{b,j}$ ) визначені, значення  $c$  замість  $z$ , знайдемо шукане значення  $y$ .

Поліном (23.70) можна записати у формі Лагранжа:

$$y(*) = \sum_{j=0}^n l_j(x)y_j, \quad (23.72)$$

де

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}, \quad (23.73)$$

причому

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \quad (23.74)$$

Поліном у будь-якій точці на інтервалі його задання обчислюють за формулами (23.72) і (23.73).

Інтерполяція єдиним поліномом має серйозні недоліки: точність залежить від вибору системи координат відносно поверхні при кількості опорних точок більше ніж три; графік полінома на проміжках між опорними точками може мати осциляції; зміна положення однієї опорної точки призводить до зміни всіх коефіцієнтів полінома, тобто коригування форми за часом та використаням ресурсу пам'яті ЕОМ рівнозначно розрахунку нового варіанта в цілому.

Методи геометричного моделювання ліній та поверхонь наближеними методами вдосконалюються в таких напрямках:

— опорні точки та площини ліній каркаса вважають рівновіддаленими (метод Ньютона);

— явну форму задання полінома замінюють на параметричну (метод Ерміта);

— вводять додаткові умови задання полінома, наприклад, дотичні в кінцевих точках, кривину в деяких точках тощо (методи Без'є, Кунса);

— нормують функціональний параметр для лінії та функціональні параметри для поверхні (метод Кунса);

— задаючи поверхню, замінюють функції (23.70) і (23.71) однієї змінної на функцію двох змінних (методи Фергюсона, Без'є, Ерміта, Кунса);

— замість єдиного полінома, що проходить через усі опорні точки, використовують локальні поліноми, які мають в опорних точках спільні дотичні (методи сплайнів, Фергюсона, Кунса).

Розглянемо найбільш універсальний метод — метод кубічної сплайн-функції, вирази якої на кожному підінтервалі  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) відрізняються значеннями коефіцієнтів. Коефіцієнти знаходять з умови, що графік сплайн-функції проходить через вузли неперервної зміни першої та другої похідних цієї функції, а також з того, що  $f'''(x_i) = f'''(x_{i+1}) = 0$ . При виконанні останньої умови сплайн називають *істотним*, він має вигляд

$$f(x) = wy_{i+1} + wy_i + h_i^2[(w^3 - w)\sigma_{i+1} + (\bar{w}^3 - \bar{w})\sigma_i]. \quad (23.75)$$

Коефіцієнти обчислюють за формулами

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad w = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad \bar{w} = 1 - w. \quad (23.76)$$

Допоміжні коефіцієнти  $\alpha_i$ ,  $\Delta_i$ ,  $\beta_i$  та  $\sigma_i$  обчислюють відповідно за формулами

$$\alpha_1 = -h_1, \quad \alpha_i = 2(h_{i-1} + h_i) - \frac{h_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \quad (23.77)$$

$$\alpha_n = -h_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{\alpha_{n-1}};$$

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+1} - x_i}; \quad (23.78)$$

$$\beta_i = h_i^2 \Delta_i^{(3)}, \quad (23.79)$$

$$\beta_i = (\Delta_i - \Delta_{i-1}) - \frac{h_{i-1} \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

$$\beta_n = -h_{n-1}^2 \Delta_{n-3} - h_{n-1} \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}};$$

$$\sigma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}; \quad \sigma_i = \frac{\beta_i - h_i \sigma_{i+1}}{\alpha_i}$$

$$(i = n-1, n-2, \dots, 1). \quad (23.80)$$

При комп'ютерному обчисленні значення сплайн-функції в деякій точці  $x = x_f$  спочатку визначають елементи масивів  $h_i, \alpha_i, \beta_i, \Delta_i, \Delta_i^{(2)}, \Delta_i^{(3)}, \sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). При цьому слід мати на увазі, що масив  $\sigma_i$ , знайдений за формулою (23.80), треба перепорядкувати. Потім за формулами (23.76) обчислюють  $w$  та  $\bar{w}$ , підставляючи замість  $x$  його значення  $x_f$ . Врешті-решт обчислюють значення  $f(x)$  за формулою (23.75). Іноді корисно мати вираз сплайна у вигляді

$$f(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

де

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i),$$

$$c_i = 3\sigma_i, \quad d_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

### Запитання та завдання

1. Обчислити коефіцієнти  $A, B, C, D$  рівняння площини, заданої трьома точками  $M_0(0, 1, -3), M_1(2, 0, 0)$  та  $M_2(0, 0, -5)$ . По один чи по обидва боки відносно цієї площини лежать точки  $F_1(0, 0, 0)$  та  $F_2(0, 18, 0)$ ?
2. Визначити тип системи, значення її внутрішнього параметра та параметра  $t$  за умови, що площина  $6x - 7y + 2 = 0$  в цій системі є площиною рівня.
3. Записати рівняння кола в узагальнених циліндричних координатах, якщо воно лежить на площині  $x - y + 4 = 0$ , а узагальненими циліндричними координатами його центра є  $u = 6, v = -1$ .
4. За допомогою обчислення визначити, всередині чи зовні еліпсоїда  $\frac{x^2 + y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$  лежить точка  $M(1, 2, 3)$ ?
5. Знайти рівняння лінії, яка є обвідною ізометричної проекції гіперболічного параболоїда  $z = \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4}$ .
6. Які координати на площині розгортки має точка  $M(3, 4, 6)$ , що належить поверхні циліндра  $x^2 + y^2 = 25$ ?
7. Вузли сплайна мають координати  $A(0, 1), B(2, 0), C(3, -3), D(4, 2)$ . Обчислити значення сплайна в точках  $x = 0,5$  та  $x = 3,5$ .
8. Написати вираз полінома Лагранжа, якщо його вузли лежать у точках  $A, B, C, D$ , які визначено в попередній вправі. Обчислити значення полінома в точках  $x = 0,5$  і  $x = 3,5$  та порівняти їх з відповідними значеннями сплайна.

Зазначимо, що коефіцієнти  $a_i, b_i, c_i, d_i$  мають свої значення на кожному інтервалі.

Щодо інтерполяції поверхні, то її виконують за схемою, наведеною вище для випадку інтерполяції поліномами.

Нарешті, слід звернути увагу на одне можливе наближення геометричної моделі до форми фізичної моделі в термінах задачі апроксимації. При цьому поверхня чи крива не обов'язково має проходити через опорні точки, але вона має до них наблизитися згідно з прийнятим задалегідь критерієм. Так, коефіцієнти рівняння (23.70) можна дати не з умови проходження лінії через опорні точки, а з умови мінімуму сумарного квадратичного відхилення

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^h (y_{i,k} - y_i)^2,$$

де  $y_{i,k}$  — ординати опорних точок;  $y_i$  — ординати точок апроксимуючої лінії.

Цей метод називають *методом найменших квадратів*.

Зазначимо, що метод Без'є також ґрунтується на апроксимації ламаних класом функцій Бернштейна. Кінцеві точки апроксимуючої кривої належать крайнім ланкам ламаної, які дотикаються до кривої. Щодо інших опорних точок ламаної, то вони далекі від поверхні. Отже, метод Без'є зручніше застосовувати не в задачах наближення, а в задачах конструювання поверхонь.

# Розділ IV

## КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

---



### Глава 24

#### ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

##### 24.1. Поняття про комп'ютерну графіку

Визначним досягненням людства в останні десятиріччя є швидкий розвиток електроніки, обчислювальної техніки та створення на їхній основі багатопланової автоматизованої системи комп'ютерної графіки.

На початку свого розвитку комп'ютерну графіку розглядали як частину системного програмування для ЕОМ або один з розділів систем автоматизованого проектування (САПР). Сучасна комп'ютерна графіка становить ряд напрямів і різноманітних застосувань. Для одних із них основою є автоматизація креслення технічної документації, для інших — проблеми оперативної взаємодії людини й комп'ютера, а також задачі числової обробки, розшифрування та передачі зображень.

Сучасне розширення можливостей ЕОМ, створених для виконання обчислень, дає змогу комп'ютеру сприймати й наочно зображати результати розрахунків та будувати необхідні комплексні креслення, схеми тощо.

Зорове сприйняття графічної інформації для людини має важливе значення, обсяг і швидкість сприйняття зорових образів значні. Для уявлення особливостей креслення чи будь-якого процесу досить кількох секунд, протягом яких ми розглядаємо креслення, графік функції чи інше наочне зображення. На розшифрування та порівняння тисяч чисел, якими можуть бути подані ті самі об'єкти, потрібні години. Отже, важливість наочного подання комп'ютером результатів обчислення важко переоцінити.

Однією з основних підсистем САПР, що забезпечує комплексне виконання проектних робіт на основі ЕОМ, є комп'ютерна графіка (КГ).

*Комп'ютерною, або машинною, графікою* називають наукову дисципліну, яка розробляє сукупність засобів та прийомів автоматизації кодування, обробки й декодування графічної інформації. Іншими словами, комп'ютерна графіка розробляє сукупність технічних, програмних, інформаційних засобів і методів зв'язку користувача з ЕОМ на рівні зорових образів для розв'язання різноманітних задач при виконанні конструкторської та технічної підготовки виробництва.

Упродовж останнього двадцятиріччя ведеться інтенсивний пошук шляхів та способів розв'язання проблеми різкого підвищення продуктивності інженерної праці під час виконання креслярсько-графічних робіт, конструкторської та технологічної підготовки виробництва. Це спричинено потребою ліквідувати розрив, який утворився між відносно високою продуктивністю автоматизованого процесу основного виробництва та низькою продуктивністю ручного чи механізованого процесу конструкторської й технічної підготовки виробництва.

Вивчення комп'ютерної графіки зумовлене:

— широким впровадженням системи комп'ютерної графіки для забезпечення систем автоматизованого проектування, автоматизованих систем конструювання (АСК) та автоматизованих систем техно-

логічної підготовки виробництва (АСТПВ) в усіх сферах інженерної діяльності;

— значним обсягом перероблюваної геометричної інформації, що становить 60...80 % загального обсягу інформації, необхідної для проектування, конструювання та виробництва літаків, кораблів, автомобілів, складних архітектурних споруд тощо;

— необхідністю автоматизації виконання численних креслярсько-графічних робіт;

— необхідністю підвищення продуктивності та якості інженерної праці.

Метою комп'ютерної графіки є підвищення продуктивності інженерної праці та якості проектів, зниження вартості проектних робіт, скорочення термінів виконання їх.

Завданням комп'ютерної графіки є звільнення людини від виконання трудомістких графічних операцій, які можна формалізувати, вироблення оптимальних рішень, забезпечення природного зв'язку людини з ЕОМ на рівні графічних зображень.

## 24.2. Історія і перспективи розвитку комп'ютерної графіки

Розвиток комп'ютерної графіки (КГ) почався з появою пристроїв графічного виведення. Становлення КГ та широке її використання пов'язано із створенням засобів графічного введення — виведення та дисплеїв — пристроїв побудови зображень на електронно-променевої трубі.

При взаємодії користувача з комп'ютером розрізняють три режими роботи: пакетний; пасивно-інтерактивний; інтерактивний.

У пакетному режимі роботи графічна інформація формується і виводиться за допомогою заздалегідь написаного пакету прикладних програм — ППП (рис. 24.1). Формування та виведення простих зображень у пакетному режимі на пристроях одержання твердих копій (телетайп, АЧПП) здійснювалося ще до початку використання комп'ютерів.

У пасивно-інтерактивному режимі роботи графічна інформація формується і виводиться за допомогою заздалегідь написаних прикладних програм, в яких передбачено багаторазові запити даних у користувача (рис. 24.2).

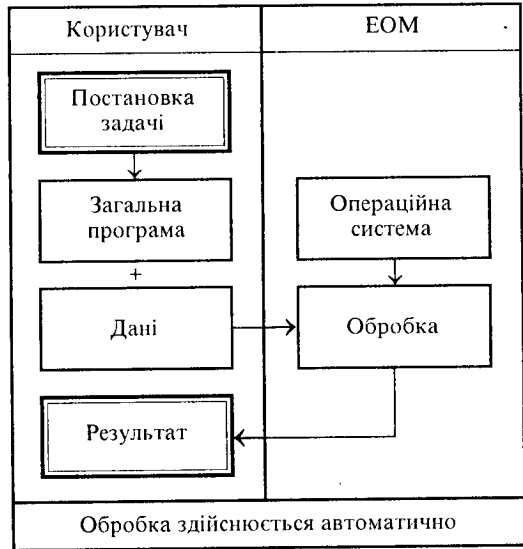


Рис. 24.1

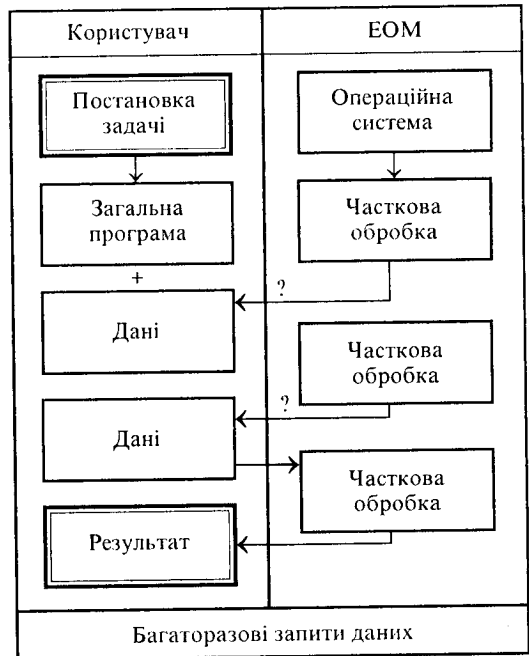


Рис. 24.2

В інтерактивному режимі роботи графічна інформація формується і виводиться в режимі оперативної графічної взаємодії користувача та комп'ютера (рис. 24.3).



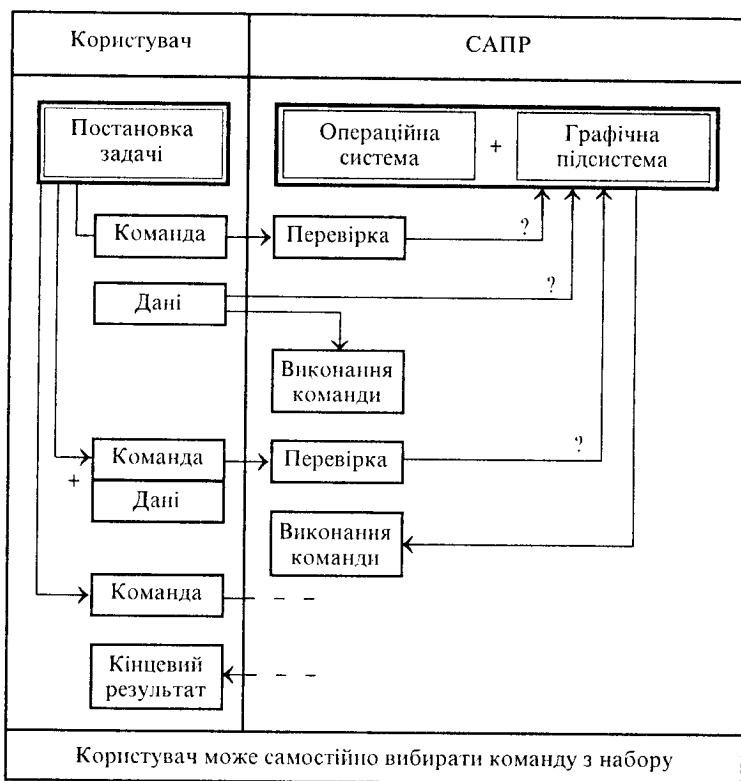


Рис. 24.3

Початком сучасної інтерактивної комп'ютерної графіки можна вважати дисертацію Сазерленда (1963 р.), присвячену графічній системі SKETCHPAD. Ця система могла відтворювати та перетворювати геометричні фігури за допомогою світлового пера. Робоче поле екрана поділяється на чотири частини для побудови проєкцій об'єкта: вигляду спереду, зліва, зверху та в перспективі. Будь-яка зміна однієї з проєкцій автоматично зумовлювала зміну всіх інших проєкцій та зображення в перспективі. Отже, зрозуміло, наскільки великі можливості комп'ютерної графіки для автоматизації креслярсько-графічних робіт з великим обсягом графічного матеріалу при машинному проектуванні та автоматизації виробництва в багатьох галузях промисловості.

У 60-роках виникає ряд дослідних проєктів, з'являються розробки, придатні для комерційного розповсюдження. Найбільш значними серед них були проєкти фірми

GENERAL MOTORS з використанням багатопультової графічної системи з розподілом часу для багатьох етапів проектування автомобілів, система Digigraphic була створена фірмою для проектування ліній і дисплейна система IBM 2250, заснована на прототипі фірми GENERAL MOTORS.

В Україні перша інтерактивна графічна система автоматизованого проектування електронних схем була розроблена Київським політехнічним інститутом і Науково-дослідним інститутом автоматизованих систем управління та планування в будівництві (НДІАСБ, Київ) і демонструвалася в 1969 р.

### 24.3. Основні галузі застосування комп'ютерної графіки та її компонентів

Застосування КГ для формування різноманітної графічної інформації в різних галузях людської діяльності свідчить про те, що комп'ютерна графіка та геометрія —

явища різноманітні й багатопланові. У рамках КГ розв'язуються такі проблеми: розробка нових методів математичного забезпечення; розробка програмних систем графічних мов; створення нових ефективних технічних засобів для проектувальників, конструкторів та дослідників; розвиток нових наукових дисциплін і навчальних предметів, які увібрали в себе аналітичну, прикладну та нарисну геометрію, програмування для ЕОМ, методи обчислювальної математики, приладобудування.

Комп'ютерна графіка становить цілий ряд напрямів і має найрізноманітніші застосування. За допомогою КГ розв'язують багато графічних задач. У комп'ютері синтезуються прості та складні об'єкти: поверхні, тіла, структури. Без швидкого й точного розв'язання графічних і геометричних задач не можна освоювати космос, конструювати складні механізми і машини, будувати інженерні споруди, розвивати медицину тощо.

Комп'ютерну графіку широко застосовують при розв'язанні актуальної проблеми підвищення продуктивності й точності інженерної праці. Цього досягають автоматизацією розрахунково-графічних робіт, розв'язуючи різноманітні задачі у галузі машинобудування, літакобудування, профілювання складного різального інструменту тощо.

Комп'ютерну графіку широко застосовують також при розв'язуванні актуальної проблеми підвищення продуктивності та якості виготовлення виробів основного виробництва. Цьому сприяє *автоматизована система технологічної підготовки виробництва (АСТПВ)*, під якою розуміють будь-який автоматизований виробничий процес, яким керує комп'ютер. Найважливішими автоматизованими виробничими комплексами АСТПВ є: верстати з числовим програмним керуванням (ЧПК), верстати з міні-ЕОМ, програмно-керовані роботи, гнучкі виробничі системи.

Усі види інженерної діяльності, керованої комп'ютерами, об'єднані під назвою автоматизованої системи інженерного забезпечення (АСІЗ), яка включає:

— планування процесу проектування з використанням комп'ютерного програмного забезпечення;

— системи автоматизованого проектування різального інструменту та процесу обробки;

— процедури автоматизованої системи керування виробництвом (АСКВ);

— процедури автоматизованої системи виробничого планування (АСВП);

— системи автоматизації проектування розміщення обладнання на виробництві, зокрема графічну імітацію робототехніки.

Цілковиту інтеграцію галузей АСІЗ разом з економічними й бухгалтерськими системами називають *комп'ютерно інтегрованим виробництвом (КІВ)*. КІВ ще тільки починає розвиватися на основі комп'ютерної графіки і, як правило, функціонує під керуванням головних комп'ютерів із загальною базою даних.

Комп'ютерна (машинна) графіка є обслуговуючою підсистемою САПР. Зараз різноманітна та багатопланова комп'ютерна графіка розглядається як важлива система, що обслуговує ряд автоматизованих систем: САПР, АСТПВ, систему наукових і технічних досліджень (АСНТД) тощо (рис. 24.4).

Система комп'ютерної графіки складається з математичного, програмного, технічного та методичного забезпечення.

М а т е м а т и ч н е з а б е з п е ч е н н я ґрунтується на методі математичного моделювання, згідно з яким математична структура, відношення елементів у математичній моделі відповідає структурі й відношенням у реальному об'єкті. У КГ використовується геометрична версія математичного моделювання, при якому дво- та тривимірні зображення складаються з точок, ліній і поверхонь.

П р о г р а м н е з а б е з п е ч е н н я включає програми в машинних кодах, тексти програм та експлуатаційні документи. Основу програмного забезпечення КГ становлять пакети прикладних програм (ППП), які є набором програм, що реалізують на ЕОМ інваріантні та об'єктно-орієнтовані графічні процедури.

Т е х н і ч н е з а б е з п е ч е н н я — це пристрої обчислювальної й організаційної техніки, засоби передачі даних, вимірювальні та інші пристрої або їх з'єднання. Технічне забезпечення включає комплекс технічних засобів, які забезпечують введен-

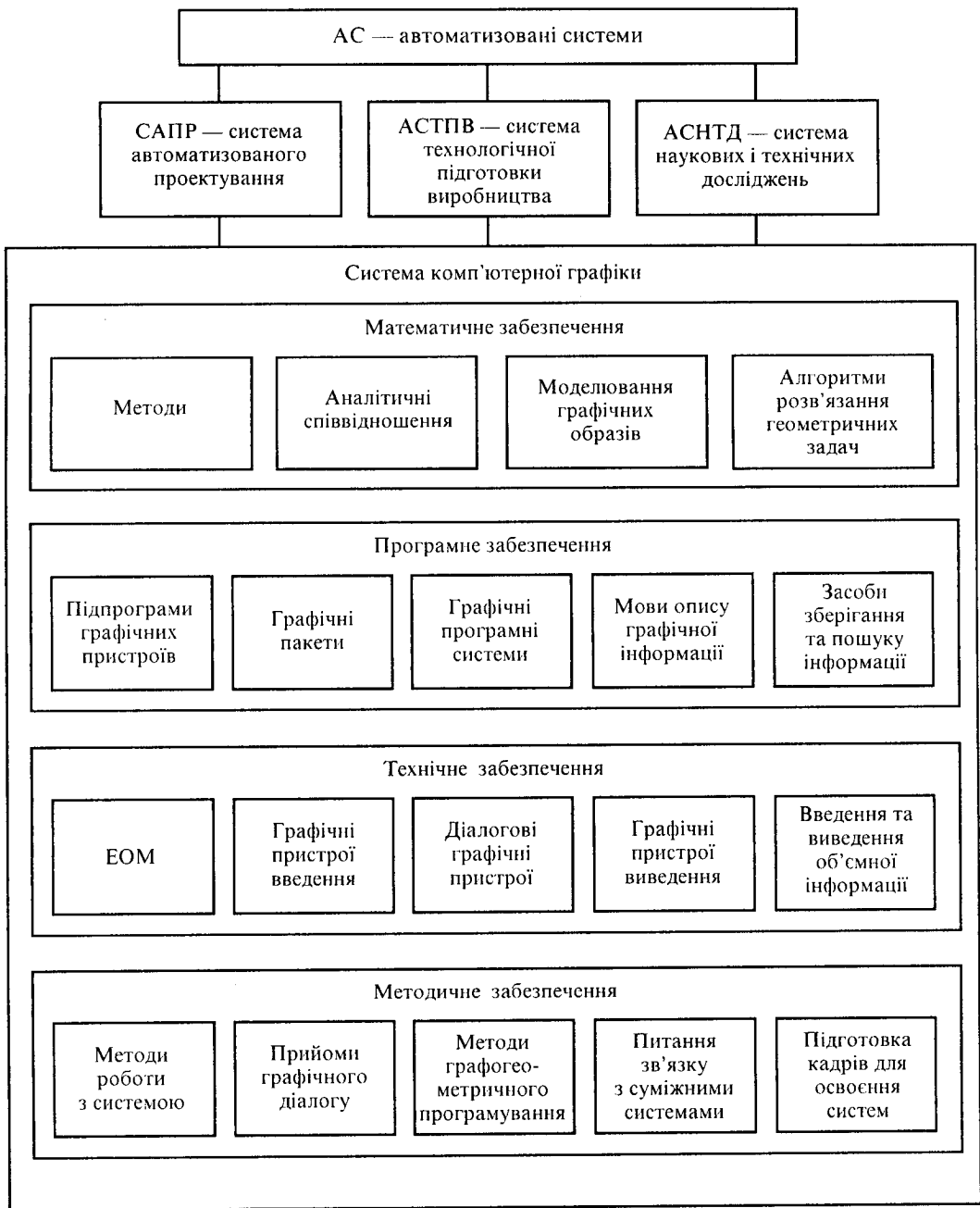


Рис. 24.4

ня графічної інформації, формування та виведення графічної інформації, редагування.

Методичне забезпечення — це документи, в яких відображено склад, правила відбору та експлуатації засобів ав-

томатизації проектування. До методичного забезпечення належать також кадрові питання, розробка ефективних методів та заходів щодо роботи із системою комп'ютерної графіки.

1. Сформулювати визначення комп'ютерної графіки.
2. Чим зумовлена необхідність вивчення КГ?
3. Які основні задачі розв'язує КГ?
4. Які позитивні якості має зорове сприйняття графічної інформації?
5. Які існують режими взаємодії користувача з комп'ютером?
6. Чим відрізняється пасивно-інтерактивний режим роботи від інтерактивного?
7. Які основні галузі запровадження комп'ютерної графіки?
8. Які автоматизовані системи обслуговує система комп'ютерної графіки?



## Глава 25

# ТЕХНІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

### 25.1. Функціональний склад комп'ютера. Центральний процесорний пристрій та критерії його вибору

Комплекс засобів для обробки даних складається з компонентів апаратного й програмного забезпечення.

Технічне забезпечення включає комплекс технічних засобів, призначених для введення графічної інформації, формування та виведення результатів у вигляді графічної інформації, редагування зображень.

Функціонально будь-який комп'ютер виконує операції введення, зберігання, обробки, виведення графічної інформації і відповідно містить технічні засоби для їх виконання.

*Технічні засоби* — це всі електричні та механічні складові частини комплексу технічних засобів комп'ютера: центральний пристрій, пристрої введення, виведення та передавання даних.

Уся апаратура, що не входить безпосередньо до складу центрального пристрою, об'єднується загальним терміном “периферійні пристрої”. На рис. 25.1 наведено існуючі елементи комплексів технічних засобів, що дають змогу створювати потрібну конфігурацію комп'ютерів.

Центральні процесорні пристрої (ЦПП) розробляють на основі різних типів ЕОМ (рис. 25.2).

Критерій вибору ЕОМ зумовлений задачами, що розв'язуються. Наприклад,

якщо потрібна висока точність обчислень або якщо обробляються великі масиви даних, то доцільно використовувати суперміні-ЕОМ. Основним типом великих і суперміні-ЕОМ, які використовуються в сучасних САПР, є ЕОМ єдиної системи (ЄС ЕОМ).

Міні-ЕОМ та мікро-ЕОМ відкривають нові можливості для конструкторів і проєктувальників, оскільки сучасні ЕОМ цих класів, об'єднані в мережі, наближаються до великих ЕОМ.

Комп'ютерна система керується центральним процесорним пристроєм, який є головним елементом комп'ютерної системи. *Центральний процесорний пристрій (ЦПП)* — це пристрій, який розшифровує зміст команд у програмі й виконує (інтерпретує) їх. Іншими словами, ЦПП є засобом переробки графічної інформації, яка проходить етапи створення, обробки та зберігання моделей об'єктів.

До складу ЦПП входять три основні елементи:

1. Пристрій керування, який перекладає кожну комп'ютерну команду (інструкцію) в коректну послідовність; інтерпретує команди та передає відповідні сигнали, які активізують інші частини комп'ютера.

2. Арифметико-логічний пристрій (АЛП), що обробляє елементарні операції додавання й віднімання, які є основою всіх математичних операцій, виконуваних комп'ютером.

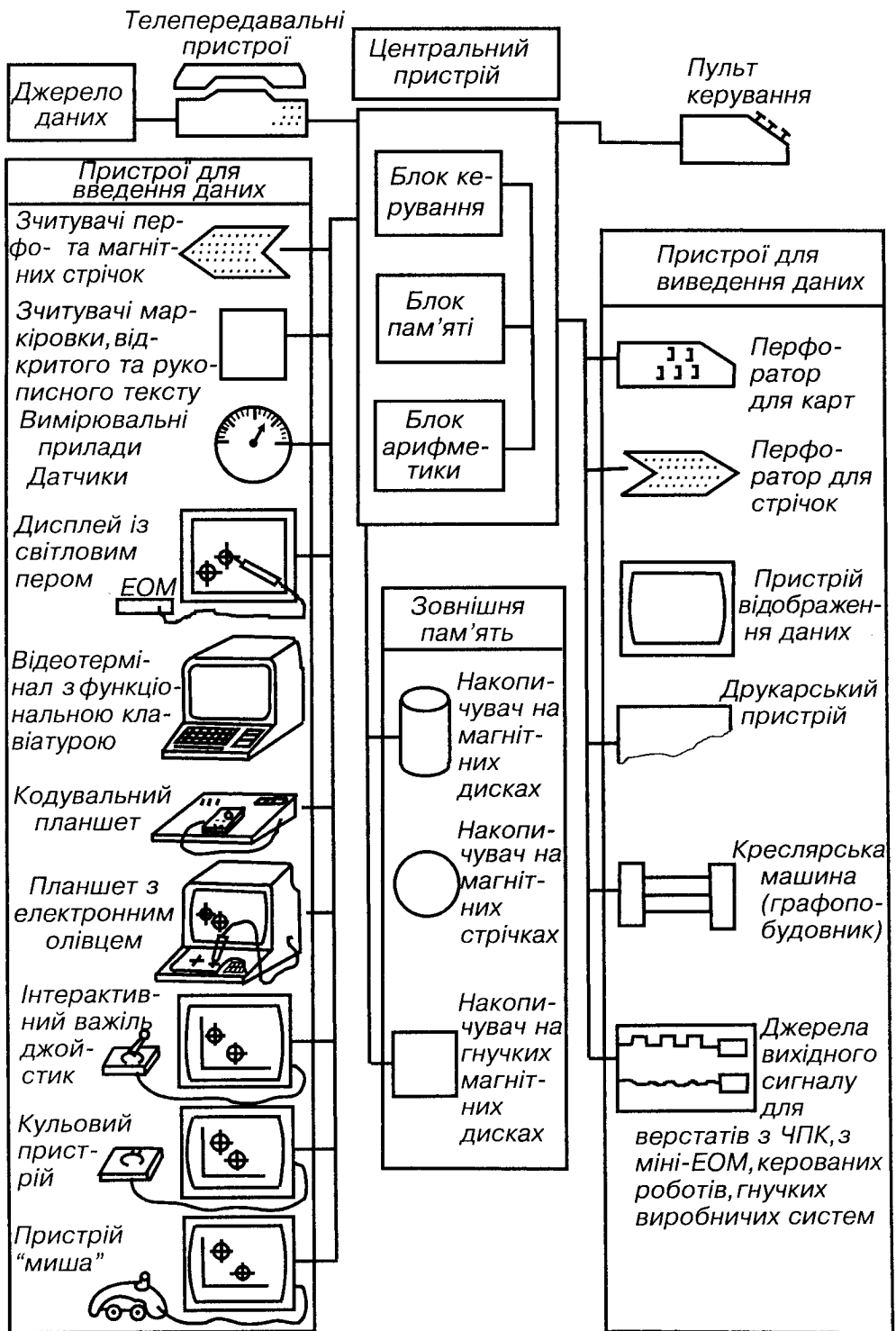


Рис. 25.1

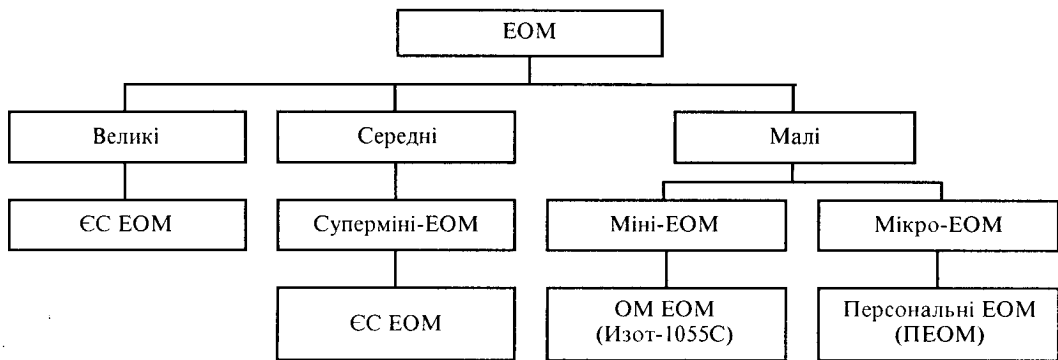


Рис. 25.2

3. Оперативний пристрій запам'ятовування (ОПЗ), в якому розміщуються програми та дані у міру їх використання. Обсяг пам'яті вимірюється в байтах. Кожний байт є одним символом коду команди і складається з восьми бітів (двійкових цифр). Більшими одиницями фізичної величини пам'яті є кілобайт і мегабайт. ОПЗ забезпечує швидке виконання програм і в більшості САПР або АСППВ має обсяг до 2 Мбайт.

## 25.2. Пристрої введення графічної інформації

Джерелом графічної інформації є об'єктивна реальність: реальні механізми та машини як існуючі, так і створювані, а також процеси виробничої діяльності конструктора.

При звичайному неавтоматизованому проектуванні основним носієм конструкторської інформації є різні архівні та довідкові інформаційні матеріали, державні стандарти, нормалі, прейскуранти, складальні креслення, специфікації тощо. Основним засобом реєстрації цієї інформації є документи — текстові та графічні, які зберігаються в проектних організаціях, бібліотеках, архівах.

При автоматизованому проектуванні за допомогою ЕОМ інформація в такому вигляді може існувати тільки зовні автоматизованої системи. Всередині системи інформація має бути подана в цифровому коді однією з її внутрішніх мов.

При автоматизованому проектуванні основним носієм інформації про форму, розміри, кінематичні зв'язки та інші властивості конструкцій, що розробляються, є креслення, виготовлене за правилами технічного креслення. Сучасна мова технічного креслення — одна з найбільш розвинених, формалізованих графічних мов. Вона дає змогу описувати практично будь-які форми та конструкції технічних об'єктів. Для успішного застосування графічне зображення перетворюється у форму, придатну для обробки комп'ютером.

Усі персональні комп'ютери оперують з графічною інформацією (ГІ), поданою в цифровій формі. Процес перетворення ГІ в цифрову форму складається з двох етапів: читання та кодування. Читання ГІ зводиться до визначення координат елементів (точок, ліній, фрагментів) у вибраній системі координат, а кодування — до перетворення зчитаної інформації в цифровий код за раніше прийнятими правилами з подальшою обробкою комп'ютером.

Пристрої введення інформації в комп'ютер призначені для перетворення даних і програм з доступної людському сприйняттю форми у внутрішню машинну форму. Для цього використовують: термінал — клавіатурний пристрій типу друкарської машинки або відеотермінал — такий самий пристрій з телеекраном для перегляду інформації, що вводиться. Можуть використовуватися: світлове перо, дотик якого до екрана в певній точці дає змогу вводити або змінювати інформацію в цій точці; сенсор-

на панель, що реагує на дотик пальця до певної клавіші; графічний планшет, за допомогою якого можна вводити графічну інформацію. Пристрої розробляють на основі звукового аналізатора для введення інформації з голосу. У персональних комп'ютерах широко використовуються важелі керування; джойстик, схожий на важіль переключення передач в автомобілі; "миша", яку пересувають на столі поряд з дисплеєм (відеотерміналом); кульовий пристрій, який розміщений у спеціальному гнізді зовнішнього пристрою і вільно рухається під рукою. Переміщуючи в довільному напрямку будь-який з цих пристроїв, переміщуємо відповідно на екрані також покажчик курсора, дістаючи доступ до будь-якої області екрана. Це дає змогу зображати на екрані будь-яку криволінійну фігуру.

Ручне введення в комп'ютер графічної інформації виконують за допомогою спеціальних мов кодування. Воно має низьку продуктивність і недостатню захищеність від помилок людини. Тому автоматизація введення є актуальною проблемою, яку ви-

рішують на шляху створення автоматичних і напівавтоматичних пристроїв, що доповнюють основний комплект обладнання ЕОМ і дають змогу в десятки разів збільшувати продуктивність праці та підвищувати вірогідність інформації, що кодується.

Широко застосовують пристрої напівавтоматичного введення ГІ. Це пояснюється можливістю залучити людину в процес розпізнавання креслення та синтезу цілісного образу об'єкта. Розроблено та реалізовано ряд конструкцій напівавтоматичних пристроїв введення графічної інформації (ПГВ), в основу яких покладено фізичні явища (рис. 25.3). Загальним для всіх напівавтоматичних ПГВ є принцип розподілу функцій між оператором та пристроєм. Оператор аналізує креслення, виділяє елементи, що підлягають кодуванню, ставить робочий орган пристрою в певні точки креслення, після чого за його сигналами автоматично обчислюються координати точок і зображуються в цифровому коді. Напівавтоматичні ПГВ, як правило, мають робоче поле, достатнє для розміщення ес-

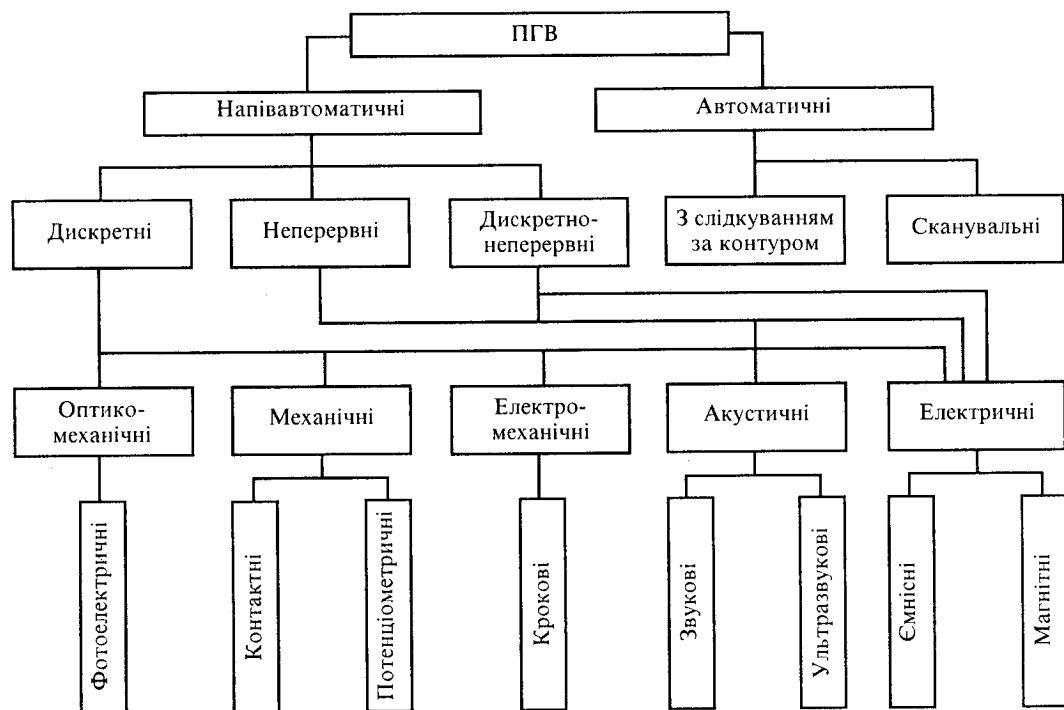


Рис. 25.3

Таблиця 25.1. Основні характеристики пристроїв графічного введення

Показник	Найменування ПГВ			
	ПАСГИ	М-2002	ГАРНИ-1	ИКГИ-0
Розмір робочого поля, мм	1000 × 1000	500 × 500	1055 × 780	850 × 618
Точність виміру координат, мм	0,25	0,05	0,5	0,1
Продуктивність	—	10 мм/с	До 3000 точок/год	100 мм/с

кізів формату А1—А2. Вони обладнані додатковими панелями для ручного введення допоміжної інформації. Серед пристроїв для кодування найбільш поширеними є М-2002, М-2004, ЕМ-709, ГАРНИ-1, ПАСГИ, Мікроніка ДТ 280-А, а також пристрої фірм Cal Comp, Benson, Aristo-Werke та ін.

Основні характеристики деяких вітчизняних пристроїв графічного введення подано в табл. 25.1.

Для комп'ютерів, як правило, необхідна не просто копія зображення, а й інформація з певним змістом. Якщо інформацію було введено без розгляду, то виникає дуже складна проблема розпізнавання. Людина з напівавтоматичним планшетом спочатку не тільки відсортовує потрібну інформацію, а й може суто геометричні дані доповнювати командами, кодами та назвами, що вводяться з алфавітно-цифровою клавіатури. У зв'язку з цим широко застосовуються напівавтоматичні пристрої введення інформації з графічних документів, одним з яких є кодувальний планшет (дігітайзер). Наприклад, кодувальний планшет Мікроніка ДТ 280-А належить до напівавтоматичних пристроїв введення графічної інформації з креслень, ескізів, фотознімків та інших зображень.

Пристроями більш високого класу є автоматичні ПГВ. Вони характеризуються великою швидкістю, не мають несистематичних помилок, які виникають при ручному кодуванні. Проте для задовільної роботи їх потрібні графічні документи високої якості й точності.

За принципом дії автоматичні ПГВ поділяють на слідкувальні та сканувальні. Пристрої, які ґрунтуються на принципі слідкування за лінією, забезпечують читання нескладної ГІ, поданої у вигляді діаграм, графіків, контурів плоских деталей, нанесених на папір, кальку, фотоплівку або інший носій.

Сканувальні автоматичні ПГВ, що працюють за принципом порядкового читання зображень, можна використовувати для кодування технічних документів будь-якої складності. Пристроями такого типу є багатоканальний автомат читання кривих МАСК, "График", "Карта", "Autoscan-1000" (США) та ін. Вони формують двійковий код рядка, що читається, і передають його для зберігання та обробки в ЕОМ. Проте для зберігання всієї інформації про зображення потрібно мати обсяг пам'яті ЕОМ, обчислюваний мільйонами бітів. Крім того, складність реалізації швидкодіючих і надійних алгоритмів відновлення структури ГІ зумовлюють малу ефективність застосування ПГВ для автоматичної обробки. Зараз відомі результати праці щодо створення надійних алгоритмів відновлення зображення, скорочення надійності, а також спрощення та формалізації конструкторських документів.

### 25.3. Пристрої введення — виведення графічної інформації

Одним із важливих пристроїв обчислювальної техніки є *графічний дисплей* — зручний та швидкодіючий пристрій введення — виведення інформації з ЕОМ. Він має унікальні характеристики, дає змогу виконувати тривимірне проектування різального інструменту, верстатів, кораблів, літаків та інших складних об'єктів.

Графічні дисплеї відрізняються великою швидкістю обміну інформацією з ЕОМ, гнучкими та багатофункціональними засобами введення — виведення, завдяки чому можна легко вводити в ЕОМ, модифікувати та виводити на екран різноманітну графічну й алфавітно-цифрову інформацію. Все це зумовило широке застосування їх як терміналів у різних інтерактивних системах проектування.



За призначенням та виглядом інформації, яка відображається на екрані, дисплеї поділяють на два класи: алфавітно-цифрові, орієнтовані на введення — виведення та обробку тільки текстової документації, і графічні, або універсальні, які дають змогу виводити на екран та перетворювати не тільки текстову інформацію, а й різні креслення, графіки тощо. Найбільш широко застосовують алфавітно-цифрові дисплеї ЕЛІТ-1, УОІ-1000, ЄС-7066. Для ЄС ЕОМ розроблено графічний дисплей ЄС-7064. Крім того, використовують графічні дисплеї УГД 43-1 (“Дельта”), ЕПП, ЕПГ-400, Сінтра (Франція), Комп’ютех-400, ІВМ-2250 (США).

**Графічні дисплеї.** Векторні та растрові дисплеї призначені для автоматизації введення — виведення інформації в ЕОМ і є пристроями для діалогу людини й машини.

Графічні дисплеї містять екран, на який з ЕОМ виводиться зображення, та електронний блок керування, що складається з різноманітних ланцюгів і призначений для розшифрування поданих команд та числової інформації (рис. 25.4). Щоб не перевантажувати ЕОМ, дисплеї, як правило, постають буферною пам’яттю, куди з ЕОМ надходить числова модель зображення.

Крім графічного зображення, на екран можуть виводитися написи, текст, цифри.

Для діалогу “людина — машина” дисплей забезпечується алфавітно-цифровою клавіатурою, а також світловим пером, яке дає змогу виконувати операції, пов’язані з внесенням та змінами інформації в ЕОМ.

Для машин серії ЄС випускають графічні дисплеї ЄС-7064, ЄС-7905. Фірма ІВМ випускає шістнадцятибарвні графічні дисплеї типу ЄСА з широкими можливостями.

У графічних дисплеях використовується один з трьох принципів побудови зображення: на екрані із запам’ятовуючою електронно-променевою трубкою, на екрані з регенерацією зображення, на растровому екрані. Електронно-променевої трубки векторних графічних дисплеїв бувають з регенерацією зображення та запам’ятовуючі.

Запам’ятовуюча електронно-променевої трубка (ЗЕПТ) зберігає зображення у вигляді розподілу потенціалу на внутрішній поверхні екрана. На рис. 25.5 зображено основні деталі ЗЕПТ: 1 — електронний записувальний прожектор; 2 — фокусуєча система; 3 — відхиляльна система; 4 — електронний відтворювальний прожектор; 5 — колімаційні пластини; 6 — колектор; 7 —

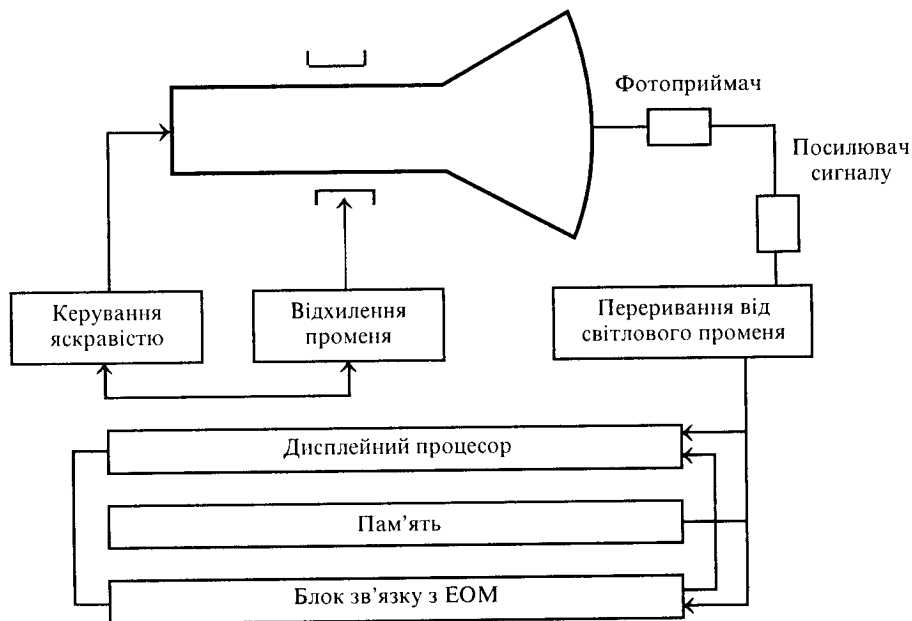


Рис. 25.4

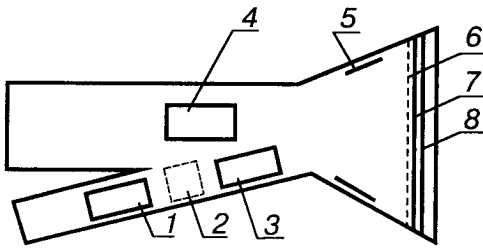


Рис. 25.5

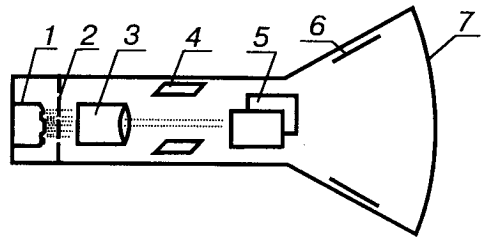
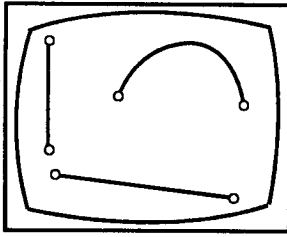
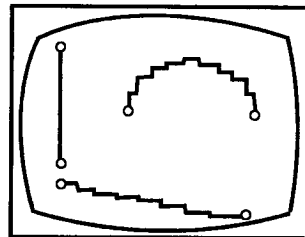


Рис. 25.6



а



б

Рис. 25.7

люмінатор (і запам'ятовуюча поверхня); 8 — скло.

Перевагою дисплеїв на запам'ятовуючих трубках є можливість генерувати зображення довільної складності з чіткими лініями й літерами без мерехтіння, а недоліками — збільшення часу для креслення зображення при необхідності багаторазової його побудови, слабкий контраст (світлотінь), а також обмежена можливість використання барв.

Електронно-променева трубка з регенерацією зображення має такі умовні позначення (рис. 25.6): 1 — нитка розжарювання; 2 — керуюча сітка; 3 — фокусуєча система; 4 — пластини вертикального відхилення; 5 — пластини горизонтального відхилення; 6 — внутрішнє металеве покриття під високою позитивною напругою; 7 — люмінатор.

Якщо час формування зображення перевищує цикл регенерації ("насичена" картинка), то зображення починає мерехтїти, що є головним недоліком розглянутих дисплеїв.

Зовсім інший принцип дії має растровий графічний дисплей, в якому креслення, складене спочатку з ліній, перетворюється в автономному пристрої запам'ятовування, а потім переноситься на екран. Зображен-

ня на екрані будується електронним променем, який по рядках прокреслює його і подає сигнал туди, де має виникнути точка, яка засвітиться. Так можна дістати майже 2 млн зображених точок (пікселів).

У растровому графічному дисплеї зникає небезпека мерехтіння екрана, бо електронний промінь пробігає по рядках усю площину екрана зі сталою швидкістю. Таким чином, кількість точок, які висвітлюються, не впливає на швидкість побудови зображення на екрані. Недоліками такого дисплея є низька розрізняльна здатність; статичне враження від зображення на екрані гірше, оскільки з'являється так званий "ефект драбини" при відтворенні похилих або кривих ліній. На рис. 25.7 показано порівняння неперервного відхилення електронного променя (рис. 25.7, а) векторного графічного дисплея і відхилення променя по рядках (рис. 25.7, б) растрового графічного дисплея.

**Інтерактивні графічні комплекси.** На практиці широко застосовують інтерактивні графічні комплекси, які називають *автоматизованими робочими місцями (АРМ)*. Вони призначені для підготовки, перетворення та редагування текстової й графічної інформації, одержання документації на машинних носіях, розв'язання схе-

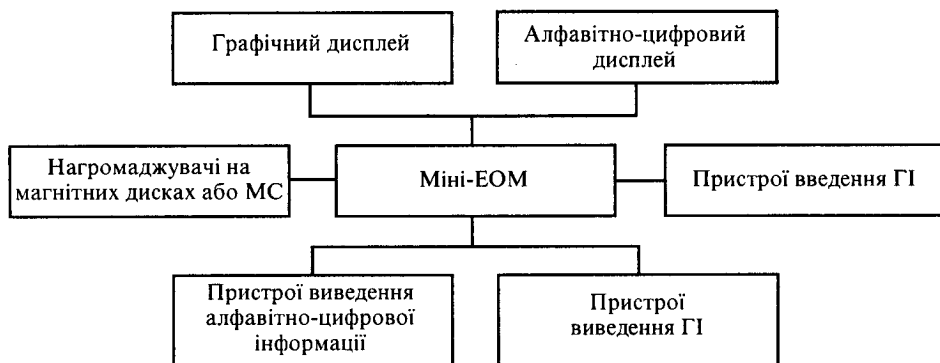


Рис. 25.8

матичних і конструкторських задач в автономному режимі. За допомогою їх розв'язують також задачі щодо організації обміну інформацією з САПР, побудованих на основі потужних ЕОМ. Узагальнену структуру АРМ подано на рис. 25.8.

У 80-х роках промисловість випускала АРМ-М-01, АРМ-М-02, АРМ-М-03, АРМ-М-04, АРМ-Р-02, АРМ-Р-03, АРМ-Р-04, АРМ-Р-05 і АРМ-Р-01. Пізніше почали впроваджувати продуктивніші міні-ЕОМ типу СМ-4, "Наїрі-41" та досконаліші операційні системи, які забезпечують багатовикористовуваний режим роботи: максимальне віддалення периферійних пристроїв комплексів АРМ від ЕОМ і наближення їх до робочого місця користувача.

Вимоги практики стимулюють розвиток графічних засобів. Пристрої введення в комплекси АРМ є фактично представниками першого покоління графічних засобів і комплексів АРМ, вони відображають тільки початковий етап розвитку. Досягнення в галузі мікроелектроніки, обчислювальної техніки, програмування дають змогу виявити напрями, в яких вдосконалюватимуться технічні засоби автоматизації введення інформації.

#### 25.4. Пристрої виведення графічної інформації

Розвиток комп'ютерної графіки почався з розробки пристроїв виведення графічної інформації. До таких пристроїв належать: екранні пристрої відображення в гра-

фічних дисплеях із запам'ятовуючою трубою (екраном), з регенерацією зображення, з растровим екраном, креслярсько-графічні автомати (КГА); пристрої для одержання твердих копій.

Креслярсько-графічні автомати з цифровим програмним керуванням дають змогу автоматизувати найбільш трудомістку операцію проектування — виготовлення технічної документації і, крім того, одержувати результати в звичайній формі (у вигляді креслень, графіків, схем), креслити діаграми, виконувати контрольне зображення результатів розрахунку.

Розроблено найрізноманітніші за принципом дії КГА, які працюють як в автономному режимі від машинних носіїв інформації, так і безпосередньо від ЕОМ за керуваннями каналами зв'язку. Найбільш досконаліми КГА планшетного та барабанного типів є ЄС-7051, ЄС-7052, ЄС-7053, ЄС-7054, АП-7251, АП-7052, АП-7053, які працюють в автономному режимі та з ЕОМ (табл. 25.2).

Основним виготовлювачем КГА за кордоном є фірма California Computer Products (США), яка випускає швидкодіючі автомати типу Cal Comp. Фірми Aristo-Werke, AEG-Telefunken (ФРН) виготовляють КГА типу Aristomat, які мають пристрої програмного керування "Географ-3011". Фірма Benson (Франція) виготовляє КГА типу Benson.

КГА з програмним керуванням мають також ряд недоліків: низьку порівняно з

Таблиця 25.2. Креслярсько-графічні автомати

Шифр графопобудовника	Країна-розробник	Точність, мм	Максимальна швидкість креслення	Тип КГА	Розміри поля, мм
В 3930	СНД	0,05	100	Барабанний	880 (ширина)
ЄС-7051	Те саме	0,05	50	Планшетний	1050 × 1000
ЄС-7052	—"	0,10	200	—"	380 (ширина)
		0,05	100	—"	
ЄС-7053	—"	0,10	150	—"	841 (ширина)
ЄС-7054	—"	0,05	100	—"	1600 × 1500
Итекан-2	—"	0,125	87	—"	394 × 841
Итекан-3	—"	0,10	80	Барабанний	420 (ширина)
		0,125	100	—"	
Aristomat 8310	ФРН	0,05	500	Планшетний	500 × 500
Aristomat 8320	Те саме	0,05	500	Те саме	1200 × 1500
Aristomat 8340	—"	0,04	500	—"	1200 × 1500
Aristomat 8350	—"	0,04	500	—"	1600 × 2000
Aristomat 8360	—"	0,04...0,08	500	—"	2000 × 3000
Aristomat 8370	—"	0,04...0,08	500	—"	2500 × 3000
Aristomat 8380	—"	0,04...0,08	500	—"	3000 × 4000
Aristomat 8448	—"	0,04...0,08	66	—"	1200 × 1500
Benson 111	Франція	0,10	140	Барабанний	340 (ширина)
Benson 121	Те саме	0,10	127	Те саме	740 (ширина)
Benson 210	—"	0,10	87	Планшетний	480 × 750
		0,10	85	Те саме	840 × 1500
Benson 230	—"	0,10	85	—"	840 × 1500
		0,05	85	—"	840 × 1500
		0,10	85	—"	840 × 1500
		0,50	85	—"	840 × 1500
		0,05	45	—"	840 × 1500
		0,025	45	—"	840 × 1500
Benson 112	—"	0,10	150	Барабанний	340 (ширина)
Benson 122	—"	0,10	150	Те саме	740 (ширина)
Benson 132	—"	0,10	150	—"	940 (ширина)
Benson 222	—"	0,05	75	Планшетний	840 × 1200
Benson 232	—"	0,05	75	Те саме	840 × 1200
Cal Comp 7000	США	0,005	1087	—"	840 × 1200
Cal Comp 7500	Те саме	0,002	320	—"	1500 × 1920
Cal Comp 7800	—"			Барабанний	787 × 864
Cal Comp 905/1036	—"	0,05	355	Те саме	933 або 394 (ширина)
Cal Comp 905/196	—"	0,05	128	—"	933 або 394 (ширина)
Kingmatic 1215	Норвегія	0,10	83	Планшетний	1200 × 1500
МК 11	Те саме	0,10	196	Те саме	
Kingmatic 1830	—"	0,10	332	—"	1800 × 3000
Kingmatic 2637	—"	0,15	67	—"	2600 × 3700
		0,15	100	—"	2600 × 3700
Kongsberg 1630	—"	0,05	500	—"	1600 × 3000
Kongsberg 1645	—"	0,05	500	—"	1600 × 4500
Kongsberg 1660	—"	0,05	500	—"	1600 × 6000
Kongsberg 1675	—"	0,05	500	—"	1600 × 7500
Kongsberg 1690	—"	0,05	500	—"	1600 × 900
Numericon R111	Японія	0,02	640	—"	—

ЕОМ швидкодію; недостатню надійність роботи, зумовлену застосуванням механічних пристроїв реєстрації та переміщення; програмно-командну несумісність різних типів КГА.

Досягнення в галузі оптоелектроніки, волоконної оптики, лазерної техніки, електроніки дають змогу підійти до створення КГА на основі принципіально нових рішень, які забезпечать високу швидкодію та оптимальну якість креслення як на звичайному, так і на спеціальному папері.

Є три великі класи КГА, які розрізняються за характером програмного керування: від ЕОМ, автономні та універсальні (рис. 25.9). Залежно від методу обробки вхідних сигналів бувають такі схеми керування: аналогові, цифро-аналогові та цифрові. За принципом дії виконавчого механізму бувають такі типи КГА: електромеханічні — з двокоординатною системою відліку та графічними методами реєстрації; оптико-механічні — з електромеханічною розгор-

ткою зображення та фотографічними методами реєстрації; електронно-променеві — з кроковою або сканувальною розгорткою зображення (електростатичними фотографічними методами реєстрації); рядково-реєстрові — з лінійною системою розгортки та комбінованими методами реєстрації.

На рис. 25.10 подано класифікацію пристроїв виведення ГІ залежно від видів зображень. Є також інші зображення:

— статичні та динамічні (як в кіно та на телебаченні);

— на постійному (папері, кальці, плівці) або тимчасовому носіїві (екран ЕПТ дисплея);

— плоскі або стереоскопічні, які дають ефект об'єму.

Найпоширеніші КГА двох типів: перові планшетного та барабанного типів; електростатичні.

Креслярсько-графічний автомат планшетного типу призначений для автоматич-

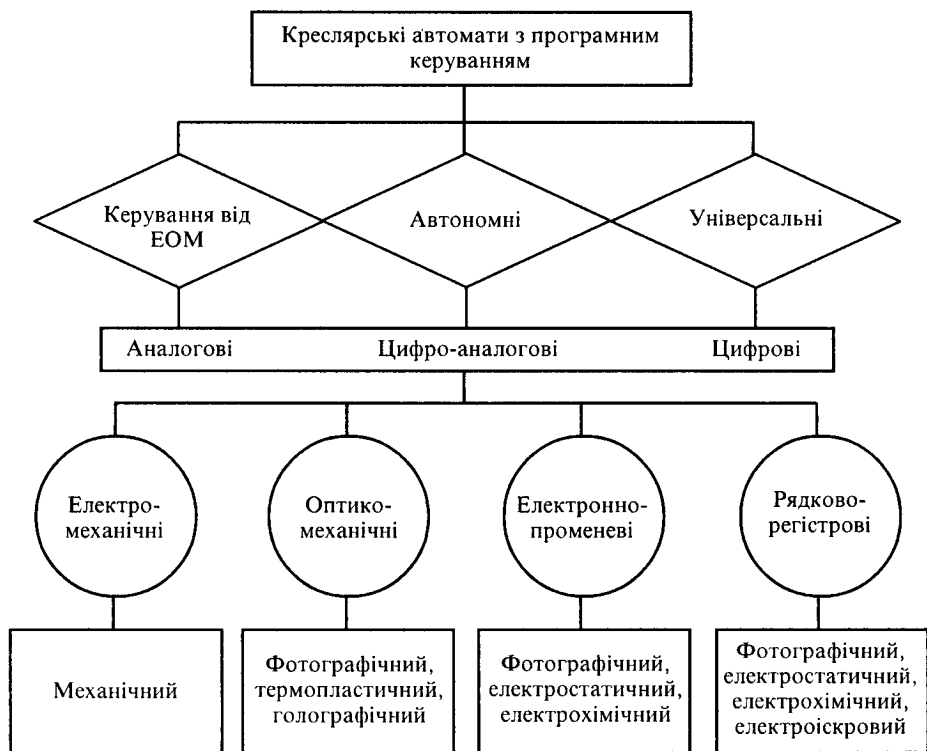


Рис. 25.9

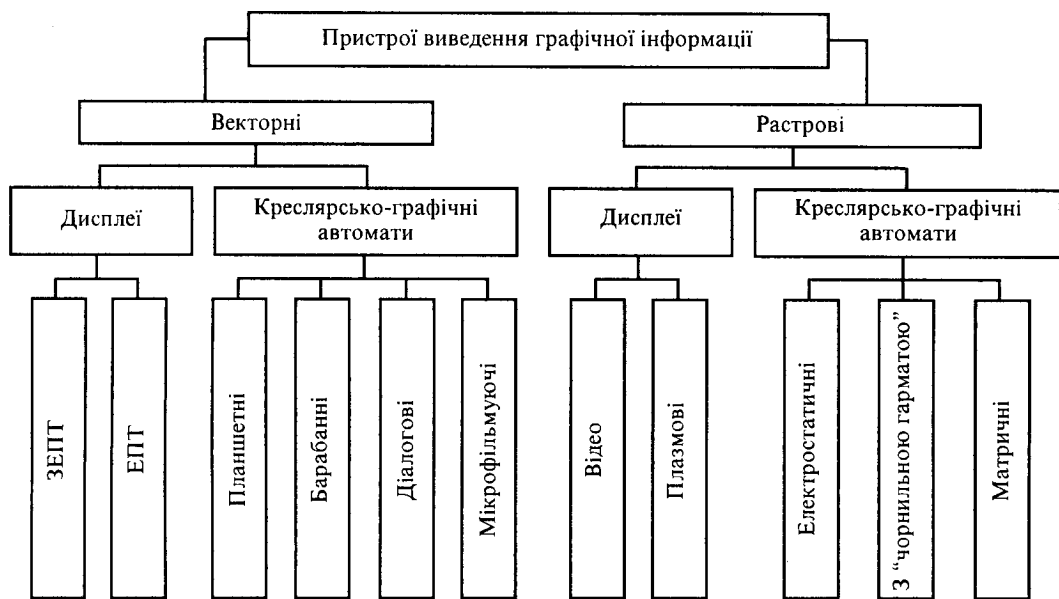


Рис. 25.10

ного креслення на паперових носіях графіків, діаграм, машинобудівних та будівельних креслень, метеорологічних карт, функціональних та електричних схем, а також інших документів. Вихідні дані надходять від пристрою, який читає їх з перфострічки, магнітної стрічки або від інтерфейса введення — виведення ЄС ЕОМ.

Графічні реєструвальні пристрої барабанного типу призначені для креслення графіків, деталей та конструкцій, які мають малі розміри по осі  $y$  і великі по осі  $x$ . Графічні пристрої планшетного типу дають змогу креслити ці документи, але в малих масштабах. За допомогою графічних пристроїв барабанного типу їх креслять з більшими розмірами по осі  $x$  і з більшою швидкістю, ніж пристроями планшетного типу (завдяки малим інерційним масам деталей, які обертаються і переміщуються). У графічних реєструвальних пристроях барабанного типу носієм інформації є рулонний папір з перфорацією або шорсткістю по краях, який переміщується по осі  $x$  завдяки обертанню транспортного барабана. Уздовж твірної барабана переміщуються три записувальні прилади, які керуються кроковим двигуном.

Креслярсько-графічний автомат барабанного типу В 3930 показано на рис. 25.11. Для його керування застосовують кнопки лівої та правої панелей (рис. 25.12).

До цього часу не вирішена проблема перових графопобудовників, пов'язана з появою клякс, засиханням туші, а також з обмеженими швидкостями креслення.

Електростатичні КГА не мають недоліків перових КГА. Функціональний принцип електростатичних КГА показано на рис. 25.13. Над відтворювальною головною з дуже тонкими голками (до 16 голків на

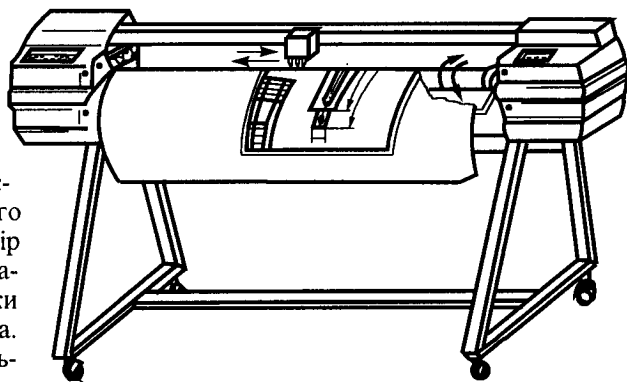


Рис. 25.11

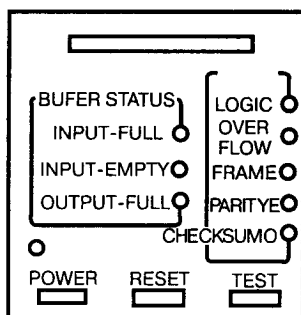


Рис. 25.12

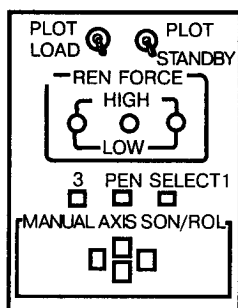


Рис. 25.13

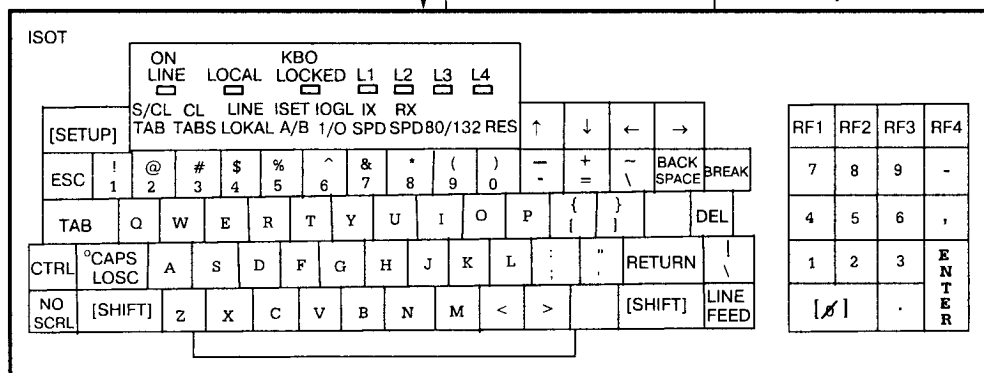
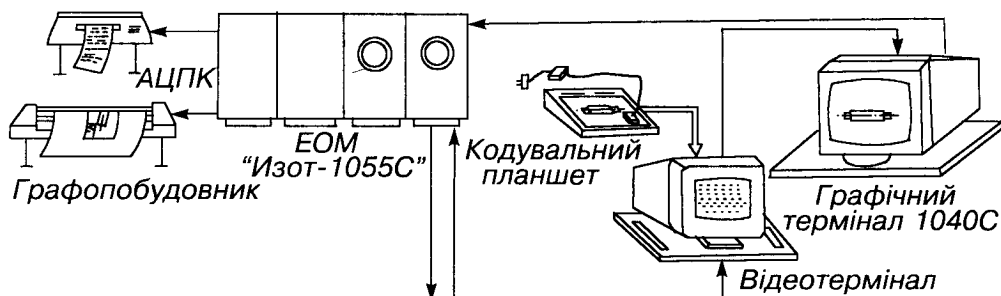
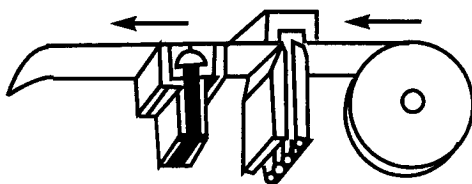


Рис. 25.14

1 мм) протягують папір, який здатний відтворювати електростатичний заряд. За допомогою нижнього та оборотного електродів з'являються короткі електростатичні імпульси на голках. Папір, який протягується, дістає відповідний заряд і при переміщенні через фарбувальну ванну (тонер) на ньому осідає фарба. Після відсмоктування надлишку барвника і закріплення (фіксації) зображення папір виводиться з КГА в сухому вигляді із зображенням, що не витирається.

Електростатичні КГА мають досить високу розрізняльну здатність. Швидкість виведення графічної інформації більша, ніж у перового КГА, тому електростатичні КГА широко застосовують в автоматизованому проектуванні. Проте через складність електростатичних КГА їх досить рідко застосовують для одержання кольорових зображень.

Технічні характеристики КГА подано в табл. 25.2.

Такі технічні засоби, як центральні процесорні пристрої, пристрої введення ПІ,

# СКЛАД ГРАФІЧНОЇ СТАНЦІ НА БАЗІ ПРОЦЕСОРА PENTIUM III-800 Xeon

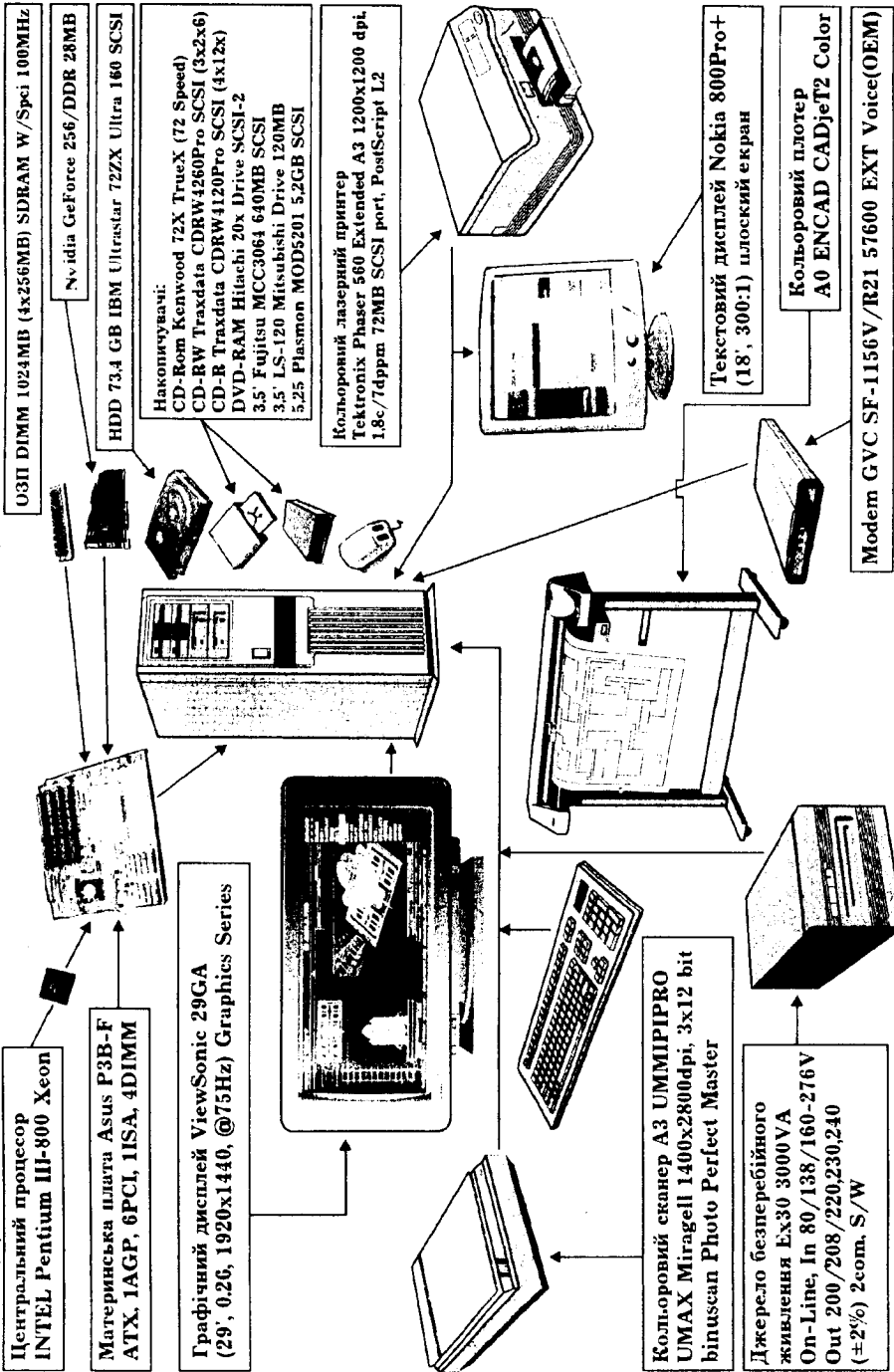


Рис. 25.15



графічні дисплеї трьох типів, автоматизовані робочі місця, пристрої виведення ГІ дають змогу створювати різноманітні конфігурації комп'ютерів.

Для забезпечення тривимірного проектування об'ємних машинобудівних конструкцій в інтерактивному режимі, для наукових досліджень та методичного забезпечення кафедр нарисної геометрії та інженерної графіки рекомендовано конфігурацію технічних засобів комп'ютера, яку зображено на рис. 25.14.

Центральний процесор INTEL Pentium III-800 Хеон є “мозком” комп'ютера. Він виконує всі розрахункові дії керування всіма периферійними пристроями.

Гнучкість системи забезпечує материнська (системна) плата. На платі є контролери, кеш-пам'ять, паралельні та послідовні порти входу (виходу), слоти для підключення відеокарти, звукової карти, мережної карти та модема. На системну плату встановлюється ОЗП (оперативний запам'ятовуючий пристрій). Різноманітність пристроїв, що підключаються до системної плати, забезпечує її гнучкість. Графічна станція має материнську плату Asus P3B-F (ATX, 1AGP, 6PCI, 1ISA, 4DIMM).

Відеокарта Nvidia GeForce 256/DDR з відеопам'яттю, що збільшується до 128 MB, забезпечує 32-бітний колір.

Графічна станція має два дисплеї: графічний дисплей ViewSonic 29GA (29") та текстовий рідкокристалевий дисплей Nokia 800Pro+ (18") завтовшки майже 8 мм, який можна навішувати на стіну.

Графічна станція також оснащена 1024 MB ОЗП, жорстким диском IBM 73,4 GB, накопичувачами: CD-ROM Kenwood,

CD-R Traxdata, CD-RW Traxdata, DVD-RAM Hitachi та ін. 3 периферійних пристроїв до нього підключені кольоровий сканер UMAX формату A3 та глибиною сканування 36 біт, кольоровий лазерний принтер Tektronix Phaser 560 формату A3, 1200 × 1200 dpi, кольоровий плотер A0 ENCAD CADjet2.

Для зв'язку через Internet передбачено модем GVC SF-1156V/R21 57600 Ext. Також є джерело безперебійного живлення Ex30 3000 В · А.

Головним конкурентом Intel на мікропроцесорному ринку є компанія AMD (Advanced Micro Devices). Нещодавно AMD анонсувала свій новий продукт — Athlon. Процесор буде виготовлятися за 0,18-мікронною мідною технологією. Площа кристала Athlon'a становитиме всього 1 см<sup>2</sup>, частота до 800 МГц. Він матиме кілька модифікацій, які відрізнятимуться за розмірами L1-кеша (від 512 кВ до 2 MB) та тактовими частотами ядра.

Щодо самої компанії Intel, то її продукція постійно вдосконалюється. Подолати гігагерцовий бар'єр можна буде напевне вже наприкінці 2000 р. послідовнику Pentium III — чипу Willamette, заснованому на новій 32-розрядній архітектурі. Значний стрибок очікується у середині 2000 р.: Timna має прийти на зміну Celeron 466 у найбільш “легких” настільних системах та 64-розрядний процесор Itanium (раніше Merced) — у потужних серверних платформах.

Інші виробники процесорів також подали процесори з тактовою частотою 1 ГГц: IBM з чипом PoverPC, а також альянс Compaq Computer та Samsung Electronics, що розвивають архітектуру Alpha.

### *Запитання та завдання*

1. Які операції виконує будь-який комп'ютер з функціональної точки зору?
2. З яких пристроїв складаються технічні засоби комп'ютерів?
3. З яких трьох основних елементів складається центральний процесорний пристрій?
4. На які два компоненти можна умовно поділити комплекс засобів для обробки даних?
5. Які функції виконує центральний процесорний пристрій?
6. Яке призначення пристроїв введення інформації в комп'ютер?
7. Назвати пристрої введення графічної інформації.
8. Назвати пристрої виведення графічної інформації.
9. Які три види дисплейних пристроїв застосовуються в комп'ютерах?

10. Які переваги і недоліки мають растрові графічні дисплеї?
11. Які переваги і недоліки мають векторні графічні дисплеї?
12. Які переваги і недоліки мають графопобудовники планшетного і барабанного типів?
13. Які переваги мають електростатичні графопобудовники порівняно з перовими?
14. Дано: центральний процесорний пристрій; пристрої введення та виведення графічної інформації, що працюють у пакетному та інтерактивному режимах (див. рис. 25.1). Скласти структурну схему комп'ютера, який працює в інтерактивному режимі.
15. Дано: конфігурацію комп'ютера (див. рис. 25.14) та склад графічної станції на основі процесора PENTIUM III-800 (рис. 25.15). Скласти найбільш близьку для даної конфігурації комп'ютера структурну схему.



## Глава 26 ОСНОВИ ГРАФІЧНОГО ПОДАННЯ ІНФОРМАЦІЇ

### 26.1. Типи геометричних моделей

Процес геометричного моделювання передбачає перехід від геометричного об'єкта до його кодованого опису в пам'яті комп'ютера. Під *геометричним об'єктом* розуміють множину точок, які задовольняють певні геометричні властивості. Графічні системи, які реалізують процес маніпулювання геометричними об'єктами, називають *системами геометричного моделювання*. Основою цього процесу є внутрішньо-комп'ютерне уявлення об'єкта, яке формується внаслідок послідовних відображень моделей об'єкта з урахуванням особливостей геометричного моделювання (рис. 26.1).

На першому етапі реальний просторовий об'єкт підлягає абстрагуванню, внаслідок чого з'являється вербальна (описова) модель. Потім обирається спосіб графічного зображення об'єкта. Геометричні об'єкти описуються геометричними (графічними) моделями, для яких графічне зображення є досить природним. У геометричному моделюванні об'єкт можна уявити дотяною (каркасною), полігональною (поверх-

невою) та об'ємною (твердотільною) моделями (рис. 26.2). Відповідно до цього існують три види геометричного моделювання. Графічне подання об'єкта дістають відображенням, в якому всі геометричні залежності подають у вигляді логічної структури даних. Наприклад, деталь можна визначити через елементарні об'єми, поверхні, ребра, точки.

З метою формування та позначення моделі виконують її формалізований опис:

— за допомогою алфавітно-цифрової вхідної мови;

— у режимі графічного діалогу;

— ескізним введенням;

— з використанням мовного введення.

У пакетному режимі об'єкт спочатку описується математично. Якщо можна, то аналітично або шляхом вибору обчислювального методу, який дає такий опис. Потім будується символна, або алгоритмічна, модель об'єкта (програма). Наприкінці дістають внутрішньокомп'ютерну модель об'єкта. Під цією моделлю розуміють математичне уявлення геометричної форми, яке зберігається в пам'яті комп'ютерної системи. Для маніпулювання з цією моделлю та її інтерпретації на основі сим-

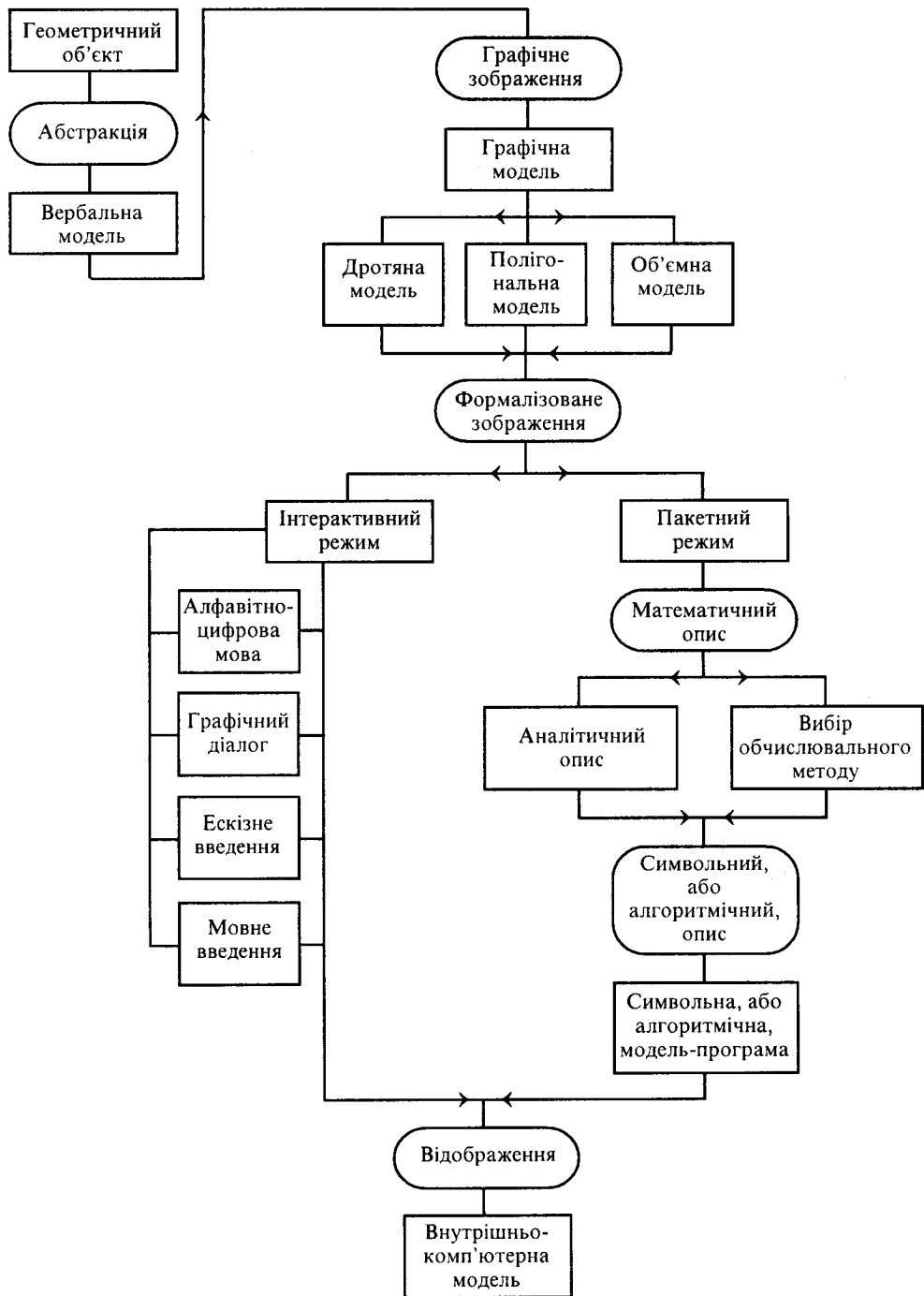


Рис. 26.1

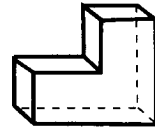
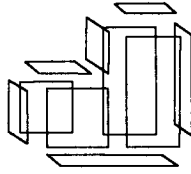
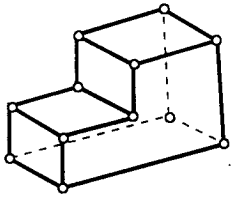


Рис. 26.2

вольного уявлення використовують відповідний інтерфейс. У результаті графічної обробки внутрішньокомп'ютерні уявлення мають перетворитися на зображення. Цей процес (вхід — опис, вихід — зображення) називають *синтезом зображень*. Процес перетворення зображення за допомогою ЕОМ у масив числових значень (вхід — зображення, вихід — опис) називають *аналізом зображень*.

Розглянемо більш докладно деякі аспекти, пов'язані з геометричним моделюванням.

**Дротяне моделювання.** Конструктивними елементами дротяної моделі є ребро (лінія) та вершина (точка). Ця модель проста, але за її допомогою можна уявити тільки обмежений клас об'єктів, у яких апроксимуючими поверхнями є площини. Дротяні моделі використовують для подання двовимірних геометричних об'єктів на площині. Дротяне моделювання використовують в основному для імітації руху інструмента, який виконує операції обробки деталі, зокрема фрезерування по трьох осях. На основі просторової дротяної моделі можна дістати різні графічні вигляди, наприклад проєкції. Крім того, дротяна модель займає менше комп'ютерної пам'яті ніж дві інші моделі. Проте ця форма зображення має ряд недоліків:

1. Нерівнозначність, коли неможливо чітко виявити орієнтацію та видимість граней дротяного зображення. Наприклад, тривимірну дротяну модель куба (рис. 26.3) можна розглядати як плоску модель. Цей ефект, зумовлений природою дротяної моделі, може призвести до непередбачених наслідків. Тут не можна відрізнити видимі грані геометричної форми від невидимих, бо граней взагалі немає, модель прозора. Видалити невидимі лінії можна тільки вручну, застосовуючи команди редагування до кожної окремої лінії. Проте резуль-

тат цієї роботи призводить до руйнування всієї збудованої дротяної моделі, бо лінії, не видимі на одних виглядах, видимі на інших. Видалення будь-якої лінії на одному вигляді спонукає до її видалення на всіх інших виглядах.

2. Неможливість розпізнати криволінійні грані. Бічні поверхні циліндричних форм реально не мають ребер, хоча на зображенні показуються силуети деяких уявних ребер (обрисових твірних), які обмежують такі поверхні. При проєкціюванні на різні площини проєкції обрисовими твірними є різні твірні. Тому ці твірні не розпізнаються як елементи дротяної моделі та не зображуються на відповідному вигляді (рис. 26.4).

3. Неможливість виявлення взаємного впливу компонентів. Дротяна модель не несе інформації про поверхні, що обмежують форму. Тому не можна виявити небажані взаємодії між гранями об'єкта, що істотно обмежує застосування дротяного моделювання до тривимірного аналізу механізмів, імітації функціонування роботів, проєктування планів розміщення заводського устаткування та виконання складних креслень трубопроводів.

4. Неможливість застосування способів виконання тонових зображень. Забезпечення плавних переходів різних кольорів та нанесення світлотіней становлять необхідну техніку тривимірного моделювання. Основним принципом цієї техніки є те, що затіненню підлягають грані, а не ребра. Таким чином, затінення не може бути застосоване до моделей, які не мають поверхонь, тобто до дротяних моделей.

**Полігональне моделювання.** Будуючи полігональну модель, враховують, що об'єкт обмежено поверхнями, які відділяють його від навколишнього середовища. Така оболонка тіла зображується графічно поверхнями. Поверхня об'єкта знову обмежується контурами, але ці контури вже є

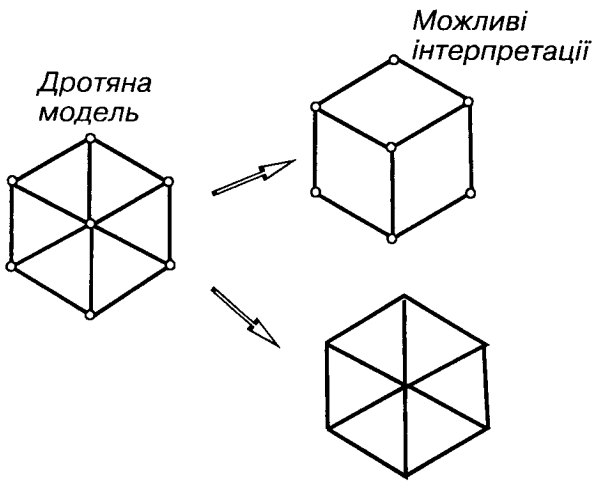


Рис. 26.3



Рис. 26.4

результатом перетину або дотику двох поверхонь. Точки об'єкта (вершини) задають як перетин трьох поверхонь множиною точок, які задовольняють певну геометричну властивість, відповідно до якої визначається контур. Системи полігонального моделювання зображують об'єкт як поверхні, об'єднані в просторі ознакою "обмежують порожній об'єм".

В основу побудови полігональної моделі покладено два математичних положення: будь-яку аналітично описану поверхню можна апроксимувати багатогранником, кожна грань якого є найпростішим плоским багатокутником (рис. 26.5). Крім плоских багатокутників, у моделі допускаються поверхні другого порядку та такі, форми яких можна визначити за допомогою різних методів інтерполяції або апроксимації.

У полігональному моделюванні використовуються такі типи поверхонь:

1. Базові геометричні поверхні. Їх можна дістати за допомогою переміщення у тривимірному просторі відрізка прямої, дуги кола на задану відстань (рис. 26.6). Так можуть бути згенеровані циліндричні, конічні та інші поверхні (рис. 26.7).

2. Поверхні обертання. Ці поверхні генеруються обертанням плоскої фігури навколо осі (рис. 26.8).

3. Поверхні спряжень та перетину. Можливість побудови плавного спряження однієї

поверхні з іншою є основним і найбільш застосовуваним засобом полігонального моделювання.

4. Аналітичні поверхні, які задаються математичним рівнянням у змінних  $x$ ,  $y$  та  $z$ .

5. Скульптурні поверхні (поверхні "вільних форм" або "довільні" поверхні). Ці поверхні неможливо точно описати математичним рівнянням. Образи цих поверхонь в основному відтворюються побудовою сплайнів поздовжніх твірних кривих між точками, які визначено в тривимірному просторі (рис. 26.9).

Полігональне моделювання має переваги над дротяним, а саме:

— розпізнавання та зображення складних криволінійних граней;

— розпізнавання грані та виконання товстих тривимірних зображень;

— розпізнавання особливих місць на поверхнях, наприклад отворів;

— забезпечення якісного зображення та інтерфейса з верстатами з ЧПК при імітації траєкторії руху інструмента в тривимірному просторі з метою циклічної обробки деталей складної форми по кількох осях;

— забезпечення найефективніших засобів для імітації дій роботів.

Недоліками поверхневого моделювання є:

— нерівнозначність при моделюванні реального непустотилого об'єкта;

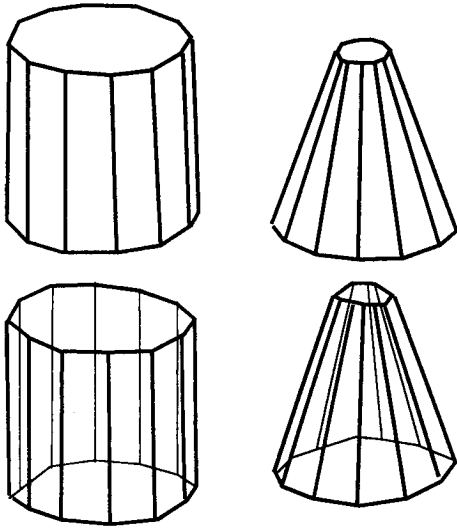


Рис. 26.5

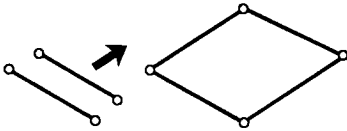


Рис. 26.6

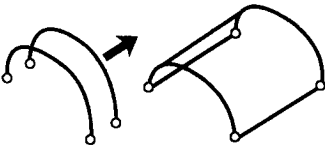
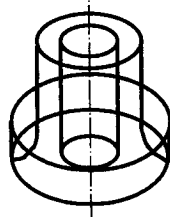


Рис. 26.7



Рис. 26.8



— недостатня точність уявлення деяких полігональних моделей;

— складність процедури вилучення невидимих ліній та відображення внутрішніх ділянок.

**Об'ємне моделювання.** Якщо для реального об'єкта є принципіальним поділ точок на внутрішні та зовнішні відносно об'єкта, то мають на увазі об'ємні моделі. Щоб дістати ці моделі, спочатку визначають орієнтовані поверхні, які обмежують об'єкт. Конструктивними елементами об'ємної моделі є точка, контурний елемент, поверхня. Точкою є перетин трьох контурних елементів, контурним елементом є перетин двох поверхонь, поверхні належать до об'ємів.

Переваги об'ємних моделей такі:

— повне визначення об'ємної форми з можливістю розмежування внутрішньої та зовнішньої частин об'єкта;

— забезпечення автоматичного вилучення невидимих ліній;

— автоматичне нанесення розмірів;

— наявність різноманітної палітри кольорів, керування кольоровою гамою, одержання тонових ефектів маніпуляцією джерелом світла;

— підвищення ефективності імітації динаміки механізмів і процедур генерації траєкторії руху інструмента.

Слід особливо виділити конструктивні об'ємні моделі, в яких геометричні об'єкти зображуються як структури. Відомі такі способи побудови цих структур:

1) об'єм зображується як сукупність ( $U$ ) поверхонь, що його обмежують (рис. 26.10);

2) об'єм визначається комбінацією елементарних об'єктів, кожен з яких утворюється згідно з п. 1 (рис. 26.11);

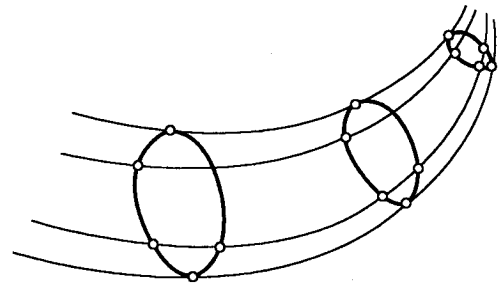


Рис. 26.9

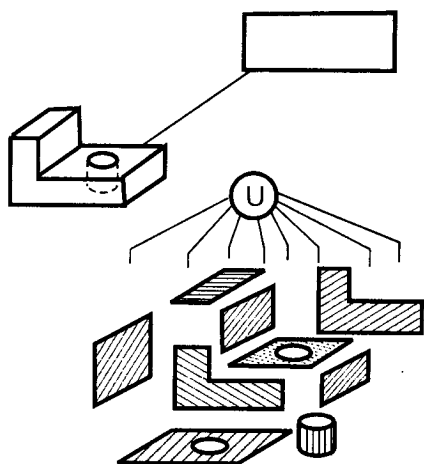


Рис. 26.10

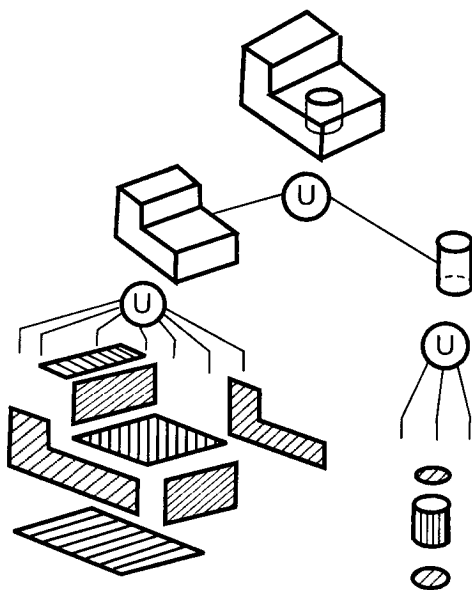


Рис. 26.11

3) складна геометрична структура визначається комбінацією елементарних об'ємів з використанням теоретико-множинних операцій (рис. 26.12).

Після побудови структури об'єкта, що проектується, елементарні об'єми апроксимуються найпростішими багатогранниками та моделями об'єктів (лінійна чи кругова розгортка).

Опис будь-якого складного об'єкта реалізується методами геометричного синтезу. Є два методи геометричного синтезу: контактного поєднання та поєднання з проникненням.

**Метод контактного поєднання.** Цей метод використовують, якщо в об'ємних тілах є плоскі поверхні, по яких тіла можна поєднати. Припускають, що кожний контурний елемент поверхні має атрибут, значення якого зумовлює його просторове положення відносно іншої поверхні. Цей атрибут може бути зовнішнім, внутрішнім чи спільним.

Метод контактного поєднання зводиться до виконання таких дій:

- визначення контуру плоских поверхонь на основі їх математичного опису;
- визначення точок перетину контурів та їх сегментація;

— визначення атрибута кожного контурного елемента;

— побудова результуючого контуру шляхом тестування контурних елементів.

Перевага методу поєднання поверхонь полягає в тому, що витрати на програмування та час обробки незначні. Це можна пояснити тим, що геометричні операції (поєднання, перетин, різниця, доповнення) виконуються тільки над плоскими поверхнями.

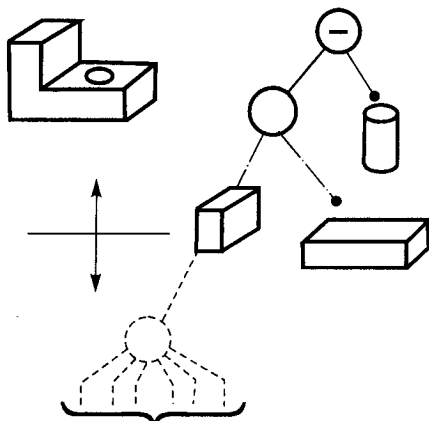


Рис. 26.12

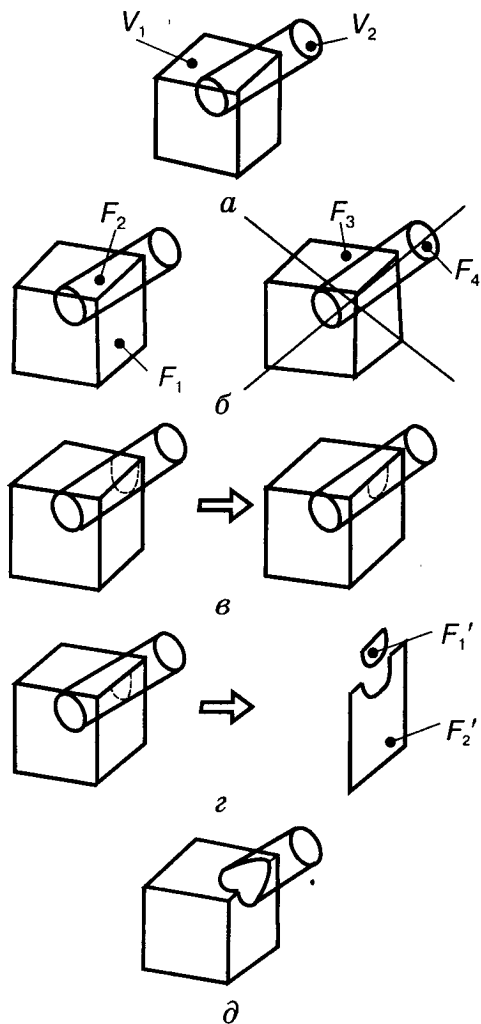


Рис. 26.13

**Метод поєднання з проникненням.** Цей метод передбачає виконання послідовних кроків, суть яких можна пояснити за допомогою рис. 26.13. Потрібно поєднати паралелепіпед  $V_1$  та циліндр  $V_2$ . Послідовність кроків така:

— визначення об'ємів  $V_1$  та  $V_2$  на основі математичного уявлення поверхонь, що обмежують ці об'єми (рис. 26.13, а);

— визначення пар поверхонь, що потенційно перетинаються (рис. 26.13, б). Наприклад, розглянемо пару поверхонь ( $F_1$ ,  $F_2$ , де  $F_1$  — бічна грань паралелепіпеда;  $F_2$  — бічна поверхня циліндра). Скінчення

бічна поверхня циліндра перетинає носій бічної грані паралелепіпеда, тому поверхні  $F_1$  та  $F_2$  потенційно перетинаються. Аналогічно досліджують на перетин пар плоских поверхонь  $F_3$  та  $F_4$ . Носій грані  $F_3$  перетинає циліндр  $F_4$ , тому поверхні  $F_3$  та  $F_4$  потенційно перетинаються. Так само знаходять усі пари поверхонь, що потенційно перетинаються;

— аналітичне визначення кривої перетину щодо будь-якої пари поверхонь, що потенційно перетинаються, та вилучення тих сегментів кривої, які не розміщені всередині цих поверхонь (рис. 26.13, в);

— сегментація поверхні відповідно до здобутої кривої (рис. 26.13, г). Наприклад, грань  $F_1$  розпадається на два сегменти  $F_1'$  та  $F_2''$ ;

— вилучення сегментів поверхонь (рис. 26.13, д).

Програми побудови кривих перетину для деяких класів поверхонь можуть ґрунтуватися на алгоритмах, наведених у параграфі 23.3.

## 26.2. Візуалізація

Усі комп'ютерні креслення зображуються на пристроях візуального відображення (ПВВ). На комплексних кресленнях та аксонометричних проекціях зображувані об'єкти обмежуються непрозорими поверхнями. Щоб створити ілюзію непрозорості поверхні, що показується на екрані дисплея, слід виділити приховані від спостерігача частини об'єкта і не показувати їх на ПВВ або зображувати невидимі елементи штриховими лініями.

Задача контролю видимості чи усунення невидимих ліній є для машинного розв'язання досить складною, вона вимагає багато машинного часу та великої оперативної пам'яті.

Будь-яка лінія може бути на проекції частково чи повністю невидимою, якщо носій лінії (поверхня, грань, суцільне тіло) буде обернений до спостерігача зворотним боком або лінія перекриватиметься більш близькими до глядача частинами об'єкта.

Методи візуального відображення комп'ютерного креслення на екрані ПВВ такі: побудови обвідних; упорядкування; рухомого екрана.



Метод побудови обвідних належить до класу алгоритмів, які оперують в об'єктному просторі з опуклими багатогранниками. Метод упорядкування застосовують до об'єктів з увігнутими гранями. Метод рухомого екрана має широкое застосування, особливо для апаратної реалізації. Алгоритми методу рухомого екрана оперують у картинній площині.

**Метод побудови обвідних.** Існує багато методів побудови штрихованих та напівтонних зображень просторових об'єктів. Ця різноманітність зумовлена, по-перше, тим, що немає єдиної концепції уявлення геометричної інформації в ЕОМ, а по-друге, прагненням підвищити ефективність алгоритмів.

Розробники систем комп'ютерної графіки мають складність з визначенням контуру криволінійного об'єкта.

Відсутність точного визначення контуру часто пояснює погану поведінку існуючих алгоритмів побудови зображення поблизу особливих точок проєктованих об'єктів. Це насамперед стосується роботи з такими об'єктами, в яких не всі точки межі мають околи однакової розмірності. Суттєвим для задач комп'ютерної графіки є визначення об'єкта як області евклідового простору, а не як поверхні, що обмежує цю область.

Метод побудови обвідних дає змогу дістати проєкцію контуру об'єкта у вигляді закінченої сукупності напівалгебраїчних кривих, які відповідають видимій частині ребер, межі видимої множини точок області й невидимої частини ребер.

Нехай об'єкт є опуклим багатогранником чи опуклою поверхнею, яку задано набором дрібних граней. Якщо багатогранник є суцільним тілом, то будь-яка його грань є видимою тільки із зовнішнього боку.

Візьмемо на грані три пронумеровані точки, які утворюють такий трикутник, що при погляді на цю грань із зовнішнього боку трикутник має додатну орієнтацію (напрям обходу його вершин — додатний). Тоді на проєкції ознакою того, що грань видима з цього боку є додатна орієнтація проєкції трикутника. Використовуючи критерій орієнтації, можна заощаджувати машинний час, позбавляючись опрацювання та графічного виведення цілих фрагментів об'єкта.

На зображуваному об'єкті треба знайти всі частини, які можуть перекривати одна одну (криволінійні поверхні, їхні відсіки тощо). Для спрощення всі криві поверхні подано наборами плоских граней. Зістиковані одна з одною грані можуть обмежувати суцільні (навіть порожні всередині) тіла чи бути тонкими фігурними пластинами, які мають різне положення в просторі. Межею грані є плоска ламана лінія, яка в просторі може займати окреме чи загальне положення. Критерій орієнтації дає змогу запам'ятати та візуалізувати на екрані дисплея тільки грані з додатною орієнтацією трикутників, тобто грані є видимими (рис. 26.14).

Відрізок (ребро) може бути перекритий кількома гранями, неопукла грань може однією своєю частиною перекривати відрізок, тоді як друга її частина лежатиме за відрізком.

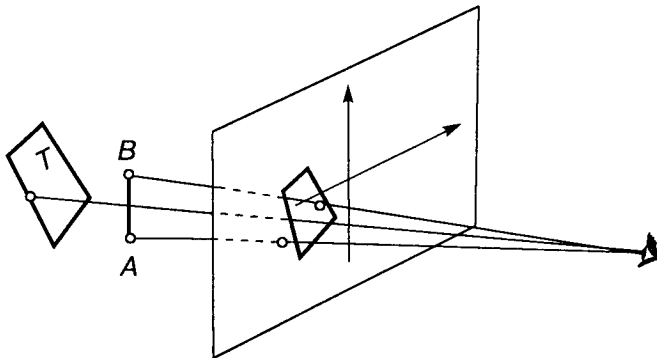


Рис. 26.14

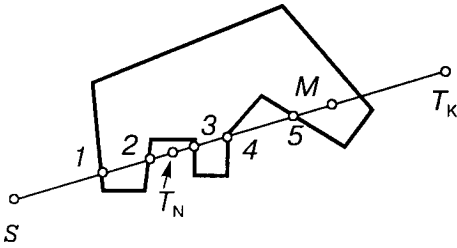


Рис. 26.15

Проаналізувавши взаємне розміщення граней та ребер, можна набрати деяку кількість точок, які відповідають перетину проєкції відрізка з контурами різних граней. Ці точки слід класифікувати, розмістивши у тому відносному порядку, в якому вони лежать уздовж відрізка. Таким чином відрізок буде розбитий цими точками на кілька частин, серед яких можуть бути видимі й невидимі. Для кожної частини потрібно визначити "індекс" її видимості і залежно від цього креслити її чи пропустити (рис. 26.15).

**Метод упорядкування.** Його застосовують до неопуклих об'єктів, тобто до об'єктів з увігнутими гранями, отворами тощо. Це забезпечується декомпозицією всіх граней на трикутники. При декомпозиції вводиться деяка кількість допоміжних ребер, які відповідно позначаються. Таким чином, алгоритм вилучення невидимих ліній оперує з множиною трикутників, тобто з множиною плоских, опуклих граней самого простого типу з усіх

можливих. Трикутники визначаються своїми вершинами. Спрощення об'єкта за допомогою декомпозиції дають змогу мінімізувати час виконання та необхідну пам'ять.

Невидимі поверхні вилучаються у три етапи: 1) попереднє впорядкування; 2) приписування пріоритетів; 3) визначення видимості.

При попередньому упорядкуванні виділяються всі трикутники, площини яких неперпендикулярні до картинної площини. Вони не розглядатимуться на наступному етапі, оскільки не можуть перекривати інші грані. Грань перпендикулярна до картинної площини, якщо проєкції її вершин колінеарні.

На етапі приписування пріоритетів в просторовий об'єкт спочатку розтинається на множину трикутних граней, а потім визначають, який із елементів перекриває інший. Порівнювальними елементами можуть бути точка й грань або дві грані.

Трикутні грані в об'єктивному просторі, як і відповідні їм проєкції в картинній площині, визначаються координатами своїх вершин.

Щоб знайти тестові точки (точки перетину двох трикутників), потрібні для визначення пріоритетів, спочатку знаходять точки перетину ребер, а якщо таких точок немає, то перевіряють, чи не лежить один з трикутників усередині іншого. Внаслідок декомпозиції повторне перекриття немож-

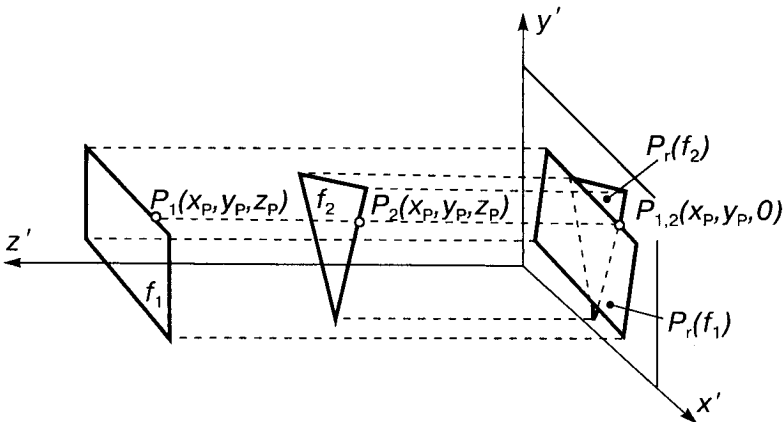


Рис. 26.16

ливе, проте трикутні грані можуть проникати одна в одну.

На першому кроці методу пріоритетів формується множина пар, що впорядковуються. Кожна пара є впорядкованою із зменшенням множини пар трикутників. Пари формуються за допомогою тесту глибини. Цей тест призначений для паралельної проєкції і оперує елементами як в об'ємному просторі, так і в картинній площині. Елементами, що перевіряються, є дві грані або точка і грань.

Розглянемо спочатку дві грані (рис. 26.16). Нехай в об'ємному просторі задано дві грані  $f_1$  і  $f_2$ :  $P_r(f_1)$  і  $P_r(f_2)$  — проєкції граней на картинну площину;  $P_{1,2}$  — деяка точка в картинній площині, точка перетину якого-небудь ребра  $P_r(f_1)$  з ребром  $P_r(f_2)$ . Першим кроком є визначення точки  $P_{1,2}$ . Другим кроком є знаходження точок  $P_1$  і  $P_2$ : точок, які проєкціюються в точку  $Z$ . Їх знаходять за таким методом: координати точки  $P_{1,2}$  визначаються відносно  $Z$ . Здобуті значення  $f_1$  і  $f_2$  порівнюються, і визначається відносний пріоритет граней  $f_1$  і  $f_2$ .

При визначенні видимості у кожному випадку задається множина пар трикутників, які покривають, хоча б частково, трикутник.

Методи рухомого та нерухомого екранів розглядалися в параграфі 22.6.

### 26.3. Розподіл екрана

Метод розподілу екрана є важливим методом комп'ютерної графіки. Один із засобів методу розподілу екрана — наїзд, який застосовується на ранніх стадіях розробок, спрямованих на автоматизацію проєктування інтегральних схем; для збільшення зображення зони пайки до таких розмірів, щоб конструктору було зручно вивчати це зображення.

Засоби наїзду застосовують в усіх галузях автоматизованого креслення та проєктування. Вони дають змогу збільшувати (зменшувати) у будь-яке число разів відповідну зону креслення з метою більш докладного її розгляду чи редагування. Щоб проаналізувати інші елементи креслення, зона наїзду може бути панорамованою в заданому напрямі.

На зображення, яке підлягає наїзду, фактично не накладається ніяких обмежень. Якщо на екрані виведено зображення загального плану електростанції, то можна так збільшити зображення, що можна виміряти відстань між двома міліметровими болтами. Отже, наїзд є досить потужним засобом аналізу великих складних креслень. Для роботи із складальними кресленнями при використанні традиційних методів треба мати багато невеликих креслень. Маючи спосіб наїзду, можна обмежитися тільки одним складальним кресленням будь-якого розміру та довільної складності.

Екран дисплея, як правило, менший, ніж виріб, який проєкціюється, та його креслення. Недоліків, зумовлених обмеженим розміром екрана, вдається позбавитися.

Для маніпуляції з фрагментами зображення в системах застосовують такі основні функції: збільшити (зменшити); перемістити; повернути.

Важливим методом опису виробу за допомогою технічного креслення є його зображення у відповідних виглядах і розрізах. Вибір необхідних виглядів та напрямів перетинів, а також поділу на листи часто веде до трудомістких операцій під час традиційної роботи біля креслярської дошки. Щоб не переносити цю проблему на дисплей, є ще один спосіб методу розподілу екрана.

В'юпорт VIEWPORT (носії вигляду) або WINDOW (вікно) поділяє поле екрана і відповідно креслярський аркуш на різні частково незалежні зони. Ці зони, як правило, мають прямокутну форму. Розмежування може бути заздалегідь жорстко задано чи зумовлено обмеженнями, наприклад, заборонаю перетину.

На початку роботи, як правило, автоматично визначають стандартний в'юпорт, який охоплює все поле екрана. Після цього можна працювати тільки в цій зоні. Особливо корисним є спосіб, коли кілька в'юпортів пов'язані між собою.

Зображуючи деталь у тривимірній системі, яка спостерігається через різні вікна, можна дістати будь-які її вигляди, що відповідають стандарту, а також зображення різноманітних перерізів (рис. 26.17).

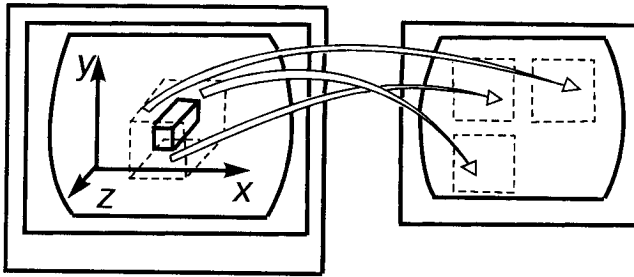


Рис. 26.17

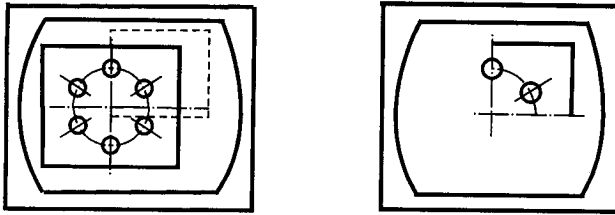


Рис. 26.18

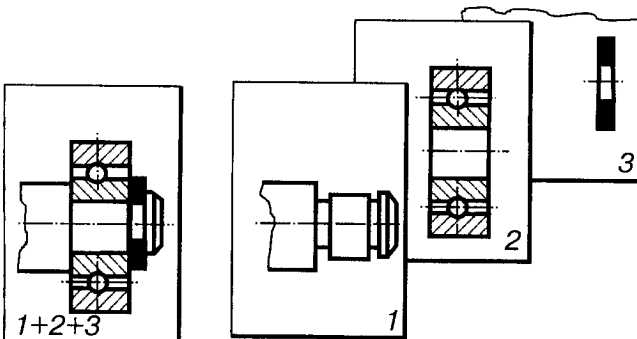
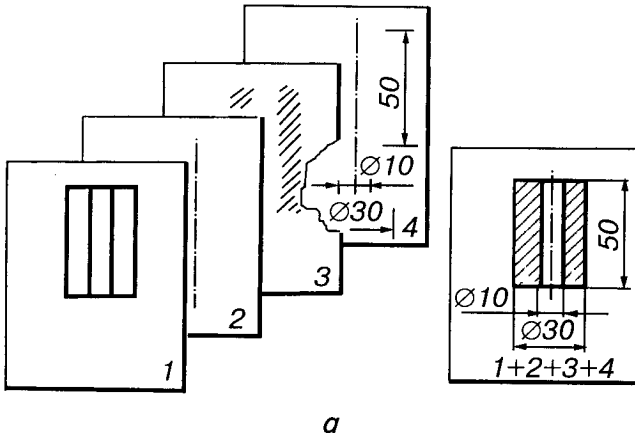


Рис. 26.19

Зміна масштабу дає змогу використовувати цей спосіб, наприклад, для зображення деталей.

Якщо виділяються кілька в'юпортів у тривимірній системі, то треба забезпечити обов'язкову появу графічного елемента, зображеного в одному в'юпорті (і в інших), але з урахуванням змінених розмірів чи кутів спостереження.

В'юпорти мають видимі чи невидимі на екрані та папері лінії. Це означає, що всі графічні елементи вигляду, що лежать поза цими межами, не зображуються. Графічні елементи вигляду, що перетинають граничні лінії в'юпорта, мають бути обрізані (рис. 26.18).

Поряд з вирізом у площині існує такий виріз у просторі, коли ігноруються графічні елементи й вигляд у глибині.

Якщо треба подати вигляд у перерізі, то всі графічні елементи, розміщені перед площиною перерізу, мають ігноруватися в зображенні.

Поширеним засобом методу розподілу екрана є техніка шарів. Креслення уявно поділяється на кілька площин (шарів). За кожною з цих площин можуть бути закріплені окремі графічні елементи. Повне уявлення про цей спосіб дає аналогія з накла-

данням один на один шарів прозорих плівок, де кожна плівка відповідає одному шару (рис. 26.19, а, б).

Кожна площина може бути подана або змінена окремо. Другим застосуванням техніки шарів є різнокольорові зображення елементів чи креслення перамаи з різною товщиною лінії.

Техніка шарів також може успішно застосовуватися при ідентифікації візором. Якщо два графічних елементи розміщені дуже близько один до одного, але лежать у різних площинах, то площина може бути використана як розпізнавальна прикмета.

Техніку шарів використовують зокрема під час роботи з тривимірними системами. У процесі складання креслень звичайно доводиться нехтувати стандартизованим зображенням виробу із зазначенням видимих (суцільних) і невидимих (штрихових) ліній. Якщо користуватися технікою шарів, то існуючий лабіринт ліній можна хоча б частково подати в наочній формі, оскільки взаємопов'язані групи елементів лежать в окремих шарах. Ці групи за бажанням користувача можуть бути показані чи погашені, зображені лініями різних кольорів чи ступенів яскравості.

### *Запитання та завдання*

1. Що розуміють під геометричним моделюванням у комп'ютерній графіці?
2. Які об'єкти називають геометричними?
3. Назвати об'єкти, що описуються рівняннями. Навести приклади таких об'єктів щодо машинобудівних деталей.
4. Які геометричні об'єкти описують наближеними методами?
5. Як у комп'ютерній графіці розв'язується проблема задання геометричних об'єктів, що описуються наближеними методами?
6. Які типи моделей використовують у комп'ютерній графіці для опису геометричних об'єктів?
7. Які основні недоліки дротяної (каркасної) моделі геометричного об'єкта?
8. На основі яких геометричних моделей реалізується алгоритм автоматичного вилучення ліній невидимого контуру, побудови розрізів?
9. Які основні методи візуального відображення?
10. Яким вимогам має відповідати об'єкт для методу побудови обвідних?
11. До яких об'єктів можна застосовувати метод упорядкування?
12. Якими засобами оперує метод розподілу екрана?
13. У чому суть способу техніки шарів?
14. Коли застосовують спосіб наїзду?



## Глава 27 ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

### 27.1. Програміська модель інтерактивної графіки

Процес удосконалення програмного забезпечення комп'ютерної графіки був досить довгим і повільним. Пройдено шлях від апаратно-залежних пакетів програм низького рівня, які поставляються виготовниками разом з конкретними дисплеями, до апаратно-незалежних пакетів високого рівня. Основна мета апаратно-незалежного пакета полягає в тому, щоб забезпечити його мобільність при переході від однієї ЕОМ до іншої. У процесі розв'язання цієї задачі група американської асоціації з використання обчислювальних машин (GGRAPH) запропонувала проект графічної системи CORE SYSTEM, а спеціалісти Німеччини розробили графічну базову систему Graphical Kernel System (GKS), прийняту Міжнародною організацією по стандартизації (ISO) як міжнародний графічний стандарт Draft International Standard — ISO/DIS. Ця система звільняє програміста від урахування особливостей графічних пристроїв при розробці програмного забезпечення, при цьому користувачеві доступні різноманітні графічні пристрої.

Відповідно до викладеного підходу при розробці програмних засобів комп'ютерної графіки виділяються такі задачі: моделювання, які призначені для створення, перетворення та зберігання моделей геометричних об'єктів (моделюючі системи); відображення цих моделей на графічних пристроях та організації графічного інтерфейса користувача та ЕОМ (базова графічна система). Склад програмного забезпечення відбивається у програміській моделі інтерактивної комп'ютерної графіки (рис. 27.1). До нього входять три компоненти: моделююча система, базова графічна система та прикладна структура даних (база даних). Моделююча система здобуває інформацію та засилає її у бази даних, а також над-

силає графічні команди до графічної системи.

База даних містить опис реальних та абстрактних об'єктів, зображення яких мають з'явитися на екрані дисплея. До опису об'єктів звичайно додають геометричні дані про координати, які визначають форму компонентів об'єкта (параметри), атрибути об'єкта (тип, товщину, колір лінії чи фактуру поверхні, тип шрифту, розмір символів, напрям рядка символів, центрування рядка символів), а також дані про зв'язність та положення (про поєднання компонентів між собою). Є також негеометрична, чи текстова, інформація про "властивості", яка корисна для програм постобробки та для інтерактивного користувача. Прикладами таких даних для застосування в галузі комп'ютерного проектування є відомості про ціну та постачальника, теплові, механічні чи електричні властивості та допуски.

Моделюючі системи створюються на основі програмних засобів, які реалізують основні графічні функції — типові способи комп'ютерної графіки, що необхідні для систем будь-якої проблемної орієнтації. До основних графічних функцій належать: позиційні та метричні задачі, афінні перетворення (зсув, перенесення, поворот, симетрія, масштабування), теоретико-множинні операції (перетин, об'єднання, доповнення, різниця) тощо. Ці функції реалізуються на основі внутрішніх канонічних моделей об'єктів, які описують графічні елементи, що дає змогу використовувати найбільш ефективні алгоритми.

Основні графічні функції мають бути реалізовані як для дво-, так і для тривимірних моделей.

Тривимірні моделі можуть бути аналітичними, кусково-аналітичними, алгебрологічними, рецепторними та ін.

Відповідно до класу задач, які розв'язуються, моделююча система, крім основних

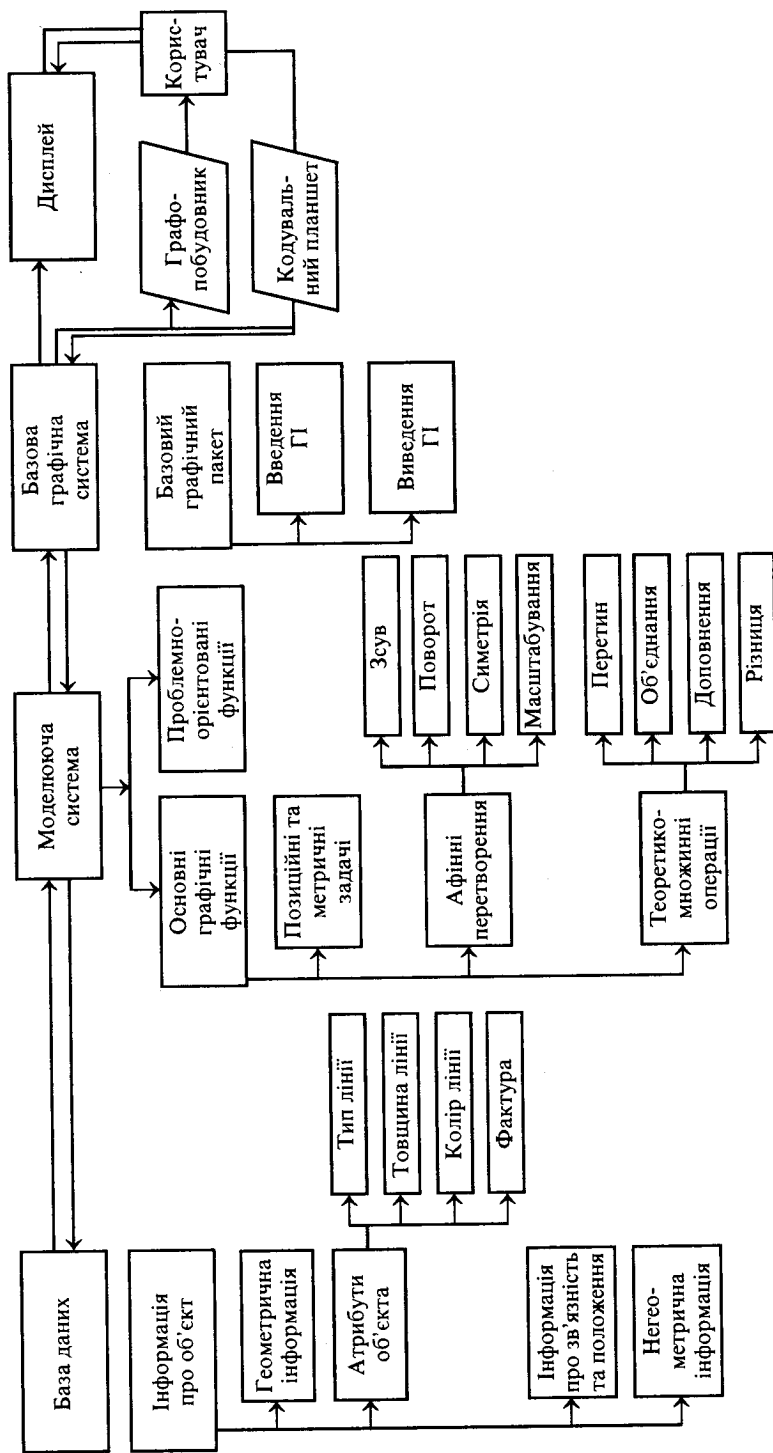


Рис. 27.1

графічних функцій, може доповнюватися графічними функціями проблемної орієнтації.

Моделююча система описує дво- чи тривимірну геометрію об'єкта, який виводиться на видову поверхню, для графічної системи, ядром якої є базовий графічний пакет (БГП). БГП містить набір підпрограм, які забезпечують інтерфейс з мовою високого рівня та дає змогу працювати з пристроєм у термінах елементарних графічних операцій різного рівня складності (зобразити відрізок зеленим кольором, зобразити коло тощо). Цей набір підпрограм звичайно покриває майже всі можливості апаратури. Склад та функції підпрограм БГП залежать від конструкції обладнання, можливостей його блока керування. Вважають, що БГП для графопобудовника містить підпрограми креслення відрізків прямих, кола та його дуг суцільними та штрихпунктирними лініями, а також виведення текстових та цифрових написів. БГП для графічного дисплея забезпечує великі можливості, наприклад, масштабування та переміщення зображення, розподіл графічної інформації на сегменти та незалежне керування частинами зображення, виділення, витирання елементів тощо.

Результати роботи підпрограм безпосередньо відображаються на обладнанні графічного виведення. БГП працює з обладнанням введення — виведення графічної інформації (ГІ) через програму-драйвер операційної системи. Програма-драйвер реалізує взаємодію із системою та виконання елементарних операцій на пристрої (переміщення записувального інструмента графопобудовника, електронного променя графічного дисплея, підсвічування точки та ін.).

Образно кажучи, графічну систему можна порівняти з "уявлюваною фотокамерою". Моделююча система дає уявлюваній фотокамері опис сцени, яка складається з одного (чи більше) об'єкта деякого штучного світу (дво- чи тривимірного). Потім ця камера створює вигляд об'єкта в цьому світі. Як і у разі використання фотоапарата "Поляріод", зроблений знімок відразу "прояв-

ляється" і майже миттєво може бути показаний на видовій поверхні. Уявлювана камера діє як реальна: вона може побудувати знімок сцени тільки з візуальних елементів найнижчого рівня та нічого не знає щодо їх організації чи структури. Тому моделююча система описує об'єкти для графічної системи як графічні примітиви нижнього рівня.

Таким чином, графічна система забезпечує введення та виведення графічної інформації. Вона має бути інваріантною щодо об'єкта й проблемно-незалежною.

Якщо використовується графічний стандарт GKS, то забезпечується крім цього незалежність і від технічних засобів комп'ютерної графіки, що досягається завдяки введенню поняття графічної робочої станції, яка є абстракцією фізичного пристрою. Логічні пристрої введення призначені для введення: координат (LOCATOR), дійсних чисел (VALUATOR), послідовності координат (STROKE), рядка символів (STRING), однієї з альтернатив (CHOICE), елемента зображення (RICK).

Пристрій виведення забезпечує виведення:

- ламаної (POLYLINE);
- послідовності маркерів спеціальних символів з центрами у визначених точках (POLYMARKER);
- рядка тексту (TEXT);
- заповненої площі (FILL AREA);
- масиву клітин (CELL ARRAY);
- узагальненого графічного примітива (GENERALIZED DRAWING PRIMITIVE).

Атрибути примітивів визначаються з точністю до реалізації робочої станції, яка інтерпретує їх відповідно до можливостей апаратури. Слід зазначити, що система GKS — двовимірна графічна. Проте в рамках ISO виконуються роботи, пов'язані з розробкою стандарту для тривимірної графіки.

Крім того, у рамках ISO проектується стандартизація геометричного інтерфейса між системами автоматизованого проектування та виробництва, який стандартизує формат файлу даних для обміну проектно-конструкторською інформацією.



## 27.2. Процедурно-орієнтовані мови. Текстові і графічні редактори

Процедурно-орієнтовані мови реалізації комп'ютерної графіки мають відповідати таким вимогам:

1. Мова повинна давати користувачеві засоби для опису та генерації зображень і маніпулювання ними. Для опису та генерації зображень потрібно мати команди, за допомогою яких можна специфікувати графічні примітиви або сукупність примітивів і задавати атрибути, які визначають візуальні якості цих примітивів на екрані дисплея. До маніпуляції належать геометричні перетворення та операції кадрування, а також перекомпонування піделементів рисунка, їх злиття та виведення.

2. Графічна мова повинна мати засоби для аналізу зображень. Для цього слід мати команди, які дають змогу виявляти та досліджувати різні способи зображення. Аналізуються також взаємозв'язки між піделементами зображень.

3. Мова має бути гнучкою. Важливою є наявність засобів для роботи з процедурами.

Нині таких універсальних графічних мов ще не розроблено. Формування зображень (зокрема інтерактивне) та їхній аналіз було виділено в дві окремі частини; шляхи зображення цих частин поки що тільки дискутуються.

Розглянемо модель графічних мов високого рівня (рис. 27.2).

За останнє десятиріччя з'явилося багато графічних мов або графічних розширень існуючих мов.

Розширення мови означає додаток до існуючої "базової" мови нових синтаксичних конструкцій. Деякі з існуючих мов програмування зручні для розширення, тому їх називають "розширюваними". Взагалі розширення мови вимагає модифікації та переписування заново існуючого компілятора, що є довгою трудомісткою роботою. Крім цього, виникає питання про транспортабельність одержаного таким чином діалекту мови.

Найбільш поширеним методом, який дає змогу відмовитися від модифікації компілятора базової мови, є створення передтранслятора. При цьому початкова програма

ма складається за інструкціями двох видів: інструкцій базової та розширеної мов. Передтранслятор транслює останні інструкції базової мови.

Останнім часом з'явилося багато мов для опису зображень, в яких вони подаються як композиції найпростіших елементів (рис. 27.3). При цьому різновидів найпростіших елементів небагато.

Однією з мов такого типу є мова AutoLISP.

Основним графічним примітивом цієї мови є лінія. Лінія ідентифікується вибором двох точок, які їй належать (початком і кінцем).

Наведемо приклади задання відрізків:

double from x; подвійне x;

double from y; подвійне y;

double from z; подвійне z;

double to x; подвійне x;

double to y; подвійне y;

double to z; подвійне z.

Звичайно таке подання застосовується в примітивних програмах.

Як відомо, дві точки визначають пряму. Місце розміщення точки в пристрої визначається координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Структура даних для задання лінії при цьому може бути структурою типу запису, в якому відрізок визначається двома кінцевими точками. Наприклад:

double fx; подвійне x; (\*from — початок)

double fy; подвійне y;

double fz; подвійне z;

double tx; подвійне x;

double ty; подвійне y;

double tz; подвійне z; (\*to — кінець)

Масив може містити багато відрізків.

Line Lines [200];

Line × next line = Lines.

Якщо моделюється множина ліній, що складаються із сотень та тисяч відрізків, то існують методи, які дають змогу скорочувати не тільки обсяг пам'яті, а й час пошуку.

Типовими мовами високого рівня є Фортран, Паскаль, Сі++, Лісп, Бейсік.

Вхідною інформацією для операторів, що генерують графічні об'єкти, є числові дані. Їхнім виходом є креслення на графопобудовнику чи зображення на екрані дисплея. Вони нічим принципіально не відрізняються від інших процедур виведення з обчислювальної машини.

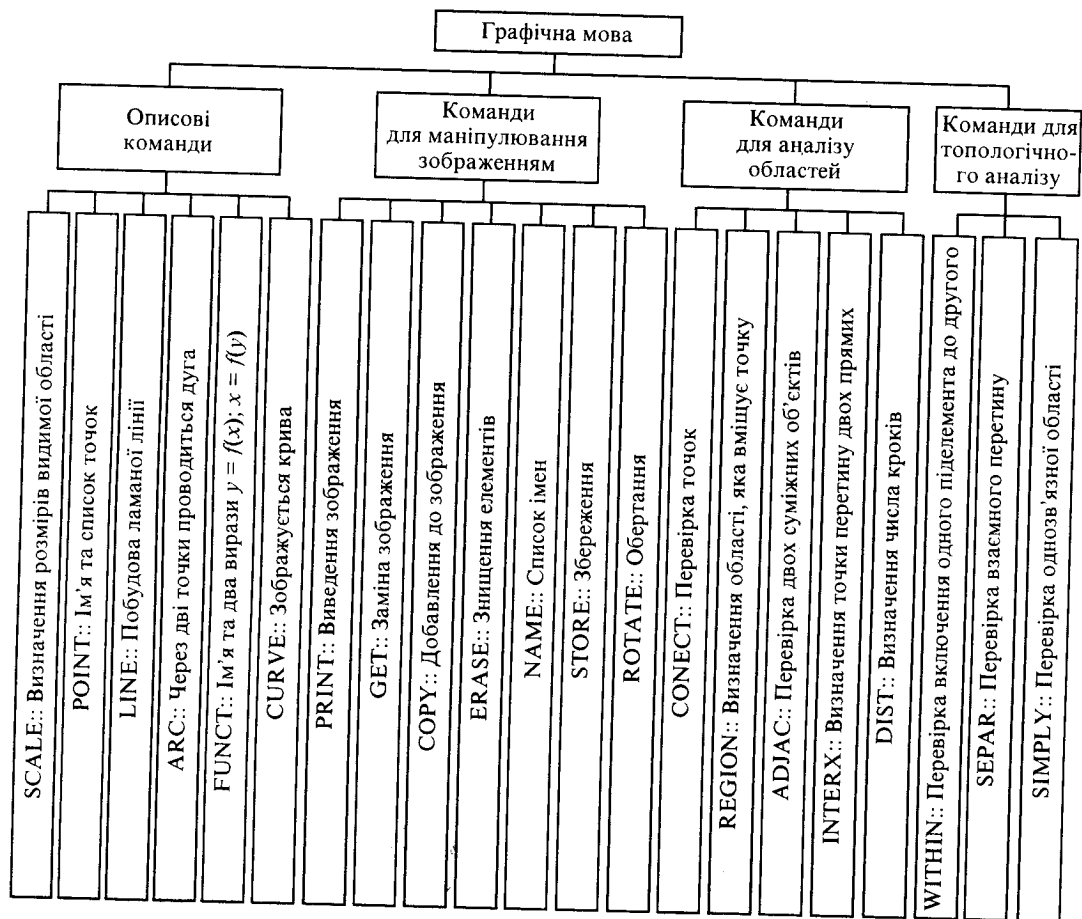


Рис. 27.2

Для задач, пов'язаних з генерацією зображень, система графічного програмування може бути реалізована у формі пакету підпрограм. За останні роки було створено велику кількість таких пакетів, орієнтованих на генерацію зображень (зокрема в інтерактивному режимі).

Технічне забезпечення було б недоцільним без програмного забезпечення його.

Програмне забезпечення графіки — це набір програм, підготовлених, щоб зробити їх зручними для користувача, який працює із системою комп'ютерної графіки. Цей набір програм включає програми для формування зображень на екрані ЕПТ, для маніпулювання зображеннями та для виконання різного роду взаємодій між користувачем та системою. Крім програм графі-

ки, в нього можуть входити додаткові програми, які реалізують які-небудь спеціальні функції. До них належать, зокрема, програми аналізу конструкцій.

Програмний засіб для конкретної системи комп'ютерної графіки значною мірою залежить від типу апаратних засобів, що використовуються в цій системі. Він має бути написаний спеціально для тих типів ЕПТ і обладнань введення, які застосовуються в даній системі. Внутрішня структура програм для ЕПТ зі штриховим записом звичайно відрізняється від структури програми для ЕПТ з растровим скануванням. Відмінність між трубою запам'ятовування та трубою з регенерацією також має впливати на програму графіки. Хоча ці відмінності в програмах можуть бути не-

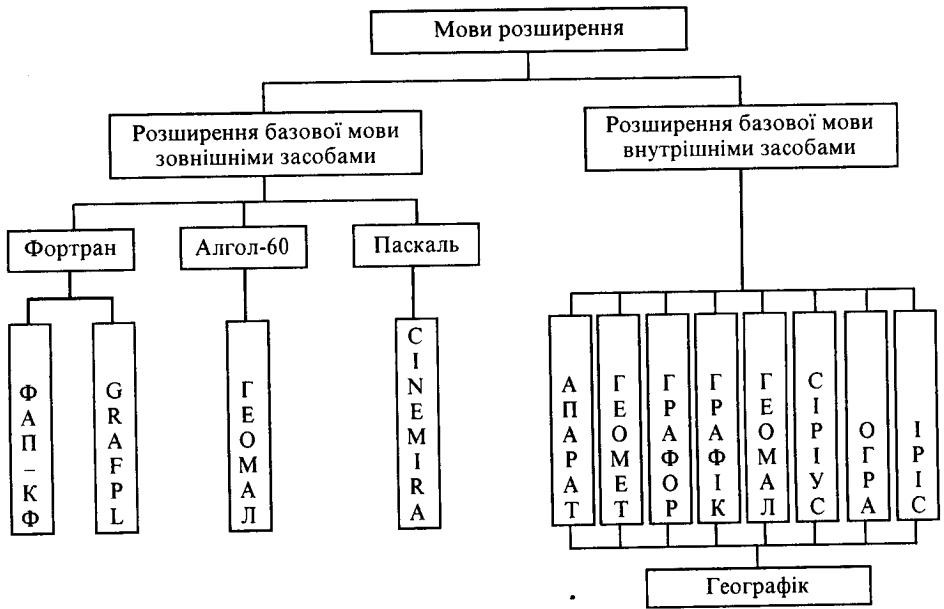


Рис. 27.3

помітними для користувача, вони важливі при проектуванні системи інтерактивної комп'ютерної графіки.

Проектуючи програмні засоби графіки, слід керуватися шістьма основними правилами:

1. Простота. Програмні засоби комп'ютерної графіки мають бути прості у використанні.

2. Несуперечність. З точки зору користувача програми пакету повинні функціонувати узгоджено та бути передбачуваними.

3. Повнота. У наборі графічних функцій не повинно бути істотних упущень.

4. Стійкість. Система графіки має бути стійкою до незначних помилок оператора.

5. Продуктивність. Програмні засоби повинні забезпечувати максимально можливу продуктивність у межах, накладених апаратними засобами. Програми графіки мають бути ефективними, а час реакції — малим у розумних межах.

6. Економічність. Програми графіки не повинні бути занадто великими та дорогими, бо це може зашкодити їх використанню.

Звичайно програмне забезпечення поділяють на два великих класи: системне про-

грамне забезпечення та прикладне програмне забезпечення (рис. 27.4).

На рис. 27.4 зображено ієрархічну структуру програмного забезпечення.

*Системне програмне забезпечення* — це операційна система.

Операційна система (ОС) є найважливішою складовою програмного забезпечення комп'ютерної графіки. Вона призначена для керування та організації комп'ютерних операцій.

У більшості випадків операційна система поділяється на дві частини: основна програма, яку називають *ядром*, та набір периферійних програм, які називають *утилітами*.

Функції ядра ОС такі:

— організація простору пам'яті на апаратних пристроях в структурні одиниці для зберігання та відновлення інформації. Ці структурні одиниці називають *файлами*;

— виконання вказівок та пошук існуючих файлів та утиліт;

— керування одночасним виконанням різних програм та забезпечення зв'язку між такими програмами;

— керування інтерфейсними операціями між програмами та зовнішньою апаратною периферією.

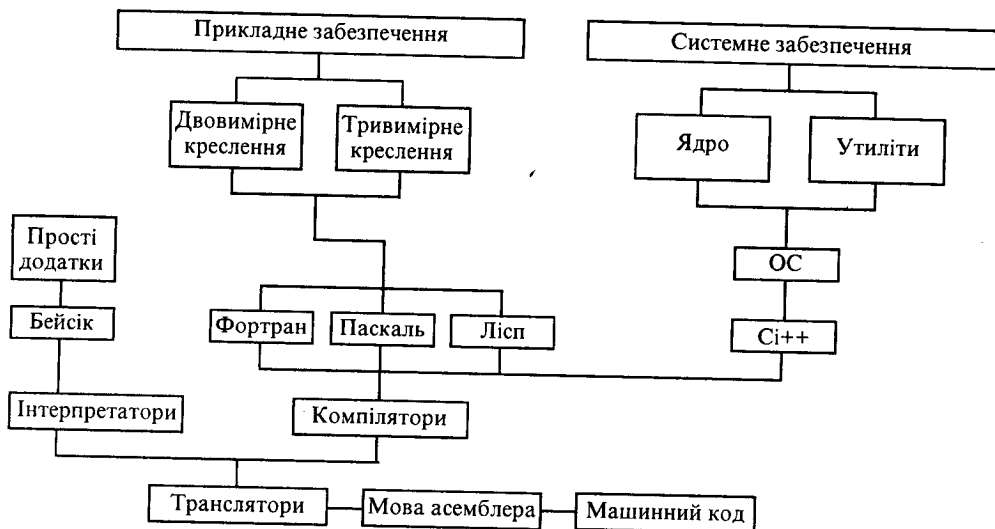


Рис. 27.4

Найвідоміші операційні системи CP/M та MS/DOS фірми Microsoft. Часто використовується операційна система UNIX.

*Прикладне програмне забезпечення* — це пакет прикладних програм, які реалізовані на мові високого рівня.

У найбільш застосовуваних мовах програмування, таких як Сі++, Паскаль, Бейсік, є набір функцій елементарної (базової) графіки. У цей набір входять функції креслення простих геометричних фігур, ліній, прямокутників, багатокутників, кола, еліпсів, дуг тощо.

Крім того, набір доповнюється функціями зафарбовування, виведення рядків тексту, засобами креслення графіків та діаграм. Засоби елементарної (базової) графіки розраховані на ділову графіку, тобто на побудову на екрані різних графіків та діаграм, а також на показ простих рисунків, які підготовлені в графічних редакторах. Проте є цілий клас задач, в яких графіка не тільки використовується для показу на екрані результатів розрахунку або закінчених форм, а й є інтерфейсом комп'ютера з користувачем. На сучасному рівні комп'ютеризації властивість інтерактивності притаманна практично всім програмам персональних комп'ютерів (ПК) у текстовому режимі. Інтерактивність у графіці дає більш високий якісний рівень взаємодії з користувачем.

Обсяг інформації на одному екрані в графічному режимі може бути значно більшим, ніж на тому самому екрані в текстовому режимі.

Графічний інтерфейс складається з набору бібліотек функцій базової та інтерактивної графіки і графічного редактора. Бібліотеки, розроблені для мов програмування: Сі++, ТурбоПаскаль, Кліпер.

Графічний редактор та бібліотеки взаємопов'язані концептуально, тобто графічний редактор побудований з використанням бібліотек графічного інтерфейсу, а бібліотеки мають функції для роботи з графічними об'єктами, підготовленими за допомогою графічного редактора — слайдами, томами, фреймами.

Графічний інтерфейс оперує трьома типами графічних об'єктів:

— *слайд* — растрова копія екрана. Зберігається у файлі в упакованому форматі. Створюється в графічному редакторі або імпортується з інших систем за допомогою резидентного копіювальника екрана. Слайд звичайно використовується як фоновий малюнок;

— *том* — бібліотечний набір малюнків невеликого формату. Доступ до малюнків здійснюється за номером або іменем. Малюнки зберігаються в томі в упакованому форматі. Тома вигідні для зберігання примітивів (icons), елементів "меню", умовних

позначень, фрагментів зображень, які часто використовуються;

— *фрейм* — графічна база даних складається з упорядкованого набору записів і заголовка. Запис містить інформацію про координати, тип, колір та інші атрибути одного з графічних елементів. Графічний елемент — це лінія, прямокутник, коло, багатокутник зафарбовування, сплайн, текстовий рядок, малюнок з тома. У заголовку міститься інформація про слайд і том, які використовуються з цим фреймом. Запис може бути доповнений кодом, визначеним користувачем, тоді кожному елементу зображення відповідає код, що можна використовувати, наприклад, для зв'язку з базою даних та організації доступу до елементів зображення.

Пропонованого набору функцій графічного інтерфейсу достатньо для написання свого графічного редактора з потрібними властивостями.

Функції бібліотеки поділяються на дві групи:

- базової графіки;
- інтерактивної графіки.

Набір функцій базової графіки складається з стандартних наборів функцій креслення простих графічних елементів, функцій виведення роботи з вікнами, переведення сторінок, показу слайдів, виведення на принтер.

Набір функцій інтерактивної графіки дає змогу працювати з фреймами, слайдами і томами, а також з курсором за допомогою маніпулятора “миша” або клавіатури.

Функція роботи з фреймами включає:

- читання одного або кількох фреймів з пам'яті;
- актуалізацію одного з фреймів;
- показ усіх елементів фрейму на екрані;
- показ вибраного елемента фрейму на екрані;
- установлення першого або останнього елемента фрейму;
- послідовний перегляд елементів фрейму;
- зміна атрибутів елемента фрейму (координат, кольору);
- вибір елементів фрейму через зазначення його на екрані;

— приєднання додаткового коду до елемента фрейму;

- вибір елемента фрейму за кодом;
- запис фрейму, який змінився у файл;
- видалення фрейму з пам'яті.

Функції роботи з томами полягають у:

- завантаженні змісту тома в пам'ять;
- завантаженні малюнка з тома за іменем або порядковим номером;
- показі малюнка на екрані у різних режимах.

Редактор підтримує векторний і растровий способи створення зображення. Наявність шрифтів з алфавітом робить редактор зручним для вітчизняного користувача.

Графічний редактор дає змогу:

— зображувати лінії, причому лінії можуть бути досить складними (наприклад, хвилястими), а прості лінії можуть мати різну товщину;

— подавати зображення точками різного розміру. Це растрове зображення призначене для коригування та створення слайдів. При цьому доступні режими зображення за допомогою точки, парних або непарних точок, а також зображення точкою із заданим шаблоном зафарбовування;

— заливати, перефарбовувати, обмінювати два кольори;

— зображати прямокутники, кола, замкнені багатокутники;

— подавати зображення сплайнів, дуг (гіпербол, парабол, еліпсів), ламаних ліній;

— вводити текстову інформацію різними шрифтами, вертикально або горизонтально з масштабуванням і тіннями;

— подавати зображення в режимі збільшення;

— копіювати частини растрового екрана;

— повертати вибраний елемент або зону растрового екрана.

### 27.3. Пакети прикладних програм

Пакет програм комп'ютерної графіки є засобом забезпечення взаємодії користувача з графічним терміналом. Він керує графічним взаємозв'язком користувача та системи, а також відіграє роль інтерфейсу між

користувачем та прикладним програмним забезпеченням.

Розглянемо найбільш відомі пакети програм комп'ютерної графіки.

Широко застосовується система AutoCAD, розроблена в 1982 р. Вона використовується в різних галузях (зокрема, в машинобудуванні, архітектурі, електроніці), де потрібні побудова та підготовка креслень, планів, схем, ілюстрацій. Система AutoCAD працює на різних типах персональних комп'ютерів, підтримує велику кількість різних графічних периферійних обладнань. Ця система настільки популярна, що створені різні об'єднання користувачів нею. Причина популярності — відкритість системи, можливість розроблення на основі системи AutoCAD своїх власних прикладних пакетів програм, в яких використовується інженерна графіка.

Застосування інтерактивних систем, в яких усі проектні та технологічні етапи робіт об'єднані загальною концепцією та технологією роботи, єдиним інтерфейсом та загальною структурою даних, — це все реалізовано в інтегрованій системі автоматизованого проектування CADdy, розробленій фірмою Ziegler-Instruments GmbH. Система CADdy випереджає інші професійні системи.

Інтеграція в пакеті CADdy досягається наявністю інтерфейсу для роботи з різними базами даних (OPUS, Oracle, dbase, Fox Base), розрахунковими та експертними системами, можливістю підключення до систем різних прикладних модулів, розроблених мовами Сі, Фортран, Паскаль, макроасемблер.

Система CADdy забезпечує автоматизацію проектування в машинобудуванні, електротехніці, архітектурі та геодезії.

Система CADdy — “Електротехніка” включає базовий модуль CADdy, який є ядром системи і містить драйвери для принтерів та плотерів, графічних відеоадаптерів, шрифти та загальні графічні функції, що використовуються в усіх модулях CADdy, модуль CADdy — “Електроніка-1” для проектування принципальних та монтажних схем виробів електротехнічної промисловості. Модуль CADdy автоматично завантажує та підтримує специфічне для конкретного проекту графічне середовище,

викреслює в потрібних місцях елементи, коректно підписує та зв'язує їх відповідно до схеми та правил з'єднання.

Система CADdy — “Електротехніка-1” автоматично генерує креслення монтажної схеми, вводячи в неї за бажанням користувача резервні клеми у заздалегідь заданих вільних місцях креслення.

Модуль CADdy — “Електротехніка-1” забезпечує одержання належної для проекту технічної документації: автоматично генерує по сторінках специфікації елементів, контактів та клем. Ці специфікації є дуже важливим джерелом інформації для проєктувальників.

Система забезпечує виведення креслень і технічної документації на плотери й лазерні принтери у різних формах.

Система CADdy — “Архітектура” містить такі модулі: для розробки поперкових планів будинків; для створення тривимірної моделі будинку, що проектується; проектування та розрахунку даху; розрахунку кошторисної вартості будівництва.

Система CADdy — “Геодезія” призначена для обробки даних у таких галузях, як геодезія, топографія, проектування шляхів, землеустрій. Вона містить такі модулі: для перетворення даних польових вимірювань; інформації, здобутої за допомогою електронних приладів; для будівництва топографічних карт та планів місцевості; для створення тривимірної цифрової моделі місцевості; для проектування шляхів, розбивки осей та розрахунку об'ємів виїмки ґрунту.

Пакет “Компас — 4,0”, розроблений у Санкт-Петербурзі, дає змогу:

— виготовляти креслення, оформлені відповідно до ЄСКД;

— мати широкий вибір бібліотек параметричних елементів як для загального машинобудування, так і для проектування електричних, гідравлічних та пневматичних схем;

— забезпечувати сумісність із системами AutoCAD;

— виводити креслення великих форматів на невеликі графопобудовники з наступним склеюванням;

— проектувати оснастку та розробку операційних ескізів;

— розробляти керуючі програми та їхній графічний контроль з імітацією обробки для широкого набору обладнання з ЧПК безпосередньо за кресленнями, розробленими за допомогою системи “Компас”.

Пакет “ГЕОМОД” (Москва) — об’єктно-орієнтовна бібліотека тривимірної графіки та геометричного моделювання мови ТурбоПаскаль. Вона містить засоби для подання, обробки й відображення складної геометричної інформації про тривимірні об’єкти.

Пакет “ГЕОМОД” дає змогу:

— виконувати наукові та технічні розрахунки на основі геометричних моделей тривимірних об’єктів;

— візуалізувати на екрані тривимірні об’єкти.

Пакет “ГЕОМОД” розрахований насамперед на розв’язання нетрадиційних задач геометричного моделювання. Будучи бібліотекою процедур, цей пакет може бути доданий до існуючого програмного забезпечення користувача.

“ГЕОМОД” застосовується у багатьох галузях: наукових дослідженнях; проектуванні в промисловості; робототехніці та штучному інтелекті; демонстраційних програмах та моделюванні в навчанні; створенні комп’ютерних тренажерів; комп’ютерних іграх.

Система проектування деталей тіл обертання ROTATION — це комплекс програмних та інформаційних засобів, які забезпечують проектування деталей типу: вал, втулка, фланець, зубчасте колесо в середовищі системи AutoCAD.

Система містить ряд програм, написаних мовою AutoLISP, систему екранних, слайдових та падаючих “меню”, а також таблиці, які мають потрібні параметри для генерації стандартних і нормалізованих елементів тіл обертання.

Система дає змогу:

— генерувати зображення деталей типу тіл обертання в потрібному масштабі шляхом послідовного вибору окремих елементів з графічного “меню” та автоматичним стискуванням їх;

— автоматично вибирати та генерувати зображення типових виглядів: розрізів і перерізів, включаючи канавки для виходу шліфувальних кіл, канавки для виходу

різьб, галтелі; перерізів шліцьових валів з прямокутним, евольвентним і трикутним профілями; канавок для виходу фрез або довбачів для нарізання зубчастих коліс; елементів шпонкових з’єднань;

— автоматично вимірювати стандартні елементи конструкції деталей типу тіл обертання;

— проставляти діаметральні розміри ступенів деталей, що проектуються як у режимі замовчування, так і в режимі з зазначенням положення розмірних ліній. Значення діаметральних вимірів мають посадки та допуски для гладких елементів валів, а також діаметри різьб з зазначенням кроку різьби та ступеня точності для різьбових елементів.

## 27.4. Побудова найпростіших геометричних об’єктів

Комплексне креслення будь-якого геометричного об’єкта можна побудувати на основі обмеженого набору геометричних примітивів, які створюються в будь-якому графічному інтерактивному пакеті. До основних двовимірних геометричних примітивів належать: точка, відрізок прямої, дуга кола, коло, парабола, гіпербола, еліпс, сплайни та ін. Кожний примітив задається однозначно певним набором параметрів. Наприклад, щоб задати точку на площині, потрібно знати дві її координати; щоб задати коло — координати його центра та радіус і т. п. Параметри визначають форму примітива та його положення відносно вибраної системи координат. Крім параметрів, для кожного примітива існують певні атрибути, до яких, зокрема, належать: тип; колір; товщина ліній, якими він візуалізується на екрані дисплея; номер шару, в якому він створюється. Отже, атрибути визначають візуальні властивості примітива. Якщо користувач не задає атрибути, то графічна система візуалізує примітив суцільною білою лінією стандартної товщини в нульовому шарі. Стандартна товщина може використовуватися для візуалізації тонких ліній (суцільної, хвилястої, штрихпунктирної, штрихової). Товщина основної суцільної, потовщеної штрихпунктирної, потовщеної розімкнутої лінії задається коефіцієнтом “потовщення” стандартної лінії.

Створення примітива може починатися із задання його атрибутів. Проте це не обов'язково, оскільки в графічних системах закладено можливості зміни атрибутів вже створених примітивів.

Обов'язковим є задання параметрів примітивів. Можна виділити три основні способи:

- 1) введенням з екрана дисплея;
- 2) числовим введенням з клавіатури;
- 3) використанням створених раніше примітивів.

Ці способи можна використовувати в комбінаціях. Так, при створенні кола його центр буде заданим введенням з екрана, а інформація про радіус — з клавіатури. При спряженні двох прямих прями можуть бути вже побудовані раніше, а радіус спряження задається введенням числового значення з клавіатури.

Розглянемо суть основних способів на найпростішому примітиві — точці.

Якщо точка задається введенням з екрана дисплея, то користувач приблизно визначає положення точки на полі креслення і фіксує його, переміщуючи в це місце курсор. Для більш точного візуального визначення положення точки можна користуватися координатною сіткою, яка виводиться на екран разом з кресленням. При цьому користувач може відрахувати належну кількість рисок і відповідно до цього встановити курсор. Точність зчитування координат залежить від масштабу координатної сітки і масштабу, в якому вона виводиться на екран дисплея.

Основними перевагами цього способу є простота та наочність побудов. До недоліків належить неможливість задання точки, що лежить поза фрагментом креслення, яке візуалізовано в цю мить на екрані дисплея. Цей метод рекомендується використовувати при побудові ескізів деталей.

Точне задання координат точки здійснюється введенням з клавіатури їх числових значень. У будь-якому графічному пакеті є можливість для задання абсолютних та відносних координат точки. Абсолютні координати задаються щодо системи координат, початок якої заздалегідь встановлюється системою в лівому нижньому куті екрана дисплея. Цей спосіб рекомендується,

якщо є потреба у глобальному розбитті поля креслення на частини.

Якщо при введенні з клавіатури використовуються відносні координати, то положення точки встановлюється щодо положення тієї точки, координати якої були введені останніми, тобто відносні координати задаються приростом.

Третім способом точку можна задати, наприклад, як перетин двох прямих або як перетин прямої та кола за умови, що ці об'єкти були створені раніше.

Усі геометричні примітиви будуються за допомогою спеціальних команд графічних редакторів. Покрокове виконання цих команд дає змогу користувачеві задавати параметри, необхідні для побудови геометричного примітива. Як правило, в графічних редакторах використовуються різноманітні комбінації потрібних параметрів, що відповідає різним способам побудови одного і того самого примітива. Усі допоміжні розрахунки та побудови виконуються автоматично без візуалізації.

Для оптимального використання можливостей графічного редактора під час роботи в інтерактивному режимі треба чітко знати розміщення відповідних команд в його "меню". При створенні геометричних примітивів та виконанні інших операцій користувачеві графічного редактора типу AutoCAD R14 допомагають спеціально розроблені путівники, які показують розміщення команд у "меню".

## **27.5. Алгоритми побудови креслень машинобудівних деталей**

Автоматизована побудова креслень принципіально відрізняється від виготовлення робочих креслень вручну. Вона передбачає створення графічних зображень, починаючи з ескізів і закінчуючи перспективним зображенням тривимірної геометрії деталі. Можна говорити про різноманітні можливості створення графічних зображень залежно від обробки дво- чи тривимірної геометрії за принципом варіювання чи генерування. Розглянемо обробку двовимірної геометрії за принципом генерування.



Принцип генерування реалізується на основі геометричних примітивів, які визначаються й обробляються в конкретній графічній системі. Для двовимірної системи, як уже зазначалося, це точки, відрізки, кола, дуги кола та інших кривих другого порядку. Для побудови різних проекцій деталі її геометрія має бути розкладена на геометричні примітиви, які може обробляти конкретна графічна система. Геометричні примітиви створюються користувачем на екрані дисплея і послідовно відносяться до контурних ліній. Для спрощення опису геометрії можна застосовувати такі функції, як зсув, поворот, симетрія. Крім того, при побудові геометричних елементів можна використовувати побудови дотичної до поверхні; перпендикуляра до площини, паралельної прямої.

Виконуючи креслення, крім контурних, осьових та інших ліній, використовують такі графічні функції, як штриховка та нанесення розмірів. Штрихуються тільки області й поверхні всередині замкненої контурної лінії. Після визначення області вона штрихується автоматично із заданою користувачем відстанню між лініями штриховки та кутом їх нахилу.

Розміри на окремих зображеннях користувач наносить графічно в режимі діалогу. На основі "меню" вибирають потрібний тип нанесення розміру (горизонтальний, вертикальний, діаметральний тощо). Потім користувач зазначає геометричний елемент, на якому мають бути нанесені розміри та місце розміщення розмірного числа. Розмірні, виносні лінії із стрілками та розмірним числом виставляються системою автоматично. Розмірне число може бути визначене двома способами: автоматично і введенням числового значення з клавіатури. Крім того, графічні системи реалізують функції проставлення шорсткості, допусків, нанесення текстових написів.

Використання тривимірних систем комп'ютерної графіки передбачає вищий рівень геометричного мислення, ніж при використанні двовимірних систем. Описувати деталь можна не тільки системою ребер і площин, а й об'ємно. При виконанні креслень переважає метод тривимірного опису деталей, оскільки ЕОМ може побудувати які завгодно вигляди деталей, до яких нале-

жать також звичайні ортогональні проекції деталі. При цьому можна візуалізувати на екрані дисплея необхідні для зображення деталі проекції і в графічно-діалоговому режимі нанести на них розміри. Так, система MAPS дає змогу візуалізувати одночасно шість виглядів деталі (спереду, зліва, справа, знизу, зверху і ззаду). Крім того, за допомогою тривимірних систем можна автоматично будувати будь-які перерізи та розрізи.

Розглянемо більш докладно побудову комплексного креслення. Виділимо в цьому процесі два основні етапи: підготовчий, на якому здійснюється підготовка до роботи в інтерактивному режимі, та етап інтерактивної роботи з метою побудови креслення.

На першому етапі рекомендується:

— оцінити насиченість майбутнього креслення; встановити кількість виглядів, розрізів, перерізів та інших зображень, які будуватимуться; оцінити габаритні розміри всіх зображень; вибрати потрібний формат креслярського аркуша та масштаб зображення, що допоможе надалі встановити межі креслення під час роботи з графічною системою, а також правильно вибрати коефіцієнт перетворення креслення при виконанні твердих копій;

— виявити елементи симетричних зображень, які можуть бути побудовані: поворотом чи зсувом як дотичні, перпендикуляри або лінії, паралельні іншим елементам; як спряжені;

— виділити області, які треба заштрихувати. Формуючи їхній контур, слід враховувати, що він має бути замкненим.

На другому етапі алгоритм роботи в режимі інтерактивного діалогу розглянемо на прикладі деталі типу "Стояк" (рис. 27.5).

1. Вхід у систему графічного редактора.

1.1. Завантажити графічний редактор.

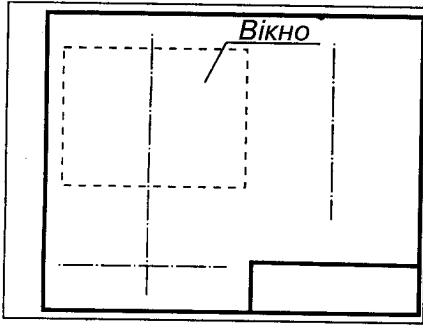
1.2. У відповідь на вимогу системи ввести ім'я креслення.

2. Підготовка поля креслення.

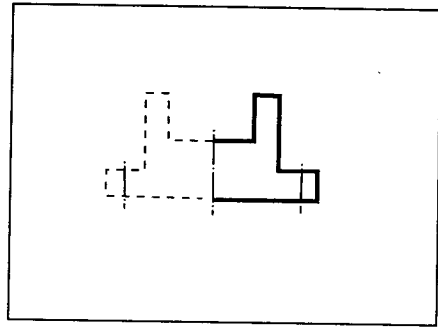
2.1. Візуалізувати рамку креслення, якщо на першому етапі був обраний формат креслярського аркуша.

2.2. Візуалізувати координатну сітку.

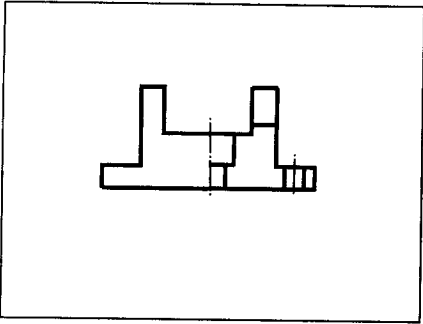
2.3. Провести осьові лінії зображення, тобто глобально скомпонувати креслярський аркуш.



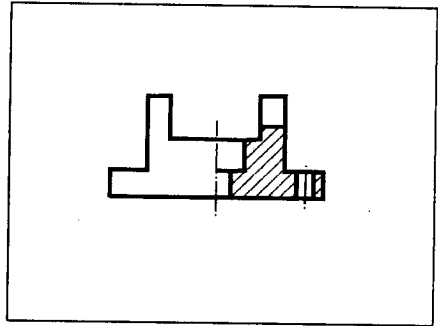
a



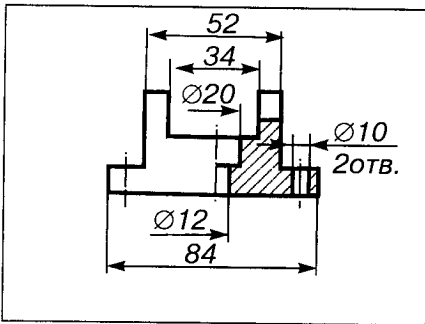
б



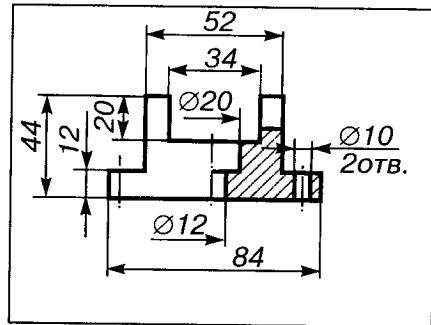
в



г



д



е

Рис. 27.5

2.4. Записати файл на диск без виходу із системи. Це слід повторювати періодично в міру накопичення інформації для того, щоб зберегти створений фрагмент креслення.

3. Побудова контуру зображення.

3.1. Виділити "вікном" і перемасштабувати на весь екран дисплея поле для розміщення вигляду спереду (зліва, справа, зверху, знизу і т. д.). На рис. 27.5, а виділено "вікном" поле, на якому будуватиметься вигляд спереду деталі типу "Стояк".

3.2. Побудувати симетричну частину контуру зображення. На рис. 27.5, б справа від осі симетрії побудовано частину контуру зображення суцільними лініями.

3.3. Використовуючи функцію симетричного відображення, добудувати симетрично відносно заданої осі побудовані справа елементи контуру. На рис. 27.5, в ця частина деталі зображена штриховими лініями.

3.4. Добудувати решту ліній контуру. На рис. 27.5, г такими лініями є лінії, які належать розрізу.

3.5. Записати файл на диск без виходу із системи.

4. Виконання штриховки.

4.1. Встановити параметри штриховки: відстань між сусідніми лініями штриховки, кут нахилу ліній штриховки, тип штриховки залежно від матеріалу, з якого вироблена деталь.

4.2. Позначити курсором контур, який обмежує область штриховки. Бажано обходити контур послідовно в напрямі проти руху стрілки годинника. На рис. 27.5, з зображено дві області штриховки. Одна з них обмежена зліва контурами ступінчастого отвору, справа — контурами циліндричного отвору. Друга область штриховки обмежена зліва контурами циліндричного отвору, а справа контуром краю деталі. Після виконання цього пункту дістанемо зображення, подане на рис. 27.5, д.

4.3. Записати файл на диск без виходу із системи.

5. Нанесення розмірів.

5.1. Нанести горизонтальні лінійні розміри (рис. 27.5, д).

5.2. Нанести вертикальні лінійні розміри (рис. 27.5, е).

5.3. Нанести радіальні та діаметральні розміри.

5.4. Записати файл на диск без виходу із системи.

6. Візуалізувати весь креслярський аркуш. Якщо є потреба побудови інших зображень, то слід повторити для кожного з них пп. 3...5 цього алгоритму.

7. Виконати текстові написи.

8. Заповнити основний напис.

9. Записати файл на диск без виходу із системи.

10. Згенерувати повне зображення креслення.

11. Підготувати файл для одержання твердої копії.

12. Вивести файл на графопобудовник.

13. Вийти з графічної системи.

Розглянемо опис систем SUPERVISIONS та MAPC. Ці системи забезпечують можливості для створення й редагування дво- і тривимірних моделей, повний набір елементів для оформлення креслень відповідно до вимог ЄСКД.

Системи SUPERVISIONS і MAPC — це інтегровані програмні продукти для автоматизованого проектування й підготовки виробництва. Ядро систем створює база даних дво- і тривимірних моделей, доступна для всіх програм. Вона досить гнучка — допускається подальше розширення її функціональних можливостей. Додаткові програми інтегруються в систему так, що користувач сприймає їх як єдиний пакет.

У системі SUPERVISIONS вмонтована мова програмування (SPL), яка дає змогу створювати: програми побудови параметричних моделей і організувати інтерфейс із зовнішніми програмами, поданими різними мовами; швидкий алгоритм кольорового тонування і видалення невидимих ліній, відкритий для змін інтерфейсу користувача. Крім того, можна виконувати бульові операції з “твердими” тілами, застосовувати великий набір тривимірних сплайнових кривих і створювати тривимірні поверхні складної форми.

Важливими для проектування й моделювання є такі потужні засоби системи, як асоціативність і топологічна зв'язність.

Розглянемо зазначені властивості на прикладі. Якщо в контурі із заокругленнями, штриховкою й отворами змінити розмір, перемістити точку, яка належить заокругленню або отвору, то система автоматично перерахує заокруглення і модифікує область штриховки. Заокруглення, отвори і штриховка — це “дочірні” об'єкти відносно основного контуру.

У системах SUPERVISIONS і MAPC користувач може визначити на екрані одночасно до восьми ділянок екрана або вікон, кожне з яких міститиме окремі деталі або проекції об'єкта.

З будь-яким об'єктом можна асоціативно зв'язати текст. Під час переміщення об'єкта переміщуватиметься й текст.

Оскільки системи SUPERVISIONS і MAPC працюють з тривимірними моделями, то неважко дістати аксонометричні, перспективні проекції будь-яких об'єктів. Об'єкти можна розглядати в різних ракурсах, з видаленням невидимих ліній, з повним кольоровим тонуванням. Більш того, користувач, змінюючи ракурс, може імітувати пе-

реміщення всередині моделі об'єкта, спостерігати недоступні під час зовнішнього огляду місця. Система автоматично розставляє джерела світла, проте користувач може сам розмістити їх так, як вважає за потрібне.

Система SUPERVISIONS дає змогу створювати бібліотеки типових елементів, що істотно скорочує термін проектування й полегшує роботу конструктора та архітектора. Система дає змогу також визначи-

ти спільний для кількох користувачів каталог бібліотечних елементів.

Розглянемо використання комп'ютерної графіки для креслення машинобудівних деталей: пластин, валиків, корпусів домкратів. Наприклад, вивчаючи тему "Графічне зображення машинобудівних деталей", можна провести практичні заняття та лабораторні роботи.

Практичні заняття з теми "Пластина" включають:

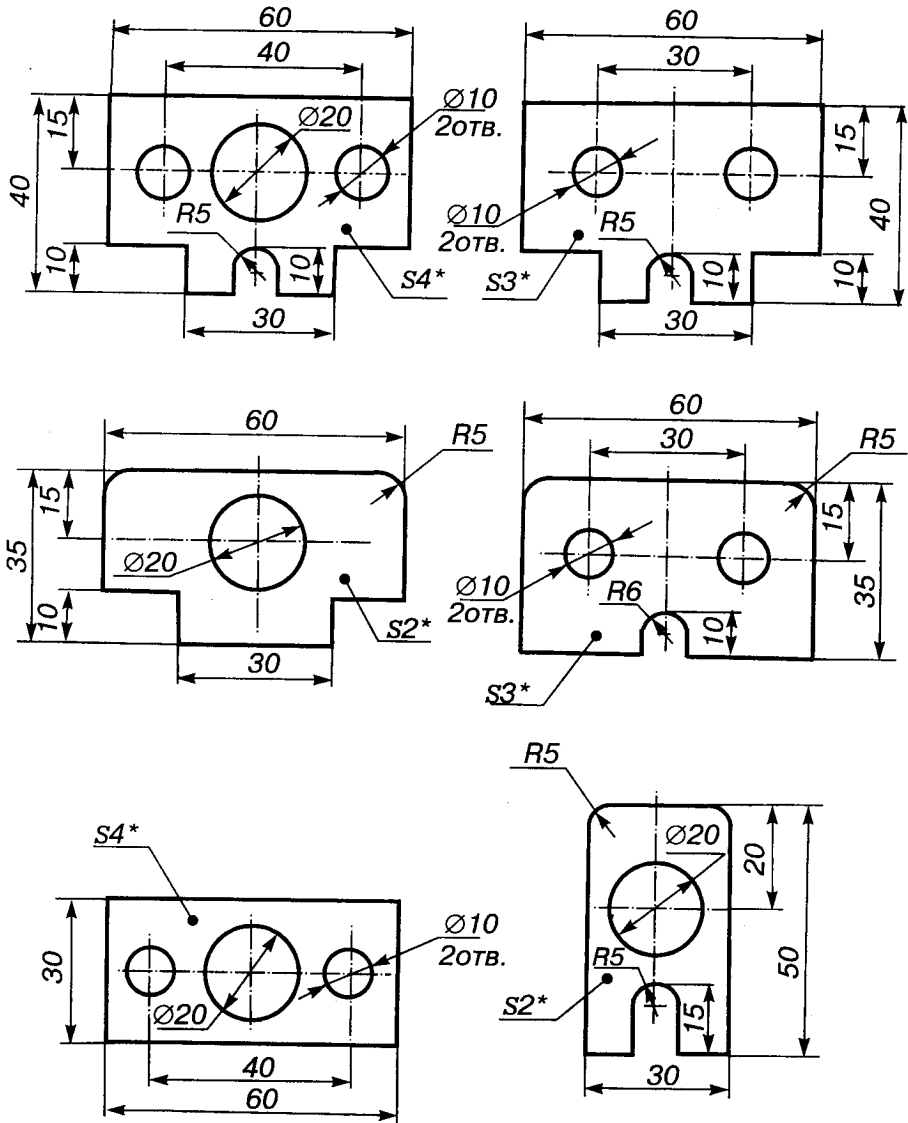


Рис. 27.6

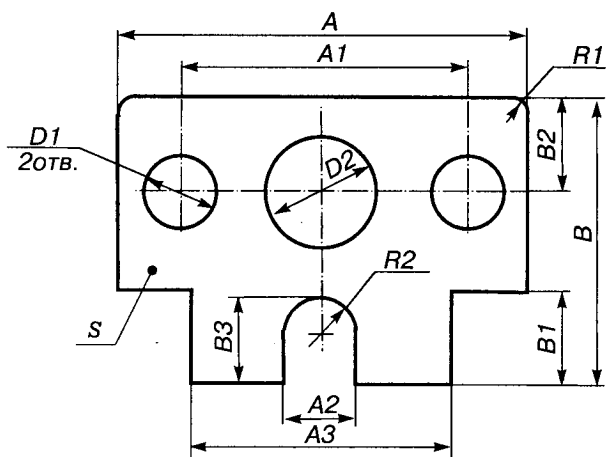


Рис. 27.7

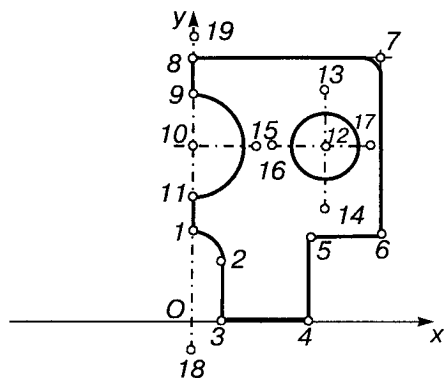


Рис. 27.8

— ознайомлення з принципами геометричного моделювання технічних об'єктів та типами геометричних моделей;

— створення дротяної моделі плоскої деталі типу "Пластина" за групою однотипних креслень;

— підготовка геометричної інформації для формування графічного зображення побудованої дротяної моделі;

— вивчення структури інтерактивних пакетів комп'ютерної графіки (програми-ка модель інтерактивної комп'ютерної графіки);

— розробка діалогу з ЕОМ для створення графічного зображення. Зазначимо, що в рамках цього практичного заняття можна реалізувати й програмну, й інтерактивну версії формування графічного зображення. Якщо використовуваний у навчальному процесі графічний пакет дає змогу формувати параметричні моделі (SUPERVISIONS, Компас та ін.), то результатом розробки буде програма формування параметричного базового креслення, яке потім можна використати як елемент бібліотеки типових деталей. Під час використання пакетів типу SUPERVISIONS, MAPS тощо результатом розробки є діалог з ЕОМ, здійснюваний через опції "меню" пакета.

Лабораторні роботи з цієї теми включають:

— ознайомлення з технічними засобами комп'ютерної графіки;

— ознайомлення з графічним пакетом, що використовується в навчальному процесі;

— ознайомлення з методикою одержання нового креслення;

— одержання графічного зображення плоскої деталі згідно з варіантом за розробленою програмою;

— одержання твердої копії сформованого креслення;

— ознайомлення з методикою редагування;

— редагування готового креслення з метою одержання креслення деталей групи;

— одержання твердих копій креслень деталей групи.

Зміст практичних занять і лабораторних робіт з першої теми проілюструємо таким прикладом.

На рис. 27.6 подано кілька креслень однотипних плоских деталей, на основі яких дістали узагальнене креслення (рис. 27.7). Як бачимо, деталь симетрична, тому при описі досить розглянути її половину (рис. 27.8).

Описуване графічне зображення складається з таких графічних елементів:

— дуг кіл з початковими точками 2 і 11 та кінцевими точками 1 і 9 відповідно;

— ламаної з вершинами 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;

— відрізків прямих між точками 10 і 15, 16 і 17, 13 і 14, 18 і 19;

Таблиця 27.1. Геометричні елементи графічного зображення

Точка	Координата $x$	Координата $y$	Точка	Координата $x$	Координата $y$
1	0	$B_3$	11	0	$B - B_2 - D_2/2$
2	$R_2$	$B_3 - R_2$	12	$A_1/2$	$B - B_2$
3	$R_2$	0	13	$A_1/2$	$B - B_2 + D_1/2 + 5$
4	$A_3/2$	0	14	$A_1/2$	$B - B_2 - D_1/2 - 5$
5	$A_3/2$	$B_1$	15	$D_1/2 + 5$	$B - B_2$
6	$A_1/2$	$B_1$	16	$A_1/2 - D_1/2 - 5$	$B - B_2$
7	$A_1/2$	$B$	17	$A_1/2 + D_1/2 + 5$	$B - B_2$
8	0	$B$	18	0	-5
9	0	$B - B_2/2 + D_2/2$	19	0	$B + 5$
10	0	$B - B_2$			

Таблиця 27.2. Значення відповідних координат

Варіант	$A$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$R_1$	$R_2$	$D_1$	$D_2$	$S$
1	60	40	0	30	40	10	15	0	0	0	10	20	4
2	60	30	10	30	40	10	15	10	0	5	10	0	3
3	60	0	0	30	35	10	0	0	5	0	0	20	2
4	60	30	12	0	35	0	15	10	5	6	10	0	3
5	60	40	0	0	30	0	15	0	0	0	10	20	4
6	30	0	10	0	5	0	0	15	5	5	0	20	2

— кола з центром у точці 12, сполучення відрізків 8, 7 і 7, 6.

Усі ці елементи можуть бути сформовані з використанням опцій визначення примітивів координатним введенням. Для цього описуване графічне зображення слід зв'язати з локальною системою координат  $xOy$  (див. рис. 27.8) і описати в ній усі його геометричні елементи (табл. 27.1). Формуючи конкретне зображення, замість параметрів задають числові значення відповідних координат (табл. 27.2). На рис. 27.9 подано алгоритм координатного введення точки, а на рис. 27.10 — алгоритм введення відрізка прямої.

Крім геометричної інформації, потрібно задати атрибути геометричних елементів. У наведеному прикладі такими атрибутами є товщина і тип лінії. Відрізки прямих 10, 15; 16, 17; 13, 14; 18, 19 (див. рис. 27.8) мають бути виконані тонкими штрихпунктирними лініями, а ламана з вершинами 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, усі дуги кола і кола з центром у точці 12 — суцільними основними лініями.

Приблизний діалог з ЕОМ поданий відповідно до інтерактивної системи MAPS. Функції цього пакета оформлені у вигляді "меню", яке має деревоподібну структуру. Під час розробки діалогу користувачеві

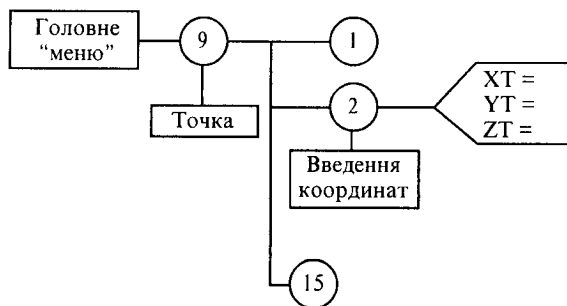


Рис. 27.9

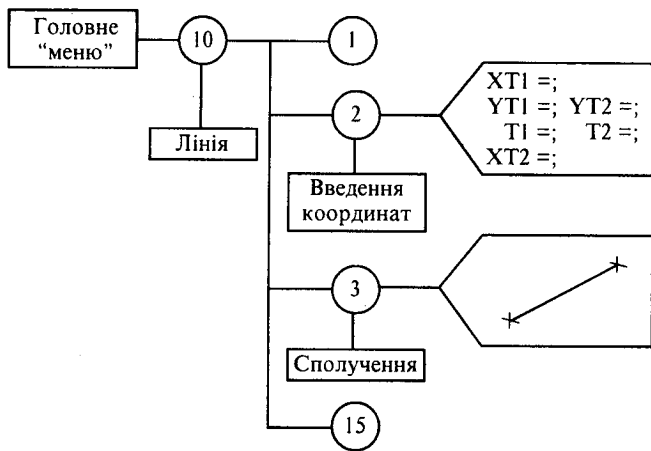


Рис. 27.10

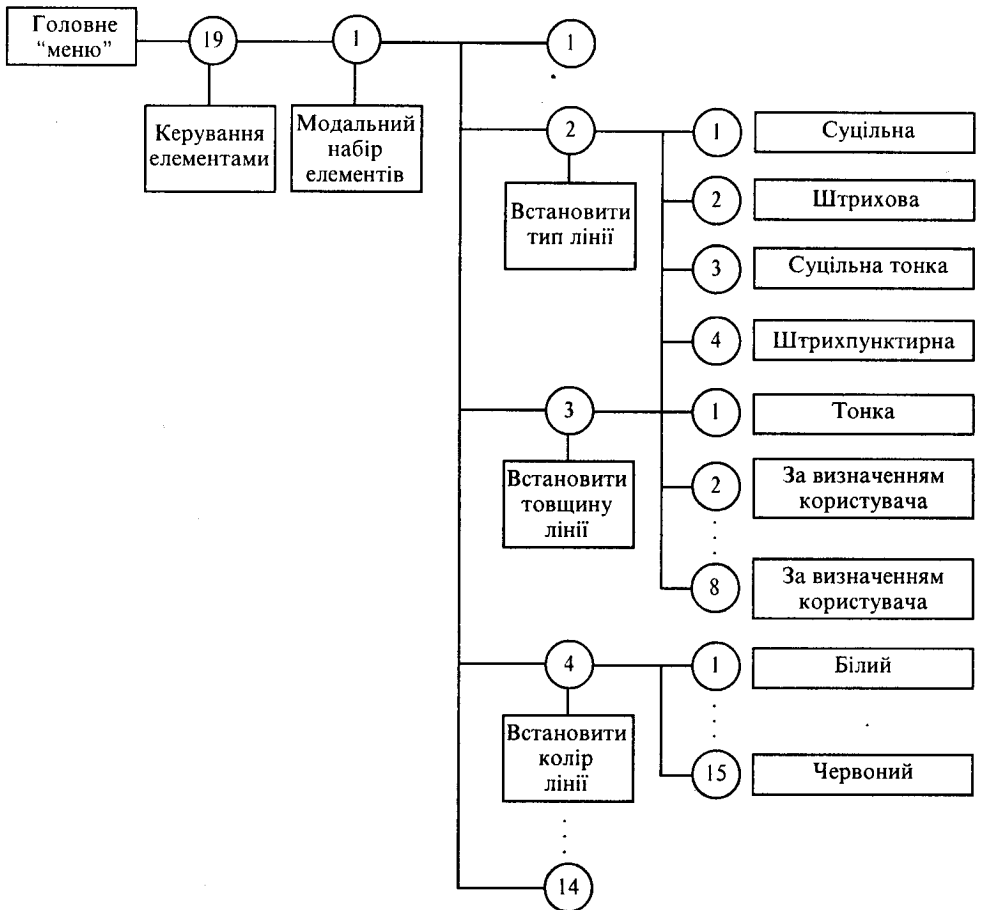


Рис. 27.11

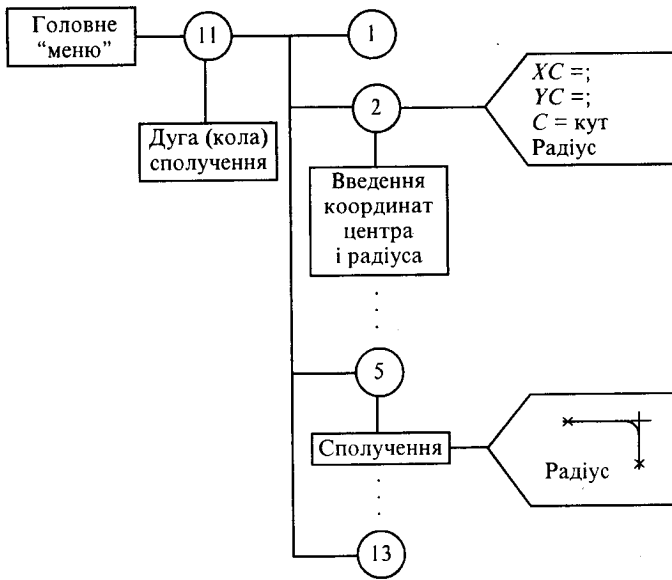


Рис. 27.12

слід зазначити ланцюжок номерів опцій, які реалізують відповідну операцію. На рис. 27.11 наведено приклади таких ланцюжків для задання атрибутів геометричних елементів.

На рис. 27.12 показано алгоритм побудови дуги кола. Після того, як закінчено формування половини контуру деталі, за допомогою симетричного відображення будувється друга її половина.

Формування креслення закінчується нанесенням розмірів. Якщо графічне зображення дістали координатним введенням, то

розмірні числа обчислюються автоматично. Користувачеві при цьому потрібно вибрати вид розміру (горизонтальний, вертикальний, діаметральний тощо), зазначити його геометрію і встановити атрибути (довжину стрілок, висоту розмірного числа та ін.). Виконане таким чином креслення виводиться на графопобудовник. У подальшому загальне креслення групи редагується з метою одержання креслень, які входять у групу. На рис. 27.13 показано алгоритм побудови симетричного зображення пластини.

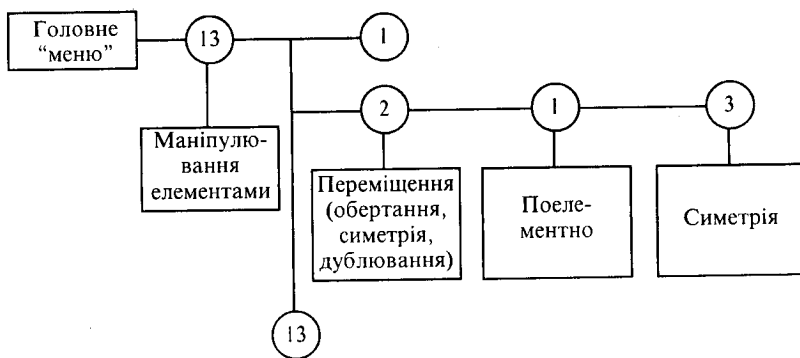


Рис. 27.13



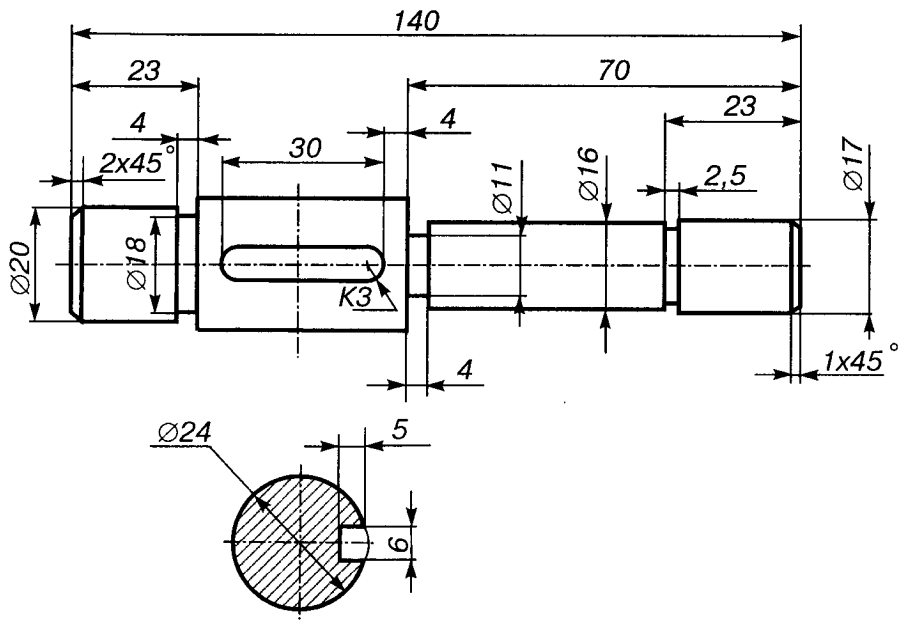


Рис. 27.14

В окрему групу доцільно віднести деталі типу "Вал" (рис. 27.14), тому що для їх конструювання можна використати як дротяне, так і полігональне моделювання.

При дротяному моделюванні алгоритм побудови деталі типу "Вал" принципово не відрізняється від аналогічного алгоритму для деталей типу "Пластина" чи "Стояк". Новою графічною операцією тут

може бути штрихування замкненої області (переріз). Для реалізації цієї операції (наприклад, засобами графічного пакета MAPS) слід виконати такі дії:

1. Вибрати атрибути графічного примітива "штриховка" — тип штриховки залежно від матеріалу, товщину лінії штриховки, відстань між лініями штриховки (рис. 27.15).

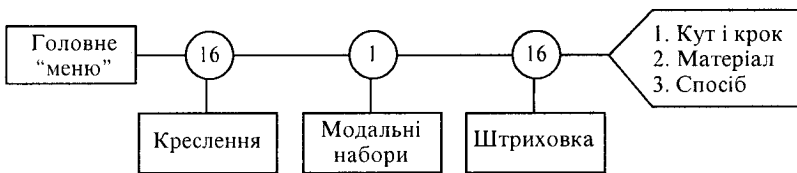


Рис. 27.15

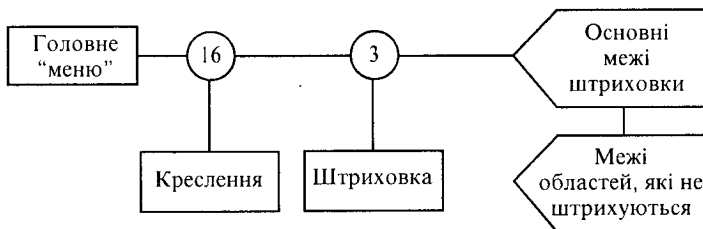


Рис. 27.16

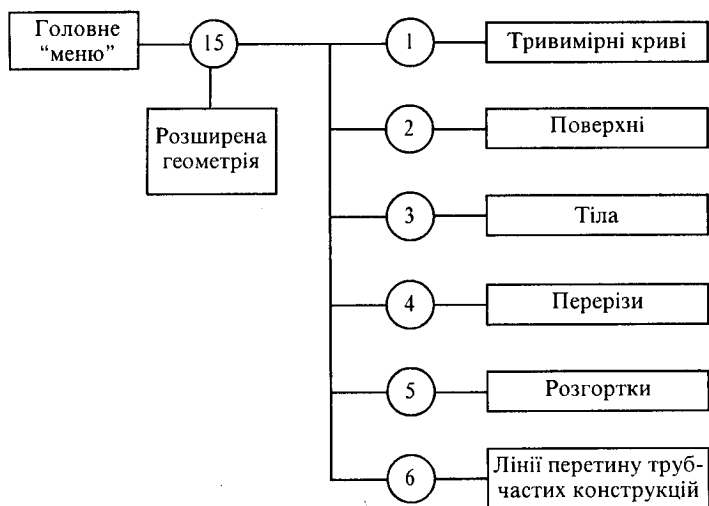


Рис. 27.17

2. Виконати штриховку (рис. 27.16).

При полігональному моделюванні деталь типу “Вал” описується як об’ємне тіло, обмежене циліндричними, конічними, призматичними, сферичними і більш складними поверхнями (рис. 27.17).

У полігональному описі деталі двовимірні проекції її, а також перерізи і розрізи будуються автоматично.

Зазначимо також, що в пакетах SUPERVISIONS можна виконувати бульові операції з “твердими тілами”, що забезпечують об’ємне моделювання. Як уже зазначалося, нині в усьому світі набуває значного поширення система автоматизованого проектування AutoCAD, яка використовується при розробці конструкторської документації. Одна з останніх версій системи AutoCAD R14, використовуючи універсальність і гнучкість операційної системи Windows, має понад 100 нових засобів та поліпшень, продуктивність процесу креслення, посилений обмін даними, поліпшені можливості адаптації та інструменти керування.

Нижче розглянемо приклади виконання креслень деталей типу “Пластина”, “Вал”, “Корпус” у системі AutoCAD R14.

**Креслення деталі “Пластина”.** Позначаємо опорні точки деталі.

Задаємо основну, осьову, розмірну та штрихову площини. Для кожної площини призначаємо свою назву, колір і тип лінії.

Вмикаємо основну площину.

Креслимо прямолінійний контур командою LINE, починаючи з довільної точки 1 (рис. 27.18). Характерні ділянки прямолінійного контуру 1-2-3-4-5-6-1.

Ввімкнувши OSNAP, командою CIRCLE проводимо коло  $\varnothing 60$  з середини ділянки 3-4 точки 7. З цієї точки проводимо коло  $\varnothing 120$ .

Вмикаємо осьову площину і переводимо ділянку 3-4 в неї.

При ввімкненому OSNAP командою LINE креслимо осьову лінію з центра ділянки 3-4 точки 7 у точку 8, довжина відрізка 7-8 становить 203 мм.

Позначаємо відрізок 7-8 і, ввімкнувши ORTHO, розтягуємо його за точку 7 на 63 мм під кутом  $0^\circ$  до точки 9. Розтягуємо також відрізок 3-4 на 33 мм у відповідні боки, отримавши точки 10 і 11.

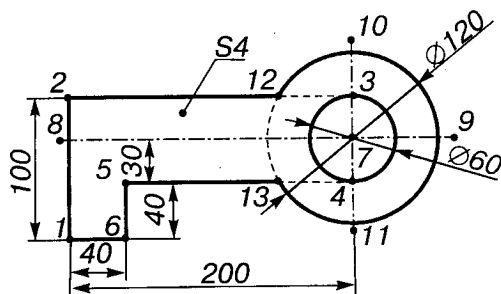


Рис. 27.18

Точки 12 і 13 — це точки перетину відрізків 2-3 та 4-5 з великим колом. Використовуючи команду TRIM, виділяємо відрізки 2-3, 4-5 і велике коло. Видаляємо ділянку кола між точками 12 і 13, а також ділянки відрізків 3-12 та 4-13.

Призначаємо штрихову площину. Командою ARC задаємо центр дуги в точці 7. Стартовою точкою дуги буде точка 12, а кінцевою — 13.

Призначаємо розмірну площину.

Проставляємо лінійні розміри між точками 1-2, 1-6, 5-8 та 1-11, а також діаметри обох кіл.

У розмірній площині проставляємо також товщину деталі.

Вибравши довільну точку всередині контуру деталі, командою LINE проводимо похилу лінію, а потім, ввімкнувши ORTHO, проводимо невеликий відрізок праворуч.

Командою DTEXT пишемо над ним текст (S4).

**Креслення деталі "Вал".** Задаємо основну, осьову та розмірну площини. Для кожної площини призначаємо свою назву, колір і тип лінії.

Креслимо горизонтальну осьову в осьовій площині.

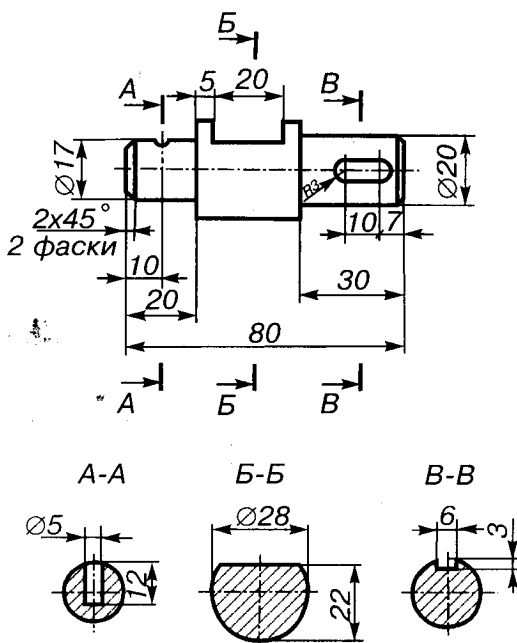


Рис. 27.19

Вмикаємо основну площину.

Командою LINE креслимо контур нижньої частини деталі.

Використовуючи команду CHAMFER, створюємо дві фаски угорі по 2 мм (рис. 27.19).

Виділивши всю нижню частину деталі та скориставшись командою MIRROR, дістаємо верхню частину, дзеркально відображену відносно горизонтальної осьової.

З лівого та правого боків проводимо лінії фасок, яких не вистачає. Видаливши командою ERASE верхню лінію, проводимо контур риски.

Проводимо прямокутник під шпонковий паз і командою FILLET, задавши радіус 3 мм, скругляємо його кути.

Ввімкнувши осьову площину, нижче проводимо вертикальну осьову площину. На цій площині за допомогою команд COPY та ROTATE створюємо її копію, яку повертаємо на 90°. Скопіюємо ці дві осьові двічі.

На перерізі А-А проводимо коло  $\varnothing 17$ . Командою LINE креслимо ліву частину отвору, дзеркально зображуючи його командою MIRROR, та відсікаємо все зайве командою TRIM.

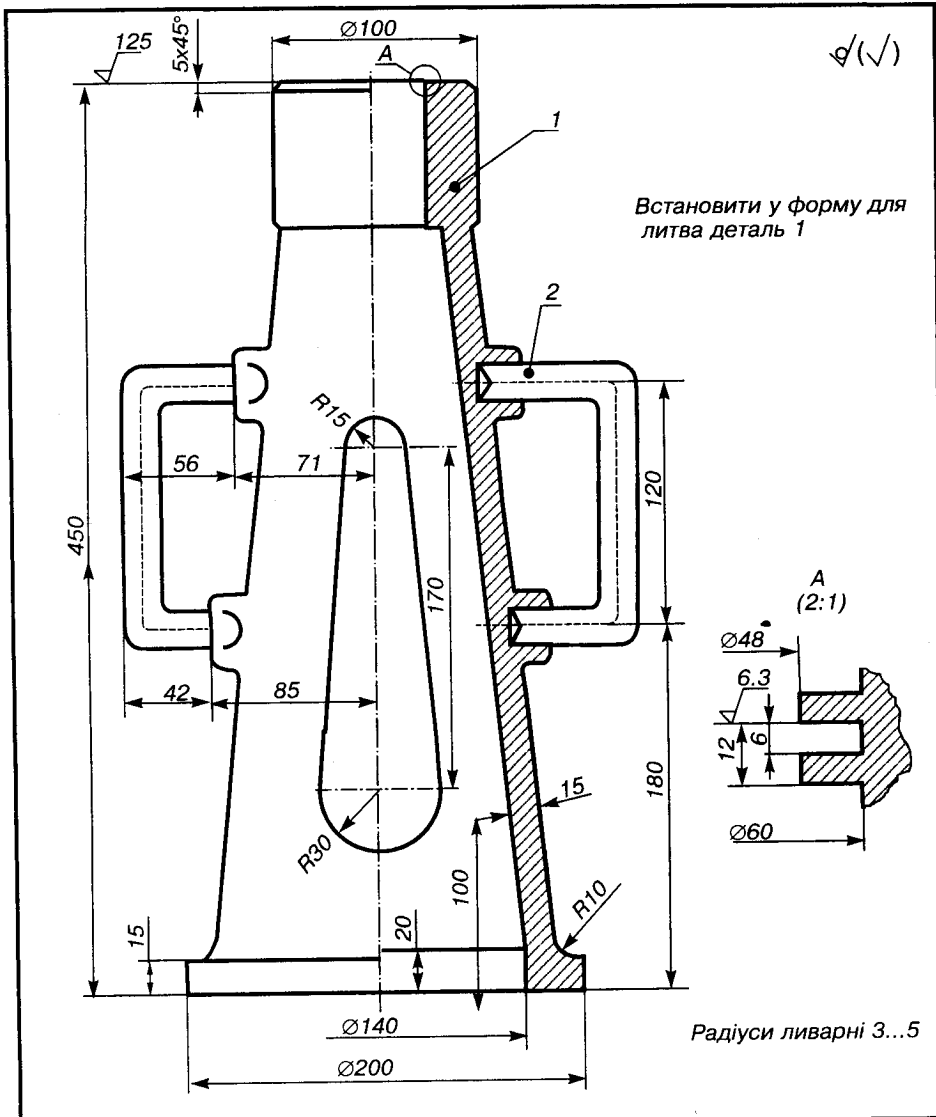
На перерізі Б-Б проводимо коло  $\varnothing 28$ . З нижньої точки кола проводимо горизонтальну лінію довільної довжини. Командою MOVE зміщуємо її вертикально на 22 мм і командою TRIM відсікаємо верхню частину кола та виступні частини лінії.

На перерізі В-В проводимо коло  $\varnothing 20$ . Створюємо профіль паза за допомогою команд LINE та MIRROR. Переходимо в розмірну площину та командою ARC докреслюємо необхідну частину кола.

Штриховку на всіх перерізах виконуємо за допомогою команди HATCH.

Командами DIMLINEAR і DIMRADIUS проставляємо всі потрібні розміри. Проставляючи знаки  $\varnothing$  та  $^\circ$ , використовуємо %%c та %%d відповідно.

Окремо командою LINE проводимо горизонтальну лінію. Поряд командою PLINE проводимо вертикальну лінію, початкова та кінцева товщина якої становить 0,5 мм. Наводимо стрілку завтовшки до 0,8 мм. Командою DTEXT зазначаємо літеру. Розмививши, віддзеркаливши та змінивши літери, дістанемо потрібні перерізи.



0502 . 73      300   СБ								
					Корпус	Літера	Маса	Масшт.
Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата				
Розроб.								
Перевір.								
Т.контр.						Аркуш	Аркушів	
Н.контр.								
Затверд.								

Рис. 27.20

**Креслення деталі “Корпус”.** Задаємо основну, осьову та розмірну площини. Для кожної площини призначаємо свою назву, колір та тип лінії.

Креслимо вертикальну осьову в осьовій площині.

Вмикаємо основну площину.

Командою **LINE** креслимо контур деталі з лівого боку від осьової (крім верхнього відводу).

Використовуючи команду **CHAMFER**, створюємо дві фаски угорі по 3 та 5 мм.

Командою **FILLET**, задавши радіус 10 мм, створюємо скруглення біля основи, а радіусом 2 мм — скруглення навколо бокових відводів. Не зазначені на рис. 27.20 ливарні радіуси становлять 3...5 мм.

Повністю створивши нижній відвід, копіюємо його командою **COPY** вгору зі зміщенням  $dx = 14$  мм,  $dy = 125$  мм.

Виділивши всю ліву частину деталі та скориставшись командою **MIRROR**, дістанемо праву частину, дзеркально відображену відносно вертикальної осьової.

З лівого та правого боків проводимо коло  $\varnothing 60$  з точки перерізу нижньої горизонтальної осьової та вертикальної осьової. З точки перерізу верхньої горизонтальної осьової та вертикальної осьової також проводимо коло  $\varnothing 30$ .

При ввімкненому **OSNAP** командою **LINE** креслимо дві лінії між боковими точками цих кіл.

Командою **TRIM** позначаємо ці дві лінії та видаляємо ділянки кіл, які лежать між ними.

Креслимо контури вигляду *A*. Вмикаємо розмірну площину.

Командою **SPLINE** створюємо криву лінію на вигляді *A*.

Використовуючи команду **HATCH**, задаємо інтервал штриховки 3 мм, кут 0, штрихуємо вигляд *A* і, клацнувши тричі з

правого боку корпусу (оскільки ділянки відокремлені осьовими), штрихуємо корпус.

Зверху проводимо коло і креслимо виносну лінію (команди **CIRCLE** та **LINE**).

Починаємо проставляти розміри.

Командою **DIMLINEAR** проставляємо всі горизонтальні та вертикальні розміри.

Командою **DIMALIGNED** проставляємо товщину стінки корпусу.

У тексті багатьох розмірів є знак  $\varnothing$ . Щоб його проставити, потрібно натиснути **t(text)** і в командному рядку задати %%c; так само проставляємо  $\circ$ , використовуючи %%d.

Командою **DIMRADIUS** проставляємо значення радіусів кіл.

Командою **DTEXT** над виносною лінією показуємо вигляд *A*, задавши при цьому висоту 7 мм. Так само подаємо *A* (2 : 1), натиснувши при цьому **J (justification)** та **C (center)**, вирівнювання за центром. Напис (2 : 1) виконуємо заввишки 3 мм.

Вертикальні написи подаємо під кутом  $90^\circ$ .

Крім креслень деталей визначеного типу, за допомогою комп'ютера можна розробляти й більш складну конструкторську документацію, наприклад, складальні креслення. При цьому слід дотримуватися викладених вище принципів. Так, для складальної одиниці “Корпус” повністю підходить алгоритм побудови креслення деталі типу “Стояк”. Ефективність виконання більш складних креслень, які містять велику кількість стандартних деталей, значно зростає при використанні бібліотеки стандартних елементів.

Викладена методика побудови креслень машинобудівних деталей інваріантна відносно комп'ютерної графіки, бо в кожному з них реалізовано принцип програміської моделі інтерактивної комп'ютерної графіки.

### Запитання та завдання

1. Яка структура програміської моделі інтерактивної комп'ютерної графіки?
2. Яка інформація про об'єкт зберігається в базі даних?
3. Які функції реалізує моделююча система?

4. Які функції базової графічної системи?
  5. Що таке апаратно-залежні та апаратно-незалежні пакети програм?
  6. Які основні положення міжнародного стандарту про графічну базову систему (GKS)?
  7. Що визначають параметри примітива?
  8. Що визначають атрибути примітива?
  9. Як штрихують деяку область?
  10. Як в автоматичному режимі наносять розміри?
  11. Дано: вигляд спереду деталі "Стояк" (див. рис. 27.5). Оформити кроки алгоритму побудови вигляду зліва аналогічно до рис. 27.5.
-

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ



1. **Автоматизированное проектирование** / В. С. Полозов, О. А. Будеков, С. И. Ротков и др. — М.: Машиностроение, 1983. — 278 с.
2. **Бубенников А. В.** Начертательная геометрия. — 3-е изд. — М.: Высш. шк., 1985. — 288 с.
3. **Гардан И., Люка М.** Машинная графика и автоматизация конструирования. — М.: Мир, 1987. — 270 с.
4. **Гельмерих Р., Швинд П.** Введение в автоматизированное проектирование. — М.: Машиностроение, 1990. — 173 с.
5. **Гилой В.** Интерактивная машинная графика. Структуры данных, алгоритмы, языки. — М.: Мир, 1981. — 384 с.
6. **Графические средства автоматизации проектирования РЭА** / Д. И. Томашевский, Г. Г. Масютин, А. А. Явич и др. — М.: Сов. радио, 1980. — 224 с.
7. **Иванов Г. С.** Начертательная геометрия. — М.: Машиностроение, 1995. — 223 с.
8. **Инженерная геометрия с элементами теории параметризации** / В. Е. Михайленко, С. Н. Ковалев, Н. И. Седлецкая и др. — К.: УМК ВО, 1989. — 83 с.
9. **Котов И. И., Полозов В. С., Широкова Л. В.** Алгоритмы машинной графики. — М.: Машиностроение, 1977. — 231 с.
10. **Котов Ю. В.** Как рисует машина. — М.: Наука, 1988. — 224 с.
11. **Курс начертательной геометрии** / С. М. Колотов, Е. Е. Дольский, В. Е. Михайленко и др. — К.: Госстройиздат УССР, 1961. — 314 с.
12. **Курс начертательной геометрии на базе ЭВМ** / А. М. Тевлин, Г. С. Иванов, Л. Г. Нартова и др. / Под ред. А. М. Тевлина. — М.: Высш. шк., 1983. — 175 с.
13. **Левицкий В. С.** Машиностроительное черчение. — М.: Высш. шк., 1988. — 351 с.
14. **Михайленко В. Е., Пономарев А. М.** Инженерная графика. — 3-е изд. — К.: Вища шк., 1990. — 303 с.
15. **Михайленко В. Е., Кислокий В. Н., Лященко А. А.** Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР. — К.: Вища шк., 1991. — 374 с.
16. **Нарисна геометрія** / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстифєєв, С. М. Ковальов, О. В. Кашенко — К.: Вища шк., 1993. — 271 с.
17. **Нарисна геометрія (програмований підручник)** / С. М. Колотов, М. Ф. Євстифєєв, В. Є. Михайленко та ін. — К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1967. — 174 с.
18. **Основы компьютерной грамотности** / Е. И. Машбиц, Л. П. Бабенко, Л. В. Верник и др.; Под ред. А. А. Стогния. — К.: Вища шк., 1988. — 215 с.
19. **Рыжов Н. Н.** Параметрическая геометрия. — М.: МАДИ, 1988. — 63 с.
20. **Справочник по машинной графике в проектировании** / Под ред. В. Е. Михайленко, А. А. Лященко. — К.: Будівельник, 1984. — 184 с.
21. **Стародетко Е. А.** Элементы вычислительной геометрии. — Минск: Наука и техника, 1986. — 240 с.
22. **Техническое черчение** / Е. И. Годик, В. М. Лисянский, В. Е. Михайленко, А. М. Пономарев. — 5-е изд. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1983. — 439 с.
23. **Фокс А., Пратт М.** Вычислительная геометрия. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
24. **Хокс Б.** Автоматизированное проектирование и производство. — М.: Мир, 1991. — 296 с.



Передмова ..... 3

**Розділ І. НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ.  
ПРЯМОКУТНІ ПРОЕКЦІЇ ТА АКСОНОМЕТРІЯ**

<b>Глава 1. Основні положення</b> .....	5	<i>Запитання та завдання</i> .....	30
1.1. Предмет нарисної геометрії та комп'ютерної графіки. Зображення як геометрична модель простору .....	5	<b>Глава 4. Перетворення комплексного рисунка</b> .....	30
1.2. Короткий історичний огляд .....	5	4.1. Загальні відомості .....	30
1.3. Геометричні фігури.		4.2. Заміна площин проєкцій .....	31
Геометричний простір. Відображення .....	6	4.3. Обертання (поворот) навколо проєкціювальних осей. Плоскопаралельне переміщення .....	33
1.4. Метод проєкціювання.		4.4. Обертання навколо ліній рівня .....	34
Центральне та паралельне проєкціювання.		4.5. Допоміжне косокутне проєкціювання .....	35
Основні властивості .....	7	<i>Запитання та завдання</i> .....	37
1.5. Координатний метод.		<b>Глава 5. Багатогранники</b> .....	37
Проекційно-зображувальні системи: прямокутні проєкції, аксонометрія .....	9	5.1. Задання та зображення багатогранників .....	37
<i>Запитання та завдання</i> .....	10	5.2. Правильні багатогранники .....	40
<b>Глава 2. Прямокутні проєкції основних геометричних фігур</b> .....	10	5.3. Піраміди, призми, призматоїди .....	41
2.1. Параметризація основних геометричних фігур .....	10	5.4. Перетин багатогранників з прямою та площиною .....	43
2.2. Проєкції точки .....	12	5.5. Взаємний перетин багатогранників .....	48
2.3. Проєкції прямої .....	13	5.6. Розгортки багатогранників .....	50
2.4. Проєкції площини .....	16	<i>Запитання та завдання</i> .....	51
2.5. Умови взаємної інцидентності, паралельності та перпендикулярності як параметри .....	18	<b>Глава 6. Криві лінії</b> .....	52
<i>Запитання та завдання</i> .....	22	6.1. Властивості проєкцій кривих ліній .....	52
<b>Глава 3. Позиційні та метричні властивості проєкцій пар геометричних фігур</b> .....	23	6.2. Плоскі криві. Еволюта, евольвента та еквідистанта плоскої кривої .....	54
3.1. Дві основні групи задач нарисної геометрії .....	23	6.3. Криві другого порядку. Інженерний спосіб побудови їх .....	55
3.2. Побудова проєкцій відстаней та кутів між геометричними фігурами .....	28	6.4. Обводи з кривих другого порядку .....	57
		6.5. Просторові криві лінії .....	59
		<i>Запитання та завдання</i> .....	60



<b>Глава 7. Криві поверхні</b> .....	61	9.2. Побудова умовних розгорток нерозгортних поверхонь .....	82
7.1. Каркасно-кінематичний та каркасно- параметричний способи утворення поверхні ...	61	<i>Запитання та завдання</i> .....	85
7.2. Принципи систематизації кривих поверхонь .....	62	<b>Глава 10. Перетин кривих поверхонь з лінією, площиною та між собою</b> .....	85
7.3. Розгортні та нерозгортні лінійчаті поверхні .....	63	10.1. Перетин кривої поверхні з прямою та кривою лініями .....	85
7.4. Нелінійчаті поверхні. Циклічні поверхні .....	67	10.2. Перетин кривих поверхонь площиною .....	87
7.5. Поверхні обертання .....	68	10.3. Взаємний перетин кривих поверхонь .....	91
7.6. Поверхні обертання другого порядку .....	69	10.4. Взаємний перетин кривих поверхонь, з яких одна є проєкціовальною .....	92
7.7. Гвинтові поверхні .....	71	10.5. Взаємний перетин кривих поверхонь у загальному положенні .....	94
7.8. Поверхні паралельного перенесення .....	73	10.6. Взаємний перетин кривих поверхонь другого порядку по плоских кривих .....	98
7.9. Поверхні, подані дискретним каркасом .....	73	<i>Запитання та завдання</i> .....	99
<i>Запитання та завдання</i> .....	75	<b>Глава 11. Аксонометричні проєкції</b> .....	100
<b>Глава 8. Дискретизація та інтерполяція поверхонь</b> .....	76	11.1. Основні поняття та визначення .....	100
8.1. Дискретне подання поверхонь .....	76	11.2. Прямокутні ізометрія та диметрія .....	101
8.2. Дискретизація, паркетування та апроксимація поверхонь .....	76	11.3. Косокутна фронтальна диметрія .....	104
8.3. Інтерполяція дискретних каркасів поверхонь .....	78	11.4. Розв'язування позиційних задач в аксонометрії .....	105
<i>Запитання та завдання</i> .....	80	<i>Запитання та завдання</i> .....	107
<b>Глава 9. Розгортки кривих поверхонь</b> .....	80		
9.1. Побудова розгортки розгортних поверхонь .....	80		

## Розділ II. ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

<b>Глава 12. Загальні відомості про вироби та креслення</b> .....	108	14.4. Умовності та спрощення при побудові зображень .....	145
12.1. Відомості про державні стандарти .....	108	<i>Запитання та завдання</i> .....	148
12.2. Вироби та їхні складові частини .....	108	<b>Глава 15. Робочі креслення та ескізи деталей</b> .....	149
12.3. Конструкторські документи та стадії проектування .....	109	15.1. Вимоги до робочого креслення деталі ...	149
12.4. Позначення виробів та конструкторських документів .....	110	15.2. Правила оформлення робочих креслень .....	149
<i>Запитання та завдання</i> .....	110	15.3. Нанесення розмірів .....	150
<b>Глава 13. Оформлення креслень</b> .....	111	15.4. Технологічні особливості конструкції деталей машин .....	153
13.1. Формати креслень. Основний напис та додаткова графа .....	111	15.5. Вибір та позначення матеріалів на робочих кресленнях .....	158
13.2. Типи ліній .....	113	15.6. Поняття про граничні відхилення розмірів та нанесення їх на кресленнях .....	159
13.3. Масштаби .....	115	15.7. Позначення шорсткості поверхні, покриття, термічної та іншої обробки деталі .....	161
13.4. Шрифти креслярські .....	115	15.8. Написи та технічні вимоги на робочих кресленнях .....	165
13.5. Штриховка в розрізах та перерізах .....	118	15.9. Приклади виконання робочих креслень деталей .....	167
13.6. Нанесення розмірів .....	119	15.10. Особливості, послідовність та правила виконання ескізів деталей .....	171
13.7. Елементарні геометричні побудови .....	125	<i>Запитання та завдання</i> .....	173
<i>Запитання та завдання</i> .....	137		
<b>Глава 14. Зображення</b> .....	138		
14.1. Вигляди .....	138		
14.2. Розрізи, перерізи .....	140		
14.3. Виносні елементи .....	145		

<b>Глава 16. З'єднання та передачі</b> .....	174	18.2. Вибір кількості зображень .....	218
16.1. Класифікація з'єднань .....	174	18.3. Умовності та спрощення	
16.2. Різьбові з'єднання .....	174	на складальних кресленнях .....	218
16.3. Шпонкові з'єднання .....	191	18.4. Розміри на складальних кресленнях .....	221
16.4. Шліцьові з'єднання .....	194	18.5. Оформлення складальних креслень .....	222
16.5. Зварні з'єднання .....	198	18.6. Специфікація .....	224
16.6. Заклепкові з'єднання .....	199	<i>Запитання та завдання</i> .....	225
16.7. З'єднання паянням,		<b>Глава 19. Виконання та читання схем</b> .....	225
склеюванням та зшиванням .....	202	19.1. Кінематичні схеми .....	226
16.8. Зубчасті передачі .....	202	19.2. Електричні схеми .....	229
<i>Запитання та завдання</i> .....	207	19.3. Гідравлічні та пневматичні схеми .....	229
<b>Глава 17. Креслення загального вигляду</b> .....	208	<i>Запитання та завдання</i> .....	229
17.1. Читання креслень загального вигляду ...	208	<b>Глава 20. Елементи</b>	
17.2. Деталювання креслень		<b>будівельного креслення</b> .....	233
загального вигляду .....	211	20.1. Особливості оформлення	
17.3. Врахування умовностей та спрощень		будівельних креслень .....	233
креслень загального вигляду		20.2. Умовні графічні позначення	
при деталюванні їх .....	211	на будівельних кресленнях .....	233
<i>Запитання та завдання</i> .....	215	20.3. Плани, розрізи та фасади будівель .....	236
<b>Глава 18. Складальні креслення</b> .....	215	<i>Запитання та завдання</i> .....	237
18.1. Зміст складальних креслень .....	215		

### Розділ III. ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

<b>Глава 21. Загальні відомості</b> .....	238	22.5. Спряження двох прямих колою .....	256
21.1. Предмет і метод		22.6. Алгоритми нерухомого	
обчислювальної геометрії .....	238	та рухомого екранів .....	257
21.2. Системи координат, що застосовуються		22.7. Площа та координати центра ваги	
в обчислювальній геометрії .....	239	плоскої фігури .....	258
21.3. Перетворення координат		<i>Запитання та завдання</i> .....	259
і деякі точкові перетворення .....	241	<b>Глава 23. Геометричне моделювання</b>	
21.4. Геометричні образи: вимірність		<b>у просторі</b> .....	260
і функціональна параметризація .....	244	23.1. Задання площини та ліній .....	260
21.5. Форми задання геометричних образів ...	246	23.2. Задання поверхонь .....	262
<i>Запитання та завдання</i> .....	247	23.3. Алгоритми розв'язання	
<b>Глава 22. Геометричне моделювання</b>		позиційних задач .....	264
<b>на площині</b> .....	248	23.4. Візуалізація ліній та поверхонь .....	267
22.1. Пряма .....	248	23.5. Моделювання розгортки .....	277
22.2. Коло .....	250	23.6. Геометричне моделювання	
22.3. Задача спряження двох кіл третім .....	253	наближеними методами .....	279
22.4. Екстремальні випадки задачі спряження ..	254	<i>Запитання та завдання</i> .....	281

### Розділ IV. КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

<b>Глава 24. Основні положення</b> .....	282	<i>Запитання та завдання</i> .....	287
24.1. Поняття		<b>Глава 25. Технічне забезпечення</b>	
про комп'ютерну графіку .....	282	<b>комп'ютерної графіки</b> .....	287
24.2. Історія і перспективи розвитку		25.1. Функціональний склад комп'ютера.	
комп'ютерної графіки .....	283	Центральний процесорний пристрій	
24.3. Основні галузі застосування		та критерії його вибору .....	287
комп'ютерної графіки та її компонентів .....	284		

25.2. Пристрої введення графічної інформації .....	289	<b>Глава 27. Програмне забезпечення комп'ютерної графіки .....</b>	<b>313</b>
25.3. Пристрої введення — виведення графічної інформації .....	291	27.1. Програміська модель інтерактивної графіки .....	313
25.4. Пристрої виведення графічної інформації .....	294	27.2. Процедурно-орієнтовані мови. Текстові і графічні редактори .....	316
<i>Запитання та завдання</i> .....	300	27.3. Пакети прикладних програм .....	320
<b>Глава 26. Основи графічного подання інформації .....</b>	<b>301</b>	27.4. Побудова найпростіших геометричних об'єктів .....	322
26.1. Типи геометричних моделей .....	301	27.5. Алгоритми побудови креслень машинобудівних деталей .....	323
26.2. Візуалізація .....	307	<i>Запитання та завдання</i> .....	336
26.3. Розподіл екрана .....	310	<i>Список рекомендованої літератури .....</i>	<i>338</i>
<i>Запитання та завдання</i> .....	312		

Навчальне видання

*Михайленко Всеволод Євдокимович  
Найдиш Володимир Михайлович  
Підкоритов Анатолій Миколайович  
Скидан Іван Андрійович*

# Інженерна та КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА



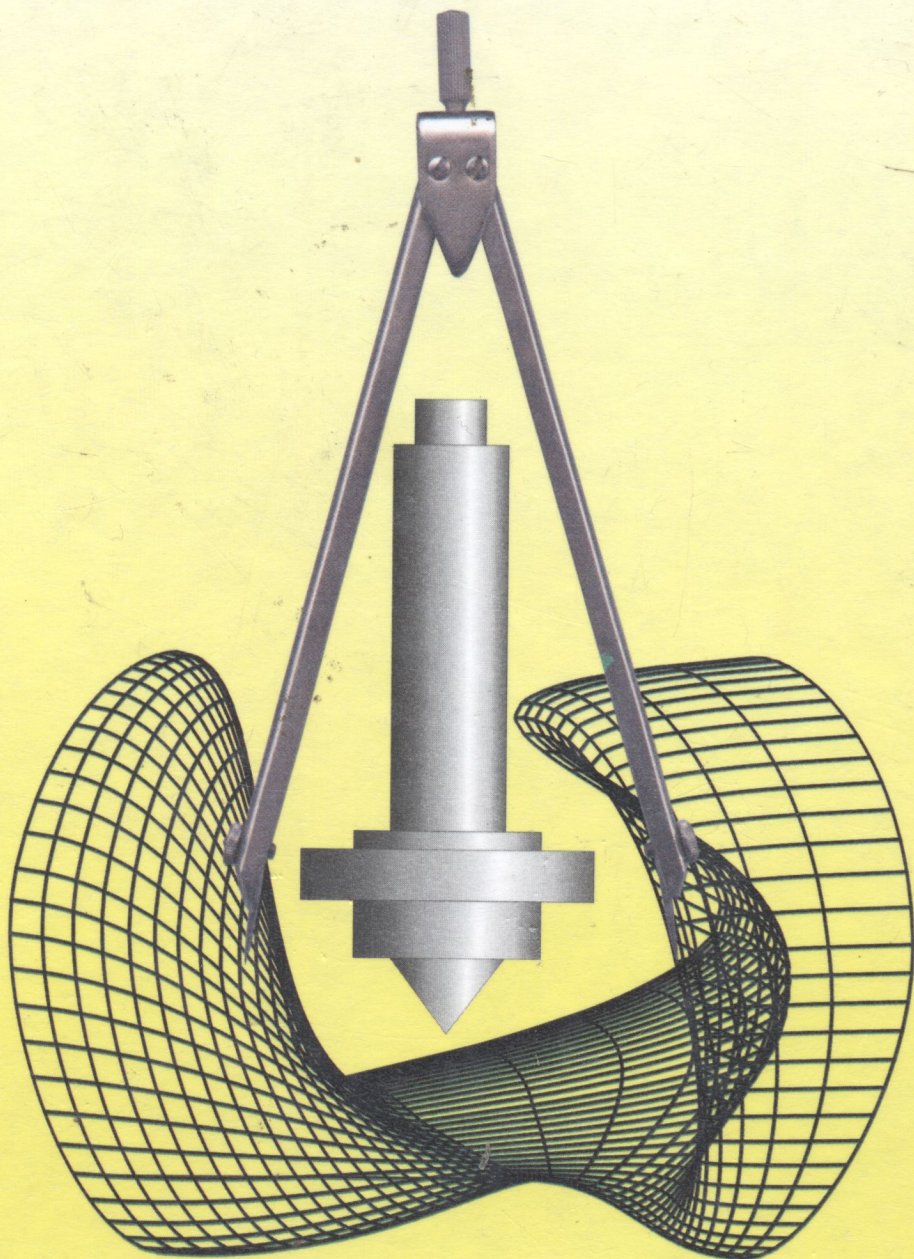
Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*  
Художні редактори: *І. Г. Сухенко, Г. С. Муратова*  
Технічний редактор *А. І. Омоховська*  
Коректори: *Л. М. Байбородіна, С. А. Школьник*  
Оператор *Н. П. Довлетукаєва*

Підп. до друку 11.01.2000. Формат 70 × 100/16.  
Папір офс. № 1. Гарнітура Times New Roman Сут.  
Ум. друк. арк. 27,73. Ум. фарбовідб. 28,37. Обл.-вид. арк. 27,70.  
Вид. № 9839. Зам. № 0-61

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7

Надруковано з оригіналу-макета, виготовленого у видавництві «Вища школа»,  
у ЗАТ «Київська книжкова фабрика», 01054, Київ-54, вул. Воровського, 24

# ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА графіка



·ВИЩА ШКОЛА·