

624(075)
17 79

**Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет**

А.С. Моргун

Практикум з будівельної механіки

Вінниця ВДТУ 2000

05
Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

А.С. Моргун

Практикум з будівельної механіки

НТБ ВНТУ



401636

624(075) M 79 2000

Моргун А.С. Практикум з будівельної механіки

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів всіх будівельних спеціальностей. Протокол № 5 від 28 січня 1999 р.

Вінниця ВДТУ 2000

УДК 624.04

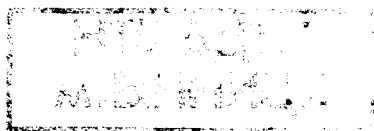
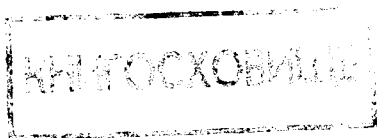
Моргун А.С. (Практикум з будівельної механіки. Навчальний посібник. В. : ВДТУ, 2000.-134 с. Укр. мовою)

У навчальному посібнику викладено класичні методи розрахунку статично невизначених систем . Наведено характерні типові задачі з детальним рішенням. Зміст посібника відповідає програмі курсу дисципліни “Будівельна механіка”.

Призначений для студентів будівельних спеціальностей .
Іл. 73 Табл. 7 Бібліограф. 6 назв.

Рецензенти: О.Ф. Яременко, д.т.н.,проф.
В.А.Огородніков, д.т.н.,проф.
М.М. Сорока, к.т.н., доц.

401636



1. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ РАМИ

1.1. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ НА СИЛОВІ НАВАНТАЖЕННЯ

Рама - система із стержнів, які жорстко або шарнірно з'єднані в вузлах.

Одним із найважливіших методів розрахунку статично-невизначених рам є метод сил. В ньому за основні (зайві) невідомі приймають узагальнені реактивні сили в відкинутих зв'язках системи.

Число зайвих невідомих називають ступенем статичної невизначеності, вона може бути визначена за формулою:

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д = C - 3Д \quad (1.1)$$

де C - загальне число зв'язків, $Д$ - число дисків, C_0 - кількість шарнірів.

Для переходу від заданої статично невизначеної рами до основної системи потрібно відкинути зайві зв'язки і замість них прикласти невідомі узагальнені сили X_1, X_2, \dots, X_n . Від вибору основної системи залежить простота і точність розрахунку рами.

Після переходу до основної системи записують канонічні рівняння методу сил із умови, що основна система має працювати як і задана:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \Delta_{2p} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \Delta_{np} = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Кожне з цих рівнянь виражає умову, що переміщення по напрямку кожної невідомої узагальненої сили від усіх невідомих і від заданого навантаження рівні нулю, бо в заданій системі по цих напрямках є зв'язки.

Коефіцієнти при невідомих та вільні члени системи (1.2) знаходяться за допомогою інтеграла Максвела-Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EI} ds ; \Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_p}{EI} ds \quad (1.3)$$

Попередньо потрібно побудувати епюри $M_1, M_2 \dots M_n$ від одиничних сил $X_1, X_2 \dots X_n$ і епюру M_p від заданого навантаження.

Обчислені коефіцієнти при невідомих і вільні члени перед рішенням системи (1.2) потрібно перевірити.

Універсальна перевірка:

$$\sum \delta = \sum \delta_{ii} + 2 \sum \delta_{ik} = \delta_{\sigma\sigma} = \sum \int \frac{M_\sigma^2}{EI} ds \quad (1.4)$$

де M_σ - сумарна одинична епюра

$$M_\sigma = M_1 + M_2 + \dots + M_n \quad (1.5)$$

Щоб не перенести на епюру M_σ якусь випадкову помилку її доцільно будувати безпосередньо приклавши до основної системи одиничні невідомі сили $X_1, X_2 \dots X_n$.

Коли похибка при універсальній перевірці недопустима ($> 1\%$) потрібно провести пострічкову перевірку: сума коефіцієнтів при невідомих в кожному рядку $\delta_i = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}$ має бути рівна величині:

$$\delta_{i\sigma} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_\sigma}{EI} ds \quad (1.6)$$

Перевірка вільних членів - їх сума має дорівнювати величині:

$$\Delta_{\sigma p} = \sum \int \frac{M_\sigma \cdot M_p}{EI} ds \quad (1.7)$$

Для побудови кінцевої епюри згинальних моментів зручно скористатись формулою :

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n + M_p \quad (1.8)$$

Статична перевірка кінцевої епюри моментів: умова рівноваги моментів у всіх вузлах рами.

Підсумковою перевіркою є кінематична (деформаційна) перевірка: рівність нулю умовного переміщення системи на напрямку всіх невідомих від всіх невідомих і навантаження:

$$\Delta_\sigma = \sum \int \frac{\bar{M}_\sigma \cdot M}{EI} ds = 0 \quad (1.9)$$

Отже, сумарна одинична епюра моментів буде використана уже втретє.

Має виконуватись також будь-яка умова:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M}{EI} ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.10)$$

де M_i - будь-яка одинична епюра, n - число невідомих в рамі.

Варіант останньої перевірки - перевірка по замкнутому контуру: сума приведених (тобто поділених на жорсткість EI відновлених стержнів рами) площ епюри M , що знаходяться всередині кожного замкненого безшарнірного контуру, має бути рівна сумі приведених площ, що знаходяться ззовні цього контуру.

Епюри поперечних сил Q , та поздовжніх сил N будують як і в статично визначених системах. Перевірка епюр Q, N : для будь-якої відсіченої частини рами сума проєкцій на дві осі всіх діючих сил - зовнішніх і внутрішніх - має бути рівна нулю.

Приклад 1.1

Розрахувати раму, рис 1.1, на силі навантаження (побудувати епюри M, Q, N).

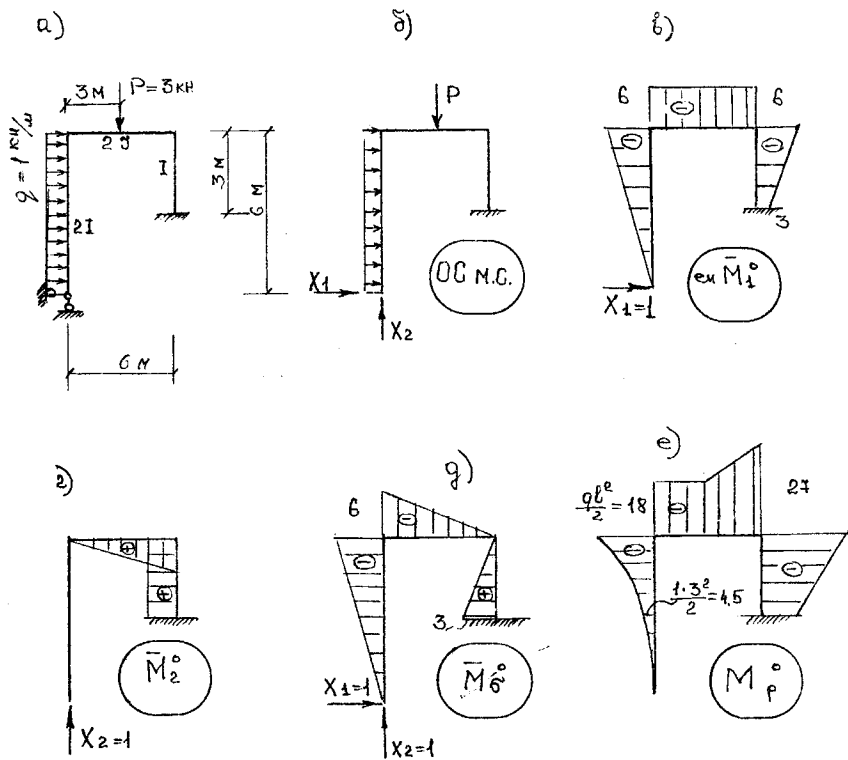


Рис. 1.1

За формулою $n = C_0 - 3$ визначимо степінь статичної невизначеності $n = 5 - 3 = 2$. На рис. 1.1, б показано основну систему методу сил. Канонічні рівняння мають вигляд :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_1 p = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_2 p = 0$$

Для обчислення коефіцієнтів перед невідомими та вільних членів системи потрібно визначити переміщення δ_{ik} , $\Delta_i p$. Для цього побудуємо в основній системі від $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, P та g епюри згинальних моментів (рис. 1.1, в, г, е).

$$\delta_{11} = M_1^0 \cdot M_1^0 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 1/2}_{\omega} \cdot \underbrace{2/3 \cdot 6}_{y_c} \cdot \frac{1}{2EI} + \underbrace{6 \cdot 6}_{\omega} \cdot \underbrace{6}_{y_c} \cdot \frac{1}{2EI} + \frac{3}{6EI} \cdot (2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6) = \frac{207}{EI};$$

$$\delta_{12} = \bar{M}_1^0 \cdot \bar{M}_2^0 = \delta_{21} = -\frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \underbrace{6}_{y_c} \cdot \frac{1}{2EI} + \frac{6+3}{2} \cdot \underbrace{3 \cdot 6}_{y_c} \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{135}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = M_p^0 \cdot M_1^0 = \frac{6}{6EI \cdot 2} (4 \cdot 4,5 \cdot 3 + 18 \cdot 6) + \frac{6 \cdot 3 \cdot 18}{\omega y_c} \cdot \frac{1}{2EI} + \underbrace{\frac{18+27}{2}}_{\omega} \cdot \underbrace{3 \cdot 6}_{y_c} \cdot \frac{1}{2EI} + \frac{3}{6EI} (2 \cdot 6 \cdot 27 + 2 \cdot 9 \cdot 3 + 6 \cdot 9 + 27 \cdot 3) = \frac{702}{EI}$$

$$\delta_{22} = M_2^0 \cdot M_2^0 = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2EI} + 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{144}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = M_p^0 \cdot M_2^0 = -\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{18}{y_c} \cdot \frac{1}{2EI} - \frac{3}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot 3 \cdot 18 + 2 \cdot 6 \cdot 27 + 3 \cdot 27 + 6 \cdot 18) - \underbrace{\frac{27+9}{2}}_{\omega} \cdot \underbrace{3 \cdot 6}_{y_c} \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{520}{EI}.$$

Для визначення переміщень в рамках можна:

1) Враховувати лише першу складову формули Максвела-Мора

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_p}{EI} ds \quad (1.11)$$

Врахування другої складової (поперечні сили, що викликають деформації зсуву) змінюють величину прогину, обчисленого з урахуванням згинальних моментів (тобто деформації згину) лише на 3%.

2) Переміщення можна визначати за правилом Верещагіна:

$$\Delta_{ip} = \sum \Omega_{M_p} \cdot y_c \cdot \frac{1}{EI} \quad (1.12)$$

де Ω_{M_p} - площа криволінійної епюри моментів: y_c - ордината обов'язково на прямолінійній епюрої M_i під центром ваги криволінійної епюри M_p .

3) Можна визначити переміщення за формулою Мюллера-Бреслау і коли епюри M прямолінійні:

$$\Delta_{ip} = \frac{l}{6EI} \cdot (2a \cdot c + 2d \cdot b + a \cdot d + b \cdot c) \quad (1.13)$$

позначення a, b, c, d, l - на рис. 1.2, а.

4) Переміщення можна визначити за правилом Сімпсона, коли криволінійна епюра M_p - парабола не вище третього порядку

$$\Delta_{ip} = \frac{l}{6EI} (M_p^A \cdot M_i^A + 4 \cdot M_p^C \cdot M_i^C + M_p^B \cdot M_i^B) \quad (1.14)$$

позначення ординат на рис. (1.2, б).

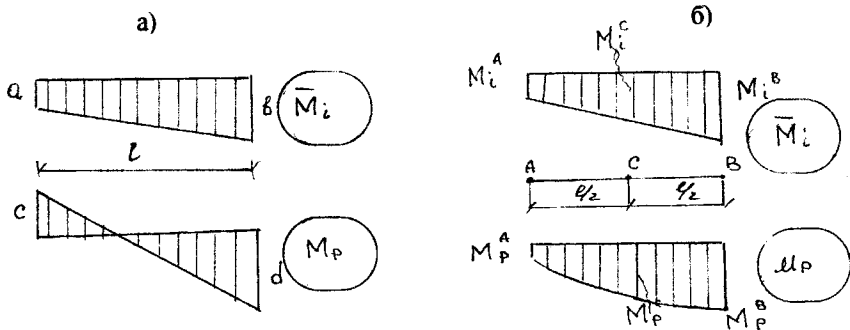


Рис.1.2

Для перевірки коефіцієнтів при невідомих побудована сумарна епюра

$$\text{(рис. 1.1, д)} \quad M_{\sigma}^0 \cdot M_{\sigma}^0 = \sum \delta_{ik}$$

$$\delta_{\sigma\sigma} = M_{\sigma}^0 \cdot M_{\sigma}^0 = \left(\frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2EI} \right) \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{81}{EI};$$

$$\sum \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{207}{EI} + \frac{144}{EI} + \frac{-2 \cdot 135}{EI} = \frac{81}{EI}.$$

Перевірка вільних членів:

$$M_{\sigma}^0 \cdot M_p^0 = \sum \Delta_{ik}$$

$$\Delta_{\sigma p} = M_{\sigma}^0 \cdot M_p^0 = \frac{6}{6EI} \cdot 2 \cdot (4 \cdot 4.5 \cdot 3 + 18 \cdot 6) + \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2EI} +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} \cdot [2 \cdot 18 \cdot 3 + 3 \cdot 27] + \frac{3}{6EI} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 9 + 27 \cdot 3) = \frac{182}{EI};$$

$$\sum (\Delta_{1p} + \Delta_{2p}) = \frac{702}{EI} + \left(-\frac{520}{EI} \right) = \frac{182}{EI}.$$

Підставивши отримані та перевірені значення переміщень в рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} 207 \cdot X_1 - 135 \cdot X_2 + 702 = 0 \\ -135 \cdot X_1 + 144 \cdot X_2 - 520 = 0 \end{cases}$$

Корені системи: $X_1 = -2,67 \text{ кН}$, $X_2 = 1,11 \text{ кН}$.

Кінцеву епюру згинальних моментів будуюмо згідно виразу:

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_p \quad (1.15)$$

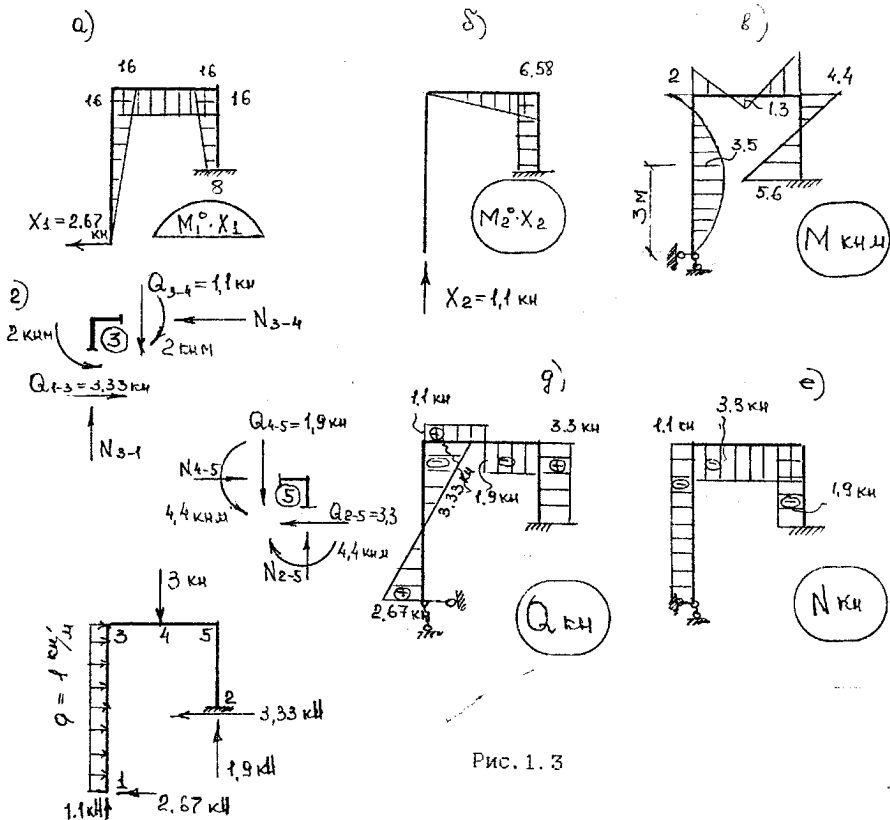


Рис. 1.3

Статична перевірка кінцевої епюри моментів полягає в тому, що всі вузли рами мають бути врівноважені, тобто сума моментів в будь-якому вузлі дорівнює нулю (рис. 1.3, г). Така перевірка необхідна, але недостатня. Гарантію вірності побудови епюри M дає кінематична перевірка: при перемноженні епюри M на епюру M_{σ}^0 має бути нуль.

$$\begin{aligned}
 M \cdot M_{\sigma}^0 &= \frac{6}{6 \cdot 2EI} (-4 \cdot 3 \cdot 3.5 + 6 \cdot 2) + \\
 &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1.3 \cdot 3 - 6 \cdot 1.3 + 3 \cdot 2) + \\
 &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} [-2 \cdot 1.3 \cdot 3 + 3 \cdot 4.4] + \frac{3}{6EI} (2 \cdot 5.6 \cdot 3 - 3 \cdot 4.4) = \\
 &= \frac{54}{EI} - \frac{53.85}{EI} = \frac{0.15}{EI}
 \end{aligned}$$

Похибка складає $(0.15 \cdot 100)/53.85 = 0.28\%$

Допустимою вважаємо похибку до 1%.

Для побудови епюр поперечних та поздовжніх сил скористаємося диференційною залежністю між згинальним моментом та поперечною силою та формулою для визначення поперечної сили в навантаженому прогоні:

$$\frac{\partial M}{\partial s} = Q, \quad Q = Q^0 + \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{лів}}}{l} \quad (1.16)$$

Представимо основну схему у вигляді системи стержнів, шарнірно спертих на вузли рами, а жорсткість прикріплення кінця кожного стержня рами до вузла компенсуємо моментом, що діє на стержень (див. рис. 1.4).

Розглянемо кожний стержень окремо.

На стержень 1-3 діє розподілене навантаження.

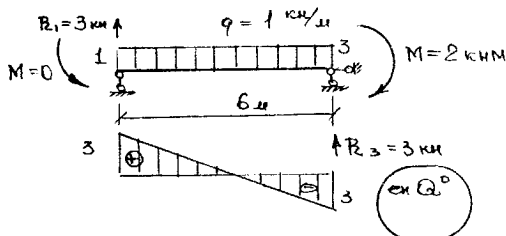


Рис. 1.4

$$Q_1 = 3 + \left(\frac{-2 - 0}{6} \right) = 2.67 \text{ кН}$$

$$Q_3 = -3 + \left(\frac{-2 - 0}{6} \right) = -3.33 \text{ кН}$$

На лівій половині рігеля (стержень 3-4) поперечна сила:

$$Q_{3-4} = \frac{1.3 - (-2)}{3} = 1.1 \text{ кН}$$

На правій половині рігеля (стержень 4-5):

$$Q_{4-5} = \frac{4.4 - 1.3}{3} = -1.9 \text{ кН}$$

На всій довжині стержня 2-5 поперечна сила постійна:

$$Q_{2-5} = \frac{4.4 - (-5.6)}{3} = 3.33 \text{ кН}$$

Епюру поперечних сил зображено на рис. 1.3, д.

Для побудови епюри поздовжніх сил виділяють вузли 3 та 5. До них замість відкинутих стержнів прикладають відомі поперечні сили. При цьому додатні поперечні сили направляють так, щоб вони обертали вузли за годинниковою стрілкою. Чого не вистачає до рівноваги в вузлі, те й буде поздовжньою силою.

Для вузла 3 (рис. 1.3, г):

$$\sum X = 3.33 - N_{3-4} = 0; N_{3-4} = 3.33 \text{ кН (стиснення)}$$

$$\sum Y = -1.1 + N_{3-1} = 0; N_{3-1} = 1.1 \text{ кН (стиснення)}$$

Для вузла 5 (рис. 1.3, г):

$$\sum Y = -1.9 \text{ кН} + N_{2-5} = 0; N_{2-5} = 1.9 \text{ кН (стиснення)}$$

Поздовжня сила в цьому вузлі уже показана стиснутою в вузлі 3. Епюру N наведено на рис. 1.3, е. Перевіркою побудованих епюр Q , N слугує статична перевірка рівноваги сил для всієї рами. На рис. 1.3, ж показана рама з відкинутими зв'язками та з прикладеними взаємними силами, взятими з епюр Q , N .

$$\sum X = 1.6 - 2.67 - 3.33 = 0 \quad \sum Y = -3 + 1.1 + 1.9 = 0$$

Отже, епюри побудовано вірно.

При необхідності обчислення максимального згинального моменту в лівому стояку зручно скористатись диференційною залежністю між навантаженням та поперечною силою:

$$X_0 = \frac{Q_{1-3}}{q} = \frac{2.67}{1} = 2.67 \text{ м}$$

Величина M_{\max} визначається з інтегральної залежності, що існує між згинальними моментами та поперечною силою:

$$M = \int_a^b Q(x) dx \quad (1.17)$$

$$M_{\max} = \frac{Q_{1-3} \cdot X_0}{2} = 2.67 \cdot 2.67 \cdot \frac{1}{2} = 3.56 \text{ кНм}$$

1.2. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНОЇ РАМИ НА ДІЮ ТЕМПЕРАТУРИ

Приклад 1.2

Побудувати епюри M , Q , N в рамі, розраховані в *прикладі 1.1* від теплової дії (рис. 1.5, а), коли $EI = 13.5 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$ при висоті перетину лівого стояка і рігеля $d_1 = 0.9 \text{ м}$, а правої стійки $d_2 = 0.3 \text{ м}$. Коефіцієнт теплового розширення $\alpha = 0.00001 \text{ град}^{-1}$.

При розрахунку рам на теплову дію перехід до основної системи аналогічний, як і при розрахунку на силову дію. Аналогічно обчислюються і перевіряються коефіцієнти при невідомих в канонічних рівняннях. Різниця буде в тому, що вільні члени записуються Δ_{1t} , Δ_{2t} ... Δ_{nt} та розраховуються з використанням четвертої та п'ятої складової формули Максвелла-Мора:

$$\sum \Delta_{it} = \sum \alpha \frac{(t_1 - t_2)}{d} \int M_{\sigma} ds + \sum \frac{\alpha (t_1 + t_2)}{2} \int N_{\sigma} ds \quad (1.18)$$

або

$$\sum \alpha \frac{(t_1 - t_2)}{d} \Omega_{M_c} + \sum \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \Omega_{N_c} \quad (1.19)$$

де Ω_{M_c} та Ω_{N_c} - площі відповідно сумарних одиничних епюр згинальних моментів та поздовжених сил. $t = (t_1 + t_2)/2$ - температура середнього волокна, $\Delta_t = t_1 - t_2$ приріст температури крайніх волокон стержня.

Знак добутку в першій складовій (1.17) додатний, коли еюра M_c розташована на більш нагрітих волокнах, в другій складовій (1.17) буде знак "+" коли N_c та t мають однаковий знак.

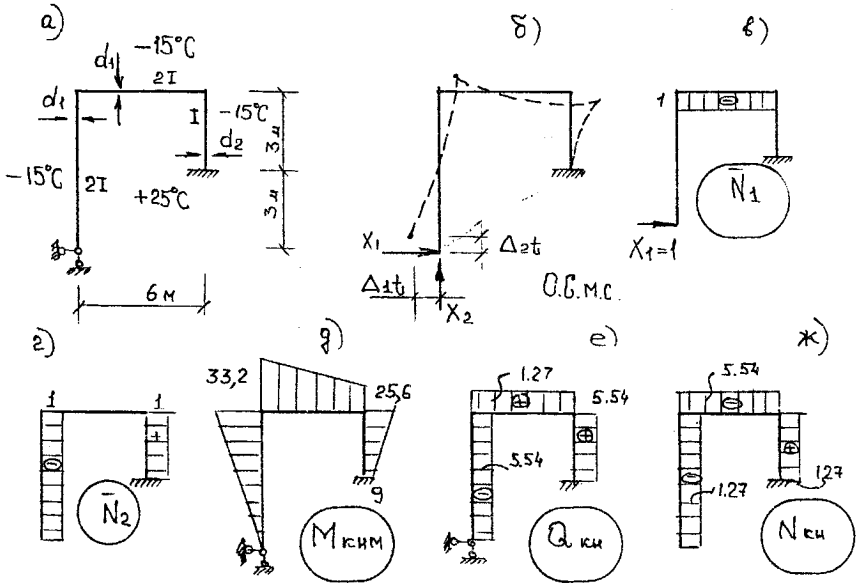


Рис. 1.5

Основна система методу сил для рами, наведена на рис. 1.5, б.

Канонічні рівняння:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Залишаються без змін епюри M_1, M_2, M_σ , що на рис. 1.1 в, 1.1 г, 1.1 д та обчислені по них коефіцієнти при невідомих: $EI\delta_{11} = 207$, $EI\delta_{12} = -135$, $EI\delta_{22} = 144$. Для знаходження вільних членів рівнянь, тобто теплових переміщень основної системи використаємо епюри M_1, M_2 , а також епюри N_1, N_2 (рис. 1.5, в, г).

За формулою (1.18)

$$\Delta_{11} = -\frac{(25^\circ + 15^\circ)\alpha}{0.4} \cdot \left(\frac{6 \cdot 6}{2}\right) - \frac{(25^\circ + 15^\circ)\alpha}{0.4} \cdot \left(\frac{6 \cdot 6}{2}\right) - \frac{(25^\circ + 15^\circ)\alpha}{0.3} \cdot \left(\frac{(6+3) \cdot 3}{2}\right) - \frac{(25^\circ - 15^\circ)\alpha}{2} \cdot (6-1) = -7230 \cdot \alpha;$$

$$\Delta_{21} = -\frac{(25+15)\alpha}{0.4} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} + \frac{25+15}{0.3} \alpha \cdot 6 \cdot 3 - \frac{(25-15)\alpha}{2} \cdot 1 \cdot 6 + \frac{(25-15)\alpha}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 4185 \cdot \alpha.$$

Переміщення від рівномірного нагріву малі в порівнянні з переміщеннями від нерівномірного нагріву.

$$X_1 = 41.11 \cdot aEI = 41.11 \cdot 0.135 = 5.55 \text{ кН}$$

$$X_2 = 9.48 \cdot aEI = 9.48 \cdot 0.135 = 1.28 \text{ кН}$$

Згинальні моменти в характерних перетинах обчислюються за формулою:

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 \quad (1.21)$$

Кінцева епюра M приведена на рис. 1.5, д. Універсальна кінематична перевірка епюри M проводиться за формулою:

$$\Delta_\sigma = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_\sigma}{EI} ds + \sum \int \frac{N \cdot \bar{N}_\sigma}{EI} ds + \sum \Delta_{it} = 0 \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma} &= \frac{33.2 \cdot 6 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot EI} + \frac{6}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot 6 \cdot 33.2 + 6 \cdot 25.6) - \\ &- \frac{3}{6EI} (2 \cdot 3 \cdot 9 + 25.6 \cdot 3) - 7230\alpha + 4185\alpha = \\ &= \frac{1}{EI} (199 + 277 - 65.4) - 3045\alpha = \frac{410.6}{13500} - 3045 \cdot 0.00001 = 0.0304 - \\ &- 0.0304 = 0. \end{aligned}$$

Епюри Q , N наведені на рис. 1.5, е, ж. Вони побудовані по кінцевій епюрі M , як це було виконано в прикладі 1.1.

1.3. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНОЇ РАМИ НА ВИМУШЕНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ

Приклад 1.3. Для рами, розрахованої в прикладах 1.1 і 1.2 побудувати епюру згинальних моментів від горизонтального, вертикального та кутового зміщення епюри 2, які відповідно дорівнюють: $a = 1$ см, $b = 2$ см, $\gamma = 0,01$ рад. (34'30") (рис.1.5, а)

При розрахунку рам на зміщення епюр перехід до основної системи аналогічний як і при розрахунку на силові дії (рис. 1.5,б).

Система канонічних рівнянь теж подібна з тією різницею, що вільні члени - це переміщення епюр основної системи. Вони визначаються за шостою складовою формули Максвелла-Мора:

$$\Delta_{ic} = -\sum R_i \cdot C \quad (1.23)$$

де R_i - опорна реакція в опорі, що змістилась від одиничних сил, що діють на основну систему по напрямку невідомих, C - відповідне зміщення опори. Добуток $R_i \cdot C$ - додатний, коли реакція R_i направлена в сторону зміщення зв'язку C .

В тих випадках, коли невідомі прикладаються по напрямку завданих зміщень, вільні члени канонічних рівнянь будуть безпосередньо рівні цим зміщенням. При цьому додатними вважаємо ті зміщення, що співпадають за напрямком з тими невідомими, які прикладені не до відсіченої від опори частини рами, а до самої опори.

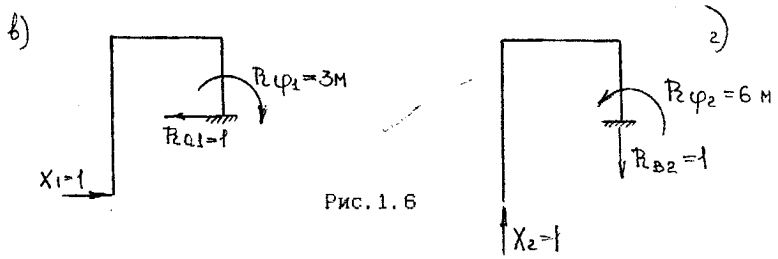
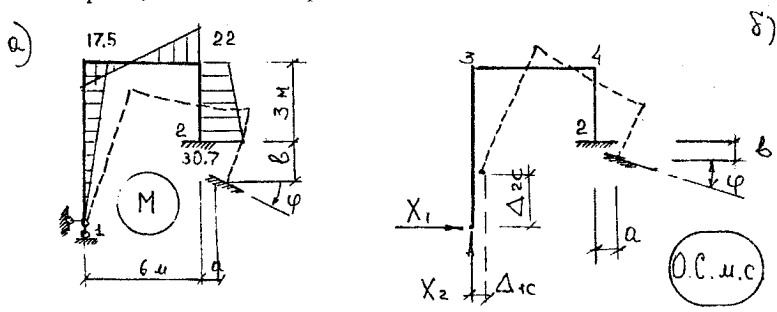


Рис. 1.6

До прикладу на рис. 1.6, а - канонічні рівняння:

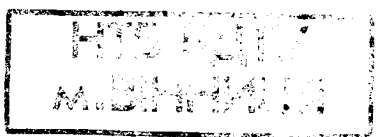
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{11} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{21} = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Зберігаються без змін епюри M_1, M_2, M_3 (рис. 1.1, в, г, д). Отже

$$EI\delta_{11} = 207, EI\delta_{12} = -135, EI\delta_{22} = 144.$$

Оскільки самі невідомі прикладені не в тому перерізі, який підлягає зміщенню, то для визначення Δ_{ic} - переміщень в основній системі скористаємось (1.14) та схемами на рис. 1.6, в, г, де показані реакції, що виникають від $x_1=1, x_2=1$

401636



$$EI\Delta_{1c} = -EI\sum R_{i1} \cdot C_i = -EI(R_{a1} \cdot a + R_{\varphi 1} \cdot \varphi) = -EI(-1 \cdot a + 3 \cdot \varphi) =$$

$$= 135 \cdot 10^5 (1 \cdot 0.01 - 3 \cdot 0.01) = -2.7 \cdot 10^6;$$

$$EI\Delta_{2c} = -EI\sum R_{i2} \cdot C_i = -EI(R_{b2} \cdot b + R_{\varphi 2} \cdot \varphi) = -EI(-1 \cdot b + b \cdot \varphi) =$$

$$= 135 \cdot 10^5 (-1 \cdot 0.02 - b \cdot 0.01) = 5.4 \cdot 10^6.$$

Канонічні рівняння методу сил запишуться:

$$\begin{cases} 207 \cdot X_1 - 135 \cdot X_2 - 2.7 \cdot 10^6 = 0 \\ -135 \cdot X_1 + 144 \cdot X_2 + 5.4 \cdot 10^6 = 0 \end{cases}$$

Рішення цієї системи рівнянь дає:

$$X_1 = -2930 \text{ Н} = -2,93 \text{ кН}; X_2 = -6490 \text{ Н} = -6,49 \text{ кН}.$$

Згинальні моменти в характерних перетинах :

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 \quad (1.25)$$

Кінцева еюра згинальних моментів в рамі показана на рис. 1.6, а.

Кінематична перевірка цієї еюри проводиться за формулою:

$$\Delta_{\sigma} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_{\sigma}}{EI} ds + \sum \Delta_{ic} = 0 \quad (1.26)$$

$$\Delta_{\sigma} = \frac{-1.75 \cdot 6 \cdot 4}{2 \cdot 2EI} - \frac{6}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot 17.5 \cdot 6 - 22 \cdot 6) - \frac{3}{6EI} (2 \cdot 30.75 \cdot 3 + 22 \cdot 3) +$$

$$+ \Delta_{1c} + \Delta_{2c} = - \left[-\frac{1}{EI} (105 + 39 + 125.5) - 0.02 + 0.04 \right] = -\frac{270}{13.5 \cdot 10^3} + 0.02 =$$

$$= -0.02 + 0.02 = 0.$$

2. Нерозрізні балки

2.1. РІВНЯННЯ ТРЬОХ МОМЕНТІВ

Нерозрізною називають статично невизначену суцільну балку, що має більше двох вертикальних опор. На рис. 2.1 наведено два суміжних прогони такої балки. Основну систему для розрахунку такої балки можна отримати за допомогою введення над опорами шарнірів, перетворивши її тим самим в сукупність однопрогонних шарнірно-опертих балок, за невідомі при цьому приймаються опорні згинальні моменти (рис. 2.1, б).

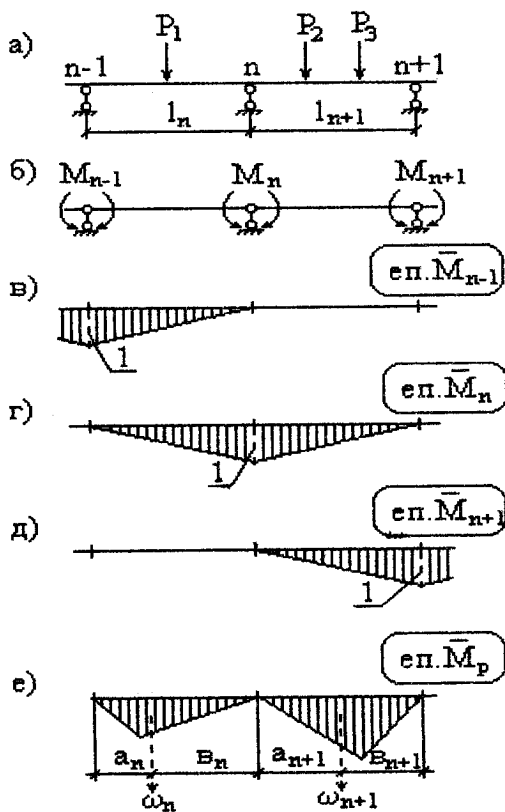


Рис. 2.1

Балки основної системи n і $n+1$, що розташовані відповідно зліва і справа від опори n (рис.2.1,б) будуть деформуватись тільки від навантаження і опорних моментів M_{n-1} , M_n , M_{n+1} . Опорні моменти, що діють лівіше опори $n-1$ і правіше опори $n+1$, не будуть впливати на деформацію балок L_n і L_{n+1} , тому в кожне із канонічних рівнянь методу сил буде входити лише по три невідомих:

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{np} = 0 \quad (2.1)$$

Це рівняння, як і будь-яке інше канонічне рівняння методу сил, являє собою рівняння нерозривності та показує, що взаємний поворот перетинів балки, розташованих нескінченно близько зліва і справа від введеного шарніра на опорі n , дорівнює нулю.

Після домноження (2.1) на $6EI_0$, підстановки значень $\delta_{n,n-1}$, $\delta_{n,n}$, $\delta_{n,n+1}$, Δ_{np} , знайдених шляхом перемноження епор, показаних на рис. 2.1,е та переносу вільного члена в праву частину, рівняння трьох моментів прийме вигляд

$$M_{n-1} \cdot L'_n + 2 \cdot M_n(L'_n + L'_{n+1}) + M_{n+1} \cdot L'_{n+1} = -6 \left(I_0 \cdot B_n^\phi / I_n + I_0 \cdot A_{n+1}^\phi / I_{n+1} \right) \quad (2.2)$$

де I_0 – довільне значення моменту інерції всіх прогонів;

$L'_n = L_n \cdot I_0 / I_n$ і $L'_{n+1} = L_{n+1} \cdot I_0 / I_{n+1}$ –приведені довжини прогонів.

$B_n^\phi = (a_n / L_n) \cdot w_n$ –права опорна реакція прогону L_n від фіктивного навантаження, рівнодійна якій дорівнює w_n ;

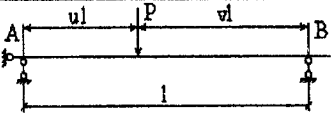
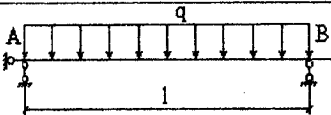
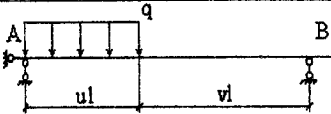
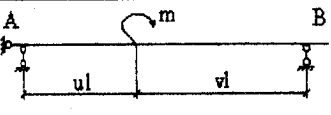
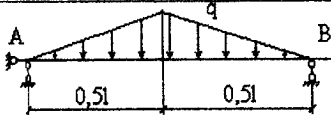
$A_n^\phi = (b_{n+1} / L_{n+1}) \cdot w_{n+1}$ – ліва опорна реакція прогону L_{n+1} від фіктивного навантаження з рівнодійною w_{n+1} ;

a_n і b_{n+1} – відстані від рівнодійних фіктивних навантажень до опори відповідно $n-1$ і $n+1$.

“Фіктивні” опорні реакції, домножені на 6, від різних видів навантаження прогонів наведені в табл. 2.1

Коли навантаження складається із декількох зосереджених сил то фіктивні реакції дорівнюють сумі реакцій, які відповідають кожній силі окремо.

Таблиця 2.1

Схема навантаження	6A	6B
	$Pl^2 u V (1 + V)$ При $u = \frac{3}{8} \cdot Pl$	$Pl^2 u V (1 + u)$ При $V = 0.5$ $u = \frac{3}{8} \cdot Pl$
	$qL^3/4$	$qL^3/4$
	$QL^3 u^2 (2-u)^2 / 4$	$qL^3 u^2 (2-u)^2 / 4$
	$-mL(1-3V^2)$ при $u = -mL/4$	$mL(1-3u^2)$ $=V = 0.5$ $mL/4$
	$5/32 \cdot qL^3$	$5/32 \cdot qL^3$

При використанні рівняння 2.2 в розрахунках потрібно:

а) жорсткі закріплення на крайніх опорах балки (рис 2.2) в основній системі умовно заміняти еквівалентними їм додатковими прогонами нескінченно малої довжини та нескінченно великої жорсткості (рис.2.2, зліва)

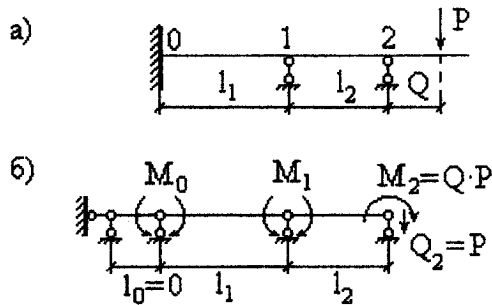


Рис. 2.2

б) консольні частини балки в основній системі умовно відкидаються, а їх дія замінюється відомими моментами і поперечними силами (рис. 2.2, б, справа). Поперечна сила на опорні моменти впливу не має.

Складемо систему рівнянь трьох моментів та обчисливши її, знайдемо опорні моменти.

Епюри M та Q для кожного прогону можуть бути побудовані за формулами:

$$M = M_p^0 + M_{n-1} \cdot L_{n-x}/L_n + M_n \cdot x/L_n \quad (2.3)$$

$$Q = Q_p^0 + M_n - M_{n-1}/L_n \quad (2.4)$$

де M_p^0 , Q_p^0 – епюри M та Q від заданого навантаження для простих шарнірно оперних балок основної системи.

Епюру M можна також побудувати шляхом геометричного складання епюри M_p^0 з епорами від опорних моментів в основній системі.

Для цього над опорами відкладають значення опорних моментів, ординати

яких з'єднують прямими лініями і від них відкладають ординати M_p^0 , тобто ніби "підвішують" до ліній опорних моментів.

Епюру Q після побудови епюри M можна також отримати за формулою

$$Q = dM/dx.$$

В точках, де $Q=0$ визначають максимальне значення прогонних згинальних моментів.

Після побудови епюри M потрібно виконати кінематичну перевірку; похибка має бути не більше 1%.

З урахуванням епюри Q , можна знайти опорні реакції за формулою

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n \quad (2.5)$$

де Q_{n+1} , Q_n – поперечні сили, що діють справа та зліва від опори n .

Після визначення опорних реакцій необхідно зробити перевірки рівноваги сил і моментів.

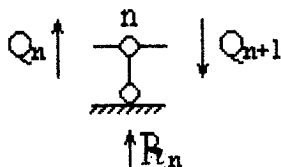


Рис. 2.3

Приклад 2.1. Трипрогонну нерозрізану балку на рис. 2.4 розрахувати на постійне рівномірне навантаження q . Розміри та жорсткість прольотів на рис. 2.4.

Ступінь статичної невизначеності при розрахунку за методом сил нерозрізної балки визначається за формулою $n = C_0 - 3$.

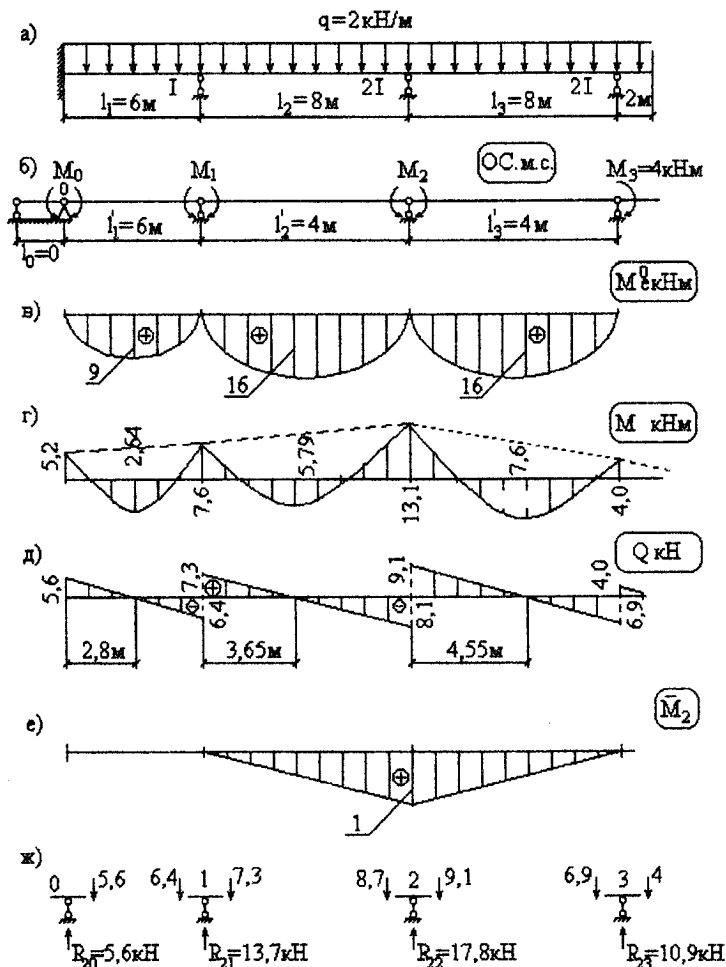


Рис. 2.4

Для нерозрізної балки на рис. 2.4 $n = 6 - 3 = 3$. За основну систему, прийняті ряд однопрогонних балок, з'єднаних врізними шарнірами (рис. 2.4). Справа замість жорсткого закріплення для розрахунку введено додатковий умовний прогін, жорсткість якого прямує до 0 ($L_0 \Rightarrow 0$). Зліва

відкинута консоль, її дія на балку замінена зосередженим моментом

$$M_3 = qL/2 = 4 \text{ кНм.}$$

За невідомі прийнято опорні моменти. Користуючись 2.2 та основною, системою (рис. 2.4), складемо рівняння трьох моментів для заданої балки, їх буде три – по числу невідомих моментів M_0, M_1, M_2 :

$$\begin{cases} 2M_0L'_1 + M_1L'_1 = -6(I_0/I_1) \cdot A_1^\phi \\ M_0L'_1 + 2M_1(L'_1 + L'_2) + M_2L'_2 = -6 \cdot I_0/I_1 \cdot B_1^\phi - 6 \cdot I_0/I_2 \cdot A_2^\phi \\ M_1L'_2 + 2M_2(L'_2 + L'_3) + L'_3M_3 = -6 \cdot I_0/I_2 \cdot B_2^\phi - 6 \cdot I_0/I_3 \cdot A_3^\phi \end{cases} \quad (2.6)$$

Приймемо $I_0 = I$, знайдемо довжини прогонів L'_1, L'_2, L'_3 та їх фіктивні реакції A_i^ϕ, B_i^ϕ . Оскільки $L'_i = L_i \cdot I_0/I$, то $L'_1 = 6\text{ м}$, $L'_2 = 4\text{ м}$, $L'_3 = 4\text{ м}$.

З табл. 2.1 знаходимо:

$$6A_1^\phi = 6B_1^\phi = 2 \cdot 6^3 / 4 = 108; \quad 6A_2^\phi = 6B_2^\phi = 6A_3^\phi = 6B_3^\phi = 28^3 / 4 = 256$$

На рис. 2.4, в наведено епюру згинальних моментів в основній системі.

$$\text{Момент на епюрі 3 } M_3 = -qL^2/2 = -2 \cdot 4/2 = 4 \text{ кНм.}$$

Підставляємо знайдені значення в (2.6), отримуємо

$$\begin{cases} 2M_0 \cdot 6 + 6M_1 = -108 \\ M_0 \cdot 6 + 2(6 + 4)M_1 + 4M_2 = -108 - (1/2) \cdot 256 \\ M_1 \cdot 4 + 2(4 + 4)M_2 - 4 \cdot 4 = -(1/2) \cdot 256 - (1/2) \cdot 256 \end{cases}$$

Корені системи лінійних рівнянь: $M_0 = -5,2 \text{ кНм}$, $M_1 = -7,63 \text{ кНм}$, $M_2 = -13,1 \text{ кНм}$.

В кожному прогоні кінцеву M будуємо як суму знайдених опорних моментів і епюри M_p^0 для простих однопрогонних балок основної системи (рис. 2.6, г). Епюру Q будуємо за 2.4.

Максимальні значення моментів (первісної) будуть знаходитись в точках, перетину епюри Q (похідної) з нульовою віссю ($(dM/dx)=Q$). Точки перетину знаходимо із розгляду подібності трикутників на епюрі.

На основі теореми Журавського знаходяться максимальні значення моментів в прогонах

$$M_{1\max} = (1/2) \cdot 5.6 \cdot 2.8 - 5.2 = 2.64 \text{ кНм.}$$

$$M_{2\max} = (1/2) \cdot 7.3 \cdot 3.65 - 7.6 = 5.79 \text{ кНм}$$

$$M_{3\max} = (1/2) \cdot 9.1 \cdot 4.55 - 13.1 = 7.77 \text{ кНм}$$

Епюри M і Q наведено на рис.2.4, г,д. По епюрі Q визначасмо опорні реакції(рис.2.4,ж)

$$R_0 = 5.6 \text{ км}; \quad R_1 = 13.7 \text{ км}; \quad R_2 = 17.8 \text{ км}; \quad R_3 = 10.4 \text{ км.}$$

Після побудови епюри M виконується кінематична перевірка-взаємний кут повертання опори 2 дорівнює нулю.

$$\begin{aligned} EI_0 \sum \int (M \cdot M_2 / EI) dx &= 1/2 \cdot 7.6 \cdot 8 \cdot 1/3 \cdot 1/2 - 1/2 \cdot 13.1 \cdot 8 \cdot 2/3 \cdot 1/2 + \\ &+ 2/3 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 1/2 \cdot 1/2 - 1/2 \cdot 13.1 \cdot 8 \cdot 2/3 \cdot 1/2 - 1/2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1/3 \cdot 1/2 + \\ &+ 2/3 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = -42.68 + 42.66 = -0.02 \end{aligned}$$

$$\text{Похибка } 0.02/42.66 \cdot 100\% = 0.047\% < 1\%$$

Статистична перевірка вірності розрахунку балки

$$\sum U = 5,6 + 13,7 + 17,8 + 10,9 - 2 \cdot 24 = 48 - 48 = 0$$

$$\sum M_0 = -5.2 - 13.7 \cdot 6 - 17.8 \cdot 14 - 10.9 \cdot 22 + 2 \cdot 24 \cdot 12 = -576.4 + 576 = -0.4$$

$$\text{Похибка } 0.4/576 \cdot 100\% = 0.07\%$$

2.2 МЕТОД ФОКУСІВ

Якщо в нерозрізній балці навантажений лише один прогін L_n (рис.2.5,а) то епюра згинальних моментів має вигляд, зображений на

рис. 2.5,б. Незважко встановити, що в кожному ненавантаженому прогоні при положенні навантаження справа(зліва) від нього, епюра моментів має нульову точку, причому положення цієї точки постійне і не залежить від інтенсивності і виду навантаження прогону. Ця точка називається моментним фокусом. Розрізняють ліві і праві моментні фокуси ($F_{1(ліє)}, F_{2(ліє)}, \dots, F_{1(пр)}, F_{2(пр)}$).

Лівим (правим) моментним фокусом називають нульову точку епюри моментів даного прогону при розташуванні і навантаженого прогону правіше (лівіше) того, що розглядається.

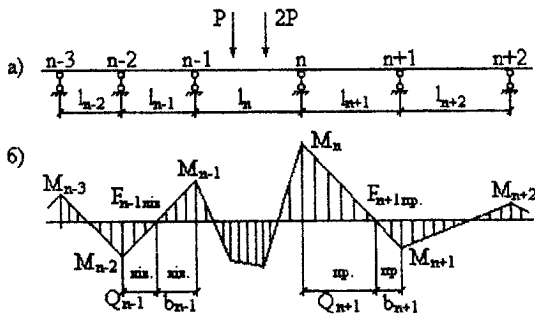


Рис.2.5

Оскільки фокусні точки в кожному прогоні мають постійне місцезнаходження, то і відношення моментів ненавантаженого прогону буде постійним. Розрізняють відношення ліві та праві.

$$K_{n+1}^{ліє} = 2 + \left(l'_n / l_{n-1}' \right) \cdot \left(2 - 1 / K_n^{ліє} \right) \quad (2.8)$$

Для визначення правих фокусних відношень таким же шляхом отримана формула

$$K_{n-1}^{пр} = 2 + \left(l'_n / l_{n-1}' \right) \cdot \left(2 - 1 / k_n^{пр} \right) \quad (2.9)$$

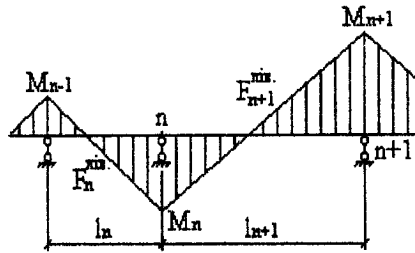


Рис.2.6

Для визначення фокусних відношень за цими формулами необхідно знати хоч би одне із них. Для крайніх прогонів ці відношення не відомі. При шарнірному опиранні крайнього прогону нульова точка знаходиться в шарнірі крайнього прогону (рис 2.7,а), тому

$K_1^{nie} = -M_1/M_0 = \infty$; для жорстко закріпленого кінця балки, що еквівалентно присутності додаткового прогону та довжиною $L_0 = 0$ (рис 2.7,б) $K_1^{nie} = 2 + 0/L_1 \cdot (2 - 1/\infty) = 2$

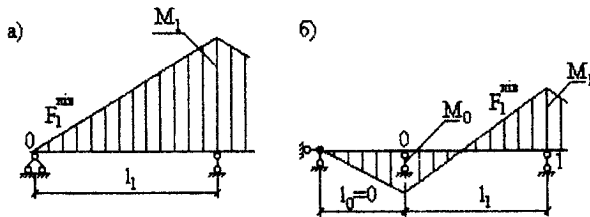


Рис.2.7

Коли навантажено лише один прогін n , то опорні моменти для цього прогону можна отримати із сумісного рішення двох рівнянь трьох моментів, складених для опор $n-1$ і n (рис.2.3,а) Вони відповідно будуть рівні (для лівого кінця навантаженого прогону):

$$M_{n-1} = -6 \cdot (A_n^\phi \cdot K_n^{np} - B_n^\phi) / (L_n \cdot (K_n^{nie} \cdot K_{n-1}^{np})) \quad (2.10)$$

$$M_n = -6 \cdot (B_n^\phi \cdot K_n^{nie} - A_n^\phi) / (L_n \cdot (K_n^{nie} \cdot K_{n-1}^{np})) \quad (2.11)$$

де $K_n^{лів}$, $K_n^{пр}$ - відповідно ліве і праве фокусне відношення прогону n ;

A_n^ϕ , B_n^ϕ - "фіктивна" реакція відповідно на лівому і правому кінцях навантаженого прогону n .

Якщо крайня ліва опора шарнірна, то $M_{n-1} = M_0 = 0$ $K_1^{лів} = \infty$ і тому

$$M_1 = -6B_n^\phi / lK_1^{пр} \quad (2.12)$$

Аналогічну формулу можна отримати для крайнього правого прогону з шарнірною опорою на правому кінці.

Решта опорних моментів можуть бути отримані через фокусні відношення. При навантаженні прогону n вони будуть рівні:

$$M_{n-2} = -M_{n-1} / K_{n-1}^{лів}; \quad M_{n-3} = -M_{n-2} / K_{n-2}^{лів}; \quad \dots \quad (2.13)$$

$$M_{n+1} = -M_n / K_{n+1}^{пр}; \quad M_{n+2} = -M_{n+1} / K_{n+2}^{пр}; \quad \dots \quad (2.14)$$

Метод фокусів зручно і доречно застосовувати, коли навантажено який-небудь один прогін. Цей метод особливо ефективний при послідовному навантаженні прогонів тимчасовим навантаженням.

Приклад 2.2. Трипрогонова балка з розмірами та жорсткостями такими ж як в прикладі 2.1. Розрахувати методом фокусів на послідовне навантаження прогонів, показаних на рис.2.8.

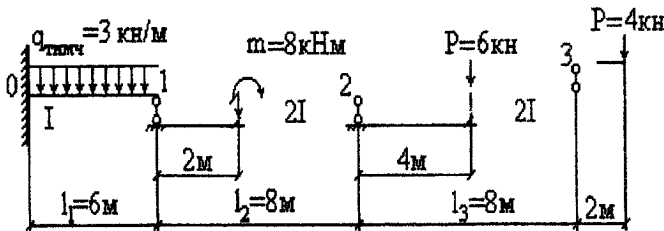


Рис.2.8

Попередньо за формулами 2.8, 2.9 визначимо ліві і праві фокусні відношення.

$$K_1^{ліє} = 2; K_2^{ліє} = 2 + 6/4 \cdot (2 - 1/2) = 4.25; K_3^{ліє} = 2 + 4/4 \cdot (2 - 1/4.25) = 3.76;$$

$$K_3^{пр} = \infty; K_2^{пр} = 2 + 4/4 \cdot (2 - 1/\infty) = 4; K_1^{пр} = 2 + 4/6 \cdot (2 - 1/4) = 3.17;$$

Розрахунок на навантаження в 1 прогоні (рис.2.9,а).

$$6A_1^\phi = 6B_1^\phi = 3 \cdot 6^3 / 4 = 162 \quad (\text{табл.2.1 і рис.2.9,б}). \quad \text{На основі формул (2.10), (2.11), (2.14)}$$

$$M_0 = -(162 \cdot 3.17 - 162) / [6 \cdot (2 \cdot 3.17 - 1)] = -10.98 \text{ кНм};$$

$$M_1 = -(162 \cdot 2 - 162) / [6 \cdot (2 \cdot 3.17 - 1)] = -5.06 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -5.06/4 = 1.36 \text{ кНм}; M_3 = 0.$$

$$X_{1max} \text{ визначається із відношення } 9.99/X_{1max} = 8.01/6 - X_{1max},$$

$$X_{1max} = 3.33; M_{max} = M_0 + \int Q(x)dx = (9.99 \cdot 3.33) / 2 - 10.98 \text{ кНм}.$$

Розрахункові епюри M , Q та опорні реакції R наведено на рис.2.9.

Кінематична перевірка епюри $M_{0(тмч)}$. Взаємний кут повертання

опори 1 має бути рівним нулю (епюра M_1 на рис.2.9,д):

$$EI_0 \sum \int (M \cdot \bar{M}_1 / EI) dx = 2/3 \cdot 3 \cdot 36/8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1/2 + 6/6 \cdot (-10.98 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 5.06) + 8/12 \cdot (-2 \cdot 5.06 + 1.26 \cdot 1) = 27 - 27.02 = -0.02$$

$$\text{Похибка } 0.02/27 \cdot 100\% = 0.07\%.$$

Статична перевірка:

$$\sum Y = 9.99 + 8.8 - 0.95 + 0.16 - 3 \cdot 6 = 0.$$

Розрахунок на навантаження в 2-му прогоні (рис.2.10,а)

$$6A_2^\phi = -B_2^\phi = -8 \cdot 8/4 = -16 \quad (\text{табл.2.1})$$

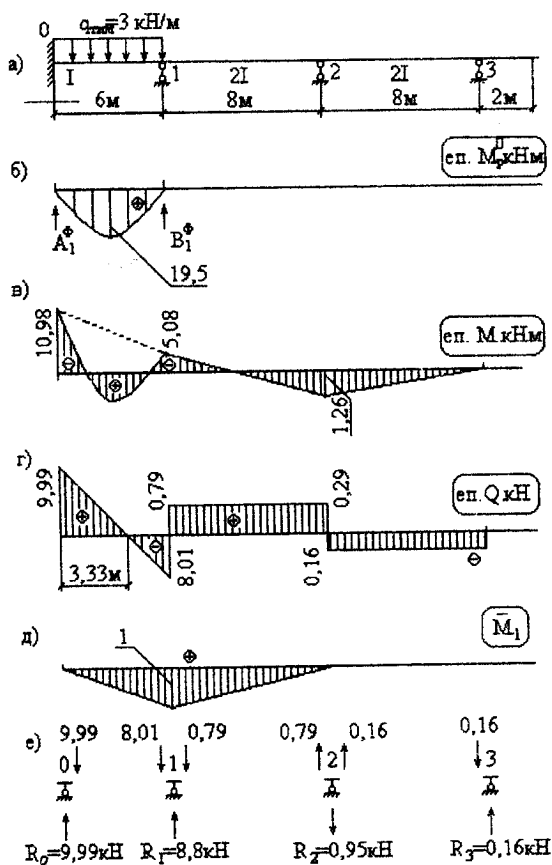


Рис.2.9

На основі формули (2.10), (2.11), (2.13)

$$M_1 = -(-16 \cdot 4 - 16) / [8 \cdot (4.25 \cdot 4 - 1)] = 0.625 \text{ кНм}$$

$$M_2 = -(-16 \cdot 4.25 + 16) / [8 \cdot (4.25 \cdot 4 - 1)] = -0.657 \text{ кНм}$$

$$M_0 = -0.625 / 2 = -0.312 \text{ кНм}; M_3 = 0$$

Епюри M , Q наведені на рис.2.10,б,в. Опорні реакції на рис.2.10,д.

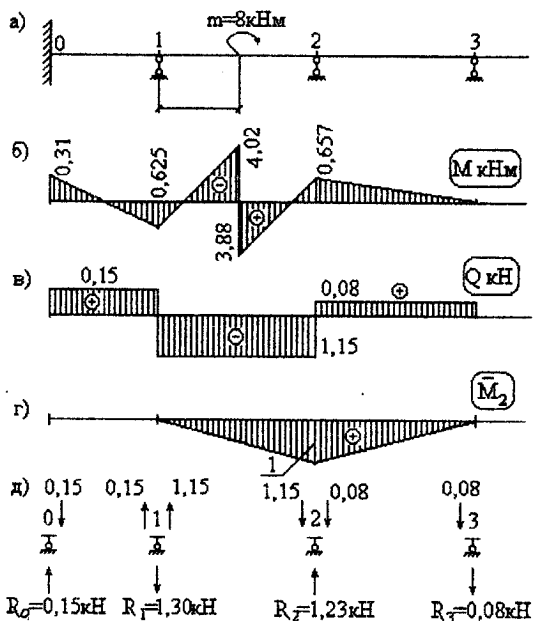


Рис.2.10

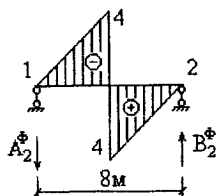


Рис.2.11

Кінематична перевірка (епюра M_2 на рис.2.10,г)

$$EI_0 \sum \int (M \cdot \bar{M}_2 / EI) dx = 4/2 \cdot 6 \cdot (-2 \cdot 4.02 \cdot 0.5 + 0.625 \cdot 0.5) + 4/12 \times \\ \times (2 \cdot 3.98 \cdot 0.5 - 2 \cdot 0.607 \cdot 7 + 3.98 \cdot 1 - 0.657 \cdot 0.5) - 0.5 \cdot 8 \times \\ \times 0.657 \cdot 2/3 \cdot 1 \cdot 0.5 = -1.236 + 2.106 - 0.876 = 0.006$$

Похибка $0.006/2.112 \cdot 100\% = 0.286\%$

Статична перевірка

$$\sum I = 0.15 - 1.30 - 1.23 - 0.03 = 1.38 - 1.38 = 0$$

Розрахунок на навантаження в 3-му прогоні:

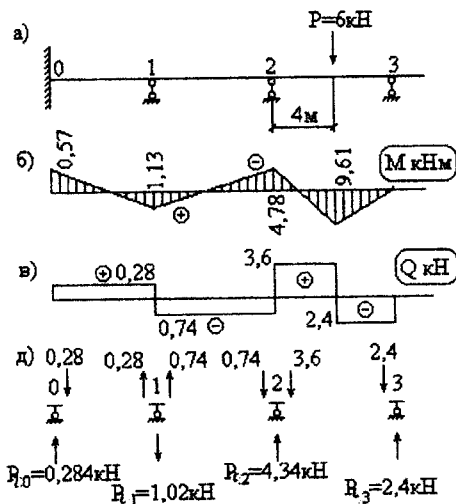


Рис.2.12.

$$6A_3^{\phi} = 6B_3^{\phi} = (3/8) \cdot 6 \cdot 64 = 144$$

На основі формул (2.10) і (2.13)

$$M_2 = -(144 \cdot \infty - 144) / [8 \cdot (3.76 \cdot \infty - 1)] = -144 / (8 \cdot 3.76) = -4.78$$

$$M_3 = 0; \quad M_1 = -(-4.78) / 4.25 = 1.13\text{кНм};$$

Епюри M, Q приведені на рис.2.12,б,в. Опорні реакції на рис.2.12,г

Кінематична перевірка (епюра M_2 , див. рис.2.10,г)

$$EI_0 \cdot \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{8}{6} (-2 \cdot 4.78 \cdot 1 + 1.13 \cdot 1) \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 12 \cdot \frac{17}{2} \cdot 0.5 -$$

$$- 0.5 \cdot 4.78 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5 = -5.62 + 12 - 6.38 = -12 + 12 = 0.$$

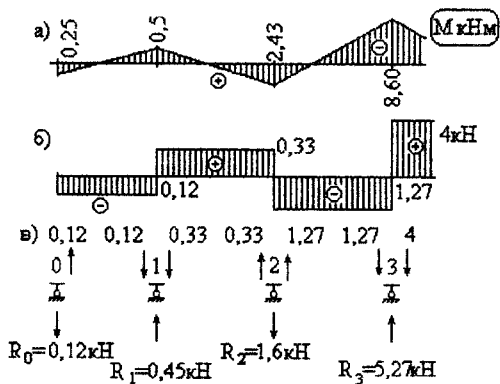


Рис.2.13

Статична перевірка

$$\sum Y = 0.28 - 1.02 + 4.34 + 2.6 - 6 = 7.02 - 7.02 = 0.$$

Розрахунок на навантаження консолі (рис.2.13,а)

$$M_3 = -2.4 = -8 \text{ кНм}; \quad M_2 = -(-8/3.76) = 2.13 \text{ кНм}; \quad M_1 = -2.13/4.35 = -0.5 \text{ кНм};$$

$$M_4 = -(-0.5/2) = 0.25 \text{ кНм};$$

Епюри M , Q приведені на рис.2.13,б,в. Опорні реакції показані на рис.2.13,г

Статична перевірка:

$$\sum Y = -0.12 + 0.45 - 1.6 + 5.27 - 4 = 5.72 - 5.72 = 0.$$

2.3. ПОБУДОВА ОГИНАЮЧИХ ЕПЮР

Коли крім постійного навантаження є ще тимчасове, котре може діяти, а може бути й знятим з того чи іншого прогону балки то буває необхідним знайти таке сполучення постійного та тимчасового навантаження, яке викликає в різних перетинах найбільші та найменші згинальні моменти та поперечні сили.

$$M_{\max} = M_{\text{пост}} + \sum M_{+\text{тимч}} ; \quad (2.15)$$

$$M_{\min} = M_{\text{пост}} + \sum M_{-\text{тимч}} ; \quad (2.16)$$

$$Q_{\max} = Q_{\text{пост}} + \sum Q_{+\text{тимч}} ; \quad (2.17)$$

$$Q_{\min} = Q_{\text{пост}} + \sum Q_{-\text{тимч}} ; \quad (2.18)$$

Ординати M_{\max} , M_{\min} визначають зазвичай в табличній формі.

Побудову Q_{\max} , Q_{\min} можна провести без таблиці.

Приклад 2.3. Для трипрогонової нерозрізної балки (див.рис2.4а), розрахованої в прикладі 2.1 на постійні навантаження, побудувати огинаючі епюри моментів та поперечних сил.

Результати обчислень ординат M_{\max} , M_{\min} наведені в табл.2.2.

Графічні результати зображені на рис.2.14.

Таблиця 2.2

Номер перетину	$M_{\text{пост}}$, кНм	M від тимчасового навантаження, (кНм)				M_{\max} , кНм	M_{\min} , кНм
		в 1-му прогоні	в 2-му прогоні	в 3-му прогоні	в 4-му прогоні		
0	-5.2	-10.98	-0.31	-0.57	0.25	-4.95	-17.06
а	2.6	5.48	0.15	0.28	-0.12	8.51	-2.48
1	-7.6	-5.06	0.62	1.13	-0.5	-5.85	-13.16
б	5.65	-1.90	-4.02/3.98	-1.83	0.81	6.46/10.44	-2.1/1.92
2	-13.1	1.26	-0.66	-4.78	2.31	-9.71	-18.54
в	7.45	0.63	-0.33	9.61	-2.93	17.69	4.19
3	-4	0	0	0	-8	-4	-12

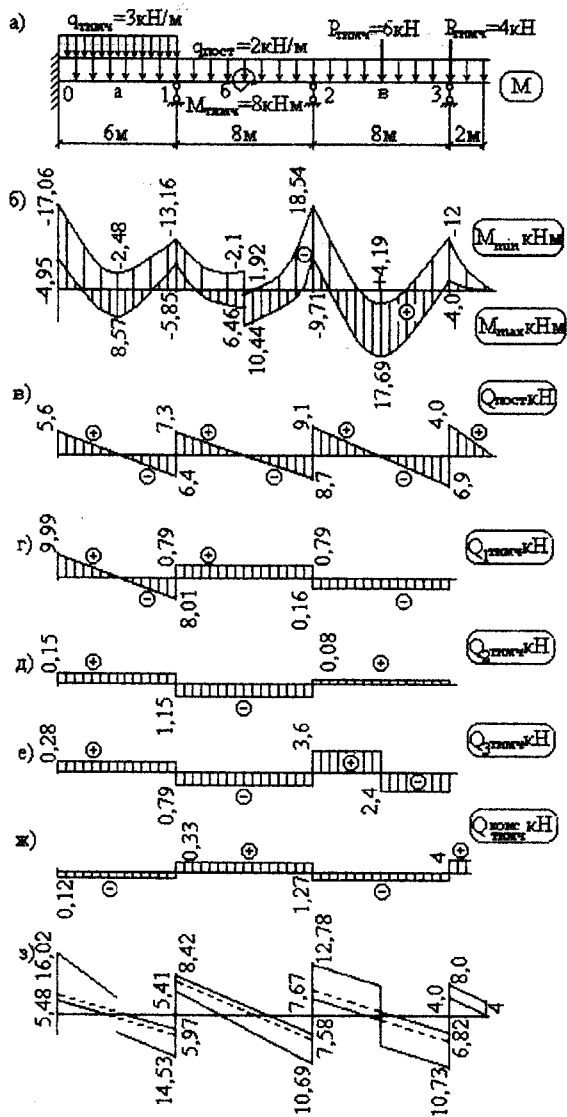


Рис.2.14

Для побудови Q_{max} і Q_{min} під балкою, навантаженою постійним і тимчасовим навантаженням будуємо $Q_{\text{пост}}$ (рис.2.14,в) потім епори $Q_{\text{тмч}}$,

$Q_{2\text{тимч}}, Q_{3\text{тимч}}, Q_{k\text{тимч}}$ (рис.2.14,г,д,е,ж). $Q_{\text{max}}, Q_{\text{min}}$ будемо згідно з (2.17,2.18).

Епюру Q_{max} будемо так. Спочатку викреслюємо епюру $Q_{\text{пост}}$ в тонких лініях. Потім ординати $Q_{\text{пост}}$ додаються з ординатами $\Sigma Q_{\text{+тимч}}$, що мають по всій довжині однопрогонової балки постійне значення (штрихові лінії). Далі додаємо $Q_{\text{+тимч}}$ з ординатами, що змінюються по довжині балки: при розподіленому навантаженні – трикутник, при зосередженій силі – прямокутник. Підсумкові наведено. Епюру Q будують аналогічно.

2.4. ПОВУДОВА ЛІНІЙ ВПЛИВУ ЗУСИЛЬ В НЕРОЗРІЗНІЙ БАЛЦІ

Лінія впливу будь-якої величини – це графік, що характеризує закон зміни цієї величини в залежності від положення на конструкції сили $P=1$.

Для побудови ліній впливу вантаж $P=1$ розміщують по черзі на всіх прогонах балки та виражають шукані величини як функції від координати розташування вантажу $P=1$. Рішення задачі розпочинають з побудови ліній впливу опорних моментів. Для цього можна скористатись формулами (2.10) і (2.11), попередньо необхідно виразити A_n^ϕ, B_n^ϕ як функції положення вантажу в цьому прогоні (рис.2.15).

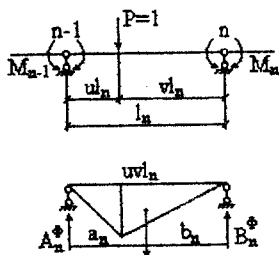


Рис.2.15

Координату положення вантажу позначимо ul_u .

$$M_{n-1} = -i_n \cdot (k_n^{npas} \cdot \alpha(u) - \beta(u)) / (k_n^{nie} \cdot k_n^{npas} - 1) \quad (2.19)$$

$$M_n = -l_n \cdot (k_n^{nie} \cdot \beta(u) - \alpha(u)) / (k_n^{nie} \cdot k_n^{npas} - 1) \quad (2.20)$$

$$\text{де } \alpha(u) = uv(1+v) = u(1-u) \cdot (2-u) \quad (2.21)$$

$$\beta(u) = uv(1+z) = u(1-u \cdot u). \quad (2.22)$$

Опорні моменти M_{n-1} і M_n – функції третього степеня від u . При визначені ординат ліній впливу опорних моментів можна скористатись методом фокусів (2.13), (2.14).

Лінії впливу моменту і поперечної сили в прогоні n для перерізу C , що розташований на відстані a від лівої опори знаходиться за формулами

$$M_c = M_c^0 + M_{n+1} \cdot [(l_n - a)/l_n] + M_n \cdot (a/l_n) \quad (2.23)$$

$$Q_c = Q_c^0 + (M_n - M_{n-1})/l_n \quad (2.24)$$

Лінія впливу вертикальної опорної реакції:

$$R_n = R_n^0 - (M_n - M_{n-1})/l_n + (M_{n+1} - M_n)/l_{n+1} \quad (2.25)$$

В (2.23, 2.24, 2.95) M_c^0 , Q_c^0 , R_n^0 - лінії впливу відповідних зусиль в основній системі.

Приклад 2.4 Для балки на рис.2.16 побудувати лінії впливу опорних моментів M_0 , M_1 , M_2 , лінії впливу моментів в перерізі D , K , C , лінію впливу Q для перерізу C і лінію впливу вертикальної опорної реакції R_1 (рис.2.16).

Фокусні відношення відомі з прикладу 2.2:

$$K_1^{nie} = 2; K_2^{nie} = 4.25; K_3^{nie} = 3.76; K_3^{np} = \infty; K_2^{np} = 4; K_1^{np} = 3.17; .$$

Побудуємо спочатку лінії впливу опорних моментів вантажу в 1-му прогоні.

$$M_0 = -6[3.17 \cdot \alpha(u) - \beta(u)] / (2 \cdot 3.17 - 1) = -1.1236 \cdot [3.17 \cdot \alpha(u) - \beta(u)];$$

$$M_1 = -6[2 \cdot \beta(u) - \alpha(u)] / (2 \cdot 3.17 - 1) = 1.1236 \cdot [2 \cdot \beta(u) - \alpha(u)];$$

$$M_2 = -M_1 / K_2^{прис} = -M_1 / 4 = -0.25M_1; \quad M_3 = 0.$$

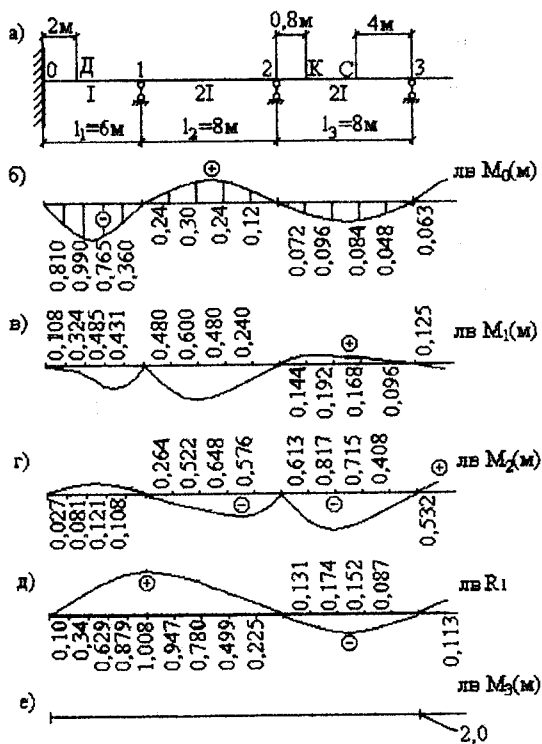


Рис.2.16

Вантаж в 2-му прогоні:

$$M_1 = -8[4 \cdot \alpha(u) - \beta(u)] / (4.25 - 1) = -0.5 \cdot [4 \cdot \alpha(u) - \beta(u)];$$

$$M_2 = -8[4.25 \cdot \beta(u) - \alpha(u)] / (4.25 \cdot 4 - 1) = -0.5 \cdot [4.25 \cdot \beta(u) - \alpha(u)];$$

$$M_0 = -M_1 / K_1^{прис} = -M_1 / 2 = -0.5M_1; \quad M_3 = 0.$$

Вантаж на консолі:

$$M_3 = -x \cdot 1 = -x, \quad \text{де } x - \text{відстань від вантажу до опори 3}$$

$$M_2 = -M_3 / K_3^{прис} = -M_3 / 3.76 = -0.266M_3;$$

$$M_1 = -M_2 / K_2^{nie} = -M_3 / (K_2^{nie} \cdot K_3^{nie}) = M_3 / (4,25 \cdot 3,76) = 0,0626 M_3 ;$$

$$M_0 = -M_1 / K_1^{nie} = -M_3 / (K_1^{nie} \cdot K_2^{nie} \cdot K_3^{nie}) = M_3 / (2 \cdot 4,25 \cdot 3,76) = -0,0313 M_3$$

Вантаж в 3-му прогоні:

$$M_2 = -8[\infty \cdot \alpha(u) - \beta(u)] / (\infty \cdot 3,76 - 1) = -8 \cdot \alpha(u) / 3,76 = -2,12766 \alpha(u);$$

$$M_3 = 0 .$$

Результати розрахунку зведені в таблиці 2.4. По них побудовані лінії впливу згинальних моментів і поперечних сил в будь-якому перерізі балки та лінії впливу опорних реакцій.

Таблиця 2.4

u	M ₀ , м	M ₁ , м	M ₂ , м	R ₁	M _с , м	M _к , м	M _д , м	Q _с
Вантаж в 1-му прогоні K ₁ ^{nie} = 2 K ₁ ^{пров} = 3,17 L ₁ = 6м								
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	-0,811	-0,108	0,027	0,100	0,014	0,024	0,224	-0,003
0,4	-0,990	-0,324	0,081	0,340	0,041	0,073	0,432	-0,01
0,6	-0,765	-0,485	0,121	0,629	0,061	0,109	0,127	-0,015
0,8	-0,360	-0,431	0,108	0,879	0,054	0,097	0,016	-0,014
1,0	0	0	0	1,0	0	0	0	0
Вантаж в 2-му прогоні K ₂ ^{nie} = 4,25 K ₂ ^{пров} = 4 L ₂ = 8м								
	0	0	0	1,0	0	0	6	0
0,2	0,240	-0,480	-0,264	0,947	-0,132	-0,238	0	0,033
0,4	0,300	-0,600	-0,522	0,760	-0,261	-0,470	0	0,065
0,6	0,240	-0,480	-0,648	0,499	0,324	-0,583	0	0,081
0,8	0,120	-0,240	-0,516	0,225	-0,258	-0,464	0	0,065
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0

Продовження таб.2.4

Вантаж в 3-му прогоні $K_3^{лів}=3,76$ $K_3^{прав}=\infty$ $L_3=8$								
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	-0.072	0.144	-0.513	-0.131	0.494	0.088	0	-0.123
0,4	-0.096	0.192	-0.817	-0.174	1.191	-0.255	0	-0.298
0,6	-0.084	0.168	-0.715	-0.152	1.242	-0.323	0	0.489
0,8	-0.048	0.096	-0.408	-0.087	0.596	-0.207	0	0.257
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0
Вантаж на консолі $x=2\text{м}$ $M_3=-2$								
	0,063	-0,125	-0,532	0,113	-0,734	0,279	0	-0,316

Побудова ліній впливу опорних реакцій

Використовуючи формулу 2.25, отримаємо

$$R_0 = R_0^0 + (M_1 - M_0)/6.$$

При положенні вантажу в 1-му прогоні $R_0^0 = 1 - u$, в 2-му і 3-му прогоні і на консолі $R_0^0 = 0$;

$$R_1 = R_1^0 - (M_1 - M_0)/6 + (M_2 - M_1)/8$$

При положенні вантажу в 1-му прогоні $R_1^0 = u$; в 2-му - $R_1^0 = 1 - u$; в 3-му прогоні і на консолі $R_1^0 = 0$:

$$R_2 = R_2^0 - (M_2 - M_1)/6 + (M_3 - M_2)/8$$

Значення R_2^0 визначається аналогічно

$$R_3 = R_3^0 - (M_3 - M_2)/8.$$

На рис.2.16,д показано $R_1^{лів}$.

Побудова ліній впливу згинальних моментів та поперечної сили

В перетині D, що знаходиться в 1-му прогоні на відстані $\alpha=2m$ від лівої опори, на основі формули 2.23.

$$M_d = M_d^0 + M_1/3 + 2 \cdot M_0/3$$

Для лівої гілки ординати M_d^0 визначають за формулою $M_d^0 = 4u$, для правої гілки $M_d^0 = 2(1-u)$.

В перетині С, що знаходиться в середині 3-ого прогону на основі (2.23)

$$M_c = M_c^0 + 0.5M_3 + 0.5M_2 = M_c^0 + (M_2 + M_3)/2.$$

Ординати лівої гілки ліній впливу M_i визначають за формулами

$$M_c^0 = 4u, \text{ правої гілки } M_c^0 = 4(1-u).$$

На основі формули 2.26 для перетину С

$$Q_c = Q_c^0 + (M_3 - M_2)/8.$$

Ординати лівої гілки лінії впливу $Q_c^0 = u$, правої гілки $Q_c^0 = 1-u$.

В перетині К, що в 3-му прогоні на відстані $\alpha=0,8$ від лівої опори ($2/L_3 = 0.8/8 = 0.1$)

$$M_k = M_k^0 + 0.1M_3 + 0.9M_2$$

Ліва гілка лінії впливу M_k^0 визначається рівнянням $M_k^0 = 7.24$, права гілка - $M_k^0 = 0.8(1-u)$. Значення ординати M_d^0 , M_k , M_c , Q_c в таблиці 2.4. Лінії впливу M_d^0 , M_d , M_k , M_c , Q_c^0 на рис.2.17.

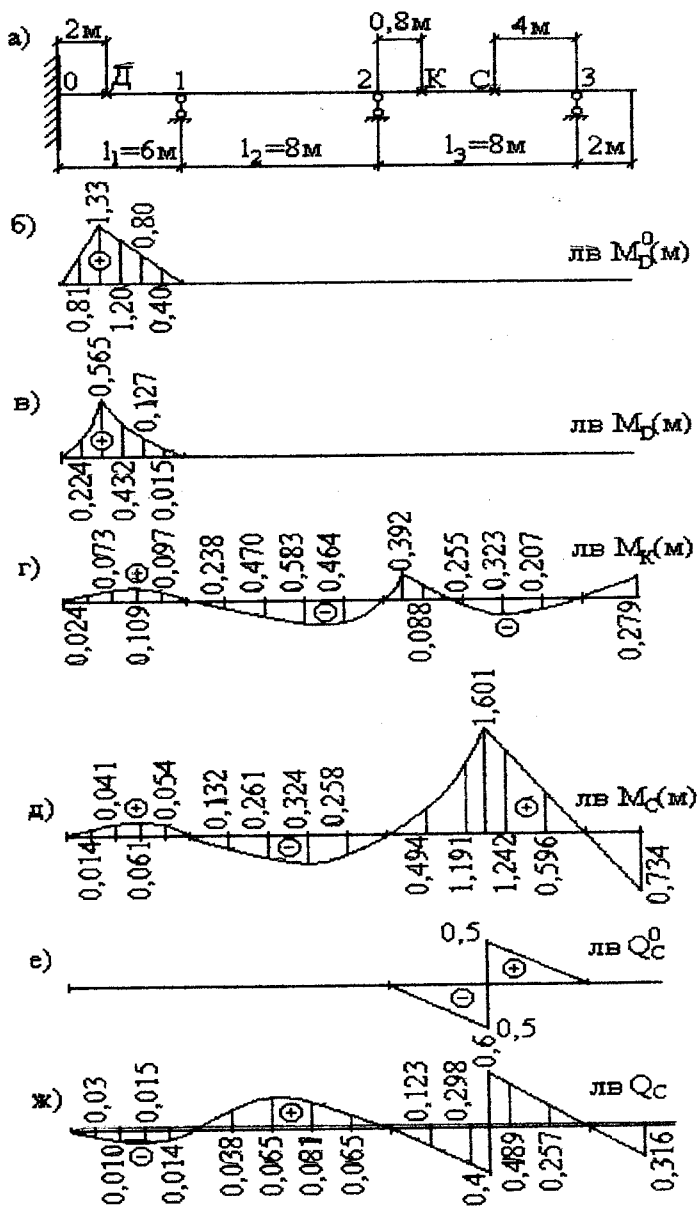


Рис.2.17

2.5. РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗАНИХ БАЛОК НА ТЕПЛОВУ ДІЮ

В нерозрізній балці рівномірний нагрів зусиль не викликає оскільки всі вертикальні опорні стержні паралельні між собою і не перешкоджають зміні довжини осі балки. Розрахунок ведеться лише на нерівномірний нагрів – різниця зміни температури з верхньої і нижньої сторони балки. Використовуючи (2.1) і (2.2) та замінивши Δ_{np} на Δ_m для розрахунку нерозрізної балки на зміну температури отримуємо рівняння

$$M_{n-1} \cdot l'_n + 2 \cdot M_n (l'_n + l'_{n-1}) + M_{n+1} \cdot l'_{n+1} = -6EI_0 \cdot \Delta_m \quad (2.26)$$

де Δ_m – кут повертання в основній системі на опорні n по напрямку невідомого M_n , викликаного зміною температури, знаходиться за формулою.

$$\Delta_m = \pm \alpha t' \cdot [l_n / (2d_n) + l_{n+1} / (2d_{n+1})] \quad (2.27)$$

де α – коефіцієнт теплового лінійного розширення; d_n, d_{n+1} – висота поперечного перерізу балки відповідно n і $n+1$ прогонів; $t' = t_1 - t_2$ – різниця зміни температури. В (2.27) знак “+” приймається, коли $t_1 > t_2$ рис.2.18 і “-”, коли $t_1 < t_2$

Приклад 2.5

Розрахувати на теплову дію балку рис.2.18. Висоту перерізу в кожному із прогонів прийняти рівною $d_n = 0.05l_n$.

Попередньо обчислимо Δ_m

$$\Delta_{0r} = \alpha \cdot 40 [6 / (2 \cdot 0.05 \cdot 6)] = 400\alpha;$$

$$\Delta_{1r} = \alpha \cdot 40 [6 / (2 \cdot 0.05 \cdot 6) + 8 / (2 \cdot 0.05 \cdot 8)] = 800\alpha;$$

$$\Delta_{2r} = \alpha \cdot 40 [8 / (2 \cdot 0.05 \cdot 8) + 8 / (2 \cdot 0.05 \cdot 8)] = 800\alpha.$$

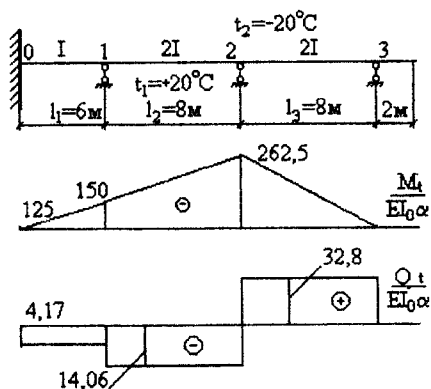


Рис.2.18.

Рівняння трьох моментів

$$\begin{cases} 2M_0 L_1' + M_1 L_1' = -EI_0 \cdot \Delta_{01} \cdot 6 \\ M_0 L_1' + 2M_1(L_1' + L_2') + M_2 L_2' = -6EI_0 \cdot \Delta_{11} \\ M_1 L_2' + 2M_2(L_2' + L_3') + L_3' M_3 = -6EI_0 \cdot \Delta_{21} \end{cases} \quad (2.28)$$

Підставимо значення L_1' , L_2' , L_3' , що обчислені в прикладі 2.1 та попередньо обчислені Δ_{01} , Δ_{11} , Δ_{21} в (2.28). $M_3=0$

$$\begin{cases} 2M_0 \cdot 6 + 6M_1 = -6EI_0 \cdot 400\alpha \\ M_0 \cdot 6 + 2(6+4)M_1 + 4M_2 = -6EI_0 \cdot 800\alpha \\ M_1 \cdot 4 + 2(4+4)M_2 = -6EI_0 \cdot 800\alpha \end{cases} \quad (2.29)$$

Корені системи (2.29): $M_0 = -125 \cdot \alpha \cdot EI_0$, $M_1 = -150 \cdot \alpha \cdot EI_0$, $M_2 = -262.5 \cdot \alpha \cdot EI_0$.

На рис.2.18: а задана балка, б, в-епюри M, Q , появу яких викликає теплова дія

Кінематична перевірка при розрахунках на теплову дію виконується за формулою:

$$\sum \int \frac{M_i \cdot \bar{M}_i}{EI} ds + \Delta_{it} = 0. \quad (2.30)$$

В даному прикладі (див. M_1 на рис.2.9,д)

$$\sum \int \frac{M_i \cdot \bar{M}_i}{EI} ds + \Delta_{it} = 6/6(-2 \cdot 150 \cdot 1 - 125 \cdot 1)EI_0 \cdot \alpha/EI_0 + 8/6(-2 \cdot 150 - 262.5)EI_0 \cdot \alpha/2EI_0 + 800\alpha = -800\alpha + 800\alpha = 0.$$

Похибка дорівнює нулю.

2.6. РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК НА ЗМІЩЕННЯ ОПОР

Скориставшись рівняннями (2.1) і (2.2) та замінивши Δ_{np} на Δ_{nc} для розрахунку нерозрізної балки на задане зміщення опор, отримаємо рівняння:

$$M_{n-1} \cdot L'_n + M_n(L'_n + L'_{n+1}) + M_{n+1} \cdot L'_{n+1} = -6EI \cdot \Delta_{nc} \quad (2.31)$$

де Δ_{nc} – кут повертання в основній системі на опорі n , викликаний заданим зміщенням опор на напрямку невідомого моменту M_n

$$\Delta_{nc} = -\sum \pm R_k \cdot c \quad (2.32)$$

де R_k – реакція в зв'язку, що зміщується від дії узагальненої сили $P_k = 1$; прикладеної в точці K , переміщення якої шукається по напрямку шуканого переміщення. Добуток $R_k \cdot c$ додатний, коли реакція R_k від узагальненої одиничної сили направлена в бік заданого зміщення зв'язку C .

Приклад 2.6. Трипрогонову балку з розмірами і жорсткістю таким же, як у прикладі 2.1 розрахувати на задане повертання крайньої лівої

опори за годинниковою стрілкою на кут $\varphi_0 = 0,01 \text{ рад}$ та осідання опори 2 на $\Delta_2 = 0,08 \text{ м}$ (рис. 2.19).

Попередньо обчислимо величини Δ_{nc} :

$$\Delta_{0c} = -0,01 ; \Delta_{1c} = 0,08/8 = 0,01 ; \Delta_{2c} = -0,08/8 - 0,08/8 = -0,02$$

Складемо рівняння трьох моментів:

$$\begin{cases} 2M_0L'_1 + M_1L'_1 = -EI_0 \cdot \Delta_{0c} \cdot 6 \\ M_0L'_1 + 2M_1(L'_1 + L'_2) + M_2L'_2 = -6EI_0 \cdot \Delta_{1c} \\ M_1L'_2 + 2M_2(L'_2 + L'_3) + L'_3M_3 = -6EI_0 \cdot \Delta_{2c} \end{cases} \quad (2.33)$$

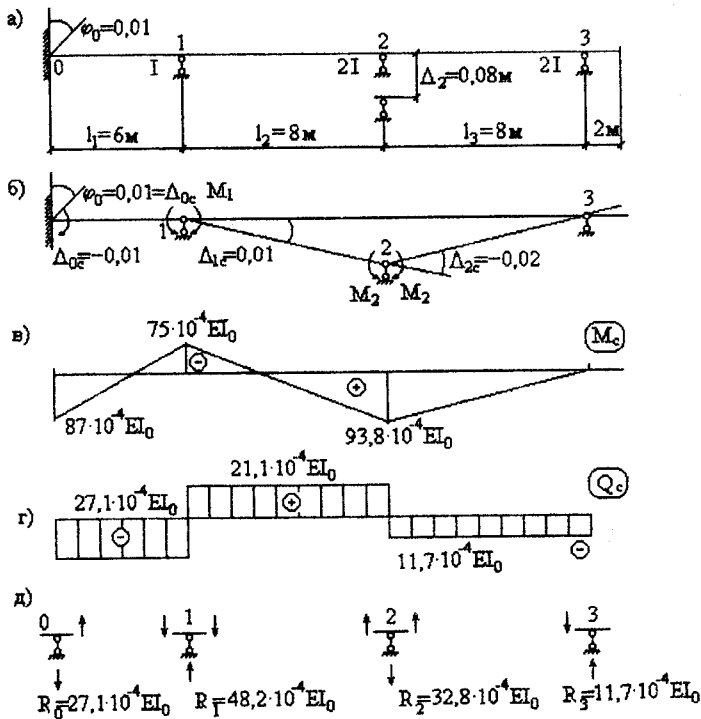


Рис. 2.19.

Підставимо в них значення L'_1 , L'_2 , L'_3 , обчислені в прикладі 2.1 значення

Δ_{0c} , Δ_{1c} , Δ_{2c} та врахуємо що $M_3=0$:

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 - 0.01EI_0 = 0 \\ 3M_0 + 10M_1 + 2M_2 = -0.03EI_0 \\ M_1 + 4M_2 = 0.03EI_0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Корені системи (2.34): $M_0 = 87.5 \cdot 10^{-4} EI_0$ кНм; $M_1 = -75 \cdot 10^{-4} EI_0$ кНм;
 $M_2 = 93.8 \cdot 10^{-4} EI_0$ кНм.

Кінематична перевірка при розрахунку на зміщення опор проводиться за формулою:

$$\sum \int \frac{M_c \cdot \overline{M}_n}{E \cdot I} dS + \Delta_{nc} = 0 \quad (2.35)$$

В даному прикладі (\overline{M}_1 див. На рис. 2.9,д):

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_c \cdot \overline{M}_n}{EI} ds + \Delta_{1c} &= 6/6 \cdot (-2 \cdot 0.0075 + 1 \cdot 0.00875) EI_0 / EI_0 + 8/6 \times \\ &\times (-2 \cdot 0.0075 + 1 \cdot 0.00938) EI_0 / 2EI_0 + 0.01 = -0.00625 - 0.00374 + 0.01 = \\ &= -0.00999 + 0.01 = 0.00001 \end{aligned}$$

Похибка $0.00001 / 0.01 \cdot 100\% = 0.1\%$

Статична перевірка:

$$\begin{aligned} \sum Y &= (-0.00271 + 0.00482 - 0.00328 + 0.00117) EI_0 = (-0.00599 + \\ &+ 0.00599) EI_0 = 0 \end{aligned}$$

На рис. 2.19,а – задана балка; б – основна система; в, г – епюри M_c , Q_c , викликані зміщенням опор, д – визначення опорних реакцій.

3. Статично невизначені арки, склепіння

3.1. ХАРАКТЕРИСТИКА АРОК І СКЛЕПІНЬ.

ЗМІНА ПЕРЕРІЗУ АРКИ ПО ЇЇ ДОВЖИНІ

Арка-розп'яра система, що має вигляд кривого бруса. Арки різняться числом шарнірів і відповідно бувають тришарнірними, двошарнірними, одношарнірними і безшарнірними (рис. 3.1). Всі арки за винятком тришарнірної – статично невизначені.

Склепіння – розп'яра система суцільного перерізу у якої відстань в напрямку, перпендикулярному до площини її осі, сягає великих розмірів (рис. 3.1, д).

При розрахунку склепіння з нього виділяють смугу двома площинами, паралельними його осі на відстані, рівній одиниці, та ведуть розрахунки як для арки.

При виборі обрису арки необхідно прагнути того, щоб вісь арки збігалася з кривою тиску. Такий обрис осі, як відомо, має назву раціональний. Це можна отримати для тришарнірної арки. Для статично невизначених арок повного збігання осі арки з кривою тиску досягти неможливо, оскільки виникнення згинальних моментів при будь-якому її обрисі неминуче. Тому раціональним обрисом осі арки буде такий, при якому розрахункові напруження будуть найменші.

В арках звичайно приймають змінний переріз за її довжиною. Так в безшарнірній арці її товщина зростає від середини до опор. Це пояснюється тим, що при розподіленому навантаженні моменти зростають від середини до опор.

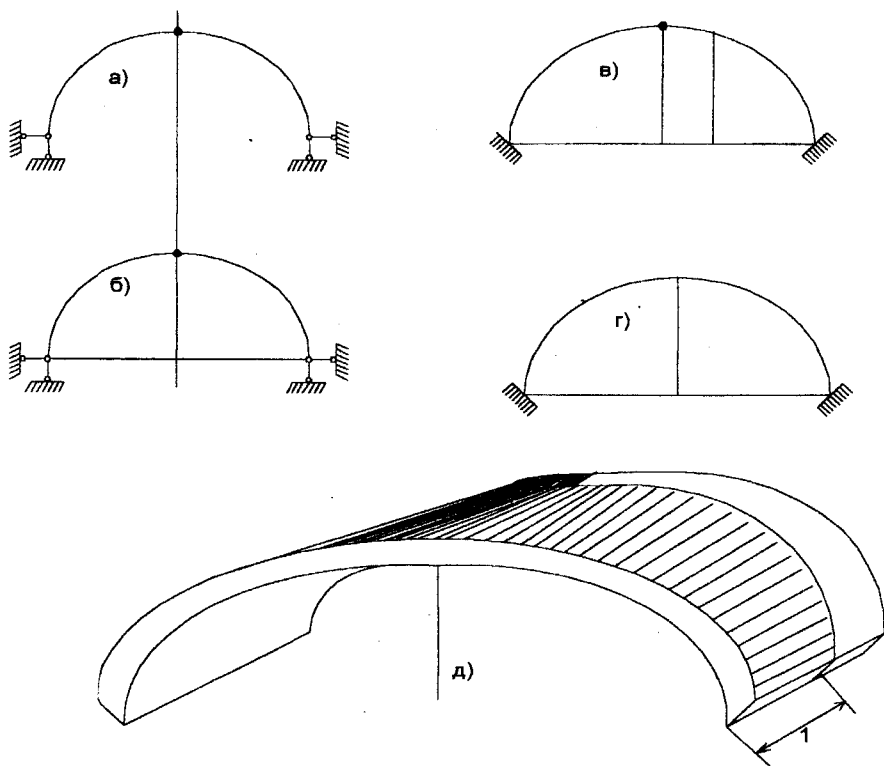


Рис. 3.1

В двошарнірній арці товщина зменшується від середини до опор, це теж пов'язано з видом епюри моментів.

Враховуючи, що величини F та I входять під знак інтегралів формули переміщень, при допомозі яких обчислюють коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь, доцільно скласти для цих величин аналітичні вирази, що установлюють закон їх зміни по довжині арки. За приклад можна взяти залежність:

$$I_K = I_C / \cos \varphi, \quad (3.1)$$

де I_C – момент інерції в середньому перерізі,

φ – кут нахилу дотичної до осі арки до осі x .

Для двохшарнірних арок більш підходить інший закон

$$I_R = I_C \cos \varphi, \quad (3.2)$$

3.2. ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ В БЕЗШАРНІРНІЙ АРЦІ ВІД НЕРУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Безшарнірна арка тричі статично невизначена система. Для спрощення розрахунку основну систему вибирають з введенням жорстких консолей. Тоді загальна система канонічних рівнянь методу сил розпадається на три незалежних рівняння, кожне з яких утримує одне невідоме:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{33} \cdot x_3 + \Delta_{3p} = 0; \end{cases} \quad (3.3)$$

Вільні кінці консолей мають співпадати з пружним центром арки. До них прикладаються невідомі сили і моменти. Напрямок невідомих сил повинен співпадати з головними осями інерції пружних вантажів ds/l .

3.2.1. Метод пружного центру

Користуватись цим методом доцільно при наявності однієї або двох осей симетрії. Цей метод дозволяє побудувати рішення статистично невизначеної

системи так, щоб невідомі розподілились по рівнянням, кожне з яких утримувало б по одному невідомому.

Розглянемо метод спрощення розрахунку суцільного замкнутого контуру довільного обрису, що на рис. 3.2.

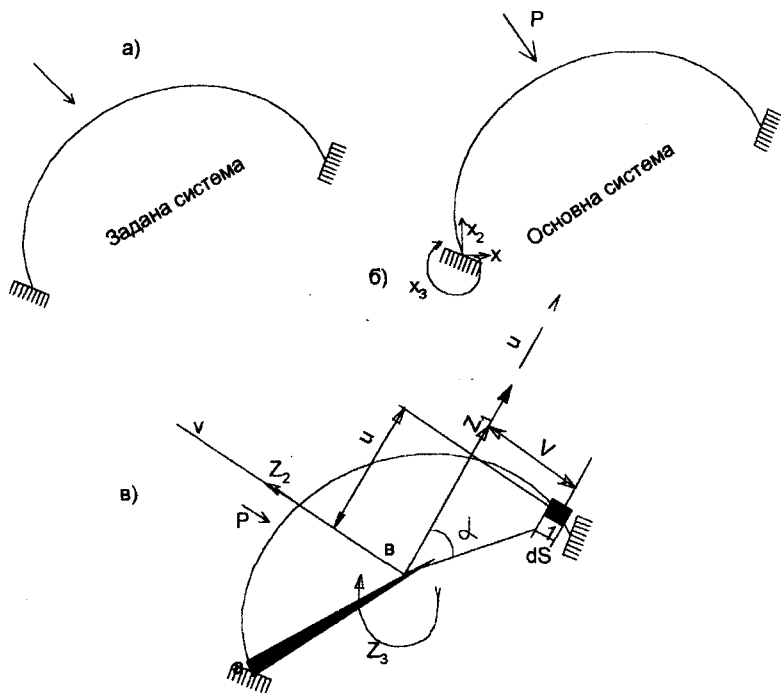


Рис. 3.2.

Відкинувши ліві опорні зв'язки, замінимо їх трьома невідомими зусиллями X_1 , X_2 , X_3 (рис. 3.2, б). Для визначення цих зусиль необхідно обчислити спільну систему трьох канонічних рівнянь. Пошукаємо більш раціональний спосіб розрахунку, що дозволяє уникнути рішення спільної системи рівнянь. Для цього до лівого вільного кінця споруди прикріплюють

нескінченно жорстку консоль ab не визначеної поки що довжини і напрямку (рис. 3.2, в).

На кінці консолі в точці b прикладаємо дві взаємно перпендикулярні сили Z_1 і Z_2 , що співпадають з напрямком деяких осей u , v та зосереджений момент Z_3 . Якщо ми підберемо величини цих трьох зусиль так, щоб крайній перетин консолі (в точці b) залишився нерухомим, тобто не змістився та не повернувся, то тим самим, завдяки нескінченній жорсткості консолі, отримаємо нерухомість крайнього лівого перетину заданої конструкції (точка a). Іншими словами, коли на нову основну систему (рис. 3.2, в) подіяти одночасно зусиллями Z_1 , Z_2 , Z_3 та навантаженням, то вона буде знаходитись в умовах, еквівалентних заданій системі.

Умови нерухомості кінця консолі b в формі канонічних рівнянь з невідомими Z_1 , Z_2 , Z_3

$$\begin{cases} Z_1\delta_{11} + Z_2\delta_{12} + Z_3\delta_{13} + \Delta_{1p} = 0, \\ Z_1\delta_{21} + Z_2\delta_{22} + Z_3\delta_{23} + \Delta_{2p} = 0, \\ Z_1\delta_{31} + Z_2\delta_{32} + Z_3\delta_{33} + \Delta_{3p} = 0; \end{cases} \quad (3.4)$$

Коефіцієнти цієї системи – переміщення кінця консолі від одиночних значень зусиль Z_1 , Z_2 , Z_3 .

Ці переміщення суттєво залежать від розмірів консолі та напрямку осей u , v .

Скориставшись цим, виберемо положення точки b і напрямок осей u і v так, щоб всі побічні переміщення, що входять до складу (3.4) були нульові. Тим самим буде проведено розділ невідомих за рівняннями.

В цьому випадку система (3.4) матиме вигляд:

$$Z_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}, \quad Z_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}, \quad Z_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \quad (3.5)$$

Виразимо в аналітичній формі умови, що визначають вибір нової системи невідомих. Позначивши координати елемента ds заданої конструкції через u та v (див. рис. 3.2, в) отримаємо наступні рівності

$$\delta_{12} = \int_0^e \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 ds / EI = \int_0^e v \cdot u ds / EI = 0,$$

$$\delta_{13} = \int_0^e \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_3 ds / EI = \int_0^e v \cdot l ds / EI = 0,$$

$$\delta_{23} = \int_0^e \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_3 ds / EI = \int_0^e u \cdot l ds / EI = 0.$$

Скоротивши на E , отримаємо такі умови:

$$\int_0^e u ds / I = 0, \quad \int_0^e v ds / I = 0, \quad \int_0^e uv ds / I = 0.$$

Цим умовам дамо геометричне пояснення. Коли розбити конструкцію на елементи ds і до центру ваги кожного прикласти умовний вантаж ds/I , то перші два інтеграли виразять умову рівності нулю статичних моментів цих вантажів відносно нових осей, що проходять через точку b . Це можливо при умові, що точка b співпадає з центром ваги і умовних вантажів. Третій інтеграл інерції цих же умовних вантажів, і як наслідок, говорить про те, що осі u , v мають бути головними центральними осями інерції.

Звідси правило пошуку нової системи координат: для обернення в нуль всіх побічних переміщень при розрахунку тричі невизначеного замкнутого контуру необхідно новий початок координат розмістити в центрі тяжіння пружних вантажів ds/I , а нові осі (u і v) повернути до співпадання з головними осями інерції тих же величин. Якщо задана система симетрична, то головними осями будуть осі симетрії.

Положення початку координат визначається за звичайними формулами теоретичної механіки

$$X_0 = \frac{\int_0^c x ds / I}{\int_0^c ds / I}; \quad Y_0 = \frac{\int_0^c y ds / I}{\int_0^c ds / I} \quad (3.6)$$

Чисельник кожної з формул (3.6) являє собою суму статичних моментів елементарних умовних вантажів ds/I (що поширюється на весь контур заданої системи) відносно довільно вибраних координатних осей. Знаменник цих формул являє суму пружних вантажів всієї системи.

Кут нахилу головних осей визначається за формулою, відомою із курсу опору матеріалів

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 I_{x_c y_c} / (I_{x_c} - I_{y_c}) \quad (3.7)$$

Тут

$$I_{x_c y_c} = \int_0^c x_c y_c ds / I; \quad I_{x_c} = \int_0^c y_c^2 ds / I; \quad I_{y_c} = \int_0^c x_c^2 ds / I \quad (3.8)$$

Умовний вантаж ds/I називають також елементарним пружним вантажем. Центр ваги умовних вантажів називають пружним центром ваги, або пружним центром.

Користуватись методом пружного центру доцільно при наявності однієї або двох осей симетрії. Приклади таких споруд наведені на рис. (3.3).

Для несиметричних контурів обсяг додаткових підрахунків за наведеним методом різко зростає, що недоцільно.

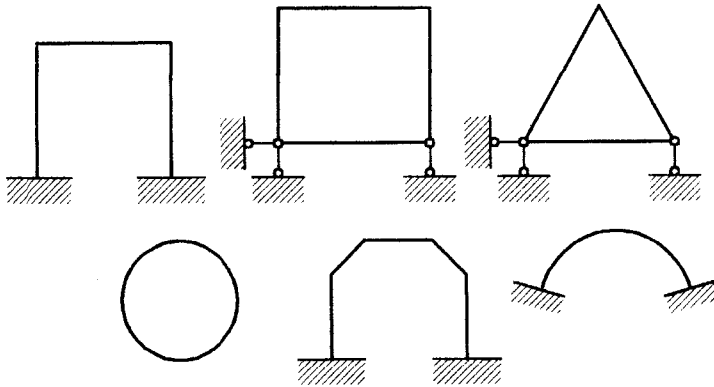


Рис. 3.3

Приклад 3.1. Для безшарнірного склепіння (рис.3.4), окресленого по параболі $y = (4f/l^2) \cdot (l-x)x$ з поперечними перерізами, моменти інерції яких змінюються за законом $I_x = I_s / \cos \varphi_x$ потрібно знайти положення пружного центру ваги.

Тут I_x – момент інерції поперечного перерізу, що відповідає абсцисі x ; I_s – момент інерції поперечного перерізу в ключі; φ_x – кут нахилу до горизонту дотичної до осі склепу в точці з абсцисою x .

Координати пружного центру визначимо відносно XOY (див. рис. 3.4). З огляду на симетрію відносно вертикальної осі одна із координат пружного центру відома, $x_0 = l/2$. Визначимо другу координату з (3.6), враховуючи:

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi_x}, \quad I_x = I_s / \cos \varphi_x$$

$$y = \frac{\int_0^l (4f/l^2) \cdot (l-x)x \left(\frac{dx}{I_s} \right)}{\int_0^l \left(\frac{dx}{I_s} \right)} = \frac{2}{3} f \quad (3.9)$$

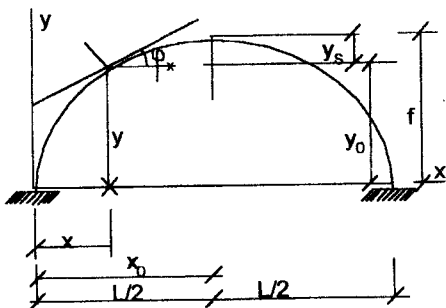


рис. 3.4

3.2.2. Розрахунок безшарнірної арки

Часто потрібно розраховувати арки обриси осей яких і закони зміни товщин перетинів не можуть бути апроксимовані аналітичними виразами, або зображаються за допомогою складних формул. В цих випадках точне визначення переміщень в основній системі (шляхом інтегрування) неможливе, а тому виникає потреба вести розрахунок арки чисельним методом.

В цьому випадку криволінійна вісь арки замінюється ламаною лінією з числом відрізків від 8 до 20. В межах кожного відрізка розміри поперечного перерізу приймаються постійними.

Вони мають розміри поперечного перерізу арки з абсцисою, рівною відстані від лівої опори до середини відрізка, що розглядається.

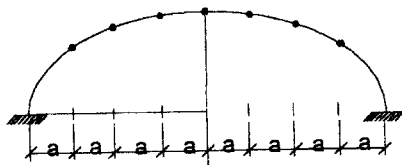


рис. 3.5

Навантаження замінюється зосередженими силами, прикладеними в точках перелому осі. Величини зосереджених сил визначаються як при вузловій передачі навантаження, тобто вони рівні реакціям опор (розташованих в точках перелому) однопроміжних балок, завантажених діючим на арку вантажем. Отримана таким чином “багатокутна” арка ступенево-змінного перерізу піддається точному розрахунку з використанням для підрахунків переміщень способу Верещагіна. Внутрішні зусилля, отримані для багатокутної арки, практично рівні зусиллям в криволінійній арці.

При обчисленні переміщень в арках зі стрілою підйому $f > e/5$ можна знехтувати впливом поздовжних та поперечних сил. При розрахунках похилих арок (стріла $f > e/5$) при визначенні одиничного переміщення δ_{ii} потрібно враховувати обтиснення арки, тобто дію поздовжних сил. При визначенні решти переміщень (як одиничних, так і вантажних) обтисненням арки можна знехтувати, врахувати лише деформацію згину.

Приклад 3.2. Для арки на рис. 3.6, вісь якої окреслена по квадратній параболі і законом зміни моментів інерції $I_x = I_s / \cos \varphi_x$, побудувати епюри M, Q, N при розподіленому вантажі зліва $q=2 \text{ кт/м}$.

Розділимо прогін арки на 8 рівних ділянок, тобто $n=8$, $a=3 \text{ м}$ та впишем в задану арку ламану лінію.

Рівняння квадратної параболи в системі координат $\eta O\xi$ з початком, спільним з центром тяжіння лівого опорного перерізу

$$\eta = \frac{4f}{l^2}(l-\xi)\xi = \frac{4 \cdot 6}{24 \cdot 24}(24-\xi)\xi = \frac{24-\xi}{24}\xi,$$

Значення η на рис. 3.6, б.

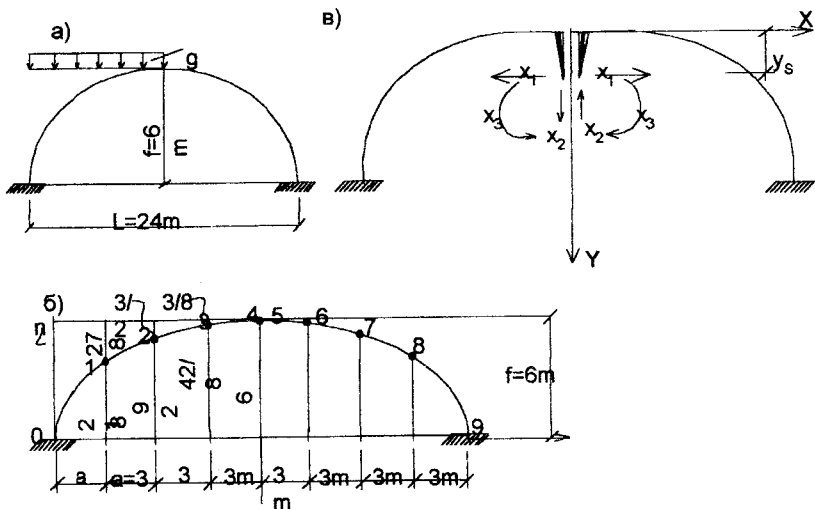


Рис. 3.6.

З урахуванням симетрії арки y_s визначасмо з (3.6)

$$y_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n/2} (y_{i-1} + y_i) = \frac{1}{8} (2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4)$$

$$y_s = \frac{1}{8} \left(6 + \frac{27}{8} \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{3}{8} \cdot 2 + 0 \right) = \frac{33}{16} = 2,0625 \text{ м}$$

Точне значення y_s для параболічної арки з законом зміни моментів інерції по $I_x = I_s / \cos \varphi_x$ рівна $s/3$. Різницю між точним і числовим значенням y_s можна зменшити, якщо збільшити число сторін багатокутника.

На рис. 3.7 - епюри одиничні та вантажні.

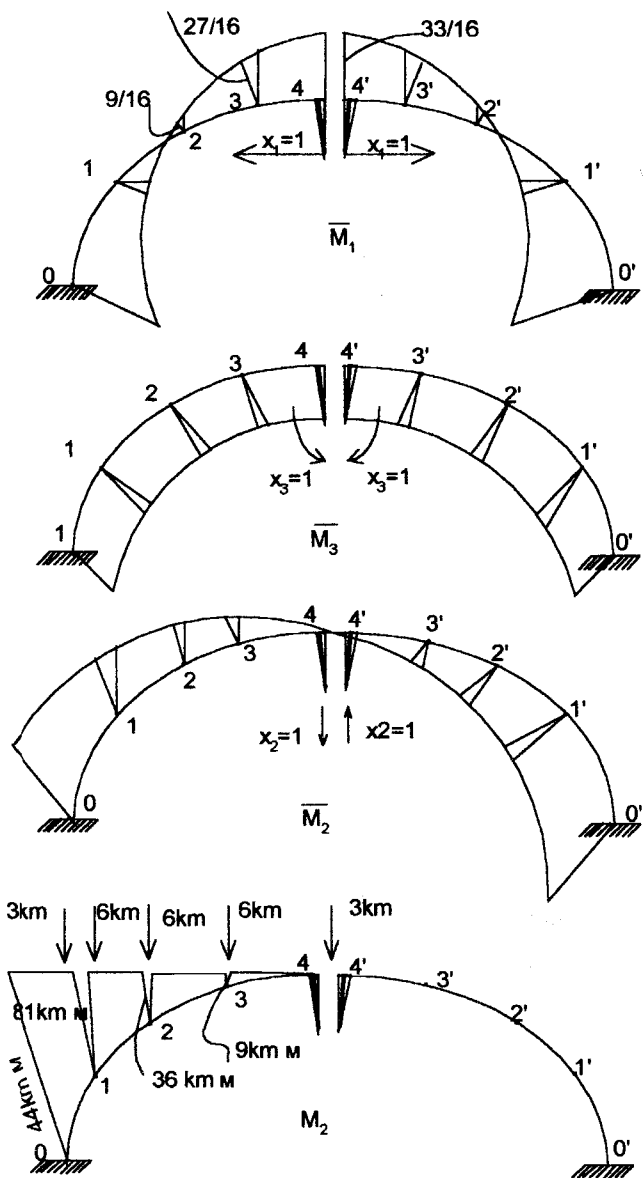


Рис. 3.7.

$$\text{Невідомі рівні: } x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad x_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad x_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{331}}$$

Переміщення δ і Δ визначаються перемноженням епюр на рис. 3.7, за Верещагіним. Враховуємо, що $s_i / I_i = (s_i \cos \varphi_i) / I_c = a / I_c$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2457}{32EI_c}; & \delta_{22} &= \frac{1152}{EI_c}; & \delta_{33} &= \frac{24}{EI_c}; \\ \Delta_{1p} &= -\frac{7371}{8EI_c}; & \Delta_{2p} &= \frac{5292}{EI_c}; & \Delta_{3p} &= -\frac{594}{EI_c}; \\ x_1 &= 1,2 \text{ км}, & x_2 &= -4,594 \text{ км}, & x_3 &= 24,75 \text{ км}. \end{aligned}$$

До основної системи в пружному центрі прикладаємо сили x_1, x_2, x_3 та задане рівномірне навантаження.

При обчисленні ординат M, Q, N що співпадають з вершинами багатокутника скористатись можна формулами:

1) для лівої половини арки з розподільним навантаженням (рис. 3.7, а)

$$\begin{aligned} M &= x_1(y - y_s) + x_2x + x_3 - q\left(\frac{x^2}{2}\right), & (3.10) \\ Q &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi - qxcos \varphi, \\ N &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi - qxsin \varphi, \end{aligned}$$

2) для лівої половини арки (рис. 3.7, б)

$$\begin{aligned} M &= x_1(y - y_s) + x_2x + x_3, \\ Q &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ N &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Доречно протабулювати ці аналітичні залежності (M, Q, N), склавши програму. $tg \varphi = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4f}{f} (1 - 2\xi) = \frac{4 \cdot 6}{24^2} (24 - 2\xi)\xi = 1 - \frac{\xi}{12}$

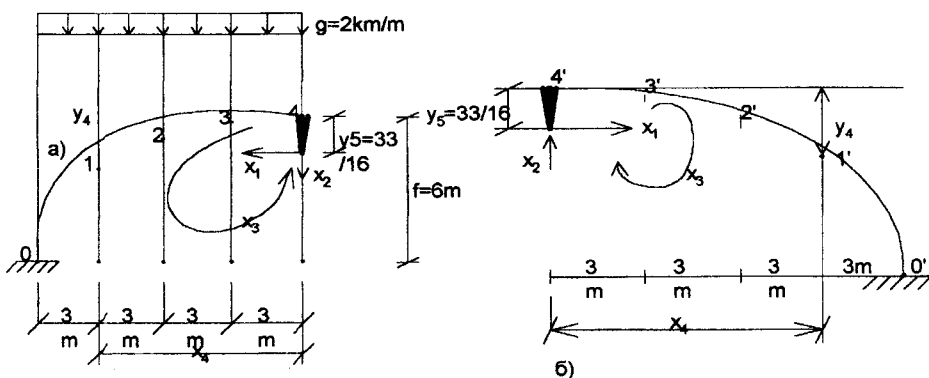


Рис. 3.7.

```

10 DIM T(I), S(I), C(I), X(I), Y(I), M(I), Q(I), N(I)
20 INPUT L, F, H, I, G
30 INPUT X1, X2, X3
40 INPUT YS
50 K=0
60 FOR I=0 TO 9 STEP 1
70 T(I)=((4*F)/L^2)*(1-2*K)
80 S(I)=T(I)/(SQR(1+T(I)^2))
90 IF I>4 THEN S(I)=-S(I)
100 C(I)=1/(SQR(1+T(I)^2))
110 X(I)=(-L/2)+K
120 Y(I)=(4*F/L^2)*(L-K)*K
130 IF I>4 THEN 170
140 M(I)=X1*(Y(I)-YS)+X2*X(I)*C(I)

```

```

150 Q(I)=-X1*S(I)+X2*C(I)-G*X(I)*C(I)
160 N(I)=X1*C(I)+X2*S(I)-G*X(I)*S(I)
170 M(I)=X(I)*(Y(I)-YS)+X2*X(I)+X3
180 Q(I)=-X1*S(I)+X2*S(I)
190 N(I)=X1*C(I)+X2*S(I)
200 PRINT "X(I)", "M(I)", "Q(I)", "N(I)"
210 PRINT X(I), M(I), Q(I), N(I)
220 K=K+H
230 NEXT I
240 END

```

Ідентифікатори	Змінні
L	$l(m)$
F	$f(m)$
H	$h(m)$
S(I)	$\sin\varphi$
C(I)	$\cos\varphi$
T(I)	$\operatorname{tg}\varphi$
K	ξ
YS	y_s
X(I)	x
Y(I)	y
M(I)	M_i
Q(I)	Q_i
N(I)	N_i

За отриманими розрахунками побудовані епюри

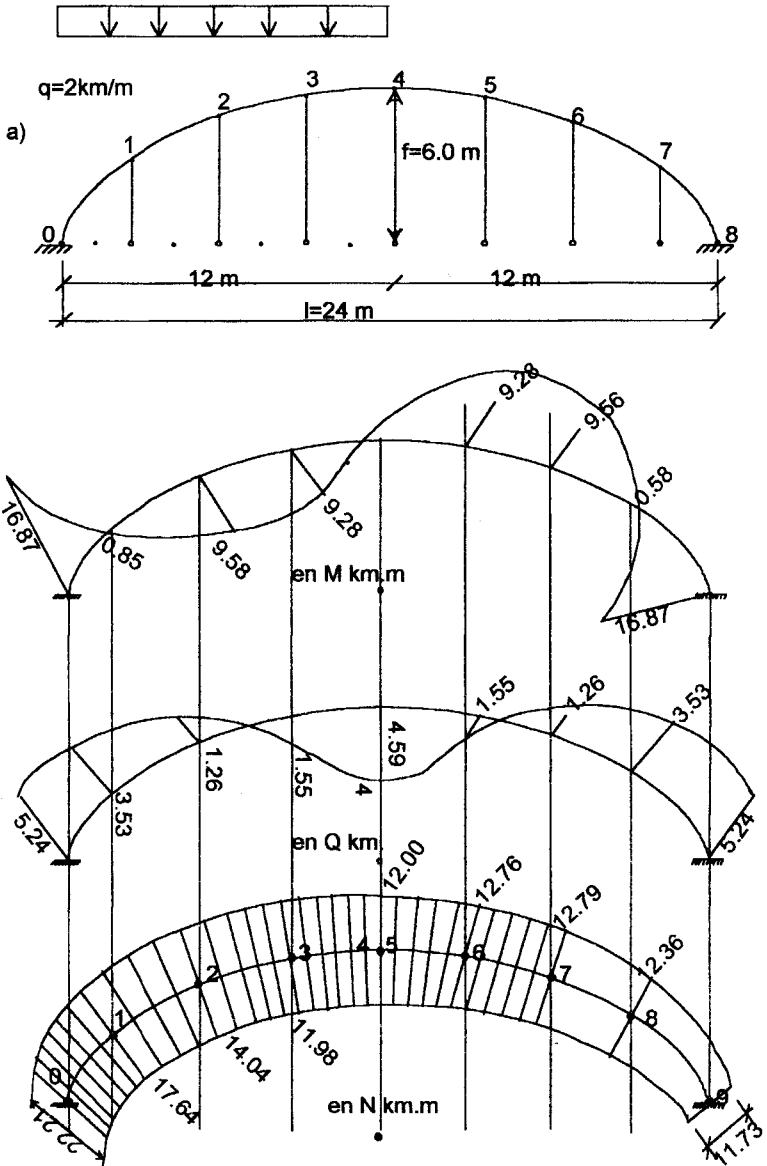


Рис. 3.8.

Вірність побудови епюри M проводиться деформаційною перевіркою, наприклад, перемноженням епюри M з епюрою M_2 .

$$\Delta = \frac{2a}{6EI_c} [(2 \cdot 12 \cdot 16,87 - 2 \cdot 0,85 + 9 \cdot 16,87) - (2 \cdot 9 \cdot 0,85 - 2 \cdot 6 \cdot 9,56 + 9,56 \cdot 9 + 6 \cdot 0,85) - (2 \cdot 6 \cdot 9,56 + 2 \cdot 3 \cdot 9,28 + 6 \cdot 9,28 + 3 \cdot 9,58) - 2 \cdot 3 \cdot 9,28] = \frac{1}{EI_c} (556,7 - 557,1) \approx 0$$

3.3. ДВОШАРНІРНА АРКА

При розрахунку двошарнірної арки за основну систему приймають криволінійну балку (рис.3.9,а). Канонічне рівняння заперечуєпереміщення по напрямку зайвого невідомого x_1 .

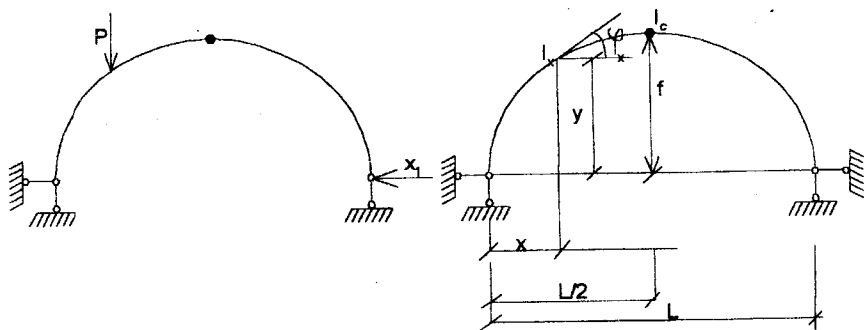


Рис. 3.9.

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{cp} = 0.$$

Величину δ_{11} для похилих арок ($f < e/3$, та висотою поперечного перерізу $h < e/10$) визначають з урахуванням поздовжніх сил, а при визначенні Δ_{1p} можна знехтувати впливом як поперечної так і поздовжньої сил.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2 ds}{EI_x} + \sum \int \frac{N_1^2 ds}{EF_x}; \quad (3.12)$$

$$\Delta_{1,p} = \sum \int \frac{M_1 M_p}{EI_x} dx; \quad (3.13)$$

В тих випадках, коли проінтегрувати вирази для δ_{11} і $\Delta_{1,p}$ важко, або неможливо, застосовують чисельне інтегрування (метод Сімпсона), або спосіб пружних вантажів.

Момент інерції поперечних перерізів двохшарнірної арки звичайно приймають по її довжині постійним, або закон зміни приймають з формули $I_x = I_c / \cos \varphi_x$, де

I_c – момент інерції арки в ключі (рис. 3.9, б).

Зачасту також приймають площу поперечного перерізу арки: $F_x = F_c / \cos \varphi_x$, де F_c – площа арки в ключі.

3.4. ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ ТА УСАДКИ БЕТОНУ

3.4.1. Вплив температури

При зміні температурного режиму в арці виникають внутрішні зусилля. Запишемо формули для їх визначення. Нехай температура зовнішніх волокон безшарнірної арки змінилась по всій її довжині на $+t_1^\circ$, а внутрішніх - на $+t_2^\circ$ (рис. 3.10, а).

В відповідності з цим температура нейтрального волокна, що співпадає з віссю арки змінилась на $\frac{t_1 + t_2}{2}$.

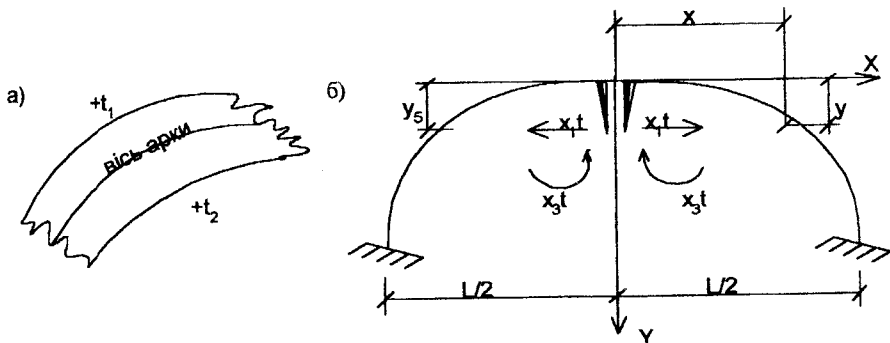


Рис. 3.10.

Позначимо різницю $t_1 - t_2 = \Delta t$, а температуру нейтрального волокна $\frac{t_1 + t_2}{2} = t$. Для цього випадку канонічні рівняння, що підтверджують думку рівності нулю переміщень по напрямку зайвих невідомих, прикладених в пружному центрі мають вигляд (рис. 3.10, б):

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0; \quad x_2 \delta_{22} + \Delta_{2t} = 0; \quad x_3 \delta_{33} + \Delta_{3t} = 0. \quad (3.14)$$

Деформація арки, що викликається зміною температури, симетрична, а тому $\Delta_{2t} = 0$ і $x_{2t} = 0$.

Температурні переміщення, що входять в канонічні рівняння визначаються за формулою Максвелла-Мора

$$\Delta_{1t} = \alpha(t_1 - t_2) \int_s \overline{M}_1 \frac{ds}{h} + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_s \overline{M}_1 ds;$$

$$\Delta_{3t} = \alpha(t_1 - t_2) \int_s \overline{M}_3 \frac{ds}{h},$$

або

$$\Delta_{1t} = -\alpha \Delta t \int_s (y - y_s) \frac{ds}{h} - \alpha t \int_s \cos \varphi x dx;$$

$$\Delta_{3t} = -\alpha \Delta t \int_s \frac{ds}{h},$$

де h – висота перерізу, α – температурний коефіцієнт лінійного розширення.

Переміщення δ_{11} з урахуванням впливу поздовжніх сил

$$\delta_{11} = \int_s (y - y_s) \frac{ds}{ES} + \int_s \cos^2 \varphi_x \frac{dx}{EF}$$

$$\delta_{33} = \int_s \frac{ds}{ES};$$

$$X_{1t} = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}; \quad \Delta_{3t} = -\frac{\Delta_{3t}}{\delta_{33}}.$$

Опорний момент в арці, що виникає від зміни температури, визначається:

$$M \Delta t = X_{3t} + X_{1t}(f - y_s).$$

3.4.2. Вплив усадок

Розрахунок бетонної арки на усадочні деформації можна звести до розрахунку її на еквівалентні їм температурні деформації. Справді, коли α – температурний коефіцієнт лінійного розширення бетону, то dt – приріст одиниці довжини бетонної арки при зміні температури на t° .

При усадці бетону лінійні розміри конструкції зменшуються на 0,025%. Коли прийняти для бетону $\alpha=0,00001$, то усадка бетону буде еквівалентна зниженню температури арки на 25° .

Практично цю цифру приймають рівною від 10 до 15° , оскільки в дійсності арка бетонується не цілком, а секціями. Таким чином, розрахунок на усадку зводиться до розрахунку арки на рівномірне по всій довжині (з зовнішньої і внутрішньої сторони) зниження температури на $10-15^\circ$.

4. Статистично невизначені плоскі ферми

§ 4.1. ПРИЗНАЧЕННЯ ТА ОСОБЛИВОСТІ РОБОТИ ФЕРМ

ФЕРМА- стержнева система, що залишається геометрично незмінною після умовної заміни її жорстких вузлів шарнірними. Ферми мають призначення таке ж як і балки суцільного перетину, але використовуються для перекриття значних прогонів, коли проектування суцільних балок через неповне використання матеріалу стінки стає економічно недоцільним. В таких випадках суцільну балку замінюють стержневою системою – фермою, елементи якої (стержні) під дією зосереджених навантажень, прикладених в вузлах, працюють головним чином на центральне стиснення або розтяг. Це дає можливість значно краще використовувати матеріал ферми, оскільки епюри нормальних напруг в поперечних перерізах мають вигляд прямокутників. Тому ферма легша від балки із суцільною стінкою при однаковій висоті та прогоні.

Статично невизначеними фермами називають геометрично незмінні ферми, в яких реакції всіх зв'язків можливо знайти при сукупному розгляді умов статички та деформаційних умов.

В статично невизначеній фермі крім зв'язків, необхідних для її геометричної незмінності присутні ще й залишкові зв'язки.

Число зайвих зв'язків характеризує ступінь статичної невизначеності ферми. Різнять зовнішню й внутрішню статичну невизначеність.

Але статично невизначені ферми мають і свої переваги. Так залізнична прогонова споруда, зконструйована в вигляді нерозрізних ферм, забезпечує більш плавний рух по ній ніж прогонова споруда в вигляді розрізних ферм,

оскільки пружна лінія таких споруд не має переломів на опорах і, відповідно, відсутні удари коліс при переході з однієї ферми на іншу.

§ 4.2. ПОРЯДОК РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ ФЕРМ МЕТОДОМ СИЛ

1. Ступінь статичної невизначеності ферми визначають за формулою:

$$n = C + C_0 - 2U \quad (4.1)$$

де C - кількість стержнів в фермі; C_0 - кількість опорних стержнів; U - кількість вузлів в фермі.

При проведенні аналізу структури ферми потрібно прослідкувати принцип утворення її із шарнірно-стержневих трикутників.

2. Вибирають основну систему, відкидаючи зайві зв'язки (внутрішні стержні та опорні зв'язки).

3. Записують канонічні рівняння методу сил:

$$\delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \dots + \delta_{in}x_n + \Delta ip = 0, \quad (4.2)$$

де $i=1,2,3\dots n$

4. Розраховують ферму окремо від зовнішнього навантаження та від дії кожного одиничного невідомого одним із відомих способів розрахунку статично визначених ферм (якою й буде основна система заданої ферми): а) способом вирізання вузлів; б) способом моментної точки (Ріттера); в) способом проєкції; г) способом двох перетинів; д) способом замкнутих перетинів; е) способом заміни стержнів; ж) графічним способом; з) комбінацією графічного способу з аналітичним.

5. За формулою Мора визначають коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь:

$$\delta_{ik} = \sum \overline{N_i N_k} \frac{l_i}{E_i F_i}; \quad (4.3)$$

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\overline{N}_i \overline{N}_p l_i}{E_i F_i} \quad (4.4)$$

де $\overline{N}_i, \overline{N}_k$ – поздовжні зусилля в стержнях основної системи від одиничних невідомих $\overline{X}_1 = 1; \overline{X}_k = 1$, N_p – поздовжнє зусилля в стержнях основної системи від зовнішнього навантаження; l_i, F_i – довжина та площа поперечного перерізу іншого стержня; E_i – модуль пружності I-го роду.

6. Обчисливши канонічні рівняння (4.2) знаходять значення зайвих невідомих X_1, X_2, \dots, X_n .

7. Кінцеві зусилля в будь-якому стержні ферми знаходять за формулою:

$$N^{(i)} = \overline{N}_p^{(i)} X_1 + \overline{X}_2^{(i)} X_2 + \dots + \overline{X}_n^{(i)} X_n \quad (4.5)$$

8. Перевіряють розрахунок за умовою деформації ферми:

$$\sum \overline{N}^{(i)} \delta N^{(i)} \frac{l}{E^{(i)} F^{(i)}},$$

де
$$\overline{N}^{(i)} = \overline{N}_1^{(i)} + \overline{N}_2^{(i)} + \dots + \overline{N}_n^{(i)} \quad (4.6)$$

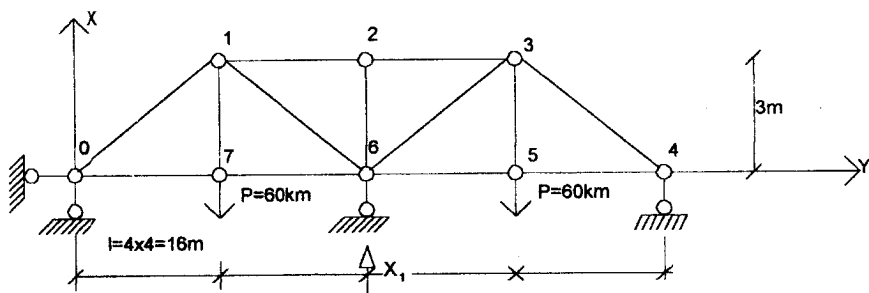


Рис.4.1.

Для перевірки можна скористатись формулою А. А. Уманського:

$$\sum N_i l_i = \sum (P_x x + P_y y), \quad (4.7)$$

де $P_x P_y$ - проекції сил, що діють на осі X, Y, x, y – координати прикладення навантажень. Початок координат можна вибрати в будь-якому місці, враховуються всі зовнішні сили, в тому числі й опорні реакції.

Приклад 4.1 Визначити зусилля в стержнях ферми, показаної на рис. 4.1. Площі поперечних перерізів F всіх стержнів прийняті однакові, модуль пружності E постійний.

Ферма один раз статично невизначена (зовнішня статична невизначеність). Основну систему отримуємо шляхом відкидання середнього опорного стержня і заміни його впливу на ферму невідомої реакції X_1 (рис. 4.1).

Розрахунок ферми, включаючи перевірку обчислень, наведений в таблиці 4.1. Оскільки ферма та навантаження симетричні, в таблицю внесені дані для половини (лівої) ферми.

Таблиця 4.1.

Номер стержня	li, см	Fi, см ²	$\overline{N_i}$	$\frac{\overline{N_i}^2 l_i}{EF}$	$\overline{N_p}$, мм	$\frac{\overline{N_i} \overline{N_p} l_i}{EF}$	N, кМ	$\frac{\overline{N_i} \overline{N_i} l_i}{EF}$
0-1	500	200	0.825	1.74	-100	-208	-39.8	-82.3
1-2	400	200	1.333	3.56	-80	-213	16.2	43
0-7	400	200	-0.667	0.89	80	-107	31.8	-42.5
1-6	400	200	-0.667	0.89	80	-107	31.8	-42.5
1-6	500	200	-0.825	1.74	0	0	-60.1	124
1-7	300	200	0	0	60	0	60	0
								167-
			$\delta_{11} =$			$\Delta_{1p} =$		167.3=
			8.82			-635		-0.3

$$X_1 = -\Delta_{ip} / \delta_{11} = 635 / 8.82 = 72.2 \text{ km}$$

Поряд з перевіркою обчислень, виконаних в останньому стовпці (табл. 4) скористаємось для контролю формулою (4.7).

$$\sum N_i I_i = -5 \cdot 39.8 + 4 \cdot 16.2 + 2 \cdot 4 \cdot 31.8 - 5 \cdot 60.1 + 60.3 = -0.3$$

$$\sum (P_x \cdot x + P_y \cdot y) = X \cdot 0 + H \cdot 0 - 60 \cdot 0 = 0$$

Гут V, H - вертикальна та горизонтальна складові реакцій на ліві й опори (на початку координат).

Обидві перевірки дали однакову похибку обчислень, рівну -0.3 , що складає всього 0.18% від 167 .

§ 4.3. РОЗРАХУНОК ФЕРМ НА РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ. ПОБУДОВА ЛІНІЙ ВПЛИВУ

Для побудови ліній впливу зусиль в стержнях статично невизначеної ферми використовують вираз (4.5):

$$N = N_p + \bar{N}_1 \cdot X_1 + \bar{N}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{N}_n \cdot X_n$$

Лінії впливу зусиль в основній системі (N_p) будують як звичайно для статично визначених систем. Для отримання ліній впливу зайвих невідомих X_i можна скористатись або безпосереднім розрахунком ферми при послідовному розташуванні одиничної сили в вузлах вантажного поясу, або застосувати теорему про взаємність переміщень ($\delta_{ip} = \delta_{pi}$), будувати їх за допомогою епюр прогинів вантажного поясу від дії відповідних одиничних невідомих. Наприклад, в випадку одного зайвого невідомого

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} \quad (4.8)$$

При двох невідомих :

$$X_1 = -\frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{p1} + \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{p2} \quad (4.9)$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{p1} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \delta_{p2}$$

При цьому епюри прогинів зручно будувати методом пружних вантажів.

Приклад 4.2.

Побудувати лінії впливу опорних реакцій і зусиль в стержнях 2-3 і 2-12 ферми зображеної на рис. 4.2.

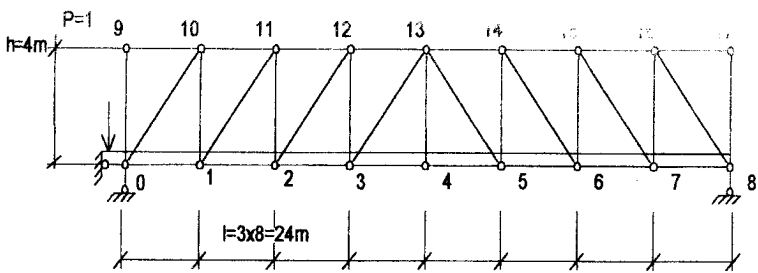
Ферма на рис. 4.2. зовні один раз статично невизначена. Основна система на рис. 4.2,б. Рівняння лінії впливу невідомої опорної реакції X_1 має вигляд (4.8)

$$X_1 = -\delta_{p1} / \delta_{11}$$

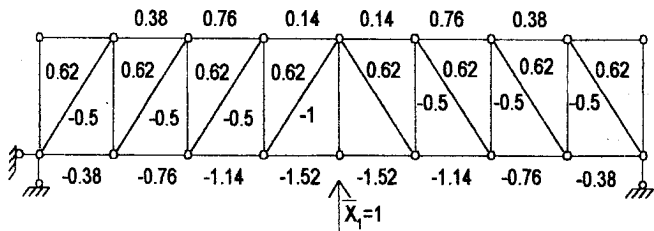
де δ_{11} - одиничне переміщення від системи $\bar{X}_1 = 1$; δ_{p1} - епура вертикальних переміщень вузлів вантажного (в даному випадку нижнього) поясу від сили $X_1 = 1$;

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{N}_i^2 \cdot \ell_i}{F_i E_i} \quad (4.10)$$

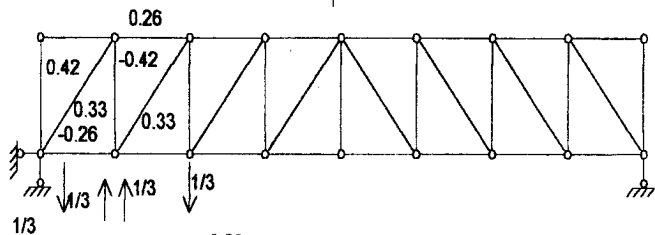
де \overline{N}_i - поздовжні зусилля в іншому стержні основної системи від дії сили $\bar{X}_1 = 1$; $\ell_i F_i$ - відповідно довжина і площа поперечного перерізу іншого стержня, E_i - модуль пружності I роду матеріалу стержня. \overline{N}_i в основній системі від дії $\bar{X}_1 = 1$ можна визначити графічно, побудувавши діаграму зусиль, або аналітичними методами. Ці зусилля показано на рис. 4.2,б.



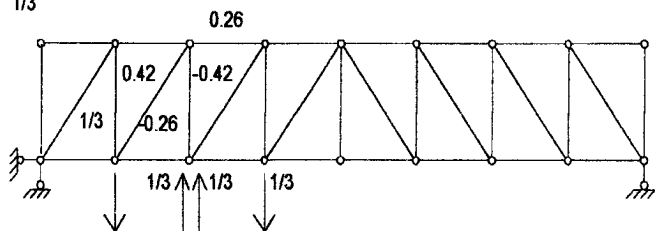
b)



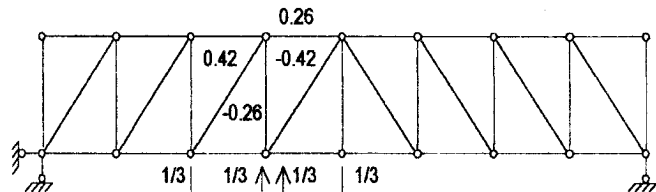
b)



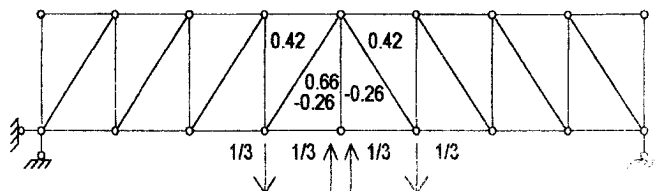
r)



A)



e)



Епору δ_{pl} будують за допомогою пружних вантажів, величини яких для ферм визначають за формулою:

$$W_{ni} = \sum \frac{\overline{N_{in}} \cdot \overline{N_{il}}}{F_i E_i} I_i \quad (4.11)$$

де W_{ni} - пружний вантаж п-го вузла вантажного поясу; $\overline{N_{in}}$ - зусилля в іншому стержні основної системи від дії одиничної групи сил, прикладеної в п-му вузлі вантажного поясу.

Нагадаємо, що пружним вантажем W_n називають систему фіктивних навантажень, які при прикладанні до горизонтальної балки, викликають в ній згинальні моменти, епора від яких співпадає з епорою прогинів.

Оскільки задана ферма симетрична, достатньо знайти пружні вантажі W_n лише для вузлів $n=1,2,3,4$. Для визначення пружного вантажу W_{11} до вузла 1 прикладають групу сил (рис.4.2,в). Значення зусиль в стержнях ферми від такого завантаження ферми на рис. 4.2,в.

Вважаємо, що $E_i = E = 1$ та $F_i = F = 1$, за (4.11) підраховуємо величину W_{11} .

$$W_{11} = 2 \cdot 0.38 \cdot 0.26 \cdot 3 / (1 \cdot 1) = 1.593,$$

Аналогічно визначасмо W_{21} , W_{31} , W_{41} (рис. 4.2, г,д,е)

$$W_{21} = 2 \cdot \frac{0.78 \cdot 0.26 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 1.184,$$

$$W_{31} = 2 \cdot \frac{1.14 \cdot 0.26 \cdot 3}{1 \cdot 1} + \frac{0.33 \cdot 0.5 \cdot 4}{1 \cdot 1} - \frac{0.33 \cdot 1 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 1.12,$$

$$W_{41} = 2 \cdot \frac{0.26 \cdot 1.52 \cdot 3}{1 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{0.42 \cdot 0.62 \cdot 5}{1 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 0.66 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 7.605.$$

Отримані пружні вантажі прикладаємо до фіктивної одноклітинної шарнірної балки такого ж прогону як ферма (рис. 4.3, а)

В цій фіктивній балці будуємо епюру згинальних моментів, що являє собою епюру переміщень вузлів ферми $\delta_{рd}$ від дії сили $\overline{X}_1 = 1$, рис. 4.3,б.

Для прийнятої основної системи нема необхідності обчислювати величину переміщення δ_{11} за (4.10), оскільки δ_{11} в даному випадку рівна за величиною і протилежна за знаком переміщенню $\delta_{рd}$ в вузлі 4, де прикладена направлена вверх сила $\overline{X}_1 = 1$, отже $\delta_{11} = 64.587$.

Підставивши значення $\delta_{рd}$ та δ_{11} в (4.8), знайдемо ординати лінії впливу невідомого X_1 (рис. 4.3, в).

Лінію впливу лівої опорної реакції знаходять за формулою:

$$R_A = R_{AP} + R_{A1} \cdot X_1 \quad (4.12)$$

де R_A - шукана лінія впливу опорної реакції; R_{A1} - реакція на лівій опорі від $\overline{X}_1 = 1$ в основній системі; $\overline{R_{A1}} = -\frac{1}{2}$.

R_{AP} -лінія впливу реакції на лівій опорі в основній системі (рис.4.3,б); X_1 -лінія впливу основного невідомого.

Лінія впливу опорної реакції R_A , побудована за формулою (4.12.) приведена на рис.4.3, д.

Лінію впливу зусиль в стержнях 2-3 та 2-12 будуємо, виходячи з формули

$$N_i = \overline{N}_i X_1 + N_{ip} \quad (4.13)$$

де N_i - лінія впливу зусиль в стержні; \overline{N}_i - зусилля в іншому стержні від дії сили $\overline{X}_1 = 1$ в основній системі; N_{ip} - лінія впливу зусилля в іншому стержні в основній системі.

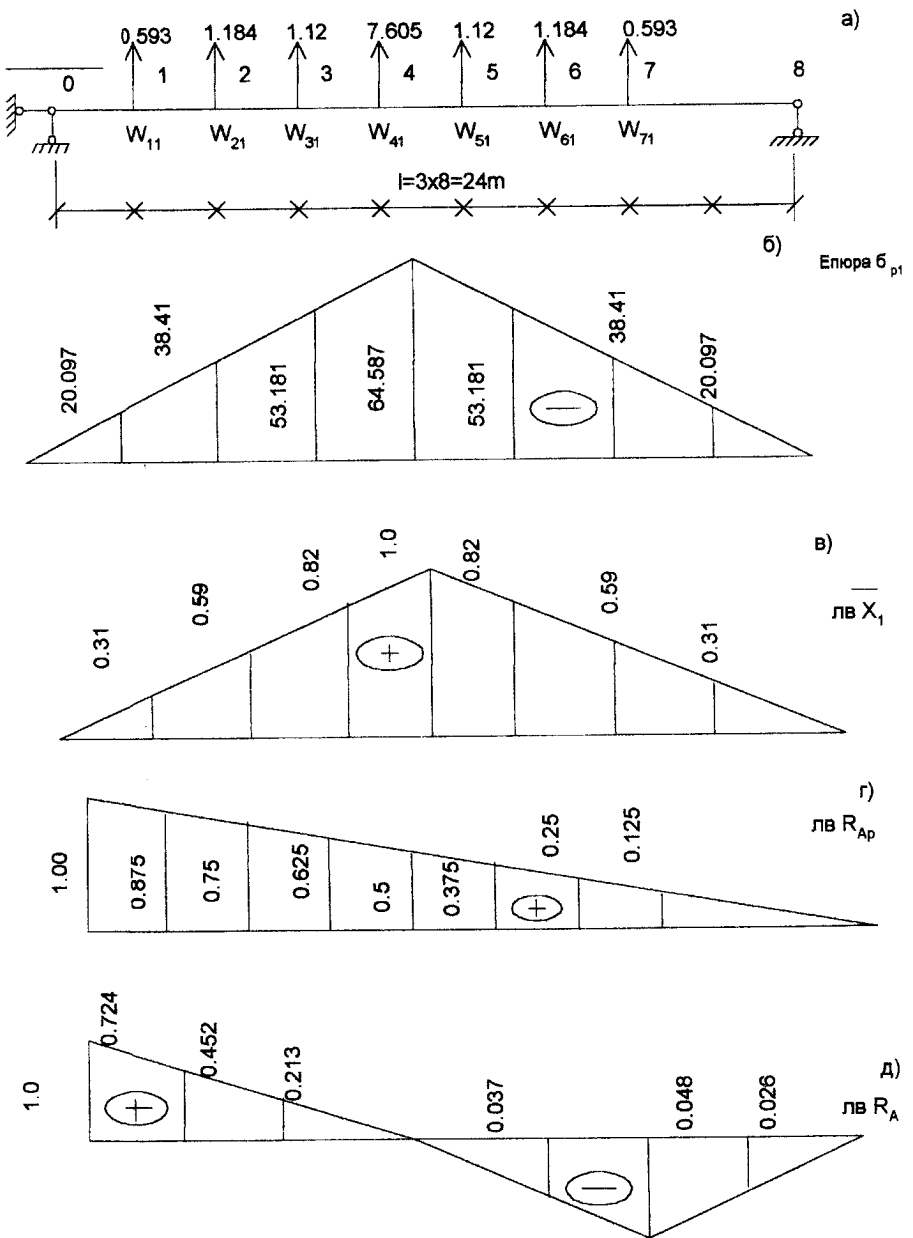


Рис. 4.3

Оскільки $\bar{N}_{(2-3)l} = -1.14$, $\bar{N}_{(2-12)l} = 0.62$ (див. рис. 4.2,б), то отримаємо:

$$N_{2-3} = -1.14X_1 + N_{(2-3)p}; N_{2-12} = 0.62X_1 + N_{(2-12)p}$$

За цими формулами обчислюють ординати ліній впливу в стержнях 2-3, 2-12.

На рис. 4.3, а, в наведенні лінії впливу зусиль $N_{(2-3)p}$ та $N_{(2-12)p}$, а на рис. 4.3, в,г – кінцеві лінії впливу зусиль в стержнях ферми N_{2-3} і N_{2-12} .

При побудові лінії впливу в фермах при їзді по верхньому поясу при побудові епюри переміщень вузлів вантажного поясу δ_{pl} необхідно враховувати переміщення від поздовжніх деформацій опорних стійок [3].

5. Розрахунок статично невизначених систем методом переміщень

5.1. ВИБІР НЕВІДОМИХ

Як і метод сил, метод переміщень є одним з найважливіших методів розрахунку статично невизначених систем.

При розрахунку статично невизначених систем методом сил спочатку знаходили зусилля в зайвих зв'язках, а потім переміщення.

Задачу можна вирішити по іншому, спочатку знайти переміщення, а потім установити відповідне їм розподілення зусиль. Так і роблять в розрахунках методом переміщень. За зайві невідомі приймають пружні переміщення, зневажаючи впливом поздовжніх і поперечних сил на деформації стержнів, враховують лише деформації згину. Крім того, не враховують різницю між початковою довжиною прямого стержня, і довжиною "хорди", що стягує його пружну лінію, тобто наближення кінців стержня при згині не враховується.

Розглянемо, які переміщення стержня необхідно достатньо знати, щоб можна було визначити внутрішні зусилля в будь-якому його перетині (рис.5.1). Для цього виділимо із статично невизначеної системи прямий стержень АВ. Під дією навантажень стержень АВ зігнеться та переміститься в нове положення А'В'.

Будь-яке положення А'В' можна отримати з початкового коли відомі наступні незалежні переміщення:

1. Поступальне переміщення всіх точок стержня на одну величину ΔA .

При цьому вісь стержня залишається прямолінійною, а M та Q для всіх точок дорівнюють нулю (рис.5.1,б).

2. Переміщення одного з кінців в напрямку, перпендикулярному до його осі на AB . Вигляд пружної лінії та епюри M на рис. 5.1,в.

3. Поворот кінця A стержня на $\angle \varphi_A$ (рис.5.1,г).

4. Поворот кінця B стержня на $\angle \varphi_B$ (рис.5.1,д).

5. Переміщення закріпленого з двох сторін стержня від дії заданого навантаження (рис.5.1,е).

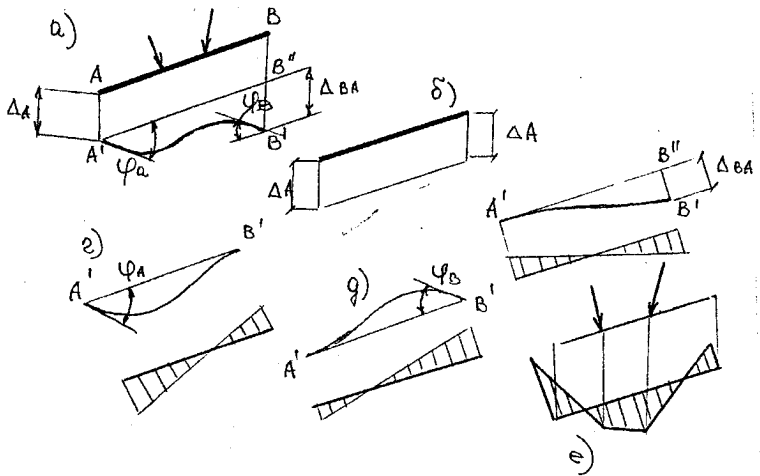


Рис. 5.1

Якщо якимось чином можна знайти величини ΔA , φ_A , φ_B то цього буде достатньо для визначення M і Q в будь-якому перерізі стержня. Ці переміщення і потрібно прийняти за невідомі при розгляді окремого стержня.

Оскільки в стержневих системах лінійні переміщення та кути повертання кінців стержнів, жорстко з'єднаних в вузлі, рівні між собою, то за

невідомі, при розрахунку статично невизначених систем методом переміщень, приймаються кути повороту вузлів та їх лінійні переміщення.

5.2 ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛА НЕВІДОМИХ

Число невідомих буде дорівнювати сумі чисел невідомих кутів обертання вузлів n_k і невідомих лінійних переміщень n_n , тобто

$$n = n_k + n_n \quad (5.1)$$

Число невідомих кутів обертання дорівнює числу “жорстких” вузлів, а тому визначення n_k зводиться до простого підрахунку числа “жорстких” вузлів рами: (в жорсткі вузли не включаються вузли жорсткого закріплення системи з “землею”).

“Жорстким” вважаємо такий вузол, в якому кінці стержнів, що сходяться в ньому, жорстко зв'язані між собою (рис.5.2,а (вузли 1, 2, 3, 4), рис.5.2,в (вузли 1, 2), рис.5.2,г (вузол 1)).

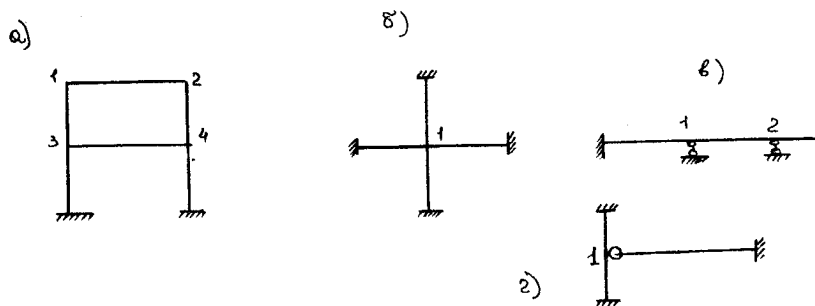


Рис. 5.2

При визначенні числа невідомих лінійних переміщень потрібно пам'ятати, що початкова відстань між кінцями кожного прямого стержня зберігається і після деформації.

Це дозволяє при визначенні числа лінійних невідомих переміщень замінити схему даної статично невизначеної системи її шарнірною схемою шляхом введення нових шарнірів в усі вузли та опорні закріплення. Переміщення вузлів такої системи не будуть незалежними, оскільки переміщення одного з них може викликати переміщення ряду інших вузлів. Необхідно виділити з них незалежні переміщення.

Число незалежних лінійних переміщень вузлів системи дорівнює числу стержнів, які необхідно ввести в шарнірну систему споруди, щоб перетворити її в геометрично незмінну. Число незалежних лінійних переміщень рівне степені геометричної змінності системи, отриманої з заданої шляхом введення у всі "жорсткі" вузли (включаючи опорні) повних шарнірів.

Для прикладу розглянемо раму на рис.5.3,а. Число "жорстких" вузлів цієї рами $n_k = 4$. Для визначення числа невідомих лінійних переміщень переходимо до шарнірної схеми, що є змінною системи (рис.5.3,б). Для перетворення її в геометрично незмінну достатньо поставити два стержні, наприклад DK і EM (рис.5.3,в).

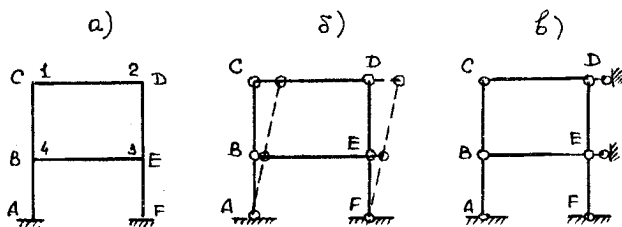


Рис. 5.3

На рис.5.3, в штриховою лінією показано можливе переміщення сторін рами, з цього рисунка видно, що шарніри (вузли) С, D та В, Е не можуть переміщатись незалежно один від одного. Таким чином, число незалежних лінійних переміщень рами на рис.5.3,а $\pi_n = 2$, а загальне число невідомих переміщень $\pi = \pi_k + \pi_n = 4 + 2 = 6$.

Число невідомих в системах на рис.5.2,б $\pi = \pi_k = 1$, на рис.5.2,в $\pi = \pi_k = 2$, на рис.5.2,г $\pi = \pi_k = 1$.

5.3. ОСНОВНА СИСТЕМА МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

При розрахунку методом переміщень система розділяється на ряд однопрогінних статично невизначених балок. Це досягається введенням в неї додаткових зв'язків.

Отриману таким чином систему називають основною системою методу переміщень.

Проведемо порівняння основних систем методу переміщень та методу сил. Розглянемо за приклад раму на рис.5.4.

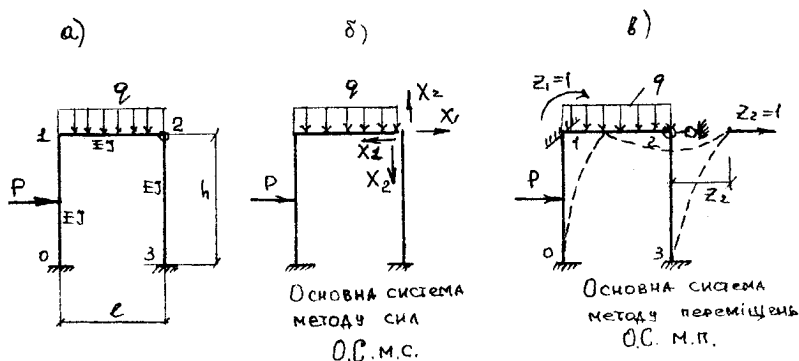


Рис. 5.4

Ця рама двічі статично невизначена. Основна система методу сил на рис. 5.4,б отримана проведенням розрізу по шарніру та вилучення двох зв'язків. Ввівши в систему два додаткових зв'язки: один, що перешкоджає повороту жорсткого вузла 1, а другий перешкоджає лінійному переміщенню вузлів 1 та 2, отримаємо основну систему методу переміщень. Ця система чотири рази статично невизначена.

Таким чином:

1. Основну систему методу сил отримують вилученням зв'язків, а основну систему методу переміщень – додаванням зв'язків.
2. Перехід від заданої системи до основної в методі сил зв'язаний із ступенем її статичної невизначеності, а перехід до основної системи методу переміщень – з підвищенням ступені статичної невизначеності.

Потрібно підкреслити, що введені в основну систему методу переміщень закріплюючі зв'язки різняться від звичайних абсолютно жорстких закріплень тим, що чинять опір лише повороту вузла та не позбавляють його лінійної рухомості. Реакції таких зв'язків являють собою моменти, прикладені в вузлах системи.

Основну систему методу переміщень, що являє собою задану систему з накладеними на неї зв'язками, можна назвати кінематично визначеною, а кількість невідомих – ступінню кінематичної невизначеності системи.

В останньому відношенні ОС м.п. (основна система методу переміщень) різниться від заданої тим, що в ній можлива проява реактивних моментів, у введених жорстких закріпленнях та реактивних сил в добавлених стержнях.

Для отримання ОС м.п. 1) – у всі “жорсткі” вузли заданої системи потрібно ввести закріплення, що перешкоджають повороту вузлів; 2) – ввести в задану систему стержні, що перешкоджають лінійним переміщенням вузлів.

5.4. КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Основна система відрізняється від заданої присутністю однакових зв'язків, в яких виникають додаткові моменти та сили. Коли ці додаткові зусилля дорівнюватимуть нулю, деформації заданої системи = деформаціям ОС.

Заперечення реактивних зусиль (сил або моментів) в введених закріпленнях і стержнях основної системи лежить в основі рівнянь методу переміщень, подібно тому, як в ОС методу сил лежить заперечення переміщень в основній системі за напрямками невідомих зусиль.

Рівняння методу переміщень:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0 \dots \quad (5.2)$$

Де R_1, R_2, \dots - реактивні моменти та реактивні сили в додаткових зв'язках в ОС. Число рівнянь дорівнює числу введених зв'язків. Рівняння методу переміщень - статичні, це рівняння рівноваги. Рівняння методу сил - кінематичні, це рівняння переміщень.

Запишемо в розгорнутій формі канонічні рівняння методу переміщень для рами на рис. 5.4,а ОС м.п. на рис. 5.4,в.

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{1p} = 0 \\ R_2 = R_{21} + R_{22} + R_{2p} = 0 \end{cases}, \begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R_{1p} = 0 \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2p} = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Перший індекс в реактивних зусиллях показує напрямок введеного додаткового зв'язку, другий індекс вказує від якої дії виникло зусилля.

R_{1p} - реактивний момент в 1 зв'язку від дії навантаження;

R_{21} - реактивна сила в 2 зв'язку від одиночного ($\varphi = 1$ рад) кута повороту зв'язку 1.

R_{11} - реактивний момент в жорсткому закріпленні 1 від повороту цього закріплення на кут Z_1 .

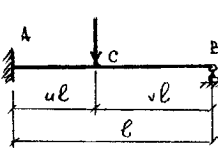
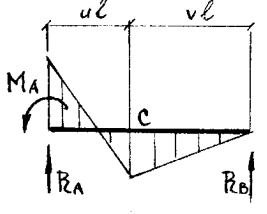
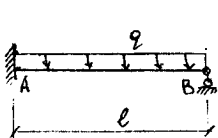
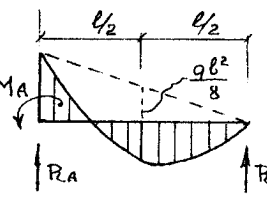
Зміст 1 рівняння – заперечення моменту в введеному жорсткому закріпленні, зміст 2 рівняння – заперечення сили в введеному стержні.

5.5. СТАТИЧНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТА ВІЛЬНИХ ЧЛЕНІВ СИСТЕМ КАНОНІЧНИХ РІВНЯНЬ.

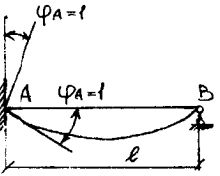
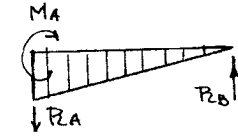
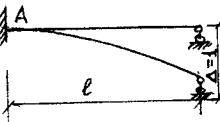
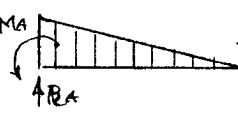
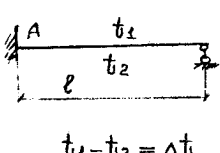
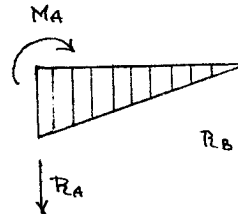
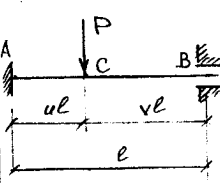
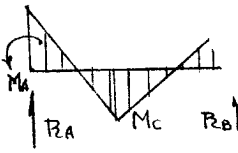
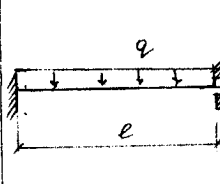
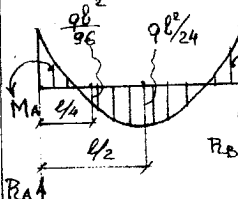
ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ ЗА МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень необхідно попередньо побудувати епюри згинальних моментів в основі системи від навантажень та від одиничних невідомих переміщень. Побудова їх проходить за допомогою даних, наведених в табл.5.1. Таблицю побудовано за розрахунками по методу сил.

Таблиця 5.1

№	Схема балки та дія на неї	Епюри згинальних моментів (ординати відкладені з боку розтягнутого волокна) і реакції	Формули
1	2	3	4
1			$M_A = -(pl/2) \cdot \sqrt{1 - v^2};$ $M_C = (pl/2) \cdot u^2 \cdot \sqrt{3 - u};$ $R_A = (pv/2) \cdot (3 - v^2);$ $R_B = pu^2 [1 + (v/2)] = (pu^2/2) \cdot (3 - u)$
2			$M_A = -ql^2/8;$ $R_A = 5ql/8;$ $R_B = 3ql/8$

Продовження табл. 5.1

1	2	3	4
3			$M_A = 3EI/l;$ $R_A = -R_B = -3EI/l^2$
4			$M_A = -3EI/l^2;$ $R_A = R_B = 3EI/l^3$
5	<p>Нерівномірний нагрів</p>  <p>$t_1 - t_2 = \Delta t$</p>		$M_A = 3EI\alpha \cdot \Delta t/2h$ <p>де h – висота поперечного перерізу, α – температурний коефіцієнт лінійного розширення</p> $R_A = -R_B = -3E\alpha \cdot \Delta t/2hi$
6			$M_A = uv^2 pl;$ $M_B = u^2 vp l;$ $M_C = 2u^2 v^2 pl;$ $R_A = v^2(1 + 2u)p;$ $R_B = u^2(1 + 2u)p$
7			$M_A = -M_B = -ql^2/12;$ $R_A = R_B = ql/2$

1	2	3	4
8			$M_A = 4EI/l;$ $M_B = 2EI/l;$ $R_A = -R_B = -6EI/l^2$
9			$M_A = M_B = -6EI/l^2;$ $R_A = -R_B = 12EI/l^3$
10	<p>Нерівномірний нагрів</p> <p>$t_1 - t_2 = \Delta t$</p>		$M_A = -M_B = EI\alpha \cdot \Delta t / h;$ де h – висота поперечного перерізу; α – температурний коефіцієнт лінійного розширення

За приклад розглянемо побудову епюр для ОС м.п. на рис. 5.4,в. Епюри зображено на рис. 5.5.

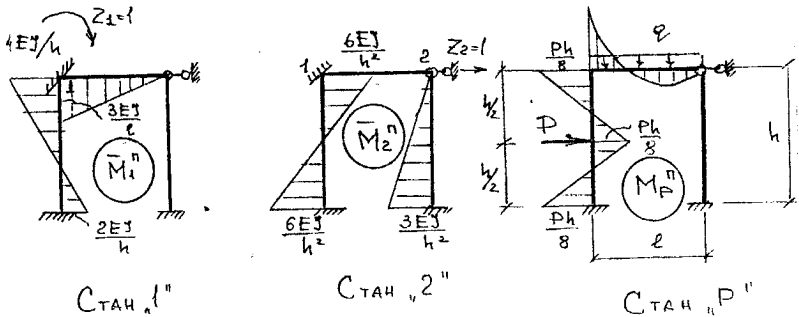


Рис. 5.5

Всі коефіцієнти, а також вільні члени канонічних рівнянь діляться на дві групи:

1. Коефіцієнти, що являють собою реактивні моменти в введених жорстких закріпленнях. Визначаються методом вирізання вузлів і складанням рівнянь рівноваги виду $\Sigma M=0$.
2. Коефіцієнти, що являють собою реактивні зусилля в введених стержнях. Визначаються за допомогою розрізу елементів рами і складанням рівнянь рівноваги сил, що діють на зрізану частину. $\Sigma T=0$.

Установимо правило знаків для реакцій жорстких закріплень та опорних стержнів. Реактивне зусилля вважаємо додатним якщо напрямком його дії співпадає з прийнятим напрямком повороту або лінійного переміщення вузла.

Визначимо реактивні моменти в системі канонічних рівнянь для рами на рис. 5.5,р вирізавши вузол 1 в стані "р".

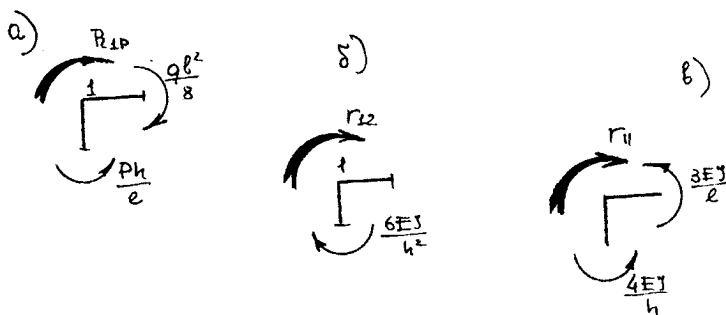


Рис. 5.6

Рівняння рівноваги цього вузла (рис. 5.6,а)

$$\sum M_1 = R_{1p} + (ql/8 - (ph/8)) = 0$$

$$R_{1p} = -(ql/8) + (ph/8)$$

Реактивний момент r_{11} в закріпленні 1 від повороту цього ж закріплення на кут $Z_1 = 1$ рад за годинниковою стрілкою визначимо, вирізавши вузол 1 в стані "1" (рис. 5.5), склавши рівняння рівноваги (рис.5.6,в)

$$\sum M_1 = r_{11} - (3EI/l) - (4EI/h) = 0;$$

$$r_{11} = (3EI/l) + (4EI/h)$$

Реактивний момент r_{12} в закріпленні 1 від переміщень вузла 2 на $Z_2 = 1$ визначимо, вирізавши вузол 1 в стані "2" (рис. 5.5) і (рис. 5.6,б)

$$r_{12} = -6EI/h$$

Визначимо реактивні зусилля R_{rp} , r_{21} , r_{22} в добавленому стержні; реакцію R_{rp} від навантаження визначимо, провівши розтин 1-1 в стані "р" (рис. 5.5 та рис. 5.7,а). Склавши вираз суми проекцій всіх сил, прикладених до відсіченої частини, на горизонтальну вісь x , отримаємо

$$\sum X = p + R_{rp} - p/2 = 0;$$

$$R_{rp} = -p/2$$

Для визначення реакції r_{21} проведемо в стані "1" (рис. 5.5) розтин 1 - 1 (рис. 5.7,б) та складемо рівняння проекцій сил на горизонтальну вісь x :

$$\sum X = (6EI/h) + r_{21} = 0;$$

$$r_{21} = -6EI/h$$

Зауважимо, що $r_{12} = r_{21}$.

Реакцію r_{22} знайдемо, провівши в стані "2" (рис. 5.5) розтин 1 - 1 (рис. 5.7,в). З рівняння проекцій сил на вісь x

$$\sum X = -(12EI/h) \cdot (3EI/h) + r_{22} = 0;$$

$$r_{22} = (12EI/h) + (3EI/h) = 15EI/h$$

Наведений спосіб визначення коефіцієнтів та вільних членів має назву статичний, оскільки заснований на застосуванні звичайних рівнянь статyki.

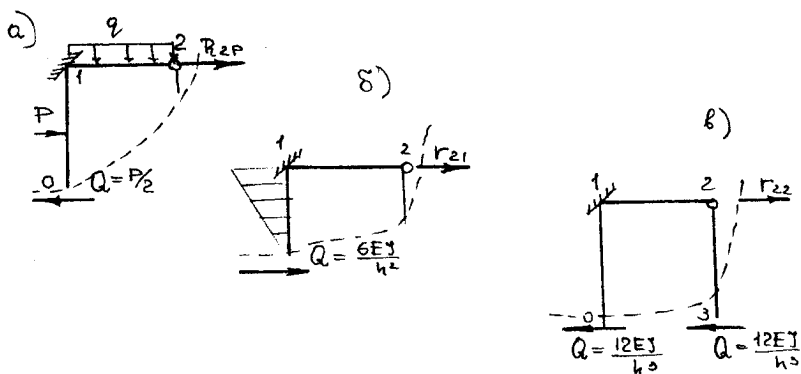


Рис. 5.7

5.6. ПЕРЕВІРКА КОЕФІЦІЄНТІВ ТА ВІЛЬНИХ ЧЛЕНІВ СИСТЕМИ КАНОНІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

В основній системі будується епюра M_s - алгебраїчна сума всіх одиничних епюр:

$$M_s = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M_i$$

Відрядкова перевірка: сума одиничних коефіцієнтів в кожному i -му рядку дорівнює добутку епюри M_s на епюру M_i .

$$r_{is} = \sum \int M_i \cdot M_s \cdot ds / EI \quad (5.4)$$

Можлива і універсальна перевірка:

$$r_{ss} = \sum \int M_s \cdot ds / EI \quad (5.5)$$

Тобто результат множення епюри M_s саму на себе повинен дорівнювати сумі всіх коефіцієнтів при невідомих в системі канонічних рівнянь. Перевірка коефіцієнтів завантаження зводиться до обчислення

добутку епюри M_p від навантаження в статично визначеній системі (отриманій із заданої системи або основної системи методу переміщень вилученням зайвих зв'язків, в тому числі обов'язково тих, реакції в яких визначаються) на епюру M_s .

$$r_{sp} = -\sum (M_s \cdot M_p \cdot ds) / EI \quad (5.6)$$

Результат повинен дорівнювати сумі коефіцієнтів завантаження в системі рівнянь $r_{sp} = \sum r$.

5.7. ПОБУДОВА ЕПЮРИ M , Q , N В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ

Епюру M (згинальних моментів в заданій статично невизначеній системі) отримаємо додаванням ординат епюри M_p , побудовану в основній системі, з ординатами одиничних величин невідомих:

$$M = M_p + M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + \dots + M_4 \cdot Z_4 \quad (5.7)$$

Достовірність побудови кінцевої епюри M може бути перевірена статичною перевіркою рівноваги моментів в вузлах. Невиконання умови $\sum M = 0$ в вузлі в кінцевій епюрі говорить про невірне визначення значень невідомих. По епюрі M будується епюра поперечних сил Q , а по Q – епюра поздовжніх сил. При перевірці цих епор велике значення має статична перевірка рівноваги окремих частин рами (рис. 5.8).

Побудуємо кінцеві епюри M , Q , N для рами, наведеної на рис. 5.4.

Система кінематичних рівнянь методу переміщень матиме вигляд (рис. 5.3):

$$\begin{cases} Z_1(3EI/l + 4EI/h) + Z_2(-6EI/h) + [(ql/8) + (ph/8)] = 0 \\ Z_1(-6EI/h) + Z_2(15EI/h) - p/2 = 0 \end{cases}$$

Коефіцієнти системи обчислено в параграфі 5.5.

До прикладу на рис. 5.4 візьмемо дані:

$$l=3\text{м}, h=4\text{м}, q=8\text{кН/м}, p=16\text{кН}.$$

Система канонічних рівнянь отримає вигляд

$$\begin{cases} 2EI \cdot Z_1 - 0.375EI \cdot Z_2 - 1 = 0 \\ -0.375EI \cdot Z_1 + 0.234375EI \cdot Z_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

Корені системи: $Z_1 = 9.8571$, $Z_2 = 4.99048$.

На рис. 5.8 наведена побудова кінцевої епюри М згідно (5.7).

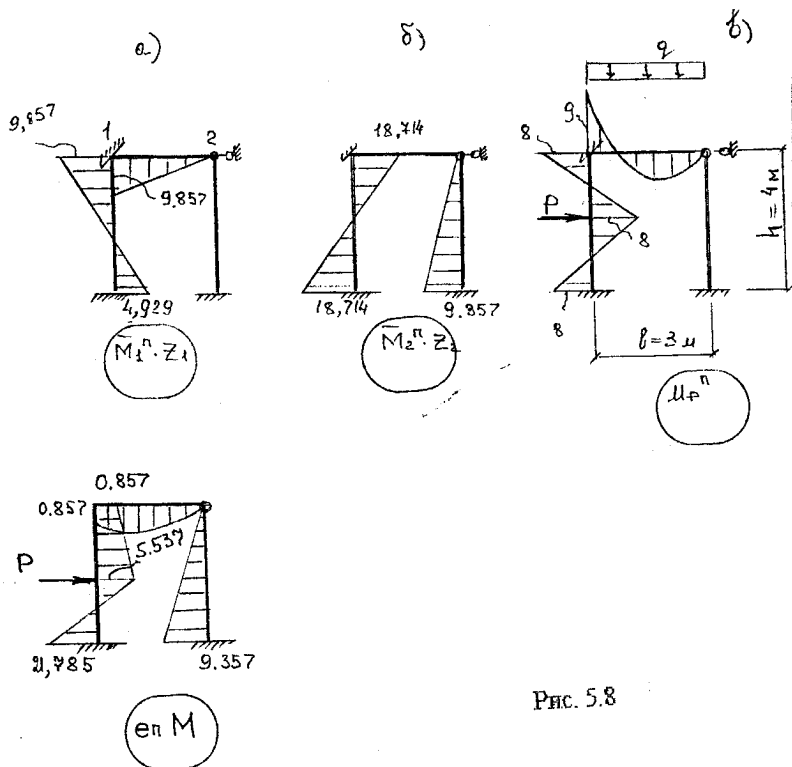


Рис. 5.8

Епюри поперечних сил можна будувати використовуючи уже побудовану епюру моментів та відоме відношення:

$$Q = dM/dS,$$

де S – координата, що відраховується вздовж стержня. Для побудови епюри Q кожний стержень рами розглядається окремо як шарнірно оперта

балка під заданим навантаженням. Для неї будується еюра Q' (рис. 5.9,а).

Вплив закріплень враховує друга складова формули (5.9).

$$Q = Q' + M_{\text{сп}} - M_{\text{лів}}/\ell \quad (5.9)$$

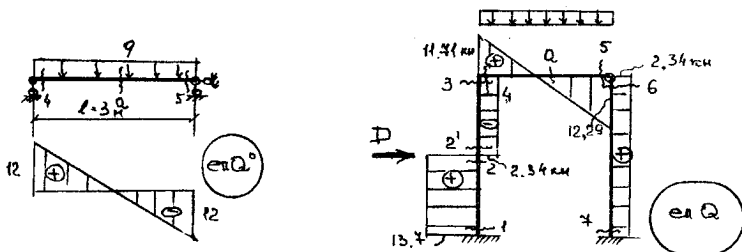


Рис. 5.9

$$Q_4 = 12 - (0 - 0.8572/3) = 11.7143(\text{кН})$$

$$Q_5 = -12 + (0 - 0.8572/3) = -12.1857(\text{кН})$$

Коли закон зміни еюри M по довжині стержня різний (стояк лівий на рис. 5.8,г), то розглядається частина стержня з однаковим законом зміни по ній еюри M .

$$Q_1 = Q_2 = 5.5357 - (-21.7857)/2 = 13.66(\text{кН})$$

$$Q_2 = Q_3 = 0.8572 - 5.5357/2 = -2.34(\text{кН})$$

Для визначення Q_6 , Q_7 (правого стояка) скористаємось другою складовою формули, оскільки по правому стояку навантаження відсутнє.

$$Q_6 = Q_7 = (9.3571 - 0)/4 = 2.34(\text{кН})$$

Знак поперечної сили визначається по еюри M за правилом олівця (коли дія співпадання осі стержня з дотичною до еюри M повертання (кут повертання 90 градусів) потрібно зробити за годинниковою стрілкою, то еюра Q на цій ділянці стержня додатна і навпаки). Додатна поперечна сила для горизонтального стержня відкладається ввєрх, а в стержнях іншого напрямку – в сторону, протилєжну тїй, в яку відкладаються додатні ординати еюри M . Для визначення поздовжених сил N потрібно вирізати вузли рами, прикласти до них навантаження, що діє ззовні та знайдені раніше поперечні сили та скласти для цих вузлів рівняння рівноваги. Чого не буде вистачати до

рівноваги вузла, те величина N (рис. 5.10). Пам'ятаймо, що додатна Q крутить вузол за годинниковою стрілкою.

Для перевірки епюр Q та N потрібно зробити статичну перевірку рівноваги окремих частин рами (як на рис. 5.9).

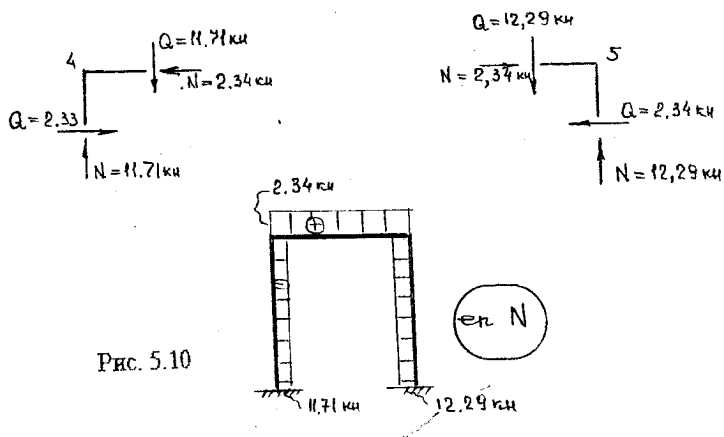


Рис. 5.10

5.8. РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК ЗА МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Метод переміщень можна використовувати і для розрахунку нерозрізних балок. За основні невідомі приймаються кути повертання опорних перерізів нерозрізної балки. При цьому система канонічних рівнянь (5.3) отримує тричленну структуру, так k -та стрічка системи (5.3) залишається в вигляді:

$$r_{k,k-1} \cdot Z_{k-1} + r_{k,k+1} \cdot Z_{k+1} + R_{кр} = 0 \quad (5.10)$$

в відповідності з чим вираз (5.10) можна назвати рівнянням трьох кутів повертання. Його можна представити в розгорнутій формі, подібно рівнянню трьох моментів.

На прикладі балки, показаної на рис. 5.11 побудуємо епору згинальних моментів при умові, що довжини та жорсткості всіх прогонів однакові та рівні EI , $l=4\text{м}$.

Складемо систему канонічних рівнянь відносно трьох невідомих кутів повертання на опорах 1, 2, 3 (рис. 5.11,б):

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

Для визначення коефіцієнтів та вільних членів цих рівнянь побудуємо одиничні та вантажні епори згинальних моментів (рис. 5.11,в-е). Отримаємо:

$$\begin{aligned} r_{11} = 8i; \quad r_{12} = r_{21} = 2i; \quad r_{22} = 8i; \quad r_{23} = r_{32} = 2i; \\ r_{33} = 7i; \quad R_{1p} = 50\text{кНм}; \quad R_{2p} = 0; \quad R_{3p} = -40\text{кНм}, \end{aligned}$$

$$\text{де } i = \frac{l^3}{EI_i}.$$

Рішення системи канонічних рівнянь дає корені:

$$Z_1 = -6.29/EI; \quad Z_2 = 0.15/EI; \quad Z_3 = 5.67/EI.$$

Кінцеву епору згинальних моментів (рис. 5.11,ж) будуємо за формулою

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \overline{M}_3 Z_3 + M_p''.$$

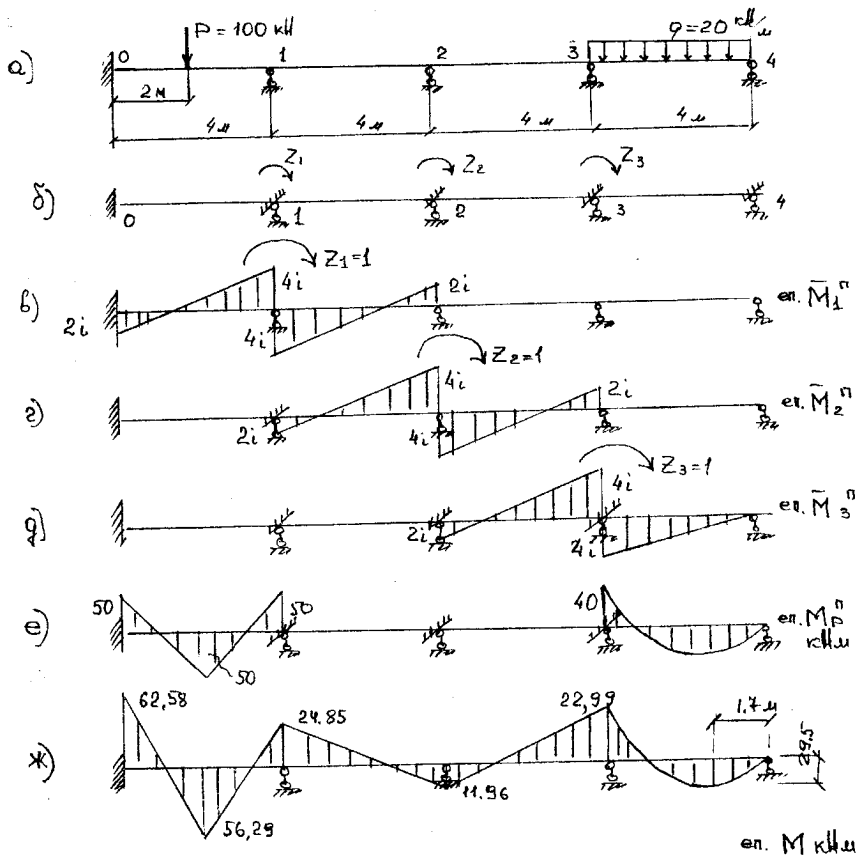


Рис. 5.11

6. Змішаний метод розрахунку статично невизначених рам

Метод використовується для розрахунку рам, структура яких за довжиною або за висотою неоднорідна, тобто коли одна частина споруди має малу кількість зайвих зв'язків, а друга навпаки, велику кількість зайвих зв'язків і малу рухомість вузлів (рис. 6.1). Основна система для таких споруд утворюється усуванням зайвих зв'язків в одній частині рами (як в методі сил) та введенням додаткових зв'язків в другій частині рами (як в методі переміщень).

Таким чином при змішаному методі розрахунку частина невідомих являє собою зусилля - сили, моменти (як при розрахунку методом сил), а інша частина - переміщення - повороти, поступальні зміщення (як при розрахунку методом переміщень).

Метод був запропонований в 1927 році професором А.А. Гвоздевим.

Приклад 6.1. Побудувати епюру згинальних моментів для рами на рис. 6.1 та провести перевірку її вірності.

За методом сил рама на рис. 6.1 три рази статично невизначена, за методом переміщень ступінь кінематичної невизначеності теж рівний трьом.

При розрахунку цієї рами змішаним методом (рис. 6.1,б) число невідомих рівне двом. В результаті аналізу вибираємо для розрахунку змішаний метод.

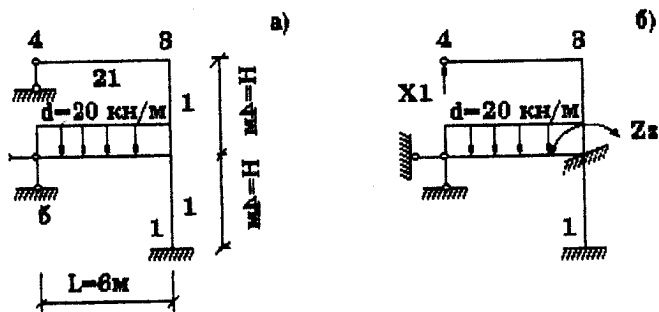


Рис. 6.1

Для визначення невідомих X_1 та Z_2 складаємо систему аналогічних рівнянь :

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta'_{12} Z_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ r'_{21} X_1 + r_{22} + r_{zp} = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

тобто прирівнюємо нулю переміщення точки прикладення сили X_1 по її напрямку (перше рівняння) і реакцію в введеному закріпленні (друге рівняння).

Побудуємо в основній системі одиничні епори згинальних моментів M_1 , M_2 та грузову M_p (рис. 6.2, а - в)

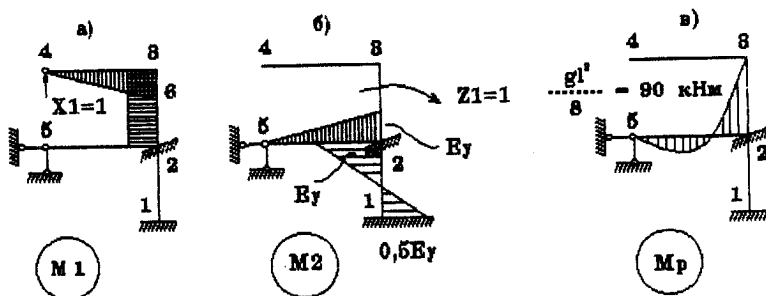


Рис.6.2

Для визначення коефіцієнта δ_{11} і вільного члена першого рівняння Δ_{1p} скористаємось формулами :

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M_1^2}}{EI} \cdot dS = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 4 \cdot 6 \right) = \frac{180}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\overline{M_1} \cdot M_p}{EI} \cdot dS = 0.$$

Коефіцієнти та вільний член другого рівняння, що являють собою реактивні моменти в введеному закріпленні відносно дії $X_1 = 1, Z_2 = 1$ та навантаження, визначимо, як це робиться в методі переміщень, із розгляду умов рівноваги вузла 2 (рис. 6.2, а-в).

$$r'_{21} = -6; r_{22} = 2EI; R_{2p} = 90 \text{ кНм}.$$

Для визначення коефіцієнта σ'_{12} , що являє собою “переміщення від переміщення” можна скористатись рівністю :

$$r_{mn} = -\delta_{nm},$$

або скористатись теорією кінематичного ланцюга (див.(2), розділ 7, параграф 15, та розділ 11, параграф 12,11).

Для нашого випадку $\delta_{12} = -r'_{21} = 6$.

Геометричні рівняння тепер можна переписати у вигляді :

$$\begin{cases} 180 X_1 + 6EI \cdot Z_2 = 0 \\ -6 X_1 + 2EI \cdot Z_2 = -90 \end{cases}$$

Корені системи : $X_1 = 1.364; X_2 = -40.909/EI$

Домноживши одиничні епюри $\overline{M_1}$ та склавши їх з епурою M_p від навантаження за формулою :

$$M = \overline{M_1} X_1 + \overline{M_2} Z_2 + M_p \quad (6.3)$$

отримаємо кінцеву епюру згинальних моментів (рис. 6.3).

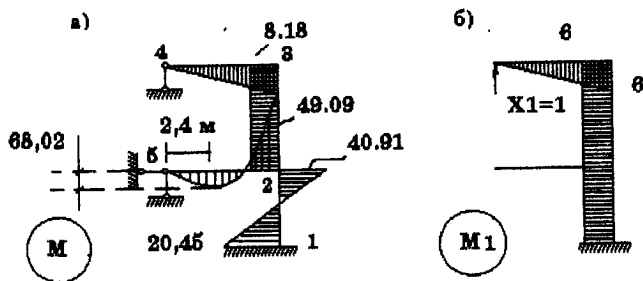


Рис.6.3

Та обставина, що вузол 2 на епюрі M врівноважений, підтверджує вірність її побудови. Та, для повної перевірки вірності виконаного розрахунку потрібно впевнитись в тім, що переміщення точки прикладення сили X_1 по її напрямку дорівнює нулю. Для цього потрібно проінтегрувати кінцеву епюру M з одиничною епюрою моментів \overline{M}_1 , побудованою від дії сили $X_1=1$ в довільній статично визначеній системі утвореної із заданої рами (рис. 6.3,б)

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M \cdot M_1}{EI} \cdot dS = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{8,184 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 8,184 \cdot 46 - 6 \cdot 4 \cdot \frac{40,908 - 20,454}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot (245,520 - 245,448) = 0,$$

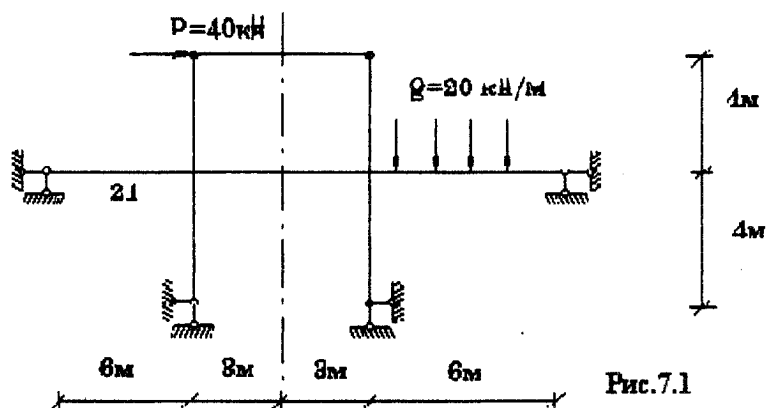
це дає кінцеве підтвердження вірності побудови епюри M .

7. Комбінований метод розрахунку симетричних рам

При розрахунку симетричних рам комбінованим методом завжди навантаження розкладається на симетричну та обернено-симетричну складові і розрахунок проводиться окремо на кожне з цих навантажень. При цьому на симетричну складову навантаження, рама розраховується за методом переміщень, а на обернено-симетричну - за методом сил. Зауважимо, що при розрахунку на одну із складових навантаження деколи буває зручно використати і змішаний метод.

Це дозволяє в деяких випадках зменшити загальну кількість невідомих в порівнянні з тим, що дало б застосування класичних методів.

Приклад 7.1 Для симетричної рами, зображеної на рис. 7.1, побудувати епюри M, Q, N .



Підрахуємо кількість невідомих за методом сил та методом переміщень.

Враховуючи симетрію рами та проводячи групування невідомих, виберемо основні системи, що відповідають кожному із методів (рис.7.2).

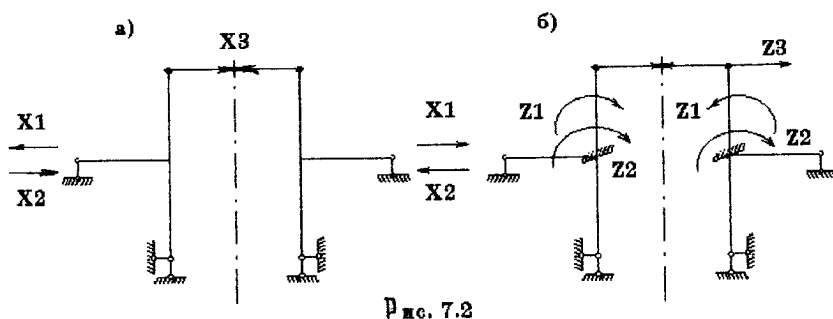


Рис. 7.2

Таблиця 7.1

Вид невідомих	Метод сил	Метод переміщень	Комбінований метод
Симетричні	2	1	1
Кососиметричні	1	2	1
Всього	3	3	2

Із таблиці 7.1 при розрахунку рами на симетричне навантаження більш доцільно використати метод переміщень, а при розрахунку на кососиметричне навантаження - метод сил, так що в кожному з цих випадків необхідно визначити лише одне невідоме (відповідно Z_1 і X_1). Таким чином для рішення поставленої задачі простіше застосувати комбінований метод, що приводить до двох невідомих. Для цього потрібно задане навантаження розкласти на симетричну і кососиметричну складову та провести розрахунок на кожен з цих складових окремо.

При розрахунку рами на симетричну складову навантаження (рис.7.3) виберемо основну систему за методом переміщень та побудуємо епюру \overline{M}_1 , M_p .

Для визначення невідомих запишемо канонічне рівняння :

$$Z_{11} \cdot Z_1 + R_{1p} = 0$$

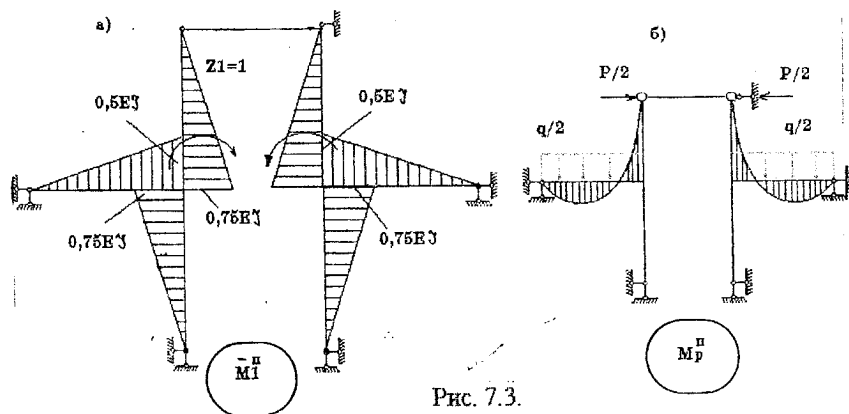


Рис. 7.3.

Коефіцієнти r_{11} та R_{1p} мають значення $r_{11} = 2(0,5 + 0,75 + 0,75)EI = 4EI$;

$$R_{1p} = 2 \cdot 45 = 90 \text{ кНм.}$$

Корінь канонічного рівняння $Z_1 = -22,5/EI$ домножуємо на епюру \overline{M}_1 та додаємо до епюри \overline{M}_p . Отримаємо епюру згинальних моментів від дії симетричного навантаження $M_{\text{сим}}$. (рис. 7.4).

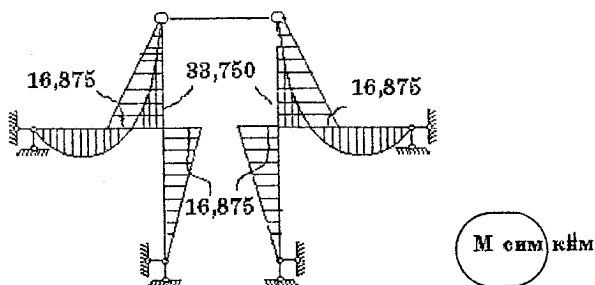


Рис. 7.4

Рівність методів в вузлах рами підтверджує вірність її побудови. Розрахунок рами на кососиметричну складову навантаження проводимо за методом сил (рис. 7.5).

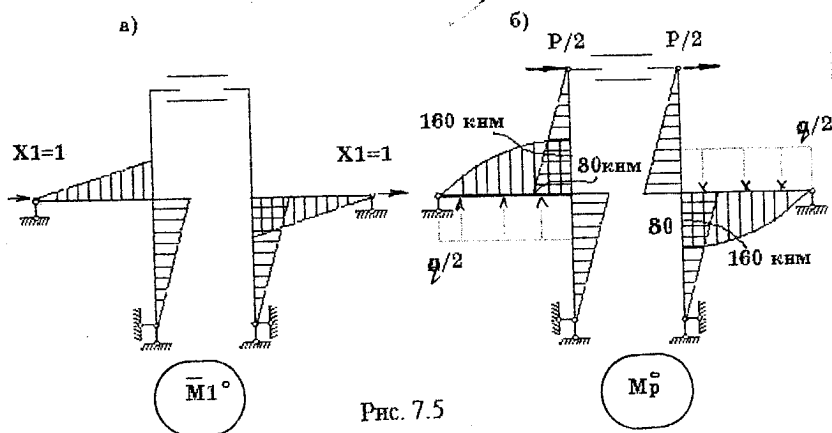


Рис. 7.5

Для визначення невідомих X_i запишемо канонічне рівняння :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

Коефіцієнти δ_{11} і Δ_{1p} визначимо за допомогою епюр \bar{M}_1^0 та M_p^0 рис.7.5,а,б.

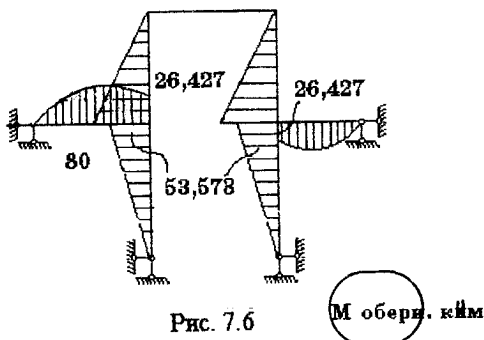
$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} \cdot dS = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{4 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \cdot 2 = \frac{74667}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1^0 \cdot M_p^0}{EI} \cdot dS = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{160 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{36} \cdot 45 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{80 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \\ &= \frac{1246,667}{EI}. \end{aligned}$$

Із рішення канонічного рівняння: $X_1 = -33,393$

Епюру згинальних моментів від дії обернено-симетричних навантажень $M_{обрн}$ (рис.7.6) знайдемо за формулою:

$$M_{обрн} = M_1^0 \cdot X_1 + M_p^0.$$



Перевірку отриманої епюри проведемо інтегруванням її з епюрою \overline{M}_1^0 :

$$\sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_1^0}{EI} \cdot dS = \frac{1}{EI} \left(\frac{26,427 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{53573,4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = 0.$$

Кінцеву епюру згинальних моментів M отримаєм після складання епюр $M_{\text{сил}}$ та $M_{\text{оберн}}$ (рис. 7.7,а).

По ній будемо епюри Q та N поперечних та поздовжніх сил.

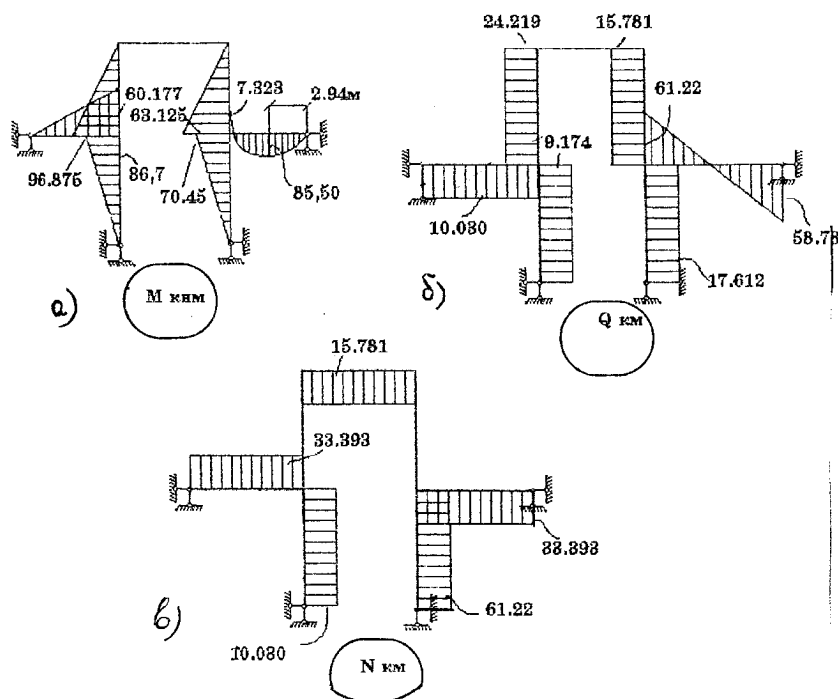


Рис. 7.7

8. Розрахунки просторових ферм

8.1. ВИЗНАЧЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФЕРМ

Просторовою фермою називають геометрично незмінну систему, складену із прямих стержнів, що не лежать в одній площині та з'єднаних по кінцях шаровими шарнірами. При вузлових навантаженнях в стержнях ферми виникають лише поздовжні сили.

Елементи просторових ферм розташовані в різних площинах і можуть сприймати навантаження, що діють теж в різних площинах.

Елементи просторової ферми об'єднуються в вузлах заклепками або зварним швом, тобто жорстко. Але врахування жорсткості вузлових з'єднань призводить до надмірного ускладнення розрахунку. Тому при розрахунках просторових ферм приймають, що всі елементи ферм в вузлах з'єднані шарнірами, (див.рис.8.3.) які мають кожен три ступеня вільності (тобто можливість обертання відносно лобих 3-х осей, що проходять через його центр).

Ступінь вільності просторової ферми визначають за формулою:

$$W = 3Y - C - C_0 \quad (8.1)$$

де Y - число вузлів ферми; C - число внутрішніх вузлів ферми;

C_0 - число опорних стержнів.

Коли $w = 0$ система не має зайвих стержнів і опорних зв'язків і рівняння (8.1) приймає вигляд:

$$3Y = C + C_0 \quad (8.2)$$

Ця формула дає необхідну (але недостатню) ознаку статистичної визначеності та незмінності системи. Щоб цілком впевнитись в цьому необхідно провести також структурний аналіз просторової ферми.

Достатню ознаку незмінності для просторових систем можна встановити лише із кінематичного аналізу, заснованого на принципах утворення просторових систем.

Основні принципи утворення геометрично незмінних просторових ферм:

1. Кожен новий вузол просторової ферми може бути приєднаний до жорсткого диску "триадою" - трьома стержнями з шаровими шарнірами на кінцях, що неляжать на одній площині.

2. Просторова стержнева система, що має вигляд випуклого багатогранника з трикутними гранями, всі стержні якої лежать на замкнутій зовнішній поверхні, відокремлена від опор, завжди задовольняє умови геометричної незмінності і статистичної визначеності (рис.8.1,8.2).

Подібні стержневі системи називають сітчастими.

Число опор для просторової ферми має бути не меншим трьох, і вони не повинні лежати на одній прямій.

Способи розрахунку просторових ферм принципово не відрізняються від методів розрахунків плоских ферм.

Для визначення реакцій зв'язків необхідно скласти шість рівнянь статички.

$$\sum x = 0; \sum y = 0; \sum z = 0; \sum m_x = 0; \sum m_y = 0; \sum m_z = 0 \quad (8.3)$$

Нагадаєм, що моментом сили відносно деякої осі називається момент проекції сили на площину, перпендикулярну до цієї осі, відносно точки перетину осі з площиною. Момент сили відносно осі може бути рівним нулю в двох випадках:

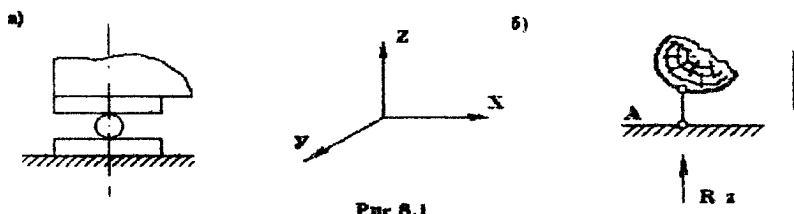
- 1) коли лінія дії сили перетинається з віссю;
- 2) коли лінія дії сили паралельна осі.

8.2 ОПОРНІ ПРИСТРОЇ ПРОСТОРОВИХ ФЕРМ

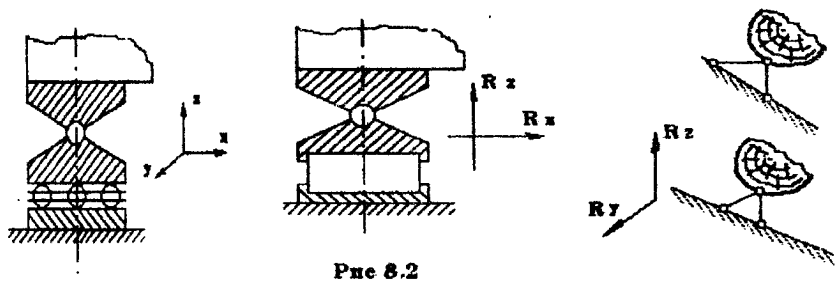
Прикріплення просторових ферм до фундаменту або іншої

незмінної системи здійснюється за допомогою трьох видів опор:

1) Шарова рухома опора (рис 8.1) дає можливість обертатися відносно трьох осей X, Y, Z , що проходять через центр шарніра та переміщатися в площині $X O Y$. Опора перешкоджає переміщенню тіла вздовж осі Z , тобто накладає на тіло один зв'язок, при цьому по напрямку указанного зв'язку розвивається реакція R_z .



2) Шарова опора на циліндричних котках (рис.8.2) дає можливість обертатися відносно трьох осей, що проходять через центр шарніра та переміщатися поступально паралельно площині ковзання котків по нормалі до осей котків. Опора перешкоджає двом переміщенням: вздовж осі, перпендикулярно до площини ковзання і в напрямку осей котків, тобто накладає на тіло два зв'язки, по напрямку яких розвиваються дві реакції $R_y ; R_z$, або $R_x ; R_z$ в залежності від положення котків.



3) Шарова нерухома опора, або просто шаровий шарнір (рис.в8.3.) дає лише можливість обертатися відносно трьох осей, що проходять через

центр шару. Опора накладає на тіло три зв'язки, і в ній розвиваються три реакції R_x , R_y , R_z .

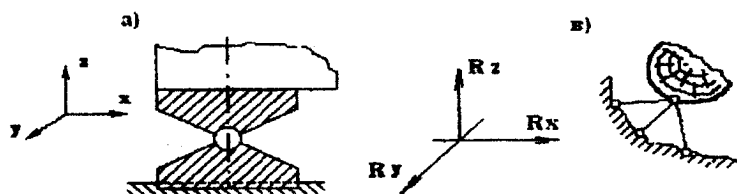


Рис. 8.3

8.3. КОМПОНОВКА ТА КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОСТОРОВИХ ФЕРМ

На рис.8.4. зображено просторову ферму, для якої $У=12$, $С=30$, $С=6$. За формулою (8.1) $W=3*12-30-6=0$, тобто ферма має достатнє число зв'язків.

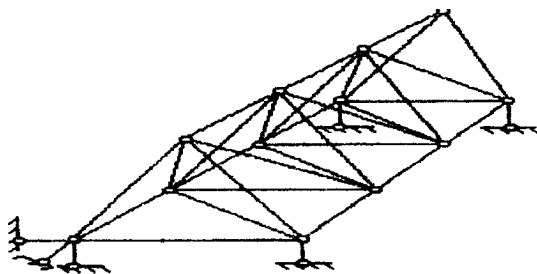


Рис. 8.4

З іншого боку, всі грані ферми являють собою трикутники оскільки дана система сітчаста, прикріплена до землі шістьма опорами. Тому про неї можна зразу сказати, не цікавлячись числом стержнів та вузлів, що вона

геометрично незмінна і не має зайвих стержнів. На рис. 8.3 форма кінцевої змінена. Дійсно, чотири опорні стержні цієї ферми паралельні, а два інші перетинаються в точці *A*. Тому пряма 1–1 буде віссю обертання, навколо якої можливий нескінченно мале обертання всієї системи.

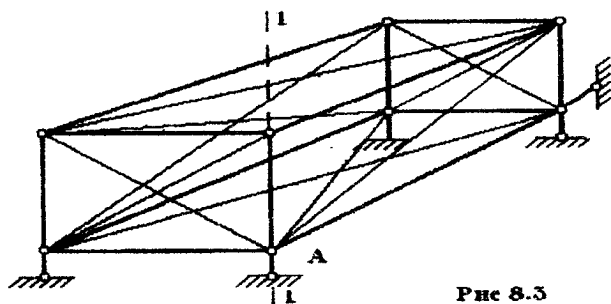


Рис 8.3

8.4. РОЗРАХУНОК ПРОСТОРОВИХ ФЕРМ

Для визначення зусиль в стержнях просторової ферми використовують відомі методи розрахунку плоских ферм: спосіб вирізання вузлів, спосіб протих або декількох перетинів, проєкцій і «моментних» прямих, спосіб заміни стержнів, а також спосіб розкладання просторової ферми на плоскі.

Приклад 8.1 Визначити зусилля в стержнях просторової системи, зображеної на рис. 8.6. Розрахунок розпочинається з визначення нульових стержнів. Оскільки вузол 1 невантажений, в ньому сходяться три стержні, то зусилля в них рівні нулю. Дорівнюватимуть нулю зусилля в стержнях, що сходяться в вузлах 5, 6 оскільки вузли невантажнені, а також зусилля в стержнях 2-3, 3-Д оскільки вони не лежать в площині дії сил в вузлах 2, 3

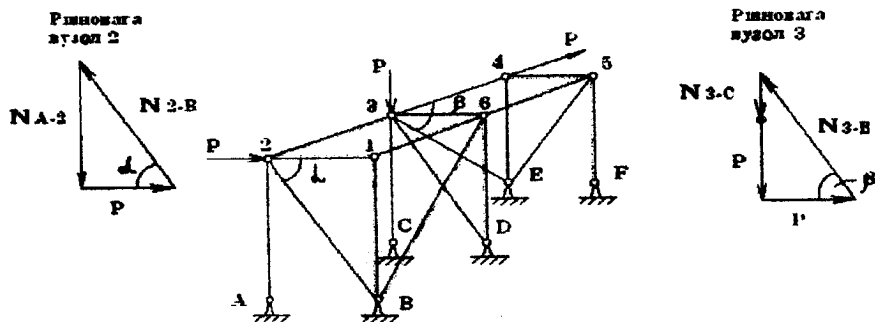


Рис 8.6.

Із рівноваги вузлів 2, 4, 3 знаходимо :

$$N_{2-4} = P \cdot \tan \alpha; \quad N_{2-в} = P / \cos \alpha; \quad (\text{Вузол 2. } \sum X=0; \sum Y=0)$$

$$N_{4-3} = P; \quad N_{4-e} = 0; \quad (\text{Вузол 4. } \sum X=0; \sum Y=0)$$

$$N_{3-e} = -P / \cos \beta; \quad N_{3-с} = P(\tan \beta - 1) \quad (\text{Вузол 3. } \sum X=0; \sum Y=0)$$

Приклад 8.2 Визначити зусилля в фермі двосхильного покриття від заданого горизонтального навантаження (рис. 8.7). Для визначення зусиль скористаємось методом розкладення просторової системи на плоскі. Розкладемо задані горизонтальні сили на дві осі, направлені вздовж схилів ферми (рис. 8.7,б). Тоді задача зводиться до розрахунку двох плоских ферм, що показані на рис. 8.8,а,б. Після визначення зусиль в стержнях плоских ферм, знаходимо зусилля в стержнях 1-8 і 4-5, розглянувши рівновагу відповідних вузлів заданої просторової ферми. Так, вирізавши вузол 8 і склавши суму проєкцій всіх сил в вузлі на вісь X, отримаємо :

$$N_{8-9} \cdot \cos \alpha + N_{8-10} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + N_{1-8} = 0$$

$$N_{1-8} = 5P \cdot 4 / \{8-5\} + 1.6P \cdot 4.5 / \{5-6,4\} = 3P/2$$

Таким же чином визначаються зусилля в стержнях 4 - 5.

$$N_{4-5} = 3P/2$$

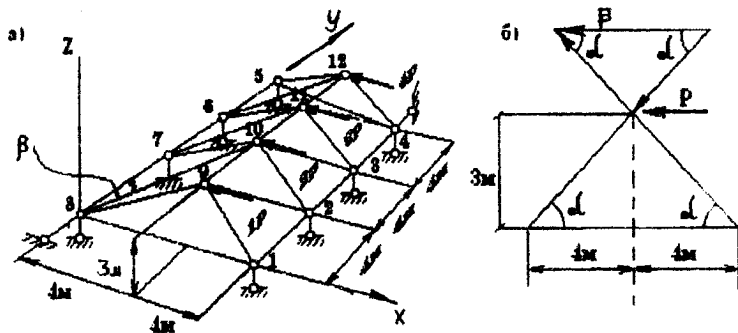


Рис 8.7

Зусилля в стержнях 9-10, 10-11, 11-12 отримаєм додаванням зусиль знайдених при розрахунку обох плоских ферм.

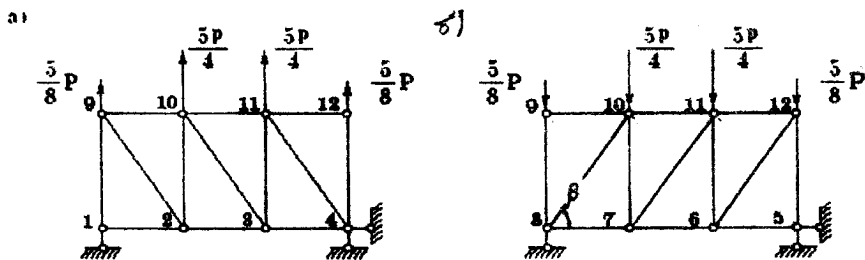


Рис 8.8

Значення зусиль в стержнях заданої ферми наведені в табл. 8.1

Таблиця 8.1

Номер стержня	Зусилля	Номер стержня	Зусилля	Номер стержня	Зусилля
1-2	0	4-11	1,6P	7-11	0
2-3	-P	7-8	P	6-12	1,6P
3-4	-P	6-7	P	9-10	P
1-9	15P/8	5-6	0	10-11	0
2-10	1,25P	8-9	-5P/8	11-12	-P
3-11	0	7-10	0	1-8	3P/2
4-12	5P/8	6-11	-1,25P	4-5	3P/2
9-2	-1,6P	5-12	-15P/8		
3-10	0	8-10	-1,6P		

Для визначення опорних реакцій розглянемо рівновагу відповідних вузлів ферми. Виріжемо вузол 8 та спроектуємо всі сили на осі z та y , знайдемо вертикальну та горизонтальну реакції R_8, H_8 :

$$R_8 = N_{8-y} \cdot \sin\alpha + N_{8-10} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = 9P/8,$$

$$H_8 = N_{8-7} + N_{8-10} \cos\beta = 0$$

Аналогічно знаходимо вертикальні опорні реакції в вузлах 1,4,5:

$$R_1 = R_4 = -9P/8, \quad R_5 = 9P/8$$

і горизонтальні реакції в вузлах 1 та 4

$$H_1 = H_4 = 3P.$$

Вертикальні реакції у решти опорних стержнів рівні нулю, оскільки ці стержні будуть одиночними у відповідних вузлах (тобто всі стержні, що збігаються у вузлах, крім опорних, лежать в одній площині).

9. Розрахунок статично невизначених систем по несучій здатності з урахуванням пластичності матеріалу

9.1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Згідно з вказівками будівельних норм і правил (БНіП), розрахунок будівельних конструкцій потрібно проводити за *методом граничних станів*, тобто таких станів, при яких конструкція, що розраховується перестав задовольняти **вимоги** по експлуатації або спорудженню.

Розглядають дві групи граничних станів: перша – втрата несучої спроможності або непридатність до експлуатації, друга – непридатність до нормальної експлуатації.

В БНіП встановлено систему розрахункових коефіцієнтів запасу, призначених для забезпечення надійності конструкцій.

Коефіцієнт перевантаження – враховує можливі відхилення навантажень в неблагополучну сторону від їх нормативних значень.

Неоднорідність матеріалу враховується величиною *нормативного опору* та *коефіцієнтом безпеки по матеріалу*.

Ступінь відповідальності та капітальності споруд та будівель, а також значимість наслідків настання тих чи інших граничних станів ураховується *коефіцієнтом надійності*.

Коефіцієнт умови роботи урахує різні умови роботи споруди, що не відображаються в розрахунках прямим шляхом.

При розрахунках несучої здатності конструкцій в необхідних випадках, застережених технічними умовами та БНіПом, розрахунок може бути проведено з урахуванням пластичності матеріалів, тобто за методом *граничної рівноваги*.

Це дозволяє знизити вартість конструкції за рахунок використання прихованих резервів їх міцності, що залишаються недовикористаними при розрахунках їх як пружних систем.

Розрахунок з урахуванням пластичності матеріалів називають "*пластичним*" (на відміну від "*пружного*"). Замість дійсної діаграми розтягу-стиснення пружно-пластичного матеріалу в основу пластичного розрахунку кладеться спрощена діаграма для пружно-пластичного тіла в координатах : деформація – ϵ , напруга – σ (рис.9.1.)

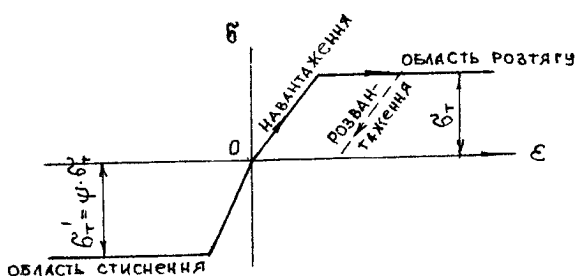


Рис.9.1

Ця діаграма як в області розтягу, так і в області стиснення має дві ділянки – нахилену та горизонтальну, які характеризують відповідно пружну та пластичну стадію роботи матеріалу.

Значення σ_T на діаграмі відповідає межі текучості матеріалу при розтягу, а значення σ'_T – при стисненні.

Пластична стадія роботи матеріалу настає тоді, коли напруга, що діє сягає значень σ_T або σ'_T .

При розрахунках конструкцій за БНіП замість величин σ_T і σ'_T використовують значення відповідних розрахункових опорів R_p і R_c та вводять ще ряд коефіцієнтів.

Для сталі приймають $R_p = R_c$.

Площинки текучості на спрощеній діаграмі звичайно вважають нескінченно довгими, а наступне за ними зміщення не враховують.

Такою діаграмою можна користуватись для прокатної сталі та для залізобетону, руйнування якого в багатьох випадках пов'язане з текучістю арматури та пластичним руйнуванням бетону.

Оскільки пластичні деформації великі в порівнянні з пружними, то пружними часто можна знехтувати та прийняти, що пружні ділянки діаграми співпадають з віссю ординат. Умовний матеріал, що має таку діаграму, називають жорстко-пластичним.

Для будь-якого поперечного перетину, симетричного відносно площини, в якій діють сили, граничний згинальний момент при спільній його дії з поздовжньою N та поперечною Q силами виражається формулою :

$$M_{гр} = \sigma_T \cdot W_T \cdot \nu = M_{гр}^0 \cdot \mathcal{J} \quad (9.1)$$

Де σ_T - межа текучості матеріалу при розтязі, W_T - пластичний момент опору поперечного перетину, $M_{гр}^0$ - граничний згинальний момент при чистому згині, ν - коефіцієнт, що враховує вплив поздовжньої та поперечної сил та несучу здатність стержня при згині та залежить від форми

поперечного перерізу стержня і від співвідношення між границями текучості матеріалу при стисненні та розтязі.

Для прямокутного поперечного перерізу та при $\sigma_T = \sigma'_T$ коефіцієнт ν виражається формулою, отриманою з умови повного використання несучої спроможності перерізу:

$$\nu = 1 - \left(N_{гр} / N_{гр}^o \right)^2 - \left(Q_{гр} / Q_{гр}^o \right)^2. \quad (9.2)$$

Де $N_{гр}$, $Q_{гр}$ – поздовжня та поперечна сили, що діють в граничному стані стержня разом з $M_{гр}$, $N_{гр}^o$, $Q_{гр}^o$ – поздовжня та поперечна сили, що викликають відповідно граничний стан стержня при чистому розтязі і чистому зсуві. При цьому

$$N_{гр}^o = \sigma_T \cdot F; \quad Q_{гр}^o = \tau_T \cdot F.$$

Де F – площа поперечного перерізу, τ_T – граничне дотичне напруження, що визначається з прийнятої гіпотези міцності.

Пластичний момент опору перерізу може бути виражений через пружний момент опору W :

$$W_T = \lambda \cdot W. \quad (9.3)$$

Коефіцієнт λ залежить від форми перерізу та рівний: для круга – 1,7; для прямокутника – 1,5; для тонкостінного кільця – 1,27; для двотавра – біля 1,15.

Коли згинальний момент сягає значення, що виражається формулою (9.1) в стержні виникає пластичний шарнір (шарнір текучості), який різниться від ідеального шарніру тим, що в ньому діє згинальний момент постійної величини $M_{гр}$, що дорівнює граничному моменту внутрішніх сил. Крім того, пластичний шарнір – односторонній, оскільки він закривається при розвантаженні і при зміні знаку згинального моменту. При цьому стержень знов починає працювати як пружний. З формул (9.1), (9.3) випливає, що граничний згинальний момент в пластичному шарнірі характеризує

несучу спроможність при згині та виявляється в λ разів більший того моменту, при якому текучість виникає в крайніх волокнах.

При викликанні пластичного шарніру в будь-якому елементі статично визначеної системи, її несуча здатність виявляється вичерпаною та настає руйнування, або конструкція стає непридатною до подальшої експлуатації.

В статично невизначених системах досягнення зусиллями в деяких із елементів їх граничних значень може і не викликати руйнування всієї системи, коли система за рахунок решти елементів залишиться структурно незмінною і, отже, в змозі витримувати ще додаткове навантаження.

При цьому, завдяки пластичним деформаціям елементів, зусилля в яких сягнули граничних значень, відбувається перерозподіл зусиль в елементах, в результаті чого несуча здатність всієї системи зростає. Повне руйнування системи наступить тоді, коли буде вичерпана несуча здатність такого числа зв'язків, яке рівне числу зайвих зв'язків плюс один.

Коли руйнування системи настає при виході з ладу меншого або більшого числа зв'язків, його називають відповідно *частковим* або *надмірним*. Таким чином, при частковому руйнуванні система її схема руйнування має менше ніж один ступінь вільності, а при надмірному руйнуванні – більше. Приклади повного, часткового та надмірного руйнування рами наведені на рис. 9.2б), в), г):

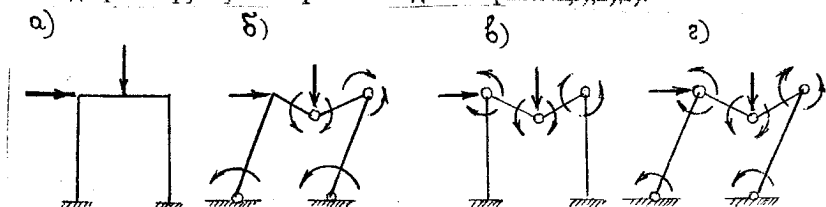


Рис. 9.2

Для заданої статично невизначеної системи при дії навантаження одного виду існує багато варіантів розподілення зусиль, що задовольняють умовам рівноваги. При цьому в відповідності з так званою *статичною теоремою* істинним буде те розподілення зусиль, яке відповідає найбільшій величині граничного навантаження.

Для даної статично невизначеної системи і при даному навантаженні існує багато різних форм руйнування, з яких згідно *кінематичної теореми* істиною буде та, яка відповідає найменшій величині граничного навантаження. При цьому в обох випадках навантаження вважаємо заданим за розташуванням, за напрямком і за співвідношенням між окремими її складовими, тобто, всі навантаження, що діють на систему, приймаються пропорційними одному параметру. Такий закон навантаження називають простим.

При обчисленнях задач пластичного розрахунку кінематичним методом для кожного можливого механізму руйнування складаються рівняння рівноваги в формі рівнянь статички, або в формі рівнянь робіт всіх зовнішніх та внутрішніх сил на тих переміщеннях, які виявляються можливими для даного механізму. При цьому роботу зовнішніх сил $P_{i,гр}$ вважаємо додатною, а роботу внутрішніх сил, тобто граничних згинальних моментів $M_{k,гр}$, що виникають в пластичних шарнірах – від'ємною. Це виражається таким рівнянням:

$$\sum P_{i,гр} \cdot \delta_i - \sum M_{k,гр} \cdot \theta_k = 0$$

або

$$\sum M_{k,гр} \cdot \theta_k - \sum P_{i,гр} \cdot \delta_i = 0$$
(9.4)

де Q_k – кути повертання стержнів в пластичних шарнірах, δ_i – лінійне переміщення точок прикладення відповідних навантажень, переміщення

вважаємо малими, l та k – порядкові номери навантажень і граничних моментів відповідно.

Додавання в рівнянні (9.4) розповсюджується на всі навантаження і граничні моменти у всіх пластичних шарнірах. При цьому в рівняннях робіт розподіленні навантаження можуть бути замінені їх рівнодійними. Оскільки всі лінійні і кутові переміщення можуть бути виражені через один загальний параметр θ , то на нього може бути проведено скорочення всього рівняння (9.4). Із цього рівняння можна отримати параметр граничного навантаження, якщо відомі граничні несучі здатності параметрів (обернена задача, або перевірочний розрахунок) і параметр потрібних несучих здатностей перерізів, якщо задані граничні навантаження (пряма задача, або проектний розрахунок).

9.2. РОЗРАХУНОК РАМ

Основна трудність розрахунку рам заключається в тому, що число можливих форм їх руйнування може бути дуже великим і попередньо не вдається встановити, яка з них буде дійсною.

Для отримання справжньої форми руйнування може бути використано метод *комбінованих механізмів*, оснований на тому, що для заданої рами при заданому навантаженні всі можливі механізми можуть бути отримані шляхом складання різних комбінацій відносно малого числа простих незалежних механізмів руйнування, які легко встановити в залежності від розрахункової схеми рами та навантаження, що діє на нього. При цьому в більшості випадків видно, які комбінації не потребують дослідження і можуть бути відкинуті, як такі, що не викликають інтересу.

Серед розглядуваних можливих механізмів руйнування істинним буде той, якому при заданих величинах граничних згинальних моментів відповідає

найменше граничне навантаження, або при заданому граничному навантаженні той механізм руйнування, якому відповідає найбільша величина згинальних моментів при руйнуванні рами.

Для кожного простого і комбінованого механізму руйнування складають рівняння рівноваги, які зручніше всього записати у формі рівнянь (9.4). Число можливих незалежних механізмів руйнування, рівне числу незалежних рівнянь рівноваги статички, визначають за формулою:

$$m = n - \lambda \quad (9.5)$$

Де n – число перетинів стержнів рами в яких потрібно знайти згинальні моменти для побудови епюри згинальних моментів, λ – ступінь статичної невизначеності рами.

Можливі незалежні механізми руйнування можуть бути такі :

- а) балочні (Б),
- б) бокового зміщення (С),
- в) рамні (щипцеві) (Щ),
- г) повороту вузлів (У).

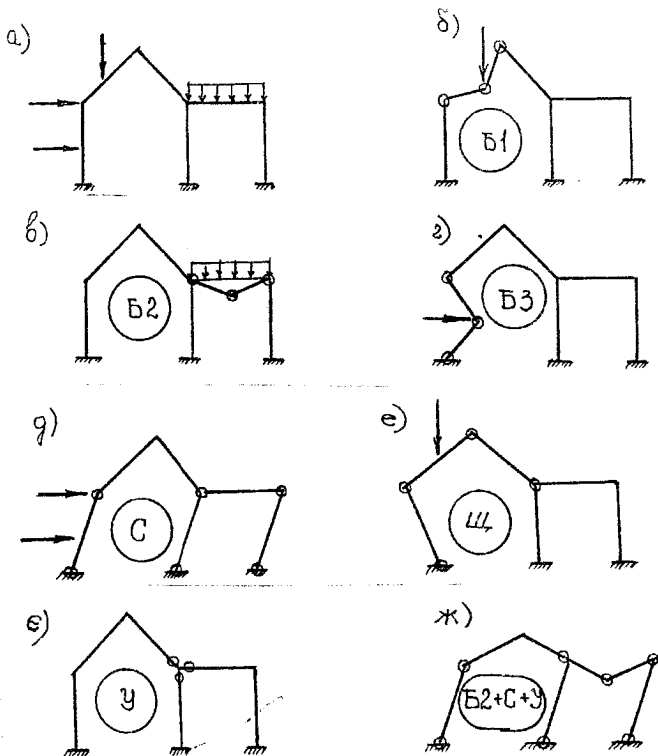


Рис.9.3.

На рис. 9.3 для заданої рами (а) показані можливі незалежні механізми (б – ж) і комбінації з них.

Приклад 9.1. Визначити граничні і допустимі навантаження для порталної рами (рис. 9.4.а), коли $Q=1.5P$, границя текучості сталі $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$, пластичні моменти опору ригеля і стійок рівні відповідно $W_{P,T} = 500 \text{ см}^3$, $W_{C,T} = 250 \text{ см}^3$. Побудувати графік граничних комбінацій сил $P_{гр}$ і $Q_{гр}$.

Граничний згинальний момент для стійок :

$$M_{c,гр} = \sigma_T \cdot W_{C,T} = 250 \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м} = 6.25 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} = 62.5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Граничний згинальний момент для ригеля :

$$M_{p,гр} = \sigma_T \cdot W_{P,T} = 250 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м} = 12.5 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} = 125 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

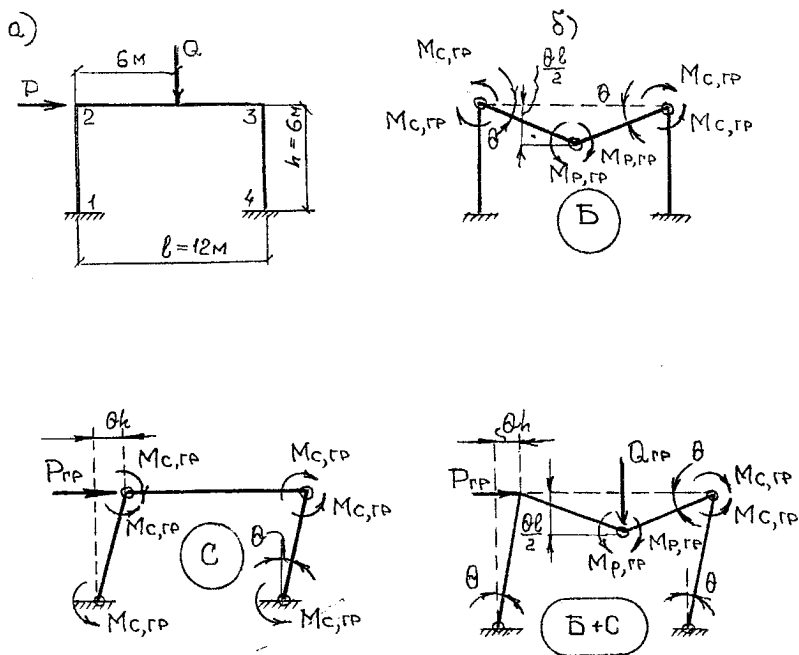


Рис.9.4.

Можливими формами руйнування рами є балочний механізм (Б) (рис.9.4,б) і механізм бокового зміщення (С) (рис.9.4,в), а також комбінований механізм (Б+С) (рис.9.4,г).

Для кожного з цих механізмів на основі принципу можливих переміщень складаємо рівняння граничної рівноваги у вигляді рівняння робіт зовнішніх і внутрішніх сил.

Для балочного механізму (Б) :

$$Q_{гр} \cdot \left(\frac{l}{2}\right) \cdot \theta = 2 \cdot M_{р,гр} \cdot \theta + 2 \cdot M_{с,гр} \cdot \theta = 0$$

Звідки : $Q_{гр} = 4 \cdot (M_{р,гр} + M_{с,гр}) / l = 12 \cdot M_{с,гр} / l$,

$$P_{гр} = Q_{гр} / 1.5 = 8 \cdot M_{с,гр} / l.$$

Для механізму бокового зміщення (С) :

$$P_{гр} \cdot h \cdot \theta = 4 \cdot M_{с,гр} \cdot \theta.$$

Звідки :

$$P_{гр} = 4 \cdot M_{с,гр} / h = 8 \cdot M_{с,гр} / l.$$

Для комбінованого механізму (Б+С) :

$$Q_{гр} \cdot \left(\frac{l}{2}\right) \cdot \theta + P_{гр} \cdot \theta \cdot h = 2 \cdot M_{р,гр} \cdot \theta + 4 \cdot M_{с,гр} \cdot \theta.$$

Звідси при $h = l/2$ і $M_{р,гр} = 2 \cdot M_{с,гр}$ отримаємо :

$$Q_{гр} + P_{гр} = 16 \cdot M_{с,гр} / l.$$

З урахуванням того, що $Q_{гр} = 1.5 \cdot P_{гр}$ маємо:

$$P_{гр} = 6.4 \cdot M_{с,гр} / l = 6.4 \cdot 62.5 \cdot 10^3 / 12 \text{ Н} = 3.33 \cdot 10^4 \text{ Н} = 33.3 \text{ кН};$$

$$Q_{гр} = 1.5 \cdot P_{гр} = 1.5 \cdot 33.3 = 50 \text{ кН}.$$

Оскільки мінімальні значення $P_{гр}$ і $Q_{гр}$, що й будуть розрахунковими, відповідають комбінованій формі руйнування, то небезпечною буде саме ця форма.

На основі проведених розрахунків будуюмо графік граничних комбінацій сил $Q_{гр}$, $P_{гр}$ (рис.9.5).

Для отримання допустимих значень навантажень замість границі текучості сталі потрібно взяти розрахунковий опір та ввести коефіцієнт перевантаження μ , який в даній задачі прийнятий рівним 1,2.

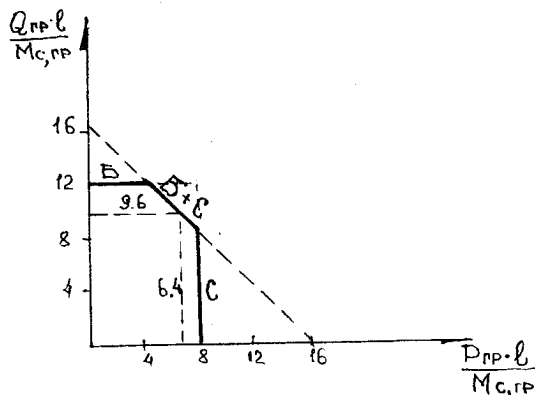


Рис. 9.5.

9.3. РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК

Можливими незалежними формами руйнування нерозрізної балки будуть такі, що пов'язані з перетворенням в балочний механізм кожного її прогону при утворенні в ньому трьох пластичних шарнірів, а в крайніх шарнірно-опертих прогонах – двох пластичних шарнірів.

Число можливих простих незалежних механізмів руйнування з (9.5) буде рівне числу прогонів незалежно від способу опирання кінців балки. Крім того, можливі комбіновані форми руйнування, коли одночасно перетворюються в балочні механізми декілька, або навіть всі прогони нерозрізної балки.

При простому навантаженні нерозрізної балки її граничний стан визначається граничним станом прогону, що працює в самих несприятливих умовах.

Для кожного механізму руйнування складається рівняння граничної рівноваги в формі рівняння робіт, із якого можна визначити граничне навантаження при заданих несучих здатностях перетинів балки, або побудувати граничну епюру згинальних моментів в нерозрізній балці при заданих граничних навантаженнях.

Замість запису рівняння робіт для кожного балочного механізму руйнування можна застосувати наступний спосіб, що має назву спосіб *вирівнювання згинальних моментів*. Суть цього способу заключається в поєднанні балочної епюри згинальних моментів з епюрою несучих здатностей перетинів балки в даному прогоні. Остання еюра показана на рис.9.6 штриховою лінією.

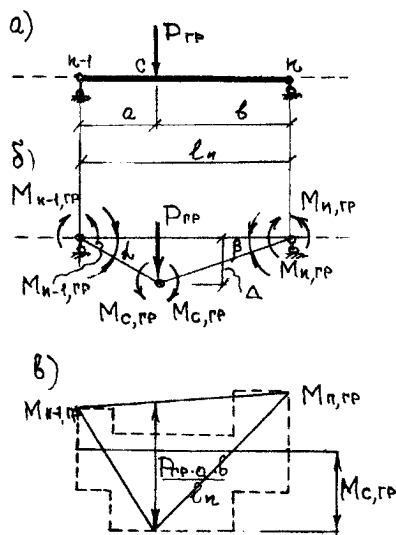


Рис.9.6

Легко довести, що вирівнювання епюри згинальних моментів призводить до тих же результатів, що і рівняння робіт.

Для цього розглянемо прогін l_n нерозрізаної балки, навантаженої силою $P_{гр}$ (рис.9.6.а). Механізм руйнування для цього прогону та граничні згинальні моменти показані на рис.9.6,б.

Рівняння робіт складається з урахуванням того, що граничні моменти $M_{n-1,гр}$, $M_{n,гр}$ та $M_{c,гр}$ можуть мати різні знаки:

$$P_{гр} \cdot \Delta = M_{n-1,гр} \cdot \alpha + M_{n,гр} \cdot \beta + M_{c,гр} \cdot (\alpha + \beta).$$

За малістю переміщень Δ , α , β можна записати :

$$\alpha = \frac{\Delta}{a}; \quad \beta = \frac{\Delta}{b}.$$

Після підстановки цих виразів в рівняння :

$$P_{гр} \cdot a \cdot b / l_n = M_{n-1,гр} \cdot b / l_n + M_{n,гр} \cdot a / l_n + M_{с,гр}.$$

Такий же результат безпосередньо отримуємо і з побудови на рис.9.6,в. Тому для нерозрізних балок будемо в подальшому користуватись способом вирівнювання згинальних моментів.

При перевірочному розрахунку нерозрізної балки, коли дано граничні несучі здатності всіх перетинів на згин, або хоч би їх співвідношення та потрібно визначити граничне навантаження, будують епюру граничних несучих спроможностей перетинів і в неї вписують балочні епюри згинальних моментів від шуканого граничного навантаження для окремих прогонів. Із співвідношення ординат балочних епюр та граничних несучих здатностей перетинів знаходять граничне навантаження для кожного із прогонів.

Література

1. Бутенко Ю.И. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. - К.: Вища школа, 1984. - 325 с.
2. Дарков А.В. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1976. - 600 с.
3. Клейн Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). -М.: Высшая школа, 1980. - 384 с.
4. Снитко Н.К. Строительная механика. - М.: 1980. - 392с.
5. Киселёв В. А. Строительная механика. -М.: 1976. -298с.
6. Справочник проектировщика расчетно - теоретический. Кн. 1.-М.: 1972. -258с.

Зміст

1. Статично невизначені рами	3
1.1. Розрахунок статично невизначених рам методом сил на силові навантаження.....	3
1.2. Розрахунок статично невизначеної рами на дію температур	13
1.3. Розрахунок статично невизначеної рами на вимушені переміщення... 16	
2. Нерозрізні балки.....	19
2.1. Рівняння трьох моментів	
2.2. Метод фокусів.....	26
2.3. Побудова огинаючих епюр.....	34
2.4. Побудова ліній впливу зусилля в нерозрізній балці.....	37
2.5. Розрахунок нерозрізних балок на теплову дію.....	44
2.6. Розрахунок нерозрізних балок на зміщення опор.....	46
3. Статично невизначені арки, склепіння.....	49
3.1. Характеристика арок і склепінь. Зміна перерізу арки по її довжині..	49
3.2. Визначення зусиль в безшарнірній арці від нерухомого навантаження..	51
3.2.1. Метод пружного центру.....	51
3.2.2. Розрахунок безшарнірної арки.....	57
3.3. Двошарнірна арка.....	65
3.4. Вплив температури та усадки бетону.....	66
3.4.1. Вплив усадки.....	68
4. Статично невизначені плоскі ферми.....	69
4.1. Призначення та особливості роботи ферми.....	69
4.2. Порядок розрахунку статично невизначених ферм методом сил... 70	
4.3. Розрахунок ферми на рухоме навантаження. Побудова ліній впливу.. 73	
5. Розрахунок статично невизначених систем методом переміщень.....	80
5.1. Вибір невідомих.....	80
5.2. Визначення числа невідомих.....	82
5.3. Основна система методу переміщень.....	84
5.4. Канонічні рівняння методу переміщень.....	86

5.5. Статичний спосіб визначення коефіцієнтів та вільних членів.....	87
5.6. Перевірка коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень.....	92
5.7. Побудова епюри M, Q, M в заданій системі.....	93
5.8. Розрахунок нерозрізних балок за методом переміщень.....	96
6. Змішаний метод розрахунку статично невизначених рам.....	99
7. Комбінований метод розрахунку сіметричних рам.....	103
8. Розрахунок просторових ферм.....	109
8.1. Визначення просторових ферм.....	109
8.2. Опорні пристрої просторових ферм.....	110
8.3. Компонування та кінематичний аналіз просторових ферм.....	112
8.4. Розрахунок просторових ферм.....	113
9. Розрахунок статично невизначених систем за несучою здатністю з урахуванням пластичності матеріалу.....	117
9.1. Загальні відомості.....	117
9.2. Розрахунок рам.....	123
9.3. Розрахунок нерозрізних балок.....	128

**Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет**

Навчальне видання

Алла Серафимівна Моргун

Практикум з будівельної механіки

**Навчальний посібник
Вінниця ВДТУ 2000**

Редактор С.А. Малішевська

Тир. 35 прим. Зам. № 2000-0048

ВДТУ, 21021 м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
