

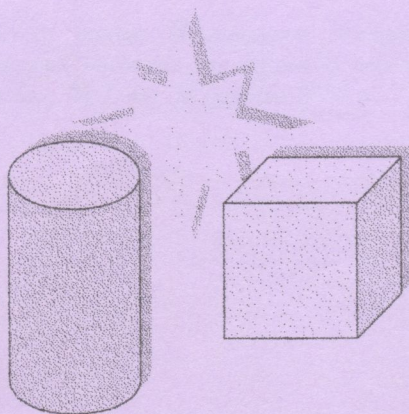
57(075)
п 31

Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

В. А. Петрук, Г. Г. Кашканова, І. В. Хом'юк

Збірник завдань з вищої математики

Частина I



Вінниця ВДТУ – 2001

05
127
Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

В. А. Петрук, Г. Г. Кашканова, І. В. Хом'юк.

Збірник завдань з вищої математики

Частина I

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів всіх спеціальностей та форм навчання. Протокол № 2 від 28 вересня 2000 р.

НТБ ВНТУ



407010

51(075)

П 31

2001

Петрук В. А. Збірник завдань з вищої математики

Вінниця ВДТУ – 2001

Рецензенти:

В.М. Михалевиц, доктор технічних наук, професор

В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

В.І. Карпенко, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

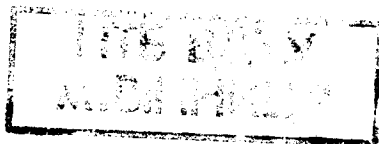
Петрук В.А., Кашканова Г.Г., Хом'юк І.В.

ПЗ1 Збірник завдань з вищої математики. Частина 1. Навчальний посібник. - Вінниця: ВДТУ, 2001. - 111с.

В навчальному посібнику подані варіанти індивідуальних завдань для самостійного розв'язування з тем курсу вищої математики технічного вузу: лінійна та векторна алгебри, аналітична геометрія, математичний аналіз (побудова графіків шляхом елементарних перетворень, границі послідовностей та функцій, похідна та її застосування), невизначений інтеграл. З окремих тем подані варіанти прикладних завдань та наведено приклади розв'язування подібних задач, завдання для ігрових занять.

Розрахований на студентів технічних вузів усіх спеціальностей та форм навчання.

407010



Зміст

Вступ	4
1. Лінійна алгебра	5
2. Варіанти прикладних задач з лінійної алгебри	10
3. Варіанти завдань для ігрових занять з лінійної алгебри	30
4. Векторна алгебра	38
5. Елементи аналітичної геометрії	43
6. Варіанти прикладних задач для ігрових занять з аналітичної геометрії	46
7. Математичний аналіз	52
8. Варіанти завдань для окремих тем з теорії границь	60
9. Неперервність функції	98
10. Похідна функції	101
11. Дослідження функції та побудова графіків	104
12. Невизначений інтеграл	105
13. Література	110

ВСТУП

Даний навчальний посібник є збірником завдань з вищої математики для студентів технічних вузів різних спеціальностей та форм навчання. Він має три рівня складності. Перший – розрахований для набуття студентами навиків розв'язування звичайних традиційних задач. Другий – для набуття умінь використання одержаних знань для розв'язування прикладних задач. Третій – для перевірки знань, умінь та навиків з вивченого розділу вищої математики.

В першій частині розглядаються такі розділи курсу вищої математики: лінійна алгебра, векторна алгебра, елементи аналітичної геометрії, початок математичного аналізу. Тобто всі розділи, які вивчаються на першому курсі в першому семестрі технічного вузу.

Для розв'язування задач першого рівня достатньо знань, які були набуті на лекціях або за допомогою літератури, наведеної в кінці даного навчального посібника [1] – [4]. Для розв'язування задач другого рівня після варіантів завдань наведено приклади їх розв'язування. Для третього рівня надаються лише завдання для ігрових занять, на яких і перевіряються знання, уміння та навички їх застосування до розв'язування виробничих задач.

Підготуватися до таких занять можна за допомогою літератури, яку запропонує викладач та наведеної в кінці посібника [5].

1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Знайти добуток матриць

$$1) \begin{bmatrix} 13 & 16 & 15 \\ 11 & 20 & 17 \\ 12 & 14 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 17 & 15 \\ 14 & 12 & 17 \\ 16 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 12 & 4 & -14 \\ 17 & 18 & 19 \\ 11 & 10 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -20 & 2 \\ 9 & 13 & 12 \\ 15 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 15 & 17 & -19 \\ 4 & -5 & 1 \\ 6 & 14 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 12 & 17 \\ 15 & 10 & 11 \\ 21 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$6) \begin{bmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 6 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ -7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$7) \begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 6 & 3 & 9 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \\ 5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$8) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$9) \begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & -7 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$10) \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$11) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$12) \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -6 & -7 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$13) \begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 7 & 12 & 6 \\ 13 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 2 & 6 \\ 17 & 2 & 6 \\ 8 & 14 & 7 \end{bmatrix}$$

$$14) \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 3 & 18 & 7 \\ 4 & 22 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 17 & 9 \\ 12 & 14 & 8 \\ 6 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$15) \begin{bmatrix} 3 & 15 & -7 \\ -1 & 18 & 4 \\ 19 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -18 & 5 \\ 6 & 3 & 11 \\ 17 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$16) \begin{bmatrix} 11 & 7 & 4 \\ 3 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 \\ 4 & 7 & 0 \\ -12 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$17) \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$18) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -6 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$19) \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$20) \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 7 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$21) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$22) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$23) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 4 & -2 & 6 \\ 8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 9 & 9 & 1 \\ 11 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$24) \begin{bmatrix} 5 & 9 & -1 \\ 7 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$25) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$26) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$27) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -12 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$28) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 12 & -6 & 4 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$29) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 6 & 8 \\ -15 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$30) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 12 & 13 \\ 16 & 10 & -5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Знайти обернену матрицю та перевірити, що $A^{-1}A=E$

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}; 2) \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}; 3) \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}; 4) \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 8 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}; 5) \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix};$$

$$6) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} ; 7) \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} ; 8) \begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; 9) \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} ; 10) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} ;$$

$$11) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix} ; 12) \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} ; 13) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} ; 14) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} ; 15) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} ;$$

$$16) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 3 \end{bmatrix} ; 17) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 6 \end{bmatrix} ; 18) \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} ; 19) \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} ; 20) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix} ;$$

$$21) \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} ; 22) \begin{bmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} ; 23) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 \\ 7 & 7 & 2 \end{bmatrix} ; 24) \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 9 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix} ; 25) \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix} ;$$

$$26) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} ; 27) \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} ; 28) \begin{bmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} ; 29) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} ; 30) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} ;$$

3. Розв'язати систему методами Крамера, Гауса, матричним:

$$1) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 38 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 = 45 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 34 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 60 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 = 67 \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 35 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 103 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 57 \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 76 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 56 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 49 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 43 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 70 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 64 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 94 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 58 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 35 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 74 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 66 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 62 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 62 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 66 \\ 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 75 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 21 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 74 \\ 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 43 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 51 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x_1+4x_2=9 \\ 2x_1+x_2+6x_3=46 \\ 7x_1+x_2+4x_3=37 \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x_1+4x_2+x_3=32 \\ 7x_1+6x_2+9x_3=106 \\ 4x_1+x_2+7x_3=59 \end{cases} \quad 12) \begin{cases} 7x_1+4x_2+2x_3=99 \\ 6x_1+9x_2+7x_3=172 \\ 2x_1+x_2+7x_3=72 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 4x_1+4x_2+3x_3=53 \\ 4x_1+7x_2+7x_3=86 \\ 7x_1+6x_2+6x_3=88 \end{cases} \quad 14) \begin{cases} x_1+4x_2+4x_3=45 \\ 2x_1+6x_2+x_3=43 \\ 5x_1+7x_2+5x_3=72 \end{cases} \quad 15) \begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3=49 \\ 2x_1+5x_2+7x_3=59 \\ 3x_1+7x_2+9x_3=80 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x_1+2x_2+7x_3=58 \\ 4x_1+6x_2+3x_3=49 \\ 2x_1+6x_2+x_3=33 \end{cases} \quad 17) \begin{cases} 4x_1+8x_2+6x_3=88 \\ 2x_1+4x_2+7x_3=76 \\ 3x_1+x_2+6x_3=58 \end{cases} \quad 18) \begin{cases} x_1+4x_2+8x_3=65 \\ 6x_1+7x_2+4x_3=68 \\ 5x_1+8x_2+9x_3=98 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=28 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=61 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=94 \end{cases} \quad 20) \begin{cases} 7x_1+5x_2=65 \\ x_1+6x_2+4x_3=57 \\ 3x_1+4x_2+7x_3=67 \end{cases} \quad 21) \begin{cases} 11x_1+2x_2+8x_3=86 \\ 7x_1+12x_2+6x_3=104 \\ 13x_1+4x_2+9x_3=105 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} 15x_1+2x_2+6x_3=67 \\ 17x_1+2x_2+6x_3=69 \\ 8x_1+14x_2+7x_3=92 \end{cases} \quad 23) \begin{cases} 8x_1+4x_2+12x_3=84 \\ 3x_1+18x_2+7x_3=105 \\ 4x_1+22x_2+8x_3=128 \end{cases} \quad 24) \begin{cases} 7x_1+17x_2+9x_3=214 \\ 2x_1+14x_2+8x_3=224 \\ 6x_1+7x_2+11x_3=161 \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 18x_1+11x_2+7x_3=161 \\ 12x_1+6x_2+8x_3=130 \\ 4x_1+3x_2+11x_3=113 \end{cases} \quad 26) \begin{cases} 4x_1+16x_2+5x_3=73 \\ 5x_1+6x_2+12x_3=41 \\ x_1+14x_2+x_3=58 \end{cases} \quad 27) \begin{cases} 3x_1+15x_2+7x_3=52 \\ x_1+18x_2+4x_3=37 \\ 19x_1+3x_2+3x_3=72 \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 2x_1+18x_2+5x_3=137 \\ 6x_1+3x_2+11x_3=120 \\ 17x_1+2x_2+8x_3=99 \end{cases} \quad 29) \begin{cases} 11x_1+7x_2+4x_3=84 \\ 3x_1+12x_2+8x_3=118 \\ 14x_1+6x_2+9x_3=109 \end{cases} \quad 30) \begin{cases} 12x_1+8x_2+6x_3=116 \\ 4x_2+7x_3=48 \\ 12x_1+8x_2+11x_3=136 \end{cases}$$

4. Знайти всі розв'язки системи:

$$1) \begin{cases} x_1-x_2-x_3=3 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ -x_1-2x_2+x_3=2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -x_1+x_2-x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1+4x_2-4x_3=2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ 2x_1+x_2-2x_3=-2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 2 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2x_3 = -3 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \quad 11) \begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases} \quad 12) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \quad 14) \begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad 15) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \quad 17) \begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2x_3 = 1 \end{cases} \quad 18) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \quad 20) \begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 4 \end{cases} \quad 21) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \quad 23) \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad 24) \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad 26) \begin{cases} 4x_1 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} \quad 27) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad 29) \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_3 = 3 \end{cases} \quad 30) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

2 ВАРИАНТИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. За даними таблиці кількісних співвідношень знайти кількість елементів для кожного блоку:

1)

БЛОК 1	$2X_1$	$4X_2$	$8X_3$	34
БЛОК 2	$3X_1$	$2X_2$	X_3	10
БЛОК 3	X_1	X_2	$7X_3$	24

2)

БЛОК 1	X_1	$8X_2$	$7X_3$	86
БЛОК 2	$4X_1$	$6X_2$	$9X_3$	100
БЛОК 3	$2X_1$	X_2	X_3	19

3)

БЛОК 1	$5X_1$	$9X_2$	X_3	116
БЛОК 2	$7X_1$	$7X_2$	$8X_3$	117
БЛОК 3	X_1	$3X_2$	$2X_3$	49

4)

БЛОК 1	$8X_1$	$6X_2$	X_3	25
БЛОК 2	0	$4X_2$	$8X_3$	28
БЛОК 3	$2X_1$	$7X_2$	$3X_3$	20

5)

БЛОК 1	X_1	X_2	$7X_3$	51
БЛОК 2	$4X_1$	$2X_2$	$6X_3$	64
БЛОК 3	$8X_1$	$7X_2$	X_3	74

6)

БЛОК 1	$3X_1$	$7X_2$	$4X_3$	115
БЛОК 2	$9X_1$	$9X_2$	X_3	160
БЛОК 3	$11X_1$	$2X_2$	$7X_3$	155

7)

БЛОК 1	$3X_1$	$2X_2$	$4X_3$	19
БЛОК 2	$7X_1$	X_2	X_3	24
БЛОК 3	$2X_1$	$4X_2$	$6X_3$	22

8)

БЛОК 1	X_1	0	$4X_3$	44
БЛОК 2	$2X_1$	$9X_2$	$6X_3$	133
БЛОК 3	$4X_1$	$6X_2$	$9X_3$	155

9)

БЛОК 1	X_1	$4X_2$	$3X_3$	26
БЛОК 2	$2X_1$	$4X_2$	$4X_3$	36
БЛОК 3	$4X_1$	X_2	$3X_3$	35

10)

БЛОК 1	$2X_1$	X_2	$8X_3$	21
БЛОК 2	$7X_1$	X_2	X_3	17
БЛОК 3	$4X_1$	$9X_2$	$6X_3$	29

11)

БЛОК 1	$2X_1$	$6X_2$	$8X_3$	48
БЛОК 2	X_1	$7X_2$	$9X_3$	48
БЛОК 3	$2X_1$	$2X_2$	X_3	16

12)

БЛОК 1	$4X_1$	$5X_2$	X_3	35
БЛОК 2	$2X_1$	$6X_2$	$6X_3$	32
БЛОК 3	$7X_1$	$4X_2$	$9X_3$	71

13)

БЛОК 1	X_1	$2X_2$	X_3	12
БЛОК 2	$8X_1$	$4X_2$	$6X_3$	68
БЛОК 3	$5X_1$	$5X_2$	$5X_3$	55

14)

БЛОК 1	$2X_1$	$4X_2$	$2X_3$	16
БЛОК 2	$7X_1$	0	$6X_3$	38
БЛОК 3	$4X_1$	$7X_2$	$6X_3$	39

15)

БЛОК 1	$2X_1$	$2X_2$	X_3	24
БЛОК 2	$3X_1$	$4X_2$	$7X_3$	85
БЛОК 3	$6X_1$	$7X_2$	$9X_3$	125

16)

БЛОК 1	$5X_1$	$3X_2$	$7X_3$	59
БЛОК 2	$7X_1$	$2X_2$	$6X_3$	70
БЛОК 3	X_1	$4X_2$	X_3	25

17)

БЛОК 1	X_1	$4X_2$	$7X_3$	87
БЛОК 2	$7X_1$	$8X_2$	$7X_3$	155
БЛОК 3	$4X_1$	$5X_2$	X_3	71

18)

БЛОК 1	X_1	$4X_2$	$8X_3$	35
БЛОК 2	$8X_1$	$4X_2$	X_3	49
БЛОК 3	X_1	$7X_2$	$6X_3$	51

19)

БЛОК 1	$2X_1$	$7X_2$	$9X_3$	127
БЛОК 2	X_1	$9X_2$	X_3	83
БЛОК 3	$4X_1$	$7X_2$	$3X_3$	93

20)

БЛОК 1	$5X_1$	$4X_2$	$6X_3$	42
БЛОК 2	$2X_1$	0	$9X_3$	22
БЛОК 3	X_1	$7X_2$	$3X_3$	43

21)

БЛОК 1	$6X_1$	$5X_2$	X_3	55
БЛОК 2	$2X_1$	X_2	$7X_3$	71
БЛОК 3	$7X_1$	0	$9X_3$	121

22)

БЛОК 1	$8X_1$	$4X_2$	$8X_3$	68
БЛОК 2	$5X_1$	$4X_2$	$7X_3$	56
БЛОК 3	$6X_1$	$2X_2$	$6X_3$	50

23)

БЛОК 1	$3X_1$	$8X_2$	$4X_3$	49
БЛОК 2	X_1	$7X_2$	$8X_3$	74
БЛОК 3	$4X_1$	X_2	$3X_3$	37

24)

БЛОК 1	$2X_1$	$7X_2$	$4X_3$	41
БЛОК 2	$5X_1$	$6X_2$	$8X_3$	79
БЛОК 3	$3X_1$	$2X_2$	X_3	23

25)

БЛОК 1	$2X_1$	$2X_2$	$5X_3$	47
БЛОК 2	$5X_1$	$4X_2$	X_3	33
БЛОК 3	$2X_1$	X_2	$7X_3$	57

26)

БЛОК 1	$8X_1$	$6X_2$	$2X_3$	36
БЛОК 2	$2X_1$	$4X_2$	$6X_3$	30
БЛОК 3	X_1	$5X_2$	$7X_3$	35

27)

БЛОК 1	$2X_1$	$6X_2$	$4X_3$	40
БЛОК 2	$7X_1$	$2X_2$	$2X_3$	30
БЛОК 3	$3X_1$	$4X_2$	$2X_3$	26

28)

БЛОК 1	$8X_1$	$2X_2$	$3X_3$	45
БЛОК 2	$4X_1$	$8X_2$	$7X_3$	117
БЛОК 3	X_1	X_2	$2X_3$	23

29)

БЛОК 1	$2X_1$	$7X_2$	$9X_3$	73
БЛОК 2	$8X_1$	$6X_2$	X_3	55
БЛОК 3	X_1	$4X_2$	$3X_3$	35

30)

БЛОК 1	$5X_1$	$6X_2$	0	49
БЛОК 2	$8X_1$	$4X_2$	$6X_3$	62
БЛОК 3	$3X_1$	X_2	X_3	20

2. Знайти елементи визначників:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ y & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 & y \\ x & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 46 \quad \Delta = -145$$

$$2) \begin{vmatrix} y & 4 & 1 \\ 1 & 6 & x \\ 1 & 9 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y & x \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -53 \quad \Delta = 128$$

$$3) \begin{vmatrix} y & 7 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & y \\ 0 & x & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 90 \quad \Delta = 204$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ y & 4 & 6 \\ x & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ y & 5 & 9 \\ x & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 264 \quad \Delta = -182$$

$$5) \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ y & x & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & y & 1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -88 \quad \Delta = -227$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ y & 9 & 7 \\ 7 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & y & 7 \\ 7 & 1 & 6 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 215 \quad \Delta = 15$$

$$7) \begin{vmatrix} x & 7 & 3 \\ 4 & y & x \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 9 & 4 \\ x & y & 0 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 26 \quad \Delta = -36$$

$$8) \begin{vmatrix} 4 & 2 & y \\ x & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & x & 2 \\ 4 & 6 & y \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 57 \quad \Delta = 103$$

$$9) \begin{vmatrix} 4 & x & 1 \\ 1 & y & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 & y \\ 7 & x & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 30 \quad \Delta = 178$$

$$10) \begin{vmatrix} 4 & 7 & y \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -428 \quad \Delta = -83$$

$$11) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & y & 6 \\ x & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ x & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 16 \quad \Delta = 198$$

$$12) \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 4 & x & 5 \\ 9 & 6 & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ y & x & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -206 \quad \Delta = -27$$

$$13) \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & y \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 7 & y & 4 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 10 \quad \Delta = 0$$

$$14) \begin{vmatrix} x & 7 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \\ y & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & x & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & y \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 60 \quad \Delta = -137$$

$$\begin{array}{l}
 15) \begin{array}{ccc|ccc}
 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \\
 7 & x & y & 7 & 5 & 3 \\
 9 & 7 & 1 & x & 1 & 6
 \end{array} \\
 \Delta = -1 \quad \Delta = -124
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 16) \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & y & 5 & 6 & x & 1 \\
 x & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
 3 & 1 & y & 7 & 3 & y
 \end{array} \\
 \Delta = -69 \quad \Delta = -39
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 17) \begin{array}{ccc|ccc}
 4 & 7 & 1 & 1 & 4 & y \\
 5 & 4 & 4 & 8 & 1 & 4 \\
 1 & x & 7 & x & 6 & 1
 \end{array} \\
 \Delta = -78 \quad \Delta = 385
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 18) \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 8 & 1 & y & 8 & 7 \\
 4 & y & 4 & 7 & x & 4 \\
 6 & x & 8 & 5 & 1 & 7
 \end{array} \\
 \Delta = -245 \quad \Delta = -206
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 19) \begin{array}{ccc|ccc}
 4 & x & 2 & x & 0 & 6 \\
 7 & 9 & 7 & 2 & 5 & 4 \\
 3 & 1 & y & 7 & 3 & y
 \end{array} \\
 \Delta = 214 \quad \Delta = -141
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 20) \begin{array}{ccc|ccc}
 x & 2 & 5 & 4 & 9 & 9 \\
 y & 0 & 4 & x & 2 & y \\
 3 & 9 & 6 & 7 & 3 & 1
 \end{array} \\
 \Delta = 219 \quad \Delta = 257
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 21) \begin{array}{ccc|ccc}
 7 & 2 & 6 & 6 & 4 & 8 \\
 0 & 1 & x & x & 8 & 4 \\
 9 & y & 1 & 2 & 6 & y
 \end{array} \\
 \Delta = -202 \quad \Delta = 196
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 22) \begin{array}{ccc|ccc}
 6 & x & 8 & 7 & 1 & 1 \\
 2 & 4 & 4 & 2 & y & x \\
 y & 7 & 8 & 0 & 9 & 7
 \end{array} \\
 \Delta = -16 \quad \Delta = -17
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 23) \begin{array}{ccc|ccc}
 4 & x & y & y & 6 & 4 \\
 1 & 7 & 8 & 2 & x & 8 \\
 3 & 8 & 4 & 5 & 2 & 7
 \end{array} \\
 \Delta = -163 \quad \Delta = 125
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 24) \begin{array}{ccc|ccc}
 x & 5 & 2 & 4 & 7 & 4 \\
 2 & 6 & 7 & 1 & x & 8 \\
 1 & y & 4 & 1 & y & 3
 \end{array} \\
 \Delta = -81 \quad \Delta = -165
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 25) \begin{array}{ccc|ccc}
 x & 5 & 2 & 1 & y & 2 \\
 1 & y & 2 & x & 8 & 6 \\
 7 & 1 & 5 & 5 & 7 & 6
 \end{array} \\
 \Delta = 27 \quad \Delta = 26
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 26) \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 8 & 2 & 4 & 5 \\
 5 & 4 & 6 & 5 & x & 2 \\
 y & 6 & x & 1 & y & 1
 \end{array} \\
 \Delta = 53 \quad \Delta = 129
 \end{array}$$

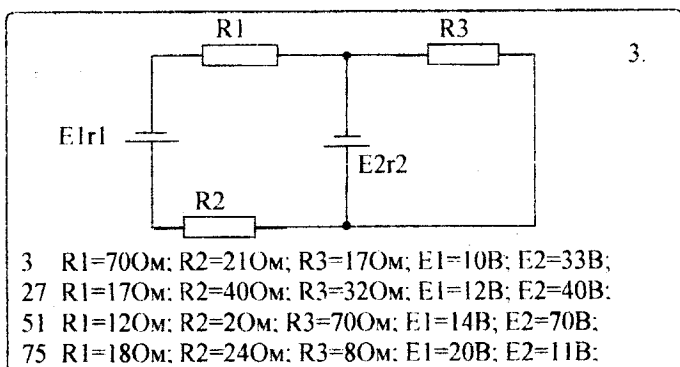
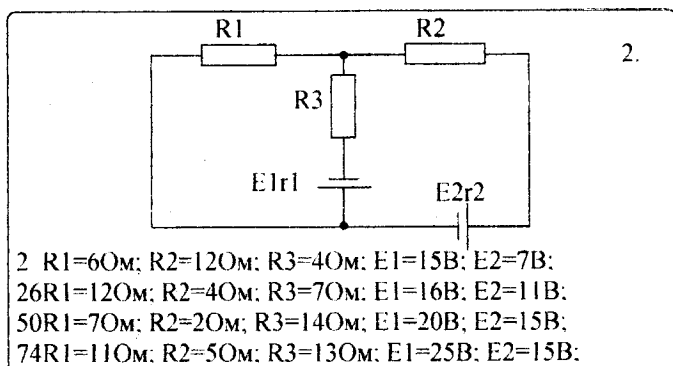
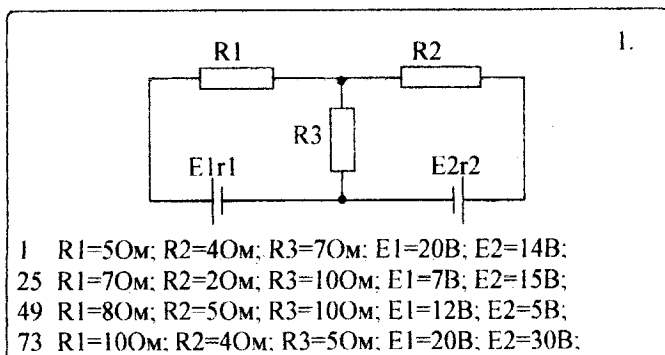
$$\begin{array}{l}
 27) \begin{array}{ccc|ccc}
 y & 7 & 2 & 1 & 8 & y \\
 x & 2 & 6 & x & 8 & 2 \\
 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 7
 \end{array} \\
 \Delta = -32 \quad \Delta = -156
 \end{array}$$

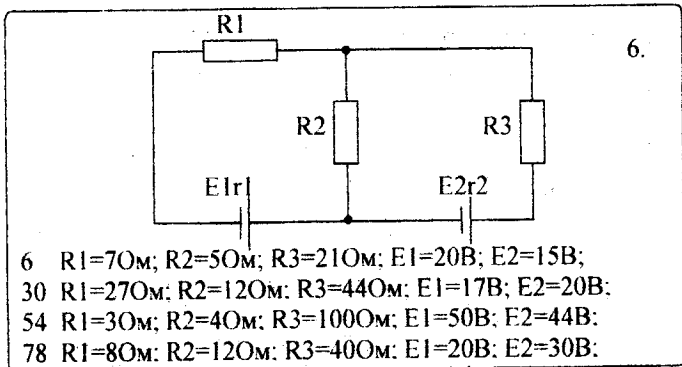
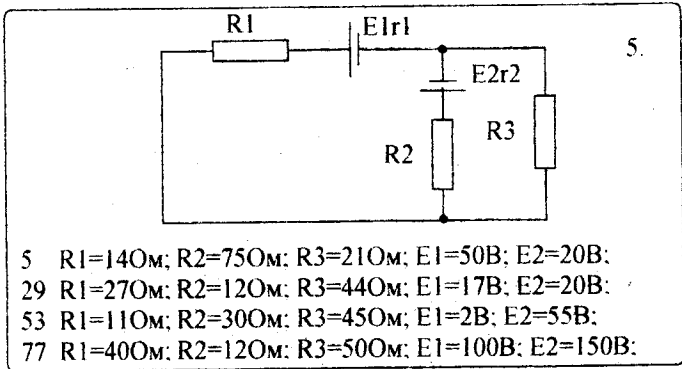
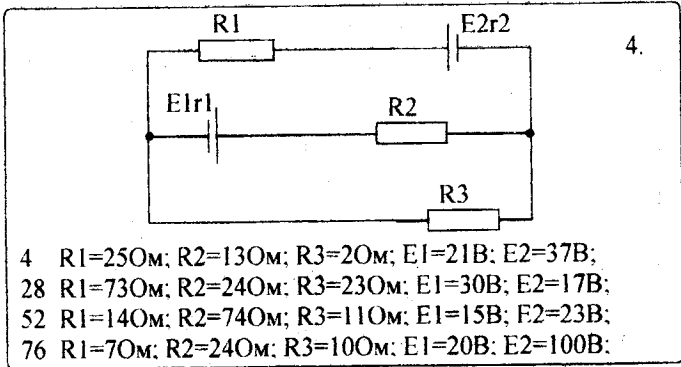
$$\begin{array}{l}
 28) \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 4 & 8 & 3 & 2 & 4 \\
 1 & 8 & 2 & y & x & 6 \\
 x & y & 3 & 4 & 2 & 2
 \end{array} \\
 \Delta = -58 \quad \Delta = 20
 \end{array}$$

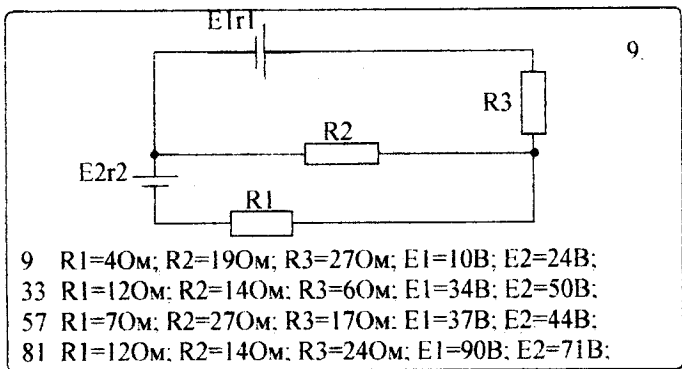
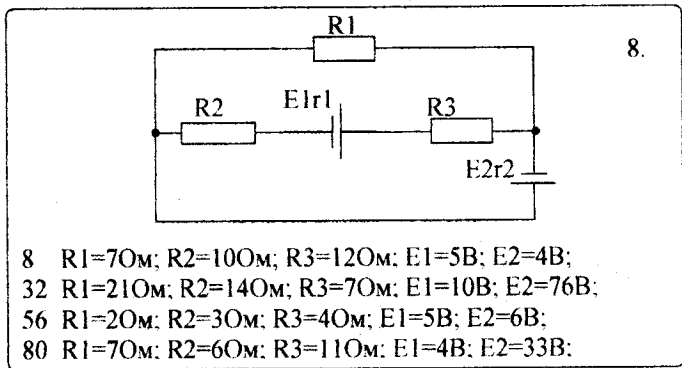
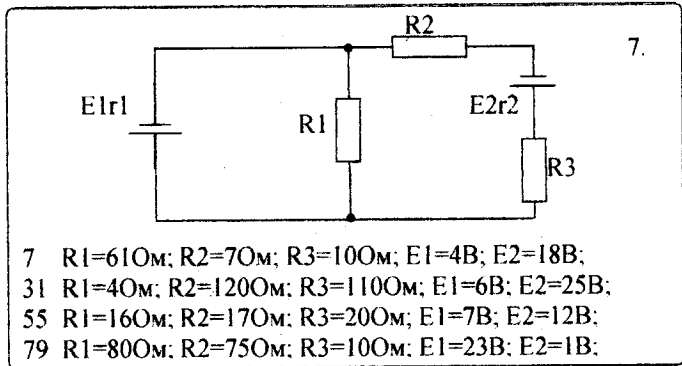
$$\begin{array}{l}
 29) \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 8 & 2 & 3 & x & 0 \\
 x & 6 & 7 & 8 & 5 & 6 \\
 3 & y & 9 & y & 1 & 6
 \end{array} \\
 \Delta = -101 \quad \Delta = -96
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 30) \begin{array}{ccc|ccc}
 x & 8 & 5 & 1 & 6 & 9 \\
 1 & y & 6 & y & x & 1 \\
 1 & 6 & 0 & 8 & 2 & 7
 \end{array} \\
 \Delta = -50 \quad \Delta = -245
 \end{array}$$

3. Розв'язати електричну схему:







407010

10.

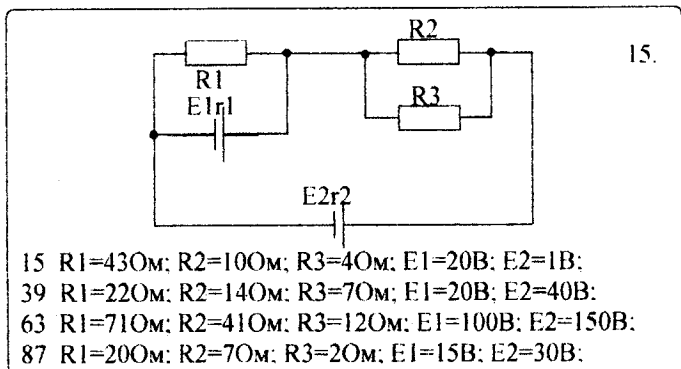
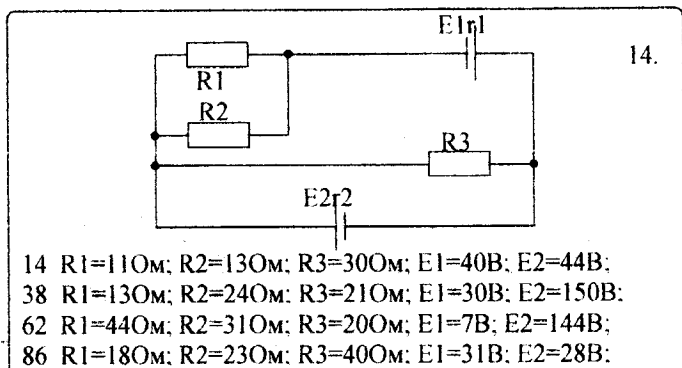
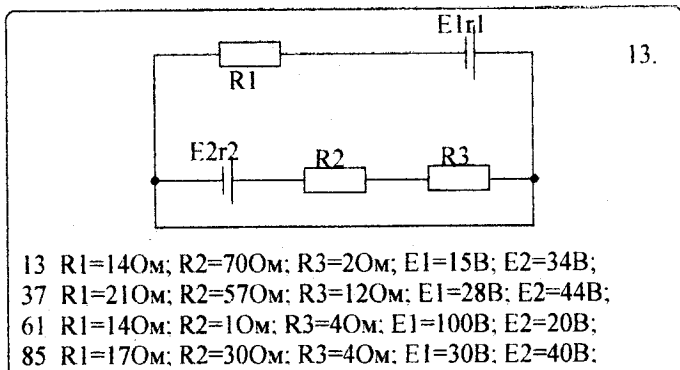
10 $R_1=60\Omega$; $R_2=110\Omega$; $R_3=120\Omega$; $E_1=94\text{B}$; $E_2=17\text{B}$;
 34 $R_1=420\Omega$; $R_2=110\Omega$; $R_3=440\Omega$; $E_1=71\text{B}$; $E_2=64\text{B}$;
 58 $R_1=370\Omega$; $R_2=200\Omega$; $R_3=310\Omega$; $E_1=24\text{B}$; $E_2=30\text{B}$;
 82 $R_1=10\Omega$; $R_2=100\Omega$; $R_3=100\Omega$; $E_1=5\text{B}$; $E_2=100\text{B}$;

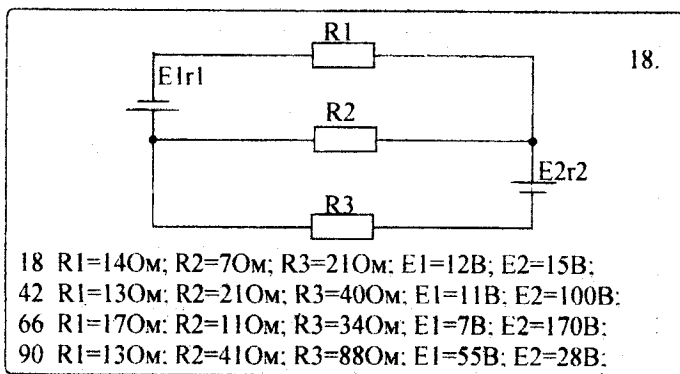
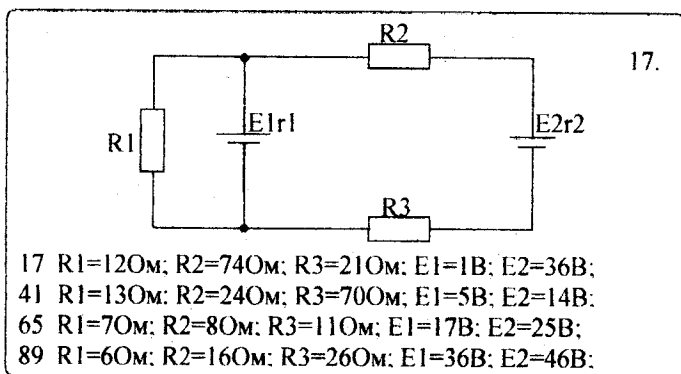
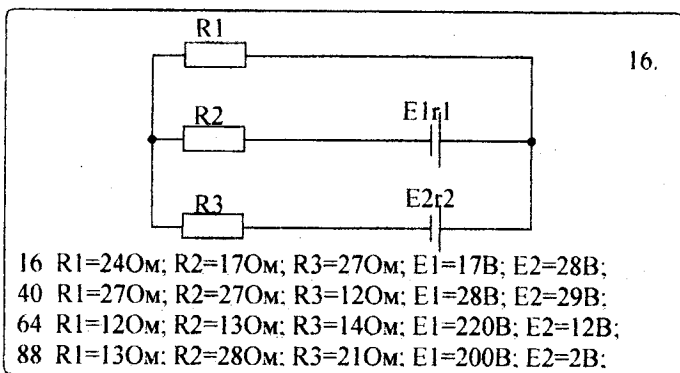
11.

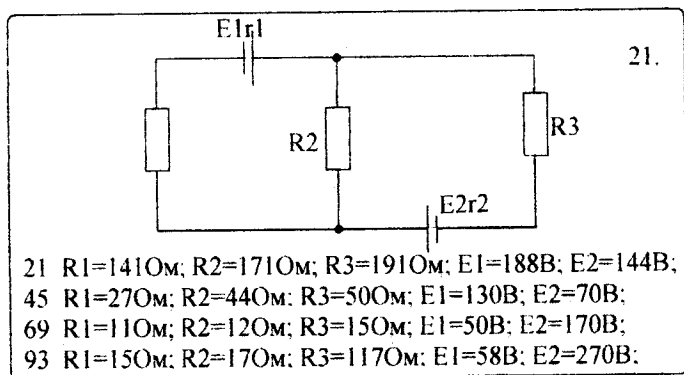
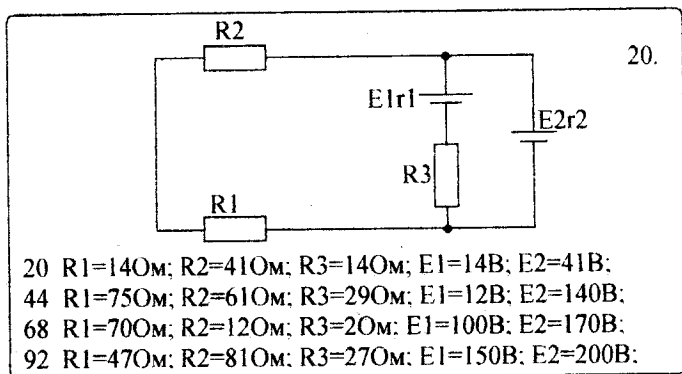
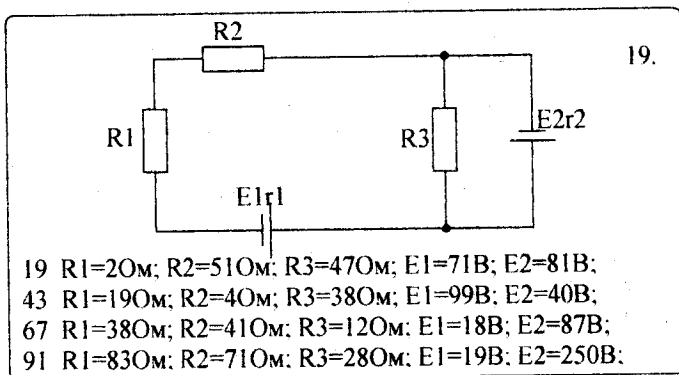
11 $R_1=710\Omega$; $R_2=140\Omega$; $R_3=70\Omega$; $E_1=10\text{B}$; $E_2=14\text{B}$;
 35 $R_1=10\Omega$; $R_2=70\Omega$; $R_3=100\Omega$; $E_1=20\text{B}$; $E_2=14\text{B}$;
 59 $R_1=50\Omega$; $R_2=110\Omega$; $R_3=120\Omega$; $E_1=40\text{B}$; $E_2=40\text{B}$;
 83 $R_1=20\Omega$; $R_2=140\Omega$; $R_3=700\Omega$; $E_1=5\text{B}$; $E_2=7\text{B}$;

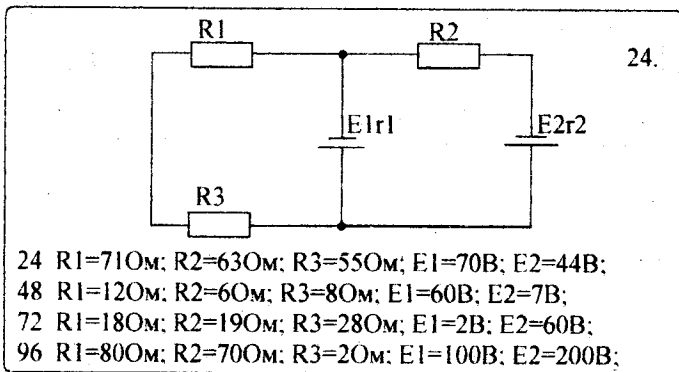
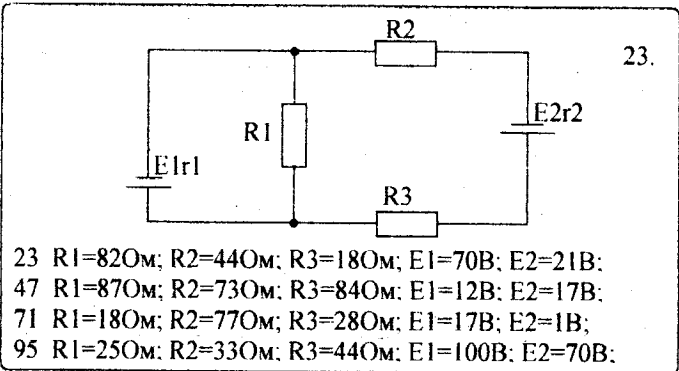
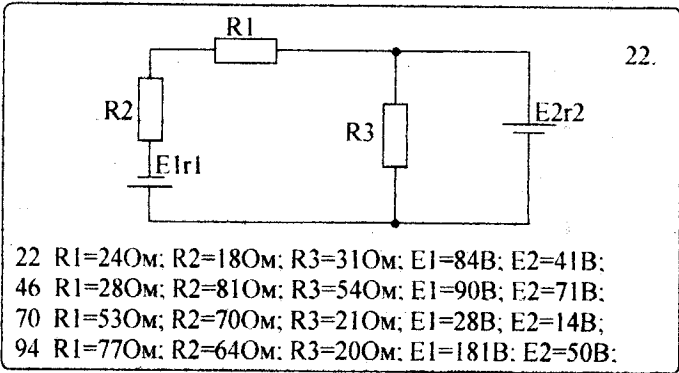
12.

12 $R_1=120\Omega$; $R_2=170\Omega$; $R_3=500\Omega$; $E_1=10\text{B}$; $E_2=50\text{B}$;
 36 $R_1=70\Omega$; $R_2=120\Omega$; $R_3=700\Omega$; $E_1=12\text{B}$; $E_2=20\text{B}$;
 60 $R_1=80\Omega$; $R_2=70\Omega$; $R_3=240\Omega$; $E_1=7\text{B}$; $E_2=30\text{B}$;
 84 $R_1=200\Omega$; $R_2=300\Omega$; $R_3=400\Omega$; $E_1=50\text{B}$; $E_2=60\text{B}$;

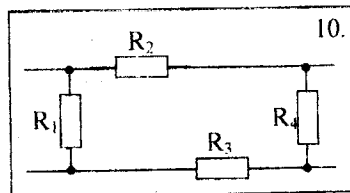
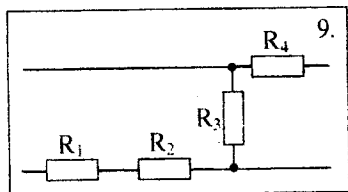
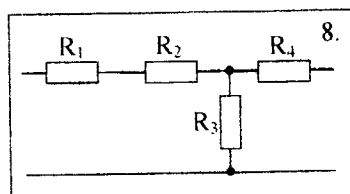
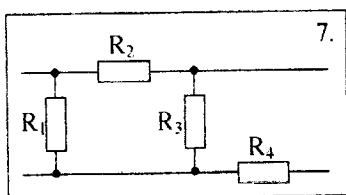
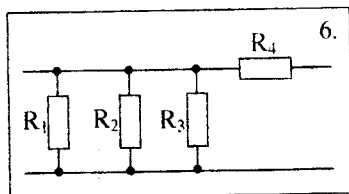
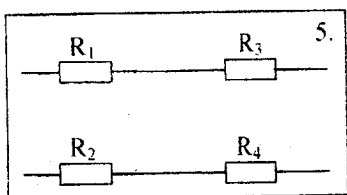
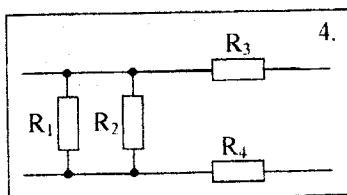
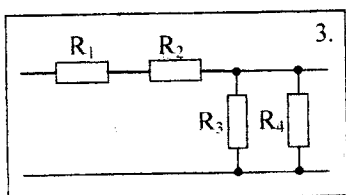
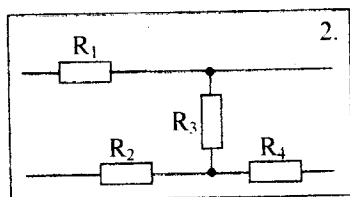
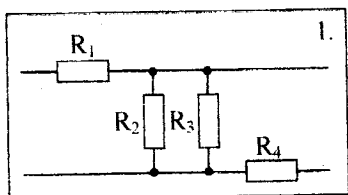


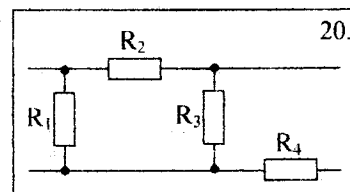
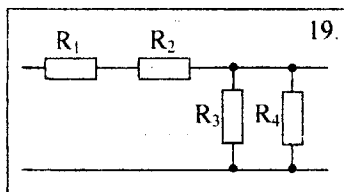
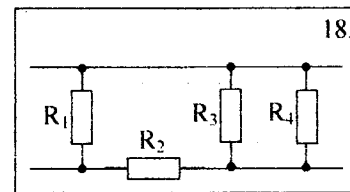
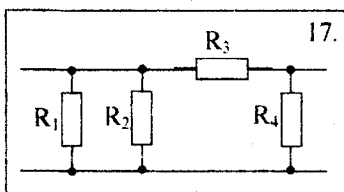
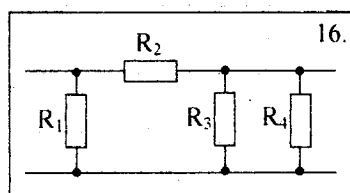
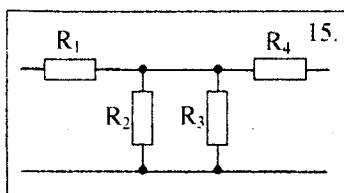
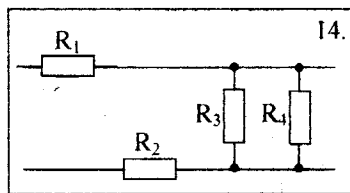
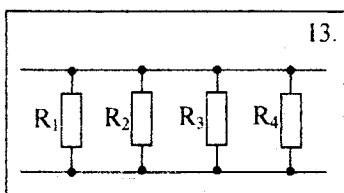
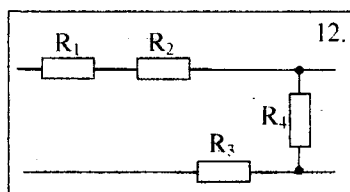
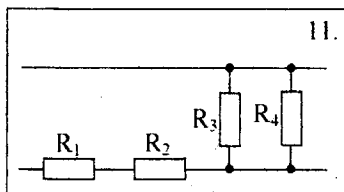


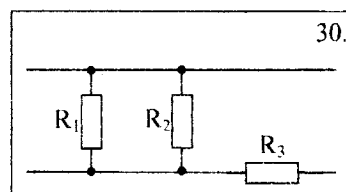
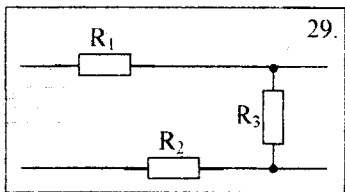
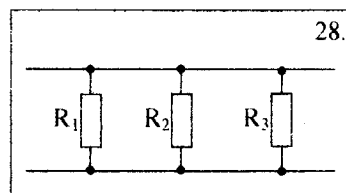
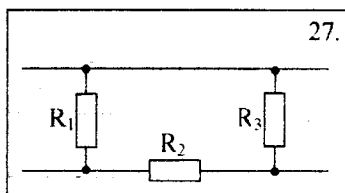
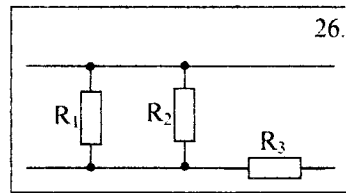
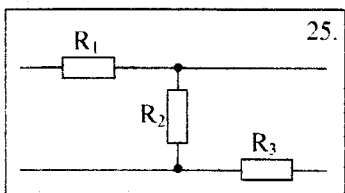
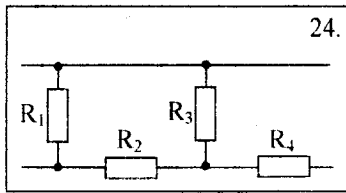
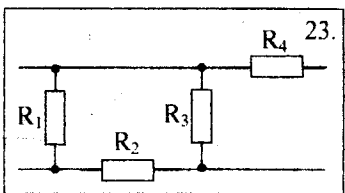
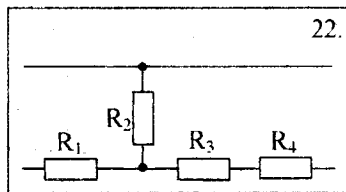
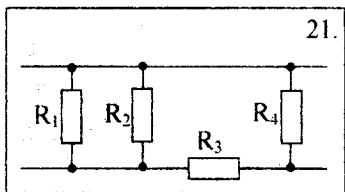




4. Знайти передавальну матрицю зображеного чотириполіусника:







Приклади розв'язування завдань.

Завдання 1.

В електротехніці для визначення необхідності певних елементів, зв'язаних кількісним співвідношенням, використовується табличний метод, який полягає у знаходженні коефіцієнтів для кожного елемента.

Приклад.

Нехай є таблиця кількісних елементів:

Блок I	$2x_1$	$4x_2$	$3x_3$	19
Блок II	$3x_1$	$4x_2$	x_3	14
Блок III	$2x_1$	x_2	$5x_3$	19
	R	C	VD	шт.

Необхідно знайти кількість елементів для кожного блоку. Для цього складемо рівняння:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 19 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 19 \\ 3 & 4 & 1 & 14 \\ 2 & 1 & 5 & 19 \end{array} \right)$$

Розв'язуємо методами Крамера, Гаусса і матричним.

$$\Delta = -29$$

$$\Delta_{x_1} = -29$$

$$\Delta_{x_2} = -58$$

$$\Delta_{x_3} = -87$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язком є кількісна таблиця:

Блок I	2	8	9	19
Блок II	3	8	3	14
Блок III	2	2	15	19
	7	18	27	шт.

Завдання 2.

Розв'язання системи рівнянь використовується також і для розрахунку складних електричних схем з використанням законів Кірхгофа.

I закон. Алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю.

II закон. Алгебраїчна сума падінь напруг у замкнутому контурі дорівнює сумі ЕРС.

Для прикладу розглянемо розв'язування електричної схеми:

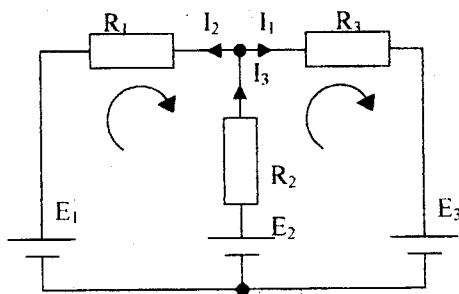
Дано.

$$E_1 = 2 \text{ В}, R_1 = 4 \text{ Ом}$$

$$E_2 = 4 \text{ В}, R_2 = 6 \text{ Ом}$$

$$E_3 = 6 \text{ В}, R_3 = 8 \text{ Ом}$$

Знайти: $I_1 = ?$; $I_2 = ?$; $I_3 = ?$;



1. Визначаємо кількість вузлів: N і складаємо $(N-1)$ рівняння на першій закон.

2. В вузлі обираємо напрямок струмів і напрямок обходу контуру.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ E_1 - R_1 I_2 - R_2 I_3 - E_2 = 0 \\ I_1 R_3 - E_3 + E_2 + R_2 I_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 2 - 4I_2 - 6I_3 - 4 = 0 \\ 8I_1 - 6 + 4 + 6I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -4I_2 - 6I_3 = 2 \\ 8I_1 + 6I_3 = 2 \end{cases}$$

Вирішуємо останню систему одним з методів, наприклад Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -6 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -104$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 40$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$I_1 = \frac{32}{104} = 0,308 \text{ А}$$

$$I_2 = -\frac{40}{104} = -0,385 \text{ А}$$

$$I_3 = -\frac{8}{104} = -0,077 \text{ А}$$

Відповідь: $I_1 = 0,308A$; $I_2 = 0,385A$; $I_3 = 0,077A$;

Завдання 3.

Дані дві матриці A і B і дані їх детермінанти $\det A$ і $\det B$. В кожній з них невідомі два елементи x та y . Знайти всі можливі розв'язки.

Приклад.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x & 3 & 4 \\ 2 & y & 1 \end{bmatrix}; \quad \det A = 9 \quad B = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 4 & y \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \det B = 4$$

$$1) \quad 3 + xy \cdot 0 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 0 - 2x - 4y = 9$$

$$19 - 2x - 4y = 9$$

$$10 - 2x - 4y = 0$$

$$2) \quad 12x + 2 + y - 4 - 6 - xy = 4$$

$$12x - 8 + y - xy - 4 = 0$$

$$12x - 12 + y - xy = 0$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ 12x + y - xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$$-2x = -10 + 4y$$

$$x = 5 - 2y$$

$$12(5 - 2y) + y - (5 - 2y)y - 12 = 0$$

$$60 - 24y + y - 5y + 2y^2 - 12 = 0$$

$$2y^2 - 28y + 48 = 0$$

$$y^2 - 14y + 24 = 0$$

$$D = 14^2 - 4 \cdot 24 = 100$$

$$y = \frac{14 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 12 & x_1 = -19 \\ y_2 = 2 & x_2 = 1 \end{matrix}$$

Робимо перевірку:

$$1): x_1 = -19; y_1 = 12;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -19 & 3 & 4 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$\begin{vmatrix} -19 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

2): $x_2 = 1; y_2 = 2;$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

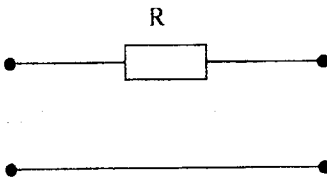
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Відповідь: (-19; 12); (1; 2).

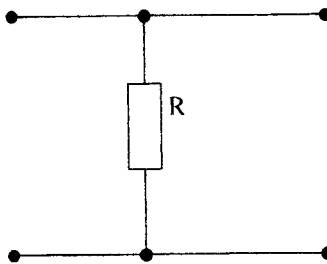
Завдання 4.

Широкого розповсюдження в радіотехніці отримав метод розрахунку ланцюгів методом чотириполюсника.

Чотириполюсником називається частина електричного ланцюга, яка розглядається відносно будь-яких двох пар кінців. Кожен чотириполюсник має свою передавальну матрицю. Найпростіші з них:



$$P = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

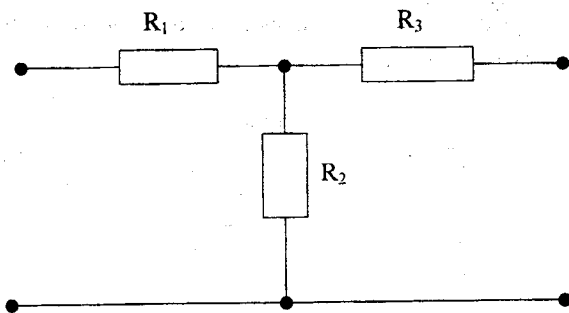


$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

При каскадному з'єднанні чотириполюсників їх передавальні матриці перемножуються. Це дає можливість знаходити передавальні матриці складних чотириполюсників, розділяючи їх на найпростіші.

Приклад.

Знайти передавальну матрицю зображеного чотириполюсника.



$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_3 + R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} & 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_3 + R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} & 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{bmatrix}$$

3 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАНЯТЬ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Два заводи випускають вироби M, N, P вищої, першої та другої категорії якості. Кількість виробів, випущених кожним заводом за кожною категорією, характеризується такою таблицею:

Категорія якості	Готові вироби					
	Перший завод			Другий завод		
	M	N	P	M	N	P
Вища	a_1	b_1	c_1	d_1	l_1	k_1
Перша	a_2	b_2	c_2	d_2	l_2	k_2
Друга	a_3	b_3	c_3	d_3	l_3	k_3

Знайти загальний випуск виробів за вказаними категоріями якості. На скільки зміниться загальний випуск виробів за вказаними категоріями якості, якщо перший завод зменшить випуск виробів P за всіма категоріями якості в 2 рази, а другий – збільшить випуск виробів M у 3 рази? Дані для розв'язування взяти в таблиці А1.

2. Завод випускає вироби чотирьох типів. Причому буде вироблено:

- 1) В цеху X_1 a одиниць виробів I типу та b одиниць II типу;
- 2) В цеху X_2 c одиниць виробів III типу;
- 3) В цеху X_3 d одиниць виробів IV типу.

Визначити витрати матеріалів p та q в кожному цеху, якщо норми матеріалів (у відповідних одиницях) наведені в таблиці. Для розв'язування дані в таблиці А2.

Тип виробу	Норми витрат матеріалів	
	p	q
I	p_1	q_1
II	p_2	q_2
III	p_3	q_3
IV	p_4	q_4

3. При збірці виробів різних типів деталі надходять із цехів X_1, X_2, X_3 в об'ємі відповідно K_1, K_2, K_3 . Визначити число робітників чотирьох професій, необхідних для виконання цих робіт, якщо норми витрат праці робітників для кожної професії наведено в таблиці.

Цех	Норми витрат праці за професіями			
	I	II	III	IV
X_1	a_1	b_1	c_1	d_1
X_2	a_2	b_2	c_2	d_2
X_3	a_3	b_3	c_3	d_3

Дані для розв'язування взяти з таблиці А1.

4. У деяких галузях господарства намічено побудувати об'єкти чотирьох типів. Будівельний об'єм завдань за кожним із типів об'єктів такий: I - a , II - b , III - c , IV - d . Визначити об'єм будівельно-монтажних робіт трьох комплексів M , N , P , виконуваних при будівництві цих об'єктів, якщо величини кожного виду робіт на 1 м^3 завдань залежно від типу об'єкта наведено в таблиці.

Тип об'єкта	Величини робіт		
	M	N	P
I	C_1	C_2	C_3
II	d_1	d_2	d_3
III	l_1	l_2	l_3
IV	k_1	k_2	k_3

Дані взяті із табл. A1, A2.

5. Для виробництва виробів M , N необхідні вузли D_1 та D_2 , для виготовлення яких у свою чергу необхідні деталі C_1 , C_2 , C_3

Виріб	Кількість вузлів		Вузол	Кількість деталей		
	D_1	D_2		C_1	C_2	C_3
M	d_1	d_2	D_1	a_1	a_2	a_3
N	d_3	d_4	D_2	c_1	c_2	c_3

Визначити кількість деталей, необхідних для виробництва одного виробу кожного виду. Дані взяті із таблиці A1.; вважати $d_4=11$.

6. Розрахувати заробітну плату, яка припадає на кожне замовлення при виробництві різних деталей, якщо відомі такі дані:

а). Витрати робочого часу в годинах на кожному робочому місці i на кожен виріб:

Виріб	Витрати				
	1	2	3	4	5
M	d_1	l_1	K_1	p_1	q_1
N	d_2	l_2	K_2	p_2	q_2
P	d_2	l_3	K_3	p_3	q_3

б). Кількість виробів у кожному замовленні, шт.:

Замовлення	Кількість виробів		
	M	N	P
A	a_1	b_1	c_1
B	a_2	b_2	c_2
C	a_3	b_3	c_3

в) Погодинна заробітна плата на кожному робочому місці, грн.:

Робоче місце	Погодинна зарплата
1	d_1
2	d_2
3	d_3
4	d_4
5	d_5

Дані для розв'язання взяти із табл. А1, А2.

7. Для виготовлення деталей чотирьох видів X_i , витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються в умовних одиницях:

Ресурси	Витрати на одну деталь кожного виду			
	1	2	3	4
Матеріали	a	b	c	d
Робоча сила	p_1	p_2	p_3	p_4
Електроенергія	q_1	q_2	q_3	q_4

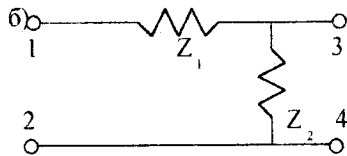
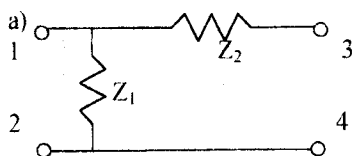
а) обчислити загальні витрати матеріалів y_1 , робочої сили y_2 і електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості деталей кожного типу, якщо $X_1 = 5$, $X_2 = 2$, $X_3 = 7$, $X_4 = 1$;

б) знаючи загальні витрати матеріалів y_1 , робочої сили y_2 та електроенергії y_3 (із розв'язку п.а) і витрати на одну деталь кожного виду, визначити кількість X_i деталей кожного виду.

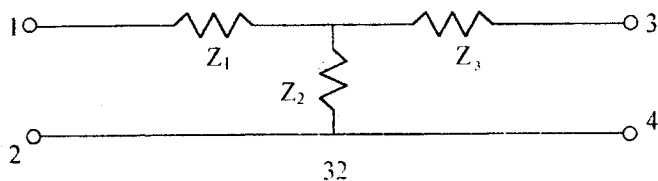
Дані для розв'язування взяти з табл. А2.

8. Визначити характеристичні матриці чотирьохполіусників:

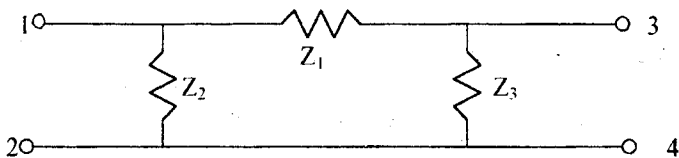
1). Г-подібний



2). Т-подібний



3). П-подібний



Дані взяті з табл. А.3.

9. Зв'язок між амплітудами струму і напруги на вході та виході чотириполюсника задано системою:

$$\begin{cases} I_1 = \alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2 \\ I_2 = \alpha_{21}E_1 + \alpha_{22}E_2 \end{cases}$$

а) записати систему в матричному вигляді:

б) визначити матрицю повної провідності, повного опору.

Дані взяті з табл. А.4.

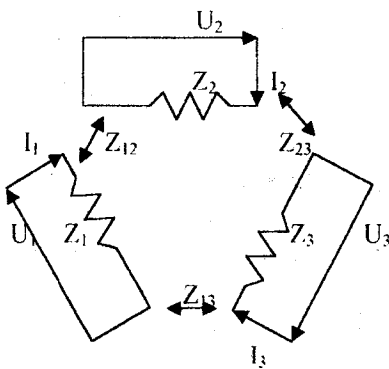
10. Рівняння трьох індуктивно зв'язаних двополюсників мають вигляд:

$$\begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + z_{13}I_3 \\ U_2 = z_{12}I_1 + z_{22}I_2 + z_{23}I_3 \\ U_3 = z_{13}I_1 + z_{23}I_2 + z_{33}I_3 \end{cases}$$

а) записати систему рівнянь у матричній формі:

б) визначити силу струму в кожному із двополюсників методами Гаусса, Крамера і матричним.

Дані взяті з таблиці А3., А4



ДОДАТОК А

Таблица А.1

№ вар	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	f_1	f_2	f_3	K_1	K_2	K_3
1	3	5	11	3	2	8	4	6	2	1	2	1	3	2	15	10	14	2
2	5	8	2	15	1	2	10	16	4	4	3	2	5	20	4	1	0	11
3	6	3	4	17	4	5	8	2	20	2	4	3	11	11	8	7	12	2
4	11	13	6	2	0	1	6	12	2	1	1	2	3	13	10	20	1	3
5	8	11	15	1	3	4	12	4	8	5	3	1	2	6	13	6	4	12
6	9	6	19	0	1	15	4	8	10	3	1	4	8	2	4	12	8	8
7	13	24	26	0	3	3	2	10	18	0	2	3	4	0	26	16	16	2
8	4	16	17	4	2	1	0	20	4	3	0	1	6	1	0	2	20	19
9	1	23	4	10	1	7	20	6	12	2	3	1	2	6	3	8	14	10
10	16	2	8	7	1	5	16	4	14	4	3	5	12	3	7	8	1	0
11	23	7	2	5	3	4	14	8	10	1	5	2	8	2	2	1	1	2
12	2	14	0	12	1	4	8	16	20	3	2	5	2	8	10	5	6	2
13	14	8	1	6	1	1	4	26	22	2	3	5	15	11	18	16	1	8
14	12	11	3	9	8	6	6	10	10	1	4	2	1	15	4	4	1	12
15	7	20	5	2	2	5	10	14	8	2	4	3	2	1	16	14	4	17
16	3	13	3	5	1	3	2	16	12	6	2	0	10	3	17	23	12	11
17	20	15	2	11	2	3	12	8	24	4	3	3	16	4	4	7	11	12
18	15	0	12	3	3	4	20	4	18	2	6	3	4	12	2	2	3	1
19	19	2	14	6	4	3	10	6	10	3	5	6	6	4	1	5	9	3
20	2	19	10	0	2	2	8	12	20	1	6	5	3	8	0	3	8	1
21	0	27	12	8	0	5	6	22	6	2	3	4	4	9	20	4	6	4
22	17	11	12	1	3	1	4	14	10	4	5	3	17	6	4	14	6	14
23	19	3	4	13	1	1	12	6	4	1	5	6	4	19	1	8	10	10
24	27	1	7	23	2	4	2	12	8	6	5	1	5	0	23	10	7	7
25	7	0	2	21	3	1	16	10	2	2	1	0	8	1	4	2	20	0

Таблица А2

№. вар.	a	b	c	d	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	q_3	q_4
1	10	4	7	11	1	2	4	5	1	6	3	6
2	15	5	3	16	3	6	5	4	3	1	6	1
3	12	6	10	5	5	1	3	3	5	2	2	2
4	14	3	12	9	2	2	6	6	2	1	1	2
5	16	10	5	24	4	1	2	1	4	3	4	4
6	8	19	9	10	3	3	1	2	3	4	2	6
7	11	2	20	12	2	4	4	2	2	4	5	5
8	7	17	4	11	5	4	2	4	5	2	6	3
9	20	5	11	4	4	2	5	6	1	1	2	2
10	18	10	3	5	3	1	6	5	3	2	3	4
11	17	4	8	20	6	2	2	3	4	6	6	3
12	12	7	10	16	1	3	3	2	11	1	4	4
13	14	9	16	11	2	1	4	4	2	5	6	2
14	9	16	2	8	6	5	4	6	6	5	5	5
15	5	17	6	13	4	5	6	4	4	4	4	4
16	3	18	12	9	1	4	5	2	1	2	2	1
17	17	10	5	12	3	2	4	5	3	2	3	1
18	13	12	10	7	2	3	2	4	2	4	4	1
19	19	3	20	3	3	4	3	1	5	3	5	5
20	16	8	9	20	4	5	4	3	4	6	1	4
21	4	20	11	10	5	6	5	1	5	1	1	4
22	10	11	5	5	6	1	6	5	6	3	2	3
23	5	24	12	18	1	3	1	6	1	4	3	4
24	3	16	9	5	3	4	3	4	2	1	5	5
25	20	7	11	6	4	2	4	3	4	3	2	4

Таблиця А3

№ вар.	Z_1	Z_{12}	Z_{13}	Z_2	Z_{23}	Z_3	U_1	U_2	U_3	Відповідь
1	5	1	2	3	1	2	19	14	13	/2,3,3/
2	1	1	3	1	1	4	11	7	21	/4,1,2/
3	6	3	1	2	2	5	19	15	12	/3,2,1/
4	9	2	2	3	3	7	49	16	20	/5,1,1/
5	4	4	1	2	1	1	31	21	10	/2,5,3/
6	6	1	2	3	2	2	24	17	16	/3,4,1/
7	12	2	3	1	1	3	79	15	23	/6,2,1/
8	4	3	2	9	1	5	25	37	27	/2,3,4/
9	7	1	3	3	2	11	18	13	40	/1,2,3/
10	7	2	4	2	1	1	38	14	15	/2,2,5/
11	3	4	2	3	1	4	26	26	15	/4,3,1/
12	12	1	4	2	2	1	74	15	27	/5,2,3/
13	1	3	1	4	1	2	12	27	12	/7,1,2/
14	5	1	3	7	4	9	20	55	43	/2,7,1/
15	9	2	1	3	4	2	25	31	33	/1,7,2/
16	4	1	1	1	1	3	23	14	26	/3,5,6/
17	2	2	1	1	7	1	25	50	14	/6,5,3/
18	1	1	2	6	3	3	17	50	37	/5,6,3/
19	7	1	3	5	5	4	24	36	33	/1,2,5/
20	8	2	3	3	2	2	38	22	21	/3,4,2/
21	16	4	3	4	1	1	57	27	13	/2,4,3/
22	5	2	4	9	3	3	37	49	35	/5,4,1/
23	4	1	2	2	4	1	17	27	26	/1,5,4/
24	2	3	1	4	2	10	15	22	18	/4,2,1/
25	3	2	1	8	1	3	33	44	28	/7,3,6/

Таблица А4

№ вар.	I_1	I_2	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	№ вар.	I_1	I_2	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}
1	1	2	2	3	3	-1	14	2	3	2	1	4	0
2	8	19	7	-2	5	3	15	2	5	2	2	3	1
3	5	2	1	5	2	-1	16	1	2	1	1	1	-1
4	7	4	3	2	1	-1	17	3	5	4	3	-1	2
5	11	3	2	-5	-1	-6	18	8	5	1	2	4	-1
6	2	6	3	-2	9	-6	19	5	17	10	-1	2	3
7	1	17	-3	5	-7	-3	20	9	11	3	-4	2	-1
8	4	7	2	-3	4	-6	21	2	27	3	-1	2	3
9	2	8	1	3	1	-3	22	1	28	5	-1	7	2
10	1	7	3	1	1	-1	23	3	11	3	-2	1	1
11	13	8	3	-5	2	-7	24	9	29	2	-3	4	5
12	1	18	3	-4	3	4	25	11	4	3	1	7	-2
13	0	1	2	-3	3	6							

4 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. Перевірити колінеарність векторів \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , які побудовані за векторами \vec{a} і \vec{b} :

- | | |
|--|--|
| 1. $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$, $\vec{b} = \{3, 0, -1\}$, | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$. |
| 2. $\vec{a} = \{1, 0, 1\}$, $\vec{b} = \{-2, 3, 5\}$. | $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$. |
| 3. $\vec{a} = \{-2, 4, 1\}$, $\vec{b} = \{1, -2, 7\}$. | $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}$. |
| 4. $\vec{a} = \{1, 2, -3\}$, $\vec{b} = \{2, -1, -1\}$. | $\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b}$. |
| 5. $\vec{a} = \{3, 5, 4\}$, $\vec{b} = \{5, 9, 7\}$. | $\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. |
| 6. $\vec{a} = \{1, 4, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 1, -1\}$. | $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}$. |
| 7. $\vec{a} = \{1, -2, 5\}$, $\vec{b} = \{3, -1, 0\}$. | $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$. |
| 8. $\vec{a} = \{3, 4, -1\}$, $\vec{b} = \{2, -1, 1\}$. | $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$. |
| 9. $\vec{a} = \{-2, -3, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 0, 5\}$. | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 9\vec{b}$, $\vec{c}_2 = -\vec{a} - 3\vec{b}$. |
| 10. $\vec{a} = \{-1, 4, 2\}$, $\vec{b} = \{3, -2, 6\}$. | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}$. |
| 11. $\vec{a} = \{5, 0, -1\}$, $\vec{b} = \{7, 2, 3\}$. | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}$. |
| 12. $\vec{a} = \{0, 3, -2\}$, $\vec{b} = \{1, -2, 1\}$. | $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$. |
| 13. $\vec{a} = \{-2, 7, -1\}$, $\vec{b} = \{-3, 5, 2\}$. | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$. |
| 14. $\vec{a} = \{3, 7, 0\}$, $\vec{b} = \{1, -3, 4\}$. | $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$. |
| 15. $\vec{a} = \{-1, 2, -1\}$, $\vec{b} = \{2, -7, 1\}$. | $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$. |
| 16. $\vec{a} = \{7, 9, -2\}$, $\vec{b} = \{5, 4, 3\}$. | $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{b} - \vec{a}$. |
| 17. $\vec{a} = \{5, 0, -2\}$, $\vec{b} = \{6, 4, 3\}$. | $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 6\vec{b} - 10\vec{a}$. |
| 18. $\vec{a} = \{8, 3, -1\}$, $\vec{b} = \{4, 1, 3\}$. | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{b} - 4\vec{a}$. |
| 19. $\vec{a} = \{3, -1, 6\}$, $\vec{b} = \{5, 7, 10\}$. | $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$. |
| 20. $\vec{a} = \{1, -2, 4\}$, $\vec{b} = \{7, 3, 5\}$. | $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$. |
| 21. $\vec{a} = \{3, 7, 0\}$, $\vec{b} = \{4, 6, -1\}$. | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 5\vec{a} - 7\vec{b}$. |
| 22. $\vec{a} = \{2, -1, 4\}$, $\vec{b} = \{3, -7, -6\}$. | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. |
| 23. $\vec{a} = \{5, -1, -2\}$, $\vec{b} = \{6, 0, 7\}$. | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{b} - 6\vec{a}$. |
| 24. $\vec{a} = \{-9, 5, 3\}$, $\vec{b} = \{7, 1, -2\}$. | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$. |
| 25. $\vec{a} = \{4, 2, 9\}$, $\vec{b} = \{0, -1, 3\}$. | $\vec{c}_1 = 4\vec{b} - 3\vec{a}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a} - 3\vec{b}$. |
| 26. $\vec{a} = \{2, -1, 6\}$, $\vec{b} = \{-1, 3, 8\}$. | $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$. |
| 27. $\vec{a} = \{5, 0, 8\}$, $\vec{b} = \{-3, 1, 7\}$. | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 12\vec{b} - 9\vec{a}$. |
| 28. $\vec{a} = \{-1, 3, 4\}$, $\vec{b} = \{2, -1, 0\}$. | $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$. |
| 29. $\vec{a} = \{4, 2, -7\}$, $\vec{b} = \{5, 0, -3\}$. | $\vec{c}_1 = \vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 6\vec{b} - 2\vec{a}$. |
| 30. $\vec{a} = \{2, 0, -5\}$, $\vec{b} = \{1, -3, 4\}$. | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$. |

2. Перевірити компланарність векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| 1. $\bar{a} = \{2, 3, 1\}$, | $\bar{b} = \{-1, 0, -1\}$, | $\bar{c} = \{2, 2, 2\}$ |
| 2. $\bar{a} = \{3, 2, 1\}$, | $\bar{b} = \{2, 3, 4\}$, | $\bar{c} = \{3, 1, -1\}$ |
| 3. $\bar{a} = \{1, 5, 2\}$, | $\bar{b} = \{-1, 1, -1\}$, | $\bar{c} = \{1, 1, 1\}$ |
| 4. $\bar{a} = \{1, -1, -3\}$, | $\bar{b} = \{3, 2, 1\}$, | $\bar{c} = \{2, 3, 4\}$ |
| 5. $\bar{a} = \{3, 3, 1\}$, | $\bar{b} = \{1, -2, 1\}$, | $\bar{c} = \{1, 1, 1\}$ |
| 6. $\bar{a} = \{3, 1, -1\}$, | $\bar{b} = \{-2, -1, 0\}$, | $\bar{c} = \{5, 2, -1\}$ |
| 7. $\bar{a} = \{4, 3, 1\}$, | $\bar{b} = \{1, -2, 1\}$, | $\bar{c} = \{2, 2, 2\}$ |
| 8. $\bar{a} = \{4, 3, 1\}$, | $\bar{b} = \{6, 7, 4\}$, | $\bar{c} = \{2, 0, -1\}$ |
| 9. $\bar{a} = \{3, 2, 1\}$, | $\bar{b} = \{1, -3, -7\}$, | $\bar{c} = \{1, 2, 3\}$ |
| 10. $\bar{a} = \{3, 7, 2\}$, | $\bar{b} = \{-2, 0, -1\}$, | $\bar{c} = \{2, 2, 1\}$ |
| 11. $\bar{a} = \{1, -2, 6\}$, | $\bar{b} = \{1, 0, 1\}$, | $\bar{c} = \{2, -6, 17\}$ |
| 12. $\bar{a} = \{6, 3, 4\}$, | $\bar{b} = \{-1, -2, -1\}$, | $\bar{c} = \{2, 1, 2\}$ |
| 13. $\bar{a} = \{7, 3, 4\}$, | $\bar{b} = \{-1, -2, -1\}$, | $\bar{c} = \{4, 2, 4\}$ |
| 14. $\bar{a} = \{2, 3, 2\}$, | $\bar{b} = \{4, 7, 5\}$, | $\bar{c} = \{2, 0, 1\}$ |
| 15. $\bar{a} = \{5, 3, 4\}$, | $\bar{b} = \{-1, 0, -1\}$, | $\bar{c} = \{4, 2, 4\}$ |
| 16. $\bar{a} = \{3, 10, 5\}$, | $\bar{b} = \{-2, -2, -3\}$, | $\bar{c} = \{2, 4, 3\}$ |
| 17. $\bar{a} = \{-2, -4, -3\}$, | $\bar{b} = \{4, 3, 1\}$, | $\bar{c} = \{6, 7, 4\}$ |
| 18. $\bar{a} = \{3, 1, -1\}$, | $\bar{b} = \{1, 0, -1\}$, | $\bar{c} = \{8, 3, -2\}$ |
| 19. $\bar{a} = \{4, 2, 2\}$, | $\bar{b} = \{-3, -3, -3\}$, | $\bar{c} = \{2, 1, 2\}$ |
| 20. $\bar{a} = \{4, 1, 2\}$, | $\bar{b} = \{9, 2, 5\}$, | $\bar{c} = \{1, 1, -1\}$ |
| 21. $\bar{a} = \{5, 3, 4\}$, | $\bar{b} = \{4, 3, 3\}$, | $\bar{c} = \{9, -7, -4\}$ |
| 22. $\bar{a} = \{3, 4, 2\}$, | $\bar{b} = \{1, 1, 0\}$, | $\bar{c} = \{8, 11, 6\}$ |
| 23. $\bar{a} = \{4, -1, -6\}$, | $\bar{b} = \{1, -3, -7\}$, | $\bar{c} = \{2, -1, -4\}$ |
| 24. $\bar{a} = \{3, 1, 0\}$, | $\bar{b} = \{-5, -4, -5\}$, | $\bar{c} = \{4, 2, 4\}$ |
| 25. $\bar{a} = \{3, 0, 3\}$, | $\bar{b} = \{8, 1, 6\}$, | $\bar{c} = \{1, 1, -1\}$ |
| 26. $\bar{a} = \{1, -1, 4\}$, | $\bar{b} = \{1, 0, 3\}$, | $\bar{c} = \{1, -3, 8\}$ |
| 27. $\bar{a} = \{6, 3, 4\}$, | $\bar{b} = \{-1, -2, -1\}$, | $\bar{c} = \{2, -1, 2\}$ |
| 28. $\bar{a} = \{4, 1, 1\}$, | $\bar{b} = \{-9, -4, -9\}$, | $\bar{c} = \{6, 2, 6\}$ |
| 29. $\bar{a} = \{-3, 3, 3\}$, | $\bar{b} = \{-4, 7, 6\}$, | $\bar{c} = \{3, 0, -1\}$ |
| 30. $\bar{a} = \{-7, 10, -5\}$, | $\bar{b} = \{0, -2, -1\}$, | $\bar{c} = \{-2, 4, -1\}$ |

3. За даними $\bar{a}, \bar{b}, |\bar{m}|, |\bar{n}|, (\bar{m}, \wedge \bar{n})$ знайти $\text{пр}_B \bar{a}, |\bar{a} \times \bar{b}|$:

$$1. \bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$$

$$2. \bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}, \bar{b} = \bar{m} + \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$$

$$3. \bar{a} = -\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$$

$$4. \bar{a} = -2\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}, |\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$$

$$5. \bar{a} = 4\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = -\bar{m} + 2\bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$$

$$6. \bar{a} = 3\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = \bar{m} + \bar{n}, |\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$7. \bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$$

$$8. \bar{a} = 3\bar{m} - 2\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$$

$$9. \bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} + \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$$

$$10. \bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$$

$$11. \bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}, |\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$$

$$12. \bar{a} = -2\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = 3\bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$13. \bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$$

$$14. \bar{a} = -4\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 4, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$$

$$15. \bar{a} = -5\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$$

$$16. \bar{a} = \bar{m} + 5\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}, |\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$17. \bar{a} = -\bar{m} + 3\bar{n}, \bar{b} = 5\bar{m} + 2\bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$$

$$18. \bar{a} = 2\bar{m} + 5\bar{n}, \bar{b} = -\bar{m} + 3\bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$$

19. $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.
20. $\vec{a} = -\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.
21. $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{3}$.
22. $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -\vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.
23. $\vec{a} = -2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$.
24. $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.
25. $\vec{a} = -\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{3}$.
26. $\vec{a} = 3\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.
27. $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{3}$.
28. $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.
29. $\vec{a} = -2\vec{m} + 7\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{6}$.
30. $\vec{a} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

4. В піраміді з вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 обчислити: об'єм, площу грані $A_1 A_2 A_3$, довжину висоти, яка опущена з A_4 на $A_1 A_2 A_3$, кут між ребрами

$A_1 A_2$ та $A_1 A_3$:

1. $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, -3)$.
2. $A_1(-4, 2, 6)$, $A_2(2, -3, 0)$, $A_3(-10, 5, 8)$, $A_4(-5, 2, -4)$.
3. $A_1(7, 2, 4)$, $A_2(7, -1, -2)$, $A_3(3, 3, 1)$, $A_4(-4, 2, 1)$.
4. $A_1(2, 1, 4)$, $A_2(-1, 5, -2)$, $A_3(-7, -3, 2)$, $A_4(-6, -3, 6)$.
5. $A_1(-1, -5, 2)$, $A_2(-6, 0, -3)$, $A_3(3, 6, -3)$, $A_4(-10, 6, 7)$.

6. $A_1(0, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(1, -5, -9)$, $A_4(-1, -6, 3)$.
7. $A_1(5, 2, 0)$, $A_2(2, 5, 0)$, $A_3(1, 2, 4)$, $A_4(-1, 1, 1)$.
8. $A_1(2, -1, -2)$, $A_2(1, 2, 1)$, $A_3(5, 0, -6)$, $A_4(-10, 9, -7)$.
9. $A_1(-2, 0, -4)$, $A_2(-1, 7, 1)$, $A_3(4, -8, -4)$, $A_4(1, -4, 6)$.
10. $A_1(14, 4, 5)$, $A_2(-5, -3, 2)$, $A_3(-2, -6, -3)$, $A_4(-2, 2, -1)$.
11. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(3, 0, -3)$, $A_3(5, 2, 6)$, $A_4(8, 4, -9)$.
12. $A_1(2, -1, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(-4, 2, 5)$.
13. $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(-1, 1, 3)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 0, -2)$.
14. $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(7, 5, -3)$.
15. $A_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(5, 9, -8)$.
16. $A_1(1, 5, -7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$, $A_4(-4, 8, -12)$.
17. $A_1(-3, 4, -7)$, $A_2(1, 5, 4)$, $A_3(-5, -2, 0)$, $A_4(2, 5, 4)$.
18. $A_1(-1, 2, -3)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(2, 1, -2)$, $A_4(3, 4, 5)$.
19. $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, 5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$.
20. $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(-2, 0, 3)$, $A_3(2, 1, -1)$, $A_4(2, -2, -4)$.
21. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(0, 1, -1)$, $A_4(-3, 0, 1)$.
22. $A_1(1, 0, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(2, -2, 1)$, $A_4(2, 1, 0)$.
23. $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(1, 0, 1)$, $A_3(-2, -1, 6)$, $A_4(0, -5, -4)$.
24. $A_1(3, 10, -1)$, $A_2(-2, 3, -5)$, $A_3(-6, 0, -3)$, $A_4(1, -1, 2)$.
25. $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(-1, -2, -4)$, $A_3(3, 0, -1)$, $A_4(7, -3, 1)$.
26. $A_1(0, -3, 1)$, $A_2(-4, 1, 2)$, $A_3(2, -1, 5)$, $A_4(3, 1, -4)$.
27. $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$.
28. $A_1(-2, -1, -1)$, $A_2(0, 3, 2)$, $A_3(3, 1, -4)$, $A_4(-4, 7, 3)$.
29. $A_1(-3, -5, 6)$, $A_2(2, 1, -4)$, $A_3(0, -3, -1)$, $A_4(-5, 2, -8)$.
30. $A_1(2, -4, -3)$, $A_2(5, -6, 0)$, $A_3(-1, 3, -3)$, $A_4(-10, -8, 7)$.

5 ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1. Знайти кут між прямими:

1. $y = -x - 1, y = 3 - 9x.$
2. $y = 4 - 2x, y = 3x - 6.$
3. $y = x + 7, y = 1 - 5x.$
4. $y = 1 - 3x, y = -6x + 7.$
5. $y = 1 - 9x, y = 4 - 3x.$
6. $y = 3x + 2, y = 5 - x.$
7. $y = 3 - 9x, y = 1 - 2x.$
8. $y = 8 - x, y = 3 - 5x.$
9. $y = 1 - 4x, y = 8x + 2.$
10. $y = x + 8, y = 4x - 1.$
11. $y = 4 - 3x, y = 2x - 1.$
12. $y = 9 - x, y = 2 - 3x.$
13. $y = 4x + 3, y = x - 2.$
14. $y = 3 - 6x, y = 1 - 2x.$
15. $y = -4x - 3, y = x + 1.$

16. $y = 6x + 1, y = 5 - x.$
17. $y = x + 1, y = 2x + 5.$
18. $y = 2x - 5, y = x + 3.$
19. $y = 3 - 2x, y = 5 - 4x.$
20. $y = 2x + 5, y = 4 - 3x.$
21. $y = 5x + 4, y = -4x - 1.$
22. $y = 3 - 2x, y = x + 5.$
23. $y = 1 - 6x, y = 2x - 3.$
24. $y = 8 - x, y = 2x - 5.$
25. $y = -6x - 7, y = x - 2.$
26. $y = x + 8, y = 2 - 4x.$
27. $y = x + 2, y = 2x - 4.$
28. $y = 6 - 3x, y = 8x - 2.$
29. $y = 2x + 4, y = 1 - 5x.$
30. $y = -3x - 6, y = 2 - x.$

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через т. M_0 перпендикулярно до прямої:

1. $M_0(1,1,2), \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3};$
2. $M_0(-1,2,2), \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1};$
3. $M_0(1,-1,2), \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1};$
4. $M_0(1,1,-2), \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3};$
5. $M_0(1,-1,2), \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3};$
6. $M_0(-1,-1,2), \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3};$
7. $M_0(-1,-1,2), \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3};$
8. $M_0(-1,1,2), \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3};$
9. $M_0(2,1,1), \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2};$
10. $M_0(2,1,1), \frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2};$
11. $M_0(2,1,-1), \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2};$

16. $M_0(1,2,3), \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1};$
17. $M_0(-1,2,3), \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4};$
18. $M_0(1,-2,3), \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1};$
19. $M_0(1,2,-3), \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1};$
20. $M_0(1,-2,-3), \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2};$
21. $M_0(1,-3,2), \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1};$
22. $M_0(1,-3,-2), \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{-1};$
23. $M_0(0,1,2), \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1};$
24. $M_0(1,0,2), \frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1};$
25. $M_0(2,0,1), \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-2};$
26. $M_0(2,4,-3), \frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2};$

12. $M_0(2, -1, 1), \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-1}{-2}$

13. $M_0(2, -1, -1), \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{3}$

14. $M_0(1, 3, 2), \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$

15. $M_0(2, 1, 3), \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-3}$

27. $M_0(3, -2, 1), \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-2}$

28. $M_0(-3, 1, 2), \frac{x+2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$

29. $M_0(2, -1, 3), \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$

30. $M_0(1, 5, 0), \frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{7}$

3. Знайти відстань т. M_0 до площини, яка проходить через три точки M_1, M_2, M_3 :

1. $M_1(-3, 4, -7), M_2(1, 5, -4), M_3(-5, -2, 0), M_0(-12, 7, -1)$

2. $M_1(-1, 2, -3), M_2(4, -1, 0), M_3(2, 1, -2), M_0(1, -6, -5)$

3. $M_1(-3, -1, 1), M_2(9, 1, -2), M_3(3, -5, 4), M_0(-7, 0, -1)$

4. $M_1(1, -1, 1), M_2(-2, 0, 3), M_3(2, 1, -1), M_0(-2, 4, 2)$

5. $M_1(1, 2, 0), M_2(1, -1, 2), M_3(0, 1, -1), M_0(2, -1, 4)$

6. $M_1(1, 0, 2), M_2(1, 2, -1), M_3(2, -2, 1), M_0(-5, -9, 1)$

7. $M_1(1, -2, 3), M_2(1, 0, 1), M_3(-2, -1, 6), M_0(3, -2, 9)$

8. $M_1(3, 10, -1), M_2(-2, 3, 5), M_3(-6, 0, -3), M_0(-6, 7, -10)$

9. $M_1(-1, 2, 4), M_2(-1, -2, -4), M_3(3, 0, -1), M_0(-2, 3, 5)$

10. $M_1(0, -3, 1), M_2(-4, 1, 2), M_3(2, -1, 5), M_0(-3, 4, -5)$

11. $M_1(1, 3, 0), M_2(4, -1, 2), M_3(3, 0, 1), M_0(4, 3, 0)$

12. $M_1(-2, -1, -1), M_2(0, 3, 2), M_3(3, 1, -4), M_0(-21, 20, -16)$

13. $M_1(-3, -5, 5), M_2(2, 1, -4), M_3(0, -3, -1), M_0(3, 6, 68)$

14. $M_1(2, -4, -3), M_2(5, -6, 0), M_3(-1, 3, -3), M_0(2, -10, 8)$

15. $M_1(1, -1, 2), M_2(2, 1, 2), M_3(1, 1, 4), M_0(-3, 2, 7)$

16. $M_1(1, 3, 6), M_2(2, 2, 1), M_3(-1, 0, 1), M_0(5, -4, 5)$

17. $M_1(-4, 2, 6), M_2(2, -3, 0), M_3(-10, 5, 8), M_0(-12, 1, 8)$

18. $M_1(7, 2, 4), M_2(7, -1, -2), M_3(-5, -2, -1), M_0(10, 1, 8)$

19. $M_1(2, 1, 4), M_2(3, 5, -2), M_3(-7, -3, 2), M_0(-3, 1, 8)$

20. $M_1(-1, -5, 2), M_2(-6, 0, -3), M_3(3, 6, -3), M_0(10, -8, -7)$

21. $M_1(0, -1, -1), M_2(-2, 3, 5), M_3(1, -5, -9), M_0(-4, -13, 6)$

22. $M_1(5, 2, 0), M_2(2, 5, 0), M_3(1, 2, 4), M_0(-3, -6, -8)$

23. $M_1(2, -1, -2), M_2(1, 2, 1), M_3(5, 0, -6), M_0(14, -3, 7)$

24. $M_1(-2, 0, -4), M_2(-1, 7, 1), M_3(4, -8, -4), M_0(-6, 5, 5)$

25. $M_1(14, 4, 5), M_2(-5, -3, 2), M_3(-2, -6, -3), M_0(-1, -8, 7)$

26. $M_1(1, 2, 0), M_2(3, 0, -3), M_3(5, 2, 6), M_0(-13, -8, 16)$

27. $M_1(2, -1, 2), M_2(1, 2, -1), M_3(3, 2, 1), M_0(-5, 3, 7)$

28. $M_1(1, 1, 2), M_2(-1, 1, 3), M_3(2, -2, 4), M_0(2, 3, 8)$

29. $M_1(2, 3, 1), M_2(4, 1, -2), M_3(6, 3, 7), M_0(-5, -4, 8)$

30. $M_1(1, 1, -1), M_2(2, 3, 1), M_3(3, 2, 1), M_0(-3, -7, 6)$

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через т.А і перпендикулярна до вектора \overline{BC}

1. A (1, 0, -2), B (2, -1, 3), C (0, -3, 2).
2. A (-1, 3, 4), B (-1, 5, 0), C (2, 6, 1).
3. A (4, -2, 0), B (1, -1, 5), C (-2, -1, 3).
4. A (-8, 0, 7), B (-3, 2, 4), C (-1, 4, 5).
5. A (7, -5, 1), B (5, -1, 3), C (3, 0, -4).
6. A (-3, 5, -2), B (-4, 0, 3), C (-3, 2, 5).
7. A (1, -1, 8), B (-4, -3, 10), C (-1, -1, 7).
8. A (-2, 0, -5), B (2, 7, -3), C (1, 10, -1).
9. A (1, 9, -4), B (5, 7, 1), C (3, 5, 0).
10. A (-7, 0, 3), B (1, -5, -4), C (2, -3, 0).
11. A (0, -3, 5), B (-7, 2, 6), C (-3, 2, 4).
12. A (5, -1, 2), B (2, -4, 3), C (4, -1, 3).
13. A (-3, 7, 2), B (3, 5, 1), C (4, 5, 3).
14. A (0, -2, 8), B (4, 3, 2), C (1, 4, 3).
15. A (1, -1, 5), B (0, 7, 8), C (-1, 3, 8).
16. A(-10, 0, 9), B(12, 4, 11), C(8, 5, 15).
17. A (3, -3, -6), B (1, 9, -5), C (6, 6, -4).
18. A (2, 1, 7), B (9, 0, 2), C (9, 2, 3).
19. A (-7, 1, -4), B (8, 11, -3), C (9, 9, -1).
20. A (1, 0, -6), B (-7, -2, 1), C (-9, 6, 1).
21. A (-3, 1, 0), B (6, 3, 3), C (9, 4, -2).
22. A (-4, -2, 5), B (3, -3, 7), C (9, 3, -7).
23. A (0, -8, 10), B (-5, 5, 7), C (-8, 0, 4).
24. A (1, -5, 2), B (6, -2, 1), C (2, -2, -2).
25. A (0, 7, -9), B (-1, 8, -11), C (-4, 3, -12).
26. A (-3, -1, 7), B (0, 2, -6), C (2, 3, -5).
27. A (5, 3, -1), B (0, 0, -3), C (5, -1, 0).
28. A (-1, 2, -2), B (13, 14, 1), C (14, 15, 2).
29. A (7, -5, 0), B (8, 3, -1), C (8, 5, 1).
30. A (-3, 6, 4), B (8, -3, 5), C (10, -3, 7).

6 ВАРІАНТИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАНЯТЬ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Задача 1. Перевезення вантажу з пункту А в пункт В, який знаходиться на відстані S_1 км, коштує P_1 грн., а в пункт С, який знаходиться на відстані S_2 км, коштує P_2 грн.

Визначити залежність вартості перевезення $У$ від відстані X , якщо вартість є лінійна функція відстані (якість доріг при цьому не враховується). Дані для розв'язування взяті з таблиці :

№ вар.	S_1	S_2	P_1	P_2	№ вар.	S_1	S_2	P_1	P_2
1	50	250	100	200	14	55	125	95	150
2	70	300	150	250	15	60	210	90	185
3	80	200	120	180	16	70	250	100	220
4	65	130	120	210	17	65	100	100	190
5	40	150	75	100	18	80	150	150	220
6	90	210	180	160	19	75	100	145	200
7	60	180	90	150	20	90	200	170	350
8	75	200	150	230	21	110	250	200	400
9	85	250	140	220	22	95	210	200	330
10	95	200	160	180	23	100	300	160	410
11	100	350	180	330	24	105	310	175	450
12	105	300	200	310	25	85	260	180	390
13	110	400	250	350					

Задача 2. Світловий промінь, рівняння якого $y = ax + b$, падає на скляну пластинку товщиною 1 см. Показник заломлення скла дорівнює 2. Знайти рівняння променя в пластинці і на виході з неї, довжину шляху, який пройшов промінь в середині пластинки, та зміщення променя при виході з пластинки (за вісь абсцис прийняти проекцію променя на поверхні пластинки, за вісь ординат – нормаль до поверхні). Дані для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	a	b	№ вар.	a	b	№ вар.	a	b	№ вар.	a	b
1	1	1	8	1	-3	15	2	5	22	1,5	2
2	1	2	9	1	-4	16	-1	1	23	1,5	3
3	1	3	10	1	-5	17	-1	2	24	1/2	2
4	1	4	11	2	1	18	-1	3	25	1	1/2
5	1	5	12	2	2	19	-1	4			
6	1	-1	13	2	2	20	-1	5			
7	1	-2	14	2	4	21	1/2	1			

Задача 3. Перевірити перпендикулярність граней АВ і ВС, зображених на рисунку 1, який виконаний за розмірами деталей, що подані в таблиці.

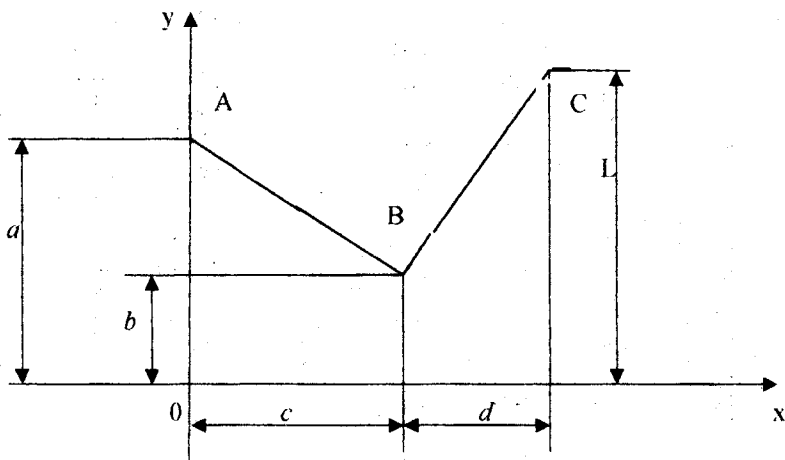


Рисунок 1

№ вар.	a	b	c	d	L	№ вар.	a	b	c	d	L
1	50	20	10	30	30	14	50	10	50	30	50
2	60	40	20	40	60	15	50	40	10	30	80
3	50	30	20	30	60	16	60	40	30	50	110
4	50	20	30	20	40	17	100	70	50	30	110
5	40	20	20	30	50	18	80	50	50	30	90
6	70	40	40	20	60	19	110	90	40	20	130
7	60	30	30	20	50	20	110	80	60	20	110
8	70	40	30	30	70	21	100	60	60	20	90
9	30	10	30	40	70	22	70	40	50	30	70
10	80	60	30	40	120	23	130	110	50	10	130
11	110	90	50	20	120	24	100	60	70	30	90
12	80	40	50	40	100	25	80	40	70	20	60
13	110	70	70	20	100						

Задача 4. Між пунктами А і В проходить шосейна дорога. На плані місцевості ці пункти мають координати $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Завод $C(x_3; y_3)$ в цій же системі координат потрібно з'єднати найкоротшим шляхом з шосе. Знайти на шосе точку входження в нього дороги, та її довжину.
Дані для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	А	В	С	№ вар.	А	В	С
1	(-3;3)	(4;6)	(3;1)	14	(-3;-2)	(5;4)	(4;-3)
2	(-4;6)	(2;8)	(-1;1)	15	(-3;2)	(9;-3)	(7;5)
3	(-3;2)	(5;7)	(1;8)	16	(-5;3)	(5;7)	(2;0)
4	(-5;3)	(6;5)	(3;-3)	17	(6;6)	(2;-5)	(-1;3)
5	(2;2)	(10;5)	(5;7)	18	(-4;3)	(3;6)	(-5;5)
6	(2;3)	(9;-3)	(8;2)	19	(2;-5)	(9;-4)	(5;0)
7	(2;-1)	(12;2)	(10;-5)	20	(-6;-5)	(2;11)	(0;-3)
8	(6;5)	(9;-3)	(2;-1)	21	(-6;-5)	(7;-3)	(1;1)
9	(2;-3)	(11;2)	(4;5)	22	(-7;-4)	(5;3)	(-3;7)
10	(-3;2)	(6;6)	(3;-3)	23	(-7;-3)	(2;-10)	(-2;-3)
11	(-4;-2)	(2;-5)	(2;2)	24	(0;-6)	(8;-2)	(1;3)
12	(-3;-4)	(4;0)	(-1;3)	25	(-6;2)	(2;-6)	(3;3)
13	(-5;-1)	(2;-4)	(0;2)				

Задача 5. Необхідно відновити межі квадратної ділянки землі за трьома стовпами, які збереглися: в центрі ділянки, і по одному на двох протилежних межах.

Скласти рівняння прямих, які відображають межі ділянки, якщо на плані координати стовпів $M(x_1; y_1)$ - в центрі, $A(x_2; y_2)$, $B(x_3; y_3)$ - по сторонах. Зобразити ділянку на рисунку. Дані для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	$M(x_1; y_1)$	$A(x_2; y_2)$	$B(x_3; y_3)$	№ вар.	$M(x_1; y_1)$	$A(x_2; y_2)$	$B(x_3; y_3)$
1	(4;4)	(9;5)	(4;-2)	14	(-3;-2)	(4;4)	(4;4)
2	(2;4)	(5;5)	(2;0)	15	(0;2)	(-5;5)	(-2;4)
3	(4;6)	(6;8)	(3;3)	16	(-2;0)	(-8;2)	(-4;2)
4	(4;2)	(7;3)	(3;-1)	17	(9;1)	(5;-3)	(6;0)
5	(6;4)	(8;6)	(6;0)	18	(7;-1)	(2;-4)	(4;-2)
6	(-2;-2)	(-6;0)	(1;5)	19	(0;-6)	(3;-1)	(2;-4)
7	(0;-2)	(-2;0)	(2;-4)	20	(1;3)	(-2;8)	(0;-6)
8	(-2;0)	(-6;0)	(-1;-1)	21	(3;4)	(4;3)	(4;2.5)
9	(-4;-2)	(-7;-1)	(-4;-6)	22	(8;1)	(2;-1)	(4;1)
10	(-2;-4)	(-1;-1)	(-2;-8)	23	(3;-2)	(-3;-7)	(-1.5;-3)
11	(4.5;2.5)	(8;5)	(2;-3)	24	(2;-1)	(-1;-6)	(0;-3)
12	(4;1)	(6;4)	(1;0)	25	(2;5)	(-4;-3)	(0;1)
13	(0;6)	(2;8)	(-2;4)				

Задача 6. Матеріальна точка М рухалася під дією деякої сили по колу $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ проти годинникової стрілки. Дія сили закінчилась у момент, коли положення точки М визначалося координатами (x,y) . Скласти рівняння траєкторії руху точки М, після припинення дії сили. Данні для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	a	b	c	(x,y)	№ вар.	a	b	c	(x,y)
1	-10	6	9	(5;2)	14	10	6	9	(-8;-7)
2	-10	6	9	(-5;2)	15	-10	6	9	(8;-7)
3	-10	6	9	(2;1)	16	10	6	9	(-9;-6)
4	-10	6	9	(-2;1)	17	-10	6	9	(9;-6)
5	-10	6	9	(9;0)	18	10	6	9	(-2;-7)
6	-10	6	9	(-9;0)	19	8	-4	4	(-4;6)
7	-10	6	9	(10;-3)	20	-10	6	9	(2;-7)
8	-10	6	9	(-10;-3)	21	8	-4	4	(-8;2)
9	-10	6	9	(0;-3)	22	10	6	9	(-8;1)
10	-10	6	9	(-1;-6)	23	-10	6	9	(8;1)
11	-10	6	9	(1;-6)	24	10	6	9	(0;-3)
12	-10	6	9	(-5;-8)	25	8	-4	4	(-4;-2)
13	-10	6	9	(5;8)					

Задача 7. Точка М рухалась по колу $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ потім зірвалася з нього і, вільно рухаючись, перетнула вісь ОУ в точці А (x,y) . Визначити точку кола, з якої зірвалася матеріальна точка М. Дані для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	(x,y)	№ вар.	(x,y)	№ вар.	(x,y)	№ вар.	(x,y)	№ вар.	(x,y)
1	(0;8)	6	(0;13)	11	(0;18)	16	(0;-12)	21	(0;-17)
2	(0;9)	7	(0;14)	12	(0;-8)	17	(0;-13)	22	(0;-18)
3	(0;10)	8	(0;15)	13	(0;-9)	18	(0;-14)	23	(0;-19)
4	(0;11)	9	(0;16)	14	(0;-10)	19	(0;-15)	24	(0;19)
5	(0;12)	10	(0;17)	15	(0;-11)	20	(0;-16)	25	(0;20)

Задача 8. Кривошип ОА обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = a$ (рад/с) і примушує рухатись повзун В за допомогою шатуна АВ. Причому $OA = AB = b$ (см), (див. рис. 2). Скласти рівняння траєкторії середньої точки М шатуна і зобразити цю траєкторію на рисунку.

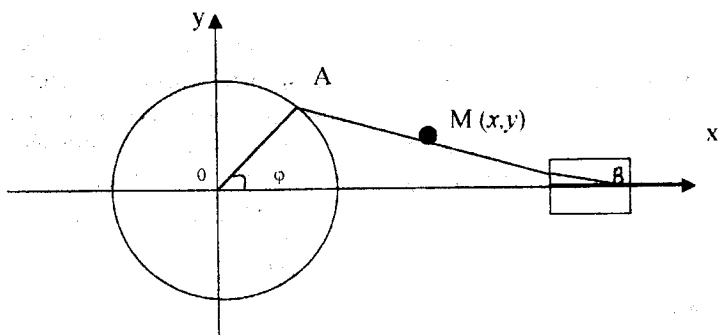


Рисунок 2

Дані для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	a	b	№ вар.	a	b	№ вар.	a	b
1	10	60	10	12	105	19	30	240
2	5	80	11	16	160	20	35	250
3	15	90	12	17	170	21	33	260
4	20	100	13	6	180	22	21	270
5	25	110	14	9	190	23	23	280
6	8	120	15	14	200	24	26	290
7	7	115	16	18	210	25	28	300
8	11	130	17	24	220			
9	13	150	18	22	230			

Задача 9. На прямолінійній ділянці залізниці знаходяться станції А і В, відстань між якими 4 км. З заводу N, який знаходиться біля станції В, вантаж можна доставляти на станцію А, або по шосе до станції В, а звідти залізницею до А, або безпосередньо по прямій автотранспортом на станцію А.

Залізничний тариф (ціна перевезення 1т вантажу на 1 км) складає m (грн.) навантаження-розвантаження K (грн.) за 1т, тариф автотранспортом n (грн.) ($n > m$). Визначити зону впливу станції В, тобто зону, по якій дешевше доставляти вантаж автотранспортом, а там – залізницею.

Дані для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	K	m	n	L	№ вар.	K	m	n	L
1	5	3	10	180	4	6	10	18	150
2	2	5	15	220	5	9	15	24	210
3	3	8	20	240	6	7	12	26	230

№ вар.	K	m	n	L	№ вар.	K	m	n	L
7	7	6	12	200	17	10	12	20	260
8	9	9	14	160	18	12	15	25	280
9	4	10	16	250	19	8	10	15	310
10	6	8	18	320	20	4	5	10	360
11	10	15	22	330	21	5	7	12	170
12	2	16	24	350	22	8	16	11	380
13	4	20	25	290	23	7	8	13	170
14	3	4	10	190	24	6	10	17	210
15	5	8	14	200	25	4	12	19	320
16	6	9	16	340					

Задача 10. Арка мосту має форму параболи, вершина якої ділить її навпіл. П'ять вертикальних стійок, рівновіддалених один від одного і 4 розкоси надають конструкції арки необхідну жорсткість. Скласти рівняння дуги арки, прийнявши за вісь абсцис проліт мосту, за вісь ординат – його вісь симетрії (див. рис.3). Знайти довжини стійок і розкосів, якщо відомо, що проліт мосту дорівнює $2L$, а висота підйому арки – d .

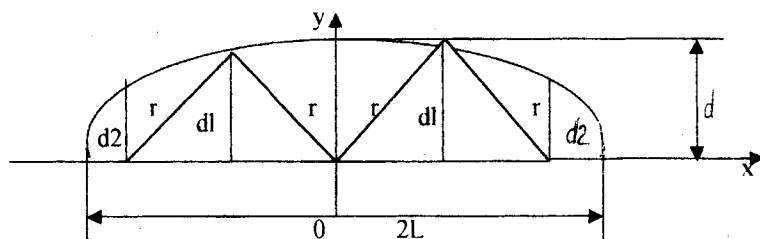


Рисунок 3

Дані для розв'язування наведені в таблиці:

№ вар.	d	2L	№ вар.	d	2L	№ вар.	d	2L
1	20	100	10	22	126	19	20	135
2	25	110	11	21	140	20	25	145
3	30	120	12	17	132	21	24	140
4	18	112	13	18	124	22	10	120
5	15	105	14	13	126	23	16	130
6	16	116	15	11	106	24	19	140
7	10	96	16	12	114	25	23	125
8	12	108	17	15	130			

7 МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

1. Побудувати графіки функцій шляхом елементарних перетворень:

$$1. \quad y = 3 - e^{x+1}; \quad y = \frac{x}{x+1}; \quad y = \frac{1}{2} \sin(3x+1);$$

$$2. \quad y = -e^{2-x}; \quad y = \frac{x-1}{x+1}; \quad y = 2 \sin(2x+1);$$

$$3. \quad y = 1 - e^{2-x}; \quad y = \frac{x+3}{x-1}; \quad y = 1 + \sin(3x-2);$$

$$4. \quad y = 1 - e^{x+1}; \quad y = \frac{x-2}{x+2}; \quad y = -3 \sin(x-2);$$

$$5. \quad y = -2 + e^{x+3}; \quad y = \frac{x-3}{x+1}; \quad y = 2 - 3 \sin(2x+1);$$

$$6. \quad y = 3 - e^{2-x}; \quad y = \frac{x}{x+4}; \quad y = 5 \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right);$$

$$7. \quad y = 2e^{2+x}; \quad y = \frac{x}{2x+1}; \quad y = 1,5 \cos(2x-1);$$

$$8. \quad y = -1 - e^{2x+1}; \quad y = \frac{-x}{x+3}; \quad y = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + 1\right);$$

$$9. \quad y = e^{\frac{x-1}{2}}; \quad y = \frac{1-x}{x-2}; \quad y = 2 \cos\left(\frac{x}{3} - 2\right);$$

$$10. \quad y = -3 + e^{\frac{x-1}{2}}; \quad y = \frac{2x}{x+2}; \quad y = -3 \cos(2x+1);$$

$$11. \quad y = -3 + e^{\frac{x+1}{2}}; \quad y = \frac{2x}{x+2}; \quad y = 2 \cos\left(\frac{x}{3} + 1\right);$$

$$12. \quad y = 1 - e^{\frac{x-2}{3}}; \quad y = \frac{2-x}{3x-1}; \quad y = \sin(2x-3);$$

$$13. \quad y = 2 - e^{1-x}; \quad y = \frac{x}{3x+2}; \quad y = 5 \sin\left(\frac{x}{3} + 1\right);$$

$$14. \quad y = 1 + e^{1-2x}; \quad y = \frac{-3x}{2x+4}; \quad y = 3 \sin\left(\frac{x}{3} - 3\right);$$

15. $y = 3 - e^{x+1}$; $y = \frac{3+x}{4-x}$; $y = \cos\left(\frac{x}{3} + 1\right)$;
16. $y = 4 + e^{1-2x}$; $y = \frac{x}{3x-2}$; $y = \sin\left(\frac{2x}{3} + 1\right)$;
17. $y = 2e^{1-3x}$; $y = \frac{-3x}{2x+1}$; $y = \cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;
18. $y = -2 + e^{4-x}$; $y = \frac{2x+1}{3x-4}$; $y = 2\cos(3x+2)$;
19. $y = -1 + e^{2+2x}$; $y = \frac{x-2}{3x+1}$; $y = -3\sin(2x-1)$;
20. $y = -3e^{\frac{x}{2}-1}$; $y = \frac{3x}{2x+4}$; $y = 2\cos(2x+3)$;
21. $y = 1 - 2e^{4-2x}$; $y = \frac{2-3x}{2x+3}$; $y = -4\cos\left(\frac{x}{3} + 4\right)$;
22. $y = 2 - e^{\frac{x}{2}}$; $y = \frac{2x}{2x-5}$; $y = -3\cos\left(\frac{x}{2} - 2\right)$;
23. $y = 2 + 3e^{1-2x}$; $y = \frac{1+x}{4x-2}$; $y = \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right)$;
24. $y = 1 + 2^{2-x}$; $y = \frac{2-x}{2x+3}$; $y = 5\cos\left(\frac{x}{2} + 2\right)$;
25. $y = -2 + 3^{x-1}$; $y = \frac{2x}{x+5}$; $y = -3\sin\left(\frac{x}{3} - 1\right)$;
26. $y = -3 + e^{2-3x}$; $y = \frac{x-4}{2x+5}$; $y = -5\sin\left(\frac{x}{3} - 2\right)$;
27. $y = -4 + e^{2x-1}$; $y = \frac{3x}{5x-1}$; $y = 5\sin(3x+2)$;
28. $y = 2 - e^{4+3x}$; $y = \frac{2x}{x+2}$; $y = \frac{1}{3}\cos(3x+2)$;
29. $y = -e^{3-x}$; $y = \frac{2x-1}{x+2}$; $y = 3\sin(2x+1)$;
30. $y = 1 - e^{2-x}$; $y = \frac{x+3}{2x-1}$; $y = 1 + \cos(3x+1)$;

2. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{3x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x-2} - \sqrt{x^2+3x-4});$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) [\ln x - \ln(x-1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{x}{3x+3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln(1+2x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{9^x - 1};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) [\ln x - \ln(x+1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4x-2}}{3x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x-2} - \sqrt{x^2+3x-4});$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{x}{3x+3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1+2x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{4x};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{4x^4 + 5x^3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-x}}{x-2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3} - \sqrt{x^2-1});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x-2) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1g^2 \frac{x}{3}}{2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos x)^{\sin x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+3x-1} - \sqrt{2x^2+x+1});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16x-4}}{2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) [\ln(2x+1) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x} - 1}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32x^3 - x^8}}{e^{5x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+1}{3x} \right)^{2x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3+x)^{3x};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2-x}+3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x^2+2x-1} + \sqrt{3x^2+x+2});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} 3x}{\ln(2x-1)};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x - \ln(2x-1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2x}{6x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+2)^{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{5x};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{3x^4 - 7x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5x^2 - x + 2} - \sqrt{5x^2 + 2x - 1});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{5x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)[\ln(x + 1) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{x-2}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{5x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{3x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 2}}{x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^3 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x - 2} - \sqrt{x^2 + 3x - 4});$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{|g^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)[\ln(x - 1) - \ln(x + 2)];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{2x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{e^{3x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (4 + x)^{\frac{x-2}{x+3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{4x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 3});$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 4x + \cos 2x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2}{\sqrt{2 - x - 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1)[\ln(x - 1) - \ln(x + 1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{3x-2}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{5x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 2} \right)^{-4x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{1}{x - 1} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - x + 2} - \sqrt{4x^2 + 2x + 5});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - x - 2}}{2x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 2)[\ln(x + 2) - \ln(x - 1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 4}{2x - 1} \right)^{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{e^{2x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{3x-4}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{4x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{16x^4 - x^8}}{e^{8x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 1}); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 1)[\ln(x - 1) - \ln(x + 1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{6 - x - 2}}{2x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)^{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{2x-1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{5x}$$

$$\begin{array}{lll}
11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3+2x}}{4x+3}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-1}{x^2+4x+5}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2-3x-1}); \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{(x^2)^2}; & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2-2}}{x+1}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x-3)[\ln(2x-3) - \ln(x+1)]; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{e^{\sin x}-1}; & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x}; & \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{5-x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2^x-1} \\
12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}; & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x+x^2-4}{x^2-x-2}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+7x-1} - \sqrt{x^2+3x-2}); \\
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x-1}-1}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{2x}; & \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x+5) - \ln x]; \\
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{1}{\cos x}\right); & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{2x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1}{8x} \\
13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3-3x+1}{\sqrt{4x^6+2x}}; & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x+4}{x^3+1}; & \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x-3) - \ln x]; \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{5-x}-2}; & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{4-x^2}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-2x}); \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{5x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 \frac{x}{2}}; & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} \\
14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{2x+\sqrt[3]{x}}; & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x-10}{x^3+x^2-2x}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x-3)[\ln x - \ln(4x+3)]; \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x-3}}{2x-2}; & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x}); \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \lg 10x}{\sin^2 2x}; & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{4x}-1}{3x} \\
15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sqrt{x+4}-2}; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x-6}; & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+3}); & \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)\ln(2x-1) - \ln x; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x}-1}{x \lg 3x}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (1+3\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x-1}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{5x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 14}}{3x + 5} ; & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^3 - 3x^2 - 10x} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(3x + 2) - \ln x] ; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos x} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 1}) ; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2}{\sin^2 x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x)}{5x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x - 8}}{4 - \sqrt[3]{x}} ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 5}{x + 2} \right)^{x-1} \\
17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 5)^2 x}{5x^3 + 2} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) ; & \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(3x + 4) - \ln(x - 1)] ; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\arcsin 2x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1 - x}}{\sin 4x} ; & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{4}{4 - x^2} \right) ; \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{3x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 5}{x + 3} \right)^{2x-1} \\
18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{3x}}{x - 3} ; & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x + 2}{x^3 - 8} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)[\ln(4x - 1) - \ln x] ; \\
\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 8}) ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 6x} - 1}{2x} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2} ; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin 3x} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{3x}}{(2x + 1)^{3x}} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{tg x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - x)^{-3} \\
19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}{4x + 1} ; & \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 4x} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} (5x - 1)[\ln x - \ln(x - 2)] ; \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\sin 2x} ; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x - 2}}{\sqrt{x - 4}} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 6} - \sqrt{x}) ; \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x + 1} \right)^{x-1} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2^x - 1} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{tg 2x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{4x}} \\
20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4} ; & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x + 15}{x^2 + 3x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{3x}, a > 0, a \neq 1 ; \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 4}{x + 1} \right)^{2x} ; & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2}) ; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 4)[\ln x - \ln(2x - 3)] ; \\
\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\arcsin(x + 1)} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x + 9}}{2x^2 + x^3} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3 \sin^2 2x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 5x)}{6x}
\end{array}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 16x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 3});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 2}{\sqrt{4x^8 + 2x^2 + 4}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(5x - 3) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-6} + 2}{x^3 + 8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x} \right)^{2x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{e^{x-1} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (4-x)^{\frac{2}{x-1}};$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)[\ln x - \ln(6x-1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2x)}{3^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{2-x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 5});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x}{1 - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{e^{x^2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{3}{x-1}};$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x - 1}{\sqrt{x^4 - x} + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x-1) - \ln(3x+2)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x-3}}{\sqrt{x}-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+2)}{\lg 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin 2x}{\sin 3x} + \sin 7x \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3 + 3} - \sqrt{x^2 - 5}); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x} \right)^{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (3+x)^{\frac{5}{x-2}};$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{3\sin^2 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x-4) - \ln(x+1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin \sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} (4+x)^{\frac{6}{x+3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\lg \pi x};$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + x - 3}}{x+2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 6}); \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{\sin^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x-1}}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(7x+3) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{8^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^{x+5}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{x(x-1)}; \quad \lim_{x \rightarrow 11} (1+x)^{\frac{3x+6}{x}}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2+2x}{3x+1} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\arctg x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{x^x-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2-8});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x - \ln(8x+2)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 7x}{2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi-x}{2x^2}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+x-1}};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+6} - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 8x}{2\sin^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x-4) - \ln(x+3)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{\arctg x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2}}{2x^2}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2+3x}-1}{\sqrt{20x^2+3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+6x+5}{x^3+1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{8^x-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2x+1}{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{3\sin^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x - \ln(5x+6)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{e^{6x}-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-8};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{x+2} - \frac{2x^2-1}{x-2} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(3x+5) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4} - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 9x}{2\sin^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2x+1}{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x} \right)^{5-2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x}-1}{\arctg 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{9^x-1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^3+x+3};$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+4)[\ln x - \ln(x-1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{e^{4x}-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-9});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 8x}{\lg 5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg \frac{\pi x}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+3} \right)^{x+3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x)}{3^x-1}$$

8 ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ОКРЕМИХ ТЕМ З ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

Варіант 1

1. Границя послідовності:

Довести що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (вказати $w(\varepsilon)$), якщо $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}$; $a = \frac{3}{2}$.

Знайти границі числових послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{5n^2} + \sqrt[3]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 3}{n^2 - 8n - 5}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n+1)!}{(n+3)!}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3}}{n+1}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-4} - \sqrt{n+7})$$

2. Границя функцій:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x + 5x - 3}{x + 3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x+1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{4 - \sqrt{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x + 2}{2x + 3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})$$

3. Чудові границі н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin x)^{\sin x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} 0,99^{x-3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1+x)}{x^2 - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+5}{x+2} \right)^{x-1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$$

4. Еквівалентність н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln-1)^{\sin \frac{\pi}{2e^x}}}{(x-e)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \cos^2 x - 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 8x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt[3]{x^3}}{x \sqrt{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(e^{\sin x} - 1) + 4 \cos x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{3x^2 + 5x^4}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 5x)}{x}$$

Варіант 2

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}$; $a = 2$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-3n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[3]{n^3+1}}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 - 3}{n^2 + 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{1 + 2 + \dots + n}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)! - n!}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n - 2^n}{10^{n+1} + 5^n}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1})$$

2. Границя функції:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 5x - 2}{x + 2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^3 - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x^2 - x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{4 - \sqrt[3]{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 3})$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right)^4$$

3. Чудові границі:

Обчислити:

$$1) \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{\frac{x}{x+2}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^x$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg} 5x$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{x+4}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{\sin^2 x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin \frac{x}{5}}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{\arcsin(x+1)}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^{\sin^{-1} x} - 1}{\ln \sin x}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 4x + 3}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$$

Варіант 3

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}$; $a = \frac{7}{2}$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{n^3 + n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n+1}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}}{n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 + (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n}{3n^2 + 4}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 - x}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^3}{4x^2 - 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 5x - 2}{x - 2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1 + x)}{x}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x+1})$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \right)$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 4}{x^3 + 9} \right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 1} \left(\frac{3x+1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x$$

$$7) \lim_{n \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{5x}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$$

Варіант 4

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{2n+5}{3n+1}$; $a = \frac{2}{3}$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{3n^2 - n + 5}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 + (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+2}}{n^2}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{4n^3-1}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}}$$

2. Границя функції:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3}{5x^3 + 3x + 1}$$

3. Чудові границі:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-7} \right)^{n+1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (x-5)(\ln(x-3) - \ln x)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} (3x-8)^{x-3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} 3x}{\sin 2x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 4x - 1}{4x^2 + 2x + 3} \right)^{1-2x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sin(\pi(x+2))} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x+1)}$$

Варіант 5

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{7n-1}{n+1}$; $a = 7$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 5}{n + 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^2 - 1000n + 1}{1000n^2 + 100n - 2}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n+4}}{n+1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-2n)^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n-1}}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{n!(n-1)}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}$$

2. Границя функції:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x+4}}{16 - x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$$

3. Чудові границі:

Обчислити:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow 2} \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} \right)^{x-2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+2x+3}{2x^2+2x+1} \right)$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (7-6x)^{3x-3}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{n \rightarrow 0} 5x \operatorname{tg} 3x$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \pi} \frac{1-\cos 2x}{x \operatorname{tg} 3x}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$1) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\ln(e^{-x})-1}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{\left(\pi \left(\frac{x}{2}+1 \right) \right)}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$$

Варіант 6.

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$; $a = \frac{4}{3}$

Знайти границі послідовності:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (2n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,1n^2 - n + 1}{0,01n^2 + n - 3}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2}{n^4 + 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{n+1}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1-n}{n^2}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{5n^4+n+1}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}$$

2. Границя функцій:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 0,5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 - 16}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 5 - x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$$

3. Чудові границі:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 + 5x + 1} \right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1)(\ln(x + 3) - \ln x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (3 - 2x)^{e^{-2x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 8x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 8x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x + 10))}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x - 2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}$$

Варіант 7.

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{9 - n^3}{1 + 2n^3}$; $a = -\frac{1}{2}$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n^2 - 3n^3 + 2}{n^5 + 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 10n - 3}{n + 2}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 4^n}{5^{n-1} - 4^n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n + 3} - n \right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5+8n^2 - 2n)}{n+2}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n-1)! + (n+1)!}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^3 + 1}{3^6 + 2 - n}$$

2. Границя функцій:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x-3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0,3} \frac{6x^2 - x - 1}{x - 0,3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x - 1}{x^3 + 2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 6 - 2}{x + 2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4}$$

3. Чудові границі:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{1 - x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^x$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi_3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{3x} - 1)}{3(1 + x - 1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - x) - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + x - 2}{3 \operatorname{arctg} x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x^2 + 2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 5x - \sin 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{\ln x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 10x}{\sin^2 2x}$$

Варіант 8.

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}$; $a = 2$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 2n + 10}{3n^3 + 5}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 5n - 1}{5n^3 + 5n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4 - 3n}{4n - 3} \right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n(n-1))$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4} \right)$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^{n+1}}$$

2. Границя функції:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 1}{x + \frac{1}{3}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{0,1x^2 - x - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^4 + 5x + 2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{9 + 2 - 5}{3x - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 2}{x - 4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + a - \sqrt{x})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} x(x^2 + 1 - x)$$

3. Чудові границі:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{ctg} 7x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{x^2 - 3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right)^{x+1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+2) - \ln x)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x$$

4. Еквівалентність н.м.ф.:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(2x - \pi)^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x - 5)}{e^{\sin 2x} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{\sin 5x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\arctg x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 + x - 2}{\sin \pi x}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{(x - x^3)^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos^2 x}$$

Варіант 9.

1. Границя послідовності:

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{1 - 2n^2}{2 - 4n^2}$; $a = \frac{1}{2}$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{5n^2 + 3}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 4n^2 - 1}{n^2 + 7n + 10}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - 1)^3}{(n + 1)^2 - (n + 1)^3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 2n}{(n + 1)^4 + (n - 1)^4}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n - 2 - n^2 - 3}{3 - n} \right)$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 2}{1 + 2 + 3 + \dots + n} - \frac{2}{3} \right)$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + n(n + 2)!}{(n - 1)! - (n + 1)!}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 7^n}{7^n - 3^{n-1}}$$

2. Границя функції:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{7x^4 + 7x^2 + 17}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 6 + 2}{x^3 + 8}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + x - 2 - x}{x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 + 1 - x^2 - 1 \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

3. Чудові границі:

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{x+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin \frac{x}{3}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 1} \right)^{x^2 + 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)(\ln(x+5) - \ln x)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5) \frac{x}{x-2}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{1 - \cos x}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\arcsin(x-1)}$$

Варіант 10.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = -\frac{5n}{n+1}$; $a = -5$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 7n + 4}{n^3 + 3n^2 - 2n + 1}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+2)! + (n+1)!}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 10}{4n^3 - 7n^2 - 3n + 1}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(4-n)^3}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^n}{2^{n+2} + 3^{n+1}}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - n^2 - 4}{5n - 1} \right)$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1 - x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - (1+3x)}{x+x^5}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{2x^4 + x^3 - 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^3 + x^2 + 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{x-1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{2x}{3}}{\sin \frac{x}{3}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)(\ln(x+5) - \ln x)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^{\cos x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-1} \right)^{x^2+1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$$

4. Еквівалентність н.м.ф..

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{1 - \cos x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{n \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\arcsin(x-1)}$$

Варіант 11.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{n+1}{1-2n}$; $a = -\frac{1}{2}$

Знайти границі послідовності:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{5n^2 + 10n - 3}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 7n^3 - 3n}{2n^4 - 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n=1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{2n+5}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right)$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+4+\dots+2n}{\sqrt[3]{n^3} + 2n+2}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+1)!}{(n+1)! + (n+2)!}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 9^n}{7^n + 9^{n+1}}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{4x^2 - 7x + 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4}{5x^4 - 7x^2 + 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 0.5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^4 - 2x^2 - x - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+8} - \sqrt{x})$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+5} - \sqrt{5-x}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4}{x^2} - 2x \right)$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (5-x)^{\frac{4x}{x-1}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x+8}{12x+1} \right)^{\cos^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x-4)(\ln(2-3x) - \ln(5-3x));$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2 \operatorname{tg} 3x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 7x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - x - 2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x-1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{e^{6x} - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin 2^x}{\pi - x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7^x - 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

Варіант 12.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}$; $a = \frac{2}{3}$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{n! + (n+1)!}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 10}{4n^2 - 7n + 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^{n-1}}{3^{n+1} + 5^n}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n - 1}{n^4 - 10n + 5}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}}{2n-1}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^4 - 5x + 3}{x^4 - x^2 - x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 + 3x^2} - 1}{5x^3 - 2x + 3}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n+3} - n \right)$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 3n^2 + 4}{2n^2 + 5n - 7}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-8})$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{6x+1} - 5}{x^2 - 4x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{x^3}{x^2 + 2} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)(\ln(3-2x) - \ln(1-x))$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5} \right)^{3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{4x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2)}{\sin^2 x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\cos 2x - \cos 3x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 8}{3x^2 + 10} \right)$$

4. Еквівалентність н.м.ф..

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{82x} - 1}{\ln(1-3x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+9x)}{\operatorname{arctg} 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2^x - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4-x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x}$$

Варіант 13.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{1 + 2n^2}{n^2 + 3}$; $a = -2$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 1 \ln^2 - 7}{4n^3 + 5n + 3}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 2n^2 - 4}{n^3 - 3n + 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+1} - n}{5n+3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^3 - (n+4)^4}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2^{n+1}}{3n^{n-1} - 2^n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - (n+2)!}{(n+2)! + (n+1)!}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n - 2n}{n+1}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 5}}{2n+1}$$

2. Границя функцій.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^4 + 5}{x + 10} \right)^{\frac{4}{x+2}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{2x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{x-2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{x-2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x-3) - \ln(2x+5))$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 + 5}{x + 10} \right)^{\frac{4}{x+2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x - \frac{x^2}{x+1} \right)$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (3 + 2x)^{\frac{3x}{x-1}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)(\ln(1-2x) - \ln(5-x))$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-x}{x-5} \right)^{-2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^2}{2x^2} \right)^{\frac{3}{x+8}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 4x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф..

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x}{6^x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\arcsin^2 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$$

Варіант 14.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{3n^2}{2 - n^2}$: $a = -3$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 4}{n^2 + 8n + 6}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 14n + 1}{5n^2 - 4n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{1 + 2 + \dots + n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (2n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 5n^2 + 1}}{3n^2 - 2n - 1}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n - 2^{n-1}}{10^{n-1} + 5^n}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! - (n+2)!}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n - (2n+1)}{n+3}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{2x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 5x - 4}{7x^4 - 2x^3 + 5} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x + 4}}{16 - x^2}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+5} \right)^{-2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(3x+1) - \ln(3x-1))$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} (3+x)^{x+2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+1}{x+2} \right)^{\frac{2}{x-4}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 2x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф..

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\arcsin 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1+2x)}{e^{\operatorname{tg} 3x} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{e^{x-2} - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$$

Варіант 15.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{n}{3n-1}$; $a = \frac{1}{3}$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{6n^2 + 3n + 4}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 7n + 1}{3n^2 - 10n^2 + 3n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-x} - \frac{3}{4-x^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n^2 - 3n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + n!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^{n-1}}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -7.5} \frac{10x^2 + 9x - 7}{5x + 7}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 11} - x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{4-x^2} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}}{2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{6x} - x}{x - 6}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+3} \right)^{2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{6x - x^{-1}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x} (3 + x)(\ln x - \ln(2x - 4))$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{5x - 7}{6x + 4} \right)^{3x+2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x / 4}{1 - \cos 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{\ln(1 - 2x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{e^{x^2} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 9x)}{\operatorname{tg} 3x}$$

Варіант 16.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{3n^3}{n^3 - 1}$; $a = 3$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 4n + 3}{10n^2 - 17n + 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - n}{n^2 - 3n + 5}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3} - n)}{3n - 4}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+4)!}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{3^n + 2^{n+1}}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n^2 + 2n + 1}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -75} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 7x + 12}{15x^2 + 5x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x} \frac{x^3 + x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+10} - \sqrt{x-2})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x} \frac{x^3 - 12x^2 + 7x - 1}{x^4 - 3x + 2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{x-3}{x+7} \right)^{2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x} x[\ln(3x+5) - \ln x]$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{0x}{x-2}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+1}{x-4} \right)^{\frac{2+x}{x+1}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x + \pi x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin x/2}{\pi - x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2}}{x \operatorname{tg} x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^{9^x} - 1}{\ln(1-x)}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$

5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^x - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

7) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$

Варіант 17.

1. Границя послідовності.

Довести, що при необмеженому зростанні n послідовності $u = \frac{2^{n^x}(-2)^n}{2^n}$ має границю. Чому вона дорівнює?

Знайти границі послідовностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - 1}{n + 2}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-1)! - n!}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}}$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^{n-1}}$

2. Границя функції.

Обчислити:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 2e^x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^4 - 4x + 3}$

4) $\lim_{x \rightarrow x} (\sqrt{(x-a)(x+b)} - x)$

5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 + 8x + 15}$

6) $\lim_{x \rightarrow x} \left(e^{-x} + \frac{5x^2 + x + 2}{2x^2 + 0.6} \right)$

7) $\lim_{x \rightarrow x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

8) $\lim_{x \rightarrow x} \frac{x+1}{x^4 + 2x+1}$

3. Чулові границі.

Обчислити:

1) $\lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{1/x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x+1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{3-4x}{2-x} \right)^{6x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt[3]{2} - \cos x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-9x)}{\operatorname{tg} 3x}$$

Варіант 18.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{5n+15}{6-n}; a = -5$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 3n}{6n^3 + 3n + 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n + 100}{n^3 - 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+10)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}{9n-4}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+1)!}{(n+1)! + (n+2)!}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{n^2+2n+3}}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 2^n}{3^n + 2^n}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/2+1/4+\dots+1/2^n}{1+1/3+1/9+\dots+1/3^n}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1.3} \frac{3(6x^2 + 2x - 1)}{3x - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 - 7x^2 - 16x + 12}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x} \frac{3x^3 + 5x^2 - 4}{7x^2 - 2x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{-x^2 + 9} - \frac{3}{x - 3} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{5x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x} (x - \sqrt{x^2 + 15})$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow x} \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x^4 - 5x^3}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{2x-3}{2x-5} \right)^{3x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{2x - x^{-1}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x} x(\ln(x+6) - \ln(x-1))$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \operatorname{tg} x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^{x^{-x+5}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\sin x} - 1}{\ln(1 + 3x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\arcsin 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2-x)}{x^2 - 4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x) - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 6\pi x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sin^2 x / 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$$

Варіант 19.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{3+n^2}{1+2n^2}$, $a = -\frac{1}{2}$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5n^2 + n^3}{3n^2 + 7n - 4}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 7n + 1}{10n^2 - 3n^2 + 5}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n-4} - \sqrt{n})}{2n+3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 - (4n+1)^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + 12 + \dots + (5n-3)}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2)! - n!}{(n+1)! + (n+2)!}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 7^{n-1}}{5^{n+1} + 7^n}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n+2} - n^2 \right)$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -0.5} \frac{6x^2 - 75x - 39}{2x+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4x + 3}{6x^2 - x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4} - 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+14} - \sqrt{x})$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x} - x}{x^2 - 7x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(4x+3) - \ln x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-6} \right)^{-2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2x+1}{x}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{x \operatorname{tg} x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+1}{3+x} \right)^{\frac{x^2+2}{x+1}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2\pi x}{\sin 3\pi x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{10^x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \sin 3x}{\sin 2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{8x} - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \left(\pi \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right)}{\ln(1+x)}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sin 2\pi x}$$

Варіант 20.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{2n-1}{2-3n}$; $a = -\frac{2}{3}$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n}{5n^2 - 10n + 4}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{4n^5 + 7n^2 + 3n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1})}{7n - 9}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n+1)!}{n! - (n+1)!}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n-1} - 3^n}{7^n + 3^{n+1}}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n^2 + 1}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 1}}{n + 2}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 11}{2x^3 + 2x - 5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 12} - x)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} - \frac{2x}{x^2 - 25}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-5} \right)^{1-x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x) \frac{x+1}{x-1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+3}{2x+1} \right)^{\frac{x-2}{x+1}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 4x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)(\ln(2-x) - \ln(3-4x))$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{x \sin x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \lg x$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{e^{3x^2} - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 3x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{6x} - 1}{\ln(1 - 3x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\ln(1 - x)}$$

Варіант 21.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}$; $a = \frac{3}{5}$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7n + 1}{2 - 5n - 6n^2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 3n^3 + 4}{n^7 + n^5 + 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - 2n^4}{n^3 - (n-1)^3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2})}{4n - 7}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5^n} \right)$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+1} - 3^n}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+3)!}{n! + (n+1)!}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3n^3 + 7n + 1}}{3n + 5}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x - 9}{2x^3 - 3x + 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^3} - 2x}{2x^2 - 4x + 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 7x + 4} - 2x)$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{x-2}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-7} \right)^{2-x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\ln(1-5x) - \ln(2-x))$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \sin 5x}{\sin 2x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{e^{2x} - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{\ln(1+2x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 4x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - 1}{x \sin x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{3x-2} \right)^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{3x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1-2x)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x} - 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{\sin x} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}$$

Варіант 22.

1. Границі послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}$; $a = 2$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 2n^2 + n - 1}{7n^3 - 3n^2 + 5n + 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 4n - 3}{n^3 - n - 1}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 4})}{n^2 - 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 + (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} - 3^n}{2^{n+1} + 3^n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!(n!)}{(n+1)!(n+2)!}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (4 + 16 + 64 + \dots + 4^n)$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - 1}{5n - 4}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x}}{5x^2 + 3x - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 + x - 6}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - 1}{x^2 - 4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow c} \left(5x - \frac{2 + 5x^2}{x - 4} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 3}{2x^3 + 3x^2 - 1}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x-3) - \ln(2x+5))$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{x}{x-2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-5} \right)^{3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 + 5}{x + 10} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 2x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

4. Еквівалентність н. м. ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+9x)}{\operatorname{arctg} 3x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsi} 4x}{\ln(1-7x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sin \pi x} - 1}{x - 1}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arcsin}(x-3)}{\sin 3\pi x}$$

Варіант 23.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\frac{1}{2}$.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 7n^2 + 3n + 1}{2n^3 + 5n - 2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+3)}{(n+2)!(n+3)}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n - 3} - \sqrt{n^2 - 1}}{n - 4}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 10n - 4}{5n^3 + 2n^2 - 1}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^2 + 1}}{3n^2 + 1}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1)}{n+3}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 6x + 7x^4}{\sqrt{4x^8 + 3x^2 - 2}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 - 13})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7 - 6x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 + x - 12}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 15})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(7x - \frac{3 - 9x^2}{5x + 2} \right)$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-1} \right)^{2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)(\ln(1-3x) - \ln(2-x))$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (6-5x)^{x-1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x+3} \right)^{-x+5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 9x}{x \operatorname{tg} 2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos x}{x \sin x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\sin 2x} - 1}{\ln(1-x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{k^2 x} - 1}{x \arcsin 7x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x + \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos \pi x} - 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin 2x} - 1}$$

Варіант 24.

1. Границя послідовності.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, якщо $a_n = \frac{5n+1}{10n-3}$; $a = \frac{1}{2}$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 13n^2 + 10n - 4}{5n^3 - 10n^2 + 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 5}{5n^4 + 7n^3 - 3n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{n^2 - 1})}{4n^2 + 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n-1} - 3^n}{7^n + 3^{n+1}}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+2)! + (n+4)!}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2 + 3n + 1}}{10n - 4}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n-3)}{n-1}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1.3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{3x - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 - 1}{2 + 3x} - 2x \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 11} - \sqrt{x^2 - 2})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 4x^2} - 3}{x^2 - 5x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10}} - 3x^6 + 1}{2x^2 + 5x - 4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{6x}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+5} \right)^{2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (5 - 4x)^{x-1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+3}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 3x)(\ln(1-x) - \ln(2-3x))$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\operatorname{tg}^2 4x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 7x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right)$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-3}{x+5} \right)^{2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\cos 3x - \cos x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - 1}{x \sin x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x}$$

Варіант 25.

1. Границі послідовності.

Якщо $x_n \rightarrow a$, то що можна сказати про границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^2}{5n^2 - n + 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^8 - n^7 + 4}{6 + 6n^8}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1) \cdot n!}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n + (-1)^n}{4n - (-1)^n}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (n-2)^2}{3^{n+1} n^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n + n}}{\sqrt[3]{n^3 + n^2}}$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 12}{4x + 5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^{10} + 7x^5}{4x^3 + 6}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(3x-5)^{10}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^3 - x^2 + 1} \right)$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+tgx}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} [x(\ln(x+a) - \ln x)]$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{5x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{xtgx}$$

4. Еквівалентність н. м. ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{tg 2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{4x+8}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1}$$

Варіант 26.

1. Границя послідовності.

Для послідовності $\{X_n\}$, де $X_n = \frac{2n}{n+1}$, знайти таке найменше ціле додатне число N , що при всіх $n > N$ справджується нерівність $|X_n - 2| < 0,001$

Знайти границі послідовності:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)}{(n+2)(n+4)}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{7n+4}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3-4}{n^4+6}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+4)!}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 4^n}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-4} - \sqrt{n+8})$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+8x^3}{2x+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$$

$$3) \lim_{t \rightarrow 1/2} \frac{2t^2+t-1}{4(1-t^2)-3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} (2^x + 9x^2 - \sqrt[3]{2})$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 8x + 4}{5x^4 + 10}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x + 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+4}{10x+2}$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{3x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{x-2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x+5}{x-10} \right)^{3x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$$

4. Еквівалентність н. м. ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x-4)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{7}{x}}{e^{-2x} - 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{3x - x^4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha x \right) \right]}{\sin \beta x}$$

Варіант 27.

1. Границя послідовності.

Виходячи з означення границі послідовності, довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 1} = 1$$

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 - 2n + 1}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n + n}}{\sqrt[3]{n^3 + n^2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 3) - (n+1)^3}{\sqrt{9+n^2}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2+n} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n+3}$$

2. Границя функції .

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow x} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$$

3. Чудові границі .

Обчислити :

$$1) \lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{x/\operatorname{tg} x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{n^3+n}}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow x} (\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2+4})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x} (\sqrt{x^2+12} - \sqrt{4-x^2})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow x} (\sqrt{2x-4} - \sqrt{4-3x})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{3+x}{9x-4} \right)^{2x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x} (a^x - 1)x$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

Варіант 28.

1. Границя послідовності.

Дана послідовність чисел :

$$u_n: u_1 = \sqrt{6}, \dots, u_2 = \sqrt{6+u_1}, \dots, u_n = \sqrt{6+u_{n-1}}, \dots$$

Довести що ця послідовність має границю і знайти її.

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^5 + n}}{n+2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n+1)!}{(n+3)!}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n^3})$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x + 18}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3+x} - \sqrt{x+4})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{8+2x-x^2} - \sqrt{5x+x^2-4})$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cos x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7} \right)^{x+1}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3+8}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(a^x + a^{-x} - 2 \right)$$

Варіант 29.

1. Границя послідовності.

Довести, що послідовність $u_n = 1 + (-1)^n$ не має границі при необмеженому зростанні n .

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^3}{6n^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+1)}{(n+2) - (n+1)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[5]{n^7 + 3n^3 + 1}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 1})$$

2. Границя функції.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 3x + 4}{3x^2 - 2x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 + 27x - 4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{8-2x+x^2} - \sqrt{x^2+2x+4})$$

3. Чудові границі.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-x}{1-x}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$$

4. Еквівалентність н.м. ф..

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+mx)}{nx}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

Варіант 30.

1. Границя послідовності.

Довести, що при необмеженому зростанні n послідовність

$u_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ не має границі, а послідовність $v_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$ має границю.

Чому вона дорівнює?

Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 10} - \sqrt{n^2 - 1})$$

2. Границі функції

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 2e^x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2 + 8x + 15}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-x} + \frac{5x^2 + x + 2}{2x^2 + 0,6} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^4 + 2x + 1}$$

3. Чудові границі

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} 2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x+1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3-4x}{2-x} \right)^{6x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$$

4. Еквівалентність н.м.ф.

Обчислити:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arcsin} x}{2x + \operatorname{arctg} x}$$

9 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

1. Знайти точку розриву та побудувати графік функції

$$1. y = \frac{-6}{(x+3)^2}; \quad y = e^{\frac{1}{x+2}}; \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x-2}; \quad y = \begin{cases} x+4; x < -1 \\ x^2+2; -1 \leq x \leq 1 \\ 2x; x > 1 \end{cases}$$

$$2. y = \frac{3}{(x+1)^2}; \quad y = 2^{\frac{1}{x-1}}; \quad y = \frac{(x^2-9)}{x-3}; \quad y = \begin{cases} x+2; x \leq -1 \\ x^2+1; -1 < x < 1 \\ 3-x; x > 1 \end{cases}$$

$$3. y = \frac{5}{(x-2)^2}; \quad y = 3^{\frac{1}{x+1}}; \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{2}{x}; \quad y = \begin{cases} -x; x \leq 0 \\ -(x-1)^2; 0 < x \leq 2 \\ x-3; x > 2 \end{cases}$$

$$4. y = \frac{2}{(x-1)^2}; \quad y = e^{\frac{1}{x-2}}; \quad y = \frac{(x^2-4)}{x+2}; \quad y = \begin{cases} \cos x; x \leq 0 \\ x^2+1; 0 < x < 1 \\ x; x > 1 \end{cases}$$

$$5. y = \frac{-1}{(x+2)^2}; \quad y = 4^{\frac{1}{x-1}}; \quad y = \frac{(x^2-3x+2)}{x-1}; \quad y = \begin{cases} -x; x \leq 0 \\ x^2; 0 < x \leq 2 \\ x+1; x > 2 \end{cases}$$

$$6. y = \frac{3}{(x-3)^2}; \quad y = 5^{\frac{1}{x-3}}; \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{2}{x-1}; \quad y = \begin{cases} -x; x \leq 0 \\ \sin x; 0 < x \leq \pi \\ x-2; x > \pi \end{cases}$$

$$7. y = \frac{4}{(x+1)^2}; \quad y = 2^{\frac{1}{x+2}}; \quad y = \frac{(x^2+x-6)}{x+2}; \quad y = \begin{cases} -(x+1); x \leq -1 \\ (x+1)^2; -1 < x \leq 0 \\ x; x > 0 \end{cases}$$

$$8. y = \frac{-3}{(x+5)^2}; \quad y = 3^{\frac{1}{2x-1}}; \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{3}{x+1}; \quad y = \begin{cases} -x^2; x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x; 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 2; x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$9. y = \frac{-2}{(x-1)^2}; \quad y = e^{\frac{1}{6-x}}; \quad y = \frac{(x^2+3x-4)}{x+4}; \quad y = \begin{cases} -2x; x \leq 0 \\ \sqrt{x}; 0 < x \leq 4 \\ 1; x > 4 \end{cases}$$

$$10. y = \frac{-5}{(x+3)^2}; \quad y = 6^{\frac{1}{x-1}}; \quad y = \frac{(x^3+3x-4)}{x-1}; \quad y = \begin{cases} -2x; x \leq 0 \\ \sqrt{x}; 0 < x \leq 4 \\ 1; x > 4 \end{cases}$$

$$11. y = \frac{1}{(x-5)^2}; \quad y = 2^{\frac{1}{2-x}}; \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{2}{x-2}; \quad y = \begin{cases} \sin x; x \leq 0 \\ 0,5x; 0 < x \leq 2 \\ 3; x < 2 \end{cases}$$

$$12. y = \frac{2}{(x-4)^2}; \quad y = 5^{\frac{1}{3-x}}; \quad y = \frac{(x^2 - 2x - 8)}{x+2}; \quad y = \begin{cases} x^2; x \leq 1 \\ 2x; 1 < x \leq 2 \\ 1; x > 2 \end{cases}$$

$$13. y = \frac{4}{(x+2)^2}; \quad y = 4^{\frac{1}{3-x}}; \quad y = \frac{(x^3 - 1)}{(x-1)}; \quad y = \begin{cases} x^2 + 1; x \leq 1 \\ 2x; 1 < x \leq 3 \\ x + 2; x > 3 \end{cases}$$

$$14. y = \frac{-1}{(x-4)^2}; \quad y = 3^{\frac{1}{3-x}}; \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{3}{x+2}; \quad y = \begin{cases} -x; x \leq -1 \\ -2x^2 + 3; -1 < x \leq 1 \\ x - 1; x > 1 \end{cases}$$

$$15. y = \frac{3}{(x+4)^2}; \quad y = e^{\frac{1}{3-x}}; \quad y = \frac{(x^2 + 2x - 3)}{x+3}; \quad y = \begin{cases} x - 3; x \leq 0 \\ x + 1; 0 < x \leq 4 \\ 3 + \sqrt{x}; x > 4 \end{cases}$$

$$16. y = \frac{-6}{(x+1)^2}; \quad y = 2^{\frac{1}{x-3}}; \quad y = \frac{(x^3 + 8)}{x+2}; \quad y = \begin{cases} \sqrt{1-x}; x \leq 0 \\ 0; 0 < x \leq 2 \\ x - 2; x > 2 \end{cases}$$

$$17. y = \frac{5}{(x-1)^2}; \quad y = 7^{\frac{1}{x-2}}; \quad y = \frac{(x^2 + 3x - 4)}{x+4}; \quad y = \begin{cases} 2x^2; x \leq 0 \\ x; 0 < x \leq 1 \\ 2; x > 1 \end{cases}$$

$$18. y = \frac{2}{(x-6)^2}; \quad y = 9^{\frac{1}{1-x}}; \quad y = \frac{(x^3 + 1)}{x+4}; \quad y = \begin{cases} \sin x; x < 0 \\ x; 0 < x \leq 2 \\ 0; x > 2 \end{cases}$$

$$19. y = \frac{6}{(x-3)^2}; \quad y = e^{\frac{1}{8-x}}; \quad y = \frac{(x^2 + 3x - 10)}{x-2}; \quad y = \begin{cases} x - 1; x \leq 0 \\ x^2; 0 < x \leq 2 \\ 2x; x > 2 \end{cases}$$

$$20. y = \frac{7}{(x+1)^2}; \quad y = 4^{\frac{1}{3+2x}}; \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x+2}; \quad y = \begin{cases} \cos x; x \leq \pi/2 \\ 0; \pi/2 < x \leq \pi \\ x; x > \pi \end{cases}$$

21. $y = \frac{4}{(x+5)^2};$

$y = 7^{\frac{1}{x+1}};$

$y = \frac{(x^3-8)}{x-2};$

$$y = \begin{cases} 0; x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x; 0 < x \leq \pi/2 \\ x; x \geq \pi/2 \end{cases} .$$

22. $y = \frac{3}{(x+6)^2};$

$y = 10^{\frac{1}{x+2}};$

$y = \frac{(x^2-x-12)}{x+3};$

$$y = \begin{cases} 3x+1; x < 0 \\ x^2+1; 0 \leq x < 1 \\ 0; x \geq 1 \end{cases} .$$

23. $y = \frac{-7}{(x-2)^2};$

$y = 9^{\frac{1}{x-1}};$

$y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{2}{1-x};$

$$y = \begin{cases} -x; x \leq 0 \\ x^2; 0 < x \leq 2 \\ x+1; x > 2 \end{cases} .$$

24. $y = \frac{6}{(x-4)^2};$

$y = 3^{\frac{1}{x-1}};$

$y = \frac{(x^3-x)}{x-1};$

$$y = \begin{cases} 2; x \geq -\pi/4 \\ \operatorname{tg} x; -\pi/4 < x < 0 \\ 3x; x \geq 0 \end{cases} .$$

25. $y = \frac{-2}{(x+1)^2};$

$y = 6^{\frac{1}{x+2}};$

$y = \frac{(x^2-3x)+2}{x-2};$

$$y = \begin{cases} 0; x < -2 \\ \sqrt{x+2}; -2 \leq x < 2 \\ x+1; x > 2 \end{cases} .$$

26. $y = \frac{1}{(x-1)^2};$

$y = 2^{\frac{1}{3-x}};$

$y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x \frac{2}{x+3};$

$$y = \begin{cases} -0,5x; x < 0 \\ x^2+1; 0 \leq x < 1 \\ 2; x \geq 1 \end{cases} .$$

27. $y = \frac{2}{(x-7)^2};$

$y = 5^{\frac{1}{4-x}};$

$y = \frac{\sin 2x}{x};$

$$y = \begin{cases} x-2; x < -1 \\ -x^2; -1 \leq x < 1 \\ x; x \geq 1 \end{cases} .$$

28. $y = \frac{-3}{(x+6)^2};$

$y = 4^{\frac{1}{3+x}};$

$y = \frac{(x^3-4x)}{x-2};$

$$y = \begin{cases} x-1; x \leq 0 \\ -\cos x; 0 < x \leq \pi \\ 3; x > \pi \end{cases} .$$

29. $y = \frac{-5}{(x+7)^2};$

$y = 3^{\frac{1}{8-x}};$

$y = \frac{(x^2-5x-6)}{x+1};$

$$y = \begin{cases} -0,5x; x \leq 0 \\ \sin x; 0 < x \leq 3\pi/2 \\ 2; x > 3\pi/2 \end{cases} .$$

30. $y = \frac{4}{(x-1)^2};$

$y = 6^{\frac{1}{4+x}};$

$y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{1}{x-3};$

$$y = \begin{cases} 2; x \leq -1 \\ 3-x^2; -1 < x \leq 1 \\ x; x > 1 \end{cases} .$$

10 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1. Обчислити похідну:

$$1. y = 8x^5 4^{-2x^2}; \quad y = \frac{\operatorname{arctg}(3-2x)}{3-4x^4}; \quad y = \frac{(4+3x)}{5\sqrt{x-1}}; \quad y = \ln(5x - e^{-x^2}); \quad y = 2^{\ln 7x} (1-6x);$$

$$y = \operatorname{arctg} \ln(e^{5x} + 4); \quad y = \cos^5(3-2x); \quad y = \arcsin(1 + \frac{3}{x}); \quad y = (\sin 5x)^{\sqrt{x}};$$

$$(y+1) \ln 3 - x \ln y = 0.$$

$$2. y = 5x^3 4^{1-x^8}; \quad y = \arccos \ln(e^{\sqrt{3-2x^2}} + 4); \quad y = \frac{\operatorname{arctg}(3x-4x^3)}{\sqrt{x-7}}; \quad y = \frac{(4-3x^2)}{\sqrt{5x^3-4}};$$

$$y = \ln(x + 3^{5-3\sqrt{x}}); \quad y = 2^{\ln(4+3x)} x^5; \quad y = (3\operatorname{tg} x)^{2+\sqrt{x}}; \quad y = \sin^7(5-3x); \quad y = \arcsin^4(3 - \frac{4}{x^2});$$

$$\cos(x^2 - 5y) + \frac{(x+3)}{y} = 4;$$

$$3. y = \sqrt[3]{x^2} e^{5-2x^3}; \quad y = \frac{(2x+4x^3)}{\sqrt{x^2-7x}}; \quad y = \operatorname{arctg} \ln(e^{\sqrt{3x^2+x}} - 1); \quad y = \frac{\sin(5x+4x^2)}{3-x^3};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{5+2x^2} + 1); \quad y = x^4 2^{\arcsin(\sqrt{x+2})}; \quad y = \operatorname{tg}^7(5-2x); \quad y = \sin^4(e^{3x^2} - x^2);$$

$$y = (\arccos 3x)^{1+\sqrt{x}}; \quad \ln(x^3 - 7y) + \frac{y}{2x} = 1.$$

$$4. y = (1-2x^2) 3^{2x} + 1; \quad y = \frac{(5-x)}{\cos(2-3x^3)}; \quad y = \arccos^5(2-x^2); \quad y = \frac{(2+5x^4)}{\sqrt{3-2x}};$$

$$y = \ln(5x + \sqrt[3]{x^2}); \quad y = (2x-4)e^{\sin 5x}; \quad y = \operatorname{arctg}^4(e^{7x} + 2); \quad y = \operatorname{tg} \ln(e^{-\sqrt{x}} + 1);$$

$$y = (3+x^2)^{\sqrt{x}}; \quad \cos(x^3 + y) + \frac{y}{2x} = 4.$$

$$5. y = (2+3x)e^{3x-x^2} + \sqrt{7}; \quad y = \frac{\arcsin(3+\sqrt{3x})}{\sqrt{1+x^2}}; \quad y = \ln(\frac{1}{3x+\sqrt{1+x}}); \quad y = \frac{\sqrt{2x-4}}{x^5-2x^3};$$

$$y = (2-x^3) 3^{\sin(2+x)}; \quad y = \cos \ln(\sqrt[3]{2x} - \frac{5}{x}); \quad y = \operatorname{arctg}^7 5x; \quad y = \sin^3(e^{\sqrt{x}} + \frac{2}{x});$$

$$y = (\cos 2x)^{1+\sqrt{x}}; \quad \ln(x^3 + 2y^2) + 5x = 1.$$

$$6. y = (1+x^2) 2^{1+\sqrt{x}}; \quad y = \frac{(3-7x)}{1+2\sin x}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3+2x}; \quad y = 2x^4 e^{\cos 3x}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{2+4x} - x);$$

$$y = \sin \operatorname{arctg}(2\sqrt{x}-1); \quad y = \operatorname{arctg}^5(2+x); \quad y = \ln^7(3 - \frac{2}{\sqrt{x}}); \quad y = (2-4x^2) \cos 2x;$$

$$x^3 \arccos 5x - y^4 = 3.$$

$$7. y = (5-2x) 3^{x^2} - 2; \quad y = \frac{\sin(x-7x^2)}{4+2x}; \quad y = \frac{(2x-x^2)}{\sqrt[3]{x-x}}; \quad y = \ln(4x - \sqrt[3]{x^2-x});$$

$$y = \ln \sin(3 - e^{5\sqrt{x}}); \quad 3 \frac{x}{y^2} - 5 \operatorname{arctg}(xy) = 0.$$

$$8. y = 7xe^{x^2+5}; \quad y = \frac{\operatorname{arctg}(5+3x)}{x^2-3}; \quad y = \frac{(4-3x^3)}{\sqrt{8x^2+x}}; \quad y = \arccos \ln(4+3\sqrt{x});$$

$$y = (1-x)^4 e^{\cos \sqrt{5x}}; \quad y = \operatorname{arctg}^4 5x; \quad y = \sin^9(4 - e^{-\sqrt{x}}); \quad y = (5x - \cos 2x)^{x^2};$$

$$\sin(x-5y) + x^3(1-y) = 0.$$

$$9. y = (3+x^3)e^{5x} + \ln 3; \quad y = \frac{\operatorname{tg}(7-3x)}{4-2x^2}; \quad y = \frac{\cos\sqrt{3x-5}}{\sqrt[3]{7x+3x}}; \quad y = \ln \frac{1}{\sqrt[4]{7-x^2+x}}$$

$$y = x^3 7^{\arcsin(5-x)}; \quad y = \ln \cos\left(5x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right); \quad y = \sin^9(2-3x^2); \quad y = \ln^4(4-e^{2-x})$$

$$y = (\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x}))^{x-1}; \quad y = (1-x^3)e^{x-y}$$

$$10. y = (x+7)e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}; \quad y = \frac{(2-3x^3)}{\sqrt[4]{2x^3}}; \quad y = \frac{(2-3x^3)}{\operatorname{tg}(3+2x)}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{2-x^3} + x); \quad y = x^3 5^{\cos(3-x)};$$

$$y = \arcsin \ln\left(e^{3-x} + \frac{1}{x}\right); \quad y = \cos^7(e^{-\sqrt{x}} - 5x); \quad y = \sin^3(6+3^{-\sqrt{x}}); \quad y = (\operatorname{ctg}(2-x))^{3x};$$

$$\sqrt{y}(x+1) - \sin(y-2x) = 0.$$

$$11. y = (x+1)^2 2x + \pi; \quad y = 2 \frac{x}{\cos 3x + 1}; \quad y = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2-7}; \quad y = 3xe^{\cos 5x}; \quad y = \ln(5x + \sqrt{1+x});$$

$$y = \cos \ln(3-3^{-x^2}); \quad y = \arcsin^5 8x; \quad y = \sin^8(3-\sqrt[3]{x}); \quad y = x^{\sin 6x}; \quad (x+1) \sin 2y - \frac{y}{x} = 4.$$

$$12. y = 8x^3 3^{x-2} + \pi; \quad y = \frac{(5-x)}{\sin 3x-1}; \quad y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{1-4x}; \quad y = 2x^2 e^{\cos(3x-2)}; \quad y = \ln \sin(3-e^{5x});$$

$$y = \operatorname{arctg}^5(4+3x); \quad y = \cos^3(7+e^{-2x}); \quad y = (x-1)^{\cos x}; \quad y \operatorname{tg}(xy) - e^x = 3.$$

$$13. y = 2xe^{3x+x^2} + 5; \quad y = \frac{(5+x)}{\sin 7x+3}; \quad y = \frac{\sqrt{2-x^3}}{7+5x}; \quad y = \ln^8 \frac{1}{e^{-x^2}+7}; \quad y = 3x^2 2^{\sin(13-x)};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{5+x^2} - 7x); \quad y = \arccos^8 15x; \quad y = \sin^5(3e^x - 7x); \quad y = (x+9)^{\cos 7x};$$

$$\cos(2x-3y) + 2 \frac{x}{y} = 0.$$

$$14. y = (5-x^2)e^{\sqrt{2x}} - 4; \quad y = \frac{(3-x^2)}{\cos 7x-4}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{4-7x^2}}{3x+8}; \quad y = \ln\left(3x - \frac{2}{x+1}\right);$$

$$y = (5-x^2)e^{\sin(3-x)}; \quad y = \operatorname{arctg} \ln\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - 2x\right); \quad y = \arcsin^4(3-x); \quad y = \sin^3(e^{5x} - 3);$$

$$y = (\operatorname{tg} 5x)^{3-\sqrt{x}}; \quad \cos(3x-y) - \sqrt[3]{2y} = 0.$$

$$15. y = (3+2x)5^{e^x} - \sqrt{8}; \quad y = \frac{\sin(3+2x)}{3(x-1)^2}; \quad y = (3x-7)^3 e^{\arcsin 5x}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{3+2x}}{(x-1)^2-7};$$

$$y = \ln(12x + \sqrt[3]{x^3+4}); \quad y = \sin^5\left(\sqrt{2x} - \frac{3}{x^2}\right); \quad y = \ln \cos\left(5 - e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}\right); \quad y = \arccos^5 2x;$$

$$y = (\operatorname{tg} 8x)^{3+x^2}; \quad \frac{x^2}{2y} + \operatorname{arctg}(x+y) = 1.$$

$$16. y = (2-3x)8^{-x^2} + \sin 1; \quad y = \frac{\sin(3-4x)}{5x^2}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{3-2x}}{x^2-4}; \quad y = x^3 e^{\sin 7x};$$

$$y = \ln(5x - 7\sqrt{x^3+3}); \quad y = \ln \cos\left(1 - e^{\frac{5}{\sqrt{x}}}\right); \quad y = \arccos^5(1-6x); \quad y = \sin^5\left(\sqrt{5x} - \frac{7}{x^2}\right);$$

$$y = (tg3x)^{5x-x^3}; \quad \frac{x^2-1-y}{x} + arctgy = 4.$$

$$17. y = (9+3x)e^{5-3x^2} - 4; \quad y = \frac{(5x+9)}{\arcsin(4+3x)}; \quad y = \ln \frac{1}{(3x-4)\sqrt{5+6x}}; \quad y = \frac{\sqrt{4-7x^2}}{5-8x^3};$$

$$y = (7-x^3)e^{\arccos(3x-1)}; \quad y = arctg \ln \left(e^{\frac{-5}{x}} + 4 \right); \quad y = \arcsin^7(1-8x); \quad y = \sin^3(e^{\sqrt{1-x}})$$

$$y = (5x - \sin 2x)^{3x}; \quad \cos(x-y) + \frac{x^4}{y^2} = 4.$$

$$18. y = (4-7x)e^{5x} + \sin 3; \quad y = \frac{\cos(2-4x)-9}{3x^5}; \quad y = \ln(5x^2 - \sqrt{3-2x}); \quad y = (1-x^3)e^{arctg 5x};$$

$$y = \frac{\sqrt{x^4-7}}{5x+2}; \quad y = \ln \arccos(3+7\sqrt{x}); \quad y = \sin^8(3-7x); \quad y = \ln^6(5+3e^{-2x}); \quad y = x^{\ln(3-x)};$$

$$y^3 e^{5y} + \cos x = 2.$$

$$19. y = \sin^8(8+7x); \quad y = \ln^7 \left(5 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right); \quad y = \frac{3-x^2}{4-9\cos^5(x-3)}; \quad y = (x-3)^2 4^{x^3} + \sin 5;$$

$$y = \frac{3+12x}{1-9x^4}; \quad y = \cos tg(\sqrt{3x-x^5}); \quad y = \arcsin \sqrt{4+12x}; \quad y = (x-4)e^{\sin 5x};$$

$$y = (4+2x)^{\cos 7x}; \quad (x-1)\arcsin y + xy = 0.$$

$$20. y = 7x^8 e^{3-x^5} + \pi^3; \quad y = \frac{\arcsin(4-5x^3)}{4-8x}; \quad y = \ln \frac{1}{x^3 + \sqrt{3x^2-7}}; \quad y = \frac{5x^2+7x}{\sqrt{4+3x^5}};$$

$$y = (4-x^3)^{\cos 8x}; \quad y = \sin \ln(\sqrt{x^7-3x^3}); \quad y = (3-4x)^{\cos 7x}; \quad y = \arccos^6(1-5x);$$

$$y = \sin^9(e^{3x-x^3}); \quad \cos(y-12x) - \frac{3+x}{y} = 4.$$

$$21. y = (3+x^2)e^{\sqrt[3]{x}} + 7; \quad y = \frac{5-4x}{\cos 2x+7}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{1+5x^2}}{7x+8}; \quad y = \ln(5x-4\sqrt{x});$$

$$y = (5+x^4)e^{\sin(3-7x)}; \quad y = arctg \ln \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5x \right); \quad y = \sin^4(e^{1-x} + 3); \quad y = \arcsin^7(3-5x);$$

$$y = (tg3x)^{1-5\sqrt{x}}; \quad \cos(3x^2-y) + \sqrt{y} = 0.$$

$$22. y = x^5 2^{3x} + 4; \quad y = \frac{5x+3}{\cos 2x-2}; \quad y = \frac{\sqrt{2-3x}}{x^2+7x}; \quad y = 4xe^{\cos 9x}; \quad y = \ln(8x - \sqrt{1-3x});$$

$$y = \arcsin^{15} 2x; \quad y = \sin^6(1-5\sqrt{x}); \quad y = (3x)^{\sin 4x}; \quad y = \arcsin \ln^2(e^{3x} + 4);$$

$$(y+1)\sin 5y + x^6 = 2.$$

$$23. y = 4x^7 3^{5+2x} - \sqrt{3}; \quad y = \frac{5+4x}{\sin 7x-8}; \quad y = 3(1-x)^2 e^{-\cos x^2}; \quad y = \frac{\sqrt{1-7x^4}}{5+9x};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{1+2x^2}-4); \quad y = \ln \sin(1-e^{-3x}); \quad y = (3-x)^{\cos x}; \quad y = arctg^4(2+5x);$$

$$y = \cos^6(4+e^{-3x}); \quad y = (3-x)^{\cos x}; \quad y = arctg^4(2+5x); \quad y = \cos^6(4+e^{3-x});$$

$$y tg(x+y) + e^x = 1.$$

$$24. y = (2+8x)e^{-3x} - \ln 7; \quad y = \frac{\arcsin(3+4x^2)}{3-2x}; \quad y = \sin \ln \left(\frac{1}{x-1} + \sqrt[3]{x} \right);$$

$$y = \frac{3x^2 + 7}{\sqrt{2x+x^2}}; y = \ln \frac{1}{2x - \sqrt{1-x^2}}; y = (3-x^2) 2^{\cos(3-2x)}; y = \arccos 3x;$$

$$y = \sin(e^{3x} - x^2); y = x^{\cos(3-4x)}; \cos(y-x) - \frac{y}{x} = 1$$

$$25. y = (5+3x)5^{1-x^2} + \ln 3; y = \frac{\sin(3-8x)}{1-5x}; y = \ln \cos(2 - e\sqrt{x}); y = \frac{\sqrt[3]{2-4x}}{x-2x};$$

$$y = \ln(5x - \sqrt{x^2+4}); y = \arccos 2x; y = (\lg 3x)^{3+x^2}; y = x^2 e^{2 \arcsin 3x}; y = \sin\left(\sqrt[3]{x-x^2}\right);$$

$$\frac{y^2}{x} - \operatorname{arctg} y = 7.$$

$$26. y = (2x-4)e^{2-5x^2} - 14; y = \frac{2x+4}{\arcsin(2-3x)}; y = \frac{\sqrt{3-4x^2}}{5-3x}; y = (4-x^2)e^{\arccos 5x};$$

$$y = \arcsin^3(7-x); y = \sin^6\left(3 + e^{5x}\right); y = \operatorname{arctg}\left(e^{\sqrt[3]{x^2}}\right); y = (3x - \sin 2x)^x; y^2 x^3 - y^5 = 4.$$

$$27. y = (2-7x)e^{1-5x} - \ln 7; y = \sin^3(1-7x^2); y = \ln \arccos\left(3 - \sqrt{x^2}\right); y = \frac{\cos(2+4x)+1}{x^2};$$

$$y = x^{\ln(3-7^x)}; y = \frac{\sqrt[6]{x-1}}{5-3x}; y = \ln\left(x - \sqrt{(1+x)^2}\right); y = x^4 e^{\operatorname{arctg}(5-2x)}; y = \ln(4 + e^{1-6x});$$

$$(1-y)^2 e^{xy} - \cos x = 3.$$

$$28. y = (x-1)^3 4^{x^2} - \ln 2; y = \frac{1-7x^2}{1-2\cos 3x}; y = \frac{3-2x}{\sqrt{3+5x}}; y = (3-x)^2 e^{\sin 5x}; y = \ln\left(\sqrt{3+5x^2} - 2x\right);$$

$$y = \operatorname{cosec}\left(x - \sqrt{x^2}\right); y = \operatorname{arctg}^7(3+2x); y = \arcsin^6(1-\sqrt{x}); y = (5-2x)^{\cos 5x}; y^3 + (x+1)y = 2.$$

$$29. y = x^5 e^{3+\sqrt{x}}; y = \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2}}{(x+8)^4}; y = \frac{\cos(5-4x)}{7-x}; y = x^9 2^{\lg 6x}; y = \ln\left(\sqrt[3]{5-2x-x}\right);$$

$$y = \arccos \ln\left(e^{1-x} - x^2\right); y = \operatorname{arctg}^3(1+x^4); y = \sin^4(1-2^{\sqrt{x-1}}); y = (\arcsin(2-x))^{x^2};$$

$$(y-4)\sqrt[3]{x} + \cos 5y = 3.$$

$$30. y = 5xe^{-x^2} - 7; y = \frac{3x-1}{\sin 5x-4}; y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-3}; y = \ln(x^2 - \sqrt{5x^2-1}); y = \sin \ln(1 - e^{3x^2});$$

$$y = \sin \ln(3 + e^{3x}); y = \operatorname{arctg}^6(3-x); y = \cos^4(1-2\sqrt{x}); y = x^{\lg 5x}; x^5 \sin 6x + y = 1.$$

11 ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

1. $y = \frac{3x^3}{x^3 + 6}$; $y = 2xe^x - 1$;
2. $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$; $y = (3 - x)e^{-x} + 3$;
3. $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$; $y = (3x + 1)e^{-x} + 2$;
4. $y = \frac{16}{x^2(x - 4)}$; $y = (1 - x)e^{-x} + 1$;
5. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$; $y = (2x + 1)e^x - 1$;
6. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$; $y = (6 - 3x)e^{2x} + 2$;
7. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$; $y = 3xe^{-x} + 1$;
8. $y = \frac{-x^2}{(x - 2)^2}$; $y = (5x - 2)e^{-x} + 3$;
9. $y = \frac{x}{x^3 - 2}$; $y = (2x - 1)e^{2x} + 3$;
10. $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$; $y = (4 - 2x)e^x - 2$;
11. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x}$; $y = (x + 3)e^{-2x} + 1$;
12. $y = \frac{x + 3}{x^4}$; $y = -xe^x + 2$;
13. $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$; $y = (2x + 5)e^{2x} + 1$;
14. $y = \frac{x^2}{x^3 + 1}$; $y = (1 - x)e^x + 1$;
15. $y = \frac{x^3}{2(x - 1)^2}$; $y = (x + 1)e^{-x} + 3$;
16. $y = \frac{x}{2 - x^3}$; $y = (2x + 3)e^x + 2$;
17. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; $y = (x - 3)e^{-2x} + 4$;
18. $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$; $y = 2xe^{-x} - 1$;
19. $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$; $y = (2x - 1)e^{-x} - 2$;
20. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$; $y = (x - 2)e^{2x} - 3$;
21. $y = \frac{-x}{x^3 + 3}$; $y = (2x - 3)e^{-3x} + 1$;
22. $y = \left(\frac{2x + 1}{x - 1}\right)^2$; $y = -xe^{2x} + 2$;
23. $y = \frac{x}{x^3 - 4}$; $y = (5 - 2x)e^{-x} + 3$;
24. $y = \frac{x - 2}{(x + 1)^2}$; $y = (2x + 4)e^x - 1$;
25. $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$; $y = (2x - 3)e^{-x} + 3$;
26. $y = \frac{3x}{3 + x^2}$; $y = (x + 2)e^{3x} + 2$;
27. $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$; $y = 2xe^x - 1$;
28. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$; $y = (1 - 2x)e^x + 2$;
29. $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$; $y = (x - 2)e^{-3x} - 2$;
30. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$; $y = (5x + 2)e^{2x} - 1$;

12 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; $\int xe^{-x^2} dx$; $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$; $\int \sqrt{9 - x^2} dx$; $\int e^{-x} \sin x dx$; $\int \frac{3x + 4}{x^2 + x + 1} dx$;

- $\int \frac{dx}{x^2(x+1)(x^2+4)}$; $\int e^{-x} \sin x dx$; $\int \sin^4 x dx$; $\int \sin 2x \cos 3x dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+3x}}$; $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$; $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; $\int \sqrt{x} e^{x^2} dx$; $\int \sin^3 x dx$; $\int x \cos 5x dx$;
 $\int \cos 2x \sin 3x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \frac{dx}{x^2-x}$; $\int \sqrt{1-2x^2} dx$.
3. $\int \sqrt{2+3x} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; $\int x^3 \cos x^2 dx$; $\int \cos^2 x dx$; $\int \sqrt{x^2+4} dx$; $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;
 $\int \frac{dx}{x(x-2)(x^2+1)}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$; $\int x^2 e^x dx$.
4. $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2}$; $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$; $\int \sqrt{\frac{1+x}{2-1}} dx$; $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; $\int 2x \sin 3x dx$; $\int \sin^4 x dx$;
 $\int \sqrt{x^2-16} dx$; $\int \ln^2 x dx$; $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}} dx$.
5. $\int t g^2 2x dx$; $\int \frac{dx}{2+3x}$; $\int \sqrt{x} e^{3x} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$; $\int \arcsin x dx$;
 $\int \frac{3x}{2+x^2} dx$; $\int \frac{dx}{(2x^2+1)x}$; $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$; $\int \frac{dx}{x \ln x}$.
6. $\int sh^2 x dx$; $\int \ln(1+e^{2x}) e^{2x} dx$; $\int t g^3 x dx$; $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$; $\int \frac{t g(\ln x)}{x} dx$;
 $\int \sin x \cos 2x dx$; $\int x^2 e^{-x} dx$; $\int x \ln x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.
7. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$; $\int x \arctg x dx$; $\int x^4 e^{-2x^5} dx$; $\int \frac{5x}{1+2x} dx$; $\int ch^2 x dx$; $\int \cos^3 x dx$;
 $\int x \ln(1+x) dx$; $\int \sin^4 2x dx$; $\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$; $\int \frac{3dx}{\sqrt{2x+1}}$.
8. $\int \sqrt{4-x^2} dx$; $\int e^{-2x} \cos x dx$; $\int x \cos x dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$; $\int 2 \ln \sqrt{x} dx$; $\int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$;
 $\int x \cos^2 x dx$; $\int x^2 e^{2x} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^3 2x}$; $\int \frac{x dx}{x^2+4x+6}$.
9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$; $\int \arctg 2x dx$; $\int \frac{t g \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{x+1}{x-1} dx$; $\int x \sin^2 x dx$; $\int \sin 2x \cos 7x dx$;
 $\int \sqrt{x^2+1} dx$; $\int \ln(2+3x) dx$; $\int \frac{e^x}{x^2} dx$; $\int \sqrt{5x-2} dx$.
10. $\int ct g^2 x dx$; $\int 5 \cos^2 2x dx$; $\int \ln x^2 dx$; $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; $\int \frac{dx}{x(x-3)(x+1)}$; $\int x e^{-x} dx$.

- $$\int \frac{\sin^{-1} x}{x^2} dx; \int \frac{dx}{\sin x}; \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}; \int \arctg x dx.$$
11. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}; \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \int x e^{-2x} dx; \int \sqrt{4-x^2} dx; \int \cos x \cos 4x dx; \int \frac{dx}{3+\sin x};$
 $\int \cos^2 x \sin^4 x dx; \int \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx; \int \frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx; \int e^x e^{e^x} dx.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}}; \int \frac{e^{1/x}}{\sqrt{x}} dx; \int x \sin 3x dx; \int \frac{dx}{x(x+5)}; \int \frac{dx}{x^2+x+2}; \int t g^2 x dx;$
 $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx; \int \sqrt{9-x^2} dx; \int x^2 \ln x dx; \int \sin x \cos 2x dx.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{2+3x}} dx; \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int 3 \ln^3 \sqrt{x} dx; \int \frac{dx}{x^2-4}; \int \frac{x^3}{x+1} dx; \int x^2 e^{-3x} dx;$
 $\int \frac{dx}{x^2+x+4}; \int e^{-x} \cos 2x dx; \int \frac{dx}{\sin^4 2x}; \int \sqrt{x^2-4} dx.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9+2x}}; \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+5}; \int \frac{dx}{x^2-9}; \int \frac{x^2}{x-1} dx; \int x^3 \ln x dx;$
 $\int \frac{dx}{2-\sin x}; \int \ln(x+2) dx; \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx; \int \sqrt{x^2+4} dx.$
15. $\int \sqrt[3]{3-2x} dx; \int x e^{-6x} dx; \int x \arctg x^2 dx; \int \frac{\arctg^3 x}{1+x^2} dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+1}; \int \frac{dx}{x(x^2+9)};$
 $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}; \int \frac{dx}{2-\cos x}; \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}; \int \sqrt{x^2+x+1} dx.$
16. $\int \frac{e^{1/x}}{\sqrt{x+1}} dx; \int \frac{\arctg(x+1)}{x^2+2x+2} dx; \int \frac{dx}{(2x-1)(x+3)}; \int \cos^6 x dx; \int \frac{x}{x^2+1} dx;$
 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}; \int \frac{dx}{\cos x+6}; \int \sqrt{\frac{x}{3x+1}} dx; \int x \sin 7x dx; \int \cos^3(2x+1) dx.$
17. $\int \frac{x}{x^2+x+3} dx; \int (2x+1) \cos(x^2+x) dx; \int \ln^3 \sqrt{x+2} dx;$
 $\int \sin^3(2x+1) dx; \int \frac{x^2+x+1}{3x-1} dx; \int \sin x \cos 5x dx.$
18. $\int \sin 2x e^{\cos 2x} dx; \int x^2 \sin 2x dx; \int \sin x \sqrt{\cos x} dx;$
 $\int \frac{dx}{(x+3)(x-4)}; \int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} dx; \int \frac{dx}{\sin 2x+3}; \int \frac{dx}{x^2+4x};$
 $\int \ln^3 \sqrt{x-3} dx; \int x e^{x^2+1} dx; \int \arctg 3x dx.$
19. $\int x \sin(x^2+3) dx; \int \sqrt{x} e^{-x} dx; \int \frac{dx}{x^2+x+10}; \int \frac{2x dx}{3x+4};$

- $$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x+4}}; \quad \int \frac{dx}{x \ln x};$$
- $$\int \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int \ln^2(x+2) dx.$$
20. $\int \sqrt[3]{3-2x} dx; \quad \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \int 5x \cos(6x+1) dx;$
- $$\int \frac{dx}{x^2-3}; \quad \int \frac{dx}{x^2+4x+8}; \quad \int x^3 \ln \sqrt{x} dx; \quad \int \frac{dx}{3+\sqrt{x}};$$
- $$\int \sin^5 x dx; \quad \int \cos^4 2x dx; \quad \int \sqrt{x^2+16} dx;$$
21. $\int \sqrt{16+21x} dx; \quad \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{dx}{x(x^2+16)}; \quad \int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}};$
- $$\int \arcsin x dx; \quad \int \frac{dx}{x^2+3x+11}; \quad \int x^2 \operatorname{arctg} x dx;$$
- $$\int \frac{dx}{\sin^3 x}; \quad \int \cos^2 x \sin^4 x dx; \quad \int \sqrt{x^2-16} dx;$$
22. $\int \sqrt[3]{9+7x} dx; \quad \int \operatorname{arctg}(x+6) dx; \quad \int e^{-3x} \cos 2x dx;$
- $$\int \frac{dx}{x^2+5x+19}; \quad \int \frac{dx}{x^3-3x^2+2x}; \quad \int \frac{e^{x+2}}{\sqrt{x+2}} dx; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x};$$
- $$\int \cos^3 x \sin^3 x dx; \quad \int x^3 e^{-x^2} dx; \quad \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+2\sqrt{x}}.$$
23. $\int \sqrt{5+6x} dx; \quad \int \frac{\cos \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx; \quad \int \frac{dx}{x(2x+3)}; \quad \int \frac{dx}{\sin^6 x};$
- $$\int x 3^{2x} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2+x+20}; \quad \int \sqrt{16-x^2} dx; \quad \int \sin^4 x;$$
- $$\int \cos 3x \sin x dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}; \quad \int \frac{\operatorname{arctg}^2(x+1)}{x^2+2x+2} dx; \quad \int \frac{\sin \sqrt{3x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}};$
- $$\int \frac{dx}{x^2+3x+3}; \quad \int \frac{dx}{x(x-4)}; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 2x}; \quad \int x^3 \ln x dx;$$
- $$\int \sin 5x \cos 2x dx; \quad \int \sqrt{16+4x^2} dx.$$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+7}}; \quad \int \frac{e^{x-2}}{\sqrt{x-2}} dx; \quad \int x^2 \cos 5x dx; \quad \int \frac{dx}{x(x-3)^2};$

- $$\int \operatorname{ctg}^2 2x dx; \quad \int \cos 6x \sin x dx; \quad \int \sqrt{x^2 + x + 4} dx;$$
- $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}}; \quad \int \frac{dx}{\sin^6 x}; \quad \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13};$$
26. $\int \sqrt{3x + 10} dx; \quad \int \frac{\cos \sqrt{3x + 1}}{\sqrt{1 + 3x}} dx; \quad \int \sqrt{x} \cos \sqrt{x^3} dx;$
- $$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}; \quad \int \frac{dx}{1 - 3\sqrt{x}}; \quad \int \frac{dx}{\cos^6 2x};$$
- $$\int \cos 4x \sin x dx; \quad \int \cos^2 x \sin^6 x dx; \quad \int x^3 e^{x^4} dx.$$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{b + ax}}; \quad \int x^3 e^{-x^4} dx; \quad \int \cos^3 2x dx; \quad \int \frac{dx}{(x + 2)(x^2 + 81)};$
- $$\int 3x \sin 2x dx; \quad \int \sin^4 x dx; \quad \int \cos 5x \cos 2x dx;$$
- $$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \quad \int \frac{dx}{x^4 + x^2}; \quad \int \sqrt{3 - 5x^2} dx.$$
28. $\int \sqrt{3 + 7x} dx; \quad \int \frac{\sqrt{x}}{3 + 2\sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}; \quad \int \frac{dx}{\sin^6 3x};$
- $$\int \frac{dx}{3 + \sin x}; \quad \int \cos^2 5x dx; \quad \int \sin 4x \sin 3x dx;$$
- $$\int \sqrt{2x^2 + 4} dx; \quad \int \frac{dx}{x(x + 2)(x^2 + 4)}; \quad \int 3x^2 e^{-2x} dx.$$
29. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1 + 4x^2} dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^3 2x}; \quad \int (5x + 1) \sin 2x dx;$
- $$\int \sqrt{\frac{1 + 2x}{2 - 3x}} dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^3 2x}; \quad \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 5}; \quad \int \frac{e^{\sqrt{3}x}}{\sqrt{x}} dx;$$
- $$\int \cos^4 3x dx; \quad \int \ln^2(3x) dx; \quad \int \sqrt{4x^2 - 1} dx.$$
30. $\int \frac{dx}{3 + 4x}; \quad \int \sqrt{2x} e^{\sqrt{3}x} dx; \quad \int \arcsin 2x dx;$
- $$\int \frac{dx}{\sin^4 2x}; \quad \int \operatorname{tg}^2 3x dx; \quad \int \frac{4x}{7 + 9x^2} dx; \quad \int \frac{dx}{x(4x^2 + 1)};$$
- $$\int \frac{dx}{x(5x + 1)^2}; \quad \int \frac{dx}{x \ln 2x}; \quad \int \ln(x + 2) dx.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. –М.: Наука, 1980. –175с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. –М.:Наука, 1980. – 428с.
3. Овчинников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М. Высшая математика. -- Киев: Вища школа, 1989. –679с.
4. Волков Ю.І., Найко В.Д. Лінійна алгебра. –Вінниця.: ВП, 1990. –92с.
- 5.Петрук В.А. Вища математика з прикладними задачами для ігрових занять. Вінниця : ВДГУ, 2000. С.15-52.

Навчальне видання

Петрук В.А., Кашканова Г.Г., Хом'юк І.В.

Збірник завдань з вищої математики Частина І

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор С.А. Малішевська

Підписано до друку *30.11.2001р*

Формат 29,7x42 ¼ Гарнітура Times New Roman

Друк різнографічний Ум. друк. арк. *6.41*

Тираж 100прим.

Зам. № *2001-233*

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел. (0432) 44-01-59