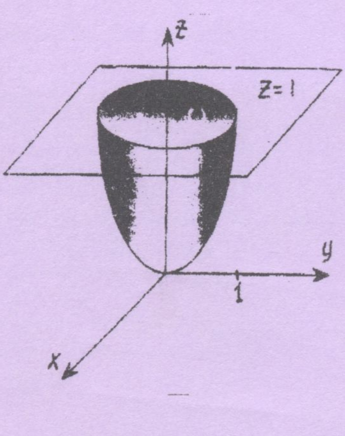
Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

В. А. Петрук, І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 2



05

Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

В.А. Петрук, І.В. Хом'юк, В.В. Хом'юк

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина II

Навчальний посібник

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 9 від 27 квітня 2001р.

Вінниця ВДТУ - 2001

УДК 51/077
П 31

Рецензенти:

І.В. Кузьмін, доктор технічних наук, професор
В.Л. Карпенко, кандидат фізико-математичних наук, професор
В.А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Петрук В.А., Хом'юк І.В., Хом'юк В.В.
П31 **Збірник завдань з вищої математики. Частина 2.** Навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей. — Вінниця: ВДТУ, 2001. — 118с.

В навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем вищої математики: визначений інтеграл, кратні та криволінійні інтеграли, диференціальні рівняння в вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язки прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів з кожної теми для самостійного розв'язування. З теми "Диференціальні рівняння" подані задачі для ігрових занять.

Розрахований на студентів технічних вузів усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51/077

Зміст.

ВСТУП

Даний навчальний посібник містить в собі відомості з тем вищої математики: "Визначений інтеграл". "Кратні та крив олійні інтеграли". "Диференціальні рівняння". які вивчаються студентами технічних вузів на I курсі навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для самостійної роботи студентів з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти. це можна зробити використовуючи літери прізвища. які відповідають алфавіту. поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або зкорелювати набір випадкових чисел. Наприклад. Іванов – 2, 8. 6. 5, 1, 4. 3; Петров – 30. 1, 8. 6. 25, 4. 17 і т. д.

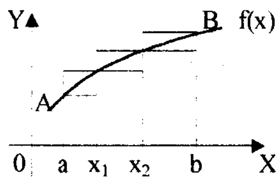
Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквіумів. практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків. контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

Тема "Диференціальні рівняння" має завдання для ігрових занять. які можна проводити на перших практичних заняттях з цієї теми.

1 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Поняття визначеного інтегралу

Нехай f(x)=y неперервна на $x \in [a\ b]$.



aABb - криволінійна трапеція. Відшукаємо її площу. Для цього $[a;\ b]$ розіб'ємо точками на n рівних частин. Точки m_i і M_i- є min та max f(x) - інтервалу $[x_i,\ x_{i+1}]$,

aABb - розіб'ється на n частин, площа i-ої частини більша або дорівнює $m_i(x_{i+1}-x_i)$ і менша або дорівнює $M_i(x_{i+1}-x_i)$.

Нехай $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad S'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i x_i$

$S_n \le S_{aABb} \le S'_n$, т.ч. S_n і S'_n прямують до S_{aABb}, коли $n \to \infty$

Означення. Нехай f (x) , $x \in [a;\ b]$ - неперервна невід'ємна функція, а границі послідовностей S_n і S'_n існують і рівні, їх значення називаються площиною криволінійної трапеції.

Таким чином, нехай $c_i \in (x_{i-1},\ x_i)$ тоді $m_i \le f(c_i) \le M_i$ домножимо його на Δx_i та знайдемо суму всіх значень від 1 до n

$$S_n \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \le S'_n, \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_{aABb}$$

Означення. Нехай f(x) визначена в будь-якому $x \in [a;b]$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ існує і не залежить від вибору т. c_i, то f (x) називають інтегрованою на проміжку $[a;b]$, а границя називають визначеним інтегралом від функції f (x) на $[a;\ b]$ і позначають $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$

Властивості :

1. Для будь-якого числа α : $\int\limits_a^b \alpha\, dx = \alpha(b-a)$

2. Якщо f (x) інтегрована на $[a;\ b]$, то $\forall\ \alpha$ функція α f (x) також інтегрована на $[a;\ b]$:

$$\int_a^b \alpha\ f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

3. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, якщо функції f(x) і g(x) інтегровані на $[a;\ b]$:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b (f(x))\,dx \pm \int_a^b g(x))\,dx$$

4. Якщо f (x) і g(x) інтегровані на [a; b] і f (x) ≤ g (x), то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

5. Для інтегрованої функції f (x) на проміжку [a; b] виконується:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

6. Якщо f (x) інтегрована на [a; b], то вона інтегрована на ∀ проміжку [a; b]; крім того, якщо f (x) інтегрована на [a; c] і [c; b], то вона інтегрована на проміжку [a; b]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Доведення: Нехай $a < c < b$, оскільки границя інтегрованої суми не залежить від способу ділення відрізка [a; b] то будемо ділити його таким чином, щоб точка С була точкою ділення, наприклад: С = xm, тоді інтегральна сума розіб'ється на дві суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)_\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)_\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)_\Delta x_i$$

переходячи до границі, коли n→∞

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Якщо a, b, c розташовані іншим чином, наприклад $a < b < c$, властивість зберігається, дійсно:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx -$$

$$-\int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$$

7. Якщо інтегрована на проміжку [a; b] функція f (x) задовольняє нерівності m ≤ f (x) ≤ M, де m, M = const, відповідно min та max f(x) на [a; b], то

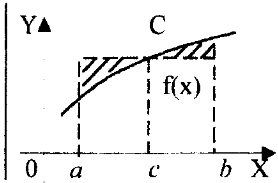
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

8. Якщо f (x) інтегрована на проміжку [a; b], то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a \le b)$$

1.2 Теореми про визначений інтеграл

1.2.1 Теорема про середнє



Якщо функція f (x) неперервна на [a; b],то на [a; b]існує така точка C, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad (1)$$

<u>Доведення :</u> можливі три випадки для a , b

1) $a=b \Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = f(c)(a-a)=0$

2) $a<b$

Візьмемо на проміжку [a; b] min = m та max = M значення функції f(x), тоді з властивості 7 підрозділу 1.1.

$$m \le f(x) \le M \quad \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

розділимо його на $(b-a)$

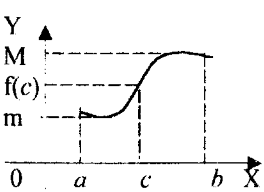
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

оскільки f(x) неперервна на [a; b] і приймає будь-яке значення на [m; M], то існує така точка C $\in$[a; b], що

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$3)\ a>b, \text{ то } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -f(c)(a-b) = f(c)(b-a)$$

<u>**Зауваження**</u>: Теорема про середнє має геометричний зміст:



величина визначеного інтеграла при f (x) $\ge$ 0 дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b-a$.

1. 2. 2 Теорема про визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

Похідна інтеграла від неперервної функції зі змінною верхнею межею існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, яка дорівнює верхній границі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$$

Доведення: З заданої функції та властивості (6)

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt,\ \forall x \text{ і } x_0 \in [a; b].$$

Тоді за теоремою про середнє:
$\Phi(x) - \Phi(x_0) = f(c)(x - x_0)$ де $c \in [x_0; x]$, коли $x_0 < x$ і $c \in [x; x_0]$, якщо $x < x_0$. Отже, $\forall x \neq x_0$ знайдеться така $c \in [x; x_0]$,

$$\text{що}\quad \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = f(c) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c)$$

$\Phi'(x_0) = f(x_0)$ - що і потрібно було довести.

1.2.3 Теорема (формула Ньютона - Лейбніца)

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, а функція $F(x)$ є первісна для $f(x)$ на $[a; b]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Доведення: Відповідно до теореми 2: $\Phi(x) = \int_a^x f(u)\,du$ - є первісна для $f(x)$ на $[a; b]$. Оскільки і $F(x)$ є первісна для $f(x)$ на $[a; b]$то $\Phi(x) - F(x)$ рівна деякій постійній C на всьому проміжку $[a; b]$, тобто $\Phi(x) = F(x) + C$, надаючи x значення a, а потім - b маємо

$$\begin{cases} \Phi(a) = F(a) + C \\ \Phi(b) = F(b) + C \end{cases} \quad \text{оскільки } \Phi(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0,$$

$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$, то $C = -F(a) \Rightarrow \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Теорему доведено.

1.3 Методи обчислювання визначеного інтеграла

1.3.1 Метод заміни змінної інтегрування

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна в $\forall$ точці $x = \varphi(t)$, де $t \in [\alpha;\beta]$, $a = \varphi(\alpha)$ $b = \varphi(\beta)$, тоді, якщо $\varphi(t)$ має неперервну похідну, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t))\,dt$$

Доведення: за формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,

де F (x) – первісна для f (x) на [a; b]. З іншого боку, розглянемо складену функцію $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, згідно з правилом диференціювання складеної функції $\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi''(t)$ звідси випливає, що $\Phi(t)$ є первісною для $f(\varphi(t))\cdot\varphi''(t)$, яка неперервна на $[\alpha;\beta]$, тоді згідно з формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Приклади:

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} t=2x \\ dx=\frac{1}{2}dt \\ t_1=0;\ t_2=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

2) $$\int_1^2 x\sin x^2 dx = \left| \begin{array}{l} u=x^2 \\ du=2xdx \\ u_1=1;\ u_2=4 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^4 \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u \Big|_1^4 = -\frac{1}{2}(\cos 4 - \cos 1)$$

3) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} u=1+x^2 \\ du=2xdx \\ u_1=1;\ u_2=1+3=4 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}\Big|_1^4 = 2-1 = 1$$

4) $$\int_0^\pi e^{\cos x}\sin x\, dx = \left| \begin{array}{l} u=\cos x \\ du=-\sin x\, dx \\ u_1=\cos 0=1; \\ u_2=\cos\pi=-1 \end{array} \right| = -\int_1^{-1} e^u du = -e^u\Big|_1^{-1} = -e^{-1}+e = e - \frac{1}{e}$$

1.3.2 Метод інтегрування частинами

Теорема. Нехай функції U(x) і V(x) мають неперервні похідні на $[a; b]$

Тоді справедлива формула $\int\limits_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b V(x)U'(x)dx$

або $\int\limits_a^b UdV = UV - \int\limits_a^b VdU$

<u>Доведення:</u> використаємо відому формулу похідної добутку

$(UV)' = U'V + UV'$ проінтегруємо її $\int\limits_a^b (UV)'dx = \int\limits_a^b U'Vdx + \int\limits_a^b UV'dx$

$\int\limits_a^b (UV)'dx = UV\Big|_a^b \Rightarrow UV\Big|_a^b = \int\limits_a^b U'Vdx + \int\limits_a^b VU'dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_a^b UV'dx = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU.$

<u>Приклади:</u> $\int\limits_1^e \ln x\, dx$; $\int\limits_0^\pi x^2 \cos x\, dx$

Розв'язування:

1) $\int\limits_1^e \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx; v = x \end{matrix} \right| = x\ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \dfrac{xdx}{x} = e\ln 1 - 1\cdot\ln 1 - x\Big|_1^e = e - 0 - e + 1 = 1.$

2) $\int\limits_0^\pi x^2 \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = x^2; du = 2xdx \\ dv = \cos xdx; v = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi 2x\sin x = \pi^2 \sin\pi - 0 -$

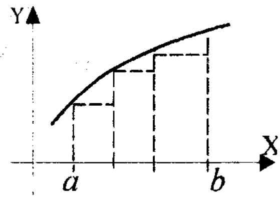
$- 2\left| \begin{matrix} u = x; du = dx \\ dv = \sin xdx; v = -\cos x \end{matrix} \right| = 2x\cos x\Big|_0^\pi - 2\int\limits_0^\pi \cos xdx = 2\pi\cos\pi - 0 - 2\sin x\Big|_0^\pi = -2\pi.$

<u>Зауваження:</u> Всі методи невизначеного інтеграла діють для визначеного інтеграла (метод невизначених коефіцієнтів, метод підстановок t^n, тригонометричних і т. д.)

1.4 Наближені обчислювання визначених інтегралів

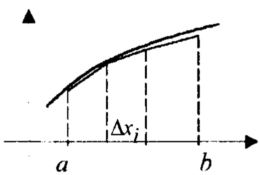
1.4.1 Формула прямокутника

$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{f(x_{i-1} + x_i)}{2}$, n-кількість інтервалів Δx_i



1. 4. 2 Формула трапеції

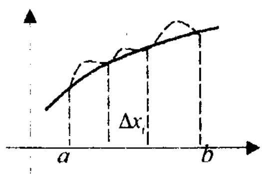
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right],$$



n-кількість інтервалів Δx_i

1. 4. 3 Формула параболи (Сімпсона)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n} f_{2n-1}(x_i)+2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2n}(x_i)\right],$$



n-кількість інтервалів Δx_i

<u>Приклад</u>:

Обчислити $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ безпосередньо та за формулами прямокутника, трапеції та параболи. Оцінити похибку.

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{1/2}\,d(6x-5) = \frac{1}{6}(6x-5)^{3/2}\Big|_1^9 = 38$$

Розіб'ємо інтервал [1;9] на 8 частин, з кроком h=1.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1,0000	2,6458	3,6056	4,3589	5,0000	5,5678	6,0828	6,5574	7,0000

Формула прямокутника

$$\int_a^b Y\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\,,\ Y_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\ dx = \frac{9-1}{8}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i = 34{,}8183.$$

Абсолютна похибка $\Delta = \left|38 - 34{,}8183\right| = 3{,}1817$, відносна похибка $\delta = \frac{\Delta}{38}\cdot 100\%$; $\delta = \frac{3{,}1817\cdot 100}{38} = 8{,}37\%$

Формула трапеції

$$I = \frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n}i)\right] = 4 + \sum_{i=1}^{7} Y_i = 37{,}8183,$$ похибка

$$\Delta = \left|38 - 37{,}8183\right| = 0{,}1817$$

$$\delta = \frac{0{,}1817\cdot 100}{38} = 0{,}48\%$$

Формула Сімпсона

$$I = \frac{b-a}{3n}\cdot\left[\ f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f_{2n-1}(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2n}(x_i)\ \right] = \frac{1}{3}(8 + 4\cdot 19{,}1299 +$$
$$+ 2\cdot 14{,}6884) \approx 37{,}9655$$

$$\Delta = \left|\ 38 - 37{,}9655\right| = 0{,}0345$$

$$\delta = \frac{0{,}0345\cdot 100}{38} = 0{,}09\%$$

Отже, меншу похибку дав метод Сімпсона.

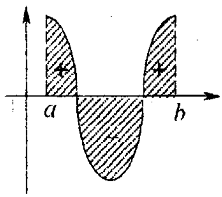
1.5 Геометричні застосування визначеного інтеграла

1.5.1 Площа в прямокутних координатах

На основі геометричного змісту визначеного інтегралу площа криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$, $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a;\, b]$ вертикаллю $x = a$ та $x = b$ і віссю 0X

$$S = \int_a^b y(\,x\,)\,dx = \int_a^b f(\,x\,)dx. \qquad (1)$$

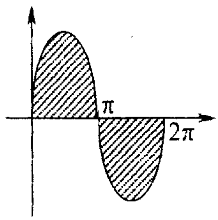
Якщо $f(x) \leq 0\ \forall x \in [a;\, b]$, то $\quad S = -\int_a^b f(x)dx$



Якщо f(x) міняє знак скінчене число раз на проміжку $[a, b]$ то інтеграл по $[a, b]$ розбиваємо на суми інтегралів по частинними відрізкам . Щоб отримати площу потрібно знайти суму абсолютних величин інтегралів по всім відрізкам.

<u>Приклад</u>

Обчислити площу обмежену синусоїдою $y=\sin x$ віссю OX $x \in [0; 2\pi]$



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx =$$

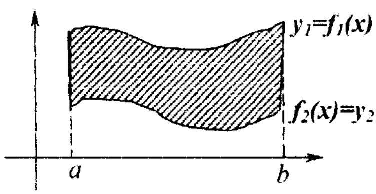
$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + |\cos x| \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) +$$

$$+ |-1-1| = 2 + 2 = 4(од^2)$$

<u>Зауваження</u>

В більш складних випадках фігуру зображають у вигляді суми або різниці криволінійних трапецій.



$$S = \int (y_1 - y_2) dx$$

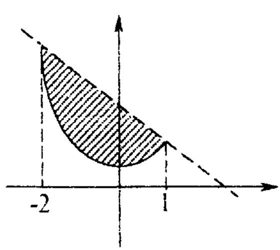
<u>Приклад</u>

Визначити площу S обмежену параболою $Y=x^2+1$ та $x+y=3$

1. Визначимо межі інтегрування

$$\begin{cases} Y = x^2 + 1 \\ Y = 3 - x \end{cases}$$

$X=-2;\ x=1$

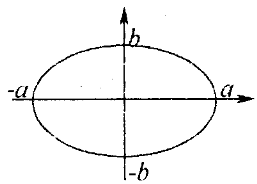


$$S = \int_{-2}^{1} ((3+x) - (x^2+1)) dx = 4.5(од^2)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметрично $x=x(t)$; $y=y(t)$ $t \in [t_1 ; t_2]$, то

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Приклад Обчислити площу обмежену еліпсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

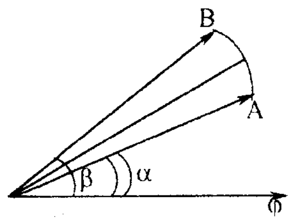


1. Визначимо межі інтегрування

$x_1=-a$ то $\cos t_1=-1$ $t_1=\pi$

$x_2=a$ то $\cos t_2=1$ $t_2=0$

$$S = 2\left(\int_{\pi}^{0} b\sin t\cdot a\sin t\,dt\right) = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt = \pi ab$$



Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою заданою в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$. Визначимо площу . Нехай в полярній системі координат маємо криву $\rho=\rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ неперервна функція на $[\alpha;\beta]$. Визначимо площу сектора, обмеженого кривою $\rho=\rho(\varphi)$ та радіус-векторами $\varphi_1=\alpha$, $\varphi_2=\beta$. Розіб'ємо дану площу радіус-векторами на n частин. позначимо через $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$ кути між проведеними радіус-векторами

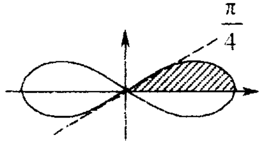
$\bar{\rho}_i$ – довжина радіус-вектора, що відповідає будь-якому куту φ_i, що знаходяться між φ_{i-1} та φ_i. Площа кругового сектора з радіусом ρ_i та центральним кутом $\Delta\varphi_i$

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\bar{\rho}_i^2\Delta\varphi_i \text{ . тоді } \quad \Delta S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}[\rho(\varphi_i)]^2\Delta\varphi_i$$

при $n\to\infty$ маємо $S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$ $\qquad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi.$

Приклад Обчислити площу обмежену лінією

$\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$; $\cos 2\varphi \ge 0$



φ	-π/4	0	π/4
ρ	0	1	0

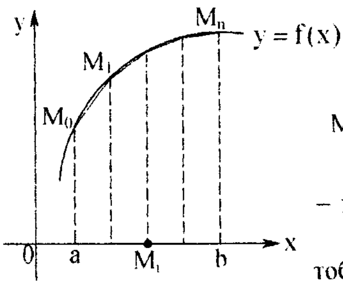
$$+\frac{\pi}{4} \ge 2\varphi \ge -\frac{\pi}{2}; \qquad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right];$$

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{0}^{\pi/4} = 1$$

1.5.2 Довжина дуги плоскої кривої

Означення 1 | Під довжиною дуги AB розуміють границю до якої прямує довжина ламаної, вписаної в цю дугу, коли число частин ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої частини прямує до нуля.

Нехай $y=f(x)$ рівняння кривої на $[a, b]$. Розіб'ємо криву точками M_i на n частин, маємо $M_0M_1 \ldots M_n$ -ламану.



Довжина $M_{i-1}M_i$ буде дорівнювати:

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad \text{теорема Піфагора}$$

За теоремою Лагранжа $\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i)\Delta x$

тобто $M_{i-1}M_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x_i^2 f'^2(x_i)} = \sqrt{1 + f'^2(x_i)}\Delta x_i$, отже

$$M_0M_1 \ldots\ldots M_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_i)}dx; \quad \text{при } n \to \infty$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_i)}\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x_i)}dx$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx \qquad \text{або, якщо } dl = \sqrt{1 + y'^2}dx \qquad l = \int_a^b dl$$

Приклад Обчислити довжину кола $x^2+y^2 = r^2$, $y= r^2-x^2$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}; \quad l = 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} =$$

$$= 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4r \arcsin \frac{x}{r}\Bigg|_0^r 2\pi r$$

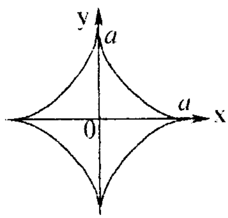
Якщо дуга кривої задана параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1;t_2]$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'(t)^2}dt. \qquad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$$

Зауваження Якщо крива задана в просторі x=x(t). y=y(t). z=z(t)

$$l = \int_{t_0}^{t}\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt.$$

Приклад Обчислити довжину дуги $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$



$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 4\cdot 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt = 6a$$

Межі інтегрування знайдемо надаючи параметру t значення:

t	0	π/3	π/2
x	a	$0{,}35a$	0
z	0	$0{,}35a$	a

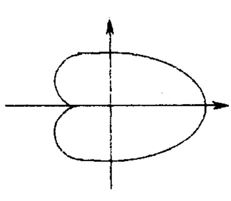
Зауваження Якщо крива задана в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$. Запишемо формули переходу $y=\rho\sin\varphi$, $x=\rho\cos\varphi$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \rho'\cos\varphi + \rho\sin\varphi; \qquad \frac{dx}{d\varphi} = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi;$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \rho'^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi = \rho'^2 + \rho^2$$

Тоді
$$l = \int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\,d\varphi.$$

Приклад Обчислити довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$

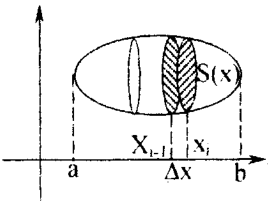


φ	0	π/3	π/2	π
ρ	$2a$	$1{,}5a$	a	0

$$l = 2\int_0^{\pi} a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2 + a^2 + \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi d\varphi} = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$

1.5.3 Обчислення об'єму тіла за площею паралельних перерізів

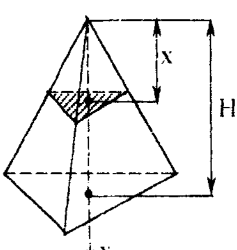


Нехай задано тіло Т. та відомо площу будь-якого перерізу цього тіла площиною. перпендикулярною до осі ОХ. Ця площа залежить від положення січної площини і являється функцією від x: S=S(x) . необхідно визначити об'єм тіла Т. якщо S(x) — неперервна функція. Спроектуємо тіло на вісь ОХ , отримаємо [*a*. *b*], який дає лінійний розмір тіла в напрямку ОХ . розділимо [*a*. *b*] точками x_i на n частин і через них проведемо площини . перпендикулярні ОХ. тіло розіб'ється на суму циліндрів. об'єми яких

$$V_i = S(x_i)\Delta x_i \Rightarrow V = \sum_1^n S(x_i)\Delta x_i;\ V = \lim_{n\to\infty}\sum_i^n S(x_i)\Delta x_i \quad V = \int_a^b S(x)dx$$

<u>Приклад</u>

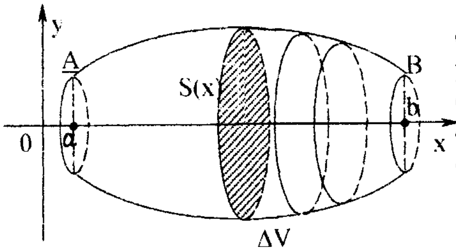
Знайти об'єм піраміди з площею основи S_o та висотоюH. Нехай S(x) — площа перерізу. Площі перерізу та основи відносяться як квадрати їх відстаней до вершини.



$$\frac{S}{S_0} = \frac{x^2}{H^2} \quad ; \quad S = \frac{S_0 x^2}{H^2}$$

$$V = \int_0^H \frac{S_0 x^2}{H^2}dx = \frac{S_0}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}S_0 H$$

1.5.4 Об'єм тіла обертання



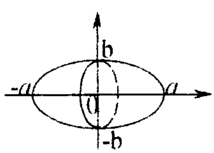
Обчислити об'єм тіла V_x утвореного обертанням навколо осі OX криволінійної трапеції aABb, обмеженої $y = f(x)$, $a \le x \le b$, віссю OX та прямими $x=a$, $x=b$.

$S(x) = \pi y^2$ — коло в розрізі

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx, \text{ аналогічно}$$

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy, \text{ отже} \qquad V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx, \qquad V_{oy} = \pi \int_c^d x^2 dy$$

<u>Приклад</u> Визначити об'єм тіла.

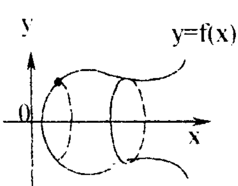


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V_x = 2\int_0^a \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi b^2\left(a - \frac{1}{3}a\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

1.5.5 Поверхня тіла обертання



$Y=f(x)$ обертається навколо осі OX на $[a, b]$:

$$S_n = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Якщо крива задана параметрично: $S_n = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$

1.6 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

1.6.1 Інтеграли з нескінченними межами

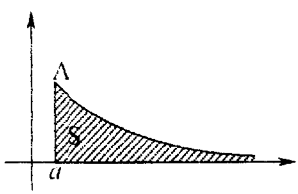
При означенні інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ припускалось, що

1) проміжок $[a, b]$ скінченний;
2) підінтегральна функція f(x) визначена та неперервна на $[a, b]$.

Такий визначений інтеграл називається власним. Якщо хоча б одна з умов порушується, інтеграл називається невласним.

$\int_a^{\infty} f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$; $\int_a^b f(x)dx - f(x)$ - має розрив другого роду в точці $x\in[a, b]$.

Означення | Якщо границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ – існує, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ називається збіжним, в іншому випадку - розбіжним.



Геометрично:

$\int_a^{\infty} f(x)dx = S$, або $S = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$

Приклад:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}$$

1.6.2 Ознаки збіжності невласних інтегралів

Теорема | Якщо для будь якого x ($x\geq a$) виконується нерівність $0\geq f(x)\geq\varphi(x)$ і $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ – збіжний, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ – також збіжний, $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \quad \le \quad \int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$

Теорема Якщо для будь-якого x ($x \ge a$) виконується нерівність $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ і $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$ – розбіжний, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ – також розбіжний

Теорема Якщо $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx$ – збіжний, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ – є абсолютно збіжний.

Приклади

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}; \quad \frac{dx}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1 -$$ отже, інтеграл - збіжний .

2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx, \quad \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то

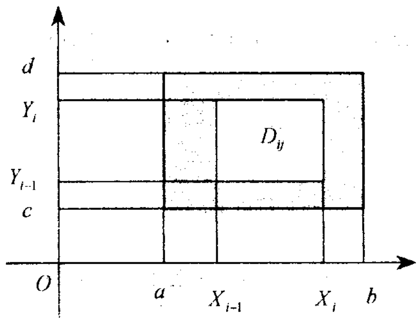
$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \infty$$ – розбіжний і даний теж.

2 КРАТНІ І КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1 Подвійний інтеграл

2.1.1 Поняття подвійного інтеграла

Нехай функція $f(x,y)$ задана на прямокутнику D: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.



Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = \overline{0,n}$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, довжини $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, а відрізок $[c,d]$, точками $y_j = c + \frac{d-c}{n} j$ на n відрізків $[y_{i-1}, y_i]$, $j = \overline{0,n}$, довжиною $\Delta y_i = \frac{d-c}{n}$. Таким чином прямокутник D розіб'ється на n^2 прямокутників D_{ij}, площа будь-якого з них $\Delta x_i \Delta y_j$. Складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\tau_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j, \tag{1}$$

де (τ_i, t_j) - деяка точка прямокутника D_{ij}.

Якщо розглянемо границю виразу (1) коли $n \to \infty$, то отримаємо вираз

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\tau_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_D f(x,y) dxdy. \tag{2}$$

Означення1.	Подвійним інтегралом функції $f(x,y)$ називається границя інтегральних сум по області D і позначається $\iint_D f(x,y)dxdy$.

<u>Зауваження.</u> Інколи вираз $dxdy$ пишуть як ds.

Властивості

Теорема 1: Якщо подвійні інтеграли від функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ по прямокутнику D існують, то для будь-яких чисел A і B виконується рівність.

$$\iint\limits_D (Af(x,y)+Bg(x,y))dxdy = A\iint\limits_D f(x,y)dxdy + B\iint\limits_D g(x,y)dxdy, \quad (3)$$

<u>Доведення</u>: Згідно з визначенням 1 і властивостями границь послідовностей маємо:

$$\iint\limits_D (Af(x,y)+Bg(x,y))dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum\sum(Af(\tau_i,t_j)+Bg(\tau_i,t_j))\Delta x_i\Delta y_j =$$

$$= A\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\tau_i,t_j)\Delta x_i\Delta y_j + B\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g(\tau_i,t_j)\Delta x_i\Delta y_j =$$

$$= A\iint\limits_D f(x,y)dxdy + B\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

Теорему доведено.

Теорема 2 Якщо функція $f(x,y)$, $x\in D$, $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ неперервна, то вона інтегрована у D.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \quad (4)$$

<u>Доведення</u>: Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками x_i на n рівних по довжині частин: $[x_{i-1},x_i]$, тоді

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

За теоремою про середнє для інтегралів існує $\tau_i\in[x_{i-1},x_i]$ таке, що

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d f(\tau_i,y)dy\Delta x_i.$$

Аналогічно розіб'ємо $[c,d]$ і отримаємо:

$$\int_c^d f(\tau_j,y)dy = \sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\tau_j,y)dy.$$

За теоремою про середнє існує $t_j\in[y_{j-1},y_j]$ таке, що

$$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\tau_i, y)dy = f(\tau_i, t)\Delta y_j.$$

Після чого

$$\int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\tau_i, t_j)\Delta x_i \Delta y_j .$$

Знайдемо границю, коли $n \to \infty$ і отримаємо рівність (4).

Зауваження: Формула (4) – є формулою зведення подвійного інтегралу до повторного.

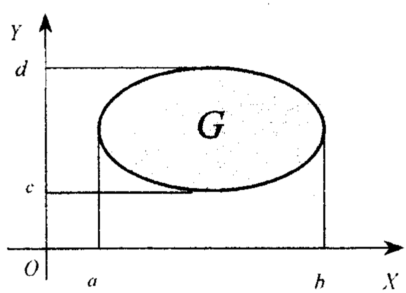
Таким чином: $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y). \qquad (5)$$

Теорему доведено.

2.1.2 Подвійний інтеграл за будь-якою областю D

Нехай дана функція $f(x,y)$ у деякій обмеженій області G на координатній площині.

Позначимо через D найменший прямокутник зі сторонами, паралельними осям. Розглянемо $f_0(x,y)$, яка збігається з $f(x,y)$ в т. $(x,y)\in G$.

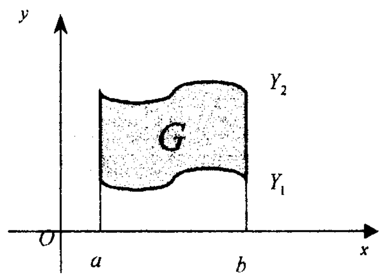


За означенням

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f_0(x,y)dxdy, \qquad (6)$$

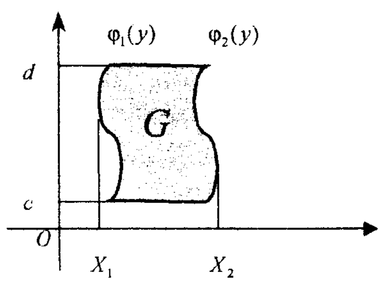
Розглянемо випадок, коли G обмежена зліва та справа відрізками $x=a$, $x=b$, а знизу та зверху графіками неперервних функцій $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, тобто G: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, тоді

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy . \qquad (7)$$



Аналогічно розглянемо подвійний інтеграл, коли G обмежена $y=c$, $y=d$ і $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$

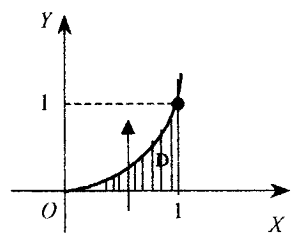
$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$



Приклад: Обчислити $\iint\limits_D (3xy^2+x^2)dxdy$, де $y=x^2$, $y=0$, $x=1$.

Розв'язування.

1) Побудуємо область D та виберемо порядок інтегрування



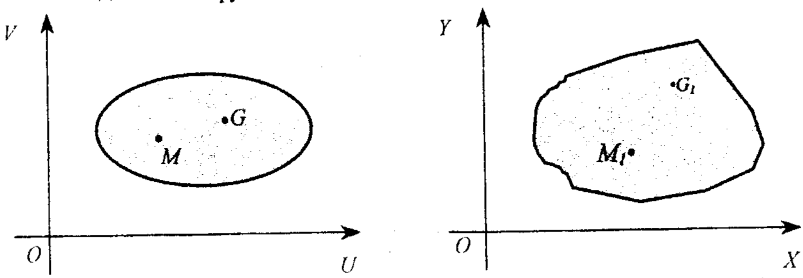
2) $\iint\limits_D f(3xy^2+x^2)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}(3xy^2+x^2)dy=\int\limits_0^1 (xy^3+x^2y)\Big|_0^{x^2}dx=\int\limits_0^1 (x^7+x^4)dx=$

$=\int\limits_0^1 (x^7+x^4)dx=\dfrac{x^8}{8}+\dfrac{x^5}{5}=\dfrac{5+8}{40}=\dfrac{13}{40}$

Відповідь: $\dfrac{13}{40}$.

2.1.3 Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай потрібно обчислити $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ та $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ взаємно однозначні функції.



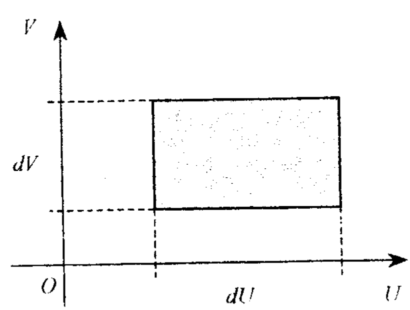
Координати (u,v) називаються криволінійними координатами т. M, таким чином :

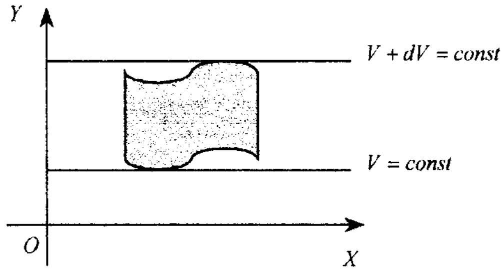
$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G1} f(\varphi(u,v)\psi(u,v))|I|dudv,$$

$|I(u,v)| = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}$ - визначник Остроградського (якобіан перетворення).

Коли x і y мають неперервні частинні похідні 1-го порядку по u та v, то між елементами площі на площині XOY та на площині UOV існує зв'язок $dxdy=|I|dudv$, його геометричний зміст розглянемо, коли в площині UOV задано прямокутник.

Цей прямокутник за допомогою перетворення $\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{cases}$ переходить в деяку криволінійну фігуру на площині XOY. Цю фігуру при малих du та dv можна вважати паралелограмом і тоді площа її $|I|dudv$.

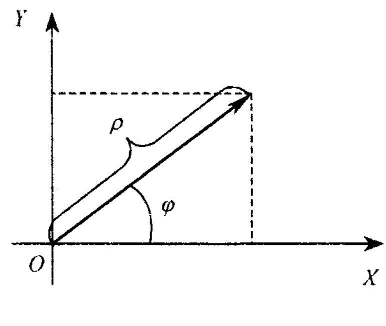




З другого боку , $dudv$ - це площа елементарного прямокутника на площині UOV т. ч. $|I|$ є коефіцієнтом, що враховує зміну форми елементарного прямокутника при переході від декартових до криволінійних координат. Тому його часто називають коефіцієнтом спотворення форм.

Досить поширеними криволінійними координатами є полярні.

Означення 2.	Полярними координатами на площині називається пара чисел (ρ,φ) де ρ - відстань від точки до полюса, а φ - кут між радіусом-вектором точки та полярною віссю.



$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

Знайдемо якобіан перетворення

$$I = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho .$$

Т. ч.

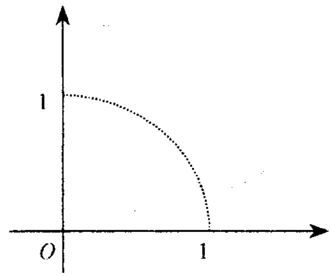
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi . \qquad (9)$$

Приклад. Переходячи до полярних координат обчислити: $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

D: частина кола $R=1$ $C(0,0)$, $x>0$, $y>0$.

Розв'язування: перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi; y=\rho\sin\varphi$

$\varphi_1=0; \varphi_2=\frac{\pi}{2}$



$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2.$$

$$dxdy=\rho d\rho d\varphi \Rightarrow \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint\limits_D \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2}}=\iint\limits_D d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho=\frac{\pi}{2}.$$

2.2 Геометричні застосування подвійного інтеграла

1. Площа області, обмеженої лініями (D):

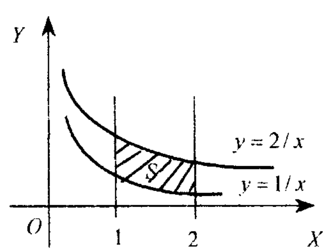
$$S=\iint\limits_D dxdy \text{ або } S=\iint\limits_D \rho d\varphi d\rho. \qquad (10)$$

2. Об'єм циліндричного тіла

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (11)$$

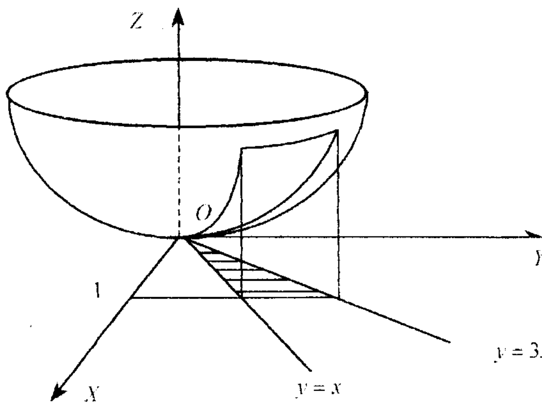
Приклад 1. Знайти площу області, яка обмежена лініями $x=2$, $x=1$, $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{1}{x}$.

Розв'язування: Побудуємо область



$$S=\iint_D dxdy\,;\ S=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} dy=\ln 2\,.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x=1$, $y=x$, $y=3x$, $z=0$, $Z=x^2+y^2$



$$V=\iint_D f(x,y)dxdy \Rightarrow V=\int_0^1 dx\int_x^{3x}\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{8}{3}.$$

2.3 Застосування подвійного інтеграла у фізиці.

1. Маса пластини

$$m=\iint_D \rho(x,y)dxdy\,;\ \rho(x,y)\ \text{- густина.} \qquad (12)$$

2. Статичні моменти відносно осей

$$M_x=\iint_D y\rho(x,y)dxdy\,,\ M_y=\iint_D x\rho(x,y)dxdy\,. \qquad (13)$$

3. Координати центра ваги

$$X=\frac{M_y}{m};\ Y=\frac{M_x}{m}\,. \qquad (14)$$

4. Момент інерції пластини відносно осей

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)dxdy\,;\ I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)dxdy\,. \qquad (15)$$

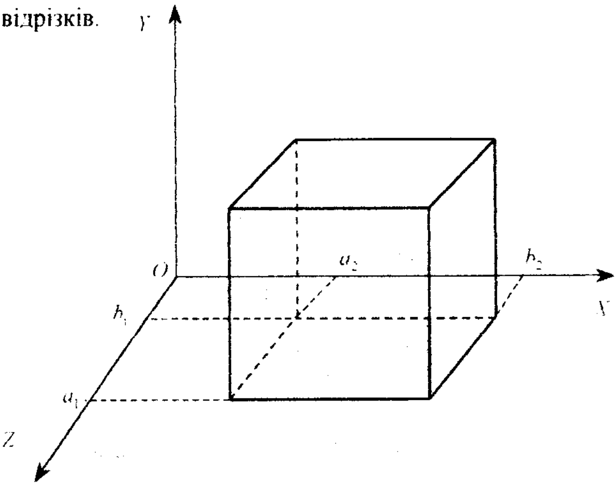
2.4 Потрійний інтеграл

2.4.1 Поняття потрійного інтегралу

Розглянемо функцію $f(x,y,z)$ задану паралелепіпедом

$V: a_1 \le x \le b_1 \quad a_2 \le y \le b_2 \quad a_3 \le z \le b_3$.

На осях X, Y, Z розіб'ємо ці відрізки точками x_i, y_j, z_k на n-рівних за довжиною відрізків.



Складемо інтегральну суму:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_i,t_j,\mu_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad \text{де} \quad \tau_i \in [x_{i-1},x_i];\ t_j \in [y_{j-1},y_j];\ \mu \in [z_{k-1},z_k].$$

Якщо вона має границю, коли $n \to \infty$, яка не залежить від вибору τ_i, t_j, μ_k по області V, то вона називається потрійним інтегралом і позначається

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_i,t_j,\mu_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz. \qquad (16)$$

Аналогічно подвійному інтегралу отримаємо співвідношення:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}dy\int_{a_3}^{b_3}f(x,y,z)dz = \int_{a_2}^{b_2}dy\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_3}^{b_3}f(x,y,z)dz \qquad (17)$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл від функції

$f(x,y,z) = x^2 + xy + xyz \quad x \in [0;1] \quad y \in [0;1] \quad z \in [0;1]$

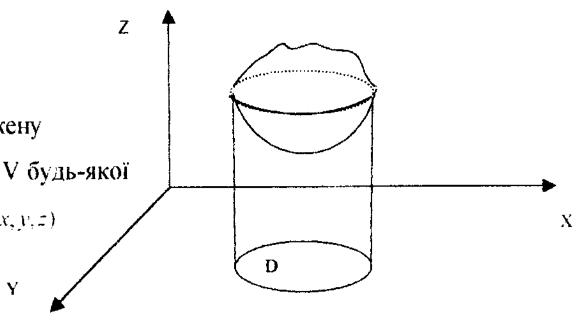
Розв'язування:

$$\iiint\limits_V (x^2 + xz + xyz)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x^2 + xz + xyz)dz = \int_0^1 dx\int_0^1 (x^2 z + \frac{xz^2}{2} +$$

$$+\frac{xyz^2}{2})\Big|_0^1 dy = \int_0^1 dx\int_0^1 (x^2 + \frac{x}{2} + \frac{xy}{2})dy = \int_0^1 (x^2 y + \frac{xy}{2} + \frac{xy^2}{4})\Big|_0^1 dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4})dx =$$

$$(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8})\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{17}{24}$$

Відповідь: $\frac{17}{24}$



Розглянемо обмежену замкнену область V будь-якої форми, на якій $f(x,y,z)$ інтегровна.

Проекція області V на XOY $\in D$. Нехай прямі паралельні OZ перетинають границю області V не більше ніж у двох точках. Тоді на поверхні, що обмежує область V можна виділити нижню та верхню частини

Рівняння нижньої частини $z = \varphi_1(x,y)$, а верхньої $z = \varphi_2(x,y)$ тоді, якщо

$(x,y) \in D$ існує інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dxdydz$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Аналогічні формули отримаємо, коли розглянемо проекції V на $Dyoz, Dzoy$.

2.4.2 Геометричні та фізичні застосування потрійного інтеграла

1. $V = \iiint\limits_V dxdydz$ об'єм тіла обмеженого V. (18)

2. $m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$ маса в об'ємі V, ρ - густина (19)

3. $I_l = \iiint\limits_V r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz$

I_l - момент інерції тіла відносно будь-якої осі, $r(x,y,z)$ - відстань від

точок $M(x,y,z)$ тіла V до осі l. (20)

Зауваження. Якщо l збігається з віссю, то ця координата = 0,

наприклад $l = OZ$

$$I_{oz} = \iiint\limits_V r^2(x,y)\rho(x,y,z)dxdydz$$

4. $$\begin{cases} M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz \\ M_{yx} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz \\ M_{zx} = \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz \end{cases}$$ Статичні моменти тіла V з змінною густиною ρ відносно координатної площини (21)

5. $X_0 = \dfrac{M_{zoy}}{m}$; $Y_0 = \dfrac{M_{zox}}{m}$; $Z_0 = \dfrac{M_{xoy}}{m}$ (22)

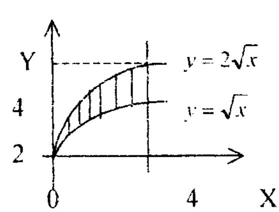
X_0, Y_0, Z_0 – координати центру ваги тіла V у сист.OXYZ

Приклад. Знайти об'єм тіла обмеженого поверхнями

$$x \in [0,4] \quad \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x} \quad 0 \le z \le 4 - x$$

Розв'язування.

Побудуємо його основу.



$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_0^{4-x}dz=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy\int_0^{4-x}dz=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)dy=$$

$$\int_0^4(4-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx=\int_0^4\left(4\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^4=\frac{8}{3}4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}4^{\frac{5}{2}}=\frac{64}{3}-\frac{64}{5}=\frac{128}{15}$$

Відповідь: $\frac{128}{15}$.

2.4.3 Перехід до циліндричних та сферичних координат

При обчисленні потрійного інтеграла треба перейти до інших криволінійних координат, коли функція або межі мають змінні в другій та вищих степенях.

Нехай $u=u(x,y,z)$ $v=v(x,y,z)$ $w=w(x,y,z)$ - функції визначені в просторі OXYZ, або в будь-якій області V і мають неперервні частинні похідні в V. При чому, якщо є розв'язок $x=x(x,y,z), y=y(x,y,z), z=z(x,y,z,)$, то тоді кожна точка $M(x,y,z)$ з області V буде однозначно мати три числа(u,v,w), які мають назву криволінійних координат цієї точки.

$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V x(\upsilon,v,\omega)y(\upsilon,v,\omega)z(\upsilon,v,\omega)|I|d\upsilon dv d\omega$, V - область змінювання криволінійних координат (u,v,w), що відповідають області V, а $|I|$ –Якобіан перетворення.

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix} x_u{}' & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

Циліндричні координати

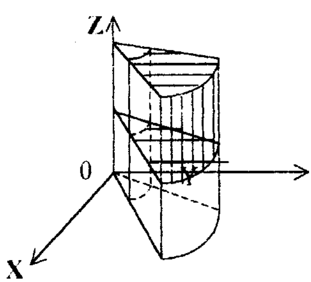
Означення. Криволінійні координати $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,$ де $0 \le \varphi \le 2\pi$, де $0 \le \rho < \varphi$, $-\infty < z < +\infty$ називають циліндричними координатами точки, (23)

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Перетин двох різних поверхонь утворює координатну лінію .

У циліндричних координатах такими лініями є:

1) вертикальні прямі, одержані внаслідок перетину поверхні $\rho = const$, $\varphi = const$;
2) напівпрямі, паралельні XOY, що виходять з осі OZ, одержані внаслідок перетину поверхонь $\varphi = const$, $z = const$;
3) кола, паралельні XOY, з центром на OZ, одержані внаслідок перетину поверхонь $z = const, \rho = const$.



Приклад. Обчислити $\iiint \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$

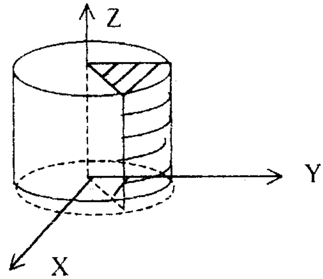
$V: x^2+y^2=1$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

$z=0 \quad y \ge x$

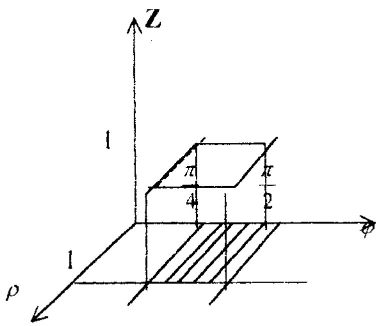
$z=1$



Розв'язування

Перейдемо до циліндричних координат: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi & x=0 \Rightarrow \quad \varphi=\dfrac{\pi}{2} \\ y=\rho\sin\varphi & y=x; \quad \varphi=\dfrac{\pi}{4} \\ z=z & z=0; \quad z=1; \end{cases}$

$x^2+y^2=1; \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1; \ \rho=1; \rho=0$.

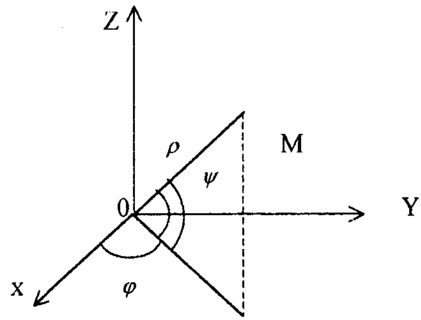


$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint_{V'} \rho\rho d\varphi d\rho dz=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 \rho^2 d\rho\int_0^1 dz=\frac{\pi}{2}.$$

Сферичні координати

Означення: Сферичними координатами точки називається трійка чисел (φ,ρ,ψ), де φ має той самий зміст, що і в циліндричних координатах, ρ - відстань від точки до початку координат, ψ - кут між векторами, проведеними з початку координат в точку, та площиною XOY.

$$\varphi \in [0;2\pi];\ \psi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\ \rho \in (0;+\infty)$$



Розглянемо взаємозв'язок між декартовими і сферичними координатами:

$$\begin{cases} y = \rho\sin\varphi\cos\psi \\ x = \rho\cos\varphi\cos\psi \\ z = \rho\sin\psi \end{cases} \qquad I = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\psi & x'_\rho \\ y'_\varphi & y'_\psi & y'_\rho \\ z'_\varphi & z'_\psi & z'_\rho \end{vmatrix} \qquad (24)$$

$$I = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi\cos\psi & -\rho\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ \rho\cos\varphi\cos\psi & -\rho\sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi \\ 0 & \rho\cos\psi & \sin\psi \end{vmatrix} = \rho^2\cos\psi \times$$

$$\begin{vmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \end{vmatrix} =$$

$$\rho^2\cos\psi(-\sin\varphi)\begin{vmatrix} -\sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{vmatrix} -$$

$$-\cos\rho\begin{vmatrix} -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{vmatrix} = \rho^2\cos\psi\left(-\sin^2\varphi\sin^2\psi - \sin^2\varphi\cos^2\psi\right) -$$

$$-\cos\varphi\left(-\cos\varphi\sin^2\psi - \cos\varphi\cos^2\psi\right) = \rho^2\cos\psi\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = \rho^2\cos\psi$$

$$|I| = \rho^2\cos\psi. \qquad (25)$$

Зауваження. Оскільки

$$\psi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; \quad \text{то } \cos\psi > 0.$$

Координатними поверхнями в сферичних координатах є поверхні

$\varphi = const, \rho = const, \psi = const$

1) $\varphi = const$ є вертикальна напівплощина, що проходить через вісь OZ і утворює кут φ з площиною XOY

2) $\rho = const$ є сфера з центром в початку координат.

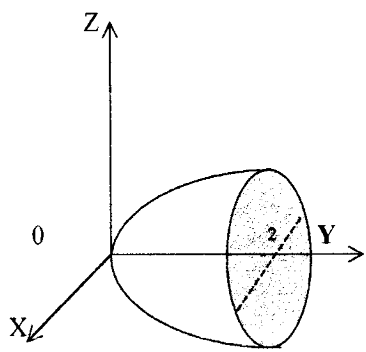
3) $\psi = const$ є поверхня прямого кругового конуса, вісь якого збігається з віссю OZ, а вершина з початком координат.

Приклади.

1) Обчислити $\iiint\limits_V (x^2 + z^2)dxdydz$

$V: y = 2; x^2 + z^2 = 2y$.

Розв'язування. Побудуємо тіло V.



Перейдемо до циліндричних координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; z = \rho\sin\varphi; \quad dxdydz = \rho d\varphi d\rho dy \\ y = y \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5)d\rho = \int\limits_0^{2\pi} (\frac{1}{2}\rho^4 - \frac{1}{12}\rho^6)\Big|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} (8 - \frac{16}{3})d\varphi = \frac{8}{3}2\pi = \frac{16\pi}{3}$$

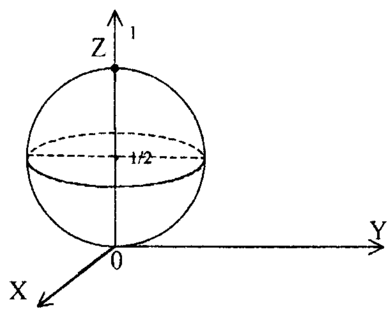
2) Обчислити: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$; $V: x^2+y^2+z^2=z$

<u>Розв'язування.</u>

Перейдемо до сферичних координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\cos\psi \\ y=\rho\sin\varphi\cos\psi \\ z=\rho\sin\psi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} dxdydz=\rho\cos\psi d\varphi d\rho d\psi \\ 0<\varphi<2\pi;\ \ 0<\psi<\dfrac{\pi}{2};\ \ 0<\rho<\cos\psi \end{array}$$

$x^2+y^2+z^2=z$ - сфера, зсунута вздовж OZ. Її рівняння буде мати вигляд:
$\rho^2=\rho\cos\varphi$; $\rho=\cos\varphi$



Тоді:

$$\iiint\limits_v \rho\rho^2\cos\psi d\rho d\varphi d\psi=\iiint\limits_v \rho^3\cos\psi d\rho d\varphi d\psi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int\limits_0^{\cos\psi}\rho^3\cos\psi d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5\psi}{4}d\psi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\psi)^2\cos\psi d\psi=$$

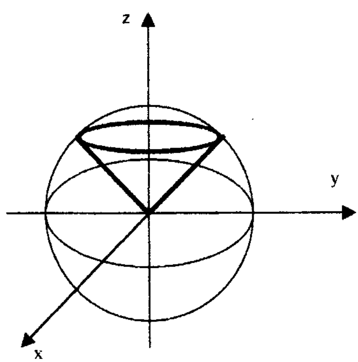
$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\psi-2\sin^2\psi\cos\psi+\sin^4\psi\cos\psi)d\psi=$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left.(\sin\psi-2\frac{\sin^3\psi}{3}+\frac{\sin^5\psi}{5})\right|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{15-10+3}{15}=\frac{1}{4}\frac{8}{15}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{15}$$

2) Обчислити.

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz \qquad V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=z^2 \\ z>0 \end{cases}$$

<u>Розв'язування.</u> Перейдемо до сферичних координат:



$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\cos\psi \\ y=\rho\sin\varphi\cos\psi \\ z=\rho\sin\psi \end{cases}$$

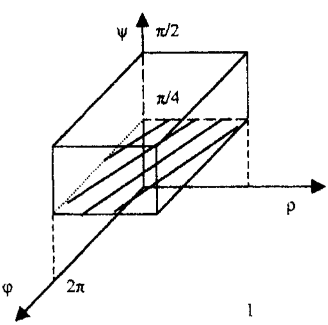
$x^2+y^2+z^2=\rho^2=1\rightarrow\rho=1$ — площина

$x^2+y^2=$

$=\rho^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\psi=$

$=\rho^2\cos^2\psi=\rho^2\sin^2\psi$

$\psi=\dfrac{\pi}{4};\varphi=0;\varphi=2\pi$



Точки осі OZ перейдуть в площину $\psi=\dfrac{\pi}{2}$, точка з координатами (0;0) → в площину $\rho_1=0$.

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}d\psi\int\limits_0^1\rho\cdot\rho^2\cos\psi d\rho=$$

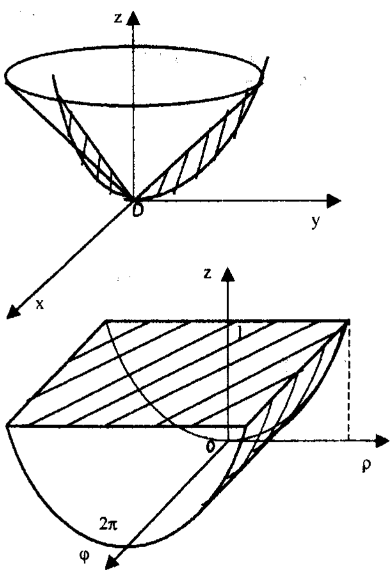
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\psi d\psi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

<u>Зауваження</u>. Не завжди при переході до криволінійних координат ми отримаємо прямокутний паралелепіпед, проте і в цих випадках перехід до криволінійних координат буде доцільним, якщо це спростить обчислення інтеграла.

Наприклад:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

$$V:\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$



Циліндричні координати:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \\ \rho = 1 \end{cases}$$

$$z = x^2 + y^2 = \rho^2; z = \rho^2$$

$$z = 1; \varphi = 0; \varphi = 2\pi$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 = \rho^2$$

$$z = \pm\rho$$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_{\rho^2}^{\rho} dz = \frac{\pi}{10}.$$

2.5 Криволінійні інтеграли

2.5.1 Криволінійний інтеграл I роду

Нехай існує плоска крива, рівняння якої $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,|dt|$ — диференціал дуги, якщо $\alpha \le \beta$, то $dt > 0$, та $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, якщо $\alpha \ge \beta$, то $dt < 0$ та $dl = -\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$

Якщо f(x,y) — функція неперервна на кривій K, то під її криволінійним інтегралом I роду, взятим по кривій K, розуміють інтеграл

$$\int\limits_K f(x,y)dl = \int f(x(t), y(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt \qquad (26)$$

Якщо K задана рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, маємо

$$\int\limits_K f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y)\sqrt{1+(y')^2}dx$$

Нехай K — матеріальна, тобто має масу і Δl — деяка дуга кривої K, якій належить точка M, а Δm — маса цієї дуги. Тоді частка $\frac{\Delta m}{\Delta l}$ — середня густина дуги Δl.

$\rho(M) = \lim\limits_{\Delta l \to M} \frac{\Delta m}{\Delta l}$ тобто границя середньої густини дуги за умови, що дуга $\Delta l \to$ в т.M, її називається лінійною густиною дуги в т.M.

$dm = \rho dl$ — маса нескінченно малої дуги dl. Звідси випливає фізичний зміст інтегралу I роду:

$m = \int\limits_K \rho dl$, де m - маса лінії.

<u>Властивості.</u>

1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл I роду не змінює свого значення.

$$\int\limits_{K+} f(x,y)dl = \int\limits_{K-} f(x,y)dl$$

2. Якщо крива інтегрування $k = k_1 + k_2$, то

$$\int\limits_K f(x,y)dl = \int\limits_{K_1} f(x,y)dl + \int\limits_{K_2} f(x,y)dl$$

3. $\left|\int\limits_K f(x,y,z)dl\right| \le \int\limits_K |f(x,y,z)|dl$

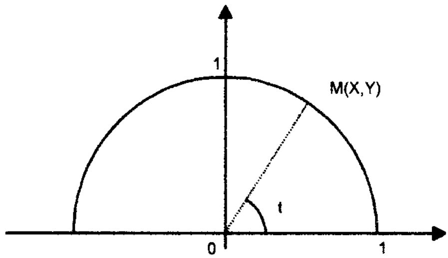
4. $\int\limits_{K+} f(x,y)dl = f(Q)L$, де $Q \in K$, L — довжина лінії.

<u>Приклад 1.</u>

Знайти масу півкола $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$, якщо лінійна густина в т. M пропорційна ординаті Y.

$\rho = ky$

<u>Розв'язування.</u> t — полярний кут, $x = \cos t$, $y = \sin t$ — параметричне рівняння кола.



$0 \le t \le \pi, \qquad dm = \rho dl = ky\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$

k — коефіцієнт пропорційності.

$x' = -\sin t;\ y' = \cos t,\ dl = dt$

$$dm = k\sin t dt \Rightarrow m = k\int_0^{\pi} \sin t dt = k(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2k\,.$$

Приклад 2.

$$\int_{AB} x^2 dl, y = \ln x, x \in [1;2]$$

Розв'язування.

$$\int_1^2 x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1+x^2\right)^{1/2} d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{125}-\sqrt{8}\right)$$

2.5.2 Криволінійний інтеграл II роду

Нехай $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [\alpha;\beta] \end{cases}$ — гладка або кусково-гладка функція та

X(x; y); Y(x; y) — пара функцій, неперервних на кривій К. Оскільки

$$\begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases}$$

Означення: Під криволінійним інтегралом II роду від 2-х функції X та Y, що взяті по кривій K, розуміють інтеграл

$$\int\limits_K X(x;y)dx + Y(x;y)dy = \int\limits_\alpha^\beta [X(x(t);y(t))x'(t) + Y(x(t);y(t))y'(t)]dt \qquad (27)$$

Якщо шлях K задається рівнянням $y = y(x), x \in [a;b]$, то (27) приймає вигляд:

$$\int\limits_K X(x;y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_a^b [X(x;y(x)) + Y(x;y(x))y'(x)]dx$$

Аналогічно, якщо $k \to x = x(y)$, $y \in [c,d]$, то

$$\int\limits_K X(x;y)dx + Y(x;y)dy = \int\limits_c^d [X(x(y);y)x'(y) + Y(x(y),y)]dy$$

Властивості.

1) При зміні шляху інтегрування інтеграл (27) змінює знак $\int\limits_{K_+} = -\int\limits_{K_-}$.

2) Якщо $k = k_1 + k_2$, то

$$\int\limits_K X(x;y)dx + Y(x;y)dy = \int\limits_{K_1} X(x;y)dx + Y(x;y)dy + \int\limits_{K_2} X(x;y)dx + Y(x;y)dy.$$

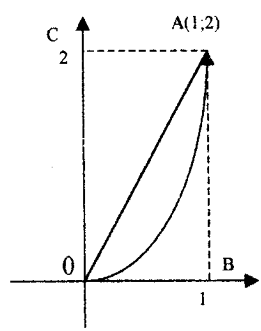
Приклад. Обчислити $I = \int\limits_K ydx - xdy$ вздовж:

1) прямої OA; A(1;2).

2) параболи з вершиною в т. O та OY- віссю симетрії.

3) OBA — ламана.

4) OCA — ламана.



Розв'язування.

1) Рівняння OA: $y = 2x; 0 \le x \le 1; dy = 2dx \Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 2xdx - 2xdx = 0$

2) Рівняння параболи $y = kx^2$, знайдемо k.

$2 = k(-1)^2; k = 2; y = 2x^2 \Rightarrow dy = 4xdx$

$$I_2 = \int\limits_0^1 2x^2dx - 4xdx = -\int\limits_0^1 2x^2dx = -\frac{2}{3}$$

3) $I_3 = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA} = \int\limits_{OB}(ydx - xdy) + \int\limits_{BA}(ydx - xdy)$

<u>OB</u>: $y = 0; x \in [0;1]; y'(x) = 0$

<u>BA</u>: $x = 1; y \in [0;2]; x'(y) = 0$

$$I_3 = \int\limits_0^1 (0 - x \cdot 0)dx + \int\limits_0^2 (y \cdot 0 - 1)dy = -2$$

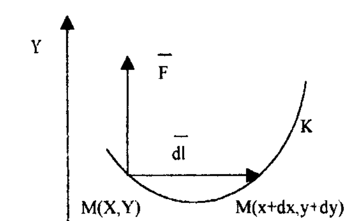
4) $I_4 = \int\limits_{OC} ydx - xdy + \int\limits_{CA} ydx - xdy = \int\limits_0^1 2dx = 2$

<u>OC</u>: $x = 0$; $dx = 0$.

<u>CA</u>: $y = 2$; $dy = 0$.

2.5.3 Фізичний зміст криволінійного інтеграла II роду

Нехай $\overline{F} = \{X(x;y); Y(x;y)\}$ змінна сила, яка неперервно змінюється.



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [\alpha;\beta] \end{cases}$$

Система рівнянь описує шлях K, пройдений точкою.

Оскільки на нескінченно малому шляху dl силу $\overline{F}$ можна вважати постійною, то елементарна робота сили дорівнює

$dA = \bar{F}d\bar{l} = Xdx + Ydy$, інтегруючи його отримаємо:

$$A = \int_K xdx + ydy$$

Означення Криволінійний інтеграл II роду визначає роботу змінної сили інтегрування, проекціями якої на координатні осі є відповідні коефіцієнти при диференціалах змінних.

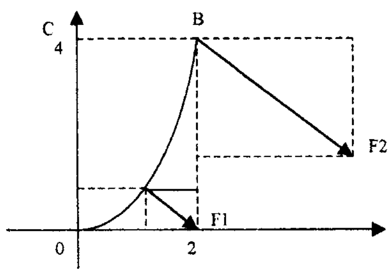
Приклад. Знайти роботу A сили $\bar{F}\{y;-x\}$, точка прикладання якої описує параболу $y = x^2$ $(0 \le x \le 2)$

Розв'язування.

За умовою

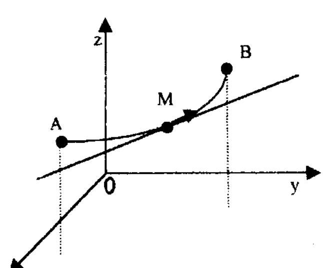
$X = y$, $Y = -x$

$y = x^2$, $dy = 2xdx$



$$A = \int_{AB} Xdx + Ydy = \int_0^2 x^2dx - x \cdot 2xdx = -\frac{8}{3}.$$

2.5.4 Умови незалежності криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування



Нехай AB $\to$ K — напрямлена крива в просторі з початком в A і кінцем
в B, тоді усі дотичні до AB також є напрямленими прямими. Нехай кути, які утворюють дотичні до AB з осями координат — α, β, γ. Вони є функціональними координатами x, y, z точки дотику M. Візьмемо на AB елементарну дугу dl і будемо вважати її прямолінійною. Тобто dl — вектор з проекціями dx, dy, dz напрямлений так, як крива AB $\Rightarrow$

$$dx = \cos\alpha\, dl,\ dy = \cos\beta\, dl,\ dz = \cos\gamma\, dl$$

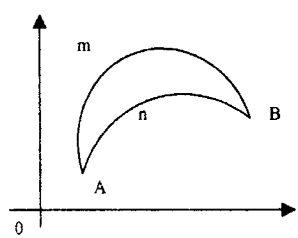
Тоді $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl$ — формула зв'язку криволінійних інтегралів I та II роду.

Означення | Вважається, що інтеграл не залежить від форми кривої якщо інтеграл вздовж будь-якої кривої, що з'єднує ці точки, має одне і теж саме значення.

$$\int\limits_{AmB} X(x;y)dx + Y(x;y)dy = \int\limits_{AnB} Xdx + Ydy$$

Теорема. Для того, шоб криволінійний інтеграл не залежав від форми кривої необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення

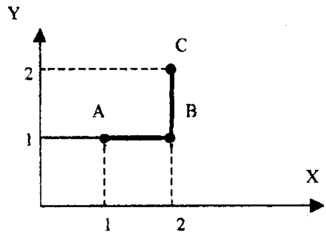
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$



Обчислювання цього інтегралу спрощується, якщо за шлях інтегрування взяти ламану, ланки якої паралельні координатним осям.

Приклад: Обчислити $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} (x + y^2)dx + 2xydy$

Розв'язування.



$$X(x,y) = x + y^2; \quad X_y' = 2y$$

$$Y(x,y) = 2xy; \quad Y_x' = 2y$$

$$\int_{AB}\left(x+y^2\right)dx + 2xydy + \int_{BC}\left(x+y^2\right)dx + 2xydy =$$

$$= \int_1^2 (x+1)dx + \int_1^2 4ydy = 8{,}5$$

AB: y = 1; dy = 0
BC: x = 2; dx = 0

2.5.5 Криволінійний інтеграл вздовж замкненого контура

Замкнений контур маємо, коли початок і кінець кривої збігаються. Для визначення напрямку інтеграла задається додатний напрям (проти руху годинникової стрілки).

У випадку просторового контура додатний напрям задається, коли при русі поверхня залишається зліва.

Позначається такий інтеграл $\oint\limits_L Xdx + Ydy$

Приклад. Обчислити

$$\oint\limits_L \frac{xdy - yx}{x^2 + y^2}; \qquad \text{L:}\begin{cases} x = \alpha\cos t \\ y = \alpha\sin t \\ t \in [0;2\pi] \end{cases}$$

Розв'язування:

$$\oint\limits_L \frac{xdy - yx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha\cos t\cdot\alpha\cos t + \alpha\sin t\cdot\alpha\cos t}{\alpha^2\cos^2 t + \alpha^2\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

2.5.6 Формула Гріна (зв'язок з подвійним інтегралом)

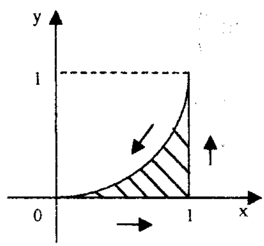
Якщо P та Q неперервно диференційовані функції на фігурі Ф, обмежені гладкою замкненою лінією L, то

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{Ф} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS$$ - формула Гріна

<u>Приклад.</u> Обчислити

$$\int_L ydx - xdy \qquad L: y = x^2; x = 1; y = 0$$

<u>Розв'язування.</u> Побудуємо фігуру Ф, яка обмежена L.



Обчислюємо інтеграл безпосередньо вздовж L:

$$\int_0^1 0 \cdot dx - x \cdot 0 + \int_0^1 0 \cdot y - 1 \cdot dy + \int_1^0 x^2 \cdot dx - x \cdot 2xdx = -y\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^0 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

За формулою Гріна

$$\iint_D (-1-1)dxdy = -2\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = -2\int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

3.1 Означення диференціального рівняння та його властивості

3.1.1 Задачі, які зводять до диференціального рівняння

Означення Рівняння, в яких невідомими є функції та їх похідні, називаються диференціальними рівняннями.

Означення: Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної шуканої функції.

Нехай з деякої висоти на землю скинуте тіло масою m. Потрібно знайти закон зміни швидкості падіння v від часу t, тобто функцію $v = v(t)$.За законом механіки (другий закон Ньютона):

$$m\frac{dv}{dt} = F\ , \tag{1}$$

в нашому випадку:

$$F = mg - F_{опору}\ , \tag{2}$$

При аеродинамічній формі і невеликих швидкостях $F_{опору}$ пропорційна швидкості руху тіла:

$$F_{опору} = pv\ , \tag{3}$$

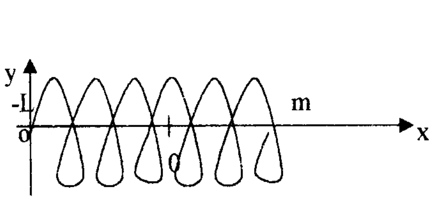
Таким чином:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - pv \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{p}{m}v\ ,$$

якщо зараз знайти v на деякому проміжку [a; b] то отримаємо:

$$\int_a^b dv = \int_a^b \left(g - \frac{p}{m}v\right)dt \rightarrow v = \int_a^b \left(g - \frac{p}{m}v\right)dt \quad - \text{ є закон зміни } v(t).$$

Розглянемо прямолінійний коливальний рух вантажу маси m на пружині з жорсткістю k.



Положення вантажу на прямій лінії характеризується його координатою X, яка змінюється з часом $t \rightarrow x(t) = x$ – функція.

Початок координат розташуємо в положенні нерозтягненої пружини, довжина якої (L), тоді координата кінця (-L), таким чином координата вантажу X буде рівна зміні довжини пружини.

Згідно з законом Гука сила розтягання:

$$F=-kx,$$

(знак "–" тому, що сила направлена проти напрямку розтягання пружини). Оскільки $v=\frac{dx}{dt}$, то рівняння (1) буде мати вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \quad , \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 .$$

3.1.2 Загальний розв'язок диференціального рівняння

Загальний вигляд диференціального рівняння 1-го порядку може бути зображено рівнянням:

$$F(t,x,x')=0 , \qquad (4)$$

де $x=x(t)$ – шукана функція, а $x'=\frac{dx}{dt}$ - її похідна.

Диференціальне рівняння (4) часто має вигляд:

$$x'=f(t,x) \qquad (5)$$

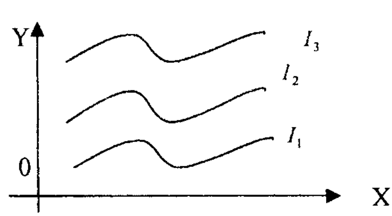
<u>Означення</u> Функція $x=\varphi(t)$, $t\in(a;\ b)$ називається <u>розв'язком диференціального рівняння</u> (5), якщо вона має похідну $\varphi'(t)$ на $(a;\ b)$, і при будь-якому $t\in(a;\ b)$ виконується $\varphi'(t)=f(t,\varphi(t))$.

Якщо f залежить тільки від t, маємо справу з найпростішим видом диференціального рівняння:

$$x'(t)=f(t)$$

Його розв'язок $x(t)=\int f(t)dt=F(t)+c$ має нескінченну множину роз'язків.

<u>Означення</u> Функція $x=\varphi(t,c)$, яка при кожному фіксованому значенні c є розв'язком рівняння (5), називається <u>загальним розв'язком диференціального рівняння</u>



Приклад Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = 5\sin t - \frac{2}{1+t^2}$$

Розв'язування

$$X = \int (5\sin t - \frac{2}{1+t^2})dt = -5\cos t - 2\operatorname{arctg} t + c \quad .$$

3.1.3 Початкові умови та задача Коші

На практиці часто доводиться знаходити розв'язок завдань, які мають поряд з диференціальним рівнянням, яке описує деякий процес, додаткові умови

$$x(t_0) = x_0, \qquad (6)$$

які характеризують даний процес в означених конкретних умовах.

Означення Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння $x'(t) = f(t,x)$, що задовольняє початкові умови (6), називається задачею Коші.

Приклади Знайти розв'язки рівнянь при заданих початкових умовах.

1) $x' = \frac{5}{\cos^2 t}$ (x(0)=3)

$x = \int \frac{5}{\cos^2 t} dt = 5tgt + C$, $3 = 5tg0 + C$ C=3, таким чином: $x = 5tgt + 3$.

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x^3}$; $y(1)=2$; $dy = \frac{x-2}{x^3}dx = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx$

$\int dy = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{2dx}{x^3}$; $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$; $y(1) = 2 = -\frac{1}{1} + 1 + C$; $C = 2$

таким чином: $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2$.

3.2 Методи розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

3.2.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

<u>Означення:</u> Диференціальне рівняння першого порядку $x'(t) = f(t,x)$, у випадку, коли $f(t,x) = f_1(t)\cdot f_2(x)$ приймає вигляд $x'(t) = f_1(t)\cdot f_2(x)$, називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

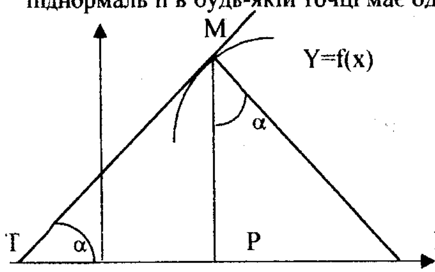
Його розв'язок : $\frac{dx}{dt} = f_1(t)\cdot f_2(x)$; $\int \frac{dx}{f_2(x)} = \int f_1(t)dt$.

Приклади

1) Розв'язати рівняння: $x'(t) = xt^2$.

<u>Розв'язування:</u> $\frac{dx}{dt} = xt^2$; $dx = xt^2dt$; $\int \frac{dx}{x} = \int t^2dt$; $\ln|x| = \frac{t^3}{3} + C$; $x = e^{\frac{t^3}{3}+C}$.

2) Знайти криву, яка проходить через точку Q(-1,4) таку, що піднормаль її в будь-якій точці має одне значення, яке дорівнює 4.



<u>Розв'язування:</u>

Нехай y=f(x) – шукана крива, MT – дотична, до цієї кривої в точці M, MN – нормаль. Піднормаль – PN (проекція відрізка нормалі MN на вісь Ox).

PM=y і $\angle NMP = \angle MTP = \alpha$, $PN = ytg\alpha$, $tg\alpha = y' \Rightarrow PN = y\cdot y'$ за умовою

$y\cdot y' = 4 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = 4$; $ydy = 4dx$; $\frac{y^2}{2} = 4x + C_1$; $y^2 = 8x + C$;

16=-8+C; $C = 24 \Rightarrow y^2 = 8x + 24$ або $y^2 = 8(x+3)$ - парабола; A(-3,0) – вершина параболи.

3) Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і повітря ($T_{пов} = 20^0$). Відомо, що протягом 20 хвилин тіло охололо від 100^0 до 60^0. Знайти закон зміни температури тіла від часу.

<u>Розв'язування:</u> T(t) - ?, за умовою задачі:

$\frac{dT}{dt} = K(T - 20^0)$, де K – коефіцієнт пропорційності.

$\int \frac{dT}{T - 20^0} = \int K dt\, ; ln|T - 20^0| = Kt + ln|C|; \quad \frac{T - 20^0}{C} = e^{kt} \Rightarrow T - 20^\circ = Ce^{kt};$

$T = Ce^{kt} + 20^\circ;;$

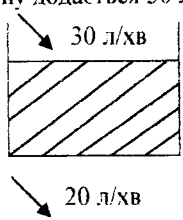
K=?, C=?; T=100^0 коли t=0, T=60^0 коли t=20

$$\begin{cases} 100^0 = 20^0 + C; \\ 60^0 = 20^0 + Ce^{20K}. \end{cases}$$

$C = 80^0$; $e^{20K} = \frac{1}{2}$; $e^K = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$

Таким чином : $T = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t} + 20$.

4) В резервуар, який містить 10 кг солі на 100 л. суміші, кожну хвилину додається 30 л. води і витікає 20 л. суміші.



Знайти яка кількість солі залишиться в резервуарі через t хвилин, якщо суміш миттєво змішується.

Розв'язування:

Нехай x – кількість солі в резервуарі в момент часу t, а x+dx – в t+dt. Оскільки суміш витікає, то кількість солі x зменшуватиметься з часом $\Rightarrow dx < 0$ при $dt > 0$. Об'єм суміші в резервуарі: V=100+30t-20t=100+10t, тому концентрація солі в час t буде $\frac{x}{100 + 10t}$ - зміна кількості солі – dx за нескінченно малий проміжок [t, t+dt] ми отримаємо, якщо об'єм суміші, що витекла за цей час 20dt, помножимо на концентрацію солі:

$$\frac{x}{100 + dt} \cdot 20dt = -dx \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{10 + t} dt; \ \ln|x| = -2\ln|10 + t| + \ln|C|;$$

$$x = \frac{C}{(10 + t)^2}; \ t=0; \ 10 = \frac{C}{100}; \quad C = 1000; \ x=\frac{1000}{(10 + t)^2}.$$

(Цей вираз дає можливість знайти час, який пройшов від початку процесу утворення суміші. За цим принципом обчислюється вік морів та океанів).

3.2.2 Однорідні диференціальні рівняння

Означення Многочлен $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ називають однорідним степені n, якщо всі члени мають один порядок n. Тобто для кожного такого члена $a_{ij}x^i y^j$ маємо $i+j = n$.

Наприклад: $P(x,y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ - многочлен другого степеня.

Означення Функція P(x,y) називається однорідною степені n, якщо при будь-якому числі n має місце тотожність:

$$P(kx, ky) = k^n P(x, y).$$

Розглянемо диференціальне рівняння:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (2)$$

Означення Диференціальне рівняння першого порядку називається однорідним, якщо коефіцієнти P(x,y) і Q(x,y) є однорідні функції – першого степеня.

Однорідні диференціальні рівняння розв'язуються методом підстановки:

$$\frac{y}{x} = z; \;\; y = xz; \;\; y' = x'z + xz' = z + xz'.$$

В загальному випадку рівняння (2) має вигляд $F\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0.$

Приклад Розв'язати диференціальне рівняння (x+y)dx+xdy=0.

Розв'язування:

P=x+y $\Rightarrow$ Q=x – однорідні функції. Поділимо рівняння на x, отримаємо: $\left(1+\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$ зробимо підстановку $\frac{y}{x} = z; dy = zdx + xdz;$

(1+z)dx+zdx+xdz=0; (1+2z)dx=-xdz; $\int\frac{dx}{x} = \int\left(-\frac{dz}{1+2z}\right);$

$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1+2z| + \ln|C|;$ отже $\ln|x| = \ln\frac{C}{\sqrt{1+2z}};$

$$x = \frac{C}{\sqrt{1+2z}} = \frac{C}{\sqrt{1+2\frac{y}{x}}}.$$

3.2.3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення Диференціальне рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$ називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Метод розв'язування: $y = U \cdot V$; $y' = U'V + UV'$ - метод Бернуллі.

Приклад Розв'язати рівняння

1) $y' + xy = 4x$.

Розв'язування:

Зробимо підстановку $y = U \cdot V$, отже

$U'V + UV' + xUV = 4x$; $U'V + U(V' + xV) = 4x$

а) $V' + xV = 0$; $\dfrac{dV}{dx} + xV = 0$; $\dfrac{dV}{V} = -xdx$; $\ln|V| = -\dfrac{x^2}{2}$; $V = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

б) $U'V = 4x$; $\dfrac{dU}{dx} = \dfrac{4x}{e^{-\frac{x^2}{2}}}$; $U = \int 4xe^{\frac{x^2}{2}}dx = 4e^{\frac{x^2}{2}} + C$;

$y = UV = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(4e^{\frac{x^2}{2}} + C\right) = 4 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ - загальний розв'язок.

Розв'яжіть рівняння самостійно.

2) $xy' + 2y = x^2$ Відповідь: $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{c}{x^2}$.

Означення Диференціальне рівняння першого порядку $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ - називається диференціальним рівнянням Бернулі.

Метод розв'язування аналогічний $\Rightarrow$ y=UV.

3.3 Диференціальні рівняння другого порядку

3.3.1 Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (1)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, де C_1, C_2 – const. Геометрично це означає, що не достатньо лише точки M, залежної від C_1, необхідно задати ще і напрямок інтегральної кривої. Цей напрямок задається тангенсом кута нахилу дотичної до кривої в точці M, з додатним напрямком Ox, тобто $y'|_M = tg x$, таким чином маємо початкові умови:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0', \qquad (2)$$

Розв'язком рівняння (1) за умовами (2) є задача Коші.

Такі задачі часто зустрічаються в фізиці. Наприклад, головне рівняння динаміки. Нехай матеріальна точка маси m рухається вздовж Ox під дією змінної сили F, a - прискорення цієї точки, тоді:

$ma = F \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ - диференціальне рівняння, а $x(t_0) = x_0$; $x'(t_0) = V_0$ - початкові умови.

Розглянемо три типа рівняння (1):

1) $y'' = f(x)$ - метод його розв'язку – послідовне інтегрування:

$y' = \int f(x)dx + C$; $y' = F(x) + C$; $y = \int F(x)dx + Cx + C_1$; $y = \varphi(x) + Cx + C_1$;

де C, C_1 = const.

2) $y'' = f(y)$, нехай $y' = P(y)$.

Розглянемо P як функцію від у, тоді: $y'' = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P\frac{dP}{dy}$ таким чином

рівняння має вигляд: $P\frac{dP}{dy} = f(y)$ - рівняння з відокремлюваними змінними.

$\int PdP = \int f(y)dy$; $\frac{P^2}{2} = \int f(y)dy + \frac{C_1}{2}$; $P = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}$ і

$P = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm(x + C_1)$.

3) $y'' = f(x, y)$ аналогічно $y' = P(x)$; $y'' = P'(x)$.

Отже:

1) $y'' = f(x)$ – послідовне інтегрування.

2) $y'' = f(x, y) \Rightarrow y' = P(x); y'' = P'(x)$.

3) $y'' = f(y) \Rightarrow y' = P(y); y'' = P \cdot P'(y)$.

Приклади:

Розв'язати рівняння:

1) $y'' = \frac{(y')^2}{y}$, $y' = P(y)$; $y'' = P \cdot P'(y)$; $PP' = \frac{P^2}{y}$; $P\left(P' - \frac{P}{y}\right) = 0$;

а) $P = 0$; $\frac{dy}{dx} = 0$; $dy = 0dx$; $y = C$.

б) $P' - \frac{P}{y} = 0$; $\frac{dP}{P} = \frac{dy}{y}$; $\ln|P| = \ln|yC_1|$; $P = yC_1$; $\frac{dy}{dx} = yC_1$; $ln|y| = C_1x + C_2$

отже: $y = e^{C_1x + C_2}$.

2) $xy'' = 2x - y'$ - Зробимо підстановку $y' = P(x)$, $xP' = 2x - P$;

$\frac{dP}{dx} = 2 - \frac{P}{x}$; $\frac{P}{x} = z$; $P' = z + z'x$; $z + z'x = 2 - z$; $z'x + 2z = 2$; $\frac{dz}{dx}x = 2 - 2z$;

$\frac{dz}{2 - 2z} = \frac{dx}{x}$; $\frac{1}{2}\ln|1 - z| = \ln|xC|$;

$1-z=(xC)^2;\ z=1-(xC)^2;\ \frac{P}{x}=1-(xC)^2;\ y=\frac{x^2}{2}-\frac{C^2x^4}{4}+C_1;$

3) $y''=2\sin x$ - послідовно інтегруємо:

$\int y'dx=\int 2\sin xdx=-2\cos x+C_1;$

$y=\int(-2\cos x+C_1)dx=-2\cos x+C_1x+C_2$

3.3.2 Лінійні диференціальні однорідні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Означення Рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$, (3)
називається лінійно однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Означення Функції $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ називаються частинними розв'язками рівняння (3), що не містять в собі C_1,C_2

Означення Два розв'язки y_1,y_2 називаються лінійно незалежними, якщо можна підібрати сталі числа a_1,a_2 одночасно не рівні нулю такі, що $a_1y_1+a_2y_2=0$, якщо ці умови не виконуються y_1,y_2 - лінійно залежні.

Теорема: Якщо y_1,y_2 лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння (3), то загальний розв'язок рівняння є лінійна комбінація цих частинних розв'язків:

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \tag{4}$$

де $C_1,C_2=const$.

Доведення: Дійсно оскільки y_1,y_2 - розв'язки (3), то вони задовольняють рівняння

$$\left.\begin{aligned} y_1''+Py_1'+qy_1&=0\\ y_2''+Py_2'+qy_2&=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Підставляючи (4) в ліву частину (5) отримаємо:

$$a_0(C_1y_1+C_2y_2)''+a_1(C_1y_1+C_2y_2)'+a_2(C_1y_1+C_2y_2)''=C_1y_1''+C_2y_2''+$$

$$+PC_1y_1'+PC_2y_2'+qC_1y_1+qC_2y_2=C_1\left[y_1''+Py_1'+qy_2\right]+C_2\left[y_2''+P\right]=$$

$=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0\Rightarrow$ (2) є розв'язком (1).

Зауваження: Якщо y_1,y_2 лінійно залежні, то (4) не може бути загальним

$y_2=ay_1\Rightarrow y=C_1y_1+C_2ay_1$, $y_2=ay_1$ - загальний розв'язок рівняння (3).

Розглянемо методи розв'язання рівняння (3).

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння (3), коли $y = e^{KX}$ k- const, тоді:

$$y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}; \quad k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0. / e^{kx}$$

$$k^2 + Pk + q = 0 \tag{6}$$

– характеристичне рівняння.

Випадок 1.

$$D>0; \quad y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}; y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

Випадок 2.

$$D=0; \quad k_1 = k_2 = -\frac{P}{2}; y_1 = e^{-\frac{P}{2}x}; y_1 = y_2 \Rightarrow y = (C_1 x + C_2) e^{kx}.$$

Випадок 3.

$$D<0; \ k_1 = \alpha + \beta \cdot i; \quad k_2 = \alpha - \beta \cdot i; \quad y_1 = e^{(\alpha+\beta\cdot i)x}; y_2 = e^{(\alpha-\beta\cdot i)x}$$

тоді $y = C_1 e^{(\alpha+\beta\cdot i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta\cdot i)x}$.

Переходячи до тригонометричної форми:

$$y = e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x)$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

Отже:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

1) $D>0$; $y = C_1 e^{k_1 X} + C_2 e^{k_2 X}$;

2) $D=0$; $y = (C_1 x + C_2)e^{kx}$;

3) $D<0$; $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Приклади

Розв'язати:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$ складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 5k + 6 = 0; \quad k_1 = 2, k_1 = 3; \quad y = C_1 e^{2X} + C_2 e^{3X};$$

2) $y'' - y = 0$; $k^2 - 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm 1$; $y = C_1 e^{-X} + C_2 e^{X}$;

3) $y'' - 6y' + 13y = 0$; $k^2 - 6k + 13 = 0$; $k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2i$;

$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;

4) $y'' - 2y' + 1y = 0$; $k^2 - 2k + 1 = 0$; $k_{1,2} = 1$; $y = (C_1 x + C_2)e^{x}$.

3.3.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння ІІ порядку з постійними коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{7}$$

Теорема: Загальний розв'язок рівняння (7) дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння (3) і частинного розв'язку рівняння (7).

<u>Доведення:</u> Нехай $y = C_1y_1 + C_2y_2$ – є загальним розв'язком рівняння (3), а z – частинним розв'язком, що відповідає $f(x)$ рівняння (7) $\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = z'' + pz' + qz = f(x) \Rightarrow (\bar{y}+z)'' + p(\bar{y}+z)' + q(\bar{y}+z) = f(x) \Rightarrow y = \bar{y} + z$ - розв'язок рівняння (7). Теорему доведено.

<u>Випадок1.</u> $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ - квазімногочлен m-го степеня (8)

<u>Теорема:</u> Якщо права частина лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами

має вигляд (8) і α не є коренем характеристичного рівняння (3), то $z = e^{ax}M(x)$, де M(x) – деякий многочлен n-го степеня; якщо α є коренем характеристичного рівняння кратності k, то:

$$z = x^k e^{\alpha x} M(x).$$

<u>Приклад</u> Розв'язати $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

<u>Розв'язування:</u> y=y+z або $y = y_{ч.о.} + y_{ч.н.}$,

де:

$y_{ч.о.}$ - розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$y_{ч.н.}$ - розв'язок, який відповідає правій частині рівняння (7).

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

$k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_{1,2} = 2$, $y_{1,0} = (C_1x + C_2)e^{2x}$

2) $y_{ч.н.} = (Ax + B)e^{2x} \cdot x^2$, оскільки $\kappa_1 = \kappa_2 = 2 = \alpha$

$$y'_{ч.н.} = (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} = (3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x}$$

$$y''_{ч.н.} = (6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx)e^{2x} + (3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2)e^{2x} \cdot 2$$

Підставимо в рівняння:

$$(6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax^2 + 4Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2) -$$

$$(4Ax^2 + 8Bx + 8Ax^3 + 8Bx^2) + 4Ax^3 + 4Bx^2 = x$$

Порівняємо коефіцієнти при змінній:

x^3 : $4A + 4A - 8A = 0$ $\qquad 0 = 0$

x^2 : $12A + 4B - 12A - 8B + 4B = 0$ $\qquad 0 = 0$

x^1 : $6A + 3A + 8B - 8B = 1$; $\qquad A = \frac{1}{6}$

x^0 : $2B = 0$ $\qquad B = 0$

Отже:

$$y_{ч.н.} = \frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y=(C_1x+C_2)e^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}, \quad \text{або} \quad y=\left(C_1x+C_2+\frac{x^3}{6}\right)e^{2x}.$$

<u>Випадок2.</u> $f(x)=e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x),$ (9)

де $P_1(x)$ і $P_2(x)$ – многочлени n-го степеня.

<u>Теорема</u> Якщо права частина лінійного рівняння (7) має вигляд (9) і $z=\alpha+i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв'язок:

$$y_{ч.н.}=e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x),$$

M(x), N(x) – многочлени степеня n і якщо $z=\alpha+i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності k, то

$$y_{ч.н.}=x^k e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x).$$

<u>Приклад</u> Розв'язати рівняння: $y''+5y'+6y=13\sin 3x$

<u>Розв'язування:</u>

$y=y_{ч.о.}+y_{ч.н.}$

1) $y''+5y'+6y=0$

$k^2+5k+6y=0$

$k_1=-2 \quad k_2=-3$

$y_{ч.о.}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$

2) $y_{ч.н.}=A\sin 3x+B\cos 3x$

$y'_{ч.н.}=3A\cos 3x-3B\sin 3x$

$y''_{ч.н.}=-9A\sin 3x-9B\cos 3x$ підставимо в рівняння

$-9A\sin 3x-9\cos 3x+15A\cos 3x-15\sin 3x+6A\sin 3x+6B\cos 3x=13\sin 3x$

$\sin 3x: -9A-15B+6A=13$

$\cos 3x: -9B+15A+6B=0$

$$\begin{cases}-3A-15B=13\\-3B+15A=0\end{cases} \qquad \begin{cases}3B=15A\\3A+15B=-13\end{cases} \qquad \begin{cases}B=5A\\3A+75A=13\end{cases} \qquad \begin{cases}B=5A\\78A=13\end{cases}$$

$$\begin{cases}B=-\dfrac{5}{6}\\A=-\dfrac{13}{78}=-\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

Отже, $y_{ч.н.}=-\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{5}{6}\cos 3x$

Таким чином, загальний розв'язок:

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{5}{6}\cos 3x.$$

<u>Випадок 3.</u> $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, дивись випадок 1 та 2.

<u>Теорема</u> Якщо y_1 – частинний розв'язок рівняння

$y'' + py' + qy = f_1(x)$, а

$y_2 \to y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$, то

$y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння

$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

<u>Приклад</u> Розв'язати $y'' + 2y = 4\cos x + (x^2+1)e^x$.

<u>Розв'язування</u>

$y'' + 2y = 4\cos x + (x^2+1)e^x$ буде мати загальний розв'язок у вигляді $y = y_{ч.о.} + y_{ч.н.}$.

1) $y'' + 2y = 0$; $k^2 + 2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$; $\alpha = 0$; $\beta = \sqrt{2}$;

$y_{ч.о.} = e^{0x}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$.

2) $y_{ч.н.} = A\cos x + B\sin x + (Cx^2 + Dx + E)e^x$;

$y'_{ч.н.} = -A\sin x + B\cos x + (2Cx + D)e^x + (Cx^2 + Dx + E)e^x =$

$= -A\sin x + B\cos x + (2Cx + D + Cx^2 + Dx + E)e^x$;

$y''_{ч.н.} = -A\cos x - B\sin x + (2C + 2Cx + D)e^x + (2Cx + D + Cx^2 + Dx + E)e^x =$

$= -A\cos x - B\sin x + (2C + 4Cx + 2D + Cx^2 + Dx + E)e^x$.

Підставимо в рівняння.

$-A\cos x - B\sin x + (2C + 4Cx + 2D + Cx^2 + Dx + E)e^x +$

$+ 2A\cos x + 2B\sin x + (2Cx^2 + 2Dx + 2E)e^x = 4\cos x + (x^2+1)e^x$;

$\cos x$: $A = 4$.

$\sin x$: $B = 0$.

x^2e^x: $C + 2C = 1; C = \frac{1}{3}$.

xe^x: $4C + D + 2D = 0; 3D = -4C; D = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{4}{9}$.

e^x: $2C + 2D + E + 2E = 1$; $E = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{8}{9}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9-6+8}{9} = \frac{11}{27}$.

Отже, $y_{ч.н.} = 4\cos x + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{11}{27}\right)e^x$; таким чином загальний розв'язок рівняння: $y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + 4\cos x + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{11}{27}\right)e^x$.

3.3.4 Метод Лагранжа (варіації довільної сталої)

Нехай є рівняння (7). Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + py' + qy = 0$. Його розв'язок $y = C_1y_1 + C_2y_2$; припустимо, що $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, тоді:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{10}$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0; \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (11)$$

Розв'язавши її отримаємо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, тобто знайдемо розв'язок рівняння (7) в вигляді (10).

Приклад: Розв'язати $y'' + y = tg^2 x$.

Розв'язування:

$y'' + y = 0$; $k^2 + 1 = 0$; $k = \pm i$;

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; $C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$ тоді

$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Складемо систему, враховуючи $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0; \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tg^2 x. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta C_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tg^2 x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x tg^2 x; \; \Delta C_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tg^2 x \end{vmatrix} = \cos x tg^2 x;$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta C_1'}{\Delta} = -\sin x tg^2 x; \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta C_2'}{\Delta} = \cos x tg^2 x;$$

$$C_1(x) = \int (-\sin x) tg^2 x dx = -\int \frac{\sin x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx =$$

$$= -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \cos x tg^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\Pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2.$$

Отже: $y = \left(C_1 - \frac{1}{\cos x} - \cos x\right)\cos x + \left(\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\Pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2\right)\sin x$ - загальний розв'язок.

3.4 Диференціальні рівняння вищих порядків

Означення Рівняння виду

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

яке має деяку невідому функцію та її похідні до n-го порядку, включно до першого степеня, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Коефіцієнти $P_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n$ і $f(x)$ вважаються неперервними на (a,b). Якщо $f(x) = 0$, то маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку.

<u>Означення</u> Лінійною комбінацією функцій $y_1,y_2,\ldots,y_n$ називається функція $Y=C_1y_2+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, яка утворюється із заданих функцій за допомогою лінійних операцій над ними.

<u>Означення</u> Систему функцій $y_1,y_2,\ldots,y_n$, визначених на (a,b), називають лінійно залежною на цьому проміжку, якщо можна підібрати такі числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$, не рівні водночас і такі, при яких виконується рівність:

$C_1y_2+C_2y_2+\ldots+C_ny_n = 0$ для будь-якого $x \in (a,b)$. (2)

Виконання цієї умови означає, що хоча б одну із заданих функцій можна виразити лінійно через останні, наприклад:

$$C_n \neq 0 \Rightarrow y_n = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1},$$

де

$$\alpha_k = -\frac{C_k}{C_n};\ (k = \overline{1,n-1}).$$

<u>Означення</u> Якщо при $x \in (a,b)$ лінійна комбінація $C_1y_2+C_2y_2+\ldots+C_ny_n=0$ тільки тоді, коли $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$, то система функцій $y_1,y_2,\ldots,y_n$ називається лінійно залежною на (a, b).

Наприклад, $\frac{y_2}{y_1} = -\frac{C_1}{C_2} = k - const$, $y_2=ky_1$ – лінійна залежність.

Лінійну залежність або незалежність системи функцій $y_1,y_2,\ldots,y_n$, n разів диференційованих на проміжку (a, b), можна визначити за допомогою визначника Вронського, або вронськіана:

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

<u>Теорема</u> Якщо функції $y_1,y_2,\ldots,y_n$ лінійно залежні на (a, b), то їх визначник Вронського дорівнює нулю на цьому інтервалі.

<u>Доведення</u> З лінійної залежності y_i випливає, що існують $C_к$ $k = \overline{1,n}$, не всі рівні нулю, такі, що виконується рівність: $C_1y_2+C_2y_2+\ldots+C_ny_n = 0$.

Продиференціюємо його (n-1) раз:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \ldots + C'_n y_n = 0; \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \ldots + C'_n y'_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_1 y_2^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Це однорідна система, яка має нульовий розв'язок, а це означає, що $\Delta \equiv 0$, тобто W(x)=0

<u>Теорема</u> Якщо функції $y_1, .., y_n$ - частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $P_0(x)y^{(n)} + \ldots + P_n(x)y = 0$, з неперервними коефіцієнтами $P_n(x)$ - лінійно незалежними на (a,b) то визначник Вронського $\neq 0$ в жодній точці цього інтервалу.

<u>Доведення</u> Нехай навпаки існує деяка т. $x_0 \in (a,b)$, в якій $W(x) = 0$.

Тоді: $Y(x_0) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0,$

$Y'(x_0) = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' = 0,$

$Y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} = 0.$

Відносно $\overline{C_1 C_n}$ маємо $\Delta = W(x_0) = 0$.

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{vmatrix} = 0,$$ отже система має ненульовий розв'язок

$Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, таким чином це є задача Коші для рівняння з нульовими початковими умовами:

$Y(x_0) = Y'(x_0) = \ldots = 0 \Rightarrow$ задача має нульовий розв'язок і він єдиний. Тоді $Y(x_0) \equiv 0$ означає, що функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно залежні на $(a,$b). Таким чином маємо протиріччя, і припущення що $W(x) = 0$ - невірне, отже $W(x) \neq 0$.

<u>Означення</u> Будь-яка сукупність n-лінійно незалежних на $(a,$b) частинних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійного однорідного диференціального рівняння(л.о.д.р.) n-го порядку називається <u>фундаментальною системою розв'язків</u> цього рівняння.

<u>Теорема</u> Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків л.о.д.р. n-го порядку з неперервними на $(a,$b) коефіцієнтами, то:

$$Y(x) = \sum_{1}^{n} C_k y_k, \quad a<x<b$$

де C_k - const, є загальним розв'язком цього рівняння.

Доведення Раніше ми доводили цю теорему для рівняння n-го порядку. Таким чином нам достатньо довести, що для будь-яких початкових умов $y(x_0)=y_0,\dots,y(x_0)^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$, для будь-якого $x\in(a,b)$, знайдуться $C_k, k=\overline{1,n}$ такі, що $Y(x)$ задовольняє початкові умови.

Продиференціюємо $Y(x)$ n-1 разів і запишемо для x_0:

$$y(x_0)=y_0=C_1y_1+\dots+C_ny_n,$$

$$y'(x_0)=y_0'=C_1y_1'+\dots+C_ny_n',$$

$$y(x_0)^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}+\dots+C_ny_n^{(n-1)},$$

$\Delta\neq 0$ оскільки y_k - лінійно незалежні. Отже, система має єдиний розв'язок і з цього випливає, що існують C_k, при яких $y(x)$ задовольняє початкові умови $\Delta\neq 0$.

Висновок Якщо треба записати загальний розв'язок рівняння (1), достатньо знати будь-яку його фундаментальну систему розв'язків.

Означення: Якщо фундаментальна система розв'язків задовольняє умови одиничної матриці, то вона називається нормальною фундаментальною системою розв'язків.

3.5 Системи лінійних диференціальних рівнянь

Означення: Система диференційних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\end{cases}, \qquad (1)$$

де $x_1,x_2,\dots,x_n$ - невідомі функції від змінної t, називається нормальною системою.

Якщо праві частини цих рівнянь є лінійними функціями відносно $x_1,x_2,\dots,x_n$, то система (1) називається лінійною.

Одним з методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод за яким систему зводять до рівняння n-го порядку, яке має одну невідому функцію.

Приклад

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язування:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2x + 3y;$$

З першого рівняння $y = \dfrac{dx}{dt} - 2x$;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 2x + 3\frac{dx}{dt} - 6x; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} - 4x;$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0;$$

$$k_1 = 4; k_2 = 1; \; x(t) = C_1e^{4t} + C_2e^t;$$

$$y(t) = 4C_1e^{4t} + C_2e^t - 2C_1e^{4t} - 2C_2e^t = 2C_1e^{4t} - C_2e^t.$$

Отже, $\begin{cases} x(t) = C_1e^{4t} + C_2e^t \\ y(t) = 2C_1e^{4t} - C_2e^t \end{cases}$ - загальний розв'язок.

4 Завдання для самостійного розв'язування

4.1 Визначений інтеграл

1. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{(arctg\sqrt{x})}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}\,dx;$ $\int_0^{-1} \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx;$ $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx;$

$\int_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx;$ $\int_1^2 \frac{x+1}{x^4+4x^2}dx;$ $\int_1^2 \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\,dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^4(2x)\,dx;$

2) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}dx;$ $\int_1^5 x\cdot\sqrt{2x-1}\,dx;$ $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx;$

$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x dx;$ $\int_1^2 \frac{x^4-x+1}{x^4+4x^2}dx;$ $\int_0^1 \frac{x}{x^4-9}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^5 x}dx;$

3) $\int_0^2 x^{x^2}\,dx;$ $\int_1^2 e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}dx;$ $\int_0^{0,5} \arccos(x)dx;$

$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx;$ $\int_1^2 \frac{x^2-x+1}{x\cdot(x^2-x+3)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x}{(x+3)\cdot(x^2+2)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2(5x)dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^3 x dx;$

4) $\int_1^e \frac{(1+\ln x)}{x}dx;$ $\int_0^1 (e^x-1)^5\, e^x dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx;$

$\int_0^1 x e^{-x}dx;$ $\int_2^3 \frac{x^5+x}{(x-1)\cdot(x^2++9)}dx;$ $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)\cdot(x^2+x+4)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx;$

5) $\int_0^3 \frac{2\cdot x+1}{\sqrt{4-x}}dx;$ $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx;$ $\int_0^1 (x^2-1)e^{-x}dx\,;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5x+6)\cos(2x)dx;$ $\int_2^3 \frac{1-x}{x^2(x^2+3)}dx;$ $\int_{-1}^0 \frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x^2+5)}dx;$

$\int_0^1 sh^3xdx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctg^4xdx;$

6) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}dx;$ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx;$ $\int_0^1 x^3 e e^{-x^2} dx;$

$\int_1^e \ln^2xdx;$ $\int_{-1}^0 \frac{x}{(x-1)\cdot(x^2+2)}dx;$ $\int_0^1 \frac{(x+2)}{x^4-4}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6xdx;$

7) $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx;$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx;$ $\int_1^e \ln(\ln(x))dx;$

$\int_0^1 x^2 e^{-x}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+27}dx;$ $\int_1^2 \frac{(x^4+2)}{x\cdot(x^2+25)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2x\cos^4xdx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx;$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x^2}dx;$ $\int_1^3 x\sqrt{x+4}\,dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x)\sin 2xdx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos 3xdx;$ $\int_0^2 \frac{(1-2\cdot x)}{(x+4)\cdot(x^2+2)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x}{x^3-8}dx;$

$\int_0^1 ch^4xdx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 3xdx;$

9) $\int_0^1 x\sin(1-x^2)dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg(x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin 4xdx;$

$\int_0^1 (1-x)4^xdx;$ $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}dx;$ $\int_2^3 \frac{x}{x^3-1}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\cos xdx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx;$

10) $\int_0^1 \frac{3^x}{1+3^{2x}}dx;$ $\int_{-1}^{\ln\frac{1}{2}} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx;$ $\int_0^4 (x-4)e^{5x}dx;$

$\int_0^1 (1-x)\cdot\mathrm{arctg}(2x)dx;$ $\int_1^2 \frac{(x^5+x^4-8)}{x^3+4x}dx;$ $\int_1^2 \frac{1}{x^4+x^2}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^3 4x dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(2x)}dx;$

11) $\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{3x+2}}dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx;$ $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx;$

$\int_0^1 \ln^2(x+1)dx;$ $\int_2^3 \frac{1}{1+x^3}dx;$ $\int_2^3 \frac{x^2}{1-x^4}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(3x)dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx;$

12) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(ctg)^{\frac{3}{2}}}{\sin^2 x}dx;$ $\int_0^1 x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}\,dx;$ $\int_0^7 (x-7)\cdot\sin(5x)dx;$

$\int_9^{8+e} \ln(x-8)dx;$ $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)\cdot(x^2+1)}dx;$ $\int_1^2 \frac{x^5+x^4-8}{x^3+4x}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\cos(2x)dx;$ $\int_0^{\frac{1}{3}} \mathrm{sh}^3(3x)dx;$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^{\sin x}\cdot\cos x dx;$ $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \frac{x}{\sin x^2}dx;$ $\int_0^1 x^2\cdot 5^x dx;$

$\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx;$ $\int_0^1 \frac{x}{(x-4)\cdot(x^2+1)}dx;$ $\int_1^2 \frac{5x-3}{x\cdot(x^2+x+4)}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3(4x)}dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos x}dx;$

14) $\int_1^e \frac{1}{x\cdot(4-\ln^2 x)}dx;$ $\int_1^2 \frac{\ln(x^2+x+1)\cdot(2x+1)}{x^2+x+1}dx;$

$\int_{-4}^0 (x+4)\cdot\cos(\pi x)dx;$ $\int_0^{\frac{1}{3}} \arccos(3x)dx;$ $\int_0^1 \frac{1}{x^3+8}dx;$

$\int_0^1 \frac{x-2}{x^2+2x+5}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(2x)}dx;$ $\int_0^1 \mathrm{ch}^3(2x)dx;$

15) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-\ln x}}dx;$ $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x-1}\,dx;$ $\int_1^3 (x^2-4)\cdot\ln x dx;$

$\int_0^{\frac{1}{5}\frac{e}{5}} \ln(1-5x)dx;$ $\quad \int_2^3 \frac{x^4+2x-1}{x^3-1}dx;$ $\quad \int_0^1 \frac{x^3+4}{x^2+x+3}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x}dx;$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^5(3x)dx;$

16) $\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^3}dx;$ $\quad \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\cdot(4-\ln^2 x)}dx;$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)\cos x dx;$

$\int_1^2 (1-x)\cdot 2^{-x}dx;$ $\quad \int_{-2}^0 \frac{3x+4}{(x+3)\cdot(x^2+4)}dx;$ $\quad \int_0^1 \frac{(x^2-5x+1)}{(x+7)\cdot(x^2+4)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^3(2x)}dx;$ $\quad \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(3x)}{\sin^3(3x)}dx;$

17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^{\cos x}\cdot\sin x dx;$ $\quad \int_0^2 x\cdot\sqrt[5]{5+x^2}\,dx;$ $\quad \int_0^1 arctg\sqrt{x}\,dx;$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\sin(3x)\cdot\cos(3x)dx;$ $\quad \int_1^2 \frac{1}{(x+2)\cdot(x^2+1)}dx;$ $\quad \int_1^2 \frac{(x^2+3x+2)}{x\cdot(x^2+3x+4)}dx;$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos x}dx;$ $\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x)dx;$

18) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^3}{\sqrt{3+x^4}}dx;$ $\quad \int_1^e \frac{(\ln^2 3x)}{x}dx;$ $\quad \int_1^2 (x+1)\cdot e^{-3x}dx;$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi+4}{4}} \cos^3(2x-1)dx;$ $\quad \int_{-1}^0 \frac{(2x-1)}{(x-2)(x^2+4)}dx;$ $\quad \int_1^2 \frac{(x-2)}{x(x^3+x+3)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos^2(\omega t+\phi)dt;$ $\quad \int_0^{\pi} (2x+1)\sin 3x dx;$

19) $\int_0^1 4\cdot x\cdot e^{-2x^2}dx;$ $\quad \int_1^e \frac{1}{x\cdot\ln^2 2x}dx;$ $\quad \int_0^1 x\cdot arctg(2x)dx;$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} ctg^3 5x dx;$ $\quad \int_0^1 \frac{x}{x^3-27}dx;$ $\quad \int_2^3 \frac{(x^5-1)}{x^2+x+5}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^6 4x}dx;$ $\quad \int_0^{0,5} (3x-1)\cdot e^{2x}dx;$

20) $\int_0^4 \frac{(x+3)}{\sqrt{1+x}}dx;$ $\quad \int_0^3 \frac{(4+3x)}{\sqrt{1+x}}dx;$ $\quad \int_1^{e^2} \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}}dx;$

$\int_0^{\pi} (1\text{-}3x)\sin x dx;$ $\int_1^3 \frac{(x+3)}{x(x^2+9)}dx;$ $\int_2^3 \frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x^2+4)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x)}{1+\sin(2x)}dx;$ $\int_{0,1\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^6 x}dx;$

21) $\int_2^3 \frac{e^x}{1-e^{2x}}dx;$ $\int_1^e \frac{\sin(\ln(2x))}{x}dx;$ $\int_1^e (1-x^2)\ln x dx;$

$\int_1^e \ln^2(5x)dx;$ $\int_0^1 \frac{(3+x)}{x^2-4x+6}dx$ $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot(x^2+9)}dx;$

$\int_{\frac{-1}{5}}^{\frac{\pi}{5}\cdot 1} \frac{1}{\cos^3(5x+1)}dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4(2x)}{\sin^2 x}dx;$

22) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx;$ $\int_0^{-3} \frac{1}{\sqrt{5-3x}}dx;$ $\int_0^1 (x+4)e^x dx;$

$\int_0^{\pi}(4-3x)\cdot\cos\frac{x}{2}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^3+2}{x^2-x+4}dx;$ $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)\cdot(x+x^3)}dx;$

$\int_0^{\pi} \sin^4(3x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\sin(6x)dx;$

23) $\int_1^e \frac{\cos(\ln\sqrt{x})}{x}dx;$ $\int_{0.25}^1 \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx;$ $\int_0^2 (4-x^2)e^{2x}dx;$

$\int_0^{\frac{1}{2}} (2-x)\cos(\pi x)dx;$ $\int_1^2 \frac{(2x+3)}{x\cdot(4x^2+1)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)\cdot(x^2+1)}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\cos(5x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos(2x)dx;$

24) $\int_0^2 \sqrt{2x+5}\,dx;$ $\int_1^e \frac{\ln(4x)}{x\cdot\ln(8x)}dx;$ $\int_0^1 (3x-2)\sin(\pi x)dx;$

$\int_0^2 (x+3)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}dx;$ $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)\cdot(x^2+x+5)}dx;$ $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2+3x+16}dx;$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\sin(3x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^5(2x)dx;$

25) $\int_0^{-1} \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx;$ $\int_0^1 \frac{4^x}{\sqrt{1+16^x}}dx;$ $\int_1^3 arctg(5\cdot\sqrt{x})\,dx;$

$\int_{-0.5}^{0} \arccos\sqrt{x+1}\,dx$; $\int_{1}^{2}\frac{x^3-1}{x^4+9x^2}$ dx; $\int_{1}^{2}\frac{1+x}{x^3+3x}$ dx;

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ $\sin^2(2\,x)\cos^2(2\,x)$dx; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4(3x)}$ dx;

26) $\int_{0.5}^{1}\frac{arctg(3\cdot\sqrt{x})}{(1+9x)\cdot x}$ dx; $\int_{-1}^{3}(x+1)\cdot\sqrt{2x+3}$ dx; $\int_{0}^{\pi}$ $(x^2+x+1)\cos x$dx;

$\int_{0}^{1}$ $(3-x)\,\mathrm{arctg}x$dx; $\int_{1}^{2}\frac{x^3-x+1}{x^4+x^2}$ dx; $\int_{0}^{1}\frac{x+1}{x^4-16}$ dx;

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}$ $\cos^4(6\,x)$dx; $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\cos^5(2x)}$ dx;

27) $\int_{0}^{2}x\cdot 5^{x^2}$ dx; $\int_{1}^{2}e^{\frac{1}{x^4}}\cdot\frac{1}{x^5}$ dx; $\int_{0}^{e-2}$ $\ln(x+2)$dx;

$\int_{0}^{\frac{1}{2}}$ $\arcsin x$dx; $\int_{1}^{2}\frac{x^2+1}{x\cdot(x^2+x+4)}$ dx; $\int_{0}^{1}\frac{x-1}{(x-3)\cdot(x^2+4)}$ dx;

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}$ $\mathrm{tg}^2(3\,x)$dx; $\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{8}}$ $\mathrm{ctg}^3(4\,x)$dx;

28) $\int_{1}^{e}\frac{1+\ln^2 x}{x}$ dx; $\int_{0}^{1}$ $(e^x+1)^4\,e^x$dx; $\int_{0}^{2}$ $e^{2x}\sin x$dx;

$\int_{0}^{1}\frac{x+1}{e^{2x}}$ dx; $\int_{2}^{3}\frac{x^5+x}{(x-1)\cdot(x^2+9)}$ dx;

$\int_{2}^{3}\frac{x-4}{(x-1)\cdot(x^2+x+4)}$ dx;

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\cos^6(2x)}$ dx; $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\cos x}$ dx;

29) $\int_{0}^{3}\frac{3x-1}{\sqrt{4+3x}}$ dx; $\int_{4}^{9}\frac{x+1}{4+\sqrt{x}}$ dx; $\int_{0}^{1}$ $(x+1)\,e^{3x}$dx;

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ $5x\cos(3\,x)$dx; $\int_{2}^{3}\frac{x+1}{x^2\cdot(x^2+3)}$ dx; $\int_{-1}^{0}\frac{x}{(x+2)\cdot(x^2+4)}$ dx;

$\int_{0}^{1}$ $\mathrm{sh}^3(2\,x)$dx; $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}$ $\mathrm{ctg}^4(3\,x)$dx;

30) $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{(5-x)^3}dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2^x \cos x dx;$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx;$

$\int_1^5 x\cdot\sqrt{1+4\cdot x}\,dx;$ $\int_{-4}^{1}\frac{x^3+2}{x\cdot(x^2+9)}dx;$ $\int_2^3\frac{(3-x)}{x\cdot(x^2+2x+8)}dx;$

$\int_0^{\pi} \sin(7x)\cos(3x)dx;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{1+\cos^2 2x}dx.$

2.Обчислити довжину кривої:

1) $y=\ln x,\quad x\in[\sqrt{3};\sqrt{5}];\quad \rho=2(1-\cos\varphi);\ \varphi\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right].$

2) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\ x\in[1;2];\quad \rho=12e^{\frac{12\varphi}{5}},\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right].$

3) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x;\quad x\in\left[0;\frac{7}{9}\right];\quad \begin{cases}x=4(t-\sin t)\\ y=4(t-\cos t),\end{cases} t\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right].$

4) $y=\ln\frac{5}{2x},\quad x\in[\sqrt{3};\sqrt{8}];\quad \begin{cases}x=8(\cos t+t\sin t)\\ y=8(\sin t-t\cos t)\end{cases};t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$

5) $y=-\ln\cos x,\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right];\quad \rho=5(1-\cos\varphi);\varphi\in\left[-\frac{\pi}{3};0\right].$

6) $y=2+\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2};\ x\in\left[\frac{1}{4};1\right].;\quad \rho=2\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{3}{4}\right].$

7) $y=e^x+6,\quad x\in[\ln\sqrt{8};\ln\sqrt{15}];\quad \rho=2\cos\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right].$

8) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\quad x\in\left[0;\frac{8}{9}\right];\quad \rho=6\cos\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right].$

9) $y=\ln(x^2-1),\quad x\in[2;3];\quad \rho=8\sin\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$

10) $y=\ln(1-x^2),\quad x\in\left[0;\frac{1}{4}\right];\quad \rho=8\cos\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$

11) $y = 2 + chx$, $x\in[0;1];\quad \rho=2\sin\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right].$

12) $y=1-\ln\cos x,\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right];\quad \begin{cases}x=6\cos^2 t\\ y=6\sin^3 t\end{cases},t\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right].$

13) $y=e^{x}+13,\quad x\in\left[\ln\sqrt{15},\ln\sqrt{24}\right];\quad \begin{cases}x=2{,}5(t-\sin t)\\ y=2{,}5(1-\cos t),\end{cases} t\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right].$

14) $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^{2}},\quad x\in\left[0;\frac{1}{4}\right];\quad \begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t),\end{cases} t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

15) $y=2-e^{x},\quad x\in\left[\ln\sqrt{3};\ln\sqrt{8}\right];\quad \rho=1-\sin\varphi,\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right].$

16) $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^{2}},\quad x\in\left[0;\frac{15}{16}\right];\quad \rho=4\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{3}{4}\right].$

17) $y=1-\ln\sin x,\quad x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right];\quad \rho=8\cos\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$

18) $y=1-\ln(x^{2}-1),\quad x\in[3;4];\quad \rho=8(1-\cos\varphi),\varphi\in\left[-\frac{2\pi}{3};0\right].$

19) $y=\sqrt{x-x^{2}}-\arccos\sqrt{x}+5,\quad x\in\left[\frac{1}{9};1\right];\quad \rho=3\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{4}{3}\right].$

20) $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^{2}}+1,\quad x\in\left[0;\frac{9}{16}\right];\quad \rho=2\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{12}{5}\right].$

21) $y=\ln\sin x,\quad x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right];\quad \begin{cases}x=5(t-\sin t)\\ y=5(1-\cos t),\end{cases} 0\le t\le\pi.$

22) $y=\ln 7-\ln x,\quad x\in\left[\sqrt{3};\sqrt{8}\right];\quad \begin{cases}x=4(\cos t+\sin t)\\ y=4(\sin t-t\cos t),\end{cases} 0\le t\le 2.$

23) $y=chx+3,\quad x\in[0;1];\quad \rho=2e^{\frac{4\varphi}{3}},\varphi\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

24) $\rho=4\varphi,\varphi\in\left[0;\frac{3}{4}\right],\ x\in\left[0;\frac{3}{4}\right];\quad \rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

25) $y=\ln\cos x+2,\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right];\quad \begin{cases}x=10\cos^{3}t\\ y=10\sin^{3}t,\end{cases} t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

26) $y=e^{x}+26,\quad x\in\left[\ln\sqrt{8};\ln\sqrt{24}\right];\quad \rho=2(1-\cos\varphi),\varphi\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right].$

27) $y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}+3,\quad x\in[0;2];\quad \rho=3(1+\sin\varphi,\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6};0\right].$

28) $\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^{2}+4},\ x\in\left[0;\frac{1}{2}\right];\quad \begin{cases}x=2\cos^{3}t\\ y=2\sin^{3}t,\end{cases} t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$

29) $y=\left(\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+3}{4}\right),\ x\in[0;2];\ \rho=1-\sin\varphi,\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{6}\right].$

30) $y=e^{x}+e,\ x\in\left[\ln\sqrt{3},\ln\sqrt{15}\right];\ \ \rho=6(1+\sin\varphi),\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right].$

3.Знайти площу фігури, обмеженої лініями (зробити схематичний рисунок)

1) $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y^2=\dfrac{3}{2}x\end{cases};\qquad \rho=2\cos(3\varphi);\qquad \begin{cases}x=(2\sqrt{2})\cos^3(t)\\ y=(2\sqrt{2}\sin^3(t)\end{cases}.$

2) $\begin{cases}y=\dfrac{1}{4}x^2\\ y=3x-\dfrac{1}{2}x^2\end{cases};\qquad \rho=2(1+\cos(\varphi);\qquad \begin{cases}x=a(t-\sin(y)\\ y=a(1-\cos(t))\\ 0\le y\le 2\pi\end{cases}.$

3) $\begin{cases}y=\sin(x)\\ y=2x\\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases};\qquad \rho=4\cos\varphi;\qquad \begin{cases}x=a\cos(t)\\ y=b\sin(t)\end{cases}.$

4) $\begin{matrix}y=e^{x}-1\\ y=e^{2x}-3\end{matrix};\qquad \rho=2\sin(2\varphi);\qquad \begin{cases}x=3t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}.$

5) $\begin{cases}y^2=x^3\\ x+y=1;\\ x=0\end{cases}\qquad \rho=3\cos(3\varphi);\qquad \begin{cases}x=t^2-4\\ y=t^3-4t\end{cases}.$

6) $\begin{cases}y=\dfrac{2}{1+x^2};\\ y=x^2\end{cases}\qquad \rho=2(2+\cos\varphi);\qquad \begin{cases}x=2\cos(t)\\ y=2\sin(t)\\ x=t,y=2t\end{cases}.$

7) $\begin{cases}y=\dfrac{1}{4}x^2\\ y=3x-\dfrac{1}{2}x^2\end{cases};\qquad \rho=2(1+\cos\varphi);\qquad \begin{cases}x=a(t-\sin(t)0\\ y=a(1-\cos(t))\\ 0\le t\le 2\pi\end{cases}.$

8) $\begin{cases}16x^2+25y^2=100\\ y=1,(y\ge 1)\end{cases};\qquad \begin{cases}\rho=4\cos 3\varphi\\ \varphi=0,\varphi=\dfrac{\pi}{6}\end{cases};\qquad \begin{cases}y=t^2-1\\ x=t^3-t\end{cases}.$

9) $\begin{cases} y=\ln(x) \\ y=\ln^2(x) \end{cases}$; $\begin{cases} \rho=3\varphi \\ 0\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=t^3-3t \end{cases}$.

10) $\begin{cases} y=3-e \\ x=0, x=1 \\ y=0 \end{cases}$; $\rho=2(3+\cos\varphi)$; $\begin{cases} x=\sqrt{3}t^2 \\ y=t^3-t \end{cases}$.

11) $\begin{cases} y=\ln(x)+1 \\ y=0, x=1, x=e \end{cases}$; $\rho=a(1+\sin\varphi)$; $\begin{cases} x=t^3-3t^2 \\ y=2t-t^2 \end{cases}$.

12) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=4x^3 \end{cases}$; $\begin{cases} \rho=a\varphi \\ \varphi=0 \\ \varphi=2\pi \end{cases}$; $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^4+t^5 \end{cases}$.

13) $\begin{cases} y=2x \\ y=0, x=0, x=3 \end{cases}$; $\rho=\sin(3\varphi)$; $\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}(t^3-3t) \\ y=2(t^2+1) \end{cases}$.

14) $\begin{cases} y=1-\ln(x) \\ x=1, x=e, y=0 \end{cases}$; $\rho=2-\sin\varphi$; $\begin{cases} x=t^3-t \\ y=t^2+1 \end{cases}$.

15) $\begin{cases} y=\sqrt[3]{x}+2 \\ y=0, x=1 \end{cases}$; $\rho=1-2\sin\varphi$; $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$.

16) $\begin{cases} y=\cos\dfrac{\pi x}{2} \\ x+y=1 \end{cases}$; $\rho^2=4\cos 2\varphi$; $\begin{cases} x=t^3-3t \\ y=t^2-1 \end{cases}$.

17) $\begin{cases} y^2=6x \\ y^2=\dfrac{-4}{3}x+33 \end{cases}$; $\rho=3+2\cos\varphi$; $\begin{cases} x=t^3-3t^2 \\ y=t^2-2t \end{cases}$.

18) $\begin{cases} y=e^x-1 \\ y=e^{2x}-3 \\ x=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \rho=2\sin\varphi \\ \varphi=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y=t^3-3t \\ x=t^2-2 \end{cases}$.

19) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=1 \\ x=2, y=2 \end{cases}$; $\rho=2-3\cos\varphi$; $\begin{cases} x=2t^2 \\ y=-5(t^4+t^5) \end{cases}$

29) $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases};$ $\begin{cases} \rho=\varphi^2 \\ \varphi=0, \varphi=\dfrac{\pi}{3} \end{cases};$ $\begin{cases} x=t-\sin(t) \\ y=1-\cos(t). \\ x=0 \end{cases}$

30) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^2=\dfrac{3}{2}x \end{cases};$ $\begin{cases} \rho=2e^{-\varphi} \\ \varphi=0, \varphi=2\pi \end{cases};$ $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=4t-t^3 \end{cases}.$

4.Знайти об`єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями (зробити схематичний рисунок):

1) $\begin{cases} x=2(t-\sin(t)) \\ y=2(1-\cos(t)) \\ y=0(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}) \end{cases};$ 2) $\begin{cases} x=3 \\ x=0 \\ y=ch(2x) \end{cases};$ 3) $\begin{cases} y^2=x^3 \\ x=4 \\ x=8 \end{cases};$ 4) $\left\{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1\right.;$

5) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}x^2 \\ y=3x-\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases};$ 6) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2 \\ 2x+2y-3=0 \end{cases};$ 7) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\sin^3(t) \\ y=2\sqrt{2}\cos^3(t) \end{cases};$

8) $\begin{cases} y=x^2+6x+8 \\ y=x+4 \end{cases};$ 9) $\begin{cases} y=x(x+2) \\ y=-x \end{cases};$ 10) $\begin{cases} x=1+\sin(t) \\ x=1-\cos(t) \end{cases};$

11) $\begin{cases} x=1-\cos(2t) \\ y=\sin(2t) \end{cases};$ 12) $\begin{cases} y=(x-1)^2 \\ y=(x^2+1)^2 \\ y=0 \end{cases};$ 13) $\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=x \\ x=0 \end{cases};$

14) $\begin{cases} y=x \\ xy=1 \\ y=0 \\ x=2 \end{cases};$ 15) $\begin{cases} y=ch(3x) \\ x=1 \\ y=0 \end{cases};$ 16) $\begin{cases} y=\sqrt{x-1} \\ y=0 \\ x=2 \end{cases};$

17) $\begin{cases} y=x^3-3x \\ y=0 \end{cases};$ 18) $\begin{cases} y=\sqrt{1-x} \\ x=0 \end{cases};$ 19) $\begin{cases} x+y=2 \\ y=x^2 \\ x=0 \end{cases};$

20) $\begin{cases} y=x-x^2 \\ y=0 \end{cases};$ 21) $\begin{cases} y=\arcsin(x) \\ y=0 \\ x=1 \end{cases};$ 22) $\begin{cases} y=arctg(x) \\ y=0 \\ x=1 \end{cases};$

20) $\begin{cases} y = \arccos(x) \\ y = \dfrac{\pi}{2} \\ y = 0, x = 0 \end{cases}$; $\qquad \rho = 3 + 3\cos\varphi$; $\qquad \begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^3 + t \end{cases}$.

21) $\begin{cases} y^2 = x^3 \\ y = 2, y = 0; \\ x = 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \rho = 3 + \cos 4\varphi \\ \rho = 2 - \cos 4\varphi \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} x = a(2\cos(t) - \cos(2t)) \\ y = a(2\sin(t) - \sin(2t)) \end{cases}$.

22) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{1}{\varphi + \dfrac{\pi}{2}} \\ \varphi = 0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} x = 8at^3 \\ y = 3a(2t^2 - t^4) \end{cases}$.

23) $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}$; $\qquad \rho = 1 + \cos\varphi$; $\qquad \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \sqrt{t(1-t)} \end{cases}$.

24) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$; $\qquad \rho = \cos^2\varphi$; $\qquad \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = t\sin(t) \\ y = 0, (0 \le t \le \pi) \end{cases}$.

25) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ 3y = x \end{cases}$; $\qquad \rho = \sin^2\varphi$; $\qquad \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = t\cos(t) \\ y = 0, (0 \le t \le \pi) \end{cases}$.

26) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 8x \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} \rho = 2 - \cos(\varphi) \\ \rho = 1 \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} x = t\sin(t) \\ y = \cos^2(t) \\ x = 0, (0 \le t \le \pi) \end{cases}$.

27) $\begin{cases} xy = 20 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} \rho = 1 + \cos\varphi \\ \varphi = 0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} x = t\sin(t) \\ y = \cos(t) \\ y = 0, (\dfrac{-\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$.

28) $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ x = 3, x = 1 \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} \rho = 2\cos\varphi \\ \varphi = 0, \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} x = t^2 \\ y = t(t-1). \\ y = 0 \end{cases}$

23) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$; 24) $\begin{cases} y = x\cos(x) \\ y = 0 (0 \le x \le \frac{\pi}{2}) \end{cases}$; 25) $\begin{cases} y = tg(x) \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$;

26) $\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; 27) $\begin{cases} y = ctg(x) \\ y = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$; 28) $\begin{cases} y = xe^x \\ y = 0 (0 \le x \le 1) \end{cases}$;

29) $\begin{cases} y = \sqrt{arctgx} \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$; 30) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

5. Знайти об`єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 3x \\ z = 0 \end{cases}$; 2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$; 3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \\ z = 1 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} y^2 + x^2 = z^2 \\ z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} z = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = z \end{cases}$; 9) $\begin{cases} y^2 = x \\ x = y^2 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \\ \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = z^2 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} z = y^2 - y \\ x = 0 \\ x = z \\ x = 1 \end{cases}$; 12) $\begin{cases} z = x^2 - 2x \\ z = y \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} z^2 + x^2 = y^2 \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$; 14) $\begin{cases} x^2 + z^2 = y \\ y = 1 \end{cases}$; 15) $\begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ z = 2x \\ x = 1 \end{cases}$;

16) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ z - x = 1 \end{cases}$; 17) $\begin{cases} z = y^2 \\ z - x = 1 \end{cases}$; 18) $\begin{cases} z = y^3 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$;

19) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \\ z > 0 \end{cases}$; 20) $\begin{cases} z = y^2 \\ z + y = 2 \\ z - x = 2 \end{cases}$; 21) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$;

22) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = -y \\ z = y \\ z > 0 \end{cases}$; 23) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ y = 0 \\ z = 2y \\ z = 1 \end{cases}$; 24) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x = 0 \\ z = 1 \\ y > 0 \end{cases}$;

25) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 2y \\ y > 0 \end{cases}$; 26) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = y \\ z = 0 \end{cases}$; 27) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = y \\ z = -y \\ z = 1 \end{cases}$;

28) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{} = 1$; 29) $\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ z = -x \\ z = 0 \end{cases}$; 30) $\begin{cases} z = y^2 \\ z = x^2 \end{cases}$.

6. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3x}} dx$; $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{3 + \sqrt[3]{x} + \cos(x)} dx$; $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$; $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2^{\frac{x}{3}}}{(2^x - 1)^3} dx$;

2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{\cos^4(2x)} dx$; $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 1)^4} dx$; $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x}{x^3 - 1} dx$; $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{3}}{x^2 + 9} dx$; $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{e^{5x} - 1} dx$; $\displaystyle\int_2^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} dx$; $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{(x+1)^4 (x+3)} dx$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{1-\sqrt[5]{x^2+4}}dx$; $\int\limits_{2}^{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}dx$; $\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}-1}dx$;

5) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\sqrt{x}\cdot e^{\frac{-x}{2}}dx$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2+7x}dx$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{e^{\sqrt{3x}}-1}dx$;

6) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt{x}+x}dx$; $\int\limits_{0}^{e}\frac{1}{x\cdot\ln^4(2x)}dx$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}dx$;

7) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{3x}{(x^2+25)^2}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x-3}{\sqrt[4]{x^3+7+\sin(x)}}dx$; $\int\limits_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x+3}}dx$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^5-2x+\sqrt{x}}dx$;

8) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+4}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}x^4\cdot e^{\frac{-x}{3}}dx$; $\int\limits_{\sqrt{2}}^{3}\frac{x}{x^2-2}dx$; $\int\limits_{2}^{4}\frac{\sin(x)}{(x+7)\cdot\sqrt[3]{x^2-4}}dx$;

9) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\cos^2(x)-x^4+1}dx$; $\int\limits_{0}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}dx$; $\int\limits_{0}^{3}\frac{\cos(x)}{x^4-81}dx$;

10) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{\ln(2x)}}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sin^2(x)+\sqrt[3]{x}+1}dx$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{2^{\frac{x}{3}}}{(2^x-1)^2}dx$;

11) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x^5}dx$; $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x\cdot\sin^2(5x)}dx$; $\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{x^2+x+7}dx$; $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln(4+\sqrt{x})}{\sqrt[4]{3x}}dx$;

12) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+7}dx$; $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^4-3}dx$; $\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos^3(x)}{\sqrt{x^6+\sqrt{x^3}}}dx$;

13) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{1}{x\cdot(x+2)}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}(2x)}{x^4+3}dx$; $\int\limits_{1}^{3}\frac{\ln(x-1)}{x-1}dx$; $\int\limits_{1}^{3}\frac{3x}{\sqrt[5]{x^4-1}}dx$;

14) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{2x}{\sqrt[5]{4+x^2}}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x-1}{x^3+4\cdot\sqrt{x}+3}dx$; $\int\limits_{0}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x\cdot\ln^5(x)}dx$; $\int\limits_{3}^{5}\frac{x^2+4}{(x-3)^4+x-5}dx$;

15) $\int\limits_{0}^{\infty}x\cdot\sin(2x)dx$; $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2+1}}dx$; $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{2}\frac{1}{x\cdot\ln(3x)}dx$; $\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{(2-x)\cdot\sqrt{1-x^4}}dx$;

16) $\int\limits_0^\infty e^{-3x}dx$; $\int\limits_0^\infty \sqrt[3]{\frac{x}{x^5+1}}dx$; $\int\limits_1^e \frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln(3x)}}dx$; $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+2}{\sqrt[6]{x^3}}dx$;

17) $\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-2x^2}dx$; $\int\limits_0^\infty \frac{3x}{(1+x)^2+\sqrt{x^3}}dx$; $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx$; $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+3}{\sqrt[4]{x^5}}dx$;

18) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(x+4)}{x+4}dx$; $\int\limits_0^\infty \frac{1}{5-x^3}dx$; $\int\limits_{-3}^0 \frac{1}{x+3}dx$; $\int\limits_{-1}^0 \frac{\ln(2+\sqrt[4]{x})}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x+1}}dx$;

19) $\int\limits_1^\infty \frac{x^3+3}{x^5+1}dx$; $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^2}dx$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 2x}dx$; $\int\limits_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{x^3}dx$;

20) $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\sqrt[2]{[\ln^3(3x)]}}dx$; $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{5x}-4}dx$; $\int\limits_0^3 \frac{1}{9-x^2}dx$; $\int\limits_1^2 \frac{x}{(x+3)\cdot\sqrt[5]{1-x^4}}dx$;

21) $\int\limits_{e}^\infty \frac{1}{x\cdot\ln(\ln x)}dx$; $\int\limits_2^\infty \frac{x\cdot\mathrm{arctg}(5x)}{\sqrt[3]{3+x^4}}dx$; $\int\limits_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}dx$; $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt[5]{1-x^4}}dx$;

22) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^4+16}dx$; $\int\limits_0^\infty \frac{5x}{6x+x^3}dx$; $\int\limits_2^4 \frac{1}{2-\sqrt{2x}}dx$; $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{5x}}-1}dx$;

23) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$; $\int\limits_0^\infty \frac{x}{\sqrt[3]{x^5+1}}dx$; $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x}}dx$; $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^{3x}-\cos x}dx$;

24) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}dx$; $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x^4+2}}dx$; $\int\limits_{-2}^3 \frac{1}{(1+x)^3}dx$; $\int\limits_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin(2x))}{\sqrt{x}-1}dx$;

25) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}\frac{x}{5}}{x^2+25}dx$; $\int\limits_0^\infty \frac{5x}{\sqrt{x}+x^3-4}dx$; $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx$; $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{5x}}{e^{\sin(x)}-1}dx$;

26) $\int\limits_0^\infty \frac{3x}{1+3^x}dx$; $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^5+\sqrt[3]{x^2}-1}dx$; $\int\limits_0^3 \frac{x^3}{(x^4-81)^3}dx$; $\int\limits_0^1 \frac{1}{x-\sqrt[3]{x^4}}dx$;

27) $\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{4+x^4}dx$; $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{5x^7+1}+x}dx$; $\int\limits_0^2 \frac{1}{4-x^2}dx$; $\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt[5]{x+(3x-1)^3}}dx$;

28) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$; $\int\limits_2^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{2^{x^2}+3}dx$; $\int\limits_0^{2} \frac{1}{x^2-2x}dx$; $\int\limits_{-1}^{0} \frac{3x}{(x+1)^5\cdot(x+3)}dx$;

29) $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x^2+x-3}dx$; $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt[5]{x^2+2}}dx$; $\int\limits_1^{3} \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}}dx$; $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-2x}-x+1}dx$;

30) $\int\limits_2^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$; $\int\limits_0^{\infty} \sqrt{3x}\cdot e^{-3x}dx$; $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^2-3x}dx$; $\int\limits_0^{1} \frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}dx$.

7.Обчислити інтеграл, використовуючи:
а) формулу прямокутників;
б) формулу Сімпсона, розбивши проміжок інтегрування на 10 частин, і знайти похибку, порівнюючи з точним значенням інтеграла.

1) $\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+x^2}dx$; 2) $\int_0^3 \frac{1}{x+2}dx$; 3) $\int_1^5 \frac{1}{x(1+\ln(x))}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx$;

5) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(x^2)dx$; 7) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}dx$; 8) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$;

9) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx$; 10) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot\ln(x)}dx$; 11) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx$; 12) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$;

13) $\int_0^2 \frac{1}{5x+1}dx$; 14) $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$; 15) $\int_0^2 \frac{1}{1+2x}dx$; 16) $\int_0^1 \sqrt{1-3x}dx$;

17) $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$; 18) $\int_2^7 \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx$; 19) $\int_0^2 x^4-3xdx$; 20) $\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+2x^2}dx$;

21) $\int_0^1 \frac{1}{4-2x}dx$; 22) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; 23) $\int_{0.5}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2(3x)}dx$; 24) $\int_1^3 \sqrt{3x-1}dx$;

25) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$; 26) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3x)dx$; 27) $\int_2^7 \sqrt[3]{1+x}dx$; 28) $\int_0^1 5^x dx$;

29) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}}dx$; 30) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

4.2 Кратні та криволінійні інтеграли

4.2.1 Подвійні інтеграли

1. Змінити порядок інтегрування:

1) $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dy$;

2) $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$;

3) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx$;

4) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx$;

5) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f dx$;

6) $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\arcsin y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f dx$;

7) $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f dx$;

8) $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx$;

9) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f dy$;

10) $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy$;

11) $\int_{0} dx \int_{-x^2} f dy + \int dx \int_{\ln x} f dy$;

12) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx$;

13) $\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f dx$;

14) $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy$;

15) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f dx$;

16) $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx$;

17) $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}} f dx$;

18) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^3} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx$;

19) $\int_{0}^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy$;

20) $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx$;

21) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f dx$;

22) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$;

23) $\int_{0}^{\pi/4} dx \int_{0}^{\sin x} f dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\cos x} f dy$;

24) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f dx$;

25) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f dy$;

26) $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f dy$;

27) $\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f dy$;

28) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$;

29) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx$;

30) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{x}} f dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x}} f dy$;

2. Обчислити:

1.а) $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy$; D:x=1,y=x^2,y= $-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy$; D:y=ln2,y=ln3,x=2,x=4;

2.а) $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy$; D:x=1, y=$\sqrt{x}$, y= -x^2;

б) $\iint\limits_D y^2 \sin\frac{xy}{2}dxdy$; D: x=0, y=$\sqrt{\pi}$, y=$\frac{x}{2}$;

3.а) $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy$; D: x-1, y=$\sqrt[3]{x}$, y= -x^3;

б) $\iint\limits_D y\cos xy dxdy$; D: y=π/2, y=π, x=1, x=2;

4.а) $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy$; D: x=1, y=x^3, y= $-\sqrt[3]{x}$;

б) $\iint\limits_D y^2e^{-xy/4}dxdy$; D: x=0, y=2, y=x;

5.а) $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy$; D: x=1, y=x^2, y= $-\sqrt[3]{x}$;

б) $\iint\limits_D y\sin xy dxdy$; D: y=π/2, y=π, x=1, x=2;

6.а) $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy$; D: x=1, y=$\sqrt[3]{x}$, y= -x^2;

б) $\iint y^2 \cos\frac{xy}{2}dxdy$; D: x=0, y=$\sqrt{\pi/2}$, y=x/2;

7.а) $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy$; D: x=1, y=x^3, y= -√x;

б) $\iint 4ye^{2xy}dxdy$; D: y=ln 3, y=ln 4, x=1/2, x=1;

8.а) $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy$; D: x=1, y=$\sqrt{x}$, y= -x^3;

б) $\iint\limits_D 4y^2\sin xy dxdy$; D: x=0, y=$\sqrt{\pi/2}$, y=x;

9.а) $\iint\limits_D (4xy + 3x^2y^2)dxdy$; D: x=1, y=x^2, y= $-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D y\cos 2xy dxdy$; D: y=π/2, y=π, x=1/2, x=1;

10. а) $\iint\limits_D (12xy + 9x^2y^2)dxdy$; D: x=1, y=$\sqrt{x}$, y= -x^2;

б) $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}dxdy$; D: x=0, y=2, y=x/2;

11. а) $\iint\limits_D (8xy+9x^2y^2)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$;

б) $\iint\limits_D 12y\sin 2xydxdy$, D: $y=\pi/4$, $y=\pi/2$, x=2, x=3;

12. а) $\iint\limits_D (24xy+18x^2y^2)dxdy$; D: x=1, $y=x^3$, $y=-\sqrt[3]{x}$;

б) $\iint\limits_D y^2\cos xydxdy$, D: x=0, $y=\sqrt{\pi}$, y=x;

13.а) $\iint\limits_D (12xy+27x^2y^2)dxdy$; D: x=1, $y=x^1$, $y=-\sqrt[3]{x}$;

б) $\iint\limits_D ye^{xy/4}dxdy$; D: y=ln2, y=ln3, x=4, x=8;

14.а) $\iint\limits_D (8xy+18x^2y^2)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^2$;

б) $\iint 4y^2\sin 2xydxdy$; D: x=0, $y=\sqrt{2\pi}$, y=2x;

15.а) $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2)dxdy$; D: x=1, $y=x^3$, $y=-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D 2y\cos 2xydxdy$, D: $y=\pi/4$, $y=\pi/2$, x=1, x=2;

16.а) $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy+9x^2y^2)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^3$;

б) $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy$; D: x=0, y=x, $y=\sqrt{2}$;

17.а) $\iint\limits_D (24xy+48x^3y^3)dxdy$; D: x=1, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D y\sin xydxdy$, D: $y=\pi$, $y=2\pi$, x=1/2 , x=1;

18.а) $\iint\limits_D (6xy+24x^3y^3)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$;

б) $\iint\limits_D y^2\cos 2xydxdy$, D: x=0, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, y=x/2;

19.а) $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$;

б) $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy$; D: y=ln3, y=ln4, x=1/4, x=1/2;

20.а) $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)dxdy$; D: x=1, $y=x^3$, $y=-\sqrt[3]{x}$;

б) $\iint\limits_D 3y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy$; D: x=0, $y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$, $y=\frac{2}{3}x$;

21.а) $\iint (44xy+16x^3y^3)dxdy$; D: x=1, y=y=$x^2$, $y=-\sqrt[3]{x}$;

б) $\iint\limits_D y\cos xy\,dxdy$; D: y=π, y=3π, x=1/2, x=1;

22.а) $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^2$;

б) $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy$; D: x=0, y=1, y=x/2;

23.а) $\iint\limits_D (xy-4^3y^3)dxdy$; D: x=1, $y=x^3$, $y=-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D y\sin 2xy\,dxdy$; D: y=π/2, y=3π/2, x=1/2, x=2;

24.а) $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^3$;

б) $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dxdy$; D: x=0, $y=\sqrt{x}$, y=2x;

25.а) $\iint\limits_D (6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4)dxdy$; D: x=1, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D 6ye^{xy/3}dxdy$; D: y=ln2, y=ln3, x=3, x=6;

26.а) $\iint\limits_D (9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$;

б) $\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy$; D: x=0, $y=\sqrt{\pi}$, y=x;

27.а) $\iint\limits_D (32x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$;

б) $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dxdy$, D: y=π/2, y=3π/2, x=1/2, x=2;

28.а) $\iint\limits_D (9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy$; D: x=1, $y=x^3$, $y=-\sqrt[3]{x}$.;

б) $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}dxdy$; D: x=0, y=4, y=2x;

29.а) $\iint\limits_D (54x^2y^2+150x^4y^4)dxdy$; D: x=1, $y=x^2$, $y=-\sqrt[3]{x}$;

б) $\iint\limits_D 3y\sin xy\,dxdy$; D: $y=\pi/2$, y=3π, x=1, x=3;

30.а) $\iint\limits_D (xy-9x^5y^5)dxdy$; D: x=1, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^2$;

б) $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy$; D: x=0, $y=\sqrt{2\pi}$, y=2x;

3. Знайти площу фігури обмежену даними лініями:

1.а) $y=3/x, y=4e^x, y=3, y=4$; б) $\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x. \end{cases}$

$y^2-2y+x^2=0$

2. а) $x=\sqrt{36-y^2}, x=6-\sqrt{36-y^2}$; б) $\begin{cases} x^2-4x+y^2=0 \\ x^2-8x+y^2=0 \\ y=0,\ y=x/\sqrt{3}. \end{cases}$

3.а) $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2 (y\le 0)$; б) $\begin{cases} y^2-6y+x^2=0 \\ y^2-8y+x^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x. \end{cases}$

4. а) $x=8-y^2,\ x=-2y$; б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-4x+y^2=0 \\ y=0,\ y=x. \end{cases}$

5.а) $y=3/x, y=8e^x, y=3, y=8$; б) $\begin{cases} y^2-8y+x^2=0 \\ y^2-10y+x^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x. \end{cases}$

6. а) $x=\frac{\sqrt{x}}{2},\ y=\frac{1}{2x},\ x=16$; б) $\begin{cases} x^2-4x+y^2=0 \\ x^2-8x+y^2=0 \\ y=0,\ y=x. \end{cases}$

7.а) $x=5-yyy^2=72,\ x=-4y$; б) $\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y^2-6y+x^2=0 \\ y=x,\ x=0. \end{cases}$

8.а) $x^2+y^2=12,\ -\sqrt{6}\,y=x^2 (x\le 0)$; б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-10x+y^2=0 \\ y=0,\ y=\sqrt{3}x. \end{cases}$

9. а) $y=\sqrt{12-x^2}, y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, x=0 (x\ge 0)$; б) $\begin{cases} y^2-6y+x^2=0 \\ y^2-10y+x^2=0 \\ y=x,\ x=0. \end{cases}$

10. а) $x=\frac{3\sqrt{x}}{2}$, $y=\frac{3}{2x}$, $x=9$;

б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-4x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}\,x. \end{cases}$

11. а) $y=\sqrt{24-x^2}, 2\sqrt{3y}=x^2, x=0, (x\geq 0)$;

б) $\begin{cases} y^2-2y+x^2=0 \\ y^2-4y+x^2=0 \\ y=\sqrt{3x},\ x=0. \end{cases}$

12. а) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $(x\geq 0)$;

б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-6x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3x}. \end{cases}$

13. а) $y=20-x^2$, $y=-8x$;

б) $\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y^2-6y+x^2=0 \\ y=\sqrt{3x},\ x=0. \end{cases}$

14. а) $y=\sqrt{18-x^2}, y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$;

б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-8x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3x}. \end{cases}$

15. а) $y=32-x^2$, $y=-4x$;

б) $\begin{cases} y^2-2y+x^2=0 \\ y^2-6y+x^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ x=0. \end{cases}$

16. а) $y=x/2$, $y=2e^x$, $y=2$, $y=5$;

б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-4x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=0. \end{cases}$

17. а) $x^2+y^2=36$, $3\sqrt{2y}=x$;

б) $\begin{cases} y^2-2y+x^2=0 \\ y^2-10y+x^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}\,x. \end{cases}$

18.а) $y=3\sqrt{x}$, $y=3/x$, $x=4$; б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-6x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=0. \end{cases}$

19. а) $y = 6-\sqrt{36-x^2}, y=\sqrt{36-x^2}, x=0, (x\geq 0)$; б) $\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y^2-10y+x^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}\,x. \end{cases}$

20. а) $y=25/4-x^2$, $y=x-5/2$; б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-6x+y^2=0 \\ y=0,\ y=x. \end{cases}$

21. а) $y=\sqrt{x}$, $y=1/x$, $x=16$; б) $\begin{cases} y^2-2y+x^2=0 \\ y^2-4y+x^2=0 \\ y=x,\ x=0. \end{cases}$

22. а) $y=x/2$, $y=7e^x$, $y=2$, $y=5$; б) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-4x+y^2=0 \\ y=0,\ y=\sqrt{3x}. \end{cases}$

23.а) $x=27-y^2$, $x=-5y$; б) $\begin{cases} y^2-6y+x^2=0 \\ y^2-8y+x^2=0 \\ y=x,\ x=0. \end{cases}$

24.а) $x=\sqrt{72-y^2}$, $6x=y^2$, $y=0, (y\geq 0)$; б) $\begin{cases} x^2-4x+y^2=0 \\ x^2-8x+y^2=0 \\ y=0,\ y=\sqrt{3}\,x. \end{cases}$

25. а) $y=\sqrt{6-x^2}, y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$; б) $\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y^2-8y+x^2=0 \\ y=x,\ x=0. \end{cases}$

26. а) $y=\frac{3\sqrt{x}}{2}$, $y=\frac{3}{2x}$, $x=4$; б) $\begin{cases} x^2-4x+y^2=0 \\ x^2-8x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3x}. \end{cases}$

27. а) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $(x \le 0)$; б) $\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y^2-8y+x^2=0 \\ y=\sqrt{3}\,x,\ x=0. \end{cases}$

28. а) $y=1/x$, $y=6e^x$, $y=1$, $y=6$; б) $\begin{cases} x^2-4x+y^2=0 \\ x^2-6x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3x}. \end{cases}$

29. а) $y=3\sqrt{x}$, $y=3/x$, $x=9$; б) $\begin{cases} y^2-2y+x^2=0 \\ y^2-10y+x^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ x=0. \end{cases}$

30. а) $y=11-x^2$, $y=-10x$; б) $\begin{cases} x^2-6x+y^2=0 \\ x^2-10x+y^2=0 \\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3x}. \end{cases}$

4.2.2 Потрійні інтеграли

1.Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$; де область T обмежена поверхнями Гт:

1) $f(x,y,z)=yx+yz$, Гт: $y=x^3$, $y=x$, $z=0$, $z=y^2$.
2) $f(x,y,z)=xz+y^2$, Гт: $y=x^4$, $y=x^2$, $z=0$, $z=y$.
3) $f(x,y,z)=x^2z+y$, Гт: $y=x^3$, $y=x^2$, $z=0$, $z=\sqrt{y}$.
4) $f(x,y,z)=xyz$, Гт: $y=x$, $y=$, $z=0$, $z=y$.
5) $f(x,y,z)=xy^2z$, Гт: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $z=0$, $z=y^2$.
6) $f(x,y,z)=xyz^2$, Гт: $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$, $z=0$, $z=2y$.

7) $f(x,y,z)=x^2+y$, Гт: $y=x^2$, $y=0$, $z=0$, $z=1-y$, $x=1$.

8) $f(x,y,z)=x+y^3$, Гт: $y=1-x^2$, $y=0$, $z=0$, $z=1-y$.

9) $f(x,y,z)=x+z^2$, Гт: $x=0$, $y=0$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $z=0$, $z=y$

10) $f(x,y,z)=x+2y+z$, Гт: $x+y=1$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $z=0$, $z=1$.

11) $f(x,y,z)=xyz+y$, Гт: $y=x^2-x$, $z=0$, $z=y$, $y=0$.

12) $f(x,y,z)=xy$, Гт: $x=y^2$, $x=1$, $z=0$, $z=2x$.

13) $f(x,y,z)=x^2+2y$, Гт: $x=\sqrt{y}$, $x=0$, $y=1$, $z=x^2$, $z=0$.

14) $f(x,y,z)=xy^2$, Гт: $x=y$, $x=0$, $y=1$, $z=y$, $z=0$.

15) $f(x,y,z)=xyz$, Гт: $y=x$, $x=0$, $y=1$, z=, $z=0$.

16) $f(x,y,z)=y\sqrt{x}$, Гт: $x=y^4$, $x(y)=1$, $z=y^2$, $z=0$.

17) $f(x,y,z)=xz+y$, Гт: $y=0$, $y=1$, $z=x^2$, $z=0$, $x=0$, $x=0$, $x=1$.

18) $f(x,y,z)=z+xy$, Гт: $xy=1$, $x=0$, $y=0$, $z=x+y$, $z=0$.

19) $f(x,y,z)=x+y^2$, Гт: $x=y^2-y$, $z=0$, $z=x$, $x=0$.

20) $f(x,y,z)=xyz$, Гт: $z=0$, $z=\sqrt{x}$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

21) $f(x,y,z)=x+z$, Гт: $x=0$, $x=1-y^2$, $z=1-x$, $z=0$.

22) $f(x,y,z)=y+3z$, Гт: $x=1-y^2$, $z=0$, $z=x^2$, $x=0$.

23) $f(x,y,z)=2x+z$, Гт: $x+y=0$, $y=x-1$, $z=0$, $z=1-x^2$, $x=0$.

24) $f(x,y,z)=xz$, Гт: $y=x$, $y=-x$, $z=0$, $x=1$, $z=1-x^2$.

25) $f(x,y,z)=2x-y+z$, Гт: $x=\sqrt{y}$, $z=0$, $z=1-x^2$, $x=1$, $y=0$.

26) $f(x,y,z)=x+yz$, Гт: $x+y=0$, $z=0$, $x=0$, $z=1-x^2$, $y=0$.

27) $f(x,y,z)=2x+1$, Гт: $x=y^2-1$, $x=0$, $z=0$, $z+x=1$.

28) $f(x,y,z)=2y+1$, Гт: $y=x^2$, $x=1$, $z=0$, $z=1-y^2$, $y=0$.

29) $f(x,y,z)=z(1+x)$, Гт: $x=y^2$, $y=x$, $z=0$, $z=x$.

30) $f(x,y,z)=z(2+y)$, Гт: $x=\sqrt{y}$, $y=x$, $z=0$, $z=x$.

2. Переходячи до циліндричних координат, обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$ по області, обмеженій заданими поверхнями Гт:

1) $f(x,y,z)=\sqrt{z^2+y^2}$; Гт : $z^2+y^2=x$, $x=1$.

2) $f(x,y,z)=z^2+y^2$; Гт : $z^2+y^2=x$, $z^2+y^2=1$, $x=0$.

3) $f(x,y,z)=zy$; Гт : $z^2+y^2=1$, $x^2=z^2+y^2$, $x=0$.

4) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$; Гт : $x^2=z^2+y^2$, $x=1$.

5) $f(x,y,z)=(z^2+y^2)^{2/3}$; Гт : $z+y^2=x$, $x^2=z^2+y^2$.

6) $f(x,y,z)=x\sqrt{z^2+y^2}$; Гт : $(z-1)^2+y^2=1$, $x=0$, $x=1$.

7) $f(x,y,z)=x(z^2+y^2)$; Гт : $z^2+y^2=x$, $z=0$, $y\geq 0$, $x=1$.

8) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; Гт : $z^2+y^2=1$, $z^2+y^2=4$, $x=0$, $x=1$.

9) $f(x,y,z)=xyz$; Гт : x=, $x=1$.

10) $f(x,y,z)=x$; Гт : $x=1-x^2-y^2$, $x=0$.

11) $f(x,y,z)=z^2+y^2$; Гт : $z^2+y^2=1$, $x=0$, $x=z^2$.

12) f(x,y,z)=$\sqrt{z^2+y^2}$; Гт : $z^2+y^2=1$, $x=0$, $x=y^2$.

13) f(x,y,z)=zy; Гт : $z^2+y^2=9$, $x=0$, $x=y$.

14) f(x,y,z)=$\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2}}$; Гт: $z^2+y^2=1, z^2+y^2=9, y=0, y=z (y>0), x=0, x=1$.

15) f(x,y,z)=zy; Гт : $z^2+y^2=1$, $z=\sqrt{2}$, $x=0$, $x=1$ ($z=\sqrt{2}$).

16) f(x,y,z)=xy; Гт : $z+y^2=1$, $y=\sqrt{2}$, $x=0$, $x=1$ ($y=\sqrt{2}$).

17) f(x,y,z)=$\sqrt{x^2+y^2}$; Гт : $x=\sqrt{z^2+y^2}$, $x=0$.

18) f(x,y,z)= z^2+y^2; Гт : $z^2+(y-1)^2=1, z=0, x=0, x=y^2$.

19) f(x,y,z)=yz; Гт : $z^2+y^2=x$, $z=0$, $y=0$, $x=1$ ($x>0$).

20) f(x,y,z)=xz; Гт : $x=\sqrt{z^2+y^2}$, $x=1$.

21) f(x,y,z)=$\sqrt{x^2+z^2}$; Гт : $(x-1)^2+z^2=1$, $z=0$, $y=0$, $y=1$ ($z>0$).

22) f(x,y,z)=xy; Гт : $x^2+z^2=4, z=0 (z>0), y=0, y=1$.

23) f(x,y,z)=x^2+y^2; Гт : $x^2+z^2=1, y=0, y=1$.

24) f(x,y,z)=xz; Гт : $x^2+z^2=1, y=0, y=z$.

25) f(x,y,z)=$\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}$; Гт : $x^2+z^2=1, x^2+z^2=4, y=0, y=2$.

26) f(x,y,z)=$(x^2+z^2)^{\frac{2}{3}}$; Гт : $x^2+z^2=1, y=0, y=z$.

27) f(x,y,z)=$\sqrt{x^2+y^2}$; Гт : $x^2+y^2=y$, $y=1$.

28) f(x,y,z)=x^2+z^2; Гт : $x^2+z^2=y, x^2+z^2=1, y=0$.

29) f(x,y,z)=$(x^2+z^2)^{\frac{2}{3}}$; Гт : $x^2+z^2=y, x^2+z^2=y^2$.

30) f(x,y,z)=xz; Гт : $x^2+z^2=1, x^2+z^2=y^2, y=0, (y>1)$.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_T f(x,y,z)dxdydz$ переходячи до сферичних координат по області, обмеженій заданими поверхнями Гт:

1) f(x,y,z)=$x^2+y^2+z^2$; Гт: $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$, $x=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.

2) f(x,y,z)=$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$; Гт: $x=\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x=\sqrt{3(x^2+z^2)}$.

3) f(x,y,z)=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; Гт: $x=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}, x=y=0$.

4) f(x,y,z)=$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$; Гт: $x=-\sqrt{4-z^2-y^2}$, $x=-\sqrt{y^2+z^2}$.

5) f(x,y,z)=$x^2+y^2+z^2$; Гт: $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$, $y=-\sqrt{x^2+z^2}$.

6) f(x,y,z)=$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; Гт: $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

7) f(x,y,z)=$(x^2+y^2+z^2)^{-1}$; Гт: $x=-\sqrt{4-y^2-z^2}$, $x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$.

8) f(x,y,z)=$(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$; Гт: $y=-\sqrt{9-x^2-z^2}$, $y=-\sqrt{4-x^2-z^2}$.

9) f(x,y,z)=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; Гт: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

10) f(x,y,z)=$x^2+y^2+z^2$; Гт: $x^2+y^2+(z-1)^2=1, z^2=x^2+y^2, z^2>x^2+y^2$.

11) f(x,y,z)=x^2+y^2; Гт: $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2=\frac{1}{2}, x^2+y^2\le\frac{1}{2}, z=0 (z>0)$.

12) f(x,y,z)=$z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; Гт: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$.

13) f(x,y,z)=$z(x^2+y^2+z^2)$; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=0$.

14) f(x,y,z)=$z(x^2+y^2+z^2)$; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

15) f(x,y,z)=x; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=0, x=0, y=0$..

16) f(x,y,z)=y; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=0, x=0, y=0$..

17) f(x,y,z)=xy; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=0, x=0, y=0$..

18) f(x,y,z)=xyz; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=0, x=0, y=0$..

19) f(x,y,z)=xyz; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}, x=0, y=0$.

20) f(x,y,z)=xyz; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}, x=0, y=0$.

21) f(x,y,z)=x; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{4-x^2-y^2}, x=0, y=0$.

22) f(x,y,z)=y; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{4-x^2-y^2}, x=0, y=0$.

23) f(x,y,z)=xy; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{4-x^2-y^2}, x=0, y=0$.

24) f(x,y,z)=z^2; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

25) f(x,y,z)=xyz; Гт: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}, x=0, y=0$.

26) f(x,y,z)=x^2; Гт: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=0$.

27) f(x,y,z)=y^2; Гт: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

28) f(x,y,z)=x^2; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}$.

29) f(x,y,z)=y^2; Гт: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=0$.

30) f(x,y,z)= z^2; Гт: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=9$.

4.Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

1) $x+y=1$, $z=(x+y+1)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2) $x+y=1$, $z=(x+y)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3) $y=1-x^2$, $y=x^2-1$, $z=x^2$, $z=0$.

4) $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=y$.

5) $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{\frac{y}{2}}$, $y=1$, $z=y^2$, $z=0$.

6) $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{\frac{y}{2}}$, $y=1-y$, $z=0$, $z=y$.

7) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=1-x^2$, $x=1$.

8) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=x$, $z=0$.

9) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=y^2$, $z=0$.

10) $y=(x-1)^2$, $y=1-x^2$, $z=1-x$, $z=0$.

11) $z=1-x^2$, $z=y$, $z=-y$, $y=0$, $y=1$.

12) $z=1-x^2$, $z=\sqrt{y}$, $z=-\sqrt{y}$.

13) $z=1-x^2$, $z=y^2$, $y=0$.

14) $z=1-y^2$, $z=\sqrt{x}$, $x=0$.

15) $y=x^2$, $y=2-x$, $z=x^2$, $z=0$.

16) $x=\sqrt{y}$, y=2-x, z= x^2, y=0, z=0.

17) y=x, y=2-x, z=$\sqrt{x}$, y=0, z=0.

18) y=2x, y=2, z= y^2, x=0, z=0.

19) y=1+x,y=0, z=$\sqrt{y}$,z=0,x=1, x=0.

20) x+y=1, z=$\sqrt{x+y}$, x=0, y=0, z=0.

21) y=x, y=2x, y=1, z=$\sqrt{y}$, z=0.

22) y=x, y=3x, y=1, z= y^2, z=0.

23) y=x, y=$\frac{x}{2}$, y=1, z=1- y^2, z=0.

24) y=x, y=$\frac{x}{2}$, y= x^2, y=1, z=0.

25) y=2x, y= x^2, y=1, z= x^2, z=0.

26) y=2x, y=$\sqrt{x}$, y=1, z=$\sqrt{y}$, z=0.

27) y=2x-x^2, y=2$\sqrt{x}$, y=1, z=y^2, z=0.

28) y= x^2, y=2x - x^2, z=1 - x^2, z=0.

29) y=x^3, y= 2x - x^2, z=y^2, z=0.

30) y=$\sqrt{x}$, y= 2x - x^2, z=$\sqrt{x}$, z=0.

4.2.3 Криволінійні інтеграли

1.Обчислити криволінійний інтеграл: $\int\limits_{L_{AB}} X(x,y)dx+Y(x,y)dy$, де крива АВ задана рівнянням Y=f(x) , точка А(x_1,y_1), точка В(x_2,y_2):

1) $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, y=$x^2$, A(-1;1), B(1;1).

2) $\int\limits_L (x^2y-3x)dx+(y^2x-2y)dy$, y=3x+1, A(0;1), B(1;4).

3) $\int\limits_L (xy^2-2y)dx+(x^2y-3x)dy$, y=2-x, A(0;2), B(1;1).

4) $\int\limits_L \frac{y}{x}dx+\frac{x\ln x}{y}dy$, y=lnx, A(e;1), B($e^2$;2).

5) $\int\limits_L (x^2-y)dx-(x-y)dy$, y=$x^2$+x, A(1;2), B(2;6).

6) $\int\limits_L 2xe^y dx+e^x dy$, y=$x^2$, A(0;0), B(1;1).

7) $\int\limits_L xydx+ye^{-x}dy$, y=$e^x$, A(0;1), B(1;e).

8) $\int\limits_L (x^2-y)dx+(x+y)dy$, y=2x-1, A(0;-1), B(1;1).

9) $\int\limits_L y^2dx+\sin x dy$, y=sinx, A(0;0), B($\frac{\pi}{2}$;1).

10) $\int\limits_L (x+y)dx+(y-x)dy,$ $y=x^3$, A(1;1), B(2;8).

11) $\int\limits_L (xy-x^2)dx+xdy,$ $y=2x^2$, A(0;0), B(1;2).

12) $\int\limits_L \frac{y}{x}dx+xdy,$ $y=\ln x$, A(1;0), B(2;1).

13) $\int\limits_L y^2dx-\frac{\cos x}{2}dy,$ $y=\cos x$, A(0;1), B($\frac{\pi}{2}$;0).

14) $\int\limits_L (2xy-x^2)dx+(4y^2-xy)dy,$ $y=\frac{x^2}{2}$, A(0;0), B(1;$\frac{1}{2}$).

15) $\int\limits_L \frac{x^2}{y^2}dx-y^2xdy,$ $y=\sqrt{x}$, A(1;1), B(4;2).

16) $\int\limits_L ydx+\frac{1}{\ln^2 x}dy,$ $y=\ln x$, A(1;0), B(e;1).

17) $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(xy+x^2)dy,$ $y=3x-2$, A(0;-2), B(1;1).

18) $\int\limits_L y^2dx+(2xy-y^2e^{-x})dy,$ $y=e^x$, A(0;1), B(1;e).

19) $\int\limits_L \frac{y^2+1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy,$ $y=2x$, A(1;2), B(2;4).

20) $\int\limits_L (x^2+y)dx+(y-x^2)dy,$ $y=3x^2$, A(0;0), B(1;3).

21) $\int\limits_L (y^2-\cos^2 x)dx+\frac{1}{\cos x}dy,$ $y=\sin x$, A($\frac{\pi}{4}$;$\frac{\sqrt{2}}{2}$), B($\frac{\pi}{3}$;$\frac{\sqrt{3}}{3}$).

22) $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy,$ $y^2=x$, A(0;0), B(1;1).

23) $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+xydy,$ $y=\frac{3x-1}{2}$, A(1;1), B(3;4).

24) $\int\limits_l (x-y)^2dx-(x+y)^2dy,$ $y=2-x$, A(0;2), B(2;0).

25) $\int\limits_L ydx-(x^2+y)dy,$ $y=2x-x^2$, A(0;0), B(2;0).

26) $\int\limits_l x^2ydx+x^3dy,$ $y^2=x$, A(0;0), B(1;1).

27) $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx+x^2dy,$ $y=\ln x$, A(1;0), B(e;1).

28) $\int\limits_L (y-x)dx-(x+y)dy,$ $y=\frac{2-x}{3}$, A(-1;1), B(2;0).

29) $\int\limits_L x^2ydx + x^3dy,$ y=x^2, A(1;1), B(2;4).

30) $\int\limits_L (\cos^2 2x - y^2)dx - \sin 2xdy,$ y=sin2x, A($\frac{\pi}{4}$;1), B($\frac{\pi}{2}$;0).

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{LABC} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$, де ABC ламана, яка з'єднує точки A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3):

1) $\int\limits_L (x - 2y)dx + (y - 2x)dy,$ A(1;1), B(3;-1), C(3;-2).

2) $\int\limits_L 3xydx + (y^2 - 2x^2)dy,$ A(0;-1), B(2;1), C(3;1).

3) $\int\limits_L (5x - y)dx + (3y - x)dy,$ A(0;-1), B(1;0), C(1;2).

4) $\int\limits_L \frac{x-2}{y+2}dx + \frac{y+1}{x}dy,$ A(-3;2), B(-2;2), C(-1;1).

5) $\int\limits_L (3x^2 - xy)dx + (xy - 3y^2)dy,$ A(-2;0), B(-1;0), C(0;1).

6) $\int\limits_L (2x + y)dx + (y - 2x)dy,$ A(-2;0), B(-1;0), C(0;2).

7) $\int\limits_L \frac{x-1}{y+2}dx - (x+1)dy,$ A(-2;2), B(-1;2), C(0;0).

8) $\int\limits_L (2x^2y - xy^2)dx + (y^2 - x^3)dy,$ A(1;1), B(2;1), C(2;3).

9) $\int\limits_L (x^2y - 4x^3)dx + 5xy^2dy,$ A(-2;0), B(0;0), C(1;1).

10) $\int\limits_L (6x + y)dx + (x - 2y)dy,$ A(-1;0), B(0;2), C(1;2).

11) $\int\limits_L 3xydx + (x^2 + y^2)dy,$ A(-1;1), B(0;2), C(2;2).

12) $\int\limits_L (x^2 + 2xy)dx + 3x^2dy,$ A(-1;2), B(0;1), C(2;1).

13) $\int\limits_L \frac{2}{x+y}dx + \frac{y}{x}dy,$ A(1;1), B(2;2), C(2;0).

14) $\int\limits_L (4x - y)dx + (5y - x)dy,$ A(-1;1), B(0;1), C(1;2).

15) $\int\limits_L (2xy^2 - 3x^3)dx + (4x^2y - y^3)dy,$ A(-1;1), B(1;1), C(1;0).

16) $\int\limits_L (5x^2y - 2xy^2)dx + 3xy^2dy,$ A(-1;1), B(1;1), C(1;0).

17) $\int\limits_L (6xy^2+3x^2)dx+(y^3-2xy^2)dy,$ A(1;2), B(1;0), C(3;0).

18) $\int\limits_L (x^2y+2y^3)dx+(x^3-3y^3)dy,$ A(-1;1), B(0;0), C(0;2).

19) $\int\limits_L (6x^2y-y^3)dx-\frac{1}{2}xy^2dy,$ A(1;1), B(2;1), C(2;3).

20) $\int\limits_L (4x^2-3y)dx+(y^2-2x)dy,$ A(0;0), B(1;-1), C(1;1).

21) $\int\limits_L (2x^3-4y)dx+(3x+y)dy,$ A(0;2), B(1;0), C(1;-1).

22) $\int\limits_L \frac{y}{x+y}dx+(x-y)dy,$ A(0;3), B(1;2), C(1;1).

23) $\int\limits_L (2xy^2-x^3)dx+3x^2ydy,$ A(1;2), B(1;1), C(3;1).

24) $\int\limits_L \frac{1}{1+y^2}dx+\frac{y+1}{x+1}dy,$ A(0;0), B(1;1), C(1;-1).

25) $\int\limits_L (4xy-x^2)dx+(3xy-y^2)dy,$ A(1;2), B(1;3), C(2;3).

26) $\int\limits_L (2x+3y)dx+(3x-2y)dy,$ A(0;2), B(1;1), C(1;3).

27) $\int\limits_L (3x-y)dx+(2y-3x)dy,$ A(0;0), B(1;2), C(1;1).

28) $\int\limits_L \frac{2x-1}{y}dx+\frac{y+3}{x+1}dy,$ A(1;1), B(2;3), C(3;3).

29) $\int\limits_L (x^2+xy)dx+(xy-y^3)dy,$ A(0;0), B(1;2), C(2;2).

30) $\int\limits_L (6x-y)dx+(2y-4x)dy,$ A(0;0), B(2;1), C(2;2).

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L X(x,y)dx+Y(x,y)dy$ уздовж замкненого контуру L в додатному напрямку (тобто проти руху годинникової стрілки):

1) $\oint\limits_L (x+2y)dx+(8x-4y)dy,$ L: $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

2) $\oint\limits_L (2x-y)dx+(x+2y)dy,$ L: $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$

3) $\oint\limits_L xdy-ydx,$ L: $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

4) $\oint\limits_L (2x+3y)dx+(x-2y)dy,$ L: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$

5) $\oint\limits_L (3x-y)dx+(x+y)dy,$ L: $x^2+y^2=9$

6) $\oint\limits_L (2x+y)dx+(3x-2y)dy,$ L: $x^2+y^2=16$

7) $\oint\limits_L \frac{y}{3}dx-\frac{x}{4}dy,$ L: $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \\ y=6(1-\cos t) \\ y=0 \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

8) $\oint\limits_L (\frac{x}{3}+y+6)dx+(\frac{y}{2}-x)dy,$ L: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

9) $\oint\limits_L (\frac{4x-y}{3})dx+(\frac{x}{3}+\frac{y}{8})dy,$ L: $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=8\sin t \end{cases}$;

10) $\oint\limits_L (3x+y)dx+(y-2x)dy,$ L: $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

11) $\oint\limits_L \frac{y}{3}dx-\frac{2x}{3}dy,$ L: $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \\ y=0 \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

12) $\oint\limits_L (y^3+2)dx-2x^3dy,$ L: $x^2+y^2=4$

13) $\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy,$ L: $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}$

14) $\oint\limits_L \frac{y}{2}dx-2xdy,$ L: $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \\ y=0 \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

15) $\oint\limits_L (y^2-1)dx+xy^2)dy,$ L: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

16) $\oint\limits_L (4x-y)dx+(x+2y)dy,$ L: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

17) $\oint\limits_L (x+2)dx+(1-y)dy,$ L: $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$

18) $\oint\limits_L \frac{x}{8}dx-\frac{y}{4}dy,$ L: $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=4\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$

19) $\oint\limits_L (x-2y)dx+(x+3y)dy,$ L: $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

20) $\oint\limits_L \frac{x}{16}dy-\frac{y}{8}dx,$ L: $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}$

21) $\oint\limits_L (2x-y)dx+(x+y)dy,$ L: $(x-1)^2+(y-1)^2=9$

22) $\oint\limits_L (2x-y)dx+(x+2y+1)dy,$ L: $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$

23) $\oint\limits_L a(x-a)dy-y^2dx,$ L: $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \\ y=0 \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

24) $\oint\limits_L \frac{y}{8}dx-\frac{x}{9}dy,$ L: $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$

25) $\oint\limits_L (3x-y)dx+(x+3y)dy,$ L: $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$

26) $\oint\limits_L 2ydx-4xdy,$ L: $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \\ y=0 \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

27) $\oint\limits_L (2x-y)dx+(x+3y)dy,$ L: $x^2+y^2=4$

28) $\oint\limits_L (3-\frac{y}{2})dx+(\frac{x}{2}+3)dy,$ L: $\begin{cases} x=2(\sin t-\sin 2t) \\ y=2(\cos t-\cos 2t) \end{cases}$

29) $\oint\limits_L (3x+y)dx+(2x-y)dy,$ L: $x^2+y^2=16$

30) $\oint\limits_L (4x-y)dx+(x+y)dy,$ L: $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

4. Перевірити незалежність від форми кривої інтегрування й обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L X(x,y)dx+Y(x,y)dy$ від точки A(x_1, y_1) до точки B(x_2, y_2) (по відрізку прямої, що з'єднує ці точки):

1) $\int\limits_L (3xy^2-x^2y)dx+(3x^2y-\frac{1}{3}x^3)dy,$ A(0;0), B(1;3).

2) $\int\limits_L (3xy^2-2x)dx+(3x^2y-y^2)dy,$ A(0;0), B(1;-1).

3) $\int\limits_L (y-\frac{x}{y}-\frac{2y}{x^3})dx+(x+\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{2y^2})dy,$ A(1;1/2), B(3;3/2).

4) $\int\limits_L (y^2-5xy)dx+(2xy-\frac{5}{2}x^2)dy,$ A(0;2), B(1;3).

5) $\int\limits_L (3y-2x+5)dx+(3x+4y-1)dy,$ A(0;3), B(1;2).

6) $\int\limits_L (3y+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2})dx+(3x-\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{x})dy,$ A(1;1), B(2;2).

7) $\int_L (x+3xy^2-2)dx+(2y+3x^2y+1)dy,$ A(1;0), B(2;-1).

8) $\int_L (7y-3x)dx+(7x-2y)dy,$ A(0;3), B(1;4).

9) $\int_L (2xy^2+3x)dx+(2x^2y-y)dy,$ A(0;1), B(1;-1).

10) $\int_L (4xy^2+2xy-3y)dx+(4x^2y-x^2-3x)dy,$ A(0;0), B(1;-1).

11) $\int_L (y+\frac{2y^2}{x^2}-\frac{x}{y^2})dx+(x-\frac{4y}{x}+\frac{x^2}{y^3})dy,$ A(1;1), B(2;2).

12) $\int_L (xy^2-x^3-3)dx+(x^2y-\frac{y^3}{9}-1)dy,$ A(0;0), B(1;-3).

13) $\int_L (4x+y-2)dx+(7x-3y+1)dy,$ A(0;3), B(1;1).

14) $\int_L (4x^3y+3xy^2)dx+(x^4+3x^2y)dy,$ A(0;0), B(1;-2).

15) $\int_L (y^3-2xy)dx+(3xy^2-x^2)dy,$ A(0;2), B(2;4).

16) $\int_L (3x^2+y^2)dx+(2xy-4y^2)dy,$ A(2;-1), B(1;-2).

17) $\int_L (3y-\frac{1}{x^3}-\frac{y^2}{x^2})dx+(3x+\frac{2y}{x}-\frac{1}{y^2})dy,$ A(1/2;1), B(1;2).

18) $\int_L (2x+6y)dx+(6x-y)dy,$ A(0;1), B(1;3).

19) $\int_L (y+5)dx+(x-2y)dy,$ A(0;3), B(1;-1).

20) $\int_L (3y^2-5x^3y)dx+(6xy-\frac{5}{4}x^4)dy,$ A(0;2), B(2;4).

21) $\int_L (3x^2+y^2)dx+2xydy,$ A(0;4), B(1;1).

22) $\int_L (\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y^2})dx+(\frac{1}{y^2}+\frac{2x}{y^2})dy,$ A(1;2), B(2;4).

23) $\int_L (x^3-2y^2)dx+(y^2-4xy)dy,$ A(1;1/2), B(0;0).

24) $\int_L (2x-y)dx+(3y-x)dy,$ A(0;2), B(1;-2).

25) $\int_L (y^2-\frac{2x}{y^3})dx+(2xy-\frac{1}{y^2})dy,$ A(1/2;-1), B(1;-2).

26) $\int\limits_l (4x-12xy)dx+(2y-6x^2)dy,$ A(0;1), B(1;0).

27) $\int\limits_l (2x+5y)dx+(5x+3y)dy,$ A(2;-1), B(1;1).

28) $\int\limits_l (xy^3+2xy)dx+(\frac{3}{2}x^2y^2+x^2)dy,$ A(0;0), B(1;1).

29) $\int\limits_l (xy^2-x^2)dx+(x^2y-y^2)dy,$ A(1;2),B(2;3).

30) $\int\limits_l (2x-3y)dx+(7y-3x)dy,$ A(0;3), B(1;5).

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L X(x,y)+Y(x,y)dy$ уздовж замкненого контуру: а) безпосередньо; б) за допомогою формули Гріна:

1) $\oint\limits_L (2x^3+3y^3)dx+(4x^3+y^3)dy,$ L: y=x, y=2x, x=2.

2) $\oint\limits_L (x+2y)dx+(3x-y)dy,$ L: y=ln(x-1), y=0, x=4.

3) $\oint\limits_L (2x^2y+3xy^2)dx+(3x^3-x^2y)dy,$ L: $y=\frac{1}{x}$, y=x, x=2.

4) $\oint\limits_L (3x^2+2xy)dx+4xydy,$ L: y=, y=2-x, y=0.

5) $\oint\limits_L (3x^2+2xy)dx+(4x^2-3y^2)dy,$ L: $y=(x-1)^2$, y=0, x=2.

6) $\oint\limits_L (3x^2-2xy)dx+(x^2+3y^2)dy,$ L: $y=2x^2$, y=2x.

7) $\oint\limits_l (\frac{1}{2}xy^2-x^3)dx+3x^2ydy,$ L: y=x, y=3x, x=1.

8) $\oint\limits_l (x^3-3xy^2)dx-2x^2ydy,$ L: $y=\sqrt{1-x^2}$, y=x, y=0.

9) $\oint\limits_l \frac{3y}{x+1}dy-\frac{y^2}{(x+1)^2}dx,$ L: y=x, y=1-x, x=0.

10) $\oint\limits_l (2x^2-3y^2)dx+2xydy,$ L: $y=x^3$, y=x, ($x\geq 0$).

11) $\oint\limits_L (y^3-x^3)dx-3xy^2dy,$ L: $y=\sqrt[3]{x}$, y=0, x=-1.

12) $\oint\limits_L (x^2+2xy)dx+5x^2dy,$ L: $y=2^x$, y=1, x=1.

13) $\oint_l (2y^2 - xy)dx + 4xydy$. L: $y=1-x^2$, y=1-x.

14) $\oint_l (4x^2 - 2xy)dx - 3xydy$. L: $y=x^2+1$, y=1-x.

15) $\oint_l 2xydx + (3x^2 - y^2)dy$. L: y=. y=2-x. x=0.

16) $\oint_l (3xy^2 - x^3)dx - 2x^2ydy$. L: $y=2x^2$. y=-2x.

17) $\oint_l 4xy^2dx + (y^3 + 6x^2y)dy$. L: $y=\sqrt{1-x^2}$, y=x. x=0.

18) $\oint_l (3x^2 + 2xy)dx + 2xydy$. L: y=x. y=1-x. y=0.

19) $\oint_l (y^2 - 5xy)dx + 2xydy$. L: $y=x^3$, y=x. $(x \le 0)$.

20) $\oint_l (3x + 2y)dx + (4x - y)dy$. L: $y=2^x$. y=2. x=0.

21) $\oint_l (2x^2 - 4xy)dx + 8xydy$. L: $y=1-x^2$. y=x+1.

22) $\oint_l (2x - 3y)dx + (5x + y)dy$. L: y=cos2x. y=1. $x=\frac{\pi}{4}$.

23) $\oint_l \frac{y^2}{(x+1)^2}dx - \frac{3y}{x+1}dy$. L: y=4-x. y=x. x=0.

24) $\oint_l (y^3 - 6xy^2)dx + 2x^2ydy$. L: y=x. y=3x. x=-1.

25) $\oint_l (x^2 - 3xy)dx + 6xydy$. L: $y=2x^2$, y=1-x, y=0.

26) $\oint_l 6xydx + (8x^2 + y^2)dy$. L: $y=-\sqrt{1-x^2}$. y=x. y=0.

27) $\oint_l (3x^2 + 2xy)dx + 6x^2dy$. L: y=sin2x. y=1. x=0. $x=\frac{\pi}{4}$.

28) $\oint_l (x^2 + 2xy)dx + 4x^2dy$. L: $y=\frac{x^2}{3}+1$, y=x+1.

29) $\oint_l \frac{y}{x+1}dx + 2\ln(x+1)dy$. L: y=2x. y=3x. x=1.

30) $\oint_l (3xy + y^2)dx + 2xydy$. L: $y=2x^2$. y=-2x.

4.3 Диференціальні рівняння

I. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку:

1. а) $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$; б) $y' = -\frac{x+y}{x}$;

в) $xy'+y = 3x^2e^{-x}$; г) $xy'+y = y^2\ln x$;

2. а) $2xy'+y^2 = 1$; б) $y'=\frac{y}{x}-4$;

в) $y = x(y'-x\cos x)$; г) $xy'+y = y^2\ln x$;

3. а) $(1-x^2)dy+xydx = 0$; б) $(x-y)ydx-x^2dy = 0$;

в) $2x(x^2+y) = y'$; г) $y'-y\,\mathrm{tg}x+y^2\cos x = 0$;

4. а) $x^2y'-2xy = 3y$; б) $x\ln\frac{x}{y}\,dy-ydx = 0$;

в) $y'+xy = x^3e^{\frac{x}{2}}$; г) $y'-y-y^2\cos x = 0$;

5. а) $xy'-y = y^3$; б) $xy' = y\cos\frac{y}{x}$;

в) $y' = y\,\mathrm{tg}x-4\cos x$; г) $xy'-4y-x^2y^2 = 0$;

6. а) $xyy' = 1-x^2$; б) $xy'-y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$;

б) $xy'+y = \ln x$; г) $y'-y-y^2\cos x = 0$;

7. а) $y-xy' = 1-x^2y$; б) $(x^2+y^2)y' = 2xy$;

в) $3x+y-2+y'(x-1) = 0$; г) $y-y'\cos x = y^2\cos x(1-\sin x)$;

8. а) $3e^x\,\mathrm{tg}y\,dx+\frac{1-e^x}{\cos^2 y}\,dy = 0$; б) $(x+2y)dx-xdy = 0$;

в) $y'-\frac{y}{x} = x^3$; г) $y'+2y = y^2e^{2x}$;

9. а) $y'\mathrm{tg}x = y$; б) $xy' = y-xe^{\frac{y}{x}}$;

в) $(1+x^2)y' = 2xy+(1+x^2)^2$; г) $y'+\mathrm{tg}\,x\cdot y = y^3$;

10. а) $y'\sin x = y\ln y$; б) $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y$;

в) $y'+2xy = xe^{-x^2}$; г) $y'-\frac{x}{x^2+1}y = y^3$;

11. а) $y' = xe^y$; б) $(2x-4y)\,dx+(x+y)\,dy = 0$;

в) $y' = \dfrac{2y}{x+1}+e^x(x+1)^2$; г) $y' - \dfrac{e^x}{1+e^x}y = y^2$;

12. а) $xy'+y = xy\ln x$; б) $x\ln\dfrac{x}{y}\,dy - y\,dx = 0$;

в) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$; г) $y'+y\dfrac{x}{1+x^2} = y^3$;

13. а) $x^2(y+1)+(x^3-1)(y-1)y' = 0$; б) $y' = \dfrac{y}{x}+\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$;

в) $xy'+2y = e^{3x}$; г) $y'+y\dfrac{x}{x+1} = y^2$;

14. а) $y'\sqrt{1-x^2} = 1+y^2$; б) $xy'-y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$;

в) $y' = y\,\mathrm{tg}\,3x+3\cos 3x$; г) $y' = y\,\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{y^3}{\sin x}$;

15. а) $y' = e^{x-y}$; б) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$;

в) $y'+y\cos x = \sin x\cos x$; г) $3y' = (1-3y^3)+y\sin x$;

16. а) $y' = -\dfrac{x\sin x}{y\cos y}$; б) $(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2+y^2}+xy+y^2$;

в) $y'-y\dfrac{2x-1}{x^2-x} = 1$; г) $y'+xy = x^3y$;

17. а) $(1+y^2)x\,dx+(1+x^2)\,dy = 0$; б) $(x+3y)\,dy+x\,dx = 0$;

в) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$; г) $xy' = -y+y^2$;

18. а) $xy\,dy+\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$; б) $y' = \dfrac{y}{x} = \cos\dfrac{y}{x}$;

в) $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0$; г) $y' = y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x$;

19. а) $ye^{2x}dx-(1-e^{2x})\,dy = 0$; б) $y' = \dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$;

в) $y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$; г) $2xy'-y = xy^3$;

20. а) $2^x \mathrm{tg} y dx+(1+2^x)\sec^2 y dy=0$; б) $y' = \frac{y}{x}+\frac{x}{y}$;

в) $xy'+y-e^x = 0$; г) $y'+2y = y^2e^x$;

21. а) $3x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$; б) $(y^2+2xy)dx-x^2dy = 0$;

в) $y'-\frac{2y}{x} = x\cos 3x$; г) $y'-2xy = y^2e^{-x^2}$;

22. а) $e^x\sin^3 y+(1+e^{2x})\cos y\, y'=0$; б) $5x^3y' = y^2(2x-y)$;

в) $y'+3y\,\mathrm{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; г) $(xy'-y^2)\ln x = 2y$;

23. а) $y\sin^2 x dx+\cos x \ln y dy = 0$; б) $xy'+xe^{-\frac{y}{x}} = y$;

в) $xy'-2y = x^3+1$; г) $y'-\frac{x}{2(x^2+1)}y = y^2$;

24. а) $y' = \sin(x-y)$; б) $y+(2\sqrt[3]{x^2y}-x)y' = 0$;

в) $y' = \frac{3x^2}{1+x^3}y+(1+x^3)$; г) $y^3y' = 1$;

25. а) $(a^2+y^2)dx+2x\sqrt{ax-x^2}\,dy = 0$; б) $(y-x)xdy = y^2dx$;

в) $y'-y\,\mathrm{ctg} 3x = \frac{1}{\sin 3x}$; г) $y'-\frac{y}{x-1} = y^2(x-1)$;

26. а) $x^2y'\cos y+1 = 0$; б) $y'+\frac{y}{x} = \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}$;

в) $y'+y\,\mathrm{ctg} 2x = \cos 2x$; г) $y'+\frac{y}{x+3} = 4y^2(x+3)^2$;

27. а) $x^2y'+\cos 3y = 1$; б) $y'+3xy^2 = 4xy$;

в) $y'+\frac{y}{x+1} = e^x$; г) $y' = \frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2\cos x}$;

28. а) $x^3y'-\sin y = 1$; б) $xy'+y+\mathrm{tg}\frac{y}{x}$;

в) $y'+\frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$; г) $xy'+y+5y^2e^{-\frac{1}{x}} = 0$;

29. а) $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$; б) $2x^2y' = x^2+y^2$;

в) $y' - y\,ctgx = \sin x$; г) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2\ln x+1}{x^2}y^2$;

30. а) $e^x = y'(x+1)$; б) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

в) $y' - \frac{y}{x} = x^2+1$; г) $((x-1)y' - y^2)\ln(x-1) = y$;

2. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння другого порядку

1. а) $y'' = \frac{ctgx}{\sin^2 x}$; б) $y'' = \frac{1}{3x}(y')^2$;

2. а) $y'' = \sqrt{x+4}$; б) $yy' + (y')^2 + yy'' = 0$;

3. а) $y'' = 3^{5x}$; б) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$;

4. а) $y''' = e^{x-4}$; б) $3y'' = (y')^4 - yy'$;

5. а) $y'' = \sqrt[3]{3-x}$; б) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$;

6. а) $y'' = \sqrt[3]{3-x}$; б) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$;

7. а) $y'' = \frac{1}{x+2}$; б) $2xy'' + (y'^2 - 64)y' = 0$;

8. а) $y'' = \sin(5x-1)$; б) $yy'' - yy'\ln y = (y')^2$;

9. а) $y'' = \frac{1}{x-1}$; б) $y^3y'' = -1$;

10. а) $y'' = 2x + \sin x$; б) $y'' = -3(y')^2$;

11. а) $y'' = x + e^{3x-1}$; б) $(x+3)y'' = (y')^2$;

12. а) $y'' = (x+1)^3$; б) $y''\sqrt{y} = \frac{1}{8}$;

13. а) $y'' = \cos(3x-1)$; б) $y'' = x(y')^2$;

14. а) $y'' = \sqrt{(x-4)^3}$; б) $xy'y'' = (y')^2 + 4$;

15. а) $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$; б) $2y'' - 3(y')^2 = 0$;

16. а) $y'' = \ln(1+x)$; б) $2xy'y'' = (y')^2-1$;

17. а) $y'' = \sin 3x-2x$; б) $\frac{1}{y'}y'' = x^3$;

18. а) $y'' = 2^{3x-2}$; б) $y''\sqrt[3]{y+1} = y'$;

19. а) $y'' = 3x^2+e^{2x}$; б) $(5x-1)y'' = (y')^2$;

20. а) $y'' = \ln(3-x)$; б) $y''-y'x = e^x$;

21. а) $y'' = \frac{1}{x+4}$; б) $\frac{y''}{y'} = (y')^2+y$;

22. а) $y'' = \sin(x+y)$; б) $x^2y''-3xy' = \frac{6(y')^2}{x^2}$;

23. а) $y'' = e^{5x-4}$; б) $xy'''-x(y')^2 = 3y'$;

24. а) $y' = \sqrt[3]{2x-5}$; б) $y'' = (1-\frac{y'}{x})$;

25. а) $y' = \ln(3x+2)$; б) $y'y'' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

26. а) $y'' = x^2+e^{1-x}$; б) $(\cos 3y)y''-\sin 3y(y')^2 = 0$;

27. а) $y'' = \frac{1}{\cos^2(x-1)}$; б) $y''+y'\operatorname{tg}x = 0$;

28. а) $y'' = \cos^2(5x-1)$; б) $y'' = \sqrt[3]{y-2}$;

29. а) $y'' = \sqrt[4]{5-4x}$; б) $(y')^5\, y'' = 1$;

30. а) $y'' = 4^x+x^2$; б) $y'' = 3yy'$.

3.Знайти розв'язок диференціальних рівнянь, які задовольняють початкові умови:

1) 1. $y''-3y'=x+2$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$; 2. $y''+2y+y=e^x$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$; 3. $y''-y'+y=\cos 2x$, $y(0)=1;\ y'(0)=0$

2) 1. $y''-3y'+2y=x^2$, $y(0)=1, y'(0)=0$; 2. $y''-2y'+3y=e^{4x}$, $y(0)=1, y'(0)=-1$; 3. $y''+9y=x\cos x$, $y(0)=0;\ y'(0)=0$

3) 1. $y''-6y'+2y=1-3x$, $y(0)=0, y'(0)=1$; 2. $y''-2y'+y=6xe^x$, $y(0)=1, y'(0)=-1$; 3. $y''+y'+3y=2\cos x$, $y(0)=-2, y'(0)=1$

4) 1. $y''+6y'=x^2+2$; 2. $y''+6y'+9y=e^{3x}$; 3. $y''+2y'+y=\sin 5x$

	$y(0)=1,\ y'(0)=0$	$y(0)=3,\ y'(0)=1$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
5)	1. $y''-\frac{4}{5}y'=x$	2. $y''-y'+\frac{1}{4}y=e^{x-1}$	3. $4y''+y'+3y=4\cos 3x$
	$y(0)=3, y'(0)=1$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
6)	1. $y''+2y'-3y=x^{[illegible]}$	2. $y''+2y'+y=(3x+2)e^{-x}$	3. $6y''+3y'+4y=\cos\frac{x}{4}$
	$y(0)=1, y'(0)=0$	$y(0)=0, y'(0)=0$	$y(0)=1, y'(0)=0$
7)	1. $y''-2y'-3y=x+5$	2. $y''-2y'+y=(x+7)\,e^{\frac{x}{2}}$	3. $3y''+10y'+8y=\sin\frac{x}{2}$
	$y(0)=2,\ y'(0)=1$	$y(0)=0, y'(0)=0$	$y(0)=1, y'(0)=0$
8)	1. $y''-y'-3x=1-4x$	2. $y''+y'+\frac{1}{7}y=xe^{-\frac{x}{2}}$	3. $3y''+y'+7y=3\cos\frac{x}{3}$
	$y(0)=1, y'(0)=-1$	$y(0)=0, y'(0)=0$	$y(0)=-1, y'(0)=0$
9)	1. $y''-3y'=x$	2. $y''-y'+\frac{1}{4}y=2e^{\frac{x}{2}}$	3. $y''+y'+6y=\sin 2x$
	$y(0)=1, y'(0)=1$	$y(0)=0, y'(0)=1$	$y(0)=-1, y'(0)=0$
10)	1. $y''-y'=(x-1)^2$	2. $y''+3y'+\frac{9}{4}y=4e^{-\frac{3}{2}x}$	3. $y''+3y'+7y=\sin x$
	$y(0)=0, y'(0)=0$	$y(0)=1, y'(0)=0$	$y(0)=0, y'(0)=1$
11)	1. $y''+3y'-y=8x$	2. $\frac{y''}{2}+3\sqrt{2}\,y'+9y=e^{-\frac{x}{3}}$	3. $3y''+6y'+8y=\sin 2x$
	$y(0)=2, y'(0)=1$	$y(0)=-1, y'(0)=0$	$y(0)=0, y'(0)=1$
12)	1. $y''+3y'-2y=x^2$	2. $\frac{1}{5}y''-2y'+5y=(4-5x)e^{3x}$	3. $y''-4y'+6y=\sin 6x$
	$y(0)=0, y'(0)=1$	$y(0)=0, y'(0)=0$	$y(0)=1, y'(0)=0$
13)	1. $y''-3y'-2y=5x$	2. $5y''-2y'+\frac{1}{5}y=e^{x-\frac{1}{2}}$	3. $8y''+3y'+y=x\sin 4x$
	$y(0)=1, y'(0)=-1$	$y(0)=0, y'(0)=-1$	$y(0)=0, y'(0)=0$
14)	1. $y''-3y'-3y=6x+1$	2. $6y''+12y''+6y=(x-1)e^{-x}$	3. $4y''+2y'+y=x\cos 3x$
	$y(0)=0, y'(0)=1$	$y(0)=1, y'(0)=0$	$y(0)=0, y'(0)=0$
15)	1. $y''+3y'-3y=3-x$	2. $\frac{1}{2}y''-2y'+2y=e^{\frac{3}{2}x-2}$	3. $8y''+7y'+3y=(x+1)\cos x$
	$y(0)=0, y'(0)=0$	$y(0)=1, y'(0)=0$	$y(0)=0, y'(0)=0$

16) 1. $y''-y'-4y=(x-1)^2$, $y(0)=0, y'(0)=0$ 2. $16y''-4y'+\frac{1}{4}y=e^{-5x}$, $y(0)=0, y'(0)=1$ 3. $y''+9y'-12y=\sin 3x$, $y(0)=-1, y'(0)=0$

17) 1. $y''+y'-4y=3x+2$, $y(0)=2, y'(0)=1$ 2. $3y''-4\sqrt{3}y'-4y=e^{-\frac{x}{5}}$, $y(0)=0, y'(0)=1$ 3. $3y''+5y'+5y=x\sin 7x$, $y(0)=0, y'(0)=0$

18) 1. $y''-2y'-4y=5x$, $y(0)=2, y'(0)=-1$ 2. $y''-\sqrt{2}y'+y=(x+1)e^{\frac{x}{3}}$, $y(0)=0, y'(0)=0$ 3. $5y''+6y'+3y=(x+2)\sin x$, $y(0)=0, y'(0)=0$

19) 1. $y''+2y'-4y=x+12$, $y(0)=1, y'(0)=-1$ 2. $6y''-12y'+6y=e^{1-x}$, $y(0)=1, y'(0)=0$ 3. $3y''+4y'+5y=x\sin 2x$, $y(0)=0, y'(0)=0$

20) 1. $y''-3y'-4y=12x$, $y(0)=0, y'(0)=1$ 2. $\frac{y''}{5}+2y'+5y=xe^{-3x}$, $y(0)=1, y'(0)=0$ 3. $5y''+2y'+y=(1+x)\sin 3x$, $y(0)=0, y'(0)=0$

21) 1. $y''+3y'-4y=4x$, $y(0)=1, y'(0)=-1$ 2. $y''+4y'+4y=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$, $y(0)=0, y'(0)=1$ 3. $7y''+8y'+3y=(5-x)\sin x$, $y(0)=0, y'(0)=0$

22) 1. $y''-4y'-4y=x^2$, $y(0)=0, y'(0)=0$ 2. $3y''+2y'+\frac{1}{3}y=xe^{\frac{x}{4}}$, $y(0)=0, y'(0)=1$ 3. $y''-3y'+6y=4\sin 2x$, $y(0)=0, y'(0)=-1$

23) 1. $y''-4y'=5x$, $y(0)=2, y'(0)=1$ 2. $\frac{1}{4}y''-3y'-9y=(x+4)e^{-x}$, $y(0)=1, y'(0)=0$ 3. $y''-3y'+6y=(6-x)\sin x$, $y(0)=0, y'(0)=-1$

24) 1. $y''-y'-5y=1-3x$, $y(0)=1, y'(0)=0$ 2. $y''+2y'+2y=(x-3)e^{\frac{x}{3}}$, $y(0)=0, y'(0)=0$ 3. $2y''+7y'+8y=4\sin 2x$, $y(0)=1, y'(0)=0$

25) 1. $y''+y'-5y=10x$, $y(0)=1, y'(0)=-1$ 2. $9y''-3y'-\frac{1}{4}y=e^{5x}$, $y(0)=0, y'(0)=1$ 3. $3y''+10y'+9y=(7-2)\sin x$, $y(0)=0, y'(0)=0$

26) 1. $y''-5y'+y=4$, $y(0)=1, y'(0)=2$ 2. $9y''+3y'+\frac{1}{4}y=(3x-5)e^{-x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$ 3. $y''+5y'+6y=8x\sin 3x$, $y(0)=0, y'(0)=0$

27) 1. $y''+5y'+y=12-3$ 2. $y''+3y'+\frac{9}{4}y=xe^{3x}$ 3. $y''-5y'+6y=(4-3x)\sin 3x$

$y(0)=1, y'(0)=1$ $\quad$ $y(0)=0, y'(0)=0$ $\quad$ $y(0)=0, y'(0)=0$

28) 1. $y''-5y'-y=1$ $\quad$ 2. $\frac{1}{2}y''-3\sqrt{2}\,y'+9y=e^{5-2x}$ $\quad$ 3. $3y''+5y'+7y=e^{x}\sin 4x$

$y(0)=1, y'(0)=3$ $\quad$ $y(0)=-1, y'(0)=0$ $\quad$ $y(0)=0, y'(0)=0$

29) 1. $y''+5y'-y=5x$ $\quad$ 2. $y''-5y'+\frac{25}{4}y=e^{\frac{x}{3}}$ $\quad$ 3. $8y''+4y'+3y=(7x-4)\sin x$

$y(0)=2, y'(0)=1$ $\quad$ $y(0)=0, y'(0)=-1$ $\quad$ $y(0)=0, y'(0)=0$

30) 1. $y''+2y'-5y=7x+2$ $\quad$ 2. $16y''-8y'+y=xe^{-7x}$ $\quad$ 3. $7y''+9y'+3y=\sin 7x$

$y(0)=1, y'(0)=1$ $\quad$ $y(0)=0, y'(0)=0$ $\quad$ $y(0)=0, y'(0)=1$

4. Знайти загальний розв'язок системи:

1. $\begin{cases} y'(t)=-2x(t)+3y(t), \\ x'(t)=y(t); \end{cases}$ $\quad$ 2. $\begin{cases} x'(t)=x(t)+3y(t), \\ y'(t)=-x(t)+5y(t); \end{cases}$ $\quad$ 3. $\begin{cases} x'(t)=3x(t)-2y(t), \\ y'(t)=4x(t)+4y(t); \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'(t)=2x(t)-5y(t), \\ y'(t)=5x(t)-6y(t); \end{cases}$ $\quad$ 5. $\begin{cases} x'(t)=x(t)-4y(t), \\ y'(t)=x(t)-3y(t); \end{cases}$ $\quad$ 6. $\begin{cases} x'(t)=-x(t)+2y(t), \\ y'(t)=2x(t)-5y(t); \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t), \\ y'(t)=3x(t)+4y(t); \end{cases}$ $\quad$ 8. $\begin{cases} x'(t)=x(t)-y(t), \\ y'(t)=y(t)-4x(t), \end{cases}$ $\quad$ 9. $\begin{cases} x'(t)=-x(t)+8y(t), \\ y'(t)=x(t)+y(t); \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'(t)=x(t)+y(t), \\ y'(t)=2x(t)+3y(t); \end{cases}$ $\quad$ 11. $\begin{cases} x'(t)=x(t)-3y(t), \\ y'(t)=3x(t)+y(t); \end{cases}$ $\quad$ 12. $\begin{cases} x'(t)=-x(t)-5y(t), \\ y'(t)=x(t)+y(t); \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t), \\ y'(t)=4y(t)-x(t); \end{cases}$ $\quad$ 14. $\begin{cases} x'(t)=3x(t)-y(t), \\ y'(t)=4x(t)-y(t); \end{cases}$ $\quad$ 15. $\begin{cases} x'(t)=2y(t)-3x(t), \\ y'(t)=y(t)-2x(t); \end{cases}$

16. $\begin{cases} x'(t)=5x(t)+3y(t), \\ y'(t)=-3x(t)-y(t); \end{cases}$ $\quad$ 17. $\begin{cases} x'(t)=4x(t)-y(t), \\ y'(t)=x(t); \end{cases}$ $\quad$ 18. $\begin{cases} x'(t)=x(t)-3y(t), \\ y'(t)=x(t)+2y(t); \end{cases}$

19. $\begin{cases} x'(t)=x(t)-4y(t), \\ y'(t)=3x(t)+y(t); \end{cases}$ $\quad$ 20. $\begin{cases} x'(t)=5x(t)+y(t), \\ y'(t)=x(t)-5y(t); \end{cases}$ $\quad$ 21. $\begin{cases} x'(t)=y(t), \\ y'(t)=x(t)+5y(t); \end{cases}$

22. $\begin{cases} x'(t)=3x(t)-7y(t), \\ y'(t)=2y(t)-x(t); \end{cases}$ $\quad$ 23. $\begin{cases} x'(t)=-x(t)-4y(t), \\ y'(t)=x(t)+3y(t); \end{cases}$ $\quad$ 24. $\begin{cases} x'(t)=5y(t), \\ y'(t)=x(t)+7y(t); \end{cases}$

25. $\begin{cases} x'(t)=3x(t)-y(t), \\ y'(t)=-x(t)-y(t); \end{cases}$ $\quad$ 26. $\begin{cases} x'(t)=x(t)+2y(t), \\ y'(t)=x(t); \end{cases}$ $\quad$ 27. $\begin{cases} x'(t)=x(t)+7y(t), \\ y'(t)=3x(t)+2y(t); \end{cases}$

28. $\begin{cases} x'(t)=6y(t), \\ y'(t)=-2x(t)-3y(t). \end{cases}$ $\quad$ 29. $\begin{cases} x'(t)=8x(t)+2y(t), \\ y'(t)=x(t)-3y(t); \end{cases}$ $\quad$ 30. $\begin{cases} x'(t)=y(t)-2x(t), \\ y'(t)=x(t)+6y(t); \end{cases}$

5. Розв'язати задачу

1. Знайти лінію, де будь-яка дотична перетинається з віссю абсцис в точці, однаково віддаленій від точки дотику і початку координат.

2. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (2,4), якщо відрізок, який відсікає на осі абсцис дотична, проведена в будь-якій точці лінії, дорівнює кубу абсциси точки дотику.

3. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (2,-1), якщо кутовий коефіцієнт будь-якої її дотичної пропорційний квадрату ординати точки дотику і коефіцієнт пропорційності дорівнює 3.

4. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо відрізок, який відтинається її дотичною на осі ординат, дорівнює абсцисі точки дотику.

5. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо добуток кутового коефіцієнта дотичної в будь-якій її точці на суму координат точки дотику дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

6. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо відношення ординати будь-якої точки до абсциси пропорційне кутовому коефіцієнту її дотичної (к=3).

7. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,3), якщо площа трикутника утвореного будь-якою її дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, дорівнює 2.

8. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,1), якщо відстань від початку координат до будь-якої точки її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.

9. Знайти рівняння лінії, для якої квадрат довжини відрізка, що відтинається на осі координат будь-якою її дотичною, дорівнює добутку координат точки дотику.

10. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,3), якщо кутовий коефіцієнт її дотичної в 2 рази менший кутового коефіцієнта радіус-вектора точки дотику.

11. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (4,3), якщо будь-яка її піддотична дорівнює середньому арифметичному координат точки дотику.

12. Знайти рівняння лінії, для якої відношення відрізка, що відтинається нормаллю на осі абсцис, до радіус-вектора точки дотику є величина стала, що дорівнює 4.

13. Знайти рівняння лінії, для якої відношення довжини відрізка, що відтинається дотичною на осі ординат, до довжини відрізка, що відтинається нормаллю на осі абсцис, є величина постійна, яка дорівнює 5.

14. Знайти лінію, для якої трикутник, утворений віссю ординат, дотичною і радіус-вектором точки перетину, - рівнобедрений.

15. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,1), якщо відстань будь-якої її дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

16. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо площа трикутника, утвореного її дотичною, віссю абсцис і ординатою точки дотику

дорівнює 5.

17. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (ОД), якщо її піддотична дорівнює сумі координат точки дотику.

18. Знайти рівняння лінії, для якої будь-яка дотична перетинається з віссю ординат в точці, рівновіддаленій від точки дотику і від початку координат.

19. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо будь-яка її дотична перетинає пряму y=1 в точці з абсцисою, рівній подвоєній абсцисі точки дотику.

20. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,-1), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі абсцис її дотичною дорівнює добутку координат точки дотику.

21. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,0), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі ординат її дотичною, дорівнює потроєній абсцисі точки дотику.

22. Знайти рівняння лінії, якщо відрізок будь-якої її дотичної, розміщеної між точкою дотику і віссю абсцис, ділиться віссю ординат навпіл.

23. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,4), якщо добуток кутового коефіцієнта її дотичної на різницю ординати і абсциси точки дотику дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

24. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,3), якщо кожна її дотична перетинає пряму y=2 в точці з абсцисою, рівною подвоєній абсцисі точки дотику.

25. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (0,e), якщо її піддотична дорівнює одиниці.

26. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,1), якщо площа трапеції, утвореної її дотичною, ординатою точки дотику і координатними осями, дорівнює 0,5.

27. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (4,3), якщо її дотична перетинається з віссю ординат в точці, яка віддалена від початку координат на таку ж відстань, що й точка дотику від початку координат.

28. Знайти лінію, яка проходить через (2,3), якщо довжина відрізка, що відтинається на осі ординат її нормаллю, дорівнює 3.

29. Знайти лінію, яка проходить через точку (0,e), якщо її піддотична дорівнює 3.

30. Знайти лінію, яка проходить через точку (1,2), якщо кутовий коефіцієнт її дотичної дорівнює потроєному кутовому коефіцієнту радіус-вектора точки дотику.

б. Розв'язати фізичну задачу

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю V пропорційно квадрату часу. Знайти залежність між пройденим шляхом S і часом t, якщо відомо, що при t=0с: S=2м, а в момент t=1: V=3м/с.

2. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, вона зазнає протидії середовища з силою, пропорційною його швидкості. Знайти залежність шляху від

часу.

3. Моторний човен рухається у спокійній воді зі швидкістю V_0=12 км/год. На повній швидкості її мотор був виключений, і через 10с швидкість човна зменшилась до V_1 = 6км/год. Опір середовища пропорційний швидкості руху човна. Знайти швидкість човна через 1 хв. після зупинки мотора.

4. Куля, що рухається зі швидкістю V = 400м/с, входить в достатньо товсту стіну. Опір стіни надає кулі негативне прискорення, пропорційне квадрату її швидкості з коефіцієнтом пропорційності к = 7 1/м.Знайти швидкість кулі через 0,001 с після входу в стіну.

5. Температура тіла за 10 хв. зменшилась від 120° до 60° С.Температура навколишнього середовища 20°С.Через скільки хвилин температура тіла стане рівною 30°С, якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища?

6. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, пропорційним добутку швидкості руху на квадрат часу. Знайти залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент швидкість руху дорівнює V_0.

7. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, прямопропорційної часу руху. Знайти залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент швидкість руху дорівнює нулю.

8. Матеріальна точка масою m притягується кожним з двох центрів з силою, пропорційною відстані з коефіцієнтом пропорційності 1с. Відстань між центрами дорівнює 2С. В початковий момент точка знаходилась на лінії з'єднання центрів на відстані а від її середини. Початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти закон руху.

9. Знайти швидкість струму в момент t в полі з достатнім опором R і самоіндукцією L при ЕРС, що лінійно наростає за законом E = kt, якщо в початковий момент сила струму дорівнювала нулю.

10. На тіло масою m=1 діє сила, пропорційна квадрату часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює к).На яку максимальну висоту підійметься точка?

11. Матеріальна точка масою m підкинута вертикально вверх з початковою швидкістю V_0. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості руху (коефіцієнт пропорційності дорівнює к). На яку максимальну висоту підніметься точка?

12. Знайти залежність температури T від часу t, якщо тіло, нагріте до 200° С, занесене в кімнату з температурою 20°С.Через який час тіло зовсім охолоне? (Вважати, що швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційна різниці температур тіла і середовища).

13. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, пропорційної часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює 4), який пройшов з моменту, коли швидкість дорівнювала нулю. Крім того, на точку діє сила опору середовища, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 3). Знайти залежність швидкості від часу.

14. Відомо, що швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційна різниці температур тіла і середовища. Знайти залежність температури тіла T від

часу t, якщо за 10 хв. температура тіла знизилась від 120° до 50° C, а температура була 20° C.

15. Матеріальна точка масою m рухається під дією сили прямо пропорційно часу руху і обернено пропорційно швидкості руху. Встановити залежність між швидкістю руху і часом, якщо в початковий момент часу швидкість руху дорівнювала нулю.

16. На тіло масою m=2 діє сила, пропорційна добутку швидкості руху на час (коефіцієнт пропорційності дорівнює 4). В початковий момент швидкість руху дорівнювала 1м/с. Якою буде швидкість руху через 1 хв. після початку руху?

17. Матеріальна точка масою m=1 г рухається прямолінійно. На неї діє в напрямку руху сила, пропорційна часу, який пройшов з моменту, коли швидкість точки дорівнювала нулю, з коефіцієнтом пропорційності 4 кг·м/с. Крім того, рух точки гальмується опором середовища, пропорційним швидкості руху з коефіцієнтом пропорційності 3 г/с. Знайти швидкість точки через 5 с після початку руху.

18. Матеріальна точка рухається по прямій з постійним прискоренням a. Знайти закон руху точки.

19. Швидкість тіла, що рухається, збільшується обернено пропорційно пройденому шляхові. В початковий момент руху тіло знаходилось на відстані 5 м від початку відліку і мало деяку швидкість. Знайти пройдений шлях і швидкість тіла через 10с після початку руху.

20. Матеріальна точка масою m рухається по осі під дією відродженої сили, направленою до початку координат і пропорційної відстані від початку руху точки. Середовище, в якому відбувається рух, спричиняє опір, пропорційний швидкості руху. Знайти закон руху.

21. Матеріальна точка масою m розміщена на кривій AB, яка рухається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю w. Знайти рівняння кривої AB, якщо матеріальна точка знаходиться в рівновазі в довільному положенні на кривій.

22. Знайти силу в котушці в момент t, якщо опір її R, коефіцієнт індуктивності L, початковий струм I=0, ЕРС змінюється за законом $E=E_0\cdot\sin t$.

23. Крива, яка проходить через точки A(5,7) і B(6,6), має радіус кривизни R=5. Знайти рівняння цієї кривої.

24. Температура тіла за 20 хв. знизилась від 100°C до 40°C. Температура навколишнього середовища 20°C. Через скільки хвилин температура тіла буде дорівнювати 25°C, якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища?

25. Матеріальна точка масою m вільно падає під дією сили тяжіння. Початкове положення точки, що падає, відносно точки відліку $y(0)=y_0$, початкова швидкість $V(0)=V_0$. Не беручи до уваги опір повітря, знайти закон руху.

26. Матеріальна точка масою m вільно рухається вздовж осі OY, і на неї в кожний момент часу діє сила, пропорційна відхиленню точки від початку координат і направлена до початку координат. Знайти закон руху точки, якщо в

початковий момент вона мала ординату у і швидкість V_0.

27. Матеріальна точка масою m знаходиться на продовжені осі тонкого однородного стержня масою M, довжиною 1м на відстані *a* від її лівого кінця. Знайти силу взаємодії стержня і точки.

7. Задачі для ігрових занять

1. Прискорення локомотива, який має початкову швидкість, прямо пропорційну силі тяги F і обернено пропорційну масі поїзда m. Сила тяги локомотива F=b-kV, де V - швидкість, b і k - сталі величини. Знайти силу тяги локомотива за деякий час, якщо в початковий момент при t=0: $F_0=b-kV_0$.

2. У кімнаті, де підтримується температура 20°С, деяке тіло охололо за 20 хв. від 100°С до 50°С. Знайти закон охолодження тіла. Через скільки хвилин воно набуде кімнатної температури?

3. Швидкість знецінення устаткування внаслідок його зносу пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість, дорівнювала Ao. Знайти вартість устаткування через 8 років.

4. У посудині знаходиться 10 л водного розчину солі. В посудину втікає чиста вода із швидкістю 4л/хв, а суміш витікає з тією ж швидкістю. В початковий момент в розчині було 1 кг солі. Скільки солі буде в посудині через 30 хв. після початку процесу?

5. Ракета з початковою масою m_0 кг, злітає в вертикальному напрямку. Гази викидаються з постійною інтенсивністю *a* (кг/с), з постійною швидкістю b (м/с), відносно ракети, де *a*=0 і b=0. Знайти швидкість ракети і відстань, пройдену за час t, не беручи до уваги дії зовнішніх сил на ракету.

6. Ракету з початковою масою m_0 запускають вертикально з початковою швидкістю V_0. Маса ракети рівномірно зменшується і в момент t спадає до $m=m_0-kt$, де к - коефіцієнт. Вважаємо, що маса викидів рухається назад зі сталою швидкістю b відносно ракети. Знайти висоту підйому ракети в будь-який момент часу t, враховуючи лише її силу тяжіння mg.

7. Стальний дріт довжиною 1 з поперечним перерізом P розтягується з силою, що постійно зростає до величини P. Знайти роботу розтягу.

8. Стальний дріт довжиною L закріплений в одному із кінцю, під дією своєї ваги знаходиться в положенні рівноваги. Знайти видовження дроту. Густина сталі y=т/м.

9. Знайти закон зміни яскравості світла після проходження через скляну пластинку, якщо при проходженні через шар товщиною $x_1=2{,}5$ мм яскравість світла B складала 30 міжн. од., а на поверхні ($x_0=0$) початкова яскравість $B_0=100$ міжн. од. Промені падають на поверхню пластини під будь-яким кутом, а його зміна відбивається на величині коефіцієнта k.

10. Знайти кількість теплоти, яка необхідна для нагріву 1 кг заліза від 20°С до 21°С, питома теплоємність C заліза показує залежність C=0.1053 + 0.000142t, де t - температура.

11. Пластина з графіту товщиною 10 мм на поверхнях має постійні

температури t_1=1300°С і t_2 =100°С. Знайти питому ємність теплоти g, яка проходить через графітну пластину з коефіцієнтом теплопровідності $y=1{,}44\cdot10^3$

12. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хв. складає від 100°С до 60°С. Температура навколишнього повітря 25°С. Через який час від початку охолодження температура хліба знизиться до 30° С?

13. В колі з опором R і самоіндукцією L діє періодична електрорушійна сила $E_1=a\cdot\sin2п/T\cdot t$, де a - стале число, яке дорівнює, очевидно, максимальному значенню величини E_1; T - період; t - час. Знайти силу струму I в колі в будь-який момент часу, якщо в початковий момент при t=0 сила струму дорівнює нулю.

14. Нормаль відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює квадрату радіуса-вектора будь-якої точки кривої. Знайти рівняння кривої, якщо вона проходить через точку (0,3).

15. Середнє геометричне координат точки дотику дорівнює відношенню відрізка, що відтинається дотичною на осі ординат, до подвоєної ординати точки дотику. Знайти рівняння кривої, якщо вона проходить через точку (1,1).

16. Тіло масою m падає під дією сили тяжіння в середовищі, опір якого пропорційний квадрату швидкості падіння. Знайти закон руху тіла.

17. Електровоз рухається горизонтальною залізничною колією зі швидкістю 72 км/год. Машиніст включає гальма, і опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 ваги електровоза. Знайти час від моменту включення гальм до повної зупинки електровоза і відстань, пройдену за цей час.

18. Тіло кинуте вертикально вверх з початковою швидкістю V_0. Знайти закон руху, вважаючи, що тіло рухається тільки під впливом сили тяжіння.

19. Стержень довжиною $2l$ площею поперечного перерізу S на кінцях має однакову температуру t_0. По стержню протікає постійний струм I, густина якого i=I/S. Знайти розподіл теплоти по стержню, якщо максимальна температура в центрі стержня t_{max}. Нехтуємо втратою теплоти в навколишнє середовище.

20. Різниця потенціалів на зажимах котушки рівномірно падає від E_0 = 2В до E_1 = 1В за 10 с. Яким буде струм на 10-й секунді, якщо на початку експерименту він був 163/2 А? Опір котушки 0,12 Ом, коефіцієнт індуктивності 0,1 Гн.

21. В посудині знаходиться 80 л водяного розчину солі. В нього надходить чиста вода зі швидкістю 5 л/хв., а суміш витікає з тією ж швидкістю, при чому концентрація розчину підтримується рівномірною шляхом перемішування. В початковий момент в розчині було 10 кг. Скільки солі буде в посудині через 10 хв. після початку процесу?

22. Футбольний м'яч масою 0,3 кг кинули вертикально вверх зі швидкістю 22 м/с. Знайти час і максимальну висоту підйому м'яча.

23. Матеріальна точка масою m=4 г без початкової швидкості поволі опускається у рідину. Опір рідини пропорційний швидкості опускання з коефіцієнтом пропорційності k=4 г/с. Знайти швидкість точки через 1 хв. після початку опускання.

Литература:

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М.: Наука, 1985.
2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа.- М.: Наука, 1989.
3. Краснов М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1981.
4. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов ч. 2.- М.: Наука, 1990.

Навчальне видання

Петрук В.А., Хом'юк І.В., Хом'юк В.В.

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор С.А. Малішевська

Підписано до друку 30.11.2001р.
Формат 29,7×42 1/4 Гарнітура Times New Roman

Друк різографічний Ум. друк. арк. 6.27
Тираж 100прим.
Зам. № 2001-256

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел. **(0432) 44-01-59**