2869-12

В.В.ПАК, Ю.Л.НОСЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Затверджено Міністерством освіти України як підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів

АБОНЕМЕНТ-2

КИЇВ
«ЛИБІДЬ»
1996

ББК 22.11я73
П13

Розповсюдження та тиражування
без офіційного дозволу
видавництва заборонено

Рецензенти: *П.В.Задерей, В.В.Новиков*, доктори фіз.-мат. наук, професори

Редактор *Г.П.Трофімчук*

Пак В.В., Носенко Ю.Л.
П13 Вища математика: Підручник. — К.: Либідь, 1996. — 440 с.
ISBN 5-325-00712-2.

У підручнику відповідно до програми системно викладено курс вищої математики. Значну увагу приділено прикладним аспектам визначеного та поверхневого інтегралів, теорії функцій комплексної змінної, диференціальних рівнянь тощо. Теоретичний матеріал ілюстровано значною кількістю задач з гірничої справи й металургії, машинобудування та енергетики. Встановлюються відповідності між реальними ситуаціями й математичними співвідношеннями.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

П $\frac{1602010000 - 006}{224 - 96}$ Без оголошення

ББК 22.11я73

ISBN 5-325-00712-2

© В.В.Пак, Ю.Л.Носенко, 1996

ПЕРЕДМОВА

З сивої давнини людство нагромадило багато інформації про кількість, розміри та форму різних об'єктів. Виникла необхідність впорядкувати їх, щоб полегшити передавання знань з покоління в покоління. Для виділення деякої кількості предметів люди спочатку називали ці предмети в певному порядку. Минули тисячоліття, поки людині вдалося прийти до абстрактного поняття натурального числа.

Життєва необхідність призвела до відкриття арифметичних операцій над натуральними числами — прямих (додавання, множення як скорочене додавання, піднесення до натурального степеня як скорочене множення) й обернених (віднімання, ділення, добування кореня). Історія математики свідчить, що ця наука — не гра розуму, а відповідь на життєві потреби суспільства. Справді, хоч віднімання простіше за ділення, від'ємні числа з'явились значно пізніше від раціональних.

Від'ємні і особливо комплексні числа входили в практику математики дуже довго й складно. Ще в XVI ст. рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ записували у вигляді $x^3 + 1 = 3x$, щоб уникнути від'ємних чисел. Більшість математиків не сприймала комплексні числа до кінця XVIII ст., поки К.Ґаусс став тлумачити їх як точки площини $z = x + iy$ з двома координатами x і y. Звідси бачимо, як важливо при вивченні математики використовувати наочні образи, життєві приклади, аналогії.

До XVII ст. основними об'єктами математики були незмінні числа, лінії, фігури, тіла, які використовувалися для розв'язування задач з будівництва, землеробства, торгівлі, астрономії та інших видів людської діяльності. З початком науково-технічної революції математика почала вивчати рух, зміну, розвиток за допомогою змінних величин, введених Р.Декартом, і функціональних зв'язків між ними, що привело до створення аналітичної геометрії, диференціального та інтеґрального числень. Під впливом ідей М.Лобачевського поглибилось і розширилось поняття простору, без чого неможливими були б сучасні відкриття у фізиці мікро- та мегасвіту.

Математика проникла в усі види людської діяльності, навіть у такі науки, як біологія, географія, лінґвістика тощо. Це означає, що в певній галузі закінчився період збирання інформації, а настав період її осмислення, що наука з описової стає точною, що швидкість її розвитку невпинно зростає.

Так що ж дає людям така суто теоретична наука, як математика?

По-перше, математика у найповнішій і найкомпактнішій формі подає наукову інформацію про об'єкти, які нас цікавлять. Так, протягом тисячоліть людство нагромаджувало знання про механічний рух тіл, поки Ньютон не відкрив другий закон механіки і записав його у вигляді однієї формули.

По-друге, математика — єдине знаряддя теоретичного вивчення навколишнього світу через моделювання процесів, які відбуваються в ньому. На основі цього передбачають нові явища, для виявлення яких ставлять відповідні досліди, тобто ставлять природі конкретні змістовні запитання. І якщо відповідь на таке запитання позитивна, то йдуть далі, роблять нові передбачення, а якщо негативна, то теорію уточнюють. Математика дає загальні правила побудови теоретичних моделей.

По-третє, математика — це кращий тренажер людського інтелекту. Згадаймо ломоносовське, що математику треба вивчати вже тому, що вона упорядковує розум.

По-четверте, математика — це величезне культурне надбання людства, як музика, література, мистецтво.

Передмову та розділи 1, 10, 12, 14, 16—19 написав В.В.Пак, вступ і розділи 2—9 — Ю.Л.Носенко. Концептуальні положення підручника розроблено авторами разом. Разом написано також розділи 11, 13 і 15.

ВСТУП
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

У математиці є ряд первісних понять, які не означаються, а служать для означення інших. До таких понять належать, зокрема, такі поняття, як величина, точка, множина. Щодо кожного з них можна застосовувати лише синоніми. Так, стосовно поняття множини можна застосувати синонім «сукупність» (сукупність людей у кімнаті, коренів рівняння тощо). Множини позначають великими літерами латинської абетки, а елементи, з яких складається множина, — малими. Наприклад, якщо A — множина, a — довільний її елемент, то цю множину часто записують так:

$$A = \{a : \text{опис властивостей довільного елемента}\}.$$

Стосовно кожного елемента можна сказати, що він належить ($a \in A$) чи не належить ($a \notin A$) певній множині. Важливу роль відіграє «порожня» множина ($\varnothing$), тобто множина, яка не містить жодного елемента. Подамо кілька означень.

О. *Якщо кожний елемент множини B є елементом множини A, то множину B називають підмножиною множини A і записують $B \subset A$.*

О. *Множини A і B збігаються, якщо одночасно $A \subset B$ і $B \subset A$* (записують $A = B$).

Нагадаємо, що $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$*) — множини відповідно натуральних, цілих, дійсних чисел; $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Усі підмножини $\mathbf{R}$ називають лінійними множинами. Приклади таких множин:

закритий інтервал, або *сегмент*

$$[a,b] = \{x : a \le x \le b\},$$

відкритий інтервал

$$(a,b) = \{x : a < x < b\},$$

напіввідкриті або *напівзакриті інтервали*

$$(a,b] = \{x : a < x \le b\},\ [a,b) = \{x : a \le x < b\}.$$

*) Від англ. real — дійсний, реальний.

Множини, кожний елемент яких є впорядкованими двійками (парами) або трійками чисел, позначають $\mathbf{R}^2$ або $\mathbf{R}^3$ відповідно.

Наведемо означення деяких дій над множинами.

О. *Об'єднанням множин A і B називають множину $A \cup B$, кожний елемент якої є або елементом A, або B, або A і B* (рис. 1).

О. *Перерізом (перетином) множин A і B називають множину $A \cap B$, кожний елемент якої є як елементом A, так і B* (рис. 2).

О. *Різницею множин A і B називають множину $A\backslash B$, що містить ті елементи A, які не є елементами B* (рис. 3).

Очевидно, $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A\backslash A = \varnothing$.

Наприклад, нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Тоді

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\},\ A \cap B = \{2,4\},\ A\backslash B = \{1,3,5\}.$$

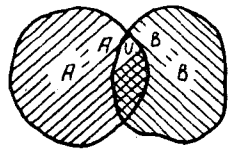


Рис. 1

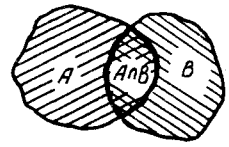


Рис. 2

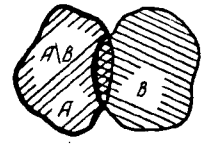


Рис. 3

О. *Відображенням множини X на множину Y називають закон, за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$* (пишуть $X \to Y$).

Так, якщо дано множини $X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ і $Y = \{0, 1, 4, 9, ...\}$, то кожному елементу першої множини відповідає квадрат цього елемента другої.

У математиці деякі відображення мають свої назви. Розглянемо такі відображення.

О. *Відображення множини X на Y за умови, що $X \subset \mathbf{R}$ і $Y \subset \mathbf{R}$, називається функцією. При цьому X називається областю визначення, а Y — областю (множиною) значень функції.*

Одне з можливих задань такого відображення — аналітичне (записують $y = f(x)$).

Наведемо назви деяких інших відображень множин $X \to Y$.

Якщо X — множина функцій, а $Y \subset \mathbf{R}$, то відповідне відображення називають *функціоналом*.

Якщо X і Y — множини функцій, то відповідне відображення називають *оператором*.

Наприклад, відображення, яке ставить у відповідність функції її границю в певній точці, є функціоналом, а відображення, яке ставить у відповідність функції її похідну в довільній точці, є оператором. Якщо X — довільна множина, а $Y = \mathbf{N}$, то відповідне відображення називають *послідовністю* елементів X. Прикладами послідовностей є арифметична та геометрична прогресії.

О. *Якщо кожному елементу множини X за певним законом ставиться у відповідність один елемент множини Y і навпаки, то кажуть, що між множинами X і Y існує взаємно однозначна відповідність.*

Така відповідність існує, наприклад, між множинами натуральних і парних чисел.

Віссю називають пряму, на якій вибрано напрям (один з двох), одиницю масштабу і фіксовано точку. Кожна точка такої осі має свою координату*) — дійсне число, а будь-яке дійсне число можна зобразити точкою числової осі. Таким чином, між множиною точок прямої і множиною $\mathbf{R}$ існує взаємно однозначна відповідність.

Розглядаючи дві чи три (на площині чи в просторі) взаємно перпендикулярні осі OX, OY, OZ, тобто осі абсцис, ординат, аплікат**), можна сказати те саме стосовно точок площини чи простору та множин $\mathbf{R}^2$ чи $\mathbf{R}^3$. Ідея введення таких прямокутних систем координат належить Р.Декарту***).

Прямокутна система координат дає змогу графічно зображати функціональну залежність $y = f(x)$. Якщо $X \subset \mathbf{R}$, то кажуть про функцію однієї змінної, а якщо $X \subset \mathbf{R}^2$ — то про функцію двох змінних і т.д.

Найпростішою є лінійна функціональна залежність $y = kx + b$. Геометрична інтерпретація цієї залежності — пряма. Число k називається кутовим коефіцієнтом (нахилом) прямої, b виражає величину відрізка, який пряма відтинає від осі ординат.

Наведемо деякі основні позначення, скорочення, символи, використані в підручнику.

$a \equiv b$ — a тотожно дорівнює b;

$A \Rightarrow B$ — з твердження A випливає твердження B;

$A \Leftrightarrow B$ — A рівнозначне B (одночасно $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$);

$\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ — виконується твердження A і твердження B;

$\left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right.$ — виконується або тільки твердження A, або тільки твердження B;

$a = b$ — a дорівнює b за означенням****);

$\forall$ — будь-який, довільний, для будь-якого довільного;

$\exists$ — існує*****);

■ — символ Халмоша******) означає початок і кінець доведення;

О — означення;

П — приклад;

Т — теорема;

Н — наслідок.

---

*) Від лат. coordinatio — взаємоузгодження.

**) Від лат. abscicus, ordinatus, applicata — відповідно відрізаний, упорядкований, прилеглий.

***) Р.Декарт (1596—1650) — французький математик і філософ.

****) Від англ. definition — означення.

*****) Стилізовані перші великі літери англійських слів arbitrary, exist — відповідно довільний та існувати.

******) П.Р.Халмош — сучасний американський математик.

РОЗДІЛ 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) складають тоді, коли йдеться про взаємодію кількох процесів, кожен з яких можна описати лінійним рівнянням. Розв'язування СЛАР — це, власне, і є знаходження такої взаємодії. У загальному випадку СЛАР має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

або коротко

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тут індекси i та j вказують адресу даного елемента, i — номер рядка, j — номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент.

1.1.1. Визначники та їх властивості

Поняття визначника, чи детермінанта*), застосовують, наприклад, при розв'язуванні СЛАР-2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

де

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Тепер сформулюємо означення.

*) Від лат. determinans — той, що визначає.

О. *Визначником другого порядку, складеним з елементів* a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, *називається результат виконання таких операцій*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

Для зручності вважатимемо поки, що елементами визначника є числа.

Ураховуючи (1.3), розв'язки системи (1.2) можна записати у вигляді

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Елементи визначника розміщені в двох рядках чи двох стовпцях. Елсменти a_{11}, a_{22} становлять головну діагональ, а елементи a_{12}, a_{21} — побічну діагональ визначника. Отже, обчислення визначника (1.3) — це знаходження різниці добутку елементів головної і побічної діагоналей.

П.1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\Delta = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 5.$$

Аналогічно, розв'язуючи СЛАР-3, дістанемо визначник третього порядку.

О. *Визначником третього порядку, складеним з відповідних елементів, називається таке рекурентне* *) *співвідношення:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Обчислюючи праву частину (1.4), маємо

$$\Delta = a_{11}a_{12}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{1.5}$$

Обчислити визначник третього порядку можна ще й за так званим *правилом Саррюса.* Його можна сформулювати, виходячи з (1.5), звер-

*) Від лат. recurens — той, що повертається.

нувши увагу на те, де лежать відповідні елементи (на головній, побічній діагоналях чи на паралельних їм).

Розглядаючи (1.1), тобто СЛАР-n, дістанемо визначник n-го порядку (про його обчислення трохи згодом).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

Зауваження. Елементами визначника можуть бути не обов'язково числа, а елементи тих множин, для яких виконуються операції множення й додавання, наприклад множини функцій. Тоді визначник, взагалі кажучи, не є числом.

Вважатимемо, що ряди визначника — це або його рядки, або його стовпці.

Засновником теорії визначників є Г.Крамер*), він же довів і основні їх властивості.

О. *Мінором***) M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, утворений з Δ після вилучення рядка і стовпця з номерами i та j, тобто тих, на перетині яких знаходиться a_{ij}.* Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника є:

$$A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

M_{ij} і A_{ij} можуть відрізнятись один від одного лише знаком.

П.2. Знайти M_{12} і A_{12} для визначника (1.4).

Розв'язання. Маємо

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}.$$

Властивості визначника

1. *Значення визначника не зміниться при його транспонуванні* (тобто заміні місцями рядків і стовпців без зміни їх номерів).

(Пропонуємо перевірити цю властивість самостійно, звівши після транспонування визначник (1.4) до (1.5).)

2. *Знак визначника зміниться на протилежний, якщо поміняти місцями два його паралельних ряди.*

(Пропонуємо перевірити цю властивість самостійно, звівши результат до (1.5).)

3. *Визначник, два паралельних ряди якого збігаються, дорівнює нулю.*

Справді, поміняємо місцями рівні паралельні ряди. Значення визначника, з одного боку, не зміниться, а з другого — за властивістю 2 зміниться на протилежне, тобто $(\Delta = -\Delta) \Rightarrow (\Delta = 0)$.

---

*) Г. Крамер (1704—1752) — швейцарський математик.

**) Від лат. minor — менший.

4. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення.*

Запис визначника у вигляді відповідної суми добутків називають розкладом його за елементами відповідного ряду. Отже, вираз (1.4) — це розклад визначника за елементами першого рядка.

(Пропонуємо самостійно перевірити властивість 4 для якого-небудь ряду, крім першого рядка, звівши результат до (1.5).)

5. *Спільний множник, який містять усі елементи одного ряду, можна винести за знак визначника.*

Справді, розклавши визначник за тим рядом, елементи якого містять спільний множник, можна тепер його винести.

Звідси випливає таке правило: щоб помножити визначник на число, досить усі елементи його довільного ряду помножити на це число.

Н. Якщо визначник має пропорційні ряди, то він дорівнює нулю (на основі властивостей 5 і 3).

6. *Якщо визначник має ряд, який складається з нулів, то він дорівнює нулю* (на основі властивості 4).

7. *Якщо елементи будь-якого ряду визначника можна подати у вигляді суми, то цей визначник можна також подати у вигляді суми деяких визначників, точніше, скажімо,*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}^{*} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}^{*} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{31}^{*} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{*} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{*} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{*} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доведення розкладемо заданий визначник за елементами вказаного ряду (в прикладі — першого стовпця).

8. *Сума добутків елементів будь-якого ряду визначника на алгебраїчні доповнення, які відповідають елементам іншого паралельного ряду, дорівнює нулю.*

9. *Значення визначника не зміниться, якщо до елементів будь-якого ряду додати елементи паралельного ряду, помножені на одне й те саме число, скажімо,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обчислення визначників базується на властивості 4 й істотно спрощується, якщо у відповідному ряді, за яким розкладається визначник, дістати якомога більше нульових елементів (користуючись властивістю 9).

Так само обчислюється й визначник n-го порядку (1.6). Рекурентну властивість 4 можна покласти в основу означення визначника (1.6), як це зроблено у випадку визначника третього порядку.

П. 3. Обчислити даний визначник Δ за схемою: до другого стовпця додати перший, помножений на -1; до третього — перший, помножений на 3, і винести спільні множники.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10(-2 - 1) = -30.$$

1.1.2. Формули Крамера

Розглянемо систему (1.1), ввівши позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 a_{22} \dots a_{2n} \\ b_n a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots b_2 \\ a_{n1} & a_{n2} \dots b_n \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Нехай $\Delta \neq 0$. Для того щоб дістати Δ_j з визначника системи Δ, в останньому стовпець j слід замінити стовпцем вільних членів b_i. Помножимо Δ на x_1:

$$\Delta \cdot x_1 = \begin{vmatrix} a_{11} x_1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} x_1 & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тепер помножимо другий стовпець на x_2 і т.д., нарешті n-й стовпець на x_n і додамо до першого стовпця Δx_1. Згідно з властивістю 9 значення Δx_1 не зміниться. Урахувавши (1.1) і (1.7), знайдемо

$$x_1(A_{11}a_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1}) + \ldots + x_n(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1}) = b_{11}A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1},$$

тобто $x_1 \cdot \Delta = \Delta x_1$, звідки $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$.

Міркуючи аналогічно, дістанемо $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$ і т.д., тобто

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad 1 \le i \le n. \tag{1.8}$$

Формули (1.8) називають *формулами Крамера.*

П. 4. Розв'язати за формулами Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Аналогічно $x_2 = x_3 = 1$. Отже,

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

Формули Крамера застосовують, як правило, для $n \le 5$.

1.1.3. Метод Ґаусса*)

І випадок. $\Delta \neq 0$.

Метод послідовних вилучень невідомих, запропонований Ґауссом, розглянемо на прикладі СЛАР-3

*) К.Ґаусс (1775—1855) — німецький математик.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння системи на $a_{11} \neq 0$, друге — на $a_{21} \neq 0$, третє — на $a_{31} \neq 0$, матимемо

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = c_1; \\ x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = c_2; \\ x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 = c_3, \end{cases}$$

де $c_{12} = \dfrac{a_{32}}{a_{11}}, \ldots, c_3 = \dfrac{b_3}{a_{31}}$. Віднявши від другого і третього рівнянь перше, дістанемо

$$\begin{cases} d_{22}x_2 + d_{23}x_3 = d_2; \\ d_{32}x_2 + d_{33}x_3 = d_3, \end{cases}$$

де $d_{22} = b_{22} - b_{12}, \ldots, d_3 = c_3 - c_1$.

Поділивши перше рівняння на $d_{22} \neq 0$, а друге — на $d_{32} \neq 0$, знайдемо

$$\begin{cases} x_2 + d^*_{23}x_3 = d^*_2; \\ x_2 + d^*_{33}x_3 = d^*_3. \end{cases}$$

Віднявши перше рівняння від другого, матимемо

$$a^*_{33}x_3 = b^*_3,$$

звідки

$$x_3 = \frac{b^*_3}{a^*_{33}}.$$

Тепер можна знайти x_2 і x_1.

Ми навели тільки схему методу. Існують його певні модифікації та алгоритми застосування. Метод застосовують при $n \geq 4$, він особливо зручний при використанні ЕОМ.

II в и п а д о к. $\Delta = 0$.

Цей випадок можна наочно проілюструвати на прикладі СЛАР-2 (1.2). З геометричної точки зору кожне рівняння системи — це рівняння прямої

$$x_2 = \frac{-a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}, \quad x_2 = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}},$$

яке має вид

$$x_2 = kx_1 + b.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}}$, або $k_1 \neq k$. Отже, прямі перетинаються. Нехай точкою перетину є $M_0(x_1^0, x_2^0)$ (рис. 1.1). Координати точки M_0 і є єдиним розв'язком СЛАР-2.

Якщо $\Delta = 0$, то $k_2 = k_1$. Отже, прямі паралельні.

Якщо $\frac{b_1}{a_{12}} \neq \frac{b_2}{a_{22}}$, то прямі не збігаються, і розв'язку немає (система несумісна).

Якшо $\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{b_2}{a_{22}}$, то прямі збігаються (нескінченна множина розв'язків).

Аналогічна ситуація при $n > 2$. Якщо $n = 3$ і $\Delta \neq 0$, то маємо перетин трьох площин в одній точці M_0, координати якої є єдиним розв'язком системи (рис. 1.2).

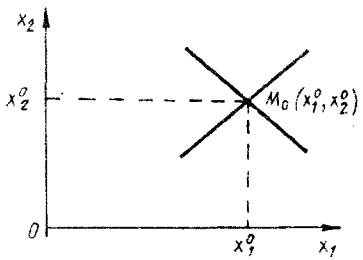


Рис.1.1

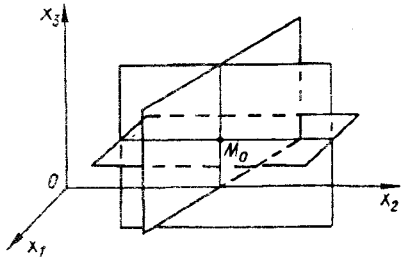


Рис.1.2

1.1.4. Однорідні СЛАР

СЛАР (1.1) називають *однорідною*, якщо $b_i = 0 \ \forall_i = 1, 2, \ldots, n$. При $n = 2$ вона геометрично являє собою дві прямі L_1 и L_2, які проходять через початок координат.

Якщо $\Delta \neq 0$, то L_1 і L_2 — не паралельні і $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Розв'язок системи є $x_1^0 = x_2^0 = 0$. Якщо $\Delta = 0$, то $L_1 \equiv L_2$ (прямі збігаються), система має нескінченну множину розв'язків.

При $n > 2$ система однорідних СЛАР має єдиний розв'язок $x_1^0 \dots = x_n^0 = 0$, якщо $\Delta \neq 0$, і нескінченну множину розв'язків, якщо $\Delta = 0$.

1.1.5. Матриці та дії над ними

Вище розглядали СЛАР, число рівнянь яких m дорівнює числу невідомих n. Проте можливі випадки, коли $m < n$ і $m > n$. Для вивчення таких СЛАР, зокрема, введемо поняття матриці.

О. *Матрицею розміру $m \times n$ називається множина з mn елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:*

$$A = \left|\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix} \right|\right| .$$

Хоча в теорії матриць користуються термінами теорії визначників, але на відміну від визначника матриця — це лише таблиця елементів, а не результат виконання певних операцій; робити будь-які перестановки в ній не можна. Приклади матриць:

$$||a||\ ,\ ||a_1, a_2, a_3||\ ,\ \left|\left| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right|\right| ,\ \left|\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} a_{23} \end{matrix} \right|\right| ,\ \left|\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right|\right| .$$

Для позначення матриці застосовують ще такі символи: (...), [...].

Якщо $m = n$, то матриця A — *квадратна* і якщо відповідні операції можливі, то її визначник

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_n \dots a_{1n} \\ \dots \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{matrix} \right| .$$

При цьому записують $\Delta = \det A$. Неквадратна матриця визначника не має.

Квадратна матриця, всі елементи якої є нулі, називається *нульовою* відповідного розміру

$$\left|\left| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right|\right| ,\ \left|\left| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right|\right| ,\ \dots$$

Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої є одиниці, а решта — нулі, називається *одиничною* (відповідного розміру). Наприклад,

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ldots$$

Для матриці $A = \|a_{ij}\|$ *транспонованою* є матриця $A^T = \|a_{ji}\|$.

Матриці однакового розміру $m \times n$ можна *додавати* і *віднімати* за правилом

$$\|c_{ij}\|_{mn} = \|a_{ij}\|_{mn} \pm \|b_{ij}\|_{mn},$$

де a_{ij} і b_{ij} — елементи матриць-доданків, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, якщо для цих елементів виконується операція додавання.

П. 5. Знайти $C = A + B$, де $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання.

$$C = A + B = \begin{Vmatrix} 0+1 & 1+2 \\ 3+0 & 2+1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Матриці довільного розміру можна множити на число за правилом $\lambda A = \|\lambda a_{ij}\|_{mn}$, якщо для їх елементів виконується операція множення на число.

П. 6. Знайти $2A$, де $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання.

$$2A = 2\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Слід зазначити, що операція множення матриці на число виконується інакше, ніж множення визначника на число.

Матрицю A можна множити на матрицю B, якщо їх розміри узгоджені: число стовпців A дорівнює числу рядків B. При цьому добутком AB є така матриця C, елементи c_{ij} якої є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.9}$$

Необхідність введення добутку матриць саме таким способом пояснена далі.

П. 7. Знайти AB і BA, де $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання.

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{Vmatrix},$$

$$BA = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 3 & 0\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Отже, в загальному випадку

$$AB \neq BA,$$

хоча можливі випадки, коли справджується й рівність.

П. 8. Знайти AO, OA, AE, EA, де

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \quad O = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AO = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$OA = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$AE = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

$$EA = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$AO = OA = O, \quad AE = EA = A.$$

Таким чином, нульова і одинична матриці відіграють ту саму роль при множенні матриць, що й числа 0 і 1 при множенні чисел.

Зазначимо ще, що матриці можуть бути не тільки прямокутними, а й набувати форму іншої фігури, наприклад, трикутника.

1.1.6. Лінійні відображення й матриці

До поняття матриці можуть привести й лінійні відображення. В одновимірному випадку лінійне відображення множини X на множину Y здійснюється за допомогою рівняння прямої, в двовимірному — за допомогою СЛАР-2 (рис. 1.3).

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \tag{1.10}$$

Відображення (1.10) повністю визначається сукупністю коефіцієнтів, які зручно задавати у вигляді матриці, яка називається матрицею відображення (1.10):

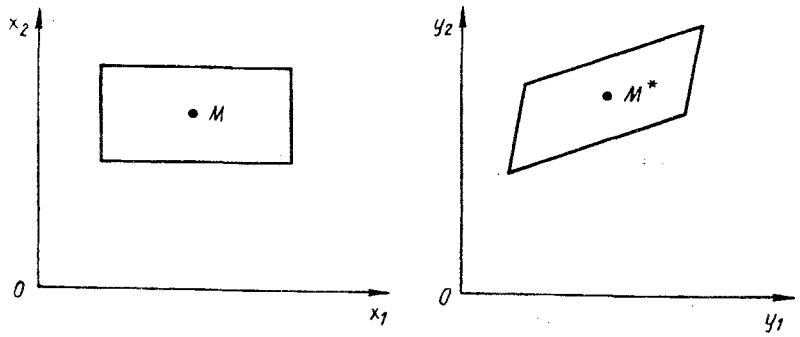


Рис. 1.3

$$A = \left|\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right|\right|.$$

П. 9. Знайти матрицю відображення повороту системи координат на даний кут.

Нехай система координат x_1Ox_2 повертається навколо початку O на кут α в додатному напрямі (рис. 1.4). Утворена таким чином система y_1Oy_2, точка M має відповідно координати (x_1, x_2) і (y_1, y_2) в кожній із систем. Згідно з рисунком маємо

$$OC = OD - CD, \quad MC = MA + AC, \quad CD = AB, \quad AC = BD.$$

Звідки дістаємо шукане відображення

$$\begin{cases} y_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha; \\ y_2 = x_1\sin\alpha - x_2\cos\alpha. \end{cases} \qquad (1.11)$$

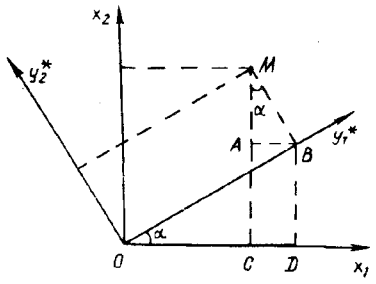


Рис. 1.4

Таким чином,

$$A = \left|\left| \begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{matrix} \right|\right|.$$

З точки зору лінійних відображень добуток двох матриць — це послідовне відображення площини x_1Ox_2 на площину y_1Oy_2 (з матрицею A), яку потім відображено на площину z_1Oz_2 (з матрицею B), причому

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad A = \left|\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right|\right|, \qquad (1.12)$$

$$\begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2; \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2, \end{cases} \quad B = \left|\left| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right|\right|. \qquad (1.13)$$

В результаті дістанемо відображення площини x_1Ox_2 на площину z_1Oz_2 (з матрицею C)

$$\begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2; \\ z_2 = c_{12}x_1 + c_{22}x_2, \end{cases} \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}. \tag{1.14}$$

Підставивши (1.12) в (1.13), маємо

$$\begin{cases} z_1 = (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})x_1 + (a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12})x_2; \\ z_2 = (a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22})x_1 + (a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22})x_2. \end{cases} \tag{1.15}$$

Порівнюючи (1.14) і (1.15), знаходимо

$$C = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{Vmatrix}.$$

Такий самий результат дістанемо після множення A і B.

1.1.7. Обернена матриця

Ввівши в розгляд матриці-стовпці

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix},$$

систему (1.12) можна подати в матричній формі:

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{Vmatrix} = AX,$$

тобто $Y = AX$.

Обернене до (1.12) перетворення, яке переводить y_1Oy_2 в x_1Ox_2, можна дістати за допомогою формул Крамера, якщо $\Delta = \det A \neq 0$, а саме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{a_{22}}{\Delta}y_1 + \frac{-a_{12}}{\Delta}y_2,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} = \frac{-a_{21}}{\Delta}y_1 + \frac{a_{11}}{\Delta}y_2.$$

Проте

$$a_{22} = A_{11}, \quad -a_{12} = A_{21}, \quad -a_{21} = A_{12}, \quad a_{11} = A_{22},$$

а тому

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{A_{11}}{\Delta} y_1 + \dfrac{A_{21}}{\Delta} y_2, \\ x_2 = \dfrac{A_{12}}{\Delta} y_1 + \dfrac{A_{22}}{\Delta} y_2. \end{cases} \tag{1.16}$$

Перетворення (1.16) є *оберненим* до (1.12), йому відповідає *обернена* матриця

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{21}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} \end{Vmatrix}. \tag{1.17}$$

Очевидно, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (на основі властивостей 4 і 8 визначників). Сформулюємо означення.

О. *Квадратна матриця A називається невиродженою, якщо* $\det A \neq 0$.

О. *Матриця* A^{-1} *називається оберненою до невиродженої матриці A, якщо* $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

З (1.17) випливає правило знаходження A^{-1}. Щоб дістати обернену матрицю A^{-1} до даної матриці A, треба в останній замінити всі елементи a_{ij} їхніми алгебраїчними доповненнями A_{ij}, транспонувати і здобуту матрицю помножити на $(1/\Delta) = (1/\det A)$.

Наведені означення й правило справедливі для квадратних матриць довільного розміру. Пропонуємо впевнитися в тому, що $(A^{-1})^{-1} = A$.

П. 10. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A перетворення повороту площини (1.11).

Розв'язання. Очевидно $\det A = 1$. Маємо $A_{11} = \cos\alpha$, $A_{12} = -\sin\alpha$, , $A_{21} = \sin\alpha$, $A_{22} = \cos\alpha$. Враховуючи (1.17), знаходимо

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}. \tag{1.18}$$

Цей самий результат (1.18) можна дістати простіше, замінивши в (1.19) α на $-\alpha$. Пропонуємо з'ясувати: чому?

1.1.8. Матричний спосіб розв'язування СЛАР

СЛАР (1.1) можна подати в матричній формі

$$AX = B, \tag{1.19}$$

де

$$B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Vmatrix}. \tag{1.20}$$

Помножимо (1.19) на A^{-1} зліва. Оскільки $A^{-1}A = E$, то дістанемо матричний спосіб розв'язування СЛАР:

$$X = A^{-1}B. \tag{1.21}$$

П. 11. Розв'язати матричним способом СЛАР-3

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \ \Delta \neq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

Знайдемо A^{-1}. Згідно з (1.21)

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3 \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3 \\ A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{33}b_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \\ \Delta_3/\Delta \end{Vmatrix}.$$

Звідси, порівнюючи елементи крайніх (зліва і справа) матриць-стовпців, приходимо до відомих вже формул Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, 3$.

1.1.9. Теорема Кронекера—Капеллі

Нехай маємо матрицю розмірами $m \times n$, елементами якої є числа. Вилучаючи з цієї матриці певну кількість рядків і стовпців, можна скласти визначники, з яких деякі можуть як дорівнювати, так і не дорівнювати нулю. Найбільший порядок таких визначників — мінімальне з чисел m і n.

О. *Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший порядок відмінного від нуля визначника, складеного зазначеним способом з A.*

П. 12. Знайти $r(A)$, де $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$.

З елементів A можна скласти три визначники другого порядку і шість — першого порядку. Всі визначники другого порядку дорівнюють нулю, а першого — жоден. Отже, $r(A) = 1$.

Розглянемо тепер СЛАР, що містить m рівнянь з n невідомими $(m \leqslant n)$, тобто

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.22}$$

Поряд з матрицею A цієї системи розглянемо ще так звану розширену матрицю A_p, яка, крім рядів матриці A, містить ще стовпець вільних членів рівнянь системи:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad A_p = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n}b_2 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn}b_m \end{Vmatrix}.$$

Л.Кронекером*) і А.Капеллі**) встановлено, що система (1.22) має розв'язок, якщо $r(A) = r(A_p)$. При $r(A) < r(A_p)$ система розв'язку не має. Доведення цього факту опустимо.

Якщо $r(A) = r(A_p)$, то звертаємо увагу лише на ті рівняння системи, коефіцієнти при невідомих яких утворюють визначник, за яким встановлюється ранг системи. Усі члени таких рівнянь з коефіцієнтами, що входять у цей визначник, залишаємо в лівій частині, решту переносимо в праву частину. Розв'язуємо утворену систему відносно невідомих, що містяться в лівій частині. Невідомі, що містяться в правій частині, можуть набувати довільних значень. Здобутий розв'язок, звичайно, задовольняє рівняння, які опущені.

П. 13. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо матриці:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad A_p = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Маємо $\det A = 0$, але $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Оскільки коефіцієнти третього рівняння в Δ не входять, то це рівняння вилучаємо і розглядаємо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 - 3; \\ 2x_1 - 3x_2 = 3. \end{cases}$$

Звідси

---

*) Л.Кронекер (1823—1891) — німецький математик.
**) А.Капеллі (1858—1916) — італійський математик.

$$x_1 = \frac{x_3}{5} + \frac{3}{5},\ x_2 = \frac{2}{5}x_3 - \frac{9}{5},\ x_3 \in \mathbf{R}.$$

Ці розв'язки задовольняють і вилучене рівняння (пропонуємо перевірити це самостійно).

1.2. ВЕКТОРИ

Усі фізичні величини існують об'єктивно (незалежно від нашої волі), їх можна подати у вигляді матриць різного розміру. Ці величини поділяються на *скалярні* (температура, маса, робота, тиск тощо), які зображуються одним числом (одноелементна матриця), *векторні*[*] (сила, швидкість, прискорення тощо), які зображуються матрицею-стовпцем з певною кількістю елементів, *тензорні* (деформація, напруження тощо), які зображуються квадратною матрицею.

1.2.1. Види векторів

Геометричною інтерпретацією векторної величини є вектор. Цю інтерпретацію можна реалізувати, розглянувши, наприклад, напрямлений відрізок. Отже, під вектором розумітимемо напрямлений відрізок.

На рис. 1.5 зображено вектор $\bar{a} = \overline{AB}$. Точка A — початок чи точка прикладання вектора, точка B — його кінець.

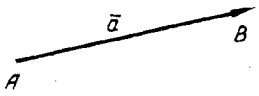


Рис. 1.5

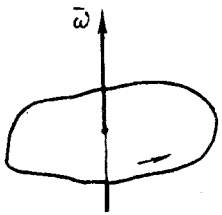


Рис. 1.6

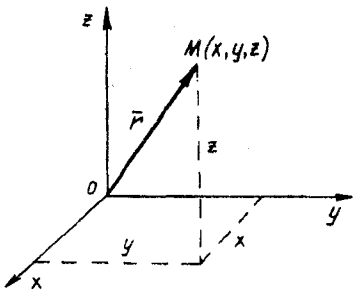


Рис. 1.7

$|\bar{a}| = |\overline{AB}|$ — числове значення (*модуль вектора*) — є довжина відрізка AB.

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називаються *колінеарними* ($\bar{a} \parallel \bar{b}$), якщо вони лежать на паралельних прямих або на прямих, які збігаються.

[*] Від лат. vector — той, що несе.

Два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають рівними ($\bar{a} = \bar{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і модулі їх рівні.

Одиничним вектором або *ортом* $\bar{a}^0$ даного вектора $\bar{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці довжини (при даному масштабі), а напрям збігається з напрямом $\bar{a}$, тобто $|\bar{a}^0| = 1$, а $\bar{a}^0 \uparrow\uparrow \bar{a}$. *Нульовий вектор* — це вектор, початок і кінець якого збігаються (модуль його дорівнює нулю, а напрям — довільний).

Якщо вектор можна переносити паралельно самому собі, то його називають *вільним*. Якщо вектор можна переміщувати вздовж однієї і тієї самої прямої, то його називають *плинним*. Прикладом такого вектора є кутова швидкість $\bar{\omega}$ (рис. 1.6). Якщо вектор жорстко *зв'язаний* з точкою прикладання, то він називається *зв'язаним*. Прикладом такого вектора є радіус-вектор точки (на рис. 1.7 це $\overline{OM}$).

1.2.2. Лінійні операції з векторами

Додавання двох векторів здійснюється за відомим правилом паралелограма чи трикутника (рис. 1.8, 1.9). *Додавання n векторів* ($n \geq 2$) *виконується за правилом многокутника* (рис. 1.10).

За допомогою рис. 1.10, 1.11 можна встановити такі властивості операції додавання векторів:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \text{ (комутативна*) властивість)}, \qquad (1.23)$$

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} \text{ (асоціативна**) властивість)}. \qquad (1.24)$$

Різницею векторів $\bar{b}$ *і* $\bar{a}$ *є такий вектор* $\bar{c}$, *що* $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ (рис. 1.12).

Добутком вектора $\bar{a}$ *на* $\lambda \in \mathbf{R}$ *називається вектор* $\lambda\bar{a}$ *такий, що* $|\lambda\bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$ *і напрям якого збігається з напрямом* $\bar{a}$, *якщо* $\lambda > 0$, *або протилежний* $\bar{a}$, *якщо* $\lambda < 0$.

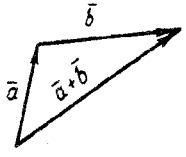


Рис. 1.8

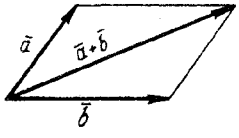


Рис.1.9

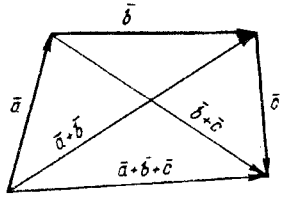


Рис. 1.10

*) Від лат. comutatus — зміна, перетворення.
**) Від лат. associo — приєднувати.

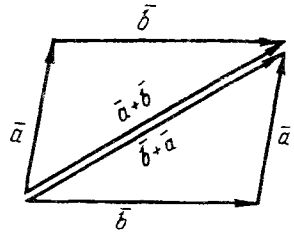


Рис. 1.11

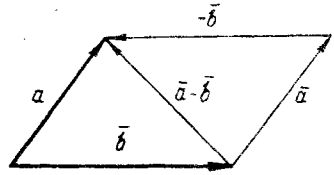


Рис. 1.12

Якщо $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то, беручи до уваги останню операцію, маємо

$$\bar{a} = \lambda \bar{b}, \tag{1.25}$$

де $\lambda \in \mathbf{R}$ і навпаки, тобто маємо *умову колінеарності векторів*, а також

$$\bar{a}^0 = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}. \tag{1.26}$$

Далі користуватимемося операціями (1.23)—(1.26) без спеціальних посилань.

1.2.3. Базис. Проекція вектора на вісь

Розглянемо множину всіх векторів, що лежать на прямій. Для будь-яких двох з них виконується умова (1.25). Беручи за основу (базис) один з них, наприклад $\bar{b}$, виразимо решту через $\bar{b}$ за формулою (1.25).

Візьмемо тепер три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, які паралельні одній площині (*компланарні* вектори), причому $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Тоді, беручи $\bar{a}$ і $\bar{b}$ за базис, можна виразити $\bar{c}$ через вектори базису (рис. 1.13), тобто існує $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ і $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$), такі, що

$$\bar{c} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b}.$$

Останнє співвідношення називають розкладом вектора $\bar{c}$ за базисом $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Такий розклад єдиний. Справді, нехай існує ще один розклад $\bar{c} = \mu_1 \bar{a} + \mu_2 \bar{b}$. Віднімаючи від одного розкладу інший, маємо

$$\bar{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{a} + (\mu_1 - \mu_2)\bar{b}.$$

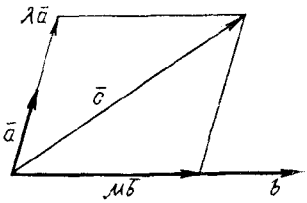


Рис. 1.13

Оскільки $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, то

$$\bar{0} = 0\bar{a} + 0\bar{b}.$$

Отже, попередня рівність справджується тільки за умови $\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2$. Таким чином, у $\mathbf{R}^2$ базисом є два довільні некомпланарні вектори.

Аналогічно в $\mathbf{R}^3$, взявши за базис три некомпланарні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, і $\bar{c}$, будь-який інший вектор $\bar{d}$ можна подати у вигляді

$$\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}.$$

При цьому скаляри λ_1, λ_2, λ_3 називають *координатами*, а вектори $\lambda_1\bar{a}$, $\lambda_2\bar{b}$, $\lambda_3\bar{c}$ — *компонентами*[*)] вектора $\bar{d}$ за базисом $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

О. *Сукупність векторів, за якою можна розкласти довільний вектор відповідної множини* $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, *називається базисом.*

Перехід від одного базису до іншого здійснюється за допомогою звичайної підстановки.

П. 1. Нехай у базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ вектор $\bar{a}$ набирає вигляду $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$. Ввести новий базис $\bar{e}_1^*$, $\bar{e}_2^*$, зв'язаний із старим залежністю

$$\bar{e}_1 = -\bar{e}_1^* + 2\bar{e}_2^*, \quad \bar{e}_2 = 2\bar{e}_1^* + \bar{e}_2^*.$$

Розв'язання. У новому базисі

$$\bar{a} = (-\bar{e}_1^* + 2\bar{e}_2^*) + 2(2\bar{e}_1^* + \bar{e}_2^*) = 3\bar{e}_1^* + 4\bar{e}_2^*.$$

Наведемо кілька більш загальних означень.

О. Вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$, *називаються лінійно залежними, якщо існують такі дійсні* λ_1, λ_2,... , λ_n, *які одночасно не всі дорівнюють нулю, що*

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}. \qquad (1.27)$$

О. *Вектори* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ *називаються незалежними, якщо рівність* (1.27) *справджується лише за умови* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

О. *Вектор* $\bar{b}$ *називається лінійною комбінацією векторів* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$, *якщо існують одночасно ненульові* λ_i, *такі, що*

$$\bar{b} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n .$$

Т. *Якщо вектори* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ *лінійно залежні, то хоча б один з них можна подати у вигляді лінійної комбінації решти і навпаки.*

Доведення цієї теореми, яке, до речі, досить просте, опустимо.

Розглянемо поняття *проекції вектора на вісь.* Спочатку спроектуємо на цю вісь початок і кінець вектора. Для даного вектора $\bar{a}$ і для протилежного йому $(-\bar{a})$ матимемо на осі ті самі точки.

Позначимо через $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$ кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Очевидно, що можна обмежитися значеннями $0 \le (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) \le \pi$. Те саме стосується й кута між вектором і віссю.

---

*) Від лат. componentis — той, що становить, складова частина чогось.

О. *Проекцією вектора* $\bar{a}$ *на вісь* u ($\text{пр}_u\bar{a}$) *називається довжина відрізка, який сполучає проекції на цю вісь початку й кінця даного вектора, взята зі знаком «+», якщо кут між вектором і віссю гострий, і знаком «—», якщо цей кут тупий* (рис. 1.14).

Очевидно, що коли $\bar{a} \perp u$, то $\text{пр}_u\bar{a} = 0$, і навпаки.

Наведемо деякі властивості проекції.

1. $\text{пр}_u(\bar{a}) = |\bar{a}|\cos(\widehat{\bar{a}, u})$. (див. рис. 1.14)
2. $\text{пр}_u(\lambda\bar{a}) = \lambda\text{пр}_u(\bar{a})\ \forall\ \lambda \in \mathbf{R}$.(рис. 1.15)
3. $\text{пр}_u(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_u\bar{a} + \text{пр}_u\bar{b}$. (рис. 1.16)

Остання властивість виконується для суми скінченного числа векторів.

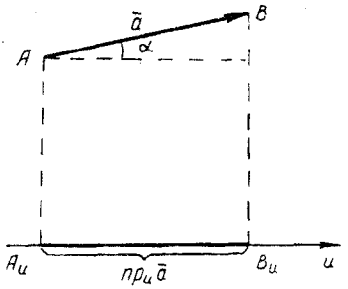


Рис. 1.14

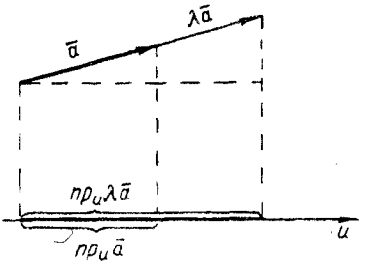


Рис. 1.15

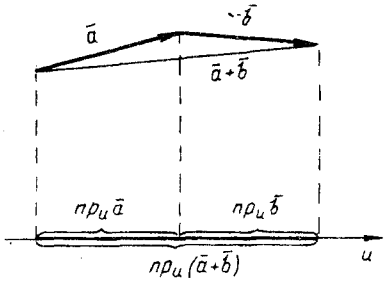


Рис. 1.16

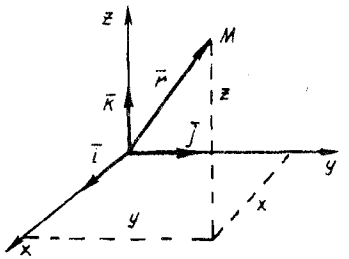


Рис. 1.17

Повернемося знову до базису. Найпростішим і найзручнішим є декартів базис (у просторі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$), введений у розгляд Р. Декартом. У цьому базисі $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$, $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, а радіус-вектор $\bar{r}$ точки M має вигляд (рис. 1.17)

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x, y, z),\ \ ||xyz||, \text{ або } \left|\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right|\right|,$$

причому, згідно з теоремою Піфагора, $|\bar{r}| = \bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Для довільного вектора $\bar{a}$

$$\text{пр}_{Ox}\bar{a} = a_x,\ \ \text{пр}_{Oy}\bar{a} = a_y,\ \ \text{пр}_{Oz}\bar{a} = a_z,$$

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = (a_x,\ a_y,\ a_z),$$

$$\left|\left|a_x a_y a_z\right|\right|,\quad \left|\left|\begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix}\right|\right|,$$

а

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.28}$$

Нехай $\bar{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\bar{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$. На основі властивості проекцій векторів маємо

$$(\bar{a} + \bar{b}) = (a_x + b_x,\ \ a_y + b_y,\ \ a_z + b_z),$$

$$(\lambda\bar{a}) = (\lambda a_x,\ \ \lambda a_y,\ \ \lambda a_z).$$

1.2.4. Способи задання векторів. Геометричні задачі

Напрямлений відрізок (вектор) можна задати різними способами.

Задання вектора проекціями або розкладом за координатним базисом. Вище вже було розглянуто задання вектора за допомогою проекцій

$$\bar{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$$

або розкладом за координатним базисом

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

Перейшовши від геометричного об'єкта до чисел, можна значно розширити діапазон роботи з векторами. Дії над векторами, заданими наведеним вище способом, виконуються досить легко.

Розглянемо тепер *ознаку колінеарності векторів.*

Нехай $\bar{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\bar{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$. Тоді умова $\bar{a} \parallel \bar{b}$ рівносильна умові $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, тобто

$$(a_x,\ a_y,\ a_z) = (\lambda b_x,\ \lambda b_y,\ \lambda b_z).$$

Звідси

$$\begin{cases} a_x = \lambda b_x; \\ a_y = \lambda b_y; \\ a_z = \lambda b_z. \end{cases}$$

Знайшовши λ з кожного співвідношення, дістанемо

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (= \lambda). \tag{1.29}$$

Остання рівність виражає *ознаку колінеарності векторів.*

Задання вектора модулем і напрямними косинусами. Нехай для вектора $\bar{a}$ відомі модуль $|\bar{a}|$, $(\widehat{\bar{a},Ox}) = \alpha$, $(\widehat{\bar{a},Oy}) = \beta$, і $(\widehat{\bar{a},Oz}) = \gamma$ (рис. 1.18).

Тоді $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами* $\bar{a}$. Очевидно, напрямні косинуси і $|\bar{a}|$ повністю визначають вектор $\bar{a}$. Ураховуючи властивість 1 проекції вектора на вісь, маємо

$$a_x = |\bar{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}|\cos\gamma. \tag{1.30}$$

Звідси, застосовуючи (1.28), знаходимо

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.31}$$

На площині, де $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\gamma = 0$, згідно з (1.31) маємо

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Розглянуті способи задання векторів еквівалентні, і перехід від одного до другого здійснюється за формулами (1.30) і (1.28).

Задання вектора координатами його початку і кінця. Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ визначають вектор $\overline{M_1M_2}$ (рис. 1.19). Побудувавши радіуси-вектори точок $\bar{r}_1$ і $\bar{r}_2$, матимемо

$$\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{1.32}$$

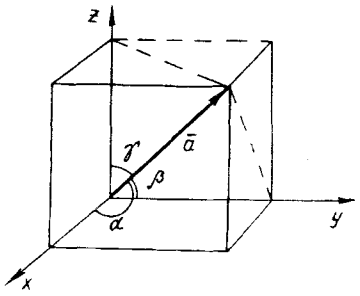


Рис. 1. 18

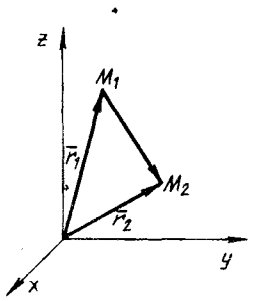


Рис. 1.19

Від щойно розглянутого способу задання векторів легко перейти до перших двох, але зворотний перехід неможливий (однозначно). Справді, останній спосіб дає зв'язаний вектор, а перші два — вільний.

Наведемо ряд задач, які розв'язуються за допомогою векторів.

Відстань між точками. Нехай маємо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо відстань між M_1 і M_2. Побудуємо вектор $\overline{M_1M_2}$. Ураховуючи (1.32) і (1.28), знайдемо

$$|\overline{M_1M_2}| = d^*) = d(M_1, M_2) =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1.33)$$

Для позначення відстані між геометричними об'єктами x і y застосовують позначення $d(x, y)$.

Вважатимемо, що:

1) $d(x, y) = d(y, x)$,

2) $d(x, y) \geq 0$ ($d(x,y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x \equiv y$);

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\ \forall z$ (áерівáість три"утáи"а; в«áа áагадує за‹ежáість ›іж ст«р«áа›и три"утáи"а).

Паралельне перенесення осей координат. Нехай спочатку точка M мала координати (x, y, z), а після паралельного перенесення осей — координати (x', y', z'). Точці M відповідають радіуси-вектори $\bar{r} = (x,y,z)$ і $\bar{r}'(x',y',z')$. Вектор перенесення $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — заданий. Тоді $\bar{r}' = \bar{r} - \bar{a} = (x - a_x, y - a_y, z - a_z)$ (рис. 1.20).

Звідси

$$x = x' + a_x,\ y = y' + a_y,\ z = z' + a_z. \qquad (1.34)$$

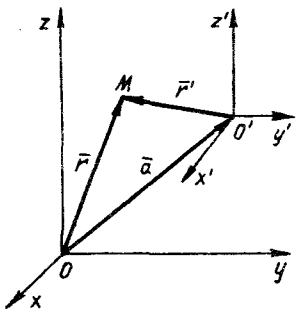


Рис. 1.20

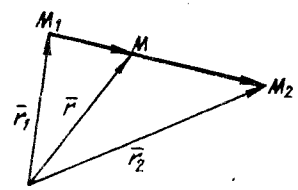


Рис. 1.21

Поділ відрізка в даному відношенні. О. Точка M поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ, якщо

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

*) Від лат. distantia, англ. distance — відстань.

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і λ — відомі. Знайдемо M. Розглянемо відповідні вектори (рис. 1.21). Оскільки $\overline{M_1M} = \lambda\,\overline{MM_2}$, а $\overline{M_1M} = \overline{r}_2 - \overline{r}$, то $\overline{r} - \overline{r}_1 = \lambda(\overline{r}_2 - \overline{r})$. Звідси

$$\overline{r} = \frac{1}{1+\lambda}(\overline{r}_1 - \lambda\overline{r}_2)$$

або

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.35}$$

В окремому випадку, коли відрізок поділяють навпіл ($\lambda = 1$), маємо

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

1.2.5. Скалярний добуток векторів

Нехай під дією сталої сили $\overline{F}$ матеріальна точка переміщується вздовж вектора $\overline{S}$, $(\widehat{\overline{F},\overline{S}}) = \varphi$. Як відомо з фізики, виконана при цьому робота

$$A = |\overline{F}| \cdot |\overline{S}| \cos\varphi.$$

Доцільно розглянути з математичної точки зору таку операцію з векторами.

О. *Скалярним добутком (СД) векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається скаляр, який дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:*

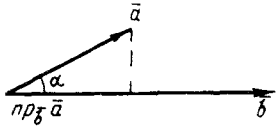


Рис. 1.22

$$\overline{a}\,\overline{b} \overset{\text{def}}{=} |\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}). \tag{1.36}$$

Вважатимемо, що фізичне тлумачення СД двох векторів полягає в тому, що такий добуток являє собою роботу, виконану при переміщенні матеріальної точки під дією одного вектора вздовж другого. Беручи до уваги властивість 1 проекції вектора на вісь, маємо (рис. 1.22)

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}|\,\mathrm{np}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\,\mathrm{np}_{\overline{b}}\overline{a}. \tag{1.37}$$

Властивості скалярного добутку векторів

1. $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$ (комутативна).
2. $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \overline{a}(\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a}\,\overline{b})$ (*асоціативна стосовно скалярного множника*).
3. $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{b}\,\overline{c}$ (*дистрибутивна**)).

Н. 1. *Для скалярного добутку векторів виконуються ті самі властивості, що й для добутку многочленів, крім добутку трьох і більше множників.*

*) Від лат. distributivus — розподільний.

4. $(\bar{a}\,\bar{b} > 0) \Leftrightarrow (\widehat{(\bar{a}\,\bar{b})} < \frac{\pi}{2})$

$(\bar{a}\,\bar{b} < 0) \Leftrightarrow (\widehat{(\bar{a}\,\bar{b})} > \frac{\pi}{2})$.

5. $(\bar{a}\,\bar{b} = 0) \Leftrightarrow (\bar{a} \perp \bar{b})$.

6. $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Властивість 1 випливає з означення і того факту, що

$$(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = (\widehat{\bar{b}, \bar{a}}).$$

Властивості 2 і 3 випливають з рівності (1.37). Властивості 4—6 випливають теж з означення (тут треба врахувати знаки косинуса гострого і тупого кутів, а також те, що $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 0 = 1$). Властивість 5 виражає *ознаку перпендикулярності векторів.*

У довільному базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ вираз для скалярного добутку має вигляд

$$\bar{a}\,\bar{b} = (a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3)(b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) =$$

$$= a_1b_1\bar{e}_1^2 + a_2b_1\bar{e}_2\bar{e}_1 + a_3b_1\bar{e}_3\bar{e}_1 + a_1b_2\bar{e}_1\bar{e}_2 +$$

$$+ a_2b_2\bar{e}_2^2 + a_3b_2\bar{e}_3\bar{e}_2 + a_1b_3\bar{e}_1\bar{e}_3 + a_2b_3\bar{e}_2\bar{e}_3 + a_3b_3\bar{e}_3^2,$$

а в декартовому базисі ($\bar{i}\,\bar{j} = 0$, $\bar{i}^2 = 1$ тощо)

$$\bar{a}\,\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\,(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \qquad (1.38)$$

Н. 2. З рівності (1.37) маємо $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}|}$. Отже,

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Н. 3.

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Н. 4. *Ознака перпендикулярності векторів* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$*, заданих проекціями:*

$$(\bar{a} \perp \bar{b}) \Leftrightarrow (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0).$$

За допомогою СД можна доводити деякі теореми геометрії і тригонометричні формули.

П. 5. Знайти *залежність між сторонами і діагоналями паралелограма* (див. рис. 1.9, 1.12).

Розв'язання. Для діагоналей маємо

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\,\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2,\ (\bar{a} - \bar{b})^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2 .$$

Додавши ці рівності, знаходимо

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = 2(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2) .$$

Отже, дістали теорему: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін.

П. 6. Довести, що *три висоти трикутника перетинаються в одній точці* (рис. 1.23).

Розв'язання. Нехай трикутник утворено векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і нехай $\bar{x} \perp \bar{a}$, $\bar{y} \perp \bar{b}$. Доведемо, що $\bar{z} \perp \bar{c}$. Маємо

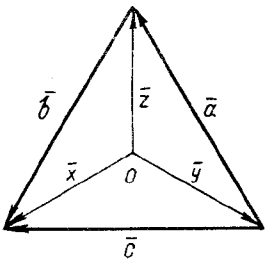


Рис. 1.23

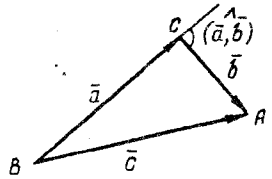


Рис. 1.24

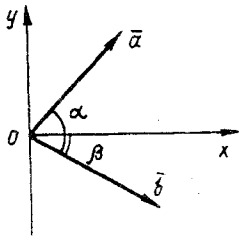


Рис. 1.25

$$\bar{a} = \bar{z} - \bar{y},\ \bar{b} = \bar{x} - \bar{z},\ \bar{c} = \bar{x} - \bar{y} .$$

Оскільки $\bar{x} \perp \bar{a}$, то

$$\bar{x}\,\bar{a} = \bar{x}\,\bar{z} - \bar{x}\,\bar{y} = 0 .$$

Крім того,

$$(\bar{y} \perp \bar{b}) \Rightarrow (\bar{y}\,\bar{b} = \bar{y}\,\bar{x} - \bar{y}\,\bar{z} = 0).$$

Додавши ці рівності, матимемо

$$\bar{x}\,\bar{z} - \bar{y}\,\bar{z} = \bar{z}(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{z}\,\bar{c} = 0.$$

Звідки $\bar{z} \perp \bar{c}$.

П. 7. Довести *теорему косинусів*.

Маємо (рис. 1.24)

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} ,$$

звідки

$$\bar{c}^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = a^2 + b^2 + 2ab\cos c .$$

П. 8. Довести *формулу косинуса суми та різниці двох кутів*. Маємо (рис. 1.25):

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos(\alpha+\beta) = a_x b_x + a_y b_y = a\cos\alpha b\cos\beta +$$

$$+ a\sin\alpha(-b\sin\beta) = ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Звідси

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Замінивши в останній формулі β на $-\beta$, знаходимо

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

1.2.6. Векторний добуток векторів

З фізики відомо, що на електрон, який зі швидкістю v входить у магнітне поле напруженості $\bar{H}$, діє виштовхувальна сила $\bar{F}$ (сила Лоренца), причому, зокрема $\bar{F} \perp \bar{v}$, $\bar{F} \perp \bar{H}$,

$$|\bar{F}| = |\bar{v}|\,|\bar{H}|\sin(\widehat{\bar{v},\bar{H}}).$$

Розглянемо з математичної точки зору дану операцію з векторами.

О. *Векторним добутком* (ВД) *векторів* $\bar{a}$ і $\bar{b}$ *називається вектор* $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, *який задовольняє умови*:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;

3) *вектор* $\bar{c}$ *напрямлений у той бік, з якого поворот від* $\bar{a}$ *до* $\bar{b}$ *на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника* (рис. 1.26).

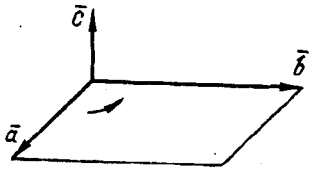


Рис. 1.26

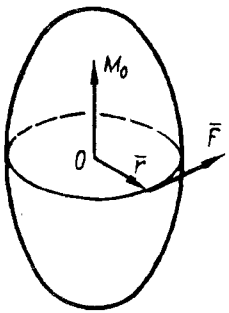


Рис. 1.27

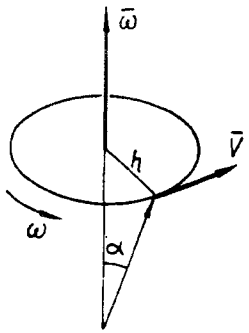


Рис. 1.28

З умови 2) випливає *геометричний зміст ВД: модуль векторного добутку векторів дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є дані вектори.*

Векторному добутку двох векторів можна надати *й механічного змісту*, якщо врахувати поняття *моменту* $\bar{M}_0$ *сили* $\bar{F}$ *стосовно важеля* $\bar{r}$ (рис. 1.27):

$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{F},$$

де

$$|\overline{M}_0| = |\overline{r} \times \overline{F}| = |\overline{r}|\,|\overline{F}|\sin\alpha.$$

У механіці вводиться поняття *швидкості обертання тіла* (рис. 1.28).

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Тепер силу Лоренца можна записати (вже без зауваження «зокрема») так:

$$\overline{F} = \overline{v} \times \overline{H}.$$

Властивості векторного добутку векторів (наводимо без доведення).

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (*антикомутативна*).

2. $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$ (*асоціативна*).

3. $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$ (*дистрибутивна*).

4. $(\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}) \Leftrightarrow (\overline{a} \parallel \overline{b})$.

З наведених властивостей випливає той самий наслідок, що й для СД (треба врахувати властивість 1). Згідно з цим наслідком, а також з результатами векторного множення координатних ортів

($\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$, $\overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}$, $\overline{i} \times \overline{i} = \overline{0}$ тощо) маємо

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) \times (b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\overline{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\overline{j} + (a_xb_y - a_yb_z)\overline{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (1.39)$$

За допомогою здобутого результату можна впевнитися в справедливості властивостей ВД, треба тільки врахувати відповідні властивості визначників (наприклад, властивість 1 випливає з властивості 2 визначників).

П. 9. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(3, -3, 0)$ (рис. 1.29*)).

Розглянемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Оскільки площа трикутника, побудованого на цих векторах, дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на них, то, врахувавши геометричне тлумачення ВД, а також (1.39), маємо

*) Рис. 1.29 до прикладу має схематичний характер, оскільки розміщення точок не відповідає їх координатам. Такий самий характер має переважна більшість рисунків, використаних у дальшому викладі матеріалу.

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} S_{\text{парал}} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|;$$

$$\overline{AB} = (-2, -1, 1), \quad \overline{AC} = (2, -4, -1);$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 5\bar{i} + 0\bar{j} + 10\bar{k};$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

$$S_{\text{тр}} = 2.5\sqrt{5}.$$

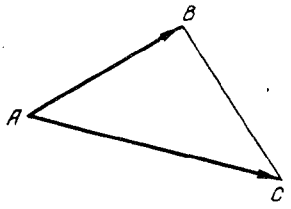


Рис. 1.29

П. 10. Довести, що площа паралелограма, побудованого на векторах, вдвоє більша за площу паралелограма, побудованого на діагоналях першого паралелограма.

Маємо діагоналі $\bar{a} - \bar{b}$ і $\bar{a} + \bar{b}$. Тоді

$$(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} \times \bar{a} - \bar{b} \times \bar{a} + \bar{a} \times \bar{b} - \bar{b} \times \bar{b} = 2(\bar{a} \times \bar{b}).$$

Порівнюючи вирази площ обох паралелограмів, дістаємо шукане твердження.

1.2.7. Тензорний добуток векторів

Нехай маємо $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

О. *Тензорним добутком* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *називається матриця*

$$\bar{a} * \bar{b} \overset{\text{def}}{=} \left\| \begin{vmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{vmatrix} \right\|.$$

(Практичне тлумачення цього добутку наведено далі.)

Для двох векторів введено три операції множення. Через те цим трьом операціям не можна поставити у відповідність одну обернену операцію. Отже, операції ділення векторів не існує.

1.2.8. Мішаний добуток векторів

О. *Мішаним добутком (МД) векторів* $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$ *називається сукупність операцій*

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \overset{\text{def}}{=} (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}.$$

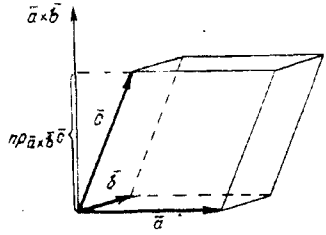


Рис. 1.30

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ (рис. 1.30). Маємо

$$V = S \cdot H, \quad S = |\bar{a} \times \bar{b}|,$$

(оскільки $H = |\text{np}_{\bar{a} \times \bar{b}} \bar{c}|$, $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{a}$, $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{b}$),

$$V = |\bar{a} \times \bar{b}|\,|np_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c}| = |(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}| = |\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}|,$$

тобто *геометричний зміст МД полягає в тому, що МД векторів з точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.*

Нехай $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Беручи до уваги розклад визначника в (1.39) за елементами першого рядка, дістаємо

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1.40)$$

Властивості мішаного добутку векторів

1. *Вектори* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *компланарні тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

(*умова компланарності векторів*).

2. $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c})\bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a})\bar{b}$.

3. $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = -(\bar{b} \times \bar{a})\bar{c}$.

Властивості 2 і 3 випливають з того, що парна перестановка рядків визначника не змінює його знак, а непарна змінює на протилежний.

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, можна записати у вигляді

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

оскільки він становить $\frac{1}{6}$ об'єму відповідного паралелепіпеда (тут mod — модуль).

1.2.9. Власні числа та власні вектори лінійних перетворень

Розглянемо лінійне перетворення (див. 1.1.7)

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3; \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \qquad (1.41)$$

Якщо

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix},$$

то згідно з (1.1.7) $Y = AX$. Вважаючи X і Y векторами з відповідними координатами, записане перетворення A тлумачимо як таке, що переводить вектор X у вектор Y за допомогою матриці A. Знайдемо вектор, який при даному перетворенні змінюється найменше, тобто переходить у колінеарний йому.

О. *Власним вектором X лінійного перетворення A називається ненульовий вектор, який задовольняє співвідношення*

$$AX = \lambda X, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{1.42}$$

при цьому λ називається власним числом перетворення.

Отже, вектор, який при даному лінійному перетворенні переходить у колінеарний йому, — це власний вектор цього перетворення.

З (1.42) маємо

$$AX - \lambda X = 0,$$

де 0 — нульова матриця відповідного розміру, або

$$AX - \lambda EX = 0,$$

де E — одинична матриця відповідного розміру.

Отже,

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Реалізуємо останню рівність у випадку перетворення (1.41) та його матриць. Маємо

$$\left(\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} - \lambda \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \right) \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

або

$$\begin{Vmatrix} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0;\\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0;\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0.\end{cases}$$

Звідси знаходимо x_i. Отримана однорідна система має ненульовий розв'язок тільки тоді, коли $\det(A - \lambda E) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Описана процедура знаходження власних чисел та векторів для випадку трьох змінних переноситься й на випадок довільної скінченної кількості змінних.

П. 11. Знайти власні вектори перетворення

$$\left\| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\|.$$

Відповідь. $\bar{x}_1 = (c, 0, c), \bar{x}_2 = (c, 0, c)\ \forall\, c \in \mathbf{R}$.

1.2.10. Зміна матриці лінійного перетворення при переході від одного базису до іншого

Нехай X — довільний елемент (вектор $\bar{x}$) з $\mathbf{R}^3$, де базисом є вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, тобто

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3, \quad X = \left\| \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \right\|.$$

Нехай за допомогою матриці A він перетворюється в деякий елемент Y (вектор $\bar{y}$):

$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3, \quad Y = \left\| \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} \right\|.$$

Отже,

$$Y = AX.$$

Розглянемо в цьому просторі новий базис $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$, де

$$\bar{e}_1^* = b_{11}\bar{e}_1 + b_{12}\bar{e}_2 + b_{13}\bar{e}_3;$$
$$\bar{e}_2^* = b_{21}\bar{e}_1 + b_{22}\bar{e}_2 + b_{23}\bar{e}_3;$$
$$\bar{e}_3^* = b_{31}\bar{e}_1 + b_{32}\bar{e}_2 + b_{33}\bar{e}_3.$$

Знайдемо форму матриці заданого перетворення $Y = AX$ при переведенні $\bar{x}$ у новий базис.

Прирівнявши два вирази для $\bar{x}$ у різних базисах, дістанемо

$$x_1^*\bar{e}_1^* + x_2^*\bar{e}_2^* + x_3^*\bar{e}_3^* = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3.$$

Підставивши в останню рівність вирази для $\bar{e}_1^*$, $\bar{e}_2^*$, $\bar{e}_3^*$ і згрупувавши доданки з $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, матимемо

$$x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 = (b_{11}x_1^* + b_{21}x_2^* + b_{31}x_3^*)\bar{e}_1 +$$

$$+ (b_{12}x_1^* + b_{22}x_2^* + b_{32}x_3^*)\bar{e}_2 + (b_{13}x_1^* + b_{23}x_2^* + b_{33}x_3^*)\bar{e}_3.$$

Звідки

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1^* + b_{21}x_2^* + b_{31}x_3^*; \\ x_2 = b_{12}x_1^* + b_{22}x_2^* + b_{32}x_3^*; \\ x_3 = b_{13}x_1^* + b_{23}x_2^* + b_{33}x_3^*, \end{cases}$$

тобто (B^{T} — транспонована до B матриця)

$$X = B^T X^*, \quad X^* = \begin{Vmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{Vmatrix}.$$

З останньої системи випливає, що $\bar{x}$ перетворюється в $\bar{x}^*$ однозначно. Матриця B^{T} — невироджена, отже, вона має обернену матрицю $(B^{\mathrm{T}})^{-1}$. Нехай у новому базисі

$$\bar{y} = y_1^*\bar{e}_1^* + y_2^*\bar{e}_2^* + y_3^*\bar{e}_3^*, \quad Y^* = \begin{Vmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$Y = B^{\mathrm{T}}Y^*, \quad B^{\mathrm{T}}Y^* = AX = AB^{\mathrm{T}}X^*,$$

звідки

$$Y^* = (B^{\mathrm{T}})^{-1}AB^{\mathrm{T}}X^*.$$

Зіставляючи останню форму з $Y^* = A^*X^*$, знаходимо

$$A^* = (B^{\mathrm{T}})^{-1}AB^{\mathrm{T}}. \tag{1.43}$$

Це і є шукана форма для матриці A^*.

Аналогічну форму дістаємо для випадку перетворення прямокутного базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, наприклад $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, у прямокутний $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$. Очевидно, що

$$\bar{e}_1^*\bar{e}_1^* = \bar{e}_2^*\bar{e}_2^* = \bar{e}_3^*\bar{e}_3^* = 1, \quad \bar{e}_1^*\bar{e}_2^* = \bar{e}_1^*\bar{e}_3^* = \bar{e}_2^*\bar{e}_3^* = 0.$$

Застосувавши розклад $\bar{e}_i^*$ через $\bar{e}_i$, дістанемо

$$b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 = b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 = b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 1,$$

$$b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} + b_{13}b_{23} = b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33} =$$

$$= b_{21}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{23}b_{33} = 0.$$

Останні рівності набирають у матричній формі такого вигляду:

$$\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix},$$

тобто $BB^{\mathrm{T}} = E$, звідки $B^{\mathrm{T}} = B^{-1}$.

О. *Матриця, обернена до своєї транспонованої, називається ортогональною.*

Отже, *матриця переходу від однієї прямокутної системи координат до іншої є ортогональною. Справедливе й обернене твердження.*

Крім того, можна довести, що:

1) *всі власні значення симетричної матриці дійсні,*

2) *власні вектори, які відповідають різним власним значенням, попарно ортогональні.*

Знайдемо матрицю лінійного перетворення $Y = AX$ у базисі, складеному з власних векторів. Враховуючи (1.42), маємо

$$Y = AX = \lambda X.$$

Отже,

$$Y = \lambda X.$$

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — базис. Тоді

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Оскільки $\bar{e}_1$ переходить тут в $\lambda_1\bar{e}_1$, то аналогічно $\bar{e}_2 \to \lambda_2\bar{e}_2$, $\bar{e}_3 \to \lambda_3\bar{e}_3$, тобто $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ переходять відповідно у вектори $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0)$, $0, 0, \lambda_3)$. Тому

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Vmatrix},$$

звідки $a_{11} = \lambda_1$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$. Аналогічно

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}.$$

Таким чином, матриця лінійного перетворення має спеціальний діагональний вигляд (у нашому випадку).

1.2.11. Поняття про лінійні та евклідові простори

Розглянемо не довільні множини, а такі, для елементів яких виконуються арифметичні операції. Тоді можна ввести поняття лінійного простору.

О. *Множина E елементів $x, y, z,...$ називається лінійним простором, якщо:*

1) *кожним двом елементам $x \in E$, $y \in E$ однозначно відповідає третій $z \in E$, який називається сумою $z = x + y$, причому $x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y) + z$;*

2) *кожному $x \in E$ і кожному $\lambda \in \mathbf{R}$ однозначно відповідає елемент $\lambda x \in E$, який називається добутком x на дійсне число λ, причому $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $1 \cdot x = 1$, існує нульовий елемент $\theta_E \in E$, такий, що $0x = \theta_E$, $\forall\, x \in E$;*

3) *для розглянутих операцій*

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y.$$

Лінійними просторами є такі множини.

1. Множина дійсних чисел $\mathbf{R}$, тут $\theta_R = 0$.

2. Множина точок (векторів) площини $\mathbf{R}^2$ при $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda x = (\lambda x_1,\ \lambda x_2),\ \theta_{\mathbf{R}^2} = (0,0).$$

3. Множина точок (векторів) тривимірного простору $\mathbf{R}^3$.

4. Множина $\mathbf{R}^n$, що складається з елементів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbf{R}$, причому

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\quad \theta_{\mathbf{R}^n} = (0,0, \dots, 0).$$

5. Множина многочленів степеня, не вище заданого (n).

Наведемо приклади множин, які не є лінійними просторами.

1. Множина многочленів заданого степеня, наприклад n; сумою таких многочленів можуть бути многочлени нижчого степеня.

2. Множина точок площини, з яких вилучено точки $(0,x_2)\ \forall\ x_2$; сумою двох таких елементів може бути елемент $(0, x_2)$.

Наведемо ще таке означення.

О. *Лінійний простір E називається евклідовим, якщо двом елементам x, y цього простору відповідає дійсне число, яке називається скалярним добутком x і y (пишуть xy або (x, y)), причому*

1) $xy = yx$;

2) $(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y$;

3) $\lambda xy = \lambda(xy),\ \forall\ \lambda \in \mathbf{R}$;

4) $xx = \begin{cases} c \neq 0, & \text{якщо } x \neq \theta_E, \\ 0, & \text{якщо } x = \theta_E. \end{cases}$

Пропонуємо самостійно визначити, які з наведених вище лінійних просторів є евклідовими.

РОЗДІЛ 2

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Аналітична геометрія — розділ математики, в якому геометричні задачі розв'язуються засобами алгебри на основі методу координат і введення довільної (змінної) точки об'єкта, запропонованих Р.Декартом.

2.1.1. Поняття про рівняння лінії на площині. Пряма

Розглянемо кілька рівнянь з двома невідомими: 1) $y + 2x + 1 = 0$, 2) $y = x^2 - 1$, 3) $x^2 + y^2 = 0$, 4) $x^2 + y^2 = -1$. Рівнянням 1) і 2) відповідають лінії (пряма і парабола), рівнянню 3) відповідає тільки одна точка, а рівнянню 4) — жодної точки. Домовимося, що у випадку 3) відповідна лінія вироджується в точку, а рівнянню 4) відповідає уявна лінія. Звідси робимо висновок: *між множинами дійсних чи уявних ліній площини і множиною рівнянь з двома невідомими існує взаємно однозначна відповідність.*

О. *Рівняння $F(x,y) = 0$ називається рівнянням даної лінії, якщо його задовольняють усі точки, що належать даній лінії, і не задовольняє жодна точка, що не належить даній лінії.*

Найпростішою у певному розумінні лінією є пряма. Орієнтацію прямої L на площині можна задати за допомогою *нормального вектора* (довільного вектора, перпендикулярного до L). При цьому таку ж орієнтацію має множина всіх прямих, паралельних L. Щоб з цієї множини виділити L, необхідно вказати ще точку $M_0 \in L$. Отже, нормальний вектор і точка визначають конкретну пряму і навпаки, для довільної прямої можна вказати хоч одну точку, через яку проходить пряма і нормальний до неї вектор. Ці міркування істотно використовуються при доведенні основної теореми про пряму на площині.

Т. *Між множиною всіх прямих площини і множиною всіх рівнянь першого степеня з двома невідомими існує взаємно однозначна відповідність.*

■ Нехай $\overline{n} = (A,B) \perp L$, $M_0(x_0,y_0) \in L$.

Візьмемо на прямій точку $M(x,y)$ і побудуємо вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (рис. 2.1). Твердження «задано пряму» означає, що $M \in L$. Скориставшись ознакою перпендикулярності векторів, дістанемо

$$(M \in L) \Leftrightarrow (\overline{M_0M} \perp \overline{n}) \Leftrightarrow (\overline{n}\,\overline{M_0M} = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0) \Leftrightarrow (Ax + By +$$

$$+ (-Ax_0 - By_0) = 0) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ C = -Ax_0 - By_0 \end{cases}\right).$$

Рівняння

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.1)$$

називають *загальним рівнянням* прямої на площині.

Для того щоб дістати рівняння прямої L, досить знайти залежність координат змінної її точки (*поточних координат*) з відомою числовою інформацією стосовно прямої L за допомогою відомих властивостей прямої, наприклад $\overline{n} \perp L$.

Дослідимо рівняння (2.1). Використаємо той факт, що $\overline{n} = (A, B) \perp L$. Маємо:

1) при $C = 0$ рівняння (2.1) має вид $Ax + By = 0$ і $O(0, 0) \in L$, тобто *пряма проходить через початок координат*;

2) нехай $B = 0$; тоді $\overline{n} = (A, 0) \perp Oy$. Отже, $L \parallel Oy$, а рівняння (2.1) набирає виду $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A}$. Позначимо $-\frac{C}{A} = x_0$. Тоді $x = x_0$ — *рівняння прямої, паралельної осі OX*;

3) нехай $B = 0$, $C = 0$. Комбінуючи пп. 1) і 2), маємо, що $x = 0$ — *рівняння осі Oy*.

Якщо $A = 0$ або $A = 0$ і $C = 0$, то матимемо випадки, аналогічні пп. 2) і 3).

Нехай в (2.1) $B \neq 0$. Поділивши (2.1) на B, дістанемо

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням $y = kx + b$, знаходимо $-\frac{A}{B} = k$, $b = -\frac{C}{B}$.

Розглянемо інші види рівнянь.

О. *Пучком прямих з центром у даній точці називається множина всіх прямих площини, що проходять через цю точку.*

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — центр пучка (рис. 2.2). Рівняння довільної прямої L даного пучка має вид (див. доведення попередньої теореми)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Якщо $B \neq 0 (L \not\parallel Oy)$, то $y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0)$, або

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.2}$$

Якщо $B = 0$, то $x - x_0 = 0$, або $x = x_0$.

Сукупність рівнянь

$$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0); \\ x = x_0 \end{cases}$$

називають рівняннями пучка прямих. Рівняннями пучка часто називають тільки рівняння (2.2).

Нехай тепер $M_1(x_1, y_1) \in L$, $M_2(x_2, y_2) \in L$ (рис. 2.3), $M(x, y) \in L$ — довільна точка L. Складемо рівняння L. Побудуємо вектори $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$. Точка $M \in L$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{MM_1} \parallel \overline{M_2M_1}$, тобто коли

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.3}$$

Це і є шукане рівняння, яке називається рівнянням прямої, що проходить через дві точки.

Якщо маємо прямі, паралельні координатним осям, то все одно дістаємо рівняння прямої у вигляді (2.3). Для цього слід скористатися основною властивістю пропорції.

Нехай пряма L відтинає від координатних осей OX і OY відрізки з величинами a, b відповідно (рис. 2.4). Очевидно, що $A(a, 0) = L \cap OX$, $B(0, b) = L \cap OY$. Скориставшись (2.3), дістанемо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0. \tag{2.4}$$

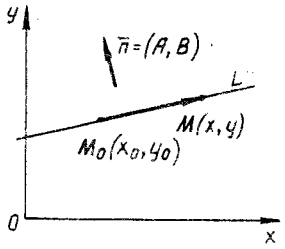


Рис. 2.1

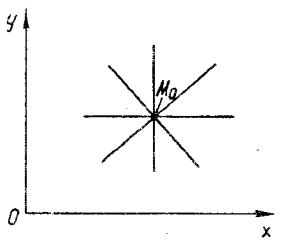


Рис. 2.2

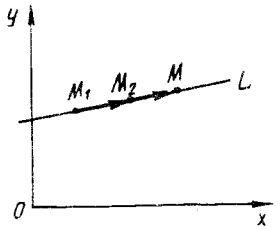


Рис. 2.3

Це рівняння називається *рівнянням прямої у відрізках.*

Розглянемо питання, пов'язані зі взаємним розміщенням двох прямих.

Нехай маємо дві прямі $y = k_1x + b_1 (L_1)$ і $y = k_2x + b_2 (L_2)$. Очевидно $0 \le \widehat{(L_1, L_2)} < \pi$ (рис. 2.5). Оскільки $k_1 = \tan\alpha_1$, $k_2 = \tan\alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, то

$$\tan\varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1\tan\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (2.5)$$

Для паралельних і взаємно перпендикулярних прямих $\tan\varphi = 0$ і $\tan\varphi = \infty$ (не існує), тобто $k_2 - k_1 = 0$ і $1 + k_1k_2 = 0$ відповідно. Отже, умови паралельності і перпендикулярності прямих відповідно такі:

$$k_2 = k_1 \quad \text{і} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (2.6)$$

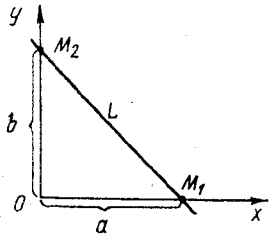


Рис. 2.4

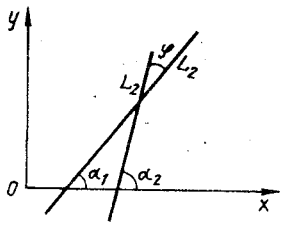


Рис. 2.5

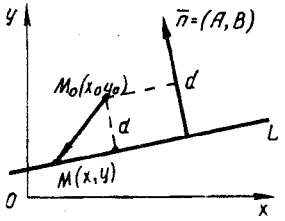


Рис. 2.6

П. 1. Знайти відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ (L).

Розв'язання. Побудуємо вектори $\bar{n} = (A, B) \perp L$ і $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, де M — довільна точка прямої. З рівняння заданої прямої маємо $C = -Ax - By$.

$$d(M_0, L) = |\text{np}_{\bar{n}}\overline{M_0M}| = \frac{|\bar{n}\,\overline{M_0M}|}{|\bar{n}|} =$$

$$\frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + (-Ax - By)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.7)$$

(Правильному тлумаченню розв'язання цього прикладу допоможе рис. 2.6.)

П. 2. Знайти точку Q, симетричну точці P (11, —11) відносно прямої, що проходить через точки $M_1(0, -1)$; $M_2(3, 1)$;

Розв'язання. Розв'яжемо задачу за такою схемою.

1. Складемо рівняння прямої L, що проходить через точки M_1 і M_2 (рис. 2.7). Скориставшись рівнянням (2.3), дістанемо

$$\frac{x - x_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{y - y_{M_2}}{y_{M_2} - y_{M_1}}.$$

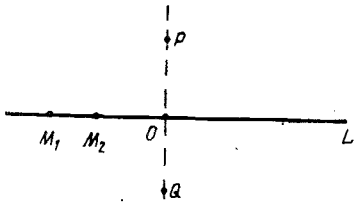


Рис. 2.7

Перевіримо, чи належить точка P прямій L. Якщо $P \in L$, то $P \equiv Q$ (задачу розв'язано). Якщо $P \notin L$, то переходимо до наступного пункту.

2. Тепер складемо рівняння прямої PQ у вигляді (2.2), тобто $y - y_P = k_{PQ}(x - x_P)$, заздалегідь знайшовши $k_{PQ} = -1/k_L$ (див. (2.6)).

3. Знайдемо проекцію P на L, тобто $O = PQ \cap L$.

4. Оскільки O ділить відрізок PQ навпіл, то згідно з (1.35) $x_0 = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_Q = 2x_0 - x_P$.

Аналогічно

$$y_Q = 2y_O - y_P.$$

Реалізуємо розроблену схему.

1. Рівняння L: $2x - 3y - 3 = 0$. Перевіримо, чи належить P прямій L. Маємо $2 \cdot 11 - 3(-11) - 3 \neq 0$. Отже, $P \notin L$. Переходимо до наступного пункту.

2. Знаходимо $k_L = \frac{2}{3}\left(k = -\frac{A}{B}\right)$, $k_{PQ} = -\frac{1}{k_L} = -\frac{3}{2}$. Рівняння PQ:

$$3x + 2y - 11 = 0.$$

3. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3 = 0; \\ 3x - 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Дістанемо точку $O(3, 1)$.

4. Тепер знаходимо точку Q: $Q(-5, 13)$.

Пряма — це алгебраїчна лінія першого порядку. Вона єдина представниця сім'ї таких ліній. Щодо алгебраїчних ліній другого порядку, то їх сім'я ширша, сюди входять коло, еліпс, гіпербола, парабола (не враховуючи вироджених ліній). Загальний вид лінії другого порядку такий:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

$$\{A, B, C, D, E, F\} \subset \mathbf{R}, \qquad (2.8)$$

де хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля.

2.1.2. Коло

О. *Коло — це множина точок M площини, рівновіддалених від даної точки M_0, яка називається центром; $d(M, M_0)$ називається радіусом кола.*

Складемо рівняння кола, якщо дано точку $M_0(x_0,y_0)$, $M(x, y)$, $|\overline{MM_0}| = R$. За означенням $|\overline{MM_0}| = R$, або $(MM_0)^2 = R^2$, звідки дістаємо канонічне*) рівняння кола (див. (1.33))

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{2.9}$$

Якщо $M_0 = (0,0)$, то рівняння (2.9) набирає вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Розкриємо дужки в (2.9) і зведемо його до вигляду (2.8). Маємо

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0.$$

Отже, ознаки, за якими із загального рівняння лінії другого порядку можна дістати рівняння кола, такі: $A = C$ і $B = 0$. Загальне рівняння кола зводиться до канонічного виду в результаті вилучення повних квадратів.

2.1.3. Еліпс

О. *Еліпс***) — це множина точок площини, яка в деякій прямокутній системі координат задовольняє рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \ b > 0. \tag{2.10}$$

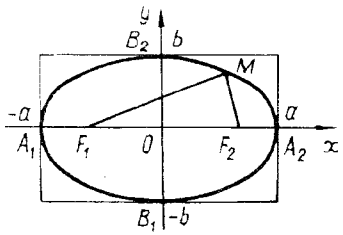


Рис. 2.8

Це канонічне рівняння еліпса. Форму еліпса можна дослідити засобами диференціального числення (це зроблено в п. 5.1.5).

Основна геометрична властивість еліпса: еліпс — це множина точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок площини, що називаються фокусами***), є сталою величиною.

■ Справді, нехай F_1 і F_2 — фокуси еліпса, $d(F_1, F_2) = 2C$, стала еліпса $2a$, $M(x, y)$ — змінна точка еліпса (рис. 2.8). Доведемо, що

$$d(M, F_1) + d(M,F_2) = 2a. \tag{2.11}$$

Маємо

$$d(M, F_1) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad d(M, F_2) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

*) Від грецьк. «канон» — правило, закон.
**) Від грецьк. «елепсіс» — нестача, недолік.
***) Від лат. focus — центр.

Підставимо ці вирази в (2.11). Виконавши відповідні дії і позначивши $a^2 - c^2 = b^2$, бо $a > c$, дістанемо рівняння (2.11). ■

(З приводу зображення еліпса див. п. 5.1.5.)

Розрізняють такі елементи еліпса: A_1, A_2, B_1, B_2 — його вершини, O — центр, A_1A_2 — велика і B_1B_2 — мала осі, $F_1F_2 = 2c$— фокусна відстань, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — ексцентриситет*), r_1r_2 — радіуси, $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальний параметр.

Значення ексцентриситета ε оцінює ступінь «сплющеності» еліпса. Якщо $a = b = R$, то при $\varepsilon = 0$ маємо коло, при $b = 0$, $\varepsilon = 1$— відрізок. Це випадки виродженого еліпса. В невироджених випадках $0 < \varepsilon < 1$.

Основну геометричну властивість еліпса використовують для його побудови за даними a і b. При цьому спочатку знаходять $c(c = \sqrt{a^2 - b^2})$. Беруть нерозтяжну нитку завдовжки $2a$, закріплюють її кінці на відстані $2c$. Натягнувши цю нитку вістрям олівця, ведуть олівцем по паперу. Траєкторія руху вістря олівця є еліпсом.

2.1.4. Гіпербола

Означення гіперболи**) аналогічне означенню еліпса, канонічне рівняння в даному випадку має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{2.12}$$

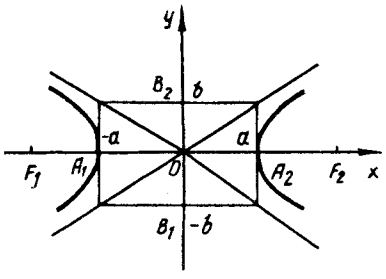


Рис. 2.9

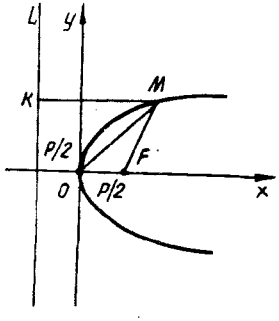


Рис. 2.10

У формулюванні основної геометричної властивості гіперболи треба слово «сума» (у випадку еліпса) замінити словами «модуль різниці». Цю властивість можна перевірити так само, як і для еліпса, прийнявши до уваги позначення (рис. 2.9): $c^2 - a^2 = b^2$, оскільки $c > a$.

*) Від англ. eccentricity — неврівноваженість.
**) Від грецьк. «гіперболе» — перебільшення.

Розрізняють такі елементи гіперболи: A_1, A_2 — дійсні, B_1, B_2 — уявні вершини (гіпербола не перетинається з віссю OY, при $x = 0$ маємо $y^2 = -b^2$); A_1A_2 (дійсна), B_1B_2 (уявна) осі еліпса, F_1F_2 — фокусна відстань, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — ексцентриситет, причому $\varepsilon > 1$, і, нарешті, прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називають асимптотами*) (їхні рівняння виведено в п. 5.1.5).

О. *Асимптота даної кривої — це така пряма, відстань до якої від змінної точки кривої прямує до нуля по мірі віддалення точки кривої в нескінченність.*

2.1.5. Парабола

Означимо параболу**) рівняннями (як і у випадку еліпса чи гіперболи)

$$y^2 = 2px, \quad x^2 = 2qy, \quad p \in \mathbf{R}, \quad q \in \mathbf{R}.$$

Основна геометрична властивість параболи: парабола — це множина точок, рівновіддалених від деякої точки, яка називається фокусом, і деякої прямої, яка називається директрисою***).

Справді, нехай відстань від фокуса до директриси параболи дорівнює p (рис. 2.10), $M(x, y)$ — змінна точка параболи. Маємо

$$MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \quad d(M, L) = MK = x + \frac{p}{2}.$$

Рівність $MF = MK$ можна записати у вигляді $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$, звідки дістаємо рівняння $y^2 = 2px$, що визначає параболу.

Вироджені випадки параболи дістаємо, коли вітки її «складаються» в невід'ємну ($p > 0$) або недодатну ($p < 0$) частину осі чи «розгинаються» до осі Oy.

2.1.6. Геометрична й механічна спорідненості ліній другого порядку

Ще старогрецькому математикові Аполлонію (260—170 р. до н.е.) було відомо, що всі лінії другого порядку (разом з виродженими) можна дістати при перетині конічної поверхні площиною.

Справді, перетинаючи площиною конічну поверхню різними способами, можна дістати (рис. 2.11):

точку 1 (вироджене коло, $R = 0$) — площина проходить через вершину конуса перпендикулярно до його осі;

*) Від грецьк. «асимптотос» — та, що не збігається.

**) Від грецьк. «парабола» — зіставлення, наближення, порівняння.

***) Від англ. direct, direction — вказувати напрям.

пару прямих 2, які перетинаються, або асимптот (вироджена гіпербола) — площина проходить через вісь конуса;

параболу 3 — площина паралельна твірній конуса;

гіперболу 4 — площина паралельна осі конуса;

коло 5 — площина перпендикулярна до осі конуса і не проходить через початок координат;

еліпс 6 — площина перетинає вісь конуса під кутом, меншим від кута між віссю і твірною конуса.

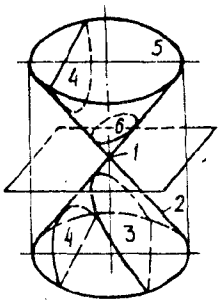


Рис. 2.11

Розглядаючи задачу про рух небесних тіл, І.Ньютон*) установив, що в центральному полі тяжіння залежно від швидкості тіло рухається по колу, еліпсу, параболі чи гіперболі (в порядку зростання швидкості), причому всі траєкторії є розв'язками одного й того самого рівняння.

Лінії другого порядку мають і так звану «оптичну» властивість, згідно з якою світловий чи інший промінь, що виходить з одного фокуса, йде вздовж радіуса, відбивається від поверхні дзеркала, яка має твірною лінію другого порядку, і йде в напрямі іншого радіуса. У випадку еліпса далі промінь попадає в другий фокус.

Цей випадок був реалізований одним з китайських імператорів, який полюбляв підслуховувати плітки своїх підлеглих. Вони сиділи в альтанці, розташованій в одному фокусі еліптичної стіни, що відгороджувала сад, а імператор сидів у іншій альтанці, розташованій у другому фокусі.

У випадку параболи, відбившись від дзеркала, промені паралельним пучком ідуть у нескінченність. Цей випадок реалізується в прожекторах і дзеркальних телескопах.

У випадку гіперболи промені утворюють пучок, що розсіюється, і не має практичного інтересу. З цієї точки зору роман О.М.Толстого, очевидно, повинен мати назву «Параболоїд інженера Гаріна».

2.1.7. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного виду

У випадку кола досить легко звести загальне рівняння ліній другого порядку (2.8) до канонічного виду. Розглянемо інші конкретні випадки такого зведення і сформулюємо загальну його процедуру.

Зведення до канонічного виду рівняння параболи

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2.13}$$

Виконаємо паралельне перенесення осей за формулами $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. Маємо (рис. 2.12)

*) І.Ньютон (1643—1727) — англійський математик, механік.

$$y' + y_0 = a(x' + x_0) + b(x' + x_0) + c.$$

Звідси

$$y' - y_0 - ax_0^2 - bx_0 - c = ax'^2 + x'(2ax_0 + b).$$

Точка (x_0, y_0) була довільною. Тепер виберемо її так, щоб

$$\begin{cases} 2ax_0 + b = 0; \\ y_0 + ax_0^2 + bx_0 + c = 0. \end{cases}$$

Тоді $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. При цих значеннях x_0 і y_0 рівняння (2.13) набирає вигляду $y' = ax'^2$. Це канонічне рівняння параболи. В результаті такого перетворення рівняння (2.13) вдалося позбутися першого степеня змінної та вільного члена.

Зведення до канонічного виду рівняння гіперболи

$$xy = k. \tag{2.14}$$

Виконаємо поворот системи координат на кут α за формулами:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\ ,\quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Маємо (рис. 2.13)

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\,(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) = k,$$

звідки

$$\frac{1}{2}x'^2\sin 2\alpha + x'y'\cos 2\alpha - \frac{1}{2}y'^2\sin 2\alpha = k.$$

Замість довільного α візьмемо $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Дістанемо рівняння

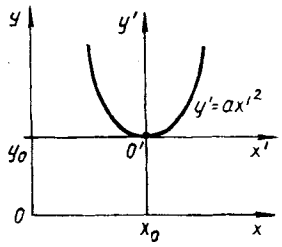


Рис. 2.12

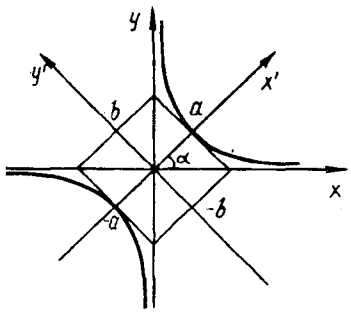


Рис. 2.13

$$\frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1.$$

Це канонічне рівняння рівнобічної ($a = b = \sqrt{2|k|}$) гіперболи, що перетинає Ox при $k > 0$ і Oy при $k < 0$. В результаті такого перетворення в рівнянні (2.14) вдалося позбутися добутку координат.

Виконуючи послідовно зазначені перетворення, можна загальне рівняння (2.8) звести до одного з канонічних рівнянь ліній другого порядку. Порядок виконання цих операцій істотний.

Тепер розглянемо питання, як за загальним рівнянням (2.8) встановити тип лінії.

Урахуємо, що при таких перетвореннях, як поворот чи паралельне перенесення системи координат, сама лінія не змінюється. Звідси випливає, що коефіцієнти в (2.8) перебувають у співвідношеннях, які не залежать від виконаних перетворень, тобто є інваріантами*). Таких інваріантів три:

$$S = A + C,\ \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,\ \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Тепер лінія за загальним рівнянням визначається так.

Якщо $\delta > 0$, то маємо еліпс при $\Delta S < 0$, уявний еліпс при $\Delta S > 0$, точку (вироджений еліпс) при $\Delta = 0$. Якщо $\delta < 0$, то маємо гіперболу при $\Delta \neq 0$; пару прямих, що перетинаються (вироджену гіперболу) при $\Delta = 0$.

Якщо $\delta = 0$, то маємо параболу при $\Delta \neq 0$ і пару прямих при $\Delta = 0$.

2.1.8. Полярна система координат

Прямокутна система координат на площині не є єдиною. Серед інших систем на площині досить поширеною є полярна.

Полярна система координат на площині вводиться за допомогою полярної осі (початок осі називається полюсом) та кута повороту цієї осі (додатним вважається напрям проти руху стрілки годинника) (рис. 2.14). Координати точки в такій системі мають вид $M(\rho, \varphi)$. Якщо не обмежувати значень ρ і φ, то точки (ρ, φ), $(\rho, \varphi + 2\pi)$, $(-\rho, \varphi + \pi)$ збігаються, тобто між множиною точок площини і множиною пар чисел (ρ, φ) немає взаємно однозначної відповідності. Для того щоб така відповідність існувала, треба розглядати лише так звані *головні значення полярних координат*, тобто $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. (Далі розглядатимемо саме ці значення.)

*) Від лат. invariantis — незмінний.

З'ясуємо залежність між полярними та прямокутними координатами. Нехай ці дві системи суміщені, як показано на рис. 2.15. Для координат (x, y) і (ρ, φ) точки M маємо

$$x = \rho \cos\varphi\ ,\quad y = \rho \sin\varphi. \tag{2.15}$$

Формули (2.15) реалізують перехід $(\rho, \varphi) \to (x, y)$. Згідно з рис. 2.15

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\quad \tan\varphi = \frac{y}{x}\ . \tag{2.16}$$

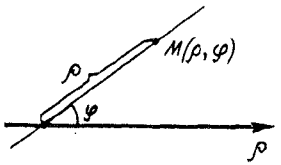


Рис. 2.14

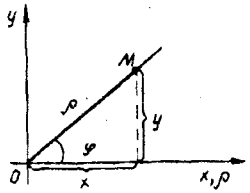


Рис. 2.15

Щоб знайти φ в (2.16), врахуємо збіг знаків x і $\cos\varphi$, а також y і $\sin\varphi$. Тоді матимемо перехід $(x, y) \to (\rho, \varphi)$.

Розглянемо в полярних координатах рівняння деяких ліній.

Промінь. Нехай промінь виходить з полюса і утворює кут φ_0 з віссю. Тоді його рівняння набирає вигляду (див. рис. 2.14)

$$\varphi = \varphi_0.$$

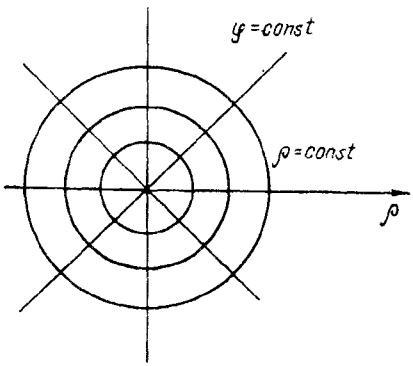


Рис. 2.16

Коло. Нехай центр кола радіуса R лежить у полюсі. Рівняння кола

$$\rho = R.$$

Останні два рівняння описують координатну сітку (павутиння) полярної системи ($\varphi = \text{const}, \rho = \text{const}$ (рис. 2.16)).

*Спіраль Архімеда**). Так називають лінію, рівняння якої

$$\rho = a\varphi\ ,\quad a \in R\ ,\quad a \neq 0,$$

(аналог рівняння $y = kx$ в прямокутній системі координат).

Оскільки $\rho(0) = 0, \rho(2\pi) = 2\pi a$, то лінія не замкнена.

Зазначимо, що

*) Архімед (287—212 до н.е.) — грецький математик.

$$\Delta\rho = \rho(\varphi + 2\pi) - \rho(\varphi) = (\varphi + 2\pi)a - \varphi a = 2\pi a.$$

Остання різниця не залежить від φ. Отже, маючи виток лінії для $0 \le \varphi \le 2\pi$, можна побудувати всю лінію (рис. 2.17).

З механічної точки зору, спіраль Архімеда можна тлумачити як траєкторію точки при суперпозиції двох рухів, а саме, рівномірного прямолінійного вздовж осі і рівномірного обертання осі навколо початку координат.

Логарифмічна спіраль. Це лінія, рівняння якої

$$\rho = ae^{b\varphi}, \quad a \in \mathbf{R}, \ b \in \mathbf{R}.$$

Зазначимо, що $\rho(0) = a$. Один з можливих варіантів лінії показано на рис. 2.18.

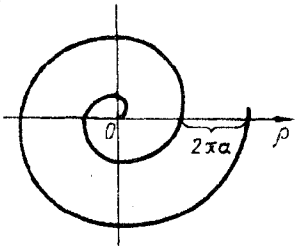


Рис. 2.17

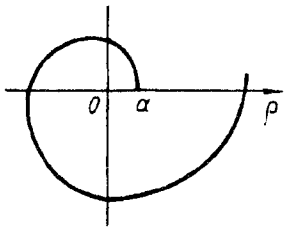


Рис. 2.18

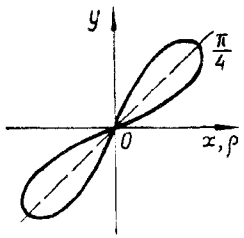


Рис. 2.19

Властивістю логарифмічної спіралі є те, що вона перетинає всі свої радіуси-вектори під одним і тим самим кутом. Це дає змогу зберігати сталий кут різання для ножів, які обертаються і мають форму дуги логарифмічної спіралі. Форму логарифмічної спіралі мають зуби циркулярних (кругових) пилок, зуби різальних частин гірничих комбайнів, труби, що підводять потік води до турбін, і т.д.

Кардіоїда[*] — це лінія, рівняння якої

$$\rho = a(1 \pm \cos\varphi) \text{ або } \rho = a(1 \pm \sin\varphi), \ a > 0.$$

З механічної точки зору кардіоїду можна тлумачити як траєкторію точки, зафіксованої на крузі, який котиться по іншому, нерухомому крузі такого самого радіуса (параметр a — це діаметр цих кругів).

Пропонуємо самостійно побудувати одну з кардіоїд, надаючи аргументу значення через певний проміжок, наприклад через $\frac{\pi}{2}$ чи $\frac{\pi}{4}$, а також користуючись властивостями синуса чи косинуса.

Лемніската[**] *Бернуллі*[***] — це лінія, рівняння якої

---

[*] Від грецьк. «кардіа» — серце.

[**] Від лат. limniscata — прикрашена стрічками.

[***] Я.Бернуллі (1654—1705) — швейцарський математик.

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad \text{або} \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy, \quad a > 0.$$

Лінію легше будувати в полярних координатах за формулами (2.15). Маємо $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ або $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$. Насправді під лемніскатою Бернуллі розуміють лінії $\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$ або $\rho = \pm a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $a > 0$. При цьому відповідно $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ (рис. 2.19).

Розглянуті нами лінії можна спостерігати і в рослинному світі. Так, насіння в головці соняшника викладене за спіраллю Архімеда, листя латаття має форму кардіоїди, форма пелюсток окремих квіток близька до лемніскати. Ціла наука — біоніка — вивчає будову організмів, рослин для створення машин, приладів, механізмів, певні дані яких близькі до характеристик згаданих біологічних об'єктів.

2.1.9. Параметричні рівняння ліній

Розглянемо вектор з проекціями, які залежать від деякого параметра

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}. \qquad (2.17)$$

Вираз (2.17) можна подати у вигляді

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad (2.18)$$

Якщо змінювати t, то кінець вектора $\bar{r}(t)$ опише деяку лінію. Рівняння (2.17) називають векторно-параметричними, а (2.18) — параметричними рівняннями цієї лінії (рис. 2.20).

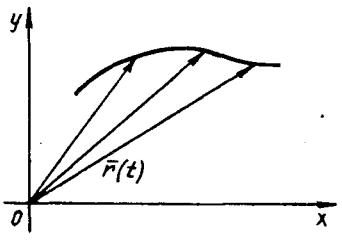


Рис. 2.20

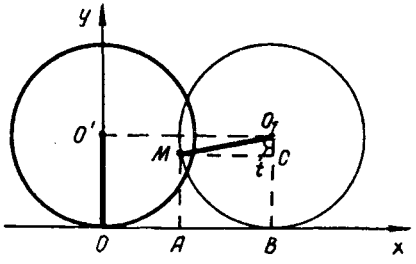


Рис. 2.21

Розглянемо деякі приклади.

1. *Еліпс* можна подати рівняннями

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Справді, поділимо останні рівняння на a і b відповідно, піднесемо до квадрата і додамо. В результаті параметр t буде вилучено і здобуте

рівняння буде канонічним рівнянням еліпса. Очевидно, що параметричні рівняння кола набирають вигляду

$$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

2. *Циклоїда*[*)] — це траєкторія точки, зафіксованої на колі, яке котиться вздовж прямої без ковзання.

Якщо коло радіуса R (рис. 2.21) обернулося на кут t, то для точки $M(x, y)$ циклоїди маємо $x = OA$, $OA = OB - AB = OB - MC$, $AM = O_1B - O_1C$. З трикутника MO_1C знаходимо $MC = R\sin t$, $O_1C = R\cos t$. Далі дістаємо $OB = MB = Rt$.

Остаточно

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t); \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

Першу арку циклоїди зображено на рис. 2.22.

3. *Гвинтова лінія* — це траєкторія точки, яка рівномірно рухається по циліндричній поверхні паралельно осі, а поверхня рівномірно обертається відносно осі.

Нехай радіус поверхні R, лінійна й кутова швидкості, звичайно, сталі і дорівнюють відповідно v і ω. Згідно з рис. 2.23 маємо

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t\ ; \\ y = R\sin\omega t\ ; \\ z = vt\ . \end{cases}$$

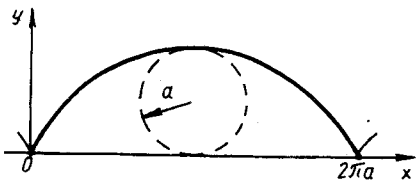


Рис. 2.22

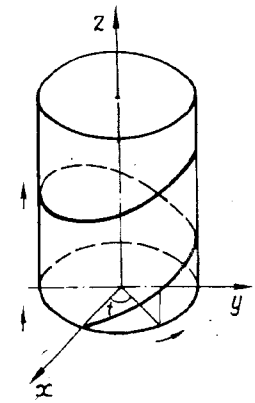


Рис. 2.23

*) Від грецьк. «циклоїдос» — колоподібний, круглий.

2.2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ R^3

2.2.1. Площина

Теорію площини в тривимірному просторі можна побудувати, використовуючи відповідні аналогії для прямої на площині. Як і у випадку прямої, *нормальним вектором площини називається будь-який вектор, перпендикулярний до площини.*

Основна теорема про площину в $\mathbf{R}^3$.

Т. *Між множиною всіх площин* $\mathbf{R}^3$ *і множиною всіх рівнянь першого степеня з трьома невідомими існує взаємно однозначна відповідність.*

Доведення теореми аналогічне доведенню основної теореми про пряму в $\mathbf{R}^2$. Зазначимо тільки, що коли площина P зафіксована нормальним вектором $\overline{n} = (A, B, C)$ і точкою $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ (рис. 2.24), то дістанемо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{2.19}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2.20}$$

Рівняння (2.20) називають загальним рівнянням площини.

Дослідимо рівняння (2.20) (див. (2.11)).

1. Якщо $D = 0$, то $Ax + By + Cz = 0$ і $O(0, 0) \in P$.
2. Якщо $A = 0$, то $\overline{n} = (0, B, C) \perp P$ і $P \parallel Ox$.
3. Якщо $A = 0$, $D = 0$, то (комбінуємо 1 і 2) $Ox \subset P$.
4. Якщо $A = 0$, $B = 0$, то $\overline{n} = (0, 0, C) \perp P$ і $P \parallel xOy$.
5. Якщо $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, то (комбінуємо 1 і 4) $P \equiv xOy$.

Решту випадків можна розглянути аналогічно.

Нехай тепер площина P відтинає від координатних осей Ox, Oy, Oz відрізки з величинами відповідно a, b, і c, тобто проходить через точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ (рис. 2.25). Оскільки при цьому $D \neq 0 (0,0, 0) \notin P)$, то після ділення обох частин рівняння (2.20) на D дістанемо

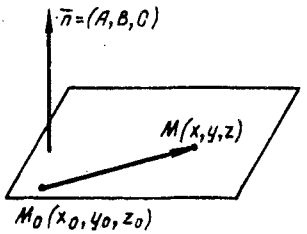


Рис. 2.24

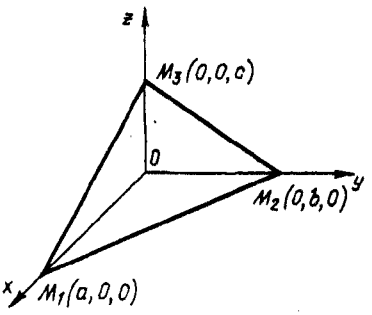


Рис. 2.25

$$\frac{x}{-A/D} + \frac{y}{-B/D} + \frac{z}{-C/D} = 1.$$

Через те що $M_1(a, 0, 0) \in P$, то $\frac{a}{-A/D} = 1$, звідки $a = -\frac{A}{D}$. Аналогічно міркуємо щодо точок M_2 і M_3. В результаті маємо *рівняння площини у відрізках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

П. 1. Скласти рівняння площини P, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Розв'язання. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка P. Побудуємо вектори

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1).$$

Те, що точка M лежить у площині P, рівнозначно компланарності побудованих трьох векторів. Застосувавши умови компланарності векторів, дістанемо шукане рівняння:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Можна було також використати рівняння (2.19), де $\bar{n} \parallel (\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3})$, а (x_0, y_0, z_0) — будь-яка з даних точок.

П. 2. Знайти відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини P, рівняння якої $Ax + By + Cz + D = 0$.

Розв'язання. Міркуючи так само, як і в задачі про відстань від точки до прямої на площині, та використовуючи рис. 2.26, знаходимо (пор. з (2.7)):

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

П. 3. Знайти кут між двома площинами.

Розв'язання. Нехай маємо дві площини P_1, P_2,

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

і

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Очевидно, що $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp P_1$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp P_2$. Істотно вважати, що $\varphi = (P_1 \hat{} P_2) \overset{\text{def}}{=} (\bar{n}_1 \hat{} \bar{n}_2)$, а отже,

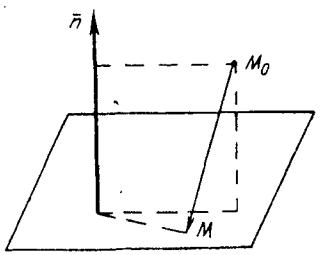


Рис. 2.26

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1\,\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\,|\bar{n}_2|},$$

тобто

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Перевірка умов паралельності чи перпендикулярності площин тепер зводиться до перевірки відповідних умов для їхніх нормальних векторів.

2.2.2. Пряма в R^3

Пряму в просторі можна задати як перетин двох непаралельних площин, тобто СЛАР-2

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

за умови, що $(A_1, B_1, C_1) \not\parallel (A_2, B_2, C_2)$. Звичайно, ту саму пряму можна задати й іншою парою площин.

Такі рівняння називають *загальними*. Розглянемо інші рівняння, причому в деяких випадках застосовуватимемо поняття *напрямного вектора*, тобто довільного ненульового вектора, колінеарного прямій.

Запишемо формулу, яка виражає шлях, пройдений точкою під час рівномірного прямолінійного руху:

$$\bar{s} = \bar{s}_0 + \bar{v}t. \tag{2.22}$$

Тут $\bar{s} = (x, y, z)$ — шуканий шлях, $\bar{s}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — початковий шлях, $\bar{v} = (a, b, c)$ — швидкість точки $(\bar{v} \parallel \bar{s},\ \bar{v} \parallel \bar{s}_0)$, t — час.

Для (2.22) маємо

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (at, bt, ct),$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + at; \\ y = y_0 + bt; \\ z = z_0 + ct. \end{cases} \tag{2.23}$$

Рівняння (2.23) називають *параметричними*. Тут напрямним вектором є вектор швидкості точки, траєкторію якої описує дана пряма.

Вилучаючи t з (2.23), маємо

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{2.24}$$

— *канонічні рівняння прямої.*

Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L$. Оскільки $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \parallel L$, то, взявши вектор $\overline{M_1M_2}$ за напрямний для L, з (2.24) дістаємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

— рівняння прямої, яка *проходить через дві точки.*

Подвійну рівність (2.24) можна розуміти, зокрема, так:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}; \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c}. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} bx - ay + (y_0a - x_0b) = 0; \\ cx - az + (z_0a - x_0c) = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Кожне рівняння з (2.25) є рівнянням площини, паралельної координатним осям Oz і Oy. Отже, можна вважати, що канонічні рівняння (2.24), як і загальні (2.21), визначають пряму в просторі як перетин двох площин, тільки не площин загального положення, як у (2.21), а площин, паралельних координатним осям.

Якщо маємо дві прямі L_1 і L_2 з напрямними векторами $\bar{s}_1 \parallel L_1$ і $\bar{s}_2 \parallel L_2$, то кут між прямими визначають так:

$$(\widehat{L_1, L_2}) \overset{\text{def}}{=} (\widehat{\bar{s}_1, \bar{s}_2}).$$

2.2.3. Площина і пряма в $\mathbf{R}^3$

Розглянемо ряд комбінованих прикладів на пряму L і площину P. Вважатимемо, що пряму задано параметричними рівняннями, а площину — загальними рівняннями, причому

$$(x_0, y_0, z_0) \in L, \quad \bar{s} = (a, b, c) \parallel L, \quad \bar{n} = (A, B, C) \perp P.$$

П. 1. Знайти кут між прямою і площиною.

Оскільки (рис. 2.27)

$$\varphi = (\widehat{L, P}) = (L, \widehat{\text{np}_P L}),$$

а $\cos(\widehat{\bar{s}, \bar{n}}) = \cos(\varphi + \dfrac{\pi}{2}) = \sin\varphi$,

то

$$\sin\varphi = \frac{\bar{s} \cdot \bar{n}}{|\bar{s}| \cdot |\bar{n}|}.$$

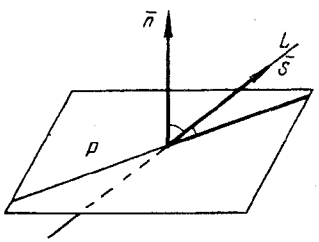


Рис. 2.27

П. 2. Знайти точку перетину прямої і площини.

Для знаходження такої точки складемо систему з рівнянь (2.20) і (2.23). Підставивши значення x, y, z з (2.23) в (2.20), дістанемо t_0, що відповідає точці $M_1 = L \cap P$, а за (2.23) встановимо її координати.

П. 3. Впевнитись, що задані прямі L_1 і L_2 паралельні, і знайти відстань між ними:

$$L_1: \begin{cases} x + y - \frac{z}{2} - 5 = 0; \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = 3t - 7; \\ y = -t + 5; \\ z = 4t + 9. \end{cases}$$

Алгоритм розв'язання задачі.

1. Знайдемо $\bar{s}_1$ з умови $\bar{s}_1 \parallel (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)$, де $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ — нормальні вектори площин, які утворюють L_1. Якщо $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2$, то переходимо до п.2. Очевидно, що $\bar{s}_2 = (3, -1, 4)$.

2. Виберемо довільну точку $M_1 \in L$.

3. Проведемо площину P, яка задовольняє умови: $M \in P$, $P \perp L_2$; отже, $\bar{n} = \bar{s}_2$.

4. Перетнемо L_1 і L_2 перпендикулярною до них площиною і знайдемо $O = P \cap L_2$.

5. Знайдемо $d(L_1, L_2) = d(M, 0)$.

Реалізація алгоритму.

1. Оскільки $\bar{n}_1 = (1, 1, -\frac{1}{2}) \perp P_1$, $\bar{n}_2 = (1, -1, -1) \perp P_2$ і $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= -\frac{3}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} - 2\bar{k}$, то $\bar{s}_1 = (3, -1, 4)$. Маємо $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$. Переходимо до п. 2.

2. Нехай для L_1 $x = 0$. Тоді

$$\begin{cases} y - \frac{z}{2} = 5; \\ -y - z = 22. \end{cases}$$

Звідси $z = -18$, $y = -4$, тобто $M(0, -4, 18) \in L_1$.

3. Скористаємося рівнянням $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Маємо $3(x - 0) + (-1)(y + 4) + 4(z + 18) = 0$, або $3x - y + 4z + 68 = 0$. Дістали рівняння площини P.

4. Знайдемо точку 0. Використаємо систему

$$\begin{cases} 3x - y + 4z + 68 = 0; \\ x = 3t - 7; \\ y = -t + 5; \\ z = 4t + 9. \end{cases}$$

Спочатку маємо $t = -3$, потім $x = -16$, $y = 8$, $z = -3$. Отже, $O(-16, 8, -3)$.

5. $d(M,O) = \sqrt{(-16 - 0)^2 + (8 + 4)^2 + (-3 + 18)^2} = 25$.

2.2.4. Сфера та інші поверхні

О. *Сфера — це множина точок з* $\mathbf{R}^3$, *рівновіддалених від даної точки, яка називається центром.*

Якщо $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — центр сфери, $M(x, y, z)$ — її змінна точка, а відстань $MM_0 = R$, то з рівності $(MM_0)^2 = R^2$ дістаємо канонічне рівняння сфери:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 .$$

Якщо центром сфери є точка $M_0(0, 0, 0)$, то маємо

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Це рівняння сфери найпростіше з канонічних рівнянь.

Перейдемо тепер до розгляду інших поверхонь. Задаватимемо їх канонічними рівняннями, а для побудови образу відповідного рівняння застосуємо метод «поперечних перетинів». Суть його полягає в тому, що форма поверхні визначається множиною ліній у просторі, отриманих в результаті перетину даної поверхні координатними площинами, а якщо треба, то множиною площин, паралельних координатним. У деяких випадках дослідження буде детальним, а в деяких дамо тільки остаточні результати. Вважатимемо, що всі параметри додатні.

Еліпсоїд — це поверхня, канонічне рівняння якої

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

де a, b, c називають півосями еліпсоїда.

Розглянемо перетини еліпсоїда площинами $z = h$, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \\ z = h. \end{cases}$$

Звідси

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1 ,$$

де $a^* = a\sqrt{1 - h^2/c^2}$, $b^* = b\sqrt{1 - h^2/c^2}$.

Якщо $|h| < c$, то останні рівняння — це рівняння еліпсів, які при $|h| = c$ вироджуються в точку.

Якщо $|h| > c$, то площини не перетинають поверхню.

Аналогічно можна розглянути й перетини $x = h$, $y = h$ і за множиною всіх перетинів встановити форму поверхні (рис. 2.28).

Подамо канонічні рівняння деяких алгебраїчних поверхонь другого порядку.

Однопорожнинний гіперболоїд (рис. 2.29)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Двопорожнинний гіперболоїд (рис. 2.30)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Еліптичний параболоїд (рис. 2.31)

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

Гіперболічний параболоїд (рис. 2.32)

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}.$$

Конус (рис. 2.33)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

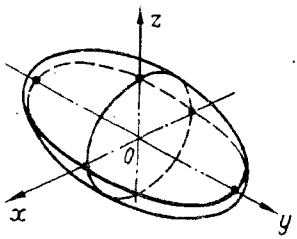


Рис. 2.28

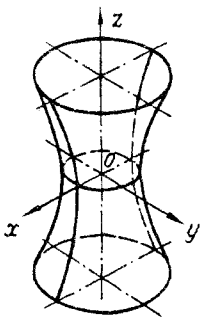


Рис. 2.29

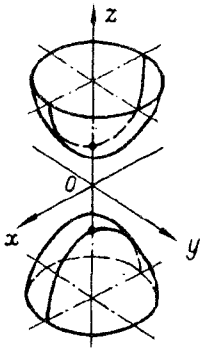


Рис. 2.30

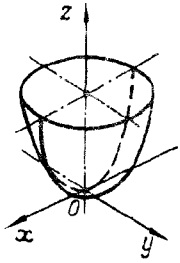


Рис. 2.31

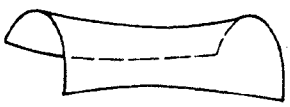


Рис. 2.32

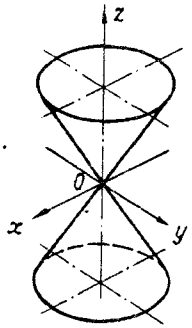


Рис. 2.33

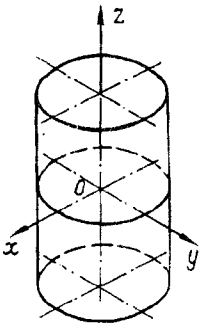


Рис. 2.34

Рівняння виду $F(x, y) = 0$, розглянуті в $\mathbf{R}^3$, задають циліндричні поверхні, причому рівняння $F(x, y) = 0$ на площині визначає напрямну поверхні, твірні якої паралельні осі Oz. Наприклад, *еліптичний циліндр* (рис. 2.34)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \quad (x, y) \in \mathbf{R}^3.$$

Не тільки циліндричні та конічні поверхні можна утворити за допомогою відповідного зміщення лінійних твірних. Це ж стосується й однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда.

Очевидно будь-яка пряма L

$$\begin{cases} z = A\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}}\right); \\ 1 = \frac{1}{A}\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) \end{cases}$$

лежить на гіперболічному параболоїді

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\ ,$$

оскільки кожна точка L задовольняє останнє рівняння. Помінявши знаки перед y у рівняннях L, можна дістати ще одну сім'ю ліній, що лежать на заданому параболоїді.

Поверхні, які мають такі властивості, називають лінійчатими. Лінійчаті поверхні, таким чином, конструюються з прямолінійних рейок. Цю властивість поверхонь використовують при конструюванні різних перекриттів, опор. Такі конструкції називають конструкціями Шухова (на честь відомого російського інженера). Це — покрівлі вокзалів, цирків, ринків, опори водогінних башт, антенних пристроїв тощо.

2.2.5. Квадратична форма та її зведення до канонічного виду

О. *Квадратичною формою кількох змінних називається многочлен, який містить тільки другі степені цих змінних та (чи) тільки їхні попарні добутки.*

Для двох і трьох змінних маємо зокрема (деякі коефіцієнти подвоєно для зручності)

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2;$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +$$

$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Тут сталі a_{ij} одночасно не всі дорівнюють нулю.

Для більшого числа змінних квадратичні форми визначаються аналогічно.

Для квадратичної форми трьох змінних введемо позначення $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$.

Маємо

$$F(x_1,x_2,x_3) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 +$$

$$+ a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3).$$

Ввівши віповідні матриці, надамо останній рівності такого вигляду

$$F = \|x_1, x_2, x_3\| \left\| \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \|x_1x_2x_3\| \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \right\| = X^TAX.$$

Отже, квадратична форма тепер набирає вигляду

$$F = X^TAX.$$

Розглянемо довільне лінійне перетворення, результатом якого є X. Нехай $X = BY$. Тоді

$$X^T = (BY)^T = Y^TB^T.$$

Отже,

$$F = X^TAX = Y^TB^TABY.$$

Позначивши $B^TAB = C$, дістанемо $F = Y^TCY$, тобто вид квадратичної форми при лінійному перетворенні матриці X. Оскільки

$$C^T = (B^TAB)^T = (AB)^T(B^T)^T = B^TA^TB = C,$$

то матриця C у цьому випадку симетрична.

Під *канонічним видом* квадратичної форми розуміють такий, який містить тільки квадрати змінних.

Наведемо спосіб зведення квадратичної форми до канонічного виду.

Якщо деяку симетричну матрицю A (як у випадку матриці квадратичної форми) розглядати як матрицю відповідного лінійного перетворення в деякому прямокутному базисі, то можна знайти прямокутний базис, складений з власних векторів матриці A.

Як було зазначено вище, перехід від одного прямокутного базису до іншого здійснюється за допомогою ортогональної матриці, а після перетворення

$$A^* = (B^T)^{-1} A B^T$$

в базисі з власних векторів матриця набирає діагонального виду. Для матриці квадратичної форми можна побудувати ортогональну матрицю B, для якої матриця $(B^T)^{-1} A B^T$ буде діагональною з власними значеннями A по діагоналі.

Отже, матрицю квадратичної форми можна звести до діагонального виду в базисі з власних векторів.

На основі цього твердження можна спрощувати рівняння ліній (чи поверхонь) другого порядку. Справді, нехай маємо лінію другого порядку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Тоді відповідну квадратичну форму

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

можна звести до канонічного виду

$$F(x^*, y^*) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2},$$

що істотно спрощує відповідне рівняння. Тут λ_1 і λ_2 — власні значення матриці квадратичної форми. Доведення цього факту опускаємо.

Нагадаємо, що в загальному рівнянні лінії другого порядку можна позбавитися перших степенів змінних за допомогою вдало виконаного паралельного перенесення системи координат за формулами (1.11).

РОЗДІЛ 3

ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ Й ФУНКЦІЇ

3.1.1. Способи задання функцій

У вступі вже було визначено функцію як відображення лінійної множини X на лінійну множину Y. Ці множини називають відповідно областю визначення і областю значень функції. Якщо елементи $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, то йдеться про функцію двох змінних. Аналогічно вводять і функції більшого числа змінних. Зазначимо, що при цьому Y є лінійною множиною.

Розглянемо спочатку функції однієї змінної. Для задання відображення X на Y існують різні способи, зокрема такі.

Аналітичний. Наприклад,

$$y = \sin\frac{x}{2}, \quad y = \begin{cases} 1 - x, & x < 0; \\ 1 + 2x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

У загальному випадку записують $y = f(x)$.

Графічний (відомий з аналітичної геометрії). Цим способом можна задавати функції лише однієї та двох змінних. Проте не всяку функцію навіть однієї змінної можна задати графічно. Так, графічно не можна задати функцію Діріхле*)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

Табличний. Наприклад,

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Алгоритмічний. Так задають функцію для роботи з нею на ЕОМ.

Описовий. Наприклад, функція «десяткові наближення до числа π» — це функція, що набуває значень 3, 3.1, 3.14, ...

*) П.Г.Л.Діріхле (1805—1859) — французький математик.

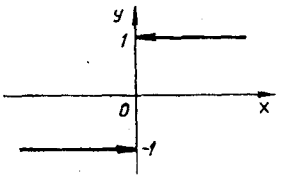


Рис. 3.1

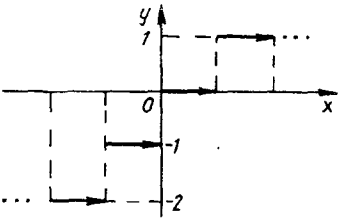


Рис. 3.2

П. 1. Функцію sign *) x (знак числа x) можна задати як аналітично

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

так і графічно (рис. 3.1).

П. 2. Функцію $f(x) = E^{**)}(x)$ — ціла частина числа x, що не перевищує x, можна задати графічно (рис. 3.2). Стрілка вказує точку, яка вилучається з графіка.

Розглянемо класифікацію функцій.

О. *Основними елементарними функціями є: степенева* ($f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$); *показникова* ($f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$); *логарифмічна* ($f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$,); *тригонометричні* ($f(x) = \sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$); *обернені тригонометричні* ($f(x) = \arcsin x$ та ін.).

О. Якщо $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$, *то функція* $F(t) = f(\varphi(t))$ *називається складеною (зложеною) або суперпозицією****) (*композицією*****) *функцій* f і φ.

О. *Елементарними функціями називають або основні елементарні, або ті, які утворено з них за допомогою скінченного числа арифметичних дій чи скінченного числа суперпозицій функцій.*

Наприклад, $f(x) = \sin x + x^3$, $f(x) = \sin^3 x^2$ — елементарні , а $f(x) = \operatorname{sign} x$, $f(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx + \ldots$ — неелементарні функції.

Функцію $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ (для позначення $P_n(x)$ істотно, що $a_n \neq 0$) називають алгебричною (поліномом). Решту функцій, крім $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, називають трансцендентними*****).

Означимо деякі елементи поведінки функцій.

---

*) Від лат. signum, англ. sign — знак.
**) Від англ. entire — цілий.
***) Від англ. superposition — накладання.
****) Від лат. composition — складати.
*****) Від лат. transendens — той, що виходить за межі.

О. *Функція називається парною, якщо* $f(x) = f(-x)$, *і непарною, якщо* $f(-x) = -f(x)$, *а область визначення симетрична відносно початку координат.*

Графік парної функції симетричний відносно осі OY, непарної — відносно початку координат.

О. *Функція* $y = f(x)$ *називається зростаючою (спадною) на деякому інтервалі, якщо з* $x_2 > x_1$ випливає, що

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Для таких функцій застосовують позначення $\uparrow$ і $\downarrow$.

О. *Функція* $y = f(x)$ *називається періодичною з періодом* T, *якщо* $f(x + T) = f(x)$.

О. *Функція* $y = f(x)$ *називається обмеженою на множині* X, *якщо* $\exists\, M > 0$ *таке, що* $\forall\, x \in X$ *виконується нерівність* $|f(x)| < M$.

О. *Функція* $y = f(x)$ *називається обмеженою зверху (знизу) на множині* X, *якщо* $\exists\, M (\exists m)$ *таке, що* $(f(x) < M (f(x) > m))$.

Якщо $f(x)$ обмежена, то вона обмежена і зверху, і знизу, а також навпаки. Наприклад, $f(x) = \sin x$ обмежена на $\mathbf{R}$, бо $\forall\ x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \le 1$ (можна взяти, наприклад, $M = 2$), функція $f(x) = a^x$ обмежена знизу на $\mathbf{R}$, бо $a^x > 0$ (можна взяти $m = 0$).

Той факт, що відношення $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ обмежене на певній множині, позначають $f_1(x) = 0\ (f_2(x))$; обмеженість $f(x)$ позначають $f(x) = O(1)$.

3.1.2. Модуль. Окіл точки

Нагадаємо означення модуля $x \in \mathbf{R}$:

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{якщо } x \ge 0; \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Деякі властивості модуля

1. $|a + b| \le |a| + |b|$ (*нерівність трикутника*).
2. $|a - b| \ge |a| - |b|$.
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
5. Нерівність $|x - x_0| < \delta$ еквівалентна нерівності $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ (рис. 3.3).

О. *Околом точки* x_0 *називається будь-який відкритий інтервал, що містить дану точку.*

Точка x_0 може бути як серединою такого інтервалу, так і не бути нею. У першому випадку говорять про симетричний окіл. Позначають окіл

точки x_0 через U_{x_0} або $U(x_0,\delta)$. Нерівності у властивості 5 модуля описують окіл $U(x_0,\delta)$.

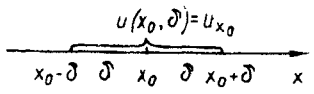


Рис. 3.3

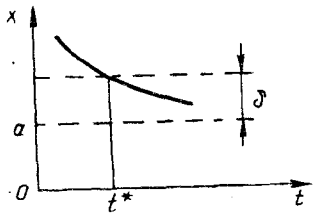


Рис. 3.4

3.1.3. Границя послідовності

Почнемо з попередніх міркувань, пов'язаних з близькістю величин.

Проведемо уявний експеримент. Нехай x — тиск повітря в резервуарі. Тиск вимірюємо манометром, похибка якого δ, a — атмосферний тиск. Припустимо, що $x > a$. Відкриємо кран і спостерігатимемо за зміною x протягом часу t (рис. 3.4). Очевидно тиск зменшується, прямуючи до a, і в деякий момент t^* манометр покаже, що $x \approx a$ (з точністю δ). Збільшивши точність приладу (зменшивши δ), побачимо, що цей момент настане пізніше. Момент t^* почнемо фіксувати, виходячи з умови $x - a < \delta$.

Нехай тепер в резервуарі відбувається розрідження ($x < a$). Повторимо дослід. Тут теж $x \to a$, а відповідний момент t^* фіксуємо з умови $a - x < \delta$ (рис. 3.5).

Нарешті, можна уявити випадок, коли $x \to a$, але $x > a$ і $x < a$. Технічно це реалізується за допомогою поршня (рис. 3.6).

Об'єднуючи всі три випадки, можна вважати, що з точністю δ змінна величина x досягне сталої величини (границі), якщо виконується умова $|x - a| < \delta$. Остання нерівність, як відомо, описує окіл точки a.

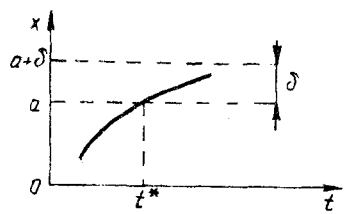


Рис. 3.5

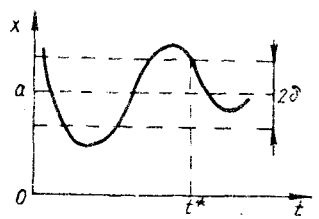


Рис. 3.6

Перейдемо до означення границі послідовності. Розглянемо конкретну послідовність $\{a_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n+1}^{\infty} = \left\{1 + 1,\ 1 + \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Вважатимемо, що її границею є $A = 1$. Оцінимо близькість a_n до своєї границі, тобто $|a_n - A|$. Наприклад, $|a_n - A| < \varepsilon = 0.1$ виконується за умови $n > 10$. У випадку $\varepsilon = 0.01$ беремо $n > 100$.

О. *Стала A називається границею послідовності $\{a_n\}$, якщо для довільного наперед заданого числа $\varepsilon > 0 (\forall \varepsilon)$, яке може бути як завгодно малим, існує такий номер N члена послідовності $(\exists N)$, $N = N(\varepsilon)$, такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|a_n - A| < \varepsilon$, при цьому пишуть*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Послідовність, яка має скінченну границю, називається збіжною, у всіх інших випадках — розбіжною.

П. 1. Довести, що

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{3n + 4} = \frac{2}{3}.$$

Тут $a_n = \frac{2n}{3n + 4}$, $A = \frac{2}{3}$. Розглянемо $a_n - A$.

Нехай $|a_n - A| < \varepsilon$. Знайдемо відповідний номер, починаючи з якого виконується ця нерівність. Маємо

$$\left|\frac{2n}{3n + 4} - \frac{2}{3}\right| = \frac{8}{3(3n + 4)} < \varepsilon,$$

звідки $n > \frac{8}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}$. Виберемо $N = E(\frac{8}{9\varepsilon} - \frac{4}{3})$.

Отже, $\forall n > N$ нерівність виконується.

Нехай тепер $\varepsilon = 0.1$. Тоді $N = E(7\frac{5}{9}) = 7$ і при $n > 7$ справджується нерівність

$$\left|\frac{2n}{3n + 4} - \frac{2}{3}\right| < 0.1.$$

Пропонуємо взяти $\varepsilon = 0.01$, порівняти N для $\varepsilon = 0.1$ і $\varepsilon = 0.01$.

3.1.4. Границя функції

Означимо спочатку границю функції при $x \to \infty$ і $x \to = -\infty$, бо такі означення концептуально близькі до означення границі послідовності (рис. 3.7). У наступних означеннях опускатимемо стосовно ε вираз «яке може бути як завгодно малим», хоча щоразу воно саме так і є.

О. *Стала A називається границею функції $f(x)$* при $x \to -\infty$, *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ існує таке значення аргументу x^*, що при $x > x^*$ справджується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають цей факт так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Аналогічно означається границя $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, тільки відповідна нерівність виконується при $x < x^*$.

Розглянемо границю функції при $x \to x_0$. Порівняємо рис. 3.8 і 3.9. На рис. 3.8 при наближенні x до x_0 значення $f(x)$ наближається до границі A і $A = f(x_0)$, на рис. 3.9 $f(x_0)$ не має ніякого відношення до A. Отже, в самій точці x_0 близькість функції та її гарниці може бути порушена (якщо функція взагалі визначена в цій точці).

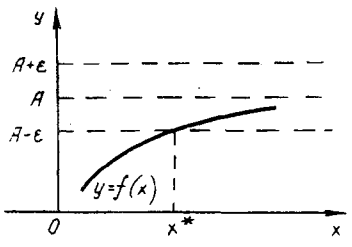


Рис. 3.7

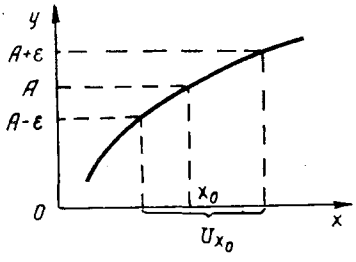


Рис. 3.8

О. *Стала A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл точки U_{x_0}, що для довільного x з цього околу, крім хіба що x_0, виконується нерівність*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

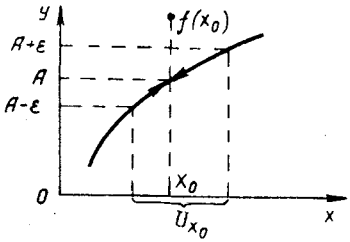


Рис. 3.9

Позначають цей факт так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Якщо так званий *проколений окіл* точки x_0 позначити через U'_{x_0}, тобто $U'_{x_0} = U_{x_0} \setminus \{x_0\}$, то тоді останнє означення можна записати символічно:

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists U_{x_0}, \forall\ x \in U'_{x_0}: |f(x) - A| < \varepsilon).$$

П. Довести, що $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$.

Доведення. Розглянемо $|f(x) - A| < \varepsilon$ і знайдемо той окіл точки $x = 1$, в якому виконується ця нерівність. Маємо

$$|f(x) - A| = |2x + 3 - 5| =$$

$$= |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon,$$

звідки

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Остання нерівність (чи еквівалентна їй $1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$) визначає окіл точки $x = 1$, точніше $U(1, \frac{\varepsilon}{2})$.

Істотними є також поняття односторонніх границь функції.

О. *Стала A є границею функції $y = f(x)$ справа (правостороннью границею) при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує правий окіл точки $x_0 (U_{x_0} \cap \{x: x > x_0\})$, такий, що для всіх x з цього околу $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Позначають цей факт так:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Аналогічно означається лівостороння границя $f(x)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Очевидно $\lim\limits_{x \to 0 - 0} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x \to 0 + 0} \operatorname{sign} x = 1$.

Зазначимо, що

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \end{cases} \right). \qquad (3.1)$$

3.2. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

3.2.1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

О. *Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, $x \to -\infty$, якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Якщо $x \to x_0$, то, скориставшись означенням границі, маємо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \ \forall x \in U'_{x_0}: |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Останню нерівність запишемо у вигляді $|f(x)| < \varepsilon$. Звідси випливає обґрунтованість назви «нескінченно мала». Це спостереження покладемо в основу наступного означення.

О. *Функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $E > 0$, яке може бути як завгодно великим, існує такий окіл точки x_0, що для всіх точок його, хіба що крім x_0, виконується нерівність $|f(x)| > E$.*

Позначають цей факт так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Неважко навести таке означення й для $x \to \infty$ або $x \to -\infty$.

Аналогічні означення можна дати й для послідовностей.

3.2.2. Властивості нескінченно малих

Для зручності в доведеннях розглядатимемо тільки випадок, коли $x \to x_0$.

Т. 1 (зв'язок нескінченно малих і великих функцій). *Якщо $f(x)$ — нескінченно велика при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ — нескінченно мала при $x \to x_0$, і навпаки.*

■ Нехай $f(x)$ — нескінченно велика при $x \to x_0$. Тоді $\forall E > 0 \ \exists U'_{x_0}$, $\forall x \in Ux_0: |f(x)| > E$, звідки $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{E}$. Позначивши $\frac{1}{E} = \varepsilon$, матимемо $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$. Отже, $\frac{1}{f(x)}$ — нескінченно мала при $x \to x_0$. ■

Аналогічно доводиться й обернене твердження.

З цієї теореми випливає, що тепер досить обмежитися детальним вивченням однієї з функцій, скажімо, нескінченно малої.

Т. 2 (зв'язок границі функції з нескінченно малою).

1) Якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, *то існує проколений окіл точки x_0, в якому $f(x)$ має вигляд*

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{3.2}$$

де $\alpha(x)$ — нескінченно мала при $x \to x_0$.

2) *Якщо в деякому проколеному околі точки x_0 має місце рівність (3.2), то $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.*

■ Маємо

$$(\lim_{x \to x_0} f(x) = A) \Rightarrow (\forall\ \varepsilon > 0) \exists\ U_{x_0},$$

$$\forall\, x \in U'_{x_0}: |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Позначимо $f(x) - A = \alpha(x)$. Оскільки $|\alpha(x)| < \varepsilon$ в деякому околі x_0, то $\alpha(x)$ — нескінченно мала при $x \to x_0$, а $f(x) = A + \alpha(x)$.

Обернене твердження доводиться аналогічно. ■

Т. 3 (*сума нескінченно малих*). *Сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою.*

■ Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — нескінченно малі при $x \to x_0$, тоді $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists U^{(1)}_{x_0}, \forall\, x \in U'^{(1)}_{x_0}: |\alpha(x)| < \varepsilon$. Аналогічно в $U'^{(2)}_{x_0}$ виконується $|\beta(x)| < \varepsilon$. Очевидно в $U'_{x_0} = U'^{(1)}_{x_0} \cap U'^{(2)}_{x_0}$ виконуються обидві зазначені нерівності.

Застосувавши нерівність трикутника, дістанемо

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + \beta(x)| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon_1,$$

тобто $\forall\ \ x \in U'_{x_0}$ справджується нерівність $|\alpha(x) + \beta(x) < \varepsilon_1$. Отже, $\alpha(x) + \beta(x)$ — нескінченно мала при $x \to x_0$.

Теорема справджується й для скінченного числа доданків внаслідок асоціативного закону додавання. ■

Т. 4 (добуток обмеженої й нескінченно малої функцій). *Добуток обмеженої й нескінченно малої функцій є нескінченно малим.*

■ Нехай функція $f_1(x)$ обмежена на x. Тоді $\exists\, M > 0$ таке, що для $\forall\, x \in X$ виконується нерівність $|f_1(x)| < M$. Оскільки $f_2(x)$ — нескінченно мала при $x \to x_0$, то $|f_2(x)| < \varepsilon$ в деякому околі x_0. У тому ж околі

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| = |f_1(x)|\,|f_2(x)| < M\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Звідси випливає доводжуване твердження. ■

Н. *Добуток скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.*

Для двох множників твердження випливає з того, що нескінченно малу можна розглядати в деякому околі як обмежену функцію (тут $\varepsilon = M$).

Усе сказане вище стосовно нескінченно малих і великих функцій справджується й для відповідних послідовностей.

3.3. ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦЬ. ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАНИЦЬ

3.3.1. Властивості границь

Т. 1 (границя суми). *Границя суми скінченного числа функцій дорівнює сумі границь доданків, якщо кожна з границь існує.*

■ Доведемо спочатку теорему для двох доданків, тобто вчинимо так, як це завжди буває у випадку суми скінченного числа доданків. Покажемо, що $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) + \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$.

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$. За теоремою 2 (п. 3.2.2) маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \ \forall x \in U'_{x_0}: f_1(x) = A + \alpha(x). \tag{3.2}$$

Аналогічно

$$(\lim_{x \to x_0} f_2(x) = B) \Rightarrow (f_2(x) = B + \beta(x)), \tag{3.3}$$

де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — нескінченно малі при $x \to x_0$. Вважатимемо, що рівності (3.2) і (3.3) виконуються в одному околі U_{x_0} (див. доведення т. 3, п. 3.2.2). Застосовуючи нерівність трикутника та рівності (3.2) і (3.3), маємо

$$f_1(x) + f_2(x) = A + \alpha(x) + B + \beta(x) = (A + B) + (\alpha(x) + \beta(x)).$$

Оскільки $\alpha(x) + \beta(x)$ — нескінченно мала, то згідно з т. 2 (п. 3.2.2) дістаємо, що

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = A + B,$$

тобто теорема справджується. ■

Наступні дві теореми подаємо без доведень, оскільки вони аналогічні доведенню т. 1.

Т. 2 (границя добутку).

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \lim_{x \to x_0} f_2(x) \dots \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Н. 1. *Сталий множник можна виносити за знак границі, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Н. 2. *Границя натурального степеня функції дорівнює натуральному степеню границі функції, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \to x_0} f(x))^n, \ \forall \quad n \in \mathbf{N}.$$

Т. 3 (границя частки). Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = (\lim_{x \to x_0} f_1(x)) / (\lim_{x \to x_0} f_2(x)).$$

Т. 4 (границя функції, проміжної між двома функціями). *Якщо*

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \tag{3.4}$$

для всіх x, які розглядаються нижче, а

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A, \tag{3.5}$$

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = A, \tag{3.6}$$

то при $x \to x_0$ *границя* $f(x)$ *існує, причому*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

■ З рівностей (3.5) і (3.6) за означенням границі маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \forall x \in U'_{x_0}: |f_1(x) - A| < \varepsilon,$$

або

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon. \tag{3.7}$$

Аналогічно

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon. \tag{3.8}$$

Скориставшись нерівностями (3.4), (3.7) та (3.8), дістаємо

$$A - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < A + \varepsilon,$$

тобто

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \text{ або } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тепер застосуємо означення границі функції. ■

Подамо без доведення наступні теореми. Зауважимо, що деякі з доведень досить прості.

Т.5 (граничний перехід в нерівності). *Якщо* $f_1(x) < f_2(x)$ *для всіх* $x \in (x_0, x)$ чи $x \in (x, x_0)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \le \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Т.6 (існування границі монотонної послідовності). *Якщо послідовність монотонно зростаюча й обмежена зверху, то вона має границю.*

Цю теорему сформульовано для послідовностей, бо використовуватимемо її саме в такому вигляді.

Т. 7 (єдиність границі). *Якщо функція має границю в даній точці, то така границя єдина.*

За допомогою цих теорем можна знаходити деякі границі.

П. Знайти

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{5x}{3x^2 + 1}.$$

Р о з в ' я з а н н я. На основі попередніх теорем і рівності $\lim_{x \to 1} x = 1$ маємо

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\lim_{x \to 1} (5x)}{\lim_{x \to 1} 3x^2 + 1} = \frac{5 \lim_{x \to 1} x}{3(\lim_{x \to 1} x)^2 + 1} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{5}{4}.$$

Цей самий результат можна дістати, підставляючи у вираз для f граничне значення x.

Розглянемо границю відношення $a = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Очевидно, що $a = 1$ при $f_1(x) = f_2(x) = x$. При $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$ маємо $a = 0$. Якшо $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, то $a = \infty$. Підставляючи $x = 0$ у вираз $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, щоразу дістаємо $\frac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеною (невизначеністю), оскільки після знаходження (звичайно, після певних перетворень) вказані границі (розкриття невизначеності) можна мати у відповіді як конкретне число, так і нескінченність (в інших випадках границя може й не існувати). Є ще й такі види невизначеностей: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ тощо.

3.3.2. Приклади розкриття невизначеностей

Розглянемо окремі приклади на знаходження границь у разі невизначеностей.

П. 1. Знайти границю

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x + 3}.$$

Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник на x^2 (найвищий степінь). Маємо

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Як бачимо, границею є відношення коефіцієнтів при x в найвищому степені.

П. 2. Знайти границю

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}.$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники (множники $x - 1$ обов'язкові). Дістаємо

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Зазначимо, що не завжди можна робити так, як у прикладі з п. 3.3.1, тобто під знак границі підставляти граничне значення аргументу. Виділимо, крім раціональних функцій, множину таких функцій, для яких це робити можна. Такі функції називають *неперервними*. Поки що навіть результат $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ є необгрунтованим.

Оператори і функціонали, які задовольняють умову лінійності (однорідності та адитивності), називають *лінійними*. Оскільки операція знаходження границі функції є лінійною, відображає функцію на число, то, взявши до уваги Т. 1 і Н. 1, доходимо висновку, що функціонал знаходження границі є лінійним.

3.4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. СТАНДАРТНІ ГРАНИЦІ

3.4.1. Неперервність функцій

О. *Приростом деякої величини* називається різниця двох її значень. Розглянемо функцію $y = f(x)$. Можна розглядати приріст аргументу

$$\Delta^{*)}x = x_2 - x_1 = (x + \Delta x) - x \quad (x_2 = x + \Delta x,\ x_1 = x)$$

і приріст функції, що відповідає цьому приросту аргументу, тобто (див. рис. 3.10)

*) Від лат. differencia — різниця.

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

З точки зору поведінки $\Delta f(x)$ при $\Delta x \to 0$, то різні функції ведуть себе по-різному. Так, для $f(x)$ на рис. 3.10 маємо $(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta f(x) \to 0)$, але для $f(x)$ на рис. 3.9 це не так. Зокрема, для $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точці $x = 0$ при $\Delta x \to 0 + 0$ маємо $\Delta f(x) = 1$, а при $\Delta x \to 0 - 0$ маємо $\Delta f(x) = -1$ (див. рис. 3.1).

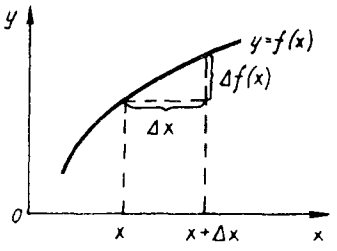


Рис. 3.10

Ці спостереження покладено в основу означення неперервних функцій.

Наведемо три означення неперервності функції в точці. Всі вони еквівалентні між собою (це можна довести).

О. 1. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в цій точці та в деякому її околі і $\Delta x \to 0$ відповідає $\Delta f(x) \to 0$, тобто*

$$(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta f(x) \to 0). \tag{3.9}$$

О. 2. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в цій точці та в деякому її околі і*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.10}$$

Рівність (3.10) можна записати у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

тобто *для неперервної функції символи функції і границі можна міняти місцями.*

Скориставшись співвідношенням (3.1), розшифруємо означення 2.

Приходимо до такого означення.

О. 3. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в цій точці та в деякому її околі і*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Тепер наведемо ще кілька означень.

О. *Точкою розриву функції називається точка, в якій не виконується хоча б одна умова неперервності функції.*

О. *Функція називається неперервною на деякому інтервалі, якщо вона неперервна в кожній його точці (якщо інтервал замкнений, то неперервність в кінцевих його точках розумітимемо як неперервність зліва чи справа).*

Через C_X*) позначатимемо множину всіх функцій, неперервних на множині X.

З огляду на означення неперервних функцій очевидною є така теорема.

Т. 1. *Якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на деякому інтервалі, то $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x)f_2x$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $(f_2(x) \neq 0)$ неперервні на тому ж інтервалі. Неперервна також суперпозиція скінченного числа неперервних функцій.*

П. 1. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = x^3$.

Розв'язання. Візьмемо довільне x з області визначення $f(x)$, $(x \in \mathbf{R})$. Маємо згідно з (3.9):

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Очевидно, що

$$(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta f(x) \to 0).$$

Отже, $f \in C_R$.

П. 2. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \sin x$.

Розв'язання. Візьмемо x так, як у **П. 1**. Маємо

$$\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Скористаємося тим, що $|\sin x| \leq |x|$ (див. далі (3.14)), і тим, що $|\cos x| \leq 1$. Тоді

$$|\Delta f(x)| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} \cdot 1 = |\Delta x|.$$

Отже, $0 \leq |\Delta f(x) \leq |\Delta x|$. На основі **Т. 2**, п. 3.2.2 маємо

$$(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta f(x) \to 0),$$

тобто $f \in C_R$ з огляду на те, що x довільне.

Можна довести неперервність інших основних елементарних функцій в області їх визначення. Згідно з Т. 1 виконується таке твердження.

Т. 2. *Усі елементарні функції неперервні в області їх визначення.*

3.4.2. Класифікація точок розривів функцій

Функції, зображені на рис. 3.1, 3.9 і 3.11, мають точки розриву. Очевидно функції по-різному ведуть себе в околі цих точок.

Класифікуємо ці точки.

О. *Точка розриву даної функції називається точкою розриву першого роду, якщо в цій точці функція має скінченні односторонні границі.*

*) Від англ. continuous — неперервний.

О. *Точка розриву першого роду даної функції називається точкою усувного розриву, якщо в цій точці односторонні границі функції збігаються.*

О. *Точка розриву даної функції називається точкою розриву другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь функції в цій точці або дорівнює* ∞, *або не існує.*

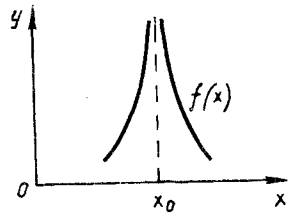


Рис. 3.11

О. Стрибком функції $y = f(x)$ *у точці* x_0 *називається величина*

$$\delta(f, x) = |\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)|.$$

У точках неперервності x функції $f(x)$ маємо $\delta = 0$.

Для функції $f(x) = \operatorname{sign} x$ (див. рис. 3.1) точка $x = 0$ — точка розриву першого роду, в точці $x = 0$ $\delta = 2$. Для функції, зображеної на рис. 3.9, x_0 є точкою усувного розриву. Перевизначивши цю функцію, вважаючи $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, дістанемо неперервну при $x = x_0$ функцію. Функція, зображена на рис. 3.11, має при $x = x_0$ розрив другого роду, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Такий же розрив має функція $f(x) = \sin(1/x)$ при $x = 0$ (вона не визначена при $x = 0$ і $\lim_{x \to x_0} f(x)$ не існує).

У випадку точки усувного розриву розрив функції можна усунути, доозначивши чи переозначивши функцію.

3.4.3. Теореми про неперервні функції

Сформулюємо три теореми. Хоча вони інтуїтивно прості, доведення їх досить складне, ми його опустимо.

Т. 1 (про збереження знака неперервної функції). *Якщо* $f(x)$ *неперервна в точці* x_0 і $f(x_0) \neq 0$, *то існує такий окіл точки* x_0, *в якому*

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0).$$

Т. 2 (про найбільше, найменше і проміжні значення неперервної функції). *Якщо* $f \in C[a, b]$, *то на* $[a, b]$ *функція* $f(x)$ *набуває найбільшого і найменшого значень* M *і* m, *а також всіх своїх проміжних значень, тобто для довільного* μ, $m \leq \mu \leq M$ *існує хоча б одне* $c \in [a, b]$ *таке, що* $f(c) = \mu$ (рис. 3.12).

Т. 3 (про нулі неперервної функції). *Якщо* $f \in C[a, b]$ і на кінцях $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває значень з протилежними знаками, тобто

$f(a)\,f(b) < 0$, то існує хоча б одне $x_0 \in [a, b]$ таке, що $f(x_0) = 0$ (існує корінь рівняння $f(x) = 0$) (рис. 3.13).

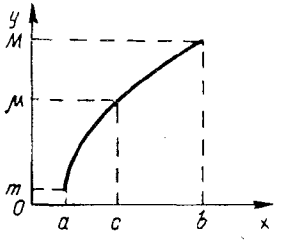


Рис. 3.12

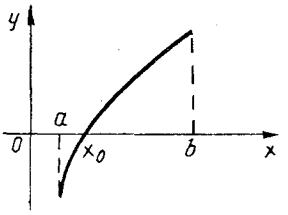


Рис. 3.13

Інформація, що стосується неперервних функцій, уможливлює знаходження границі у випадках, складніших за ті, які було розглянуто вище.

Розглянемо кілька таких прикладів. Під знаком границі маємо неперервні функції, в усякому разі в деяких околах граничних значень аргументів.

П. 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x+3} - \sqrt{6x+1}}{2x^2 - 2}$.

Розв'язання. Підставивши під знак границі $x = 1$ (функції неперервні), матимемо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкриємо її. Виконавши перетворення з ірраціональністю, перейдемо до границі:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{4x+3} - \sqrt{6x+1})(\sqrt{4x+3} + \sqrt{6x+1})}{2(x^2-1)(\sqrt{4x+3} + \sqrt{6x+1})} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{2(x-1)(x+1)(\sqrt{4x+3} + \sqrt{6x+1})} = -\frac{1}{4\sqrt{7}}.$$

П. 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-2} + 1}{2x - 2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Скориставшись формулою різниці кубів, дістанемо

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x-2} + 1)(\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1)}{2(x-1)(\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2(\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1)} = \frac{1}{6}.$$

П. 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+10})$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність $\infty - \infty$. Знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+10}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+10})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}}=0.$$

3.4.4. Перша стандартна границя

Взявши до уваги неперервність функції $f(x)=\sin x$ при $x=0$ ($\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$), матимемо невизначеність $\frac{0}{0}$ в разі границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Крім того, для малих x маємо $\sin x\approx x$. Яка насправді ця границя?

T. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

■ Доведемо спочатку, що $\forall\, x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\sin x<x<\tan x. \qquad (3.11)$$

Побудуємо коло радіуса R і промінь під кутом x до осі Ox (рис. 3.14). Маємо

$$S_{\Delta OAB}<S_{\text{сект.}OAB}<S_{\Delta OCB}.$$

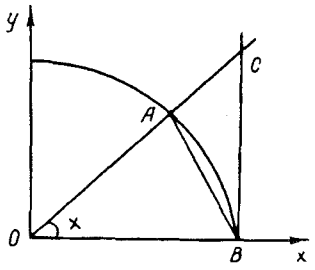


Рис. 3.14

Знайшовши площу кожної з цих фігур, дістанемо

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\tan x,$$

звідки дістаємо нерівність (3.11).

Зазначимо, що коли $f_1(x)<f_2(x)\ \forall\, x\in(a,x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\le\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$ (наприклад, $\sin x<x$, $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$, але $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}x$) (див. також т. 7 з п. 3.3.2).

Поділимо обидві частини нерівності (3.11) на $\sin x>0$. Дістанемо

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

або

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Використаємо неперервність функції $f(x) = \cos x$ і т. 2 (п. 3.2.2). Маємо

$$\lim_{x \to 0+0} \sin\frac{x}{x} = 1.$$

Оскільки $\frac{\sin x}{x}$ — парна функція, то результат буде той самий при $x \to 0 - 0$.■

П. Знайти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}.$$

Розв'язання. Урахувавши (3.13), матимемо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) \cdot \cos(5x) \cdot 3x \cdot 5}{\sin(5x) \cdot 3x \cdot 5} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 5x} \lim_{x \to 0} \frac{3\cos 5x}{5} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5}.$$

3.4.5. Друга стандартна границя

Для послідовності $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ маємо $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$. Розглянемо тепер послідовність $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Маємо $u_1 = 2, u_2 = 2.25, u_3 = 2.37, u_4 = 2.44, \ldots$. Схоже, що остання послідовність зростає. Чи має вона границю? Відповідь дає така теорема.

Т. $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e,$

де e*) — трансцендентне число, $e \approx 2.718$.

■ Скористаємося формулою бінома Ньютона

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^n.$$

де $n \in \mathbf{N}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Маємо

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \cdot \frac{1}{3!} + \ldots +$$

*) e — на честь Л.Ейлера (1707—1783) — швейцарського математика.

$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n(n-1))}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{(n-1)!}=$$

$$+2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{3!}+\ldots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{(n-1)!}.$$

Можна довести, що послідовність u_n є зростаючою, $u_{n+1} > u_n$. Отже,

$$u_n > u_1 = 2.$$

Оскільки

$$1-\frac{1}{n}<1,\ 1-\frac{2}{n}<1,\ \ldots,\ 1-\frac{n-1}{n}<1,$$

то

$$u_n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+$$

$$+\ldots\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Тут скористалися формулою суми спадної геометричної прогресії $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots,\ a=1,\ q=\frac{1}{2},\ S=\frac{a}{1-q}\right)$. Оскільки послідовність $u_n\uparrow$ і обмежена зверху числом 3, то вона має границю (т. 6, п. 3.3.1), яку позначимо через e. ■

Зазначимо, що й

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Логарифми за основою e називають натуральними і позначають

$$\log_e x=\ln x.$$

Іноді користуються позначенням $e^x=\exp(x)$.

П. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}}=e^2.$$

Тут скористалися тим, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e.$$

3.4.6. Порівняння нескінченно малих

Введемо означення, які дають змогу всі нескінченно малі функції вишикувати за певним ранжиром.

Нижче в усіх трьох означеннях $f_1(x)$ і $f_2(x)$ — нескінченно малі при $x \to x_0$ або $x \to \infty$. Для зручності вважатимемо, що $x \to x_0$.

О. *Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають один і той самий порядок мализни при $x \to x_0$, якщо*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2x}=A\neq 0.$$

О. *Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ еквівалентні при $x \to x_0 (f_1 \sim f_2)$, якщо*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1.$$

Нагадаємо, що $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

О. *Функція $f_1(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $f_2(x)$* при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0.$$

У цьому разі записують

$$f_1(x)=0\,(f_2(x)).$$

Вкажемо одне застосування еквівалентних нескінченно малих.

Т. *Границя відношення двох нескінченно малих функцій дорівнює границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих, тобто якщо $f_1 \sim \varphi_1$, $f_2 \sim \varphi_2$, то*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}.$$

■ Очевидно, що

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{f_1}{\varphi_1} \cdot \frac{\varphi_2}{f_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Границі перших двох множників в останньому виразі дорівнюють 1. Тепер залишилось перейти до границі в останньому виразі. ■

П. 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left\{\begin{matrix}\sin 3x \sim 3x \\ \sin 5x \sim 5x\end{matrix}\right\} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Наведемо два приклади на порівняння нескінченно малих і великих.

П.2. Крапля води випаровується при падінні. Її об'єм $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, площа поверхні $\sigma = 4\pi R^2$, де R — її радіус, нескінченно спадають при $R \to 0$. Порівняємо V і σ. Маємо

$$\frac{V}{\sigma} = \frac{R}{3}, \quad \lim_{R \to 0} \frac{V}{\sigma} = 0, \quad V = 0(\sigma).$$

Цей результат дає змогу зрозуміти, чому вода, розпорошуючись форсункою, різко знижує свою температуру. Справа в тому, що при роздрібненні великої краплі на маленькі сумарний їх об'єм залишається тим самим, а сумарна площа поверхні зростає. На створення останньої треба витратити енергію, яка покривається за рахунок кінетичної енергії молекул води, що й призводить до зниження температури.

П. 3. Розглянемо модель однорідного Всесвіту з рівномірно розподіленою густиною речовини ρ. Сумарна маса M речовини Всесвіту (радіуса R) $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Вона притягує пробну частину масою m з силою $F = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma mR$, де γ — відповідна стала. Якщо Всесвіт нескінченний, то $R \to \infty$ і $F \to \infty$, але це не так (гравітаційний парадокс Всесвіту).

Як же реалізується цей парадокс? Найпростішим є уявлення про скінченність Всесвіту, але тоді його чекає «теплова смерть» у відповідності з другим началом термодинаміки. Ця неприємність відсутня для нескінченного Всесвіту, оскільки в ньому енергія й ентропія нескінченні і говорити про їх зростання чи спадання не має сенсу.

Другим можливим кроком є такий. Нехай $R \to \infty$, але $\rho \to 0$ за умови $\rho R = \text{const}$. Тоді знімається гравітаційний парадокс, але гіпотезу $\rho \to 0$ не підтверджують спостереження. Задовільний розв'язок цього парадоксу дістанемо в межах теорії «великого вибуху», згідно з якою близько 15—20 млрд років назад наш Всесвіт вихлюпнувся назовні з нескінченно малої (у розумінні простору — часу), але нескінченно великої (у розумінні маси й енергії) частинки і відтоді розширюється з швидкістю, пропорційною до відстані від об'єкта, який спостерігається (закон Хаббла).

На певній відстані швидкість об'єкта, що віддаляється від нас, зрівнюється зі швидкістю світла, а найвіддаленіші об'єкти провалюються за «горизонт подій» і від них до нас не надходить ні світла, ні тяжіння. Оскільки об'єм простору всередині «горизонту подій» скінченний, то гравітаційний парадокс відпадає. Ось до яких цікавих і глибоких речей приводить зовні проста процедура порівняння нескінченно великих і нескінченно малих.

РОЗДІЛ 4

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

4.1. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

4.1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної

1. Задача про миттєву швидкість

Нехай шлях, пройдений матеріальною точкою за час t, задано формулою $s = s(t)$. Тоді при зміні часу від t до $t + \Delta t$ середня швидкість точки

$$v_c = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}.$$

Оскільки навіть при незначній зміні часу Δt значення швидкості при різних t можуть істотно відрізнятися, то актуальним є поняття миттєвої швидкості при значенні часу t, тобто

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

2. Задача про кутовий коефіцієнт дотичної

Розглянемо графік функції $y = f(x)$. Нехай треба провести дотичну до графіка в точці M_0 з абсцисою x (рис. 4.1). Візьмемо на графіку $f(x)$ довільну точку M з абсцисою $x + \Delta x$. Проведемо січну M_0M.

О. *Дотичною до графіка* даної функції в точці M_0 називається граничне положення січної, яка проходить через точку M_0 і довільну точку M графіка за умови, що M прямує вздовж графіка до M_0.

Кутові коефіцієнти січної і дотичної є відповідно $\tan \varphi$ і $\tan \alpha$. З означення дотичної маємо

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \varphi.$$

Оскільки $\tan \varphi = \Delta f(x)/\Delta x$, то

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \tag{4.2}$$

3. Задача про густину лінійного стержня

Нехай маємо лінійний стержень, розміщений вздовж осі Ox, і нехай маса його в кожній точці x обчислюється за формулою $m = m(x)$. Щоб визначити густину стержня в точці x, візьмемо деяку частину стержня,

яка містить точку x, і знайдемо *середню густину* цієї частини. Під *густиною стержня в точці* x розумітимемо границю середньої густини певної частини стержня за умови, що ця частина стискається до точки x (довжина її прямує до нуля) (рис. 4.2).

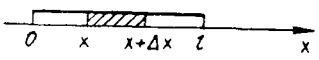


Рис. 4.2

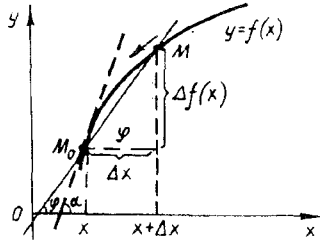


Рис. 4.1

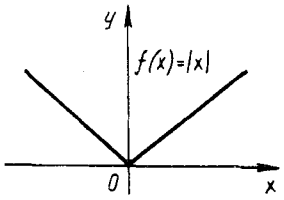


Рис. 4.3

Отже, густина

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m(x)}{\Delta x}. \tag{4.3}$$

Усі три задачі, звичайно, доцільно розглядати за умови, коли відповідні границі існують.

4.1.2. Означення похідної. Її практичний зміст

Розв'язки розглянутих трьох задач, незважаючи на їхній зміст, з математичної точки зору однакові. Тому сукупність математичних операцій у формулах (4.1)—(4.3) є сенс вивчати. Введемо означення.

О. *Похідною функції* $y = f(x)$ *в даній точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля довільним чином, тобто*

$$y' \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \tag{4.4}$$

До поняття похідної І.Ньютон прийшов з міркувань про швидкість руху тіла (він ввів позначення $\dot{f}(t)$), а Г.Лейбніц*) прийшов до цього поняття з геометричних міркувань (він ввів позначення $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$). Позначення похідної (4.4) запропонував Ж.Лаґранж**). У подальшому застосовуватимемо також позначення $y_x' = f'(x)$.

*) Г.Лейбніц (1646—1716) — німецький математик.

**) Ж.Л.Лаґранж (1736—1813) — французький математик і механік.

Зазначимо, що довільне прямування Δx до нуля в (4.4) істотне, бо іноді відповідні границі в (4.4) справа і зліва можуть бути різними. Так, функція $f(x) = |x|$ (рис. 4.3) при $\Delta x \to 0 - 0$ має границю -1, границю 1 при $\Delta x \to 0 + 0$ в точці $x = 0$.

Беручи до уваги (4.4) у випадках (4.1)—(4.3), дістаємо відповідно

$$v(t) = s'(t), \quad \tan \alpha = f'(x), \quad \rho(x) = m'(x).$$

Ці формули виражають відповідно *механічне, геометричне і фізичне* тлумачення похідної.

Наведемо деякі геометричні міркування. Нехай маємо графік функції $y = f(x)$. Тоді рівняння дотичної і нормалі (перпендикуляра до дотичної в точці дотику) в точці $(x_0, f(x_0))$ графіка мають відповідно вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

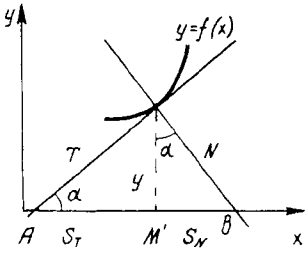


Рис. 4.4

З дотичною і нормаллю безпосередньо зв'язані *піддотична* і *піднормаль* (відповідно AM' і $M'B$ на рис. 4.4). Згідно з рис. 4.4 маємо

$$S_T = AM' = |y \cot \alpha| = |f(x)/f'(x)|,$$

$$S_N = M'B = |y \tan \alpha| = |f(x) f'(x)|,$$

Під *кутом φ між двома лініями* $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ розуміють кут між дотичними до них у точці їх перетину. Нехай абсциса цієї точки є x_0. Тоді, враховуючи (2.5), маємо

$$\tan \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) f'_2(x_0)}.$$

Введемо ряд термінів і позначень.

Функцію, що має скінченну похідну в даній точці, називають *диференційовною в цій точці*. Функцію, диференційовну в кожній точці інтервалу, називають *диференційовною на інтервалі* (в крайніх точках інтервалу границі в (4.4) розуміємо як односторонні). Множину всіх функцій, диференційовних на $[a, b]$, позначатимемо через $W_{[a,b]}$. Тоді той факт, що $f(x)$ диференційовна на $[a, b]$, можна записати як $f \in W_{[a,b]}$.

Розділ математичного аналізу, в якому вивчають питання, зв'язані з похідною, називають *диференціальним численням*.

4.1.3. Диференційовність і неперервність

Зазначимо, що у виразі (4.4) $\Delta x \to 0$. Якщо $\Delta f(x)$ не прямує до нуля, то $f'(x)$ або не існує, або є нескінченно великою ($f'(x) = \infty$). Залишається випадок, коли $\Delta f'(x) \to 0$, тобто випадок неперервної функції. Точніше, слушна така теорема.

Т. 1) *Будь-яка диференційовна в точці функція є неперервною в цій точці.*

2) *Існують неперервні в точках функції, не диференційовні в цих точках.*

■ 1) Нехай $f(x)$ диференційовна в точці x. Отже, існує

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

За теоремою про зв'язок границі функції з нескінченно малою (т. 2, п. 3.2.2) в околі точки x маємо

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)), \quad \Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, що $(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta f(x) \to 0)$, а це означає, що $f(x)$ є неперервною в точці x. Тоді

$$W_{[a,b]} \subset C_{[a,b]}.$$

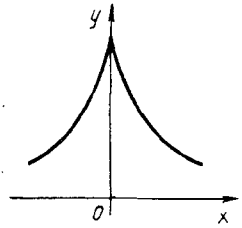


Рис. 4.5

2) Цей пункт ілюструє функція $f(x) = |x|$ (рис. 4.3), яка є неперервною, але не диференційовною при $x = 0$ ($f'(0)$ не існує), або функція, графік якої подано на рис. 4.5 (тут $f'(0) = \infty$). ■

Приклад функції, неперервної на інтервалі і не диференційовної в жодній точці цього інтервалу, належить А.Колмогорову*).

4.2. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

4.2.1. Правила диференціювання

Основні правила диференціювання подамо у вигляді теорем.

Т. 1. *Похідна сталої дорівнює нулю.*

Твердження очевидне, оскільки для сталої

$$f(x) = c \quad \Delta f(x) = 0 \ \forall \ x.$$

*) А.М.Колмогоров (1903—1987) — російський математик.

Т. 2. *Похідна суми скінченного числа диференційовних функцій дорівнює сумі похідних цих функцій.*

■ Розглянемо суму двох диференційовних функцій $f(x) = u(x) + v(x)$. Згідно з (4.4)

$$\Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \blacksquare$$

Т. 3. *Похідна добутку двох диференційовних функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$ має вигляд*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

■ Зазначимо, що оскільки $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні, то вони є неперервними у відповідних точках. Розглянемо функцію $f(x) = u(x)v(x)$. Маємо

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \{ \mp u(x)v(x + \Delta x)\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x) + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) \right) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x) \frac{u(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Тут використано неперервність $v(x)$ $(\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x))$. ■

Н. *Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто*

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Т. 4. *Похідна частки двох диференційовних функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, $(v(x) \neq 0)$ має вигляд*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'x - uv'}{v^2}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню т. 3.

Т. 5. (похідна складеної функції). *Нехай функції $y = f(u)$, $u = u(x)$ диференційовні у відповідних точках. Тоді похідна функції $y = y(u(x))$ дорівнює*

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{4.5}$$

■ Ураховуючи співвідношення між диференційовністю та неперервністю функцій, маємо

$$(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta u \to 0) \Rightarrow (\Delta y \to 0).$$

Застосуємо т. 2 (п. 3.2.2). Дістаємо

$$\left(y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \Rightarrow \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u).$$

Останню рівність, де α є нескінченно малою при $\Delta u \to 0$, поділимо на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$ $((\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta u \to 0))$. Знаходимо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad y'_x = y'_u u'_x. \blacksquare$$

Звертаємо увагу на те, що в результаті застосування операції диференціювання певної функції одна функція відображається на іншу, тобто така операція є оператором. Ураховуючи т. 2 і наслідок з т. 3 (п. 4.2.1), доходимо висновку, що оператор диференціювання лінійний.

4.2.2. Диференціювання основних елементарних функцій

1. Диференціювання тригонометричних функцій

1) $f(x) = \sin x$.

■ Маємо

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Отже, $(\sin x)' = \cos x$. ■

Тут скористалися першою стандартною границею і неперервністю функції $f(x) = \cos x$. Неперервністю функцій користуватимемося й далі, не оговорюючи цього.

2) $f(x) = cos(x)$.

Маємо $(\cos x)' = -\sin x$ (див. п. 1).

3) $f(x) = \tan x$.

■ Скористаємося формулою похідної дробу:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \blacksquare$$

4) $f(x) = \cot x$, $f(x) = \sec x$, $f(x) = \operatorname{cosec} x$.
Маємо

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x,$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cot x.$$

2. Диференціювання логарифмічної функції $f(x) = \log_a x$.

■ Спочатку застосуємо другу стандартну границю, а потім переведемо логарифм до основи e ($\ln e = 1$). Маємо

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} ((\log_a (x + \Delta x) - \log_a x)/\Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(\log_a \frac{x + \Delta x}{x} \right) / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x} \right. =$$

$$= \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x} = \log_a \lim \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} \right)^{1/x} =$$

$$= \log_a e^{1/x} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}.$$

Отже, $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$. В окремому випадку ($a = e$) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. ■

Для знаходження похідних інших функцій використаємо спочатку попереднє логарифмування відповідних виразів, а потім правило диференціювання складеної функції (4.5). Така процедура називається логарифмічним диференціюванням.

3. Диференціювання степеневої функції $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Нехай $x^\alpha > 0$. Тоді $\ln y = \alpha \ln x$ і $\frac{1}{y} y' = \alpha \frac{1}{x}$. Звідси $y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$, тобто $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Якщо $x^\alpha < 0$, то результат буде той самий (логарифмуємо $-y$).

4. Диференціювання показникової функції $y = a^x$.

Очевидно, що $a^x > 0$. Тоді $\ln y = x \ln a$ і $\frac{1}{y} y' = \ln a$. Звідси $y' = y \ln a$, або $y' = a^x \ln a$.

Остаточно

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

В окремому випадку, коли $a = e$, маємо

$$(e^x)' = e^x.$$

Таким чином, поряд з функцією $f(x) \equiv 0$ функція $f(x) = e^x$ є інваріантною щодо операції диференціювання.

5. Диференціювання обернених тригонометричних функцій.

О. *Функція $x = f^{-1}(y)$ називається оберненою щодо прямої функції $y = f(x)$, яка відображає множину X на Y, якщо f^{-1} відображає Y на X із збереженням тієї самої відповідності між елементами.*

Функція, графік якої зображено на рис. 4.6, має обернену, функція на рис. 4.7 — не має оберненої, бо одному значенню y відповідає більше ніж одне значення x (на рис. 4.6 x_1 і x_2). На рис. 4.6 подано графік монотонної (зростаючої) функції, на рис. 4.7 — не монотонної. Отже, справедлива така теорема.

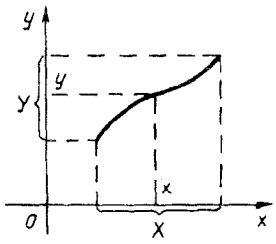


Рис. 4.6

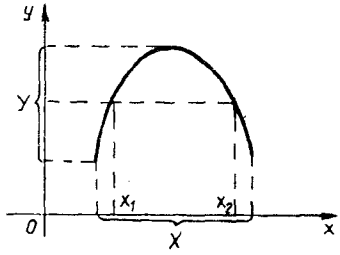


Рис. 4.7

Т. 1. *Будь-яка монотонно зростаюча чи монотонно спадна функція має обернену функцію.*

Графіки прямої й оберненої функцій збігаються, але якщо обернену функцію записати у вигляді $y = f^{-1}(x)$ (x і y поміняти місцями), то відповідні графіки є дзеркальним відображенням щодо лінії $y = x$ один одного.

Т. 2. *Похідні прямої та оберненої функцій зв'язані співвідношенням*

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{4.6}$$

■ Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ — взаємно обернені функції. Розглянемо складену функцію $y = f(\varphi(y))$. Продиференціюємо її по y. Проміжним аргументом є x. Тоді згідно з (4.6)

$$(y'_y = f'_x \cdot \varphi'_y) \Rightarrow (1 = y'_x \cdot x'_y) \Rightarrow \left(y'_x = \frac{1}{x'_y}\right). \blacksquare$$

Тепер про диференціювання обернених тригонометричних функцій.

Для функції $y = \arcsin x$ оберненою є $x = \sin y$, причому $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (за теоремою про існування оберненої функції). Продиференціюємо останню і врахуємо, що для вказаних значень $\cos y \ge 0$. Маємо

$$(x'_y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}) \Rightarrow \left(y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right).$$

Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогічно

$$(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2},$$

$$(\arctan x)' = 1/(1 + x^2),$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -1/(1 + x^2).$$

Отримані для основних елементарних функцій результати зведемо в таблицю, розглядаючи відповідні функції як складені (враховуючи (4.5)).

Таблиця похідних

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
2. $(a^u)' = a^u \ln a \, u'$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
3. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u}(\log_a e) = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
6. $(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' \equiv \sec^2 u \cdot u'$.
7. $(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u' \equiv -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$.
8. $(\sec u)' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$.
9. $(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \cdot \cot u \cdot u'$.
10. $(\arcsin u)' = (1/\sqrt{1 - u^2})u'$.

11. $(\arccos u)' = -(1/\sqrt{1-u^2})u'$.

12. $(\arctan u)' = (1/(1+u^2)) \cdot u'$.

13. $(\operatorname{arccot} u)' = -(1/(1+u^2)) \cdot u'$.

Розглянемо кілька прикладів.

П. 1. Знайти похідні функцій

1) $f(x) = e^{2x}\cos 3x$.

Розв'язання. $f'(x) = (e^{2x})'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = 2e^{2x}\cos 3x - 3e^{2x} \cdot \sin 3x$.

2) $f(x) = \arctan 2x - \dfrac{\sin^2 3x}{x^3}$.

Розв'язання. $f'(x) = \dfrac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 - \dfrac{(\sin^2 3x)'x^3 - \sin^2 3x(x^3)'}{(x^3)^2} = \dfrac{2}{1+4x^2} -$

$- \dfrac{2\sin 3x\,(\sin 3x)' \cdot x^3 - 3x^2\sin^2 3x}{x^6} = \dfrac{2}{1+4x^2} - \dfrac{3x^3\sin 6x - 3x^2\sin^2 3x}{x^6}$.

П. 2. Знайти похідну степенево-показникової функції

$$y = (u(x))^{v(x)} = u^v.$$

Розв'язання. Нехай $u(x) > 0$. Тоді, застосовуючи логарифмічне диференціювання, маємо

$$\ln y = v \ln u,$$

$$\frac{1}{y}y' = v' \ln u + v\frac{1}{u}u',$$

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} \cdot u'\right),$$

$$y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u}u'\right),$$

$$y' = u^v \ln u v' + vu^{v-1}u'.$$

Результат буде той самий, якщо задану функцію спочатку продиференціювати як степеневу, а потім як показникову і результати додати.

4.2.3. Диференціювання неявних функцій

Нехай маємо функціональну залежність $y = f(x)$, або $y - f(x) = 0$, тобто співвідношення $F(x, y) = 0$.

О. *Співвідношення* $F(x, y) = 0$ *визначає неявну функцію* $y = f(x)$, *якщо* $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Наприклад, $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ визначає неявну функцію $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, бо $x^2 + (-\sqrt{R^2 - x^2})^2 - R^2 \equiv 0$.

Неявні функції диференціюють як складені.

П. Знайти y', якщо $x^2y^3 - x^3 + 2y = 0$.
Розв'язання. Маємо

$$2xy^3 - 3x^2y^2y' - 3x^2 + 2y' = 0,$$

$$y'(2 - 3x^2y^2) = 3x^2 - 2xy^3,$$

$$y' = (3x^2 - 2xy^3)/(2 - 3x^2y^2).$$

4.2.4. Диференціювання параметричних функцій

Т. *Нехай*

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

причому $x = x(t)$, $y = y(t)$ *диференційовні при певних* t, а $x(t)$ *має обернену функцію. Тоді*

$$y'_x = y'_t/x'_t.$$

■ Нехай оберненою для $x(t)$ є $t = t(x)$. Побудуємо складену функцію $y = y(t(x))$. Тут x — початковий аргумент, t — проміжний. Продиференціюємо останню функцію по x. Дістанемо

$$\left(t'_x = \frac{1}{x'_t}\right),$$

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = y'_t/x'_t. \blacksquare$$

4.2.5. Диференціювання гіперболічних функцій

Гіперболічні функції дуже схожі на тригонометричні. Їх широко застосовують на практиці. Визначають гіперболічні синус, косинус, тангенс та котангенс так:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\operatorname{th} x = (\operatorname{sh} x)/(\operatorname{ch} x), \quad \operatorname{cth} x = (\operatorname{ch} x)/(\operatorname{sh} x).$$

Неважко впевнитися в справедливості тотожності

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

(вона аналогічна відомій тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), а також в точку, що

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \quad (\text{cth } x)' = \frac{1}{\text{sh}^2 x}.$$

4.3. ДИФЕРЕНЦІАЛ. ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

4.3.1. Диференціал

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

За теоремою 2 (п. 3.2.2) маємо

$$\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + d(\Delta x)\right) \Rightarrow (\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x),$$

тобто приріст функції можна подати у вигляді двох доданків. Один залежить від Δx лінійно, а другий містить степені Δx, вищі за перший.

О. *Диференціалом функції називається головна частина її приросту, лінійна щодо приросту аргументу,*

$$dy \equiv df(x) \overset{\text{def}}{=} f'(x)\Delta x. \tag{4.7}$$

Для $f(x) = x$ маємо $dx = \Delta x$. Отже,

$$(dy = f'(x)dx) \Rightarrow \left(f'(x) = \frac{dy}{dx}\right).$$

Розглянемо рис. 4.8. З ΔMAB маємо

$$(AB = MB \tan\alpha) \Rightarrow (AB =$$

$$= f'(x)\Delta x) \Rightarrow (AB = df(x)).$$

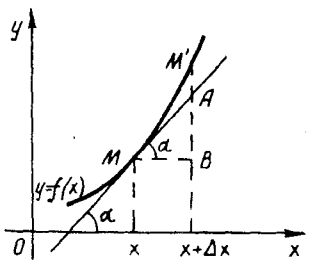


Рис. 4.8

Отже, *геометричне тлумачення диференціала* функції полягає в тому, що останній являє собою приріст ординати дотичної до даної функції (на рис. 4.8 приростом функції є $M'B$, а диференціалом AB).

Сформульований результат широко використовують на практиці.

З означення (4.7) випливає, що властивості диференціала аналогічні властивостям похідної. Наприклад,

$$d(u + v) = du + dv; \quad d(uv) = vdu + udv.$$

4.3.2. Застосування диференціала

Застосування диференціала базується на наближеній рівності

$$\Delta f(x) \approx df(x). \tag{4.8}$$

1. Наближені обчислення.

Нехай відомо значення $f(x_0)$. Тоді для $f(x_0 + h)$ згідно з (4.8) маємо

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0), \tag{4.9}$$

або

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

П. 1. Відомо, що $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Треба знайти $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{20}\right)$.

Розв'язання. Застосовуючи (4.9), знаходимо

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{20}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{20} \approx 0.5453.$$

За таблицею синусів $\sin 33^\circ \approx 0.5446$, тобто знайдений результат непоганий.

2. Оцінка похибки.

Нехай маємо залежність $y = f(x)$, а x вимірюється з похибкою Δx, яка при обчисленні y призводить до похибки Δy. Застосовуючи (4.8), дістаємо

$$|\Delta y| \approx |dy| = |df(x)| \approx |f'(x)|\,|\Delta x|.$$

П. 2. Знайти величину похибки при обчисленні $\ln 2.1$

Розв'язання. Оскільки $x = 2.1$, то похибка округлення $\Delta x \approx 0.05$. Тоді

$$|\Delta y| \approx \frac{1}{2.1} \cdot 0.05 \approx 0.0237.$$

4.3.3. Похідні вищих порядків

Оскільки для $y = f(x)$ похідна $f'(x) = \varphi(x)$ є деякою функцією, то істотно поставити питання про її диференціювання. Приходимо *до другої похідної* функції $f(x)$. Аналогічно приходимо до поняття *похідної довільного порядку*, тобто

$$y'' \overset{\text{def}}{=} (f'(x))', \quad y''' \overset{\text{def}}{=} (f''(x))', \ \ldots, \ y^{(n)} \overset{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))'.$$

Якщо функція задана параметрично, то

$$y''_x = (y'_x)'_t / x'_t.$$

Механічна інтерпретація другої похідної полягає в тому, що така похідна є прискоренням точки, яка рухається вздовж траєкторії, що є графіком даної функції. Безпосередньо геометричної інтерпретації друга

похідна не має, але певні міркування стосовно знака і значення у вказаному напрямі подамо пізніше.

П. Для $f(x) = \sin x$ знайти $f^{(n)}(x)$.

Розв'язання. Маємо

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(\pi + x) = \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f'''(x) = \cos x = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f^{\text{IV}}(x) = \sin x = \sin(2\pi + x) = \sin\left(4\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right).$$

4.3.4. Диференціали вищих порядків

О. $d^n f(x) \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1}f(x))$.

Отже, $d^2y = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2$. У загальному вигляді

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,(dx)^n,$$

звідки

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

4.3.5. Диференціал складеної функції

Нехай $y = y(u)$, а $u = u(x)$. Побудуємо складену функцію $y = y(u(x))$. Тоді (якщо це можливо), $y'_x = y'_u y'_x$, а диференціал набирає вигляду

$$dy = y'_u y'_x \quad \textit{або} \quad dx = f'(u)du,$$

тобто *форма першого диференціала не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною, чи є в свою чергу функцією другого аргументу (інваріантність форми першого диференціала).*

Для диференціалів вищих порядків це твердження не виконується.

4.4. ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ

Подамо кілька важливих теорем, які є проміжною ланкою між теорією і технікою диференціювання та застосування їх на практиці, зокрема в геометрії.

4.4.1. Теорема Ролля*).

Т. *Якщо функція* $y = f(x)$ *така, що*

1) $f \in C_{[a,b]}$,

2) $f \in W_{(a,b)}$,

3) $f(a) = f(b)$,

то існує хоча б одна така точка c, $c \in (a, b)$, *що* $f'(c) = 0$.

■ 1) Нехай $f(x) = \text{const}$ $\forall x \in [a, b]$. Тоді $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$ і c — довільна точка $[a, b]$ (рис. 4.9).

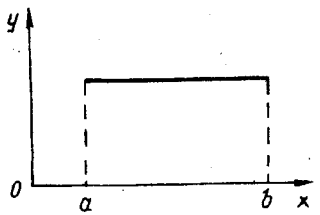


Рис. 4.9

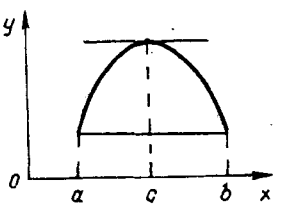


Рис. 4.10

2) Нехай $f(x) \not\equiv \text{const}$. Оскільки $f \in C_{[a,b]}$, то за теоремою 2 (п. 3.4.3) $f(x)$ набуває на $[a, b]$ найбільшого і найменшого значень, причому хоча б одне з них — у внутрішній точці інтервалу (внаслідок умови 3) теореми Ролля). Нехай $f(x)$ набуває найбільшого значення в точці $c \in (a, b)$ (рис. 4.10). Тоді $f(c + \Delta c) - f(c) < 0$ як для $\Delta c < 0$, так і $\Delta c > 0$. При $\Delta c < 0$ і $\Delta c > 0$ маємо відповідно

$$\frac{f(c + \Delta c) - f(c)}{\Delta c} > 0, \quad \frac{f(c + \Delta c) - f(c)}{\Delta c} < 0.$$

В останніх нерівностях перейдемо до границі (див. доведення першої стандартної границі (п. 3.4.4) та означення похідної (4.4)). Маємо відповідно

$$f'(c) \geq 0, \quad f'(c) \leq 0;$$

ураховуючи єдиність границі, дістаємо $f'(c) = 0$.

*) М. Ролль (1652—1719) — французький математик.

Якщо $f(x)$ набуває найменшого значення в точці c, то доведення теореми аналогічне. ■

Усі умови теореми суттєві, зокрема неперервність. Для $f(x) = |x|$ на $[-a, a]$ точки c, де $f'(c) = 0$, не існує.

Геометричне тлумачення теореми полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє умови теореми, існує хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна осі Ox.

4.4.2. Теорема Лаґранжа

Т. *Якщо функція $f(x)$ така, що:*

1) $f \in C_{[a,b]}$,

2) $f \in W_{(a,b)}$,

то існує хоча б одна така точка c, $c \in (a, b)$, що

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{4.10}$$

або

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{4.11}$$

(формула Лаґранжа).

■ Нехай $f(x)$ задовольняє умови теореми. Складемо рівняння січної, що проходить через точки A і B (рис. 4.11). Використаємо рівняння прямої (2.3), яка проходить через дві точки $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Звідси

$$y = f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)).$$

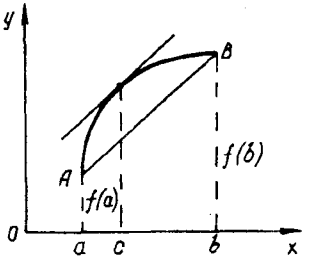


Рис. 4.11

Побудуємо допоміжну функцію $F(x)$, яка являє собою різницю між ординатами $f(x)$ і ординатами січної

$$F(x) = f(x) - y = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)).$$

Функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Лаґранжа (їх задовольняють $f(x)$ і лінійна функція y), а також умову $F(b) = F(a) = 0$ (згідно з побудовою $F(x)$, проте це можна перевірити й безпосередньо). Отже, $F(x)$ задовольняє теорему Ролля, а це означає, що $\exists\, c \in (a, b)$ така, що $F'(c) = 0$. Знайдемо похідну

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

звідки

$$\left(F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\right) \Rightarrow \left(f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

Розглянемо геометричне тлумачення теореми. З ΔABC маємо $\tan\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, проте $\tan\alpha = f'(c)$, тобто дістаємо (4.10) і (4.11). *Отже, геометричне тлумачення теореми Лаґранжа полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє на певному інтервалі умови теореми, існує хоча б одна така точка, в якій дотична до графіка функції паралельна січній, що проходить через крайні точки графіка функції на цьому інтервалі.*

Прокоментуємо досить сильне твердження (4.11). Як відомо, $\Delta f(x) \approx df(x)$, а це можна записати у вигляді

$$\Delta f(x) = f(b) - f(a) \approx f'(a) \cdot (b - a).$$

Маємо наближену рівність, а рівність (4.11) точна, але точка c неконструктивна (теорема Лаґранжа стверджує, що вона лише існує).

Формулу Лаґранжа називають формулою скінченних приростів (у рівності (4.10) ні $(b - a)$, ні $(f(b) - f(a))$ не прямують до нуля). Теорему Лаґранжа з огляду на її глибину і широке застосування називають ще основною теоремою диференціального числення.

4.4.3. Правило Лопіталя*)

Т. *Якщо функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *такі, що*

1) $f_1 \in C_{[x_0, x]}$, $f_1 \in W_{(x_0, x)}$,

2) $f_2 \in C_{[x_0, x]}$, $f_2 \in W_{(x_0, x)}$,

3) $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$,

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}, \tag{4.12}$$

якщо остання границя існує.

*) У 1696 р. вийшов перший підручник з диференціального числення «Аналіз нескінченно малих», написаний Г.Лопіталем (1661—1704) за лекціями Й.Бернуллі. Підручник відіграв важливу роль у розвитку математики. Тут вперше було викладено спосіб розкриття невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (правило Лопіталя), основна ідея якого належить Й.Бернуллі (1667—1748), одному з представників згаданої родини Бернуллі.

Сформульовану теорему називають теоремою Лопіталя, а правило розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ за допомогою цієї теореми (4.12) — правилом Лопіталя.

■ Застосувавши (4.10), дістанемо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{f_2(x) - f_2(x_0)} = \frac{f'_1(c_1)}{f'_2(c_2)}, \quad c_1 \in (x_0, x), \quad c_2 \in (x_0, x).$$

Проте насправді виконується більш тонкий результат, а саме

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f'_1(c)}{f'_2(c)}.$$

Перейшовши в останньому співвідношенні до границі при $x \to x_0$, матимемо (4.12). ■

Зауваження

1. *Правило Лопіталя можна застосовувати повторно.*

2. *Застосування правила Лопіталя не виключає застосування стандартних границь та інших способів розкриття невизначеностей.*

3. *За допомогою правила Лопіталя можна розкривати й інші невизначеності* ($\frac{\infty}{\infty}$ — *безпосередньо, інші — після певних перетворень*).

П. 1. Знайти границі

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \ln x)$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin 3x} = a$.

Оскільки всі границі відповідних відношень похідних існують, то розв'язання всіх прикладів писатимемо у формі

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \ldots$$

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \ln x) = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{2} = 0$;

3) $a = \lim\limits_{x \to 0} x^{\sin 3x} = (0^0)$. $\ln a = \ln \lim\limits_{x \to 0} x^{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} (\sin(3x) \cdot \ln x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x) \cdot \ln x \cdot 3x}{3x} =$
$= \lim\limits_{x \to 0} (3x \ln x) = (0 \cdot \infty) = 0$.

Тут використано ті самі міркування, що й у прикладі 2).

Оскільки $\ln a = 0$, то $a = 1$.

4.4.4. Формула Тейлора*)

І.Ньютон поставив перед своїми учнями К.Маклореном, Е.Тейлором задачу про апроксимацію (наближення) функції многочленом. Обидва математики розв'язували цю задачу незалежно один від одного, проте однаковими методами. Отримані ними формули відрізняються в деталях. Наведемо їхні міркування.

Нехай маємо многочлен n-го степеня

$$f(x) = P_n(x).$$

Запишемо цей многочлен за зростаючими степенями різниці $x - x_0$, де x_0 — довільна точка з $\mathbf{R}$, тобто

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти a_i. Маємо

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n^{(n)} = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 a_n, \quad P_n^{(k)}(x) \equiv 0, \quad k > n.$$

Звідси

$$P_n(x_0) = a_0, \quad P_n'(x_0) = a_1, \quad P_n''(x_0) = 2a_2,$$

$$P_n'''(x_0) = 3!a_3, \ \ldots, \ P_n^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

Нарешті,

$$a_0 = P_n(x_0), \quad a_1 = P_n'(x_0), \quad a_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!}, \ \ldots, \ a_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Тоді шукана формула для $P_n(x)$ набирає вигляду

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P_n'(x_0)(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4.13}$$

*) Е.Тейлор (1698—1746), К.Маклорен (1685—1731) — англійські математики.

Це і є формула Тейлора для многочленів, а формула Маклорена — її окремий випадок при $x = 0$, тобто

$$P_n(x) = P_n(0) + P_n'(0)x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (4.14)$$

Довільну функцію (не многочлен) не можна подати за допомогою скінченних сум (4.13) або (4.14). Проте таку функцію можна подати за формулою Лаґранжа на $[x_0, x]$, тобто

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x),$$

де $f'(x)$ обчислена в точці c, а не x_0, як в (4.13). Істотно вважати, що

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

де $P_n(x)$ як в (4.13) або (4.14). $R_n^{*)}(x)$ називають залишковим членом відповідної формули. Лаґранж довів, що коли $f(x)$ має $n + 1$ похідну, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x)\ ((x, x_0)).$$

Існують інші форми для $R_n(x)$.

Коли вважати, що $0! = 1$, то формули Тейлора і Маклорена із залишковим членом у формі (4.15) набирають вигляду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^n, \quad c \in (x_0, x).$$

П. Подати за формулою Маклорена

1) $f(x) = e^x$, 2) $f(x) = \sin x$, 3) $f(x) = \cos x$.

Розв'язання. 1) Маємо $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $f^{n+1}(c) = e^c$.

Отже, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Очевидно $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, тобто експоненціальну функцію замінили параболою.

2) Оскільки (див. 4.3.3) $f^{(n)}(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right)$, то $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$,

*) Від англ. rest, residue — решта.

$f'''(0) = -1, \ldots$ звідки $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n!}x^n + \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2} + c\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Отже, дістаємо, наприклад, $\sin x \approx x$, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$.

3) Маємо

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n!}x^n + \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2} + c\right)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Заміна довільної функції лінійною називається *лінеаризацією* цієї функції. Лінеаризацію функції можна виконати, зокрема, за допомогою формули Тейлора при $n = 0$ (власне, формули Лаґранжа).

РОЗДІЛ 5

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

5.1. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ

За допомогою похідної можна визначити багато елементів поведінки функцій.

5.1.1. Монотонність функцій

Т. Якщо $f \in W(a,b)$, то $f(x)$ зростає (спадає) на (a, b), коли $\forall\ x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

■ Нехай $x_1 < x_2$ — довільні точки з (a, b). За теоремою Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2).$$

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\operatorname{sign}(f(x_2) - f(x_1)) = \operatorname{sign} f'(c)$. Отже, при $f'(c) > 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x)$ зростає. Випадок $f'(x) < 0$ розглядаємо аналогічно. Оскільки результат виконується для довільних x_1 і x_2, то він справедливий для всього інтервалу (a, b). ■

Пропонуємо самостійно сформулювати обернене твердження.

5.1.2. Екстремум*) функцій

О. *Точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл U_{x_0}, що* $\forall\ x \in U'_{x_0}$ (рис.5.1)

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad (f(x) - f(x_0) > 0).$$

Терміни «максимум» і «мінімум» об'єднують загальним терміном «екстремум».

Значення функції в точці екстремуму називають екстремумом функції.

1. *Необхідні умови екстремуму*

З теореми Ролля безпосередньо випливає така теорема.

*) Від лат. extrema — крайній.

Т.1 (Ферма*)). *Якщо $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0 і набуває в цій точці екстремуму, то $f'(x_0) = 0$.*

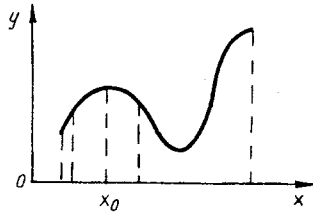


Рис. 5.1

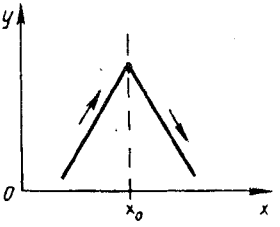


Рис. 5.2

Теорема Ферма не вичерпує всіх варіантів точок, в яких функція може набувати екстремуму. Детальний аналіз рис. 4.5, 4.10, 5.2, 5.3 дає змогу сформулювати таку теорему.

Т. (необхідні умови екстремуму). *Якщо функція $f(x)$ набуває в точці x_0 екстремуму, то або $f(x)$ диференційовна в цій точці і тоді $f'(x_0) = 0$* (рис. 4.10), *або не диференційовна, тобто або $f'(x_0) = \infty$* (рис. 4.5), *або ж $f'(x_0)$ не існує* (рис. 5.3).

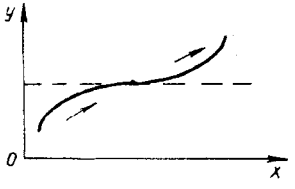


Рис. 5.3

Сформульовані умови не є достатніми. У цьому можна впевнитись, розглянувши рис. 5.3.

Точки x_0, в яких $f'(x_0) = 0$ називають стаціонарними, бо швидкість зміни функції дорівнює нулю і відповідний процес в точці зупиняється. Всі точки, в яких функція може набути екстремуму, називають критичними точками функції.

2. *Достатні умови екстремуму*

Т.2 (перша достатня ознака екстремуму). *Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в деякому околі критичної точки x_0 і $f'(x)$ змінює знак при переході через $x = x_0$, то $f(x)$ має екстремум у цій точці, причому якщо при переході зліва направо знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «−», то максимум, якщо навпаки, — мінімум.*

Справді, при переході через критичну точку x_0 похідні функцій, зображених на рис. 4.5, 4.10, 5.2, змінюють знак і функції мають екстремум (максимум). На рис. 5.3 такої зміни немає, відповідна функція не має екстремуму.

Т.2 (друга достатня умова екстремуму). *Якщо функція $y = f(x)$ двічі диференційовна в точці $x = x_0$, причому $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$ і $f''(x)$ неперервна в околі точки $x = x_0$, то в точці $x = x_0$ $f(x)$ має*

*) П. Ферма (1601—1665) — французький математик. Йому належить знаменита теорема: «Рівняння $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ і $xyz \neq 0$ не має розв'язків у цілих числах».

екстремум, причому максимум, якщо $f''(x_0) < 0$, *і мінімум, якщо* $f''(x_0) > 0$.

■ Нехай $y = f(x)$ задовольняє умови теореми. Запишемо функцію за формулою Тейлора так ($n = 1$):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2, \quad c \in (x_0, x).$$

Оскільки $f'(x_0) = 0$, то

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Ураховуючи неперервність $f''(x)$ і теорему про збереження знака неперервної функції (т. 1, п. 3.4.3), матимемо

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}(f''(c)) = \operatorname{sign}(f''(x_0)).$$

Тепер дістаємо (аналогічно при $f''(x_0) < 0$)

$$(f''(x_0) > 0) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) > 0) \Rightarrow (\max f(x) = f(x_0)). \ ■$$

Розглянутий екстремум називають «локальним», бо він характеризує поведінку функції тільки в околі деякої точки.

3. *Найбільше і найменше значення функції*

Проаналізуємо графік функції, зображеної на рис. 5.1. Згідно з цим графіком для функції, заданої на замкненому інтервалі, максимум може не бути найбільшим значенням (це стосується мінімуму та найменшого значення). У цьому разі треба знайти критичні точки функції, відібрати ті з них, які належать даному інтервалу. Після цього треба знайти значення функції як в точках, які залишилися, так і в кінцевих точках інтервалу. Серед здобутих значень відібрати найбільше та найменше. Ці значення називають ще глобальним максимумом і мінімумом функції.

Введемо такі позначення: $\max\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ — найбільше значення $f(x)$ на $[a, b]$; $\min\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ — найменше значення $f(x)$ на $[a, b]$.

П. Дослідити на екстремум і монотонність функцію $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Знайти найбільше й найменше значення $f(x)$ на $[0, 2]$.

Розв'язання. Очевидно $X = \mathbf{R}$. Маємо $f'(x) = 3x - 3$. Отже, $f'(x) = 0$ при $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, тобто $\{-1, 1\} \subset \mathbf{R}$. Точки x_1 і x_2 ділять область визначення $f(x)$ на три інтервали (рис. 5.4). Знак похідної в кожному інтервалі визначимо за її знаком у будь-якій точці цього інтервалу, взявши, наприклад, $f'(-2) > 0$, $f'(0) < 0$, $f'(2) > 0$. На основі відповідних теорем про монотонність і екстремум функції маємо:

Рис. 5.4

$f \uparrow$ при $x \in [-\infty, -1]$ і при $x \in [1, \infty)$;

$f \downarrow$ при $x \in [-1, 1]$;

$$\max f(x) = f(-1) = 3, \quad \min f(x) = f(1) = -1.$$

Щодо найбільшого і найменшого значень, то, оскільки $\{-1\} \notin [0, 2]$, досить знайти $f(1) = -1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. Отже,

$$\max_{x \in [0, 2]} f(x) = f(2) = 3, \quad \min_{x \in [0, 2]} f(x) = f(1) = -1.$$

5.1.3. Опуклість і угнутість функцій

В основу наступного означення покладено спостереження над графіком функцій, зображених на рис. 5.5.

О. *Функція називається опуклою (угнутою) на інтервалі, якщо всі точки її графіка лежать нижче (вище) точок дотичних, проведених до графіка функції в кожній точці інтервалу (крім точок дотику).*

Користуватимемося позначеннями $\cap$, $\cup$ відповідно для опуклості й угнутості.

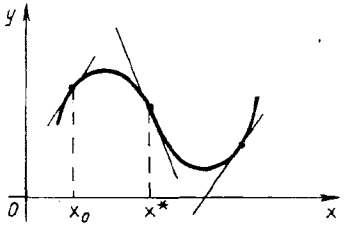


Рис. 5.5

Т.1. *Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційовна на (a, b). Тоді $f(x)$ опукла (угнута), якщо $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ $\forall\ x \in (a, b)$.*

■ У довільній точці $x_0 \in [a, b]$ проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$. Матимемо

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Запишемо $f(x)$ у вигляді формули Тейлора $(n = 1)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Розглянемо різницю

$$y - f(x) = -\frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Очевидно, що

$$\operatorname{sign}(y - f(x)) = \operatorname{sign}(f''(c)).$$

Нехай $f''(x) > 0$ $\forall\ x \in [a, b]$. Тоді $f''(c) > 0$ і $y - f(x) > 0$, або $y > f(x)$, тобто $f(x)$ угнута на $[a, b]$. Аналогічно й для $f''(x) < 0$. Оскільки x_0 вибрано довільно, то теорему доведено. ■

О. *Точка, в якій функція змінює опуклість на угнутість називається точкою перегину функції* (на рис. 5.5 це точка $x = x^*$).

Т.2 (достатня умова перегину). *Якщо $f''(x_0) = 0, \infty$ або не існує і $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, то x_0 є точкою перегину $f(x)$.*

Якщо функція $y = f(x)$ така, що $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то, для того щоб з'ясувати, чи є точка x_0 точкою екстремуму або точкою перегину, слід звернути увагу на парність чи непарність n (довести це можна за допомогою формули Тейлора з відповідним числом членів).

5.1.4. Асимптоти функції

Цей пункт не пов'язаний з диференціальним численням, але доповнює попередню інформацію про елементи поведінки функції.

У п. 2.1.4 було дано означення асимптоти і розглянуто асимптоти гіперболи. Для довільних функцій розрізняють вертикальні й похилі, зокрема горизонтальні асимптоти.

У разі вертикальної асимптоти $x = x_0$ маємо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

або хоча б при $x \to x_0 - 0$ чи $x \to x_0 + 0$.

Перейдемо до похилих асимптот $y = kx + b$ функції $y = f(x)$. При цьому означення асимптоти еквівалентне тому, що $f(x) - y \to 0$ при $x \to \infty$. Тоді матимемо

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0, \tag{5.1}$$

або

$$\lim_{x \to \infty} \left(x \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) \right) = 0.$$

Звідси

$$\left(\lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} = 0 \right) \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0.$$

Отже,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} . \tag{5.2}$$

З рівності (5.1) знаходимо (після того як знайдено k)

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx). \tag{5.3}$$

Зауваження. При знаходженні k і b за формулами (5.2), (5.3) можна діставати різні їх значення при $x \to -\infty$ і $x \to \infty$, тобто функція може мати дві різні похилі асимптоти при $x \to -\infty$ і $x \to \infty$.

П. Знайти асимптоти функції $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Розв'язання. Вертикальна асимптота $x = 0$. Для похилої асимптоти маємо $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x^2} - x \right) = 2$, тобто $y = x + 2$.

5.1.5. Загальна схема дослідження функцій

Одним із способів побудови графіка функції є його побудова «за точками». Сполучаючи значення функції на дискретній множині значень аргументу (сітці), можна дістати будь-який результат (рис. 5.6).

Диференціальне числення дає змогу об'єктивно відтворити графік функції із збереженням його характерних особливостей.

Схема дослідження функції.

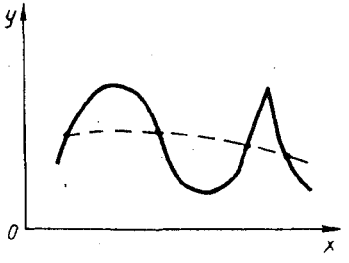


Рис. 5.6

1. Знаходимо область визначення X функції.
2. Перевіряємо функцію на періодичність, парність, непарність. У разі необхідності знаходимо характерні точки графіка, наприклад, точки перетину з координатними осями.
3. Знаходимо $f'(x)$ і критичні точки $f(x)$.
4. Знаходимо $f''(x)$ і критичні точки $f'(x)$.
5. Здобуті дані зводимо в таблицю, з якої дістаємо інтервали монотонності та опуклості чи угнутості, а також точки екстремуму та перегину (заповнивши відповідні клітини знаками похідних функції).
6. Знаходимо асимптоти функції.
7. Будуємо графік функції.

П.1. Дослідивши рівняння (2.10), тобто $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, побудувати еліпс.

Розв'язання. Зобразимо еліпс спочатку в межах першої чверті $x \geq 0$, $y \geq 0$, а потім, користуючись його симетрією, і на всій площині. Отже, дослідимо функцію, $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ при $x \in [0, a]$. Якщо $x \in (0, a)$, то $y' = -\dfrac{b}{a}(x/\sqrt{a^2 - x^2})$.

Отже, графік спадає від $y(0) = b$ до $y(a) = 0$. Знайдемо другу похідну: $y'' = -ab(a^2 - x^2)^{-3/2}$. Оскільки $y'' < 0$, то графік опуклий.

Асимптот немає (вертикальних асимптот немає, бо функція неперервна на скінченному інтервалі, а похилих — тому що інтервал скінченний). Будуємо еліпс (див. рис. 2.8).

П.2. Дослідивши рівняння (2.1.2), тобто $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, побудувати гіперболу.

Розв'язання. Дослідимо функцію $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, при $x \in [a, \infty)$. Якщо $x \in (a, \infty)$, то $y' = \frac{b}{a} x (x^2 - a^2)^{-1/2}$.

Оскільки $y' > 0$, то y зростає від $y(a) (= 0)$ до $\infty (= \lim\limits_{x \to \infty} y)$. Маємо $y'' = -ab(a^2 - x^2)^{3/2} < 0$, тобто графік опуклий. Як і у випадку еліпса, вертикальних асимптот немає.

Знайдемо похилі $y = kx + b$. Маємо $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a} \lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - a^2}/x) = \frac{b}{a}$. Розкриваючи невизначеність $\infty - \infty$ у випадку ірраціональності, знаходимо $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \frac{b}{a} \lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = -ab \lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - a^2} + x)^{-1} = 0$.

Отже, гіпербола має асимптоти $y = \frac{b}{a} x$, $y = -\frac{b}{a} x$.

Будуємо гіперболу (рис. 2.9).

П.3. Дослідити функцію $f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ і побудувати графік.

Розв'язання. Маємо

1. $X = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

2. $f(x)$ неперіодична. Оскільки $f(-x) = -\frac{2x + 1}{(x + 1)^2}$, тобто $f(-x) \neq -f(x)$ і $f(-x) \neq f(x)$, то $f(x)$ ні парна, ні непарна.

3. $f'(x) = -\frac{2x}{(x - 1)^3}$, $x_1 = 0$.

4. $f''(x) = \frac{4x + 2}{(x - 1)^4}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

5. Складаємо таблицю:

x	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	—	—	—	0	+	∞	—
$f''(x)$	—	0	+	+	+	∞	+
$f(x)$	↘	перегин $-8/9$	↘	min -1	↗	∞	↘

(щодо знаків у таблиці див. приклад в п. 5.1.2).

Знайдемо асимптоти. Вертикальною асимптотою є $x = 1$, а похилою $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x(x - 1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = 0.$$

Отже, $y = 0$.

6. Графік цієї функції зображено на рис. 5.7.

5.2. ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ НА НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ

Люди в своїй практичній діяльності намагаються все зробити якомога краще, затративши найменше часу і матеріальних засобів, але дістати найбільший ефект. Крім того, всі процеси в природі

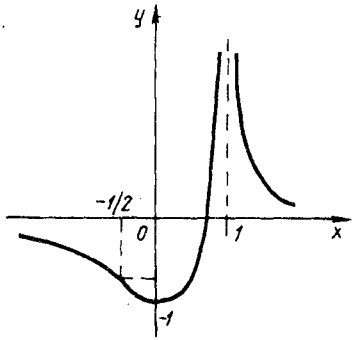


Рис. 5.7

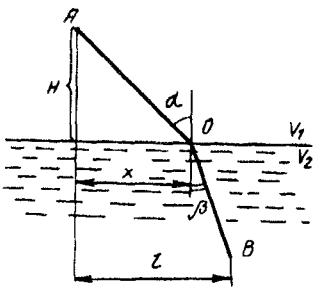


Рис. 5.8

відбуваються так, що деяка характеристика процесу набуває екстремуму. Вся складність теорії екстремуму полягає не в тому, щоб знайти похідну і прирівняти її до нуля, а в тому, яку з характеристик вибрати для оптимізації.

Розглянемо кілька задач практичного змісту.

П.1. Знайти форму променя світла, який заломлюється на межі двох середовищ так, щоб з точки A в точку B (рис. 5.8) промінь пройшов за найкоротший час (*принцип Ферма* для світла).

Розв'язання. Виходитимемо з того, що в однорідному середовищі світло рухається по прямій зі сталою швидкістю. Його шлях в повітрі $AO = \sqrt{x^2 + H^2}$. При цьому промінь рухається зі швидкістю v_1. У воді шлях променя $OB = \sqrt{(l - x)^2 + h^2}$, а швидкість v_2 ($v_1 > v_2$). Тоді перехід з A в B здійсниться за час

$$t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{h^2 + (l - x)^2}\,.$$

Згідно з необхідною умовою екстремуму

$$\frac{x}{v_1\sqrt{H^2 + x^2}} = \frac{lx}{v_2\sqrt{h^2 + (l - x)^2}}\,.$$

Як бачимо з рис. 5.8

$$\sin\alpha = x/\sqrt{H^2 + x^2}\,, \quad \sin\beta = (l - x)/\sqrt{h^2 - (1 - x)^2}\,.$$

Отже, $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Це є закон Снелліуса для заломлення світла на межі двох середовищ. Оскільки закон встановлено експериментально, то підтверджується принцип Ферма, на якому базується розв'язання задачі.

Достатні умови екстремуму тут не перевірено, бо це недоцільно, оскільки характер екстремуму зрозумілий з практичного змісту задачі.

П.2. Треба збудувати циліндричне нафтосховище заданого об'єму $V = \pi R^2 h$ (рис. 5.9) так, щоб витрати на спорудження його були найменшими.

Розв'язання. Витрати визначаються в основному вартістю матеріалів і трудомісткістю виготовлення. Зрозуміло, що обидва види затрат пропорційні до площі поверхні циліндра.

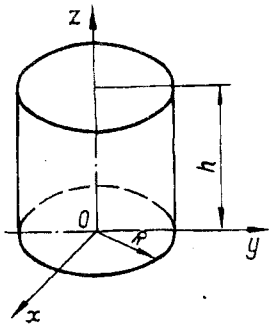


Рис. 5.9

Таким чином, за критерій оптимізації слід взяти площу поверхні циліндра $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

Дістати функцію двох змінних R і h, на які накладено додаткову залежність, оскільки об'єм заданий. Вилучаючи величину h з двох рівностей, маємо

$$S(R) = 2\pi R^2 - 2V/R, \quad 0 < R < \infty.$$

Скористаємося необхідною умовою екстремуму ($S'(R) = 0$). Маємо $4\pi R - 2V/R^2 = 0$, звідки $h = 2R$.

Оскільки $S''(R) = (4\pi + 4V/R^3) > 0 \ \forall \ R > 0$, то $S(R)$ має мінімум. Це єдиний екстремум $S(R)$ на відкритому інтервалі. Отже, $S(R)$ при $h = 2R$ набуває найменшого значення для вказаного R.

Таким чином, висота циліндричного нафтосховища повинна дорівнювати його діаметру (якщо брати до уваги оптимізацію за вказаним критерієм). Тепер ще одна подібна задача.

П.3. Треба з найменшими затратами виготовити циліндричне відро, об'єм якого $V = \pi R^2 h$ (те ж нафтосховище, але менших розмірів і без верхньої кришки).

Розв'язання. Маємо $S(R) = \pi R^2 + 2V/R$, $S'(R) = 0$, звідки $R = h$.

Проте такі низькі відра не роблять. Тут справа в тому, що великий резервуар складається з багатьох листів і загальна довжина зварних швів приблизно пропорційна до його поверхні. Відро ж виготовляють з одного листа заліза, вартість якого нижча вартості роботи із зварювання шва на бічній поверхні та її спряженні з дном. Загальна довжина шва не пропорційна до поверхні.

Якщо виходити лише з трудомісткості, ігноруючи вартість матеріалу, то відро повинне мати конічну форму. Саме так роблять пожежні відра. Вони мають кілька специфічних переваг над звичайними відрами, мають велику відкриту площу, через те їх легко заповнювати водою та виливати її. Воду з них легко виливати ще й через те, що центри ваги таких відер (разом з водою) розміщені високо.

Якщо зважити на вартість і трудомісткість виготовлення, то матимемо класичне відро у формі зрізаного конуса. Проте, коли відро (барило) виготовляти з дерев'яних клепок, де швів багато, то знайдений розв'язок правильний ($R = h$).

5.3. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СКІНЧЕННИХ РІВНЯНЬ

Скінченним рівнянням називають рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ — довільна функція. Назва цих рівнянь говорить про те, що вони містять скінченні величини на відміну від так званих диференціальних рівнянь, які містять диференціали змінних.

Нагадаємо, що коренем (нулем) рівняння $f(x) = 0$ *називається число* $x = x_0$ *таке, що* $f(x_0) \equiv 0$.

Якщо $f(x)$ — многочлен, то відповідне рівняння, тобто $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ називають *алгебричним* (степеня n, якщо $a_n \neq 0$), всі інші рівняння називають *трансцендентними*.

В інженерній практиці часто постає питання про наближене розв'язування рівнянь. Це пояснюється тим, що не для всіх класів рівнянь розроблені методи їх розв'язування, і, крім того, оскільки не існує абсолютно точних вимірювань, тобто значень певних величин, від яких залежать коефіцієнти рівнянь, то й немає необхідності знаходити точні значення коренів рівнянь. Виникає тільки питання про точність знайденого кореня.

Усі методи наближеного розв'язування рівнянь ділять на дві групи. До першої належать ті, які дають змогу відділити корінь, тобто вказати деякий інтервал, до якого цей корінь належить, до другої — ті, які дають змогу уточнити корінь, тобто знайти його з будь-якою точністю.

5.3.1. Метод проб

Цей метод належить до першої групи. У подальшому матимемо справу з рівняннями

$$f(x) = 0. \tag{5.4}$$

Нехай $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, набуває на його кінцях значення різних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тоді з теореми 3 (п. 3.4.3) випливає, що існує таке x_0, що $f(x_0) = 0$ (корінь (5.4)). Якщо функція $f(x)$ монотонна на $[a, b]$, то цей корінь єдиний. Вибираємо довільним способом $c \in (a, b)$ — нульове наближення до x_0, наприклад, c_0 — середина $[a, b]$. З'ясуємо, в якому з інтервалів

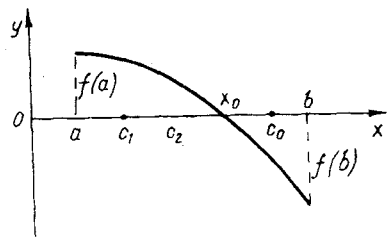


Рис. 5.10

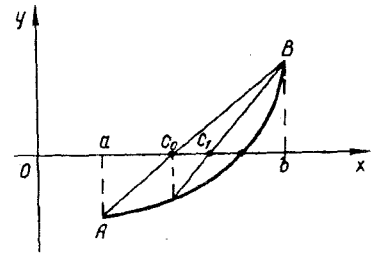


Рис. 5.11

$[a, c]$ чи $[c, b]$ знаходиться корінь, і в тому інтервалі виберемо наступне наближення c_1 до кореня x_0 так, як і c_0. Процес продовжують доти, поки це можливо (рис. 5.10).

Ще один спосіб першої групи — графічний, він добре відомий зі шкільного курсу математики.

У подальшому вважатимемо, що корінь ізольовано в інтервалі $[a, b]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають знак на $[a, b]$ (якщо це не так, то беруть частину інтервалу, де зазначена властивість $f(x)$ виконується). Переходимо до способів другої групи.

5.3.2. Метод хорд

Ідея цього методу полягає в тому, що замість точки перетину графіка $f(x)$ з віссю Ox (точки x_0) беруть точку перетину з цією віссю хорди, яка стягує крайні точки графіка функції на інтервалі ізоляції кореня (рис. 5.11).

Складемо рівняння хорди як рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Оскільки точка $(c_0, 0)$ належить хорді, то

$$c_0 = a - f(a)(b - a)/(f(b) - f(a)).$$

Далі замість a беремо c_0. Повторюючи цей процес, знаходимо

$$c_1 = c_0 - f(c_0)(b - c_0)/(f(b) - f(c_0)).$$

Продовжимо процес. На n-му кроці матимемо

$$c_n = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1})(b - c_{n-1})}{f(b) - f(c_{n-1})}.$$

Це є формула методу хорд. Метод добре алгоритмізований, але наближення до кореня однобічне.

5.3.3. Метод дотичних

Ідея цього методу полягає в тому, що замість точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox знаходять точку перетину з цією віссю дотичної до графіка в одній з точок ізоляції кореня. Графічний аналіз усіх випадків свідчить про те, що такою точкою буде та, в якій знаки $f(x)$ і $f''(x)$ однакові. Нехай такою точкою є $B(b, 0)$.

Рівняння дотичної має вигляд (рис. 5.12)

$$y = f(b) + f'(b)(x - b).$$

Оскільки точка B лежить на дотичній, то

$$c_0 = b - f(b)/f'(b).$$

Процес продовжуємо далі. На n-му кроці дістанемо

$$c_n = c_{n-1} - f(c_{n-1})/f'(c_{n-1}).$$

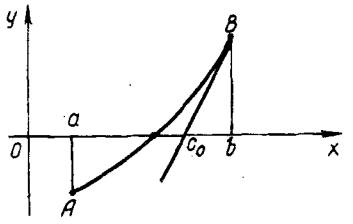


Рис. 5.12

Це є формула методу дотичних, запропонованого Ньютоном. Метод також добре алгоритмізований, але теж дає однобічне наближення.

Розглянемо тепер так званий комбінований метод. Він полягає в послідовному застосуванні методів хорд і дотичних з урахуванням того, що вони дають однобічні наближення до шуканого кореня, але з різних боків. Обчислення виконується доти, поки не буде справедливою нерівність

$$|c_n - c_{n-1}| < \delta,$$

де δ — абсолютна максимально допустима похибка, яку задають заздалегідь.

5.3.4. Метод ітерацій*) (послідовних наближень)

Зведемо рівняння $f(x) = 0$ до вигляду $x = \varphi(x)$ (додамо, наприклад, до обох частин x). За перше наближення візьмемо довільне число x_1 або $x_1 = a$ чи $x_1 = b$, якщо корінь ізольований. Наступні наближення будуємо за схемою

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \tag{5.5}$$

Дістанемо послідовність $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Метод побудови такої послідовності називають методом ітерацій.

Т. *Послідовність, утворена за схемою (5.5), є збіжною до кореня рівняння* $f(x) = 0$, *якщо* $|\varphi'(x)| < 1$.

■ Розглянемо

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})|. \tag{5.6}$$

За теоремою Лагранжа і умовою $|\varphi'(x)| < 1$, маємо $|x_{n+1} - x_n| = |\varphi'(c)|\,|x_n - x_{n-1}| < |x_n - x_{n-1}|$, тобто $d(x_{n+1}, x_n) < d(x_n, x_{n-1})$. Вва-

*) Від лат. iteratio — повторення.

жатимемо, що звідси випливає збіжність $\{x_n\}$. Можна показати, що ця послідовність є збіжною саме до кореня рівняння $f(x) = 0$. ■

Метод ітерацій добре алгоритмізований, кількість необхідних ітерацій визначається з умови (5.6).

П. Знайти корінь рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ з точністю $\delta = 0.01$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $x = \sqrt[3]{3x - 1}$. Візьмемо $x_1 = 2$. Маємо $x_2 = 1.71$, $x_3 = 1.60$, $x_4 = 1.56$, $x_5 = 1.54$, $x_6 = 1.535$. Оскільки $|x_6 - x_5| < 0.01$, то $x_0 \underset{0.01}{=} 1.54$. Якщо рівняння записати у вигляді $x = \frac{1}{3}(1 + x^3)$, то процес розбіжний. (Пропонуємо самостійно перевірити це.)

Зауважимо, що зведення рівняння $f(x) = 0$ до $x = \varphi(x)$ неоднозначне. Наприклад, у випадку рівняння $\sin x - \ln x = 0$ $x = x + \sin x - \ln x$, $x = \operatorname{Arcsin} \ln x$, $x = e^{\sin x}$.

РОЗДІЛ 6

ФУНКЦІЇ n ЗМІННИХ $(n \geq 2)$

6.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. ПОХІДНА. ДИФЕРЕНЦІАЛ

6.1.1. Позначення

Раніше вже було означено що функцію n змінних як відображення множини $X \subset \mathbf{R}^n$, на множину $Y \subset \mathbf{R}$. Елементи з X позначаємо як $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отже, функціональну залежність для n змінних в аналітичній формі подаватимемо як $y = f(x)$ чи $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Перше позначення не відрізняється від позначення для функції однієї змінної і сутність його стає зрозумілою тільки з контексту. Якщо $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, то можна застосувати й позначення $y = f(M)$. Тут теж не передбачено кількість змінних; при цьому кажуть про функцію точки. Поширені й інші позначення. Так, для функції двох змінних пишуть $z = f(x, y)$ або $u = f(x, y)$. Зазначимо ще, що геометричною інтерпретацією функції двох змінних є поверхня (рис. 6.1). Інші способи задання функцій наведено в п. 3.1.1.

6.1.2. Границя функції. Неперервність

У подальшому розглядатимемо, як правило, функції двох змінних $z = f(x, y)$.

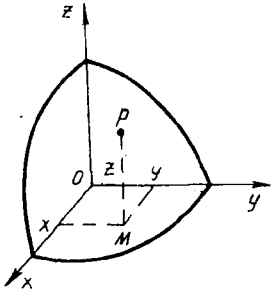


Рис. 6.1

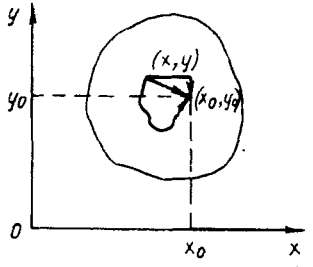


Рис. 6.2

О. *Околом точки називається довільна відкрита область (без своєї межі), яка містить дану точку.*

У двовимірному випадку під околом розуміють круг, квадрат і т.д. Прямування однієї точки до іншої вже в двовимірному випадку можна здійснити нескінченним числом способів (рис. 6.2).

О. *Стала A називається подвійною границею функції $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл точки (x_0, y_0) $U_{(x_0, y_0)}$, що для $(x, y) \in U \setminus \{x_0, y_0\}$ виконується нерівність*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Вказаний факт коротко записують так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Можна знайти також $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$, а тоді $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ (і навпаки), тобто

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = B, \qquad \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = C.$$

Границі B і C називають повторними. Взагалі $A \neq B \neq C$.

П.1. Для $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ не існує.

П.2. Довести, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2 - x^2y^2} = 1$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $x \to 0$ і $y \to 0$, то розглянемо такі x і y, що $|x| < 1$, $|y| < 1$. Тоді $(x \neq 0, y \neq 0)$

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2 - x^2y^2} - 1 \right| = \left| \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2(1 - x^2)} \right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2 < \varepsilon,$$

або $|y| < \sqrt{\varepsilon}$ чи $-\sqrt{\varepsilon} < y < \sqrt{\varepsilon}$.

Горизонтальна смужка $-\sqrt{\varepsilon} < y < \sqrt{\varepsilon}$ (можна взяти її частину) є околом точки $(0, 0)$.

У загальному випадку n-кратну границю функції визначають, як і подвійну.

О. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці (x_0, y_0), якщо*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Основні властивості границь і неперервних функцій справедливі й у кратному випадку.

6.1.3. Приріст функції. Частинні похідні й диференціали

Для функції $z = f(x, y)$ *повний і частинні прирости* у відповідних точках визначаються відповідно як

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \quad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

П.1. Знайти Δz, $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$ для $z = xy$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо $\Delta_x z = y\Delta x$, $\Delta_y z = x\Delta y$, $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Очевидно, що $\Delta_x z + \Delta_y z \neq \Delta z$.

Неперервність функції $z = f(x, y)$ у точці (x, y) можна тепер означити так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Очевидно (див. П.1), що $z = xy$ — неперервна в $\mathbf{R}^2$. Можна говорити й про розриви функції.

П.2. Дослідити на неперервність функцію $z = xy/(x^2 + y^2)$.

Р о з в' я з а н н я. Ця функція має розрив у точці $M_0(0,0)$. Справді, нехай $y = kx$. Тоді $z = k/(1 + k^2)$ і границя залежить від напряму, в якому $M \to M_0$, тобто $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Частинні похідні для функцій n змінних визначаються, як і похідні для функції однієї змінної.

Наприклад, для $z = f(x, y)$:

$$z'_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

$$z'_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Геометричний зміст z'_x і z'_y визначається відповідними дотичними до поверхні $z = f(x, y)$.

Частинні диференціали визначаються як головні частини частинних приростів функції

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\, dy.$$

П.3. Знайти z'_x, z'_y для $z = x^2y^3 + 2x - y + 1$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо (при знаходженні z'_x величина y — стала і навпаки) $z'_x = 2xy^3 + 2$ і $z'_y = 3x^2 + y^2 - 1$.

6.1.4. Повний диференціал

Для функції $z = f(x, y)$ розглянемо і перетворимо, застосовуючи теорему Лаґранжа, повний приріст у точці (x, y). Маємо

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$

$$= (f(x + \Delta x), y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) =$$

$$= \frac{\partial f(c_1, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, c_2)}{\partial y} \Delta y, \qquad (6.1)$$

де $c_1 \in (x, x + \Delta x)$, $c_2 \in (y, y + \Delta y)$.

Нехай в (x, y) обидві частинні похідні неперервні. Оскільки $\frac{\partial f}{\partial x}$ неперервна, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(c_1, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

звідки за теоремою 2 (п. 3.2.2), в околі (x, y)

$$\frac{\partial f(c_1, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$$

(ε_1 — нескінченно мала при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$).

Аналогічний вираз маємо й для $\frac{\partial f(x, c_2)}{\partial y}$. Тоді, враховуючи (6.1), дістаємо

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \qquad (6.2)$$

О. *Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною в точці (x, y), якщо в деякому околі цієї точки $\Delta f(x, y)$ набирає вигляду (6.2).*

Аналогічно одновимірному випадку диференціал визначимо як головну частину (6.2):

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \qquad (6.3)$$

($\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$). Отже, $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Зазначимо, що на відміну від функції однієї змінної диференційовність функції двох змінних передбачає не тільки існування й обмеженість частинних похідних, а й їх неперервність.

Геометричне тлумачення диференціала полягає в тому, що $df(x, y)$ є приростом аплікати дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці (x, y).

Сама дотична площина до поверхні $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має вигляд

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Запис $|_{(x_0, y_0)}$ означає, що відповідну величину слід обчислювати у вказаній точці.

Оскільки нормаль до поверхні — це перпендикуляр до дотичної площини до поверхні в точці дотику, то рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Для функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, як і в (6.3), дістаємо

$$df = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Застосування повного диференціала ті самі, що й для функції однієї змінної, і базуються на рівності $\Delta z \approx dz$.

Зокрема, у випадку $z = f(x, y)$ похибка Δz при обчисленні z за умови, що x і y виміряні з похибками Δx і Δy, набирає вигляду

$$|\Delta z| \leq \max \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y|. \qquad (6.4)$$

П. Фізична величина u обчислюється за формулою $u = \sqrt{\frac{x}{y}}$. Величини x і y виміряно з похибками Δx і Δy. Знайти похибку при обчисленні u.

Р о з в' я з а н н я. Використаємо (6.4). Маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2y} \times \sqrt{\frac{x}{y}}$. Остаточно $|\Delta u| \leq \max \frac{1}{2\sqrt{xy}} |\Delta x| + \max \frac{1}{\sqrt{2y}} \times \sqrt{\frac{x}{y}} |\Delta y|$.

6.1.5. Похідна складеної і неявної функцій

Нехай $z = z(u, v)$, а $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тоді $z = z^*(x, y)$ і питання знаходження z'_x і z'_y резонні. Нехай усі похідні існують. Оскільки $\Delta z \approx dz$, то

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v,\ \Delta u = du,\ \Delta v = dv.$$

Зафіксуємо $y (y = \text{const})$. Тоді

$$\Delta_x z \approx \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_y v,\quad \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \approx \frac{\Delta z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Якщо $u = u(x)$, $v = v(x)$, то з виразу для $\frac{dz}{dx}$ дістанемо вираз для *повної похідної*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Повний диференціал складеної функції має вигляд

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Отже,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Таким чином, встановлено *інваріантність форми повного диференціала функції*. Маємо повну аналогію з функцією однієї змінної.

Розглянемо неявні функції. Нехай маємо неявну функцію однієї змінної $F(x,y) = 0$, для якої $dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$. Звідси

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Тепер розглянемо неявну функцію двох змінних $F(x, y, z)=0$. Аналогічно попередньому

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0.$$

Нехай $y = \text{const}$, тобто $dy = 0$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z = 0$.

При $\Delta x \to 0$ дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

6.1.6. Частинні похідні й диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Оскільки для $z = f(x,y)$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \psi(x, y)$ і якщо $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ можна диференціювати по x або y, то дістаємо похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

або відповідно

$$z''_{xx},\ z''_{yy},\ z''_{xy},\ z''_{yx}.$$

Останні дві похідні називають *мішаними похідними другого порядку*. Через те що повторні границі для функції двох змінних не збігаються, а похідна — це границя, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Рівність мішаних похідних регламентується такою теоремою.

Т. *Якщо функція $z = f(x,y)$ та її похідні z'_x, z'_y, z''_{yx}, z''_{xy} неперервні в точці (x,y) і деякому її околі, то в цій точці $z''_{xy} = z''_{yx}$.*

Теорему подаємо без доведення.

Зазначимо, що аналогічні теореми слушні для мішаних похідних довільного порядку функцій довільного числа змінних.

Надамо повному диференціалу (6.3) операторного вигляду (див. 3.3.1)

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)z,$$

де оператор повного диференціала

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy.$$

Останній вираз зручний для знаходження другого диференціала:

$$d^2 = d(d) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,(dy)^2.$$

Аналогічну рівність маємо для n-го диференціала.

Тепер формулу Тейлора для $y = f(x)$ можна записати у вигляді:

$$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(\Delta x)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(\Delta x)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x),\ \Delta x = x - x_0;$$

$$\Delta f(x) = df(x_0) + \frac{1}{2!}\,d^2f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}\,d^nf(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\,d^{n+1}f(c).$$

Такий самий вигляд має формула Тейлора й для функцій n змінних.

6.2. СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

6.2.1. Скалярне поле

О. *Скалярним полем називається область простору, в кожній точці якої задано деяку скалярну величину.*

Прикладами скалярних полів є поля температур, густини речовини. Для того щоб визначити скалярне поле, досить задати відповідну функцію u. В $\mathbf{R}^2$ це $u(x, y)$ в $\mathbf{R}^3$ це $u(x,y,z)$ і т.д.

Для наочності сприйняття скалярного поля в двовимірному випадку вводять лінії рівня, які є лініями перетину поверхні $u = u(x, y)$, що визначає поле, і площини $u = c$ (рис. 6.3). Рівняння ліній рівня в площині XOY є $u(x, y) = c$ (аналог географічної карти).

Для тривимірного поля маємо поверхні рівня, рівняння яких

$$u(x, y, z) = c.$$

6.2.2. Похідна за напрямом

В одновимірному випадку похідна функції характеризує швидкість зміни функції в даній точці в напрямі осі Ox. У двовимірному випадку частинні похідні характеризують те саме в напрямі координатних осей. Розглянемо характеристику функції в довільному напрямі.

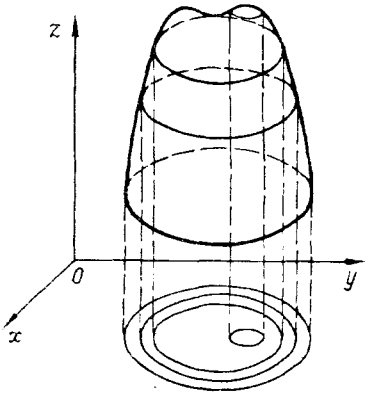


Рис. 6.3

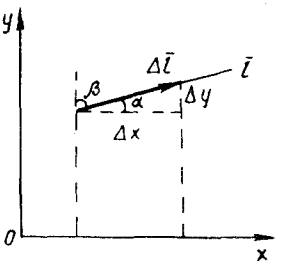


Рис. 6.4

Нехай скалярне поле визначається функцією $u = f(x,y)$ на деякій області, що містить точку $M(x,y)$. З цієї точки виходить промінь l, напрям якого визначається вектором $\overline{\Delta l} = (\Delta x, \Delta y)$. Очевидно (рис. 6.4), що $\cos\alpha = \Delta x/\Delta l$, $\cos\beta = \Delta y/\Delta l$, де α, β — кути між $\overline{\Delta l}$ і координатними осями. Згідно з (6.2) повний приріст $u(x,y)$ у точці M має вигляд

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y.$$

Поділимо вираз для Δu на Δl. Маємо

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta l} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta l},$$

або

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta.$$

Нехай $\Delta l \to 0$. Тоді $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ і $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$. Отже,

$$\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$$

О. *Похідною даної функції за даним напрямом називається границя відношення приросту функції в даному напрямі до приросту довжини в цьому напрямі, якщо остання прямує до нуля.*

Беручи до уваги означення, дістаємо

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta. \tag{6.5}$$

У тривимірному випадку

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

6.2.3. Градієнт*)

Нехай плоске скалярне поле визначається функцією $u = f(x,y)$ в деякій області, а в точці $M(x,y)$ цієї області знайдені похідні за всіма напрямами, тобто (6.5). Знайдемо той напрям, уздовж якого $u = f(x,y)$ змінюється найбільше.

Крім вектора $\underline{l}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$, розглянемо ще вектор $\bar{s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, де відповідні похідні обчислені в точці M. Тоді згідно з (1.38)

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \bar{s}\,\bar{l}^0 = |\bar{s}|\,|\bar{l}^0|\cos|\hat{\bar{s}\,\bar{l}^0}| = |\bar{s}|\cos(\hat{\bar{s}\,\bar{l}^0}),$$

$$\max_{l}\frac{\partial f}{\partial l} = \max_{l}(|\bar{s}|\cos(\hat{\bar{s}\,\bar{l}^0})) = |\bar{s}|. \tag{6.6}$$

$\frac{\partial f}{\partial l}$ набуває максимуму за умови, що $\cos(\hat{\bar{s}\,\bar{l}^0}) = 1$, або $\bar{s} \uparrow\uparrow \underline{l}^0$, тобто коли за відповідний напрям взяти напрям спеціально побудованого вектора $\bar{s}$, який називають *градієнтом* $u = f(x,y)$ у даній точці, тобто

*) Від лат. gradientis — крокуючий.

$$\text{grad } u \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Означення ґрадієнта таке саме і для $u = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Отже, *практичний зміст ґрадієнта скалярного поля в даній точці полягає в тому, що ґрадієнт визначає напрям, в якому швидкість зміни скалярного поля в даній точці найбільша,* причому модуль найбільшого значення швидкості дорівнює модулю ґрадієнта.

З рівності (6.6) випливає, що коли $\vec{l} \perp \overrightarrow{\text{grad}}\, u$, то $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$.

Ще одна властивість ґрадієнта полягає в тому, що ґрадієнт поля в даній точці нормальний до лінії рівня поля в цій самій точці.

Справді, нехай лінія рівня $u(x, y) = c$, тобто $F(x, y) = u(x, y) - c = 0$. Кутовий коефіцієнт дотичної до цієї лінії $k_1 = \tan\alpha = -\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{u'_x}{u'_y}$ (розглянуто рівняння лінії рівня в неявній формі). Кутовий коефіцієнт ґрадієнта $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$. Очевидно, що $k_1 k_2 = -1$, тобто виконується умова перпендикулярності векторів (2.6).

Отже, скалярне поле має дві характеристики — похідну за напрямом і ґрадієнт.

6.3. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

6.3.1. Необхідні й достатні умови екстремуму

До означення точки екстремуму функції двох змінних приходимо так само, як і для функцій однієї змінної.

Нехай функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$ і має в ній екстремум. Перетнемо поверхню $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$. Тоді функція $z(x) = f(x, y_0)$ має екстремум при $x = x_0$. Ураховуючи необхідні умови екстремуму в одновимірному випадку, дістаємо $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = 0$. Аналогічно $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = 0$. Тобто *необхідні умови* екстремуму функції двох змінних мають вигляд

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = 0. \end{cases}$$

Ці умови не є достатніми.

П. Знайти екстремум функції $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$ (гіперболічний параболоїд (див. п. 2.2.5)).

Р о з в' я з а н н я. Маємо $z'_x = 0$ і $z'_y = 0$ в точці $O(0,0)$. Проте ця функція не має екстремуму в зазначеній точці (див. рис. 2.32).

Розглянемо *достатні умови*. Нехай для функції $z = f(x, y)$ виконуються необхідні умови екстремуму в деякій точці, тобто $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Скористаємось формулою Тейлора. Маємо

$$\Delta z = df(x, y) + \frac{1}{2} d^2 f(c_1, c_2),$$

або

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(c_1, c_2)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 f(c_1, c_2)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(c_1, c_2)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right).$$

Врахуємо необхідні умови. Дістаємо

$$\Delta z = \frac{1}{2} (\Delta y)^2 \left(\frac{\partial^2 f(c_1 c_2)}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(c_1 c_2)}{\partial x \partial y} \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\partial^2 f(c_1, c_2)}{\partial y^2} \right).$$

Звідси, позначивши $t = \Delta x / \Delta y$, $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, маємо $\operatorname{sign} \Delta z = \operatorname{sign} (At^2 + Bt + C) \Big|_{(c_1, c_2)}$, тобто знак Δz визначається знаком квадратного тричлена, а знак останнього визначається знаком A і дискримінантом. Тепер наявність і характер екстремуму залежать від того, чи зберігає знак (і який саме) різниця Δz в околі точки (x,y). Якщо $\Delta z < 0$, то $f(x,y)$ має в цій точці максимум. Для цього треба, щоб квадратний тричлен не мав коренів ($B^2 - AC < 0$, $A < 0$, графік тричлена перетинає вісь Oy і вітки його напрямлені «вниз» — проти напряму другої осі). Отже, справедлива така теорема.

Т. *Якщо для функції $z = f(x,y)$ виконані необхідні умови екстремуму в деякій точці, то в цій точці функція*

1) *має екстремум при $B^2 - AC < 0$, причому максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;*

2) *не має екстремуму при $B^2 - AC > 0$;*

3) *за умови* $B^2 - AC = 0$ *ознака не чинна, можливі випадки, коли в даній точці на деяких лініях функція набуває максимуму, на деяких — мінімуму (як у випадку гіперболічного параболоїда).*

Стосовно функцій більшого числа змінних зазначимо, що необхідні умови мають той самий вигляд, що й для функцій двох змінних, достатні умови дещо складніші.

6.3.2. Умовний екстремум. Глобальний екстремум

Вище було розглянуто екстремум (локальний) функції двох змінних без будь-яких додаткових умов чи обмежень. Такий екстремум називають ще безумовним. Проте часто доводиться знаходити екстремум функції за деяких додаткових умов (*умовний екстремум*). Якщо функція $z = f(x, y)$, а умови мають вигляд $y = \varphi(x)$, то, оскільки $z = f(x, \varphi(x)) = f^*(x)$, задача фактично зводиться до одновимірного випадку.

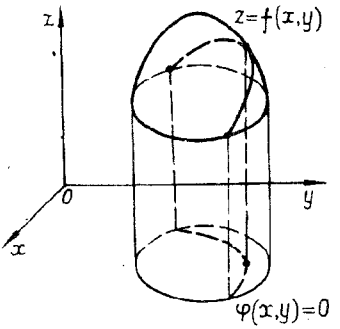


Рис. 6.5

Нехай треба знайти екстремум функції $z = f(x, y)$ (рівняння поверхні) за умови $\varphi(x, y) = 0$ (рівняння циліндричної поверхні), тобто треба знайти екстремум не на всій поверхні, а тільки на лінії, яку вирізає з даної поверхні циліндрична поверхня (рис. 6.5).

Запишемо необхідні умови екстремуму функції $f\left(\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0\right)$, скористаємося тим, що $\varphi(x, y) = 0$. Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Необхідними умовами умовного екстремуму є, таким чином, умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Для довільного λ (сума двох нулів)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

або

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0.$$

Виберемо λ так, щоб

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Отже, умови (6.7) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Побудуємо функцію трьох змінних

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y). \tag{6.9}$$

Необхідні умови екстремуму цієї функції ($F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_\lambda = 0$) збігаються з умовами (6.8), тобто з умовами умовного екстремуму.

Маємо метод Лаґранжа знаходження умовного екстремуму, згідно з яким вводять допоміжну функцію (6.9), яка досліджується на екстремум звичайним способом.

З геометричних міркувань часто характер екстремуму зрозумілий, тому немає необхідності перевіряти достатні умови його.

П. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$ (еліптичний параболоїд) за умови $y = kx + b$ (площина).

За методом Лаґранжа

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - kx - b).$$

Необхідними умовами екстремуму для F є $F'_x = 2x - k\lambda = 0$, $F'_y = 2y + \lambda = 0$, $y - kx - b = 0$, звідки $x = -b/(1 + k)$, $y = b/(1 + k)$.

З геометричних міркувань випливає, що знайдена точка є точкою максимуму.

Розглянемо найбільше й найменше значення функції в замкненій області, обмеженій деякою кривою (глобальний екстремум). Ці значення знаходять у такій послідовності:

а) знаходять в області критичні точки функції;

б) на границі області за допомогою рівнянь границі функцію зводять до функції однієї змінної, для якої знаходять критичні точки;

в) знаходять значення функції в усіх знайдених точках і в кутових точках границі, серед цих значень вибирають найбільше і найменше. Схема розв'язування цієї задачі така сама, як і в одновимірному випадку.

6.3.3. Метод найменших квадратів

Нехай проведено n вимірювань деякої фізичної величини з абсолютними похибками вимірювань $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Серед сумарних похибок розрізняють середню арифметичну і квадратичну

$$\delta_{\text{арифм}} = (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)/n = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k\right)/n,$$

$$\delta_{\text{квадр}} = \sqrt{(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2)/n} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)/n}\,.$$

У деякому розумінні друга похибка зручніша. Зазначимо, що

$$(\min \delta_{\text{квадр}}) \Leftrightarrow \left(\min \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right).$$

Метод, заснований на мінімізації $\delta_{\text{квадр}}$ за допомогою мінімізації суми квадратів похибок, називається *методом найменших квадратів.*

І в и п а д о к. *Лінійна залежність*

Нехай в результаті вимірювання складено таблицю (y — функція від x)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

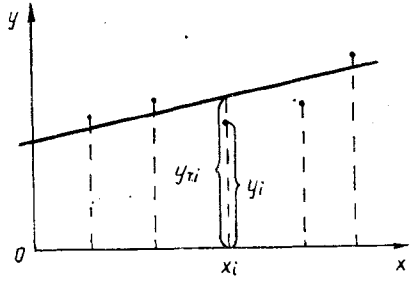


Рис. 6.6

Нехай розміщення точок (x_i, y_i) в системі координат нагадує пряму (рис. 6.6). Щоб отримати рівняння цієї прямої $y = kx + b$, знайдемо k і b. Похибка при заміні теоретичної ординати y_m на експериментальну y

$$\delta_i = y_{m.i} - y_i = kx_i + b - y_i.$$

Знайдемо суму квадратів таких похибок. Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i)^2 = F(k, b).$$

Дослідимо F на екстремум. Згідно з необхідними умовами $F'_k = 0$, $F'_b = 0$ дістаємо $\left(\Sigma = \sum_{i=1}^{n}\right)$

$$\begin{cases} 2\,\Sigma\,(kx_i + b - y_i)x_i = 0; \\ 2\,\Sigma\,(kx_i + b - y_i) = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} k\,\Sigma\,x_i^2 + b\,\Sigma\,x_i = \Sigma\,x_i y_i; \\ k\,\Sigma\,x_i + bn = \Sigma\,y_i. \end{cases}$$

Цю систему називають *нормальною системою методу найменших квадратів для лінійної залежності.*

II в и п а д о к. *Квадратична залежність*

Нехай розміщення точок (x_i, y_i) в системі координат нагадує параболу $y = ax^2 + bx + c$. Далі маємо

$$\delta_i = y_{m.i} - y_i = ax_i^2 + bx_i + c - y_i.$$

Сума квадратів похибок

$$\Sigma\,\delta_i^2 = \Sigma\,(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 = F(a, b, c).$$

Беручи до уваги необхідні умови екстремуму ($F'_a = 0$, $F'_b = 0$, $F'_c = 0$), дістаємо нормальну систему

$$\begin{cases} a\,\Sigma\,x_i^4 + b\,\Sigma\,x_i^3 + c\,\Sigma\,x_i^2 = \Sigma\,x_i^2 y_i; \\ a\,\Sigma\,x_i^3 + b\,\Sigma\,x_i^2 + c\,\Sigma\,x_i = \Sigma\,x_i y_i; \\ a\,\Sigma\,x_i^2 + b\,\Sigma\,x_i + cn = \Sigma\,y_i. \end{cases}$$

Очевидно, що достатні умови екстремуму тут застосовувати немає необхідності, бо відповідна функція F має тільки мінімум.

Таким же чином можна знайти функцію, залежну від більшого числа параметрів.

Метод найменших квадратів запропонований К.Гауссом.

РОЗДІЛ 7

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНИ. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

7.1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

7.1.1. Форми запису комплексних чисел

Розв'язування алгебричних рівнянь привело до відкриття комплексних чисел, які протягом століть математики намагалися уникати аж до XVIII ст., коли К.Гаусс дав їм просту інтерпретацію: комплексне число — це точка площини.

Перейдемо до означень.

О. *Уявною одиницею називається* $i^{*)} = \sqrt{-1}$.

Отже, $i^2 = -1$.

О. *Уявним числом називається число* bi, *де* $b \in \mathbf{R}$.

О. *Комплексним числом називається число* $z = a + bi$ ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$), *а називається дійсною частиною,* b — *коефіцієнтом при уявній частині комплексного числа (іноді пишуть* $a = \mathrm{Re}z$, $b = \mathrm{Im}^* z$).

Домовимося зображати a на осі Ox, b — на осі Oy плоскої системи координат. Тоді між множиною комплексних чисел $\mathbf{C}$ і точками площини існує взаємно однозначна відповідність. Зрозуміло, що $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

О. *Два числа* $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ *називають рівними, якщо* $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

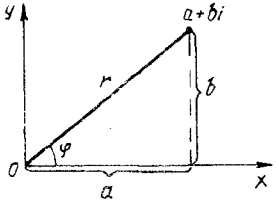


Рис. 7.1

О. *Число* $\bar{z} = a - bi$ *називають спряженим до числа* $z = a + bi$.

Точку, яка зображає z (рис. 7.1), можна задати і полярними координатами (модулем r і аргументом φ), звідки

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Отже,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Співвідношення між $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ і $e^{i\varphi}$ називається формулою Ейлера:

*) Від англ. imaginary — уявний.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

(Ліву частину сприйматимемо поки що як позначення правої частини.) Доведення формули Ейлера подано в теорії рядів. Ураховуючи цю формулу, маємо

$$z = re^{i\varphi}.$$

Тепер можна знайти a і b за формулами

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Оскільки $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign}\cos\varphi$, $\operatorname{sign} b = \operatorname{sign}\sin\varphi$, то для одного й того числа z маємо

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Ці форми z називають відповідно *алгебричною, тригонометричною і експоненціальною* (показниковою).

Для комплексних чисел немає понять «більше», «менше» через те, що вони визначаються двома несумірними параметрами: модулем (розмірність довжини) і аргументом (безрозмірний), до того ж множина точок площини неупорядкована.

7.1.2. Дії над комплексними числами

Додавання й віднімання

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2) + i(b_1 b_2).$$

Множення

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.$$

Цей самий результат дістанемо, якщо виконаємо відповідне множення за правилами множення многочленів:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2 =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i.$$

Тому є сенс означати множення саме так.

Ділення

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \overset{\text{def}}{=} \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Цей самий результат дістанемо, якщо виконаємо такі перетворення:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 a_2 i - b_2 a_1 i + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Зазначимо, що $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$.

Множення вводиться однозначно (не так, як для векторів), отже, операція ділення комплексних чисел визначена.

Нехай $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тоді

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Тому множення й ділення комплексних чисел зручно виконувати, якщо числа записані не в алгебричній формі, а додавання і віднімання — якщо в алгебричній.

Добування кореня

Нехай $z = re^{i\varphi}$, а $\sqrt[n]{z} = \rho e^{i\theta}$, тобто $(\rho e^{i\theta})^n = re^{i\varphi}$ чи $\rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi}$. Звідси

$$\begin{cases} \rho^n = r; \\ n\theta = \varphi + 2\pi k, \end{cases} \qquad \forall \ k \in \mathbf{Z}.$$

Остаточно $\rho = \sqrt[n]{z}$, $\theta = (\varphi + 2\pi k)/n$. Різні значення для θ дістанемо при $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, а при $k = n, n + 1, \ldots$ ці значення повторюються. Таким чином,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt{\rho}\, e^{i(\varphi + 2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

П. Розв'язати рівняння $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. $x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$, або $x_1 = 1 - 2i$, $x_2 = 1 + 2i$, тобто якщо квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексні корені, то вони спряжені.

7.2. МНОГОЧЛЕНИ

Як відомо, многочлен степеня n має вигляд

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad (a_n \neq 0).$$

Розглядатимемо випадок дійсних коефіцієнтів, тобто $a_k \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Т (основна теорема алгебри). *Будь-яке рівняння типу $P_n(x) = 0$ має рівно n коренів (дійсних або комплексних).*

На основі цієї теореми маємо

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \tag{7.1}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корені рівняння.

Серед коренів можуть бути *дійсні різні, дійсні кратні і комплексні.* Тоді серед дужок у виразі (7.1) можуть бути такі: $x - a$, $(x - a)^k$, $k > 1$, $x^2 + px + q$ $(D < 0)$, $(x^2 + px + q)^k$, $k > 1$, тобто

$$P_n(x) = a_n(x - a) \dots (x - b)^k \dots (x^2 + px + q) \dots (x^2 + p_1x + q_1)^k. \quad (7.2)$$

О. *Раціональним дробом називається вираз*

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)},$$

де Q і P — многочлени відповідних степенів, причому дріб називається правильним, якщо $m < n$, і неправильним, — якщо $m \geq n$.

О. *Елементарними раціональними дробами називають дроби*

$$\frac{A_1}{x - a}, \quad \frac{A_2}{(x - b)^k} \ (k > 1), \quad \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} \ (D < 0),$$

$$\frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} \ (D < 0, \ k > 1).$$

Слушна така теорема.

Т. *Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна подати як суму елементарних дробів, причому множнику $x - a$ в (7.2) відповідає дріб $A/(x - a)$, множнику $(x - b)^k$, $k > 1$ сума дробів $B_1/(x - b) + B_2/(x - b)^2 + \dots + B_k/(x - b)^k$, множнику $x^2 + px + q$ — дріб $(M_1x + N_1)/(x^2 + px + q)$, множнику $(x^2 + p_1x + q_1)^k$, $k > 1$ — теж сума. У чисельниках дробів маємо невизначені коефіцієнти.*

Для знаходження невизначених коефіцієнтів користуємося такими твердженнями:

а) якщо многочлени рівні, то вони рівні при всіх значеннях аргументу;

б) якщо многочлени рівні, то їхні коефіцієнти при однакових степенях аргументу рівні.

П. Розкласти на елементарні дроби

$$1) \ \frac{x + 1}{(x - 1)(x - 2)^2}; \quad 2) \ \frac{x - 1}{x(x^2 + 1)}.$$

Розв'язання. 1) Маємо

$$\frac{x + 1}{(x - 1)(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2},$$

або

$$0x^2 + x + 1 = A(x - 2)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1).$$

Нехай в останній рівності $x = 1$ і $x = 2$. Тоді прирівняємо коефіцієнти при x^2. Маємо:

$$x = 1: \quad 2 = A, \; A = 2,$$

$$x = 2: \quad 3 = C, \; C = 3,$$

$$x^2: \quad 0 = A + B, \; B = -2.$$

Остаточно

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}.$$

2) $x^2 + 1$ не має дійсних коренів. Отже,

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

або

$$0x^2 + x - 4 = A(x^2+1) + (Bx+C)x.$$

Далі

$$x = 0: \quad -1 = A, \; A = -1.$$

$$x^2: \quad 0 = A + B, \; B = 1,$$

$$x: \quad 1 = C, \; C = 1.$$

Остаточно

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

7.3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ*) ФУНКЦІЙ

7.3.1. Основні означення. Постановка задачі

При виборі формул для описування експериментального матеріалу в розділі, де йшлося про метод найменших квадратів, ми свідомо не вимагали від графіка відповідної функції, щоб він проходив через всі експериментальні точки (див. рис. 6.6). У цьому не було необхідності, адже точки ми брали з відхиленнями, а графік знайденої залежності їх усереднював. Проте бувають ситуації, пов'язані з високоточними експериментами, а також інші ситуації, коли графік шуканої залежності повинен проходити точно через зазначені точки (рис. 7.2).

Подамо кілька означень.

*) Від англ.. inter і pole — точка.

О. *Інтерполяцією функції $f(x)$ функцією $\varphi(x)$ називається заміна першої другою так, щоб обидві збігалися на деякій множині заздалегідь вибраних точок, які називаються вузлами інтерполяції* (рис. 7.3).

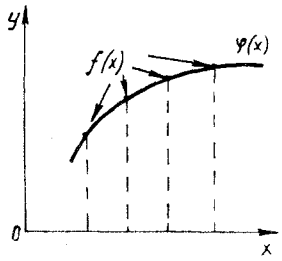


Рис. 7.2

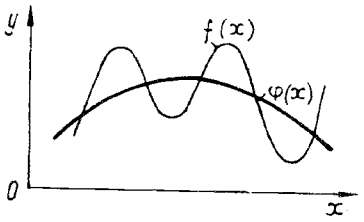


Рис. 7.3

О. *Заміна функції $y = f(x)$ кусково-многочленною функцією $y = f(x)$, яка є многочленом невисокого степеня між вузлами інтерполяції, зі збереженням властивостей гладкості у вузлах, називається сплайн*-інтерполяцією.*

Інтерполяцію застосовують для того, щоб:

1) дістати аналітичний вираз функції, якщо відомо її значення в окремих вузлах;

2) замінити функцію простішою як в розумінні її поведінки, так і в обчисленні її значень.

Розрізняють *параболічну* ($\varphi(x)$ — алгебричний многочлен), *тригонометричну* ($\varphi(x)$ — тригонометричний многочлен) інтерполяції.

Т (про єдиність інтерполяційного многочлена). *Інтерполяційний многочлен для даної системи вузлів єдиний.*

7.3.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай маємо систему вузлів і значень функції в них:

$$\begin{aligned} &x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \\ &y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Побудуємо інтерполяційний многочлен. Його степінь n визначається набором $n + 1$ вузлів.

Назвемо *фундаментальними многочлени*

$$Q_n^k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq k; \\ 1, & \text{при } i = k. \end{cases}$$

* Від англ. spline — спеціальна креслярська лінійка для проведення різних кривих.

Тоді

$$P_n(x) = y_0 Q_n^0(x) + y_1 Q_n^1(x) + \ldots + y_n Q_n^n(x).$$

Справді, $P_n(x) = y_0$, $P_n(x_1) = y_1, \ldots, P_n(x_n) = y_n$, у чому неважко впевнитися:

$$P_n(x_0) = y_0 Q_n^0(x) + y_1 Q_n^1(x_1) + \ldots + y_n Q_n^n(x_0) =$$

$$= y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + \ldots + y_n \cdot 0 = y_0, \quad P_n(x_0) = y_0.$$

Така сама ситуація в інших вузлах. Тепер знайдемо аналітичний вираз для $Q_n^k(x)$. Оскільки $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ — корені Q_n, то

$$Q_n^k(x) = C(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n).$$

Знайдемо сталу C з умови $Q_n^k(x_k) = 1$. Маємо

$$C = 1/(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n).$$

Отже,

$$Q_n^k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

Остаточно

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_n Q_n^k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}. \quad (7.4)$$

Це є інтерполяційний многочлен Лаґранжа. Для кращого сприйняття подамо його для системи

$$x_0, \ x_1, \ x_2,$$

$$y_0, \ y_1, \ y_2.$$

Маємо

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (P_2(x) = ax^2 + bx + c).$$

7.3.3. Скінченні різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона

Нехай вузли $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — рівновіддалені, тобто $x_k - x_{k-1} = h$ для всіх k. Тоді

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh.$$

О. *Різницями першого порядку обмеженої функції* $y = f(x)$ *у відповідних точках називають різниці*

$$\Delta_h y_0 = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0;$$

$$\Delta_h y_1 = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_h y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1}) = y_n - y_{n-1}.$$

Різниці вищих порядків визначаються рекурентним співвідношенням

$$\Delta_h^k y_i \overset{\text{def}}{=} \Delta_h(\Delta_h^{k-1} y_i),$$

зокрема

$$\Delta_h^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0, \quad \Delta_h^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Нехай знову маємо систему (7.3). Побудуємо інтерполяційний поліном у вигляді

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \tag{7.5}$$

Виходячи з умов інтерполяції, знайдемо невизначені коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Отже,

$$y_0 = P_n(x_0) = a_0, \quad a_0 = y_0,$$
$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) = a_0 + a_1 h,$$

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = (\Delta_h y_0)/h, \quad a_1 = \frac{1}{h}\Delta_h y_0,$$

аналогічно

$$a_k = \frac{1}{k! h^k}\Delta_h^k y_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Підставивши знайдені значення a_k в (7.5), дістанемо інтерполяційний поліном Лагранжа інтерполяції «вперед». Многочлен інтерполяції «назад» шукають у вигляді

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1).$$

Остаточно маємо два інтерполяційні многочлени Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + \frac{1}{h}\Delta_h y_0(x - x_0) + \frac{1}{2!h^2}\Delta_h^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{h!n^n}\Delta_h^n y_0(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), \qquad (7.6)$$

$$P_n(x) = y_n + \frac{1}{h}\Delta_h y_n(x - x_n) + \frac{1}{2!h^2}\Delta_h^2 y_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!h^n}\Delta_h^n y_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1). \qquad (7.7)$$

З а у в а ж е н н я

1. Інтерполяційні многочлени (7.4), (7.6), (7.7) для однієї й тієї самої системи (7.3) теоретично збігаються на основі теореми про єдиність інтерполяційного многочлена, але можуть і дещо відрізнятися з огляду на округлення при обчислювальних процесах, які різні для кожного многочлена.

2. Перевага многочлена Лагранжа перед многочленами Ньютона полягає в тому, що перший застосовують для довільних вузлів, тоді як другі — для рівновіддалених. Перевага многочленів Ньютона перед многочленом Лагранжа в тому, що додавання нових вузлів у систему (7.3) означає додавання тільки одного доданка в (7.6) чи (7.7), тоді як (7.4) повністю змінюється.

3. Якщо за допомогою (7.6) або (7.7) знаходять значення функції між вузлами в точці x_i, то застосовують (7.6), якщо x_i ближче до x_0, ніж до x_n і (7.7) — у противному разі.

4. Скінченні різниці зручно будувати, користуючись таблицею (слід звернути увагу на те, де знаходяться різниці многочленів (7.6) і (7.7)).

x_k	y_k	$\Delta_h y_k$	$\Delta_h^2 y_k$	$\Delta_h^3 y_k$	$\Delta_h^4 y_k$
x_0	y_0				
		$\Delta_h y_0$			
x_1	y_1		$\Delta_h^2 y_0$		
		$\Delta_h y_1$		$\Delta_h^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta_h^2 y_1$		$\Delta_h^4 y_0$
		$\Delta_h y_2$		$\Delta_h^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta_h^2 y_2$		
		$\Delta_h y_3$			
x_4	y_4				

5. При диференціюванні функції, заданої таблично, спочатку для неї будують один з інтерполяційних многочленів, потім його диференціюють і, нарешті, знаходять відповідні значення похідної.

РОЗДІЛ 8

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕҐРАЛ

8.1. ОЗНАЧЕННЯ Й ВЛАСТИВОСТІ ПЕРВІСНОЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕҐРАЛА

Основна задача диференціального числення полягає в тому, що за деякою функцією треба знайти її похідну, якщо така існує. Основною задачею інтегрального числення є обернена задача: за похідною функції знайти саму функцію. Прикладні задачі, де застосовують цей математичний апарат, належать тому самому колу питань, які пов'язані з практичним застосуванням похідної. Такими є задачі, пов'язані із знаходженням функції за інформацією про її кутовий коефіцієнт, дотичну, нормаль, піднормаль чи піддотичну, задача на знаходження маси стержня за його густиною.

Важливою і актуальною є задача космічної навігації. Уявімо, що ми знаходимось в ізольованому апараті і позбавлені спостережень навколишнього середовища (космічний корабель, підводний човен). Про рух апарата можна знати, фіксуючи його прискорення за інерцією (за допомогою простого пристрою з металевою кулькою, зафіксованою на пружинах). Прискорення — це похідна від швидкості. Знаючи, як знайти функцію за похідною, можна за прискоренням знайти швидкість, а за нею — і траєкторію.

О. *Функція* $y = F(x)$ *називається первісною для функції* $y = f(x)$ *на деякому інтервалі* $[a, b]$, *якщо* $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$.

П. Якщо $f(x) = x^3$, то $F(x) = \frac{x^4}{4}$, бо $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$. Також $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1$, бо $\left(\frac{x^4}{4} + 1\right)' = x^3$ і взагалі $F(x) = \frac{x^4}{4} + C \quad \forall\ C \in \mathbf{R}$. Це є загальний вигляд первісної для $f(x) = x^3$.

Т. 1 (про загальний вигляд всіх первісних).

1. Якщо $F(x)$ *— первісна для* $f(x)$, *то* $F(x) + C$, $\forall\ C \in \mathbf{R}$, *є також первісною для* $f(x)$.

2. Довільна первісна $\Phi(x)$ *для* $f(x)$ *має вигляд* $\Phi(x) = F(x) + C$, $\forall\ C \in \mathbf{R}$, *де* $F(x)$ *— одна з первісних для* $f(x)$, *тобто множина всіх первісних* $f(x)$ *вичерпується формулою* $F(x) + C$.

■ 1. Якщо $F'(x) = f(x)$, то й $(F(x) + C)' = f(x)$.

2. Нехай $\Phi(x)$ і $F(x)$ — первісні для $f(x)$, тобто $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$. Тоді $(\Phi(x) - F(x))' = 0$. Отже, $\Phi(x) - F(x) = C$, тобто $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Т.2 (про існування первісної). *Будь-яка неперервна функція має первісну.*

У теоремах 1 і 2 значення x взято з деякого інтервалу $[a, b]$.

Доведення твердження, ширшого ніж в т. 2, див. на с. 167.

О. *Невизначеним інтегралом**) від деякої функції називається множина всіх первісних функцій, тобто*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x). \tag{8.1}$$

Тут $f(x)$ — *підінтегральна функція*, $f(x)dx$ — *підінтегральний вираз.*

З геометричної точки зору первісна — це лінія $y = F(x)$, невизначений інтеграл — це сім'я ліній $y = F(x) + C$ (рис.8.1).

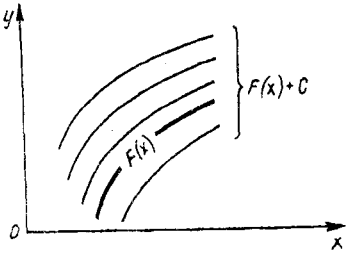


Рис. 8.1

Операція знаходження $F(x) + C$ за даною $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$.

П. 1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$, бо $\left(x^6 + C\right)' = x^5$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$;

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, бо $(-\cos x + C)' = \sin x$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$;

3) $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$, бо $\left(\frac{1}{2} e^{2x} + C\right)' = e^{2x}$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$.

Властивості невизначеного інтеграла

Доведення їх базується на означенні інтеграла.

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.
3. $\int d(f(x)) = f(x) + C$.
4. (*Однорідність*) $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$, $\forall\ c \in \mathbf{R}$.
5. (*Адитивність*) $\int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx$.

Наслідок (*Лінійність*) $\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\,dx$ $(c_k \in \mathbf{R})$.

6. (*Заміна змінної*) *Якщо функція $f(x)$ неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{8.2}$$

*) Від англ. integer — цілий.

У подальшому в різних виразах сталі C можуть бути різними. Для лівої частини (8.2) маємо

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x) + C,$$

а для правої частини (застосуємо похідну складеної й оберненої функцій)

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t)\varphi'(t)dt\right)'_t t'_x =$$

$$= \left\{t'_x = \frac{1}{x'_t}\right\} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\frac{1}{x'_t} + C = \left\{x'_t = \varphi'(t)\right\} =$$

$$= f(\varphi(t)) + C = f(x) + C.$$

Таким чином, похідні обох частин (8.2) збігаються з точністю до сталої. З неперервності відповідних функцій випливає існування інтегралів у (8.2).

Звертаємо увагу, що часто застосовують заміну (чи підстановку) $t = \varphi(x)$, а не $x = \varphi(t)$.

У властивостях 2 і 3 маємо відображення одного із законів розвитку — закону заперечення заперечення.

Диференціюючи $F(x)$, відкинемо її первісний зміст. Інтегруючи, ми заперечуємо диференціал (заперечення заперечення), але не приходимо до вихідного положення, а тільки переходимо на інший щабель (дістаємо сім'ю функцій).

Ця ж несиметрія приводить до того, що коли похідна елементарної функції є теж елементарною, то для інтеграла це не завжди так.

При цьому кажуть, що він «не береться». Такі інтеграли породжують нові, неелементарні функції.

Як відомо, обернені дії приводили до розширення понять. Так, поняття натурального числа розширювалося до поняття дійсного, і, зрештою, — до комплексного числа. Те саме спостерігається і в аналізі.

П.1. $\int (x^7 + \sin x + e^{-x})dx = \frac{x^8}{8} - \cos x - e^{-x} + C.$

З властивостей невизначеного інтеграла випливає, що оператор невизначеного інтегрування є лінійним.

8.1.1. Таблиця невизначених інтегралів

Подамо основні інтеграли. Результати перевіряються диференціюванням обох частин рівностей (див. (8.1)), $u = u(x)$ — неперервна функція. Деякі з формул — це формули диференціювання, записані в зворотному порядку.

1. $\int u^\alpha du = u^{\alpha+1}/(\alpha + 1) + C \quad (\alpha \neq -1)$;

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad \int e^u du = e^u + C.$

4. $\int \sin u \, du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u \, du = \sin u + C.$

6. $\int \tan u \, du = -\ln |\cos u| + C.$

7. $\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C.$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du \equiv \int \sec u \, du = \tan u + C.$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du \equiv \int \operatorname{cosec} u \, du = -\cot u + C.$

10. $\int \frac{du}{(a^2 + u^2)} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$

12. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C.$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a}| + C.$

Дві останні формули називають ще відповідно формулами «високого» і «довгого» логарифмів.

П. Знайти $I = \int \sin x \cos x \, dx.$

Розв'язання. І спосіб

$$I = \begin{Bmatrix} \sin x = u \\ \cos x \, dx = du \end{Bmatrix} = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

ІІ спосіб

$$I = \begin{Bmatrix} \cos x = u \\ du = -\sin x \, dx \end{Bmatrix} = \int u \, du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C.$$

ІІІ спосіб

$$I = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \begin{Bmatrix} 2x = u \\ 2dx = du \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{4} \sin u \, du = -\frac{1}{4} \cos u + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Знаходячи I трьома способами, дістали зовні різні відповіді, проте вони відрізняються одна від одної лише константою; так і повинно бути.

8.2. ТЕХНІКА ІНТЕҐРУВАННЯ

8.2.1. Інтеґрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен

Нехай маємо інтеґрали:

$$I_1 = \int dx/(ax^2 + bx + c), \quad I_2 = \int dx/\sqrt{ax^2 + bx + c},$$

$$I_3 = \int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}, \quad I_4 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

де $a \neq 0$.

Розглянемо, наприклад, I_4. Запишемо в чисельнику спочатку похідну квадратного тричлена:

$$I_4 = \int \frac{(2ax + b)\frac{A}{2a} - \frac{Ab}{2a} + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx +$$

$$+ \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \left\{\text{I: } \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = u \\ (2ax + b)dx = du \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_2 = \frac{A\sqrt{u}}{2a} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_2 =$$

$$= \frac{A}{2a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_2.$$

Щоб знайти I_1 і I_2, виділяємо повний квадрат у квадратному тричлені і застосуємо формули 10—13 таблиці інтеґралів. I_3 розглядаємо аналогічно.

8.2.2. Інтеґрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — диференційовні для відповідних x. Тоді

$$d(uv) = vdu + udv,$$

звідки

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Зінтеґруємо останню рівність, беручи до уваги властивість 3 інтеґралів. Дістаємо

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (8.3)$$

Це формула інтегрування частинами. Вона застосовується тоді, коли $\int v\,du$ не складніший від $\int u\,dv$.

Зазначимо, що є тільки два методи інтегрування — інтегрування заміною змінної і частинами. Все інше в цьому напрямі — застосування зазначених методів для конкретних класів функцій. Отже, вся теорія невизначеного інтегрування міститься у формулах (8.1) — (8.3).

П. Зінтегрувати частинами:

1) $I_1 = \int \arctan 2x\,dx$; 2) $I_2 = \int e^{2x}\sin 5x\,dx$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $I_1 = \left\{\begin{matrix}\arctan 2x = u, & du = 2dx/(1+4x^2)\\ dx = dv, & v = x\end{matrix}\right\} = x\arctan 2x -$

$$- \int \frac{2x}{1+4x^2}\,dx = x\arctan 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C.$$

2) $I_2 = \left\{\begin{matrix}e^{2x} = u, & du = 2e^{2x}dx\\ \sin 3x\,dx = dv, & v = -\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx =$

$$= \left\{\begin{matrix}e^{2x} = u, & du = 2e^{2x}dx\\ \cos 3x\,dx = dv, & v = \frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\left(\frac{2}{3}\sin 3x - \cos 3x\right) - \frac{4}{9}I_2 + C.$$

Розв'яжемо останнє рівняння відносно I_2. Маємо

$$\frac{13}{9}I_2 = \frac{1}{3}e^{2x}\left(\frac{2}{3}\sin 3x - \cos 3x\right) + C.$$

$$I_2 = \frac{3}{13}e^{2x}\left(\frac{2}{3}\sin 3x - \cos 3x\right) + C.$$

$\left(\frac{9}{13}C$ позначили також через $C\right)$.

8.2.3. Інтегрування раціональних дробів

Оскільки з неправильного раціонального дробу за допомогою ділення чисельника на знаменник можна виділити цілу частину (вона і інтегрується за формулою 1 з таблиці інтегралів) і правильний дріб, то розглянемо інтегрування останнього. За теоремою з п. 7.2 правильний дріб можна звести до скінченної суми елементарних дробів. Отже, маємо

$$\int \frac{A_1}{x-a}\,dx = A_1\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A_2}{(x-b)^k}\,dx = A_2 \int (x-b)^{-k}dx = -\frac{A_2}{k-1}(x-b)^{1-k} + C,\ k > 1,$$

$$\int \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q}\,dx = I_3 \text{ (в позначеннях п. 8.2.1).}$$

Певні ускладнення можуть виникнути при інтеґруванні

$$I_k = \int \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^k}\,dx, \quad \text{де} \quad k > 1.$$

Зазначимо, що тут можна інтеґрувати або частинами, застосовуючи рекуренцію $I_k \to I_{k-1} \to \ldots \to I_1$, де I_1 як в п. 8.2.1, або за допомогою тригонометричної підстановки після вилучення повного квадрата в знаменнику (див. 8.2.5).

Як бачимо, раціональний дріб можна зінтеґрувати завжди.

П. Знайти інтеґрали:

1) $I = \int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$; 2) $I = \int \frac{x-1}{x(x^2-1)}\,dx$.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося результатами розкладу підінтеґральних дробів на елементарні. Маємо (див. 7.2).

1) $I = \int \frac{2}{x-1}\,dx - \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)^2}\,dx = 2\ln|x-1| - 2\ln|x-2| - 3\frac{1}{x-2} + C = 2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + \frac{3}{x-2} + C;$

2) $I = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = -\ln|x| + \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C.$

8.2.4. Інтеґрування виразів, які містять тригонометричні функції

1. *Інтеґрування виразів* $\cos ax\cos bx$, $\sin ax\sin bx$, $\sin ax\cos bx$. Ці вирази інтеґрують з попереднім застосуванням формул

$$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x);$$

$$\sin ax\sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x);$$

$$\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x).$$

2. *Інтеґрування* $\sin^p x\cos^q x$, $p \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$.

I в и п а д о к. Нехай серед чисел q і p хоч одне непарне, зокрема нехай p — непарне. Тоді $p-1$ — парне і

$$\int \sin^p x \cos^q x\,dx = \int \sin x \sin^{p-1} x \cos^q x\,dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^{\frac{p-1}{2}} \cos^q x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^{\frac{p-1}{2}} \cos x \sin x\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\cos x = u \\ du = -\sin x\,dx\end{matrix}\right\} = -\int (1-u^2)^{\frac{p-1}{2}} u^q du.$$

Цей інтеграл можна знайти в багатьох випадках.

II в и п а д о к. Нехай p і q — парні. Застосуємо формули зниження степеня, тобто

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

П.1. Знайти інтеграли: 1) $I = \int (\sin^3 x)/\cos^6 x)\,dx$; 2) $I = \int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$.

Р о з в' я з а н н я.

1)

$$I = \int \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{\sin x\,(1-\cos^2 x)}{\cos^6 x}\,dx = \left\{\begin{matrix}\cos x = u \\ du = -\sin x\,dx\end{matrix}\right\} = -\int \frac{1-u^2}{u^6}\,du =$$

$$= -\int \frac{du}{u^6} = -\int \frac{du}{u^4} = \frac{1}{5u^5} - \frac{1}{3u^3} + C = \frac{1}{5\cos^5 x} - \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

2) $I = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx +$

$$+ \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \left\{\text{II: } \begin{matrix}\sin 2x = u \\ du = 2\cos 2x\,dx\end{matrix}\right\} = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int u^2 du =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3. *Універсальна тригонометрична підстановка.*

Ця підстановка має вигляд $t = \tan\frac{x}{2}$ і застосовується для інтегралів виду $I = \int R(\sin x \cos x)dx$ (над аргументами $\sin x$ і $\cos x$ здійснено операції в межах чотирьох арифметичних дій). Маємо

$$x = \arctan t, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \left\{: \cos^2\frac{x}{2}\right\} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Аналогічно

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Тепер маємо інтеграл від раціональної функції:

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2},\ \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)\frac{1}{1 + t^2}\,dt = \int R^*(t)\,dt.$$

П.2. Знайти інтеграл $I = \int \sec x\,dx$.

Р о з в' я з а н н я.

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \left\{\begin{array}{l}\tan\dfrac{x}{2} = t,\\ dx = \dfrac{dt}{1 + t^2}\end{array}\quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}\right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Останній вираз можна перетворити, а таблицю інтегралів можна доповнити інтегралами (другий дістанемо аналогічно першому, тільки для зручності запишемо $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$):

$$\int \operatorname{cosec} u\,du = \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + C = -\ln|\operatorname{cosec} u + \cot u| + c,$$

$$\int \sec u\,du = \int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\sec u + \tan u| + C.$$

8.2.5. Деякі інтеграли від ірраціональних функцій

1. *Інтеграли виду* $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}})dx$.

Нехай n — спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$. Тоді заміною $x = t^n$ зводимо даний інтеграл до інтегралів від раціональної функції.

П.1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо

$$I = \left\{\begin{array}{l}x = t^4\\ dx = 4t^3dt\end{array}\right\} = 4\int \frac{t^4dt}{1 + t^2} = 4\int \frac{t^4 - 1 + 1}{1 + t^2}\,dt =$$

$$= 4\int (t^2 - 1)dt + 4\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{4}{3}t^3 - 4t + 4\arctan t + C =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} + \arctan\sqrt[4]{x} + C\right).$$

2. *Тригонометричні підстановки*

Тригонометричними підстановками називають підстановки

$$x = a\sin t \ \ (x = a\cos t), \quad x = a\tan t \ \ (x = a\cot t),$$

$$x = a\sec t \ \ (x = a\operatorname{cosec} t).$$

Застосовують їх для знаходження інтегралів виду

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \quad \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx.$$

П.2. Знайти інтеграл $I = \int (dx)/\sqrt{(3 + x^2)^3}$.

Р о з в' я з а н н я.

$$I = \left\{\begin{matrix} x = \sqrt{3}\tan t \\ dx = \sqrt{3}\sec^2 t\,dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 t\,dt}{(\sqrt{3 + 3\tan^2 t})^3} = \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}(\tan t)/\sqrt{1 + \tan^2 t} + C = \frac{1}{3}\,x/a^2\sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

8.2.6. Інтегрування за допомогою таблиць

Існують спеціальні довідники, які містять велику кількість інтегралів від досить широкого класу функцій, наприклад, в таких довідниках знаходимо:

$$I(a, b) = \int e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

Для знаходження інтеграла від функції, яка належить даному класу, наприклад

$$I(2, 3) = \int e^{2x}\sin 3x\,dx,$$

у відповідь треба тільки підставити значення параметрів, які дають змогу виділити цю функцію з даного класу. Отже,

$$I(2, 3) = \frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C.$$

8.2.7. Інтеграли, які не виражаються через елементарні функції

Розглядаючи властивості невизначеного інтеграла, зокрема співвідношення між операціями диференціювання та інтегрування, було звернено увагу на те, що існують такі функції, інтеграли від яких

не виражаються через елементарні функції. Наведемо приклади таких інтеґралів. Після знака рівності в цих прикладах даємо відповідне позначення, тобто вказаний інтеґрал визначає нову, неелементарну функцію.

$$\int \frac{\sin x}{x} = \mathrm{Si}(x) \quad \text{(синус інтеґральний)}, \quad \mathrm{Si}(0) = 0;$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx = \mathrm{Ci}(x) \quad \text{(косинус інтеґральний)};$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx = \mathrm{E}(x) \quad \text{(еліптичний інтеґрал)}, \quad \mathrm{E}(0) = 0;$$

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int e^{-x^2}\, dx.$$

Останній інтеґрал часто застосовують у теорії ймовірностей.

Наближене значення таких інтеґралів можна знайти, записавши підінтеґральну функцію за допомогою формули Тейлора і зінтеґрувавши результат. Проте є ще й інші способи.

РОЗДІЛ 9

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

9.1. ОЗНАЧЕННЯ Й ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

9.1.1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

1. *Площа криволінійної трапеції*

О. *Криволінійною трапецією називають фігуру, обмежену графіком функції* $y = f(x)$, *прямими* $x = a$, $x = b$ і віссю Ox.

Знайдемо площу криволінійної трапеції за умови неперервності і невід'ємності функції $f(x)$ (рис.9.1).

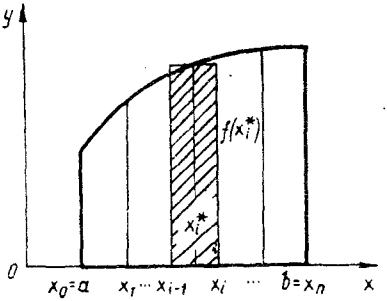


Рис. 9.1

Розіб'ємо основу трапеції на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

довільним способом і так само довільно виберемо $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Вважатимемо, що $\forall\ x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f(x) = \text{const} = f(x_i^*).$$

Тоді кожна з n елементарних трапецій, на які розбито початкову трапецію, буде замінена прямокутником з площею $\Delta S_i = f(x_i^*) \times (x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\,\Delta x_i$. Отже, площа всієї трапеції

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

причому ця формула тим точніша, чим більше n і менше Δx_i. Остаточно

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i. \qquad (9.1)$$

Вираз (9.1) має сенс тоді, коли границя існує і не залежить від способу розбиття $[a, b]$ на частини.

У наступних задачах пояснення розв'язування зведемо до мінімуму, обмежимося фактично самим розв'язком.

2. *Робота змінної сили*

Нехай під дією сили $y = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж осі Ox з точки $x = a$ у точку $x = b$. Знайти виконану при цьому роботу.

Розбивши $[a, b]$, як і в попередній задачі, і вважаючи, що $\forall\, x \in \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$F(x) = \text{const} = F(x_i^*)\ \forall x_i^* \in [x_{i-1}, x_i],$$

матимемо

$$\Delta A_i \approx F(x_i^*)\Delta x_i,\ A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i.$$

Отже,

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i. \tag{9.2}$$

3. *Маса прямолінійного стержня*

Нехай вздовж осі Ox між $x = a$ і $x = b$ розміщено лінійний стержень, тобто такий, всіма розмірами якого, крім довжини, можна знехтувати. Густина стержня $\rho = \rho(x)$. Знайти масу стержня, якщо $\rho \in C[a, b]$.

Як і в попередніх задачах,

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i^*)\,\Delta x_i,\ m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x_i,$$

$$m = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\,\Delta x_i. \tag{9.3}$$

Зазначимо, що з умови $\max \Delta x_i \to 0$ в усіх задачах випливає, що $n \to \infty$, а навпаки — ні. Для зручності в (9.1) — (9.3) писатимемо $\max \Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$, хоча друге зайве, якщо є перше.

9.1.2. Означення, тлумачення й властивості визначеного інтеграла

У правій частині формул (9.1) — (9.3) маємо набір одних і тих самих математичних операцій. Для функції $y = f(x)$, яка може набувати різного практичного змісту, суми типу (9.1) — (9.3) називають *інтегральними сумами* (Рімана*).

О. *Границя інтегральних сум (Рімана) для даної функції при* $n \to \infty$ *і* $\max\ \Delta x_i \to 0$ *за умови, що ця границя не залежить від способу розбиття відповідного інтервалу на частини та способу вибору*

*) Б. Р і м а н (1826—1866) — німецький математик.

довільних точок x_i^* всередині кожної частини, називається визначеним інтегралом (Рімана) від даної функції по даному інтервалу і позначається[*)]

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i. \tag{9.4}$$

Враховуючи (9.1)—(9.4), маємо

$S = \int_a^b f(x)\,dx$ — *геометричне тлумачення*,

$A = \int_a^b F(x)\,dx$ — *механічне тлумачення*,

$m = \int_a^b \rho(x)\,dx$ — *фізичне тлумачення*,

тобто різні практичні тлумачення визначеного інтеґрала.

Хоча невизначений і визначений інтеґрали близькі за позначенням, проте це зовсім різні поняття за суттю: невизначений інтеграл — це множина (сім'я) інтеґральних кривих, а визначений — це число.

Невизначений інтеґрал відкрито у XYII ст. як обернену операцію до диференціювання, а визначений інтеґрал відкрито понад 2000 років тому (ним фактично володів Архімед, який обчислював площі деяких фігур і об'єми тіл, користуючись для підсумовування формулами сум арифметичної та геометричної прогресій).

Зазначимо, що визначений інтеґрал від неперервної функції існує.

Властивості визначеного інтеграла

Деякі з цих властивостей випливають з означення (9.4), а доведення деяких інших властивостей зрозумілі інтуїтивно.

1. (*Однорідність*)

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \quad \forall c \in \mathbf{R}$$

2. (*Адитивність за функцією*)

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

---

*) Від лат. summa — сума, тут стилізована перша літера.

Наслідок (*Лінійність*)

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \ldots c_n f_n(x))\, dx =$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\, dx\,, \quad \forall c_i \in \mathbf{R}$$

3. (*Адитивність за проміжком*)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

при довільному розміщенні точок a, b, c (при $c \in [a, b]$ властивість очевидна, в загальному випадку користуються наслідком в 9.2.2).

4. (*Інтегрування нерівності*). *Якщо* $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a, b]$, *то*

$$\int_a^b f_1(x)\, dx \le \int_a^b f_2(x)\, dx, \text{ де } a < b.$$

5. (*Оцінка модуля інтеграла*)

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

6. (*Теорема про середнє значення*). *Якщо* $f \in C_{[a,b]}$, *то* $\exists\, c \in {}_{[a,b]}$ *таке, що*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\,(b - a). \tag{9.5}$$

Геометричне тлумачення теореми при $f(x) \ge 0$ і $f \in C_{[a,b]}$ *таке: криволінійна трапеція рівновелика з відповідним прямокутником, який має з трапецією спільну основу* (рис. 9.2).

■ Зазначимо, що результат $\int_a^b f(x)\, dx = b - a$ випливає з геометричного тлумачення визначеного інтеграла $\int_a^b 1\, dx$ (площа прямокутника зі сторонами $b - a$ і 1).

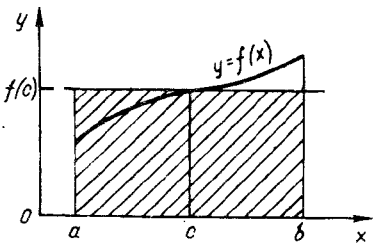


Рис. 9.2

З неперервності $f(x)$ випливає обмеженість її на $[a, b]$, тобто $\exists m \le M$ такі, що $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$. Зінтегруємо останню нерівність, скориставшись властивістю 4. Маємо

$$\int_a^b m\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b M\, dx,$$

або

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a), \tag{9.6}$$

або

$$m \le \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) / (b-a) \le M.$$

Нехай $\mu = \left(\int_a^b f(x)\,dx/(b-a)\right)$, $m \le \mu \le M$. Беручи до уваги т.2 (п.3.4.3), дійдемо висновку, що існує хоча б одна точка $c \in [a, b]$ така, що $f(c) = \mu$, тобто виконується рівність (9.5)■

Нерівність (9.6) називають оцінкою визначеного інтеґрала для обмеженої функції. Ця формула дає змогу, не обчислюючи інтеґрала, визначити межі, в яких міститься його величина.

О. *Середнім значенням інтеґровної на* $[a, b]$ *функції* $y = f(x)$ *називається величина*

$$f_c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Операція знаходження визначеного інтеґрала ставить функції у відповідність число, тобто ця операція є функціоналом. Згідно з властивостями 1 і 2 цей функціонал — лінійний.

9.2. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕҐРАЛА

Наприкінці XYII ст. в математиці склалася своєрідна ситуація: з одного боку, понад 2000 років існував без застосування (через складність підсумовування) визначений інтеграл — чудове знаряддя для розв'язування прикладних задач, а з другого боку, був відкритий невизначений інтеґрал і розроблені методи його знаходження. Це були чисто математичні вправи. Першим, хто встановив зв'язок між цими двома інтеґралами, був І.Барроу*).

9.2.1. Похідна визначеного інтеґрала зі змінною верхньою межею

Т. (Барроу). *Якщо* $f \in C_{[z,x]}$, *то*

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x) \tag{9.7}$$

*) І. Барроу (1630—1677) — учитель І.Ньютона.

■ Скористаємося тим, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Розглянемо інтеграл зі змінною верхньою межею (рис.9.3), де $f(x) \geq 0$. Маємо

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (9.8)$$

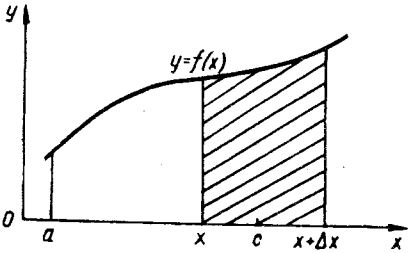


Рис. 9.3

Знайдемо похідну функції $\Phi(x)$, тобто

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta\Phi(x)/\Delta x).$$

На основі властивості 3 (п.9.1.2) дістаємо

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt -$$

$$- \int_a^x f(t)\,dt = \left(\int_a^x + \int_x^{x+\Delta x} - \int_a^x\right) f(t)\,dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

За теоремою про середнє значення (п.9.1.2)

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = f'(c)\,\Delta x,\ c \in [x,\ x + \Delta x].$$

Отже, оскільки $f(x)$ неперервна, то

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f'(c) = f(x). \ ■$$

Наслідок 1. *Вираз* (9.8) *є первісною для неперервної функції* $y = f(x)$.

Це випливає з означення первісної і рівності (9.7).

Наслідок 2. *Будь-яка неперервна функція має первісну.*

9.2.2. Формула Ньютона—Лейбніца

Т. Якщо функція $F(x)$ *є первісною для неперервної функції* $f(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b. \qquad (9.9)$$

Формулу (9.9) *називають формулою Ньютона—Лейбніца, а іноді — основною формулою інтегрального числення.*

■ Для неперервної функції $y = f(x)$ $F(x)$ за умовою, а $\Phi(x)$ за наслідком 1 (п.9.2.1) є первісними. Проте $\Phi(x) = F(x) + C$, тобто

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C. \qquad (9.10)$$

Нехай $x = a$ в (9.10). Тоді

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C,\ C = -F(a),$$

Нехай $x = b$ в (9.10). Тоді

$$\int_b^a f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

або (9.9). ■

Наслідок. *Справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

П. Обчислити інтеграли:

1) $I = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$; 2) $I = \int_0^a e^{2x}\,dx$.

Розв'язання

1) $I = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1;$

2) $I = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^a = \frac{1}{2}(e^{2a} - 1).$

Завдяки формулі Ньютона—Лейбніца визначений інтеграл широко застосовується при розв'язуванні прикладних задач.

9.2.3. Методи обчислення визначеного інтеграла

Ці методи збігаються з методами знаходження невизначеного інтеграла, оскільки для знаходження визначеного інтеграла треба спочатку знайти невизначений (первісну), а потім скористатися формулою Ньютона—Лейбніца. Таких методів два: заміна змінної та інтегрування частинами.

1. Нехай функція $x = \varphi(t)$ відображає $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а $\varphi'(t)$ — неперервна на $[\alpha, \beta]$ функція. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{9.11}$$

На відміну від невизначеного інтеґрала тут не треба повертатися до старої змінної, але треба поміняти межі інтеґрування.

2. Для $u = u(x)$ і $v = v(x)$ маємо

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{9.12}$$

якщо інтеґрали існують.

Доведення (9.11) і (9.12) такі самі, як і для невизначеного інтеґрала, треба тільки взяти до уваги (9.9).

П.1. Обчислити інтеґрали.

$$1)\ I_1 = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx;\quad 2)\ I_2 = \int_0^1 xe^{2x}dx.$$

Р о з в ' я з а н н я. 1) Застосуємо метод заміни змінної. Маємо

$$I_1 = \left\{\begin{array}{l} x = R\sin t \\ dx = R\cos t\,dt \end{array}\quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & R \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,dt = R^2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= R^2\int_0^{\pi/2} |\cos t|\cos t\,dt = R^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{R^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Таку відповідь можна було передбачити, оскільки з геометричної точки зору I_1 — це площа чверті круга радіуса R.

2) Застосуємо метод інтеґрування частинами, а саме формулу (9.12). Маємо

$$I_2 = \left\{\begin{array}{l} x = u;\ dx = du \\ e^{2x}\,dx = dv;\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

П.2. Довести формулу для залишкового члена формули Тейлора у формі Лаґранжа (п.4.4.4).

Маючи формулу Ньютона—Лейбніца, можна дістати вираз для залишкового члена формули Тейлора. Для цього за формулою Лаґранжа знаходимо

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(c)(x - x_0),\ c \in (x_0, x).$$

Нехай $\varphi(x) = f'(x)$. Зінтеґруємо цю рівність на $[x_0, x]$. Маємо

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx = f'(x_0)\int_{x_0}^{x} dx + f''(c)\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\,dx$$

або

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

тобто дістали формулу Тейлора при $n = 1$. Для довільного n беремо $\varphi(x) = f^{n}(x)$ і інтеґруємо n разів.

Тейлор хоч і мав формулу Ньютона—Лейбніца, проте не міг отримати такий результат, оскільки теорему Лаґранжа про скінченні прирости було доведено значно пізніше.

9.3. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕҐРАЛІВ

9.3.1. Графічне інтеґрування й диференціювання

Як відомо, є кілька способів задання функції, тому треба вміти диференціювати й інтеґрувати функції, задані не тільки аналітично, а й іншими способами, тим більше, що в експерименті маємо справу з функціями, заданими графічно або таблично.

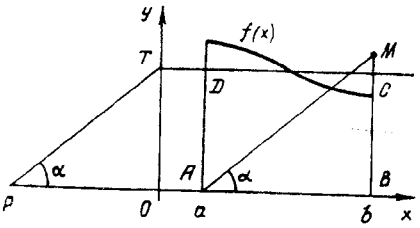


Рис. 9.4

Отже, нехай функція $y = f(x)$ задана графічно (рис. 9.4). Доведемо, що BM містить стільки лінійних одиниць, скільки квадратних одиниць містить площа прямокутника $ABCD$. Справді, $\Delta OTP \sim \Delta BMA$, звідки $\frac{BM}{AB} = \frac{OT}{OP} = OT$, оскільки $OP = 1$. Отже,

$$BM = OT \cdot AB = S_{ABCD}.$$

Якщо відрізок $[a, b]$ великий і провести лінію CD так, щоб прямокутник $ABCD$ був рівновеликим з криволінійною трапецією, не вдається, то розбиваємо його на n частин, розбиваючи далі й трапецію на n частин. З кожною трапецією повторюємо таку саму

процедуру (рис.9.5). Дістанемо ламану $M_0, M_1, M_2, \ldots$, яка є наближеним зображенням первісної для

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

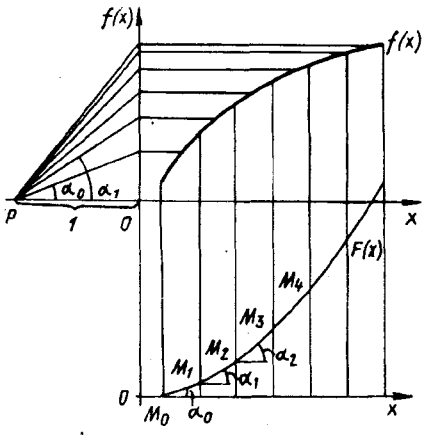


Рис. 9.5

Графічне диференціювання виконується у зворотному порядку. Тільки на графіку функції проводять не січні M_0M_1, M_1M_2 і т.д., а дотичні в проміжних точках кожного інтервалу. Дотичні зручно проводити за допомогою дзеркала, яке встановлюється перпендикулярно до кривої. Дивлячись у нього, уточнюють кут установки дотичної, поки відбита частина кривої не стикуватиметься з реальною без зламу. Використовуючи дзеркало як лінійку, проводимо вздовж нього нормаль до кривої, до якої за допомогою косинця проводимо дотичну.

9.3.2. Чисельне інтегрування

Оскільки визначений інтеграл є границею послідовності інтегральних сум, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i. \qquad (9.13)$$

Усі формули наближеного обчислення визначеного інтеграла грунтуються на цій формулі.

Розбиваючи різними способами $[a, b]$ на частини і вибираючи різними способами x_i^*, дістаємо різні формули наближеного обчислення інтеграла. Розглянемо в основному формули прямокутників, які в деякому розумінні є найзручнішими і найкращими.

Нехай $[a, b]$ розбито на n рівних частин точками

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b, \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Нехай у цих точках функція має відповідні значення $y_0, y_1, \ldots, y_n$, обчислені за аналітичним виразом функції або знайдені експериментально (функція задана таблично).

Вибираючи в (9.13) спочатку $x_i^* = x_{i-1}$, а потім $x_i^* = x_i$, маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) = I_{\text{пр}}^{(1)}; \qquad (9.14)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_n) = I_{\text{пр}}^{(2)}. \qquad (9.15)$$

Це є *формули прямокутників наближеного обчислення інтеґрала.* Назва пояснюється тим, що при $f(x) \geq 0$ праві частини формул (9.14) і (9.15) є сумами площ прямокутників з основами на $[x_{i-1}, x_i]$ і висотами y_{i-1} і y_i (рис.9.6, 9.7). Для монотонно зростаючої і монотонно спадної функцій відповідно

$$I_{\text{пр}}^{(1)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq I_{\text{пр}}^{(2)},\ I_{\text{пр}}^{(2)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq I_{\text{пр}}^{(1)}.$$

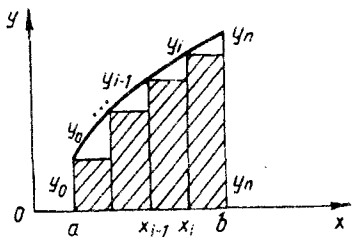


Рис. 9.6

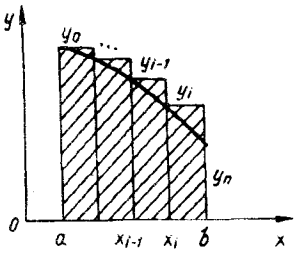


Рис. 9.7

Користуючись (9.14) і (9.15), ми фактично у виразі функції за допомогою формули Тейлора обмежуємося нульовим членом (див. П.2, п.9.2.3)

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0).$$

Після інтеґрування (на одному кроці) маємо

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(c)(x - x_0)\,dx = f'(c)\frac{(x_1 - x_0)^2}{2} = f'(c)\frac{(b-a)^2}{2n^2},$$

тобто похибка на одному кроці має порядок $\frac{1}{n^2}$, на n кроках $\frac{1}{n}$.

Знайшовши середнє арифметичне (9.14) і (9.15), дістанемо *формулу трапецій*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) = I_{\text{тр}}. \qquad (9.16)$$

Похибка в (9.16) має порядок $\frac{1}{n^2}$. Щоб дістати формули (9.14) і (9.15), ми фактично замінили функцію $f(x)$ кусково-сталою, для

(9.16) замінили $f(x)$ на вписану в неї ламану. Замінюючи $f(x)$ параболою, дістанемо точнішу формулу, яка називається *формулою парабол*, або формулою Симпсона*).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}\right)\right) = I_{\text{пар}}. \qquad (9.17)$$

Доведення цієї формули опустимо.

Порядок похибки тут $1/n^3$.

П. Знайти площу поперечного перерізу річки за результатами замірів її глибин (y_i) на певній відстані від берега (x_i).

x_i: 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20,

y_i: 0,2; 0,5; 0,9; 1,1; 1,3; 1,8; 2,2; 1,8; 1,5; 1,0; 0,4.

Р о з в ' я з а н н я. За формулами (9.14)—(9.17), маємо

$$I_{\text{пр}}^{(1)} = 2{,}46;\ I_{\text{пр}}^{(2)} = 25{,}0;\ I_{\text{тр}} = 24{,}8;\ I_{\text{пар}} = 24{,}8$$

З а у в а ж е н н я. Для наближеного обчислення інтеґрала від аналітично заданої функції можна цю функцію подати формулою Тейлора, а потім зінтеґрувати останню. Тут можна й оцінити похибку інтеґрування (за інтеґралом від залишкового члена).

9.4. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕҐРАЛИ

Існування визначеного інтеґрала передбачає, щоб відповідна функція була обмеженою на скінченному інтервалі. Якщо хоч одна з цих умов не виконується, то будують нові інтеґрали, які називають невластивими — першого роду, якщо інтервал нескінченний, і другого роду, якщо функція необмежена. Користуючись геометричним тлумаченням інтеґрала, можна відповідно говорити про площу трапеції з нескінченною основою чи з нескінченною висотою. Цікаво, що в деяких випадках такі трапеції мають скінченну площу (в певному розумінні), відповідні інтеґрали мають широке практичне застосування.

9.4.1. Невластиві інтеґрали першого роду

Вважатимемо, що відповідна функція інтеґровна на будь-якому скінченному інтервалі, що міститься в нескінченному, в усіх чотирьох наступних означеннях.

О. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{B\to\infty} \int_a^B F(x)\,dx$ (рис.9.8).

О. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx.$

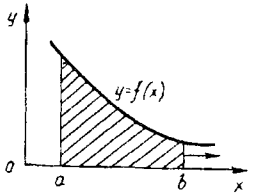


Рис. 9.8

*) Т. С и м п с о н (1710–1761) – англійський математик.

$$\text{О.}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}} \int_{A}^{B} f(x)\,dx. \qquad (9.18)$$

О. *Невластивий інтеграл називається збіжним, якщо границя в його означенні існує і скінченна, і розбіжним у противному разі.*

П.1. Дослідити на збіжність (рис. 9.9, 9.10) інтеграли:

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx; \qquad I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x}dx.$$

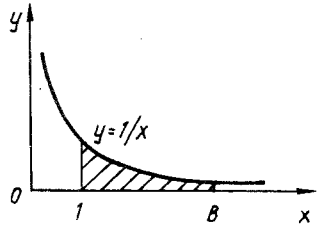


Рис. 9.9

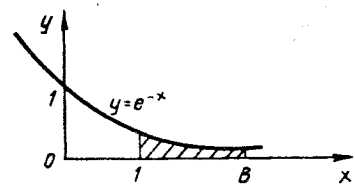


Рис. 9.10

Розв'язання

$$I_1 = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x}\,dx = \lim_{B\to\infty} \ln x \Big|_1^B = \lim_{B\to\infty} \ln B = \infty,$$

$$I_2 = \lim_{B\to\infty} \int_1^B e^{-x}\,dx = -\lim_{B\to\infty} \ln e^{-x} \Big|_1^B = -\lim_{B\to\infty} (e^{-B} - e^{-1}) = e^{-1}.$$

Інтеграл I_2 — збіжний, I_1 — розбіжний, хоча графіки $y = f(x)$ схожі. Це пояснюється поведінкою відповідних функцій при $x \to \infty$.

П.2. Визначити роботу сили земного тяжіння, якщо ракета віддаляється у нескінченність.

Розв'язання. Сила тяжіння

$$F = G\frac{mM}{x^2},$$

де M і m — маси Землі і ракети; G — гравітаційна стала; x — віддаль від центра Землі до ракети. Робота (механічне тлумачення визначеного інтеграла)

$$A = \int_R^{\infty} Gm\,M\,\frac{dx}{x^2} = GmM \lim_{B\to\infty} \frac{1}{x} \Big|_R^B = GmM/R,$$

де R — радіус Землі. Як бачимо, робота — скінченна.

Слід звернути увагу на те, що в означенні інтеграла на $(-\infty, +\infty)$ границя подвійна.

Тепер ще одне означення.

О. *Головним значенням*[*)] *інтеґрала на* $(-\infty, +\infty)$ *називається границя*

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Коші[**)] звернув увагу на те, що інтеграл в розумінні головного значення може бути збіжним, а в розумінні (9.18) — розбіжним. Такий інтеґрал називають *умовно збіжним.*

П.3. Дослідити на збіжність інтеґрал $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to\infty}} \int_{A}^{B} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}} \ln(1+x^2)\Big|_{A}^{B} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}} (\ln(1+B^2) - \ln(1+A^2)).$$

Ця границя не існує. Інтеґрал розбіжний. Знайдемо

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty} (\ln(1+A^2) - \ln(1+A^2) = 0.$$

Інтеґрал збіжний в розумінні головного значення.
Отже, заданий інтеґрал умовно збіжний.

9.4.2. Ознака порівняння невластивих інтеґралів першого роду

Якщо $f(x)$ знакостала, а її первісна невідома, то питання про збіжність інтеґрала від такої функції можна розв'язати за ознакою порівняння. Розглянемо її для $f(x) \geq 0$ і одного виду невластивих інтеґралів (для $f(x) \leq 0$ та інших видів інтеґралів міркування аналогічні).

Т. *Якщо* $\forall x \in (a, \infty)\ 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ і $I_1 = \int_a^{\infty} f_1(x)\,dx$, $I_2 = \int_a^{\infty} f_2(x)\,dx$, *то із збіжності* I_2 *випливає збіжність* I_1, *а з розбіжності* I_1 *випливає розбіжність* I_2.

Зазначимо, що спочатку треба зінтеґрувати задану в теоремі нерівність на $[a, B]$, а потім перейти до границі при $B \to \infty$. Далі дістанемо твердження теореми. Повне доведення опустимо.

---

*) Від англ. principal value – головне значення.
**) О. Л. К о ш і (1789—1857) — французький математик.

Для користування цією теоремою треба мати набір стандартних інтегралів і наперед відому інформацію про їх збіжність та вдало скористатися нерівністю. Певний набір стандартних інтегралів містить наступний приклад.

П.1. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ $(d > 0, p \in \mathrm{R})$.

Р о з в ' я з а н н я. $p = 1$. Тоді I — розбіжний (див. I_1 з **П.1**, п.9.4.1). Нехай $p \neq 1$. Тоді

$$I = \lim_{B \to \infty} \int\limits_a^B x^{-p} dx = \lim_{B \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg|_a^B =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{B \to \infty} (B^{1-p} - a^{1-p}) = \begin{cases} \infty & \text{при } p < 1; \\ a^{1-p} & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Отже, $\int\limits_a^\infty x^{-p} dx$ збіжний при $p > 1$ і розбіжний при $p \leq 1$.

П.2. Дослідити на збіжність інтеграли: 1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$; 2) $\int\limits_\infty^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Р о з в ' я з а н н я: 1) Інтеграл збіжний, оскільки $\frac{1}{x\sqrt{1+x}} < \frac{1}{x^{3/2}}$; 2) інтеграл розбіжний, оскільки $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} > 1 = \frac{1}{x^0}$.

9.4.3. Невластиві інтеграли другого роду

Вважатимемо, що всі інтеграли, які застосовуватимемо в правих частинах наступних означень, існують.

О. *Невластивим інтегралом другого роду від функції* $y = f(x)$ *на* $[a, b]$ *за умови, що* $f(x)$ *має розрив другого роду при* $x = b$ $(x = a$ *чи* $x = c \in (a, b))$, *називаються відповідно інтеграли*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} + \int\limits_{\varepsilon_2 + c}^b \right) f(x)\,dx.$$

(рис.9.11, 9.12).

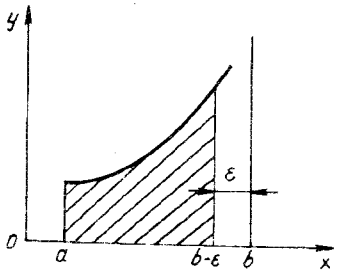


Рис. 9.11

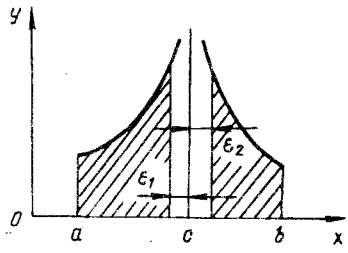


Рис. 9.12

В останньому випадку ще маємо таке означення:

$$\text{p.v.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right) f(x)\,dx.$$

Аналогічно розглядається питання, пов'язане з порівнянням інтегралів, з умовною збіжністю.

П. Дослідити на збіжність інтеграли:

$$1)\ I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};\quad 2)\ I_2 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}.$$

Р о з в ' я з а н н я. 1) Маємо

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Інтеграл збіжний.

$$2)\ I_2 = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_2}^1 \right) \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} (\ln|x|\,\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \ln|x|\,\Big|_{\varepsilon_2}^1 =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} (\ln \varepsilon_1 - \ln \varepsilon_2).$$

Така границя не існує. Інтеграл розбіжний.

Тепер нехай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Маємо

$$\text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтеграл збіжний в розумінні головного значення. Отже, інтеграл I_2 — умовно збіжний.

9.5. ІНТЕҐРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА

9.5.1. Формула Лейбніца

Інтеґрали, залежні від параметра, — це інтеґрали, в яких підінтеґральна функція або (і) межі інтеґрування залежать від деякого параметра.

$$\text{П. } I(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha)\, dx = \int_0^1 (x^2 + \alpha x)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha,$$

$$I(\alpha) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha.$$

Т. (Лейбніца). *Якщо функція $f(x, \alpha)$ визначена в області двох змінних x і α і має неперервну похідну $f'_\alpha(x, \alpha)$ при всіх α, то відповідний інтеграл від параметра диференційовний за параметром, тобто*

$$\left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx \quad \text{— формула Лейбніца.} \tag{9.19}$$

■ Маємо

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx, \quad I'_\alpha = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \Delta I / \Delta\alpha.$$

Далі

$$\frac{\Delta I}{\Delta\alpha} = \frac{I(\alpha + \Delta x) - I(\alpha)}{\Delta x} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta x) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx.$$

За теоремою Лаґранжа

$$\frac{\Delta I}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f'_\alpha(x, c)\, \Delta\alpha}{\Delta\alpha}\, dx = \int_a^b f'_\alpha(x, c)\, dx, \quad c \in (\alpha, \alpha + \Delta\alpha).$$

Оскільки функція $f'_\alpha(x, \alpha)$ неперервна, то, виконавши граничний перехід при $\Delta\alpha \to 0$, матимемо (9.19). ■

Складнішим є випадок, коли $a = a(\alpha)$, $b = b(\alpha)$. При цьому $I(\alpha) = \Phi(\alpha, a(\alpha), b(\alpha))$ є складеною функцією, де a і b — проміжні аргументи. Застосовуючи правило диференціювання складеної функції, знаходимо

$$I'(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\alpha} \tag{9.20}$$

Для $\partial\Phi/\partial\alpha$ користуємося (9.19), в інших випадках

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = -\frac{\partial}{\partial a} \int_b^a f(x, \alpha)\, dx = -f(a(\alpha), \alpha),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, \alpha) = f(b(\alpha), t).$$

Враховуючи (9.20), дістаємо

$$I'(\alpha) = \int_a^b f'(x, \alpha)\, dx + f(b(\alpha), \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a(\alpha), \alpha) \frac{da}{d\alpha}.$$

Формула Лейбніца є ефективним засобом обчислення визначеного інтеґрала. Іноді в інтеґрал, який треба обчислити, вводять параметр, застосовують формулу Лейбніца, обчислюють отриманий інтеґрал і записують шуканий інтеґрал при певному значенні параметра.

П. Обчислити інтеґрал

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx.$$

Р о з в ' я з а н н я. Застосовуючи (9.19), маємо

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x\, dx.$$

Останній інтеґрал знаходимо методом інтеґрування частинами

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1 + t^2} \Rightarrow I(\alpha) = \arctan t + C.$$

Знайдемо C із співвідношення $I(0) = 0$. Маємо $C = 0$. Отже,

$$I(\alpha) = \arctan \alpha.$$

9.5.2. Гамма-функція Ейлера

О. *Гамма-функцією Ейлера називається інтеґрал*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1}\, dx, \quad \alpha > 0.$$

Очевидно, що $\Gamma(1) = 1$. Розглянемо $\Gamma(\alpha + 1)$. Застосуємо інтегрування частинами (позаінтеґральний член дорівнює нулю, в цьому можна впевнитися за допомогою правила Лопіталя):

$$\Gamma(\alpha + 1) = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-x} x^\alpha\, dx = \left\{ \begin{matrix} x^\alpha = u, & du = \alpha x^{\alpha - 1}\, dx \\ dv = e^{-x}\, dx, & v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(-x^\alpha e^{-x} \Big|_0^A + \alpha \int_0^A e^{-x} x^\alpha\, dx \right) = \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha = \alpha \Gamma(\alpha),$$

тобто $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.

Нехай $\alpha = n$. Послідовно застосовуючи здобуте рекурентне співвідношення і $\Gamma\ (1) = 1$, маємо

$$\Gamma\ (n + 1) = n\ (n - 1) \ldots \ldots 2 \cdot 1 \equiv n!;\ \Gamma\ (n + 1) = n!$$

Поширюючи цю формулу на довільне α, маємо розширення поняття факторіала на довільні числа $\alpha \in R$ (і навіть комплексні) у вигляді

$$\alpha! = \Gamma\ (\alpha + 1).$$

Поширюючи останню формулу на $\alpha = 0$, дістаємо $0! = 1$.

О. *Бета-функцією Ейлера називають інтеграл*

$$B\ (\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha - 1}(1 - x)^{\beta - 1}\, dx.$$

Справедливим є співвідношення

$$B\ (\alpha, \beta) = \frac{\Gamma\ (\alpha)\ \Gamma\ (\beta)}{\Gamma\ (\alpha + \beta)}.$$

РОЗДІЛ 10

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

З математичної точки зору застосування визначеного інтеграла можна реалізувати за однією з двох схем. Перша основана на визначенні інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Друга схема полягає в тому, що спочатку складають співвідношення (диференціальне рівняння) між диференціалами величин, які досліджують або визначають, а потім переходять в результаті інтегрування до скінченного співвідношення між змінними:

$$dS = DF(x) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b f(x)dx.$$

10.1. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

10.1.1. Площа фігури

Випадок прямокутних координат

Для площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, безпосередньо з геометричного тлумачення визначеного інтеграла маємо

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x) \leq 0$, то аналогічно маємо

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x)$ змінює знак на $[a, b]$, то

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{10.1}$$

Очевидно, що (10.1) є загальною формулою для всіх розглянутих умов. На практиці реалізація (10.1) зводиться до попередніх двох формул.

У випадку криволінійної трапеції, обмеженої, зокрема, лінією $y = y(t)$, $x = x(t)$, де $t_1 \le t \le t_2$, тобто заданою параметрично, враховуючи (10.1), маємо

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\, |x'(t)|\, dt. \tag{10.2}$$

Випадок полярних координат.

Нехай треба знайти площу криволінійного трикутника, обмеженого лініями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 10.1).

Розіб'ємо $[\alpha, \beta]$ на n частин. Для $\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, вважатимемо, що $\rho(\varphi) = \text{const} = \rho(\varphi_i^*)$ для довільного $\varphi_i^* \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Тоді площа відповідного сектора

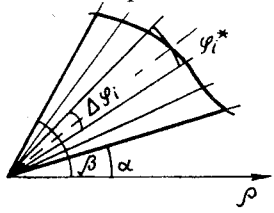


Рис. 10.1

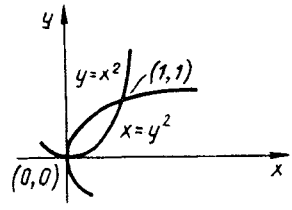


Рис. 10.2

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i^*)\,(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i^*)\,\Delta\varphi_i.$$

Отже,

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i, \quad S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta\varphi_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i^*)\,\Delta\varphi_i,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{10.3}$$

П. 1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x = y^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Шукану площу (рис. 10.2) можна записати як різницю площ відповідних криволінійних трапецій:

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

П. 2. Знайти площу еліпса.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Згідно з (10.2)

$$S = 4S_1 = 4\int_0^{\pi/2} b \sin t\,(-a \sin t)dt = \pi ab,$$

де S_1 — площа еліпса в першій чверті.

П. 3. Знайти площу фігури, обмеженої звоєм спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

10.1.2. Довжина лінії

Нехай маємо лінію AB. Розіб'ємо її точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ на n частин. Спрямимо лінію між сусідніми точками A_{i-1} і A_i, тобто замінимо її відрізком, який сполучає ці точки (рис. 10.3). Знайдемо довжини відрізків, а потім і периметр утвореної ламаної, вписаної в лінію з n ланок,

$$P_n = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

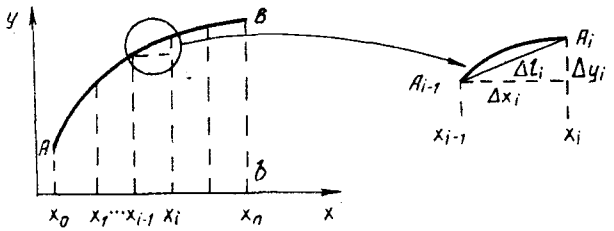


Рис. 10.3

О. *Довжиною лінії називається периметр вписаної в цю лінію ламаної за умови, що кількість відрізків ламаної (ланок) прямує до нескінченності, а довжина кожного відрізка прямує до нуля, тобто*

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} P_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Т. *Якщо функція $y = f(x)$ така, що $f'(x)$ неперервна на $[a, b]$, то довжина L відповідної лінії існує і*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{10.4}$$

■ Маємо (див. рис. 10.3)

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}.$$

Застосовуючи теорему Лагранжа, знаходимо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} = f'(x_i^*), \quad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i].$$

Тоді $\left((\Delta l_i \to 0) \Rightarrow (\Delta x_i \to 0)\right)$

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Цей інтеграл існує, оскільки $f'(x)$ неперервна, тому неперервна й уся підінтегральна функція. ■

Наслідок 1. *Якщо лінія L задана параметрично, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, $x'(t)$, $y'(t)$ неперервні, то*

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Наслідок 2. *Якщо лінія L задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ і ρ' неперервна, то*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.$$

Наводимо лише один елемент доведення. Вважатимемо, що лінія L задана параметрично: $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. Тоді

$$x'^2 + y'^2 = (\rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi)^2 + (\rho' \sin\varphi + \rho \cos\varphi)^2 = \rho^2 + \rho'^2.$$

П. 1. Знайти довжину *астроїди* $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$.

Розв'язання. Маємо (рис. 10.4)

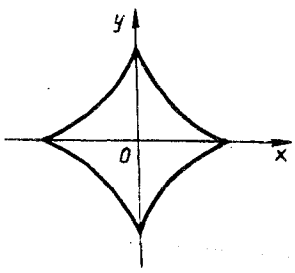


Рис. 10.4

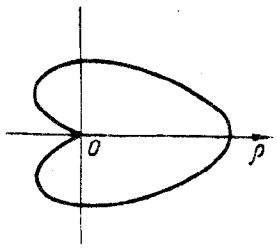


Рис. 10.5

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

$$x'^2 + y'^2 = 9R^2 \sin^2 t \cos^2 t = \frac{9}{4}\sin^2 2t,$$

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \frac{9}{4} R^2 \sin 2t\, dt = 6R.$$

П. 2. Знайти довжину *кардіоїди* $\rho = R(1 + \cos\varphi)$.

Розв'язання. Маємо (рис. 10.5)

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi,\ \rho^2 + \rho'^2 = 4R^2\cos^2\frac{\varphi}{2},\ L = 2\int_0^{\pi} 2R\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8R.$$

10.1.3. Кривина лінії

Нагадаємо, що знак другої похідної функції на інтервалі характеризує напрям опуклості графіка функції на цьому інтервалі. Проте одні функції опуклі (угнуті) менше, інші — більше. Введемо числовий чинник, який характеризує це явище.

О. *Кутом суміжності лінії на певному інтервалі називається кут між дотичними до цієї лінії в крайніх точках інтервалу.*

О. *Середньою кривиною функції на певному інтервалі називається відношення кута суміжності графіка цієї функції на інтервалі до довжини графіка цієї лінії, яка відповідає даному інтервалу, тобто*

$$K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}.$$

О. *Кривиною функції в даній точці називається границя середньої кривини функції на інтервалі, який містить дану точку, за умови, що довжина інтервалу прямує до нуля, тобто*

$$K(x) = \lim_{\Delta x \to 0} K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}.$$

Т. *Якщо функція $y = f(x)$ двічі диференційовна в точці x, причому $f''(x)$ неперервна, то*

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x)^2)^{3/2}}.$$

■ Маємо (рис. 10.6)

$$\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

$$\tan\varphi_1 = f'(x) \Rightarrow \varphi_1 = \arctan f(x),$$

$$\tan\varphi_2 = f'(x + \Delta x) \Rightarrow \varphi_2 =$$

$$= \arctan f'(x + \Delta x).$$

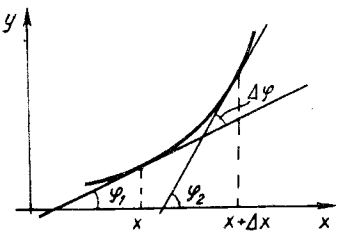


Рис. 10.6

Застосовуючи теорему Лаґранжа до функції $\arctan f(x)$ на $[x,\ x + \Delta x]$, маємо

$$\Delta\varphi = |\arctan f'(x + \Delta x) - \arctan f'(x)| = |\arctan f'(x))'|_{x=c},$$

звідки

$$\Delta\varphi = \frac{|f''(c)|\,\Delta x}{1 + (f'(c))^2}, \quad c \in (x,\ x + \Delta x).$$

За формулою (10.4) і теоремою про середнє значення інтеґрала маємо

$$\Delta L = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \sqrt{1 + (f'(c_1))^2}\,\Delta x, \quad c_1 \in [x,\ x + \Delta x].$$

Нарешті,

$$K(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|f''(c)f|}{(1 + (f'(c))^2 \sqrt{1 + (f'(c_1))^2}} = |f''(x)|/(1 + (f'(x)^2)^{3/2}. \blacksquare$$

Узагальнимо поняття вершини, означене раніше для лінії другого порядку.

О. *Вершиною довільної лінії називається точка, в якій кривина лінії набуває екстремуму.*

Зафіксуємо точку на деякій лінії. З усіх кіл, які проходять через дану точку, виберемо те, яке найбільш відтворює дану лінію в околі взятої точки. Таке коло називається *колом кривини*. Елементи цього кола — *центр та радіус кривини*. Якщо $y = f(x)$ є рівняння даної лінії, то радіус кривини (це можна довести)

$$R(x) = 1/K(x).$$

Множина центрів кривини для певної лінії називається *еволютою* цієї лінії, а сама лінія щодо своєї еволюти називається *евольвентою*[*].

10.1.4. Об'єм тіла

1. *Об'єм тіл з відомим поперечним перерізом (перетином).*

Нехай площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox дорівнює $S(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 10.7). Для частини об'єму тіла між перерізами в точках x і $x + dx$ маємо

$$dV = S(x)dx.$$

Користуючись другою схемою застосування визначеного інтеграла, знаходимо

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{10.5}$$

2. *Об'єм тіл обертання.*

Для тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, маємо

$$S(x) = \pi f^2(x).$$

Згідно з рівністю (10.5) і рис. 10.8, знаходимо

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Аналогічно при обертанні відповідної трапеції навколо осі Oy

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

[*] Від лат. evoluta — розгорнута і evolvens — розгортаючий.

П. Знайти об'єм еліпсоїда (рис. 2.28)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Р о з в ' я з а н н я. У перерізі еліпсоїда площиною $x = \text{const}$ дістанемо еліпс з осями $b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ і $c\sqrt{(1 - x^2/a^2)}$. Площа цього еліпса $S(x) = \pi bc(1 - x^2/a^2)$.

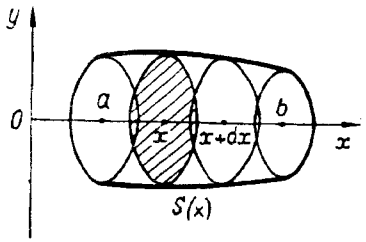


Рис. 10.7

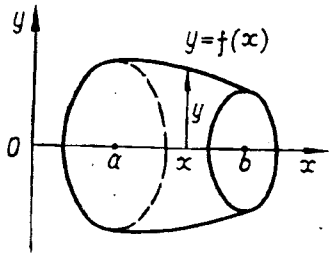


Рис. 10.8

Тоді, згідно з (10.5), $V = \pi bc \int\limits_{-a}^{a} (1 - x^2/a^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi abc.$

Для кулі маємо $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $(a = b = c = R)$.

10.1.5. Площа поверхні обертання

Нехай поверхня утворена обертанням лінії $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ навколо осі Ox (рис. 10.9).

О. *Площею поверхні, утвореної обертанням даної лінії, називається границя поверхні, утвореної обертанням вписаної в цю лінію ламаної за умови, що число ланок ламаної прямує до нескінченності, а довжина кожної з них — до нуля.*

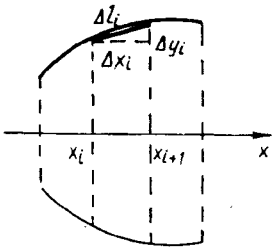


Рис. 10.9

Нехай ΔS_i — поверхня зрізаного конуса. Тоді

$$\Delta S_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} =$$

$$= \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))\sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\,\Delta x_i,$$

звідки

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) + f(x_{i+1}))\sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}\,\Delta x_i.$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$ і $\Delta x_i \to 0$. Вважаючи відповідну суму інтегральною, дістаємо

$$S = 2\pi \int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

П. Знайти площу поверхні сфери радіуса R.

Р о з в ' я з а н н я. Поверхню сфери дістанемо в результаті обертання навколо осі Ox півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$. Отже,

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\ \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

10.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ У МЕХАНІЦІ ТА ФІЗИЦІ

10.2.1. Моменти

Згідно з другим законом механіки $\bar{F} = m\bar{a}$. Відомо, що мірою поступального руху є маса m. Який вигляд має другий закон механіки для обертального руху і що є мірою інерції для нього? Це важливо знати, оскільки обертальний рух дуже поширений у природі (рух планет навколо зірок, зірок навколо центрів Галактик і т.д.).

Другий закон механіки в цьому випадку має вигляд $\bar{M} = I \cdot \bar{\varepsilon}$, де $\bar{M}$ — момент імпульсу, $\bar{\varepsilon}$ — кутове прискорення, I — момент інерції тіла відносно осі обертання. Таким чином, мірою інерції обертального руху (аналогом маси в разі поступального руху) є момент інерції.

О. *Моментом інерції матеріальної точки з масою m і радіусом-вектором $\bar{r}$ відносно початку координат є*

$$I_0 = mr^2,$$

а відносно координатних осей Ox і Oy —

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2.$$

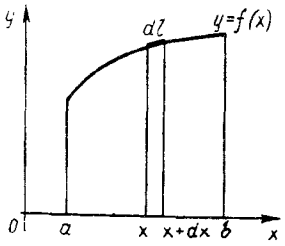


Рис. 10.10

Отже, $I_0 = I_x + I_y$.

Для однорідної кривої $y = f(x)$ (рис. 10.10) виділимо елемент дуги dl і застосуємо наведені формули. Дістаємо

$$dI_0 = r^2 dm = (x^2 + y^2)\rho dl = (x^2 + y^2)\rho \sqrt{1 + y^2}\, dx,$$

звідки, інтегруючи, маємо

$$I_0 = \rho \int_a^b (x^2 + y^2) \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

де ρ — густина кривої.

Аналогічно

$$I_x = \rho \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad I_y = \rho \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

П. 1. Знайти момент інерції однорідного кола радіуса R відносно центра.
Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$I_0 = 4\rho \int_0^R R^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\rho R^3 \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi\rho R^3.$$

Розглянемо тепер *статичний момент*. Статичний момент зв'язаний із задачами статики, які розглядають у механіці та інших науках. Користуючись наведеними вище позначеннями, запишемо статичний момент точки відносно початку координат

$$M_0 = mr,$$

а відносно осей

$$M_x = my, \quad M_y = mx.$$

Для однорідної кривої аналогічно попередньому маємо

$$M_0 = \rho \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2}\ \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$M_x = \rho \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$M_y = \rho \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2}\, dy \quad (M_0 \neq M_x + M_y).$$

П. 2. Знайти статичний момент однорідного кола $x^2 + y^2 = R^2$ відносно центра.
Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$M_0 = 4\rho \int_0^R R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi\rho R^2.$$

10.2.2. Центр мас (тяжіння)

Раніше, до польотів у космос, центром мас називався центр тяжіння.

Розглянемо систему матеріальних точок m_i з радіусами-векторами $\overline{r_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді істотно вважати

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Знайдемо еквівалентну системі матеріальну точку з масою $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ і з тими самими статичними моментами. Нехай координати такої точки (x_c, y_c). Тоді

$$M_x = my_c = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i,$$

$$M_y = mx_c = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$

звідки

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Для однорідної кривої аналогічно попередньому маємо

$$x_c = (\rho \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta l_i) \,/\, (\rho \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i).$$

Скорочуючи на ρ і переходячи до границі при $\Delta l_i \to 0$, $n \to \infty$, маємо

$$x_c = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2}\, dy.$$

Аналогічно

$$y_c = \frac{1}{L} \int_a^b y \sqrt{1 + x'^2}\, dx.$$

Для плоскої однорідної фігури (рис. 10.10), вирізаючи смужку завширшки dx з центром мас у точці $(x, \frac{y}{2})$ і масою $dm = \delta y dx$, де δ — поверхнева густина, аналогічно попередньому знаходимо

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x f(x)\, dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y f(x) dx.$$

Розглянемо вирази для центра мас дуги однорідної кривої та площі поверхні обертання, тобто

$$y_c = \frac{1}{L} \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Звідси випливає така теорема.

Т. 1. *Площа поверхні, утвореної обертанням дуги кривої, дорівнює добутку довжини дуги L на довжину кола, яке описує центр мас цієї кривої, тобто*

$$S = 2\pi y_c L.$$

Порівняємо вирази для центра мас однорідної фігури і об'єму тіла обертання, тобто

$$y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx, \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Звідси випливає така теорема.

Т. 2. *Об'єм тіла, утвореного обертанням однорідної фігури, дорівнює добутку площі фігури S на довжину кола, описаного центром мас цієї фігури,*

$$V = 2\pi y_c S.$$

Ці теореми застосовують в інженерній практиці, особливо у випадку кривої чи фігури складної форми. При цьому центри тяжіння кривої чи фігури (точніше, їх моделей, виконаних з однорідних матеріалів) визначають експериментально за допомогою двох підвісів: модель підвішують у двох різних точках її периметра і знаходять перетин двох вертикальних ліній, які проходять через ці точки. Це і є центр тяжіння. Довжину дуги чи площу фігури визначають за допомогою зважування моделей та порівнянням їхніх мас з масою еталонів.

Ці теореми були відомі ще Паппу*), потім вони ще раз були відкриті П.Ґульдіним**).

10.2.3. Робота змінної сили

Як відомо, робота сталої сили $\overline{F}$ на прямолінійному шляху має вигляд

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S}.$$

Якщо сила змінна $\overline{F} = \overline{F}(x)$, то попередня рівність виконується тільки для диференціалів, тобто $dA = F(x)dx$. Зінтеґруємо останню рівність. Тоді

$$A = \int_a^b F(x)dx. \tag{10.6}$$

П. 1. Використовуючи рівняння ізотермічного процесу розширення газу $PV = \text{const}$ (P — тиск, V — об'єм газу), знайти роботу газу при збільшенні об'єму від V_1 до V_2.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки сила дорівнює добутку тиску P на площу S, то, враховуючи (10.6), маємо

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PSdx = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = P_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Зазначимо, що в деяких випадках елементарну роботу зручно подавати у вигляді $dA = dF$.

П. 2. Знайти роботу по відкачуванню рідини густини ρ з конічної посудини з розмірами R і H (рис. 10.11).

Р о з в ' я з а н н я. Використаємо першу схему застосування визначеного інтеґрала. Спочатку виберемо систему координат і розмістимо конічну посудину так, як показано на рис. 10.11 (тут зображено осьовий переріз посудини). Звертаємо увагу

*) П а п п (III ст. до н.е.) — грецький математик.
**) П. Г у л ь д і н (1577—1643) — швейцарський математик.

на те, що вісь Ox зручно напрямити в бік зростання шуканої величини (так робитимемо й надалі). Розіб'ємо інтервал $[0, H]$ осі Ox довільним чином на n частин, а разом з тим і площинами, що проходять через здобуті точки паралельно основі конуса, і весь конус на зрізані конуси. Розглянемо i-й зрізаний конус, який відповідає інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$. Виберемо довільно $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ і замінимо зрізаний конус циліндром, осьовий переріз якого показано на рис. 10.11. Так робитимемо на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обчислимо роботу на підняття шара рідини, який відповідає

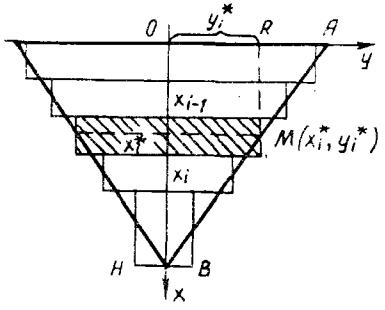


Рис. 10.11

інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$, на висоту x_i^*. Маємо

$$\Delta A_i = \Delta P_i x_i^* = \Delta m_i g x_i^* = \rho g \Delta V_i x_i^* = \rho g \pi y_i^{*2} x_i^* \Delta x_i,$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i, \quad A \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \rho g x_i^* y_i^{*2} \Delta x_i.$$

Ця сума не є інтегральною (під знаком суми дві змінні).

Знайдемо залежність між x і y. Складемо рівняння AB. Маємо (див. п. 2.4).

$$\frac{x}{H} + \frac{y}{R} = 1.$$

Оскільки $M(x_i^*, y_i^*) \in AB$, то $x_i^*/H + y_i^*/R = 1$, звідки $y_i^* = \frac{R}{H}(H - x_i^*)$. Далі маємо

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \pi \rho g \frac{R}{H} \sum_{i=1}^{n} (H - x_i^{*})^2 x_i^* \Delta x_i = \pi \rho g \frac{R}{H} \int_0^H x(H - x)^2 dx = \frac{1}{12} \pi \rho g R H^2.$$

10.2.4. Закон Паскаля

Розглянемо пластинку, площа якої S, занурену в рідину густини ρ. На глибині x виділимо елементарну площадку $dS = ydx$ (рис. 10.12), сила тиску на яку дорівнює вазі стовпа рідини над нею, якщо площадку розмістити горизонтально, тобто

$$dF = \rho g x y dx.$$

Для того щоб дістати силу тиску на всю пластинку, зінтегруємо dF. Тоді

$$F = \rho g \int_a^b x f(x) dx.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою для центра тяжіння плоскої фігури, дістанемо закон Паскаля

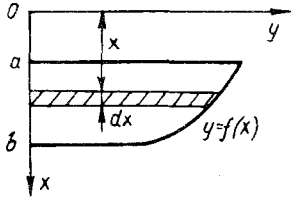


Рис. 10.12

РОЗДІЛ 11

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальні рівняння (ДР) — потужний засіб теоретичного дослідження навколишніх процесів. Диференціальними їх називають через те, що вони зв'язують диференціали (або похідні) тих величин, які досліджують. Ми застосовуватимемо диференціали тому, що завдяки лінеаризації диференціальні зв'язки значно простіші скінченних зв'язків. Крім того, багато законів природи виражається через похідні, наприклад другий закон механіки $\bar{F} = d^2(m\bar{r})/dt^2$. Досить часто в результаті експерименту можна дістати не шукану величину, а її похідну. Так, рух зірок можна помітити, спостерігаючи їх протягом багатьох тисячоліть, проте швидкості їхнього руху відносно Землі за допомогою ефекта Допплера—Фізо можна визначити миттєво. Знаючи швидкість, вже можна знайти траєкторію

П. 1. Встановлено, що швидкість зростання населення пропорційна до досягнутого рівня N, тобто $\frac{dN}{dt} = K_N N$, де K_N — коефіцієнт пропорційності. У загальному випадку $K_n = K_n(t)$, і рівняння можна звести до вигляду

$$\frac{dN}{N} = K_N(t)dt,$$

після чого зінтеґрувати

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \int_{t_0}^{t} K_N(t)dt,$$

де N_0 — кількість людей, зафіксована переписом населення на момент t_0. Після інтеґрування і потенціювання дістанемо

$$N(t) = N_0 \exp \int_{t_0}^{t} K_N(t)dt.$$

Для невеликого відрізка часу можна вважати $K_N = K_N(t_0)$. Тоді

$$N(t) = N_0 \exp (K_N(t_0)\,(t - t_0)).$$

Істотне бажання людей полягає в тому, щоб їхнім дітям жилося краще, а для цього (крім усього іншого) необхідно, щоб виробництво, яке забезпечує добробут,

випереджало ріст населення. Можна показати, що виробництво $П$ повинно розвиватися за законом $П = П_0 \exp(K_B(t_0)(t - t_0))$, причому $K_B > K_N$. Проте виробництво розвивається завдяки техніці

$$T = T_0 \exp(K_T(t_0)(t - t_0)).$$

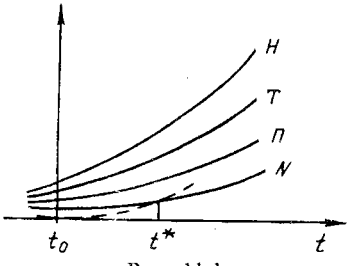


Рис. 11.1

А техніка в свою чергу забезпечується розвитком науки, для якої $H = H_0 \exp(K_H(t_0)(t - t_0))$. Таким чином, $K_H > K_T > K_B > K_H$.

Наведені примітивні міркування насправді відповідають дійсності (рис. 11.1). Кількість людей, зайнятих у сфері науки, техніки і управління, росте ще швидче, ніж продукція науки (пунктирна лінія на рис. 11.1), а в момент t^* станеться так, що вчених, інженерів, управлінців повинно бути більше, ніж людей взагалі. За самими оптимістичними оцінками це повинно статися в першій половині XXI ст.

Де ж вихід? По-перше, треба різко підвищити продуктивність праці у всіх сферах діяльності. По-друге, боротися з безгосподарністю і марнотратством. Неприпустимо, що з 100 винаходів впроваджується тільки 10, ось чому $K_H > K_T > K_B$. Треба домогтися, щоб $K_H \approx K_T \approx K_B$.

Як бачимо, аналіз ДР приводить до цілком розумних і важливих висновків.

Сформулюємо кілька означень.

О. *Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує шукану функцію, її похідні та аргумент, тобто*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

О. *Найвищий порядок похідної, що входить в ДР, називається порядком ДР.*

П. 2. Рівняння $y' = x \sin x$ першого порядку, $y'' = (y')^3 + x^2 y$ — другого, $\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = t$ — третього.

11.1. РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

11.1.1. Загальні поняття

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F(x, y, y') = 0$. Теорія таких рівнянь ще далека до завершення. На практиці частіше зустрічаються рівняння, розв'язані відносно похідної

$$y' = f(x, y), \qquad (11.1)$$

для яких справджується теорема Коші.

Т. *(Про існування та єдиність розв'язку). Якщо в рівнянні (11.1) функція $f(x, y)$ та $f_y'(x, y)$ неперервні в області D, яка містить точку $M_0(x_0, y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$ $\forall$ $(\xi_0, \psi_0) \in \Delta$.*

О. *Умова, яка полягає в тому, що для рівняння* (11.1) $y(x_0) = y_0$, *називається початковою.*

О. *Загальним розв'язком ДР (11.1) називається функція* $y = \varphi(x, c)$, *яка залежить від сталої* c *і задовольняє умови:*

1) $\forall$ c *вона є розв'язком (11.1),*

2) *для довільних початкових умов* $y(x_0) = y_0$ *існує таке значення* c_0, *що* $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$.

О. *Частинним розв'язком (11.1) називається розв'язок, який дістають із загального при конкретному значенні* $c_0 (y = \varphi(x, c_0))$ *за допомогою початкових умов.*

У П. 1. загальним розв'язком є $N = ce^{K_n t}$, початковою умовою $N(t_0) = N_0$, а частинним розв'язком є $N = N_0 \exp(K_N(t - t_0))$.

Якщо розв'язок дістаємо в неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то це загальний або частинний $\Phi(x, y, C_0) = 0$ інтеграл (11.1).

Рівняння (11.1) разом з умовою $y(x_0) = y_0$ *називається задачею Коші.*

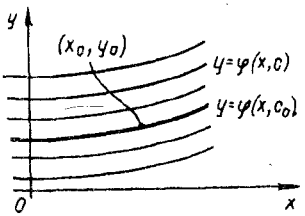


Рис. 11.2

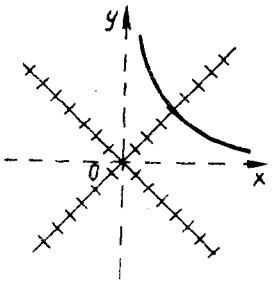


Рис. 11.3

З геометричної точки зору загальний розв'язок (11.1) $y = \varphi(x, C)$ — *це сім'я інтегральних кривих, а частинний розв'язок — одна з ліній сім'ї, яка проходить через задану точку* (x_0, y_0) (рис. 11.2).

Рівняння (11.1) визначає кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, яка проходить через точку (x, y), тобто задає поле напрямів дотичної в деякій області. Щоб це поле було наочним (за аналогією зі скалярним полем), вводять лінії рівня $y' = \text{const}$, які називають *ізоклинами**).

Рівняння ізоклин має вигляд

$$f(x, y) = \text{const}. \qquad (11.2)$$

Побудувавши за допомогою (11.2) сім'ю ізоклин, можна наближено визначити і розміщення інтегральних кривих.

П. 1. Побудувати ізоклини рівняння $y' = -\frac{y}{x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Вважаючи $y' = k$, маємо рівняння ізоклин $y = -kx$. Очевидно, що інтегральними кривими є гіперболи $y = -\frac{c}{x}$ (перевірте це підстановкою) (рис. 11.3).

*) Від грецьк. «ізос» — однаковий і «клінос» — нахил.

Іноді виникає обернена задача: для заданої сім'ї інтегральних кривих $y = \varphi(x, C)$ треба знайти ДР, яке вони задовольняють. Ця задача розв'язується так. Співвідношення $y = \varphi(x, C)$ розв'язується відносно C, $C = \psi(x, y)$, потім диференціюється $y = \varphi(x, c)$ і в нього підставляється знайдений вираз для C, тобто $y' = \varphi'(x, \psi(x, y))$.

П. 2. Знайти ДР із загальним розв'язком $y = \dfrac{C}{x}$.

Знаходимо $C = xy$. Диференціюємо розв'язок $y' = -\dfrac{C}{x^2}$. Підставляючи сюди щойно знайдене значення C, дістаємо $y' = -\dfrac{y}{x}$, тобто наше припущення тут підтвердилося.

11.1.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

О. *ДР з відокремлюваними змінними називається рівняння*

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (f_1(x)f_2(y) \neq 0). \tag{11.3}$$

Порівняно із загальним виглядом рівняння першого порядку (11.1) $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Далі маємо

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y),$$

або

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Загальний розв'язок рівняння (11.3) дістанемо, зінтегрувавши останню рівність

З а у в а ж е н н я. ДР з відокремлюваними змінними можна подати у вигляді

$$M_1(x)N_1(y)dx = M_2(x)N_2(y)dy,$$

де

$$M_i(x) \neq 0, \quad N_i(y) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Тепер маємо

$$\frac{M_1(x)}{M_1(x)}\,dx = \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy.$$

Залишилось зінтегрувати.

Рівняння з відокремленими змінними мають вигляд

$$M(x)dx = N(y)dy.$$

П. 1. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Це рівняння типу (11.3). Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|, \quad y = cx.$$

Тут стала інтегрування подана у вигляді $\ln|c|$. У загальному розв'язку $y = cx$ модуль опущено за рахунок вибору знака c. Далі візьмемо до уваги, що $x = 1$ і $y = 1$, звідки маємо $c = 1$. Отже, $y = x$.

П. 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 2\sqrt{y}$.

Р о з в ' я з а н н я. Це рівняння типу (11.3). Маємо

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx, \quad \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx, \quad y = (x + c)^2.$$

Проте це не єдиний розв'язок, бо $y = 0$ є також розв'язком. Неєдиність розв'язку пояснюється тим, що порушено одну з умов теореми Коші: на осі Ox функція $f'_y = 1/\sqrt{y}$ — необмежена.

П. 3. *Витікання рідини з посудини.* Нехай циліндрична посудина з площею поперечного перерізу S до висоти H заповнена рідиною. У момент часу $t = 0$ відкривається зливний отвір площею σ (рис. 11.4) і починається процес витікання рідини з посудини.

У момент t висота стовпця рідини складала y, а в момент $t + dt$ — $y + dy$, тобто за проміжок часу dt об'єм рідини зменшився на $dQ_1 = -Sdy$. На виході з посудини об'єм рідини за dt становив $dQ_2 = \sigma v dt$, де v — швидкість води, яка витікає.

Згідно із законом збереження кількості рідини ($dQ_1 = dQ_2$) маємо $\sigma v dt = -Sdy$. Оскільки $-\frac{dy}{dt} = U$ (швидкість зниження рівня рідини в посудині), то закон збереження кількості рідини набирає вигляду $\sigma v = SU$. Щоб розв'язати наведене вище ДР, треба виразити v через y. Це можна зробити, скориставшись законом збереження енергії, який в гідравліці називається законом Бернуллі

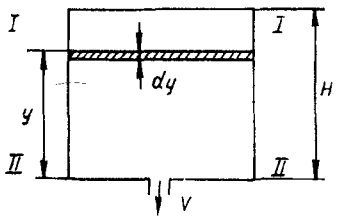


Рис. 11.4

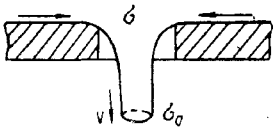


Рис. 11.5

$$P_1 + \frac{\rho U^2}{2} + \rho g y = P_2 + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const},$$

де P — статичний тиск у рідині, індекси позначають величини, що належать перерізам I—I і II—II (рис. 11.4), ρ — густина рідини, g — прискорення вільного падіння. Розв'язуючи разом рівняння збереження кількості рідини і рівняння Бернуллі, маємо

$$v = \frac{\sqrt{(2gy + 2(P_1 - P_2)\rho}}{1 - \sigma^2/S_2}. \tag{11.4}$$

Проаналізуємо цей вираз. Якщо збільшити площу σ, залишаючи без зміни S, то v збільшиться і при $\sigma = S$ стане нескінченним, а це абсурдно. Справа тут у тому, що ми вважали, що площа поперечного перерізу цівки σ_0 збігається з площею отвору. Поглянемо, як витікає цівка з отвору (рис. 11.5).

Частинки рідини, які утворюють межу вільної цівки, спочатку рухаються вздовж дна посудини і мають горизонтальну швидкість (складову), яка не може миттєво зникнути. Завдяки інерції цівка має плавні форми, вона горизонтально дотикається до дна посудини і поступово набирає форми вертикального циліндра з площею основи σ_0. Через це в подальшому рівняння збереження кількості рідини записуватимемо у вигляді $\mu\sigma v = SU$, де μ — коефіцієнт звуження цівки.

Беручи до уваги рівняння (11.4), розглянемо випадок закритої зверху посудини. При витіканні рідини тиск P_1 зменшується і настане момент, коли чисельник рівняння

(11.4) дорівнюватиме нулю. З цього моменту неперервна течія переривається і настає режим «пробулькування», при якому повітряна булька прориває в посудину, врівноважує тиск P_1 з атмосферним P_2 і забезпечує витікання чергової порції рідини.

Якщо кришку зняти, то $P_1 = P_2$, і у випадку посудини, де $\sigma << S$, формула (11.4) набирає вигляду формули Торічеллі, яку часто застосовують для задач про витікання рідини. У цьому окремому випадку знайдене вище ДР набирає вигляду (з урахуванням того, що $v = \sqrt{2gy}$)

$$\mu\sigma\sqrt{2gy}\,dt = -Sdy. \tag{11.5}$$

Відокремлюючи змінні та інтеґруючи, дістаємо

$$T = \int_0^T dt = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{dy}{\mu\sqrt{y}}.$$

Досвід показує, що час витікання рідини T є скінченним. Це значить, що невластивий інтеґрал другого роду — збіжний. Останнє можливо тоді, коли $\mu\sqrt{y} \sim y^n$ при $n < 1$, тобто $\mu \sim y^k$, де $k < \frac{1}{2}$. Таким чином, на основі тільки фундаментальних законів природи за допомогою математичного апарата ми дістали важливу інформацію про той процес, який нас цікавить. Пропонуємо самостійно зінтеґрувати (11.5) за умови $\mu = \text{const}$.

За допомогою (11.5) можна розв'язати ряд практичних задач. Наприклад, знайти форму посудини, в якій рівень рідини знижується зі сталою швидкістю v. Оскільки $U = -\frac{dy}{dt}$, то з (11.5) знаходимо, що $S = \frac{\mu\sigma}{U}\sqrt{2gy}$. Якщо посудина — тіло обертання, то $S = \pi r^2$, звідки

$$r = \sqrt{\mu\sigma\sqrt{2gy}\,/\pi U}.$$

П. 4. Матеріальна точка рухається прямолінійно під дією сили, прямопропорційної до часу від початку руху і обернено пропорційної до швидкості. Знайти швидкість точки через 2 с, якщо на початку руху швидкість становила 1 м/с, а за 1 с стала 5 м/с.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо $F = k\frac{t}{V}$. За законом Ньютона

$$ma = k\frac{t}{V}, \quad m\frac{dV}{dt} = k\frac{t}{V}, \quad dv = ptdt \left(p = \frac{k}{m}\right).$$

Зінтеґрувавши останнє рівняння, знаходимо $V^2 = pt^2 + C$

(сталу інтеґрування подано у вигляді $\frac{C}{2}$), або $v(t) = \sqrt{pt^2 + C}$.

Оскільки $v(0) = 1$, то $C = 1$, отже, $v(t) = \sqrt{pt^2 + 1}$.
Оскільки $v(1) = 5$, то $v(t) = \sqrt{24t + 1}$ $(p = 24)$.
Остаточно $v(2) = 7$.

11.1.3. Рівняння в повних диференціалах

О. *Рівняння*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{11.6}$$

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто якщо $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Справді, в даному випадку

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial y}\,dy = 0,$$

тобто $M = \frac{\partial u}{\partial x}$, $N = \frac{\partial u}{\partial y}$, диференціюємо вираз для M по y, а для N — по x. Якщо мішані похідні рівні

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

то

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Запишемо (11.6) у вигляді $du = 0$, звідки $u(x, y) = c$. Знайдемо функцію $u(x, y)$. Для цього зінтегруємо $M = \frac{\partial u}{\partial x}$ по x:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y).$$

Цей вираз диференціюємо по y і скористаємось тим, що $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y),$$

або

$$N(x, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y);$$

звідки $\varphi'(y) = N(x_0, y)$. Зінтегрувавши останню рівність і підставивши $\varphi(y)$, знайдемо остаточно

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy,$$

де (x_0, y_0) — будь-яка точка області, в якій задано рівняння (11.6).

Загальний же розв'язок рівняння в повних диференціалах має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = c.$$

П. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Тут $M = x^2 + y^2$, $N = 2xy$. Очевидно, що $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$. Отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Знаходимо

$$\int_{x_0}^{x} (x^2 + y^2)dx + \int_{y_0}^{y} 2x_0 y dy = c,$$

$$\frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x_0^3}{3} - y^2 x_0 + x_0 y^2 - x_0 y_0^2 = c,$$

або

$$\frac{x^3}{3} + y^2 x = c_1 \quad (c_1 = c + \frac{x_0^3}{x} + x_0 y_0^2).$$

Як бачимо, стала c_1 містить координати точки (x_0, y_0). Ця точка справді може бути довільною, якщо виконуватиметься теорема Коші.

11.1.4. Однорідні рівняння

О. *Рівняння (11.1) називається однорідним, якщо* $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$, *де* λ — *довільний вираз.*

Т. *Однорідне рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними.*

■ Нехай $y' = f(x, y)$ — однорідне рівняння і $\lambda = \frac{1}{x}$. Тоді $f(\lambda x, \lambda y) = f(1, y/x)$ і $y' = f(1, y/x)$.

Отже, однорідне рівняння залежить від відношення змінних. Нехай

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Тоді

$$u' = \frac{f(1, y) - u}{x}.$$

Дістали рівняння з відокремлюваними змінними. Маємо

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x},$$

або

$$\ln |x| = \int du \,/\, (f(1, u) - u). \quad ■$$

П. Знайти рівняння кривих, у яких піддотична дорівнює сумі координат точки дотику.

Р о з в ' я з а н н я. Як відомо, піддотична (див. 4.4) дорівнює $S_T = \frac{y'}{y}$. За умовою $\frac{y'}{y} = x + y$, або $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + 1$.

Останнє рівняння—однорідне (x і y поміняли місцями порівняно з означенням). Маємо

$$\frac{x}{y} = u, \quad x = uy, \quad x' = u'y + u,$$

звідки

$$u'y = 1, \quad du = dy/y,$$
$$x = y(\ln |y| + \ln |c|),$$

або

$$x = y \ln (cy) \quad (\text{sign } c = \text{sign } y).$$

З а у в а ж е н н я. *До однорідних можна звести рівняння*

$$y' = (ax + by + c) / (a_1 x + b_1 y + c_1).$$

Це можна зробити за допомогою підстановок

$$x = x_1 + h_1, \quad y = y_1 + h_2.$$

Справді,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + (ah_1 + bh_2 + c)}{a_1 x_1 + b_1 y_1 + (a_1 h_1 + b_2 h_2 + c_1)} = \frac{a + by_1/x_1}{a_1 + b_1 y_1 / x_1},$$

якщо

$$\begin{cases} ah_1 + bh_2 + c = 0; \\ a_1 h_1 + b_1 h_2 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Можливі два випадки: 1) $\Delta \neq 0$ і 2) $\Delta = 0$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

У першому випадку розв'язок системи існує і єдиний; вихідне рівняння зводиться до однорідного.

У другому випадку $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, звідки $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$. Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}.$$

Виконаємо заміну змінної $z = ax + by$. Тоді

$$y = \frac{1}{b}(z - ax), \quad y' = \frac{1}{b}(z' - a) = \frac{z + c}{\lambda z + c_1},$$

або

$$z' = \frac{z(b + a\lambda) + (bc + ac_1)}{\lambda z + c_1},$$

звідки

$$dx = \frac{(\lambda z + c_1)dz}{z(b + a\lambda) + (bc + ac_1)}.$$

Дістали рівняння з відокремленими змінними.

Аналогічно для неперервної функції f розв'язується рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right).$$

11.1.5. Лінійні рівняння

О. *Лінійним ДР називається рівняння*

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{11.7}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ — неперервні для всіх x.

Отже, для лінійних ДР права частина (11.1) є лінійною щодо y.

Т. *Лінійне ДР можна звести до двох рівнянь з відокремлюваними змінними.*

■ Нехай $y = uv$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ (таку підстановку запропонував Й.Бернуллі). Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставимо y і y' в (11.7). Маємо

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{11.8}$$

Оскільки у виразі для y один множник можна вибрати довільно, а другий підібрати, то нехай

$$v' + p(x)v = 0. \tag{11.9}$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Його розв'язок

$$v = \exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

існує, оскільки існує інтеґрал від неперервної (за означенням (11.7)) функції $p(x)$. З рівняння (11.8) знаходимо

$$\begin{cases} v = \exp\left(-\int p(x)dx\right); \\ u'v = q(x), \end{cases}$$

або

$$u' \exp\left(-\int p(x)dx\right) = q(x),$$

$$u' = q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right). \tag{11.10}$$

Дістали рівняння з відокремлюваними змінними. Далі знаходимо

$$u = \int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx + c.$$

Остаточно

$$y = uv = \left(\int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right)dx + c\right) \exp\left(-\int p(x)dx\right).$$

Рівняння (11.7) звелося до рівнянь (11.9) і (11.10). Зазначимо, що при знаходженні v було взято найпростіший за формою розв'язок (11.9). ■

П. 1. Розглянемо задачу провітрювання проходки підземного вибою, здійсненої за допомогою встановленого на свіжому потоці вентилятора місцевого провітрювання з продуктивністю Q м^3/с і трубопроводу (рис. 11.6).

Нехай у момент t концентрація шкідливих газів у привибійному просторі з об'ємом V_0 становить x, а надходження їх виражається функцією $q(t)$ (м^3/с). За проміжок dt внаслідок подачі Q з об'єму V_0 буде вилучено об'єм газів $xQdt$, але надійде об'єм qdt. Тому сумарний об'єм зменшиться на $dq = (xQ - q)dt$. Це призведе до зміни їхньої концентрації на $dx = dq/V_0$. Вилучаючи dq, дістаємо лінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x\frac{Q}{V_0} = \frac{q}{V_0}.$$

Його розв'язок

$$x = e^{-\int (Q/V_0)dt}\left(\int \frac{q}{V_0} e^{\int (Q/V_0)dt} dt + c\right).$$

Якщо $Q/V_0 = \text{const}$, $q/V_0 = \text{const}$, то

$$x = \frac{q}{Q} + ce^{-Qt/V_0}.$$

Оскільки $x = x_0$ при $t = 0$, то $c = x_0 - q/Q$. Якщо $t = T$, $x = x_q$ (де x_q — допустима концентрація газів), то

$$T = \frac{V_0}{Q} \ln \left| \frac{m/V - q/Q}{x_q - q/Q} \right|.$$

Як правило, час провітрювання T, на який припиняють усі роботи, нормується. Тоді здобутий вираз можна використати для визначення величини продуктивності вентилятора Q і за каталогом підібрати необхідну машину.

Оскільки $x = m/V_0$, де m — об'єм шкідливих газів, які знаходяться в привибійному просторі об'єму V_0 у момент t, то T має мінімум при певному $V_0 = V_0^*$.

Справді,

$$T = \frac{V_0}{Q} \ln \left| \frac{m/V - q/Q}{x_q - q/Q} \right|.$$

Зваживши на необхідну умову екстремуму $\frac{\partial T}{\partial V_0} = 0$, знайдемо

$$V_0^* = \frac{mQ}{q} - \left(1 - \ln^{-1} \frac{m/V_0 - q/Q}{x_q - q/Q} \right).$$

Звідси методом ітерацій можна знайти величину оптимального об'єму V_0^*, в який потім вписати все устаткування, необхідне для проходки виробітки.

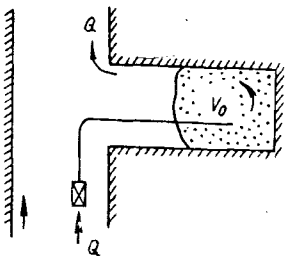


Рис. 11.6

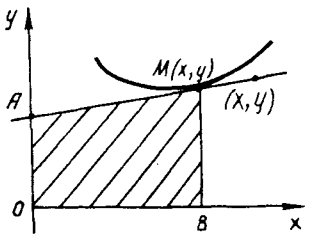


Рис. 11.7

П. 2. Знайти криві, в яких площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є сталою і дорівнює a.

Розглянемо рис. 11.7. Нехай $M(x, y)$ — точка з поточними координатами на шуканій кривій, а (X, Y) — точка на дотичній до цієї кривої теж з поточними координатами. Тоді для площі S маємо

$$S = \frac{1}{2}(OA + BM)OB = a, \quad BM = y, \quad OB = x.$$

Знайдемо OA. Рівняння дотичної до шуканої кривої в точці M має вигляд

$$Y - y = y'(X - x),$$

Оскільки $A(0, OA)$ лежить на дотичній, то $OA - y = -y'x$, або $OA = y - xy'$. Отже,

$$S = \frac{1}{2}(2y - xy')x.$$

За умовою

$$\frac{1}{2}(2y - xy')x = a,$$

звідки

$$y' = -\frac{2}{x}y = -2a/x^2.$$

Маємо лінійне рівняння. Далі маємо $y = uv$, $y' = u'v + u$. Тому

$$u'x + u\left(v - \frac{2}{x}v\right) = -2a/x^2.$$

Звідси $v' - \frac{2}{x}v = 0$. Найпростіший за формою розв'язок цього рівняння є $v = x^2$.

Друге рівняння з відокремлюваними змінними, яке породжене лінійним рівнянням, є

$$u'x^2 = -\frac{2a}{x^2},$$

звідки $u = 2s/3x^3 + c$. Оскільки $y = uv$, то остаточно

$$y = x^2\left(\frac{2a}{3x^2} + c\right) = \frac{2a}{3x} + cx^2.$$

Отже, ордината шуканої лінії є сумою ординат гіперболи і параболи.

11.1.6. Рівняння Бернуллі

О. *Диференціальним рівнянням Бернуллі називається рівняння*

$$y' + p(x)\,y = q(x)y^n, \qquad (11.11)$$

де $n \neq 0$, $n \neq 1$, а $p(x)$ і $q(x)$ — *неперервні для всіх* x.

Зазначимо, що при $n = 0$ рівняння (11.11) переходить в лінійне, а при $n = 1$ — в рівняння з відокремлюваними змінними.

Т. *Диференціальне рівняння Бернуллі можна звести до лінійного.*

■ Помножимо обидві частини рівняння (11.11) на y^{-n}. Маємо

$$y'y^{-n} - p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Нехай $y^{1-n} = z$. Тоді $z' = (1 - n)\,y^{-n}y'$, $y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$. Згідно з (11.11), дістаємо

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x),$$

звідки

$$z' + (1 - n)\,p(x)z = q(x)\,(1 - n).$$

Маємо лінійне рівняння

$$z' + p_1(x)z = q_1(x). \quad ■$$

З а у в а ж е н н я.

1. Для розв'язування рівняння Бернуллі не обов'язково зводити його до лінійного, можна відразу починати з заміни $y = uv$.

2. Розглянуті вище класи ДР першого порядку мають попарно непусті перерізи, тобто є такі рівняння, які одночасно належать, як мінімум, двом класам. Наприклад, рівняння $y' = -\frac{y}{x}$ є і лінійним, і однорідним, і в повних диференціалах і, звичайно, з відокремлюваними змінними. Для розв'язування зручніше вважати рівняння рівнянням з відокремлюваними змінними. Іноді рівняння з одного класу може перейти до іншого, простішого, за допомогою заміни змінних.

П. Знайти загальний розв'язок $y' - \frac{2y}{x} = x\sqrt{y}$.

Р о з в ' я з а н н я. Це рівняння Бернуллі. Скористаємося зауваженням 1. Маємо

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad u'v + u\left(v - \frac{2v}{x}\right) = x\sqrt{uv},$$

звідки

$$v' - \frac{2v}{x} = 0, \quad v = x^2.$$

Тоді

$$u'v = x\sqrt{uv} \quad \text{при} \quad v = x^2,$$

$$u = \frac{1}{4}(x + c)^2.$$

Остаточно

$$y = \frac{1}{4}x^2(x + c)^2.$$

11.1.7. Особливі точки, особливі розв'язки

Для ДР першого порядку існують точки, через які проходить більше, ніж одна, або жодної інтегральної кривої. Такі точки називаються особливими. Вони можуть бути ізольованими або заповнювати цілі лінії, які також називаються особливими.

Нехай, наприклад, в (11.1)

$$f(x, y) = P(x, y) / Q(x, y),$$

де P і Q — неперервні функції. Тоді рівняння (11.1) набирає вигляду

$$y = '(P(x, y) / Q(x, y). \qquad (11.12)$$

Якщо існує точка (x_0, y_0), де $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, то в ній рівняння (11.12) вже не зв'язує між собою диференціали dx і dy, внаслідок чого особливі точки вже не описуються цим рівнянням. Щоб знайти такі точки, застосуємо систему

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0; \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Існує чотири типи особливих точок: вузол, сідло, центр і фокус. У першому і четвертому випадках через особливу точку проходить

нескінченна множина інтегральних кривих, у другому — дві, в третьому — жодної.

П. 1. Рівняння $y' = \frac{y}{x}$ має загальний розв'язок $y = cx$. Особливою точкою є вузол (початок координат).

П. 2. Рівняння $y' = -\frac{y}{x}$ має загальний розв'язок $y = \frac{c}{x}$. Особливою точкою є сідло (початок координат, рис. 11.8).

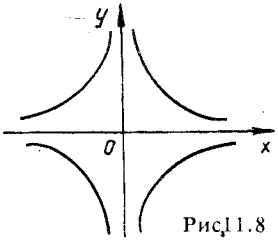


Рис. 11.8

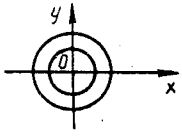


Рис. 11.9

П. 3. Рівняння $y' = -\frac{x}{y}$ має загальний розв'язок $x^2 + y^2 = c$, особливою точкою є центр (початок координат, рис. 11.9).

П. 4. Рівняння $y' = \frac{x+y}{x-y}$ має загальний розв'язок у полярних координатах $\rho = ce^{\varphi}$, особливою точкою є фокус (у полюсі, рис. 2.18).

Особливий розв'язок (особлива лінія) рівняння — це обвідна сім'ї його інтегральних кривих, яка в кожній точці дотикається якої-небудь лінії сім'ї, що визначається в загальному випадку неявною функцією

$$\Phi(x, y, c) = 0. \tag{11.13}$$

Для знаходження рівняння обвідної розглянемо деяку її точку (x, y), яке одночасно належить і деякій кривій сім'ї (11.13). Останній відповідає певне значення параметра c, яке при даних x і y визначається з рівняння (11.13), тобто $c = c(x, y)$. Звідси для всіх точок обвідної виконується рівність

$$\Phi(x, y, c(x, y)) = 0, \tag{11.14}$$

з якої визначимо кутовий коефіцієнт дотичної до обвідної в точці (x, y), для чого диференціюємо (11.14) по x, вважаючи, що $y = y(x)$. Дістанемо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right) y' = 0. \tag{11.15}$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої сім'ї (11.13) знайдемо з рівності

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0. \tag{11.16}$$

Оскільки він збігається з кутовим коефіцієнтом обвідної, то, розв'язуючи (11.15) і (11.16), знаходимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} y' \right) = 0,$$

але ж на обвідній $c(x, y) = \text{const}$. Отже, $\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$.

Таким чином, для знаходження обвідної маємо систему

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0. \end{cases} \tag{11.17}$$

П. 5. Знайти особливий розв'язок рівняння $(y^2(1 + y'^2) = R^2$.

Відокремлюючи змінні та інтеґруючи, знаходимо загальний інтеґрал $(x - c)^2 + y^2 = R^2$. Це сім'я кіл радіуса R з центром на осі абсцис. На основі рівності (11.17) маємо

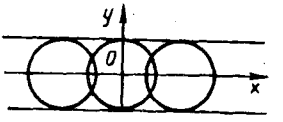


Рис. 11.10

$$\Phi = (x - c)^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = -2(x - c) = 0,$$

тобто $x = c$, звідки $y^2 - R^2 = 0$, або $y = \pm R$ (рис. 11.10)

11.2. РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

11.2.1. Загальні відомості

У загальному випадку рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', ..., y^n) = 0.$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{11.18}$$

то справедлива така теорема.

Т. *(Коші). Якщо в рівнянні* (11.18) *функція f та її частинні похідні по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$ *неперервні в області D, яка містить значення* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, *то існує єдиний розв'язок, який задовольняє початкові умови*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{11.19}$$

Задача, яка полягає в знаходженні розв'язку (11.18) за умов (11.19), називається *задачею Коші.*

Загальним розв'язком (інтеґралом) називається функція

$$y = \varphi(x, c_1, ..., c_n) \; (\Phi(x, y, c_1, ..., c_n = 0),$$

яка задовольняє умови:

1) зводить рівняння при довільних $c_1, ..., c_n$ до тотожності;

2) при довільних умовах (11.19) існують такі $c_i = c_{i0}$ $i = 1, 2, ..., n$, при яких ці умови виконуються.

Частинний розв'язок (інтеґрал) дістаємо із загального при

$$c_i = c_{i0}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Наявність у загальному розв'язку (інтегралі) n довільних сталих очевидна: щоб від $y^{(n)}$ перейти до y, треба інтегрувати n разів, дістаючи щоразу нову довільну сталу.

В інженерній практиці найбільше застосовують рівняння другого порядку, що зв'язано в основному із застосуванням другого закону механіки, формульний вигляд якого містить другу похідну. Для рівнянь другого порядку задача Коші має вигляд

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Вона має просте геометричне тлумачення: через дану точку (x_0, y_0) з даним кутовим коефіцієнтом y_0' проходить єдина інтегральна крива.

Крім задачі Коші, для рівнянь другого порядку можна сформулювати крайову задачу

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1,$$

яка може і не мати розв'язку.

11.2.2. Рівняння, які допускають зниження порядку

У деяких випадках порядок рівняння може бути знижений, наприклад, з другого до першого, а останнє рівняння може бути розв'язаним. Прийоми такого пониження різноманітні. Вкажемо деякі з них.

1. $y^{(n)} = f(x)$ $(y'' = f(x))$.

Загальний розв'язок тут можна дістати після n-кратного інтегрування

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int}_{n} f(x)dx = \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{c_{n-1} x}{1!} + c_n.$$

2. $F(x, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ $(y'' = f(x, y'))$.

Тут немає y. Скористаємося підстановкою $y' = p(x) \equiv p$, $y' = p'$, ..., $y^{(n)} = p^{(n-1)}$. Рівняння набирає вигляду $F(x, p, \ldots, p^{(n-1)}) = 0$ і має порядок $n - 1$ щодо p.

3. $F(y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$, $(y'' = f(y, y'))$.

Тут немає x. Скористаємося підстановкою $y' = p(y) \equiv p$. Тоді $y'' = p_y' y_x' = p'p$ і в разі рівняння другого порядку матимемо $pp' = f(y, p)$, або $p' = p^{-1} f(y, p)$, тобто $p' = f^*(y, p)$. Це рівняння першого порядку. Такі самі міркування й у загальному випадку.

З а у в а ж е н н я.

1. Якщо маємо рівняння $F(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, то доцільніше застосовувати випадок 2, хоча можна й 3.

2. Щоб понизити порядок у рівняннях другого порядку, доцільно застосовувати формули (справа наліво)

$$(yy')' = (y')^2 + yy'', \quad \left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{yy'' - (y')^2}{y^2}. \tag{11.20}$$

П. 1. Знайти загальний розв'язок ДР $yy'' = (y')^2$,

І с п о с і б. Оскільки $y'' = f(y, y')$, то це рівняння типу 3. Маємо

$$y' = p(y) = p, \quad y'' = pp'.$$

Отже,

$$ypp' = p^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} p = 0 \\ yp' = p, \end{bmatrix}$$

тобто $y = c$, або $y\dfrac{dp}{dy} = p$, $\int dp = \int \dfrac{dy}{y}$.

Звідси $p = c_1 y$, а оскільки $p = dy/dx$, то

$$y = c_2 e^{c_1 x}.$$

II с п о с і б. Скористаємося другою формулою з (11.20). Маємо $yy'' - (y')^2 = (y'/y)'y^2$, а для розглядуваного рівняння

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' y^2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} y = 0; \\ (y'/y)' = 0, \end{bmatrix}$$

тобто або $y = 0$, або $y'/y = c_1$, або $y' = c_1 y$. Остаточно $y = c_2 e^{c_1 x}$.

П. 2. Малі коливання математичного маятника. Під математичним маятником розуміють матеріальну точку, підвішену на нерозтяжній нитці, закріпленій нерухомо в одній точці.

Нехай маса маятника m, довжина l, нитка закріплена в точці O (рис. 11.11). Вивчимо його коливання. На маятник діє сила ваги $\bar{G} = m\bar{g}$, яку можна подати як векторну суму сили натягу нитки $\bar{R}$ і рушійної сили $\bar{P}$ (опором середовища нехтуємо).

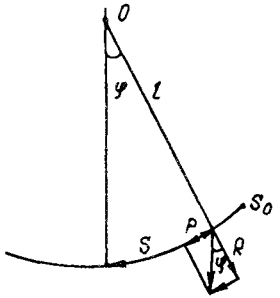


Рис. 11.11

Позначимо зміщення маятника через $\bar{s}$. Тоді на основі другого закону механіки маємо в проекції на напрям сили $\bar{P}$

$$ms'' = -mg \sin\varphi = -mg \sin\frac{s}{l}.$$

Малими називають такі коливання, при яких $\sin\dfrac{s}{l} \approx \dfrac{s}{l}$. Тоді рівняння набирає вигляду

$$s'' = -k^2 s \quad \left(k^2 = \frac{g}{l}\right).$$

Оскільки в рівняннях немає t, то вважаємо $S' = p(s) = p$, $s'' = pp'$. Тоді $pp' + k^2 s = 0$, звідки $p = \pm\sqrt{c_1 + k^2 s^2}$. Знаки відповідають руху точки вправо і вліво. Беручи до уваги те, що $p = 0$ при $S = S_0$, маємо $s' = \pm k\sqrt{s_0^2 - s^2}$. Інтегруючи, маємо ($t = 0$, $S = 0$)

$$\arcsin\frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

або остаточно

$$s = s_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Таким чином, математичний маятник здійснює гармонічні коливання з періодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, не залежним від амплітуди. Цей закон встановив шістнадцятирічний

Ґалілей на основі спостереження в церкві за коливанням люстр, замість датчика часу він користувався власним пульсом (маятниковий годинник Х.Гюйгенс винайшов пізніше).

П. 3. Прогин защемленої балки. Виходячи на балкон, ми стаємо учасниками ситуації, яка називається прогином защемленої балки (на таких балках тримається балкон). Як відомо, кривина балки $K = R^{-1}$ пропорційна до моменту M і обернено пропорційна до модуля пружності матеріалу E і моменту інерції I поперечного перерізу балки, тобто $k = M/EI$. Проте

$$K = y''(1 + y'^2)^{-\frac{3}{3}}.$$

Якщо обмежитися малими прогинами $y' << 1$, то $k = y''$, $y'' = \frac{M}{EI}$.

Момент сили відносно перерізу x балки, який віддалений від її кінця на відстань x, дорівнює $M = px$. Таким чином, $y'' = px/EI$. Двічі інтеґруючи, маємо

$$y = \frac{p}{EI}\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2.$$

Якщо $x = l$, то $y = 0$ і $y' = 0$. Тому

$$c_1 = -\frac{p}{EI}\frac{l^2}{2}, \quad c_2 = \frac{pl^3}{3EI}.$$

Остаточно

$$y = \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{3}l^3 - \frac{1}{2}l^2 x + \frac{1}{6}x\right).$$

11.3. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

11.3.1. Загальні відомості

О. *Лінійним рівнянням n-го порядку називається рівняння*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x), \qquad (11.21)$$

де $a_i(x)$ і $b(x)$ — *неперервні функції (зокрема, сталі). Якщо* $b(x) \equiv 0$, *то рівняння називається однорідним, якщо* $b(x) \not\equiv 0$, *то рівняння називається неоднорідним.*

Рівняння (11.21) є окремим випадком (11.18). Отже, на нього поширюється теорема Коші, яка щодо (11.21) вимагає неперервності всіх $a_i(x)$ і $b(x)$.

Введемо до розгляду лінійний диференціальний оператор

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y. \qquad (11.22)$$

Тоді (11.21) набирає вигляду $L(y) = b(x)$. Для однорідного рівняння

$$L(y) = 0. \qquad (11.23)$$

Очевидною є така теорема.

Т. 1. *Якщо* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — *частинні розв'язки* (11.23), *то лінійна комбінація їх*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \quad \forall\ c_i \in \mathbf{R},$$

є теж розв'язком (11.22).

11.3.2. Визначник Вронського*)

Нагадаємо, що система функцій є *лінійно залежною* на $[a, b]$, якщо існують такі сталі $c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$, які одночасно не всі дорівнюють нулю, і такі, що

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0. \tag{11.24}$$

П. Функції $y_1 = \sin 2x$ і $y_2 = \sin x \cos x$ залежні на $\mathbf{R}$. Можна взяти $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

Взагалі для двох залежних функцій y_1 і y_2

$$\frac{y_1}{y_2} = c, \quad c \in \mathbf{R},$$

і навпаки.

Якщо рівняння (11.24) виконується тільки за умови $c_i = 0$ для всіх i, то $y_1, y_2, \ldots, y_n$ називають *лінійно незалежними.*

О. *Визначником Вронського або вронскіаном* $n - 1$ *раз диференційовних функцій* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *називається визначник*

$$W(x) = W(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для двох функцій

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

На базі визначника Вронського даних функцій можна сформулювати конструктивну ознаку лінійної залежності чи незалежності цих функцій. Таку ознаку містить наступна теорема.

Т. 2. *Якщо* y_1 і y_2 *залежні на* $[a, b]$, *то*

$$W(x, y_1, y_2) = 0, \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Як вже зазначалося, із залежності y_1 і y_2 випливає, що $y_2 = cy_1$. Отже,

$$W(x, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & cy_1 \\ y_2 & cy_2 \end{vmatrix} = 0.$$

---

*) Ю. В р о н с ь к и й (1778—1853) — польський математик.

Нехай y_1 і y_2 — два частинні розв'язки лінійного однорідного ДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{11.25}$$

тобто

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Помножимо перше рівняння на y_2, а друге — на y_1 і віднімемо потім перший результат від другого. Тоді

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p(x)\,(y_2'y_1 - y_2y_1') = 0.$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$W' + p(x)W = 0,$$

де $W = W(y_1, y_2)$.

Зінтегруємо останнє ДР за умови $W(x_0) = W_0$. Дістанемо відому вже формулу Остроградського—Ліувілля*)

$$W = W_0 e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}. \tag{11.26}$$

За допомогою цієї формули й доводять наступну теорему.

Т. 3. *Якщо* $W(x_0, y_1, y_2) \neq 0$ *для довільного значення* $x_0 \in [a, b]$, *а* y_1, y_2 — *розв'язки* (11.25), *то* $W(x, y_1, y_2) \neq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Оскільки інтеграл $\int_{x_0}^{x} p(x)dx$ скінченний, то $\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(x)dx\right) > 0$. Якщо (див. (11.26)) $W_0 \neq 0$, то й $W \neq 0$.

Особливість теореми в тому, що умову $W \neq 0$ можна перевірити в одній точці, а результат перенести на весь інтервал.

Т. 4. *Якщо розв'язки рівняння* (11.25) *лінійно незалежні на* $[a, b]$, *то* $W(x, y_1, y_2) \neq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$.

■ Нехай виконується обернене твердження, тобто $W_0 = 0$ при деякому $x_0 \in [a, b]$. Тоді за **Т. 3** $W = 0$, тобто

$$y_2'y_1 - y_1'y_2 = 0.$$

Нехай $y_1 \neq 0$ (у противному разі останній вираз тотожно дорівнює нулю). Поділимо останнє рівняння на y_1^2. Матимемо

$$(y_1y_2' - y_2y_1')/y_1^2 = (y_2/y_1)' \equiv 0.$$

---

*) М. В. Остроградський (1801—1862) — український математик, Дж. Ліувілль (1809—1882) — французький математик.

Зінтегрувавши це рівняння, дістанемо $y_1 = cy_2$, тобто y_1 і y_2 — лінійно залежні. Це суперечить умові теореми. Отже, $W(x_0) \neq 0$. ■

Властивості визначника Вронського, подані в **Т. 2 — Т. 4**, дають змогу використовувати його як ознаку залежності чи незалежності розв'язків лінійних ДР.

11.3.3. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

Структуру загального розв'язку цих рівнянь визначає така теорема.

Т. *Загальний розв'язок рівняння* (11.25) *є лінійною комбінацією двох його лінійно незалежних розв'язків, тобто*

$$y' = c_1y_1 + c_2y_2. \tag{11.27}$$

■ Той факт, що (11.27) є розв'язком рівняння (11.25), випливає з Т. 1, п. 11.3.1. Доведемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

можна однозначно знайти c_1 і c_2. Підставимо початкові умови в рівняння (11.27). Маємо

$$\begin{cases} c_1y_{10} + c_2y_{20} = y_0; \\ c_1y_{10}' + c_2y_{20}' = y_0. \end{cases}$$

Для цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W(y_{10}, y_{20}).$$

Оскільки y_1 і y_2 лінійно незалежні, то $W \neq 0$, і система має єдиний розв'язок. ■

Зазначимо, що загального алгоритму пошуку розв'язку (11.25) не існує, але якщо відомо один розв'язок y_1 (який часто можна підібрати), то другий розв'язок y_2 можна дістати за допомогою формули (11.26). Справді, поділивши (11.26) на $y_1^2 \neq 0$, дістанемо

$$(y_2'y_1 - y_1'y_2)/y_1^2 = (y_2/y_1)' = \frac{C_1^*}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx},$$

звідки

$$y_2 = C_1^* y_1 \int e^{-\int p(x)dx} y_1^{-2} dx + C_2^*.$$

Оскільки йдеться про частинний розв'язок, то $C_1^* = 1$, $C_2^* = 0$. Тоді загальний розв'язок (11.25) матиме вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int e^{-\int p(x)dx} y_1^{-2} dx. \qquad (11.28)$$

П. 1. Знайти загальний розв'язок ДР

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0,$$

якщо $y_1 = x$ — його частинний розв'язок.

З (11.28) маємо

$$y = C_1 x + C_2 x \int e^{-\int dx/x} dx/x^2 = C_1 x + \frac{C_2}{2x} = C_1^* x + C_2^* x.$$

Перейдемо тепер до рівнянь вищих порядків. Йдеться про рівняння (11.21). Систему його розв'язків називають фундаментальною, якщо всі розв'язки лінійно незалежні, тобто визначник Вронського для них відмінний від нуля.

Т. *Якщо маємо фундаментальну систему* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *розв'язків (11.21), то його загальний розв'язок має вигляд*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

де c_i *— довільні сталі.*

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми з п. 11.3.2.

Алгоритм розв'язку (11.21) теж невідомий, але, знаючи один його частинний розв'язок, можемо понизити порядок рівняння, зберігаючи лінійність, підстановкою

$$y = y_1 \int u dx.$$

П. 2. За допомогою тільки що записаної підстановки розв'язати рівняння з П. 1. Р о з в ' я з а н н я. Беремо $y_1 = x$. Далі маємо

$$y = x \int u dx, \quad y' = \int u dx + xu, \quad y'' = 2u + xu'.$$

Згідно з умовою дістаємо

$$xu' + 2u + \frac{1}{x} \int u dx + u - \frac{1}{x} \int u dx = 0,$$

звідки $xu' + 3u = 0$, $u = x^{-3}$, $y = x \int x^{-3} dx = -1/(2x)$.

Нехай $y_2 = \frac{1}{x}$. Тоді $y = c_1 x + c_2 x^{-1}$.

11.3.4. Рівняння Ейлера

О. *Рівнянням Ейлера називають рівняння*

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \quad p_i \in R, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таке рівняння підстановкою $x = e^t$ зводиться до (11.25). При цьому

$$y(x) = y(e^t) = v(t),$$

$$y'(x) = v'(t) \frac{dt}{dx} = e^{-t} + v''(t),$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(e^{-t}v') = \frac{d}{dt}(e^{-t}v')\frac{dt}{dx} = e^{-2t}(v'' - v'), \ldots$$

П. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо $y = v$, $xy' = v'$, $x^2y'' = v'' - v$. Отже,

$$v'' + 2v' + v = 0. \tag{11.29}$$

Очевидно $v = e^{-t}$ є розв'язком останнього рівняння. Міркуючи, як і в попередньому прикладі, знаходимо (потім перейдемо до x)

$$y = e^{-t}(C_1 + C_2t).$$

Далі вкажемо простий алгоритм розв'язування рівнянь (11.29).

11.3.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо таке рівняння

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbf{R}. \tag{11.30}$$

Для того щоб функція y була його розв'язком, необхідно, щоб y, y' і y'' відрізнялися тільки множником, щоб при зведенні подібних членів у лівій частині дістати праву (нуль). Такою функцією є $y = e^{kx}$ (йдеться про загальний вигляд (11.30)). Знаходимо $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Підставляючи ці значення в (11.30), маємо

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Звідси

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Це рівняння називають характеристичним для рівняння (11.30), його корені k_1 і k_2. Можливі три випадки.

І в и п а д о к. k_1 і k_2 — дійсні і різні.

Тоді $y_1 = e^{k_1x}$ і $y_2 = e^{k_2x}$ — частинні розв'язки ДР (11.30). Оскільки

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(k_2 - k_1)x} \not\equiv \text{const}$$

(а також $W(y_1, y_2) \neq 0$), то y_1 і y_2 — лінійно незалежні. За теоремою з п. 11.3.2 загальний розв'язок (11.30) набирає вигляду

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}. \tag{11.31}$$

II в и п а д о к. k_1 і k_2 — рівні, а отже, дійсні; $k_1 = k_2 = k$.

У цьому випадку $y_1 = e^{kx}$ — розв'язок (11.30). Знайдемо другий розв'язок. Повернемося до випадку І. Вважатимемо, що k_1 і k_2 відрізняються на незначну величину

$$k_2 = k + \Delta k.$$

Тоді $y_2 = e^{(k+\Delta k)x}$ — розв'язок (11.30). Беручи до уваги лінійність, маємо, що y_3 і y_4 — теж розв'язки (11.30), де

$$y_3 = y_2 - y_1 = e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}, \quad y_4 = \frac{1}{\Delta k}\left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right).$$

У y_4 перейдемо до границі при $\Delta k \to 0$. Дістаємо $y^* = xe^{kx}$. Залишилося перевірити, що y^* є справді розв'язком (11.30). Тоді за теоремою з п. 11.3.2 загальний розв'язок (11.30) має вигляд

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} \equiv e^{kx}(c_1 + c_2 x). \qquad (11.32)$$

III в и п а д о к. k_1 і k_2 — комплексні, а отже, спряжені. Нехай $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Очевидно y_1 і y_2 — розв'язки (11.30), де

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Оскільки p і q — дійсні, то відповідні константи в загальному розв'язку є комплексно-спряженими, тобто

$$c_1^* = c + \tilde{c}i, \quad c_2^* = c - \tilde{c}i.$$

Загальний розв'язок (11.30) дістанемо, застосувавши формулу Ейлера (див. п. 7.1.1),

$$y = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 = (c + \tilde{c}i)e^{\alpha x}e^{i\beta x} + (c - \tilde{c}i)e^{\alpha x}e^{-i\beta x} =$$

$$= e^{\alpha x}((c + \tilde{c}i)(\cos\beta x + i\sin\beta x) + (c - \tilde{c}i)(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}(2c\cos\beta x - 2\tilde{c}\sin\beta x),$$

або остаточно

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x). \qquad (11.33)$$

Припущення щодо спряженості c_1^* і c_2^* правильне. Дістали дійсний вираз для y. Можна безпосередньо перевірити, що (11.33) — загальний розв'язок (11.30).

П. 1. Розв'язати рівняння

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 3) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Складемо характеристичні рівняння.

Маємо відповідно:

1) $k^2 - 3k + 2 = 0$; 2) $k^2 - 4k + 4 = 0$; 3) $k^2 - 2k + 2 = 0$.

Корені цих характеристичних рівнянь такі:

1) $k_1 = 1$, $k_2 = 2$; 2) $k_1 = k_2 = 2$; 3) $k_{1,2} = 1 \pm i$.

Врахувавши значення коренів характеристичних рівнянь з умови прикладу, запишемо розв'язки кожного з рівнянь. Маємо:

1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$; 2) $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$; 3) $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Розглянемо рівняння

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \quad (n \geq 2).$$

Йому відповідає характеристичне рівняння

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

яке має рівно n коренів. Кожному дійсному однократному кореню відповідає частинний розв'язок $y = e^{kx}$, кожному m-кратному дійсному кореню m лінійно незалежних розв'язків — e^{kx}, xe^{kx}, ..., $x^{m-1}e^{kx}$; кожній парі однократних комплексних коренів $\alpha \pm \beta i$ відповідають розв'язки $e^{\alpha x}\cos \beta x$ і $e^{\alpha x}\sin \beta x$. Нарешті, кожній парі комплексно спряжених коренів кратності m відповідає $2m$ розв'язків:

$$e^{\alpha x}\cos \beta x,\ xe^{\alpha x}\cos \beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos \beta x;$$

$$e^{\alpha x}\sin \beta x,\ xe^{\alpha x}\sin \beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin \beta x.$$

П. 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} - y = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Характеристичні рівняння $k^4 - 1 = 0$ має корені $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Тоді

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

11.3.6. Вільні (власні) коливання системи

Розглянемо коливання системи, яка складається з тягарця масою m, підвішеного на пружині (рис. 11.12). Вважатимемо, що сила пружності $p_1 = ax$, а сила опору навколишньому середовищу $p_2 = bx$ (силою тяжіння пружини нехтуємо).

На основі другого закону механіки маємо

$$mx'' = -bx - ax,$$

або, ввівши очевидні позначення,

$$x'' + 2rx' + \omega^2 x = 0, \quad x = x(t). \tag{11.34}$$

Коренями характеристичного для (11.34) рівняння є

$$k_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega^2}.$$

Можливі три випадки:

І випадок. При $r > \omega$ корені k_1 і k_2 — дійсні і різні (від'ємні). Тоді, згідно з (11.31),

$$x(t) = c_1 e^{-|k_1|t} + c_2 e^{-|k_2|t}.$$

І І в и п а д о к. При $r = \omega$ корені $k_1 = k_2 = k$ (дійсні, рівні, від'ємні). Тоді, згідно з (11.32),

$$x(t) = e^{-|k|t}(c_1 + c_2 t).$$

І І І в и п а д о к. При $r < \omega$ корені характеристичного рівняння комплексні, спряжені

$$k_{1,2} = -r \pm i\sqrt{\omega^2 - r^2} = -r \pm \beta i.$$

Тоді, згідно з (11.33),

$$(x)t = e^{-rt}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) = Ae^{-rt} \sin(\beta t + \varphi),$$

де $c_1 = A \sin \varphi$, $c_2 = A \cos \varphi$. Тут Ae^{-rt} — амплітуда, β — частота, φ — фаза коливань. Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - r^2}}.$$

Як бачимо, частота в цьому випадку стала, а амплітуда коливань зменшується, що можна оцінити за допомогою декремента*) затухання, тобто відношення амплітуд коливання, відділених одним періодом

$$\Delta = \frac{Ae^{-rt}}{Ae^{-r(t+T)}} = e^{rT}$$

чи логарифмічним декрементом затухання

$$\ln \Delta = rT.$$

Якщо знехтувати опором середовища ($r = 0$), то

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Це співвідношення описує гармонічні коливання математичного маятника (п. 11.2.2, П. 2).

11.4. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

11.4.1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне неоднорідне ДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{11.35}$$

і відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{11.36}$$

Загальний розв'язок ДР (11.35) визначає теорема.

Т. *Загальний розв'язок у ДР* (11.35) *має вигляд*

$$y = y_0 + y^*, \tag{11.37}$$

де y_0 — загальний розв'язок (11.36), а y^* — довільний частинний розв'язок (11.35).

---

*) Від лат. decrementum — зменшення, від англ. decrease — зменшувати.

Те, що (11.37) є розв'язком ДР (11.35), можна показати підстановкою y в (11.35), а те, що (11.37) є загальним розв'язком, доводимо так само, як і відповідний факт в теоремі з п. 11.3.2.

Аналогічно доводиться теорема про суперпозицію розв'язків (11.35), тобто така теорема.

Т. *Якщо в ДР* (11.35) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $y^* = y_1^* + y_2^*$, *де* y_i^*, $i = 1, 2$, *є розв'язком рівняння*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Якщо відомо хоч один частинний розв'язок ДР (11.35) y_1, то загальний розв'язок (11.35) можна знайти за допомогою підстановки

$$y_2 = y_1 \int u dx.$$

П. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - \frac{y'}{x} = x$.

Р о з в ' я з а н н я. Легко побачити, що $y_1 = 1$. Тоді $y_2 = \int u dx$, $y_2' = u$, $y_2'' = u'$, задане рівняння набирає вигляду

$$u' + \frac{u}{x} = x.$$

Розв'язком цього лінійного ДР першого порядку є $u = x(x + c)$. Тоді

$$y_2 = \int x(x + C)dx = \frac{x^3}{3} + C_2x^2.$$

Остаточно

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

11.4.2. Метод варіації довільних сталих

Цей метод запропонував Лаґранж. Суть його в тому, що загальний розв'язок ДР (11.35) шукаємо в тому ж вигляді, що й ДР (11.36), тобто

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{11.38}$$

де $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ — деякі функції. Зазначимо, що загальний розв'язок (11.37) для ДР (11.35) містить три функції, тоді як (11.38) — чотири, тобто дістаємо додатковий ступінь вільності, яким у подальшому скористаємося відповідним чином. Цей прийом нагадує підстановку Бернуллі $y = uv$ для лінійних рівнянь першого порядку.

З ДР (11.38) маємо

$$y'' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2.$$

Використовуючи додатковий ступінь вільності, вважаємо, що

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \tag{11.39}$$

тобто $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$. Тоді

$$y' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_2'y_2' + C_1'y_1'.$$

Підставивши y, y', y'' в (11.35), знайдемо

$$C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) +$$
$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Оскільки y_1 і y_2 — розв'язки (11.36), то фактично після підстановки матимемо

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \qquad (11.40)$$

Система з (11.39) і (11.40) дає змогу, оскільки $\Delta = W(y_1, y_2) \neq \neq 0$, знайти C_1' і C_2', а зрештою, і C_1, C_2.

П. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - y'/x = x$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо відповідне однорідне рівняння у вигляді

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}.$$

Двічі інтеґруючи, дістаємо

$$y = C_1x^2 + C_2.$$

Таку саму форму має і загальний розв'язок заданого рівняння при $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$. Для знаходження цього розв'язку застосуємо систему (11.39)—(11.40)

$$\begin{cases} C_1'x + C_2' = 0; \\ 2C_1'x = 0. \end{cases}$$

Звідси $C_1' = \frac{1}{2}$ або $C_1 = \frac{x}{2} + C_1^*$, $C_2' = -\frac{x^2}{2}$, $C_2 = \frac{1}{3}x^3 + C_2^*$. Остаточно

$$y = C_1^*x^2 + C_2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Для неоднорідних рівнянь (11.21) можна показати, що загальний розв'язок має той самий вигляд, що й для ДР (11.35).

У цьому випадку теж застосовують метод варіації довільних сталих, для чого загальний розв'язок пишуть у вигляді

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n$$

і використовують систему

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

11.4.3. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbf{R} \tag{11.41}$$

і відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{11,42}$$

Загальний розв'язок ДР (11.41) є $y = y_0 + y^*$ (див. 11.37). Значення y_0 знаходимо з (11.42), визначивши y^*. Розглянемо два випадки.

І в и п а д о к. $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, $a \in \mathbf{R}$, $P_n(x)$ — многочлен степеня n.

У цьому випадку істотно вважати, що

$$y^* = e^{ax}Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ — теж многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами (їх $n + 1$).

Спочатку зазначимо, що $Q_n'(x)$ має степінь $n - 1$, а $Q_n''(x)$ має степінь $n - 2$. Отже,

$$y^{*\prime} = e^{ax}(aQ_n(x) + Q_n'(x)),$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{ax}(a^2Q_n(x) + 2aQ_n'(x) + Q_n''(x)).$$

Підставивши y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в ДР (11.41), дістанемо

$$Q_n(x)\,(a^2 + pa + q) + Q_n'(x)\,(2a + p) + Q_n''(x) = P_n(x). \tag{11.43}$$

У лівій частині рівності (11.43) повинен бути многочлен степеня n. Це буде за умови $a^2 + pa + q \neq 0$, тобто коли a не є коренем характеристичного рівняння (11.41). Якщо a є однократним коренем відповідного характеристичного рівняння, то $a^2 + pa + q = 0$, а $2a + p \neq 0$ (теорема Вієта). Щоб ліва частина рівності (11.43) мала степінь n, візьмемо $xQ_n(x)$ замість $Q_n(x)$ (степінь стала вищою на одиницю, а кількість коефіцієнтів не збільшилась), тобто

$$y^* = xe^{ax}Q_n(x).$$

Нарешті, якщо a — двократний корінь характеристичного рівняння, тобто $a^2 + pa + q = 0$ і $2a + p = 0$, то

$$y^* = x^2e^{ax}Q_n(x).$$

У загальній формі

$$y^* = x^re^{ax}Q_n(x),$$

$r =$ кратн. $(a; k_1, k_2)$ — показник кратності a і коренів характеристичного рівняння ($r = 0, 1, 2$).

II в и п а д о к. $f(x) = M \cos bx + N \sin bx$, $b \neq 0$. Якщо $b = 0$, то $f(x)$ має вигляд, як у випадку I, де $a = 0$, $b = 0$.

У цьому випадку

$$y^* = A \cos bx + B \sin bx,$$

де A і B — невідомі сталі. Маємо

$$y^{*\prime} = b(- A \sin bx + B \cos bx),$$

$$y^{*\prime\prime} = - b^2(A \cos bx + B \sin bx).$$

Виконавши підстановку, дістанемо

$$\cos bx(- Ab^2 + Bbp + qA) + \sin bx\,(- Bb^2 + pAb + Bq) =$$

$$= M \cos bx + N \sin bx.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos bx$ і $\sin bx$, складемо систему для A і B

$$\begin{cases} A(q - b^2) + Bbp = M; \\ - Abp + B(q - b^2) = N, \end{cases}$$

для якої

$$\Delta - \begin{vmatrix} q = b^2 & bp \\ - bp & q - b^2 \end{vmatrix} = (q - b^2)^2 + b^2p^2 \geq 0.$$

Існування A і B, а отже, і y^*, залежить від того, чи $\Delta = 0$, чи $\Delta \neq 0$. Знайдемо умови цього. Розглянемо ще раз характеристичне рівняння для ДР (11.41), тобто $k^2 + pk + q = 0$. Знайдемо умови, за яких bi є коренем цього рівняння. Маємо при $k = bi$, $b \neq 0$

$$((bi)^2 + pbi + q = 0) \Leftrightarrow ((q - b^2) + pbi = 0 + 0i) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} q - b^2 = 0 \\ p = 0 \end{cases}\right),$$

тобто умови, за яких $\Delta = 0$ тотожні умовам, за яких bi є коренем характеристичного рівняння (11.41). Отже, якщо $bi \neq k$, то

$$y^* = A \cos bx + B \sin bx.$$

Тепер нехай $bi = k$. Тоді $p = 0$, $q = b^2$. Маємо

$$y'' + by = M \cos bx + N \sin bx.$$

Як і у випадку I, шукатимемо y^* у вигляді

$$y^* = x(A \cos bx + B \sin bx).$$

Тоді

$$y^{*\prime} = A \cos bx + B \sin bx + bx(- A \sin bx + B \cos bx),$$

$$y^{*\prime\prime} = 2b(- Ab \sin bx + B \cos bx) - b^2x(A \cos bx + B \sin bx).$$

Підставляючи y^* в (11.41) при даному $f(x)$, маємо

$$2b(-A\sin bx + B\cos bx) = M\cos bx + N\sin bx,$$

звідки $A = -N/2b$, $B = M/2b$ $(b \neq 0)$.

Остаточно

$$y^* = x^r(A\cos bx + B\sin bx),$$

де r = кратн. $(bi; k_1, k_2)$, $r = 0, 1$.

П. Знайти загальний розв'язок ДР

$$y'' + y = 2 + x^2 + 2\sin x.$$

Р о з в' я з а н н я. Маємо $y = y_0 + y_1^* + y_2^*$, де y_1^* відповідає рівнянню з правою частиною $2 + x^2$, а y_2^* відповідає рівнянню з правою частиною $2\sin x$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені

$$k = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i, \quad y_0 = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

Знайдемо y_1^* для рівняння

$$y'' + y = 2 + x^2 = e^{0x}(2 + x^2), \quad a = 0, \quad n = 2.$$

Маємо

$$y_1^* = x^r e^{0x}Q_2(x) = A + Bx + Cx^2, \quad r = \text{крат.} \quad (0; \pm i) = 0,$$

$$y_1^{*\prime} = B + 2Cx, \quad y_1^{*\prime\prime} = 2C.$$

Після підстановки в рівняння знаходимо

$$2C + A + Bx + Cx^2 = 2 + x^2,$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти в обох частинах останньої рівності при x^2, x, x^0, маємо $C = 1$, $B = 0$, $A = 0$.

Отже, $y_1^* = x^2$.

Знайдемо y_2^* для рівняння

$$y'' + y = 2\sin x.$$

Оскільки r = кратн. $(bi; k_1, k_2)$ = кратн., $(i; i, -i) = 1$, то

$$y_2^* = x(A\cos x + B\sin x).$$

Знайдемо $y_2^{*\prime}$, $y_2^{*\prime\prime}$. Після підстановки y_2^* у відповідне рівняння матимемо $A = -1$, $B = 0$, тобто

$$y_2^* = -x\cos x.$$

Остаточно

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - x\cos x.$$

11.4.4. Вимушені коливання системи. Резонанс

Розглянемо коливальну систему (див. рис. 11.12), до якої прикладена зовнішня змушуюча сила $f(t)$ (наприклад, на кінці пружини підвішено електродвигун з неврівноваженим ротором). У цьому разі маємо

$$x'' + 2rx' + \omega^2 x = f(x). \tag{11.44}$$

Найцікавішим є випадок, коли

$$f(t) = a\cos\omega t.$$

Тоді

$$x^* = M\cos\omega t + N\sin\omega t.$$

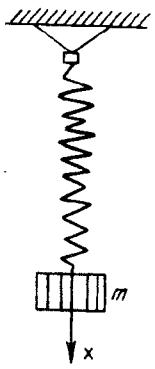


Рис. 11.12

Нехай $\omega^* i \neq k$ (k — корінь рівняння $k^2 + 2k + \omega^2 = 0$).

Підставляючи x^* в (11.44), дістанемо (прирівнюючи коефіцієнти при $\cos\omega t$ і $\sin\omega t$ в обох частинах отриманої рівності)

$$M = \frac{-2ar\omega^*}{(\omega^2 - \omega^{*2})^2 + 4r^2\omega^{*2}},$$

$$N = \frac{a(\omega^2 - \omega^{*2})}{(\omega^2 - \omega^{*2})^2 + 4r^2\omega^{*2}}.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$x^* = a(-2rl\cos\omega^* l + (\omega^2 - \omega^{*2})\sin\omega^* t) \times$$

$$\times \left(\sqrt{(\omega^2 - \omega^{*2}) + 4r^2\omega^{*2}}\right)^{-1} =$$

$$= a\sin(\omega^* t + \varphi^*)\left(\sqrt{(\omega^2 - \omega^{*2})^2 + 4r^2\omega^{*2}}\right)^{-1}$$

(тут $M = A^*\sin\varphi^*$, $N = B^*\cos\varphi^*$, $A^* = \sqrt{M^2 + N^2}$), а загальний

$$x = Ae^{-rt}\sin(\beta t + \varphi) + \frac{a\sin(\omega^* t + \varphi^*)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega^{*2})^2 + 4r^2\omega^{*2}}}.$$

При $t \to \infty$ власні коливання системи вщухають і залишаються вимушеними з частотою ω^* вимушуючої сили, фазою φ^* і амплітудою

$$A^* = \frac{a}{\omega^2\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}},$$

де

$$\lambda = \frac{\omega^*}{\omega}, \quad \gamma = \frac{r}{\omega}.$$

Пропонуємо самостійно показати, що при $\lambda = \sqrt{1 - 2\gamma^2}$, A^* набуває максимуму

$$A^*_{\max} = \frac{a}{2\gamma\omega^2\sqrt{1 - \gamma^2}}.$$

Явище різкого зростання амплітуди коливань називають *резонан-*

сом. Резонанс має велике практичне значення, зокрема в техніці. Можна навести приклади як позитивного, так і негативного прояву резонансу.

11.5. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

11.5.1. Загальні поняття

Системи ДР застосовуються при вивченні взаємодії кількох процесів, зокрема у випадку, коли шукана функція є вектором або тензором.

Один екологічний приклад.

П. 1. Швидкість зміни чисельності N народонаселення збільшується пропорційно до кількості N і зменшується пропорційно до кількості шкідливих чинників, які виділяються в навколишнє середовище. Отже,

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = a_1 N - a_2 B; \\ \dfrac{dB}{dt} = a_3 N, \end{cases}$$

де a_i — сталі.

Для вилучення B диференціюємо перше рівняння і підставляємо в нього друге. Маємо

$$N'' - a_1 N' + a_2 a_3 N = 0.$$

Це лінійне однорідне ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння для нього має вигляд

$$k^2 - a_1 k + a_2 a_3 = 0,$$

а коренями його є

$$k_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2 a_3}.$$

При цьому можливі три випадки.

І в и п а д о к. Якщо $a_1^2 > 4a_2 a_3$, то k_1, k_2 — різні, дійсні. Тоді

$$N = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

тобто N необмежено зростає із зростанням t.

ІІ в и п а д о к. Якщо $a_1^2 = 4a_2 a_3$, то $k_1 = k_2 = a_1/2$. Тоді

$$N = (C_1 + C_2 t)\, e^{a_1 t/2},$$

швидкість зростання знижується, але зростання ще лишається необмеженим.

ІІІ в и п а д о к. Якщо $a_1^2 < 4a_2 a_3$, то $k_{1,2} = \dfrac{a}{2} \pm \beta i$. Тоді

$$N = e^{at/2}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),$$

$$\beta = \sqrt{a_2 a_3 - a_1^2/4}.$$

Оскільки фактично $a_1 - a_3$ (функції часу) змінюються повільно, то наближено розв'язки випадків І—ІІІ можна зіставити на одній кривій. Спочатку матимемо інтенсивне експоненціальне зростання чисельності людей, потім через погіршання умов воно починає сповільнюватись і, нарешті, спадати до нуля (бо N не може бути від'ємним).

П. 2. У підвісних мостах проліт моста кріплять до троса, який спирається на пілони (рис. 11.13). Істотно вважати, що вага моста і додаткове навантаження (машини, пішоходи) через підвіси передаються на трос у вигляді рівномірно розподіленого навантаження (нехтуємо вагою троса порівняно з вагою моста).

Знайти форму лінії, якої набуває трос.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо половину частини троса між двома пілонами (див. рис. 11.13), виділимо її частину довжиною dl, $\text{пр}_{OX} dl = dx$. У стані спокою цю частину втримують напруження T і $T + dT$ (зліва і справа), напрямлені вздовж дотичної до профілю троса, сила ваги $dG = g dx$, де g — рівномірно розподілене навантаження від ваги моста, машин і т.д. Усі сили взаємно зрівноважені. Запишемо умови статичної рівноваги частини троса (сума проекцій сил на осі дорівнює нулю). Маємо

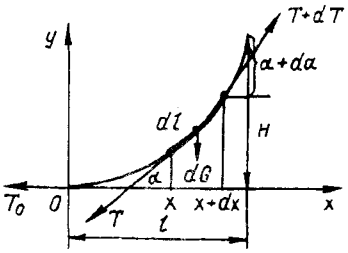


Рис. 11.13

$$-T\cos\alpha + (T + dT)\cos(\alpha + d\alpha) - dG = 0,$$

$$-T\sin\alpha + (T + dT)\sin(\alpha + d\alpha) = 0.$$

Нехтуючи нескінченно малими, маємо далі систему

$$\begin{cases} d(T\cos\alpha) = 0; \\ d(T\sin\alpha) = p dx. \end{cases}$$

Останню розв'яжемо так. Зінтеґруємо перше рівняння: $T\cos\alpha = C_1$. Сталу знаходимо з умови $T(0) = T_0$. Маємо $T = T_0/\cos\alpha$. Цей вираз підставимо в друге рівняння системи і, взявши до уваги те, що $\dfrac{dy}{dx} = \tan\alpha$, дістаємо $y'' = g/T$, звідки

$$y = (gx^2/(2T_0)) + C_2 x + C_3.$$

Для знаходження C_2 і C_3 застосуємо умови, які випливають з рис. 11.13: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Звідси $C_2 = C_3 = 0$.

Отже, остаточно

$$y = \frac{gx^2}{2T_0},$$

тобто трос має форму квадратичної параболи.

Для знаходження T_0 (ця сила необхідна для розрахунків міцності) скористаємося умовою $y(l) = H$. Тоді $T_0 = gl/2H$ і остаточно

$$y = \frac{Hx^2}{l^2}.$$

Для сили натягу троса в довільній точці маємо вираз (рекомендуємо знайти його самостійно)

$$T = \sqrt{T_0^2 + (gx)^2} = g\sqrt{x^2 + l^4/4H}.$$

Звідси випливає, що $T \to \infty$ при $H \to 0$, тобто повністю випрямити трос неможливо. Навпаки, збільшуючи H, можна знизити натяг троса T. Найбільшого значення T досягає при $x = l$:

$$T_{\max} = \frac{gl}{2H}\sqrt{l^2 + 4H}.$$

Його можна зменшити, збільшивши провисання H і зменшивши віддаль l між пілонами.

Для розрахунків статичної міцності користуються останнім результатом для $T_{\max}$. При цьому розтягуюче напруження σ визначається за формулою $\sigma = T/S$, де

S — площа поперечного перерізу троса. Якщо вимагати, щоб у всіх перерізах троса напруження було однаковим, то для цього слід виготовити трос зі змінною площиною поперечного перерізу

$$S = \frac{gl}{2H\,[\sigma]}\sqrt{l^2 + 4H^2},$$

де $[\sigma]$ — допустиме напруження.

У подальшому обмежимося розглядом так званих канонічних систем, в яких усі рівняння розв'язані відносно старшої похідної. Канонічну систему можна завжди замінити еквівалентною їй системою рівнянь першого порядку з кількістю рівнянь, яка дорівнює сумі порядків рівнянь заданої системи.

П. 3. Замінити канонічну систему еквівалентною системою рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x_1'' = X(t, x, y, x_t', y_t'); \\ y_1'' = Y(t, x, y, x_t', y_t'). \end{cases}$$

Позначимо $x' = u$, $y' = v$. Тоді $x'' = u'$, $y'' = v'$

$$\begin{cases} x' = u; \\ y' = v; \\ u' = X(t, x, y, u, v); \\ v' = Y(t, x, y, u, v). \end{cases}$$

Врахувавши сказане, розглядатимемо тільки системи першого порядку, розв'язані відносно похідних. Такі системи називають *нормальними*. Вони мають вид

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{11.45}$$

Розв'язок системи (11.45) є системою функцій

$$y_1 = y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad y_n = y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

які перетворюють систему (11.45) у тотожності при довільних C_i, при цьому за будь-яких початкових умов

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Сталі C_i визначаються однозначно. Ця система функцій становить загальний розв'язок. Задача пошуку частинного розв'язку (11.45) за відповідних початкових умов становить задачу Коші. Згідно з теоремою Коші, задача Коші має єдиний розв'язок, якщо функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ та їхні частинні похідні по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неперервні.

11.5.2. Розв'язування нормальної системи

Розв'язування нормальної системи здійснюють зведенням системи до рівняння n-го порядку відносно деякої невідомої функції і

виконують так. Перше рівняння з (11.45) диференціюють по x і замість $y_1, y_2, ..., y_n$ підставляють вирази їх із системи (11.45). Дістають рівняння

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Продовжують аналогічні процеси доти, поки не дістануть рівняння

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Потім із здобутих на попередніх етапах рівнянь знаходять $y_1, y_2, ..., y_n$ і підставляють в останнє рівняння. Внаслідок цього мають рівняння n-го порядку для y_1, тобто

$$y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}).$$

Розв'язком цього рівняння є функція $y_1(x, C_1, ..., C_n)$. Інші невідомі функції знаходять з допоміжних (проміжних) рівнянь, здобутих на попередніх етапах.

П.1. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y' = y + z; \\ z' = y - z, \quad y = y(x), \quad z = z(x). \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо $y'' = y' + z'$. З другого рівняння системи підставимо сюди z'. Тоді

$$y'' = y' + y - z.$$

З першого рівняння системи підставимо сюди z. Дістанемо

$$y'' - 2y = 0.$$

Отже,

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}}.$$

Невідоме z знаходимо з першого рівняння системи

$$z = y' - y = (\sqrt{2} - 1)C_1 e^{x\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)C_2 e^{-x\sqrt{2}}.$$

Зазначимо, що коли система лінійна, то еквівалентне щодо вибраної функції рівняння n-го порядку також лінійне.

Систему рівнянь вищих порядків слід зводити до відповідного рівняння n-го порядку безпосередньо (без переходу до системи рівнянь першого порядку).

П. 2. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y'' = z; \\ z'' = y, \quad y = y(x), \quad z = z(x). \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Диференціюємо двічі перше рівняння. За допомогою другого вилучаємо z''. Дістаємо $y^{IV} = y$, звідки

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Вираз для z знаходимо з першого рівняння системи

$$z = y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

11.5.3. Система лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Система однорідних ДР зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{11.46}$$

або

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оскільки від системи (11.46) можна перейти до лінійного однорідного ДР n-го порядку, розв'язок якого ми шукали у вигляді

$$x = Ae^{kt},$$

то й розв'язок системи (11.46) слід також шукати в такому ж вигляді. Тоді матимемо систему однорідних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - k)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0; \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - k)A_2 + \ldots + a_{2n}A_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn} - k)A_n = 0, \end{cases} \tag{11.47}$$

для якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то розв'язок системи (11.47) єдиний $A_j = 0$ і $x_j = 0$ для всіх j. Щоб мати ненульовий розв'язок, треба, щоб $\Delta = 0$. У цьому разі рівняння $\Delta = 0$ є алгебричним рівнянням n-го степеня, яке називається характеристичним для (11.46) і збігається з характеристичним рівнянням еквівалентного їй рівняння n-го порядку.

Розв'язуючи рівняння $\Delta = 0$, дістанемо всі його корені k_i. При цьому можливі такі випадки. I. Усі k_i — дійсні і різні. II. Серед дійсних k_i є кратні. III. Усі корені різні, але є комплексно спряжені. IV. Серед дійсних і комплексно спряжених коренів є кратні.

Для простоти обмежимося розглядом тільки першого випадку, при якому кожному кореню k_i відповідає система частинних розв'язків $x_1^i = A_1^i e^{k_i t}$, $x_2^i = A_2^i e^{k_i t}$, $\ldots$ $x_n^i = A_n^i e^{k_i t}$, де A_j^i для кожного k_i визначається розв'язком системи (11.47). Оскільки вона однорідна, то кожне

рівняння можна поділити на A_1^i, тобто вважати, що $A_1^i = 1$, решту A_j^i, $j = 2, 3, \ldots, n$, можна знайти із системи (11.47), з якої будь-яке рівняння, наприклад останнє, можна заздалегідь вилучити.

Загальний розв'язок системи (11.47) має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{k_1 t} + \ldots + C_n e^{k_n t}; \\ x_2 = C_1 A_2^1 e^{k_1 t} + \ldots + C_n A_2^n e^{k_n t}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1 A_n^1 e^{k_1 t} + \ldots + C_n A_n^n e^{k_n t}. \end{cases} \qquad (11.48)$$

П. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2; \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Характеристичне рівняння системи має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Звідси $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Отже,

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Щоб знайти A_j^i, підставимо в перше рівняння системи її корінь $k_1 = 1$. Тоді матимемо $1 + 2A_2^1 = 0$. У те ж саме рівняння підставимо другий корінь. Дістанемо при цьому $A_2^1 = -\frac{1}{2}$, $A_2^2 = 1$. У відповідності з (11.48) маємо

$$x_2 = -\frac{C_1}{2} e^t + C_2 e^{4t}.$$

11.5.4. Поняття про теорію стійкості Ляпунова

Розглянемо поведінку кульки всередині і зовні параболічної «чашки» (рис. 11.14). Якщо в першому випадку (рис. 11.14, *а*) кульку вивести зі стану рівноваги в деякий окіл її розміщення, то вона лишиться в цьому околі, перекачуючись як завгодно довго. У другому випадку (рис. 11.14, *б*) кулька відходить від околу положення рівноваги як завгодно далеко. Про перший випадок кажуть, що положення рівноваги стійке, про другий — нестійке.

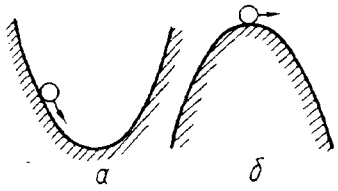


Рис. 11.14

Сформулюємо таке означення.

О. *Якщо об'єкт виходить зі стану рівноваги в нескінченно малий окіл і лишається в ньому як завгодно довго, то стан рівноваги називається стійким за Ляпуновим*[*].

[*] О.М. Л я п у н о в (1857—1918) — російський математик.

Нехай об'єкт описано системою лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad x = x(t). \tag{11.49}$$

Положення рівноваги буде досягнуте в точці x_{i0}, для якої

$$(x_i')_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{j0} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{11.50}$$

(поясніть чому).

Виведемо систему в окіл точки x_{i0}, тобто вважатимемо, що $x_i = x_{i0} + \Delta x_i$. Підставивши ці x_i в систему (11.49) і врахувавши (11.50), дістанемо

$$\frac{d\Delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_j, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Характеристичне рівняння цієї системи збігається з рівнянням для системи (11.47).

Нехай k_i — однократний дійсний корінь рівняння. Йому відповідає розв'язок $\Delta x_i = A_i e^{k_i t}$, звідки $|\Delta x_i| = |A_i|\, e^{k_i t}$.

Розглянемо поведінку $|\Delta x_i|$ при $t \to \infty$. Маємо

$$\lim_{t\to\infty} |\Delta x_i| = \begin{cases} 0, & k_i < 0; \\ \infty, & k_i > 0. \end{cases}$$

Нехай k_i — дійсний корінь кратності m. Тоді

$$\Delta x_i = A_i t^{m-1} e^{k_i t}, \quad |\Delta x_i| = |A_i|\, |t^{m-1}|\, e^{k_i t},$$

$$\lim_{t\to\infty} |\Delta x_i| = \begin{cases} 0, & k_i < 0; \\ \infty, & k_i > 0. \end{cases}$$

Нехай тепер k_i — комплексно спряжений (один з двох) корінь кратності μ. Тоді, враховуючи, що $|i^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| \equiv 1$, маємо

$$\Delta x_i = A_i t^{\mu-1} e^{(\alpha \pm i\beta)t}, \quad |\Delta x_i| = |A_i|\, |t^{\mu-1}|\, e^{\alpha t},$$

$$\lim_{t\to\infty} |\Delta x_i| = 0 \quad (\alpha < 0), \quad \lim_{t\to\infty} |\Delta x_i| = \infty \quad (\alpha > 0).$$

Узагальнюючи всі три випадки, можна сформулювати таку теорему.

Т. *Якщо всі корені характеристичного рівняння системи містять від'ємну дійсну частину, то таке положення рівноваги стійке (за Ляпуновим). Якщо хоча б один з коренів має додатну дійсну частину, то таке положення рівноваги нестійке.*

Якщо об'єкт визначається системою (11.45), то, подавши за формулою Тейлора функції $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ і обмежившись лінійними членами розвинення в околі точки x_{i0}, дістанемо систему (11.49). Отже, розглянуту теорію можна застосовувати і в складніших випадках.

11.6. МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

11.6.1. Метод ітерацій

Нехай маємо ДР разом з початковими умовами

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{11.51}$$

а також інтегральне рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx. \tag{11.52}$$

Справедлива така теорема.

Т. *Диференціальне рівняння разом з початковими умовами* (11.51) *еквівалентне одному інтегральному рівнянню* (11.52), *якщо відповідна функція* $f(x, y)$ *задовольняє умови теореми Коші.*

■ Зінтегрувавши рівняння (11.51), дістанемо

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx,$$

тобто рівняння (11.52), оскільки $y(x_0) = y_0$.

Продиференціювавши рівняння (11.52), дістанемо $y' = f(x, y)$. Підставляючи $x = x_0$ в (11.52), маємо $y(x_0) = y_0$. ■

Побудуємо послідовні наближення до кореня рівняння (11.51), взявши до уваги початкові умови (11.51) і (11.52). Знаходимо

$$y_0(x) = y_0, \quad y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx.$$

Наступні наближення виконуємо за схемою

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx. \tag{11.53}$$

Формула (11.53) є робочою формулою методу ітерацій у випадку диференціальних рівнянь. Число необхідних ітерацій визначимо з умови

$$\max_{a \le x \le b} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| < \alpha,$$

де α — максимально допустима абсолютна похибка обчислень.

П. Записати кілька наближень до розв'язку задачі Коші

$$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1.$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$y_0(x) = y(0) = 1;$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x^2 + 1)dx = 1 + x + \frac{1}{3}x^3;$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(x^2 + 1 + x + \frac{x^3}{3}\right)dx = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4;$$

$$y_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5.$$

Зазначимо, що коефіцієнти перед однаковими степенями x спочатку змінюються, потім стабілізуються, причому кожна ітерація додає один фіксований коефіцієнт. Її попередній відповіді й записують такі коефіцієнти.

Метод ітерацій можна застосовувати і для систем рівнянь

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x, y); \\ y' = f_2(t, x, y), \end{cases} \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Робоча формула тут набирає вигляду

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_1(t, x_n(t), y_n(t))dt;$$

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_2(t, x_n(t), y_n(t))dt.$$

11.6.2. Метод спрощень

Цей метод застосовують при [illegible] рівняння [illegible] рівняння [illegible] рівняння

Матимемо $y'' + 0{,}953y = 0$, звідки $y = \cos 0{,}96x$. Справді $|y| < 1$ (розв'яжіть записане в умові рівняння Бернуллі та порівняйте точний розв'язок з наближеним).

11.6.3. Метод Ейлера

Вище було розглянуто наближені методи аналітичного розв'язування рівнянь. Метод Ейлера — це один з перших чисельних методів їх розв'язування. Розглянемо його на прикладі задачі Коші в постановці (11.51).

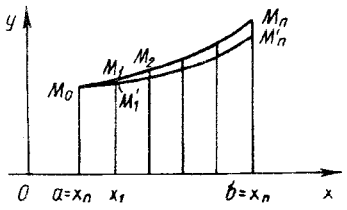


Рис. 11.15

Нехай розв'язок $y(x)$ треба знайти для $x \in [a, b]$. Подрібнимо інтервал $[a, b]$ на n рівних інтервалів (рис. 11.15) $\Delta x = h = (b - a)/n = (x - x_0)/n$ і вважатимемо

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h}.$$

Звідси і з (11.51) маємо

$$\Delta y = hf(x, y).$$

Останню рівність реалізуємо в точці (x_k, y_k). Тоді

$$y_{k+1} - y_k = hf(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k). \qquad (11.54)$$

Формула (11.54) є робочою формулою методу Ейлера. Оскільки фактично при доведенні (11.54) скористалися тим, що $\Delta y \approx dy$, то похибка має порядок першого члена, яким знехтували у формулі Тейлора, тобто h_2. На h кроках той самий порядок має вигляд

$$nh^2 = \frac{x_n - x_0}{n}.$$

11.6.4. Метод Рунґе—Кутта

Цей метод є вдосконаленням методу Ейлера і забезпечує вищу точність підрахунку при незначному ускладненні його, похибка тут має порядок $(x_n - x_0)/n^2$. Уточнення досягається за рахунок того, що на кроці враховується зміна похідної (рис. 11.16). Робоча формула цього методу має вигляд

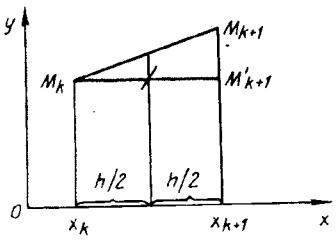


Рис. 11.16

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{1}{2}h,\ y_k + \frac{1}{2}kf(x_k, y_k)\right).$$

11.6.5. Графічно-аналітичні методи

Хоча з розвитком ЕОМ ці методи втратили свою актуальність, ними все одно ще користуються в інженерній практиці при виконанні оціночних підрахунків.

Одним з таких методів є метод *ізоклин* (11.11). До цих методів можна віднести і *графічно-аналітичне розв'язання* задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Використавши формулу радіуса кривини і врахувавши, що $y'^2 = \tan\varphi$, перетворимо формулу кривини в робочу формулу методу:

$$R = \frac{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \qquad (11.55)$$

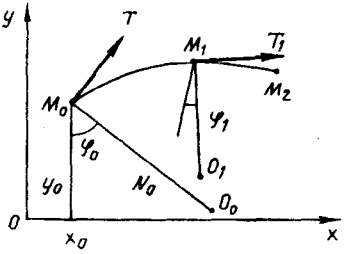


Рис. 11.17

Розв'язок побудуємо так (рис. 11.17). За допомогою початкових умов із заданої точки M_0 проводимо дотичну T_0 і нормаль N_0. Потім за формулою (11.55) визначимо R_0 і циркулем відкладемо дугу M_0M_1. У точці M_1 проведемо дотичну T_1, визначаючи кут φ_1 її нахилу, проведемо нормаль N_1. За формулою (11.55) обчислюємо R_1, і відкладемо дугу M_1M_2 і т.д.

11.7. ПОНЯТТЯ ПРО ЯКІСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

При моделюванні явищ навколишнього світу за допомогою ДР відповіді на поставлені питання намагаються дістати після інтегрування рівнянь. Проте, зробити це вдається не завжди. Не завжди допомагають і наближені методи. Тоді можуть бути корисними якісні методи дослідження ДР, які дають змогу мати необхідну інформацію, виходячи з властивостей останніх і не вдаючись до інтегрування їх. Деякою мірою ми вже спинялися на цих питаннях, розглядаючи зокрема ізоклини, за допомогою яких можна визначити форму розміщення інтегральних кривих на основі аналізу скінченного рівняння.

11.7.1. Фазова площина й фазова траєкторія процесу

Нехай процес, який досліджуємо, можна описати нормальною системою ДР

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \tag{11.56}$$

розв'язки яких $x(t)$, $y(t)$ дають параметричні рівняння деякої кривої, яку називають *фазовою траєкторією* на площині (X, Y), що при цьому називають *фазовою площиною*. Сукупність фазових траєкторій утворює так званий *фазовий портрет* даного процесу, який дає змогу мати уявлення про якісні особливості даного процесу. Щоб дістати диференціальне рівняння фазових траєкторій, поділимо друге рівняння з (11.56) на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} = F(x, y). \tag{11.57}$$

Згідно з теоремою Коші, в разі неперервності F і F_y' в області D через довільну точку $M \in D$ проходить єдина фазова траєкторія. Це не стосується особливих точок $M_0(x_0, y_0)$, де $Y(x_0, y_0) = X(x_0, y_0) = 0$. Рівняння (11.57) вже не виражає залежності між dx і dy.

Якщо лінеаризувати систему (11.56) за допомогою формули Тейлора, то дістанемо систему лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, корені характеристичного рівняння якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_0 - k & \left.\frac{\partial X}{\partial y}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial Y}{\partial x}\right|_0 & \left.\frac{\partial Y}{\partial y}\right|_0 - k \end{vmatrix} = 0$$

дають змогу зробити висновок, з якою особливістю маємо справу в тому чи іншому випадку.

І в и п а д о к. Якщо k_1 і k_2 — дійсні і мають однакові знаки, то M_0 — *вузол*. При $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ маємо стійке положення рівноваги (фазові траєкторії входять у точку M_0), а при $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ — нестійке положення (фазові траєкторії виходять з точки M_0).

ІІ в и п а д о к. Якщо k_1, k_2 — дійсні і мають протилежні знаки, то M_0 — *сідло*, яке є нестійким положенням рівноваги.

ІІІ в и п а д о к. Якщо $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексні і спряжені, то M_0 — *фокус*, стійкий при $\alpha < 0$ і нестійкий при $\alpha > 0$.

IV в и п а д о к. Якщо $k_{1,2} = \pm \beta i$, тобто чисто уявні, то M_0 — *центр*.

П. Розглянемо фазовий портрет малих коливань математичного маятника, які описує рівняння $x'' + \omega^2 x = 0$. Це рівняння замінимо нормальною системою рівнянь.

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Вилучаючи dt, дістанемо рівняння фазових траєкторій $ydy + \omega^2 x dx = 0$. Зінтегрувавши його, маємо

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C^2.$$

Це сім'я еліпсів, які утворюють фазовий портрет даного процесу. Змінюючи масштаб уздовж осі $x(\tilde{x} = \omega x)$, дістанемо сім'ю кіл, яким відповідають гармонічні коливання. Справді, якщо

$$x = a \sin \omega t = a \sin \tau,$$

то $y = a \cos \tau = x'$ і $x^2 + y^2 = a^2$.

Помічаємо, що замкнені фазові траєкторії відповідають періодичним коливанням.

11.7.2. Механічне тлумачення фазової траєкторії

Застосуємо наведені вище міркування до рівнянь механічного руху матеріальної точки маси m під дією сили — $f(x)$, яке має вигляд

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0.$$

Замінимо це рівняння нормальною системою

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x)/m.$$

Вилучимо з неї dt. Дістанемо рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)/my.$$

Інтегруючи його в межах від x_0 до x, знаходимо

$$\frac{1}{2} my^2 - \frac{1}{2} my_0^2 = -\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x_0} f(x)dx - \int_{0}^{x} f(x)dx,$$

або

$$\frac{1}{2} my^2 + \int_{0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{2} my_0^2 + \int_{0}^{x_0} f(x)dx = E = \text{const}.$$

Оскільки $y = \frac{dx}{dt} = v$, то $\frac{1}{2} my^2 = \frac{1}{2} mv^2$ — кінетична енергія системи. Можна показати, що $v(x) = \int_{0}^{x} f(x)dx$ — її потенційна енергія. Таким чином, рівняння фазових траєкторій у скінченній формі виражає закон збереження механічної енергії

$$\frac{1}{2} my^2 + v(x) = E = \text{const},$$

звідки

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - v(x)\right)}. \qquad (11.58)$$

У багатьох випадках $v(x)$ можна записати безпосередньо, не переходячи навіть до ДР, завдяки чому за допомогою (11.58) можна побудувати фазовий портрет відповідного процесу і вивчити його особливості.

11.7.3. Дослідження руху математичного маятника

Розглянемо рівняння руху математичного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \sin x = 0,$$

але вже не користуватимемося наближеною рівністю $\sin x \approx x$, а перейдемо до еквівалентної нормальної системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x.$$

Дістанемо рівняння фазових траєкторій.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 \sin x}{y}, \qquad (11.59)$$

після інтегрування якого матимемо

$$0{,}5y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = E.$$

Звідси

$$y = \pm \sqrt{2\left|E - 2\omega^2 \sin^2 \frac{x}{2}\right|}.$$

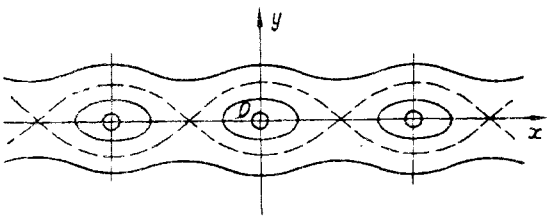


Рис. 11.18

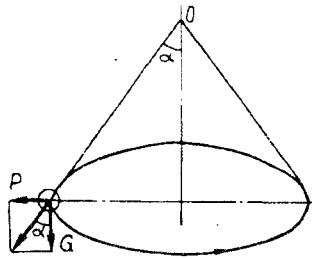


Рис. 11.19

Згідно з (11.59) особливі точки заданого рівняння — це точки $(0, 0)$, $(\pm \pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, ... , причому в точках $x_0 = \pi k$, де k набуває парних значень, маємо центр, а в решті точок — сідло.

Значення енергії E повністю визначає характер руху маятника.

Якщо $0 < E < 2\omega^2$, то маємо замкнені фазові траєкторії, які відповідають періодичним рухам маятника. Чим менше значення E, тим траєкторія ближча до кола, а коливання — до гармонічних. При $E > 2\omega^2$ траєкторія стає незамкненою. Ці дві області розділяє так звана сепаратриса*) (пунктир), для якої $E = 2\omega^2$ (рис. 11.18).

Цікаво, що незамкнені фазові траєкторії відповідають обертанню математичного маятника, для чого справді необхідний великий запас енергії, щоб відцентрова сила P, компенсуючи дію сили тяжіння G, відхиляла нитку на сталий кут α (рис. 11.19).

*) Від англ. separate — відділяти.

РОЗДІЛ 12

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

12.1. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

12.1.1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

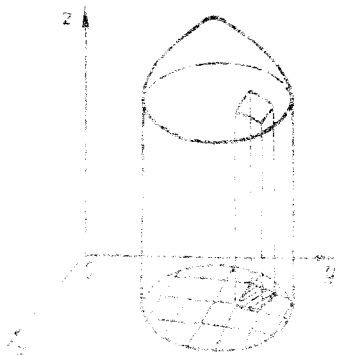
Задача про об'єм циліндричного тіла

О. *Циліндричним називається тіло, обмежене деякою поверхнею, проекцією її на координатну площину і циліндричною поверхнею, для якої контур вказаної проекції є напрямною.*

О. *Діаметром області називається найбільша з відстаней між двома довільними точками цієї області.*

Позначимо діаметр області D через $\lambda(D)$.

Знайдемо об'єм циліндричного тіла, обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$, проекцією D поверхні на площину XOY, відповідною циліндричною поверхнею за умови, що f неперервна і невід'ємна в D.



Розв'язування задачі аналогічне розв'язуванню задачі про площу криволінійної трапеції. Розіб'ємо довільним способом D на n частин (див. п. 9.1.1) і відповідним чином весь об'єм на суму n елементарних об'ємів (рис. 12.1). Нехай ΔS_i — множина точок відповідної i-ї частини D, а також площа цієї частини. Зробимо істотне припущення

$$f(x, y) \approx \text{const} = f(x_i^*, y_i^*), \quad \forall (x, y) \in \Delta S_i$$

$$\forall (x_i^*, y_i^*) \in \Delta S_i. \qquad (12.1)$$

Для такої умови об'єм i-го елементарного циліндричного тіла

$$\Delta V_i = f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta S_i.$$

$$V = \lim_{n \to \infty,\ \max\lambda_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta S_i, \tag{12.2}$$

де λ_i — діаметр ΔS_i, якщо така границя існує.

Задача про масу плоскої пластинки

Ця задача аналогічна відповідній задачі з п. 9.1.1.

Нехай плоска пластинка займає область D, а густина пластинки визначається неперервною функцією $\rho = \rho(x, y)$. Знайти масу m пластинки. Розбивши область D на частини, як в першій задачі і зробивши припущення, як в (12.1), матимемо

$$m = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i. \tag{12.3}$$

12.1.2. Означення і властивості подвійного інтеграла

З математичної точки зору розв'язки (12.2) і (12.3) мають однаковий вигляд. Отже, є сенс вивчати конструкції такого типу. За аналогією з (9.1.2) називатимемо їх подвійними інтегралами. Скористаємося деякими позначеннями з попередніх задач.

О. Подвійним інтегралом від функції $z = f(x, y)$ по області D називається границя

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i = \iint_D f(x, y)\,dS \tag{12.4}$$

за умови, що вона не залежить від способу розбиття області D на частини та вибору точок (x_i^*, y_i^*) в кожній частині області.

Згідно з (12.4), для (12.2) і (12.3) маємо

$$V = \iint_D f(x, y)\,dS, \quad m = \iint_D \rho(x, y)\,dS$$

Як формулюється відповідна геометрична і фізична [illegible]

[illegible]

1. *Лінійність (адитивність за функцією та однорідність) функціонала подвійного інтегрування*

$$\iint\limits_D (C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n) dS = C_1 \iint\limits_D f_1 dS + \ldots + C_n \iint\limits_D f_n dS,$$

$$\forall C_1 \in \mathbf{R}, \ldots, C_n \in \mathbf{R}.$$

2. *Адитивність за областю інтегрування*

$$\iint\limits_D f dS = \iint\limits_{D_1} f dS = \iint\limits_{D_2} f dS$$

($D = D_1 \cup D_2$, площа $D_1 \cap D_2 = 0$,)

3. *Інтегрування нерівності*

$$f_1(P) \le f_2(P) \Rightarrow \iint\limits_D f_1 dS \le \iint\limits_D f_2 dS.$$

4. *Оцінка інтеграла*

$$(m \le f(P) \le M) \Rightarrow (mS \le \iint\limits_D f dS \le MS),$$

(S — площа D).

5. *Теорема про середнє значення*

$$(f \in C_D) \Rightarrow (\exists\, P^*(C_1, C_2) \in D : \iint\limits_D f dS = f(P)S).$$

Як і для визначеного інтеграла, для подвійного інтеграла існує дві схеми застосування. Перша базується на його означенні як границі інтегральної суми, друга використовує знаходження диференціала шуканої величини, який потім інтегрують.

12.1.3. Обчислення подвійного інтеграла

Розглянемо спосіб обчислення

$$I = \iint\limits_D f(x, y) dS$$

за умови, що $f(x, y) \ge 0$, а D — правильна. Область D вважатимемо правильною, якщо прямі, паралельні координатним осям, перетинають її не більше, ніж у двох точках. Нехай границя області D записана рівняннями $y = y_1(x)$ (ближня до осі OX її частина) і $y = y_2(x)$ (віддалена частина). Схема міркувань така. З одного боку, $I = V$, де V — об'єм відповідного циліндричного тіла, а з другого боку, подавши V відповідним чином, матимемо спосіб обчислення I.

Для цього застосуємо формули площі криволінійної трапеції та об'єму тіла з відомими поперечними перерізами, тобто

$$S = \int\limits_a^b f(x) dx, \quad V = \int\limits_a^b S(x) dx.$$

Площа поперечного перерізу циліндричного тіла площиною, паралельною yOz є

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

(рис. 12.2 такий переріз заштриховано).

Шуканий об'єм тепер має вигляд

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (12.5)$$

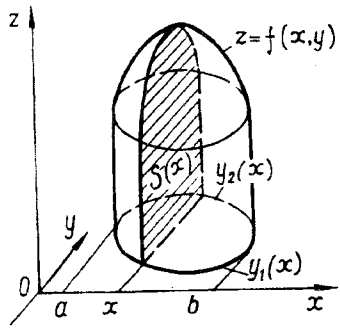


Рис. 12.2

Міркуючи аналогічно, в результаті перетину циліндричного тіла площинами, паралельними xOz, маємо

$$V = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dy. \qquad (12.6)$$

Оскільки $I = V$, то, враховуючи (12.5) і (12.6), знаходимо

$$\iint_d f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dy, \qquad (12.7)$$

або схематично (1) = (2) = (3).

Конструкції (2) і (3) називають *повторними* інтегралами. Розрізняють *зовнішній* і *внутрішній* інтеграли. Перехід (1) = (2) чи (1) = (3) означає обчислення інтеграла I, а перехід від (2) до (3) чи навпаки — зміну порядку інтегрування.

Зазначимо, що (12.7) справджується в будь-якому випадку, а не тільки для $f(x, y) \geq 0$. У разі неправильної області для обчислення відповідного інтеграла користуються властивістю 2, п. 12.1.2.

П. Обчислити

$$I = \iint_D (x + 2y)dxdy,$$

область D обмежена лініями $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$.

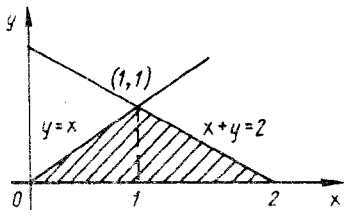


Рис. 12.3

Зображуємо область D (рис. 12.3). Якщо внутрішній інтеграл береться по змінній x, то в напрямі осі Ox входимо в область по одній прямій і по одній виходимо, а якщо по змінній y — то входимо по одній прямій (вісь Ox), а виходимо по двох різних. Розіб'ємо область у точці їхнього стикування на дві. Скористаємось властивістю 2, п. 12.1.2. Маємо

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x + 2y)dx,$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x (x + 2y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x + 2y)dy.$$

Обчислюючи I за першим виразом, дістаємо

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy\right)\Big|_y^{2-y} dy = \frac{5}{3}.$$

Вибір напряму інтегрування в подвійному інтегралі, як бачимо, може мати значення для зменшення обсягу обчислень.

12.1.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нагадаємо схему заміни змінних у визначеному інтегралі

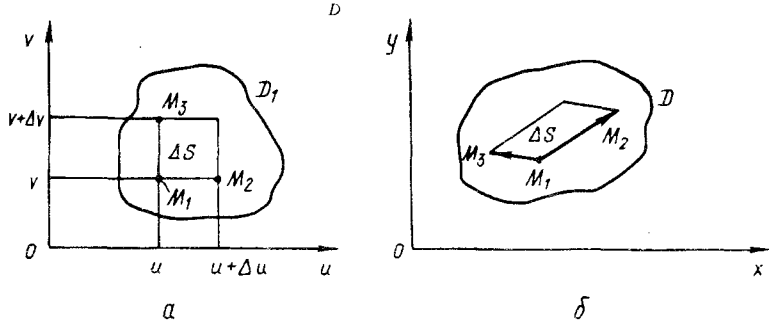
$$I = \int_a^b f(x)dx = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt, \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & t_1 & t_2 \end{array},$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \varphi(t_1) \\ b = \varphi(t_2) \end{array}\right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) |J| \, dt,$$

де $J = dx/dt$ — відношення довжин елементарних частин при старій та новій змінних

Нехай маємо

$$I = \iint_D f(x, y)dx\,dy,$$



а *б*

Рис. 12.4

а заміну здійснюємо за допомогою формул $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причому $J = \dfrac{\Delta S}{\Delta S_1}$ — відношення площ елементарних частин при старих і нових змінних (рис. 12.4, *а*). Істотно вважати, що тоді

$$I = \iint_{D_1} f(x(u, v), y(u, v)) |J| \, du\,dv. \qquad (12.8)$$

У випадку нових змінних $\Delta S_1 = \Delta u \cdot \Delta v$. Щоб знайти площу елементарної частинки ΔS при старих змінних (рис. 12.4, *б*), зазначимо, що при відображенні області D_1 на D_2 за допомогою $x = x(u, v)$, $y = y(y, v)$ елементарний прямокутник ΔS_1 переходить в елементарний паралелограм (спрощено) ΔS, площу якого знайдемо як

$$\Delta S = |\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}|.$$

Знайдемо ці вектори. Для точки M_1 маємо

$$x_1 = x(u, v), \quad y_1 = y(u, v).$$

Користуючись формулою Тейлора, для точки M_2 знаходимо

$$x_2 = x(u + \Delta u, v) \approx x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u.$$

Аналогічно

$$y_2 \approx y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u.$$

Для точки M_3

$$x_3 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u.$$

Тоді

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right),$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right).$$

Далі (abs (...) = |...|)

$$\Delta S = \text{abs}\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \text{abs}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\Delta S_1.$$

Звідси

$$J = \frac{\Delta S}{\Delta S_1} = \text{abs}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Цей функціональний визначник називають *визначником Якобі**) *чи якобіаном*. Формулу (12.8) дістав М.В.Остроградський.

---

*) К. Я к о б і (1804—1854) — німецький математик, брат відомого електротехніка Б.Якобі.

Н а с л і д о к. При $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ маємо

$$J = \text{abs} \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho \cos \varphi,\ \rho \sin \varphi)\,\rho d\,\rho d\varphi.$$

П. Обчислити інтеґрал Пуассона

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки

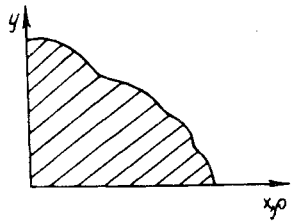


Рис. 12.5

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

то

$$I^2 = I \cdot I = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$$

$$= \begin{Bmatrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{Bmatrix} = \iint\limits_D e^{-\rho^2}\rho d\rho dy.$$

Обчислимо останній інтеґрал (рис. 12.5). Маємо

$$I^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^\infty \rho e^{-\rho^2}d\rho = \frac{\pi}{4},$$

звідки $I = \sqrt{I^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, тобто $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Цей інтеґрал широко застосовується в теорії імовірностей.

12.1.5. Геометричні застосування подвійного інтеґрала

1. *Об'єм циліндричного тіла*, обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$, її проекцією D на площину xOy, відповідною циліндричною поверхнею дорівнює

$$V = \iint\limits_D |f(x, y)|\,dS.$$

2. *Площа плоскої області* D дорівнює

$$S = \iint\limits_D dS$$

(як об'єм циліндра з висотою, яка дорівнює одиниці масштабу).

3. *Площа поверхні* $z = f(x, y)$, проекцією якої на площину xOy є область D, дорівнює

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\,dS.$$

Доведемо останню формулу. Виділимо на поверхні елемент $d\sigma$, який вважатимемо плоским внаслідок мализни. Нехай йому відповідає вектор $d\bar{\sigma} = \bar{n}d\sigma/|\bar{n}|$, де $\bar{n}$ — нормальний вектор до поверхні σ в точці елемента $d\sigma$ (рис. 12.6). Проекція цього елемента на площину xOy становить dS, або у векторній формі $\bar{dS} = \bar{k}dS$. Модулі цих векторів зв'язані рівністю

$$dS = \cos\gamma \, d\sigma.$$

Нормальний вектор $\bar{n}$ до поверхні $z = f(x, y)$ має вигляд

$$\bar{n} = -\bar{i}\frac{\partial f}{\partial x} - \bar{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \bar{k}.$$

Тоді

$$\cos\gamma = \cos(\hat{\bar{n}, \bar{k}}) = \frac{\bar{n}\,\bar{k}}{|\bar{n}|\,|\bar{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

звідки

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

Інтегруючи $d\sigma$ по області D, дістанемо σ.

П. Знайти площу поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо спочатку площу поверхні чверті сфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Маємо

$$f_x' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad f_y' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Отже,

$$\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Областю інтеґрування є множина $x^2 + y^2 \le R^2$. Таким чином,

$$\frac{1}{4}\sigma = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dy = \left\{\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho = \pi R^2 \Rightarrow \sigma = 4\pi R^2.$$

12.1.6. Механічні застосування подвійного інтеґрала

Про одне фізичне застосування подвійного інтеґрала, а саме, про масу плоскої пластинки, вже йшлося в (12.1.1) і (12.1.2).

Нехай маємо плоску пластинку з густиною речовини на ній $\rho = \rho(x, y)$. Нехай вона займає область D. Розіб'ємо область довільним

способом на n частин і масу кожної частини ΔS_i (це і множина точок, і площа i-ї частини) зосередимо в довільній її точці (x_i^*, y_i^*).

Розглянемо точку, віддалену від осі u на відстань d, в якій зосереджена маса m, а також систему точок, віддалених від осі u на d_i з масами в них m_i. Нагадаємо означення статичного моменту M та моменту інерції для точки та системи точок, а також формулу координат центра мас для системи точок, тобто

$$M_u \stackrel{\text{def}}{=} md, \quad I_u \stackrel{\text{def}}{=} md^2, \quad M_u \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma\, m_i d_i,$$

$$I_u \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma\, m_i d_i^2, \quad u_c = (\Sigma\, m_i u_i)/(\Sigma\, m_i).$$

У випадку пластинки D зосередимо масу кожної з n її частин у довільній точці. Тоді маємо, зокрема,

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^{*2} = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\,(y_i^*)^2\,\Delta S_i.$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$, $\max \lambda_i \to 0$.

Тоді

$$I_x = \iint_D \rho(x, y) y^2 dS.$$

Аналогічно

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)dS, \quad M_y = \iint_D x\rho(x, y)dS,$$

$$I_y = \iint_D \rho(x, y)x^2 dS, \quad I_o = \iint_D \rho(x, y)\,(x^2 + y^2)dS = I_x + I_y$$

(полярний момент),

$$x_c = \left(\iint_D \rho(x, y)x\,dS\right)/m = \frac{My}{m}, \quad y_c = \left(\iint_D \rho(x, y)y\,dS\right)/m = \frac{Mx}{m}.$$

З останніх двох формул випливає основний результат механіки про статичний момент пластинки і її центра мас:

$$M_y = mx_c, \quad M_x = my_c.$$

12.2. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

12.2.1. Визначення й обчислення подвійного інтеграла

Нехай дано пластинку D з масою m, густина $\rho(x, y)$. Маємо n її частин, ΔS_i — площа i-ї частини, λ_i — діаметр i-ї частини. Знайдемо масу m пластинки D, якщо відомо, що $\rho(x, y)$ неперервна в D.

Розіб'ємо довільним чином тіло V на n частин. Відносно кожної частини, зокрема i-ї, зробимо припущення (ΔV_i — це і множина точок цієї частини, і її об'єм), що

$$\forall (x, y, z) \in \Delta V_i \quad \rho(x, y, z) = \text{const} = \rho(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \quad \forall (x_i^*, y_i^*, z_i^*) \in \Delta V_i.$$

Тоді

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i, \quad m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i,$$

$$m = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta v_i, \tag{12.9}$$

(λ_i — діаметр i-ї частини V).

Якщо в області V задано довільну функцію, то аналогічно визначається потрійний інтеграл від цієї функції по області V, тобто

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i.$$

Тепер очевидно, що (12.9)

$$m = \iiint_V \rho(x, , y, z)dV \quad (dV = dxdydz).$$

Остання формула виражає фізичне тлумачення потрійного інтеграла.

Геометричного тлумачення цей тип інтеграла не має, оскільки немає геометричного тлумачення чотиривимірної системи координат. Теорема існування такого інтеграла вимагає скінченності області інтегрування та неперервності в ній підінтегральної функції. Щодо обчислення потрійного інтеграла, то у випадку правильності відповідних областей (рис. 12.6) маємо

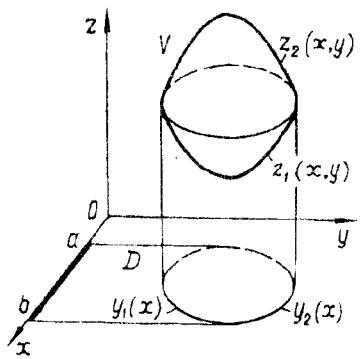


Рис. 12.6

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{12.10}$$

Можна подати відповідні формули, де за допомогою потрійного інтеграла обчислюють центр маси тіла, його відповідні моменти відносно осей і координатних площин.

Властивості цього інтеграла такі самі, як і інших інтегралів (див., зокрема, властивості подвійного інтеграла). Теорема про середнє значення має вигляд ($f \in C_1$)

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = f(c_1, c_2, c_3)V,$$

де V — об'єм області V, $(c_1, c_2, c_3) \in V$.

П. Обчислити масу тіла, обмеженого координатними площинами і площиною $x + y + z = 1$, якщо $\rho = xyz$.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося формулою (12.10). Маємо

$$m = \iiint\limits_V dyz\, dxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} ydy \int\limits_0^{1-x-y} zdz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} y(1 - x - y)^2 dy = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 x(1 - x)^4 dx = \frac{1}{720}.$$

Тут застосували заміну $1 - x - y = u$; і $1 - x = v$.

12.2.2. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Криволінійні координати

Декартова система координат не завжди зручна. Так, при дослідженні руху рідини в циліндричних трубах або руху повітряних мас в колоземному шарі атмосфери використовувати таку систему нераціонально. Через те поряд з декартовою застосовують інші ортогональні системи координат, найпоширенішими серед яких є циліндрична та сферична.

Координатними поверхнями циліндричної системи є циліндр $\rho = \text{const}$ і площини $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$, тобто вона є ніби поєднанням полярної системи на площині xOy та декартової в напрямі осі Oz. Циліндрична й декартова системи зв'язані з формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Координатними поверхнями сферичної системи є сфера $\rho = \text{const}$, площина $\varphi = \text{const}$, конус $\Theta = \text{const}$. Сферична й декартова системи зв'язані формулами

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \Theta.$$

Нехай функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ здійснюють взаємно однозначне відображення області V_1 в криволінійних координатах u, v, w на область V в декартових координатах x, y, z. Тоді, як і в двовимірному випадку, можна довести, що

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V f(x(u, v, w), \quad y(u, v, w), \quad z(u, v, w)\, |J|\, dudvdw,$$

де якобіан набирає вигляду

$$J = \begin{vmatrix} x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \\ x_w' & y_w' & z_w' \end{vmatrix}.$$

У циліндричних координатах ($u = p,\ v = \varphi,\ w = z$) маємо

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & p\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

У сферичних координатах

$$J = \begin{vmatrix} \sin\Theta\cos\varphi & \sin\Theta\sin\varphi & \cos\Theta \\ -r\sin\Theta\sin\varphi & r\sin\Theta\cos\varphi & 0 \\ r\cos\Theta\cos\varphi & r\cos\Theta\sin\varphi & -r\sin\Theta \end{vmatrix} = r^2\sin\Theta,$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\sin\Theta\cos\varphi,\quad r\sin\Theta\sin\varphi,$$

$$r\cos\Theta)r^2\sin\Theta\, drd\varphi d\Theta.$$

П. Знайти масу кулі радіуса R, якщо густина матеріалу пропорційна до відстані від центра, тобто $f(x, y, z) = kr$.

Розв'язання. Маємо

$$m = \iiint\limits_V kr^3\sin\Theta\, drd\varphi d\Theta = 2k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta d\Theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = k\pi R^4.$$

(Пропонуємо самостійно розв'язати цю задачу в декартовій системі координат).

12.2.3. Узагальнення поняття інтеграла

Розглядаючи задачі, які приводять до поняття того чи іншого інтеграла (визначеного, подвійного, потрійного), можна побачити, що деякі з них повторюються, але на різних фігурах, наприклад, задачі знаходження маси, електричного заряду. При цьому для однієї і тієї ж величини діставали різні інтеґрали. Якщо якась величина (маса, заряд) визначена на відрізку, то маємо визначений інтеґрал, якщо на пластинці, — то подвійний, на просторовому тілі, — потрійний. Однак та сама маса й електричний заряд можуть бути заданими і на інших фігурах.

Кожній з геометричних фігур поставимо у відповідність її числову адитивну характеристику, яку називають її мірою. Для відрізка це довжина, для пластинки — площа, для тіла — об'єм і т.д.

Нехай на деякій скінченній геометричній фігурі A задано певну функцію $f(P)$ (функцію точки, наприклад, густину речовини).

Розіб'ємо фігуру на n частин довільним способом. ΔA_i — це і множина точок i-ї частини A, і її міра. Вважатимемо, що

$$\forall P \in \Delta A_i \quad f(A) = \text{const} = f(P^*) \quad \forall P^* \in \Delta A_i.$$

Суму

$$\sigma_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta A_i$$

називатимемо *інтегральною сумою* для $f(P)$ по A.

Інтегралом від $f(P)$ по області A називають границю

$$\int_A f(P)dA \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta A_i, \tag{12.11}$$

де $d(A)$ — диференціал відповідної міри, λ_i — діаметр ΔA_i. (При певних умовах див. означення подвійного інтеграла в 12.1.2.)

Властивості інтеграла, означеного в (12.11), стандартні (див., наприклад, 12.1.2).

12.3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

12.3.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Розглянемо таку задачу. Нехай треба знайти масу каната, густина речовини якого $\rho = \rho(P)$, форма — лінія L.

Розіб'ємо L на n частин, зробимо відповідне припущення, підсумуємо і тоді визначимо відповідну масу як

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P)\Delta L_i.$$

Для довільної функції $f(P)$ замість густини попередня задача визначає криволінійний інтеграл першого роду від $f(P)$ по лінії L, де $P = P(x, y)$ або $P = P(x, y, z)$,

$$\int_L f(P)dL. \tag{12.12}$$

Нехай лінія L задана параметрично

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_1 \le t \le t_2$$

і нехай усі ці функції мають неперервні похідні при вказаних t.

Оскільки

$$dL = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt,$$

то

$$\int_L f(x, y, z)dL = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),\ y(t),\ z(t))\ \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\ dt.$$

Якщо рівняння L на площині має вигляд $y = y(x)$, $y \in C_{[a,b]}$, $f' \in C_{[a,b]}$, то

$$\int_L f(x, y)dL = \int_a^b f(x, y(x))\ \sqrt{1 + y'^2_x}\ dx.$$

П. Знайти масу частини лінії $y = \ln x$, $1 \le x \le 2$, якщо густина $\rho(x, y) = x^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$m = \int_L \rho(x, y)dL = \int_L x^2 dL = \left\{dL = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\ dx\right\} =$$

$$= \int_1^2 x\sqrt{x^2 + 1}\ dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

12.3.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Розглянемо таку задачу. Нехай матеріальна точка переміщується під дією сили

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

з положення B в положення C вздовж лінії L. Знайти виконану при цьому роботу.

Розіб'ємо лінію L на n частин точками $B = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = C$. Розглянемо частину лінії між точками M_{i-1} і M_i. Знайдемо роботу по переміщенню точки з M_{i-1} в M_i. Те саме виконаємо щодо кожної частини лінії, $i = 1, 2, \ldots, n$, а потім скористаємося адитивністю роботи (рис. 12.7).

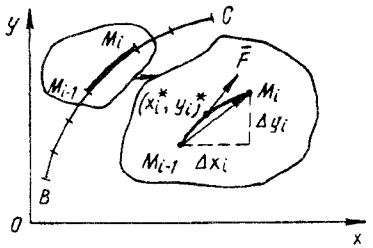


Рис. 12.7

Зробимо два припущення.

1) Вважатимемо, що $\forall\ (x, y) \in M_{i-1}M_i$

$$\vec{F}(x, y) = \overline{\text{const}} = \vec{F}(x_i^*,\ y_i^*) \quad \forall\ (x_{i-1}^*,\ y_i^*) \in M_{i-1}M_i;$$

2) Замінимо дугу $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ хордою, яка її спрямляє, і переміщення точки здійснимо вздовж траєкторії

$$\vec{S}_i = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}.$$

Оскільки

$$\overline{F}(x_i^*,\ y_i^*) = P(x_i^*, y_i^*)\overline{i} + Q(x_i^*,\ y_i^*)\overline{j},$$

то, обчисливши відповідний скалярний добуток, дістанемо

$$\Delta A_i = \overline{F}(x_i^*,\ y_i^*)\overline{S_i} = P(x_i^*,\ y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*,\ y_i^*)\Delta y_i.$$

Оскільки $A \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta A_i$, то

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0,\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i^*,\ y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*,\ y_i^*)\Delta y_i \qquad (12.13)$$

(дужками для суми двох доданків після знака сигми нехтуватимемо і в подальшому).

У загальному випадку за умови довільної векторної функції $\overline{F}(x, y) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$, довільної лінії $\overset{\smile}{BC} = L$ конструкція (12.13) визначає криволінійний інтеґрал другого роду від даної функції по цій лінії

$$I = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i^*,\ y_i^*)\Delta x_i +$$

$$+ Q(x_i^*,\ y_i^*)\Delta y_i. \qquad (12.14)$$

З (12.13) і (12.14) випливає фізичне тлумачення криволінійного інтеґрала другого роду: це робота відповідної сили на відповідній траєкторії:

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Якщо $\overline{F} = \overline{F}(x, y, z)$, то

$$A = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \qquad (12.15)$$

Введемо в розгляд вектор $\overline{dl} = (dx, dy, dz)$. Тоді інтеґрали в (12.14) і (12.15) можна записати у векторній формі (під інтеґралом скалярний добуток)

$$\int_L \overline{F}\,\overline{dl}.$$

Обидва введені криволінійні інтеґрали відповідають загальній схемі інтеґрала, розглянутій в п. 12.2.3. Тому питання з властивостями їх вирішуються легко. Зауважимо лише, що зміна напряму на лінії L не змінює (12.12), а змінює знак на протилежний у випадку (12.14).

Обчислення криволінійного інтеграла (12.14).

1. Нехай L задана рівнянням $y = y(x)$, похідна y' неперервна на $[a, b]$ разом з функціями $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Тоді

$$I = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (Px, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x))dx.$$

2. Нехай L задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, похідні x' і y' неперервні при $t \in [t_1, t_2]$, а $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні при відповідних x. Тоді

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),\ y(t))x'(t) + Q(x(t),\ y(t))y'(t))dt.$$

П. Обчислити

$$I = \int_{\overset{\smile}{AB}} (x + y)dx + (2x - y)dy,$$

де $A(0, 0)$; $B(1, 1)$ і

а) AB : $y = x$, б) AB : $y = x^2$.

Маємо (рис. 12.8)

а) $y = x$, $y' = 1$,

$$I = \int_0^1 2xdx + xdx = \frac{3}{2};$$

б) $y = x^2$, $y' = 2x$,

$$I = \int_0^1 (x + x^2)dx + 2(2x - x^2)dx = \frac{5}{3}.$$

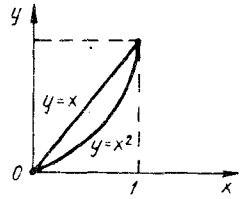


Рис. 12.8

Прокоментуємо результат. Інтеграли від однієї і тієї самої функції, але по різних кривих, повинні, певно, відрізнятись один від одного. Проте, врахувавши фізичне тлумачення інтеграла як роботу, згадаємо, що робота в гравітаційному полі не залежить від траєкторії переміщення тіла, а тільки від початкової та кінцевої точок на цій траєкторії. Дві різні відповіді тут маємо тому, що поле, визначене відповідною функцією

$$\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$$

не гравітаційного типу.

Шоб розподілити поля зазначеним способом, необхідні нові математичні результати.

12.3.3. Формула Ґріна*)

О. *Область називається однозв'язною, якщо довільний замкнений контур, розміщений в ній, можна стягти в точку, не виходячи за межі області.*

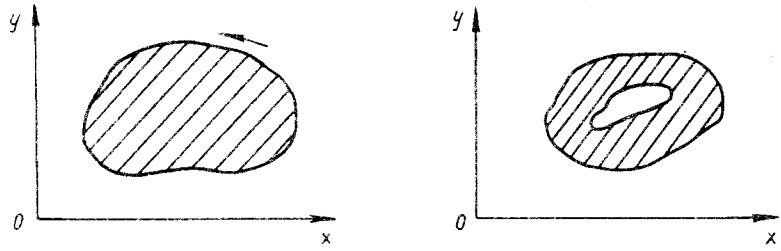
На рис. 12.9 зображено однозв'язний контур, а на рис. 12.10 — неоднозв'язний. Образно кажучи, однозв'язна область — це область без дірок.

*) Д. Ґ р і н (1783–1841) — англійський математик і фізик.

О. *Напрям обходу замкненого контура називається додатним, якщо контур залишається зліва від дотичних до точок на ньому.*

На рис. 12.9, *а* додатний напрям позначено стрілкою.

Т. (Ґріна). *Якщо функції* $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ *разом з похідними* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *неперервні в деякій однозв'язній області* D, *а* L — *границя* D, *то*



а *б*

Рис. 12.9

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (12.16)$$

Цю формулу називають *формулою Ґріна.*

■ Очевидно, довівши рівності

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x} dxdy = -\int_L P(x, y)dx, \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_L Q(x, y)dy$$

і віднявши від другої першу, дістанемо (12.18).

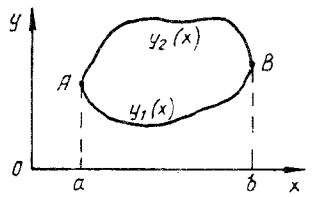


Рис. 12.10

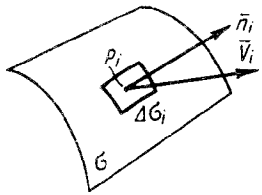


Рис. 12.11

Нехай область D (з деякою конкретизацією) зображено на рис. 12.11. Тоді, переходячи від подвійного інтеґрала до повторного, потім — до визначеного і, нарешті, до криволінійного, маємо

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y(x))dx = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx - \int_{\underset{\smile}{AB}} P(x, y)dx =$$

$$= \left(-\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} - \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \right) P(x, y)dx = -\int\limits_{L} P(x, y)dx \quad (\overset{\frown}{BA} \cup \overset{\smile}{AB} = L).$$

Співвідношення, яке містить функцію $Q(x, y)$, доводимо аналогічно. Далі виконуємо дії, вказані на початку доведення.■

Формула Ґріна має широке застосування. Нехай, зокрема, в (12.16)

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x.$$

Тоді

$$2\iint\limits_{D} dxdy = 2S = \int\limits_{L} -ydx + xdy,$$

звідки дістаємо формулу для знаходження площі фігури, обмеженої замкненим контуром L:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{L} -ydx + xdy. \tag{12.17}$$

П. Знайти площу еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Р о з в ' я з а н н я. Скориставшись (12.17), знаходимо

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (ab\cos^2 t - ab\sin^2 t)dt = \pi ab.$$

Іноді криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру позначають $\oint$ і називають циркуляцією функції

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} \quad .$$

по відповідному контуру.

12.3.4. Незалежність криволінійного інтеграла від лінії інтегрування

Незалежність тут розумітимемо так, як у прикладі, наведеному в 12.3.2. Умови такої незалежності містяться в наступній теоремі.

Т. *Якщо в деякій однозв'язній області функції* $P(x, y)$ *і* $Q(x, y)$ *неперервні разом зі своїми похідними* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial P}{\partial y}$, *то наступні чотири умови еквівалентні:*

1) *криволінійний інтеграл від заданих функцій не залежить від лінії інтегрування, взятої в даній області;*

2) *криволінійний інтеграл по довільному замкненому контуру в даній області дорівнює нулю;*

3) *в даній області виконується умова*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \tag{12.18}$$

4) *існує така функція* $u = u(x, y)$, *для якої вираз* $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ *є її повним диференціалом, тобто*

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Доведення реалізуємо за схемою 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 1).

■ Доведемо, що 1) ⇒ 2). Нехай в області D, обмеженій контуром L, виконуються умови теореми й умова 1. Фіксуємо на L точки A і B. Згідно з умовою ($\overset{\smile}{AB} \cup \overset{\frown}{BA} = L$)

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \ldots - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \ldots = 0, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \ldots + \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = 0, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB} \cup \overset{\frown}{BA}} \ldots = 0.$$

Отже, $\int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$

Доведемо, що 2) ⇒ 3). Застосуємо теорему Гріна до лівої частини останньої рівності. Маємо

$$0 = \int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Цей інтеграл дорівнює нулю тільки за умови

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

звідки дістаємо (12.18).

Доведемо, що 3) ⇒ 4). Нехай, крім інших умов теореми, виконується рівність (12.18).

Як відомо, повний диференціал функції $u(x, y)$ має вигляд

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Зіставивши цей вираз з виразом

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

дістаємо, що у випадку повного диференціала одночасно виконуються рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Тоді умова рівності мішаних похідних другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

набирає вигляду (12.18).

Доведемо, що 4) ⇒ 1). Якщо

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

а A і B — початкова й кінцева точки на лінії L, тобто $L = \overset{\smile}{AB}$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} du = u\Big|_a^b = u(B) - u(A).$$

Звідси зрозуміло, що остаточний вираз не залежить від форми лінії L, а тільки від точок A і B на ній. ■

12.4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Якщо в загальній схемі побудови інтеграла (12.2.3) як область взяти деяку поверхню, а як міру області — площу цієї поверхні, то дістанемо поняття одного з поверхневих інтегралів. Точніше, побудова таких інтегралів нагадує ситуацію з криволінійними інтегралами.

До поверхневого інтеграла першого роду можна прийти, розглядаючи масу поверхні. Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, густина її матеріалу $\rho = \rho(P)$, де ρ — неперервна функція на σ. Розбивши поверхню σ на n частин, знайдемо масу i-ї частини

$$\Delta m_i = f(P_i^*)\Delta\sigma_i.$$

Тоді

$$m = \iint\limits_{\sigma} f(P)d\sigma = \lim_{\substack{n \to \infty \\ diam\, \Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i. \tag{12.19}$$

До поверхневого інтеграла другого роду можна прийти, розглядаючи задачу про потік рідини через поверхню. Нехай через поверхню (рис. 12.11) σ протікає рідина зі швидкістю

$$\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Тоді кількість рідини, яка протікає за одиницю часу через частину поверхні $\Delta\sigma_i$, становить

$$\Delta\Pi_i = \vec{F}(P_i^*)\vec{n}_i\Delta\sigma_i,$$

де $\vec{n}_i = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$ — одиничний нормальний вектор до площадки $\Delta\sigma_i$. Далі, як і в інших аналогічних випадках, маємо

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{F}(P)\vec{n}d\sigma = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{diam}\, \Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(P_i^*)\vec{n}_i\Delta\sigma_i. \tag{12.20}$$

Інтеґрали в (12.19) і (12.20) — це поверхневі інтеґрали першого і другого роду відповідно. Оскільки $(\cos\gamma)d\sigma = dxdy$, $(\cos\alpha)d\sigma = dydz$, $(\cos\beta)d\sigma = dxdz$, то інтеґрал (12.20) можна подати в розгорнутому вигляді

$$\int\int_{\sigma} \overline{F}(P)\overline{n}d\sigma = \int\int_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(...)dxdz + R(...)dxdy.$$

Для обчислення інтеґрала першого роду диференціал поверхні $z = z(x, y)$ слід подати у вигляді

$$d\sigma = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy.$$

Тоді

$$\int\int_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \int\int_{\sigma_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy,$$

у лівій частині — поверхневий інтеґрал, а в правій — подвійний. Тут і далі σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{xz} — проекції поверхні σ на відповідні координатні площини.

Існування такого інтеґрала забезпечує неперервність функцій $f(x, y, z)$, $z(x, y)$, $z_x'(x, y)$, $z_y'(x, y)$ та скінченність σ.

Нехай рівняння поверхні є $F(x, y, z) = 0$, причому його можна розв'язати відносно x, y, z, тобто $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$. Тоді

$$\int\int_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(...)dxdz + R(...)dxdy = \int\int_{\sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz +$$

$$+ \int\int_{\sigma_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz + \int\int_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy$$

(у лівій частині поверхневий інтеґрал, а в правій — подвійні).

12.5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

12.5.1. Суцільне середовище і поле. Геометричні образи поля

В основі теорії поля та її математичного апарата — диференціального та інтеґрального числення — лежить модель суцільного середовища, під яким розуміють матеріальну субстанцію, яка має властивість подільності до нескінченності (безструктурність) і неперервність усіх своїх характеристик у деякій області. Характеристики поля можна розглядати з точки зору Лаґранжа і Ейлера. При першій з них у суцільному середовищі виділяють «частинки», які чимось, наприклад хімічним складом, відрізняються від решти і розглядається рух цих «частинок». Якщо все середовище однакове, то виділення

«частинок» в ньому недоцільне оскільки вимагає додаткових зусиль, тоді застосовують другий підхід (ейлерів), згідно з яким характеристики середовища вивчають у фіксованих точках простору. При цьому опис руху середовища не такий повний (зникає індивідуальність «частинок»), але простіший (на основі добре розробленого векторного аналізу).

Під полем розуміємо область простору, в кожній точці якої задано значення певної характеристики суцільного середовища. Ці характеристики можуть бути скалярними (температура, тиск, густина), векторними (швидкість, прискорення) і тензорними (деформація, напруження). У відповідності з цим і *поля можуть бути скалярними* (поле температур), *векторними* (поле швидкостей), *тензорними* (поле напруг).

Як відомо, для визначення скалярного поля досить задати одну функцію $u = u(x, y, z)$, для векторного — одну векторну

$$\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(...)\overline{j} + R(...)\overline{k} \qquad (12.21)$$

або три скалярні $P(x, y, z)$, $Q(...)$, $R(...)$. Для визначення тензорного поля в тривимірному просторі

$$\{\sigma\} = \left\| \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \right\|$$

необхідно задати дев'ять скалярних функцій.

Геометричні образи поля дають змогу наочно уявити його структуру, характерні особливості та ін. Геометричними образами скалярного поля є поверхні (в $\mathbf{R}^3$) або лінії (в $\mathbf{R}^2$) рівня, рівняння яких $u(x, y, z) = C$, або $u(x, y) = C$.

Для векторного поля геометричними образами є векторні лінії, в кожній точці яких дотична збігається з напрямом вектора (силові лінії, лінії тока та ін.).

Поля, геометричні образи яких не змінюються з плином часу, називаються стаціонарними (рівняння їх не містять часової змінної в явному вигляді).

З колінеарності вектора поля (12.21) і вектора переміщення $\overline{dl} = (dx)\overline{i} + (dy)\overline{j} + (dz)\overline{k}$ випливають *диференціальні рівняння векторних ліній:*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

П. Знайти векторні лінії пластинки, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю $\overline{\omega} = \omega\overline{k}$.

Р о з в ' я з а н н я. Лінійна швидкість, як відомо, є векторним добутком її кутової швидкості $\overline{\omega}$ і радіуса-вектора $\overline{r}$ даної точки

$$\overline{F} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega y\overline{i} + \omega x\overline{j}.$$

Звідси проекції вектора швидкості $P = -\omega y$, $Q = \omega x$, $R = 0$ і рівняння ліній має вигляд

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x},$$

або

$$x dx + y dy = 0.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R^2 = C).$$

12.5.2. Зміна характеристик поля

Розглянемо спочатку зміну скалярного поля (візьмемо двовимірний випадок) $u = u(x, y)$. Зміна поля характеризується приростом

$$\Delta u = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \overline{\text{grad}}\, u \cdot \overline{dl} = \nabla u \cdot \overline{r}_0 dl,$$

де оператор *«набла»* має вигляд

$$\overline{\nabla} = \overline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \overline{j} \frac{\partial}{\partial y} + \overline{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

а $\overline{r}_0$ — одиничний дотичний вектор зміщення. Отже,

$$\frac{du}{dl} = \overline{r}_0 \cdot \overline{\text{grad}}\, u.$$

Таким чином, оцінюючи зміну скалярного поля, приходять до вектора (градієнта), який оцінює швидкість цього зміщення.

Розглянемо тепер зміну векторного поля, яка характеризується приростом

$$\Delta \overline{F} \approx \overline{dF} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \overline{F}}{\partial y} dy = (\overline{\nabla} * \overline{F})\, \overline{r}_0 dl.$$

Звідси

$$(\overline{\nabla} * \overline{F})\, \overline{r}_0 = \frac{d\overline{F}}{dl},$$

де

$$\overline{\nabla} * \overline{F} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{Vmatrix} —$$

тензор деформації векторного поля.

Таким чином, оцінюючи зміну векторного поля, приходять до поняття *тензора.*

Тензор, як і скаляр та вектор, є об'єктивною характеристикою даного поля. Проте, якщо змінювати систему координат, то при

цьому змінюватимуться й усі його компоненти $\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$, але оскільки сам тензор залишається без зміни, то між його компонентами існують стійкі зв'язки *(інваріанти)*, які дають змогу тензору залишатися самим собою.

Аналогічний випадок спостерігається при вивченні ліній другого порядку, коли зміна системи координат змінює рівняння кривої, але не її форму, завдяки наявності інваріантів. Як показує аналіз, тензор деформації справді має два інваріанти: векторний, який називають *ротором**)

$$\overline{\text{rot}}\,\overline{F} = \overline{\nabla} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}$$

при $R \equiv 0$

і скалярний, який називають *дивергенцією***)

$$\text{div}\,\overline{F} = \nabla\,\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Обидва вони зв'язані з оператором Гамільтона***) і обумовлені неоднозначністю операції множення для векторів.

Оскільки $\overline{\text{rot}}\,\overline{F}$ і $\text{div}\,\overline{F}$ містять усі компоненти тензора — деформації, то є всі підстави вважати, що без нього можна обійтися, тобто зміну векторного поля можна описати в рамках простішого векторного аналізу.

12.5.3. Ротор векторного поля

З'ясуємо фізичне тлумачення ротора стосовно вектора швидкості $\overline{F}$, для чого повернемося до прикладу з п. 12.5.1. За формулою (12.26) маємо

$$\overline{\text{rot}}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\overline{k}\omega = 2\overline{\omega},$$

тобто ротор поля лінійних швидкостей дорівнює подвоєній кутовій швидкості (звідси, зокрема, й походить термін). Якщо маємо рух середовища, яке допускає деформацію, то $\overline{\omega}$ і $\overline{\text{rot}}\,\overline{F}$ змінюються при переході від однієї точки до другої.

---

*) Від англ. rotary — поворотний, обертальний.
**) Від англ. divergence — розбіжність.
***) В. Гамільтон (1805—1856) — англійський математик.

Встановимо зв'язок між ротором і циркуляцією вектора швидкості, для чого застосуємо формулу Гріна (12.16). У лівій її частині маємо циркуляцію Γ вектора $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ по замкненому контуру L:

$$\Gamma = \int_L \overline{F}(x, y)\overline{dl} = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Під знаком інтеграла маємо скалярний добуток ротора-вектора $\overline{F}$ на вектор елементарної ділянки $\overline{dS} = \overline{k}dxdy$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \overline{\text{rot}}\, \overline{F}\, \overline{dS}.$$

Отже, формула Гріна у векторній формі має вигляд

$$\iint_D \overline{\text{rot}}\, \overline{F}\, \overline{dS} = \oint_L \overline{F}\, \overline{dl} \qquad (12.22)$$

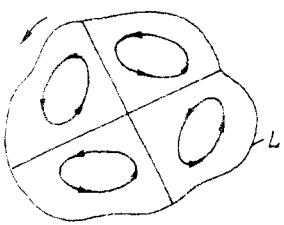


Рис. 12.12

Розіб'ємо область D на елементарні частинки і розглянемо обертання рідини всередині кожної з них (рис. 12.12). Помічаємо, що на лініях поділу частин D швидкості, однакові за модулем, мають протилежні напрями, отже, вони взаємно компенсуються, і тільки на межі області (на кривій L) вони зберігаються, породжуючи циркуляцію Γ.

Таким чином, формула Гріна виражає *закон збереження обертального руху.*

Застосовуючи до лівої частини формули (12.22) теорему про середнє значення, маємо

$$\iint_D \overline{\text{rot}}\, \overline{F}(P)\, \overline{dS} = \overline{\text{rot}}\, \overline{F}(P^*)\, S\overline{k}.$$

Перейдемо до границі при $S \to dS \to 0$, $P^* \to P$, $\Gamma \to d\Gamma \to 0$, завдяки чому

$$\overline{\text{rot}}\, \overline{F} = \overline{k}\, \frac{d\Gamma}{dS}.$$

Тут маємо *похідну по площі.* У певному розумінні оберненою операцією до такої похідної є подвійний інтеграл по змінній області D (двовимірний аналог невизначеного інтеграла).

Властивості ротора поля випливають з властивостей векторного добутку і похідної.

1. $\overline{\text{rot}}\, (k_1\overline{F}_1 + k_2\overline{F}_2) = \overline{\nabla} \times (k_1\overline{F}_1 + k_2\overline{F}_2) = k_1\overline{\nabla} \times \overline{F}_1 + k_2\overline{\nabla} \times \overline{F}_2 =$
$= k_1 \overline{\text{rot}}\, \overline{F}_1 + k_2 \overline{\text{rot}}\, \overline{F}_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbf{R})$.

2. $\overline{\text{rot}}\, (u\overline{F}) = \overline{\nabla} \times (u\overline{F}) = \overline{\nabla} \times (\overset{\downarrow}{u}\, \overline{F}) = \overline{\text{grad}}\, u\overline{F} + u\, \overline{\text{rot}}\, \overline{F}$
$(u = u(x, y)$, стрілкою показано множник, до якого застосовується оператор).

3. $\overline{\text{rot}}\,(\overline{F}_1 \times \overline{F}_2) = \overline{\nabla} \times (\overline{F}_1 \times \overline{F}_2) = (\overline{F}_2\,\overline{\text{grad}})\overline{F}_1 - (\overline{F}_1\,\overline{\text{grad}})\,\overline{F}_2 + \overline{F}_1\,\text{div}\,\overline{F}_2$.

Запишемо вираз для $\overline{\text{rot}}\,\overline{F}$ у тривимірному просторі. Маємо

$$\overline{\text{rot}}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

12.5.4. Дивергенція векторного поля

З'ясуємо фізичне тлумачення дивергенції поля швидкостей рідини. Розглянемо формулу, яка виражає потік рідини через поверхню σ (див. п. 12.4). Застосовуючи теорему про середнє значення (припустимо, що вона виконується) і вважаючи, що

$$\sigma_{xy} = \Delta x \Delta y, \quad \sigma_{yz} = \Delta y \Delta z, \quad \sigma_{xz} = \Delta x \Delta z,$$

дістаємо

$$\Pi = P(M_1)\Delta y \Delta z + Q(M_2)\Delta x \Delta z + R(M_3)\Delta x \Delta y.$$

Звідси

$$\Delta Q \approx dQ = \left(\frac{\partial P(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_2)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_3)}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Проте $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$. Переходячи до границі при $\Delta V \to 0$, $M_1 \to M$, $M_2 \to M$, $M_3 \to M$, знаходимо

$$\text{div}\,\overline{F} = \frac{d\Pi}{dV} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \overline{\nabla}\,\overline{F}. \qquad (12.23)$$

У цій формулі маємо *похідну по об'єму*. Оберненою операцією тут є потрійний інтеграл.

Згідно з (12.23) дивергенція поля швидкостей рідини є об'ємною густиною потужності джерел рідини в околі даної точки. Якщо є джерело, то лінії потоку розбігаються від нього в усі боки, звідси термін «дивергенція». Якщо в даній точці є стік, то до нього лінії потоку збігаються, маємо конвергенцію*). Якщо ж в точці $\text{div}\,\overline{F} = 0$, то в ній поле не має ні джерела, ні стоку.

Властивості дивергенції випливають з властивостей скалярного добутку та похідної.

1. $\text{div}\,(k_1\overline{F}_1 + k_2\overline{F}_2) = \overline{\nabla}\,(k_1\overline{F}_1 + k_2\overline{F}_2) = k_1\overline{\nabla}\overline{F}_1 + k_2\overline{\nabla}\overline{F}_2 = k_1\,\text{div}\,\overline{F}_1 + k_2\,\text{div}\,\overline{F}_2 \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

*) Від англ. convergence — збіжність.

2. $\operatorname{div}(u\overline{F}) = \overline{\nabla}(u\overline{F}) = \overline{\nabla}(\overset{\downarrow}{u}\overline{F}) + \overline{\nabla}(\overset{\downarrow}{u}\overline{F}) = \overline{\operatorname{grad} u}\overline{F} + u \operatorname{div}\overline{F}$.

3. $\operatorname{div}(\overline{F_1} \times \overline{F_2}) = \overline{\nabla}(\overline{F_1} \times \overline{F_2}) = \overline{\nabla}(\overline{F_1} \times \overset{\downarrow}{\overline{F_2}}) + \overline{\nabla}(\overline{F_1} \times \overset{\downarrow}{\overline{F_2}}) =$
$= \overline{F_2}\,\overline{\operatorname{rot}}\,\overline{F_1} - \overline{F_1}\,\overline{\operatorname{rot}}\,\overline{F_2}$.

12.5.5. Формула Остроградського—Ґаусса

Помножимо спочатку обидві частини рівності (12.23) на dV, а потім вираз, який отримали $d\Pi = \operatorname{div}\overline{F}\,dV$ зінтеґруємо по всьому об'єму. Дістанемо

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{F}\,dV.$$

Це кількість рідини, що з'явилася всередині V за одиницю часу. На основі закону збереження кількості рідини вона повинна дорівнювати її витоку через поверхню σ, яка обмежує цей об'єм, тобто

$$\Pi = \iint\limits_\sigma \overline{F}\,\overline{d\sigma}.$$

З двох останніх формул маємо формулу Остроградського—Ґаусса у векторній формі

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{F}dV = \iint\limits_\sigma \overline{F}\,\overline{d\sigma}, \tag{12.24}$$

яка встановлює зв'язок між інтеґралами по об'єму і по поверхні. М.В.Остроградський вивів цю формулу чисто математично, вивчаючи зв'язок між інтеґралами різних типів. К.Гаусс дістав цю формулу при вивченні магнітних полів як закон збереження магнітних силових ліній. Ми дістали її як закон збереження розходу рідини.

У координатній (скалярній) формі остання формула набирає вигляду

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_\sigma P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz +$$
$$+ R(x, y, z)dxdy. \tag{12.25}$$

Зазначимо, що саме (12.32) є формулою Остроградського—Ґаусса, оскільки поняття вектора ввів Хевісайд*) значно пізніше.

12.5.6. Формула Стокса

Формула Стокса**) є узагальненням формули Ґріна на $\mathbf{R}^3$. Запишемо відомий результат для частинки поверхні $\Delta\sigma$ з нормальним вектором $\overline{n}$:

---

*) О. Хевісайд (1850—1925) — англійський електротехнік, математик.
**) Д. Стокс (1819—1903) — англійський гідромеханік і математик.

$$\overline{\text{rot}}\, \overline{F} = \overline{n}\, \frac{d\Gamma}{d\sigma}. \tag{12.26}$$

Тут маємо похідну по поверхні σ. Оберненою операцією є операція поверхневого інтегрування (зі змінною поверхнею). Помноживши (12.26) на $\overline{n}d\sigma$ і зінтегрувавши по σ, дістанемо

$$\Gamma = \int\int_{\sigma} \overline{\text{rot}}\, \overline{F} d\sigma.$$

Проте

$$\Gamma = \oint_{L} \overline{F}\, \overline{dl}.$$

Вилучаючи Γ, маємо формулу Стокса

$$\int\int_{\sigma} \overline{\text{rot}}\, \overline{F}\, d\sigma = \oint_{L} \overline{F}\, \overline{dl},$$

або в скалярній (координатній) формі

$$\int\int_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz. \tag{12.27}$$

Звідси випливають умови незалежності від лінії інтегрування криволінійного інтеграла в тривимірному випадку:

1) $\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0;$

2) $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$;

3) $\exists\, u = u(x, y, z) : Pdx + Qdy + Rdz = du;$

4) $\overline{F} = \overline{\text{grad}}\, u.$

12.5.7. Застосування оператора Гамільтона

Оператор Гамільтона $\overline{\nabla}$ в теорії поля відіграє значну роль. За його допомогою виражається зміна як скалярного ($\overline{\text{grad}}\, u = \nabla u$), так і векторного ($\overline{\nabla} \times \overline{F}$) поля, а також інваріанти останнього, які вивчають зміну векторного поля в дотичному ($\overline{\text{rot}}\, \overline{F} = \nabla \times \overline{F}$) і нормальному ($\text{div}\, \overline{F} = \overline{\nabla}\, \overline{F}$) напрямах.

Застосування оператора Гамільтона в усіх випадках дає змогу спростити викладки, особливо при багатократному застосуванні операцій, градієнта, ротора, дивергенції.

П. 1. Знайти $\operatorname{div} \overline{\operatorname{rot}} \overline{F}$.

Р о з в ' я з а н н я. Використовуючи оператор Гамільтона, маємо

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} \times \overline{F} = \overline{0}$$

як скалярний добуток перпендикулярних векторів, два з яких колінеарні.

П. 2. Знайти $\overline{\operatorname{rot}} \overline{\operatorname{grad}} u$.

Р о з в ' я з а н н я. Користуючись оператором Гамільтона, маємо

$$(\overline{\nabla} \times \overline{\nabla}) u = \overline{0}$$

як векторний добуток двох колінеарних векторів.

П. 3. Знайти $\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad}} u$.

Р о з в ' я з а н н я. Користуючись оператором Гамільтона, маємо

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad}} u = (\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}) u = \overline{\nabla}^2 u = \Delta u,$$

де Δ — оператор Лапласа*),

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

12.5.8. Окремі випадки векторних полів

Соленоїдне (трубчасте) поле характеризується в усіх точках умовою

$$\operatorname{div} \overline{F} = 0, \tag{12.28}$$

яка характеризує відсутність витоків чи стоків. Для такого поля маємо

$$\iint_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma = 0.$$

Поверхню σ подамо у вигляді $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$. Тоді $\iint_{\sigma_1} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma_0} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma = 0$. Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки $\sigma_0 \overline{F} \perp \overline{n}$.

Отже,

$$-\iint_{\sigma_1} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma_2} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma.$$

Узгоджуючи напрям $\overline{n}$ з напрямом руху рідини, змінюючи його на протилежний, маємо

$$\iint_{\sigma_1} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma_2} \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma$$

(перший інтеграл беремо по іншій стороні поверхні σ_1), тобто в соленоїдному полі зберігається витрата рідини в трубці потоку.

Аналогічне поле характерне й для соленоїда (в електриці).

*) П.С. Л а п л а с (1749—1827) — французький математик.

Рівняння (12.28) називається в гідромеханіці рівнянням нерозривності нестисливої рідини.

Потенціальне поле характеризується тим, що в усіх його точках

$$\overline{\operatorname{rot} F} = \overline{0}.$$

Звідси

$$\overline{F} = \overline{\operatorname{grad}}\, u = \Delta u.$$

Потенціальне поле, в якому немає завихрень, які надають рідині обертального руху, визначається тим, що для його задання треба не три функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, як у загальному випадку, а тільки одна $u = u(x, y, z)$, оскільки

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Гармонічне поле характеризується виконанням у всіх його точках двох умов — забезпеченням нерозривності $\operatorname{div} \overline{F} = 0$ і відсутністю завихрень $\overline{F} = \overline{\operatorname{grad}}\, u$, тобто $\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad}}\, u = 0$ чи $\Delta u = 0$ (рівняння Лапласа). Гармонічне поле задовольняє рівняння Лапласа, яке описує електричне, магнітне, слабке гравітаційне поля (без ефектів загальної теорії відносності) і поле швидкостей безвихрового руху нестисливої рідини. Та обставина, що різні фізичні процеси описуються одним і тим самим рівнянням, свідчить про глибоку їх єдність і про можливість моделювання одних процесів за допомогою інших.

РОЗДІЛ 13

РЯДИ

Розглянемо суму

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

Вважатимемо, що для такої нескінченної суми виконується асоціативний закон додавання. Тоді суму S розумітимемо як

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots \Rightarrow S = 0,$$

або

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots \Rightarrow S = 1.$$

Припустимо, що з нескінченної суми можна винести спільний множник.
Тоді

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) \Rightarrow S = 1 - S \Rightarrow S = \frac{1}{2}.$$

Отже, для одного і того самого виразу дістали три різні значення. Проте операція додавання однозначна. Звідси випливає, що для нескінченних сум і асоціативний закон, і властивість однорідності або не справджуються, або виконуються з певними обмеженнями. Згадаємо, що властивості адитивності для границі, похідної, інтеграла ми формулювали лише для скінченного числа функцій.

Таким чином, властивості скінченних сум можуть істотно відрізнятись від властивостей нескінченних сум. Частково з огляду на це ми переходимо до вивчення таких сум.

13.1. ЧИСЛОВІ РЯДИ*)

13.1.1. Означення ряду та його збіжності

Нехай маємо послідовність $\{a_n\}$, для елементів якої виконується операція додавання.

*) У п. 13.1.1—13.1.3 йдеться й про всі інші ряди, а не лише про числові.

О. *Рядом, складеним з елементів послідовності* $\{a_n\}$, *називається символ*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{13.1}$$

який розуміють спеціальним чином.

У запису (13.1) a_n називають *загальним* або *n-м членом.*

Утворимо так звані *часткові суми* (13.1)

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$$

і розглянемо послідовність їх $\{S_n\}$.

О. *Ряд називається збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум,*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

О. *Ряд називається розбіжним, якщо границя послідовності його частинних сум або нескінченна, або не існує.*

О. *Сумою ряду називається границя послідовності його частинних сум, якщо вона існує, тобто*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Отже, S може бути скінченним числом або нескінченністю.

П. 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{13.2}$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1},$$

звідки $1 = A(n+1) + Bn$.

Знайдемо A, B за допомогою стандартних міркувань. Маємо $A = 1$, $B = -1$. Отже, остаточно

$$\frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Застосувавши цей результат до кожного доданка, дістанемо

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

тобто

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Отже, ряд (13.2) збіжний, $S = 1$.

П. 2. Дослідити на збіжність геометричний ряд, тобто суму нескінченної геометричної прогресії ($a \neq 0$)

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = a\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}. \qquad (13.3)$$

Як відомо,

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}, \quad S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

Розглянемо такі випадки

І в и п а д о к. Нехай $|q| < 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Отже, ряд збіжний, $S = \frac{a}{1-q}$.

ІІ в и п а д о к. Нехай $|q| > 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a - aq^n}{1-q} = \infty.$$

Отже, ряд розбіжний, $S = \infty$.

ІІІ в и п а д о к. Нехай $q = 1$. Тоді

$$S_n = a + a + \ldots + a = na,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(na) = \infty.$$

Отже, ряд розбіжний, $S = \infty$.

IV в и п а д о к. Нехай $q = -1$. Тоді

$$S_n = a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n+1} a,$$

$$S_n = \begin{cases} a, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Оскільки $a \neq 0$, то послідовність $\{S_n\}$ коливається і границі не має. Ряд розбіжний

Отже, ряд (13.3) збіжний при $|q| < 1$ і розбіжний при $|q| \geq 1$.

13.1.2. Залишок ряду. Лінійні операції

Розглянемо ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots = S.$$

О. Залишком ряду після n-го члена називають ряд

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$$

тобто

$$S = S_n + R_n.$$

Замість «залишок ряду після n-го члена» кажуть іноді «залишок ряду».

Т. 1. *Ряд і його залишок або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.*

■ У виразі

$$S_n = a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$$

позначимо

$$C_k = a_1 + \ldots + a_k, \quad \sigma_{n-k} = a_{k+1} + \ldots + a_n.$$

Тоді

$$S_n = c_k + \sigma_{n-k}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = c_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}.$$

Звідси випливає твердження теореми. ■

Розглянемо лінійні операції над рядами.

Т. 2. *Нехай маємо*

$$a_1 + a_2 + \ldots = S^{(1)}, \tag{13.4}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots = S^{(2)}. \tag{13.5}$$

Тоді

1) якщо (13.4) *збігається, то* $\forall\, c \in \mathbf{R}$ *ряд*

$$ca_1 + ca_2 + \ldots = S^{(3)}$$

теж збігається і

$$S^{(3)} = cS^{(1)};$$

2) якщо ряди (13.4) *і* (13.5) *збігаються, то ряд*

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots = S^{(4)}$$

теж збігається і

$$S^{(4)} = S^{(1)} + S^{(2)}.$$

Доведення теореми є модифікацією відповідних теорем про границю послідовності.

13.1.3. Необхідна ознака збіжності

Розглянемо ознаки, за допомогою яких можна встановити факт збіжності чи розбіжності ряду. *Необхідну ознаку збіжності* дає така теорема.

Т. Якщо ряд збігається, то послідовність його членів прямує до нуля, тобто якщо ряд (13.1) *збігається, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

■ Справді, збіжність ряду (13.1) означає, що $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, де

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_{n-1} + a_n,$$

тобто

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

звідки

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = 0. \blacksquare$$

Доведена ознака є необхідною, але не є достатньою. Зазначимо, що гармонічний ряд, тобто *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

є розбіжним (цей факт доведемо пізніше), хоча

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Для збіжного ряду (13.2) маємо

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

13.1.4. Достатні умови збіжності знакододатних рядів

Нижче розглядатимемо тільки знакододатні ряди (13.1), тобто ряди, в яких $a_n > 0$. Згідно з теоремою 2, 13.1.2, немає необхідності окремо розглядати випадки знаковід'ємних рядів.

Нагадаємо один результат з теорії границь: *монотонно зростаюча й обмежена зверху послідовність має границю.*

Тепер переходимо до ознак збіжності рядів.

Ознака порівняння

Т. *Нехай маємо ряди*

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

$$(2) \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

причому $a_n \le b_n$. *Тоді із збіжності ряду* (2) *випливає збіжність ряду* (1), *а з розбіжності ряду* (1) *випливає розбіжність ряду* (2).

■ Доведемо перше твердження. Нехай

$$S_n^{(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S_n^{(2)} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

За умовою теореми

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{(2)} = S^{(2)}.$$

Отже,

$$S_n^{(1)} \le S_n^{(2)} \le S^{(2)},$$

тобто послідовність $S_n^{(1)}$ обмежена зверху числом $S^{(2)}$ і є очевидно зростаючою (всі члени ряду додатні). Тоді існує границя послідовності $\{S_n^{(1)}\}$, тобто ряд (1) — збіжний. ■ Опустимо просте доведення другого твердження.

П. 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n(n+1)},$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$a_n = \sin \frac{\pi}{n(n+1)} \le \frac{\pi}{n(n+1)} = b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Останній ряд — це ряд (13.2), він збіжний за ознакою порівняння.

Ознака д'Аламбера[*])

Т. 2. *Якщо* a_n *— загальний член ряду і*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \tag{13.6}$$

то

а) *при* $l < 1$ *ряд збіжний,*

б) *при* $l > 1$ *ряд розбіжний,*

в) при $l = 1$ *ознака не чинна: існують ряди збіжні, для яких* $l = 1$ *і розбіжні, для яких теж* $l = 1$.

■ а) Застосуємо означення границі до ряду (13.6). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що при $n \ge N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon. \tag{13.7}$$

Візьмемо таке довільне q, що $l < q < 1$.

Нехай в нерівності (13.7) $\varepsilon = q - l$, тоді при $n \ge N$

$$a_{n+1} < a_n q.$$

Реалізуємо останню нерівність при $n = N$, $n = N + 1$ і т.д. Дістаємо

$$a_{N+1} < a_N q, \qquad a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N q^2, \ldots$$

Розглянемо ряди

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots, \quad a_N q + a_n q^2 + \ldots.$$

Другий ряд збіжний як сума геометричної прогресії (13.3), в якій $0 < q < 1$. Перший ряд збіжний згідно з ознакою порівняння, адже перший ряд — це залишок вихідного ряду після члена a_N. Беручи

*) Ж. д ' А л а м б е р (1717—1783)— французький математик.

до уваги ознаку порівняння рядів, дійдемо висновку, що заданий ряд теж збіжний.

Опустимо нескладне доведення пункту б).

в) Для ряду (13.2) і для гармонічного ряду маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

Проте перший — збіжний, а другий — розбіжний. ■

П. 2. Дослідити на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Застосуємо ознаку д'Аламбера. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n=>\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{2}.\qquad l=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, ряд збіжний.

Інтегральна ознака (Коші—Маклорена)

Т. 3. *Якщо члени ряду* (13.1) *утворюють незростаючу послідовність* $(a_{n+1}\le a_n)$ *й існує незростаюча неперервна невід'ємна функція* $f(x)$ *така, що*

$$f(1)=a_1,\quad f(2)=a_2,\ \ldots,\ f(n)=a_n,\ \ldots,$$

то ряд (13.1) *і невластивий інтеграл*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \tag{13.8}$$

збігаються або розбігаються одночасно.

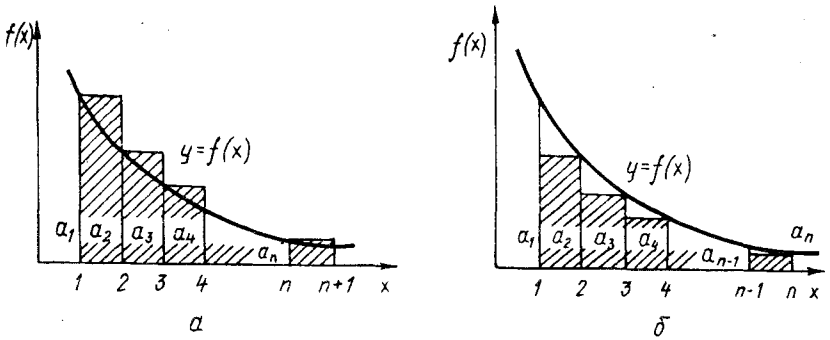


Рис. 13.1

■ Замінимо $f(x)$ кусково-сталою, як показано на рис. 13.1. Дістанемо ступінчасті фігури, з яких площа однієї не менша (рис. 13.1, *а*), а другої — не більша, ніж площі відповідних криволінійних трапецій. Для $S^{(1)}_{\text{ст.ф}}$ (рис. 13.1, *а*) і для $S^{(2)}_{\text{ст.ф}}$ (рис. 13.1, *б*) маємо

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 =$$

$$= S^{(1)}_{\text{ст. ф}} \geq S^{(1)}_{\text{кр. тр}} = \int_1^{n+1} f(x)dx,$$

тобто

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx,$$

і

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_n - a_1 \leq S^{(2)}_{\text{кр.. тр.}} = \int_1^{n} f(x)dx,$$

тобто

$$S_n \leq a_1 - \int_1^{n} f(x)dx.$$

З двох оцінок для S_n дістаємо

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx. \qquad (13.9)$$

Нехай ряд (13.8) — збіжний. Тоді

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{n} f(x)dx = I.$$

З нерівності (13.9) маємо

$$S_n \leq a_1 + I.$$

тобто послідовність $\{S_n\}$ зростає і обмежена зверху (числом $a_1 + I$). Отже,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

заданий ряд збіжний.

Коли інтеграл (13.8) розбіжний, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty.$$

Використовуючи ліву частину нерівності (13.9), маємо, що

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty,$$

тобто ряд розбіжний.

Решта тверджень теореми доводиться аналогічно. ■

З а у в а ж е н н я

1. *Теорема 3 справджується, якщо послідовність* $\{a_n\}$ *задовольняє умови теореми, починаючи хоча б з деякого номера (тоді користуємося теоремою* 1, п. 13.1.2).

Те саме стосується й нерівності $a_n \le b_n$ *в теоремі 1 цього пункту.*

2. *Якщо ряд збіжний, то, перейшовши до границі в* (13.9), *дістанемо оцінку*

$$\int_1^\infty f(x)dx \le S \le \int_1^\infty f(x)dx + a_1.$$

П. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbf{R}. \tag{13.10}$$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 3. Розглянемо інтеграл

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx.$$

При $p = 1$

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \ln|x| \Big|_1^B = \infty.$$

Інтеграл і заданий ряд (до речі, гармонічний) розбіжні.

Нехай $p \ne 1$. Тоді

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{B\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^B = \lim_{B\to\infty} \left(\frac{B^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right).$$

Якщо $p > 1$, то $I = \dfrac{1}{p-1}$; якщо $p < 1$, то $I = \infty$.

Остаточно дістаємо: ряд (13.10) розбігається при $p \le 1$ і збігається при $p > 1$.

13.1.5. Знакозмінні ряди

Знакозмінними є такі ряди, що містять нескінченну множину як додатних, так і від'ємних членів.

Розглянемо спочатку окремий випадок знакозмінних рядів — знакопереміжні ряди.

О. *Знакопереміжним називається ряд*

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots, \; a_n > 0 \text{ для всіх } n. \tag{13.11}$$

Ознаку збіжності таких рядів містить наступна теорема.

Т. *(Лейбніца). Якщо послідовність членів ряду* (13.11)

1) *є спадною* $(a_{n+1} < a_n)$,

2) *такою, що* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

а) ряд (13.11) збігається,

б) якщо S — сума ряду (13.11), то $0 < S < a_1$.

■ Розглянемо послідовність часткових сум (13.11) з парними номерами. Маємо

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) > 0,$$

оскільки кожна дужка додатна; запишемо S_{2m} у вигляді

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

Звідси $0 < S_{2m} < a_1$, оскільки кожна дужка знову-таки додатна. Беручи до уваги, те, що послідовність S_{2m} зростаюча й обмежена, дістаємо

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m} = S.$$

Для сум з непарними номерами маємо

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} (S_m + a_{2m+1}) = \lim_{m \to \infty} S_{2m} + \lim_{m \to \infty} a_{2m+1} = S.$$

Отже,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

тобто (13.11) збігається, крім того, $0 < S < a_1$. ■

З а у в а ж е н н я. *Теорема Лейбніца справджується, якщо послідовність членів (13.11) є спадною хоча б з деякого номера.*

Н а с л і д о к. *Оскільки залишок (13.11) R_n є в свою чергу знакопереміжним рядом, то*

$$\operatorname{sign} R_n = \operatorname{sign} a_{n+1}, \quad |R_n| < |a_{n+1}|.$$

П. 1. Обчислити з точністю до 0.1 суму ряду

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

в разі його збіжності.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з теоремою Лейбніца, заданий ряд збігається,

$$R_{10} < \frac{1}{11} < 0{,}1.$$

Тоді за наслідком з теореми Лейбніца

$$S \underset{0,1}{=} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \underset{0,1}{=} 0{,}6.$$

Порівняйте цей ряд з гармонічним, який є розбіжним.

Перейдемо до ознак збіжності знакозмінних рядів.

Т. *Із збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *випливає збіжність знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

З а у в а ж е н н я. *Обернене твердження в загальному випадку не виконується* (див. П. 1).

О. *Якщо для знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *збігається, то знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним.*

О. *Якщо знакозмінний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збіжний, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *розбіжний, то знакозмінний ряд називають умовно збіжним.*

П. 2. Ряд у попередньому прикладі умовно збіжний, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

абсолютно збіжний, бо

$$\frac{|\sin nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}.$$

Зазначимо, що в абсолютно збіжному ряді члени можна переставити як завгодно, це не впливає на суму, а в умовно збіжному ряді для довільного числа M можна знайти таку перестановку членів ряду, що сума його $S = M$, навіть $M = \infty$ (теорема Рімана).

Це твердження свого часу поставило під сумнів застосування рядів для наближених обчислень, проте це не так, треба тільки розрізняти абсолютну й умовну збіжність рядів і враховувати властивості їх.

13.1.6. Числоподібні ряди

До числоподібних рядів належать ряди з комплексними, векторними, тензорними (матричними) членами.

Ряд з комплексними членами — це ряд

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots (z_n = x_n + iy_n).$$

Відокремлюючи дійсну й уявну частини ряду, дістаємо два ряди

$$x_1 + x_2 + \ldots, \quad y_1 + y_2 + \ldots.$$

Якщо кожен з них збіжний, то збіжний і ряд по z. Якщо хоч один з них розбіжний, то ряд по z розбіжний. Якщо збігається ряд з модулів $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, то ряд по z називають абсолютно збіжним.

Ряд з векторними членами має вигляд

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n} + \ldots,$$

де $\overline{a_n} = (x_n, y_n, z_n)$. Тут маємо три ряди і міркуємо, як і в попередньому випадку.

Ряд з тензорними членами — це ряд

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots,$$

де

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} \\ a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Тут маємо чотири ряди

$$a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} + a_{11}^{(3)} + \ldots, \quad a_{12}^{(1)} + a_{12}^{(2)} + a_{12}^{(3)} + \ldots,$$

$$a_{21}^{(1)} + a_{21}^{(2)} + a_{21}^{(3)} + \ldots, \quad a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)} + a_{22}^{(3)} + \ldots.$$

Міркуємо, як і вище.

13.1.7. Наближене обчислення суми ряду Прискорення збіжності ряду

Обчислення суми ряду виконують після того, як встановлено збіжність ряду. Знаходять суму за допомогою заміни S на S_n. При цьому допускається похибка

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Оскільки величина допустимої похибки α обумовлена заздалегідь, то число членів N для підрахунку можна знайти з нерівності

$$|S - S_N| \le \alpha.$$

При великому N (або при малому α) порядок R_n можна оцінити за допомогою виразу

$$R_N \sim \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx, \quad f(n) = a_n,$$

тобто формула для знаходження необхідного числа членів ряду при обчисленні його суми має вигляд

$$\left| \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \right| \le \alpha.$$

Звідси знаходимо N, а після цього можна вже говорити про швидкість збіжності: чим більше N, тим ця швидкість менша.

П. 1. Знайти необхідне число членів N, яке забезпечує обчислення з точністю $\alpha = 10^{-3}$ суми ряду

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Розв'язання. Згідно з (13.11),

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan \int_{N+1}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan (N + 1) \leq \alpha,$$

звідки

$$N + 1 \leq \cot \alpha \approx 10^3, \quad N \approx 99.$$

Якщо інтеграл знайти важко або взагалі неможливо, то замість a_n можна взяти еквівалентну нескінченно малу, завдяки чому обчислення інтеграла істотно спрощується, а результат не змінюється.

П. 2. Розв'язати П. 1, спростивши спочатку підінтегральну функцію.

Розв'язання. Маємо $\frac{1}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$. Ураховуючи (13.12), дістаємо

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{N+1}^{\infty} = \frac{1}{N + 1} \leq \alpha \leq 10^{-3}, \quad N \approx 99,$$

тобто той же результат, що й у п. 1.

П. 3. Знайти таке N, що забезпечує обчислення з точністю $\alpha = 10^{-3}$ суми ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{1 + n^3}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} \sim \frac{1}{n^{3/2}},$$

то з урахуванням (13.12) маємо

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \Big|_{N+1}^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{N + 1}} \leq \alpha, \quad N \approx 4 \cdot 10^6.$$

Як бачимо, ряд сходиться повільно, обчислення його суми пов'язане зі значними труднощами, особливо при ручному розрахунку, який застосовують навіть не зважаючи на наявність персональних ЕОМ (при різних оцінках, прикидках тощо, необхідних, наприклад, при формуванні математичної моделі).

Ідея прискорення збіжності ряду належить О.М.Крилову*). Вона полягає в тому, що для даного ряду $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ підбирають ряд з відомою сумою $\sigma = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ такий, що $a_n \sim b_n$

*) О. М. Крилов (1863—1945) — російський математик, механік, кораблебудівник, спеціаліст з наближених обчислень.

при $n \to \infty$. Виходячи з властивостей еквівалентних нескінченно малих, маємо $a_n = b_n + \gamma_n$, де $\gamma_n = 0(a_n)$. Тоді

$$S = a_1 + a_2 + \ldots = (b_1 + b_2 + \ldots) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots) = \sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

де останній ряд збігається швидше.

За допоміжний ряд з відомою сумою беруть дзета-функцію Рімана (див. узагальнений гармонічний ряд)

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

яка затабульована. Для довідки: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$.

П. 4. Прискорити при $\alpha = 10^{-3}$ збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^2}$, то допоміжним рядом є

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Маємо

$$\gamma_n = a_n - b_n = \frac{1}{n^2 + 1} - \frac{1}{n^2} = \frac{-1}{n^2(n^2 + 1)},$$

тобто

$$S = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 + 1)}.$$

Оцінимо швидкість збіжності нового ряду:

$$\frac{1}{n^2(n^2 + 1)} \sim \frac{1}{n^4}, \quad \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_{N+1}^{\infty} = \frac{1}{3(N+1)^3} \le \alpha.$$

Отже $N \approx 6$. Тоді

$$S = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{90} + \frac{1}{272} + \frac{1}{650} + \frac{1}{1332}\right) \approx 1{,}078.$$

Наведений метод можна, звичайно, застосовувати повторно.

13.2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

13.2.1. Збіжність функціональних рядів

О. *Функціональним називається ряд*

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad (13.13)$$

де всі функції $u_n(x)$ *визначені на певній множині, наприклад* X.

Як і для числових рядів

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Нехай в (13.13) $x = x_0 \in X$. Тоді

$$S(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ — числовий ряд.}$$

О. *Функціональний ряд* (13.13) *називається збіжним при* $x = x_0$, *якщо відповідний числовий ряд, утворений з ряду* (13.13) *при* $x = x_0$, *є збіжним.*

О. *Функціональний ряд* (13.13) *називається збіжним на множині* X, *якщо він збіжний* $\forall\, x \in X$.

Введемо ще два поняття.

О. *Рівномірним (чебишовським*[*]*) відхиленням функцій* $f(x)$ і $\varphi(x)$ *на* $[a, b]$ *називається величина*

$$\rho_p(f, \varphi) = \max |f(x) - \varphi(x)|, \quad x \in [a, b] \qquad (13.14)$$

і середнім відхиленням — величина

$$\rho_c(f, \varphi) = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx. \qquad (13.15)$$

Рівномірне відхилення можна застосовувати до обмежених функцій, в разі ж збіжності відповідного інтеґрала і у випадку необмежених функцій — середнє. Замінивши в (13.15) підінтеґральну функцію на її максимальне значення і оцінивши інтеґрал, дістаємо

$$\rho_c \le \rho_p |b - a|, \qquad (13.16)$$

звідки випливає, що при малих ρ_p малим буде і ρ_c, обернене твердження не завжди правильне, тобто рівномірне відхилення є жорсткішою оцінкою, ніж середнє.

О. *Функціональний ряд* (13.13) *називається рівномірно збіжним на* $[a, b]$, *якщо*

$$\lim_{n \to \infty} \rho_p(S, S_n) = 0$$

---

[*]) П. Л. Чебишов (1821—1894) — російський математик.

і збіжним в середньому, якщо

$$\lim_{n \to \infty} \rho_c(S, S_n) = 0.$$

З нерівності (13.16) випливає, що рівномірно збіжний ряд є збіжним і в середньому, обернене твердження не завжди правильне.

Наступна теорема виражає достатню умову рівномірної збіжності ряду (13.13).

Т. *(Вейерштрасса*[*]*). Якщо* $\forall\ x \in [a, b]$ *всі члени ряду* (13.13) *задовольняють нерівність* $|u_n(x)| \le a_n$, *причому ряд* Σa_n *збіжний, то ряд* (13.13) *рівномірно збіжний на* $[a, b]$.

■ За достатньою ознакою збіжності знакозмінного ряду, згідно з умовами теореми, ряд (13.13) абсолютно збігається до $S(x)$. Доведемо, що ця збіжність є рівномірною. Розглянемо рівномірне відхилення

$$\rho_p = \max_{x \in [a,b]} \left| S(x) - S_n(x) \right| = \max_{x \in [a,b]} \left| \sum_{k=k+1}^{\infty} u_k(x) \right| \le$$

$$\le \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0, \quad n \to \infty$$

як залишок збіжного числового ряду ■

П. Дослідити на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1 + n^q}, \quad a > 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{|n^p \sin nx|}{1 + n^q} = \frac{n^p}{1 + n^q} |\sin x| \le \frac{n^p}{1 + n^q} = \frac{1}{n^{q-p}(1 + n^{-q})} \le \frac{1}{n^{q-p}}$$

при $q - p > 1$ ряд рівномірно збіжний на $(-\infty, \infty)$.

13.2.2. Властивості рівномірно збіжних рядів

Т. 1. *(неперервність суми). Сума рівномірно збіжного на* $[a, b]$ *ряду, складеного з неперервних на* $[a, b]$ *функцій, є неперервною на* $[a, b]$.

■ Маємо

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad \Delta S(x) = \Delta S_n(x) + \Delta R_n(x).$$

В останньому співвідношенні перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$.

Оскільки скінченна сума неперервних функцій неперервна, то $\Delta S_n(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. З рівномірної збіжності ряду маємо

$$\rho_p = \max_{x \in [a,b]} |R_n(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

---

[*] К. Вейєрштрасс (1815—1897) — німецький математик.

Отже,

$$\max_{x \in [a, b]} |\Delta R_n(x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тепер в рівності $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta S(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta R_n(x)$ перейдемо до границі при $n \to \infty$. Оскільки $\Delta S(x)$ не залежить від n, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta S(x) = 0. \blacksquare$$

Т. 2. *(граничний перехід). Рівномірно збіжний на* $[a, b]$ *ряд допускає на цьому інтервалі граничний перехід, тобто для* $x_0 \in (a, b)$

$$\lim_{x \to x_0} (u_1(x) + u_2(x) + \ldots) = \lim_{x \to x_0} u_1(x) + \lim_{x \to x_0} u_2(x) + \ldots$$

Т. 3. *(інтегрування ряду). Рівномірно збіжний на* $[a, b]$ *ряд інтегровних функцій можна зінтегрувати на цьому інтервалі, тобто*

$$\forall\, [\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad \int_\alpha^\beta (u_1(x) + u_2(x) + \ldots)dx = \int_\alpha^\beta u_1(x)dx + \int_\alpha^\beta u_2(x)dx + \ldots$$

Т. 4. *(диференціювання ряду). Збіжний ряд з диференційовних на* $[a, b]$ *функцій допускає почленне диференціювання за умови, що продиференційований ряд рівномірно збіжний, тобто*

$$(u_1(x) + u_2(x) + \ldots)' = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$$

Теореми 2—4 подаємо без доведення. Ці теореми дають відповіді на ряд питань, сформульованих на початку розділу «Ряди».

П. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^4 x}{n^2}$. Оскільки $\left|\frac{\sin n^4 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, то цей ряд збіжний. Проте ряд з похідних його членів, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cos n^4 x$ — розбіжний. Отже, умова рівномірної збіжності продиференційованого ряду в Т. 4 істотна.

13.3. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

13.3.1. Збіжність степеневих рядів

О. *Степеневим рядом називається ряд*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{13.17}$$

або

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{13.18}$$

Ряди (13.17) і (13.18) називають рядами за степенями x і $x - x_0$ відповідно. Зазначимо, що $a_i \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Виконавши в (13.18) заміну $x - x_0 = u$, дістанемо (13.17). Оскільки ряд (13.17) зручніший за формою, ніж ряд (13.18), то, коли це можливо, користуватимемося рядом (13.17). Степеневий ряд, очевидно, є окремим випадком функціонального ряду.

Збіжність (13.17) регламентується наступною теоремою.

Т. *(Абеля*)) а) Якщо степеневий ряд* (13.17) *збіжний при* $x = x^*$, *то він абсолютно збіжний і при* x *таких, що* $|x| < |x_0|$.

б) *Якщо степеневий ряд* (13.17) *розбіжний при* $x = x^*$, *то він розбіжний і при* x *таких, що* $|x| > |x^*|$.

■ а) Оскільки ряд $\Sigma a_n x^n$ збіжний при $x = x_0$, то збіжним є числовий ряд $\Sigma a_n x_0^n$. Звідси

$$\lim_{n \to \infty} a_n x^n = 0$$

(необхідна умова збіжності) і $\exists\, M > 0$, що

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad \text{для всіх } n.$$

Тут скористались обмеженістю послідовності, яка має границю.

Запишемо таку рівність:

$$\Sigma a_n x^n = \Sigma a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n. \tag{13.19}$$

Тоді для членів останнього ряду матимемо

$$\left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Ряд

$$\Sigma M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

збігається як сума геометричної прогресії зі знаменником $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < 1$, $|x| < x_0$. Беручи до уваги те, що $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ і рівність (13.19), дістаємо доводжуване твердження теореми.

б) Це твердження випливає з простих логічних міркувань. ■

Ураховуючи теорему Абеля, структуру області збіжності (13.17) можна зобразити так, як показано на рис. 13.2. Перебираючи значення x між x_0 і x^*, зближуючи x_0 і x^*, маємо випадок: існує таке число R, що ряд збіжний при $|x| < R$ і розбіжний при

*) Н. Г. Абель (1802—1829) — норвезький математик.

$|x| > R$. Таке число називають радіусом збіжності ряду. Очевидно можливо, що $R = 0$, $R = \infty$ або $0 < R < \infty$.

Радіус збіжності можна знайти за допомогою ознаки д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

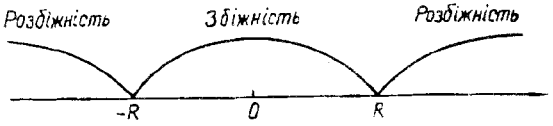


Рис. 13.2

Звідси

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

П. 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

За ознакою д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|.$$

Ряд збігається при $l = |x| < 1$, тобто при $-1 < x < 1$. Нагадаємо, що при $l = 1$, тобто при $|x| = 1$, ознака д'Аламбера не чинна. Розглянемо цей випадок.

Нехай $x = 1$. Тоді маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Цей ряд розбіжний.

Нехай $x = -1$. Тоді маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$.

Це знакопереміжний ряд, який збігається за ознакою Лейбніца. Остаточно для області збіжності заданого ряду маємо $-1 \le x < 1$.

Наприкінці зазначимо, враховуючи властивості рівномірно збіжних рядів і теорему Абеля, що степеневий ряд рівномірно збіжний всередині області збіжності, сума його неперервна, а сам він допускає почленне диференціювання та інтегрування також всередині області збіжності. Завдяки двом останнім операціям іноді степеневий ряд можна звести до іншого, сума якого відома.

13.3.2. Ряди Тейлора і Маклорена

Сумою степеневого ряду (13.17) є, звичайно, деяка функція. Виникає запитання: чи не можна для довільної функції $f(x)$ підібрати такі коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \ldots$, щоб ряд (13.17) збігався саме до $f(x)$? Щоб відповісти на це запитання, вважатимемо, що $f(x)$ є нескінченно диференційовною і

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots,$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots$ — невідомі коефіцієнти.

Знайдемо похідні:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots,$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \dots .$$

Якщо $f(x)$ і всі її похідні визначені в точці $x = 0$, то, беручи $x = 0$, дістаємо

$$f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1,\ f''(0) = 2a_2,\ f'''(0) = 3 \cdot 2a_3, \dots$$

У загальному випадку $f^{(n)}(0) = n!a_n$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \qquad (13.20)$$

Ряд (13.20) називається рядом Маклорена для $f(x)$. Якщо $f(x)$ або деякі її похідні не визначені при $x = 0$, то на основі ряду (13.18) знаходимо

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \qquad (13.21)$$

Ряд (13.21) називається *рядом Тейлора для* $f(x)$.

Подамо без доведення таку теорему.

Т. *Ряд Тейлора (Маклорена) для* $f(x)$ *збігається саме до* $f(x)$, *якщо існує* $M > 0$ *таке, що*

$$|f(x)| \le M,\ |f'(x)| \le M,\ |f''(x)| \le M, \dots$$

у деякому околі точки $x = x_0$.

Зображення функції $f(x)$ у вигляді (13.20) чи (13.21) називається розвиненням $f(x)$ у відповідний ряд (за відповідними степенями).

13.3.3. Стандартні розвинення елементарних функцій

Виконаємо розвинення деяких елементарних функцій у ряди Маклорена.

1. Нехай $f(x) = e^x$. Маємо

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = e^x,$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = e^0 = 1.$$

Згідно з (13.20)

$$e^x \underset{(-\infty,\infty)}{=\!=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (13.22)$$

Під знаком рівності записано інтервал, на якому ряд справа збігається до e^x. Справді, для ряду (13.22)

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \forall x.$$

Оскільки $f(x)$ і всі її похідні обмежені на довільному скінченному інтервалі $[a, b]$ числом $M = e^b$, то, за теоремою з п. 13.3.2, випливає справедливість рівності (13.22).

2. Нехай $f(x) = \sin x$. Маємо

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{IV}(x) = \sin x, \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{IV}(0) = 0, \ldots$$

$$|f^{(n)}(x)| \le 1 \quad \forall\ n.$$

Враховуючи (13.20), дістаємо

$$\sin x \underset{(-\infty,\infty)}{=\!=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (13.23)$$

Щодо знака рівності в (13.23), то треба застосувати ті самі міркування, що й для попередньої функції.

3. Нехай $f(x) = \cos x$. Міркуючи аналогічно, маємо

$$\cos x \underset{-\infty,\infty)}{=\!=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (13.24)$$

Формулу Ейлера тепер можна дістати з (13.22)—(13.24).

4. Нехай $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Маємо

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$$

. . . . . .

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \ldots,$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\ldots$$

Остаточно

$$(1+x)^{\alpha} \underset{(-1,1)}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\,x^n}{(n+1)!} + \ldots \qquad (13.25)$$

Ряд (13.25) називається *біноміальним*. Дослідимо його на збіжність. Знаходимо

$$u_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n,$$

$$u_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)\,n!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\,x^n}\right| =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x|,$$

звідки $-1 < x < 1$.

Опустимо доведення того факту, що (13.25) збігається до $(1+x)^{\alpha}$.

Наслідок 1

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \qquad (13.26)$$

Це випливає з (13.25), хоча його можна дістати й безпосередньо як суму відповідної прогресії.

Наслідок 2

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

5. Нехай $f(x) = \arctan x$.

Маємо

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - \ldots)\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

тобто

$$\arctan x \underset{(-1,1)}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

6. Нехай $f(x) = \ln(1+x)$. Маємо (див. 13.26)

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

тобто

$$\ln(1+x) \underset{(-1,1)}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Зазначимо, що $0 < x < 2$, бо $-1 < 1 + x < 1$.

У формулі для $\ln(1 + x)$ замінимо x на $-x$. Дістанемо

$$\ln(1-x) \underset{(-1,1)}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Тоді

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right),$$

тобто

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \underset{(-1,1)}{=} 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Якщо $-1 < x < 1$, то $0 < \frac{1+x}{1-x} < \infty$, тобто діапазон застосування для $\ln\frac{1+x}{1-x}$ значно ширший, ніж для $\ln(1+x)$.

13.3.4. Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди застосовують зокрема для

1) знаходження значень і границь функцій, наближення функцій многочленами;

2) інтеґрування функцій;

3) знаходження частинних і загальних розв'язків диференціальних рівнянь, розв'язків інтегральних рівнянь.

П. 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (перша стандартна границя).

Р о з в ' я з а н н я. Маємо (див. 13.23)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right) = 1.$$

П. 2. Враховуючи стандартні розвинення, маємо, зокрема,

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!},\quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6},\quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},\quad \sqrt{1+x} \equiv (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

П. 3. Знайти (див. П. 1).

$$I = \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Р о з в ' я з а н н я. Цей інтеграл не виражається через елементарні функції. В неелементарних же маємо

$$I = \int \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right) dx = c + x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots .$$

П. 4. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' = x - 2y, \quad y(0) = 0.$$

Це лінійне рівняння. Використовуючи ряди, маємо

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots ,$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$

Підставивши початкові умови в $y(x)$, дістаємо $0 = y(0) = a_0$. Підставимо тепер y і y' в рівняння. Маємо

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots =$$

$$= x - 2a_1 x - 2a_2 x^2 - 2a_3 x^3 - 2a_4 x^4 - \ldots$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах останньої рівності

$$x^0 : a_1 = 0,$$

$$x^1 : 2a_2 = 1 - 2a_1,$$

$$x^2 : 3a_3 = -2a_2,$$

$$x^3 : 4a_4 = -2a_3,$$

$$x^4 : 5a_5 = -2a_4.$$

Знайдемо відповідні коефіцієнти і скористаємося рівністю (13.22). Матимемо остаточно

$$y = \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{4} + \frac{x}{2} .$$

П. 5. Знайти розв'язок рівняння

$$y'(x) = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

у вигляді многочлена другого степеня.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$y(x) = y(0) + y'(0)\, x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$y'(0) = 1 \quad \text{(за умовою)}.$$

Тоді

$$y'(x) = 2x + 2yy', \quad y''(0) = 2.$$

Остаточно

$$y(x) = x + x^2 + \ldots, \quad y(x) \approx x + x^2.$$

Зазначимо, що не кожну функцію можна розвинути в ряд Тейлора (Маклорена), тобто такий ряд є сильним, але не єдиним знаряддям наближених обчислень, тому постає необхідність мати інші ряди

13.4. РЯДИ ФУР'Є

13.4.1. Ортогональність функцій

О. *Система функцій* $\{\varphi_n(x)\}$ *називається ортогональною на* $[a, b]$, *якщо*

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ c \neq 0, & m = n. \end{cases} \qquad (13.27)$$

П. На $[-1, 1]$ побудувати систему ортогональних поліномів $P_n(x)$ виходячи із системи $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$

Р о з в ' я з а н н я. Перші дві функції ортогональні, бо

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Тому $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Наступна пара x і x^2 також ортогональна, але пара 1 і x^2 вже не ортогональна

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Через те замість x візьмемо квадратний тричлен $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ і знайдемо його коефіцієнти з умов ортогональності до $P_0(x)$ і $P_1(x)$:

$$\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,x dx = 0,$$

звідси $b = 0$, $a = -3c$, а c може набувати довільних значень. Нехай для простоти $P_1(1) = 1$. Тоді $c = -\frac{1}{2}$. Отже,

$$P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Аналогічно $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ і т.д.

Ці многочлени вперше були досліджені А.М.Лежандром*) і носять його ім'я.

Існує багато інших ортогональних многочленів. Так, П.Л.Чебишов на основі додаткової умови найменшого відхилення многочлена від нуля на $[-1, 1]$ побудував систему ортогональних многочленів $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^2 - 3x$ і т.д. Широке застосування мають також ортогональні многочлени Ерміта, Лагерра та ін.

О. *Тригонометричною системою функцій називається система*

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \ldots, \cos nx, \quad \sin nx, \ldots$$

*) А. М. Л е ж а н д р (1752—1833) — французький математик.

Т. *Тригонометрична система функцій ортогональна на* $[-\pi, \pi]$. Щоб довести цю теорему, покажемо, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\, x dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \quad m \neq n$$

(див. (13.27)).

Виписані співвідношення можна перевірити, врахувавши, що

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

13.4.2. Тригонометричні ряди Фур'є*)

Нехай маємо систему ортогональних на $[a, b]$ функцій $\{\varphi_n(x)\}$. Треба за її допомогою дістати розвинення заданої функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots,$$

де a_n — деяка послідовність коефіцієнтів.

При цьому виникають такі запитання:

а) для яких $f(x)$ можливе таке розвинення? б) як знайти коефіцієнти? в) як збігається останній ряд?

Відповіді дамо пізніше для тригонометричної системи, а поки що зауважимо, що коли виписане розвинення можливе для довільної функції $f(x)$, то відповідна система функцій $\{\varphi_n(x)\}$ називається повною, у противному разі — неповною. Неповну систему можна перетворити в повну.

О. *Тригонометричним рядом називається ряд*

$$\frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx, \tag{13.28}$$

де $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — довільні послідовності дійсних коефіцієнтів.

Ряд (13.28) складений з періодичних функцій. Отже, його сума теж періодична з найменшим періодом 2π.

Нехай маємо 2π-періодичну функцію $f(x)$. Знайдемо конкретні послідовності коефіцієнтів $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ так, щоб

*) Ж. Ф у р ' є (1768—1830) — французький інженер-теплотехнік і математик.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{13.29}$$

Знайдемо коефіцієнти. Нехай $f(x)$ інтегрована на $[-\pi, \pi]$ і ряд (13.29) допускає почленне інтегрування на $[-\pi, \pi]$. Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx.$$

Звідси, беручи до уваги співвідношення, записані при доведенні теореми з 13.4.1, маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{13.30}$$

Помноживши обидві частини (13.29) на $\cos mx$ і зінтегрувавши, дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx +$$

$$+ b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nxdx.$$

Звідси, як і вище,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx. \tag{13.31}$$

Аналогічно

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx. \tag{13.32}$$

О. *Коефіцієнтами Фур'є за тригонометричною системою інтегровної функції $f(x)$ називаються коефіцієнти, обчислені за формулами* (13.30)—(13.32).

О. *Тригонометричний ряд* (13.29), *коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є, називається тригонометричним рядом Фур'є.*

Часто в двох останніх означеннях слово «тригонометричний» опускатимемо.

Не маючи поки що інформації про збіжність відповідного ряду, запишемо ряд Фур'є, який відповідає функції $f(x)$, у вигляді

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{13.33}$$

На практиці широко застосовують ряди Фур'є за іншими системами (зокрема, ряди Хаара, Уолша).

Тепер розглянемо рівності (13.30)—(13.33) для парних і непарних функцій $f(x)$. Для парної та непарної функцій $g_1(x)$, $g_2(x)$ маємо відповідно (згадайте!)

$$\int_{-a}^{a} g_1(x)dx = 2\int_{0}^{a} g_1(x)dx, \quad \int_{-a}^{a} g_2(x)dx = 0.$$

Наслідок 1. Якщо $f(x)$ парна, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Наслідок 2. Якщо $f(x)$ непарна, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Сформулюємо без доведення ознаку збіжності рядів Фур'є.

Т. *(Діріхле). Для 2π-періодичної, кусково-неперервної та обмеженої на $[-\pi, \pi]$ функції $f(x)$ її ряд Фур'є збігається, причому в точках неперервності $f(x)$ до значень $f(x)$ у цих точках, а в точках розриву — до середнього арифметичного односторонніх границь $f(x)$ у цих точках, тобто до*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\right),$$

де x_0 — точка розриву $f(x)$.

На відміну від ряду Тейлора, який передбачає існування всіх похідних функції, ряд Фур'є цієї функції допускає навіть розриви першого ряду, що випливає з теореми Діріхле.

Швидкість збіжності ряду Фур'є визначається швидкістю спадання його коефіцієнтів a_n і b_n, яка залежить від гладкості функції, для якої цей ряд побудовано. Справді, інтегруючи частинами, маємо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{x_0 - 0} f(x)\cos nx dx + \int_{x_0 + 0}^{\pi} f(x)\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\sin nx_0 + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx\right).$$

Якщо x_0 — точка розриву першого роду $f(x)$, то односторонні границі $f(x)$ у цій точці існують. Отже, коефіцієнти a_n ряду Фур'є мають порядок $\frac{1}{n}$. Якщо ж $f(x)$ неперервна, але її похідна $f'(x)$ розривна, то коефіцієнти a_n мають порядок $\frac{1}{n^2}$. Якщо $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні, але $f''(x)$ розривна, то коефіцієнти a_n мають порядок $\frac{1}{n^3}$ і т. д.

Якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Тоді

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{n^2\pi} \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) \cos nx_0 \right) -$$

$$- \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx.$$

Якщо $f'(x)$ має розрив у точці x, то $a_n \sim \frac{1}{n^2}$. Якщо $f'(x)$ неперервна в точці x_0, то $a_n \sim \frac{1}{n^3}$ і т.д.

Зазначимо, що у формулах (13.30)—(13.32) інтеґрали можна обчислювати на довільному інтервалі довжиною 2π, наприклад $[0, 2\pi]$.

П. 1. Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ 1, & \text{якщо } 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$ (рис. 13.3).

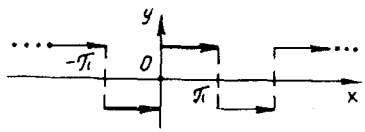


Рис. 13.3

Р о з в ' я з у в а н н я. Оскільки $f(x)$ — непарна на $(-\pi, \pi)$, то, згідно з наслідком 2,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ — парне } (n = 2k); \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{якщо } n \text{ — непарне } (n = 2k - 1), \end{cases}$$

тобто $b_k = \frac{4}{(2k-1)\pi}$, $k \in \mathbf{N}$. Отже,

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin (2k-1) x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \\ 1, & \text{якщо } 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{13.34}$$

Тут скористалися тим, що

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \to 0 - 0} f(x) + \lim_{x \to 0 + 0} f(x) \right) = \frac{1}{2} (-1 + 1) = 0,$$

а також теоремою Діріхле.

Нехай в (13.34) $x = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

звідки

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Таким чином, користуючись розвиненнями в ряди Фур'є певних функцій, можна знаходити суми відповідних числових рядів.

П. 2. Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формули (13.30)—(13.33). Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Зінтегруємо частинами:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(1 - (1+\pi)(-1)^n\right).$$

Остаточно маємо

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx +$$

$$+ \frac{1}{n\pi}\left((1+\pi)(-1)^n - 1\right)\sin nx = \begin{cases} -1, & \text{якщо } -\pi \le x < 0; \\ -\frac{1}{2}, & \text{якщо } x = 0; \\ x, & \text{якщо } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

бо $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) + \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$.

13.4.3. Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом. Гармонічний аналіз.

Нехай маємо інтегровну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$, $l > 0$. У формулах (13.30)—(13.33) зробимо заміну $x = \frac{l}{\pi}t$. Тоді

$$(x \in [-l, l]) \Rightarrow (t \in [-\pi, \pi]).$$

Отже, $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ має період 2π

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt, \quad a_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos ntdt.$$

Повернемося до старої змінної $\frac{\pi}{l}x = t$. Тоді

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin \frac{\pi}{l}x, \quad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos n\frac{\pi}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \sin n\frac{\pi}{l}xdx. \qquad (13.35)$$

В інженерній практиці часто виникає необхідність розвинути в ряд Фур'є неоперіодичну функцію $f(x)$, задану на відрізку $[a, b]$, який є скінченним. Таку функцію можна розвинути в ряд Фур'є, замінивши для цього її функцією

$$f^*(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [-l, a]; \\ f(x), & x \in [a, b]; \\ \varphi_2(x), & x \in [b, l], \end{cases}$$

де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ — довільні інтегровні функції і поширивши її періодичним способом на всю числову вісь. Зрозуміло, що така процедура може бути виконана неоднозначно. Звичайно $f^*(x)$ вибирають так, щоб швидкість збіжності отриманого ряду була найбільшою.

П. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Р о з в ' я з а н н я . Функцію $f(x)$ можна доповнити до функції $f^*(x)$ з періодом, наприклад $T = 2$ (для зручності), двома способами: парним (рис. 13.4) і

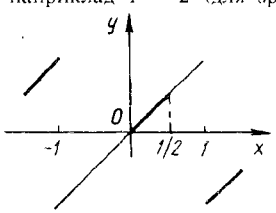


Рис. 13.4

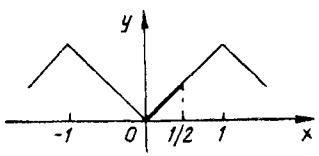


Рис. 13.5

непарним (рис. 13.5). У першому випадку $b \sim \frac{1}{n}$, у другому $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ (перевірте!). Отже, віддамо перевагу другому випадку.

Широке практичне застосування рядів Фур'є обумовлене не тільки їх низькою вимогою до якості відповідної функції $f(x)$, а, головним

чином, і тим, що розвинення її в ряд за косинусами і синусами не є формальним математичним засобом, а відбиває дійсну картину даного фізичного процесу, який фактично є суперпозицією коливань різних складових чинників даного пристрою чи процесу, починаючи від атомів, які коливаються, навколо вузлів кристалічної ґратки, аж до коливань системи в цілому.

Оскільки енергія коливань пропорційна до квадрата амплітуди, то, визначаючи коефіцієнти розвинення Фур'є, дістаємо інформацію про розподіл енергій за різними видами коливань, що характеризує її стан. На цьому базуються всі види неруйнівного контролю стану системи, її технічної діагностики тощо.

Процес і результат розвинення в ряд Фур'є функції $f(x)$ називають *гармонічним аналізом* (нагадаємо, що синусоїдні коливання називаються гармонічними). Осокільки частіше доводиться мати справу з емпіричними функціями, заданими графічно чи таблично, то маємо справу з *практичним гармонічним аналізом*, який реалізують, як правило, на основі формул прямокутників.

При цьому відрізок $[-l, l]$ розбивають на m частин довжиною $\Delta x = \dfrac{2l}{m}$ з точками поділу $x_0 = -l$, $x_1 = -l + \dfrac{2l}{m}$, ..., $x_m = l$, для яких знаходимо $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_m = f(x_m)$, після чого дістаємо коефіцієнти Фур'є:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx \approx \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\cos\frac{\pi}{l}nx_k,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx \approx \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\sin n\frac{\pi}{l}x_k.$$

13.5. ІНТЕҐРАЛ І ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

13.5.1. Комплексна форма ряду Фур'є

У формулі Ейлера

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

замінимо x на $-x$. Маємо

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Додаючи і віднімаючи останні дві формули, дістаємо

$$\cos x = \frac{1}{2}\,(e^{ix} + e^{-ix}),\quad \sin x = \frac{1}{2i}\,(e^{ix} - e^{-ix}),$$

або $\left(\dfrac{1}{i} = -i,\ \alpha_n = \dfrac{\pi n}{l}\right)$

$$\cos \alpha_n x = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha_n x} + e^{-i\alpha_n x}\right), \quad \sin \alpha_n x = -\frac{i}{2}\left(e^{i\alpha_n x} - e^{-i\alpha_n x}\right).$$

Підставивши останні вирази в (13.35), знаходимо

$$f(x) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n \left(e^{i\alpha_n x} + e^{-i\alpha_n x}\right) - \frac{1}{2} b_n i \left(e^{i\alpha_n x} - e^{-i\alpha_n x}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{i\alpha_n x} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) e^{-i\alpha_n x}.$$

Позначивши

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right), \quad c_{-n} = \frac{1}{n}\left(a_n + ib_n\right),$$

матимемо комплексну форму ряду Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x}, \tag{13.36}$$

де (перевірте окремо для c_0, c_{-n}, c_n)

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos \alpha_n x - i \sin \alpha_n x\right) dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\alpha_n x} dx.$$

Величини $e^{i\alpha_n x}$ називають *гармоніками;* α_n — *хвильовими числами;* c_n — *комплексними амплітудами;* послідовність $\left\{n \frac{\pi}{l}\right\}$ — *спектром*, який носить дискретний характер; відстань між двома сусідніми числами спектра дорівнює $\Delta\alpha = \frac{\pi}{l} = \text{const}$. Кожному n відповідає своя амплітуда c_n.

13.5.2. Інтеграл Фур'є

Нехай функція $y = f(x)$ абсолютно інтегровна на $\mathbf{R}$, тобто існує $M > 0$ таке, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \le M.$$

Оскільки $\Delta\alpha = \frac{\pi}{l}$, то ряд (13.36) запишемо у вигляді

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\alpha_n x} = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_n x} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-i\alpha_n t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_n x} \left(\int_{-l}^{l} f(t) e^{-i\alpha_n t} dt\right) \Delta\alpha.$$

Нехай $l \to \infty$. Тоді $\alpha_n \to \alpha$. (спектр стає суцільним). Сума, яка має вигляд інтеґральної, заміняється інтеґралом. Отже,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt. \tag{13.37}$$

Цей інтеґрал називається інтеґралом Фур'є і є розвиненням $f(x)$ за неперервним спектром.

13.5.3. Перетворення Фур'є

Подамо інтеґрал Фур'є (13.37) у вигляді двох формул

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt, \tag{13.38}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha, \tag{13.39}$$

які називають *прямим* та *оберненим перетворенням Фур'є* відповідно.

Якщо $f(x)$ парна, то $b_n = 0$. Маємо косинус—перетворення Фур'є

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha.$$

Якщо $f(x)$, де $a_n = 0$, непарна, то маємо синус-перетворення Фур'є

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha.$$

Властивості косинус- і синус-перетворень Фур'є ті ж самі, що й властивості самого перетворення Фур'є, до яких ми зараз переходимо.

13.5.4. Властивості перетворення Фур'є

Позначимо перехід від функції до перетворення Фур'є через $f(x) \to F(\alpha)$.

1. *Лінійність*

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \to k_1 F_1(\alpha) + k_2 F_2(\alpha), \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R}.$$

2. *Диференціювання за параметром.* Якщо $f(x, \tau) \to F(\alpha, \tau)$, то $\frac{\partial f}{\partial \tau} \to \frac{\partial F}{\partial \tau}$.

Ця властивість випливає з теореми Лейбніца про диференціювання інтеґрала, залежного від параметра.

3. *Подібність.* Якщо $f(x) \to F(\alpha)$, то

$$f(\lambda x) \to \frac{1}{|\lambda|} F\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right).$$

■ Справді, виконавши заміну змінної, дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda t)e^{-i\alpha t}dt = \left\{\begin{matrix} t_1 = \lambda t \\ dt_1 = \lambda dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{|\lambda|\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)e^{-i\frac{\alpha}{\lambda}t_1}dt = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{\alpha}{|\lambda|}\right).$$

■

4. *Зміщення.* Якщо $f(x) \to F(\alpha)$, то

$$f(x-\delta) \to e^{-i\alpha\delta}F(\alpha) \quad \forall\, \delta.$$

■ Тут теж виконаємо заміну змінної:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\delta)e^{-i\alpha t}dt = \{t-\delta = t_1, \quad dt = dt_1\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-i\alpha\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)e^{-i\alpha t}dt_1 = e^{-i\delta\alpha}F(\alpha). \quad ■$$

5. *Перетворення похідної.* Якщо $f(x) \to F(\alpha)$, то $f'(x) \to i\alpha F(\alpha)$.

■ Справді, інтегруючи частинами, дістаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\alpha t} - dt = \left\{\begin{matrix} e^{-i\alpha t} = u; & du = -i\alpha e^{-i\alpha t}dt \\ f'(t)dt = dv; & v = f(t) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(t)e^{-i\alpha t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt\right) = i\alpha F(\alpha).$$

Через те що $f(x)$ задана на $[a, b]$, $f(\infty) = f(-\infty) = 0$. ■

Використання цієї властивості дає змогу перетворити диференціальне рівняння в скінченне, розв'язок якого, можливо, знайти неважко.

6. *Перетворення інтеграла.* Якщо $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, а $f(x) \to F(\alpha)$, то

$$\varphi(x) \to \frac{F(\alpha)}{i\alpha} = \Phi(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

■ Справді, диференціюючи $\varphi(x)$, матимемо

$$\varphi'(x) = f(x) \to i\alpha\Phi(\alpha) = F(\alpha) \Rightarrow \Phi(\alpha) = F(\alpha)/i\alpha. \quad ■$$

За допомогою цих властивостей рівняння у частинних похідних перетворюються в звичайні рівняння, чим ми і скористаємося пізніше.

РОЗДІЛ 14

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Рівняння математичної фізики — це рівняння, які описують різні фізичні явища. До таких рівнянь належать рівняння в частинних похідних, інтегральні, інтегродиференціальні та інші рівняння, але основу рівнянь математичної фізики становлять лінійні рівняння другого порядку в частинних похідних, які будуть розглянуті в цьому розділі. Основоположниками математичної фізики є Ж. Фур'є і Д. Максвел*).

14.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

14.1.1. Класифікація рівнянь

Лінійне рівняння другого порядку в частинних похідних має вигляд

$$au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} + 2du'_x + 2eu'_y + f = 0, \qquad (14.1)$$

де $a(x, y)$, $b(x, y)$, ..., $f(x, y)$ — відомі функції від x і y, $u(x, y)$ — шукана функція.

За формою рівняння (14.1) аналогічне рівнянню кривої другого порядку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (14.2)$$

де $A, B, \ldots, F$ — сталі.

Зокрема, рівняння (14.1) і (14.2) є рівняннями [illegible]

$$\delta = ac - b^2.$$

За аналогією з лініями другого порядку говорять, що рівняння (14.1) при $\delta < 0$ має *гіперболічний* тип, при $\delta = 0$ — *параболічний*, а при $\delta > 0$ — *еліптичний*.

Інші інваріанти (14.1), які називаються його *характеристиками*,— це розв'язки диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{-\delta}}{a} \tag{14.3}$$

Позначимо їх через $\varphi(x, y) = c$ і $\psi(x, y) = c$.

Згідно з (14.3) рівняння гіперболічного типу ($\delta < 0$) має дві сім'ї дійсних характеристик, параболічного ($\delta = 0$) — одну і еліптичного ($\delta > 0$) — дві сім'ї комплексно спряжених характеристик.

14.1.2. Канонічна форма рівнянь

Якщо в рівнянні (14.1) перейти до нових незалежних змінних ξ і η, то воно зміниться, але характеристики залишаться тими самими. Якщо при цьому вважати, наприклад, що $\xi = \varphi(x, y)$, то в (14.1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ для гіперболічного й еліптичного типів, а для параболічного типу ще й $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$. Ці властивості рівняння (14.1) використаємо для зведення його до канонічного вигляду.

1. Нехай у гіперболічному рівнянні $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$. Тоді матимемо так звану першу канонічну форму рівняння, тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + (\ldots) = 0, \tag{14.4}$$

де в дужках міститься вираз, в якому немає другої похідної від u.

Якщо ввести нові змінні $\xi_1 = \xi + \eta$ і $\eta_1 = \xi - \eta$, то дістанемо другу канонічну форму гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2} + (\ldots) = 0.$$

2. Для зведення до канонічного вигляду рівняння параболічного типу основною сім'єю вважають сім'ю характеристик $\xi = \varphi(x, y)$, а за другу — $\eta = \psi(x, y)$, де $\psi(x, y)$ — довільна функція, яка не залежна від $\varphi(x, y)$. При цьому дістанемо канонічну форму рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\ldots) = 0.$$

3. Для зведення до канонічного вигляду рівняння еліптичного типу вважатимемо, що

$$\xi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = v(x, y), \quad \eta = \frac{i}{2}(\psi - \varphi) = w(x, y).$$

У результаті дістанемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\ldots) = 0.$$

П. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u''_{tt} = p^2 u''_{xx}, \quad p \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання. Маємо $a = p^2$, $b = 0$, $c = -1$. Отже, $\delta = ac - b^2 = -p^2 < 0$, є рівнянням гіперболічного типу. Характеристики його $\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{p}$ — сім'я прямих $x = pt = \varphi(x, t) = c$, $x - pt = \psi(x, t) = c$.

Введемо нові змінні: $\xi = x + pt$, $\eta = x - pt$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = p\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = p\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right) u.$$

Знайдемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) p^2.$$

Підставимо їх у задане рівняння, дістанемо першу канонічну форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0.$$

14.1.3. Основні типи рівнянь (огляд)

Хвильове рівняння має вигляд

$$u''_{tt} = v^2 \Delta u, \quad v \in \mathbf{R},$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Це рівняння гіперболічного типу, воно описує коливання просторового тіла.

Рівняння теплопровідності має вигляд

$$u_t' = v^2 \Delta u.$$

Це рівняння параболічного типу, воно описує процес теплопровідності в тривимірному тілі.

Рівняння Пуассона[*)]

$$\Delta u = f(x, y, z).$$

Це рівняння еліптичного типу, в $\mathbf{R}^2$, наприклад, воно описує прогин мембрани під дією навантаження.

Рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Це окремий випадок рівняння Пуассона, воно має еліптичний тип і описує електричне, магнітне, гравітаційне поля, а також поле швидкостей безвихрового потоку ідеальної рідини.

14.2. КОЛИВАННЯ СТРУНИ

14.2.1. Хвильове рівняння

Розглянемо струну з лінійною густиною ρ кг/м завдовжки l, яка закріплена на кінцях і натягнута із силою T (рис. 14.1).

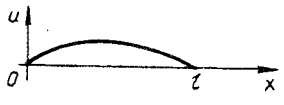


Рис. 14.1

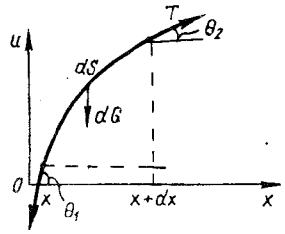


Рис. 14.2

Нехай $u(x, t)$ — відхилення струни від положення рівноваги (амплітуда). Ураховуватимемо тільки малі відхилення ($u \ll l$, $u_x' \ll 1$). Тоді

*) С. Д. Пуассон (1781—1840) — французький математик.

$$ds = \sqrt{1 + u'^2}\,dx \approx dx.$$

Розглянемо сили, прикладені до елемента струни dS (рис. 14.2). Це натяг струни T (зліва T_1, справа T_2) і вага $dQ = \rho g dx$.

Проектуючи сили на вісь Ox, маємо

$$-T_1\cos\theta_1 + T_2\cos\theta_2 = 0.$$

Оскільки $\cos\theta_1 \approx \cos\theta_2 \approx 1$, то $T_1 = T_2 = T = \text{const}$. Таким чином, сталість натягу струни — це наслідок мализни її зміщення.

З'ясуємо, чи слід враховувати вагу струни. Для цього виконаємо уявний експеримент. Покладемо гітару горизонтально, торкнемося струни і потім повернемо гітару у вертикальне положення. В першому випадку сила ваги перпендикулярна до струни, в другому — напрямлена вздовж струни. Проте звук при цьому не змінюється. Отже, логічно вважати, що вагою (а не масою) струни можна нехтувати.

Оскільки йдеться про механічний рух, то, застосовуючи другий закон механіки, маємо

$$u''_{tt}\rho dx = T_{1u} - T_{2u},$$

індекс u означає, що взято проекцію T на цю вісь. Оскільки $T_{1u} = -T\sin\theta$, $T_{2u} = T\sin\theta$, причому

$$\sin\theta \approx \tan\theta = u'_x|_x,$$

$$\sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = u'_x|_{x+dx} = u'_x|_x dx + u''_{xx}|_x dx + \dots,$$

то

$$T_{1u} + T_{2u} \approx T u''_{xx} dx.$$

Отже,

$$u''_{tt}\rho dx \approx T u''_{xx} dx \quad (dx \to 0).$$

Тоді

$$u''_{tt} = \frac{T}{\rho} u''_{xx}.$$

Фізичні розмірності:

$T = \left[\frac{\text{кг м}}{\text{с}^2}\right]$, $\rho = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}}\right]$, $\frac{T}{\rho} = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\right]$, тобто $\frac{T}{\rho}$ має розмірність квадрата деякої швидкості v ($v^2 = T/\rho$).

Таким чином,

$$u_{tt}'' = v^2 u_{xx}''. \tag{14.5}$$

Це рівняння гіперболічного типу має дві сім'ї характеристик

$$x + vt = c, \quad x - vt = c. \tag{14.6}$$

Для повної характеристики коливань струни, наприклад в гітарі, необхідно задати початкові умови

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t'(x, 0) = \varphi(x) \tag{14.7}$$

і граничні умови

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{14.8}$$

які в сукупності становлять крайові умови. Тому задача (14.5)—(14.8) називається крайовою задачею для рівняння коливань струни. У подальшому для простоти вважатимемо, що $\rho = \text{const}$, а отже, й $v = \text{const}$ (однорідна струна).

14.2.2. Коливання нескінченної струни

Розглянемо нескінченну струну, для якої умови (14.8) відпадають. Введемо нові змінні $\xi = x + vt$, $\eta = x - vt$ і перейдемо до першої канонічної форми рівняння (14.4), інтегрування якого по ξ дає $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \psi(\eta)$, де ψ — довільна функція η. Інтегруючи по η, маємо

$$u = \int \psi(\eta) d\eta + \Phi(\xi) = F(\eta) + \Phi(\xi) = F(x - vt) + \Phi(x + vt), \tag{14.9}$$

де F і Φ — довільні функції. Таким чином, загальний розв'язок (14.5), є сумою двох довільних функцій.

З'ясуємо фізичний зміст (14.9). Вважатимемо, що $\Phi(\xi) = 0$. Тоді $u = F(x - vt)$, $u = F(x)$ при $t = 0$. Якщо $t > 0$, то таке саме зміщення струна матиме в точці $x + vt$. Справді, $F(x + vt - vt) = F(x)$, тобто за час t відхилення $F(x)$ зміщується вздовж струни зі швидкістю v. Отже, функція $F(x - vt)$ описує рух вправо від прямої хвилі зі швидкістю v. Аналогічно $\Phi(x + vt)$ описує рух вліво від одержаної хвилі зі швидкістю v. Розв'язок (14.7) є суперпозицією прямої й зворотної хвиль.

Знаючи загальний розв'язок і початкові умови, можна знайти частинний розв'язок задачі. Підставивши (14.7) у (14.9), дістанемо

$$f(x) = F(x) + \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v(\Phi'(\xi) - F'(\eta))\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{14.10}$$

тобто $\Phi'(x) - F'(x) = \varphi(x)/v$. Звідси

$$\Phi(x) - F(x) = \frac{1}{\nu}\int_{x_0}^{x} \varphi(z)\, dz. \qquad (14.11)$$

Розв'язуючи (14.10) і (14.11), маємо

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2\nu}\int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz, \quad F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2\nu}\int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz.$$

Підставивши $\Phi(x)$ у (14.9), знайдемо

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + \nu t) + f(x - \nu t)) + \frac{1}{2\nu}\int_{x-\nu t}^{x+\nu t} \varphi(z)dz. \qquad (14.12)$$

П. 1. Знайти частинний розв'язок (14.12), якщо

$$f(x) = \sin x, \ \varphi(x) = \cos x.$$

Розв'язання. Маємо

$$u = \frac{1}{2\nu}\int_{x-\nu t}^{x+\nu t} \cos z\, dz + \frac{1}{2\nu}(\sin(x + \nu t) - \sin(x - \nu t) =$$

$$= \frac{1}{\nu}\cos x \sin \nu t.$$

якщо $t = 0$, то $u = 0$; якщо $t = \frac{\pi}{2\nu}$, то $u = \frac{1}{\nu}\cos x$.

П. 2. Знайти частинний розв'язок (14.12), якщо

$$f(x) = x^2, \ \varphi(x) = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$u = \frac{1}{2}((x + \nu t)^2 + (x - \nu t)^2) = x^2 + \nu^2 t^2.$$

З'ясуємо фізичне тлумачення (14.12). Вважатимемо $\varphi(x) = 0$. Тоді

$$u = \frac{1}{2}(f(x + \nu t) + f(x - \nu t)).$$

Тут маємо суперпозицію прямої й зворотної хвиль.

Нехай у момент $t = 0$ зміщення відхилення від нуля лише на інтервалі $(-l, l)$ (рис. 14.3). Для точок $x > l$ у момент $t_1 = \frac{x - l}{\nu}$ їх досягає передній фронт хвилі, а в момент $t_2 = \frac{x + l}{\nu}$ їх залишає задній фронт хвилі, тобто ці точки знаходяться в русі $\forall\, t \in (t_1, t_2)$ і залишаються в спокої решту часу. Ця схема реалізується в щипкових музичних інструментах.

Розглянемо випадок, коли $f(x) = 0$. Маємо

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \varphi(z)dz.$$

Позначимо первісну функцію $\varphi(x)$ через

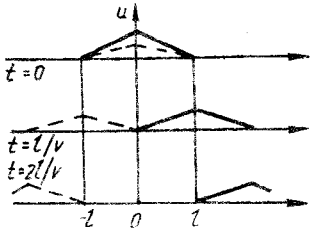


Рис. 14.3

$$\Phi(x) = \frac{1}{2v} \int_{-l}^{x} \varphi(z)dz.$$

Тоді

$$u(x, t) = \Phi(x + vt) - \Phi(x - vt).$$

Тут також маємо пряму й зворотну хвилі, але не суму їх, а різницю. Нехай для простоти $\varphi = \varphi_0 \ \forall \ x \in (-l, l)$ і $\varphi = 0$, $\forall x \in (-l, l)$ (ця схема реалізується, наприклад, в роялі).

Тоді

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < l; \\ \dfrac{\varphi_0}{2v}(x + l), & \text{якщо } x \in [-l, l]; \\ \varphi_0 \dfrac{l}{v} = h, & \text{якщо } x > l. \end{cases}$$

Якщо $t = 0$, то $u(x, t) = 0$. При $t = \frac{l}{v}$ точка $x = 0$ зазнає найбільшого відхилення $h = \varphi_0 \frac{l}{v}$ і в подальшому її положення не змінюється. Інші точки струни мають найбільше зміщення в момент $t = (|x| + l)/v$, після чого вони фіксуються. При $t \to \infty$ вся струна зміщується на величину h.

Покажемо, як розглянуту задачу можна розв'язати за допомогою перетворення Фур'є.

Застосувавши це перетворення до рівняння (14.5), дістанемо диференціальне рівняння $v''(x) = -v^2\alpha v(\alpha)$, загальний розв'язок якого

$$v(x) = c_1 e^{-i\alpha x} + c_2 e^{i\alpha x}.$$

Звідси, зважаючи на перетворення Фур'є для початкових умов, маємо

$$v(x) = v(x, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] = c_1 + c_2 = \mathcal{F}[\varphi(x)].$$

$$v(\alpha) = \frac{1}{2}\left(F(\alpha) - \frac{\Phi(\alpha)}{i\alpha\nu}\right)e^{-i\alpha\nu t} + \frac{1}{2}\left(F(\alpha) + \frac{\Phi(\alpha)}{i\alpha\nu}\right)e^{-i\alpha\nu t}.$$

Застосувавши тепер обернене перетворення Фур'є, дістанемо

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(f(x - \nu t) + f(x + \nu t)\right) + \frac{1}{2\nu}\int_{x-\nu t}^{x+\nu t}\varphi(z)dz.$$

14.2.3. Коливання скінченної струни

Знайдений вище розв'язок відрізняється від того, який спостерігається при грі, наприклад на гітарі. Це пояснюється тим, що розв'язок був отриманий для нескінченної струни, а в дійсності мають справу зі скінченною струною з нерухомо закріпленими кінцями. Останнє вносить у процес істотні зміни, а саме: хвиля, досягаючи кінця струни, відбивається від нього і в протифазі рухається вздовж струни в протилежному напрямі. Те саме зі зворотною хвилею.

У момент $t = 0$ струна зазнає максимального зміщення вверх. Потім за рахунок взаємодії прямої й зворотної хвиль зі своїми відображеннями в момент $t = \frac{l}{\nu}$ вона займає положення рівноваги. У момент $t = \frac{2l}{\nu}$ вона зазнає максимального зміщення вниз і так далі, тобто коливається саме так, як ми це собі й уявляємо.

Тепер розглянемо це аналітично і розв'яжемо крайову задачу (14.5), (14.7) і (14.8), застосувавши метод Фур'є. Розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{14.13}$$

Нагадаємо, що $u \not\equiv 0$. Підставивши (14.13) у (14.5), дістанемо

$$XT'' = \nu^2 X''T.$$

Звідси, відокремлюючи змінні, знайдемо

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{\nu^2 T}.$$

Остання рівність (зліва — функція аргументу x або стала, справа — функція аргументу t або стала) можлива тільки за умови, що ліва й права частини дорівнюють сталій. Позначимо цю сталу через $-\lambda^2$ (знак прокоментуємо пізніше). В результаті дістанемо два рівняння

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \text{ і } T'' + \lambda^2\nu^2 T = 0,$$

розв'язки яких $(A, B, C, D \in \mathbf{R})$

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \text{ і } T = c\cos\lambda\nu t + D\sin\lambda\nu t.$$

Отже,

$$u(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)(c \cos \lambda v t + D \sin \lambda v t).$$

Застосовуючи граничні умови (14.8), маємо $A = 0$, $B \neq 0$, якщо $u \not\equiv 0$. Тоді $\sin \lambda l = 0$, $\lambda l = \pi n$, $n \in N$. Таким чином, λ може набувати лише певних значень або, як кажуть, власних значень $\lambda = \frac{\pi \eta}{l}$. Якщо ввести позначення не $-\lambda^2$, а λ^2, то

$$X = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x},$$

що не задовольняє граничні умови і не відповідає фізичній ситуації (коливання відсутні). Якщо $\lambda = 0$, то $X = A + Bx$, що не відповідає фізичній суті задачі.

Для кожного n маємо відповідний розв'язок

$$u_n(x, t) = (c_n \cos \frac{n\pi x}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi v}{l} t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Внаслідок лінійності рівняння (14.5), сума u_n також є його розв'язком. Отже,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi v}{l} t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (14.14)$$

Щоб знайти C_n і D_n, скористаємося початковими умовами (14.7). Маємо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n \frac{\pi}{l} x, \ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi v}{l} \sin n \frac{\pi}{l} x.$$

Останні рівності являють собою розвинення в ряд Фур'є за синусами функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ з коефіцієнтами C_n і $D_n \frac{n\pi v}{l}$. Скориставшись загальними формулами для коефіцієнтів Фур'є, в цьому випадку маємо

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x \, dx, \ D_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \varphi(x) \sin n \frac{\pi}{l} x \, dx.$$

Якщо ряд (14.14) збіжний і ряди, утворені після двократного диференціювання його по x і t, теж збіжні, то (14.14) і є єдиним розв'язком даної крайової задачі, звичайно з урахуванням значень C_n і D_n.

Отже, основні особливості методу Фур'є такі:

а) розв'язок шукають у вигляді добутку, що дає змогу відокремити змінні;

б) загальний розв'язок шукають у вигляді суми множини розв'язків, знайдених для кожного власного числа;

в) для заданих у початкових умовах функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ знаходять їх розвинення в ряд Фур'є за синусами, що дає змогу обчислити відповідні коефіцієнти.

З'ясуємо фізичне тлумачення розв'язку, для чого кожен член в (14.14) подамо у вигляді

$$u_n(x, t) = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}\ \sin n\frac{\pi}{l}x\left(\frac{C_n}{\sqrt{C_n^2 + D_n^2}}\cos n\frac{\pi}{l}vt + \right.$$

$$\left. + \frac{D_n}{\sqrt{C_n^2 + D_n^2}}\sin n\frac{\pi}{l}vt\right) = A_n \sin(\omega_n t + \beta_n),$$

де $A_n = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}\sin\frac{\pi}{l}x$ — *амплітуда*, $\omega_n = n\frac{\pi}{l}x$ — *частота*, $\beta_n = \arctan(c_n/D_n)$ — *фаза коливань*.

При $n = 1$ дістаємо *основний тон коливань*, який визначає висоту звука

$$\omega_1 = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Він залежить від довжини, густини і сили натягу струни. При $n > 1$ маємо *обертони*, сукупність яких утворює *тембр* звучання. Оскільки обертонів нескінченно багато, то тембр кожного інструмента унікальний.

Якщо струну розбити на m частин і кожну з них замінити матеріальною точкою, то для кожної з них можна написати рівняння коливань $u'' + \omega_k^2 u = 0$, тобто в результаті дістанемо систему m рівнянь. При $m \to \infty$ матимемо систему з нескінченним числом рівнянь, еквівалентну одному рівнянню (14.8).

Така специфіка рівнянь в частинних похідних.

14.3. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ СТЕРЖНЯ

14.3.1. Виведення рівняння теплопровідності стержня

Нехай розподіл температури в стержні завдовжки l описує функція $u(x, t)$. Фізичний закон, який описує процес теплопровідності, встановив Фур'є: швидкість зміни теплоти пропорційна до градієнта температури $\frac{\partial u}{\partial x}$ і площі S поперечного перерізу стержня

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -kS\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (14.15)$$

Знак у правій частині показує, що напрям руху тепла протилежний напряму ґрадієнта температури (тепло йде від теплішого тіла до холоднішого, а ґрадієнт напрямлений у бік зростання температури). Коефіцієнт k називають *коефіцієнтом теплопровідності*. Рівняння (14.15) у задачах теплопровідності відіграє таку ж фундаментальну роль, що й другий закон механіки в задачах механічного руху тіл. Слід зазначити, що цей закон Фур'є відкрив завдяки аналогії із задачею про протікання ідеальної рідини по похилій площині, яка була розглянута Л.Ейлером (в ній $\frac{\partial u}{\partial x}$ — кутовий коефіцієнт нахилу площини). Така аналогія для Фур'є була не випадковою, оскільки він дотримувався теорії теплороду — ідеальної невагомої рідини, яка переносить тепло. Оскільки обидві рідини ідеальні, то й закон руху, на думку Фур'є, повинен бути однаковий. Найвражаюче при цьому те, що хоч міркування Фур'є виявилося неправильним (на зміну теплороду прийшла кінетична теорія тепла, основи якої заклав М.В.Ломоносов*), закон (14.24) правильно описує явище теплопровідності.

Отже, за час t через поперечний переріз стержня з абсцисою x проходить кількість тепла

$$dQ_1 = -kS\,dt\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x,$$

а через переріз $x + \Delta x$ — кількість тепла

$$dQ_2 = -kS\,dt\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} = -kS\,dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\bigg|_x dx + \ldots\right),$$

тобто на ділянці dx за час dt залишається тепло

$$dQ = dQ_1 - dQ_2 = kS\,dt\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

що обумовлює підвищення температури на $du = \frac{\partial u}{\partial t}\,dt$.

При цьому теплота dQ, температура du, теплоємність c і маса $dm = \rho S\,dx$, де ρ — густина стержня, зв'язані між собою залежністю

$$dQ = c\,dm\,du = c\rho S\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx.$$

Вилучаючи dQ, знаходимо

*)М.В.Ломоносов (1711—1765) — російський учений.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Величину $\frac{k}{c\rho} = a^2$ називають коефіцієнтом температуропровідності, який для однорідного стержня є сталою величиною.

Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{14.16}$$

Це рівняння теплопровідності стержня має параболічний тип, одну сім'ю характеристик і одну канонічну форму. Щоб розв'язати (14.16), змінимо масштаб часу, ввівши нову змінну $\tau = a^2 t$. У результаті дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{14.17}$$

14.3.2. Охолодження нескінченного стержня

Для розв'язування цієї задачі доповнимо рівняння (14.16) початковою умовою (чому однією?)

$$u(x, 0) = f(x), \tag{14.18}$$

яка задає розподіл температури в стержні в момент $t = 0$. Граничні умови тут відсутні (чому?)

Застосувавши перетворення Фур'є, дістанемо звичайне диференціальне рівняння з початковою умовою

$$v'_\tau(\alpha) = -\alpha^2 v(\alpha), \quad v(\alpha)|_{\tau=0} = F(\alpha),$$

розв'язок якого

$$v(\alpha, \tau) = F(\alpha) e^{-\alpha^2 \tau}.$$

Обернене перетворення Фур'є дає розв'язок, одержаний Пуассоном,

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Розглянемо процес передачі тепла в стержні, якщо в початковий момент $t = 0$ (рис. 14.4)

$$f^*(x) = \begin{cases} k, & \text{якщо } x \in (x_0, x_0 + \Delta x); \\ 0, & \text{якщо } x \overline{\in} (x_0, x_0 + \Delta x). \end{cases}$$

За теоремою про середнє значення функції маємо

$$u^*(x, \tau) = \frac{k\Delta x}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\eta - x)^2}{4\tau}},$$

$$\Delta Q = c\rho k \Delta x, \quad k = \Delta Q / \rho c \Delta x,$$

звідки

$$u^*(x, \tau) = \frac{\Delta Q}{2\rho c\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\eta - x)^2}{4\tau}}.$$

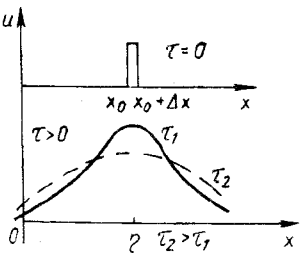


Рис. 14.4

Згідно з рис. 14.4 крива $u^*(x, \tau_i)$ для фіксованого часу τ_i асимптотично наближається до нуля при $|x| \to \infty$. Це означає, що в розглядуваній моделі швидкість поширення тепла дорівнює нескінченності. Завдяки спеціальній теорії відносності відомо, що швидкість будь-якого фізичного процесу не може перевищувати швидкість світла у вакуумі, а передача тепла відбувається за рахунок передачі енергії коливань від однієї молекули до іншої — процес досить повільний. При цьому відмовлятися від рівняння (14.15) не слід, оскільки воно правильно описує процес передачі тепла в скінченному стержні. Треба пам'ятати, що це всього лише модель явища, яка відображає основні (але не всі!) його риси.

Поставивши питання про швидкість поширення тепла, ми вийшли за режим можливості моделі. В принципі аналогічна картина спостерігається при аналізі будь-якої моделі: рано чи пізно виникає перепона, за якою модель не працює. Таку картину, наприклад, маємо в задачі коливання нескінченної струни (ми її раніше просто не помітили). Як бачимо (рис. 14.3), при $t \to \infty$ вся нескінченна струна змістилась на скінченну величину h, але для цього треба виконати роботу нескінченної величини (а ми лише вдарили по струні молоточком завширшки $2l$). Справа в тому, що з самого початку ми цілком правильно знехтували вагою струни, а оскільки струна невагома, то і робота не буде нескінченно великою.

Те саме маємо й для стержня: нехтуємо інерцією молекул, тому й маємо нескінченну швидкість поширення. Що стосується стержня певної довжини, то таке припущення цілком прийнятне.

14.3.3. Охолодження скінченного стержня

Розглянемо крайову задачу охолодження скінченного стержня. Доповнимо рівняння (14.17) і (14.18) граничними умовами

$$u(0, \tau) = u(l, \tau) = 0, \tag{14.19}$$

які (для простоти) означають, що кінці стержня занурені в лід.

Для розв'язування цієї задачі скористаємося методом Фур'є. Шукатимемо u у вигляді

$$u = X(x)\,T(\tau),\quad u \not\equiv 0.$$

Підставивши u в рівняння (14.17), дістанемо

$$T'/T = X''/X = -\lambda^2.$$

Далі маємо рівняння

$$X'' + \lambda^2 X = 0,\quad T' + \lambda^2 T = 0,$$

з яких знаходимо

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,\quad T = cl^{-\lambda^2\tau},$$

тобто

$$u = (M\cos\lambda x + N\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau},$$

де

$$M = AC,\quad N = BC.$$

З умов (14.19) маємо $M = 0$, $N \neq 0$, $\sin\lambda l = 0$, звідки знаходимо вираз для власних чисел цієї задачі:

$$\lambda = \frac{n\pi}{l},\quad n \in N.$$

Для кожного власного числа маємо

$$u_n(x,\tau) = N_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 \tau}{l^2}}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

а внаслідок лінійності рівняння теплопровідності сума

$$u(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}}\sin n\frac{\pi}{l}x \qquad (14.20)$$

також є розв'язком рівняння, причому загальним. Користуючись (14.18), дістаємо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin n\frac{\pi}{l}x.$$

Це — розвинення функції $f(x)$ у ряд Фур'є за синусами, звідки

$$N_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\sin n \frac{\pi}{l} x \, dx. \tag{14.21}$$

Якщо ряд (14.20) збігається і збігаються ряди, утворені з (14.20) внаслідок двократного диференціювання по x, то (14.20) і (14.21) дають єдиний розв'язок розглядуваної крайової задачі.

14.4. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

14.4.1. Стандартний розподіл температури в тілі

Розподіл температури в тривимірному тілі можна описати рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \equiv a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Якщо поле температур не змінюється з часом (стаціонарне), то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ і тоді маємо рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{14.22}$$

Для розв'язування конкретної задачі, крім рівняння (14.22), слід задати й граничні умови, залежно від яких розрізняють три крайові задачі для рівняння Лапласа:

1) задача Діріхле, в якій задано температуру по всій поверхні σ

$$u|_\sigma = \varphi(x, y, z); \tag{14.23}$$

2) задача Неймана*), в якій задано ґрадієнт температури по поверхні,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_\sigma = f(x, y, z), \tag{14.24}$$

де $\overline{n}$ — нормальний вектор поверхні;

3) мішана задача, в якій на одній частині поверхні задано умову (14.23), а на другій — умову (14.24).

На практиці часто застосовують рівняння Лапласа в циліндричній системі координат

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{14.25}$$

*) К.Нейман (Нойман) (1832—1925) — німецький математик.

П. 1. Знайти стаціонарний розподіл температури в стержні завдовжки l, якщо

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1.$$

Розв'язання. З рівняння (14.22) для одновимірного випадку $u = u(x)$ маємо $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$. Звідси $u = Ax + B$. З граничних умов дістаємо $B = u_0$, $A = \frac{u_1 - u_0}{l}$.

Отже,

$$u = \frac{u_1 - u_0}{l} x + u_0.$$

П. 2. Знайти розподіл температури $u(\rho)$ у плоскому кільці, обмеженому колами радіусів R_0, R_1, якщо на його границях підтримується температура u_0 і u_1.

Розв'язання. З рівняння (14.25) для $u = u(\rho)$ $\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0\right)$ маємо

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{du}{d\rho}\right) = 0.$$

Звідси $u = A\ln\rho + B$. З початкових умов знаходимо

$$u_0 = A\ln R_0 + B, \quad u_1 = A\ln R_1 + B.$$

Тоді

$$u = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{\ln(R_1/R_3)} \ln \frac{\rho}{R_0}.$$

14.4.2. Безвихровий рух ідеальної нестисливої рідини

Розглянемо потік рідини через поверхню σ, яка обмежує об'єм V (рис. 14.5). Величина цього потоку становить

$$Q = \iint_\sigma \overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma,$$

де $\overline{F}$ — вектор швидкості рідини.

Масу потоку можна дістати з об'єму потоку, помноживши його на густину, тобто

$$M = \iint_\sigma \rho\overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma.$$

За час Δt через σ проходить рідина масою

$$\Delta m_1 = \Delta t \iint_\sigma \rho\overline{F}\,\overline{n}\, d\sigma.$$

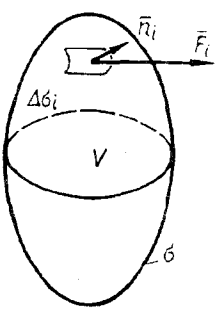


Рис. 14.5

Якщо в момент t в об'ємі V міститься маса $m = \iiint_V \rho\, dv$, то за час Δt вона зменшується на

$$\Delta m_2 = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t\, dv.$$

Якщо всередині V немає ні джерел, ні витоків, тобто $\Delta m_1 = \Delta m_2$ (закон збереження маси рідини), то

$$\iint_\sigma \rho \overline{F}\, \overline{n}\, d\sigma = \iiint_\sigma \frac{\partial p}{\partial t}\, dv.$$

За формулою Остроградського—Гаусса маємо

$$\iint_\sigma \rho\, \overline{F}\, \overline{n}\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\rho\, \overline{F})\, dv.$$

Тоді попередній вираз набирає вигляду

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho\, \overline{F}) \right) dV = 0.$$

Ураховуючи те, що об'єм V довільний, інтеґрал може дорівнюватир нулю тільки тоді, коли дорівнює нулю підінтеґральна функція, маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho\, \overline{F}) \tag{14.26}$$

— рівняння нерозривності стисливої рідини. Якщо ж рідина нестислива ($\rho = \text{const}$), то з (14.26) дістаємо рівняння нерозривності нестисливої рідини

$$\operatorname{div} \overline{F} \equiv \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Якщо при цьому в ній відсутні завихрення, то $\overline{F} = \overline{\operatorname{grad}}\, u$ і замість останнього маємо $\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad}}\, u = \Delta u = 0$.

Сам Лаплас дістав це рівняння стосовно ґравітаційного поля і використав його для обґрунтування й розвитку теорії походження Сонячної системи з газопилової хмари.

Рівняння Лапласа є рівнянням еліптичного типу ($\delta > 0$) і воно має дві сім'ї комплексно спряжених характеристик і одну канонічну форму.

14.4.3. Задача Діріхле для круга

Розглянемо круглу пластинку радіуса ρ_0, розподіл температури в якій описується рівнянням (14.25) при $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\rho^2 \partial \varphi^2} = 0,$$

або в розгорнутому вигляді

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (14.27)$$

Нехай на границі заданий розподіл температури

$$u\big|_{\rho = \rho_0} = f(\varphi).$$

Цю крайову задачу розв'яжемо методом Фур'є. Нехай $u = \Phi(\varphi)\, R(\rho)$. Підставимо цей вираз у рівняння (14.27)

$$\rho^2 \Phi R'' + \rho \Phi R' + \Phi'' R = 0, \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -k^2.$$

В результаті дістаємо два звичайні диференціальні рівняння

$$\Phi'' + k^2 \Phi = 0, \quad \rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0.$$

Розв'язок першого має вигляд

$$\Phi = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi.$$

Розв'язок другого шукаємо у вигляді $R = \rho_m$. Підставивши його у (14.27), знайдемо

$$\rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + \rho m \rho^{m-1} - k^2 \rho^m = 0,$$

або $m^2 - k^2 = 0$, $m = \pm k$, тобто

$$R = c\rho^k + D\rho^{-k},$$

де k повинно бути цілим, оскільки функція $f(\varphi)$ повинна мати період 2π. Маємо

$$u = (A \cos k\varphi + B \sin k\varphi)(c\rho^k + D\rho^{-k}),$$

звідки випливає, що при $\rho = 0$, тобто в центрі пластинки $u = \infty$, але фізично це нереально. Отже, $D = 0$. Позначивши $CA = M$, $CB = N$, помічаємо, що для кожного $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$u_k = (M_k \cos k\varphi + N_k \sin k\varphi)\, \rho^k.$$

Сума u_k внаслідок лінійності рівняння Лапласа є його загальним розв'язком:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{M_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (M_k \cos k\varphi + N_k \sin k\varphi)\rho^k.$$

Використовуючи граничну умову, дістаємо

$$f(\varphi) = \frac{M_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (M_k \cos k\varphi + N_k \sin k\varphi)\rho_0^k.$$

Маємо розвинення в ряд Фур'є функції $f(\varphi)$. Отже,

$$M_k = \frac{1}{\pi\rho_0^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad N_k = \frac{1}{\pi\rho_0^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt.$$

Якщо ряд Фур'є збігається і збігаються ряди, утворені з нього двократним диференціюванням за ρ і φ, то маємо єдиний розв'язок розглядуваної задачі.

Подальші перетворення, які свого часу виконав Пуассон, привели до так званого *інтеґрала Пуассона*

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} f(t)\cos k(t-\varphi) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \cos k\,(t-\varphi)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} e^{i(t-\varphi)}\right)^k + \left(\frac{\rho}{\rho_0} e^{-i(t-\varphi)}\right)^k\right)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(t-\varphi) + \rho^2)^{-1})\, dt.$$

РОЗДІЛ 15

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

15.1. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ЇХ ПОХІДНІ

15.1.1. Комплексна змінна

У п. 7.1 було введено комплексні числа і дії над ними, встановлено також певні паралелі між ними та векторами, але на відміну від останніх вони мають операцію ділення, що зв'язано з єдиністю операції множення. Для комплексних чисел не існують поняття «більше», «менше» тому, що ці числа ($z = re^{i\varphi}$) визначаються двома параметрами, які не зіставляються один з одним. Геометричний зміст комплексного числа — точка площини.

Комплексна змінна — це точка цієї площини, яка належить, наприклад, певній області D, однозв'язній чи многозв'язній (див. п. 12.3.3). Довільну многозв'язну область за допомогою відповідних розрізів можна перетворити в однозв'язну. Ступінь зв'язності області $n = k + 1$, де k — необхідне число розрізів, які перетворюють дану область в однозв'язну.

Розглядатимемо *відкриті* області (для довільної точки області існує окіл точки, який повністю належить області) і *зв'язні* (дві довільні точки області можна сполучити кривою, яка не виходить за межі області). Нагадаємо, що додатним напрямом обходу межі області є той, при якому область залишається зліва від відповідних дотичних до її границі.

15.1.2. Функція комплексної змінної (ФКЗ). Умови Коші—Рімана

Означення ФКЗ аналогічне відповідному означенню для дійсної змінної. Взагалі, ФКЗ багато в чому аналогічна функції дійсної змінної, хоча є, звичайно, і певні, часто істотні, відмінності. Перша відмінність полягає в тому, що ФКЗ не має графіка (неможливо зобразити графічно чотири змінні).

Основні поняття й формули аналізу функцій дійсної змінної переносяться на випадок ФКЗ $w = f(z)$, а саме:

1) границя функції

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists U_{z_0}\quad \forall z \in U_{z_0} \setminus \{z_0\}:$$

$$|f(z) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = A);$$

2) неперервність в точці z_0

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(z_0);$$

3) похідна

$$w' = \lim_{z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z);$$

4) диференціал

$$dw = f'(z)dz.$$

Зазначимо, що $z \to z_0$ чи $\Delta z \to 0$ довільним способом, відповідний результат не залежить від прямування z до z_0 чи Δz до нуля.

Таблиця похідних ФКЗ така сама, як і таблиця похідних функцій дійсної змінної.

Другою істотною відмінністю ФКЗ є зв'язок між функціями u і v:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Справді, нехай $z = x + iy$. Тоді

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{d(u + iv)}{dx + idy} = \frac{(u + iv)'_x dx + (u + iv)'_y dy}{dx + idy} = \left\{\frac{dx}{dy} = t\right\} =$$

$$= \frac{(u + iv)'_x t + (u + iv)'_y}{t + i} = \frac{(u + iv)'_x + ((u + iv)'_y - i(u + iv)'_x)}{t + i}.$$

Оскільки x і y незалежні змінні, то dx і dy, а отже, і t набувають довільних значень. Якщо $f'(z)$ існує, то в даній точці вона не залежить від t, а це можливо тільки за умови

$$(u + iv)'_y = i(u + iv)'_x,$$

звідки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{15.1}$$

Умови (15.1) називаються *умовами Коші—Рімана (або Ейлера—Д'аламбера)*. При цьому

$$f'(z) = \frac{\partial y}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Справедливим є такий результат.

Т. *Для того, щоб функція* $w = f(z)$ *була диференційовна як ФКЗ у точці* z, *необхідно й достатньо, щоб при відповідних значеннях* x *і* y *функції* u *та* v *були диференційовні як функції двох дійсних змінних і виконувались умови* (15.1).

З урахуванням (15.1) маємо

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y - iu'_y.$$

Звідси випливає, що для похідної ФКЗ виконуються всі правила диференціювання, а також формули таблиці похідних.

О. *Функція називається аналітичною в деякій точці, якщо вона диференційовна в цій точці і в деякому її околі.*

О. *Функція називається аналітичною в деякій області, якщо вона аналітична в кожній точці цієї області.*

Точки області, де функція аналітична, називають *правильними*, а точки, де вона не аналітична, — *особливими.*

Якщо з умов (15.1) вилучити $v(x, y)$, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\Delta u) = 0,$$

аналогічно, якщо вилучити $u(x, y)$, тоді $\Delta v = 0$. Внаслідок лінійності оператора Лапласа маємо $\Delta w \equiv \Delta u + i\Delta v = 0$, тобто *аналітична функція та її складові* u *і* v *є гармонічними функціями*, отже, задовольняють рівняння Лапласа. Звідси маємо: аналітична ФКЗ є розв'язком рівняння Лапласа для $\mathbf{R}^2$, тобто її можна інтерпретувати як функцію, яка описує плоскі електричне, магнітне, гравітаційне поля чи поле швидкостей безвихрового нерозривного руху рідини.

Умови (15.1) дають змогу відновити аналітичну функцію лише тільки за її дійсною чи уявною частиною.

П. Нехай $v = y - x$. Знайти аналітичну ФКЗ $w = u + iv$.

Розв'язання. З умов (15.1) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

тобто

$$u = x + \varphi(y).$$

З другої умови (15.1) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, але $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = 1$, звідки $\varphi(y) = y + c$, і остаточно

$$u = x + y + c,$$

$$w = x + y + c + i(x - y).$$

15.2. ІНТЕҐРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

15.2.1. Теорема Коші

Інтеґрал від ФКЗ ідентичний криволінійному інтеґралу другого роду

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(z_i^*)\,\Delta z_i,$$

але

$$f(z) = u + iv, \quad dz = dx + idy.$$

Отже,

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy,$$

тобто інтеґрал від ФКЗ зводиться до лінійної комбінації двох інтеґралів функцій дійсної змінної, тому властивості таких інтеґралів збігаються. Зокрема, при зміні напряму на лінії L знак інтеґрала змінюється на протилежний. Крім того,

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L \left|f(z)\right| dz \le ML, \tag{15.2}$$

де $M = \max\limits_{z\in L} |f(z)|$, L — довжина лінії L у правій частині (15.2).

П. Обчислити $\int\limits_L \dfrac{dz}{z - z_0}$, де L — коло $z = z_0 + Re^{it}$ з центром у точці z_0 і радіусом R.

Розв'язання. Маємо

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = 2\pi i. \tag{15.3}$$

При вивченні криволінійних інтеґралів $\int P\,dx + Q\,dy$ встановлено умови незалежності їх від L:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

У розглядуваному випадку $P = u + iv$, $Q = -v + iu$ і умова незалежності приводить до умов Коші—Рімана, тобто інтеґрал від аналітичної функції не залежить від шляху інтеґрування. Останнє означає, що для аналітичної функції існує невизначений інтеґрал $\int f(z)\,dz = F(z) + C$ з

уже відпрацьованою теорією (таблиця інтегралів, способи інтегрування), а також справджується формула Ньютона—Лейбніца

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Іншою еквівалентною умовою незалежності інтеграла від лінії інтегрування є

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

У розглядуваному випадку маємо

$$\int_L f(z)\,dz = 0 \tag{15.4}$$

Отже, справедливе таке твердження.

Т. *(Коші) Якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, обмеженій контуром L, то виконується рівність (15.4)*

Зауваження. Теорема Коші справедлива й для многозв'язної області. Для доведення цього факту перейдемо до однозв'язної області, виконуючи розрізи. Лінії розрізу проходимо двічі в протилежних напрямах, інтеграли на них взаємно знищуються.

15.2.2. Формула Коші. Нерівність Коші

Нехай $f(z)$ аналітична в деякій області. Розглянемо в цій області круг з центром у точці z_0 і радіусом r. Рівняння відповідного кола $z = z_0 + re^{it}$. В утвореній двозв'язній області розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0},$$

яка аналітична в цій області, крім хіба що точки z_0. Застосовуючи попередню теорему для двозв'язної області, маємо (див. ще (15.3))

$$\int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \int_{L_r} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \int_{L_r} \frac{f(z_0 + (f(z) - f(z_0))}{z - z_0}\,dz = f(z) \int_{L_r} \frac{dz}{z - z_0} +$$

$$+ \int_{L_r} \frac{f(z_0 + re^{it}) - f(z_0)}{re^{it}}\,ire^{it}dt = 2\pi i f(z) + i \int_{L_r} (f(z_0 + re^{it}) - f(z_0))dt.$$

Нехай $r \to 0$. Тоді другий інтеграл в останньому виразі прямує до нуля внаслідок неперервності $f(r)$. *Дістаємо інтегральну формулу Коші*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}. \tag{15.5}$$

Диференціюючи (15.5), маємо

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2}.$$

Аналогічно $\forall\, n \in N$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \tag{15.6}$$

Отже, аналітична функція має всі свої похідні. Це ще одна характерна особливість аналітичних ФКЗ.

Використовуючи (15.2) і (15.6), дістаємо *нерівність Коші* (де M — таке саме, що й у (15.2))

$$f^{(n)}(z) \le \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r M}{r^{n+1}} = \frac{Mn!}{r^n}.$$

Зокрема, при $n = 1$

$$f'(z) \le M/r.$$

За допомогою цієї нерівності можна довести наступний результат.

Т. *(Ліувілля) Якщо функція аналітична на всій площині й обмежена, то вона стала.*

Справді, вважаючи, що вся площина — це круг з нескінченно великим радіусом, з останньої нерівності при $r \to \infty$ маємо $f'(z) = 0$. Отже, $f(z) = \text{const}$.

У подальшому покажемо, що при гідравлічному тлумаченні аналітичної функції $f(z)$ похідна $f'(z)$ зв'язана зі швидкістю потоку рідини на площині. Особливі точки, де $f(z)$ не аналітична, — це збудники руху рідини (джерела, витоки, завихрення). Якщо на площині немає таких збудників руху, то рідина перебуває в спокої, а її швидкість, отже, і $f'(z)$, дорівнюють нулю.

15.3. РЯДИ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

15.3.1. Ряд Тейлора

Оскільки аналітична в однозв'язній області функція має всі похідні, то її можна подати у вигляді суми її ряду Тейлора, тобто

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots, \tag{15.7}$$

де

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Усі стандартні розвинення функцій у степеневі ряди залишаються без зміни, зокрема,

$$l^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad (|z| < \infty),$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \qquad (|z| < \infty),$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \qquad (|z| < \infty),$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \qquad (|z| < 1),$$

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \qquad (|z| < 1).$$

Вважатимемо, що наведені елементарні ФКЗ визначаються як суми відповідних рядів.

Якщо в (15.7) $c_0 = f(z_0) = 0$, то

$$f(z) = (z - z_0)(c_1 + c_2(z - z_0) + \ldots) = (z - z_0)\varphi_1(z).$$

При цьому $z = z_0$ є нулем першого порядку. Якщо $c_0 = c_1 = 0$, то

$$f(z) = (z - a)^2(c_2 + c_3(z - z_0) + \ldots) = (z - a)^2\varphi_2(z).$$

При цьому $z = z_0$ є нулем другого порядку. Якщо $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, $c_n \neq 0$, то $z = z_0$ є нулем порядку n і тоді

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi_n(z),$$

причому z_0 не є нулем функції $\varphi_n(z)$.

Зазначимо, що ряд Тейлора не чинний у многозв'язних областях.

15.3.2. Ряд Лорана. Особливі точки

Ряд Лорана*)— це ряд, сума якого є функцією, аналітичною в кільці $r < |z - z_0| < R$, він має вигляд (рис. 15.1)

*) П.А.Лоран (1813—1854) — французький математик.

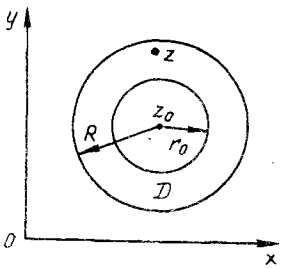


Рис. 15.1

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} +$$

$$+ c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots ,$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi r} \int_L \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n-1}} .$$

На відміну від ряду Тейлора $c_n \neq f^{(n)}(z_0)/n!$, оскільки похідна при $z = z_0$ не існує і інтеґрал береться по довільному контуру $L \subset D$.

У ряді Лорана розрізняють головну й правильну частини відповідно $\ldots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0}$, $c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$

П. Знайти розвинення в ряд Лорана функції

$$f(z) = \frac{1}{z + 1} + \frac{1}{2 - z} .$$

Розв'язання. Застосуємо формулу суми нескінченної геометричної прогресії. Всередині круга $|z| < 1$.

$$\frac{1}{z + 1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots , \frac{1}{2 - z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right),$$

Отже,

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - z\left(1 - \frac{1}{4}\right) + z^2\left(1 + \frac{1}{8}\right) + \ldots = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}z + \frac{9}{8}z^2 - \ldots$$

Всередині кільця $1 < |z| < 2$.

$$\frac{1}{z + 1} = \frac{1}{z\left(1 + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \ldots\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \ldots, \frac{1}{2 - z} = \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \ldots$$

Отже,

$$f(z) = \ldots + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \ldots$$

Зовні круга $|z| > 2$.

$$\frac{1}{z + 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \ldots , \frac{1}{2 - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - 2/z} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \ldots\right) = -\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z^3} - \ldots$$

Отже,

$$f(z) = \ldots - \frac{9}{z^4} - \frac{3}{z^3} - \frac{3}{z^2}.$$

О. *Точка $z = z_0$ називається ізольованою особливою точкою $f(z)$, якщо $f(z_0) = \infty$,* але існує окіл z_0 *такий, в якому $f(z)$ аналітична.*

Множина ізольованих особливих точок складається *з усувних, полюсів* та *істотно особливих* точок.

О. *Особлива точка функції називається усувною, якщо ряд Лорана функції за цією точкою не має головної частини.*

Наприклад, функція

$$f(z) \equiv \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots, f(0) = 1$$

має усувну точку $z = 0$.

О. *Ізольована особлива точка функції називається полюсом порядку k, якщо відповідний ряд Лорана має головну частину,*

$$\sum_{n=-k}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \quad c_{-k} \neq 0.$$

Наприклад, функція

$$f(z) \equiv \frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \ldots$$

має полюс першого порядку $(z = 0)$.

О. *Ізольована особлива точка функції називається істотною особливою точкою, якщо відповідний ряд Лорана має в головній частині нескінченне число членів.*

Наприклад, функція

$$f(z) \equiv e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$$

має істотну особливу точку $z = 0$.

15.4. ЛИШКИ

Нехай $f(z)$ у точці $z = z_0$ має полюс порядку n, тобто

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

О. *Коефіцієнт* C_{-1} *розвинення функції* $f(z)$ *в ряд Лорана в точці* z_0 *називається лишком цієї функції стосовно точки* z_0, *тобто*

$$\operatorname{Res}^{*)}(f(z), z_0) = c_{-1} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\xi)\, d\xi,$$

звідки

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0).$$

Т. (Основна теорема про лишки). *Якщо функція* $f(z)$ *аналітична всередині деякого контура* Γ, *крім окремо взятих точок* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_i).$$

Подаємо цю теорему без доведення, воно досить просте. Тепер про знаходження лишків.

Нехай z_0 є однократним полюсом аналітичної функції $f(z)$. Тоді

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

$$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}.$$

Нехай $z \to z_0$. Тоді

$$\lim_{z \to z_0} \Big(f(z)(z - z_0)\Big) = c_{-1},$$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (f(z)(z - z_0)). \tag{15.8}$$

Якщо z_0 є полюсом кратності m для $f(z)$, то можна довести, що

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big(f(z)\,(z - z_0)\Big)^m \right).$$

П. Знайти

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{z}, 0\right).$$

Розв'язання. Маємо (див. 15.8)

*) Від фр. residue, англ. rest — решта.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{z}, 0\right) = \lim_{z \to 0}\left(z \frac{\cos z}{z}\right) = 1.$$

Використовуючи лишки, можна знаходити деякі інтеграли.

П. Знайти

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha\, x\, dx}{a^2 + x^2}; \quad \alpha, a > 0.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(z) = e^{i\alpha z}/(a^2 + z^2)$. Вона аналітична у верхній півплощині, крім точки $z = ia$, для якої (перевірте!)

$$\operatorname{Res}(f(z), ia) = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha x}.$$

Будуючи дійсну частину, знаходимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha x} \int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\alpha x}.$$

15.5. КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

15.5.1. Загальні поняття

З'ясувати характер відображення однієї множини на іншу для функції однієї змінної можна за допомогою графіка цієї функції. Функція комплексної змінної не має графіка і говорити про властивості ФКЗ можна, будуючи на площині $z = x + iy$ деякі криві $z(t) = x(t) + iy(t)$ і досліджуючи їхні образи в площині $w = u + iv = f(z)$.

Особливо важливими є відображення, здійснювані аналітичними функціями. Візьмемо окіл точки z_0 і відповідний їй окіл $w_0 = f(z_0)$ (рис. 15.2).

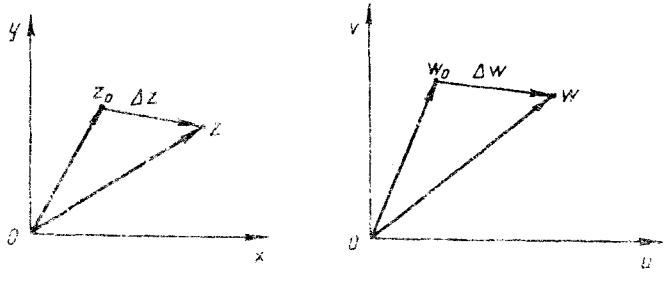


Рис. 15.2

Приросту $\Delta z = z - z_0 = |\Delta z| e^{i\varphi}$ на площині w відповідає приріст $\Delta w = w - w_0 = |\Delta w| e^{i\theta}$. Проте $\Delta w \approx dw = f'(z)\,\Delta z$, а $f'(z) = ke^{i\alpha}$, де k і α — модуль і аргумент $f'(z)$. Таким чином, $\Delta w = k|z|e^{i(\varphi+\alpha)}$, $|\Delta w| = k|\Delta z|$, $\theta = \varphi + \alpha$.

Для аналітичної функції весь окіл точки z_0 змінюється в k разів і як єдине ціле повертається на кут α. Це перетворення подібності, при якому всі фігури, які належать цьому околу, зберігають свою форму. Ось чому *відображення, здійснювані аналітичними функціями, називаються конформними* (тієї ж форми). Проте від точки до точки значення k і α змінюються, і форми скінченних фігур змінюються теж, хоча кути між лініями, які перетинаються, залишаються без змін. Ось чому конформні відображення дають змогу діставати безліч систем криволінійних ортогональних координат (рис. 15.3).

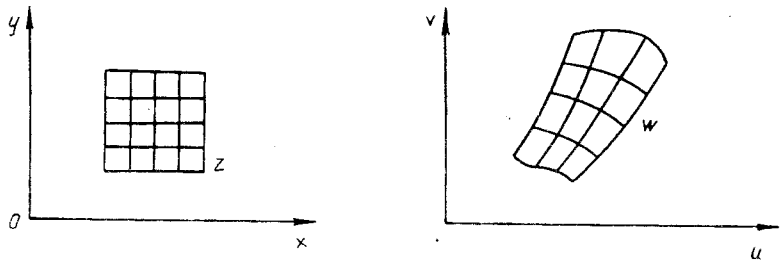


Рис. 15.3

Для конформності відображення необхідно й достатньо, щоб функція $w = f(z)$ і обернена до неї $z = \varphi(w)$ були аналітичними і взаємно однозначними. Оскільки

$$\varphi'(w) = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{dw/dz} = \frac{1}{f'(z)},$$

то з умов аналітичності необхідно, щоб $f'(z) \neq 0$, $f'(z) \neq \infty$. У точках, де це не виконується, конформність порушується.

15.5.2. Відображення за допомогою лінійної функції

Розглянемо лінійну функцію $w = az + b = \mathrm{R}e^{i\alpha}z + b$, де z, a, b — комплексні числа, $a \neq 0$.

Т. *Відображення за допомогою лінійної функції є взаємно однозначним відображенням комплексної площини самої на себе. Це відображення конформне і зводиться до суперпозиції таких перетворень: а) поворот площини на кут α; б) розтягування її в $|R|$ разів; в) зміщення її вздовж вектора b.*

■ Конформність і взаємна однозначність відображення випливає з того, що $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$, тобто $z = a_1 w + b_1$, а $w' = a$, $a \neq \infty$, $a \neq 0$.

Розглянемо окремі випадки.

Якщо $a = 1$, то $w = z + b$.

Це перетворення зміщення на вектор b.

Якщо $b = 0$, то

$$w = az = |a|e^{i\alpha}|z|e^{i\theta} = |a||z|e^{i(\alpha+\theta)}.$$

Уся площина змінюється в $|a|$ разів і повертається на кут α. Це перетворення подібності для всієї площини в цілому. ■

15.5.3. Відображення за допомогою дробово-лінійної функції

Спочатку з'ясуємо взаємну однозначність і конформність, застосовуючи відображення за допомогою дробово-лінійної функції, потім розглянемо відображення, суперпозицією яких є зазначене відображення. Схема міркувань нагадує схему доведення попередньої теореми.

Маємо дробово-лінійне перетворення

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0, \quad \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}, \quad ad \neq bc.$$

При $c = 0$ маємо лінійну функцію, при $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, тобто $a = \lambda c$, $b = \lambda d$ маємо $w = \lambda$ — теж лінійну функцію.

Далі дістаємо $z = \frac{-wd + b}{wc - a}$ — теж дробово-лінійне перетворення, $w = (ad - bc)/(az + d)^2$.

Введемо позначення $t = cz + d$, $T = \frac{1}{t}$, $w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}T$. Тут перше і останнє — лінійні перетворення, а друге називають *інверсією**), яка в основному й визначає властивості дробово-лінійної функції.

Для вивчення властивостей інверсії розглянемо внутрішність і зовнішність одиничного круга (рис. 15.4). Рівняння кола, яке їх відокремлює,

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

*) Від англ. inverse — зворотний, обернений.

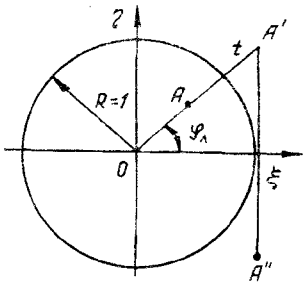


Рис. 15.4

Точки A і A' називаються симетричними відносно цього кола, якщо вони розміщені на одному промені і добуток їхніх модулів дорівнює одиниці, тобто

$$|t_A| \cdot |t_{A'}| = 1.$$

Для A маємо

$$T_A = r_A e^{i\varphi_A}.$$

Розглянемо точку A'', спряжену з точкою A':

$$t_{A''} = r_{A''} e^{i\varphi_A} = r_{A'} e^{-i\varphi_A} =$$

$$= r_{A'} e^{-i\varphi_A} = \frac{1}{r_A e^{i\varphi_A}} = \frac{1}{t_A}.$$

Таким чином, інверсія кожної точки A всередині круга ставить у відповідність точку A'' зовні нього і навпаки, тобто відображає внутрішність одиничного круга на його зовнішність і навпаки, причому точці $t = 0$ відповідає $T = \infty$ (звідси випливає її єдиність). З умови однозначності відображення $w_1 \neq w_2$ випливає $z_1 \neq z_2$.

Знайдемо особливі точки, де відображення не конформне. Зазначимо, що $w' = 0$ при $z = \infty$ і $w = \infty$ при $z = -d/c$.

Інверсія має так звану *кругову властивість*, яка полягає в тому, що коло перетворюється інверсією в коло. Справді, рівняння кола на площині $t = \xi + i\eta$ має вигляд

$$A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + C\eta + D = 0. \tag{15.9}$$

Застосовуючи інверсію, знаходимо

$$t = \xi + i\eta = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \Rightarrow \xi = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \eta = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Підставляючи ξ і η в рівняння кола, маємо

$$A + Bu - Cv + (u^2 + v^2)D = 0,$$

тобто коло інакше розміщене, з іншим радіусом. Зокрема, при $D = 0$ коло (15.9) переходить у пряму $A + Bu + Cv = 0$ (окремий випадок кола за умови $R \to \infty$). Усі ці властивості й має дробово-лінійна функція. ■

15.5.4. Відображення за допомогою степеневої функції

Нехай $w = z^2$, тобто $w = (x + iy)^2 \equiv (x^2 - y^2) + 2ixy$, або $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Знайдемо точки, в яких не буде конформності. Маємо $w' = 2z$. Отже, $w' = 0$ при $z = 0$, $w' = \infty$ при $t = \infty$. З умови однозначності $w_1 \neq w_2$ маємо

$$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) \neq 0,$$

звідки тривіальна умова $z_1 \neq z_2$ і нова умова $z_1 \neq -z_2$. Останній

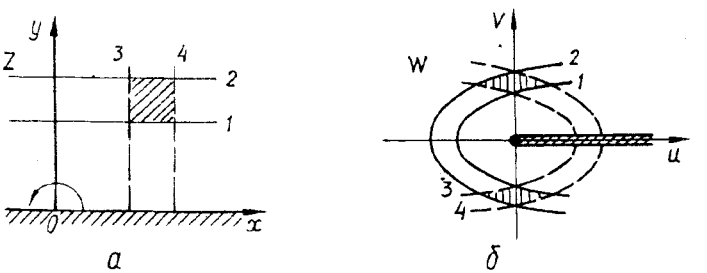


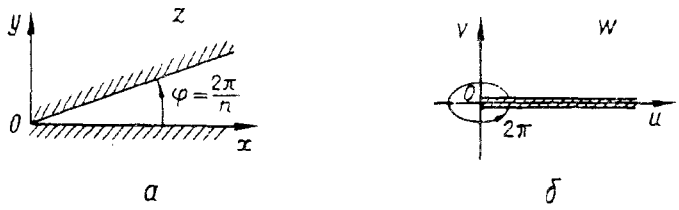
Рис. 15.5

відповідає, наприклад, верхня півплощина $y \geq 0$.

Розглянемо лінії $y = \text{const}$ і з'ясуємо, яким буде їх образ на площині $w = u + iv$. Для цього з виразів u і v вилучимо x. Дістанемо $u \mp = -y^2 + v^2/4y^2$ — рівняння сім'ї парабол. Із збільшенням параметра y їх вершини зміщуються вліво, а кривина зменшується. Вісь абсцис ($y = 0$) перетворюється на площині w в промінь $u \geq 0$. На початку координат конформність порушується: кут в цій точці на площині z дорівнює π, а на площині w дорівнює 2π (рис. 15.5).

Розглянемо лінії $x = \text{const}$ і з'ясуємо, яким буде їх образ на площині w. Для цього з виразів u і v вилучимо y. Дістанемо $u = z^2 - v^2/4x^2$ — рівняння сім'ї парабол, вершини яких при збільшенні параметра x зміщуються вправо, а кривина зменшується. Лінії $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ взаємно ортогональні. Покажемо, що й відповідні їм параболи теж взаємно ортогональні. Для цього маємо $u'_1 = v/2y^2$, $u'_2 = -v/2x^2$, звідки

$u'_1 \cdot u'_2 = -\dfrac{v^2}{4x^2y^2} = -1$, оскільки $v = 2xy$ (пригадайте умову перпендикулярності прямих).



а *б*

Рис. 15.6

У загальному випадку $w = z^n$, $n \geq 2$. Як і раніше, маємо взаємно однозначне відображення внутрішньої частини кута $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ площини z на всю площину w з вилученим променем $u > 0$ (рис. 15.6). При цьому конформність порушується також у точках $z = 0$ і $z = \infty$.

15.5.5. Відображення за допомогою функції Жуковського*)

Функція Жуковського має вигляд

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Оскільки $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, то конформність відсутня в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$. З умови однозначності відображення $w_1 \neq w_2$ маємо

$$(z_2 - z_1)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) \neq 0,$$

звідки, крім тривіальної умови $z_1 \neq z_2$, маємо нову $z_1 \cdot z_2 = 1$. Останній умові відповідає внутрішня чи зовнішня частина одиничного круга (рис. 15.7).

Відокремлюючи у функції Жуковського дійсну й уявну частини, дістаємо

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi,$$

звідки бачимо, що коло $r = 1$ площини z переходить у відрізок $[-1, 1]$ площини w. Кола $r = R > 1$ переходять в еліпси

*) М. Є. Жуковський (1847—1921) — російський теоретик літакобудування.

$$\frac{4u^2}{(R + 1/R)^2} + \frac{4v^2}{(R - 1/R)^2} = 1,$$

які прямують до кіл при $R \to \infty$. Промені $\varphi = \text{const}$ на площині w стають гіперболами

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1,$$

ортогональними розглянутим еліпсам.

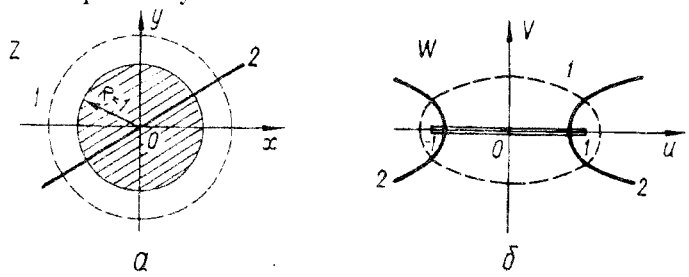


Рис. 15.7

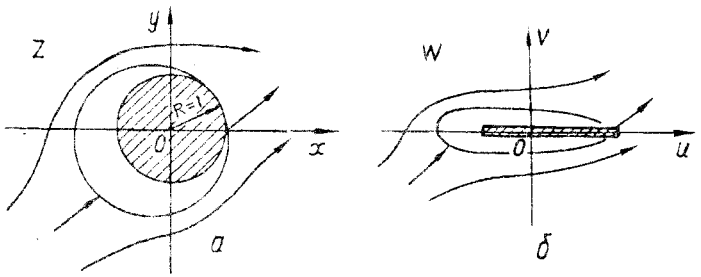


Рис. 15.8

Жуковський використав розглянуту функцію так. Він побудував коло $r = R > 1$, дотичне до кола $R = 1$ (рис. 15.8), потім побудував зовнішнє обтікання першого кола плоско-паралельним потоком рідини. Застосувавши далі розглянуту функцію, він дістав обтікання крила плоско-паралельним потоком, на основі чого визначив його підйомну силу і оцінив аеродинамічну якість.

Виконавши великий обсяг розрахунків, Жуковський знайшов ряд перспективних профілів, які за аеродинамічними якостями були кращими за профілі американських аеродинаміків, отриманих в результаті багатьох тисяч продувок їхніх моделей в аеродинамічній трубі.

Згадаймо Ейнштейна, який сказав, що нема нічого практичнішого за добру теорію.

РОЗДІЛ 16

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

16.1. ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ В ГІДРАВЛІЦІ

16.1.1. Плоске поле швидкості рідини. Функція току плоскої течії

Розглянемо двовимірне поле швидкостей

$$V = V_x\bar{i} + V_y\bar{j}$$

з лініями потоку

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{V_y}; \quad -V_y dx + V_x dy = 0. \tag{16.1}$$

Зміну поля характеризує ротор

$$\overline{\text{rot}}\ \bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{V} = \bar{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right),$$

зв'язаний з циркуляцією швидкості

$$\Gamma = \int_L \bar{V}\, d\bar{l} = \int_L V_x\, dx + V_y dy$$

формулою Ґріна

$$\iint_D \overline{\text{rot}}\ \bar{V}\, d\bar{s} = \int_L \bar{V}\, d\bar{l}$$

і дивергенцією швидкості

$$\text{div}\ \bar{V} = \bar{\nabla}\,\bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y},$$

зв'язаної в свою чергу з витратою рідини

$$Q = \int_L \bar{\nabla}\,\bar{n}\, dl = \int_L -V_y dx + V_x dy \tag{16.2}$$

за допомогою формули Остроградського—Ґаусса

$$Q = \iint_D \text{div}\ \bar{V}\, ds = \int_L \bar{V}\,\bar{n}\, dl.$$

Нехай в області D немає джерел і витоків рідини. Тоді, як відомо, виконується рівність (рівняння нерозривності нестисливої рідини)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (\operatorname{div} \overline{V} = 0),$$

або

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial (-V_y)}{\partial y}. \tag{16.3}$$

Порівнюючи (16.1) і (16.3) бачимо, що ліва частина (16.1) є повним диференціалом деякої функції $\psi(x, y)$, тобто

$$-V_y dx + V_x dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi.$$

Справді, з останнього виразу маємо

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{16.4}$$

Диференціюючи ці вирази, знаходимо

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \, \partial x}, \quad -\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y}.$$

Вважаючи, що друга мішана похідна не залежить від порядку диференціювання, знову дістаємо (16.3).

Зазначимо, що в разі існування функції $\psi(x, y)$ для задання поля швидкостей не треба задавати дві функції V_x і V_y, а тільки одну ψ, а V_x і V_y знайти за допомогою (16.4). При цьому спрощується рівняння лінії потоку $d\psi = 0$, звідки $\psi(x, y) = C$, тобто функція потоку є сталою на даній лінії потоку. При переході до іншої лінії потоку змінюється C. Звідси й назва ψ — функція потоку.

З'ясуємо її гідравлічний зміст, для чого визначимо витрату рідини Q між двома сусідніми лініями потоку. На основі (16.2) маємо (рис. 16.1).

$$Q = \int_L -V_y dx + V_x dy =$$

$$= \int_A^B d\psi = \psi(B) - \psi(A).$$

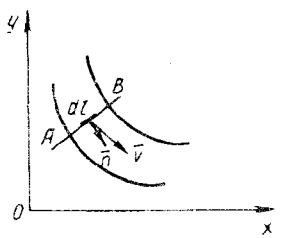


Рис. 16.1

Отже, функція потоку має таке гідравлічне тлумачення: вона дорівнює витраті рідини між даною лінією потоку й деякою іншою, взятою за початок відліку.

16.1.2. Потенціал течії. Комплексний потенціал

Нехай в області D поля відсутні завихрення, тобто $\overline{\text{rot}}\ \overline{V} = \overline{0}$. Тоді

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y},$$

а також

$$\overline{V} = \overline{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\overline{j} = V_x\overline{i} + V_y\overline{j},$$

звідки

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{16.5}$$

Таким чином, наявність потенціалу течії φ також спрощує задання поля швидкостей: задають тільки φ, а V_x, V_y визначають за формулою (16.5).

У подальшому вимагатимемо одночасно, щоб $\text{div}\,\overline{V} = 0$, $\overline{\text{rot}}\ \overline{V} = \overline{0}$. Тоді одночасно виконуватимуться (16.4) і (16.5). Вилучивши з них V_x і V_y, дістанемо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

тобто умови Коші—Рімана, які виражають той факт, що функція

$$w = \varphi + i\psi$$

аналітична, тобто існує

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x - iV_y = V.$$

При цьому w називають комплексним потенціалом, а V — комплексно спряженою швидкістю течії. Розглянемо приклади комплексних потенціалів.

П. 1. Плоско-паралельна течія визначається найпростішим потенціалом

$$w = az.$$

Якщо a дійсне, то $w = \varphi + i\psi = ax + iay$. Лінії потоку — прямі $\psi = ay = C$, плоско-паралельні осі Ox, лінії потенціалу — прямі $\psi = ax = C$, паралельні осі Oy. Комплексно-спряжена швидкість течії $\frac{dw}{dz} = a = V_0$, звідки $V_x = a_1$, $V_y = 0$ (рис. 16.2). Якщо $a = V_0 e^{i\alpha}$, то маємо потік, повернутий на кут α (рис. 16.3).

П. 2. Джерело, розміщене в початку координат, має комплексний потенціал

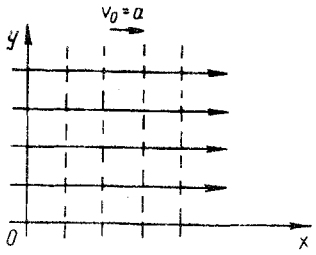


Рис. 16.2

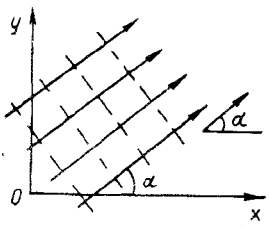


Рис. 16.3

$$w = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln z,$$

де потужність джерела Q — ($м^2/с$) — дійсне число. Маємо

$$w = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{Q}{2\pi} \ln r + i\frac{Q\theta}{2\pi},$$

звідки дістаємо, що лінії потоку $\psi = \frac{Q\theta}{2\pi} = C$ — промені, а лінії потенціалу $\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$ — кола. При $Q > 0$ маємо джерело, при $Q < 0$ — витік. Радіальна складова швидкості

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{Q}{2\pi r};$$

дотична

$$V_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial Q} = 0.$$

П. 3. Завихрення, розміщене в початку координат, має комплексний потенціал

$$w = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

де Γ — інтенсивність завихрення. Якщо порівняти з випадком джерела (П. 2), то тут лінії потоку і потенціалу чергуються. Радіальна й дотична швидкості є відповідно

$$V_r = 0, \quad V_\Theta = \Gamma/2\pi i.$$

Знайдемо циркуляцію швидкості вздовж лінії потоку

$$\Gamma^* = \int_l \bar{V}\, dz = \frac{\Gamma}{2\pi i} \int \frac{dz}{z} = \left\{ z = re^{it} \right\} = \Gamma.$$

Отже, інтенсивність завихрення дорівнює циркуляції швидкості вздовж довільної лінії потоку.

Джерело й завихрення — це так звані логарифмічні особливості. Якщо вони розміщені не в початку координат, а в точці $z = z_0$, то в П. 2 і П. 3 маємо відповідно

$$w = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0), \quad W = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0).$$

Оскільки рівняння Лапласа лінійне, то з його розв'язків (аналітичних ФКЗ) можна скласти лінійні довільні комбінації, які теж будуть його розв'язками, що становлять комплексні потенціали нових течій.

П. 4. Розглянемо комбінацію джерела і витоку різної інтенсивності відповідно в точках $z = 0$ і $z = \Delta z$.

Комплексний потенціал такої комбінації

$$w = \frac{Q}{2\pi}(\ln(z + \Delta z) - \ln z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right).$$

Наближуватимемо ці особливості ($\Delta z \to 0$), але так, щоб значення $Q\Delta z = m$ було сталим

$$\lim_{\substack{Q\to\infty \\ \Delta z\to 0}} w = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{m}{2\pi\Delta z}\ln\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{m}{2\pi z}\left(\frac{1 + \Delta z}{z}\right)^{z/\Delta z} = \frac{m}{2\pi z}.$$

Отримана комбінація називається *диполем**) (рис. 16.4). Тут m — момент диполя. Лінії потоку й потенціалу

$$\psi = \frac{mx}{2\pi(x^2 + y^2)} = C, \quad \varphi = -\frac{my}{2\pi(x^2 + y^2)} = C$$

є сім'єю ортогональних кіл. Якщо диполь зміщений у точку $z = z_0$, то

$$w = m/2\pi(z - z_0).$$

Змістимо диполь у нескінченно віддалену точку за допомогою інверсії $z = 1/t$. Дістанемо $w = \frac{m}{2\pi}t$ — комплексний потенціал плоско-паралельного потоку, тобто останній породжується розміщеним у нескінченності диполем.

Розглянуті вище особливості називають елементарними. Комбінуючи їх, можна побудувати модель будь-якої течії, яка нас цікавить.

П. 5. Вивчити течію в меридіанній площині вхідної коробки вентилятора, призначення якого — повернути потік на 90° від вентиляційного каналу до всмоктування робочого колеса.

Рівномірний рух потоку в каналі зімітуємо плоско-паралельним потоком (П. 1), а рівномірний вхід потоку в колесо — рівномірно розподіленим витоком на $(-1, 1)$, комплексний потенціал якого (рис. 16.5)

$$w = \frac{q}{2\pi}\int_{-1}^{1}\ln(z - \zeta)\,d\zeta,$$

де q — інтенсивність розподіленого витоку, яка дорівнює $q = \frac{Q}{l} = \frac{Q}{2}$. Інтегрувавши, маємо

$$w = \frac{q}{2\pi}((z - 1)\ln(z - 1) - (z + 1)\ln(z + 1) + z).$$

---

*) Від грецьк. «диполос» — двополюсник.

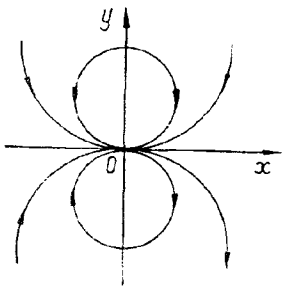


Рис. 16.4

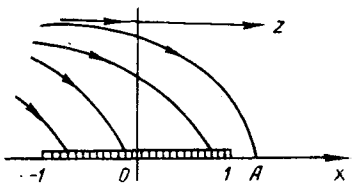


Рис. 16.5

Комплексному потенціалу плоско-паралельної течії надамо вигляду $w = v_0 z$, де v_0 — швидкість незбуреного потоку на нескінченності.

Додавши два останні вирази для w, дістанемо

$$w = v_0 z + \frac{q}{2\pi}((z-1)\ln(z-1) - (z+1)\ln(z+1) + 2).$$

16.1.3. Задача Жуковського

Розглянемо циркуляційне обтікання одиничного кола плоско-паралельним потоком, для чого виконаємо суперпозицію трьох течій: плоско-паралельної, від диполя і від завихрення, розміщених у початку координат. При цьому дістанемо

$$w = v_0\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln z.$$

Відокремимо дійсну і уявну частини w:

$$\varphi = v_0\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}, \quad \psi = v_0\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r.$$

Диференціюючи φ, знайдемо радіальну й дотичну складові швидкості потоку

$$V_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = V_0\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta, \quad V_0 = \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = -V_0\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}.$$

На колі $r = 1$ радіальна складова швидкості $V_r = 0$, тобто рідина через коло не перетікає, отже, коло є лінією потоку. Справді, з виразу для ψ маємо $\psi = 0$ при $r = 1$.

Розглянемо швидкість обтікання кола радіуса $r = 1$. З виразу для v_θ маємо

$$v_\theta|_{r=1} = -2v_0\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Розглянемо чотири можливі випадки.

І в и п а д о к. $\Gamma = 0$, $V_\theta = -2V_0\sin\theta$. Швидкість обтікання перетворюється в нуль у точках A і B, де $\theta_A = \pi$, $\theta_B = 0$ (рис. 16.6). Тут відбуваються розділення і злиття ліній потоку.

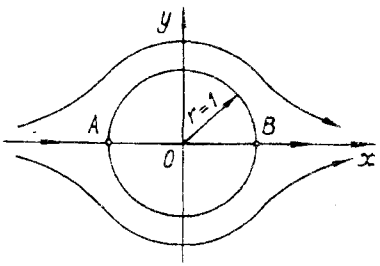


Рис. 16.6

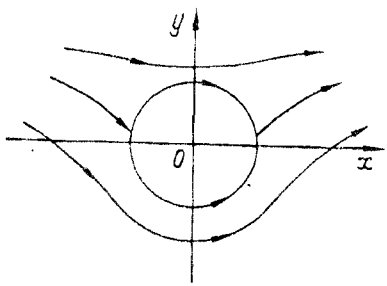


Рис. 16.7

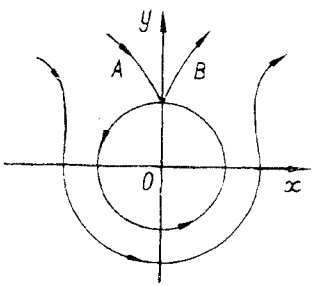


Рис. 16.8

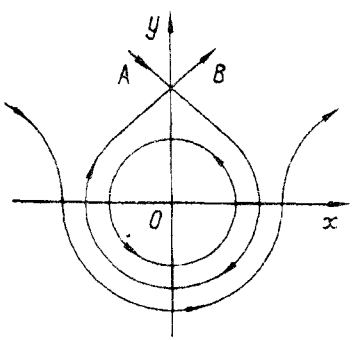


Рис. 16.9

ІІ в и п а д о к. $0 < \Gamma < 4\pi V_0$, $V_\theta = -2V_0\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}$. Тут також маємо дві критичні точки A і B, симетричні відносно осі Oy і зміщені вверх (рис. 16.7). Координати їх знаходимо з рівності

$$\sin\theta_{A,B} = \Gamma/4\pi V_0 < 1.$$

III в и п а д о к. $\Gamma = 4\pi v_0$. У цьому випадку $\sin\theta_{A,B} = 1$, $\theta_A = \theta_B = \pi/2$, тобто обидві точки A і B зливаються в одну (рис. 16.8).

IV в и п а д о к. $\Gamma > 4\pi V_0$. У цьому випадку особлива точка відривається від одиничного кола і зміщується вверх у потік, а навколо тіла, яке обтікається, утворюється сильний циркулюючий рух приєднаної маси рідини (рис. 16.9).

Важливою задачею є визначення сили тиску потоку на коло, яке обтікається. Проектуючи цю силу на осі координат, маємо

$$X = \int_0^{2\pi} \rho \cos\theta \, d\theta, \quad Y = \int_0^{2\pi} \rho \sin\theta \, d\theta,$$

де p — тиск у потоці. Для обчислення інтеґрала скористаємося рівнянням Бернуллі*)

$$\rho + \rho^2 \frac{V^2}{2} = C,$$

де ρ — густина рідини. Підставляючи p у вирази для X і Y, дістанемо $X = 0$, $Y = \rho V_0 \Gamma$. Останнє рівняння виражає теорему Жуковського про підйомну силу крила. Як бачимо, підйомна сила пропорційна до швидкості потоку, густини рідини і циркуляції швидкості навколо профілю. Якщо $\Gamma = 0$, то $X = Y = 0$, $\overline{P} = \overline{0}$, тобто жодні сили не діють на тіло. Такий результат, який не відповідає дійсності, називається *парадоксом Ейлера—Д'Аламбера*, він свідчить про обмеженість моделі ідеальної рідини, яка поводить себе як реальна, крім одного винятку: в ній відсутні втрати енергії, а саме втрата енергії обумовлює наявність сили опору X. Щодо складової Y, то теорема Жуковського визначає її з великою точністю.

16.1.4. Комплексні потенціали й відображення

При дослідженні різних видів течій найважливішими є такі дві задачі.

Задача 1. Відомі комплексні потенціали $w(t)$ і $w(z)$ течій на площинах t і z. Треба знайти відображаючу функцію $z(t)$ або $t(z)$.

Оскільки шукаємо відповідність між t і z, то тим самим стверджується, що течії тотожні одна одній, тобто $w(z) = w(t)$. Розв'язуючи останнє співвідношення відносно t або z, знаходимо ці функції.

П. 1. Знайти відображення, яке переводить кільце в смугу (рис. 16.10).

Оскільки у випадку джерела лінії потенціалу є кола (дві сусідні лінії утворюють кільце), а у випадку плоско-паралельної течії — прямі (дві сусідні лінії утворюють смугу), то, прирівнюючи комплексні потенціали джерела і плоско-паралельного потоку, опустивши числові коефіцієнти, дістанемо функцію $t = \ln z$, яка відображає кільце на смугу. Ця функція відіграє велику роль у теорії турбомашин, де за її допомогою результати дослідження

*) Д.Бернуллі (1700—1782) — ще один представник відомої сім'ї вчених.

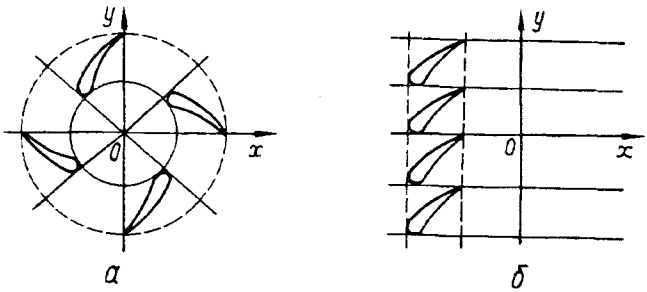


Рис. 16.10

обтікання лопаток відцентрових машин можна перенести на осьові машини (рис. 16.10). Для оберненого переходу маємо $z = e^t$.

Задача 2. Задано комплексний потенціал течії $w(t)$ на площині t і функція $t(z)$, яка зв'язує площини z і t. Знайти комплексний потенціал течії $w(z)$ на площині z.

Підставивши $t(z)$ у $w(t)$, матимемо

$$w(t) = w(t(z)).$$

П. 2. Побудувати модель обтікання внутрішньої частини кута ABC з розкриттям $\theta_B = \pi/n$, взявши за основу плоско-паралельний потік на верхній півплощині t (рис. 16.11).

Звернемо увагу на те, що площини t і z зв'язує степенева функція

$$t = z^n.$$

Комплексний потенціал течії на площині t дорівнює

$$w(t) = V_0 t.$$

З двох останніх рівностей дістаємо

$$w(z) = w(t(z)) = V_0 z^n.$$

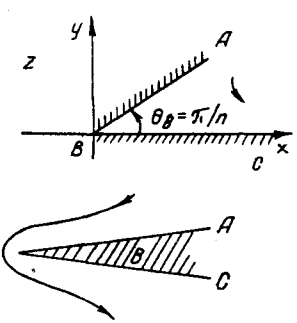


Рис. 16. 11

Знайдемо комплексно-спряжену швидкість течії

$$\overline{V}(z) = \frac{dw}{dz} = V_0 n z^{n-1}. \qquad (16.6)$$

Обчислимо значення швидкості у вершині кута — точці B

$$\overline{V}_B = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n > 1,\ \theta_B < \pi; \\ V_0, & \text{якщо } n = 1,\ \theta_B = \pi; \\ \infty, & \text{якщо } n < 1,\ \theta_B > \pi. \end{cases}$$

Перший результат означає, що частина рідини, яка знаходиться в точці B, одночасно повинна перебувати у двох рухах — вздовж AB і вздовж BC. Для збереження своєї

цілісності вона повинна бути нерухомою ($V_0 = 0$). У другому результаті B — ординарна точка осі абсцис, вздовж якої потік рухається зі сталою швидкістю V_0.

Найцікавішим є третій результат (рис. 16.11): чому обтікання загострення ідеальною рідиною проходить з нескінченною швидкістю. Справа в тому, що вздовж лінії потоку зберігається циркуляція швидкості $\Gamma = 2\pi rV$, а радіус кривини r стає нескінченно малим, тому швидкість стає нескінченно великою.

У реальній рідині швидкість V не може стати дуже великою, оскільки при цьому сильно падає тиск і рідина закипає, її суцільність розривається, настає кавітація (рис. 16.12). Через те загострення слід плавно згладжувати.

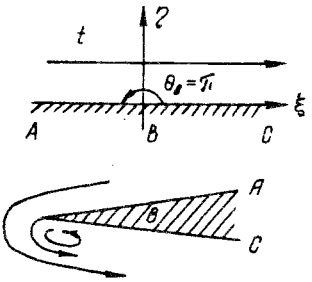


Рис. 16.12

У багатьох випадках вивчати течію на площині z зручніше, знаходячись на площині t. З цією метою перетворимо (16.6), використовуючи той факт, що $t = z^n$. Маємо

$$\overline{V}_B = nV_0 t^{1-1/n} = mt^{1-\theta_B/\pi} = mt^{1-\alpha/\pi}, \qquad (16.7)$$

де $m = nV_0$, $\alpha = \theta_B$.

16.1.5. Формула Крістофеля—Шварца*)

Теорема Рімана стверджує, що якими б не були однозв'язні області D і D^* з будь-якими заданими точками $z_0 \in D$ і $w_0 \in D^*$ і числом $\alpha_0 \in \mathbf{R}$, існує єдине конформне відображення $w = f(z)$ D на D^* таке, що

$$f(z_0) = w_0, \quad \arctan'(z_0) = \alpha_0.$$

Знаходження такого відображення не становить труднощів, якщо відомі комплексні потенціали. Якщо ж комплексні потенціали невідомі, то це питання залишається відкритим. Винятком є відображення верхньої півплощини t на внутрішність многокутника площини z так, що його вершинам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ з кутами при них $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ відповідають точки $a_1, a_2, \ldots a_n$ осі абсцис площини t.

Згідно з (16.7) швидкість в околі вершини може бути описана так:

$$\overline{V}_{A_k} = m_k(t - a_k)^{1-\alpha_k/\pi}.$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(z) = \overline{V}(z)/(t - a_1)^{1-\alpha_1/\pi} \ldots (t - a_k)^{1-\alpha_k/\pi} \ldots (t - a_n)^{1-\alpha_n/\pi}. \qquad (16.8)$$

*) Е.Б. Крістофель (1829—1900) і Г.А.Шварц (1843—1921) — німецькі математики.

Вона ніде не набуває значення нуля чи нескінченності, оскільки при $t \to a_k$ однакові особливості в чисельнику й знаменнику компенсуються. За теоремою Ліувілля, ця функція дорівнює сталій

$$\varphi(z) = C = \frac{V_0}{M} .$$

У верхній півплощині t маємо плоско-паралельну течію з комплексним потенціалом $w(t) = V_0$. Обчислимо

$$\overline{V}(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = V_0 \frac{dt}{dz} .$$

Два останні вирази (для V і φ) підставимо в (16.8), в результаті чого маємо

$$\frac{V_0 dt/dz}{(t - a_1)^{1-\alpha_1/\pi} \ldots (t - a_n)^{1-\alpha_n/\pi}} = \frac{V_0}{M} ,$$

звідки

$$dz = M(t - a_1)^{(\alpha_1/\pi)-1} \ldots (t - a_n)^{\left(\frac{\alpha_n}{\pi}\right)-1} dt.$$

Зінтеґрувавши останній вираз, дістанемо

$$z = M \int (t - a_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \ldots (t - a_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} dt + N. \qquad (16.9)$$

Це є формула Крістофеля—Шварца.

Оскільки при відображенні можна довільно задати початок координат і орієнтацію площини (параметр α_0 в теоремі Рімана), то можна довільно задати три дійсні параметри. Як правило, ці три ступеня свободи використовують для задання будь-яких трьох параметрів a_k. Якщо вважати $a_k \to \infty$, то відповідна дужка у формулі Крістофеля—Шварца зникає і знаходження інтеґрала спрощується.

Формула Крістофеля—Шварца може бути застосована не тільки до замкнених (звичайних) многокутників, а й до узагальнених (незалежних), треба тільки, щоб сторони були прямими, а сума кутів задовольняла формулу Ейлера

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \pi(n - 2). \qquad (16.10)$$

П. 1. Знайти відображення верхньої півплощини на внутрішність смуги завширшки H.

Розв'язання. Згідно з рівністю (16.10) маємо, що смуга — це «двокутник» з кутами при вершині $\alpha_A = \alpha_B = 0$. Скористаємося рівністю (16.9) і візьмемо три точки відображення так: $t_A = -1$, $t_B = 1$, $t_C = \infty$.

Останній точці на площині відповідає точка $z_C = iH$. Маємо

$$z = M \int (t-1)^{-1}(t+1)^{-1}dt + N = \frac{M}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + N.$$

Поставимо умову, щоб $z(0) = 0$. Тоді $N = 0$. Вважаючи, що $t \to \infty$, знаходимо

$$iH = \frac{1}{2}M \ln(-1) = \frac{1}{2}M \ln e^{i\pi} = \frac{1}{2}Mi\pi,$$

звідки $M = 2H/\pi$.
Отже,

$$z = H\pi^{-1} \ln \frac{1-t}{1+t}.$$

П. 2. Знайти відображення верхньої півплощини на півсмугу завширшки H.
Р о з в ' я з а н н я. Оскільки півсмуга — це узагальнений трикутник з кутами $\alpha_A = \alpha_B = \frac{\pi}{2}$ $\alpha_C = 0$, які задовольняють рівність (16.10), то скористаємося (16.9). Три вільні параметри виберемо так: $t_A = 0$, $t_B = \infty$, $t_C = 1$. Крім того, $z_A = t_A = 0$. Тоді (див. 16.9)

$$z = M \int t^{-1/2}(t-1)^{-1}dt + N = M \ln \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} + N.$$

Оскільки $z(0) = 0$, то $N = 0$ із співвідношення $z(\infty) = iH$ маємо $M = H/\pi$. Остаточно

$$z = \frac{H}{\pi} \ln \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}.$$

16.2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

16.2.1. Перетворення Лапласа

Операційне числення — це ще одне ефективне застосування ФКЗ. В принципі про операційне числення йшлося, коли розглядалося перетворення Фур'є і його застосування до розв'язування рівнянь математичної фізики. Проте перетворення Фур'є має досить обмежений діапазон застосувань внаслідок жорсткої вимоги абсолютної інтегровності відповідної функції на всій числовій осі, тобто $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = A$.

Інше інтегральне перетворення, вперше розглянуте Лапласом, більш універсальне, але честь відкриття операційного числення належить не Лапласу. Операційне числення (на базі оператора Лапласа) відкрив Хевісайд, який застосував цей апарат для розробки питань «працездатності» трансатлантичного телеграфно-телефонного кабеля, що з'єднав Америку і Європу наприкінці XIX ст.

Наведемо основні означення.

О. *Оригіналом за Лапласом називається функція дійсної змінної $f(t)$, яка набуває комплексних значень і задовольняє такі умови:*

1) *кусково-неперервна разом зі своїми похідними на числовій осі;*

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) $\exists\, M, S_0$: $|f(t)| < Me^{S_0 t}$.

До речі, функції, які задовольняють умову 3), називають функціями *експоненціального росту.*

О. *Перетворенням за Лапласом оригіналу $f(t)$ називається інтегральний оператор Лапласа* ($p = \sigma + iS$)

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (16.11)$$

Зауваження. Умова $\sigma > 0$ забезпечує збіжність невластивого інтеграла в (16.11).

В операційному численні застосовують такі позначення:

$$F(p) = L((f(t)); \; f(t) \to F(p), \; f(t) = F(p).$$

16.2.2. Елементарні властивості оператора Лапласа. Зображення деяких функцій

1. *Лінійність*

$$(L(f_1) = F_1, \; L(f_2) = F_2) \Rightarrow (L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F_1 + c_2 F_2).$$

Властивість 1 притаманна всім інтегралам.

2. *Подібність*

$$(L(f(t) = F((p), \; a > 0) \Rightarrow \left(L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)\right).$$

■ $L((f(at)) = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)\, dt = \left\{\begin{matrix} at = u \\ a\, dt = du \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-p\frac{u}{a}} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.■

3. *Зміщення*

$$(L(f(t)) = F(p)) \Rightarrow (L(e^{-\alpha t} f(t)) = F(p + \alpha)).$$

■ $L(e^{-\alpha t} f(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)} f(t)\, dt = F(p + \alpha)$.■

4. *Запізнення* ($t_0 > 0$)

$$(L(f(t)) = F(p)) \Rightarrow (L(f(t - t_0) = e^{-pt_0} F(p)).$$

■ За означенням оригіналу $f(t - t_0) = 0$ при $t - t_0 < 0$, тобто при $t < t_0$ Ураховуючи, що $\int_0^{t_0} \ldots = 0$, маємо

$$L(f(t - t_0)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0)dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t - t_0)dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0)dt =$$

$$= \begin{Bmatrix} t - t_0 = u \\ dt = du \end{Bmatrix} = \int_0^{\infty} e^{-p(u + t_0)} f(u)du = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-pt_0} F(p).■$$

За допомогою означення оператора Лапласа і його властивостей знайдемо зображення деяких функцій.

1°. Одинична функція Хевісайда (писатимемо $f(t) = 1$)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

$$L(\eta(t)) = L(1) = \int_0^{\infty} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

2°. $f(t) = e^t$. Маємо

$$L(e^t) = \int_0^{\infty} e^t e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-1)}dt = \frac{1}{p - 1}.$$

3°. $f(t) = e^{at}$.

За властивістю 2 маємо $L(e^{at}) = \frac{1}{p - a}$.

4°. $f(t) = \sin at$.

Оскільки $\sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})$, то, користуючись зображенням a^{at} і лінійністю оператора Лапласа, маємо

$$L(\sin at) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - ai} - \frac{1}{p + ai}\right) = \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Міркуючи, як і вище, користуючись іншими властивостями оператора Лапласа, знаходимо

$$L(\cos at) = p/(p^2 + a^2), \quad L(\mathrm{ch}at) = p/(p^2 - a^2),$$

$$L(\mathrm{sh}at) = a/(p^2 - a^2), \quad L(e^{\alpha t}\sin at) = a/((p - \alpha)^2 + a^2).$$

$$L(e^{\alpha t}\cos at) = (p - \alpha)/((p - \alpha)^2 + a^2),$$

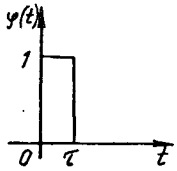


Рис. 16.13

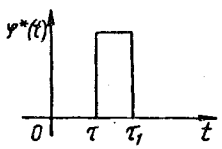


Рис. 16.14

$$L(\sin(t-\varphi)) = e^{-\varphi p}/(p^2+1),\ \ L(\cos(t-\varphi)) = pe^{-\varphi p}/(p^2+1).$$

Крім того, інтегруючи частинами і беручи до уваги $L(1)$, маємо

$$L(t^n) = n!p^{-n-1},\ \ n \in \mathbf{N}.$$

П. Для того, щоб прослідкувати за характером проходження сигналу в кабелі, Хевісайду необхідно було описати зображення стандартних сигналів азбуки Морзе (крапка і тире). Для цього він ввів функцію (рис. 16.13)

$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in (0, \tau); \\ 0, & \text{якщо } t \overline{\in} (0, \tau) \end{cases}$$

і дістав

$$L(\varphi) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p\tau} = \left(1 - e^{-p\tau}\right)/p.$$

Ще одна стандартна функція Хевісайда (рис. 16.14)

$$\varphi^*(t) = \eta(t-\tau) - \eta(t-\tau_1) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in (\tau, \tau_1); \\ 0, & \text{якщо } t \overline{\in} (\tau, \tau_1) \end{cases}$$

має зображення

$$L(\varphi^*) = \frac{1}{p}e^{-p\tau} - \frac{1}{p}e^{-p\tau_1} = (e^{-p\tau} - e^{-p\tau_1})/p.$$

16.2.3. Основні властивості оператора Лапласа

1. *Зображення похідної.* Якщо $L(f) = F(p)$, то

$$L(f') = pF(p) - f(0).$$

$$\blacksquare\ L(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-pt}f'(t)\,dt = \left\{\begin{matrix} u = e^{-pt};\ du = -pe^{-pt}dt \\ f'(t)dt = dv;\ v = f(t) \end{matrix}\right\} =$$

$$= e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt = f(0) + pF(p).\ \blacksquare$$

Тут використано те, що $f(t)$ має експоненціальний ріст. Застосовуючи цю формулу повторно, маємо

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - (p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)).$$

2. *Диференціювання за параметром*

$$(L(f(t, x)) = F(p, x) \Rightarrow (L(f'_x(t, x)) = F'_x(p, x)).$$

Останнє випливає з формули Лейбніца диференціювання інтеґрала від параметра.

3. *Диференціювання зображення. Якщо* $L(f(t)) = F(p)$, то $F'(p) = L(-tf(t))$, що очевидно.

Покажемо тепер деякі застосування властивості 2:

$$L(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}, \ldots, L(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}},$$

$$L(t\cos at) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}, \quad L(t\sin at) = \frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}.$$

16.2.4. Згортка функцій і інтеграл Дюамеля*)

О. *Згорткою функцій* $f(t)$ і $\varphi(t)$ *називається інтеграл*

$$(f * \varphi) = \int_0^t f(\tau)\, \varphi(t - \tau)\, d\tau.$$

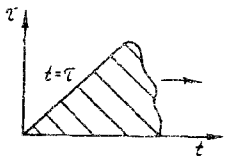


Рис. 16.15

Операція згортання функцій має такі властивості:

1. $f * \varphi = \varphi * f$;

2. Якщо f і φ — оригінали, то $f * \varphi$ — також оригінал.

Т. *Якщо* $L(f(t)) = F(p)$, а $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$, то

$$L(f * \varphi) = F(p)\Phi(p).$$

$$\blacksquare\ L(f(t)) * \varphi(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f(\tau)\varphi(t - \tau)\, d\tau\right) dt =$$

$$= \iint_D e^{-pt} f(\tau)\varphi(t - \tau)\, dt\, d\tau,$$

де область D в подвійному інтеґралі визначається нерівностями $0 \le \le t < \infty$, $0 \le \tau \le t$ (рис. 16.15).

*) Дюамель (1797—1872) — французький математик.

Запишемо подвійний інтеґрал через повторний, але вже в іншому напрямі (заміну виконуємо у внутрішньому інтеґралі):

$$\iint\limits_D e^{-pt} f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^\infty f(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^\infty e^{-pt}\varphi(t-\tau)\,dt =$$

$$\left\{\begin{matrix} t-\tau = u \\ dt = du \end{matrix}\right\} = \int\limits_0^\infty f(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty e^{-p(u+\tau)}\varphi(u)\,du =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty e^{-pu}\,\varphi(u)\,du = F(p)\cdot\Phi(p).\ \blacksquare$$

Наслідок *(зображення інтеґрала). Якщо* $L(f(t)) = F(p)$, *то* $L(\int\limits_0^\infty f(\tau)\,d\tau) = \frac{1}{p}F(p)$.

$$\blacksquare\ L(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau) = L(f*1) = L(f)\cdot L(1) = \frac{1}{p}F(p).\ \blacksquare$$

В інженерних застосуваннях операційного числення зустрічається спеціальний випадок теореми про зображення згортки, а саме:

$$pF(p)\Phi(p) = (pF(p) - f(0))\Phi(p) - f(0)\Phi(p) = L(f'*\varphi) +$$

$$+ f(0)\varphi(t) = \int\limits_0^t f'(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau + f(0)\,\varphi(t).$$

Інтеґрал у цій формулі називають *інтеґралом Дюамеля.*

П. Знайти оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}.$$

Розв'язання. Користуємося попередньою теоремою

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p-2} = L(e^t * e^{2t}) = L(\int\limits_0^t e^t e^{2(t-\tau)}d\tau) =$$

$$= L(e^{2t}\int\limits_0^t e^{-\tau}d\tau) = L(e^{2t}(1-e^{-t})).$$

Отже,

$$f(t) = e^{2t}(1-e^{-2t}).$$

16.2.5. Дельта–функція Дірака*)

У деяких задачах фізики досить зручно розглядати короткочасно діючі сили як миттєво прикладені, але такі, які мають скінченний імпульс. Це можна зробити за допомогою дельта-функції Дірака, який теоретично обґрунтував наявність античастинок. Така функція неелементарна і ввести її можна так (рис. 16.16).

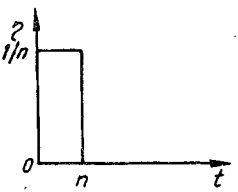


Рис. 16.16

Розглянемо допоміжну функцію

$$\eta_1(t, h) = \frac{1}{h}(\eta(t) - \eta(t - h))$$

і знайдемо її зображення:

$$L(\eta_1(t, h)) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\, e^{-hp}\right) = \frac{1}{hp}\left(1 - e^{-hp}\right).$$

Нехай $h \to 0$. Тоді

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \eta_1(t, h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{hp}\left(1 - e^{-hp}\right) = 1,$$

де δ — вказана функція.

Використовуючи результат, пов'язаний із зображенням інтеґрала й означення $\delta(t)$, дістанемо

$$L\left(\int_0^t \delta(t)\, dt\right) = L\left(\int_{-\infty}^t \delta(t)\, dt\right) = \frac{1}{p}.$$

Звідси

$$\int_{-\infty}^t \delta(t)\, dt = \eta(t).$$

Якщо імпульс прикладено в момент τ, то за властивістю запізнення маємо

$$L((\delta(t - \tau)) = e^{-p\tau}.$$

16.2.6. Теорема обертання

Т. *Якщо* $L(f(t)) = F(p)$, *то*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt}\, dt.$$

*) Дірак (1902—1984) — англійський фізик.

Цю теорему подаємо без доведення.

Останній інтеґрал береться вздовж нескінченної вертикальної прямої $\sigma = \gamma$ в області збіжності перетворення Лапласа. Можна вважати, що кінці цієї прямої, сполучаючись у нескінченності, залишають півплощину, де збігається інтеґрал, про який йдеться у теоремі. Тоді, за теоремою про лишки, маємо

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p)e^{pt}dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\,(F(p)e^{pt},\ a_k),$$

де a_k — особливі точки $F(p)$. З двох останніх формул дістаємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\,(f(p)e^{pt},\ a_k).$$

Застосувавши формулу для знаходження лишку, матимемо

$$\operatorname{Res}(F(p)e^{pt},\ a_k) = \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \to a_k} ((p - a_k)^{n_k} F(p)e^{pt})^{n_k - 1}.$$

16.2.7. Розв'язування диференціальних, інтеґральних і інтеґро-диференціальних рівнянь та систем

Розглянемо розв'язування задачі Коші на прикладі лінійного неоднорідного рівняння

$$x'' + a_1x' + a_2x + f(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ x'(0) = x'_0.$$

Вважатимемо, що $x(t)$ і $f(t)$ — оригінали і $L(x(t)) = F(p)$, $L(f(t)) = \Phi(p)$. Застосуємо оператор Лапласа до умови. Тоді

$$p^2F(p) - px_0 - x'_0 + a_1(pF(p) - x_0) + a_2F(p) = \Phi(p),$$

звідки

$$F(p) = (\Phi(p) + px_0 + x'_0 + a_1x_0)/(p^2 + a_1p + a_2).$$

Далі знаходимо оригінал за $F(p)$, користуючись таблицею зображень чи теоремою обертання.

Велику роль у науці відіграють інтеґральні рівняння, в яких шукана функція міститься під знаком інтеґрала. Наприклад, рівняння Вольтерра*), яке описує розвиток біологічних систем, має вигляд

$$x(t) = \lambda \int_0^t x(\tau)\, K(t - \tau)d\tau + f(t).$$

*) В. Вольтерра (1860—1940) — італійський математик.

Функція $K(u)$, яка враховує реакцію самої системи, називається ядром відповідного інтегрального перетворення, $x(t)$ — шукана функція. Операторна форма цього рівняння має вигляд

$$(L(x(t)) = F(p), L(K(u)) = K(p)), \quad F(p) = \lambda F(p)K(p) + \Phi(p),$$

звідки

$$F(p) = \Phi(p)/(1 - \lambda K(p)).$$

За $F(p)$ знайдемо оригінал $x(t)$.

Аналогічно розв'язуються інтегро-диференціальні рівняння. Тут шукана функція входить як під знак інтеграла, так і похідної.

П. 1. Розв'язати задачу Коші

$$x'' = f(t) + \delta(t), \quad x(a) = x'(0) = 0.$$

Зазначимо, що права частина рівняння — це розривна функція (за рахунок $\delta(t)$). Розв'язати це рівняння можна тільки операційним способом. Застосовуючи оператор Лапласа, маємо

$$p^2F(p) = \Phi(p) + 1,$$

звідки

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Отже,

$$x(t) = t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau f(u)\, du.$$

П. 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x' + y = e^t; \\ y' - x = e^{-t}, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Нехай $L(x(t)) = F_x(p)$, $L(y(t)) = F_y(p)$. Тоді

$$\begin{cases} pF_x(p) + F_y(p) = 1/(p - 1); \\ pF_y(p) - F_x(p) = 1/(p + 1). \end{cases}$$

З останньої системи маємо $F_y(p) = 1/(p^2 - 1)$, звідки $y(t) = \operatorname{sh} t$, $x(t) = y' - e^t = \operatorname{sh} t$.

П. 3. Розв'язати рівняння

$$x'(t) - 2\int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\, d\tau = 0, \quad x(0) = 1.$$

Маємо

$$pF(p) - x(0) - 2L(e^t * x(t)) = 0,$$

$$pF(p) - 1 - 2\frac{1}{p-1} - F(p) = 0,$$

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2 - p - 2} = \frac{2/3}{p+1} + \frac{1/3}{p-2},$$

звідки

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

16.2.8. Застосування інтеґрала Дюамеля

Розглянемо лінійне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і довільною правою частиною

$$L(x) = f(t),$$

тут L — диференціальний оператор

$$L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x,\ x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (16.12)$$

Крім цього, розглянемо ще рівняння $L(x) = 1$ теж з нульовими початковими умовами. Розв'язок останнього позначимо через $x_1(t)$, а його зображення — через $X_1(p)$. Тоді $L(x) = 1$ в операторній формі має вигляд

$$X_1(p)L(p) = \frac{1}{p},$$

де $L(p)$ — характеристичний многочлен, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами диференціального оператора. Вважаючи відомими $x_1(t)$ і $X_1(p)$, знайдемо

$$L(p) = 1/pX_1(p).$$

Рівняння (16.12) в операторній формі має вигляд

$$X(p)L(p) = F(p),$$

звідки

$$X(p) = F(p)/L(p) = pX_1(p)F(p).$$

Застосуємо інтеґрал Дюамеля і врахуємо нульові початкові умови. Дістанемо

$$x(t) = \int_0^t x'_1(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau. \quad (16.13)$$

Особливість цього методу полягає в тому, що для знаходження $x(t)$ не треба знати $F(p)$.

П. Розв'язати задачу Коші

$$x'' + x = e^{-t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Розв'язання. Зазначимо, що функція у правій частині при інтегруванні не виражається через елементарні функції, тому знайти її зображення неможливо. Допоміжне рівняння має вигляд

$$x'' + x = 1.$$

В операторній формі дістаємо

$$X_1(p)p^2 + X_1(p) = \frac{1}{p}, \quad X_1(p) = 1/p(p^2 + 1); \quad x_1(t) = 1 - \cos t.$$

Користуючись виразом (16.13), знаходимо

$$x(t) = \int_0^t \sin\tau e^{-(t-\tau)^2}\, d\tau.$$

РОЗДІЛ 17

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

17.1. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

17.1.1. Класифікація подій

Події в навколишньому світі можна поділити на *вірогідні*, *неможливі* та *випадкові*. Перші при реалізації певного комплексу умов (при випробуванні) відбуваються завжди, другі — ніколи, треті — можуть як відбуватися, так і не відбуватися. Віднесення певної події до тієї або іншої групи істотно залежить від умов випробування. Наприклад, розглянемо подію, зв'язану з попаданням у мішень. Для цього треба, щоб хтось стріляв, щоб була мішень, щоб був засіб реалізації попадання, щоб цей засіб був доступний (справний), щоб була забезпечена певна відстань до мішені і т.д. Якщо якась з умов не виконана, то подія буде неможливою; якщо будуть виконані всі необхідні і достатні умови, то подія буде достовірною (скажімо, пістолет упирається в мішень).

Основним тут є поняття випробування. Під випробуванням розумісмо забезпечення всіх необхідних умов для появи даної події. Події позначають літерами латинської абетки A, B, C, ...

Випадкові події займають проміжну позицію між "завжди" і "ніколи". І можуть наставати чи не наставати в даному випробуванні, в якому виконані всі необхідні умови появи їх. Стосовно достатніх умов зазначимо, що вони не завжди підконтрольні, а про деякі з них важко здогадатися. Так, ми не контролюємо пориву вітру чи спалаху блискавки, які могли спричинити наш промах по мішені. У такій ситуації не можна обмежитися одиничними випробуваннями, а треба мати якомога більшу їх кількість і проаналізувати всю множину отриманих результатів. Ця множина є більш стійкою, оскільки одна частина попадань відхиляється в один бік, а друга в другий, і ці випадкові відхилення взаємно компенсуються, відкриваючи шлях до закономірності.

Ось чому теорія ймовірностей як наука про числову міру випадковості подій передбачає вивчення не одиничних, а масових однорідних випадкових подій, які підпорядковуються стохастичним*) закономірностям, встановлення яких і є її основною задачею.

---

*) Від грецьк. "стохастіс" — здогадка.

Виникнення теорії ймовірностей обумовлене спробою побудувати теорію азартних ігор, відноситься до XVI—XVII ст. і зв'язане з іменами таких учених, як Дж.Кардано, Б.Паскаль, Х.Гюйґенс, П.Ферма. Найістотнішим досягненням її першого періоду є відкриття Д.Бернуллі закону великих чисел. Другий період розвитку теорії ймовірностей зв'язаний з іменами Лапласа, Пуассона, К.Гаусса, Буняковського (XVIII—XIX ст.). Як наука теорія ймовірностей сформувалась на межі XIX—XX ст. завдяки зусиллям П.Л.Чебишова, О.М.Ляпунова, О.О.Маркова, Р.Мізеса*). Проте в 30-х роках нашого століття вона стала повноцінним розділом математики (до цього вважалась прикладною дисципліною) завдяки чіткому поняттю ймовірності, даному О.М.Колмоґоровим.

Подамо кілька означень.

Випадкові події поділяють на *сумісні* й *несумісні*. У першому випадку поява однієї події не виключає, а в другому виключає появу другої події. Наприклад, осічка і непопадання в ціль — сумісні, осічка і попадання в ціль — несумісні події.

Кілька подій утворюють *повну групу*, якщо поява хоч однієї з них — вірогідна подія. Наприклад, поява аверса і реверса при киданні монети, поява числа очок від одиниці до шести при киданні гральної кості, попадання і промах.

Кілька подій називають *рівноможливими*, якщо при випробуванні вони з'являються однаково часто. Так, аверс і реверс рівноможливі, але попадання і промах, як правило, — ні.

17.1.2. Означення ймовірності

Деякі події наступають досить часто, а деякі — навпаки, дуже рідко. Введемо числову характеристику показника події.

О. *Ймовірністю* P**) *даної події* A *називається відношення числа випадків* m, *які сприяють появі даної події, до загального числа* n *рівноможливих і єдино можливих результатів випробувань, які утворюють повну групу, тобто*

$$P(A) = m/n. \tag{17.1}$$

Наведене означення називається *класичним*.

З означення випливають властивості ймовірності: для вірогідних подій $P = 1$ $(m = n)$, для неможливих $P = 0$ $(m = 0)$, для випадкових $0 < P < 1$ $(0 < m < n)$.

П.1. У групі з 25 студентів п'ять дівчат. Знайти ймовірність того, що з цієї групи першою до аудиторії зайде дівчина.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо $P(A) = \frac{5}{25} = 0.2$.

П.2. Знайти ймовірність того, що при киданні гральної кості випаде грань з парною кількістю очок.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо $n = 6$, $m = 3$. Отже $P(A) = 0.5$.

---

*) Д ж. К а р д а н о (1501—1576) — італійський математик; Х. Ґ ю й ґ е н с (1629—1695) — голландський математик; Б.Паскаль (1623—1662) — французький математик; В. Я . Б у н я к о в с ь к и й (1804—1889) — український математик; О.М.Ляпунов (1857—1918) – російський математик; О. О. М а р к о в (1856—1922) — російський математик; Р. М і з е с (1883—1953) — німецький математик і механік.

**) Від англ. probability — ймовірність.

Класичне означення ймовірності, з одного боку, просте, наочне, конструктивне, а з другого боку, воно має ряд суттєвих недоліків, а саме: не завжди можна подати результат випробувань як сукупність рівноможливих результатів; m і n скінченні, але це не завжди так; рівноможливість і рівноймовірність — синоніми. Отже, (17.1) не є коректним означенням, з чим, звичайно не можна було погодитись.

Геометричне означення ймовірності з'явилося завдяки спробі відмовитися від скінченності величин m і n. Воно полягає в тому, що

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes} G},$$

де mes g і mes G — міри (довжини, площі, об'єму) простору всіх (G) і сприятливих (g) результатів.

П.3. Два студенти домовилися зустрітися в певному місці між 15-ю та 16-ю год. Перший, хто прийде, чекає на другого не більше 20 хв. Яка ймовірність їхньої зустрічі?

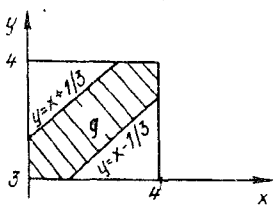


Рис. 17.1

Нехай x — час приходу першого, а y — другого студента. Тоді mes G — площа квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці (рис. 17.1). Умова зустрічі має вигляд $|y - x| \le \frac{1}{3}$, тобто $x - \frac{1}{3} \le y \le x + \frac{1}{3}$, звідки маємо mes $g = 5/9$. Отже, $P(A) = 5/9$.

Наведемо статистичне означення ймовірності. Основним поняттям тут є відносна частота появи подій в результаті проведених випробувань:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \qquad (17.2)$$

де n — число проведених випробувань, а m — число випробувань, в яких відбувалася подія A.

Ймовірність — це теоретична величина, обчислена до чи без проведення випробувань, відносна частота — величина емпірична, обчислена за результатами випробувань.

Визначення величини $W(A)$ для різних подій показало, що в одних випадках вона для різних серій випробувань змінюється мало, а в других — істотно. Якщо $W(A) \approx C$, то подію A називають *статистично стійкою*, в решті випадків — нестійкою. У подальшому останні ситуації не розглядатимемо (це, як правило, ситуації, обумовлені «людським фактором»).

Переважна більшість помилок, зв'язаних із застосуванням теорії ймовірностей, пояснюється її спробами аналізувати невизначені події, які дістанемо у випробуваннях з великим числом неконтрольованих умов (про яку ймовірність виграшу команди можна вести мову, якщо тренери заздалегідь домовилися про нічию). Через це в означенні випадкової події обов'язково слід передбачити її статистичну стійкість.

О. *Статистичною ймовірністю події A називається число, навколо якого групуються відносні частоти цієї події або сама частота.*

Р.Мізес встановив, що для випадкових подій

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} W_n(A)$$

(для невизначених подій така границя не існує).

У 1900 р. відбувся Другий всесвітній математичний конгрес, на якому Д.Гільберт*) висунув 23 найважливіші проблеми. Шоста проблема Гільберта — побудова логічно несуперечливих основ теорії ймовірностей. Цю проблему було розв'язано через 33 роки О.Колмогоровим, який запропонував таку систему аксіом, яка дає означення ймовірності:

1) кожній випадковій події A відповідає невід'ємне число $P(A)$, яке називається ймовірністю цієї події,

2) для вірогідної події A $P(A) = 1$,

3) імовірність появи хоча б однієї з попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

17.1.3. Елементи комбінаторики

Формули комбінаторики становлять теоретичну базу при використанні класичного означення ймовірності, яке в прикладних задачах відіграє велику роль.

Основними елементами комбінаторики (теорії сполук) є *перестановки, розміщення, комбінації.*

О. *Розміщеннями з n елементів по m називаються сполуки, кожна з яких містить m елементів, взятих з даних n, і відрізняється одна від одної як елементами, так і порядком їх.*

Число розміщень з n по m дорівнює

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

О. *Перестановками з m елементів називаються розміщення з m елементів по m.*

Число розміщень з m елементів по m елементів дорівнює

$$P_m = A_m^m = m!$$

О. *Комбінаціями з n елементів по m називаються сполуки, кожна з яких містить m елементів, взятих з даних n, і відрізняється одна від одної тільки елементами.*

Число комбінацій з m по n дорівнює

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

*) Д. Гільберт (1862—1943) — німецький математик.

Використання комбінаторики передбачає виконання двох правил: правила суми (якщо A можна вибрати m, а B — n способами, то A або B можна вибрати $(m + n)$ способами); правила добутку (якщо A можна вибрати m, а B — n способами, то A і B можна вибрати mn способами).

П.1. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3?

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$P_3 = 3! = 6.$$

П.2. Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3?

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$$

П.3. Скількома способами можна вибрати дві деталі з 10?

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{2!\,8!} = 45.$$

17.2. АЛГЕБРА ПОДІЙ

17.2.1. Алгебра логіки

При користуванні класичним означенням імовірності результат випробувань, який можна розглядати як одну складну подію, необхідно подати у вигляді сукупності елементарних подій. Така операція називається декомпозицією. Істотно виникає необхідність і в оберненій операції — композиції, коли з множини елементарних подій формується одна складна подія.

Обидві ці операції виконуються на основі алгебри логіки, операціями якої є заперечення, множення, додавання подій (порівняйте з операціями перерізу та об'єднання множин).

О. *Протилежними називаються події A і $\bar{A}$* (не А), які утворюють повну групу (рис. 17.2).

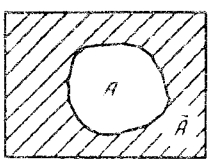


Рис. 17.2

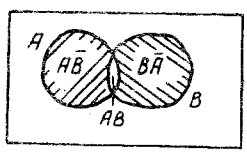


Рис. 17.3

Прикладом A і $\bar{A}$ є поява аверса і реверса при киданні монети.

О. *Добутком (перерізом) подій A і B називається подія AB, яка полягає в одночасній появі A і B* (див. рис. 1).

О. *Сумою подій A і B називається подія $A+B$, яка полягає в появі A або B (або AB)* (рис. 2).

Аналогічно визначаються добуток і сума більшого числа подій.

З рис. 1 і 17.3 випливають співвідношення $AB = BA$, $A = A\overline{B} + AB$, $B = B\overline{A} + AB$. Комбінуючи дві останні рівності, маємо $A + B\overline{A} = B + A\overline{B}$.

17.2.2. Додавання ймовірностей

Т.1. *Імовірність суми сумісних подій A і B дорівнює*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорему можна ілюструвати за допомогою рис. 17.3.

Н а с л і д о к 1. *Якщо A і B несумісні, то $AB = \varnothing$, $P(AB) = 0$ і тоді*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Останнє співвідношення можна використати як означення несумісних подій.

Н а с л і д о к 2. *Якщо події $A_1, A_2, \ldots A_n$ попарно несумісні, то*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

(третя аксіома А.Колмогорова).

Т.2. *Сума ймовірностей попарно несумісних подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:*

$$P(A) + P(A_2) + \ldots P(A_n) = 1.$$

Н а с л і д о к. *Сума ймовірностей, взаємопротилежних подій дорівнює одиниці:*

$$P(A_1) + P(\overline{A}) = 1.$$

Так, якщо ймовірність влучення в ціль $P(A) = 0.8$, то ймовірність промаху $q = 1 - P(A) = 0{,}2$.

17.2.3. Множення ймовірностей

Події A і B можуть бути *залежними* й *незалежними*. У першому випадку поява A впливає, а в другому не впливає на ймовірність появи B.

П. У ящику чотири білих і три чорних кулі. В результаті першого випробування (вилучення кулі з ящика) з'явилася чорна куля (подія А). Знайти ймовірність появи білої кулі (подія В) в другому випробуванні, якщо: а) кулю повертають в ящик, б) кулю не повертають після першого випробування.

Маємо а) $P(B) = 4/7$ — незалежна подія; б) $P(B/A) = 4/6 = 2/3$ — залежна подія.

О. *Умовною ймовірністю $P(B/A)$ називається ймовірність події B за умови, що подія A сталася.*

Т.1. *Ймовірність сумісної появи двох залежних подій A і B дорівнює* $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$.

Опустимо досить просте доведення цієї теореми.

Н а с л і д о к. $P(B/A) = P(AB)/P(A)$.

Т.2. *Імовірність добутку незалежних подій A і B дорівнює*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ця теорема випливає з попередньої. Крім того, можна довести, що коли A і B незалежні, то незалежні також A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Попередні теореми узагальнюються на випадок скінченної суми подій після введення поняття попарно незалежних подій.

П.1. Імовірність влучення в ціль першої гармати $P(A) = 0{,}8$, другої — $P(B) = 0{,}9$. Знайти ймовірність влучення: а) двох гармат, б) хоча б однієї, в) тільки однієї, г) жодної, якщо A і B незалежні.

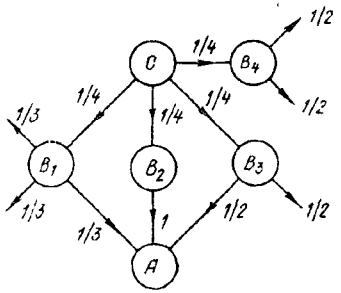


Рис. 17.4

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

а) $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$;

б) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}98$;

в) $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}26$;

г) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$.

Звертаємо увагу на те, що $P(A + B) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B})$.

П.2. Імовірність влучення однієї гармати $P = 0{,}6$. Знайти ймовірність влучення в ціль при залпі з п'яти гармат.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$P(A_1 + \ldots + A_5) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 + \ldots \overline{A}_5) = 1 - (1 - p)^5 =$$

$$= 1 - (0{,}4)^5 = 0{,}99.$$

П.3. З пункту C в пункт A можна потрапити за схемою, поданою на рис. 17.4. З кожного пункту виходять кілька доріг, імовірність вибору яких вказана. Знайти ймовірність потрапити з пункту C в пункт A.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з рис. 17.4

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{11}{24}.$$

17.2.4. Повна ймовірність. Формули Байеса*)

Т. (Повна ймовірність). *Імовірність події A, яка може настати за умови однієї з незалежних подій B, які утворюють повну групу, має вигляд*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A/B_i).$$

Оскільки

$$A = \sum_{i=1}^{n} AB_i,$$

*) Т. Б а й е с (1721–1763) – німецький математик.

то

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AB_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P/B_i \times P(A/B_i).$$

П. Партія деталей виготовлена двома робітниками. Перший зробив $\frac{2}{3}$ усіх деталей, другий — $\frac{1}{3}$. Імовірність браку в них відповідно 0,01 і 0,1. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою?

Р о з в ' я з а н н я. Комбінуючи теореми про множення і додавання ймовірностей, дістаємо

$$P = \frac{2}{3} \cdot 0{,}01 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}1 = 0{,}04.$$

У всякій справі слід спочатку зібрати необхідну інформацію, узагальнити її, висунути певні гіпотези (на основі гіпотез роблять прогнози, які перевіряють експериментальним шляхом). Якщо прогноз справджується, то роблять переоцінку всіх гіпотез. Так робить, наприклад, лікар, ставлячи діагноз: висуває гіпотези про можливі захворювання, призначає аналізи, за результатами яких переоцінює первісні гіпотези і ставить діагноз.

Дамо математичне формулювання задачі: нехай подія A може настати при появі однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу. Ці події назвемо гіпотезами. Імовірність появи події A виражається формулою повної ймовірності. Проведено випробування, в результаті якого подія настала. Як змінились імовірності гіпотез?

Оскільки

$$P(AB_j) = P(B_jA),$$

то

$$P(A)\,P(B_j/A) = P(B_j)\,P(A/B_j),$$

звідки

$$P(B_jA) = \frac{P(B_j)\,P(A/B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)\,P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A/B_i)},$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

Ці формули називаються *формулами Байеса.*

17. 3. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА

17. 3.1. Означення випадкової величини

О. *Випадковою називається величина, яка набуває своїх значень з певною ймовірністю.*

До випадкових величин належать, наприклад, такі: кількість очок, яка випала на грані гральної кості; кількість викликів на автоматичній

телефонній станції; дальність польоту снаряда; час безвідказної роботи машини. Деякі з цих величин можуть набувати дискретних значень, решта — довільних значень з певного інтервалу. Перші величини є дискретними, другі — неперервними випадковими.

О. *Дискретною називається випадкова величина, значеннями якої є окремі точки числової прямої.*

Випадкова подія — це окремий випадок дискретної випадкової величини, яка набуває значень $x_1 = 1$ (A) і $x_2 = 0$ $(\overline{A})$.

Часто випадкові величини позначають літерами X, Y тощо, а їх значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

О. *Законом розподілу випадкової величини називається закон, за яким кожному її значенню відповідає певна ймовірність цього значення.*

Закон розподілу можна задати: *таблично*, перелічивши всі значення x_i і відповідні p_i

$$\begin{array}{cc} X & x_1 \quad x_2 \ldots x_n \\ P & p_1 \quad p_2 \ldots p_n \end{array}$$

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1),$$

а також *графічно* і *аналітично*. У разі дискретної величини для графічного зображення будують точки (x_i, p_i) і сполучають сусідні точки відрізками прямих. Утворену фігуру називають многокутником розподілу.

П. У лотереї 100 білетів. Випадкова величина X — сума виграша по одному білету набуває таких вартостей: 10 гривень (1 білет), 5 гривень (3 білети), 1 гривня (10 білетів). Знайти закон розподілу X.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

X	10	5	1	0
P	0,01	0,03	0,3	0,86.

Наведемо деякі стандартні приклади випадкових величин.

17.3.2. Формула Бернуллі

На практиці досить часто використовують схему однакових незалежних випробувань, в кожному з яких певна подія A настає з однією і тією самою ймовірністю. При цьому знаходять імовірність того, що в n випробуваннях подія A настає рівно k разів $(0 \le k \le n)$.

Розглянемо подію B_1, в якій перші k разів подія A настала, а потім в n-k випробуваннях не настала, тобто

$$B_1 = \underbrace{AA \ldots A}_{k} \underbrace{\overline{A}\overline{A} \ldots \overline{A}}_{n-k}.$$

Ураховуючи незалежність подій, маємо

$$P(B_1) = p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p).$$

Кількість варіантів, в яких A настає k разів, а не настає n-k разів, становить C_n^k. На основі теореми додавання ймовірностей маємо формулу Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}. \qquad (17.3)$$

П.1. У цеху п'ять верстатів. Імовірність того, що кожен з них працює, $p = 0{,}8$. Знайти ймовірність того, що з них працює $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ верстатів.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з формулою Бернуллі

$$P_5(0) = \frac{5!}{0!5!}(0{,}8)^0(0{,}2)^5 = 0{,}0003;\ P_5(1) = \frac{5!}{1!4!}(0{,}8)^1(0{,}2)^4 = 0{,}006;$$

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!3!}(0{,}8)^2(0{,}2)^3 = 0{,}051;\ P_5(3) = \frac{5!}{3!2!}(0{,}8)^3(0{,}2)^2 = 0{,}205;$$

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!1!}(0{,}8)^4(0{,}2)^1 = 0{,}41;\ P_5(5) = \frac{5!}{5!0!}(0{,}8)^5(0{,}2)^1 = 0{,}328.$$

Перевіримо, що $\sum_{k=0}^{5} P_5(k) = 1$ (похибка внаслідок округлення результатів), оскільки події утворюють повну групу.

З цього прикладу випливає, що існує таке $k = k_0$, якому відповідає найбільша ймовірність. Таке значення k_0 називають *найімовірнішим числом появи події* A. Можна довести, що

$$p(n+1) - 1 \le k_0 \le p(n+1).$$

Схему Бернуллі слід відрізняти від інших аналогічних.

П.2. У мисливця п'ять патронів. Він стріляє до першого влучення. Знайти ймовірність того, що буде витрачено $k = 1, 2, 3$ патрони, якщо ймовірність влучення $p = 0{,}8$.

Р о з в ' я з а н н я. Наведена схема — це не схема Бернуллі, оскільки вилучений випадок $k = 0$, тому формулу Бернуллі застосовувати не можна.

За умовою задачі маємо $P_3(1) = p = 0{,}8$. Далі знаходимо $P_3(2) = P(\overline{A}A) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$ (перший патрон — промах, другий — влучення). Нарешті,

$$P_3(3) = P(\overline{A}\overline{A}A + \overline{A}\overline{A}\overline{A}) = (0{,}2)^2 0{,}8 + (0{,}2)^3 = 0{,}04.$$

17.3.3. Локальна й інтегральна теореми Лапласа

При великих n і малих p формулою Бернуллі (17.3) користуватися незручно. Для цих значень n і p є формули, за якими можна наближено обчислити ймовірність за схемою Бернуллі. Такими є формули Лапласа, які задаються відповідними теоремами (подаємо їх без доведення).

Т. (Локальна теорема Лапласа). *Якщо ймовірність появи події в схемі Бернуллі дорівнює* p $(p \ne 0, p \ne 1)$, *причому* p *мале, а* n *велике, то*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t),\ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},\quad t = \frac{k - nq}{\sqrt{npq}}. \qquad (17.4)$$

Формула (17.4) називається формулою Лапласа, а $\varphi(t)$ — функцією Лапласа (рис.17.5). Ця функція затабульована і має такі властивості:

1. $\varphi(t) > 0$.
2. $\varphi(t)$ — парна, $\varphi(-t) = \varphi(t)$.
3. $\max \varphi(t) = \varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(це випливає з того, що $\varphi'(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}} te^{-t^2/2}$, і з простих міркувань).

4. Вісь $t = 0$ є асимптотою графіка $\varphi(t)$ ($\lim \varphi(t) = 0$, $t \to \infty$).
5. $\varphi(t) \approx 0$ при $t > 3$, $t < -3$, що випливає з обчислень чи з аналізу таблиці значень функції $\varphi(t)$.

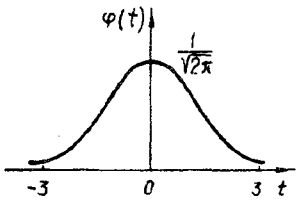


Рис. 17.5

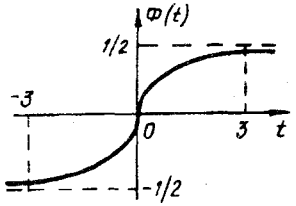


Рис. 17.6

П.1. Знайти ймовірність того, що з $n = 100$ зернин зійде рівно $k = 80$, якщо їх схожість $p = 0.8$.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з формулою (17.4), а також з таблицею значень $\varphi(t)$*), маємо

$$\varphi(0) \approx 0{,}4,$$

остаточно

$$P_{100}(80) \approx \frac{0{,}4}{4} = 0{,}1.$$

Т. (Інтегральна теорема Лапласа). *Якщо ймовірність появи події в схемі Бернуллі дорівнює p ($p \neq 0$, $p \neq 1$), то ймовірність того, що ця подія настане від k_1 до k_2 разів, дорівнює*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

$$t_i = (k_i - np)/\sqrt{npq}, \quad i = 1, 2. \qquad (17.5)$$

Формула (17.5) — це формула Лапласа, а $\Phi(t)$ — функція Лапласа. Ця функція затабульована і має такі властивості:

1. $\Phi(t)$ — непарна, $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.
2. $\Phi(0) = 0$.
3. $\Phi(t)$ зростає на $(-\infty, \infty)$, оскільки $\Phi'(t) > 0$.

*) Значення $\varphi(t)$ дано в багатьох математичних довідниках.

4. $\Phi(t) \approx \frac{1}{2}$ при $t > 3$,$\Phi(t) \approx -\frac{1}{2}$ при $t < -3$.

Графік подано на рис. 17.6.

П.2. Металургійний завод дістав замовлення, для виконання якого необхідно провести 90 кондиційних плавок. Ймовірність того, що плавка буде кондиційною, $p = 0.9$.Тому вирішили зробити $n = 100$ плавок. Яка ймовірність виконання замовлення?

Р о з в ' я з а н н я. Йдеться про ймовірність $P_{100}(90, 100)$, для якої, згідно з (17.5), маємо

$$t_1 = \frac{90 - 0{,}9 \cdot 100}{100 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 0; \quad t_2 = \frac{100 - 0{,}9 \cdot 100}{100 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 3{,}33.$$

$$P_{100}(90, 100) = \Phi(3{,}33) - \Phi(0) \approx 0{,}5$$

Як бачимо, дістали не таку вже й велику ймовірність.

17.3.4. Формула Пуассона. Біномний розподіл. Розподіл Пуассона

Наступна теорема містить ще одну формулу, аналогічну формулі Бернуллі

Т. (Пуассона). *Якщо в схемі випробувань Бернуллі p мале ($p < 0{,}1$), n велике, а $np < 10$, то*

$$P_n(k) \approx e^{-a} a^k / k!, \quad a = np. \tag{17.6}$$

Формула (17.6) є окремим випадком формули (17.3) при $n \to \infty$.

■ Для доведення застосуємо другу стандартну границю. Враховуючи, що $p = a/n$,маємо

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(\left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)\right)^{-n/a}\right)^{-a} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} \to$$

$$\to_{n\to\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \left(\left(1 - \frac{i}{n}\right) \to_{n\to\infty} 1\right), \quad \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} \to_{n\to\infty} 1 \ ■$$

П. Автозавод відвантажив $n = 1000$ автомобілів. Ймовірність їх пошкодження під час транспортування $p = 0.001$. Знайти ймовірність того, що автомагазин одержить $k = 5$ пошкоджених автомашин.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з (17.6)

$$a = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1,$$

$$P_{1000}(5) \approx \frac{1}{5} e^{-1} \approx 0{,}003.$$

О. *Випадкова величина називається розподіленою за біномним (Пуассона) законом, якщо кожному її значенню k відповідає ймовірність, обчислена за формулою Бернуллі* (17.3) (*Пуассона* (17.6)).

Термін «біномний» походить від того, що (17.3) є загальним членом формули бінома Ньютона

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

У П.1, П.17.3.2 фактично наведено випадкову величину, розподілену за біномним законом.

Тепер деяка загальна інформація про закони розподілу.

17.3.5. Функція розподілу та щільність випадкової величини

О. *Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що X набуває значень, менших від вказаного фіксованого значення, точніше*

$$F(X) = P(X < x). \qquad (17.7)$$

П. Знайти інтегральну функцію для величини X, де значенням $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ відповідають ймовірності $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з (17.7) для $-\infty < x \le 1$ маємо $F(x) = 0$ (зліва точки $x = 1$ значень немає); для $1 < x \le 2$ маємо $F(x) = 2$ (у цьому інтервалі є лише одне значення X з імовірністю 0,2) для $2 < x \le 3$ маємо $F(x) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$ (у цьому інтервалі X може набувати або значень з імовірністю 0,2, або з імовірністю 0,3).

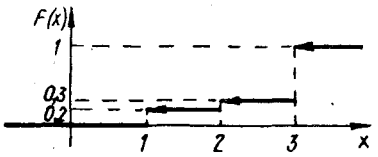


Рис. 17.7

Нарешті, при $x > 3$ маємо $F(X) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1$. Отже (графік $F(x)$), на рис. 17.7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x \le 1; \\ 0{,}2, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ 0{,}5, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

О. *Випадкова величина X називається неперервною, якщо неперервною є її інтегральна функція.*

Властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$ (випливає з означення $F(x)$).

2. $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

■ Справді, $F(x_2) = P(X < x_2) = P(X < x_1$, або $x_1 \le X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$, звідки випливає доводжувана рівність. ■

3. $F(x)$ — неспадна функція, $(x_2 > x_1) \Rightarrow (F(x_2) \ge F(x_1))$, (випливає з властивості 2).

4. Для неперервної випадкової величини ймовірність влучити в точку дорівнює нулю:

$P(X = x_0) = 0$.

■ Справді,

$$P(X = x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x_0 \le X < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) = F(x_0) - F(x_0).$$

Тут застосовували властивість 3° і означення неперервної випадкової величини. ■

5. Якщо значення X зосереджені на $[a,b]$, то $F(X) = 0$ при $x \le a$ і $F(x) = 1$ при $x > b$.

Застосовуємо ймовірність неможливої й вірогідної подій.

О. *Щільністю розподілу (диференціальною функцією) випадкової величини в даній точці називається границя відношення ймовірності того, що випадкова величина належатиме інтервалу, який містить дану точку, до довжини цього інтервалу за умови, що інтервал стягується до даної точки, тобто*

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Властивості F (x)

1. $f(x) = F'(x)$.

Справді,

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

2. $f(x) \ge 0$ (оскільки $f(x) = F'(x)$, а $F(x)$ — неспадна).

3. $P(x_1 \le X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

Справді,

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Справді,

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Справді,

$$1 = P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

17.4. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закон, функція і щільність розподілу випадкової величини дають повну інформацію про неї. Проте дістати такі характеристики часто не просто, оскільки, як правило, необхідна велика кількість певних досліджень. Крім того, для розв'язування багатьох практичних задач можна обійтися набагато меншим обсягом інформації, а в багатьох випадках доцільним є сумарне уявлення про випадкову величину. Через те в теорії ймовірностей широкого застосування набули так звані числові характеристики випадкових величин, основні з яких — математичне сподівання та дисперсія*).

17.4.1. Математичне сподівання випадкової величини

Нехай в результаті експерименту для значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$ випадкової величини дістали відповідно частоти $n_1, n_2, \ldots, n_k$ такі, що $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Тоді для середнього значення $\bar{x}$ величини X маємо (w_i — відносні частоти, p_i — ймовірності відповідних значень x_i). Ураховуючи (17.2), маємо

$$\bar{x} = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k)/n = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \ldots + x_k \frac{n_k}{n} =$$

$$= x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k \approx (w_1 \approx p_1, w_2 \approx p_2, \ldots,$$

$$w_k \approx p_k) \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k. \qquad (17.8)$$

О. *Математичним сподіванням випадкової величини X називається*

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i, \quad M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \qquad (17.9)$$

відповідно для дискретних і неперервних величин, тут x_i — значення величини, p_i — ймовірність цих значень, $f(x)$ — щільність імовірності величини.

З (17.8) і (17.9) маємо

$$M(X) \approx \bar{x},$$

тобто математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини і зберігає її розмірність. Математичне сподівання є аналогією центра мас системи матеріальних точок.

П.1. Знайти $M(X)$ для величини X, заданої в прикладі з п.17.3.4.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з (17.9) маємо

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}3.$$

П.2. Знайти $M(X)$, якщо для $f(x) = 2$ при $x \in (0,1)$ і $f(x) = 0$ при $x \in (0,1)$.

---

*) Від лат. dispersio, англ. dispersion — розсіяння.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з (17.9) маємо

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{1} 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^2\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

О. *Добутком (сумою) двох випадкових величин називається така величина, можливі значення якої дорівнюють добуткові (сумі) можливих значень даних величин, а ймовірності при цьому треба помножити.*

П.3. Для величин X (значення x_1, x_2, імовірності p_1 і p_2) і Y (значення y_1, y_2, імовірності p_1^*), p_2^*) побудувати XY і $X + Y$. Очевидно, що

$p_1 + p_2 = 1$, $p_1^* + p_2^* = 1$..

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$\begin{array}{lcccc} XY: & x_1y_1 & x_2y_1 & x_1y_2 & x_2y_2 \\ P: & p_1p_1^* & p_2p_1^* & p_1p_2^* & p_2p_2^*, \end{array} \tag{17.10}$$

$$\begin{array}{lcccc} X+Y: & x_1+y_1 & x_2+y_1 & x_1+y_2 & x_2+y_2 \\ P: & p_1p_1^* & p_2p_1^* & p_1p_2^* & p_2p_2^*. \end{array} \tag{17.11}$$

Пропонуємо перевірити, що сума ймовірностей у законах розподілу $X + Y$ та XY, знайдених за означенням суми та добутку випадкових величин, дорівнює одиниці.

Властивості математичного сподівання

1. $M(C) = C$.

■ Справді, розглядаючи сталу як випадкову величину, яка набуває єдиного значення з імовірністю, яка дорівнює одиниці, маємо $M(C) = C \cdot 1 = C$. ■

2. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ для незалежних X і Y. Справді, досить урахувати розподіли останнього прикладу, тобто вирази (17.10) і (17.11).

3. $M(XY) = M(X)\,M(Y)$ для незалежних X і Y.

Н а с л і д о к 1. $M(CX) = CM(X)$.

Н а с л і д о к 2. $M(X) - M(X) = 0$.

Справді, $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$

П.4. Знайти $M(X)$, якщо X розподілено за біномним законом, тобто X є кількістю появ деякої події при n випробуваннях за умови, що ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює p. Нехай X_i — кількість появ події в i-му випробуванні. Значення X_i — це 0 або 1, ймовірності q і p_i отже,

$$M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Далі знаходимо

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) = np.$$

П.5. Знайти M (X), якщо X розподілено за законом Пуассона.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\frac{a^i}{i!}\,e^{-a} = e^{-a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-a}\,a\,e^a = a = np.$$

17.4.2. Дисперсія

Дві випадкові величини можуть мати однакові математичні сподівання, але різне розсіяння своїх значень навколо математичних сподівань.

Наступна величина характеризує таке розсіяння.

О. *Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто*

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{17.12}$$

Рівність (17.12) конкретизується для дискретних і неперервних величин відповідно (якщо інтеграл збіжний)

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)\, dx.$$

Знайдемо зручну формулу для обчислення $D(X)$. Згідно з рівністю (17.12), маємо

$$D(X) = M(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)) = M(X^2 - 2M(X)\, M(M(X)) +$$
$$+ M(M^2(X)) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для $M^2(X)$ дістаємо (якщо інтеграл збіжний)

$$M^2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i, \text{ або } M^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx.$$

Практичне тлумачення дисперсії полягає в тому, що вона характеризує ступінь розсіяння випадкової величини навколо її математичного сподівання і вимірюється в квадратних одиницях порівняно з одиницями вимірювання вихідної величини.

Останнє приводить до введення ще однієї характеристики — *середнього квадратичного відхилення*, тлумачення якого таке ж, як і дисперсії, а розмір такий, як і вихідної величини, а саме:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

П.6. Знайти $D(X)$ за умов П.2, п. 17.4.1.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$D(X) = 2\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 x\, dx = 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Властивості дисперсії

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, X і Y — незалежні.
4. $D(C + X) = D(X)$.

Кілька слів з приводу властивостей дисперсії.

Властивість 4 означає, що зміщення величини не змінює її дисперсії. Дисперсія добутку двох величин може не дорівнювати добутку дисперсій вихідних величин.

Можна довести, що для біномного розподілу і розподілу Пуассона $D(X) = npq$, $D(X) = np$. Повернувшись до локальної та інтегральної теорем Лапласа, помічаємо там $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

17.4.3. Інші числові характеристики

О. *Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називається величина*

$$\nu = M(X^k).$$

Очевидно, що

$$\nu_1 = M(X), \quad D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \nu_1 - \nu_2.$$

О. *Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називається величина*

$$\mu = M(X - M(X))^k.$$

Очевидно, що

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = 0,$$

$$\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X) = \nu_2 - \nu_1,$$

тобто $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1$. Взагалі, довільний центральний момент можна виразити через початкові моменти. Наприклад,

$$\mu_3 = M(X - M(X))^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

О. *Модою*[*)] $M_0(X)$ *розподілу випадкової величини X називається значення X, якому відповідає найбільша ймовірність (щільність імовірності)*

$$\max P(X) = P(M_0(X)) \ (\max f(x) = f(M_0(X)).$$

П.1. Знайти $M_0(X)$, якщо $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$f(x) = -\frac{2}{\pi(1 + x^2)^2} = 0, \quad M_0(X) = 0.$$

Пропонуємо самостійно з'ясувати, чому результат саме такий.

О. *Медіаною*[**)] $Me(X)$ *розподілу випадкової величини X називається значення X, яке задовольняє рівність*

$$P(a < X < Me(X)) = P(Me(X) \le x < b).$$

---

*) Від фр. mode; лат. modus — міра, правило.

**) Від лат. mediana — середина.

П.2. Знайти медіану розподілу випадкової величини X, якщо $f(x) = 2x$, $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$2\int_0^{Me(X)} x\,dx = 2\int_{Me(X)}^{1} x\,dx \Rightarrow Me(X) = \sqrt{(b^2 + a^2)/2}.$$

О. Асиметрією розподілу випадкової величини називається величина

$$As = \mu_3/\sigma^3.$$

17.5. ДЕЯКІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

17.5.1. Рівномірний закон розподілу

О. *Випадкова величина X називається рівномірно розподіленою, якщо її щільність стала.*

Нехай значення рівномірно розподіленої випадкової величини зосереджені на $[a, b]$. Користуючись властивостями щільності розподілу, маємо $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, тобто $\int_a^b c\,dx = 1$.

Звідси $c = 1/(b - a)$. Отже,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a; \\ 1/(b-a), & \text{якщо } a \le x \le b; \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Знаходимо

$$M(X) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,x\,dx = \frac{a+b}{2}.$$

Аналогічно (пропонуємо перевірити)

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Крім того,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a; \\ (x-a)/(b-a), & \text{якщо } a < x \le b; \\ 1, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Рівномірний розподіл часто використовують тоді, коли тільки відомо, що величина набуває значень на певному інтервалі, але нічого не відомо про характер розподілу величини. Вважаючи, що вона розподілена рівномірно, допускаємо похибку, найменшу з можливих.

17.5.2. Експоненціальний закон розподілу

О. *Випадкова величина X називається розподіленою за експоненціальним законом, якщо* (рис. 17.8)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

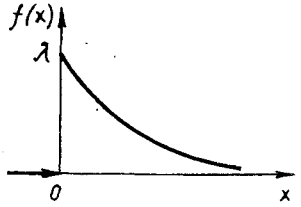


Рис. 17.8

Для цього розподілу маємо (пропонуємо перевірити, $\sigma > 0$)

$$M(X) = 1/\lambda, \quad D(X) = 1/\lambda^2, \quad \sigma(x) = 1/\lambda,$$

$$F(x) \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Імовірність того, що величина X належатиме інтервалу $[\alpha, \beta]$ за умов даного розподілу, дорівнює

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Експоненціальний закон широко застосовують у теорії надійності. Нехай T — тривалість безвідказної роботи пристрою. Функція розподілу випадкової величини T виражає ймовірність відказу за час t:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Протилежна їй функція надійності

$$R(t) = 1 - F(t) = P(t \leq T) = e^{-\lambda t}$$

визначає ймовірність безвідказної роботи пристрою за час t. Тут λ — інтенсивність відказів.

Для експоненціального закону розподілу ймовірність безвідказної роботи за час t не залежить від передісторії процесу, а залежить лише від його тривалості t. Справді, нехай

$$P(A) = e^{-\lambda t_0}, \quad P(B) = e^{-\lambda t}, \quad P(AB) = e^{-\lambda(t + t0)},$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{\lambda(t + t0)}}{e^{-\lambda t0}} = e^{-\lambda t} = P(B),$$

тобто A і B незалежні.

Таку властивість мають радіоапаратура, засоби автоматики тощо, тобто пристрої, для яких процес старіння і поступової втрати якості не відіграє істотної ролі. Ця сама властивість характерна й для так званого «періоду випалювання» при експлуатації будь-яких машин, після чого настає період поступового старіння, який описують уже інші закони розподілу.

П.2 Час безвідказної роботи електролампи розподіляється за експоненціальним законом $f(t) = 0{,}01e^{-0.01t}$. Знайти ймовірність того, що лампа працюватиме $t = 100$ год.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$P(T \geq 100) = R(100) = e^{-0{,}01 \cdot 100} \approx 0{,}367.$$

17.5.3. Нормальний закон розподілу

Означення й тлумачення параметрів.

О. *Випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом, якщо*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Оскільки $f(x)$ є щільністю, то $\sigma > 0$. Знайдемо числові характеристики зазначеної величини. Використаємо інтеграл Ґаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

Маємо

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-a)^2/2\sigma^2} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma\, dt \end{matrix}\right\} =$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\, dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = a.$$

Тут перший інтеграл дорівнює нулю як інтеграл від непарної функції в симетричному інтервалі, а другий дорівнює $\sqrt{2\pi}$.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \dfrac{(x-a)}{\sigma} = t \\ dx = \sigma\, dt \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-t^2/2}\, dt.$$

Зінтеґрувавши частинами ($u = t$, $dv = te^{-t^2/2}dt$), дістаємо

$$D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Отже, значення параметрів встановлено.

Нормальна крива. Графік функції $f(x)$ у випадку нормального закону називається нормальною кривою. Якщо $a = 0, \sigma = 1$, то $f(x) = \varphi(x)$ — функція Лапласа (п.17.3.3.). У загальному випадку нормальна крива — це зміщений на $x = a$ і здеформований графік $\varphi(x)$. Зміна a на форму кривої не впливає (це тільки зміщення вздовж осі Ox). Зміна σ не зміщує криву вздовж осі Ox, але змінює форму. Зі зменшенням σ максимум $f_{\max} = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$ збільшується, але

площа криволінійної трапеції не змінюється $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\right)$. Обидві ситуації зображені на рис. 17.9–17.10.

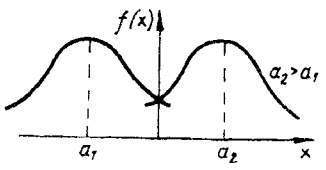


Рис. 17.9

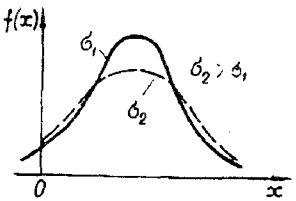


Рис. 17.10

Нормальний закон відіграє в теорії ймовірностей велику роль завдяки центральній граничній теоремі Ляпунова. Сформулюємо її.

Т. *Якщо X — сума великої кількості незалежних випадкових величин X, які мають довільний розподіл, а вплив їх на X незначний, то X має розподіл, близький до нормального, і нормальний, якщо кількість X прямує до нескінченності.*

Ситуація, коли на даний процес впливає велика кількість факторів, зустрічається часто. Отже, нормальний закон фактично є центральним законом у теорії ймовірностей. Він широко застосовується в теорії похибок, при контролі якості продукції, в теорії надійності, теорії стрільб тощо. Зокрема, локальна й інтегральна теореми Лапласа є окремими випадками теореми Ляпунова. Цей зв'язок стає очевидним, коли згадати, що у біномному законі $\sigma = \sqrt{npq}$.

Імовірність попадання в інтервал $[\alpha, \beta]$. Нехай величина X розподілена за нормальним законом. Тоді

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = t, \quad \alpha \to \dfrac{\alpha - a}{\sigma} \\ dx = \sigma\,dt, \quad \beta \to \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2}\,dt =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} \right) e^{-t^2/2}\,dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Отже, імовірність того, що величина X належатиме $[\alpha, \beta]$, дорівнює

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (17.13)$$

П. Випадкова величина X розподілена нормально, $a = 30$, $\sigma = 10$. Знайти ймовірність того, що $10 < X < 50$.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з рівністю (17.13),

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) = \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 0{,}954.$$

Н а с л і д о к 1. *Якщо величина X є нормально розподіленою, то*

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \tag{17.14}$$

Справді, враховуючи (17.13) при $\alpha = a - \varepsilon$, $\beta = a + \varepsilon$, маємо

$$P(|X - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Н а с л і д о к 2. *З імовірністю, близькою до одиниці, можна стверджувати, що значення нормально розподіленої випадкової величини відхиляються від свого математичного сподівання не більше, ніж на три середніх квадратичних відхилення (правило "трьох сигм").*

Покладемо в (17.14) $\frac{\varepsilon}{\sigma} = t$. Тоді

$$P(|X - a| < t\sigma) = 2\Phi(t) \tag{17.15}$$

Оскільки при $t \geq 3$ $\Phi(t) \approx \frac{1}{2}$, то за формулою (17.15) маємо

$$1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \approx 2\Phi(3) = P(|X - a|) < 3\sigma),$$

тобто

$$P(|X - a| < 3\sigma) \approx 1.$$

Отримане правило означає, що результатами вимірювань з відхиленнями від математичного сподівання більше, ніж на три сигми, нехтуємо як грубими помилками. Така процедура дає змогу істотно підвищувати надійність емпіричних даних.

17.5.4. Логарифмічно нормальний закон розподілу. Закони "Хі — квадрат", Ст'юдента, Фішера–Снедекора

О. *Логарифмічно нормальним законом розподілу випадкової величини X називається такий закон, коли*

$$f(x) = \frac{\lg e}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(\lg x - a)^2/2\sigma^2}. \tag{17.16}$$

Заміна $t = (\lg x - a)/\sigma$ приводить (17.16) до щільності нормального закону при $a = 0$, $\sigma = 1$.

За введеним законом розподіляється час безвідказної роботи тих пристроїв, в яких основну роль відіграє "знос стомлення" (крила і фюзеляж літаків, робочі колеса вентиляторів і компресорів).

Нехай X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — нормально розподілені незалежні випадкові величини, $M(X_i) = 0$, $\sigma(X_i) = 1$. Тоді величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

має розподіл "Хі-квадрат" з k степенями вільності. Якщо величини не зв'язані між собою, то $k = n$. Якщо між ними є, наприклад, лінійний зв'язок $X = \frac{1}{n}\sum X_i$, то $k = n - 1$.

Щільність такого розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ e^{-x/2} x^{k/2-2} / 2^{k/2}\, \Gamma(k/2), & x > 0 \end{cases},$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція Ейлера.

Якщо Z— нормально розподілена випадкова величина, $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$, а V — незалежна від Z величина, яка має "Хі-квадрат" розподіл, то величина

$$T = Z/\sqrt{V/k}$$

має так званий розподіл. Ст'юдента*) з k ступенями вільності, який при $k \to \infty$ прямує до нормального.

Якщо U і V — незалежні випадкові величини, розподілені за законом χ^2 зі ступенями вільності k_1 і k_2 відповідно, то величину

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

називають розподіленою за законом Фішера—Снедекора зі ступенями вільностей k_1 і k_2.

Щільність цього розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ C_0\, x^{(k_1-k_2)/2} (k_1 + k_1 x)^{-(k_1+k_2)/2}, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$C_0 = \Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}\, \Gamma^{-1}(k_1/2)\, \Gamma^{-1}(k_2/2).$$

17.6. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Випадковість відіграє в природі значно більшу роль, ніж традиційно вважають. Навіть самі «залізні» закони при детальному

*) Англомовний псевдонім британського статистика Ґ о с с е т а

аналізі є статистичними. Так, відомий закон Клапейрона — Менделєєва $PV = RT$ є результатом випадкових зіткнень великої кількості молекул газу, при яких випадковості взаємно компенсуються і все більш чітко вимальовується "залізна" закономірність. Отже, закономірність народжується при зіткненні великої кількості випадковостей.

Крім того, зіткнення кількох закономірностей породжує випадковість, тобто випадковість і закономірність — це дві сутності, які доповнюють одна одну. Проте тут немає повної симетрії: щоб зародилася закономірність, необхідна взаємодія великої кількості випадкових подій, але щоб зародилася випадковість, іноді досить зіткнення двох закономірностей. Ця асиметрія породжує "стрілу часу" — напрям усіх процесів від минулого до майбутнього.

Описана тенденція народження закономірності з великого числа випадковостей здійснюється не завжди, крім умови $n \to \infty$ у кожному конкретному випадку повинні виконуватися ще додаткові умови. У теорії ймовірностей вони формулюються як теореми під спільною назвою "закон великих чисел". Одну з таких теорем — теорему Ляпунова було вже сформульовано. Додаткова умова тут полягає в малому впливі кожної величини X на всю суму $X = X_1 + \ldots + X_n$. Нижче буде розглянуто дві фундаментальні теореми, які стосуються закону великих чисел. Розглянемо спочатку поведінку середнього арифметичного однаково розподілених випадкових величин і доведемо одну важливу нерівність.

17.6.1. Середнє арифметичне однаково розподілених випадкових величин. Нерівність Чебишова

Нехай X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — незалежні однаково розподілені випадкові величини, для яких $M(X_i) = a$, $D(X_i) = D$, $\sigma(X_i) = \sigma$. Розглянемо

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

Знайдемо числові характеристики X:

$$M(X) = M\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n} an = a,$$

$$D(X) = D\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} Dn = \frac{1}{n} D,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma/\sqrt{n}.$$

Як бачимо, X має той самий центр розподілу, але менше розсіяння, ніж кожна з X_i, тобто X — надійна і стійка до випадковостей величина. Тому при експериментальних дослідженнях

вимірювання слід спочатку дублювати, а потім обчислювати їх середнє арифметичне. При цьому похибка зменшується в $\sqrt{n}$ разів.

Згідно з виразом для $\sigma(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(X)=0$, але звідси ще не випливає, що похибку можна звести до нуля. Справа в тому, що крім випадкових помилок вимірювання, існують систематичні помилки, які не залежать від n (називатимемо їх помилкою приладу $\sigma_{пр}$). Тому число вимірювань n повинно бути обмеженим співвідношенням

$$\sigma_{пр} \le \sigma/\sqrt{n},$$

звідки

$$n \le \sigma^2/\sigma_{пр}^2.$$

Велике прикладне значення має нерівність Чебишова

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} D(X). \qquad (17.17)$$

Розглянемо дві протилежні події:

$$|X - M(X)| < \varepsilon, \quad |X - M(X)| \ge \varepsilon.$$

Звідси

$$P(|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} D(X).$$

Довівши цю нерівність, матимемо нерівність (17.17).

Потім знаходимо

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - M(X))^2 =$$

$$= \Big(\sum_{i:\,|x_i - M(X)| < \varepsilon} + \sum_{i:\,|x_i - M(X)| \ge \varepsilon}\Big) p_i (x_i - M(X))^2 \ge$$

$$= \sum_{i:\,|x_i - M(X)| \ge \varepsilon} p_i (x_i - M(X)) \ge \sum_{i:\,|x_i - M(X)| \ge \varepsilon} p_i \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \sum p_i =$$

$$= \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \ge \varepsilon).$$

П. Дальномір класу *) 0.1 вимірює відстань до цілі $X = 2000$ м. Яка ймовірність того, що відхилення відстані від її математичного сподівання не перевищує 10 м?

Знаючи клас дальноміра, оцінимо величину σ

$$\sigma = 0{,}001 \cdot 2000 = 2,$$

тобто

$$D = 4.$$

Користуючись нерівністю (17.17), дістаємо

*) Клас приладу — це виражена у відсотках максимальна похибка приладу.

$$P(|X - 2000| < 10) \geq 1 - \frac{4}{10^2} = 0{,}96.$$

Беручи відстань до 1 м, маємо

$$P(|X - 2000| < 1) \geq 1 - \frac{4}{1^2} = -3.$$

Як бачимо, інформативність нерівності щезла, оскільки ймовірність завжди невід'ємна. Проте не не зв'язано з нерівністю Чебишова, оскільки, виставляючи жорсткі вимоги до відхилення, треба застосовувати прилад вищого класу. "З нічого не буде чогось", — сказав Шекспір вустами короля Ліра.

17.6.2. Теореми Чебишова і Бернуллі

Т.1. *Якщо* X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — *попарно незалежні випадкові величини з рівномірно обмеженими дисперсіями,* $D(X_i) \leq C$, *крім того,* $X = \frac{1}{n}\sum X_i$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} P(X - M(X)) = 1.$$

Застосовуючи нерівність Чебишова при $D(X) = D(X_i)/\sqrt{n}$, дістаємо

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{P(X_i)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c'}{n\varepsilon} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Теорема Чебишова обґрунтовує доцільність використання X замість X_i при вимірюваннях і застосування так званого вибіркового методу в статистиці.

Т.2. Якщо в кожному з n незалежних випробувань подія A настає зі сталою ймовірністю (схема Бернуллі), то

$$\lim_{n \to \infty} P(|w(A) - p| < \varepsilon) = 1,$$

де відносна частота $w(A) = \frac{m}{n}$, n — число всіх дослідів, m — число тих з них, в яких настає A. При цьому можна застосувати Т.1, оскільки незалежність X_i випливає з незалежності випробувань, а обмеженість дисперсії випливає з того, що

$$D(X_i) = pq = p(1 - p) \leq \frac{1}{4} = C.$$

Оскільки X_i — кількість появ події A в одному випробуванні, то $M(X_i) = p$. Маємо $M(\overline{X}) = p$ $(M(\overline{X}) = M(X_i))$. Застосовуючи нерівність (17.17), знаходимо

$$\lim_{n \to \infty} P(|X - M(X)| < \varepsilon) = \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

З теореми Бернуллі зовсім не випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} w(A) = P$. Останній результат дістав Мізес. Цей результат не є наслідком закону великих чисел. Збіжність частоти до ймовірності в теоремі Бернуллі називається збіжністю за ймовірністю, яка відрізняється від збіжності в розумінні понять аналізу, де

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon \text{ для } n > N,$$

а тут для $n > N$ нерівність може й не виконуватися, бо похибка кожного спостереження не залежить від n.

17.7. СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

17.7.1. Багатовимірні випадкові величини

1. Розглянемо спочатку конкретні приклади.

Верстат-автомат виготовляє деталі завдовжки X, зовнішній і внутрішній діаметри яких Y і Z. Тоді результат контролю деталі є тривимірною випадковою величиною (X, Y, Z).

2. Зенітна установка веде стрільбу по літаку, відстань до якого R, азимут φ, кут місця θ. При цьому влучення снаряда в ціль є тривимірною величиною (R, φ, θ).

Багатовимірні величини, як і одновимірні, можуть бути дискретними і неперервними. У подальшому обмежимося вивченням двовимірних величин, як свого часу обмежилися вивченням функцій двох змінних.

О. *Законом розподілу ймовірностей двовимірної дискретної випадкової величини* (X, Y) *називається перелік її можливих значень і відповідних їм ймовірностей.*

Закон розподілу задають, як правило, у вигляді таблиці з двома входами (табл. 17.1). Усі події в таблиці несумісні і утворюють повну групу, внаслідок чого $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$.

Таблиця 17.1

y \ x	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
y_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

За теоремою додавання ймовірностей із закону розподілу (X, Y) можна записати закон розподілу кожної з компонент, наприклад X

$$p_1 = p_{11} + p_{21} + \ldots + p_{m1}, \ \ldots, \ p_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_{mn},$$

Обернене твердження в загальному випадку не має місця, оскільки при підсумовуванні інформація про окремі доданки зникає.

Закон розподілу використовують лише при малих значеннях n.

17.7.2. Функція та щільність розподілу

О. *Функцією розподілу величини* (X, Y) *називається функція*

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

З геометричної точки зору остання ймовірність — це ймовірність того, що значення випадкової величини знаходитиметься в квадраті з вершиною (x, y) (рис. 17.11).

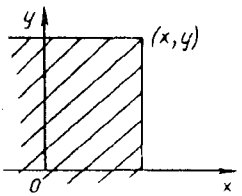


Рис. 17.11

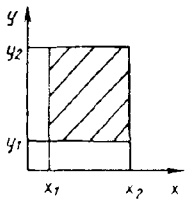


Рис. 17.12

Властивості $F(x, y)$ аналогічні властивостям $F(x)$.

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $F(x, y)$ неспадна за кожним аргументом.

3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, \infty) = 0$.

4. $F(-\infty, \infty) = 1$.

5. $F(x, \infty) = F(x)$, $F(\infty, y) = F(y)$.

П.1. Знайти $P(x_1 < X < x_2, \ Y < y) = P_1$.

Р о з в ' я з а н н я. Враховуючи рис. 17.11, маємо

$$P_1 = F(x_2, y) - F(x_1, y).$$

П.2. Знайти $P(x_1 < X < x_2, \ y_1 < Y < y_2) = P_2$.

Р о з в ' я з а н н я. Враховуючи рис. 17.12, маємо

$$P_2 = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - (F(x_2, y_1 - F(x_1, y_1)).$$

О. *Щільністю ймовірності величини* (X, Y) *називається функція*

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x, \ y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \, \Delta y}.$$

Властивості $f(x, y)$ аналогічні властивостям $f(x)$. Наведемо їх.

1. $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}$.

2. $f(x, y) \geq 0$.

3. $\int\limits_{\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

4. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$.

5. $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$, $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$.

В разі незалежності X і Y

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y), \quad f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y).$$

Останні вирази можна вважати означенням незалежності складових X і Y випадкової величини (X, Y).

17.7.3. Умовний розподіл

Розглянемо випадкову величину (X, Y), компоненти якої X і Y взаємозалежні, як відомо, для залежних випадкових подій A і B

$$P(B/A) = P(AB)/P(A).$$

О. *Для випадкової величини* (X, Y) *умовним розподілом імовірностей компоненти* X *за умови, що* $Y = y$, *називається множина умовних імовірностей* $P(X_1/Y_j)$, $P(X_2/Y_j) \ldots, P(X_n/Y_j)$, *причому*

$$P(X_i/Y_j) = P(X_i\, Y_j)/P(Y_j).$$

Аналогічно визначається умовний розподіл імовірностей компоненти Y.

Для умовного розподілу ймовірностей справедлива така теорема.

Т. *Сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює одиниці.*

Справді, оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n} P(X_i\, Y_j) = P(Y_j)$, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(X_i/Y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i\, Y_j)/P(Y_j) = \frac{1}{P(Y_j)} \sum_{i=1}^{n} P(X_i\, Y_j) = \frac{P(Y_j)}{P(Y_j)} = 1.$$

За допомогою цього результату можна контролювати правильність обчислень.

Велике практичне значення має *умовне математичне сподівання* величини (X, Y).

О. *Умовним математичним сподіванням компоненти Y, обчисленої за умови, що компонента X набула значення x, називається величина*

$$M(Y/X = x) = \sum_{j=1}^{n} y_j P(y_j/X).$$

Аналогічно означаємо

$$M(X/Y = y) = \sum_{j=1}^{n} x_i P(x_i/Y).$$

Для побудови такої характеристики нанесемо всі пари емпіричних точок на площину XOY. Розіб'ємо інтервал зміни X на n рівних частин. У кожній виберемо середні значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і знайдемо $M(Y/X = x_1), \ldots, M(Y/X = x_n)$. Сполучивши ці точки плавною кривою, дістанемо $M(Y/X = x) = f^*(x)$.

Аналогічно будуємо $M(X/Y = y) = f^{**}(y)$. При цьому впевнимося, що статистичні функції $f^*(x)$, $f^{**}(x)$ не взаємно обернені, як звичайно, коли маємо справу з функціональними залежностями. Тут не можна з графіка однієї функції дістати графік другої, оскільки статистичні залежності не є жорсткими.

17.7.4. Числові характеристики випадкової величини

Крім відомих характеристик $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ та ін., які характеризують кожну компоненту окремо, для (X, Y) вводять кореляційний момент μ_{xy} *і коефіцієнт кореляції*[*] r_{xy}, які характеризують величину сукупно.

О. *Кореляційним моментом випадкової величини* (X, Y) *називається величина*

$$\mu_{xy} = M((X - M(X))(Y - M(Y))).$$

Ураховуючи властивості математичного сподівання, маємо

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$$

З означення кореляційного моменту випливають його властивості.

1. Для незалежних X і Y $\mu = 0$, оскільки

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

Зазначимо, що коли $\mu_{xy} = 0$, то звідси не завжди випливає незалежність X і Y.

2. $|\mu_{xy}| \le \sigma(X)\,\sigma(Y)$.

Опустимо доведення цієї властивості.

---

[*] Від лат. relatio, англ. relation — відношення, зв'язок.

Кореляційний момент має розмірність добутку розмірностей X і Y.

О. *Коефіцієнтом кореляції випадкової величини* (X, Y) *називається величина*

$$r_{xy} = \mu_{xy}/(\sigma(X)\,\sigma Y)).$$

Безпосередньо з означення випливає, що r_{xy} — безрозмірна величина, а, крім того, $|r_{xy}| \leq 1$. Якщо $r_{xy} \neq 0$, то кажуть, що величини X і Y *корельовані*, а якщо $r_{xy} = 0$, то — *некорельовані*. Незалежні величини завжди некорельовані.

Розглянуті функції $f(x)$ і $f^*(y)$ називаються *функціями регресії*[*] відповідно Y на X і X на Y. Якщо ці функції лінійні, то відповідні величини зв'язані лінійною кореляційною залежністю $y = kx + b$, де коефіцієнти k і b можна знайти методом найменших квадратів.

Якщо виконати цю процедуру, то лінійна кореляційна залежність набирає вигляду

$$Y - M(Y) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy}(X - M(X)).$$

Така пряма називається прямою регресії Y на X. Це аналог рівняння пучка прямих.

Величина r_{xy} відіграє тут фундаментальну роль, оскільки дає змогу оцінити зв'язок між X і Y, а саме:

при $|r_{xy}| = 1$ маємо функціональний зв'язок (рис. 17.13),

при $0 < |r_{xy}| < 1$ — статистичний зв'язок (рис. 17.14),

при $r_{xy} = 0$ лінійний зв'язок відсутній (рис. (17.15).

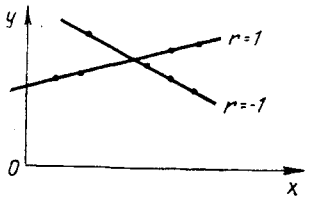


Рис. 17.13

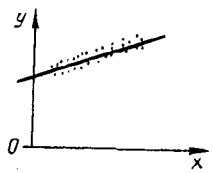


Рис. 17.14

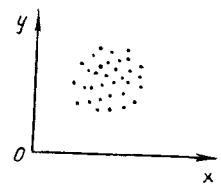


Рис. 17.15

Ця величина використовується і в інших залежностях, наприклад в щільності ймовірності двовимірного нормального розподілу

$$f(x, y) = (2\pi\,\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2})^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2(1 - r_{xy}^2)}\left(\frac{(x - a_1)^2}{\sigma^2 x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(y - a_2)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{x - a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y - a_2}{\sigma_y}\right)\right).$$

---

[*] Від лат. regressio — повернення.

Якщо X і Y незалежні, то

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}\right) = f_1(x)\, f_2(y).$$

17.8. ПОНЯТТЯ ПРО ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

17.8.1. Ланцюг Маркова. Рівність Маркова

Розглянемо систему, яка може мати k станів $A_1, A_2, \ldots, A_k$, які утворюють повну групу несумісних подій. Над нею виконується послідовність випробувань. Позначимо через $P_{ij}(S)$ умовну ймовірність того, що в S-му випробуванні система знаходиться в стані j після того, як в S-1 випробуванні вона знаходилася в стані i. Якщо P (S) не залежить від результатів виконаних раніше випробувань (система без пам'яті), то послідовність випробувань такої системи називається ланцюгом Маркова.

Зміна системи може проходити у визначені фіксовані чи будь-які випадкові моменти часу. У першому випадку відповідний ланцюг Маркова називають ланцюгом з дискретним, а в другому — з неперервним часом. Якщо умовна ймовірність $P_{ij}(S)$ не залежить від номера випробування, тобто $P_{ij}(S) = P_{ij}$, то ланцюг називається однорідним. Якщо число станів системи скінченне, то ланцюг називається скінченним.

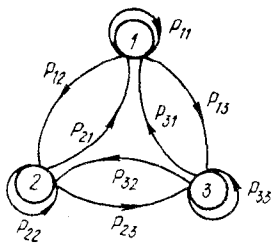


Рис. 17.16

П.1. Шахтний насос головного водорозливу може знаходитися в трьох станах (рис. 17.16): 1) у роботі, 2) у резерві, 3) у ремонті. Умовні ймовірності переходу системи з одного стану в інший зручно подати у вигляді матриці, яка має вигляд

$$P_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

У загальному випадку така матриця, яку називають матрицею переходу, має вигляд

$$P_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \ldots p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} \ldots p_{2k} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} \ldots p_{kk} \end{vmatrix}.$$

Оскільки в кожному рядку матриці розміщені ймовірності переходу з одного стану i в будь-який інший, які утворюють повну групу, то

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Нехай $P_{ij}(n)$ — ймовірність того, що в результаті випробувань система переходить зі стану i в стан j. При $n = 1$ маємо матрицю перехідних станів P_1, елементи якої P_{ij}.

Знайдемо матрицю P_n, елементи якої є ймовірності $p_{ij}(n)$. Для цього введемо проміжний стан r між i та j, тобто вважаємо, що зі стану i система за m кроків переходить у стан r з імовірністю $P_{ir}(m)$, після чого за $n - m$ кроків зі стану r вона переходить у стан j з імовірністю $P_{rj}(n - m)$.

Комбінуючи теореми додавання та множення ймовірностей, дістанемо

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n - m).$$

Це і є шукана рівність Маркова.

Знаючи $p_{ij}(1) = p_{ij}$, тобто P_1, можна знайти $p_{ij}(r)$, тобто P_2 і т.д. Справді, нехай $n = 2$, $m = 1$. З рівності Маркова маємо

$$P_{ij}(2) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(1)\, p_{rj}(1) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}\, p_{rj} \Rightarrow P_2 = P_1 P_2 = P_1^2.$$

Аналогічно $p_3 = p_1, \ldots, p_n = p_1^n$.

П.2. Шахтний вентилятор місцевого провітрювання може знаходитися в двох станах: 1) у роботі, 2) у ремонті (рис.17.17). Матриця переходу має вигляд

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{vmatrix}.$$

Знайти P_2, P_3.

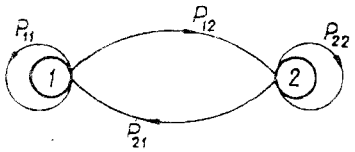


Рис. 17.17

Р о з в ' я з а н н я. Виконуючи множення матриць, маємо

$$P_2 = P_1^2 = \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}34 & 0{,}64 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{vmatrix},$$

$$P_3 = P_1^3 = \begin{vmatrix} 0{,}34 & 0{,}64 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}334 & 0{,}666 \\ 0{,}333 & 0{,}667 \end{vmatrix}.$$

17.8.2. Випадкові функції

Раніше розглядалися випадкові функції величини, незалежні від часу. Проте це не завжди так. Наприклад, швидкість літака — це функція, залежна від часу, але сама ця функція змінюється від одного польоту до другого.

О. *Функція називається випадковою, якщо в результаті випробувань вона може набирати того чи іншого конкретного вигляду, невідомого наперед і залежного від випадкових чинників.*

Конкретний вигляд випадкової функції в даному випробуванні називається реалізацією випадкової функції. Позначатимемо випадкові функції через $x(t)$, $y(t)$, ..., а їх реалізації — через

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t), \ldots$$

Розглянемо певну випадкову функцію $x(t)$, над якою виконано n незалежних випробувань. В результаті дістанемо реалізації $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Зафіксуємо деяке значення t. При цьому випадкова функція перетвориться на випадкову величину, яка називається перерізом випадкової функції (рис. 17.18). Таким чином, випадкова функція об'єднує властивості випадкової величини (при фіксованому t) і невипадкової функції (при фіксованому номері випробування).

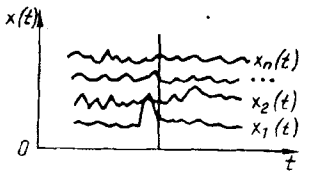


Рис. 17.18

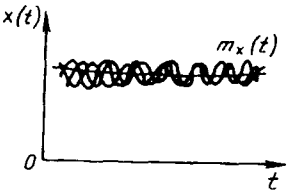


Рис. 17.19

Оскільки описування випадкової функції складне, то в багатьох задачах користуються сукупними уявленнями, а саме початковими й центральними моментами, головні з яких — математичне сподівання й дисперсія випадкової функції.

О. *Математичним сподіванням випадкової функції називається невипадкова функція $m_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкової функції* (рис. 17.19);

$m_x(t) = M(X(t))$.

Властивості $m_x(t)$

1. $M(\varphi(t)) = \varphi(t)$.
2. $M(\varphi(t)X(t)) = \varphi(t)\, m_x(t)$.
3. $M(X(t) + Y(t)) = m_x(t) + m_y(t)$.

П.1. Випадкова функція має вигляд $X = U\cos t$, де U — випадкова величина, причому $M(U) = 5$. Знайти $m_x(t)$.

Р о з в ' я з а н н я. Користуючись першою властивістю $m_x(t)$ (рис. 17.19), маємо

$$m_x(t) = M(X(t)) = M(U\cos t) = M(U)\cos t = 5.$$

О. *Дисперсією випадкової функції $x(t)$ називається невипадкова функція $D_x(t)$, значення якої для кожного t дорівнює дисперсії відповідного перерізу випадкової функції, тобто*

$$D_x(t) = D(x(t)).$$

Для середнього квадратичного відхилення випадкової функції маємо

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Властивості D (x (t))

1. $D_x(\varphi(t)) = 0.$
2. $D_x(x(t) + \varphi(t)) = D_x(t).$
3. $D_x(x(t)\,\varphi(t)) = \varphi^2(t)\,D_x(t).$

П.2. За умовами п.1 знайти $D(x(t))$, якщо $D(U) = 3$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$D(x(t)) = 3\cos^2 t.$$

За допомогою випадкових функцій можна розв'язувати дві основні задачі аналізу і синтезу систем.

Задача аналізу: відомі параметри пристрою та ймовірнісні характеристики сигналу, який надходить на вхід. Треба знайти характеристики вихідного сигналу.

Задача синтезу: задані ймовірнісні характеристики вхідного й вихідного сигналів. Треба спроектувати систему, яка здійснює оптимальне перетворення вхідного сигналу у вихідний.

РОЗДІЛ 18

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

18.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

18.1.1. Генеральна і вибіркова сукупності

Математична статистика розробляє методи реєстрації, опису й аналізу статистичних даних; її завдання — об'єктивно збирати дані, встановлювати закони розподілу випадкових величин, знаходити їх параметри, перевіряти статистичні гіпотези.

Центральним поняття математичної статистики є поняття *генеральної* [*)] та *вибіркової* сукупності. *Генеральна сукупність — це множина об'єктів однакової природи, яка повинна бути перевірена на певну кількісну чи якісну ознаку. Вибіркова сукупність* (називатимемо вибіркою) — *це підмножина генеральної сукупності.* Основними параметрами таких сукупностей є N і n — їх обсяги (кількість об'єктів). Вибіркова сукупність існує об'єктивно, оскільки перед нею ставляться вимоги правильно відображати пропорції генеральної сукупності (бути репрезентативною [**)]). Суть організаційної репрезентативної вибірки виклав один з керівників інституту Геллапа: для того, щоб оцінити смак супу, не треба з'їдати весь котел, досить, добре розмішавши, з'їсти лише одну ложку супу. Головне в цьому рецепті — розмішати, а це здійснюється за рахунок того, що вибірку здійснюють випадково, наприклад, за допомогою таблиці випадкових чисел.

Залежно від обсягу (об'єму) генеральної сукупності вибірка може бути як повторною, так і безповторною (об'єкт повертається чи не повертається до генеральної сукупності). *Елемент вибірки називається варіантою x_i, зростаюча послідовність варіант утворює варіаційний ряд.* Якщо n велике, то ряд перетворюють в угруповання, для чого весь діапазон зміни ознаки x розбивають на k рівних інтервалів і підраховують, скільки значень n_i міститься в i-му інтервалі, потім обчислюють відносні частоти $w_i = n_i/n$ і заносять результати до таблиці.

[*)] Від англ. general — загальний.

[**)] Від англ. represent — представляти.

Припустимість заміни ймовірностей $P(A)$ відносними частотами $W(A)$ обґрунтована теоремою Бернуллі. Графічне зображення угруповання називають гістограмою*) (рис. 18.1), яка є аналогією щільності розподілу ймовірностей, при цьому її площа повинна дорівнювати одиниці ($\Delta x = (a_k - a_0)/k$).

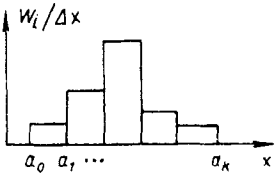


Рис. 18.1

18.1.2. Оцінка числових характеристик

Генеральна сукупність і вибірка мають певні числові характеристики. Статистична оцінка параметра Θ за допомогою Θ^* повинна задовольняти такі умови:

1) бути незміщеною, $M(\Theta^*) = \Theta$, тобто не повинна містити систематичної похибки;

2) бути такою, що $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1$;

3) бути ефективною, тобто $D(\theta^*)$ повинна бути мінімальною.

Оцінкою математичного сподівання $M(X)$ генеральної сукупності є вибіркове середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \tag{18.1}$$

застосування його ґрунтується на теоремі Чебишова, причому

$$M(\bar{x}) = M(X).$$

Оцінкою генеральної дисперсії $D(X)$ є *вибіркова дисперсія*

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i,$$

а оцінка середньоквадратичного відхилення генеральної сукупності — це *вибірковий середній квадратичний відхил* $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Останні дві оцінки на відміну від першої є зміщеними, оскільки при обчисленні D_B на вибірку накладено за'язок (18.1), що змінило число ступенів вільності на одиницю. Для усунення зміщення (при малих n) вводять виправлену дисперсію

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i,$$

*) Від грецьк. «істос», «грама» — зображення стовпцем.

де S — виправлений середній квадратичний відхил.

Статистичною оцінкою кореляційного моменту генеральної сукупності μ_{xy} є вибірковий кореляційний момент

$$\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy},$$

а оцінкою коефіцієнта кореляції генеральної сукупності є вибірковий коефіцієнт кореляції

$$\overline{r}_{xy} = \overline{\mu}_{xy}/(\sigma_x \sigma_y).$$

18.1.3. Вирівнювання статистичного ряду

У всіх емпіричних розподілах є елемент випадковості, зв'язаний з обмеженим обсягом вибірки. Із збільшенням n випадковості згладжуються, але не завжди можна збільшити n. Тому актуальною є задача згладжування випадковостей без збільшення n. Вона розв'язується завдяки згладжуванню статистичного ряду за допомогою найближчого теоретичного розподілу, вигляд кривої $f(x)$ якого вибирають з теоретичних міркувань чи за виглядом гістограми.

Крім емпіричних частот n_i, розглядають теоретичні частоти n_i', отримані за допомогою закону розподілу

$$n_i' = np_i. \qquad (18.2)$$

П. Провести вирівнювання статистичного ряду, заданого в табл. 18.1 ($n = 100$).

Таблиця 18.1

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	13	28	27	19	7	4	1	1

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо спочатку: $\overline{x}_в \neq 2$; $D_B = 2{,}04$. Оскільки $\overline{x}_в \approx D_B$, то скоріше за все це розподіл Пуассона, для якого $\lambda = 2$. За формулою $P(k) = 2^k e^{-2}/k!$ обчислимо:

$$P(0) = 0{,}1353, \quad P(1) = 0{,}2707, \quad P(2) = 0{,}2707,$$
$$P(3) = 0{,}1804, \quad P(4) = 0{,}0902, \quad P(5) = 0{,}0351,$$
$$P(6) = 0{,}0180, \quad P(7) = 0{,}0034.$$

Користуючись (18.2), дістаємо $n_0' = 14$, $n_1' = 27$, $n_2' = 27$, $n_3' = 18$, $n_4' = 9$, $n_5' = 4$, $n_6' = 0$, $\sum n_i' = 100$.

Порівняння n_i і n_i' показує близькість теоретичного та емпіричного розподілів. У подальшому вже слід користуватися не n_i, а n_i'. Рівність

$$\sum n_i = \sum n_i'$$

повинна виконуватися обов'язково. Її використовують для контролю обчислень.

18.1.4. Точкові оцінки параметрів теоретичного розподілу

Для обчислення теоретичних частот при вирівнюванні емпіричного ряду необхідно визначити параметри теоретичного розподілу. Для цього застосовують один із наступних методів.

а) *Метод моментів або метод Пірсона*[*)] полягає в порівнюванні моментів однакового порядку теоретичного й емпіричного розподілів.

Для однопараметричних розподілів (Пуассона, експоненціального та ін.) прирівнюють перші початкові моменти $M(X) = \bar{x}$.

Для двопараметричних розподілів (нормального та ін.) прирівнюють ще й другі центральні моменти (дисперсії) $D(X) = D_B$ і т.д. Метод дає гарні результати вже при $n \geq 30$. Ми скористалися ним в останньому прикладі.

б) *Метод найбільшої правдоподібності, або метод Фішера* полягає у відшуканні максимуму функції правдоподібності

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \begin{cases} P(x_1, \theta) P(x_2, \theta) \ldots P(x_n, \theta), & x \text{ — дискретне;} \\ f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta), & x \text{ — неперервне.} \end{cases}$$

Для зручності обчислень використовують $y = \ln L$ і застосовують необхідну ознаку екстремуму

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0,$$

звідки знаходять шуканий параметр.

П. Для експоненціального розподілу $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $M(x) = \sigma(x) = 1/\lambda$, дати статистичну оцінку параметра λ.

Розв'язання. Маємо

$$L = f(x_1, \lambda) \ldots f(x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$y = \ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \lambda = 1/x.$$

Цей результат дістанемо й за допомогою методу моментів $M(x) = \frac{1}{\lambda} = \bar{x}$, але метод найбільшої правдоподібності дає гарні результати вже при $n \geq 5$.

в) *Метод найменших квадратів* (він був розглянутий раніше).

*) К. Пірсон (1857—1936) — англійський математик-статистик.

18.2. ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ

18.2.1. Гарантійний інтервал

Розглянуті вище оцінки числових характеристик і параметрів розподілу характеризуються одним числом. Називатимемо їх надалі *точковими*. При малих n вони можуть містити істотні похибки і, крім того, суперечать ідеям теорії ймовірностей, оскільки $P(X = x_0) = 0$, де X — неперервна величина. Об'єктивнішою і надійнішою є *інтервальна оцінка*, яка характеризується трьома числами, а саме: початком і кінцем інтервалу, який покриває дану оцінку θ^*, та ймовірністю, з якою відбувається ця подія. Ця ймовірність називається *надійністю*.

О. *Надійністю оцінки параметра θ генеральної сукупності за його статистичною оцінкою θ^* називається ймовірність γ, з якою відбувається нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$, тобто*

$$\gamma = P(|\theta - \theta^*| < \delta) = P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \int_{\theta^* - \delta}^{\theta^* + \delta} f(x)dx. \quad (18.3)$$

Величина γ задається заздалегідь на одному з рівнів 0,95, 0,99, 0,999 залежно від відповідальності об'єкта (наприклад, якщо йдеться про лампочку в квартирі, то $\gamma = 0{,}95$, а якщо про лампочку на пульті реактора АЕС, то $\gamma = 0{,}999$).

О. *Інтервал $(\theta^* - \delta,\ \theta^* + \delta)$, який покриває параметр θ з надійністю γ і точністю δ, називається гарантійним інтервалом.*

Метод гарантійних інтервалів розроблений Нейманом*). Щоб побудувати такий інтервал, треба розв'язати рівняння (18.3) відносно δ. Якщо задана функція розподілу, то

$$\gamma = F(\theta^* + \delta) - F(\theta^* - \delta).$$

18.2.2. Оцінка математичного сподівання для нормального розподілу при відомому та невідомому σ

Розглянемо нормально розподілену випадкову величину X з відомим σ (наприклад, відомо клас приладу, за допомогою якого виконували вимірювання). Треба знайти гарантійний інтервал, який покриває величину a (математичне сподівання) з надійністю γ.

Як відомо, статистичною оцінкою a є $\bar{x}$, причому $M(X) = a$, $\sigma(X) = \sigma/\sqrt{n}$. Вимагатимемо, щоб $P(|X - a| < \delta) = \gamma$. У випадку нормального закону

*) Е.Ф.Нейман (1894—1981) — американський математик-статистик.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Замінимо тут X на $\bar{x}$, σ — на $\sigma/\sqrt{n}$.
Тоді

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma)=2\Phi(t)=\gamma,\ t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma},$$

звідки

$$\Phi(t)=\gamma/2.$$

За допомогою таблиці функції Лапласа по γ знаходимо t і визначаємо $\delta=t\delta/\sqrt{n}$. Після цього будуємо ґарантійний інтервал $x-\delta<a<x+\delta$.

П.1. Випадкова величина розподілена нормально, $\sigma(X)=1$. Знайти ґарантійний інтервал для a при $x=2$, $n=16$, $\gamma=0{,}99$.

Розв'язання. За таблицею функції Лапласа по $\Phi(t)=0{,}495$ знаходимо $t=2{,}58$ і визначаємо $\delta=0{,}65$. Остаточно

$$1{,}35<a<2{,}65.$$

Зазначимо, що округлення границь інтервалу можна робити лише в напрямі його розширення.

Нехай в умовах тієї самої задачі значення σ невідоме. Така ситуація виникає, якщо вибірка складається з кількох частин, отриманих за різних умов.

Введемо безрозмірну величину

$$T=(x-a)\,(s/\sqrt{n})^{-1},$$

яка має *розподіл Стьюдента*, причому $M(T)=0$. При $n\to\infty$ він точно збігається з нормальним розподілом, а при $n>30$ відрізняється від нього неістотно (з інженерної точки зору) і не містить σ. Входом в таблицю розподілу Стьюдента є n і γ.

З умови

$$P\left(\left|\frac{x-a}{s/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma\right)=\gamma$$

знаходимо за допомогою таблиці величину t_γ і будуємо ґарантійний інтервал

$$\bar{x}-\frac{st_\gamma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{st_\gamma}{\sqrt{n}}.$$

П.2. Випадкова величина X розподілена нормально, $n=36$, $\bar{x}=10$, $s=1$, $\gamma=0{,}95$. Оцінити величину a.

Розв'язання. За таблицею розподілу Стьюдента для даних γ і n знаходимо $t_\gamma=2{,}03$ і визначаємо $\delta=0{,}34$. Остаточно

$$9{,}66 < a < 10{,}34.$$

П.3. Випадкова величина X має нормальний розподіл, $\bar{x} = 10$, $s = 3$, $n = 9$. Оцінити значення X при $\gamma = 0{,}95$.

Розв'язання. За таблицею розподілу Стьюдента при даних γ і n знаходимо $t_\gamma = 2{,}31$ і визначаємо $\delta = 2{,}31$. Остаточно

$$7{,}69 < a < 12{,}31.$$

18.2.3. Оцінка σ і s для нормального закону

Нехай випадкова величина має нормальний розподіл. Треба оцінити величину σ за статистичною оцінкою s, тобто треба знайти гарантійний інтервал, який покриває σ з надійністю γ.

Для цього повинна виконуватися рівність

$$P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma \Rightarrow P(s(1 - q) < \sigma < s(1 + q)) = \gamma,$$

де $q = \delta / s$. Щоб знайти безрозмірну величину q, введемо безрозмірну випадкову величину

$$\lambda = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n - 1},$$

яка має «*xi*»-розподіл зі щільністю ймовірності

$$R(x, n) = \frac{x^{n-2}e^{-x^2/2}}{2^{(n-2)/2}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}.$$

За таблицею для $q(\gamma, n)$ знаходимо q і будуємо гарантійний інтервал

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q).$$

За цією ж методикою оцінюють точність вимірювань (по σ).

П.1. Для нормально розподіленої випадкової величини X маємо $n = 25$, $s = 1$, $\gamma = 0{,}99$. Знайти гарантійний інтервал для σ.

Розв'язання. За таблицею $q(\gamma, n)$ знаходимо $q = 0{,}49$. Будуємо гарантійний інтервал ($s = 1$)

$$1 - 0{,}49 < \sigma < 1 + 0{,}49, \quad \text{або} \quad 0{,}51 < \sigma < 1{,}49.$$

П.2. За $n = 20$ рівноточних вимірів дістали $s = 1$. Знайти точність вимірювань з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

Розв'язання. За таблицею $q(\gamma, n)$ знаходимо $q = 0{,}37$. Маємо інтервал

$$0{,}63 < \sigma < 1{,}37.$$

18.3. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

18.3.1. Загальні положення

Статистичною називають гіпотезу про вигляд емпіричного розподілу та його параметри.

Приклади статистичних гіпотез: випадкова величина розподілена за нормальним законом, математичні сподівання випадкових величин збігаються, точність вимірювань однієї величини більша від точності вимірювання другої. Гіпотеза ж про те, що неідентифіковані літаючі об'єкти (НЛО) є проявом позаземних цивілізацій, хоч дуже цікава, але не статистична.

Гіпотезу, яку перевіряють, називають *нульовою* (H_0), а протилежну їй — *альтернативною* (H_1). Приймаючи чи відкидаючи H_0, можна зробити помилку першого роду (відкинути правильну гіпотезу) чи другого роду (прийняти неправильну). Їх наслідки істотно різні.

Так, у ситуації, коли горить будинок, нехай гіпотеза H_0 полягає в тому, що треба виносити речі, H_1 — не треба їх виносити. Помилка першого роду: речі можна було винести, але вирішили цього не робити, в результаті чого речі згоріли. помилка другого роду: речі вже не можна було винести, але вирішили виносити, внаслідок чого згоріли речі і постраждали люди, які їх виносили.

Тому H_0 відкидають легше, ніж приймають. Імовірність зробити помилку першого роду називають рівнем значущості. Його задають заздалегідь ($\alpha = 0{,}05,\ 0{,}01,\ 0{,}001$) залежно від життєвої необхідності.

Після вибору α приймають спеціальну випадкову величину K, яку називають статистичним критерієм (як правило, кожна нова задача вимагає введення свого статистичного критерію). Усю множину його значень K за допомогою числа $k_{кр}$ розбивають на підмножини: критичну область, де H_0 відкидають, і область прийняття гіпотези, де H_0 не відкидають. Критична область залежно від вибору $k_{кр}$ може бути односторонньою (правою (рис. 18.2) чи лівою) або двосторонньою (рис. 18.3).

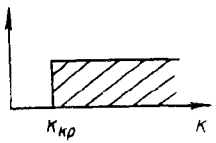


Рис. 18.2

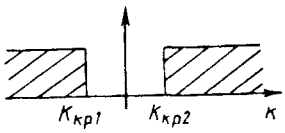


Рис. 18.3

Для правосторонньої (лівосторонньої) критичної області значення $k_{кр}$ дістають з рівності

$$P\,(K \geq k_{кр}) = \alpha\ (P\,(K \leq k_{кр}) = \alpha\ ).$$

Для двосторонньої області користуються рівністю

$$P\,(K \le k_{\text{кр}}^{(1)}) + P\,(K \ge k_{\text{кр}}^{(2)}) = \alpha.$$

Практика показує, що правостороння оцінка більш жорстка і користуються нею частіше. Якщо за змістом задача передбачає двосторонню критичну область, то за основу беруть $k_{\text{кр}}^{(2)}$ і вважають, що

$$P\,(K \ge k_{\text{кр}}^{(2)}) = \alpha/2.$$

Критичні точки $k_{\text{кр}}$ знаходять за таблицями розподілу кожного критерію K, входом в які є α і n.

18.3.2. Порівнювання математичних сподівань нормально розподілених випадкових величин

Нехай генеральні сукупності X і Y розподілені нормально. Обсягами вибірок є відповідно n і m, відомо також $\overline{x}$ і $\overline{y}$. Треба при рівні значущості α перевірити гіпотезу H_0: $M\,(\overline{x}) = M\,(\overline{y})$.

Тут за критерій K використаємо випадкову величину

$$Z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sigma\,(\overline{x} - \overline{y})} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{D\,(X)/n) + (D\,(Y)/n)}}, \qquad (18.4)$$

яка теж має нормальний розподіл, але вже з параметрами

$$M\,(Z) = 0, \quad \sigma\,(Z) = 1.$$

Критичні області будують залежно від H_1.

І в и п а д о к. H_1: $M\,(X) > M\,(Y)$. При цьому використовують правосторонню область. Внаслідок симетрії нормального розподілу маємо

$$P\,(0 < Z < z_{\text{кр}}) + P\,(Z \ge z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2}.$$

Оскільки

$$P\,(0 < Z < z_{\text{кр}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_{\text{кр}}} e^{-x^2/2} = \Phi\,(z_{\text{кр}}), \quad P\,(Z \ge z_{\text{кр}}) = \alpha,$$

то остаточна формула набирає вигляду

$$\Phi\,(z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha. \qquad (18.5)$$

Звідси за допомогою таблиці функції Лапласа $\Phi\,(z)$ знаходимо $z_{\text{кр}}$. Якщо значення $z_{\text{сп}}$ (18.3) таке, що $z_{\text{сп}} \ge z_{\text{кр}}$, то H_0 відкидаємо, якщо $z_{\text{сп}} < z_{\text{кр}}$, то не відкидаємо.

П.1. Випадкові величини X і Y розподілені за нормальним законом. Зроблено вибірки обсягами $n = 10$ і $m = 100$ і знайдено $\overline{x} = 14{,}3$, $\overline{y} = 12{,}2$. Відомо також, що $D(X) = 22$, $D(Y) = 18$. Треба при $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, якщо H_1: $M(X) > M(Y)$.

Розв'язання.

За формулою (18.5)

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1}{2} - 0{,}05 = 0{,}45 \Rightarrow z_{кр} = 1{,}64.$$

За допомогою (18.4) визначаємо

$$z_{сп} = \frac{14{,}3 - 12{,}2}{\sqrt{2{,}2 + 1{,}8}} = 1{,}05.$$

Оскільки $z_{сп} < z_{кр}$, то H_0 не відкидаємо.

II випадок. H_1: $M(X) \neq M(Y)$. Маємо двосторонню критичну область, для якої

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(Z \geq z_{кр}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(z_{кр} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(z_{кр}) = \frac{1}{2}(1 - \alpha).$$

Далі міркуємо так, як у випадку I.

П.2. Випадкові величини розподілені нормально. Зроблено вибірки обсягом $n = 50$, $m = 60$ і визначено $\overline{x} = 1275$ і $\overline{y} = 1250$. Задано $D(X) = 100$, $D(Y) = 120$. Треба при $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, якщо H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. За формулою (див. П.1) $\Phi(z_{кр}) = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ маємо

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}01) = 0{,}495,$$

звідки за таблицею функції Лапласа $\Phi(z)$ знаходимо $z_{кр} = 2{,}58$. Користуючись рівністю (18.4), дістаємо

$$z_{сп} = \frac{1275 - 1250}{\sqrt{2 + 2}} = 12{,}5.$$

Оскільки $z_{сп} > z_{кр}$, то H_0 відкидаємо.

18.3.3. Порівняння точності двох методів вимірювання

Точність двох методів вимірювання оцінюється за їхніми дисперсіями. Нехай випадкові величини X і Y мають нормальні закони розподілу. За незалежними вибірками з обсягами n і m визначають s_x^2 і s_y^2, $s_x^2 > s_y^2$. Як критерій використовують випадкову величину

$$F = s_x^2 / s_y^2, \tag{18.6}$$

яка має розподіл Фішера—Снедекора зі ступенями вільності $k_1 = n - 1$ і $k_2 = m - 1$. Число їх зменшено на одиницю, оскільки при обчисленні s_x^2 і

s_y^2 використані величини $\bar{x}$ і $\bar{y}$, які визначені за тими самими даними. Входом у таблицю розподілу $F \in \alpha,\ k_1,\ k_2$.

Тут також залежно від H_1 можливі два випадки.

І випадок. H_0: $D(X) = D(Y)$, H_1: $D(X) > D(Y)$. Маємо правосторонню критичну область. Щоб знайти $F_{кр}$, користуємося виразом $P(F \geq F_{кр}) = \alpha$.

Значення $F_{сп}$ знайдемо за формулою (18.5) і порівнямо з $F_{кр}$. Якщо $F_{сп} \geq F_{кр}$, то H_0 відкидаємо, якщо $F_{сп} < F_{кр}$, то не відкидаємо.

П. Для нормально розподілених випадкових величин X і Y зроблено вибірки з обсягом $n = 12$, $m = 15$ і визначено $s_x^2 = 11{,}41$ і $s_y^2 = 6{,}52$. Треба при $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $s_x^2 = s_y^2$, якщо H_1: $s_x^2 > s_y^2$.

Розв'язання. За таблицею Фішера—Снедекора $F_{кр} = 2{,}56$. За формулою (18.6)

$$F_{сп} = 11{,}41/6{,}52 = 1{,}75.$$

Оскільки $F_{сп} < F_{кр}$, то H_0 не відкидаємо.

ІІ випадок. H_0: $D(X) = D(Y)$, H_1: $D(X) \neq D(Y)$. Маємо двосторонню область, для якої $P(F \geq F_{кр}) = \alpha/2$. Знаходимо $F_{сп} = 1{,}75$, $F_{кр} = 3{,}1$. Оскільки $F_{сп} < F_{кр}$, то H_0 не відкидаємо,

Зазначимо тут, що $F_{кр}$ більше, ніж при правосторонній критичній області, тобто остання справді дає жорсткішу оцінку.

18.3.4. Критерій Пірсона

Критерій Пірсона χ^2 часто застосовують при перевірці гіпотез про вигляд розподілу випадкової величини. Розглянемо

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}, \qquad (18.7)$$

де n_i, n_i^* — теоретичні та експериментальні частоти.

Входом до таблиці розподілу величини χ^2 є рівень значущості α і число ступенів вільності $r = k - m - 1$, де k — число підінтервалів, на які розбито інтервал зміни випадкової величини X, m — число параметрів теоретичного розподілу, знайдених за цією ж вибіркою. Одиницю віднімаємо тому, що на статистичний матеріал накладений зв'язок

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} n_i^* = n.$$

З таблиці розподілу χ^2 за α і r знаходимо $\chi^2_{кр}$, а з рівності (18.7) знаходимо $\chi^2_{п}$ і порівнюємо їх між собою. Якщо $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, то H_0 не відкидаємо.

П. Для даної вибірки (табл. 18.2) з $n = 504$ при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і $k = 12$ перевірити гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що генеральна сукупність розподілена за рівномірним законом.

Р о з в ' я з а н н я . Маємо $\chi^2_{\text{сп}} = 11{,}02$, $r = 12 - 1 = 11$, $\chi^2_{\text{кр}} = 19{,}7$. Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то H_0 не відкидаємо.

Таблиця 18.2.

Інтервали	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}
n_i	40	34	54	38	40	45	40	33	37	40	48	48
n_i'	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42

18.4. ПОНЯТТЯ ПРО ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Дисперсійний аналіз, основні ідеї якого розроблені Фішером, застосовують для того, щоб встановити, чи має істотний вплив деякий якісний фактор Φ на випадкову величину, яка підлягає вивченню (наприклад, вид добрива на врожайність).

Таблиця 18.3

Число випробувань	Рівні фактора			
i	Φ_1	Φ_2	...	Φ_m
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
...	...	...	...	...
t	x_{t1}	x_{t2}	...	x_{tm}
$\bar{x}_j$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_m$

Основна його ідея полягає в порівнянні факторної дисперсії, яка спричинюється дією фактора Φ на випадкову величину X, і остаточної дисперсії, обумовленої випадковостями. Вихідні дані заносять в таблицю (табл. 18.3), в якій $n = tm$ — загальна кількість даних, m — кількість рівнів фактора, t — число випробувань.

Маємо

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j, \quad S^2_{\text{заг}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m} (x_{xj} - \bar{x})^2,$$

а також факторну й остаточну виправлені дисперсії (крім загальної)

$$s^2_{\text{факт}} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_j - \bar{x})^2, \quad s^2_{\text{ост}} = s^2_{\text{заг}} - s^2_{\text{факт}}.$$

Нульова гіпотеза має вигляд

$$H_0\colon s^2_{\text{факт}} = s^2_{\text{ост}},$$

якщо при

$$H_1: s^2_{\text{факт}} > s^2_{\text{ост}}.$$

Критична область — правостороння. Для перевірки гіпотези застосовуємо критерій Фішера—Снедекора

$$F = s^2_{\text{акт}} / s^2_{\text{ост}}.$$

Таблиця 18.4

Число випробувань	Рівні фактора		
i	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	5	4	7
2	6	5	5
3	4	5	8
4	7	6	7
$\bar{x}_j$	5,75	5	6,75

Щоб знайти $F_{\text{кр}}$, користуємося співвідношенням

$$P(F \geq F_{\text{кр}}) = \alpha,$$

де α — рівень значущості. Якщо $F_{\text{сп}} \geq F_{\text{кр}}$, то H_0 відхиляємо.

П. Перевірити, чи істотний вплив фактора Φ на випадкову величину X, якщо $t = 4$, $m = 3$, $n = 12$. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$. Значення x_{ij} подано в табл. 18.4.

Розв'язання. Знаходимо $\bar{x} = 5{,}833$, $s^2_{\text{заг}} = 1{,}424$, $s^2_{\text{факт}} = 0{,}733$, $s^2_{\text{ост}} = 0{,}651$.

Обчислюємо $F_{\text{сп}} = 0{,}733/0{,}651 = 1{,}19$. За таблицею F розподілу для $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, знаходимо $F_{\text{кр}} = 19{,}16$. Оскільки $F_{\text{сп}} < F_{\text{кр}}$, то H_0 не відкидаємо, тобто вплив фактора Φ на величину X неістотний.

18.5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

18.5.1. Статистичні залежності

Дві випадкові величини X і Y можуть бути зв'язаними (функціональною або статистичною залежністю) чи не зв'язаними (рис. 18.4, 17.13, 17.14 відповідно).

Статистичні залежності виникають досить часто, оскільки величини X і Y залежні, як правило, від багатьох факторів, серед яких є й спільні для X і Y.

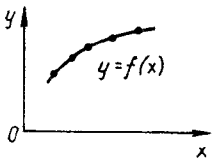


Рис. 18.4

Наприклад, X залежить від Z_1, Z_2, Z_3, а Y — від Z_2, Z_4, Z_5. Отже, залежність X і Y — статистична.

О. *Статистичною називається залежність, при якій зміна однієї випадкової величини впливає на розподіл другої. Якщо при цьому змінюється ще й середнє значення другої величини, то така статистична залежність називається кореляційною.*

Як відомо вже (п.17.7.3), кореляційна залежність виражається за допомогою умовного математичного сподівання $M(Y/X = x) = f(x)$ і називається регресією Y на X. Її статистичною оцінкою є умовне середнє $\bar{y}_x = \bar{f}(x)$. Це рівняння називається *вибірковим рівнянням регресії*, пошук його і є предметом теорії кореляції.

18.5.2. Лінійна кореляція

Якщо вибіркові рівняння регресії Y на $X \bar{y}_x = \bar{f}^*(x)$ і X на Y

$$\bar{x}_y = \bar{f}^*(y)$$

лінійні, то випадкові величини X і Y зв'язані вибірковою лінійною кореляційною залежністю, яка має вигляд (див. п.17.7.3)

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = \bar{r}_{xy} \frac{x - \bar{x}}{\sigma x}.$$

Основні задачі лінійної кореляції полягають у знаходженні $\bar{y}$, $\bar{x}$, σ_x, σ_y, $\bar{r}_{xy}$, а також в оцінці ступеня зв'язку між X і Y. Ступінь зв'язку встановлюється за допомогою $\bar{r}_{xy}$. Якщо $|\bar{r}_{xy}| \le 0{,}5$, то лінійний зв'язок вважають слабким і ним нехтують. При $0{,}5 < \bar{r}_{xy} < 0{,}8$ зв'язок вважається середнім і носить в основному інформативний характер. При $|\bar{r}_{xy}| \ge 0{,}8$ зв'язок сильний і до нього застосовують ті самі міркування, що й для функціонального. При $|\bar{r}_{xy}| = 1$ зв'язок функціональний.

18.5.3. Нелінійна кореляція

Теорія нелінійної кореляції розв'язує ті самі задачі, що й лінійної, тобто встановлення параметрів залежності $\bar{y}_x = \bar{f}(x, \alpha, \beta, \ldots)$ та ступеня залежності X і Y. Перша розв'язується за допомогою методу найменших квадратів.

Для оцінки ступеня зв'язку вибірковий коефіцієнт кореляції тут не застосовують, а користуються так званим *кореляційним відношенням*

$$\eta_{xy} = \sigma_{\bar{y}_x} / \sigma_x,$$

де n_{x_i} — число значень x в i-му інтервалі,

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_{x_i} - \bar{y})^2 n_{x_i}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (y_i - \bar{y})^2}.$$

Оскільки η_{xy} більш тонко враховує розміщення точок навколо кривої, то $\eta_{xy} \ge |\bar{r}_{xy}|$, а при $\eta_{xy} = \bar{r}_{xy}$ маємо точну лінійну кореляційну залежність.

18.5.4. Множинна кореляція

При дослідженні зв'язку між кількома випадковими величинами (більше двох) мають справу з множинною кореляцією, найпростішим випадком якої є лінійна множинна кореляція

$$Z = aX + bY + c.$$

Останнє рівняння зображає площину в тривимірному просторі.

Тут також розв'язують дві основні задачі: знаходять параметри a, b, c і встановлюють ступінь зв'язку між Z, X, Y.

Параметри знаходять за методом найменших квадратів, а ступінь зв'язку оцінюють за допомогою частинних вибіркових коефіцієнтів кореляції

$$r_{xz}^{(y)} = (r_{xz} - r_{xy}\, r_{yz}) / \sqrt{(1 - r_{xy}^2)\,(1 - r_{yx}^2)},$$

$$r_{yz}^{(x)} = (r_{yz} - r_{xy}\, r_{xz}) / \sqrt{(1 - r_{xy}^2)\,(1 - r_{xz}^2)}.$$

Ступінь загального зв'язку Z, X, Y оцінюється вибірковим сукупним коефіцієнтом кореляції

$$R = \sqrt{(r_{xz}^2 - 2r_{xy}\, r_{xz}\, r_{yz} + r_{yz}^2)/(1 - r_{xy}^2)}.$$

РОЗДІЛ 19

ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Вивчення питань, зв'язаних з пошуком екстремуму, був би неповним без розгляду основних ідей варіаційного числення, започаткованого в 1696 р. Й.Бернуллі, який сформулював, а І.Ньютон, Ґ.Лейбніц, Я.Бернуллі і Ґ.Лопіталь розв'язали різними способами задачу про брахістохрону*) (лінію найшвидшого спуску). Значний вклад у розвиток цієї галузі математики внесли Л.Ейлер і Ж.Лаґранж. завдяки їхнім працям варіаційне числення почали широко використовувати при розв'язуванні прикладних задач.

19.1. ІСТОРИЧНІ ЗАДАЧІ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

З а д а ч а п р о б р а х і с т о х р о н у . У цій задачі треба знайти траєкторію, по якій повинна рухатись під дією сили тяжіння матеріальна точка масою m без початкової швидкості, і тертя між заданими точками A і B (рис. 19.1). При цьому час, затрачений на рух, повинен бути мінімальним.

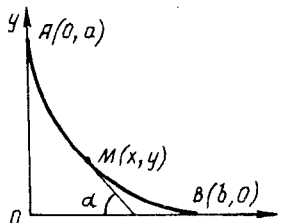


Рис. 19.1

Нехай шукана траєкторія $y = y(x)$ відома. Тоді згідно із законом збереження енергії, враховуючи рис. 19.1, маємо

$$mg(a - y) = mv^2/2.$$

Звідси

$$v = \sqrt{2g(a - y)}.$$

Проте

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha = \sqrt{2g(a - y)/(1 + y'^2)}.$$

*) Від грецьк. «брахістос», «хронос» — найкоротший час.

Тому

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{(1 + y'^2)/2g\,(a - y)}.$$

Остаточно

$$T = \int_0^T dt = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g\,(a - y)}}\, dx. \tag{19.1}$$

Необхідно далі знайти функцію $y = y(x)$, яка мінімізує вираз (19.1) при граничних умовах

$$y(0) = a, \quad y(b) = 0.$$

І з о п е р и м е т р и ч н а з а д а ч а . Згідно з легендами, цариця однієї з держав Стародавньої Греції Дідона (Дідо) змушена була втікати до Північної Африки і просити у місцевих жителів клапоть землі, який можна було б (за її словами) охопити шкурою вола. Африканці погодилися, але були дуже здивовані, побачивши, як, розрізавши шкуру на тоненькі ремінці, Дідона зв'язала їх у довжелезну вірьовку і охопила велику площу землі, що прилягала до моря. Так було засновано місто Карфаген (Картагену).

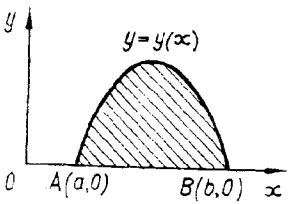


Рис. 19.2

Математична модель цієї задачі така. Площа земельної ділянки (рис. 19.2)

$$S = \int_a^b y(x)\, dx.$$

Треба знайти форму вірьовки $y = y(x)$ завдовжки

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{19.2}$$

яка забезпечує максимум S при граничних умовах

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

Ф о р м а р і в н о в а г и м е м б р а н и . Мембрана набуває потенціальної енергії при натягуванні її зі сталою силою T на контур L, який охоплює область D, що займає мембрана. Енергія обумовлена збільшенням площі мембрани порівняно з горизонтальним (нездеформованим) її станом. Як відомо, збільшення площі поверхні

$$\Delta\sigma = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy - \iint_D dx\, dy \approx \frac{1}{2} \iint_D (z'^2_x + z'^2_y)\, dx\, dy.$$

(тут скористалися лінійними членами формули Тейлора). Робота, а отже, й потенціальна енергія при деформації мембрани дорівнює

$$U = \frac{T}{2} \iint\limits_D (z'^2_x + x'^2_y)\, dx\, dy. \qquad (19.3)$$

Тепер залишається знайти форму прогину $z = z(x, y)$ мембрани, яка забезпечує мінімум потенціальної енергії, на контурі L

$$z = \varphi(x, y).$$

19.2. ФУНКЦІОНАЛ І ЙОГО ВАРІАЦІЯ

Наведені вище екстремальні задачі істотно відрізняються від розглянутих раніше задач на екстремум функцій однієї чи кількох змінних. Справді, при $y = f(x)$ розв'язком задачі є x_0 (один ступінь вільності при $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — значення $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$ (n ступенів вільності). Тут же йдеться про пошук лінії $y = y(x)$ для поверхні $z = z(x, y)$ (нескінченне число ступенів вільності).

Об'єктом дослідження на екстремум тепер є не функція, а функціонал. Наприклад,

$$I(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx. \qquad (19.4)$$

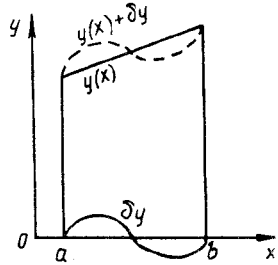


Рис. 19.3

Як відомо, функціонал — це відображення множини функцій на множину чисел (значення функції в точці, границя функції, визначений інтеграл від функції).

Варіація функціонала відіграє ту саму роль при дослідженні функціонала, що і диференціал при дослідженні функції, а саме: якщо диференціал є головною (лінійною) частиною приросту функції, то варіація є такою ж частиною приросту функціонала. Наприклад, для функціонала

$$I(y) = \int\limits_0^1 y^2\, dx$$

при варіації функції цей приріст має вигляд (рис. 19.3)

$$\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y) = \int\limits_0^1 (y + \delta y)^2 dx - \int\limits_0^1 y^2 dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 y\delta y\, dx + \int\limits_0^1 (\delta y)^2 dx,$$

де δy — приріст функції (δy розуміємо як єдиний символ), причому

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0. \tag{19.5}$$

∂y складається з двох частин — лінійної δI (варіації функціонала) і нелінійної.

Отже, маємо

$$\delta I = \int_0^1 2y\,\delta y\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\,\partial y\,dx.$$

Аналогічно для функціонала (19.4)

$$\partial I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right) dx. \tag{19.6}$$

Цей вираз аналогічний формулі повного диференціала функції двох змінних $z = z(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) z(x, y).$$

Те саме маємо у випадку варіації функціонала

$$\partial I = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y}\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\delta y'\right) F\,dx.$$

Ця аналогія поширюється й на варіації вищих порядків. Наприклад,

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

$$\delta^2 I = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y}\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\delta y'\right)^2 F\,dx = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\delta y\,\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta'^2\right) dx.$$

Аналогічно формулі Тейлора

$$\Delta z = \frac{dz}{1!} + \frac{d^2z}{2!} + \ldots + \frac{d^n z}{n!}$$

приріст функціонала виражається через його варіації так:

$$\Delta I = \frac{\delta I}{1!} + \frac{\delta^2 I}{2!} + \ldots + \frac{\delta^n I}{n!}. \tag{19.7}$$

19.3. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІОНАЛА

Якщо функціонал досягає екстремуму на деякій кривій $y(x)$, яку називають екстремаллю, то в малому околі її приріст ΔI зберігає знак: якщо мінімум, то $\Delta I < 0$; якщо максимум, то $\Delta I > 0$. Згідно

з (19.6) і (19.7), знак ΔI, який визначається знаком δI, повинен змінюватися зі зміною знака δy. Оскільки у випадку екстремуму цього не повинно бути, то

$$\delta I = 0. \tag{19.8}$$

Ця необхідна умова екстремуму функціонала аналогічна такій самій умові екстремуму функції. Якщо виконується рівність (19.8), то знак ΔI визначається знаком $\delta^2 I$, а саме: при $\delta^2 I < 0$ і $\Delta I < 0$ — максимум, при $\delta^2 I > 0$ і $\Delta I > 0$ — мінімум (достатня умова). Як бачимо, тут теж повна аналогія з екстремумом функції.

19.3.1. Рівняння Ейлера

Застосуємо рівність (19.8) до співвідношення (19.4). Для цього в (19.6) другий доданок зінтеґруємо частинами:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\,\partial y'\,dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y \Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\,dx.$$

Ураховуючи рівність (19.5), маємо

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx = 0.$$

Оскільки δy довільна, то приходимо до рівняння, яке називають *рівнянням Ейлера*, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{19.9}$$

Воно виражає в диференціальній формі необхідну умову екстремуму функціонала (19.4) і є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, загальний розв'язок якого утворює двопараметричну сім'ю екстремалей, з якої можна дістати частинний розв'язок за допомогою двох граничних умов

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{19.10}$$

Оскільки

$$d\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'}\,dx + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,dy^{-1},$$

то

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = F''_{xy} + y'F''_{yy'} + y''F''_{y'y'}.$$

Тоді (19.9) набирає вигляду

$$F'_y = F''_{xy} - y'F''_{yy'} - y''F''_{y'y'} = 0. \qquad (19.11)$$

19.3.2. Зниження порядку рівняння Ейлера

Порядок рівняння (19.11) можна знизити на одиницю у таких чотирьох випадках.

І в и п а д о к . Підінтегральна функція $F(x, y, y')$ не залежить від $y'(F(x, y))$. У цьому випадку $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ і (19.11) набирає вигляду

$$F'_y = 0.$$

ІІ в и п а д о к . $F(x, y, y')$ не залежить від $y(F(x, y'))$. Тоді $F'_y = 0$, рівняння (19.11) набирає вигляду $\frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$, тобто

$$F'_{y'} = c.$$

ІІІ в и п а д о к . $F(x, y, y')$ не залежить від $x(F(y, y'))$. Тоді $F''_{xy'} = 0$ і рівняння (19.11) набирає вигляду

$$F'_y - y'F''_{yy'} - y''F''_{y'y'} = 0.$$

Помноживши це рівняння на y', дістанемо

$$\frac{d}{dx}(F - y'F'_{y'}) = 0.$$

Звідси

$$F - y'F'_{y'} = c. \qquad (19.12)$$

ІV в и п а д о к . $F(x, y, y')$ лінійна щодо y', тобто

$$F(x, y, y') = A(x, y) + B(x, y)y'.$$

Тоді рівняння Ейлера набирає вигляду

$$\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

19.3.3. Складніші випадки функціоналів

І в и п а д о к . *Функціонал з похідними вищих порядків*, наприклад

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'')\, dx,$$

має першу варіацію виду

$$\delta I = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y' + F'_{y''} \delta y'')\, dx.$$

Аналогічно (19.6), інтегруючи частинами другий доданок один раз, а третій — двічі і прирівнюючи δI до нуля, дістаємо рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = 0.$$

Це рівняння можна узагальнити для n-ї похідної.

II випадок. *Функціонал від кількох функцій*, наприклад

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b F(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2)\, dx, \tag{19.13}$$

має систему рівнянь Ейлера, яку дістають аналогічно (19.9) при фіксованих спочатку y_2, а потім y_1:

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F'_{y'_1} = 0; \\ F'_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F'_{y'_2} = 0. \end{cases} \tag{19.14}$$

III випадок. *Функціонал від функції кількох змінних*, наприклад

$$I(z(x, y)) = \iint_D F(x, y, z, z'_x, z'_y)\, dx\, dy,$$

має рівняння Ейлера

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 0, \tag{19.15}$$

де

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

19.3.4. Розв'язування задачі про брахістохрону

Оскільки функціонал (19.1) не містить явно x, то рівняння Ейлера має вигляд (19.12), внаслідок чого маємо

$$\sqrt{\frac{1-y'^2}{a-y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{(a-y)(1+y'^2)}} = C,$$

звідки

$$\sqrt{(a-y)(1+y'^2)} = \frac{1}{C_1}.$$

Інтегрування цього рівняння досить складне, проте воно спрощується за допомогою підстановки $a - y = (1 - \cos t)/2C_1^2$.

Тоді

$$dy = \frac{\sin t}{2C_1^2}\,dt, \quad dx = \pm\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)\,dt,$$

звідки, інтегруючи, дістаємо рівняння циклоїди

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2C_1^2}(t - \sin t) + C_2; \\ y = a - (1 - \cos t)/2C_1^2. \end{cases}$$

Сталі C_1 і C_2 визначаються з умов $y(0) = a$, $y(b) = 0$.

19.3.5. Розв'язування задачі про прогин мембрани

Застосовуючи (19.15) до (19.3), маємо

$$-\frac{\partial}{\partial x}(Tz'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(Tz'_y) = 0,$$

звідки

$$x''_{xx} + z''_{yy} = 0.$$

Отже, прогин мембрани без зовнішнього навантаження описує рівняння Лапласа.

19.4. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІОНАЛА

У попередньому розділі було розглянуто екстремум функціонала без будь-яких додаткових умов. Тому в подальшому називатимемо його *безумовним екстремумом.*

19.4.1. Інтегральні зв'язки

Розглянемо екстремум функціонала (19.4) з додатковою умовою типу (19.2), якій надамо більш загального вигляду

$$\int_a^b \Phi(x, y, y')\, dx = k, \qquad (19.16)$$

де k — задане (в задачі Дідони це довжина вірьовки).

Маємо екстремальну задачу, аналогічну знаходженню екстремуму функції $z(x, y)$ за додаткової умови $\varphi(x, y) = 0$. Цю задачу розв'язують методом Лаґранжа, застосовуючи допоміжну функцію

$$F^* = z(x, y) - \lambda\varphi(x, y),$$

де λ — множник Лаґранжа, а також необхідні умови екстремуму

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial \lambda} = 0$$

(див. 6.4). З цих трьох рівнянь знаходять невідомі λ, x_0, y_0. Розглянутий метод можна узагальнити на довільне число незалежних змінних.

Для розглядуваної задачі розіб'ємо відрізок інтегрування $[a, b]$ на n інтервалів, замінюючи інтеґрали в (19.2) і (19.16) сумами, залежними від значень y_i шуканої функції в точках поділу. При цьому переходимо до задачі про умовний екстремум функції скінченного числа змінних y_i, до якої можна застосувати метод Лаґранжа. Згідно із сказаним, задача про знаходження екстремуму функціонала (19.4) за умови (19.16) рівносильна задачі про безумовний екстремум для виразу

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx - \lambda \int_a^b \Phi(x, y, y')\, dx = \int_a^b (F - \lambda\Phi)\, dx,$$

тобто і в цьому випадку треба ввести допоміжну функцію

$$F^* = F(x, y, y') - \lambda\Phi(x, y, y')$$

і застосувати до неї необхідні умови екстремуму функціонала, тобто рівняння Ейлера

$$F^*_y - \frac{d}{dx} F^*_{y'} = 0.$$

Загальний розв'язок його містить дві довільні сталі C_1 і C_2, а також параметр λ, для знаходження яких маємо вираз (19.16) і дві граничні умови (19.10).

Якщо маємо кілька умов

$$\int_z^b \Phi_i(x, y, y')\, dx = k_i, \quad i = 1, 2. \ldots, n,$$

то допоміжна функція набирає вигляду

$$F' = F - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i.$$

19.4.2. Розв'язування ізопериметричної задачі

Допоміжна функція для цієї задачі (задачі Дідони) має вигляд

$$F^* = y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}.$$

Вона явно незалежна від x, тому можна скористатись рівнянням (19.9). Матимемо

$$y - \lambda (1 + y'^2)^{-1/2} = C_1.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно y' і інтегруючи, знаходимо рівняння кола радіуса $R = \lambda$

$$(x - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = \lambda^2,$$

де C_1 і C_2 — координати центра кола. Використовуючи рис. 19.4, дістаємо

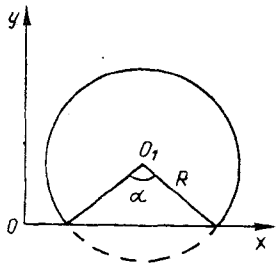


Рис. 19.4

$$C_2 = \frac{a+b}{2}, \; C_1 = \lambda \cos\frac{\alpha}{2}, \; \alpha = 2 \arcsin\frac{2\lambda}{b-a}.$$

Довжина дуги кола (довжина вірьовки) дорівнює

$$L = \lambda (2\pi - \alpha) = \lambda \left(2\pi - 2 \arcsin\frac{2\lambda}{b-a}\right).$$

Звідси визначаємо λ, а потім знаходимо α, C_1, C_2.

19.4.3. Умовний екстремум зі скінченними зв'язками

Розглянемо функціонал від кількох функцій типу (19.13). Нехай на функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, від яких він залежить, накладено скінченний зв'язок

$$H(x, y_1, y_2) = h(x)$$

і задано граничні умови

$$y_i(a) = m_i, \quad y_i(b) = n_i, \quad i = 1, 2. \tag{19.17}$$

Можна показати, що й у цьому випадку слід ввести допоміжну функцію

$$F^* = F - r(x) H, \tag{19.18}$$

де $r(x)$ — функціональний множник Лагранжа (функція, яка не варіюється).

Якщо, крім зазначених, є ще й інтегральні зв'язки типу (19.16), то до лівої частини (19.18) додають $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i$. Потім до функції F^* застосовують необхідну умову екстремуму у вигляді (19.14).

19.4.4. Умовний екстремум з диференціальними зв'язками

Якщо на функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, від яких залежить функціонал (19.13), накладено диференціальний зв'язок

$$H(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2) = h(x)$$

і граничні умови (19.17), то користуються допоміжною функцією (19.18), до якої застосовують умови (19.17).

Проілюструємо цей метод на прикладі задачі С.О.Чаплигіна*) про обліт максимальної площі за даний час T зі сталою за модулем швидкістю V (відносно повітря) при сталій швидкості U вітру, напрямленої вздовж осі ординат (рис. 19.5).

Нехай шуканий контур L має рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$. Площу обльоту можна записати у вигляді

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \to \max.$$

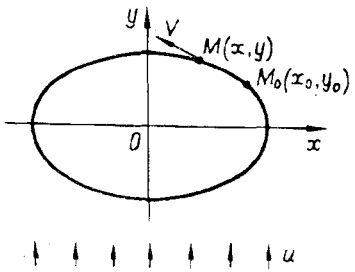


Рис. 19.5

Величини U і V зв'язані виразом

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - U\right)^2 = V^2,$$

Нехай, крім того, шуканий контур L проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$. Тоді

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad y(0) = y(T) = y_0.$$

Для розв'язування цієї задачі введемо допоміжну функцію

$$F^* = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) - r(t) \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - U\right)^2 \right)$$

*) С.О. Чаплигін (1869—1942) — російський математик.

і застосуємо до неї умови (19.14). Дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{y}{2} - 2r(t)\frac{dx}{dt}\right) = 0; \\ -\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2} - 2r(t)\left(\frac{dx}{dt} - U\right)\right) = 0. \end{cases}$$

В результаті інтегрування її знайдемо

$$y + 2r(t)\frac{dx}{dt} = C_1 - x + 2r(t)\left(\frac{dx}{dt} - U\right) = C_2. \tag{19.19}$$

За допомогою перенесення осей дістанемо, що $C_1 = C_2 = 0$. Вилучивши $r(t)$ з (19.19), матимемо

$$p = C\left(1 - \frac{U}{V}\cos\varphi\right)^{-1}$$

При $\frac{U}{V} < 1$ — це рівняння еліпса.

19.5. ПРЯМІ МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

У багатьох випадках розв'язування рівняння Ейлера становить певні труднощі. Тоді найефективнішими стають так звані прямі методи, суть яких полягає в заміні системи з нескінченним числом ступенів вільності системою зі скінченним числом їх.

Одним з перших і найефективніших прямих методів є метод Рітца*), теоретичне обґрунтування якого дав М.М.Крилов. Згідно з цим методом шукана функція має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

причому вона вибирається так, щоб виконувалися граничні умови для довільних $C_1, C_2, \ldots, C_n$, а самі параметри $C_1, C_2, \ldots, C_n$ знаходять з необхідної умови екстремуму відповідного функціонала.

П.1. Знайти наближене значення $y(x)$, при якому функціонал

$$I = \int_0^1 (y'^2 + y^2)\,dx \tag{19.20}$$

набуває мінімуму, якщо граничними умовами є

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{19.21}$$

Наближений розв'язок $y(x)$ шукаємо в найпростішому вигляді, який містить всього один вільний параметр

$$y = x + Cx(1 - x) \tag{19.22}$$

і задовольняє умову (19.21).

Підставляємо значення (19.22) у (19.20). Маємо

$$I = \int_0^1 \left((1 + C(1 - 2x))^2 + (x + Cx(1 - x))^2\right) dx.$$

*) В.Рітц (1878—1909) — німецький математик.

Диференціюємо знайдений вираз по C:

$$\frac{dI}{dC} = 2\int_0^1 \left((1 - 2x) + C(1 - 4x + x^2) + x^2(1 - x) + \right.$$
$$\left. + Cx^2(1 - 2x + x^2)\right) dx = \frac{11}{30}C + \frac{1}{12}.$$

Прирівнявши його до нуля, дістанемо $C = \frac{5}{22}$, тобто

$$y = \frac{27}{22}x - \frac{5}{22}x^2.$$

Неважко бачити, що тут за допомогою (19.12) можна дістати точний розв'язок:

$$2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0, \quad y'' - y = 0.$$

Звідси $y = Ae^x + Be^{-x}$. Використовуючи (19.21), остаточно маємо

$$y = (e^x - e^{-x})(e - e^{-1})^{-1}.$$

Таблиця 19.1

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y_{\text{точн.}}$	0	0,171	0,350	0,542	0,754	1,0
$y_{\text{спост}}$	0	0,164	0,346	0,546	0,764	1,0
α, %	0	-4,1	-1,1	0,7	1,3	0

У табл. 19.1 наведено порівняння точного й наближеного розв'язків, звідки випливає, що навіть грубе наближення (19.22) дає досить прийнятний результат (похибка розрахунку α не перевищує 4,1%).

Якщо взяти шукану функцію у вигляді

$$y = x + C_1x(1 - x) + C_2x^2(1 - x),$$

то, міркуючи аналогічно, знайдемо $C_1 = 69/473$, $C_2 = -7/43$. Похибка розрахунку при цьому не перевищує 0,3%. Якщо необхідна більша точність, то можна взяти наступне наближення.

19.6. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ

Варіаційне числення, крім окремих задач і методів розв'язування їх, містить варіаційні принципи, які можна застосовувати до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що з усіх станів, можливих для даної системи, реалізується той, при якому деякий функціонал (для кожного принципу свій) набуває екстремуму.

Одним з таких принципів є принцип мінімуму потенціальної енергії, який було використано при розв'язуванні задачі про форму прогину мембрани.

19.6.1. Принцип Ферма в оптиці

Одним з перших в історії науки був варіаційний принцип Ферма в оптиці, згідно з яким з усіх можливих шляхів, що сполучають точки A і B, світло вибирає такий, який воно проходить за мінімальний час.

Оскільки швидкість світла в прозорому середовищі дорівнює $\frac{c}{n}$, де C — швидкість світла у вакуумі, n — показник заломлення середовища, залежний від властивостей останнього і довжини світлової хвилі, то час руху елемента dl відповідного шляху дорівнює $dt = \frac{n}{C} dl$. Звідси час руху світла від A до B виражається криволінійним інтегралом

$$T = \frac{1}{C} \int_{(AB)} n \, dl. \tag{19.23}$$

Форма кривої L, яка сполучає A і B, визначається мінімумом функціонала (19.23). В оптично однорідному середовищі ($n = \text{const}$) це є пряма. Нагадаємо, що цим принципом скористалися в (5.2), встановлюючи закон Снелліуса для явища заломлення світла на межі двох середовищ.

19.6.2. Принцип найменшої дії

Успіх застосування принципу мінімуму потенціальної енергії до задач статики обумовив пошук аналогічного принципу для задач, в яких йдеться про рух системи. Такий принцип ввів в механіку П.Л.М.Мопертюї*), проте до нього поставилися з недовірою внаслідок теологічного підходу до його обґрунтування. Згідно з цим принципом варіаційні задачі механіки зводяться до знаходження мінімуму функціонала

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L \, dt, \tag{19.24}$$

який називають дією, де

$$L = T - U - \tag{19.25}$$

функція Лаґранжа, яка є різницею кінетичної T та потенціальної U енергій. Згодом, після того, як Лаґранж дав наукове обґрунтування, цей принцип дістає загальне визнання.

*) П. Л. М. Мопертюї (1698—1759) — французький математик.

Розглянемо суть принципу найменшої дії.

Нехай частинка масою m рухається вздовж осі під дією сили з потенціалом $U(x)$. Тоді рівняння руху частинки має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx},$$

або $(\dot{x} = dx/dt)$

$$\begin{gathered}\frac{dU}{dx} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0,\\ \frac{d(-U)}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\dot{x}}\left(m\frac{\dot{x}}{2}\right)\right).\end{gathered} \tag{19.26}$$

Останній вираз нагадує за формою рівняння Ейлера, яке для шуканої функції $x(t)$ має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}F(t, x, \dot{x})\right) = 0. \tag{19.27}$$

У цьому рівнянні в обох доданках диференціюється одна і та сама функція F, тоді як в (19.26) функції різні. Тому перетворимо рівняння (19.26) так, щоб під знаками похідних були однакові функції. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - u(x)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - u(x)\right)\right) = 0. \tag{19.28}$$

Як бачимо, рівнянню Ейлера (19.28) відповідає функціонал

$$S = \int_{t_2}^{t_1}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - u(x)\right)dt.$$

Оскільки перший член дорівнює кінетичній енергії системи $T = m\dot{x}^2/2$, а другий — потенціальній енергії $U(x)$, то цим і обґрунтовується справедливість виразів (19.24), (19.25).

Застосуємо принцип найменшої дії до виведення рівняння коливань мембрани (див. п.19.1).

Кінетична енергія елемента $dS = dx\,dy$ мембрани дорівнює

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\,dy,$$

а для всієї мембрани

$$T = \frac{1}{2}\rho \iint\limits_D \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\, dy.$$

Згідно з (19.1) її потенціальна енергія

$$U = \frac{T}{2} \iint\limits_D (z'^2_x + z'^2_y)\, dx\, dy.$$

Тоді для функції Лаґранжа маємо

$$L = \frac{1}{2} \iint\limits_D (\rho z'^2_t - T\,(z'^2_x + x'^2_y))\, dx\, dy.$$

На основі цього дія набирає вигляду

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t^2} dt \iint\limits_D (\rho z'^2_t - T\,(z'^2_x + z'^2_y))\, dx\, dy.$$

Застосовуючи рівняння Ейлера і диференціюючи за трьома змінними z'_t, z'_x, z'_y, дістаємо рівняння коливань мембрани

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

або

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

де $a = \sqrt{T/\rho}$ — швидкість поширення збурення в мембрані.

19.7. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Різноманітні питання, які виникають в економіці, військовій та інженерній справах, часто приводять до такої задачі: знайти екстремум *цільової функції*

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \tag{19.29}$$

за таких умов (обмежень) $(i = 1, 2, \ldots, m,\ m > n)$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \leq a_i,$$

або за умов

$$y_i = -a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \ldots - a_{in} x_n + a_i \geq 0,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad m > n.$$

19.7.1. Геометрична інтерпретація

З аналітичної геометрії відомо, що множина точок, яка задовольняє нерівність $Ax_1 + Bx_2 + C \geq 0$, є півплощиною, що лежить по один бік від прямої $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$, причому для точки $M(x^\circ_1, x^\circ_2)$ число $Ax^\circ_1 + Bx^\circ_2 + C$, яке називають відхиленням цієї точки від прямої, дорівнює відстані між ними (з точністю до множника).

Нерівності

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1 \geq 0; \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2 \geq 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_mx_1 + B_mx_2 + C_m \geq 0 \end{cases} \tag{19.30}$$

визначають деякий опуклий многокутник.

Задачу лінійного програмування геометрично можна сформулювати так: знайти точку, яка належить многокутнику (19.30) і яка найбільше (найменше) відхиляється від прямої

$$(z =)\ p_1x_1 + p_2x_2 = 0. \tag{19.31}$$

Залежно від розміщення многокутника і прямої ця задача може мати єдиний розв'язок, нескінченну множину розв'язків або взагалі не мати розв'язку. У розглядуваному найпростішому випадку розв'язки лежать у вершинах многокутника (19.30) або на його сторонах. Тоді маємо єдиний розв'язок або множину розв'язків. Якщо многокутник розімкнений (нескінченний) або система (19.30) несумісна, то розв'язку немає.

У загальному випадку замість прямої (19.31) маємо гіперплощину (19.29), а замість многокутника — опуклий многогранник, який називають многогранником розв'язків.

19.7.2. Симплекс-метод

Розв'язування задачі лінійного програмування починається з відшукання якої-небудь вершини многогранника розв'язків, координати якої утворюють так званий опорний розв'язок. Маючи цей розв'язок та відповідне йому значення цільової функції, знаходимо напрям до іншої вершини многогранника, в якому цільова функція зростає (спадає). В результаті дістаємо другий опорний розв'язок і т.д., поки не дістанемо оптимальний розв'язок.

П. Максимізувати цільову функцію

$$z = -12x_1 + 3x_2$$

при обмеженнях

$$(y_1 =) - x_1 + 2x_2 + 8 \geq 0,$$

$$(y_2 =) x_1 + x_2 + 1 \geq 0,$$

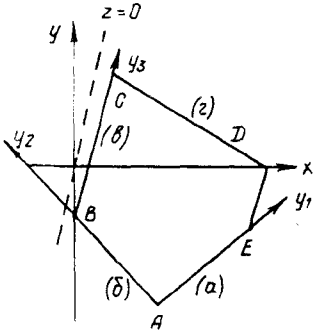


Рис. 19.6

$$(y_3 =)\ 3x_1 - x_2 - 1 \geq 0,$$

$$(y_4 =) - 2x_1 - 4x_2 + 10 \geq 0,$$

$$(y_5 =) - 2x_1 + x_2 + 10 \geq 0.$$

Многокутники розв'язків зображено на рис. 19.6, де пунктиром нанесено лінію $(z =) - 12x_1 + 3x_2 = 0$. Оскільки многокутник розв'язків замкнений, а ця лінія не паралельна жодній з його сторін, то розв'язок єдиний.

Від прямокутних декартових координат (x_1, x_2) перейдемо спочатку до косокутних (y_1, y_2) за формулами $y_1 = - x_1 + 2x_2 + 8$, $y_2 = x_1 + x_2 + 1$, звідки $x_1 = - \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + 2$. У цій косокутній системі осями координат є прямі $y_1 = 0$ і $y_2 = 0$, а початком — одна з вершин многокутника розв'язків. Цільова функція набирає вигляду $z = 5y_1 - 7y_2 - 33$, у вершині $A\,(0{,}0)$ маємо $z_A = - 33$.

Перейдемо тепер до косокутних координат (y_2, y_3) за формулами $y_2 = x_1 + x_2 + 1$, $y_3 = 3x_1 - x_2 - 1$, звідки $x_1 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3$, $x_2 = \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - 1$, $z = - \frac{3}{2}y_2 - \frac{9}{2}y_3 - 3$. Маємо $B\,(0, 0)$ і $z_B = - 3$.

Нарешті перейдемо до косокутних координат (y_3, y_4) за формулами $y_3 = 3x_1 - x_2 - 1$, $y_4 = -2x_1 - 4x_2 + 10$, звідки

$$x_1 = \frac{2}{7}y_3 - \frac{1}{14}y_4 + 1,\quad x_2 = - \frac{1}{7}y_3 - \frac{3}{14}y_4 + 2,\quad z = - \frac{27}{7}y_3 + \frac{3}{14}y_4 - 6.$$

Маємо $C\,(0, 0)$ і $z_C = - 6$.

Таким чином, максимальне значення $z = - 3$ досягається у вершині B многокутника з координатами $x_1 = 0$, $x_2 = - 1$.

У загальному випадку, коли задаємо многогранник (симплекс), у вершинах (на ребрах чи гранях) якого шукають розв'язок, здійснюється перехід від декартових прямокутних координат до косокутних. Після цього знаходять перший опорний розв'язок і напрям, в якому цільова функція зростає (спадає). Потім процес повторюють доти, поки не дістануть оптимальний розв'язок.

Описаний спосіб розв'язування задач лінійного програмування називається симплекс*)-методом Данціга**). Засновником лінійного програмування є Л.Канторович***), який у 1975 р. удостоєний за це Нобелівської премії з економіки.

*) Від. англ. simplex — простий, найпростіший.

**) Т. Данціг (1900—1959) — американський математик.

***) Л.В. Канторович (нар. 1912) — російський математик.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. — М., 1964.
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М., 1976.
3. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М., 1975.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. — М., 1981.
5. *Бугаєнко Г.О.* Методи математичної фізики. — К., 1970.
6. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М., 1980.
7. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения, кратные интегралы, ряды, функции комплексного переменного. — М., 1989.
8. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М., 1980.
9. *Будак В.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. — М., 1967.
10. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / За ред. Г.Л.Кулініча. — К., 1992.
11. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М., 1975.
12. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М., 1972.
13. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1963.
14. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. — М., 1971.
15. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М., 1983.
16. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ: У 2 ч. — К., 1994.
17. *Ефимов А.В., Демидович Б.П.* Сборник задач по математике: Специальные разделы математического анализа. — М., 1981.
18. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М., 1969.
19. Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов) / Под ред. Демидовича Б.П. — М., 1968.
20. Збірник задач з вищої математики. / За ред. Ф.С.Гудименка. — К., 1967.
21. *Калихман И.Г.* Линейная алгебра и программирование. — М., 1967.
22. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М., 1965.
23. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М., 1969.
24. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1968.

25. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. — М., 1983.
26. *Липман Берс.* Математический анализ: В 2 т. — М., 1975. .
27. *Мартыненко В.С.* Операционное исчисление. — К., 1965.
28. *Мисюркеев И.В.* Сборник задач по методам математической физики. — М., 1975.
29. *Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Высшая математика. — К., 1987.
30. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. — М., 1978.
31. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. — М., 1967.
32. *Скороход А.В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. — К., 1975.
33. *Скороход А.В.* Теорія ймовірностей: Збірник задач. — К., 1976.
34. *Смирнов И.М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М., 1989.
35. *Степанюк В.В.* Методи математичного програмування. — К., 1977.
36. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М., 1979.
37. *Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г.* Сборник упражнений по операционному исчислению. — М., 1968.
38. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М., 1969.
39. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. — М., 1959.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Асимптота 52

Базис 27
Бета-функція 180
Брахістохрона 415

Варіація 417
Вектор 24
— напрямний 62
— нормальний 45, 60
Вибірка 400
Визначник 8
— *Вронського* 211
— *Якобі* 245
Власне число 39
Власний вектор 39
Вузол інтерполяції 147

Гамма-функція 179
Гвинтова лінія 65
Гіпербола 51
— рівнобічна 55
Гіперболоїд 66
Гіпотеза статистична 407
Гістограма 401
Границя послідовності 74
— стандартна 87, 88
— функції 75
— — одностороння 76
Градієнт 135

Детермінант 8
Дивергенція 264
Директриса 52
Дисперсія 380
Диференціал 103
Диференціальні рівняння 194
— — *Бернуллі* 204
— — *Ейлера* 210
— — лінійні 201
— — лінійні *n*-го порядку 230
— — однорідні 200
Добутки векторів 32, 35, 37
Дотична 92

Евклідів простір 44
Еволюта, евольвента 186
Еквівалентність функцій 113
Екстремум функції 113
— функціонала 418
Ексцентриситет 51, 52
Еліпс 50
Еліпсоїд 65

Задача *Діріхле* 320
— ізопериметрична 416
— *Коші* 194
— *Неймана* 320
Зображення 354

Ізокліна 195
Імовірність 369
Інваріант 55
Інверсія 337
Інтеграл визначений 163
— залежний від параметра 178
— криволінійний 252, 254
— невизначений 152
— невластивий 173, 176
— поверхневий 260
— подвійний 241
— потрійний 249
— *Пуассона* 246
Інтервал гарантійний 404
Інтерполяція 147
Інтерполяційні многочлени 148, 150
Кардіоїда 57
Квадратична форма 68

Коефіцієнт кореляції 394
Комплексні числа 142
Композиція функцій 71
Конформність 336
Кореляція 412
— лінійна 413
— множинна 413
— нелінійна 413
Кривина 185

Ланцюг *Маркова* 396
Лемніската 57
Лишок 334
Лінеаризація 112
Лінія рівня 200
Максимум функції 113
Математичне сподівання 378
Матриця 16
— вироджена 20
— квадратичної форми 68
— квадратна 16
— нульова 16
— обернена 20
— одинична 16
— ортогональна 42
— транспонована 17

Медіана 381
Метод варіації сталих 219
— *Гаусса* 13
— дотичних 123
— *Ейлера* 234
— ітерацій 124, 232
— моментів 403
— найменших квадратів 140
— проб 122
— *Ріпца* 426
— *Рунге—Кутта* 234
— *Фур'є* 313
— хорд 123
Мінімум функції 113
Мінор 10
Мода 381
Момент інерції 188
— сили 35
— статичний 189
Монотонність функцій 113

Набла оператор 262
Нерівність *Коші* 330
Нормаль 130

Обвідна 206
Одиниця уявна 142
Ознака екстремуму достатня 114
— — необхідна 114
— збіжності ряду достатня 274, 275, 276
— — — необхідна 274
Окіл точки 72, 126
Оператор 6
— *Гамільтона* 267
Оригінал 354

Парабола 52
Параболоїд 67
Первісна 151
Перетворення *Фур'є* 303
Піддотична 94
Піднормаль 94
Події залежні, незалежні 369
— протилежні 368
Поле векторне 261
— гармонічне 269
— потенціальне 269
— скалярне 133
— соленоїдне 268
— стаціонарне 261
Полюс 333
Послідовність 6
Похідна 94
Правило *Лопіталя* 108
— *Саррюса* 9
Принцип варіаційний 427
Програмування лінійне 430

Ранг 22
Регресія 413
Рівняння *Бернуллі* 349
— *Ейлера* 419
— *Лапласа* 320
— *Пуассона* 308
— теплопровідності 308, 315
— хвильове 307
Розподіл біноміальний 375
— експоненціальний 383
— нормальний 384
— *Пуассона* 375
— рівномірний 382
Ряд 271
— біноміальний 291
— збіжний 271
— абсолютно 280
— рівномірно 284

— умовно 280
— знакозмінний, знакопереміжний 278
— *Маклорена* 289
— розбіжний 271
— степеневий 286
— *Тейлора* 289
— тригонометричний 294
— *Фур'є* 296

Симплекс-метод 420
Спіраль *Архімеда* 56
— логарифмічна 57
Сплайн-інтерполяція 147

Тензор 262
Теорема *Абеля* 287
— *Бернуллі* 390
— *Вейєрштрасса* 285
— *Гріна* 256
— *Діріхле* 297
— *Коші* 194, 207, 329
— *Кронекера—Капеллі* 22
— *Лагранжа* 107
— *Лапласа* інтегральна 374
— локальна 373
— *Лейбніца* 278
— *Ролля* 106
— *Чебишева* 390
Точка екстремуму функції 113
— ізольована 333
— перегину функції 116
— розриву функції 86

Умови *Коші—Рімана* 325

Фокус 50
Формула *Бернуллі* 374
— *Гріна* 256
— *Ейлера* 143
— *Коші* 329
— *Лагранжа* 107
— *Маклорена* 111
— *Ньютона—Лейбніца* 167
— *Остроградського—Ліувілля* 212
— парабол 173
— *Пуассона* 375
— *Сімпсона* 173
— *Тейлора* 111, 132
Формули *Крамера* 12
Функціонал 6
Функція 6
— аналітична 327
— випадкова 396
— *Жуковського* 340
— зростаюча 72
— комплексної змінної 325
— *Лагранжа* 425
— неперервна 83, 127
— нескінченно велика 77
— — мала 76
— неявна 101
— обернена 99
— обмежена 72
— опукла 116
— парна 72
— регресії 395
— спадна 72
— угнута 116
— цільова 430

Характеристики 306

Циклоїда 59
Циркуляція 257

Щільність розподілу 377

ЗМІСТ

Передмова 3

Вступ. Елементи теорії множин 5

Розділ 1. **Лінійна алгебра** 8

1.1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь 8
1.2. Вектори 24

Розділ 2. **Аналітична геометрія** 45

2.1. Аналітична геометрія на площині 45
2.2. Аналітична геометрія в просторі R^3 60

Розділ 3. **Вступ до аналізу функцій однієї змінної** 70

3.1. Границя послідовності й функції 70
3.2. Нескінченно малі та їх властивості 76
3.3. Властивості границь. Знаходження границь 79
3.4. Неперервність функцій. Стандартні границі 82

Розділ 4. **Похідна функції** 92

4.1. Означення похідної 92
4.2. Техніка диференціювання функцій 95
4.3. Диференціал. Похідні й диференціали вищих порядків 103
4.4. Теореми про диференційовні функції 106

Розділ 5. **Застосування похідної** 113

5.1. Дослідження функцій за допомогою похідної 113
5.2. Практичні задачі на найбільше та найменше значення 120
5.3. Наближене розв'язування скінченних рівнянь 121

Розділ 6. **Функції n змінних ($n \geq 2$)** 126

6.1. Основні поняття. Похідна. Диференціал 126
6.2. Скалярне поле та його характеристики 133
6.3. Екстремум функцій двох змінних 136

Розділ 7. **Комплексні числа. Многочлени. Інтерполяція** 142

7.1. Комплексні числа 142
7.2. Многочлени 144
7.3. Інтерполяція функцій 146

Розділ 8. **Невизначений інтеграл** 151

8.1. Означення й властивості первісної та невизначеного інтеграла 151
8.2. Техніка інтегрування 155

Розділ 9. **Визначений інтеґрал** 162

9.1. Означення й властивості визначеного інтеґрала 162
9.2. Обчислення визначеного інтеґрала 166
9.3. Наближені методи обчислення визначених інтеґралів 170
9.4. Невластиві інтеґрали 173
9.5. Інтеґрали, залежні від параметра 178

Розділ 10. **Застосування визначеного інтеґрала** 181

10.1. Геометричні застосування визначеного інтеґрала 181
10.2. Визначений інтеґрал у механіці та фізиці 188

Розділ 11. **Звичайні диференціальні рівняння** 193

11.1. Рівняння першого порядку 194
11.2. Рівняння вищих порядків 207
11.3. Лінійні однорідні рівняння вищих порядків 210
11.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 218
11.5. Системи диференціальних рівнянь 225
11.6. Методи наближеного розв'язування диференціальних рівнянь 232
11.7. Поняття про якісні методи дослідження диференціальних моделей . . 235

Розділ 12. **Кратні інтеґрали. Теорія поля** 240

12.1. Подвійні інтеґрали 240
12.2. Потрійний інтеґрал 248
12.3. Криволінійні інтеґрали 252
12.4. Поверхневі інтеґрали 259
12.5. Елементи теорії поля 260

Розділ 13. **Ряди** 270

13.1. Числові ряди 270
13.2. Функціональні ряди 284
13.3. Степеневі ряди 286
13.4. Ряди Фур'є 294
13.5. Інтеґрал і перетворення Фур'є 301

Розділ 14. **Рівняння математичної фізики** 305

14.1. Загальні відомості про рівняння в частинних похідних 305
14.2. Коливання струни 308
14.3. Теплопровідність стержня 315
14.4. Рівняння Лапласа 320

Розділ 15. **Теорія функцій комплексної змінної** 325

15.1. Функції комплексної змінної та їх похідні 325
15.2. Інтеґрування функцій комплексної змінної 328
15.3. Ряди функцій комплексної змінної 330
15.4. Лишки 333
15.5. Конформні відображення 335

Розділ 16. **Застосування теорії функцій комплексної змінної** . . . 342

16.1. Застосування функцій комплексної змінної в гідравліці 342
16.2. Операційне числення 353

Розділ 17. **Теорія ймовірностей** 364

17.1. Означення ймовірності 364
17.2. Алгебра подій 368
17.3. Випадкова величина 371

17.4. Числові характеристики випадкових величин 378
17.5. Деякі закони розподілу неперервних випадкових величин 382
17.6. Закон великих чисел 387
17.7. Системи випадкових величин 391
17.8. Поняття про випадкові функції та ланцюги Маркова 396

Р о з д і л 18. **Математична статистика** 400

18.1. Основні поняття й методи математичної статистики 400
18.2. Інтервальні оцінки 404
18.3. Перевірка статистичних гіпотез 407
18.4. Поняття про дисперсійний аналіз 411
18.5. Елементи теорії кореляції 412

Р о з д і л 19. **Елементи варіаційного числення** 415

19.1. Історичні задачі варіаційного числення 415
19.2. Функціонал і його варіації 417
19.3. Екстремум функціонала 418
19.4. Умовний екстремум функціонала 422
19.5. Прямі методи варіаційного числення 426
19.6. Варіаційні принципи 427
19.7. Лінійне програмування 430

Список рекомендованої літератури 433

Предметний покажчик 435

Підручник

ПАК Вітольд Вітольдович
НОСЕНКО Юрій Лаврентійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Зав. редакцією *А.Кривошея*
Художник обкладинки *Г.Задніпряний*
Художній редактор *Т.Щур*
Технічний редактор *І.Лукашенко*
Коректори *А.Бараз, Л.Іванова, Н.Лісова*

Здано до набору 28.08.95. Підп. до друку 28.12.95. Формат 60 × 84/16. Папір друк. № 2. Гарн. Тип Таймс
Офс. друк. Ум. друк. арк. 25,66. Ум. фарбовідб. 26,01. Обл.-вид. арк. 25,78. Вид. № 3610. Зам. № 214

Оригінал-макет виготовлено у видавництві «Либідь» на IBM AT 386
за допомогою програмного комплексу Xerox Ventura Publisher 2.0
старшими операторами ***Зміною Л., Медведєвою М., Кулик Т., Клембіцькою О.***
та інженером-програмістом ***Белінською М.***

Видавництво «Либідь» при Київському університеті
252001 Київ, Хрещатик, 10

Свідоцтво про державну реєстрацію № 05591690 від 23.04.94

ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика». Біла Церква, Леся Курбаса, 4