

М. Г. Попович, О. В. Ковальчук

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ



Підручник

М. Г. Попович, О. В. Ковальчук

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

*Затверджено Міністерством освіти
і науки України*

Підручник
для студентів вищих технічних
навчальних закладів

Видання друге, перероблене
і доповнене

Київ
“Либідь”
2007

ББК 32.965я73
П58

Автори:

М. Г. Попович (передмова, гл. 1—5, гл. 6 параграфи 6.1—6.8);
О. В. Ковальчук (гл. 6 параграфи 6.9—6.13, гл. 7—12)

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. *І. В. Волков*,
д-р техн. наук, проф. *В. І. Сенько*,
д-р техн. наук, проф. *Ю. А. Скрипник*

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(лист № 14/18.2-828 від 30.03.06)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редакція літератури з природничих і технічних наук
Головний редактор *Т. В. Ковтуненко*
Редактор *Т. В. Кацовенко*

Попович М. Г., Ковальчук О. В.

П58 Теорія автоматичного керування: Підручник. — 2-ге вид., перероб.
і доп. — К.: Либідь, 2007. — 656 с.
ISBN 978-966-06-0447-6.

Викладено основи теорії лінійних і нелінійних безперервних і дискретних систем автоматичного керування, розглянуто загальні питання автоматизації, методи математичного описання, дослідження стійкості, поліпшення якості, корекції та синтезу систем. Висвітлено сучасні теоретичні питання чутливості, керованості та спостережуваності, оптимальні й адаптивні системи, випадкові процеси в системах.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

ББК 32.965я73

ISBN 978-966-06-0447-6

© М. Г. Попович, О. В. Ковальчук, 1997
© М. Г. Попович, О. В. Ковальчук, 2007, зі змінами

Передмова

Дисципліна «Теорія автоматичного керування» є однією з базових у навчальних планах ряду бакалаврських програм підготовки студентів багатьох спеціальностей та спеціалізацій у вищих навчальних закладах України. Особливе значення теорія автоматичного керування має для спеціальності «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод», найчисельнішої у напрямі «Електромеханіка». Для цієї спеціальності теорія автоматичного керування становить теоретичну базу багатьох спеціальних дисциплін: «Теорія електроприводу», «Системи керування електроприводами» та дисциплін з автоматизації технологічних процесів, моделювання електромеханічних систем.

У даному підручнику відображено основні питання теорії автоматичного керування, необхідні спеціалістам з автоматизації виробничих процесів і промислових установок.

Матеріал викладено в такій послідовності: розглядаються загальні принципи побудови систем автоматичного керування і регулювання, типові динамічні ланки та їхні характеристики, математичний опис систем керування (у вигляді диференціального рівняння відповідного порядку, структурної схеми, системи диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші й у векторно-матричній формі), методи визначення

статичних і динамічних характеристик систем, а також питання стійкості. Особливу увагу приділено аналізу якості систем в ustalених і перехідних режимах та методам її підвищення.

Більшість систем автоматичного керування є нелінійними, але при дослідженні їх звичайно лінеаризують і застосовують методи лінійної теорії. Системи із суттєвими нелінійностями лінеаризувати не можна. Тому значну увагу приділено також нелінійним системам, особливостям їх динаміки, методам дослідження стійкості, автоколивань та корекції.

Останнім часом все більшого поширення набувають дискретні (в основному цифрові) системи автоматичного керування. Принципам побудови та дослідження таких систем присвячено окрему главу, в якій розглядається математичний апарат для дослідження імпульсних систем автоматичного керування, передаточні функції та частотні характеристики, а також питання стійкості й якості. Достатньо уваги приділено цифровим системам автоматичного керування та синтезу цифрових регуляторів.

Теоретичною основою розробки перспективних високоточних автоматичних систем є теорія інваріантності та комбінованого керування, оптимальних і адаптивних систем. Усі ці питання також розглядаються у підручнику.

В інженерній практиці все більше уваги приділяється статистичним методам розрахунку систем автоматичного керування, тому в підручнику розглядаються характеристики випадкових процесів, методи розрахунку точності та синтезу систем автоматичного керування при випадкових вхідних і збурюючих діях.

У другому переробленому й доповненому виданні книги стисло висвітлено суть ряду нових наукових напрямів: методи фаззи-логіки, нейронних сіток, генетичних алгоритмів. Враховуючи вимоги до інтенсифікації самостійної роботи студентів під час вивчення дисципліни, в кожній главі підручника наведено приклади розв'язування різних задач з конкретних електромеханічних систем

автоматичного керування або їхніх окремих елементів, а також контрольні запитання та завдання.

При написанні підручника автори виходили з того, що студенти знайомі з прямим і зворотним перетворенням Лапласа для безперервних функцій та з матричним численням. Тому у відповідних розділах книги надаються лише короткі відомості про застосування методів цих розділів вищої математики. Більш детально викладено математичний апарат для дослідження імпульсних і цифрових систем автоматичного керування, зокрема основи дискретного перетворення Лапласа.

Підручник розрахований головним чином на студентів електромеханічного напрямку, проте може бути корисним студентам інших спеціальностей, пов'язаних з автоматизацією технологічних процесів та установок.

1.1 Основні поняття

Під *автоматизацією* розуміють проведення тих чи інших операцій без участі людини або з обмеженою її участю. У першому випадку процеси називають *автоматичними*, а в другому — *автоматизованими*. Корінь наведених термінів «авто» походить від давньогрецького слова «аутос», що означає «сам», «самостійний».

Під *автоматикою* розуміють сферу науки й техніки, яка займається розробкою теоретичних методів і технічних засобів (елементів і систем), що забезпечують розв'язання завдань дослідження, виготовлення й експлуатації окремих установок і технологічних комплексів на основі їх автоматизації.

Автоматизований (автоматичний) процес може бути досить простим (наприклад, забезпечення сталого рівня рідини в деяких посудинах) і досить складним (забезпечення потрібного режиму роботи літака за допомогою автопілота).

При автоматизованому (напівавтоматичному) режимі роботи установки (механізму, машини), яку в загальному випадку називають *об'єктом автоматизації*, функція людини здебільшого зводиться до вмикання об'єкта або до виконання окремих ручних операцій.

Основні переваги автоматизації полягають у можливостях забезпечити:

- зростання продуктивності та поліпшення умов праці;
- виконання робіт у важкодоступних чи взагалі недоступних для людини сферах (радіоактивні зони, космос, окремі види металургійного та гірничого виробництва);
- підвищення точності, якості технологічних процесів і відповідних виробів;

- зростання надійності та техніко-економічних показників і загальної культури виробництва та кваліфікації обслуговуючого персоналу.

Автоматизація ефективно застосовується на сучасному етапі розвитку людства для досягнення зростання показників ресурсо- та енергозбереження, поліпшення екології довкілля, якості та надійності продукції.

Автоматизація виробництва здійснюється за допомогою автоматичних пристроїв, які можна класифікувати за різними ознаками (при цьому під «пристроєм» розуміють закінчену конструкцію, яка може діяти самостійно).

Однією з найпоширеніших є класифікація за функціональним призначенням, згідно з якою виділяють такі автоматичні пристрої: автоматичного контролю та сигналізації, автоматичного захисту, обчислювально-лічильні, блокуючі, автоматичного керування.

Пристрої *автоматичного контролю та сигналізації* забезпечують контроль за перебігом технологічних процесів, станом приміщень та відповідну сигналізацію. При нормальних умовах процесів використовується оптична сигналізація, а при появі відхилень від цих умов — оптична й акустична сигналізація. Як приклад можна навести автоматичні пристрої контролю тиску газу в магістралях, напруги і навантаження в електромережах.

Пристрої *автоматичного захисту* забезпечують захист об'єктів при появі загрози для обладнання, продукції або обслуговуючого персоналу. Наприклад, електричний захист (струмовий, за напругою), захист від перевищення швидкості на підймальних установках, електричний захист від замикань на ґрунт, газовий захист масляних електротрансформаторів тощо.

Струмовий захист буває *максимальний* (захист від різкого перевантаження або короткого замикання) і *тепловий* (від поступового підвищення температури нагрівання електричних приладів за допустимі межі). Захист за *напругою* полягає у вимкненні електричних установок при зменшенні напруги до 0,65 від номінального значення (мінімальний захист) або повному її зникненні (нульовий захист).

Обчислювально-лічильні пристрої самостійно (без участі людини) виконують складні розрахунки орбіт супутників, ракет, найвигідніших технологічних режимів роботи, експрес-аналізи та ін.

Блокуючі пристрої мають призначення не допускати виконання хибних команд (наприклад, команд на виконання «зустрічних» маршрутів на одноколійних шляхах залізничного транспорту).

Пристрої *автоматичного керування* забезпечують бажані зміни в ході процесів. Це — найскладніші і дуже поширені пристрої автоматики, теорія роботи яких і становить предмет вивчення курсу «Теорія автоматичного керування».

1.2

Короткі історичні відомості про розвиток автоматики, теорії автоматичного керування та кібернетики

Вважають, що автоматика є порівняно молодим напрямом розвитку науки й техніки. Однак відомо, що ідеї автоматики і нескладні автоматичні пристрої використовувалися ще в давні часи в Єгипті, Греції та інших країнах. Так, жерці Єгипту користувалися різними автоматичними пристроями при спорудженні пірамід і храмів.

Про «залізну людину» феодала Альберта Великого, яка виконувала функції швейцара — відчиняла і зачиняла двері приймальної зали, відомо із середніх віків.

Проте автоматичні пристрої того часу ще суттєво не впливали на загальний розвиток людства і його продуктивних сил.

Першим автоматом, який мав помітний вплив на цивілізацію, був годинник. Для підвищення точності ходу годинників було розроблено відповідні регулятори: поплавковий — для водяних годинників і маятниковий (1675 р., голландський фізик і математик Х. Гюйгенс) — для механічних.

Інтенсивний розвиток автоматики почався в XVIII — XIX ст. у зв'язку з промисловим переворотом в Європі, пов'язаним з використанням енергії пари.

Першим промисловим регулятором того часу був поплавковий регулятор, розроблений І. І. Ползуновим для «вогнедіючої машини» (парового котла), яку він побудував у 1765 р. у м. Барнаулі.

Принципову спрощену схему машини Ползунова з поплавковим регулятором рівня води у паровому котлі К показано на рис. 1.1. При підвищенні витрат пари рівень води H знижувався, поплавковий $П$ опускався і діяв на замикач $З$, збільшуючи надходження води в котел.

1.2. *Короткі історичні відомості про розвиток автоматичної теорії автоматичного керування та кібернетики*

При зменшенні витрат пари надходження води в котел зменшувалося. Це давало змогу різко зменшити коливання рівня води в котлі та рівня тиску пари.

На принципі зміни керованих технологічних параметрів залежно від їх відхилення відносно заданого значення в 1784 р. англійський механік Дж. Уатт побудував відцентровий регулятор швидкості парової машини.

Принцип керування за відхиленням величини від заданого значення, відомий як принцип Ползунова—Уатта, дістав поширення в сучасній техніці.

У 1830 р. Шиллінг у розробленому ним телеграфі запропонував вперше електромагнітне реле, яке дістало практичне застосування в різних сферах промисловості.

У 1854 р. російський військовий інженер К. І. Константинов створив перший електромагнітний регулятор швидкості переміщення гарматних башт військово-морських суден, який мав велике зна-

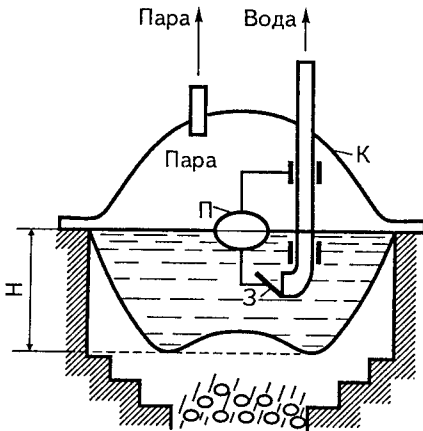


Рис. 1.1

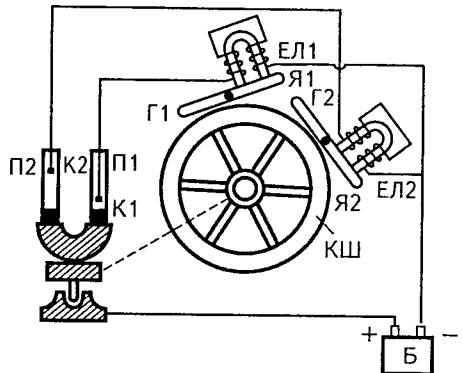


Рис. 1.2

чення для підвищення влучності й швидкодії морської артилерії (рис.1.2). Колесо-шків КШ, сполучене з гарматною баштою, при її обертанні приводило в дію систему з'єднаних посудин П1 і П2, заповнених ртуттю. При збільшенні швидкості обертання гарматної баш-

ти під дією відцентрової сили ртуть замикала контакт К1, що зумовлювало виникнення електричного кола: плюс батарея Б, контакт К1, обмотка електромагніту ЕЛ1, мінус батареї Б.

При цьому якір Я1, зв'язаний з гальмом Г1, повертався, що спричинювало виникнення гальмівного зусилля на колесі КШ. З підвищенням швидкості замикався контакт К2 і під дією гальма Г2 виникало додаткове гальмівне зусилля.

У 1856—1871 рр. В. М. Чиколев розробив регулятори для дугових ламп, у 1887 р. О. Г. Столетов винайшов фотоелемент, а в 1871 р. математик П. Л. Чебишов у своїй праці про відцентровий регулятор почав теоретичні дослідження автоматичних регуляторів.

Потреба в розвитку теорії автоматичного керування (ТАК), особливо її частини відносно замкнутих систем теорії автоматичного регулювання (ТАР), виникла з появою першої машини-двигуна І. І. Ползунова, а також із винаходом Джеймсом Уаттом відцентрового регулятора швидкості парової машини.

У ХІХ ст., відомому як «вік пари», відбувалося вдосконалення регуляторів парових машин. У кінці століття з'явилися автоматичні регулятори нових технологічних об'єктів — парових і гідравлічних турбін та парових котлів. Виникла потреба регулювання не тільки швидкості, а й тиску, витрат робочого тіла (пари), температури та інших параметрів. У цей період з'являються перші електричні генератори, і з початку ХХ ст. великими темпами починає розвиватись електроенергетика. Дедалі більша частина робочих машин і механізмів переводиться на живлення електричною енергією, з'являються нові, потужніші і різноманітніші види електроприводів, ускладнюються завдання керування ними, актуальнішим стає питання розвитку та використання різних електричних пристроїв і електромеханічних двигунів. З появою електричних генераторів постають завдання регулювання напруги і частоти, які потребують розробки відповідних регуляторів.

Розвиток електроприводів і відповідних електромеханічних систем автоматичного регулювання (ЕМ САР) приводить до розробки регуляторів потужності та швидкості, які на початку забезпечували підтримку регульованих параметрів на сталому рівні. З ускладненням технологічних потреб завдання автоматичних систем стають складнішими — виникає потреба забезпечувати автоматичну зміну параметрів за відомими законами (програмне регулювання) або за законами, які формуються залежно від умов роботи об'єктів (слід-

кувальні електромеханічні системи автоматичного керування — ЕМ САК).

Поширення автоматичних регуляторів зумовило необхідність в їх розробці та експлуатації. Одна з перших праць у цьому напрямі належить математику П. Л. Чебишову, який вивчав проблему «ізохронного» (астатичного) регулятора. Однак фундатором інженерних методів ТАР вважають професора Санкт-Петербурзького Практичного технологічного інституту І. О. Вишнеградського, який у 1876 р. опублікував працю «Про загальну теорію регуляторів», згодом розвинувши її положення в праці «Про регулятори прямої дії». Розроблені Вишнеградським методи дослідження стійкості і якості динамічних режимів САР парових машин дали змогу виявити вплив параметрів ланок на характеристики ЕМ САР третього порядку.

Подальший свій розвиток ТАР дістала в працях словацького вченого А. Стодоли й австрійського математика А. Гурвіца, за результатами яких було розроблено методи, що сприяли дослідженню САР будь-якого порядку.

Приблизно в той самий час питання ТАР почали розвиватись у Англії в працях Дж. Максвелла і Е. Рауса.

Велике значення для розвитку теорії автоматичного керування мали дослідження академіка О. М. Ляпунова, який в 1892 р. у своїй праці «Загальна задача про стійкість руху» заклав основи теорії стійкості нелінійних динамічних систем, а також обґрунтував вихідні положення лінійної теорії автоматичного керування.

Важливою подією було опублікування М. Є. Жуковським у 1909 р. першого російського підручника «Теория регулирования хода машин», в якому, крім узагальнення відомих положень, наведено нові дослідження регулятора з сухим тертям, основи теорії переривчастого регулювання.

У ХХ ст. енергія пари дедалі більше замінювалась електричною енергією, і питанням автоматизації різних електроустановок приділялося все більше уваги. У цей період виникають автоматичні електростанції, автоматизуються окремі промислові ділянки, цехи та підприємства в цілому.

У подальший розвиток теорії автоматичного керування свій внесок роблять учені різних країн світу.

В 30-ті роки ХХ ст. з'являються нові частотні методи дослідження, які розроблялися в працях американського вченого Х. Найквіста, російського — А. В. Михайлова та ін.

У 1946 р. Г. Бодє та Л. Мак-Кол застосували в практичних цілях логарифмічні частотні характеристики. Г. Браун, А. Холл, Д. Кемпбелл, Г. Честнад, В. В. Солодовніков та інші вчені розробили зручні для інженерної практики методи та методики дослідження й синтезу систем автоматичного керування на основі частотних характеристик.

Значний внесок у розвиток нелінійної теорії автоматичного керування зробили О. О. Андронов, М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, А. І. Лур'є, О. М. Льотов, І. М. Вознесенський, Л. С. Гольдфарб та ін.

У теорію синтезу нелінійних систем значний внесок зробив румунський вчений В.-М. Пóпов.

Для розвитку теорії інваріантності (незалежності об'єкта від дії збурень) велике значення мали праці Г. В. Щипанова, В. С. Кулебакіна, Б. М. Петрова, О. І. Кухтенка та інших вчених.

У 60—80-ті роки теорія автоматичного керування вирішує дедалі складніші питання з розробки нових систем, методів їх дослідження та синтезу. Так, у теорію розвитку систем зі змінною структурою вагомий внесок зробив С. В. Ємельянов.

Одним із відомих вчених у галузі основ теорії релейних та імпульсних систем є Я. З. Ципкін.

У розвиток теорії оптимального керування вагомий внесок зробили Л. С. Понтрягін, М. М. Красовський, О. М. Льотов та ін.

Великою подією в розвитку ТАК була поява в 1948 і 1952 рр. праць американського вченого Н. Вінера, які стали основою нового напрямку розвитку ТАК — кібернетики (науки про загальні положення керування і зв'язок у різних системах). Вагомий внесок у її розвиток зробили українські вчені В. М. Глушков і О. Г. Івахненко та російські вчені А. І. Берг і А. М. Колмогоров.

На основі методів кібернетики було розроблено автоматизовані людино-машинні системи, що дістали назву «Автоматизовані системи керування» (АСК), у тому числі системи керування технологічними процесами (АСК—ТП), в яких широко застосовується електронна обчислювальна техніка.

Термін *кібернетика* походить від давньогрецького слова «кібернетос» (рульовий, який керує рухом). У 1843 р. французький фізик А. Ампер, виконуючи класифікацію існуючих і можливих у подальшому наукових напрямів розвитку, запропонував назвати науку про загальні закони керування *кібернетикою*.

Нині під *керуванням* розуміють будь-яку дію, що вносить бажані зміни в процес (цілеспрямована дія) і ґрунтується на використанні початкової та робочої інформації.

При цьому під *інформацією* розуміють різні відомості, які дістають на підставі досвіду в найширшому його розумінні (історичному, технічному, експериментальному та ін.).

Початкова (апріорна) *інформація* — це інформація, яка вже є до початку роботи об'єкта (системи).

Під *системою* в даному разі розуміють деяке взаємопов'язане ціле, що складається з об'єкта (або об'єктів) керування та інших елементів, котрі забезпечують необхідний характер функціонування даного цілого за рахунок підпорядкованості й узгодженості його складових.

Робоча інформація — це відомості, які дістають у ході роботи системи.

У першій праці Н. Вінера (1948 р.) «Кібернетика або керування і зв'язок у живому та машині» кібернетика розглядалась як наука про керування і зв'язок у технічних і біологічних системах. У подальшому Н. Вінер запропонував поширити сферу її впливу на будь-які системи, включаючи й соціальні.

Нині під кібернетикою дедалі частіше розуміють науку про керування і зв'язок в організованих системах, у системах, до складу яких входять живі організми та їх об'єднання (людино-машинні системи). При цьому керування розглядається як процес перетворення та використання інформації. Інформація про об'єкт перетворюється згідно з метою керування й у вигляді сигналів (відповідних команд) подається до об'єкта.

Академік А. М. Колмогоров визначив кібернетику як вчення про способи добування, збереження, перетворення і використання інформації в машинах, живих організмах та їх об'єднаннях.

Крім зазначених вище властивостей кібернетики, її основними особливостями є те, що:

- керування виконується при неповній початковій інформації; наявна початкова інформація не може забезпечити вирішення поставленого завдання в повному обсязі на весь час роботи системи; для його вирішення необхідно діставати та аналізувати робочу інформацію, що надходить, і з її врахуванням формувати відповідні команди керування;
- для вироблення потрібної команди керування, як правило, вирішується логічне завдання щодо вибору або формування найвигіднішого в даних умовах, тобто оптимального, рішення;

- керування може виконуватися в системах з кількома об'єктами (велика система), які часто мають протилежні «інтереси», в умовах випадкового характеру зміни властивостей, збурень (характеристик) системи.

За цими особливостями кібернетику можна визначити також як науку про оптимальне керування складними динамічними системами (А. І. Берг).

Принципи кібернетики як загальної науки про керування в найрізноманітніших умовах (системах) покладено в основу сучасних термінів і понять теорії автоматичного керування.

У кінці ХХ ст. дістають розвиток кібернетичні системи автоматизації, які ґрунтувались на застосуванні методів «нечітких множин» (фаззі-логіки), що надавало можливість використовувати при рішенні задач керування принципи асоціативного мислення. Розроблені на основі такого підходу регулятори одержали назву *фаззі-регуляторів*, а відповідні системи — *фаззі-систем керування*.

Основні переваги даного виду систем полягають у можливості при великій кількості (множини) різних сигналів на вході регулятора сформулювати вихідну функцію (лінійну чи нелінійну), яка дає змогу забезпечити необхідну якість керування при достатньо гнучкій, надійній та відносно дешевій дискретно-керованій системі автоматичного керування (САК).

Іншим сучасним напрямом розвитку кібернетичних САК є метод «нейронних сіток», що ґрунтується на побудові системи, яка використовує підходи, подібні процесам, котрі виникають у нейронних сітках мозку людини при обробці інформації.

Використання методу нейронних сіток є ефективним у разі, коли аналітичне визначення взаємовпливу між багатьма параметрами системи дуже складне або взагалі неможливе. Побудовані на використанні цього підходу нейроконтролери також, як і в разі фаззі-керування, можуть бути реалізовані за допомогою відповідних програмних пакетів, сучасних засобів обчислювальної техніки.

Теорія автоматичного керування продовжує інтенсивно розвиватись. Її основні напрями пов'язані з питаннями оптимізації технологічних процесів, робототехнікою, впровадженням у виробництво високоточних, швидкодіючих цифрових систем із дедалі ширшим використанням обчислювальної техніки та мікропроцесорного керування.

Високий рівень розвитку ТАК значною мірою зумовлений потребами розвитку космонавтики, ракетної техніки, а також потребами автоматизації технологічних процесів.

Серед сучасних напрямів розвитку ТАК — теорія робототехнічних систем, гнучкі виробництва, багатовимірні екстремальні системи, теорія оптимального керування тощо.

1.3

Система автоматичного керування та її елементи

Під системою автоматичного керування розуміють сукупність об'єкта керування (робочої машини, механізму) та з'єднаних певним чином елементів, взаємодією яких забезпечується розв'язання поставленого завдання керування об'єктом.

Основними елементами САК є: об'єкт керування; вимірювальний, або чутливий елемент; керуючий елемент; виконуючий елемент (орган).

Вимірювальний (чутливий) елемент фіксує зміни вихідної (регульованої) величини об'єкта і в багатьох випадках перетворює її на величини іншого роду. В деяких САК чутливий елемент контролює зовнішні збурення, що діють на об'єкт, вони визначаються функцією $f(t)$.

Як чутливі елементи САК часто використовують датчики, що перетворюють неелектричні величини (швидкість, тиск, зусилля, момент та ін.) на електричні (опір: активний, індуктивний, ємнісний; постійна або змінна напруга, струм, частота, фаза та ін.). Існують датчики активного опору, індуктивні, ємнісні, а також датчики напруги, струму, швидкості, тиску, моменту тощо.

Керуючий елемент дістає інформацію від чутливого елемента і формує потрібний сигнал для виконуючого елемента. Часто він виконує і функції підсилювача. Основними видами підсилювачів є напівпровідникові, електромашинні, магнітні, електронні та йонні. Із неелектричних найпоширеніші гідравлічні та пневматичні підсилювачі.

Як приклад розглянемо формування потрібного сигналу за допомогою електромашинних або магнітних підсилювачів, у яких сигнал

формується за допомогою обмоток керування. В цьому разі дійсна величина у вигляді напруги (струму) від чутливого елемента надходить до однієї з обмоток керування, яка формує відповідний магнітний потік, пропорційний дійсному значенню регульованої величини x_d . Друга обмотка (завдання) формує зустрічний магнітний потік, пропорційний заданому значенню регульованої величини x_z .

Як результат взаємодії зустрічно ввімкнених обмоток керування формується сигнал розузгодження

$$\Delta = x_z - x_d, \quad (1.1)$$

який після відповідного підсилення надходить до виконуючого елемента системи.

Виконуючий елемент забезпечує потрібний режим роботи керуючих органів об'єкта.

Залежно від технологічних особливостей об'єкта керування виконуючим елементом можуть бути різного роду серводвигуни обертового або поступального руху, що діють на відповідні технологічні регулюючі пристрої — засувки трубопроводів подачі стисненого повітря, пари, води, ручки керування, перемикачі швидкості та ін.

Крім згаданих основних елементів, до САК можуть входити й інші, які виконують функції проміжних перетворювачів, підсилювачів тощо.

Якщо всі елементи САК позначити прямокутниками, розмістивши їх у послідовності, що відповідає їх взаємодії, а напрям цієї взаємодії вказати стрілками, то дістанемо *функціональну схему* САК. Якщо на функціональній схемі відобразити характеристики (рівняння, криві залежності вихідних параметрів від часу), що визначають динамічні властивості елементів системи, то дістанемо так звану *структурну схему* САК. Елементи відповідних схем називають *ланками*. Треба мати на увазі, що іноді, для зручності математичного описання динамічних процесів, можна об'єднувати частини деяких фізичних елементів в окрему ланку структурної схеми.

Функціональні (структурні) схеми різних САК можуть відрізнятися одна від одної за багатьма ознаками, які детально розглядатимуться далі.

1.4

Система автоматичного регулювання

Розглянемо робочу машину, яка є об'єктом автоматичного керування. Навантаження її P необхідно підтримувати на однаковому рівні, забезпечуючи рівність його заданому навантаженню P_3 :

$$P = P_3.$$

Нехай навантаження об'єкта можна змінити за рахунок відповідного зменшення (або збільшення) швидкості його руху. Якщо поставлене завдання вирішується при ручному керуванні, то машиніст (оператор) повинен виконати такі елементарні операції:

- визначити за допомогою вимірювального приладу дійсне значення навантаження P_d ;
- обчислити відхилення дійсного значення від заданого та його знак (величину розузгодження):

$$\Delta P = P_3 - P_d,$$

- залежно від значення і знака ΔP подіяти на органи керування швидкості робочої машини в напрямі зменшення ΔP ;
- визначити нове значення P'_d .

Якщо $P'_d \neq P_3$, то цикл керування повторюється.

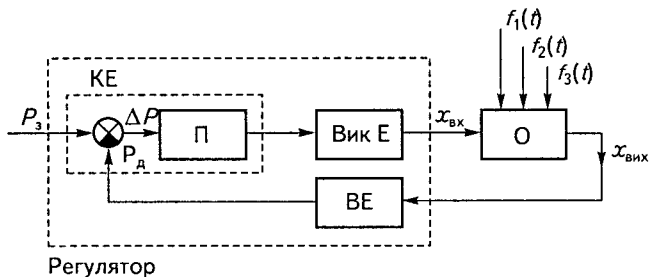
При вирішенні поставленого завдання за допомогою автоматичного керування окремі операції мають виконуватись окремими елементами системи: вимірювальним (чутливим) — ВЕ, керуючим — КЕ, виконуючим — Вик Е.

Позначивши робочу машину (об'єкт керування) буквою О, а збурення, що діють на неї, — $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$, побудуємо відповідну функціональну схему САК (рис. 1.3, а). На рисунку керуючий елемент показано у вигляді двох складових: вузла порівняння і підсилювача П.

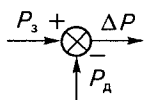
Три варіанти визначення вузлів порівняння, що трапляються в технічній та навчальній літературі, наведено на рис. 1.3, а—в.

Особливістю наведеної схеми САК є замкнута функціональна схема. САК, які мають таку функціональну (структурну) схему, називають *системами автоматичного регулювання* (САР), або системами зі зворотним зв'язком. Усі елементи замкненої САК, окрім об'єкта,

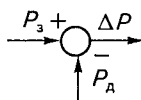
об'єднуються єдиним поняттям — регулятор (Р). У зв'язку з цим спрощену функціональну схему САР можна зобразити у вигляді двох елементів — об'єкта і регулятора (рис. 1.4). Слід підкреслити, що САР є окремим випадком системи автоматичного керування.



а



б



в

Рис. 1.3

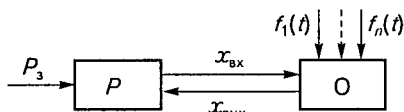


Рис. 1.4

Замикання САР має виконуватися таким чином, аби вихідна величина об'єкта $x_{\text{вих}}$, котра змінюється під впливом збурень $f_1(t), \dots, f_n(t)$, на вході регулятора була перетворена регулятором так, щоб вхідна величина об'єкта $x_{\text{вк}}$ діяла на об'єкт у напрямі, протилежному дії збурень. Даний зворотний зв'язок називають *головним від'ємним зворотним зв'язком САР*.

1.5

Принципи автоматичного керування.

Комбіновані системи автоматичного керування

Головними принципами автоматичного керування є принцип керування за збуренням (Понселе—Чиколева) і принцип керування за відхиленням (Ползунова—Уатта).

Принцип керування за збуренням іноді називають компенсаційним. Його було запропоновано французом Ж. Понселе і вперше широко використано в регуляторах дугових ламп освітлення російським електротехніком В. М. Чиколевім у другій половині XIX ст.

Суть принципу керування за збуренням полягає в тому, що залежно від зміни збурення $f(t)$, контрольованого вимірювальним елементом ВЕ, на вхід об'єкта О надходить величина $x_{вх}$, яка має діяти на об'єкт так, аби зумовити зміну режиму його роботи, що компенсує дію збурення відносно вихідної (регульованої) величини об'єкта.

Особливістю принципу керування за збуренням є використання розімкнутих (відносно вихідної величини об'єкта) схем керування (рис. 1.5). У цих схемах немає автоматичного контролю вихідної величини об'єкта $x_{вих}$: команда керування формується лише залежно від зміни збурення.

Перевагами керування за збуренням є відносна простота та надійність САК за наявності одного (головного) збурення, якщо іншими збуреннями можна знехтувати.

До недоліків цього принципу керування слід віднести труднощі контролю збурень у деяких технологічних об'єктах і дещо меншу точність. Ці недоліки особливо помітні, коли на об'єкт діє кілька рівноцінних збурень, врахування яких потребує підвищення складності та зменшення надійності САК, а нехтування ними різко знижує точність системи.

Принцип керування за відхиленням (дійсного значення вихідної величини об'єкта від його заданого значення) було запропоновано І. І. Ползуновим і вперше реалізовано в 1765 р. в його паровій машині для підтримання сталого рівня води в котлі. В 1784 р. англієць

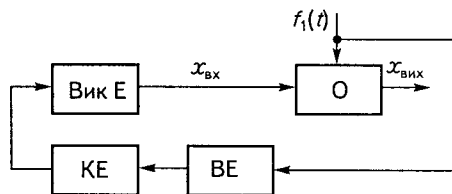


Рис. 1.5

Дж. Уатт вперше використав для стабілізації швидкості обертання парової машини відцентровий регулятор, який також діяв на принципі керування за відхиленням.

Для реалізації принципу керування за відхиленням САК має бути замкнутою. Основною особливістю і перевагою цього принципу є те, що САК реагує на відхилення дійсного значення регульованої величини від заданого незалежно від причин, які зумовили це відхилення. Отже, САК, побудована на даному принципі, враховує кінцевий результат усіх причин появи відхилення і тому може мати вищу точність керування.

САК, побудовані на принципі керування за відхиленням, мають складніші методи розрахунку, дослідження та настроювання. В цілому цей принцип керування використовується при потребі дістати високу точність як в статичних, так і в динамічних режимах.

На практиці використовуються також системи з *комбінованим принципом керування*. Принципову схему комбінованої САК показано на рис. 1.6. Вона має два канали керування.

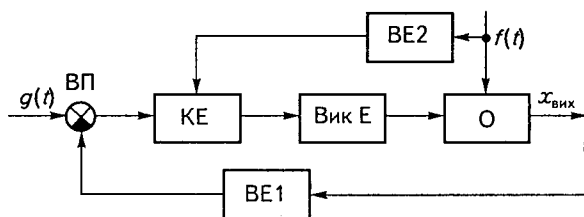


Рис. 1.6

Один діє за принципом керування за збуренням (BE2 — КЕ — Вик Е — О) і має розімкнутий контур, а інший — за принципом керування за відхиленням вихідної величини $x_{\text{вих}}$ від заданого значення $g(t)$ і має замкнутий контур (BE1 — ВП — КЕ — Вик Е — О).

Основною перевагою комбінованого керування є можливість дістати високу точність при кращих динамічних характеристиках, ніж у відповідній САК, побудованій за принципом керування за відхиленням.

1.6

Види систем автоматичного керування

Основні принципи класифікації. САК можна класифікувати за різними ознаками: принципом керування; кількістю регульованих параметрів і контурів; виглядом статичних і динамічних характеристик; структурними особливостями системи тощо.

Одним із поширених принципів класифікації є інформативний. В його основі лежать особливості здобуття і використання інформації.

Відповідну схему класифікації САК наведено на рис. 1.7. Розглянемо основні особливості окремих САК.

Системи з повною початковою інформацією. Такі системи ще називають *звичайними*. Вони мають початкову інформацію, достатню для розв'язання поставленого завдання на період всього часу роботи системи.

Звичайні системи бувають із розімкнутою і замкнутою структурними схемами (відповідно замкнуті і розімкнуті системи).

Замкнуті САК називають також системами зі зворотним зв'язком (або системами автоматичного регулювання). Вони діють за принципом Ползунова—Уатта.

САР бувають трьох видів: стабілізації, програмні і слідкувальні.

Системи стабілізації мають забезпечувати стале значення вихідної величини об'єкта

$$x_{\text{вих}} = \text{const}. \quad (1.2)$$

Прикладом таких систем можуть бути САР навантаження, напруги, частоти, швидкості, тиску газу, температури, рівня тощо. Це досить поширений вид САК.

Програмні САР мають забезпечувати зміну регульованої величини за деякою заздалегідь відомою програмою:

$$x_{\text{вих}} = \text{var} = g(t). \quad (1.3)$$

Слідкувальні САР також мають забезпечувати

$$x_{\text{вих}} = \text{var} = g(t),$$

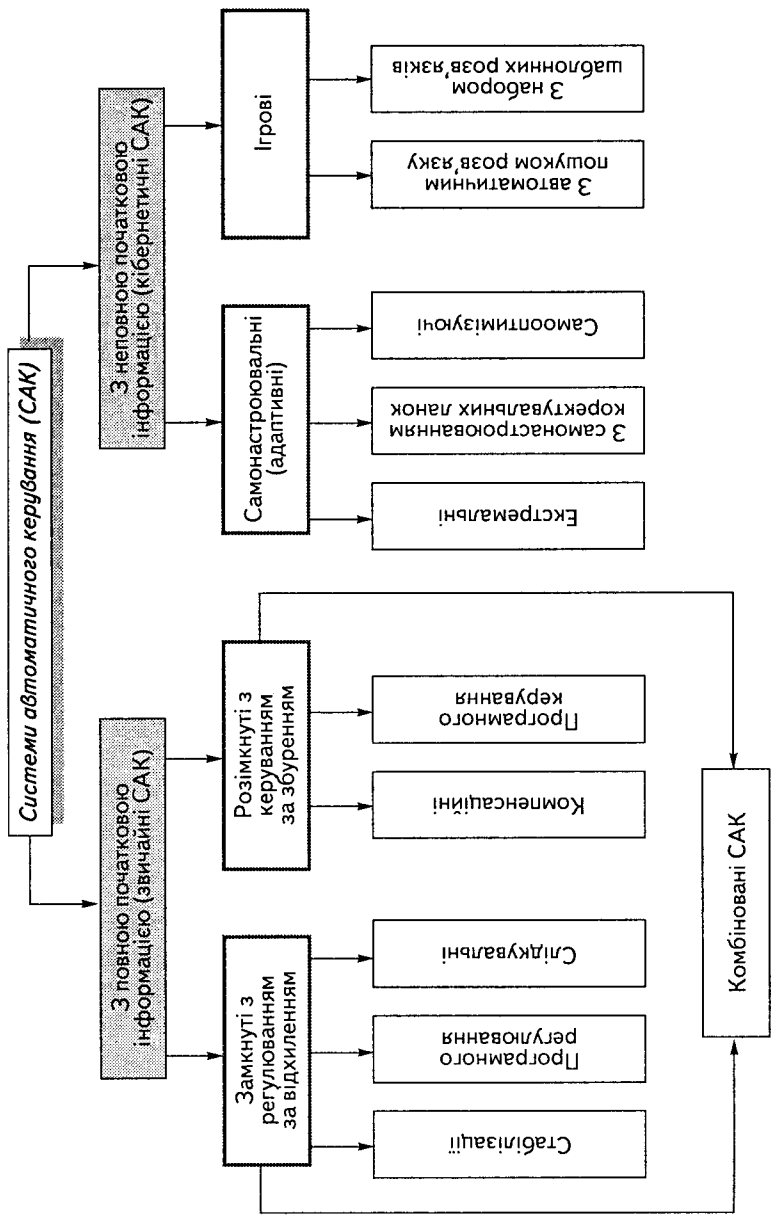


Рис. 1.7

але принципова їх відмінність від програмних САР полягає в тому, що потрібний для виконання закон зміни регульованої величини $g(t)$ заздалегідь не відомий, а формується в ході роботи системи.

Програмні системи широко використовуються у верстатах з програмним керуванням, системах програмного гальмування (наприклад, на шахтних підйомних машинах) тощо.

Характерним прикладом слідкувальних САР можуть бути різні системи наведення на ціль в ракетних військах, зенітній артилерії. В цьому разі потрібна програма заздалегідь не відома. Вона зумовлюється зміною положення об'єкта стеження (літака або ракети) і з великою точністю і швидкістю повинна відтворюватись системою наведення.

Розімкнуті САК бувають двох видів: компенсаційні і програмного керування. Вони діють за принципом керування за збуренням.

Компенсаційні системи забезпечують формування таких сигналів керування на вході об'єкта, які компенсують дію на нього відповідного збурення $f(t)$.

Системи програмного керування, на відміну від систем програмного регулювання, мають розімкнуту схему і згідно із заздалегідь заданою програмою забезпечують відповідну зміну режиму роботи об'єкта. При цьому потрібна робоча інформація може існувати у вигляді кулачків, профільних дисків, програм на перфокартах (перфострічках) тощо. В такий спосіб програмуються необхідні зміни технологічного процесу. Прикладом можуть бути ліфтові підйомні установки, де кінцеві вимикачі забезпечують необхідні зміни режиму роботи електропривода залежно від положення кабіни ліфта.

Системи з неповною початковою інформацією. Кібернетичні системи. Системи з неповною початковою інформацією, або кібернетичні, є такими, які для розв'язання поставлених завдань потребують додаткову інформацію, аналіз котрої дає змогу сформувати потрібні команди керування.

Кібернетичні системи існують двох видів: самонастроювальні та ігрові.

Самонастроювальні системи (СНС). До СНС належать екстремальні системи, системи з самонастроюванням керуючих ланок і самооптимізуючі.

У загальному випадку команда на керування об'єктом формується як результат взаємозалежностей між характеристиками об'єкта, елементів системи і збурення. Якщо в процесі роботи об'єкта деякі з характеристик змінюються, це може призвести до небажаної зміни режиму роботи об'єкта (системи) та погіршення якості процесів керування. СНС можуть пристосовуватись (адаптуватись) до зміни (часто випадкової) зовнішніх умов, забезпечуючи потрібні показники якості керування.

Функціональна схема СНС наведена на рис. 1.8. Основною особливістю СНС є додатковий регулятор ДР, на входи 1...4 якого надходить інформація про зміни збурення (1), завдання (2), значення вихідної величини об'єкта (3), параметри об'єкта (4).

Додатковий регулятор у результаті аналізу здобутої інформації формує коректуючу дію, яка надходить на вхід основного регулятора ОР і забезпечує самонастроювання (адаптацію) системи. Додатковий регулятор у кібернетичних САК, це, як правило, електронно-обчислювальна машина, яка забезпечує виконання логічних операцій і прийняття найвигідніших (оптимальних) у даних умовах рішень. Характерним прикладом СНС є автопілот на сучасних літаках, який залежно від зміни ваги, аеродинамічних характеристик літака, сили і напрямку вітру й інших факторів забезпечує оптимальний режим польоту.

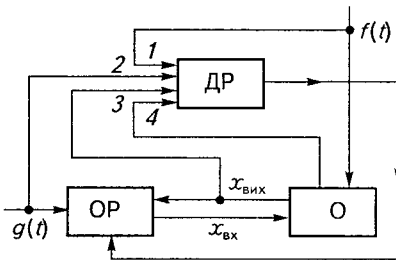


Рис. 1.8

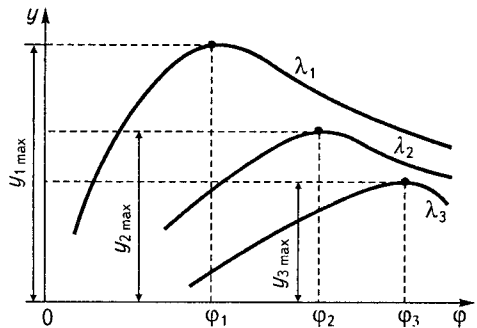


Рис. 1.9

Екстремальні СНС. На практиці досить часто постає завдання забезпечити керування на екстремумі деякої функції y (рис. 1.9), яка є функцією двох величин.

Нехай

$$y = f(\lambda, \varphi), \quad (1.4)$$

де φ — регулюючий параметр; λ — параметр, що характеризує стан об'єкта.

При деякому стані об'єкта $\lambda = \lambda_1$ для забезпечення роботи на екстремумі функції $y_{1 \max}$ необхідно мати в системі значення регулюючого параметра $\varphi = \varphi_1$. Якщо стан об'єкта зміниться і при цьому $\lambda = \lambda_2$, то для роботи на відповідному екстремумі нової характеристики $y = y_{2 \max}$ система повинна забезпечити нове значення регулюючого параметра $\varphi = \varphi_2$.

У разі ручного керування при великій швидкості зміни параметра λ потрібно було б увесь час змінювати настроювання системи, забезпечуючи рівність $y = y_{\max}$, що практично неможливо. Тому розв'язання подібних завдань потребує використання особливих екстремальних, самонастроювальних систем, які забезпечують автоматичне настроювання на екстремум відповідної функції. Екстремальні СНС використовують для забезпечення максимально можливої продуктивності, мінімального питомого рівня витрат енергії тощо.

Існують два види екстремальних СНС: з автоматичним пошуком екстремуму функції і безпошукові.

Основними методами автоматичного пошуку екстремуму функції є: метод послідовних кроків, метод знаходження похідних, спосіб запам'ятовування екстремуму, метод накладання вимушених коливань на вхід об'єкта.

Метод послідовних кроків (рис. 1.10). У системі встановлюють деяке довільне значення $\varphi = \varphi_1$, після чого фіксують відповідне значення $y = y_1$, дають приріст $\Delta\varphi$ і вимірюють $y = y_2$. Якщо $y_2 > y_1$, то дають новий приріст величині φ в тому самому напрямі (роблять новий «крок»). Якщо при цьому $y_3 < y_2$, то роблять зворотний крок, оскільки результат свідчить про проходження екстремуму функції. Внаслідок даної методики пошуку екстремуму в системі виникають коливання навколо точки фактичного

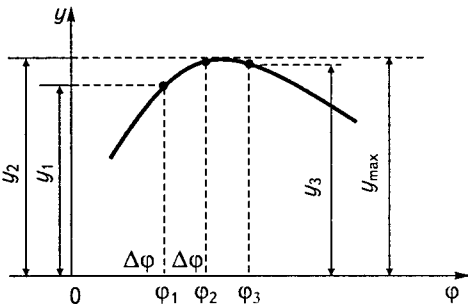


Рис. 1.10

екстремуму $y = y_{\max}$ і забезпечується режим роботи з настроюванням, близьким до максимального значення функції y_{\max} .

Метод знаходження похідних. Визначають знак похідної $\frac{dy}{d\varphi}$. Екстремум функції знаходиться в інтервалі

$$0 < \frac{dy}{d\varphi} < 0.$$

Спосіб запам'ятовування екстремуму. В цьому разі система відшукує екстремум функції y і запам'ятовує його, після чого відповідним чином реагує на відхилення функції y від екстремального значення.

Метод накладання вимушених коливань на вхід об'єкта (рис. 1.11). Характеристику об'єкта $y = f(\varphi)$ наведено на рис. 1.11, а. Якщо при роботі в точці a_0 на зростаючій частині характеристики на вхід об'єкта подати гармонічні коливання (рис. 1.11, в), то на виході об'єкта виникнуть періодичні коливання (рис. 1.11, б; крива 1).

Якщо буде пройдено екстремум функції $y = f(\varphi)$ і гармонічні коливання надходитимуть на вхід об'єкта при роботі його в точці b_0 вихідної характеристики, що відповідає «спадній» гілці, то фаза коливань на виході об'єкта зміниться на 180° (рис. 1.11, б; крива 2).

Така зміна фази коливань на виході об'єкта є ознакою проходження точки екстремуму. За допомогою фільтрів, що встановлюються на виході об'єкта, можна виділити змінну складову вихідного сигналу і використати її для керування виконавчим двигуном настроювання системи.

Загальним недоліком розглянутих СНС є наявність пошуківих коливань, а також їх

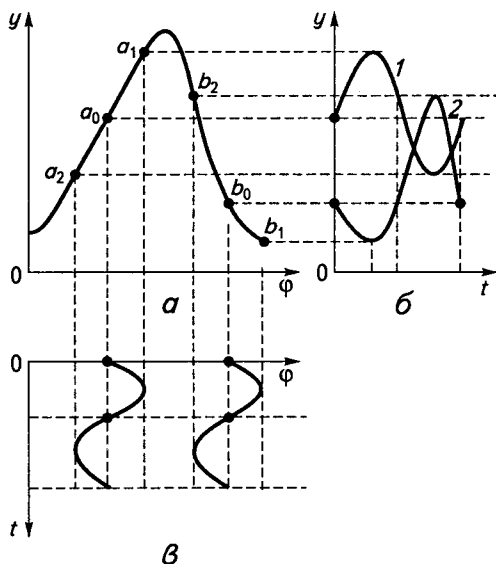


Рис. 1.11

відносно низька перешкодостійкість. На практиці трапляються об'єкти з екстремальними характеристиками, для яких за технологічних умов пошукові коливання неприпустимі. Для розв'язання завдань екстремального керування в цьому випадку необхідно використовувати безпошукові СНС.

Як приклад на рис. 1.12 наведено функціональну схему *безпошукової СНС*, де ЛО, НО — відповідно лінійна та нелінійна частини об'єкта; М1, М2 — моделі нелінійної частини об'єкта; П1, П2, ПЗ — підсилювачі; ВЕ — виконуючий елемент.

До кожної моделі прикладено одночасно збурення λ' і керуючі дії x . На модель також впливають додаткові керуючі дії $+\Delta x$ та $-\Delta x$.

Якщо на вхід НО подіє керуючий сигнал x_1 , то на першій моделі вихідна величина, що відповідає вхідному сигналу $x_1 + \Delta x$, дорівнюватиме (після підсилення) φ'_1 , а на виході другої моделі — φ'_2 . При цьому характеристики моделей зміщуються вліво і вправо відносно характеристики об'єкта. Вихідні величини моделей подаються на пристрій порівняння ПП.

Після підсилення вихідна величина ПП з урахуванням її знака формує сигнал керування μ , який забезпечує рівність

$$\varphi'_1 - \varphi'_2 = 0.$$

Цю рівність можна дістати лише при значеннях x , що відповідають екстремуму характеристики об'єкта.

Отже, за наявності моделей і відповідної системи керування можна забезпечити роботу об'єкта з екстремальним значенням його вихідної величини φ незалежно від значення збурення λ .

СНС із самонастроюванням коректувальних ланок. Основною особливістю даних систем є те, що перехідний процес самонастроювання в контурі додаткового регулятора ДР (див. рис. 1.8) триваліший порівняно з процесом у контурі основного регулятора ОР. У зв'язку з цим результат самонастроювання можна використовувати лише на наступних етапах (циклах) роботи об'єкта.

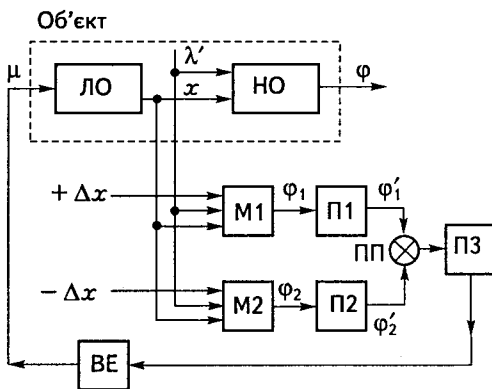


Рис. 1.12

Існують три основні види таких СНС: з екстремальним самонастроюванням, з розімкнутим і замкнутим контуром самонастроювання коректувальних ланок.

Самооптимізуючі СНС. Характерною особливістю таких систем є можливість використання результатів самонастроювання системи в даному циклі її роботи. Це досягається завдяки тому, що тривалість перехідного процесу в контурі додаткового регулятора менша, ніж у контурі основного регулятора.

Ігрові системи автоматичного керування (ІСАК). Ігрові системи мають такі основні особливості:

- процес керування виконується в деякій системі з багатьма взаємозв'язаними об'єктами («велика система»);
- інтереси сторін (об'єктів) є протилежними;
- дії сторін і збурень у системі можуть відбуватися за відомими правилами (алгоритмами), а також мати випадковий характер.

Як класичний аналог принципів побудови і дії ігрової системи, що визначило назву цього виду САК, можна навести карточні ігри, які об'єднують кількох гравців (або груп) з різними інтересами. Надходження карт до гравців має випадковий характер, гра йде за неповної інформації; кожен гравець хоче виграти.

Команди в ІСАК можуть формуватися за порівнянням багатьох можливих розв'язків (виборів) на окремих етапах — кроках.

Критерієм для порівняння окремих виборів є функція вигоди, яка визначається заздалегідь на основі аналізу керованої операції в даній системі за допомогою методів теорії дослідження операцій.

Розв'язок, що відповідає найбільшому значенню функції вигоди, називається *оптимальним*. (Тому не мають сенсу досить поширені на практиці вислови «найбільш оптимальний».)

Основним елементом ІСАК є керуюча машина КМ (рис. 1.13), яка має забезпечувати на основі робочої та наявної початкової інформації формування найвигіднішого (оптимального) процесу керування в даних умовах і прийнятих обмеженнях.

Початкова інформація про першу сторону повинна мати необхідні відомості про властивості керованого процесу і бути достатньою для знаходження виборів і функції вигоди.

Інформація про другу сторону зазвичай мінімальна. Робоча інформація має поточні відомості про стан і дії сторін.

ІСАК бувають двох видів: з набором шаблонних розв'язків; з автоматичним пошуком оптимального розв'язку.

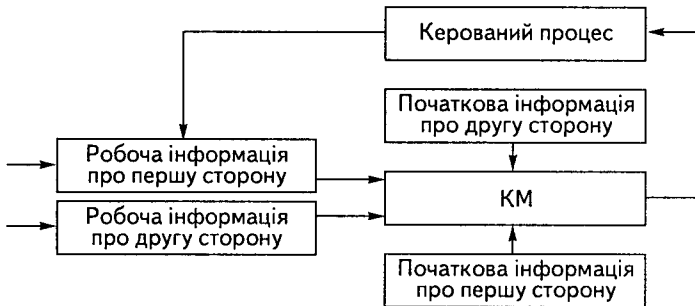


Рис. 1.13

У системі з набором шаблонних розв'язків оптимальні розв'язки для конкретних умов знаходяться заздалегідь і зберігаються в пам'яті КМ.

Знаходження *оптимального розв'язку* забезпечується перебором відомих розв'язків і вибором такого, який найбільшою мірою відповідає конкретним умовам. Особливостями ІСАК даного виду є: відносно тривалий процес знаходження розв'язку; приблизний характер знаходження оптимального розв'язку завдяки тому, що в пам'яті машини зберігається скінченна кількість знайдених раніше розв'язків (при цьому прийнятий за оптимальний розв'язок в окремому випадку може не досить точно відповідати конкретним умовам); необхідність мати велику пам'ять ЕОМ.

Кращими є ІСАК з автоматичним пошуком оптимального розв'язку, які на основі інформації про другу сторону з більшою швидкістю і точністю знаходять оптимальний розв'язок.

На основі принципів дії ІСАК розроблено автоматизовані системи керування (АСК) найрізноманітнішого призначення: автоматизовані системи керування технологічними процесами (АСК ТП); виробництва (АСК В); промисловими комплексами (АСК ПК) та ін.

За допомогою ІСАК розв'язуються складні транспортні завдання оптимізації зустрічних перевезень вантажів; завдання пошуку оптимального розміщення електростанцій, окремих виробництв тощо.

Розглянемо класифікацію САК за іншими критеріями та їх основними особливостями.

Системи прямої і непрямой дії. В системах *прямої дії* вимірювальний елемент безпосередньо діє на регулюючий орган. Так, на рис. 1.14 показано систему прямої дії регулювання швидкості. Ви-

мірювальний елемент ВЕ, що контролює швидкість обертів деякого об'єкта O , самостійно діє на керуючий орган, який змінює кількість енергоносія Q , котрий надходить в об'єкт керування. Якщо швидкість обертання ω збільшується, то кулі $K1$ і $K2$ під дією відцентрової сили переміщуються вгору, що приводить до переміщення муфти M та регулюючого органу PO . Завдяки цьому зменшуються надходження енергоносія Q і швидкість обертання об'єкта ω .

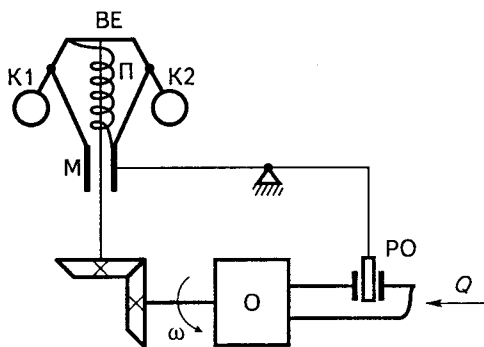


Рис. 1.14

Основною перевагою систем прямої дії є простота і надійність, недоліком — необхідність мати потужний і, внаслідок цього, малочутливий, досить інерційний вимірювальний елемент, який в змозі безпосередньо переміщувати керуючий (регулюючий) орган об'єкта. При цьому низькій чутливості вимірювального елемента відповідає мала точність керування, а значна інерційність негативно впливає на динамічні властивості системи.

У системах *непрямої дії* вихідний сигнал вимірювального елемента підсилюється за допомогою підсилювача. САК швидкості об'єкта непрямої дії наведено на рис. 1.15. У цій системі муфта M вимірюва-

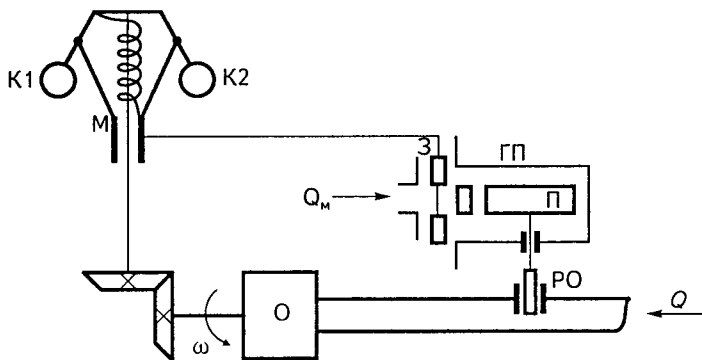


Рис. 1.15

льного елемента діє на золотник 3 гідропідсилувача ГП. Золотник, виходячи з нейтрального положення, як показано на рисунку, забезпечує надходження масла Q_m у верхню порожнину циліндра гідропідсилувача, що веде до відповідного переміщення поршня П, регулюючого органу РО і швидкості ω . Перевагою систем непрямої дії є більша точність і часто кращі динамічні властивості, що зумовлює їх широке застосування на практиці.

Статичні й астатичні САК. Основною із ознак даних систем є вигляд регулювальної характеристики, що показує залежність регульованої величини в статичному положенні від витрат робочого середовища.

Статичною САК називають систему, в якій регульована величина при зміні зовнішніх збурень на об'єкті, змінюючись в деяких допустимих межах, після закінчення перехідного процесу залежно від зовнішнього збурення має різні значення.

Регульовальна характеристика в загальному випадку має вигляд

$$y = C + \Delta(x), \quad (1.5)$$

де C — середнє значення регульованої величини x ; $\Delta(x)$ — функція збурення, що визначає відхилення регульованої величини від її середнього значення в межах зони регулювання.

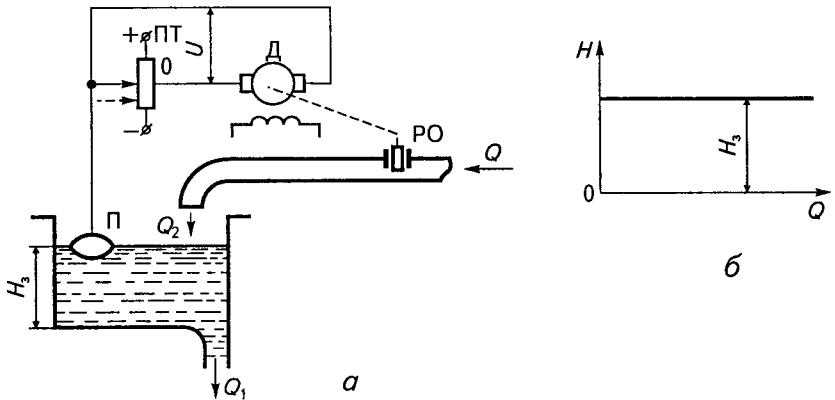
Необхідна умова якісного регулювання $C \gg \Delta(x)$.

Астатичною САК називають систему, в якій регульована величина при зміні зовнішніх збурень після завершення перехідного процесу набуває строго сталого значення при різних величинах зовнішніх збурень.

Як приклад розглянемо астатичну (рис. 1.16, а) і статичну (рис. 1.17, а) САК рівня H деякого робочого середовища (рідини) Q .

Завданням і статичної, і астатичної систем є підтримання сталого рівня H (стабілізація) в резервуарі при зміні величини Q_1 .

Якщо при астатичній САК витрати Q_1 збільшаться, то у зв'язку з початковим зменшенням рівня H поплавок П переміститься вниз, що приведе до відповідного переміщення повзунка потенціометра ПТ відносно його початкового положення 0. При цьому на якірному колі двигуна Д виникне напруга U відповідної полярності. Завдяки цьому двигун переміщуватиме регулюючий орган системи РО, забезпечуючи зростання надходження кількості рідини Q_2 і рівня H . Регулюючий орган переміщуватиметься доти, доки напруга на якірному колі досягне нуля, що можливо тільки при значенні рівня, який до-

Рис. 1.16

рівнює заданому: $H = H_3$ за умови рівності витрат і надходження рідини $Q_1 = Q_2 = Q$.

Згідно з викладеним вище в астатичній системі можливе лише одне положення рівноваги при значенні регульованої величини $H = H_3$, яка досягається в статичному стані при різних значеннях витрат робочого середовища Q .

Регульовальна характеристика $H = f(Q)$ (рис. 1.16, б) астатичної системи є горизонтальна пряма.

Якщо знехтувати нечутливістю елементів системи, то астатична САР підтримує регульовану величину після завершення перехідного процесу на заданому рівні без будь-яких відхилень.

У статичній САР (рис. 1.17, а) при збільшенні витрат ($Q_1 > Q_2$) рівень H і поплавок П переміщуватимуться вниз. Завдяки цьому регулюючий орган РО забезпечить збільшення надходження робочого середовища Q_2 .

Нового стану рівноваги буде досягнуто при $Q_1 = Q_2 = Q$ для нового рівня H , меншого за початковий.

Таким чином, статичні САР не можуть забезпечувати підтримку регульованої величини на строго сталому рівні. Отже, можливі відхилення регульованої величини від заданого рівня H_3 залежно від витрат робочого середовища. Регульовальна характеристика статичної САР після завершення перехідного процесу (статична характеристика статичної САР) є похилою прямою (рис. 1.17, б).

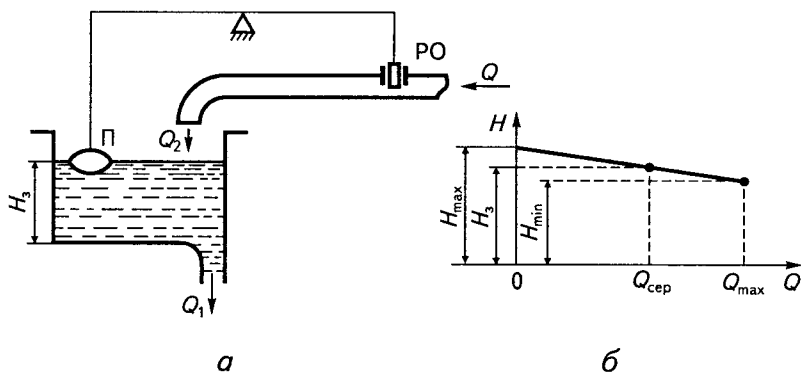


Рис. 1.17

Точність підтримання заданого значення регульованої величини в статичних системах визначається коефіцієнтом нерівномірності або статизмом δ .

У даному разі

$$\delta = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{H_{\text{сер}}} \quad (1.6)$$

Величину статизму іноді визначають як відношення відхилення регульованої величини до її максимального значення:

$$\delta = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max}}$$

У відносно грубих САР величина статизму може становити 10...20 %.

В астатичних системах залежно від витрат робочого середовища, після завершення перехідного процесу регулюючий орган також може займати різне положення, але при одному й тому самому значенні регульованої величини.

Для технічної реалізації цієї особливості в астатичних САР повинні бути так звані астатичні ланки, рухомий елемент яких при відсутності збурення може займати довільне положення. Такою ланкою системи в розглянутому прикладі є двигун постійного струму, якір якого може займати довільне положення при відсутності напруги на якірній обмотці двигуна.

Системи неперервної і перервної дії. *Неперервною САР* є система, в якій структура всіх зв'язків у процесі роботи не змінюється і величина на виході кожного елемента є неперервною функцією збудження і часу.

В *перервних САР* при роботі системи можливі зміни структури зв'язків, через що сигнал на виході (елемента, об'єкта) є перервною функцією часу t , а також вхідної величини $x_{вх}$.

Існує два види перервних систем — релейні та імпульсні.

Релейною (імпульсною) називають систему, в складі якої є хоча б одна релейна (імпульсна) ланка, тобто ланка, яка має релейну (імпульсну) характеристику. Основні види релейних характеристик $x_{вих} = f(x_{вх})$ показано на рис. 1.18.

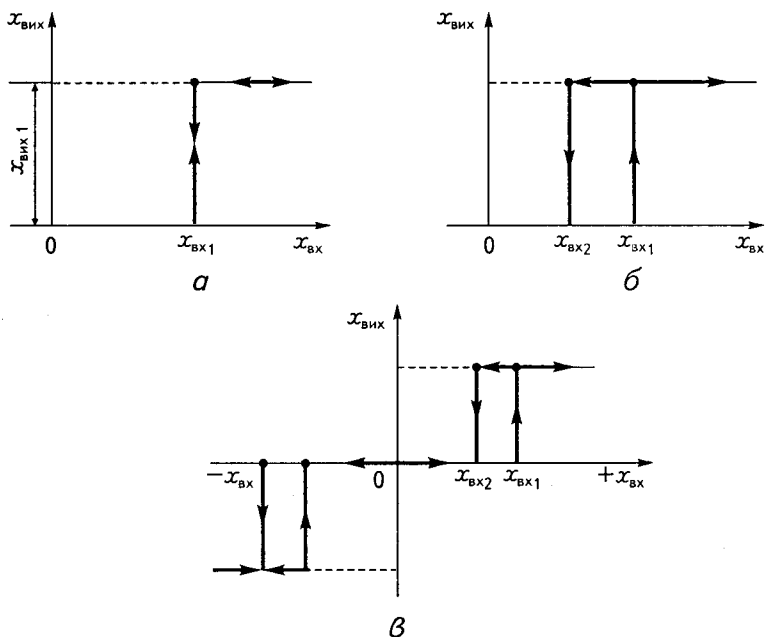


Рис. 1.18

Як видно з рис. 1.18, *а*, при зростанні вхідної величини до певного значення $x_{вх} = x_{вх1}$ вихідна величина стрибкоподібно змінюється до значення $x_{вих1}$.

При подальшому зростанні $x_{вх}$, $x_{вих}$ релейного елемента не змінюється. При зменшенні $x_{вх}$, коли $x_{вх} = x_{вх1}$, вихідна величина стрибкоподібно змінюється до початкового рівня.

Значення вхідної величини при її зростанні, що відповідає стрибкоподібній зміні величини на виході ланки, називають *величиною спрацьовування (зрушення)* реле, а відповідне значення вхідної величини при її зменшенні — *величиною відпускання (повернення)*. Релейну характеристику, в якій величина спрацьовування $x_{вх1}$ не дорівнює величині відпускання $x_{вх2}$, наведено на рис. 1.18, б.

Відношення $x_{вх2}/x_{вх1}$ називають *коефіцієнтом повернення*. Характеристики реле, які реагують на полярність вхідного сигналу, показано на рис. 1.18, в. Релейні елементи можуть базуватися на різних принципах дії, але в найзагальнішому випадку вони застосовуються для фіксації відповідних значень вхідних величин. Функціональне призначення їх різне. Використовують їх як пристрої захисту, керування, у вигляді технологічних реле та ін.

Імпульсна ланка перетворює неперервний вхідний сигнал (рис. 1.19, а) на послідовність короткодюючих імпульсів з періодом t_1 .

Існують три види імпульсних ланок (імпульсних характеристик):

- з амплітудно-імпульсною модуляцією (АІМ) (рис. 1.19, б), де амплітуда вихідного сигналу пропорційна значенню вхідної величини у відповідний період часу (ширина імпульсу незмінна);

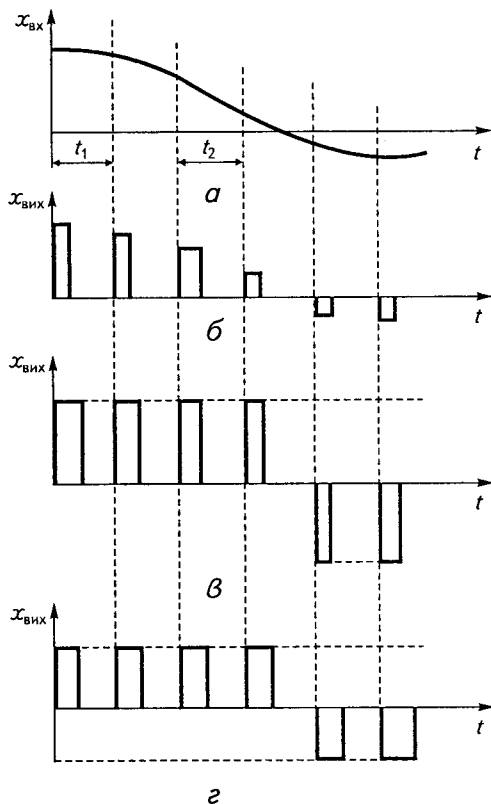


Рис. 1.19

- з широтно-імпульсною модуляцією (ШІМ) (рис. 1.19, в); у даному випадку амплітуда вихідних імпульсів залишається незмінною, а ширина імпульсу пропорційна значенню вхідної величини на відповідному інтервалі часу;
- з частотно-імпульсною модуляцією (ЧІМ) (рис. 1.19, г); у цьому випадку на виході ланки згідно зі зміною полярності вхідного сигналу змінюється лише полярність сигналів на виході.

Принципову схему імпульсної САР температури деякого середовища наведено на рис. 1.20. Завдання САР — підтримувати температуру у відповідному середовищі на певному заданому (приблизно сталому) рівні за рахунок зміни кількості охолоджувального повітря Q .

Контроль температури охолоджувального середовища здійснюється за допомогою датчика температури R_t , у вигляді термоопору. Датчик R_t використовується як одне із плечей вимірювального моста, підключеного до батареї Б. У діагональ моста 01—02 увімкнено вимірювальний прилад, відхилення стрілки якого С пропорційне відхиленню температури

охолоджувального середовища від заданого значення. Стрілка С приладу періодично (залежно від положення кривошипно-шатунного механізму КШ, що обертається зі сталою швидкістю ω) під дією падаючої дужки П замикає якірне коло двигуна М і забезпечує подачу відповідної напруги з потенціометра ПТ.

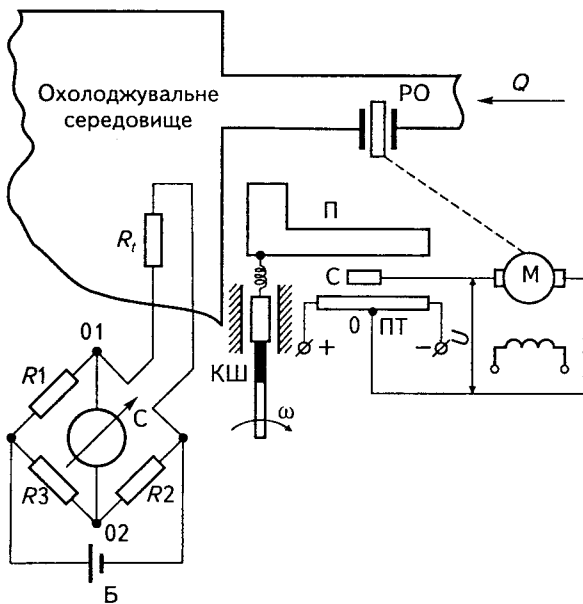


Рис. 1.20

Якщо температура охолоджувального середовища дорівнює заданому значенню, то стрілка С встановлюється проти нульової

точки потенціометра і в момент натискання на неї дужкою П напруга на якірному колі двигуна М дорівнюватиме нулю. При цьому регулюючий орган системи РО, а також кількість охолоджувального повітря, що надходить, залишаються незмінними.

При відхиленні температури середовища від заданого значення рівновага вимірювального моста порушується ($R1 \cdot R2 \neq R3 \cdot R4$) і на його діагоналі виникає напруга. При цьому стрілка С приладу відхиляється вліво чи вправо щодо нульової точки потенціометра і на якірному колі двигуна виникає напруга відповідної полярності. За час контакту стрілки з потенціометром двигун М повертає регулюючий орган на деякий кут, пропорційний відхиленню стрілки С від нейтрального положення, і відповідно змінює кількість охолоджувального повітря Q . Якщо за час тривалості робочого імпульсу температура не наблизиться до заданого значення, а стрілка С не займе нейтрального положення, то за час наступного контакту стрілки з потенціометром на якір двигуна М знову буде подано напругу, пропорційну новому (меншому) відхиленню, і двигун знову поверне регулювальний орган на деякий кут у потрібному напрямі і змінить величину Q .

У результаті низки послідовних імпульсних сигналів, які діють на регулювальний орган системи, температура середовища набуде потрібного значення.

Переваги перервних (імпульсних) систем полягають у періодичному характері їхньої дії, що дає змогу зменшити знос елементів системи і збільшити її надійність, підвищити техніко-економічні показники системи керування, виготовляти вимірювальні елементи більшої чутливості, збільшити точність системи.

Системи перервної дії в основному використовуються при малій швидкодії. В цьому разі їх переваги найбільш суттєві.

Системи одно- і багатоконтурні, одно- і багатовимірні, незв'язані й зв'язані. Одноконтурною системою називають систему з одним регулюючим органом. При наявності кількох регулюючих органів (РО1, РО2) і відповідно кількох контурів дії на об'єкт О систему називають багатоконтурною (рис. 1.21).

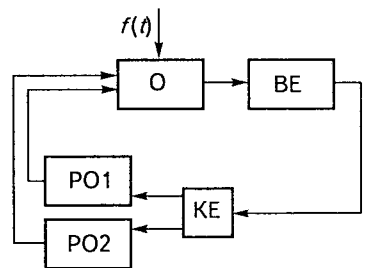


Рис. 1.21

Характерним прикладом багатоконтурних систем можуть бути системи регулювання тиску пари в паровому котлі. У цьому випадку вимірювальний елемент ВЕ контролює тільки один параметр — тиск пари, залежно від якого керуючий елемент КЕ діє на регулюючі елементи надходження води і енергоносія в котел.

Одновимірною називають систему з одним регульованим параметром, а *багатовимірною* — з кількома одночасно регульованими параметрами, що має відповідну кількість контурів дії на об'єкт.

Багатовимірну систему регулювання вихідних величин об'єкта x_1 та x_2 показано на рис. 1.22.

У цій системі канали керування функціонують незалежно один від одного; кожний з них керує лише одним параметром. Таку систему називають системою *незв'язаного регулювання*.

У багатьох випадках, завдяки тому, що об'єкт керування є одним і тим самим, зміна одного з параметрів і дія відповідного контура керування може призвести до небажаної зміни інших вихідних параме-

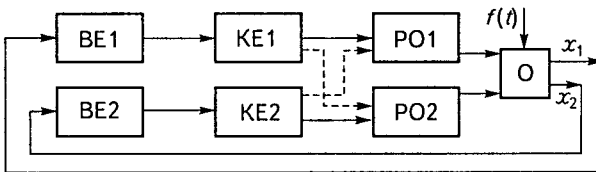


Рис. 1.22

трів об'єкта. Щоб уникнути цього, використовують компенсуючі зв'язки між керуючими елементами і регулюючими органами різних контурів (див. пунктирні лінії на рис. 1.22). Таку систему називають системою *зв'язаного регулювання*.

Прикладами систем зв'язаного регулювання можуть бути САК тиску і температури парових котлів, автопілоти на літаках, де автомати курсу одночасно діють на різні рулі.

Якщо при регулюванні однієї величини інші регульовані параметри об'єкта не змінюються, то таке регулювання має назву *автономного*.

Системи зі змінною та незмінною структурою. Системою зі *змінною структурою* називають таку, в якій у процесі роботи може змінюватись вид, кількість, характеристики ланок і спосіб їх

з'єднання. В протилежному разі система є системою з незмінною структурою.

Функціональну схему системи зі змінною структурою наведено на рис. 1.23. Вимірювальний елемент ВЕ контролює вихідну величину об'єкта О і видає сигнал на перемикаючий пристрій ПП. Залежно від параметрів сигналу перемикач П вмикає різні керуючі елементи КЕ1 або КЕ2, які діють на регулюючий елемент системи РЕ. При зміні положення П структура системи керування змінюється.

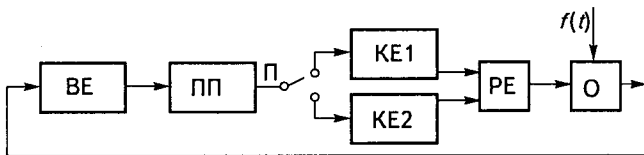


Рис. 1.23

Завдяки зміні складу елементів на окремих етапах роботи виникає можливість одержати такі динамічні характеристики системи, які не можна здобути при роботі системи незмінної структури.

Класифікація САК за енергетичними та технологічними ознаками. За використаною енергією САК поділяють на електромеханічні, гідравлічні, електротехнічні, пневматичні тощо. На практиці найчастіше використовують електромеханічні системи автоматичного керування ЕМ САК.

Існують САК підйомно-транспортні, металообробки, прокатного виробництва та ін.

Електропривод ЕП, який розглядається як система (сукупність) елементів, що складається з електродвигунного, перетворювального, передаточного і керуючого пристроїв, котрі мають забезпечувати перетворення електричної енергії в механічну для приведення в рух виконавчих органів робочих машин або механізмів і керування цим рухом, своїми основними елементами входить до складу ЕМ САК.

Отже, основними функціями ЕМ САК є перетворення електричної енергії в механічну й автоматичне керування об'єктом, що приводиться в дію за допомогою механічної енергії.

Функціональну схему розімкненої електромеханічної системи наведено на рис. 1.24, де позначено: О — об'єкт керування з регулюва-

ною величиною x ; П — передаточний, ЕД — електродвигунний, ПЕ — перетворювальний, КЕ — керуючий елементи; Φ — силовий потік електричної енергії; М — потік механічної енергії; З — завдання.

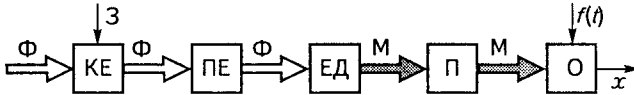


Рис. 1.24

Як передаточний елемент, призначений для передачі механічної енергії від двигуна до об'єкта, використовують муфти різних видів (механічні, електромагнітні, феромагнітні та ін.). У деяких випадках (безредукторні приводи) механічна енергія від електродвигунного елемента може безпосередньо надходити до об'єкта керування. Безпосереднє перетворення електричної енергії на механічну в ЕМ САК виконується керованими електродвигунами змінного і постійного струму.

Електротехнічний перетворювач ПЕ перетворює параметри електричної енергії (напругу, частоту) і підсилює її. Залежно від використаного виду електродвигуна і способу керування ним електротехнічний перетворювальний елемент може бути представлений: тиристорним перетворювачем у системі електропривода тиристорний перетворювач—двигун постійного струму (ТП—Д), силовим магнітним підсилювачем у системі електропривода магнітний підсилювач—двигун (МП—Д); тиристорним частотним перетворювачем у системі електропривода (ТПЧ—Д) та ін.

Керуючий елемент КЕ призначений для формування сигналу керування згідно із завданням. Як КЕ можна використовувати регулюючі резистори, формувачі імпульсів при імпульсно-фазовому керуванні тиристорами, проміжні магнітні підсилювачі тощо.

Функціональну схему замкнутої ЕМ САК (ЕМ САР) показано на рис. 1.25. Оскільки перетворення силових потоків енергії та електро-механічні характеристики двигунів детально вивчаються в курсах «Теорія електропривода» і «Системи керування електропривода», то основна увага приділятиметься питанням інформації та керування. Тому на рис. 1.25 показано напрям дії тільки сигналів керування.

У схемі є вимірювальний елемент ВЕ, що контролює зміну керованого параметра x . Пропорційна йому величина x_1 надходить до вуз-

1.7. Основні загальні відомості про елементи САК та їхні особливості.
Класифікація елементів

ла порівняння ВП і порівнюється з величиною завдання x_3 . При наявності розузгодження $\Delta x = x_3 - x_1$, яке надходить на вхід керуючого

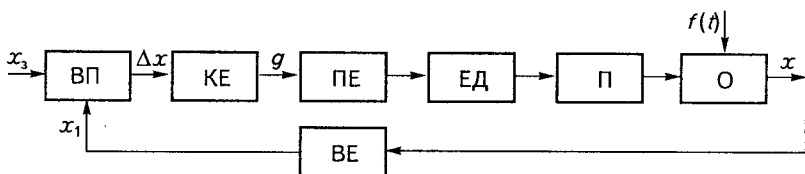


Рис. 1.25

елемента, в системі формується керуюча дія g , що надходить на вхід об'єкта і згідно з дією від'ємного зворотного зв'язку має зменшити (або звести до нуля) величину Δx .

1.7.
**Основні загальні відомості про елементи САК
та їхні особливості. Класифікація елементів**

Властивості САК багато в чому залежать від особливостей елементів, з яких складається відповідна система. Загальне призначення елементів САК полягає у якісному і кількісному перетворенні сигналів, які надходять від попереднього елемента (ланки) системи, і передачі його до наступного елемента.

За допомогою відповідних елементів виконуються вимірювальні, керуючі, виконавчі та інші функції в САК. За характером цих функцій елементи поділяються на: датчики (давачі), підсилювачі, стабілізатори, двигуни, реле, логічні елементи.

Датчики виконують у САК функції вимірювальних (чутливих) елементів. Вони перетворюють неелектричні величини (швидкість, шлях, прискорення, тиск та ін.) у параметри електричного кола (опір, ємність, індуктивність) або електрорушійну силу (ЕРС). Тому датчики є двох видів: параметричні і генераторні.

Підсилювачі мають ту особливість, що їхні вхідна і вихідна величини є величинами одного і того самого типу (підсилювачі струму,

напруги, потужності). Вихідна потужність елемента зростає за рахунок потужності зовнішнього джерела енергії (часто електричної мережі).

За характером струму підсилювачі поділяються на змінного і постійного струму, а за принципом дії — на електронні, магнітні, електромашинні, тиристорні та ін.

Стабілізатори мають підтримувати вихідну величину на сталому рівні при зміні вхідної величини або навантаження. Особливістю стабілізаторів як елементів систем автоматики є нелінійність характеристик вхід—вихід: $x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}})$. Для стабілізаторів ця характеристика має певний нахил щодо горизонтальної осі. В ідеальному стабілізаторі — це пряма, паралельна осі $x_{\text{вх}}$.

Двигун — елемент, що використовується в системах автоматичного керування як силовий привод об'єкта або допоміжний двигун (сервопривод), що приводить у дію виконуючі органи САК.

В автоматичці основна увага приділяється серводвигунам невеликої потужності. Вони мають відповідати вимогам: плавності регулювання; малої інерційності; легкості реверсування.

За потужності до 100 Вт найпоширенішими є двофазні двигуни змінного струму з немагнітним, легким ротором, а за більших потужностей — двигуни постійного струму з незалежним збудженням.

Реле — це елемент, в якому неперервній, плавній зміні вхідної величини відповідає стрибкоподібна зміна вихідної величини.

Реле розрізняють за багатьма ознаками:

- функціональному призначенню (керування, захисту, сигналізації та ін.);
- технологічним особливостям (швидкості, тиску);
- принципу дії (електромагнітні, індукційні, теплові);
- наявності контактів (контактні, безконтактні).

Логічні елементи призначені для виконання логічних операцій (функцій), наприклад, вигляду «І»; «АБО»; «НІ»; «ПАМ'ЯТЬ».

Основні загальні характеристики елементів. *Передачочний коефіцієнт* визначається із загальної статичної характеристики $x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}})$. При цьому відношення

$$\frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = K_c \quad (1.7)$$

називають *передаточним статичним коефіцієнтом*, якщо $x_{\text{вх}}$ і $x_{\text{вих}}$ — усталені значення величин.

Динамічним передаточним коефіцієнтом K_d є похідна

$$K_d = \frac{dx_{\text{вих}}}{dx_{\text{вх}}}. \quad (1.8)$$

Для елементів з лінійними характеристиками $K_c = K_d$.

Для датчиків цей коефіцієнт називають *коефіцієнтом чутливості*, а для підсилювачів — *коефіцієнтом підсилення*.

Часова характеристика визначається залежністю $x_{\text{вих}} = f(t)$ при надходженні на вхід елемента постійного сигналу. Вона характеризує динамічні властивості елемента.

Елементи з інерцією механічною, електричною, тепловою тощо мають часові характеристики у вигляді експоненти (рис. 1.26). Перехідний процес у них визначається неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язок якого має вигляд

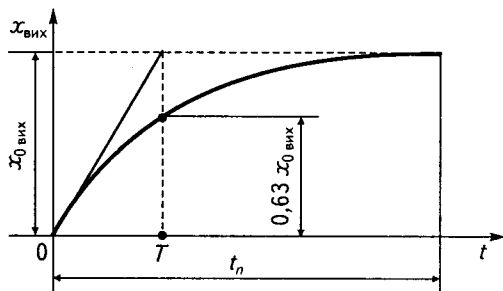


Рис. 1.26

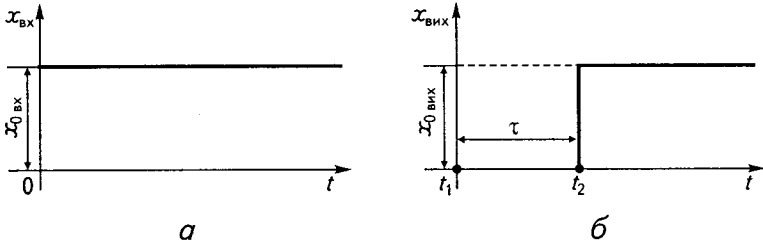
$$x_{\text{вих}} = x_{0 \text{ вих}} (1 - e^{-t/T}), \quad (1.9)$$

де T — стала часу елемента. Її можна знайти при умові $t = T$. Тоді

$$x_{\text{вих}} = x_{0 \text{ вих}} (1 - e^{-1}) = x_{0 \text{ вих}} (1 - 0,37) = x_{0 \text{ вих}} \cdot 0,63.$$

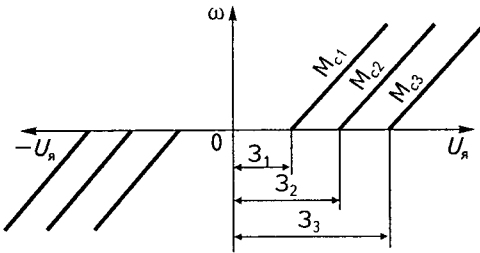
Особливості елементів визначаються також запізненням, інерційністю та зонами нечутливості.

Під *запізненням* розуміють зсув за часом між сигналами на вході (рис. 1.27, а) і на виході елемента (рис. 1.27, б). Кількісна оцінка запізнення визначається різницею $\tau = t_1 - t_2$. Прикладами елементів із запізненням можуть бути елементи з люфтами, різні трубопроводи, в яких існує *транспортне запізнення*, що визначається часом проходження робочого тіла (води, газу, нафти і т.д.) трубопроводом.

**Рис. 1.27**

Сталу часу T , що є мірою інерційності елементів, іноді називають *інерційним запізненням*.

Під *зоною нечутливості* розуміють діапазон зміни вхідної величини, в межах якого елемент не реагує на неї. Як приклад можна навести реле і двигуни.

**Рис. 1.28**

Регульовальні характеристики двигуна постійного струму із зонами нечутливості Z_1 , Z_2 , Z_3 за напруги якоря двигуна $U_я$ наведено на рис. 1.28. Величина зони нечутливості одного і того самого двигуна залежить від статичного моменту M_c (моменту навантаження $M_{c1} < M_{c2} < M_{c3}$).

1.8

Зворотні зв'язки в системах автоматичного регулювання

Як зазначалося раніше, в замкнутих системах автоматичного керування замикання системи, що дає змогу забезпечити надходження на вхід об'єкта сигналу, пропорційного вихідній величині об'єкта, виконується за допомогою *головного зворотного зв'язку*. Оскільки цей сигнал має подіяти на об'єкт так, аби відхилення вихідної величини об'єкта, яке з'явилося внаслідок

дії збурення, зменшилося, то головний зворотний зв'язок має бути від'ємним.

Під зворотним зв'язком розуміють таке виконання зв'язків у системі, при якому на вхід елемента Е надходить величина $x_{зв.з}$, пропорційна вихідній величині елемента (рис. 1.29).

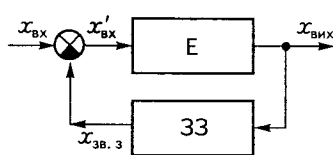


Рис. 1.29

Сигнал зворотного зв'язку формується за допомогою пристрою зворотного зв'язку ЗЗ. Його дія визначається коефіцієнтом зворотного зв'язку, який визначається відношенням вихідної величини пристрою зворотного зв'язку $x_{зв.з}$ до вихідної величини елемента $x_{вих}$:

$$\beta = \frac{x_{зв.з}}{x_{вих}}. \quad (1.10)$$

Здебільшого $\beta < 1$, проте можливі випадки, коли $\beta > 1$ (наприклад, «глибокі» зворотні зв'язки в підсилювачах для здобуття релейних режимів).

Розрізняють такі зворотні зв'язки: додатні і від'ємні; жорсткі і гнучкі; головні і місцеві; за технологічним параметром (швидкості, струму, напруги тощо).

Додатні і від'ємні зв'язки та їх вплив на коефіцієнт перегачі ланки. Додатним зворотним зв'язком називають зв'язок, дія якого збігається за знаком з дією вхідної величини на даний елемент.

Якщо рівняння ланки до введення зворотного зв'язку має вигляд

$$x_{вих} = Kx_{вх}, \quad (1.11)$$

то при наявності зворотного зв'язку фактичне значення вхідної величини обчислюється за формулою

$$x'_{вх} = x_{вх} + x_{зв.з} = x_{вх} + \beta x_{вих}. \quad (1.12)$$

У цьому разі рівняння ланки, охопленої додатним зворотним зв'язком,

$$x_{вих} = K(x_{вх} + \beta x_{вих}),$$

звідки

$$(1 - K\beta)x_{вих} = Kx_{вх}$$

і коефіцієнт передачі (підсилення) ланки при додатному зворотному зв'язку

$$K_{\text{зв.з}} = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{K}{1 - K\beta}. \quad (1.13)$$

Введення додатного зворотного зв'язку приводить до зростання коефіцієнта передачі (підсилення) ланки, що визначає широке застосування таких зворотних зв'язків у підсилювачах.

При від'ємному зворотному зв'язку $x'_{\text{вх}} = x_{\text{вх}} - \beta x_{\text{вих}}$ і передаточний коефіцієнт ланки

$$K_{\text{зв.з}} = \frac{K}{1 + K\beta} \quad (1.14)$$

зменшуватиметься, що, як показано далі, позитивно впливає на зухання (стабілізацію) перехідних процесів.

Розглянемо процес дії зворотного зв'язку на конкретному прикладі (рис. 1.30).

Принципову схему системи стабілізації швидкості ω парової машини показано на рис. 1.30, а. Швидкість контролюється вимірювальним елементом, що є відцентровим регулятором ВР. При зміні швидкості ω кулі К1 і К2 переміщуються вгору або вниз, діючи на пружину ПР і муфту М, яка за допомогою важеля ОА переміщує відповідним чином золотник З. Золотник відкриває шлях надходженню масла у верхню або нижню порожнину циліндра гідравлічного серводвигуна СД.

Масло під тиском, який створює компресор (на схемі його не показано), надходить у відповідну порожнину циліндра і зумовлює переміщення поршня циліндра П і регулюючого органу РО. Зміна положення РО спричинює збільшення (або зменшення) кількості пари, що надходить до парової машини, і відповідну зміну швидкості ω в напрямі стабілізації.

Якщо вважати, що в інтервалі часу $0-t_1$ (рис. 1.30, б) машина працювала з потрібною швидкістю ω_0 , то золотник З перебував у нейтральному положенні. Якщо в момент t_1 при зменшенні навантаження швидкість збільшилася на певну величину $\Delta\omega_1$, то кулі К1, К2 переміщуються вгору і через систему муфта—важіль—золотник відкривають шлях надходженню масла у верхню порожнину циліндра, що приведе до зменшення надходження пари і швидкості ω . При зниженні швидкості ω , унаслідок великих моментів інерції обертових мас парової машини, після досягнення потрібного значення

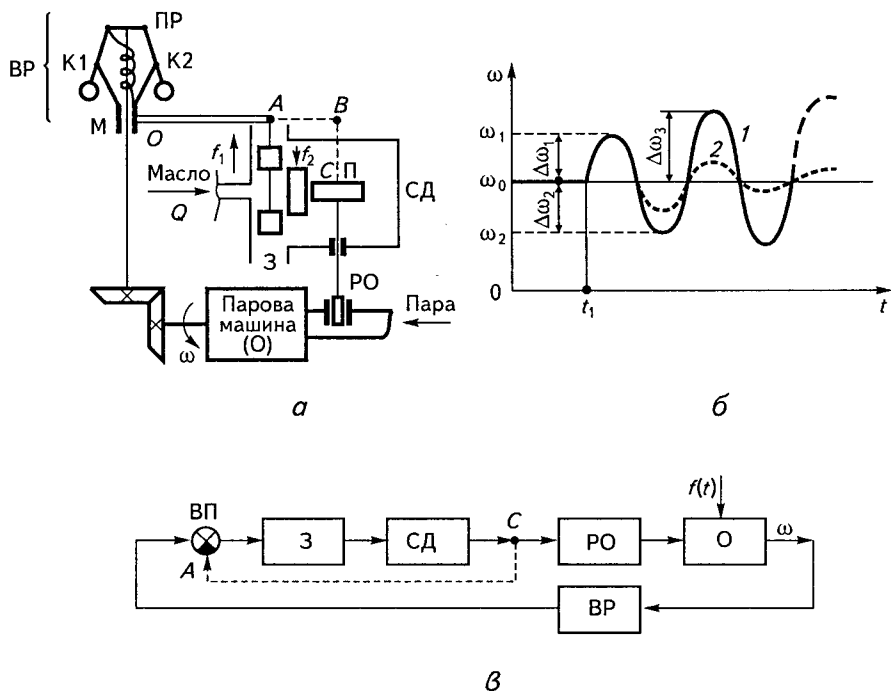


Рис. 1.30

швидкості ω_0 швидкість продовжуватиме знижуватись, і негативне відхилення досягне деякого значення $\Delta\omega_2$. Виникне *перерегулювання* — відхилення регульованої величини, протилежне за знаком початковому відхиленню. В результаті зменшення швидкості кулі К1 та К2 рухатимуться вниз, що приведе до дії системи автоматичного керування, спрямованої на підвищення швидкості. При цьому може виникнути нове відхилення швидкості від потрібного значення ω_0 , що дорівнює $\Delta\omega_3 > \Delta\omega_1$ (крива 1). Далі нові відхилення ставатимуть все більшими і, якщо процес не зупинити, це може призвести до аварії. Така САК не роботоздатна.

Щоб уникнути такого розвитку процесу керування, в систему додають від'ємний зворотний зв'язок, що реалізується у вигляді механічних елементів АВ—ВС, за допомогою яких зв'язується поршень із золотником. За наявності такого зв'язку, показано на рисунку

штриховою лінією, на золотник 3 діятимуть два протилежно напрямлені зусилля f_1 і f_2 . Тому відхилення золотника в процесі керування буде меншим, ніж за відсутності вказаного зворотного зв'язку. Це дасть змогу при правильному виборі параметрів зворотного зв'язку звести коливання до затухаючих (крива 2), а всю систему зробити роботоздатною.

Функціональна схема такої САР наведена на рис. 1.30, в, де зворотний зв'язок, що охоплює гідравлічний серводвигун, показано штриховою лінією.

Жорсткі й гнучкі зворотні зв'язки. Жорсткий зворотний зв'язок — це зв'язок, дія якого залежить тільки від відхилення величини на його вході (відхилення вихідної величини ланки, що охоплюється цим зворотним зв'язком) і не є функцією часу.

Гнучкий зворотний зв'язок — це зв'язок, дія якого є функцією часу і проявляється лише в перехідних режимах. У статичних режимах такий зв'язок не діє, тому ці зв'язки іноді називають «зникаючими».

Перевага гнучких зворотних зв'язків полягає в тому, що вони не впливають (не зменшують) на статичний коефіцієнт передачі, завдяки чому, як буде показано далі, підвищується якість САК.

Розглянемо можливість введення гнучкого зворотного зв'язку в систему стабілізації швидкості (див. рис. 1.30, а). Для розв'язання цього завдання в розгин елемента ВС треба ввести ізодромний пристрій I (рис. 1.31) у вигляді циліндра Ц1, заповненого маслом. Усередині циліндра міститься поршень П1, механічно зв'язаний із золотником і пружиною ПР, що виконує допоміжну функцію.

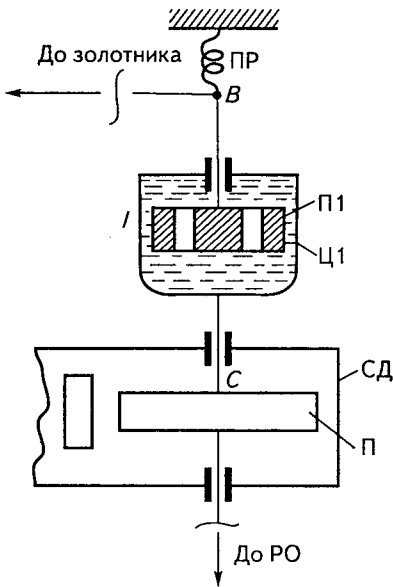


Рис. 1.31

Отже, зв'язок між поршнем П серводвигуна СД, жорстко зв'язаного з регулюючим органом системи РО, і золотником виконується

за рахунок взаємодії масляного середовища і поршня ПІ ізодромного пристрою і діє тільки у разі переміщення основного поршня. Величина сил зчеплення між маслом і поршнем ПІ, яка зумовлює дію зворотного зв'язку, залежить від швидкості руху основного поршня dx/dt , а також прискорення d^2x/dt^2 і є функцією часу.

За допомогою головного від'ємного зворотного зв'язку забезпечується можливість реалізації принципу керування за відхиленням.

У найбільш спрощеному вигляді функціональну схему САР, як зазначалося раніше, можна представити у вигляді сукупності двох елементів: об'єкта керування O і регулятора P . Тому сам регулятор відносно до об'єкта керування, що забезпечує зв'язок між виходом і входом об'єкта, в деяких випадках можна умовно розглядати як пристрій, подібний до від'ємного зворотного зв'язку.

Контрольні запитання та завдання

1. Чим відрізняється автоматизований процес від автоматичного і які переваги автоматизації?
2. Назвіть види автоматичних пристроїв, їхні функції й особливості.
3. Назвіть основні особливості кібернетики як науки про керування.
4. Перелічіть елементи електромеханічної системи автоматичного керування і назвіть їхні функції.
5. Чим відрізняються принципи керування за відхиленням і за збуренням?
6. Що таке зворотний зв'язок, його види й особливості?
7. Перелічіть види систем автоматичного керування згідно з інформативним принципом класифікації і назвіть їхні особливості.
8. Назвіть основні види й особливості кібернетичних систем автоматичного керування.
9. Зобразіть функціональні схеми систем автоматичного керування (САК) прямої і непрямої дії.
10. Зобразіть функціональну схему електромеханічної САК і позначте в ній елементи, які належать до електропривода.
11. Що є спільного і різного в поняттях: «електромеханічна система автоматичного керування», «електропривод», «регулятор»?
12. Наведіть основні характеристики елементів САК.
13. Які переваги мають гнучкі зворотні зв'язки?
14. Зобразіть функціональну схему комбінованої САК.
15. Вкажіть на головні особливості систем автоматичного керування зі змінною структурою.
16. Зобразіть функціональну схему багатоконтурної системи автоматичного керування.

17. У чому полягають особливості оптимальних САК?
18. Які види інформації виділяють у кібернетичних системах?
19. У чому полягають особливості САК зі змінною структурою?
20. Сформулюйте головні особливості кібернетичних САК різних видів.
21. Які функції має некерований електропривод в ЕМС?
22. Вкажіть роль керованого електропривода в ЕМ САК.
23. Чи входить об'єкт керування ЕМ САК до складу електропривода?

ОСНОВНІ ЗАВДАННЯ Й ОСОБЛИВОСТІ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2.1

Теорія автоматичного керування і регулювання

Теорія автоматичного керування в широкому розумінні цього слова є теорія побудови і функціонування систем автоматичного керування.

Згідно з розглянутими раніше системами класифікації САК можна розділити на дві характерні групи, які відрізняються одна від одної як за принципом керування, так і за особливостями функціонування — *розімкнуті САК*, що базуються на принципі керування за збуренням, і *замкнуті САК*, які діють на основі принципу керування за відхиленням. Останні в цьому випадку називаються системами автоматичного регулювання (САР).

Теорію керування замкнутими системами називають теорією автоматичного регулювання (ТАР), і вона є частиною загальної теорії автоматичного керування (ТАК).

Основна увага при викладанні ТАК приділятиметься теорії більш складних і поширених замкнутих систем автоматичного регулювання.

Кожна САР є неконсервативною системою, запас енергії якої змінюється за рахунок витрат і надходжень через окремі її елементи (підсилювачі, перетворювачі, об'єкт та ін.).

При відхиленні від стану рівноваги в результаті надходження і витрат енергії через дію збурень у системі виникає відхилення регульованої величини від заданого значення. Регулятор починає працювати і зменшує (в ідеальному випадку зводить до нуля) відхилення регульованої величини від заданого значення, через що в системі автоматичного регулювання виникає перехідний процес. Основним завданням ТАР є оцінка поведінки САР у перехідних режимах. При

цьому необхідно встановити, чи будуть перехідні процеси затухаючими, а системи стійкими і які характеристики матиме САР.

Поведінка систем автоматичного регулювання в перехідних процесах вивчається в розділі *динаміки* САР, основними завданнями якої є визначення стійкості та якості САР.

Проте для визначення роботоздатності САР недостатньо того, щоб САР була стійкою і мала достатні показники якості в перехідних процесах (тривалість перехідного процесу, його характер тощо).

Важливим є дослідження поведінки САР у стані рівноваги, що розглядається в розділі *статики* САР. У статистиці САР вивчається питання статичної точності — відхилень регульованої величини від заданого значення після закінчення перехідного процесу, а також статичні характеристики системи.

Основні особливості ТАР такі.

1. Поведінку САР у перехідних режимах не можна оцінювати за характеристиками окремо взятих ланок, які утворюють дану систему. Можливі випадки, коли САР, побудована на основі ланок зі стійкими характеристиками, може бути нестійкою.

Тому дослідження динамічних властивостей САР має виконуватися не за характеристиками окремо взятих ланок, а з урахуванням їхньої взаємодії в загальній, замкнутій системі.

2. Вимоги до САР з позицій статики і динаміки протилежні, тому для їх задоволення потрібно досліджувати питання динаміки і статики в тісному взаємозв'язку, приймаючи в разі необхідності компромісні рішення.

Наприклад, підвищення точності системи після закінчення перехідного процесу потребує збільшення так званого коефіцієнта передачі розімкнутої системи. Водночас зростання цього коефіцієнта негативно впливає на динамічні характеристики САР. При досить великих його значеннях система може стати взагалі нероботоздатною. Тому цей коефіцієнт треба вибирати так, аби задовольнити суперечливі вимоги статики і динаміки на основі компромісного рішення.

3. Різні за своїми фізичними властивостями елементи і системи часто мають подібні диференціальні рівняння динаміки, що свідчить про схожість їхніх динамічних властивостей і характеристик. Тому ТАР є загальною наукою, єдиною для найрізноманітніших за своїми фізичними властивостями САР.

Отже, ТАР можна визначити як науку, що вивчає статичні та динамічні властивості САР, принципи побудови структурних схем, методи вибору параметрів на основі вимог якості системи.

2.2

Статика систем автоматичного регулювання. Умови статичної рівноваги і статичні характеристики ланок

Основним завданням статики як розділу ТАК є вивчення САР у статичному стані, що виникає після завершення перехідних процесів, зумовлених постійним збуренням.

Для перебування системи в стані рівноваги мають одночасно виконуватися такі умови.

1. Відхилення регульованої величини від заданого значення має дорівнювати нулю або деякій сталій величині.

2. Надходження регульованої величини Q_1 має дорівнювати її витратам Q_2 :

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (2.1)$$

3. Положення регулюючого органу системи і виконавчого двигуна має бути нерухомим.

4. Положення керуючого елемента (значення його вихідної величини) має відповідати нерухомому стану виконавчого двигуна.

Основною характеристикою статики САР є *регульовальна характеристика*, яка показує залежність регульованої величини x від витрат робочого середовища Q :

$$x = f(Q), \quad (2.2)$$

а основною характеристикою статики окремої ланки системи є характеристика вхід—вихід:

$$x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}}). \quad (2.3)$$

Важливим показником ланки є статичний коефіцієнт передачі:

$$K = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}}. \quad (2.4)$$

Залежно від того, яким чином підтримується сталою регульована величина в САР після закінчення перехідного процесу, з позицій статики визначають два основні види САР: *статичні* й *астатичні*, які було досить детально розглянуто при класифікації САР.

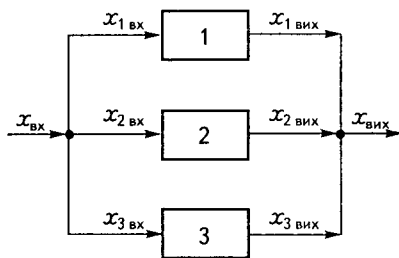


Рис. 2.1

При дослідженні питань статички дуже часто виникає потреба побудови результуючої статичної характеристики САР за відповідними характеристиками окремих ланок при різних способах їх з'єднання.

Результуюча статична характеристика паралельно з'єднаних ланок. Паралельним з'єднанням ланок у ТАР є таке з'єднання, при якому вхідна величина всіх ланок однакова, а результуюча вихідна величина є сумою вихідних величин цих ланок.

Для трьох ланок, згідно з рис. 2.1, можна записати

$$x_{\text{вх}} = x_{1 \text{ вх}} = x_{2 \text{ вх}} = x_{3 \text{ вх}}; \quad (2.5)$$

$$x_{\text{вих}} = x_{1 \text{ вих}} + x_{2 \text{ вих}} + x_{3 \text{ вих}}. \quad (2.6)$$

Якщо статичні характеристики окремих ланок задані у вигляді графіків, показаних на рис. 2.2, а, б, в, то кожному точці результуючої характеристики легко побудувати як суму ординат трьох характеристик $a_1 + b_1 + v_1$, що відповідають деякому значенню вхідної величини (рис. 2.2, г).

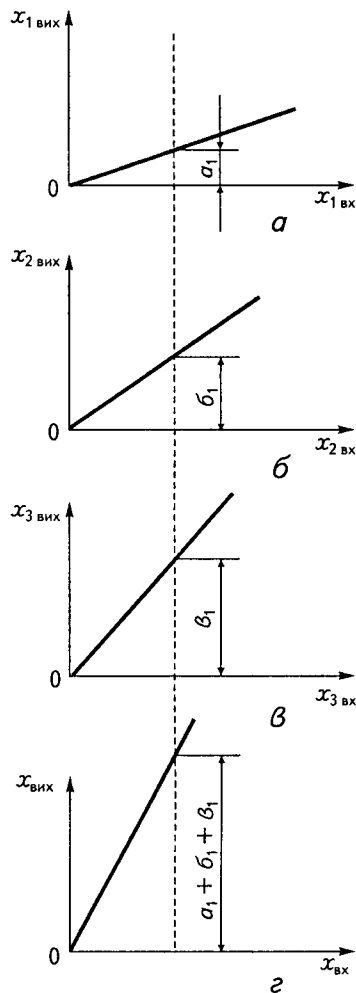


Рис. 2.2

Результуюча статична характеристика послідовно з'єднаних ланок. Послідовне з'єднання ланок — це таке з'єднання,

чення $x_{2 \text{ вих}}$ переносять на вертикальну вісь четвертого квадранта, в якому і записують залежність $x_{2 \text{ вих}} = f(x_{1 \text{ вих}})$. Відповідні графічні характеристики показано на рис. 2.4, а.

При побудові результуючої характеристики для трьох ланок з урахуванням того, що $x_{2 \text{ вих}} = x_{3 \text{ вх}}$, характеристику третьої ланки розміщують відповідним чином у третьому квадранті, а результуючу — у четвертому (рис. 2.4, б).

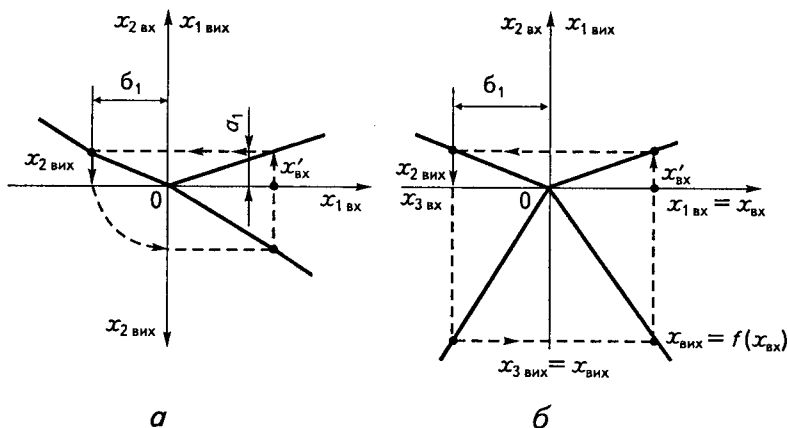


Рис. 2.4

При послідовному з'єднанні більш як трьох ланок за викладеною вище методикою можна побудувати результуючу характеристику для трьох ланок, а далі розглядати її як окрему характеристику і будувати загальну результуючу характеристику з урахуванням інших ланок. У результаті дістанемо результуючу графічну характеристику вигляду

$$x_{л \text{ вих}} = f(x_{1 \text{ вх}}).$$

Характеристика ланки зі зворотним зв'язком. Для ланки зі зворотним зв'язком (рис. 2.5) фактичне значення вхідної величини можна записати у вигляді

$$x'_{\text{вх}} = x_{\text{вх}} \pm x_{\text{зв.з}}.$$

Для пояснення дії зворотного зв'язку на рис. 2.6 наведено характеристику ланки без урахування зворотного зв'язку (крива 1) і характеристику самого зворотного зв'язку (крива 2).

Якщо врахувати, що на вхід ланки без зворотного зв'язку надходить величина $x_{1\text{ вх}}$, то на виході цієї ланки дістанемо $x_{1\text{ вих}}$. Якщо цю величину, згідно з рис. 2.5, подамо на вхід ланки зворотного зв'язку, то на її виході одержимо величину $x_{зв.з}$, яка при підключенні ланки зворотного зв'язку або додаватиметься до вхідної величини основної ланки (при додатному зворотному зв'язку), або відніматиметься від неї (при від'ємному зворотному зв'язку).

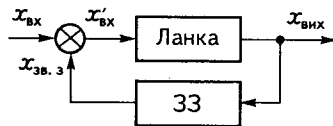


Рис. 2.5

Якщо зворотний зв'язок додатний, то, щоб дістати на виході ланки ту саму величину, що і без зворотного зв'язку, на вхід можна подати меншу величину $x_{\text{вх}} = x_{1\text{ вх}} - x_{зв.з}$. У цьому випадку матимемо точку *A* характеристики ланки з додатним зворотним зв'язком (крива 4).

При від'ємному зворотному зв'язку за тих самих умов на вхід ланки слід подати більшу величину

$x_{\text{вх}} = x_{1\text{ вх}} + x_{зв.з}$, що дасть відповідну точку *B* характеристики ланки з від'ємним зворотним зв'язком (крива 3).

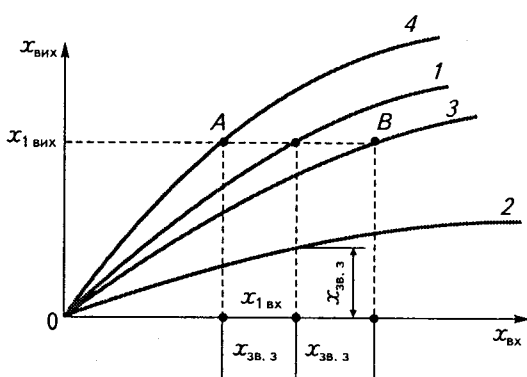


Рис. 2.6

2.3

Статична похибка і коефіцієнт передачі (підсилення)

Статична похибка — це відхилення регульованої величини від заданого значення після закінчення перехідного процесу. Вона є одним із основних показників якості САР.

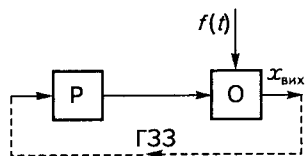


Рис. 2.7

Вважатимемо, що головного зворотного зв'язку ГЗЗ в системі немає (САК розімкнута; рис. 2.7). Тоді при початковому значенні збурення $f_0(t)$ вихідна величина об'єкта $x_{0\text{вих}}$ відповідатиме потрібному значенню регульованої величини. Зміна збурення до значення $f_1(t)$ призведе до зміни вихідної величини об'єкта до значення $x_{1\text{вих}}$ і появи

відхилення при розімкнутому стані системи

$$\Delta x = x_{0\text{вих}} - x_{1\text{вих}}. \quad (2.10)$$

Якщо замкнути систему за допомогою головного зворотного зв'язку, то в замкнутій системі регулятор Р діятиме на зменшення відхилення Δx (в ідеальному випадку до нуля). Проте регулятор не в змозі повністю ліквідувати Δx , а зменшуватиме його на деяку величину, яку позначимо $\Delta x_{\text{вих}}$. Частина Δx , яка залишається в замкнутій системі, є статичною похибкою замкнутої системи:

$$\Delta = \Delta x - \Delta x_{\text{вих}}. \quad (2.11)$$

Величина Δ надходить знову на вхід об'єкта, тому можна записати

$$\Delta = \Delta x_{\text{вих}}. \quad (2.12)$$

Розділивши всі члени рівняння (2.11) на величину Δ і врахувавши вираз (2.12), дістанемо

$$1 = \frac{\Delta x}{\Delta} - \frac{\Delta x_{\text{вих}}}{\Delta x_{\text{вих}}}.$$

Оскільки $\Delta x_{\text{вих}}/\Delta x_{\text{вих}} = K$ — коефіцієнт передачі (підсилення) розімкнутої системи, то статичну похибку замкнутої системи запишемо у вигляді

$$\Delta = \frac{\Delta x}{1 + K}. \quad (2.13)$$

З цієї формули можна зробити такі висновки.

1. Статична похибка замкнутої системи прямо пропорційна відхиленню регульованої величини при розімкнутому стані системи і зменшується в разі збільшення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи.

2. Оскільки величина Δx при розімкнутій системі є функцією збурення, що діє на об'єкт, то статична похибка замкнутої системи залежить від збурення.

3. Як буде показано далі при дослідженнях САР, зростання коефіцієнта передачі розімкнутої системи погіршує динамічні властивості (зменшує так званий запас стійкості системи). Тому бажання зменшити похибку замкнутої системи за рахунок зростання коефіцієнта передачі може призвести до втрати стійкості САР. Це відображає суперечність між вимогами статички та динаміки і веде до необхідності компромісного узгодження вимог статичної точності та стійкості САР.

Неможливість задоволення вимог статички і динаміки при деякій прийнятій САР спричинює необхідність зміни її структури.

Статична похибка САК при комбінованому керуванні.

При комбінованому керуванні функціональна схема має дві частини. Одна з них — це замкнутий контур об'єкт (О) та регулятор (Р), який забезпечує регулювання за відхиленням, а інша — розімкнутий (компенсаційний) канал К, котрий формує компенсаційний сигнал на об'єкті керування (рис. 2.8). За допомогою компенсаційного сигналу в комбінованій системі реалізується також принцип керування за збуренням.

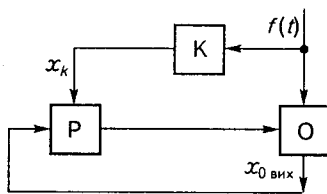


Рис. 2.8

Якщо розімкнути замкнутий контур на виході об'єкта, то відхилення вихідної величини об'єкта при дії компенсаційного каналу обчислюється за формулою

$$\Delta x_{\text{вих}}^k = x_{0 \text{ вих}} - x_{1 \text{ вих}} + x_k, \quad (2.14)$$

де $x_{0 \text{ вих}}$ — початкове значення регульованої величини, що дорівнює заданому; $x_{1 \text{ вих}}$ — нове значення вихідної величини об'єкта, яке відповідає зміні збурення; x_k — компенсаційна дія розімкнутого каналу.

Відхилення $\Delta x_{\text{вих}}^k$ буде значно меншим від відхилення при відсутності компенсаційного каналу $\Delta x_{\text{вих}}^k < \Delta x_{\text{вих}}$. Тому статична похибка комбінованої САК

$$\Delta^k = \frac{\Delta x_{\text{вих}}^k}{1 + K} \quad (2.15)$$

буде менша за похибку замкнутої САР

$$\Delta^k < \Delta = \frac{\Delta x_{\text{вих}}}{1 + K}.$$

Із формули (2.15) можна також зробити важливий висновок, що одну й ту саму похибку (точність), як і в системі регулювання за відхиленням, в комбінованій САК можна дістати при меншому значенні коефіцієнта передачі розімкнутої системи K . Це може мати важливе значення в разі необхідності задовольнити умови стійкості САР або збільшення запасу стійкості системи без зменшення її статичної точності.

2.4

Форми запису рівнянь статики

Існує три форми запису рівнянь статики: в абсолютних величинах, відхиленнях і відносних величинах.

Запис рівнянь статики в абсолютних величинах. Якщо залежність $x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}})$ задано графічно (рис. 2.9), де на осях відкладено абсолютні величини, то відповідну аналітичну залежність можна записати у вигляді

$$x_{\text{вих}} = a + Kx_{\text{вх}}, \quad (2.16)$$

де a — початкове значення вихідної величини; K — коефіцієнт, що характеризує нахил характеристики.

Форма запису рівнянь статики у відхиленнях. Нехай початкові значення вхідної і вихідної величин $x_{0 \text{ вх}}$ і $x_{0 \text{ вих}}$. Якщо вони зміняться і набудуть значень $x_{\text{вх}}$ і $x_{\text{вих}}$, то з урахуванням відхилень $\Delta x_{\text{вх}}$ і $\Delta x_{\text{вих}}$ можна записати

$$\begin{aligned} x_{\text{вх}} &= x_{0 \text{ вх}} + \Delta x_{\text{вх}}; \\ x_{\text{вих}} &= x_{0 \text{ вих}} + \Delta x_{\text{вих}}. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені вирази $x_{\text{вх}}$ і $x_{\text{вих}}$ в рівняння (2.16), дістаємо

$$x_{0 \text{ вих}} + \Delta x_{\text{вих}} = a + K(x_{0 \text{ вх}} + \Delta x_{\text{вх}}).$$

Виключаючи рівняння початкової рівноваги $x_{0 \text{ вих}} = a + Kx_{0 \text{ вх}}$, одержуємо рівняння статики у відхиленнях у вигляді

$$\Delta x_{\text{вих}} = K \Delta x_{\text{вх}}. \quad (2.17)$$

2.5. Динаміка систем автоматичного регулювання.
Завдання й особливості загальної методики дослідження

Форма запису рівнянь статика у відносних (безрозмірних) величинах. Введемо базові значення вхідної $x_{б.вх}$ і вихідної $x_{б.вих}$ величин (за базові значення можна прийняти будь-які величини, але здебільшого їхні номінальні значення).

Визначимо

$$\frac{\Delta x_{вих}}{x_{б.вих}} = \varphi; \quad \frac{\Delta x_{вх}}{x_{б.вх}} = \mu,$$

звідки дістанемо відхилення:

$$\Delta x_{вх} = \mu x_{б.вх}; \quad \Delta x_{вих} = \varphi x_{б.вих},$$

Підставивши знайдені значення відхилень у рівняння (2.17), дістанемо

$$x_{б.вих} \varphi = K \mu x_{б.вх}.$$

Враховуючи, що $x_{б.вих} = K x_{б.вх}$, дістанемо рівняння статика у відносних величинах:

$$\varphi = \mu, \quad (2.18)$$

сенса якого полягає в тому, що в статичі відносне значення вихідної величини чисельно дорівнює відносному значенню вхідної величини.

2.5

Динаміка систем автоматичного регулювання. Завдання й особливості загальної методики дослідження

Динаміка САР як розділ ТАК вивчає перехідні процеси в різних системах — лінійних і нелінійних. Враховуючи принципові особливості лінійних і нелінійних САР, ці системи розглядатимемо окремо.

Динамічні властивості лінійної САР у найзагальнішому випадку можуть бути детально вивчені на основі диференціального рівняння, яке називають *рівнянням замкнутої САР*.

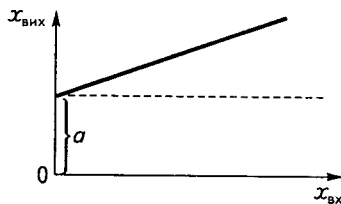


Рис. 2.9

Рівняння замкнутої САР дістають на основі рівнянь ланок, з яких складається дана система. При складанні рівняння замкнутої САР виходять з вірогідності принципу *детектування*, згідно з яким у САР існує напрямленість дії ланок — від попередньої до наступної. При цьому реакцією наступної ланки на попередню нехтують. Тому рівняння динаміки ланки, взятої окремо, буде таким самим, як і цієї ланки в деякій САР (необхідно лише узгодити вхідні і вихідні величини ланок).

На практиці направленість дії ланок у САР забезпечується наявністю в системі *детектувальних ланок*, які можуть передавати енергію лише в одному напрямі. Прикладами можуть бути різноманітні підсилювачі та серводвигуни.

Методика знаходження рівнянь САР. При складанні рівняння динаміки дотримуються такої послідовності.

1. Детально вивчають суть фізичних явищ у САР, знаходять (або розробляють) методи їх математичного описання. При цьому насамперед встановлюють узагальнені координати системи, під якими розуміють незалежні одна від одної змінні, необхідні і достатні для повного описання системи. Кількість незалежних змінних визначає кількість ступенів свободи даної системи.

2. Визначають ланки САР і складають її функціональну схему.

3. Встановлюють початок відліку відхилень узагальнених координат і напрям їх зміни. Як правило, за початок відліку приймають стан рівноваги системи.

4. При складанні рівнянь динаміки ланок і системи в цілому враховують вплив усіх діючих факторів.

5. Якщо рівняння системи буде дуже складним, то на практиці часто його спрощують.

Основними шляхами спрощення рівняння САР є:

✓ нехтування деякими факторами, що мало впливають на поведінку і якість системи (наприклад, іноді змінні параметри ланок — коефіцієнти рівнянь — можуть прийматись сталими, якщо час суттєвої зміни параметра в кілька десятків разів перевищує тривалість перехідного процесу, а також якщо коефіцієнти при вищих степенях похідної набагато менші від коефіцієнтів при похідних першого степеня; в цьому разі можна зменшити порядок рівняння системи);

✓ заміна нелінійних залежностей лінійними — здійснення *процесу лінеаризації*.

При спрощенні рівняння динаміки САР необхідно в кожному конкретному випадкові відповісти на питання, чи це спрощення можливе, виходячи із технологічних особливостей об'єкта (процесу).

Після спрощення рівняння і його лінеаризації дістають рівняння, яке називають *рівнянням першого наближення*. Воно дає змогу в ряді випадків відповісти на деякі важливі питання побудови конкретної системи (стосовно вибору початкового варіанта структури, впливу зміни параметрів, встановлення напрямів у проектуванні і настроюванні системи та ін.).

2.6

Лінеаризація нелінійних рівнянь. Приклади

Існує два основні методи лінеаризації — графоаналітичний (лінійно-кускова апроксимація) і аналітичний.

Графоаналітичний метод лінеаризації. Цей метод базується на заміні окремих криволінійних частин характеристик відрізками прямої і формуванні відповідних аналітичних залежностей.

- **Приклад 2.1.** Характеристику *OB* генератора постійного струму показано на рис. 2.10. Потрібно лінеаризувати дану характеристику і знайти аналітичні вирази лінеаризованих частин характеристики.

Розв'язання. Характеристику *OB* замінюємо лінійними відрізками *OA* і *AB*. Запишемо рівняння характеристики *OA*:

$$U_r = K_1 I_3; \quad K_1 = \frac{U_r}{I_3} = \frac{100}{2} = 50;$$

$$U_r = 50 \cdot I_3,$$

для відрізка *AB*

$$K_2 = \frac{\Delta U_r}{\Delta I_3} = \frac{150 - 100}{5 - 2} = \frac{50}{3} \cong 16,7;$$

$$U_r = 16,7 \cdot I_3.$$

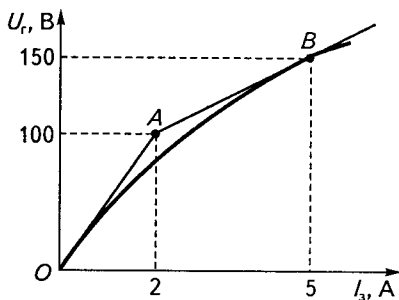


Рис. 2.10

- **Приклад 2.2.** Лінеаризувати робочу частину механічної характеристики асинхронного двигуна

(рис. 2.11) з параметрами: номінальний момент $10 \text{ Н} \cdot \text{м}$; номінальне ковзання $s_n = 0,05$; кількість пар полюсів $p = 3$.

Розв'язання. Продовжимо робочу частину механічної характеристики до перетину її з горизонтальною віссю в точці N . Номінальне значення моменту двигуна $M_n = ON - CN$. З трикутника CKN знайде-

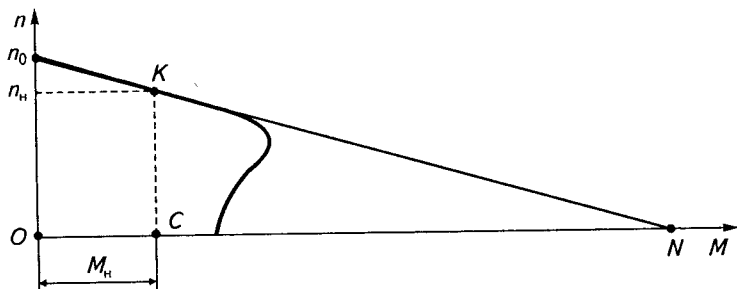


Рис. 2.11

мо значення $CN = n_n \frac{1}{\text{tg } \alpha} = n_n B$; n_n — номінальне значення швидкості, що відповідає точці K механічної характеристики двигуна; B — деяка стала величина, що характеризує кут нахилу робочої частини характеристики.

Обчислимо синхронну швидкість асинхронного двигуна

$$n_0 = \frac{60f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ об/хв,}$$

де f — частота, Гц,

номінальну швидкість

$$n_n = n_0(1 - s) = 1000(1 - 0,005) = 950 \text{ об/хв.}$$

Номінальне значення моменту $M_n = A - Bn_n$, або $10 = A - B \cdot 950$.

Запишемо рівняння холостого ходу двигуна:

$$0 = A - Bn_0,$$

звідки $A = B \cdot 1000$, або $B = \frac{10}{1000 - 950} = 0,2$; $A = 0,2 \cdot 1000 = 200$.

Лінеаризоване рівняння робочої частини механічної характеристики

$$M = 200 - 0,2n.$$

Аналітичний метод лінеаризації. Найбільш поширеним є розклад нелінійної функції в ряд довкола деякої точки характеристики. На практиці застосовуються ряди Паде, Фур'є та ін.

Найчастіше використовується ряд Тейлора, згідно з яким нелінійну функцію $f(z)$ можна записати у вигляді нескінченного ряду

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots, \quad (2.19)$$

де $f(a)$ — початкове значення функції; $f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ — похідні відповідного порядку; $z-a$ — відхилення змінної відносно її початкового значення в точці a .

Згідно з *гіпотезою малих відхилень Вишнеградського*, яка стверджує, що в процесі регулювання відхилення регульованої величини відносно її початкового значення незначне, відхиленням змінної $(z-a)$ в другому, третьому і далі степенях можна знехтувати. Тому в ТАК вираз (2.19) спрощується і формула лінеаризації набуває вигляду

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a). \quad (2.20)$$

- **Приклад 2.3.** Лінеаризувати тягову характеристику соленоїдного електромагніту, тягове зусилля $F_{\text{ел}}$ якого можна вважати пропорційним квадрату напруги u електричної мережі.

Розв'язання. Маємо

$$F_{\text{ел}} = c_{\text{ел}} u^2, \quad (2.21)$$

де $c_{\text{ел}}$ — стала тягового електромагніту, яка залежить від його конструктивних особливостей; $u_0, F_{0\text{ел}}$ — початкові значення напруги і сили тяги; $\Delta u_0, \Delta F_{0\text{ел}}$ — відхилення відповідних величин.

Вираз (2.21) можна записати у вигляді

$$F_{0\text{ел}} + \Delta F_{\text{ел}} = c_{\text{ел}}(u_0 + \Delta u)^2. \quad (2.22)$$

Розкладемо нелінійну функцію $f(z) = (u_0 + \Delta u)^2$ в ряд Тейлора згідно з (2.20). При цьому її початкове значення таке:

$$f(a) = u_0^2;$$

$$f(z) = u_0^2 + 2u_0\Delta u.$$

Підставляючи знайдений вираз у праву частину рівняння (2.22), одержуємо

$$F_{0\text{ел}} + \Delta F_{\text{ел}} = c_{\text{ел}} u_0^2 + c_{\text{ел}} \cdot 2u_0 \Delta u.$$

Виключаючи рівняння початкової рівноваги $F_{0\text{ел}} = c_{\text{ел}} u_0^2$, дістаємо лінеаризоване рівняння тягової характеристики електромагніту у відхиленнях

$$\Delta F_{\text{ел}} = c_{\text{ел}} \cdot 2u_0 \Delta u = K_{\text{ел}} \Delta u, \quad (2.23)$$

де $K_{\text{ел}} = 2c_{\text{ел}} u_0$ — передавальний (передаточний) коефіцієнт електромагніту.

Аналогічно можна лінеаризувати рівняння моменту асинхронного двигуна, для якого рушійний момент приблизно пропорційний квадрату напруги мережі. Згідно з цим можна записати лінеаризоване рівняння у відхиленнях

$$M_{\text{дв}} = K_{\text{дв}} \Delta u. \quad (2.24)$$

2.7

Форми запису рівнянь динаміки.

Приклади складання рівнянь ланок

Рівняння динаміки ланок і САК можуть бути складені так, як і рівняння статички в абсолютних величинах, відхиленнях і відносних величинах.

При складанні рівнянь динаміки також широко використовується операторна форма запису диференціальних рівнянь, згідно з якою вводяться символи похідних і інтегралів, що визначаються за допомогою оператора p . Записуємо похідні в операторній формі

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^2}{dt^2} = p^2; \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n.$$

Тоді

$$\frac{dx}{dt} = px, \dots, \frac{d^n x}{dt^n} = p^n x.$$

Записуємо інтеграли в операторній формі

$$\int dt = \frac{1}{p}; \quad \int x dt = \frac{1}{p} x; \quad \int dx \int x dt = \frac{1}{p^2} x \text{ і т. д.}$$

При операторній формі запису оператор p розглядається як деяка величина, на яку можуть поширюватись усі алгебричні дії.

Правомочність відокремлення функції від знака оператора можна показати на основі відомих положень математики.

Наприклад, на основі того, що похідна суми деяких величин x , y , z є сума цих похідних

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt},$$

в операторній формі можна записати

$$px + py + pz = p(x + y + z).$$

Множення або ділення обох частин деякого рівняння на оператор p можливе, оскільки можливе почленне диференціювання або інтегрування обох сторін рівностей. Так, $\frac{dx}{dt} = px$, а інтеграл похідної

$\int \frac{dx}{dt} = x$ при операторній формі запису має вигляд

$$\frac{1}{p} px = x.$$

Приклади складання рівнянь динаміки при використанні різних форм запису. Як приклад розглянемо добре відомий елемент — активно-індуктивний електричний опір z (рис. 2.12, *а*). Вхідною величиною є напруга u , вихідною — струм i .

На практиці такими елементами є обмотки збудження електричних машин постійного струму, котушки електромагнітів, елементи соленоїдних електроприводів тощо.

У даному разі необхідно встановити в динаміці залежність вхід — вихід $i = f(u)$, використовуючи відомі положення фізики (електротехніки). Згідно з теорією електричних кіл еквівалентну схему елемента (ланки) z можна представити у вигляді двох послідовно з'єднаних електричних опорів — активного R і індуктивного x_L (рис. 2.12, *б*).

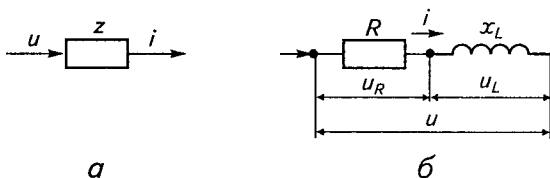


Рис. 2.12

Миттєві значення спаду напруги на активному й індуктивному опорах відповідно позначимо u_R і u_L . При послідовному з'єднанні опорів їх сума спадів напруги дорівнює миттєвому значенню напруги мережі:

$$u = u_R + u_L.$$

Оскільки $u_R = iR$, а $u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$ (де e_L — ЕРС самоіндукції, а L — коефіцієнт самоіндукції), то

$$u = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Розділивши ліву і праву частини знайденої рівності на R і перенісши вихідні величини в ліву частину рівняння, дістанемо рівняння динаміки ланки активно-індуктивного опору в абсолютних величинах у вигляді

$$T \frac{di}{dt} + i = ku, \quad (2.25)$$

де $T = \frac{L}{R}$ — стала часу; $k = \frac{1}{R}$ — передаточний коефіцієнт ланки.

В операторній формі запису це рівняння матиме вигляд

$$(Tp + 1)i = ku. \quad (2.26)$$

Для складання *рівняння у відхиленнях* введемо початкові значення U_0 , I_0 і відповідні відхилення Δu та Δi .

Підставляючи значення $u = U_0 + \Delta u$; $i = I_0 + \Delta i$ у рівняння (2.25), дістанемо

$$T \frac{d(I_0 + \Delta i)}{dt} + I_0 + \Delta i = k(U_0 + \Delta u).$$

Виключаючи з цієї рівності рівняння початкової рівноваги $U_0 = I_0 R$, матимемо

$$T \frac{d\Delta i}{dt} + \Delta i = k\Delta u. \quad (2.27)$$

в операторній формі запису

$$(Tp + 1)\Delta i = k\Delta u. \quad (2.28)$$

2.8. Коефіцієнт самовирівнювання та його вплив на характер перехідних процесів

Для складання рівняння у відносних величинах введемо як базові номінальні значення струму I_n і напруги U_n , позначивши

$$\varphi = \frac{\Delta i}{I_n}; \quad \mu = \frac{\Delta u}{U_n}.$$

Підставляючи в рівняння (2.27) і (2.28) значення $\Delta u = \mu U_n$, $\Delta i = \varphi I_n$, запишемо рівняння динаміки у відносних величинах у вигляді

$$T \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = \mu, \quad (2.29)$$

в операторній формі запису

$$(Tp + 1)\varphi = \mu. \quad (2.30)$$

2.8

Коефіцієнт самовирівнювання та його вплив на характер перехідних процесів

Рівняння багатьох об'єктів автоматичного керування в загальному випадку можна записати у вигляді

$$T \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}. \quad (2.31)$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}} (1 - e^{-t/T}). \quad (2.32)$$

Розділивши ліву і праву частини рівняння (2.31) на передаточний коефіцієнт k і позначивши $T/k = T_a$, а $1/k = k_c$, дістанемо рівняння у вигляді, запропонованому професором Стодолом:

$$T_a \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + k_c x_{\text{вих}} = x_{\text{вх}}. \quad (2.33)$$

Підставивши в розв'язок (2.32) значення $k = 1/k_c$, $T = T_a k = T_a/k_c$, дістанемо

$$x_{\text{вих}} = \frac{x_{\text{вх}}}{k_c} (1 - e^{-\frac{tk_c}{T_a}}), \quad (2.34)$$

де k_c — коефіцієнт самовирівнювання.

Проаналізуємо вираз (2.34) відносно коефіцієнта k_c . При $k_c > 0$ і $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{вих}} \rightarrow x_{\text{вх}}/k_c$; залежність $x_{\text{вих}} = f(t)$ є експонентою (рис. 2.13, а).

Якщо $k_c < 0$ і $t \rightarrow \infty$, то $x_{\text{вих}} \rightarrow \infty$ (рис. 2.13, б).

При $k_c = 0$ рівняння динаміки матиме вигляд $T_a \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} = x_{\text{вх}}$ і $x_{\text{вих}} = \frac{1}{T_a} \int x_{\text{вх}} dt$. Якщо $x_{\text{вх}} = \text{const}$, то $x_{\text{вих}} = (x_{\text{вх}}/T_a)t$. У даному разі при $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{вих}} \rightarrow \infty$ (рис. 2.13, в).

Отже:

- при $k_c > 0$ об'єкти мають стійкий перехідний процес і в принципі можуть працювати без регулятора (електродвигуни та ін.);
- об'єкти з $k_c < 0$ і $k_c = 0$, маючи нестійкі перехідні процеси, не можуть працювати без регулятора (парові машини, асинхрон-

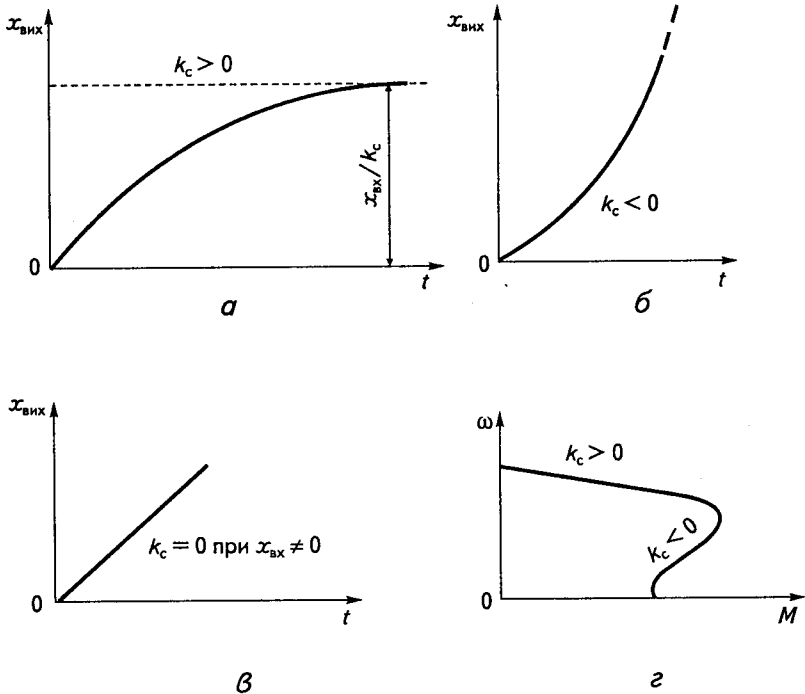


Рис. 2.13

ний двигун на нестійкій частині характеристики (рис. 2.13, з) та ін.).

При цьому необхідно зазначити, що автоматичні регулятори, обов'язкові при об'єктах з $k_c = 0$ і $k_c < 0$, застосовуються і для об'єктів з $k_c > 0$. Принципова різниця полягає лише в тому, що при $k_c > 0$ автоматичний регулятор (як буде показано далі) використовується не для досягнення стійкості, а для підвищення якості динамічних режимів (швидкодії, точності).

2.9 Рівняння машини-двигуна з одним ступенем свободи

У сучасній теорії електропривода досить часто нескладні робочі машини, які є об'єктами в системах автоматичного керування, розглядають разом з приводним двигуном як одне ціле. З цією метою момент інерції (масу) робочої машини приводять до вала двигуна, і далі цей елемент системи робоча машина—двигун вважають по суті об'єктом системи автоматичного керування.

У ряді випадків такий підхід допускається, оскільки при простих робочих машинах кількісне врахування впливу приведенного моменту інерції (маси) може бути достатнім — при цьому не зміниться вигляд математичних залежностей, які відображають динамічні явища в системі керування. Для складних робочих машин, коли необхідно враховувати наявність пружностей в елементах машини, багатомасовість, наявність кількох регульованих параметрів, такий спрощений підхід може виявитися недостатнім.

Якщо вважати зв'язок робочої машини з двигуном абсолютно жорстким, то рівняння динаміки системи *робоча машина—двигун* матиме вигляд

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_{он}, \quad (2.35)$$

де J — момент інерції, приведений до вала двигуна; ω — швидкість обертання двигуна; M_d — рушійний момент двигуна; $M_{он}$ — момент опору.

Рушійний момент, як правило, є функцією підведеної до нього енергії, яку відобразимо через положення x відповідного органу регулювання (наприклад, органу регулювання електричної напруги, що подається до електродвигуна, або органу подання пари в парову турбіну), а також швидкості руху ω .

Момент опору залежить від швидкості та має деяку незалежну від неї складову $f(t)$.

Згідно з викладеним, рівняння (2.35) матиме такий вигляд:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}}(\omega, x) - M_{\text{он}}(\omega) - f(t). \quad (2.36)$$

Функції $M_{\text{д}}(\omega, x)$ та $M_{\text{он}}(\omega)$ можуть бути заданими у вигляді графічних залежностей або аналітично. В загальному випадку вони нелінійні. Функцію $f(t)$ на час регулювання можна прийняти за сталу величину $f(t) = f_0$.

Злінеаризуємо нелінійні залежності, склавши вирази (2.36) для точки ω_0, x_0 на основі розкладу в ряд Тейлора. Тоді, відкидаючи нелінійні члени розкладу, дістаємо

$$M_{\text{д}}(\omega, x) = M_{\text{д}0} + \left(\frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial \omega} \right)_{\substack{\omega = \omega_0 \\ x = x_0}} \Delta\omega + \left(\frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial x} \right)_{\substack{x = x_0 \\ \omega = \omega_0}} \Delta x ;$$

$$M_{\text{он}}(\omega) = M_{\text{он}0} + \left(\frac{\partial M_{\text{он}}}{\partial \omega} \right)_{\omega = \omega_0} \Delta\omega .$$

Підставляючи знайдені вирази в рівняння (2.36), враховуючи, що $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, та нехтуючи для спрощення записами $\omega = \omega_0$ і $x = x_0$, маємо

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = M_{\text{д}0} - \left(\frac{\partial M_{\text{он}}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial \omega} \right) \Delta\omega + \frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial x} \Delta x - M_{\text{он}0} - f_0.$$

Виключимо рівняння статички $M_{\text{д}0} = M_{\text{он}0} + f_0$, тоді

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = \left(\frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial x} \right) \Delta x - \left(\frac{\partial M_{\text{он}}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial \omega} \right) \Delta\omega.$$

Вважаючи x вхідною величиною об'єкта, а $\Delta\omega$ — вихідною, одержимо рівняння машини-двигуна у відхиленнях у вигляді

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} + \left(\frac{\partial M_{\text{он}}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial \omega} \right) \Delta\omega = \frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial x} \Delta x. \quad (2.37)$$

Для запису у відносних (безрозмірних) величинах, при базових значеннях x і ω , що дорівнюють номінальним x_n , ω_n , дістанемо відносне значення вихідної величини $\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_n}$, а вхідної — $\mu = \frac{\Delta x}{x_n}$, звідки

$\Delta\omega = \varphi\omega_n$, $\Delta x = \mu x_n$. Підставляючи їх у рівняння (2.37), дістаємо

$$\omega_n J \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{\partial M_{оп}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right) \omega_n \varphi = \frac{\partial M_d}{\partial x} x_n \mu.$$

Дане рівняння в формі Стодоли матиме вигляд

$$\frac{J\omega_n}{\frac{\partial M_d}{\partial x} x_n} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\left(\frac{\partial M_{оп}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right) \omega_n}{\frac{\partial M_d}{\partial x} x_n} \varphi = \mu,$$

де

$$\frac{J\omega_n}{\frac{\partial M_d}{\partial x} x_n} = T_a$$

— стала часу;

$$\frac{\left(\frac{\partial M_{оп}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right) \omega_n}{\frac{\partial M_d}{\partial x} x_n} = k_c \quad (2.38)$$

— коефіцієнт самовирівнювання.

Знайдений вираз k_c дає змогу, виходячи з особливостей зміни моментів двигуна M_d та опору $M_{оп}$ залежно від швидкості ω , дійти таких висновків.

1. Якщо момент двигуна зі збільшенням швидкості зменшується, а момент опору зростає, то з урахуванням того, що $\frac{\partial M_d}{\partial x}$ завжди більше за нуль, коефіцієнт самовирівнювання $k_c > 0$. Отже, як зазначалося раніше, об'єкт може стійко працювати без автоматичного регулятора.

2. При зменшенні моменту опору зі збільшенням швидкості, якщо момент двигуна зменшується, то можливо, що $k_c < 0$. У цьому разі об'єкт не може стійко працювати без регулятора.

Детальніше фізичні особливості взаємодії робочої машини з приводними електродвигунами залежно від особливостей їхніх механічних характеристик розглядаються в теорії електропривода.

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте перелік основних особливостей теорії автоматичного регулювання (ТАР).
2. Назвіть основні умови знаходження системи в статичному стані.
3. Як побудувати результуючі статичні характеристики групи послідовно і паралельно з'єднаних ланок?
4. Побудуйте статичну характеристику ланки зі зворотними зв'язками.
5. Яка залежність точності САК від коефіцієнтів підсилення окремих ланок?
6. У чому полягає протилежність вимог статичної і динамічної?
7. Наведіть приклади рівнянь статичної і динамічної в різних формах запису.
8. Назвіть методи лінеаризації та вкажіть особливості їх застосування.
9. Як використовується гіпотеза малих відхилень при лінеаризації?
10. Що таке коефіцієнт самовирівнювання і як він впливає на характер перехідних процесів?
11. Як коефіцієнт самовирівнювання залежить від характеристик об'єкта?
12. Нарисуйте функціональні схеми багатовимірної зв'язаної і незв'язаної систем.
13. Визначіть статичну помилку розімкнутої системи.
14. Наведіть вирази статичної помилки розімкнутої системи.
15. Від чого залежить статична помилка комбінованої САК?
16. Як одержати рівняння динаміки системи «машина—двигун»?

3.1

Типові елементи (ланки) систем автоматичного керування

На практиці перехідні процеси різних за своїми фізичними принципами дії ланок (елементів) можуть визначатися подібними диференціальними рівняннями динаміки, що дає можливість класифікувати ланки за виглядом рівнянь динаміки. Наприклад, з цієї точки зору, до одного типу ланок можна віднести такі, на перший погляд, різні ланки, як механічна рухома маса та електричне активно-індуктивне коло.

Так, рівняння динаміки для механічної маси з моментом інерції J можна записати у вигляді

$$M_{\text{дин}} = M_{\text{дв}} - M_{\text{оп}}$$

або при $M_{\text{оп}} = k\omega$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{дв}} - k\omega.$$

Групуючи вихідні величини в лівій частині рівняння, а вхідні — в правій, дістаємо

$$J \frac{d\omega}{dt} + k\omega = M_{\text{дв}}. \quad (3.1)$$

Рівняння динаміки активно-індуктивного кола з електричним активним опором R та індуктивністю L матиме вигляд

$$L \frac{di}{dt} = u - iR,$$

або

$$L \frac{di}{dt} + iR = u. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.1) і (3.2) мають аналогічний вигляд, тому характер зміни струму i та швидкості ω в перехідних режимах цих елементів буде аналогічним і за класифікацією, прийнятою в теорії автоматичного керування, ці елементи відносять до одного й того самого типу.

З лівої частини рівняння елемента, в якій представлені вихідна величина та її похідні, видно, як швидко та точно реагує ланка на вхідну величину, що записується в правій частині рівняння.

Наявність похідних у лівій частині рівняння означає, що елемент поступово реагує на вхідну величину, перехідний процес діє певний час, коли є відхилення вихідної величини від заданого рівня.

Якщо похідних у лівій частині рівняння динаміки ланки нема, то це означає, що вона миттєво реагує на вхідну величину.

Похідні можуть бути не тільки в лівій частині рівняння динаміки ланки, а й у правій.

У загальному випадку права частина рівняння динаміки ланки показує, на що реагує ланка і з яким коефіцієнтом передачі (підсилення) вхідна величина з'являється на її виході.

Залежно від вигляду правої частини рівняння ланка може реагувати: на саму вхідну величину; тільки на похідну від вхідної величини; на інтеграл від вхідної величини; на вхідну величину та її похідну; на вхідну величину та інтеграл від неї; на вхідну величину, похідну та інтеграл від неї. Можливі й інші варіанти вигляду правої частини рівняння.

Основними динамічними характеристиками ланок є:

- часова характеристика $x_{\text{вих}} = f(t)$;
- перехідна функція $h(t) = x_{\text{вих}}(t)$, яка являє собою реакцію ланки на одиничну ступінчасту вхідну дію $x_{\text{вх}} = 1(t)$;
- функція ваги, що є похідною від перехідної функції

$$w(t) = [h(t)]'.$$

Крім названих характеристик, важливими характеристиками ланок є передаточні функції $W(p)$ та різні частотні характеристики (докладніше вони розглядатимуться далі).

Відповідно до рівнянь динаміки розрізняють типові динамічні ланки.

Безінерційна (підсилювальна) ланка. Її називають також ідеальною статичною ланкою. Вона має як в динаміці, так і статиці однакове рівняння

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}},$$

яке показує, що вхідна величина миттєво, без будь-яких відхилень, надходить на вихід елемента з передаточним коефіцієнтом k . Прикладом таких елементів можуть бути механічні редуктори, які не мають люфтів, електронні лампи, потенціометри та ін.

Аперіодична ланка першого порядку. Її іноді називають інерційним, релаксаційним або одноємнісним елементом.

Рівняння динаміки такої ланки

$$T \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}, \quad (3.3)$$

або в операторному вигляді

$$(Tp + 1)x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}. \quad (3.4)$$

Розв'язок такого лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку має вигляд

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}(1 - e^{-t/T}). \quad (3.5)$$

Відповідна часова характеристика — це експонента (рис. 3.1, крива 1).

Якщо вхідна величина відсутня (що відповідає, наприклад, відключенню напруги з деякого активно-індуктивного опору), то динамічний процес можна записати у вигляді однорідного рівняння

$$(Tp + 1)x_{\text{вих}} = 0, \quad (3.6)$$

яке називають рівнянням незбуреного руху. Розв'язок його

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}e^{-t/T}. \quad (3.7)$$

Відповідна часова характеристика зображена на рис. 3.1 (крива 2).

В усіх наведених вище рівняннях T є стала часу, яка характеризує інерційні властивості відповідної ланки.

Сталу часу можна знайти за осцилограмою $x_{\text{вих}}(t)$. Дійсно, при $t = T$ з рівняння (3.5) маємо

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}(1 - e^{-1}) = 0,632kx_{\text{вх}}. \quad (3.8)$$

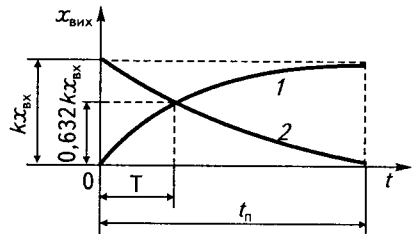


Рис. 3.1

Тому для визначення T достатньо відкласти по вертикальній осі $0,632 x_{\text{вх}}$ і на осі часу t знайти відповідне значення T .

Тривалість перехідного процесу $t_n = (3...4)T$.

Якщо рівняння динаміки ланки

$$T \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} - x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}, \quad (3.9)$$

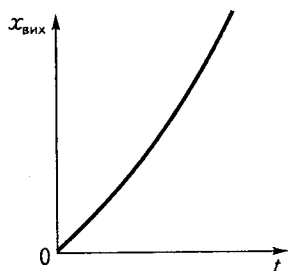


Рис. 3.2

то її називають *нестійкою аперіодичною ланкою*.

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}(e^{t/T} - 1). \quad (3.10)$$

Часова характеристика ланки, зображена на рис. 3.2, показує, що при $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{вих}} \rightarrow \infty$.

Аперіодичними ланками є різні електротехнічні пристрої з активно-індуктивним опором, механічні інерційні пристрої, генератори постійного струму та ін.

- **Приклад 3.1.** Вивести рівняння динаміки генератора постійного струму, принципову схему якого зображено на рис. 3.3, де w_3 — обмотка збудження генератора з індуктивністю L і активним опором R .

Розв'язання. Якщо прийняти, що швидкість обертання якоря генератора стала, то напруга генератора u_r може змінюватись лише залежно від напруги на обмотці збудження u_3 . В цьому разі рівняння динаміки має дати залежність

$$u_r = f(u_3).$$

Для обмотки збудження

$$u_3 = L \frac{di_3}{dt} + Ri_3.$$

Виходячи з лінійності характеристики генератора, запишемо

$$u_r = ci_3,$$

звідки $i_3 = \frac{u_r}{c}$.

Переносячи вихідні величини в ліву частину, дістаємо

$$\frac{L}{c} \frac{du_r}{dt} + \frac{R}{c} u_r = u_3.$$

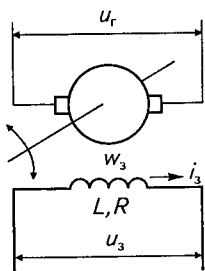


Рис. 3.3

3.1. Типові елементи (ланки) систем автоматичного керування

Увівши позначення $L/R = T_r$, $c/R = k_r$, матимемо рівняння генератора у вигляді

$$T_r \frac{du_r}{dt} + u_r = k_r u_3, \quad (3.11)$$

в операторній формі запису

$$(T_r p + 1)u_r = k_r u_3. \quad (3.12)$$

Ланки другого порядку. До цієї групи належать ланки, рівняння динаміки яких має вигляд

$$a \frac{d^2 x_{\text{вих}}}{dt^2} + b \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}} = k x_{\text{вх}}. \quad (3.13)$$

Позначивши $\sqrt{a} = T_1$, $b = T_2$, дістанемо рівняння в операторній формі запису:

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)x_{\text{вих}} = k x_{\text{вх}}. \quad (3.14)$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{вих}} = k x_{\text{вх}} (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + 1), \quad (3.15)$$

де C_1 , C_2 — сталі інтегрування; p_1 , p_2 — корені характеристичного рівняння

$$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = 0. \quad (3.16)$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння можливі два різновиди ланок другого порядку — аперіодичні та коливальні. Рівняння динаміки цих ланок мають однаковий вигляд, але їхні часові характеристики суттєво відрізняються.

Аперіодичні ланки другого порядку. До ланок цього виду належать ланки при дійсних і від'ємних коренях характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} < 0.$$

Це можливо за умови, коли $T_2 > 2T_1$.

При $p_1 < 0$ ($p_1 = -\alpha_1$), $p_2 < 0$ ($p_2 = -\alpha_2$) розв'язок рівняння ланки

$$x_{\text{вих}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} k x_{\text{вх}} \left(C_1 \frac{1}{e^{\alpha_1 t}} + C_2 \frac{1}{e^{\alpha_2 t}} + 1 \right) \rightarrow k x_{\text{вх}}. \quad (3.17)$$

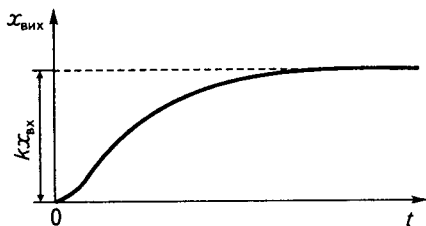


Рис. 3.4

Часову характеристику наведено на рис. 3.4. Вона визначається сумою двох експонент, що і зумовлює назву ланки.

Коливальні ланки. Коливальною ланкою є елемент другого порядку при комплексних коренях характеристичного рівняння з від'ємною дійсною частиною. В цьому випадку

$$p_1 = -\alpha + j\beta; p_2 = -\alpha - j\beta,$$

$$\text{де } \alpha = T_2/2T_1^2; \beta = \frac{\sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2}.$$

Розв'язок рівняння динаміки елемента можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x_{\text{вих}} &= kx_{\text{вх}} (C_1 e^{(-\alpha+j\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-j\beta)t} + 1) = \\ &= kx_{\text{вх}} [1 + e^{-\alpha t} (C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t})]. \end{aligned}$$

Згідно з формулою Ейлера

$$e^{j\beta t} = \cos \beta t + j \sin \beta t;$$

$$e^{-j\beta t} = \cos \beta t - j \sin \beta t.$$

Замінюючи показникові функції на тригонометричні, після нескладних перетворень дістанемо

$$\begin{aligned} x_{\text{вих}} &= kx_{\text{вх}} \{1 + e^{-\alpha t} [C_1 (\cos \beta t + j \sin \beta t) + C_2 (\cos \beta t - j \sin \beta t)]\} = \\ &= kx_{\text{вх}} \{1 + e^{-\alpha t} [(C_1 + C_2) \cos \beta t + j(C_1 - C_2) \sin \beta t]\} = \\ &= kx_{\text{вх}} [1 + e^{-\alpha t} (A \cos \beta t + jB \sin \beta t)]; \\ x_{\text{вих}} &= kx_{\text{вх}} [1 + e^{-\alpha t} D \sin (\beta t + \varphi)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

де $C_1 + C_2 = A$; $C_1 - C_2 = B$; $D = \sqrt{A^2 + B^2}$ — амплітуда гармонічних коливань; $\varphi = \arctg \frac{B}{A}$ — зсув за фазою.

Часову характеристику, що відображує затухаючий коливальний процес і побудову згідно з рівнянням (3.18), наведено на рис. 3.5.

Тривалість перехідного процесу $t_{\text{п}} \approx 3T'$, де T' — стала часу апроксимуючої експоненти, показаної штриховою лінією, що залежить від дійсної складової комплексного кореня:

3.1. Типові елементи (ланки) систем автоматичного керування

$$T' = \frac{2T_1^2}{T_2};$$

$$t_n = 3T' = \frac{6T_1^2}{T_2}.$$

З наведеної формули видно, що коливальні властивості ланки другого порядку визначаються коефіцієнтом T_1 при другій похідній, а демпфуючі — коефіцієнтом T_2 при першій похідній.

При $T_2 < 2T_1$ елемент другого порядку є коливальним, а при $T_2 > 2T_1$ — аперіодичним.

Рівняння ланки другого порядку можна записати також у дещо іншому вигляді:

$$(T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1)x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}},$$

де $T = T_1$; $\zeta = T_2/2T_1$ — *декремент згасання або коефіцієнт демпфування*.

Залежно від величини ζ ланка другого порядку різко змінює свої властивості. Згідно з цим, при $0 < \zeta < 1$, ланку називають *коливальною*.

Якщо $\zeta = 0$, ланку називають *консервативною*.

Часова характеристика даної ланки визначається розв'язком характеристичного рівняння, який при суто уявних коренях матиме вигляд

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}} (C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t} + 1),$$

або

$$\begin{aligned} x_{\text{вих}} &= kx_{\text{вх}} [C_1 (\cos \beta t + j \sin \beta t) + C_2 (\cos \beta t - j \sin \beta t) + 1] = \\ &= kx_{\text{вх}} [1 + D \sin (\beta t + \varphi)]. \end{aligned}$$

При цьому $x_{\text{вих}}$ є коливанням зі сталою амплітудою D при куті зсуву відносно початкової точки $t = 0$, що дорівнює φ .

Прикладом ланок другого порядку можуть бути каскадні магнітні підсилювачі, електромеханічні підсилювачі поперечного поля та двигуни постійного струму.

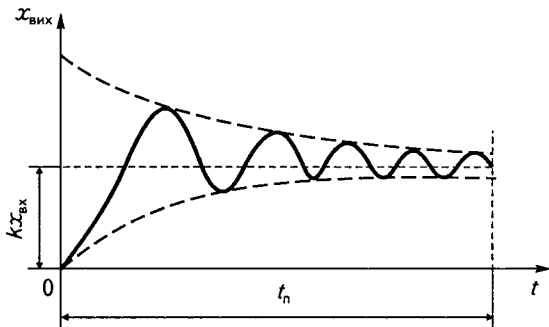


Рис. 3.5

- **Приклад 3.2.** Вивести рівняння двигуна постійного струму з незалежним збудженням.

Розв'язання. Вихідною величиною в даному разі буде швидкість ω , яка регулюється зміною напруги u , що подається в якірне коло двигуна. Таким чином, треба встановити в динаміці залежність $\omega = f(u)$. Запишемо рівняння електричної рівноваги для якірного кола двигуна, маючи, зокрема, на увазі, що в двигуновому режимі напруга живлення обчислюється за формулою

$$u = L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + R_{\text{я}} i_{\text{я}} + e,$$

де $L_{\text{я}}$, $R_{\text{я}}$ — відповідно індуктивність і активний опір кола якоря; e — проти-ЕРС (електрорушійна сила) двигуна.

Для режиму розгону двигуна можна записати рівняння динаміки у вигляді

$$M_{\text{дин}} = M_{\text{дв}} - M_{\text{ст}}, \quad (3.19)$$

де $M_{\text{дин}}$, $M_{\text{дв}}$, $M_{\text{ст}}$ — відповідно динамічний, двигуновий і статичний моменти двигуна. Коли статичний момент невеликий, тобто $M_{\text{ст}} = 0$, то можна записати

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_i i_{\text{я}},$$

звідки

$$i_{\text{я}} = \frac{J}{c_i} \frac{d\omega}{dt},$$

де J — момент інерції двигуна; c_i — стала струму.

Підставляючи знайдене значення $i_{\text{я}}$ в рівняння електричної рівноваги кола якоря двигуна, після деяких перетворень дістанемо

$$\frac{L_{\text{я}} J}{c_i} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_{\text{я}} J}{c_i} \frac{d\omega}{dt} + c_e \omega = u.$$

Введемо позначення:

$$\frac{L_{\text{я}} J}{c_i c_e} = T_1^2; \quad \frac{R_{\text{я}} J}{c_i c_e} = T_2; \quad \frac{1}{c_e} = k_d.$$

При цьому рівняння динаміки двигуна постійного струму в операторній формі матиме вигляд

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) \omega = k_d u. \quad (3.20)$$

3.1. Типові елементи (ланки) систем автоматичного керування

Якщо $T_2 = \frac{R_a J}{c_i c_e} > 2T_1 = 2\sqrt{\frac{L_a J}{c_i c_e}}$, або $R_a \sqrt{\frac{J}{c_i c_e}} > 2\sqrt{L_a}$, то двигун при даному співвідношенні параметрів буде аперіодичною ланкою другого порядку, а в противному разі — коливальною ланкою.

Інтегрувальні (астатичні) ланки. Рівняння динаміки ланок даного типу має вигляд

$$x_{\text{вих}} = k \int x_{\text{вх}} dt, \quad (3.21)$$

а в операторній формі запису

$$x_{\text{вих}} = k \frac{1}{p} x_{\text{вх}}. \quad (3.22)$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}t. \quad (3.23)$$

Часову характеристику наведено на рис. 3.6. Вона показує, що при $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{вих}} \rightarrow \infty$ за умови, що на вході ланки існує вхідна величина ($x_{\text{вх}} \neq 0$).

Прикладом інтегрувальної (астатичної) ланки може бути гідравлічний серводвигун (рис. 3.7).

Вхідною величиною елемента $x_{\text{вх}}$ є переміщення золотника 3, а вихідною $x_{\text{вих}}$ — переміщення поршня П. Поршень рухається під тиском масла Q , яке надходить, залежно від положення золотника, у верхню або нижню порожнину циліндра серводвигуна СД. Швидкість переміщення поршня v_B пропорційна кількості масла Q , що надходить у відповідну порожнину циліндра.

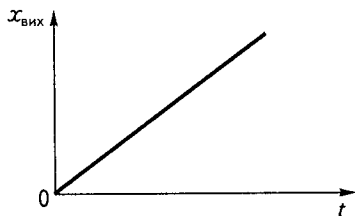


Рис. 3.6

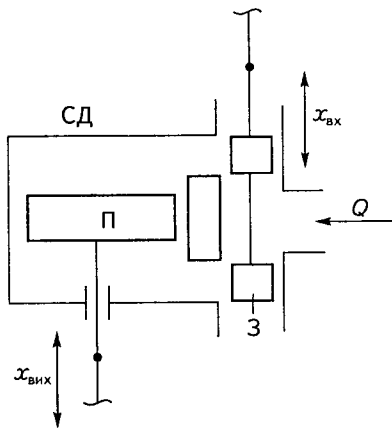


Рис. 3.7

Отже, можна записати

$$v_B = \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} = c_1 Q.$$

Своєю чергою кількість масла в циліндрі пропорційна величині $x_{\text{вих}}$ — відхиленню золотника. Тому $Q = c_2 x_{\text{вих}}$, звідки $\frac{dx_{\text{вих}}}{dt} = c_1 c_2 x_{\text{вих}}$.

Зінтегрувавши праву і ліву частини рівняння, дістанемо

$$x_{\text{вих}} = c_1 c_2 \int x_{\text{вих}} dt = k \int x_{\text{вих}} dt.$$

Диференціювальна ланка. В ланках цього типу вихідна величина залежить від швидкості зміни вхідної. При сталому значенні вхідної величини вихідної величини не буде.

Рівняння динаміки елемента

$$x_{\text{вих}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} \quad (3.24)$$

або

$$x_{\text{вих}} = k p x_{\text{вх}}. \quad (3.25)$$

Прикладом елементів ланок даного типу можуть бути електричні кола $L - R$, $R - C$.

- **Приклад 3.3.** Записати рівняння динаміки ланок $L - R$ і $R - C$ (рис. 3.8 і 3.9).

Розв'язання. Для схеми $L - R$

$$u_{\text{вх}} = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Здиференціювавши ліву і праву частини рівняння, дістанемо

$$\frac{du_{\text{вх}}}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Позначивши $L/R = T$, $L \frac{di}{dt} = e_i = u_{\text{вих}}$, після множення лівої і правої частин рівняння на L/R матимемо

$$u_{\text{вих}} + T \frac{du_{\text{вих}}}{dt} = T \frac{du_{\text{вх}}}{dt}. \quad (3.26)$$

3.1. Типові елементи (ланки) систем автоматичного керування

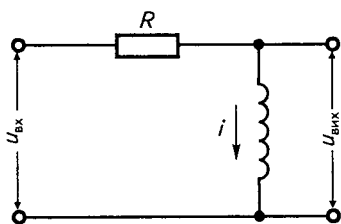


Рис. 3.8

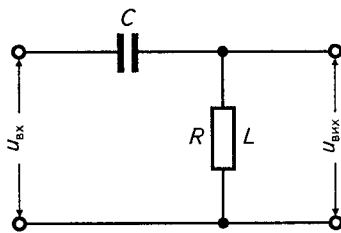


Рис. 3.9

Від класичного вигляду дане рівняння відрізняється наявністю в лівій частині складової $T \frac{du_{\text{вих}}}{dt}$, що є похибкою диференціювання. Наявність похибки вказує, що ідеальне диференціювання неможливе.

Складемо рівняння для елемента виду $R - C$:

$$u_{\text{вх}} = u_C + u_{\text{вих}} = \frac{Q}{C} + iR = \frac{\int idt}{C} + iR,$$

де Q — заряд; C — ємність.

В операторній формі можна записати

$$u_{\text{вх}} = \frac{1}{pC} i + iR = iR \left(\frac{1}{Tp} + 1 \right) = u_{\text{вих}} \left(\frac{Tp + 1}{Tp} \right),$$

де $T = RC$.

Звідси

$$u_{\text{вих}} = \frac{1}{Tp + 1} Tp u_{\text{вх}}. \quad (3.27)$$

У даному разі $\frac{1}{Tp + 1}$ — похибка диференціювання.

Диференціальні елементи використовуються в системах автоматичного керування для демпфування коливань та поліпшення якості перехідних процесів.

Ланки із запізненням. Характерними особливостями таких ланок є те, що величина, яка надходить на вхід, передається на вихід ланки з деяким запізненням τ . У багатьох випадках коефіцієнт передачі ланок із запізненням дорівнює одиниці. Прикладом таких ланок можуть бути трубопроводи, транспортери, прокатні стани тощо.

Рівняння ланок із запізненням мають вигляд

$$x_{\text{вих}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau). \quad (3.28)$$

Після перетворень за Лапласом і використання теореми запізнення в операторній формі запису рівняння матиме вигляд

$$x_{\text{вих}}(p) = x_{\text{вх}}(p)e^{-p\tau}. \quad (3.29)$$

Крім розглянутих типових ланок, що відрізняються виглядом диференціальних рівнянь та значенням коренів характеристичного рівняння, можливі деякі інші підходи до класифікації ланок, які розглядатимуться далі.

3.2

Приклад складання рівняння тиристорного перетворювача (підсилювача) як ланки із запізненням

Неперервний сигнал керування $U_{\text{вх}}$, що надходить до тиристорного перетворювача (ТП), подається насамперед до системи імпульсно-фазового керування (СІФК), яка є частиною ТП. За її допомогою сигнал перетворюється на послідовність керуючих імпульсів, які формуються генератором імпульсів і мають відповідне відхилення за фазою щодо моменту відкриття тиристора. Змінюючи величину відхилення фази керуючих імпульсів, тиристорний перетворювач виконує зворотне перетворення дискретних сигналів на кусково-неперервний сигнал вихідної величини $u_{\text{вих}}$ або $I_{\text{вих}}$, який подається в якірне коло двигуна Д.

При точному розгляді процесів, що відбуваються в тиристорному перетворювачі, він має розглядатись як нелінійний дискретний елемент системи керування. Досить точне математичне описання його можливе на основі теорії систем з широтно-імпульсною модуляцією другого роду (ШІМ). Це складно, і тому в практиці ТАК використовується, як правило, спрощене уявлення про процеси, що відбуваються в ТП.

Згідно з теоремою Котельникова, тиристорний перетворювач без втрат інформації пропускає сигнали, частоти яких менші за граничну частоту

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{m\omega_m}{2},$$

де m — кількість фаз перетворювача; $\omega_m = 2\pi f$ — частота напруги мережі; f — частота в герцах.

Якщо частота проходження дискретних імпульсів $\omega_i = \frac{1}{T_i} < \omega_{\text{гр}}$,

де T_i — період квантування, то ТП можна лінеаризувати (апроксимувати) лінійною безінерційною ланкою з коефіцієнтом підсилення $k_{\text{т.п}}$.

При такому підході треба мати на увазі, що при значному зростанні коефіцієнта підсилення системи з ТП у замкнутому колі для збільшення швидкодії і статичної точності САК можливе виникнення небажаних автоколивань з частотою граничної гармоніки $\omega_{\text{гр}}$.

Важливою особливістю ТП є також явище неповної керованості. Воно полягає в тому, що при зміні кута керування тиристором α з частотою, більшою за ω_m , і при $\frac{d\alpha}{dt} > \omega_m$ процеси в ТП при збільшенні і зменшенні кута α відбуваються по-різному.

При зменшенні кута напруга u_d на виході ТП повністю залежить від $\alpha(t)$, а при збільшенні $\alpha(t)$ і $\frac{d\alpha}{dt} > \omega_m$ комутація тиристора не відбувається. При цьому u_d не є функцією $\alpha(t)$, а є відрізком синусоїдальної анодної напруги вентиля, який було відкрито в останній момент зміни кута керування.

Отже, при $\frac{d\alpha}{dt} < \omega_m$ ТП можна зобразити як неперервну безінерційну ланку. При $\frac{d\alpha}{dt} > \omega_m$ спостерігатиметься невідповідність між вхідними і вихідними величинами тиристора, що потребує відповідного математичного відображення.

Невідповідність вхідних і вихідних величин у даному випадку є причиною появи фазових зміщень при гармонічних змінах вхідної величини. Максимальне фазове зміщення на виході ТП відповідає зміщенню деякої ланки з чистим запізненням на час $\tau = \frac{D}{4\omega_m}$, де D — діапазон зміни кута керування.

Завдяки неповній керованості, дискретності та нелінійності ТП у замкнутій системі можуть виникати автоколивання на найнижчих

субгармоніках з великою амплітудою і порівняно невеликою частотою. Такі автоколивання можуть призвести до перевантаження окремих елементів ТП і різкого зменшення його надійності.

Щоб зменшити негативний вплив можливих автоколивань, обмежують швидкість зміни вхідного сигналу керування $u_{\text{вх}}(t)$, який визначає швидкість зміни кута керування $\alpha(t)$. Для цього на вході СІФК ТП підключають аперіодичну ланку, яка в реверсивному електроприводі має також обмежувати динамічний зрівнювальний струм, що виникає між випрямляючою та інвертуючою групами вентилів і може в багато разів перевищувати статичний зрівнювальний струм. Внаслідок цього обмежувальні реактори, розраховані на статичний зрівнювальний струм, можуть бути насичені його динамічною складовою, і зрівнювальний струм досягне аварійного значення. Щоб уникнути такої небезпеки, стала аперіодичної обмежувальної ланки на вході СІФК має знаходитися в інтервалі $0,006 \dots 0,01$ с при промисловій частоті $\omega_m = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314$ 1/с.

Процеси, що відбуваються за різних варіантів зміни вхідного сигналу ТП, досить складні і не завжди передбачувані. Тому різні автори дискретний процес керування і неповної керуваності тиристорів трактують по-різному.

В даному випадку, орієнтуючись на роботу ТП у режимі безперервного струму, розглядатимемо ТП як елемент, що складається з двох послідовно з'єднаних ланок: лінійної безінерційної з коефіцієнтом підсилення $k_{\text{т.п}}$ і ланки чистого запізнення із запізненням τ .

Рівняння динаміки згідно з викладеним вище матиме вигляд

$$u_{\text{вих}} = k_{\text{т.п}} u_{\text{вх}} e^{-\tau p}. \quad (3.30)$$

Розклавши функцію $e^{-\tau p}$ в степеневий ряд і обмежившись двома першими членами, дістанемо рівняння підсилювача:

$$u_{\text{вих}} = k_{\text{т.п}} u_{\text{вх}} \frac{1}{1 + \tau p},$$

де τ — середньостатистичне запізнення.

3.3

Передаючі функції та частотні характеристики

Теоретичне визначення передаючої функції впливає з відомого перетворення Лапласа, згідно з яким деяка функція часу $f(t)$ — оригінал — може бути перетворена на функцію комплексної величини s , яка є зображенням відповідного оригіналу. Формула прямого перетворення Лапласа

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Використовуючи розроблені методи перетворення, теореми і формули, забезпечимо розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь, дотримуючись відповідних дій над зображеннями. Потім на основі зворотного перетворення Лапласа перейдемо до дійсної функції-оригіналу. Формула зворотного перетворення Лапласа, яке позначається L^{-1} матиме вигляд

$$f(t) = L^{-1}[F(s)].$$

Передаючі функції при використанні перетворень Лапласа представляють як відношення зображень вихідної і вхідної величин:

$$W(s) = \frac{x_{\text{вих}}(s)}{x_{\text{вх}}(s)}. \quad (3.31)$$

При нульових початкових умовах передаючу функцію можна подати на основі запису відповідних величин в операторній формі. Тому в теорії автоматичного керування передаючу функцію часто записують так:

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)}. \quad (3.32)$$

При цьому виходять із рівняння ланки в загальному вигляді

$$P(p)x_{\text{вих}} = Q(p)x_{\text{вх}},$$

де $Q(p)$, $P(p)$ — відповідні оператори правої та лівої частин рівняння ланки.

Так, для типового елемента — аперіодичної ланки першого порядку

$$(Tp + 1)x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}},$$

$$P(p) = Tp + 1; \quad Q(p) = k.$$

Для інтегрального елемента

$$P(p) = 1, \quad Q(p) = k \frac{1}{p}.$$

Передаточні функції в ТАК мають значне поширення і використовуються для:

- відображення динамічних властивостей ланок (систем) на основі структурних схем;
- знаходження вихідних виразів для побудови частотних характеристик, на яких базуються різні методи дослідження ланок і систем автоматичного керування;
- застосування як математичного апарату, зручного для спрощення структурних схем.

3.4

Передаточні функції та частотні характеристики типових ланок.

Приклади побудови. Загальні відомості про частотні характеристики

Основною частотною характеристикою є *амплітудно-фазова характеристика* (АФЧХ або АФХ). Її можна дістати двома способами: графоаналітичним і експериментальним.

Для побудови АФХ графоаналітичним методом у вираз відповідної передаточної функції підставляють $p = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$; ω — частота, що може змінюватись від 0 до ∞ або в деяких випадках від $-\infty$ до $+\infty$.

У загальному випадку АФХ має вигляд

3.4. *Передаючі функції та частотні характеристики типових ланок.
Приклади побудови. Загальні відомості про частотні характеристики*

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}. \quad (3.33)$$

Оскільки $W(j\omega)$ — комплексна величина, то її можна записати, виділяючи дійсну $U(\omega)$ та уявну $V(\omega)$ частини:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (3.34)$$

де $U(\omega)$, $V(\omega)$ — відповідно дійсна і уявна частотні характеристики.

У комплексній площині, якщо відомі вирази $U(\omega)$ і $V(\omega)$, можна побудувати відповідні характеристики (рис. 3.10).

Характеристику $A(\omega) = \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2}$ називають *амплітудно-частотною* характеристикою, а залежність $\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ — *фазо-частотною*.

Всі частотні характеристики можуть бути побудовані в логарифмічному масштабі. У цьому випадку їх називають *логарифмічними частотними характеристиками*.

Приклад графоаналітичної побудови частотних характеристик. Побудуємо частотні характеристики для аперіодичної ланки першого порядку з передаючою функцією $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ і амплітудно-фазовою характеристикою

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}.$$

Ліквідуємо уявну величину у знаменнику, дістанемо

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k(1 - Tj\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \\ &= \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Дійсна і уявна частотні характеристики мають вигляд

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

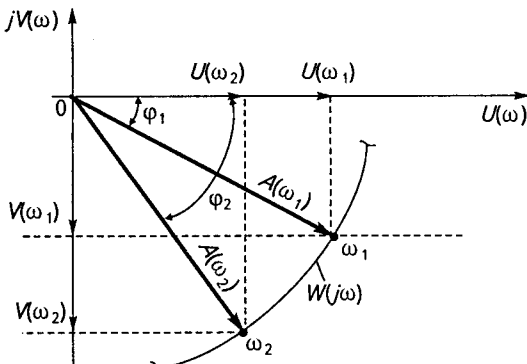


Рис. 3.10

Амплітудно-частотна характеристика записується у вигляді

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} + \frac{(kT\omega)^2}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}},$$

а фазочастотна —

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{-\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}}{\frac{k}{1 + T^2\omega^2}} \right] = -\operatorname{arctg} [T\omega].$$

Задаючи ω , обчислимо відповідні значення $U(\omega)$ і $V(\omega)$, які наведено в табл. 3.1.

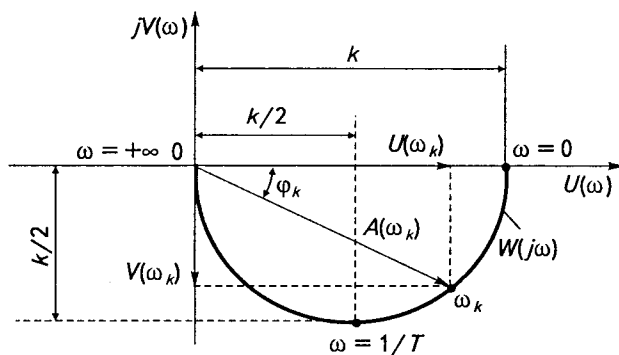


Рис. 3.11

Таблиця 3.1

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	k	0
$1/T$	$k/2$	$-k/2$
∞	0	0

АФХ типової аперіодичної ланки першого порядку є півколо у четвертому квадранті комплексної площини (рис. 3.11).

Частотні характеристики $U(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ побудовано на рис. 3.12, а—г.

Експериментальний метод побудови амплітудно-фазової частотної характеристики ланки (системи). Щоб побудувати амплітудно-фазову характеристику, треба мати елемент (систему) в натуральному вигляді або його модель. Крім того, потрібні генератор змінної частоти та прилади для вимірювання амплітуди і фази вихідної величини.

Для побудови характеристики на вхід елемента подаються коливання $f = a \sin \omega t$. При цьому на виході дістають коливання $F = A \sin (\omega t + \varphi)$.

3.4. Передаточні функції та частотні характеристики типових ланок.
 Приклади побудови. Загальні відомості про частотні характеристики

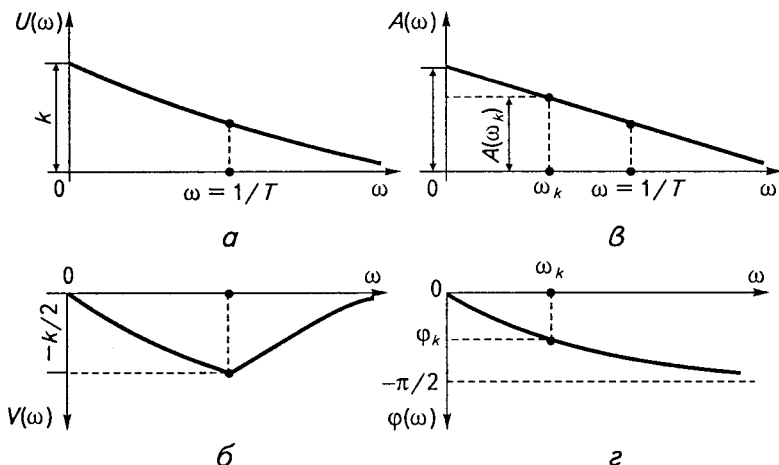


Рис. 3.12

При $a = 1$

$$W(j\omega) = \frac{F}{f} = \frac{Ae^{j(\omega t + \varphi)}}{e^{j\omega t}} = Ae^{j\varphi}.$$

Результати вимірювань при різних частотах наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

ω_1	A_1	φ_1
ω_2	A_2	φ_2
ω_n	A_n	φ_n

За даними таблиці неважко побудувати амплітудно-фазову характеристику, на основі якої можна дістати й інші частотні характеристики.

Розглянемо тепер передаточні функції та частотні характеристики інших типових ланок.

Безінерційна ланка. Рівняння цієї ланки має вигляд $x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}$; передаточна функція $W(p) = k$; амплітудно-фазова характеристика $W(j\omega) = k$, яка є точкою, що лежить на дійсній осі комплексної площини.

Аперіодична ланка першого порядку. Для цієї ланки рівняння, передаточну функцію та амплітудно-фазову частотну характеристику наведено в п. 3.1.

Ланка другого порядку. Передаточна функція ланки

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1},$$

а амплітудно-фазова характеристика

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2 - jT_2 \omega)}{(-T_1^2 \omega^2 + T_2 j\omega + 1)(1 - T_1^2 \omega^2 - jT_2 \omega)} = \\ &= U(\omega) + jV(\omega), \end{aligned}$$

де

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}; \quad V(\omega) = \frac{-kT_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}.$$

Значення $U(\omega)$ і $V(\omega)$ при відповідних ω наведено в табл. 3.3, на основі якої на рис. 3.13 побудована АФХ елемента другого порядку, що розміщується в третьому і четвертому квадрантах комплексної площини.

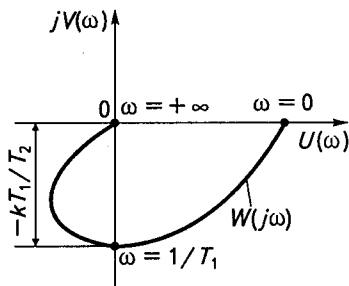


Рис. 3.13

Таблиця 3.3

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	k	0
$1/T_1$	0	$-kT_1/T_2$
∞	0	0

Інтегрувальна ідеальна ланка. Для цієї ланки $W(p) = k \frac{1}{p}$; $W(j\omega) = k \frac{1}{j\omega} \frac{j\omega}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$,

тобто АФХ є прямою, що збігається з від'ємною уявною віссю a (рис. 3.14). При $\omega \rightarrow 0$ АФХ $W(j\omega) \rightarrow -\infty$.

Диференціювальна ідеальна ланка. Для неї $W(p) = kp$, $W(j\omega) = kj\omega$, тобто АФХ збігається з уявною віссю b , але направленою в додатному напрямку (див. рис. 3.14).

Крім рівнянь, передаточних функцій і відповідних частотних характеристик ідеальних диференціювальних та інтегрувальних ланок, у теорії автоматичного керування виділяють також інерційні диференціювальні та інтегрувальні ланки, які розглядатимуться при побудові відповідних логарифмічних характеристик.

Ланки з чистим запізненням. У загальному вигляді

$$W(p) = ke^{-\mu t}; \quad W(j\omega) = ke^{-j\omega\tau}. \quad (3.35)$$

Амплітудно-частотна характеристика ланки

$$A(\omega) = k = \text{const},$$

а фазочастотна —

$$\varphi\omega = -\omega\tau.$$

Згідно з (3.35) амплітудно-фазова характеристика ланки із запізненням є колом радіуса k , що періодично повторюється.

Амплітудно-частотна характеристика $A(\omega) = k$ є радіусом-вектором, що обертається за годинниковою стрілкою.

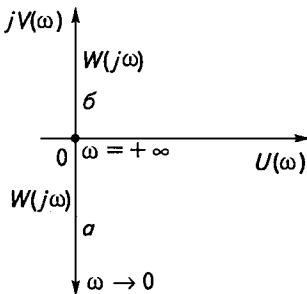


Рис. 3.14

3.5

Рівняння динаміки, передаточні функції і амплітудно-фазові частотні характеристики груп ланок при різному їх з'єднанні

Послідовне з'єднання ланок. При послідовному з'єднанні ланок вихідна величина кожної попередньої ланки подається на вхід наступної і, згідно з цим, рівняння динаміки групи послідовно з'єднаних ланок має дати залежність вихідної величини останньої ланки від вхідної першої.

Запишемо рівняння динаміки окремих елементів:

- першого елемента

$$P_1(p)x_{1\text{вих}} = Q_1(p)x_{1\text{вх}};$$

- другого елемента з урахуванням того, що $x_{1\text{вих}} = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1\text{вх}} = x_{2\text{вх}}$,

$$P_2(p)x_{2\text{вих}} = Q_2(p)\frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1\text{вх}};$$

- n -го елемента

$$P_n(p)x_{n\text{вих}} = Q_n(p) \frac{Q_1(p) Q_2(p) \dots Q_{n-1}(p)}{P_1(p) P_2(p) \dots P_{n-1}(p)} x_{1\text{вх}}. \quad (3.36)$$

Позначивши

$$P_1(p) P_2(p) \dots P_n(p) = P(p);$$

$$Q_1(p) Q_2(p) \dots Q_n(p) = Q(p),$$

дістанемо рівняння n послідовно з'єднаних ланок у вигляді

$$P(p)x_{n\text{вих}} = Q(p)x_{1\text{вх}}. \quad (3.37)$$

Передаточна функція n послідовно з'єднаних ланок з урахуванням залежності (3.36)

$$W_{1-n}(p) = \frac{x_{n\text{вих}}}{x_{1\text{вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q_1(p) Q_2(p) \dots Q_n(p)}{P_1(p) P_2(p) \dots P_n(p)}$$

або

$$W_{1-n}(p) = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p). \quad (3.38)$$

Амплітудно-фазова характеристика послідовно з'єднаних n ланок

$$W_{1-n}(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega). \quad (3.39)$$

Якщо відомі АФХ окремих ланок (наприклад, знайдені експериментально), то характеристику послідовно з'єднаних ланок можна побудувати графічно.

Наприклад, для двох ланок, амплітудно-фазові характеристики яких

$$W_1(j\omega) = A_1 e^{j\varphi_1};$$

$$W_2(j\omega) = A_2 e^{j\varphi_2},$$

результуюча характеристика при їхньому послідовному з'єднанні матиме вигляд

$$W_{1-2}(j\omega) = A_{1-2} e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

де $A_{1-2} = A_1 A_2$.

АФХ окремих ланок і графічну побудову результуючої АФХ ланок показано на рис. 3.15, а—в.

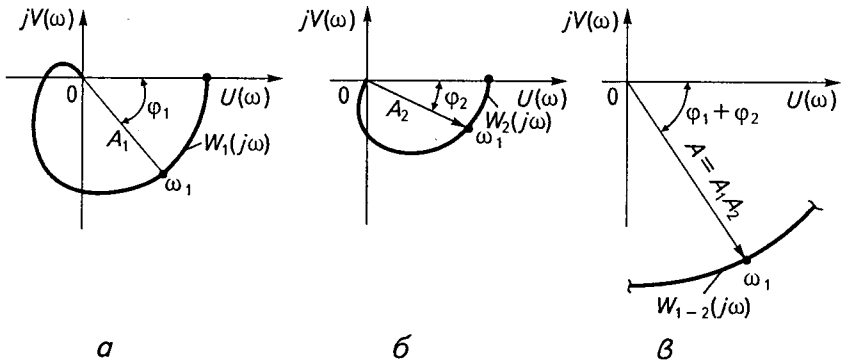


Рис. 3.15

Паралельне з'єднання ланок. Нагадаємо, що при паралельному з'єднанні ланок їхні вхідні величини однакові:

$$x_{\text{вх}} = x_{1 \text{ вх}} = x_{2 \text{ вх}} = \dots = x_{n \text{ вх}},$$

а вихідна величина є сумою вихідних величин ланок, що з'єднуються,

$$x_{\text{вих}} = x_{1 \text{ вих}} + x_{2 \text{ вих}} + \dots + x_{n \text{ вих}}.$$

Розглянемо рівняння та передаточні функції при паралельному з'єднанні ланок на прикладі двох паралельно з'єднаних ланок з рівняннями динаміки вигляду

$$P_1(p)x_{1 \text{ вих}} = Q_1(p)x_{1 \text{ вх}};$$

$$P_2(p)x_{2 \text{ вих}} = Q_2(p)x_{2 \text{ вх}}.$$

У цьому випадку

$$x_{\text{вих}} = x_{1 \text{ вих}} + x_{2 \text{ вих}} = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1 \text{ вх}} + \frac{Q_2(p)}{P_2(p)}x_{2 \text{ вх}}$$

і рівняння динаміки

$$x_{\text{вих}} = [W_1(p) + W_2(p)]x_{\text{вх}}, \quad (3.40)$$

звідки дістанемо передаточну функцію двох паралельно з'єднаних ланок:

$$W_{1-2}(p) = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = W_1(p) + W_2(p). \quad (3.41)$$

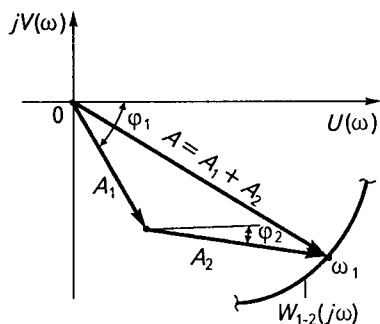


Рис. 3.16

АФХ для цих двох ланок

$$W_{1-2}(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega). \quad (3.42)$$

У загальному випадку при n з'єднаних ланках АФХ визначається як сума відповідних характеристик усіх ланок:

$$W_{1-n}(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p);$$

$$W_{1-n}(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega) + \dots + W_n(j\omega).$$

Графічно результуюча АФХ будеться за правилами складання векторних величин (рис. 3.16).

Ланка зі зворотним зв'язком. На рис. 3.17 показана ланка I , охоплена зворотним зв'язком ЗЗ, а також відповідні вхідні та вихідні величини.

Рівняння динаміки ланки I до охоплення її зворотним зв'язком

$$P_1(p)x_{1\text{ вих}} = Q_1(p)x_{1\text{ вх}}.$$

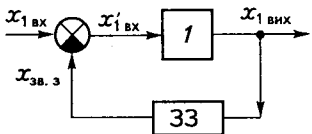


Рис. 3.17

Рівняння самої ланки зворотного зв'язку в загальному вигляді запишеться так:

$$P_{зв}(p)x_{зв} = Q_{зв}(p)x_{1\text{ вих}},$$

звідки

$$x_{зв} = \frac{Q_{зв}(p)}{P_{зв}(p)} x_{1\text{ вих}}.$$

Рівняння ланки з урахуванням зворотного зв'язку має вигляд

$$P_1(p)x_{1\text{ вих}} = Q_1(p)(x_{1\text{ вх}} \pm x_{зв}) = Q_1(p)\left(x_{1\text{ вх}} \pm \frac{Q_{зв}(p)}{P_{зв}(p)} x_{1\text{ вих}}\right),$$

де знак «плюс» відповідає додатному, а «мінус» — від'ємному зворотному зв'язку.

Після нескладних перетворень дістанемо

$$[P_1(p)P_{зв}(p) \mp Q_1(p)Q_{зв}(p)]x_{1\text{ вих}} = Q_1(p)P_{зв}(p)x_{1\text{ вх}}.$$

Звідси можна дістати передаточну функцію ланки, охопленої зворотним зв'язком:

$$W_1^{\text{зв}}(p) = \frac{x_{1 \text{ вих}}}{x_{1 \text{ вх}}} = \frac{Q_1(p)P_{\text{зв}}(p)}{P_1(p)P_{\text{зв}}(p) \mp Q_1(p)Q_{\text{зв}}(p)}.$$

Поділивши чисельник і знаменник на $P_1(p)P_{\text{зв}}(p)$, матимемо

$$W_1^{\text{зв}}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_{\text{зв}}(p)}, \quad (3.43)$$

де $W_1(p)$ — передаточна функція самої ланки без урахування зворотного зв'язку; $W_{\text{зв}}(p)$ — передаточна функція ланки зворотного зв'язку. Знак «мінус» у даному разі відповідає додатному, а «плюс» — від'ємному зворотному зв'язку.

Відповідний вигляд матиме АФХ ланки зі зворотним зв'язком:

$$W_1^{\text{зв}}(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 \mp W_1(j\omega)W_{\text{зв}}(j\omega)}. \quad (3.44)$$

3.6

Логарифмічні частотні характеристики

Усі розглянуті вище частотні характеристики окремих ланок і відповідних груп ланок можуть бути побудовані в логарифмічному масштабі. В цьому випадку їх називають *логарифмічними характеристиками*: логарифмічною амплітудно-частотною та логарифмічною фазочастотною.

При побудові логарифмічних характеристик по вертикальній осі відкладають логарифм відповідної величини в децибелах (логарифмічна величина «непер» вважається дуже великою).

Нагадаємо, що для знаходження відповідної величини в децибелах її десятковий логарифм слід помножити на 20.

Так, амплітудно-частотна характеристика в децибелах матиме вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega).$$

По горизонтальній осі частоти відкладають також у логарифмічному масштабі — в октавах або декадах (але часто записують значення самої частоти ω). Тому по горизонтальній осі масштаб буде нерів-

номірним. При цьому в початку координат можна відкласти довільне значення $\lg \omega$, але не те, що відповідає $\omega = 0$, оскільки $\lg 0 \approx -\infty$.

Одна октава є величиною, що дорівнює різниці логарифмів деякої частоти ω і її подвоєного значення:

$$1 \text{ октава} = \lg 2\omega - \lg \omega = \lg 2 + \lg \omega - \lg \omega = \lg 2.$$

Одна декада відповідно дорівнює різниці логарифмів:

$$1 \text{ декада} = \lg 10\omega - \lg \omega = 1.$$

Із викладеного випливає, що інтервал, який дорівнює одній октаві або декаді, не залежить від абсолютного значення частоти ω .

Перевагами логарифмічних характеристик є більш вдалий масштаб, який дає змогу легко лінеаризувати відповідні характеристики і спростити побудову логарифмічних характеристик групи ланок, а також можливість заміни складніших дій (множення, ділення) простішими (додавання, віднімання).

Так, АФХ групи послідовно з'єднаних ланок

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)\dots W_n(j\omega) = \frac{Q_1(j\omega)Q_2(j\omega)\dots Q_n(j\omega)}{P_1(j\omega)P_2(j\omega)\dots P_n(j\omega)}$$

при використанні натурального масштабу потребує перемноження операторів чисельника і знаменника з подальшим діленням здобутих результатів.

Якщо побудову вести за допомогою логарифмічних характеристик, то можна записати

$$20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg |Q_1(j\omega)| + 20 \lg |Q_2(j\omega)| + \dots + 20 \lg |Q_n(j\omega)| - \\ - 20 \lg |P_1(j\omega)| - 20 \lg |P_2(j\omega)| - \dots - 20 \lg |P_n(j\omega)|.$$

Розрахунки у цьому разі суттєво спрощуються. У зв'язку з цим при побудові логарифмічних характеристик групи ланок (системи) їх побудова зводиться до алгебраїчного додавання відповідних характеристик, що широко використовується при дослідженнях динаміки САК, при синтезі систем керування. Фазочастотні логарифмічні характеристики будуються як залежність $\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$. При цьому

на вертикальній осі відкладають фазу в радіанах або градусах, а по горизонтальній — ω в логарифмічному масштабі.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика аперіодичної ланки першого порядку. Передаточна функція цієї ланки

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \text{ АФХ після позбавлення від уявної величини в знамен-}$$

нику і виділення дійсної і уявної частин (характеристик) матиме вигляд

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - Tj\omega)}{(Tj\omega + 1)(1 - Tj\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2},$$

а амплітудно-частотна характеристика —

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2(1 + T^2\omega^2)}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

У логарифмічних одиницях (дБ) вона запишеться так:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}.$$

Вираз $\sqrt{1 + T^2\omega^2}$ є модулем комплексної величини $1 + jT\omega$ і тому можна записати

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg |1 + jT\omega|. \quad (3.45)$$

Враховуючи, що $20 \lg k$ є стала величина, проаналізуємо другу складову $N = 20 \lg |1 + jT\omega|$ при різних значеннях ω .

При малих частотах $T\omega \ll 1$ $N = 20 \lg 1 \cong 0$. При великих частотах $T\omega \gg 1$ складова $N \cong 20 \lg |jT\omega| = 20 \lg T\omega$ є прямою, що нахилена під деяким кутом відносно осі.

Граничною частотою між зоною малих і великих частот є частота, при якій виконується умова $\omega T = 1$, звідки $\omega = \frac{1}{T}$.

Побудову величини $N = 20 \lg |1 + jT\omega|$ наведено на рис. 3.18, а. Нахил прямої BC , що відповідає частотній характеристиці $20 \lg \omega T$, на одну октаву можна обчислити як різницю $20 \lg 2\omega T - 20 \lg \omega T = 20 \lg 2 = 20 \cdot 0,3 = 6$ дБ. Дійсний вигляд характеристики, згідно з яким при $\omega T = 1$ $N = 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} = 20 \lg \sqrt{2} = 3$ дБ, показано на рис. 3.18, а штриховою лінією.

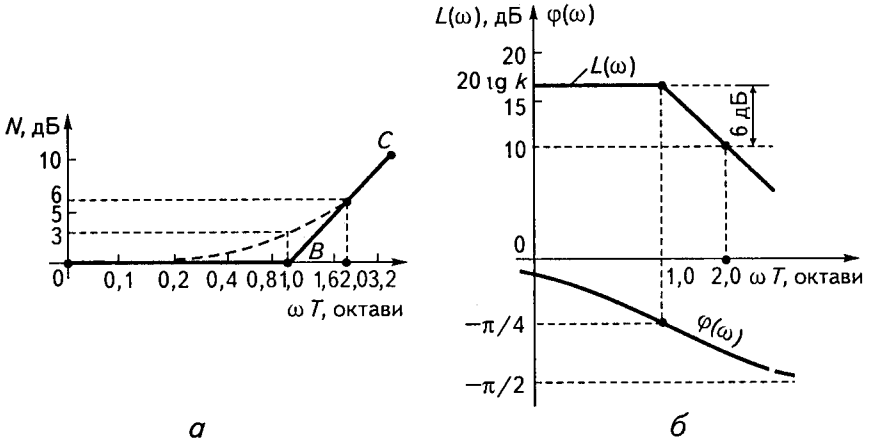


Рис. 3.18

За допомогою виразу (3.45) на рис. 3. 18, б побудовано загальну логарифмічну амплітудно-частотну характеристику аперіодичної ланки першого порядку. При цьому лінеаризовану характеристику часто називають *асимптотичною логарифмічною характеристикою*.

Відповідну фазочастотну логарифмічну характеристику будують за допомогою виразу $\varphi(\omega)$. При цьому на вертикальній осі відкладають фазу в натуральному масштабі (в радіанах або градусах), а частоту ω — по горизонтальній осі в логарифмічному масштабі. Характеристика будується в четвертому квадранті.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика ідеальної інтегрувальної ланки. Передаточна функція інтегрувальної ланки $W(p) = k \frac{1}{p}$, а її амплітудно-фазова частотна характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega} \text{ (рис. 3.19, а).}$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{\omega}\right)^2} = \frac{k}{\omega},$$

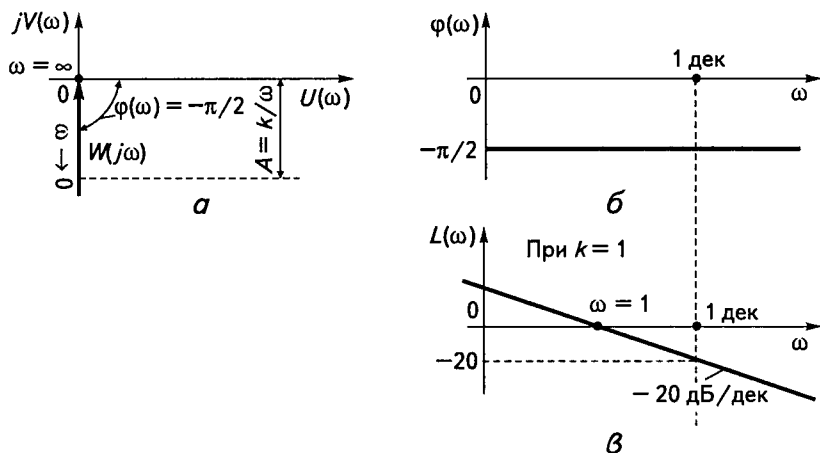


Рис. 3.19

де

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = -j \frac{k}{\omega}.$$

Фазочастотна характеристика, яка в загальному випадку записується так: $\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$, у даному разі при $U(\omega) = 0$ матиме вигляд

$\varphi(\omega) = -90^\circ$ (рис. 3.19, б).

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика інтегрувальної ланки

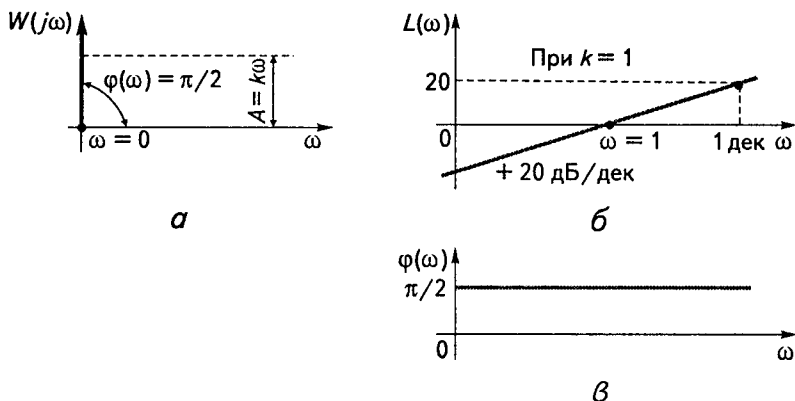
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

При $k = 1$ $20 \lg k = 0$, $20 \lg A(\omega) = -20 \lg \omega$. У цьому разі вона являє собою лінійну залежність, яка проходитьиме другий, перший і четвертий квадранти, перетворюючись на нуль при $\omega = 1$ (рис 3.19, в). Її нахил дорівнює -20 дБ/дек.

Логарифмічні характеристики ідеальної диференціальної ланки. Для цієї ланки передаточна функція $W(p) = kp$, а АФХ —

$$W(j\omega) = kj\omega = U(\omega) + jV(\omega) = 0 + kj\omega; \quad A = \sqrt{(k\omega)^2} = k\omega.$$

Як зазначалося раніше, характеристика в даному разі — це пряма, що збігається з уявною віссю в першому квадранті (рис. 3. 20, а). Фазочастотну характеристику наведено на рис. 3.20, в.

Рис. 3.20

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика має вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k\omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Ця характеристика є прямою, яка на відміну від інших частотних логарифмічних характеристик має додатний нахил 20 дБ/дек (рис. 3.20, б).

Логарифмічні частотні характеристики ланки другого порядку. Залежно від коренів характеристичного рівняння ланка може бути аперіодичною ланкою другого порядку, якщо обидва корені квадратного характеристичного рівняння дійсні і від'ємні, або коливаючною стійкою ланкою при комплексних із від'ємною дійсною частиною коренях характеристичного рівняння.

Логарифмічні характеристики аперіодичної ланки другого порядку. Передаточна функція ланки

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$$

при $T_2 > 2T_1$ (умова дійсних, від'ємних коренів характеристичного рівняння).

Цю передаточну функцію можна записати в дещо іншому вигляді:

$$W(p) = \frac{k}{T_3 T_4 p^2 + (T_3 + T_4) p + 1},$$

де $T_3 T_4 = T_1^2$; $T_3 + T_4 = T_2$.

Розклавши знаменник на множники, дістанемо

$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика запишеться так:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{(jT_3\omega + 1)(jT_4\omega + 1)} = \\ &= k \frac{(1 - jT_3\omega)(1 - jT_4\omega)}{(1 + jT_3\omega)(1 - jT_3\omega)(1 + jT_4\omega)(1 - jT_4\omega)} = k \frac{(1 - jT_3\omega)(1 - jT_4\omega)}{(T_3^2\omega^2 + 1)(T_4^2\omega^2 + 1)} = \\ &= k \left[\frac{1}{1 + T_3^2\omega^2} - j \frac{T_3\omega}{1 + T_3^2\omega^2} \right] \left[\frac{1}{1 + T_4^2\omega^2} - j \frac{T_4\omega}{1 + T_4^2\omega^2} \right] = \\ &= k [U_1(\omega) - jV_1(\omega)][U_2(\omega) - jV_2(\omega)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= k \sqrt{[U_1(\omega)]^2 + [V_1(\omega)]^2} \sqrt{[U_2(\omega)]^2 + [V_2(\omega)]^2} = \\ &= k \sqrt{\frac{1 + T_3^2\omega^2}{(1 + T_3^2\omega^2)^2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + T_4^2\omega^2}{(1 + T_4^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T_3^2\omega^2} \sqrt{1 + T_4^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

Фазочастотна характеристика матиме вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\operatorname{arctg} \frac{V_1(\omega)}{U_1(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{V_2(\omega)}{U_2(\omega)} = -\operatorname{arctg} \frac{T_3\omega(1 + T_3^2\omega^2)}{1 + T_3^2\omega^2} - \\ &= -\operatorname{arctg} \frac{T_4\omega(1 + T_4^2\omega^2)}{1 + T_4^2\omega^2} = -\operatorname{arctg} T_3\omega - \operatorname{arctg} T_4\omega, \end{aligned}$$

а логарифмічна амплітудно-частотна характеристика —

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T_3^2\omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + T_4^2\omega^2}.$$

При $k = 1$ результуюча логарифмічна амплітудно-частотна характеристика

$$L_{\Sigma} = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T_3^2\omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + T_4^2\omega^2} = A_1 + A_2$$

є сума двох амплітудно-частотних логарифмічних характеристик аперіодичних ланок першого порядку зі значеннями частот сполюки $\omega_1 = \frac{1}{T_3}$, $\omega_2 = \frac{1}{T_4}$.

Складові L_1 і L_2 результуючої логарифмічної характеристики L_{Σ} показано на рис. 3.21, а–в.

При $k \neq 1$ результуюча характеристика розміщуватиметься в першому і другому квадранті з урахуванням $20 \lg k = a$ і матиме вигляд, показаний на рис. 3.21, в штрихом. Фазочастотну характеристику наведено на рис. 3.21, г.

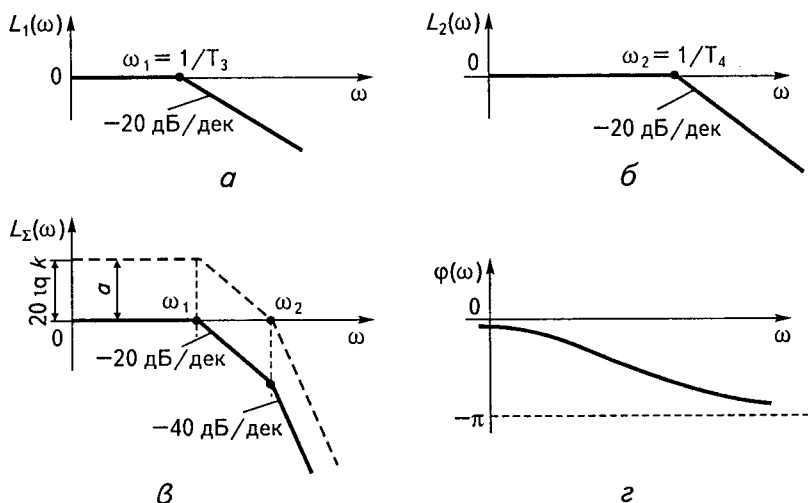


Рис.3.21

Логарифмічні характеристики коливальної ланки другого порядку. Амплітудно-фазова частотна характеристика в цьому випадку матиме вигляд

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{k}{-T_1^2 \omega^2 + 1 + jT_2 \omega} = \frac{k[(1 - T_1^2 \omega^2) - jT_2 \omega]}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} = \\
 &= \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} - j \frac{kT_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),
 \end{aligned}$$

а амплітудно-частотна характеристика —

$$A(\omega) = k \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2}$$

або

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}}. \quad (3.46)$$

Фазочастотна характеристика запишеться так:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}. \quad (3.47)$$

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика має вигляд

$$L_{\Sigma} = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}.$$

Знайдемо асимптоти цієї характеристики: при $\omega \rightarrow 0$

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg 1 = 20 \lg k;$$

при $\omega \rightarrow \infty$ головне значення матиме член, в який ω входить в четвертому степені, тому наближено можна записати

$$20 \lg A(\omega) \cong 20 \lg k - 2 \cdot 20 \lg T_1 \omega = 20 \lg k - 40 \lg T_1 \omega \rightarrow -\infty.$$

При $k = 1$ амплітудно-частотні логарифмічні характеристики коливальної ланки другого порядку показано на рис. 3. 22, а, а фазочастотні — на рис. 3. 22, б. Амплітудно-частотні характеристики $L_{\Sigma} = 20 \lg A(\omega)$ побудовано при різних співвідношеннях $T_2/2T_1$, яке, як відомо, визначає коливальні та демпфувальні якості ланки.

При значеннях $T_2/2T_1$, близьких до 0,7...0,75, матимемо асимптотичну характеристику, близьку до позначеної цифрою 0 на рис. 3.22, а, яка складається з двох частин — прямої, що збігається з горизонтальною віссю до частоти $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, і прямої з нахилом - 40 дБ/дек.

При $1 > \frac{T_2}{2T_1} > 0,5$ відхилення логарифмічних характеристик від асимптотичної незначне, але при $0,5 > \frac{T_2}{2T_1} > 0$ ці відхилення різко

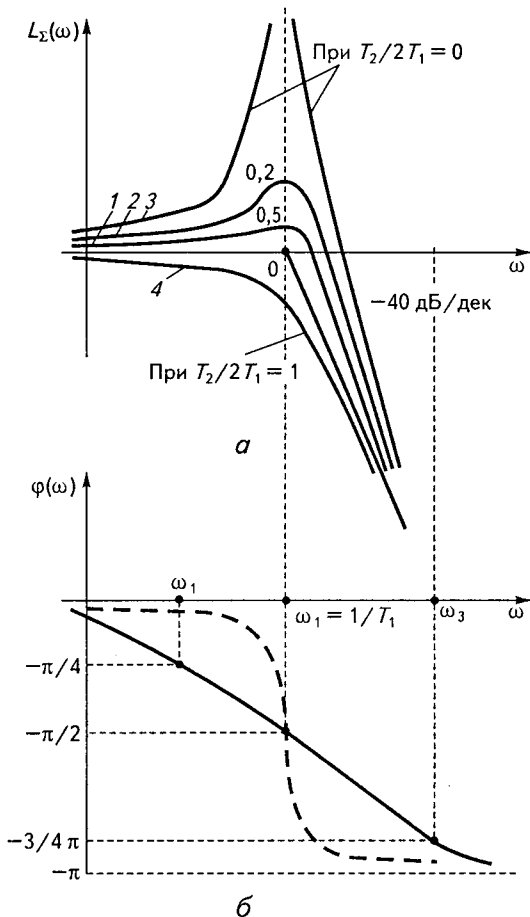


Рис. 3.22

збільшуються, що відображає зростання коливальних і зменшення демпфувальних властивостей ланки.

Знайдемо значення $A(\omega)$ в точці з $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$:

$$A(\omega) = k \frac{T_1}{T_2} \quad \text{і відхилення}$$

від асимптоти логарифмічної характеристики при $k = 1$: $\Delta L_\Sigma = 20 \lg \frac{T_1}{T_2}$. При

відсутності демпфувальних властивостей ($T_2 = 0$) $\Delta L_\Sigma \rightarrow \infty$.

Отже, на відміну від аперіодичної ланки другого порядку коливальна ланка має амплітудно-частотну характеристику з резонансним шпилем з коефіцієнтом підсилення амплітуди, який може бути значно більшим за статичний коефіцієнт підсилення ланки.

Логарифмічна фазочастотна характеристика $\varphi(\omega)$ побудована на рис. 3.22, б. Вона, як показано штриховою лінією, відповідає зменшенню демпфувальних властивостей ланки.

Логарифмічна характеристика підсилювальної (ідеальної) ланки. Для неї амплітудно-частотна характеристика має суто теоретичне значення, бо вона не залежить від частоти

$$L_{\Sigma} = 20 \lg k = \text{const}; \quad \varphi(\omega) = 0.$$

Логарифмічні характеристики інерційних неідеальних диференціювальних та інтегрувальних ланок. Логарифмічні характеристики інерційної диференціювальної ланки. Передаточна функція інерційної диференціювальної ланки має вигляд

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (3.48)$$

а амплітудно-фазова характеристика —

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega + 1} = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{kj\omega(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \frac{kT\omega^2 + jk\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Дійсна частотна характеристика запишеться так:

$$U(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1 + T^2\omega^2},$$

а уявна —

$$V(\omega) = \frac{k\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Задаючи значення ω від 0 до $+\infty$, можна побудувати АФХ $W(j\omega)$, яка є півколом у першому квадранті (рис. 3.23, а).

Амплітудно-частотна характеристика диференціювальної ланки має вигляд

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\left(\frac{kT\omega^2}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2} = \\ &= \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \end{aligned}$$

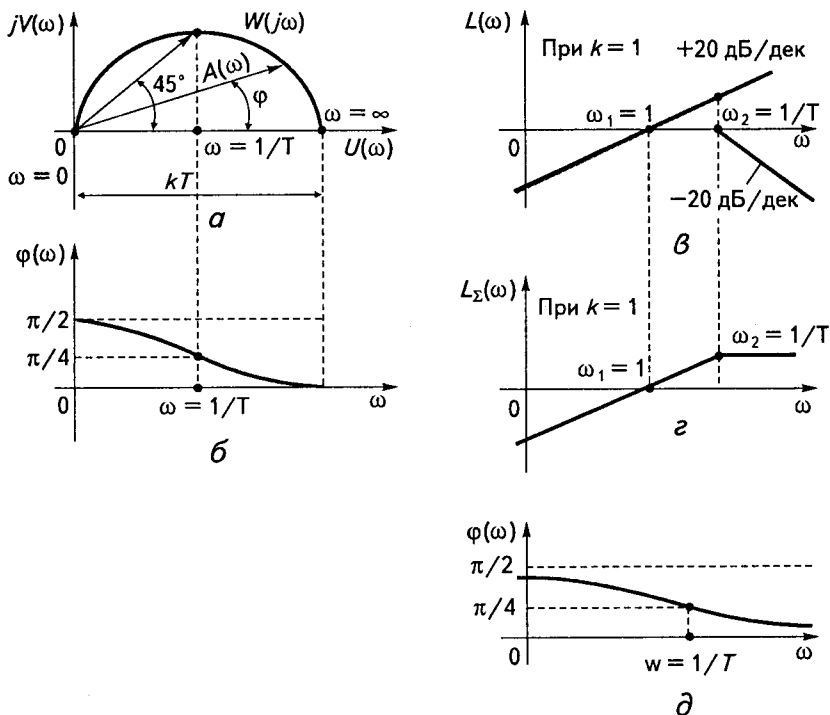
а фазочастотна —

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{\omega k}{kT\omega^2} = \arctg \frac{1}{\omega T} = 90^\circ - \arctg T\omega$$

(рис. 3.23, б).

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика запишеться так:

$$L_{\Sigma} = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}.$$

**Рис. 3.23**

Отже, вона складається з трьох характеристик, які вже було розглянуто раніше. При $k = 1$

$$L_{\Sigma} = 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}.$$

Ці окремі логарифмічні характеристики показано на рис. 3.23, в, а їх алгебрична сума — на рис. 3.23, з.

Логарифмічну фазочастотну характеристику $\varphi(\omega)$ наведено на рис. 3.23, д.

Логарифмічні характеристики інерційної інтегрувальної ланки. Інерційною інтегрувальною називають ланку, передаточна функція якої

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}. \quad (3.49)$$

Її амплітудно-фазова частотна характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(Tj\omega + 1)} = \frac{kj(1 - jT\omega)}{-\omega(1 + T^2\omega^2)} = -\frac{kT\omega + jk}{\omega(1 + T^2\omega^2)},$$

де дійсна частотна характеристика й уявна виражаються відповідно формулами

$$U(\omega) = -\frac{kT}{1 + T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = -\frac{k}{\omega(1 + T^2\omega^2)}.$$

Амплітудно-частотна характеристика має вигляд

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\frac{k^2 T^2 \omega^2}{\omega^2 (T^2 \omega^2 + 1)^2} + \frac{k^2}{\omega^2 (T^2 \omega^2 + 1)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2 (T^2 \omega^2 + 1)}{\omega^2 (T^2 \omega^2 + 1)^2}} = \frac{k}{\omega \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}, \end{aligned}$$

а фазочастотна —

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{-k}{\frac{\omega(T^2\omega^2 + 1)}{kT}} = \arctg \frac{1}{T\omega} = -90^\circ - \arctg T\omega.$$

Відповідну амплітудно-фазову частотну характеристику показано на рис. 3.24, а.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика цієї ланки

$$L_{\Sigma} = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

при $k = 1$ складається з двох характеристик, наведених на рис. 3.24, б. Їх результуючу логарифмічну характеристику побудовано на рис. 3.24, в, а відповідну фазочастотну логарифмічну характеристику — на рис. 3.24, г.

Як бачимо, інерційність даної ланки збільшує відставання фази на величину, більшу за -90° . При частотах, менших $\omega = \frac{1}{T}$, ця ланка близька до ідеальної інтегрувальної ланки.

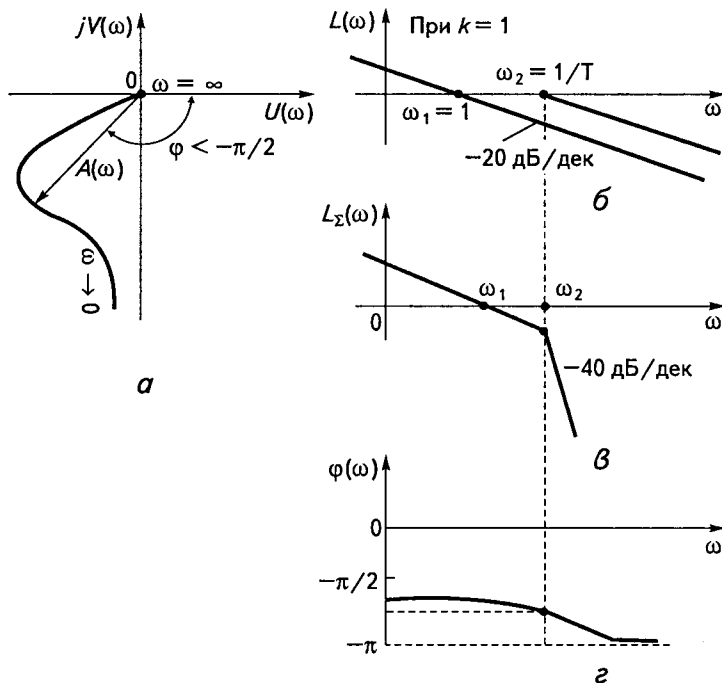


Рис. 3.24

Логарифмічні характеристики ідеальної безінерційної ланки при введенні похідної. Передаточна функція має вигляд

$$W(p) = k(1 + pk_1),$$

де k — передаточний статичний коефіцієнт безінерційної ланки; k_1 — передаточний коефіцієнт у рівнянні похідної.

Запишемо для цієї ланки характеристики:
амплітудно-фазова

$$W(j\omega) = k(1 + j\omega k_1);$$

амплітудно-частотна

$$A = k\sqrt{1 + k_1^2\omega^2};$$

фазочастотна

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} k_1\omega;$$

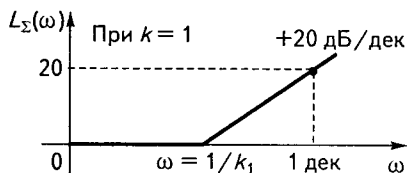
логарифмічна амплітудно-частотна

$$L_{\Sigma}(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + k_1^2 \omega^2}.$$

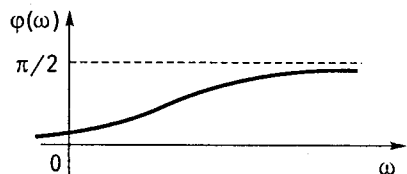
Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика при $k = 1$ показана на рис. 3.25, а, а логарифмічна фазочастотна характеристика — на рис. 3.25, б.

При низьких частотах ($\omega < 1/k_1$) ця ланка близька до ідеальної підсилювальної ланки, а при високих частотах ($\omega > 1/k_1$) — до ідеальної диференціювальної ланки. Випередження за фазою зростає зі збільшенням частоти.

Знаючи правила побудови логарифмічних характеристик окремих ланок, а також результируючих логарифмічних характеристик, можна побудувати характеристики для групи ланок.



а



б

Рис. 3.25

Побудова логарифмічних характеристик групи ланок.

Найчастіше виникає необхідність побудови логарифмічної характеристики розімкнутої системи. (Як буде показано далі, в ТАК є методи, за допомогою яких за виглядом частотних характеристик розімкнутої системи можна оцінювати динамічні властивості замкнутої системи.)

Відомо, що передаточна функція розімкнутої системи з n ланок (як передаточна функція групи послідовно з'єднаних ланок) є добутком передаточних функцій кожної з цих ланок:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)\dots W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Аналогічний вигляд матиме і амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи:

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega).$$

Як було показано раніше, при побудові результуючих частотних характеристик для групи послідовно з'єднаних ланок результуючий модуль (амплітудно-частотна характеристика розімкнутої системи) можна дістати як добуток модулів усіх ланок, а результуючу фазочастотну характеристику — як суму фазочастотних характеристик відповідних ланок.

Отже, можна записати

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega); \quad \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega).$$

Згідно з наведеними вище формулами при побудові логарифмічної амплітудно-частотної характеристики

$$L_{\Sigma}(\omega) = 20 \lg A_{\Sigma}(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) + \dots + 20 \lg A_n(\omega).$$

Загальна методика побудови результуючої характеристики полягає в знаходженні логарифмічної характеристики окремо кожної ланки з наступним додаванням ординат при відповідних частотах.

Як приклад розглянемо побудову логарифмічної амплітудно-частотної характеристики розімкнутої системи, що складається з чотирьох ланок з передаточними функціями:

- безінерційної підсилювальної $W_1(p) = k_1$;
- аперіодичної першого порядку $W_2(p) = \frac{k_2}{1 + T_2 p}$ (об'єкт керування);
- аперіодичної першого порядку $W_3(p) = \frac{k_3}{1 + T_3 p}$;
- інтегрувальної $W_4(p) = \frac{k_4}{p}$ (при $k_4 = 1$ $W_4(p) = 1/p$).

Відповідні логарифмічні амплітудно-частотні характеристики $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$, $L_4(\omega)$ були побудовані раніше (рис. 3.26, а, криві 1, 2, 3, 4). На рис. 3.26, б наведено відповідні логарифмічні фазочастотні характеристики цих ланок $\varphi_2(\omega)$, $\varphi_3(\omega)$, $\varphi_4(\omega)$ (для першої ланки $\varphi_1(\omega) = 0$). Результуюча логарифмічна амплітудна характеристика всіх чотирьох ланок $L_{\Sigma}(\omega)$ наведена на рис. 3.26, в, а результуюча логарифмічна фазочастотна характеристика $\varphi_{\Sigma}(\omega)$ — на рис. 3.26, г.

3.6. Логарифмічні частотні характеристики

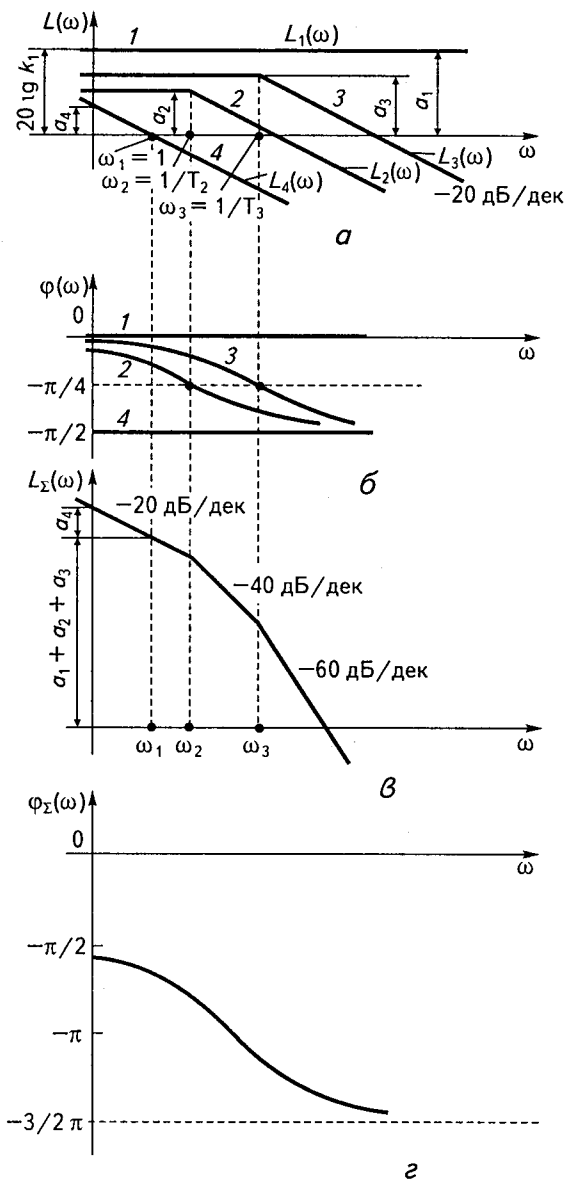


Рис. 3.26

3.7

Мінімально– та немінімально–фазові ланки

Крім розглянутої раніше класифікації, в теорії автоматичного керування ланки класифікують також залежно від вигляду, а точніше, від особливостей передаточних функцій. Ця класифікація базується на поняттях нулів і полюсів передаточних функцій.

Якщо передаточну функцію записати у вигляді

$$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)},$$

то нулями передаточної функції називають корені рівняння $Q(p) = 0$, а полюсами — корені рівняння $P(p) = 0$, де $Q(p)$ і $P(p)$ — поліноми від p відповідно правих і лівих частин рівнянь динаміки.

Інакше, нулі — таке значення коренів чисельника передаточної функції, за яких передаточна функція $W(p)$ дорівнює нулю. Полюси — таке значення коренів знаменника передаточної функції, за яких вона перетворюється на нескінченність. Якщо всі нулі та полюси передаточної функції ланки мають від’ємні або рівні нулю дійсні частини, то така ланка називається *мінімально-фазовою*.

Немінімально-фазовою називають ланку, в якій серед нулів і полюсів є хоча б один, який має додатну дійсну частину. Всі розглянуті раніше типові ланки, крім ланки з чистим запізненням та нестійкої аперіодичної ланки першого порядку, є мінімально-фазовими.

Передаточні функції немінімально-фазових ланок матимуть вигляд

$$W(p) = \frac{k}{T_p - 1}; \quad W(p) = k(T_p - 1); \quad W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 - T_2 p - 1};$$

$$W(p) = k(T_1^2 p^2 - T_2 p - 1); \quad W(p) = ke^{-\tau p}.$$

Амплітудно-фазова характеристика, наприклад, ланки з чистим запізненням, згідно з формулою Ейлера,

$$W(j\omega) = k(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau),$$

що в комплексній площині становить коло з осями $U(\omega) = k \cos \omega\tau$, $V(\omega) = -k \sin \omega\tau$, які є відповідно дійсною й уявною частотними характеристиками.

Амплітудно-частотна характеристика $A(\omega)$ в загальному випадку, при $k \neq 1$,

$$A(\omega) = k \sqrt{(\cos \omega\tau)^2 + (\sin \omega\tau)^2} = k,$$

а фазочастотна

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Амплітудно-фазова характеристика нестійкої аперіодичної ланки першого порядку

$$W(j\omega) = \frac{k(-Tj\omega - 1)}{(Tj\omega - 1)(-jT\omega - 1)} = \frac{k(-1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2},$$

дійсна частотна характеристика $U(\omega) = -\frac{k}{1 + T^2\omega^2}$, уявна $V(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + T^2\omega^2}$.

Амплітудно-частотна характеристика немінімально-фазової ланки вигляду нестійкої аперіодичної ланки першого порядку відрізняється від відповідної характеристики стійкої аперіодичної ланки першого порядку лише знаком $U(\omega)$. Тому $W(j\omega)$ розміщатиметься в третьому, а не в першому квадранті комплексної площини. Фазова характеристика цієї ланки $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} T\omega - \pi$. Характерною рисою немінімально-фазових ланок є те, що зсув фази у них більше, ніж у відповідних мінімально-фазових ланок. Якщо для мінімально-фазової аперіодичної ланки зсув фази не перевищує $\frac{\pi}{2}$, то відповідні фазові частотні характеристики немінімально-фазової ланки досягають за абсолютною величиною значення π .

3.8

Рівняння, передаточні функції та частотні характеристики систем автоматичного керування

Рівняння, передаточна функція й амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи. Розімкнута система в ТАК здебільшого розглядається як окремий випадок стану замкнутої сис-

теми, коли зворотний зв'язок у системі відсутній і вихідна величина об'єкта керування не надходить на вхід системи.

У цьому разі функціональна схема розімкнутої системи складається з послідовно з'єднаних ланок і не має ніяких принципових відмінностей від відповідної схеми, наведеної раніше.

Водночас рівняння, передаточна функція і відповідно частотні характеристики розімкнутої системи використовуються в ТАК як при розгляді питань теорії, так і самостійно.

Запишемо рівняння послідовно з'єднаних ланок у вигляді:

$$\begin{array}{ll}
 \text{перша ланка} & P_1(p)x_{1\text{ вих}} = Q_1(p)x_{1\text{ вх}}; \\
 \text{друга ланка} & P_2(p)x_{2\text{ вих}} = Q_2(p)x_{2\text{ вх}}; \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 (n-1)\text{-ша ланка} & P_{n-1}(p)x_{n-1\text{ вих}} = Q_{n-1}(p)x_{n-1\text{ вх}}; \\
 n\text{-на ланка} & P_n(p)x_{n\text{ вих}} = Q_n(p)x_{n\text{ вх}},
 \end{array} \tag{3.50}$$

де $P_1(p)$, $P_2(p)$, ..., $P_n(p)$ і $Q_1(p)$, $Q_2(p)$, ..., $Q_n(p)$ — поліноми від p відповідно лівих і правих частин рівнянь динаміки ланок.

Диференціальне рівняння динаміки розімкнутої системи запишеться у вигляді

$$x_{n\text{ вих}} = f(x_{1\text{ вх}}).$$

Його можна дістати, підставляючи послідовно значення вихідних величин, знайдених із рівнянь попередньої ланки, в рівняння наступної ланки. Наприклад, підставляючи $x_{1\text{ вих}} = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1\text{ вх}}$, одержане з рівняння першої ланки, в праву частину рівняння другої ланки, дістаємо рівняння динаміки другої ланки

$$P_2(p)x_{2\text{ вих}} = Q_2(p)\frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1\text{ вх}},$$

або

$$P_1(p)P_2(p)x_{2\text{ вих}} = Q_1(p)Q_2(p)x_{1\text{ вх}}.$$

Аналогічно для n -ї ланки рівняння матиме вигляд

$$P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p)x_{n\text{ вих}} = Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_n(p)x_{1\text{ вх}}.$$

Позначивши добуток поліномів лівих частин усіх рівнянь $P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p) = P(p)$, а правих частин $Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_n(p) = Q(p)$, дістанемо рівняння динаміки розімкнутої системи у вигляді

$$P(p)x_{n \text{ вих}} = Q(p)x_{1 \text{ вх}}. \quad (3.51)$$

Рівняння незалежних коливань розімкнутої системи

$$P(p)x_{n \text{ вих}} = 0, \quad (3.52)$$

а характеристичне рівняння —

$$P(p) = 0. \quad (3.53)$$

Передаточну функцію розімкнутої системи можна дістати на основі рівняння розімкнутої системи

$$W(p) = \frac{x_{n \text{ вих}}}{x_{1 \text{ вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_n(p)}{P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p)} = W_1(p)W_2(p)\dots W_n(p), \quad (3.54)$$

тобто передаточна функція системи є добутком передаточних функцій усіх її ланок.

Амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи є добуток амплітудно-фазових характеристик відповідних ланок:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)\dots W_n(j\omega). \quad (3.55)$$

Рівняння динаміки, передаточна функція й амплітудно-фазова характеристика за збуренням замкнутих систем. Функціональну схему замкнутої системи з n ланок показано на рис. 3.27. Об'єктом автоматичного регулювання є ланка n , на яку діє зовнішнє збурення $F(t)$. Регульований параметр — вихідна величина об'єкта — $x_{n \text{ вих}}$.

Рівняння динаміки. Система рівнянь окремих ланок у складі замкнутої системи дещо відрізняється від системи рівнянь цих самих ланок розглянутої раніше розімкнутої системи.

Ці відмінності полягають у тому, що в даному разі необхідно врахувати:

- дію збурення $F(t) = F$ на об'єкт регулювання;

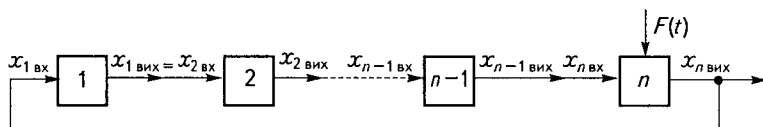


Рис. 3.27

- що замикання системи регулювання відбувається за допомогою від'ємного зворотного зв'язку. Це враховується введенням знака «мінус» на вході першої ланки, отже, $-x_{n \text{ вих}} = x_{1 \text{ вх}}$.

У зв'язку з цим рівняння ланок замкнутої системи стабілізації можна записати у вигляді:

$$\begin{array}{ll}
 \text{перша ланка} & P_1(p)x_{1 \text{ вих}} = -Q_1(p)x_{n \text{ вих}}; \\
 \text{друга ланка} & P_2(p)x_{2 \text{ вих}} = Q_2(p)x_{1 \text{ вих}}; \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 \text{(n-1)-ша ланка} & P_{n-1}(p)x_{n-1 \text{ вих}} = Q_{n-1}(p)x_{n-2 \text{ вих}}; \\
 \text{n-на ланка (об'єкт)} & P_n(p)x_{n \text{ вих}} = Q_n(p)x_{n-1 \text{ вих}} + S(p)F,
 \end{array} \tag{3.56}$$

де $S(p)$ — передаточний поліном об'єкта за збуренням.

Розглядаючи ланки з першої по $n-1$ як деяку розімкнуту систему, записуємо її рівняння $x_{n-1 \text{ вих}} = f(x_{n \text{ вих}})$ у вигляді

$$P_1(p)x_{n-1 \text{ вих}} = -Q_1(p)x_{n \text{ вих}},$$

де $P_1(p) = P_1(p)P_2(p)\dots P_{n-1}(p)$ і $Q_1(p) = Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_{n-1}(p)$ — добутки поліномів лівих і правих частин усіх рівнянь, крім рівняння об'єкта. Отже, систему з n рівнянь можна замінити двома рівняннями:

$$\begin{cases} P_1(p)x_{n-1 \text{ вих}} = -Q_1(p)x_{n \text{ вих}}, \\ P_n(p)x_{n \text{ вих}} = Q_n(p)x_{n-1 \text{ вих}} + S(p)F. \end{cases} \tag{3.57}$$

Підставивши вираз $x_{n-1 \text{ вих}} = -\frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{n \text{ вих}}$ у рівняння об'єкта, після нескладних перетворень дістанемо рівняння динаміки системи стабілізації у вигляді

$$[P(p) + Q(p)]x_{n \text{ вих}} = P_1(p)S(p)F. \tag{3.58}$$

Слід зазначити, що для того, щоб мати можливість скористатися цим рівнянням, складні структурні схеми необхідно спростити і привести до одноконтурного вигляду.

Рівняння незбурених коливань замкнутої системи має вигляд

$$[P(p) + Q(p)]x_{n \text{ вих}} = 0, \tag{3.59}$$

а характеристичне рівняння —

$$P(p) + Q(p) = 0. \tag{3.60}$$

Якщо перемножити співмножники $P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p)$ і $Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_n(p)$ та згрупувати їх за однаковими показниками, то характеристичне рівняння замкнутої системи можна записати так:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (3.61)$$

де n — степінь характеристичного рівняння; a_0, \dots, a_n — коефіцієнти рівняння, що залежать від параметрів ланок системи.

Передаточна функція й амплітудно-фазова частотна характеристика замкнутої системи за збуренням. Передаточну функцію можна знайти з рівняння (3.58) у вигляді

$$W^F(p) = \frac{x_{n \text{ вих}}}{F} = \frac{P_1(p)S(p)}{P(p) + Q(p)}.$$

Розділивши чисельник і знаменник на $P(p)$ і врахувавши, що $\frac{P_1(p)}{P(p)} = \frac{1}{P_n(p)}$; $\frac{Q(p)}{P(p)} = W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи, а $\frac{S(p)}{P_n(p)} = W_n^F(p)$ — передаточна функція об’єкта за збуренням, дістанемо передаточну функцію системи стабілізації за збуренням:

$$W^F(p) = \frac{W_n^F(p)}{1 + W(p)}. \quad (3.62)$$

Відповідна амплітудно-фазова характеристика системи стабілізації

$$W^F(j\omega) = \frac{W_n^F(j\omega)}{1 + W(j\omega)}.$$

Знаходження рівняння замкнутої системи автоматичного керування за допомогою теореми Крамера. Згідно з теоремою Крамера це рівняння має вигляд

$$\Delta x_{n \text{ вих}} = \Delta_k, \quad (3.64)$$

де Δ — головний визначник (детермінант) системи; Δ_k — приєднаний детермінант; $x_{n \text{ вих}}$ — вихідна (регульована) величина об’єкта.

Для знаходження Δ необхідно записати рівняння ланок системи автоматичного керування:

$$\begin{cases} d_{11}(p)x_1 + d_{12}(p)x_2 + \dots + d_{1n}(p)x_n = f_1(t); \\ d_{12}(p)x_1 + d_{22}(p)x_2 + \dots + d_{2n}(p)x_n = f_2(t); \\ \dots \\ d_{m1}(p)x_1 + d_{m2}(p)x_2 + \dots + d_{mn}(p)x_n = f_n(t), \end{cases} \quad (3.65)$$

де x_1, \dots, x_n — змінні системи; $f_1(t), \dots, f_n(t)$ — збурення; $d_n(p), \dots, d_{nn}(p)$ — оператори ланок системи.

У загальному випадку

$$d_{jk}(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

де $p = \frac{d}{dt}$; a_0, \dots, a_n — коефіцієнти, що визначаються параметрами відповідних ланок.

Розглядаючи наведені вище рівняння ланок системи як алгебричні і відкидаючи для спрощення запису символ p , маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nk} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.66)$$

Для знаходження величини Δ_k стовпець головного визначника, що відповідає регульованому параметру x_k , треба замінити відповідними збуреннями (якщо в деяких ланках вони відсутні, то записують нуль).

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ d_{11} & d_{12} & \dots & f_1(t) & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & f_2(t) & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & f_n(t) & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.67)$$

Рівняння незбуджених коливань згідно з теоремою Крамера має вигляд

$$\Delta x_k = 0, \quad (3.68)$$

а характеристичне рівняння

$$\Delta = 0. \quad (3.69)$$

Рівняння замкнутої системи в нормальній формі Коші. Рівняння замкнутої системи

$$\begin{aligned}
 a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x &= \\
 = b_0 \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_{m-1} \frac{df}{dt} + b_m f &
 \end{aligned}$$

може бути записано у вигляді систем рівнянь ланок першого та другого порядків (у принципі можливий і вищий порядок рівнянь ланок). Рівняння другого порядку завжди можна замінити двома рівняннями першого порядку.

Наприклад, якщо рівняння другого порядку для деякої змінної x_1 має вигляд

$$a_0 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_2 x_1 = b_1 x_k,$$

то, позначивши $\frac{dx_1}{dt} = x_{i+1}$, дістанемо рівняння першого порядку

$$a_0 \frac{dx_{i+1}}{dt} = b_1 x_k - a_1 x_{i+1} - a_2 x_1.$$

Отже, можна дістати рівняння замкнутої системи у вигляді системи рівнянь першого порядку (що називаються *рівняннями в нормальній формі Коші*):

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n; \\
 \frac{dx_2}{dt} &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n; \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n,
 \end{aligned} \right. \quad (3.70)$$

де x_1, x_2, \dots, x_n — координати стану системи. (У правій частині рівнянь деякі коефіцієнти можуть дорівнювати нулю.)

Система рівнянь у нормальній формі Коші в даному разі є математичною моделлю системи. Цю систему рівнянь можна записати в матричній формі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

— матриця коефіцієнтів;

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

— вектор-стовпець.

Характеристичне рівняння замкнутої системи

$$\det [A - pE] = 0,$$

де p — змінна в характеристичному рівнянні замкнутої системи вигляду

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0;$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

— одинична матриця.

3.9

Приклад знаходження рівняння динаміки системи стабілізації напруги генератора постійного струму

Розглянемо систему автоматичного керування, спрощену принципову схему якої зображено на рис. 3.28, де Γ — генератор, який є об'єктом автоматичного керування з напругою U_{Γ} , що є регульованим параметром; EM — обмотка

електромагніту; Я — яркі електромагніту; R — регулювальний резистор у колі обмотки збудження генератора; Д — масляний демпфер, поршень якого П має отвори; ПР — пружина; R_{Σ} — еквівалентний опір споживачів, який характеризує навантаження генератора.

При змінному навантаженні генератора і незмінній швидкості його обертання ω первинним двигуном (на схемі не показаний) відповідним чином змінюється струм I_r , і напруга генератора $U_r = E - I_r R_r$, де R_r — активний опір яркірного кола генератора; $E = k\Phi\omega$ — електрорушійна сила генератора (k — стала генератора; $\Phi = c_3 I_3$ — магнітний потік обмотки збудження зі струмом I_3 , при сталій c_3).

При $\omega = \text{const}$ $E = k_r \Phi$ може змінюватися тільки за рахунок зміни напруги збудження U_3 .

Для стабілізації напруги генератора при зміні його навантаження потрібно відповідним чином змінювати напругу U_3 , що спричинює зміну струму I_3 й електромагнітного потоку генератора Φ . Наприклад, якщо навантаження генератора збільшується, що зумовлює зменшення напруги U_r (напруги на обмотці електромагніта U_{em}), то сила притягання електромагніта F_m зменшується, і під дією пружини ПР яркі електромагніту переміщується вниз. При цьому опір резистора R зменшується, відповідно зростають напруга збудження U_3 , струм I_3 , потік Φ і напруга генератора U_r збільшується. При зменшенні навантаження генератора напруга зростає. При цьому завдяки відповідній дії системи автоматичного керування напруга збудження U_3 зменшується, що стабілізує напругу генератора U_r .

Згідно з викладеним раніше розглянута система автоматичного керування є звичайною замкнутою системою стабілізації, в якій реа-

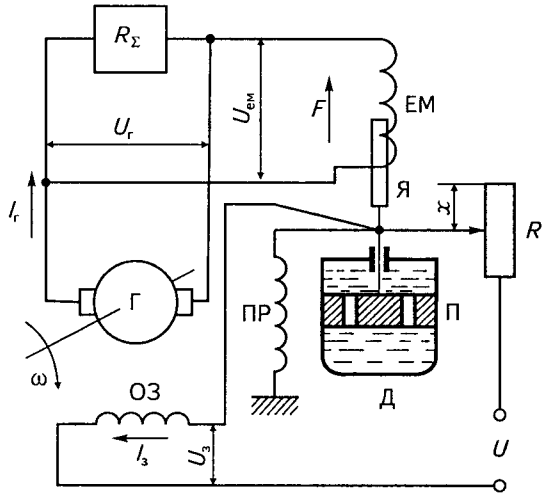


Рис. 3.28

лізовано принцип керування за відхиленням. Крім того, вона не має підсилювача в ланцюгу керування і тому є системою прямої дії.

Розглянувши принцип роботи окремих елементів і системи в цілому, перейдемо до складання функціональної схеми.

При цьому треба мати на увазі, що принциповим є відповідність розміщення елементів згідно з їх дією один на одного й узгодження вхідних і вихідних величин.

Тому об'єкт керування може бути розміщений у будь-якому місці функціональної схеми. Але здебільшого прийнято розміщувати його в правій частині схеми. Дотримуватимемося цього і далі. Згідно з наведеними на принциповій схемі зображеннями і функціональним призначенням окремих елементів при виконанні завдань автома-

тичного керування функціональна схема буде такою, як показано на рис. 3.29.

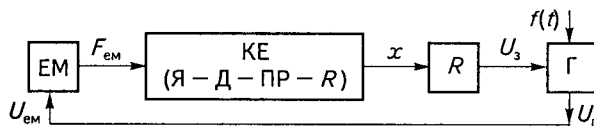


Рис. 3.29

У схемі, наведеній на рис. 3.28, рухому сукупність елементів, до якої нале-

жить якор електромагніту, поршень демпфера Д, пружина ПР та двигунок реостата R , можна розглядати як єдиний елемент КЕ (див. рис. 3.29), який виконує керуючі функції в функціональній схемі. Інші позначення на рис. 3.29 такі: $F_{ем}$ — зусилля тяги електромагніту; x — переміщення двигунка реостата; $f(t)$ — збурення генератора, яке в даному разі можна розглядати як струм в якорному колі генератора, що залежить від еквівалентного опору всіх споживачів електроенергії, підключених до якоря генератора (електричної мережі, якщо вона живиться тільки від цього генератора).

Спочатку розглянемо систему в розімкненому стані. Принципово розімкнути систему можна в будь-якому місці схеми, але найчастіше це роблять на виході об'єкта, тому вважатимемо, що вихідна величина розімкнутої системи є вихідна величина об'єкта $U_г$, а вхідна — напруга на обмотці електромагніта $U_{ем}$. У цьому разі рівняння розімкнутої системи має дати залежність у динаміці

$$U_г = f(U_{ем}).$$

Як було показано раніше, для знаходження рівнянь системи необхідно скласти рівняння окремих її елементів.

Рівняння динаміки генератора Г. Це рівняння матиме вигляд

$$U_r = f(U_3).$$

При складанні рівнянь окремих елементів розробник має деяку свободу дій, завдяки якій окремих досить складний елемент можна представити його окремими (складовими) частинами. При цьому важливо узгодити їхні вхідні та вихідні величини і відобразити взаємодію окремих частин елемента.

У даному разі генератор можна розглядати як складний елемент, основними частинами якого є обмотка збудження та якірне коло генератора. Рівняння генератора виведено раніше. Це рівняння в операторній формі

$$(T_r p + 1)\Delta U_r = k_r \Delta U_3,$$

де T_r — стала генератора; ΔU_r , ΔU_3 — відхилення від початкових значень відповідних величин; k_r — передаточний коефіцієнт генератора.

Рівняння обмотки електромагніта. У загальному випадку його рівняння має дати залежність у динаміці

$$F_{em} = f(u_{em}).$$

Якщо знехтувати коефіцієнтом самоіндукції котушки, то зусилля тяги елемента можна подати у вигляді

$$F_{em} = c_{em} U_{em}^2,$$

де c_{em} — коефіцієнт пропорційності.

Ввівши початкові значення величин F_{em_0} та U_{em_0} , запишемо

$$F_{em_0} + \Delta F_{em} = c_{em} (U_{em_0} + \Delta U_{em})^2.$$

Позначимо нелінійну функцію так: $(U_{em_0} + \Delta U_{em})^2 = f(z)$. Лінеаризуючи її за допомогою ряду Тейлора, дістанемо рівняння

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) = U_{em_0}^2 + 2U_{em_0} \Delta U_{em}$$

або

$$F_{em_0} + \Delta F_{em} = c_{em} U_{em_0}^2 + c_{em} 2U_{em_0} \Delta U_{em}.$$

Враховуючи, що рівняння рівноваги для початкового положення

$$F_{\text{ем}0} = c_{\text{ем}} U_{\text{ем}0}^2,$$

запишемо рівняння динаміки обмотки електромагніту у відхиленнях:

$$\Delta F_{\text{ем}} = k_{\text{ем}} \Delta U_{\text{ем}}, \quad (3.71)$$

де $k_{\text{ем}} = c_{\text{ем}} 2U_{\text{ем}0}$.

Рівняння рухомої частини елементів. Як було показано раніше, рухомі елементи (якір електромагніту, поршень демпфера, пружина та двигунок реостата) можна розглядати як єдину механічну систему елементів з масою m .

Рівняння динаміки даної системи в загальному вигляді

$$F_{\text{дин}} = F_{\text{дв}} - F_{\text{оп}},$$

де $F_{\text{дин}} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ — динамічне зусилля; $F_{\text{дв}} = F_{\text{ем}}$ — рушійне зусилля електромагніту; $F_{\text{оп}}$ — зусилля опору переміщенню рухомої частини елементів. Зусилля $F_{\text{оп}}$ в даному разі визначається жорсткістю пружини $c_{\text{пр}}$, величиною переміщення рухомої частини елементів x та вагою G_0 , опором, яке спричинює масло при переміщенні в цьому середовищі поршня П демпфера, а також опором переміщенню двигунка резистора R , який має бути порівняно невеликим (ним можна знехтувати).

Розглянемо ці складові $F_{\text{оп}}$ окремо:

- опір пружини

$$F_{\text{пр}} = c_{\text{пр}} x = c_{\text{пр}} (x_0 + \Delta x);$$

- опір переміщенню поршня демпфера

$$F_{\text{д}} = c_{\text{д}} \frac{dx}{dt} = c_{\text{д}} \frac{(x_0 + \Delta x)}{dt} = c_{\text{д}} \frac{d\Delta x}{dt},$$

де $c_{\text{д}}$ — стала демпфера, яка зумовлюється властивостями масла і особливостями конфігурації поршня П (наприклад, кількістю «активних» отворів у поршні та ін.).

Наприклад, поршень з отворами матиме менший опір переміщенню в масляному середовищі, ніж суцільний. При цьому чим більше отворів у площині поршня демпфера, тим менший опір його переміщенню. Ставлячи заглушки в деякі отвори поршня демпфера, можна ступінчасто змінювати його властивості (величину $c_{\text{д}}$).

При нерухомому поршні опір F_d відсутній.

Нехтуючи порівняно невеликим опором двигунка резистора, запишемо

$$F_{\text{оп}_0} + \Delta F_{\text{оп}} = c_{\text{пр}}x_0 + c_{\text{пр}}\Delta x + c_d \frac{d\Delta x}{dt} + G_0.$$

Виключивши рівняння статички $F_{\text{оп}_0} = c_{\text{пр}}x_0 + G_0$, дістанемо

$$\Delta F_{\text{оп}} = c_{\text{пр}}\Delta x + c_d \frac{d\Delta x}{dt}.$$

Підставивши ці складові в рівняння динаміки, одержимо

$$m \frac{d^2(x_0 + \Delta x)}{dt^2} = \Delta F_{\text{ем}} - c_{\text{пр}}\Delta x - c_d \frac{d\Delta x}{dt}$$

або

$$\Delta F_{\text{ем}} = m \frac{d^2\Delta x}{dt^2} + c_d \frac{d\Delta x}{dt} + c_{\text{пр}}\Delta x.$$

Нехтуючи величиною $c_{\text{пр}}\Delta x$, яка значно менша від «динамічних» складових опору, запишемо рівняння елемента КЕ у відхиленнях в операторній формі:

$$\Delta F_{\text{ем}} = (mp^2 + c_d p)\Delta x.$$

Позначивши $\frac{m}{c_d} = T_d$; $\frac{1}{c_d} = k_{\text{ке}}$, дістанемо

$$(T_d p + 1)p\Delta x = k_{\text{ке}}\Delta F_{\text{ем}}. \quad (3.72)$$

Рівняння резистора, який є безінерційним елементом, можна записати у вигляді

$$\Delta U_3 = k_R \Delta x, \quad (3.73)$$

де k_R — коефіцієнт пропорційності або передачі даного елемента.

Отже, рівняння елементів, з яких складається дана система,

$$\begin{cases} (T_r p + 1)\Delta U_r = k_r \Delta U_3; \\ \Delta F_{\text{ем}} = k_{\text{ем}} \Delta U_{\text{ем}}; \\ (T_d p + 1)p\Delta x = k_{\text{ке}} \Delta F_{\text{ем}}; \\ \Delta U_3 = k_R \Delta x. \end{cases} \quad (3.74)$$

Користуючись формулою рівняння розімкнутої системи, маючи на увазі, що вихідною величиною є ΔU_r , а вхідною ΔU_{em} , дістанемо рівняння розімкнутої на виході об'єкта системи у вигляді

$$(T_r p + 1)(T_d p + 1)p \Delta U_r = k_r k_{em} k_{ке} k_R \Delta U_{em},$$

де $k_r k_{em} k_{ке} k_R = k_p$ — коефіцієнт передачі розімкнутої системи.

Розкриваючи дужки, дістанемо рівняння даної розімкнутої системи:

$$[T_r T_d p^3 + (T_r + T_d)p^2 + p] \Delta U_r = k_p \Delta U_{em}. \quad (3.75)$$

Рівняння замкнутої системи. Для знаходження рівняння замкнутої системи необхідно врахувати, що вихідна величина генератора, точніше її відхилення ΔU_r , подається на вхід електромагніта, а замикання системи автоматичного регулювання відбувається за допомогою від'ємного зворотного зв'язку, тому можна записати

$$\Delta U_r = -\Delta U_{em}.$$

Треба врахувати також дію збурення на об'єкт керування при передаточному операторі об'єкта за збуренням $S(p)$. Тоді система рівнянь елементів для замкнутої системи

$$\begin{cases} (T_r p + 1) \Delta U_r = k_r \Delta U_3 + S(p)f(t); \\ \Delta F_{em} = -k_{em} \Delta U_r; \\ (T_d p + 1)p \Delta x = k_{ке} \Delta F_{em}; \\ \Delta U_3 = k_R \Delta x. \end{cases} \quad (3.76)$$

Розв'язуючи систему (3.76) відносно ΔU_r , дістаємо рівняння замкнутої системи. Але в даному разі скористаємося раніше знайденою формулою рівняння системи стабілізації, згідно з якою

$$[P(p) + Q(p)] \Delta U_r = P_1(p) S(p) f(t),$$

де $P(p) = (T_r p + 1)(T_d p + 1)$; $Q(p) = k_r k_{em} k_{ке} k_R$; $P_1(p) = (T_d p + 1)p$.

Враховуючи викладене, рівняння даної замкнутої системи автоматичної стабілізації напруги генератора постійного струму запишемо у вигляді

$$[(T_r p + 1)(T_d p + 1)p + k_p] \Delta U_r = (T_d p + 1)p S(p) f(t). \quad (3.77)$$

Рівняння незбурених коливань у даному разі

$$[(T_r p + 1)(T_d p + 1)p + k_p] \Delta U_r = 0, \quad (3.78)$$

а характеристичне рівняння замкнутої системи

$$(T_r p + 1)(T_d p + 1)p + k_p = 0$$

або

$$T_r T_d p^3 + (T_r + T_d)p^2 + p + k_p = 0. \quad (3.79)$$

Дістанемо рівняння (3.77)—(3.79) за допомогою теореми Крамера.

У системі рівнянь (3.76) зробимо такі перетворення, щоб у правій частині залишилися тільки збурення або нулі:

$$\begin{cases} (T_r p + 1)\Delta U_r - k_r \Delta U_3 = S(p)f(t); \\ \Delta F_{em} + k_{em} \Delta U_r = 0; \\ (T_d p + 1)p\Delta x - k_{ке} \Delta F_{em} = 0; \\ \Delta U_3 - k_R \Delta x = 0. \end{cases} \quad (3.80)$$

Рівняння даної системи автоматичного регулювання за Крамером

$$\Delta_{\Delta U_r} = \Delta_k.$$

Знайдемо головний визначник (детермінант) Δ та приєднаний Δ_k . Згідно з системою рівнянь (3.80) запишемо стовпці, що відповідають змінним $\Delta U_r, \Delta U_3, \Delta F_{em}, \Delta x$, у такій послідовності:

$$\Delta = \begin{bmatrix} T_r p + 1 & -k_r & 0 & 0 \\ k_{em} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{ке} & p(T_d p + 1) \\ 0 & 1 & 0 & -k_R \end{bmatrix}.$$

Замінивши перший стовпець, що відповідає регульованій величині системи ΔU_r , правими частинами рівнянь ланок системи (3.80), дістанемо

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} S(p)f(t) & -k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{ке} & p(T_d p + 1) \\ 0 & 1 & 0 & -k_R \end{bmatrix}.$$

Обчислимо визначники Δ та Δ_k .

Розклавши визначник Δ за елементами першого рядка, одержимо

$$\Delta = (T_r p + 1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{ке} & p(T_d p + 1) \\ 1 & 0 & -k_R \end{bmatrix} + k_r \begin{bmatrix} k_{ем} & 1 & 0 \\ 0 & -k_{ем} & p(T_d p + 1) \\ 0 & 0 & -k_R \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи правило Сюрреля, згідно з яким дописуються два перші стовпці до визначника третього порядку і перемножуються члени вгору по діагоналі зі знаком «плюс», а вниз — зі знаком «мінус», дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta &= (T_r p + 1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{ке} & p(T_d p + 1) \\ 1 & 0 & -k_R \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & -k_{ке} + \\ 1 & 0 \end{matrix} + \\ &+ k_r \begin{bmatrix} k_{ем} & 1 & 0 \\ 0 & -k_{ке} & p(T_d p + 1) \\ 0 & 0 & -k_R \end{bmatrix} \begin{matrix} k_{ем} & 1 \\ 0 & -k_{ке} = \\ 0 & 0 \end{matrix} = \\ &= (T_r p + 1)(T_d p + 1)p + k_r k_{ем} k_{ке} k_R = T_r T_d p^3 + (T_r + T_d)p^2 + p + k_p. \end{aligned}$$

Розкриваючи аналогічним чином визначник Δ_k , маємо

$$\begin{aligned} \Delta_k &= S(p)f(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{ке} & p(T_d p + 1) \\ 1 & 0 & -k_R \end{bmatrix} + k_r \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{ем} & T_d p + 1 \\ 0 & 0 & -k_R \end{bmatrix} = \\ &= S(p)f(t)(T_d p + 1)p. \end{aligned}$$

Як бачимо, рівняння замкнутої системи за Крамером має той самий вигляд, що й знайдене раніше.

3.10

Рівняння і передаточні функції автоматичних слідувальних (програмних) систем

З точки зору методики знаходження рівнянь і відповідних передаточних функцій слідувальна і програмна системи повністю схожі. Відмінність полягає лише в способі формування задаючого сигналу $y(t)$. (Як відомо, в програмній системі він обчислюється заздалегідь, а в слідувальній формується в ході

роботи системи залежно від стану об'єкта.) У зв'язку з цим функціональна схема і рівняння відповідних ланок обох систем будуть однаковими. Тому все, що стосується слідкувальних систем, має таке саме відношення і до програмних систем автоматичного регулювання.

Спрощену функціональну схему слідкувальної системи показано на рис. 3.30, де 1 — об'єкт регулювання, який має змінювати свою вихідну величину $x_{1 \text{ вих}}$ згідно зі зміною задаючої величини (програми) $y(t)$; 2 — пристрій зворотного зв'язку (в програмних системах його називають чутливим елементом), який контролює вихідну величину об'єкта; ДР — датчик розбіжності, який порівнює задану величину з величиною, пропорційною вихідній величині об'єкта; x — величина розбіжності між заданою і дійсною величинами (точніше, величиною, пропорційною заданій).

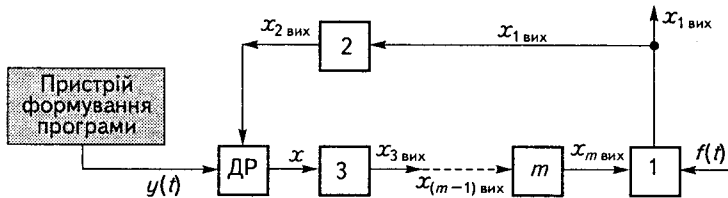


Рис. 3.30

Запишемо рівняння об'єкта та інших ланок системи в загальному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(p)x_{1 \text{ вих}} = Q_1(p)x_{m \text{ вих}} + S_1(p)f(t); \quad (1) \\ P_2(p)x_{2 \text{ вих}} = Q_2(p)x_{1 \text{ вих}}; \quad (2) \\ x = y(t) - x_{2 \text{ вих}}; \quad (2') \\ P_3(p)x_{3 \text{ вих}} = Q_3(p)x; \quad (3) \\ \dots \dots \dots \\ P_m(p)x_{m \text{ вих}} = Q_m(p)x_{m-1 \text{ вих}}, \quad (m) \end{array} \right. \quad (3.81)$$

де $S_1(p)$ — передаточний коефіцієнт (поліном) об'єкта за збуренням; $P_1(p), \dots, P_m(p)$ і $Q_1(p), \dots, Q_m(p)$ — поліноми від p відповідно лівих і правих частин рівнянь ланок системи.

Розв'язуючи систему рівнянь (2) та (2'), з рівняння (2) знаходимо

$$x_{2 \text{ вих}} = \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} x_{1 \text{ вих}}.$$

Підставивши його в рівняння (2'), дістанемо

$$x = y(t) - \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} x_{1 \text{ вих}},$$

звідки

$$P_2(p)x = P_2(p)y(t) - Q_2(p)x_{1 \text{ вих}}. \quad (2)-(2')$$

Розглядаючи ланки з третьої по m -ну як деяку розімкнуту систему, згідно зі знайденим вище рівнянням розімкнutoї системи, маючи на увазі, що вихідною величиною цієї системи є $x_{m \text{ вих}}$, а вхідною x , матимемо

$$P_3(p)P_4(p)\dots P_m(p)x_{m \text{ вих}} = Q_3(p)Q_4(p)\dots Q_m(p)x.$$

Замінивши добутки поліномів від p лівої і правої частин відповідно величинами $P_{III}(p)$ і $Q_{III}(p)$, дістанемо рівняння, що відповідає ланкам з третьої по m -ну:

$$P_{III}(p)x_{m \text{ вих}} = Q_{III}(p)x. \quad (3)-(m)$$

Розв'язуючи систему рівнянь об'єкта (1) та рівнянь (2)-(2') і (3)-(m) відносно $P_I(p)x_{m \text{ вих}}$, матимемо

$$x = \frac{P_{III}(p)}{Q_{III}(p)} x_{m \text{ вих}}.$$

Підставляючи це значення x у рівняння (2)-(2'), після деяких перетворень дістаємо

$$P_2(p)\frac{P_{III}(p)}{Q_{III}(p)} x_{m \text{ вих}} = P_2(p)y(t) - Q_2(p)x_{1 \text{ вих}},$$

звідки

$$x_{m \text{ вих}} = \frac{Q_{III}(p)}{P_{III}(p)} y(t) - \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} \frac{Q_{III}(p)}{P_{III}(p)} x_{1 \text{ вих}}.$$

Позначивши $P_2(p)P_{III}(p) = P_I(p)$, а $Q_2(p)Q_{III}(p) = Q_I(p)$, де $P_I(p)$ і $Q_I(p)$ — відповідно добутки поліномів від p лівих і правих частин рівнянь усіх ланок, окрім об'єкта, матимемо

$$x_{m \text{ вих}} = \frac{Q_{III}(p)}{P_{III}(p)} y(t) - \frac{Q_I(p)}{P_I(p)} x_{1 \text{ вих}}.$$

Підставивши це значення $x_{m \text{ вих}}$ у рівняння об'єкта, дістанемо

$$P_1(p)x_{1\text{вих}} = Q_1(p) \left[\frac{Q_{\text{III}}(p)}{P_{\text{III}}(p)} y(t) - \frac{Q_1(p)}{P_1(p)} x_{1\text{вих}} \right] + S(p)f(t).$$

Після деяких перетворень дістанемо рівняння динаміки замкнутої слідкувальної (програмної) системи у вигляді

$$[P(p) + Q(p)]x_{1\text{вих}} = Q_{\text{II}}(p)P_2(p)y(t) + P_1(p)S(p)f(t), \quad (3.82)$$

де $P(p)$, $Q(p)$ — добутки поліномів від p , що стоять відповідно у лівих і правих частинах рівнянь усіх ланок; $Q_{\text{II}}(p) = Q_1(p)Q_{\text{III}}(p)$ — добуток поліномів від p правих частин рівнянь усіх ланок, окрім полінома правої частини рівняння ланки зворотного зв'язку $Q_2(p)$; $P_1(p) = P_2(p) \dots P_m(p)$ — поліном без урахування відповідного оператора об'єкта; $P_2(p)$ — поліном лівої частини рівняння ланки зворотного зв'язку.

Порівнюючи рівняння замкнутої системи стабілізації з рівнянням (3.82), можна дійти висновку, що вони відрізняються лише наявністю в правій частині рівняння (3.82) члена $Q_{\text{II}}(p)P_2(p)y(t)$.

Передаточні функції слідкувальних (програмних) систем. Розділивши в рівнянні слідкувальної системи праву і ліву частини на величину $P(p) + Q(p)$, дістанемо

$$x_{1\text{вих}} = \frac{Q_{\text{II}}(p)P_2(p)}{P(p) + Q(p)} y(t) + \frac{P_1(p)S(p)}{P(p) + Q(p)} f(t).$$

Розділивши чисельник і знаменник обох складових правої частини виразу на $P(p)$, матимемо

$$x_{1\text{вих}} = \frac{Q_{\text{II}}(p) \frac{1}{P_{\text{II}}(p)}}{1 + \frac{Q(p)}{P(p)}} y(t) + \frac{S(p) \frac{1}{P_1(p)}}{1 + \frac{Q(p)}{P(p)}} f(t).$$

Рівняння слідкувальної системи через передаточні функції матиме вигляд

$$x_{1\text{вих}} = \frac{W_{\text{II}}(p)}{1 + W(p)} y(t) + \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} f(t), \quad (3.83)$$

де $\frac{W_{\text{II}}(p)}{1 + W(p)}$ — передаточна функція за завданням; $W_{\text{II}}(p) = Q_{\text{II}}(p)/P_{\text{II}}(p)$ — передаточна функція всіх ланок системи без ураху-

вання ланки зворотного зв'язку; $\frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} = W_f(p)$ — передаточна функція за збуренням; $W_1^f(p)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням; $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

З урахуванням викладеного рівняння слідкувальної (програмної) системи через передаточні функції за завданням і збуренням можна записати так:

$$x_{1 \text{ вих}} = W_y(p)y(t) + W_f(p)f(t). \quad (3.84)$$

Рівняння, записане у відхиленнях регульованої величини від заданого значення, часто називають *рівнянням помилки (похибки)*. Воно має аналогічний вигляд

$$\Delta x_{1 \text{ вих}} = W_y(p)y(t) + W_f(p)f(t). \quad (3.85)$$

Якщо елемент зворотного зв'язку безінерційний, то $Q_2(p) = P_2(p) = 1$ і передаточна функція за завданням

$$W_y(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (3.86)$$

Передаточна функція за збуренням залишиться, очевидно, без змін.

3.11

Приклад знаходження рівняння динаміки слідкувальної системи

Як приклад розглянемо спрощену принципову схему, наведену на рис. 3.31, де ЗП — задаючий пристрій, який обертається за деяким повільним законом $\alpha = \alpha(t)$. Цей закон повинен відтворюватись у заданому масштабі на об'єкті О у вигляді $k_o = \alpha(t)$ (k_o — коефіцієнт пропорційності об'єкта керування); ДР — датчик розузгодження (у даному разі — механічний диференціал). На його вихідному валу відтворюється сигнал (розузгодження), який є різницею двох сигналів: заданого α і сигналу зворотного зв'язку α_1 .

3.11. Приклад знаходження рівняння динаміки
слідкувальної системи

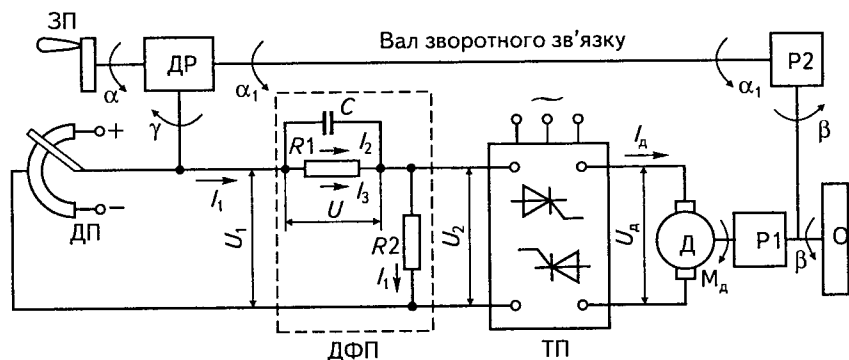


Рис. 3.31

Механічний вал зворотного зв'язку при необхідності можна замінити на електричний вал за допомогою сельсінів. Сигнал розузгодження за допомогою потенціометричного датчика ДП перетворюється в напругу розузгодження U_1 . Елементи R_1, R_2, C представляють диференціальний пристрій ДФП, який використовується для поліпшення динамічних характеристик системи керування. Його вихідна напруга U_2 після підсилення тиристорним перетворювачем ТП у вигляді напруги U_d подається до якірного кола двигуна Д, який через редуктор Р1 обертає об'єкт О.

Функціональну схему цієї системи показано на рис. 3.32, де $f(t)$ — збурення, що діє на об'єкт і визначає навантаження двигуна.

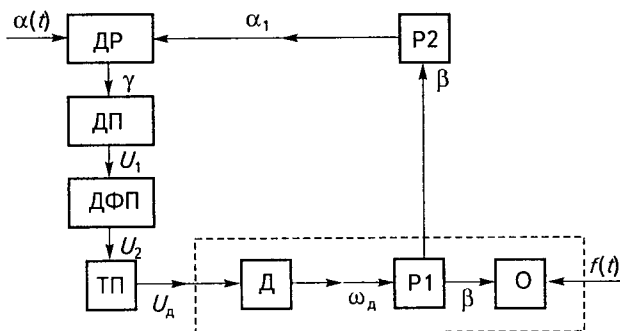


Рис. 3.32

Виведемо рівняння всіх ланок системи. Враховуючи, що об'єкт у даному разі можна розглядати як деяку механічну масу, яка разом із редуктором обертається двигуном, розглядатимемо об'єкт як одне ціле — у вигляді ланки системи з приведеним моментом інерції J .

Рівняння ланки двигун—редуктор—об'єкт, або умовно «об'єкт», матиме вигляд

$$J \frac{d^2\beta}{dt^2} = M_d - M_{\text{тр}} - M_f, \quad (3.87)$$

де M_d — рушійний момент двигуна; $M_{\text{тр}}$ — момент тертя; M_f — момент, зумовлений дією зовнішніх сил $f(t)$; β — кут повороту вала двигуна.

У даному разі при сталій величині потоку в магнітній системі двигуна Φ

$$M_d = c \Phi J_d = c_1 U_d,$$

де U_d — напруга на якорі двигуна; c_1 — коефіцієнт пропорційності.

Враховуючи, що момент тертя залежить від швидкості обертання, можна записати

$$M_{\text{тр}} = \frac{d\beta}{dt} c_2,$$

де c_2 — коефіцієнт пропорційності.

Підставивши значення M_d , $M_{\text{тр}}$ у вихідне рівняння, дістанемо

$$J \frac{d^2\beta}{dt^2} = c_1 U_d - c_2 \frac{d\beta}{dt} - M_n(t),$$

де $M_n(t)$ — момент збурення зовнішніх сил.

Після нескладних перетворень в операторній формі маємо

$$(T_1 p^2 + p)\beta = k_d U_d - f(t), \quad (3.88)$$

де

$$T_1 = \frac{J}{c_2}; \quad k_d = \frac{c_1}{c_2}; \quad f(t) = \frac{M_n(t)}{c_2}.$$

Запишемо рівняння окремих ланок:

- зворотного зв'язку

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_0} \beta_1, \quad (3.89)$$

- датчика розузгодження (ДР)

$$\gamma = \alpha(t) - \alpha_1, \quad (3.90)$$

- потенціометричного датчика порівняння (ДП)

$$U_1 = k_2 \gamma,$$

де k_2 — коефіцієнт пропорційності.

Рівняння диференціювального пристрою (ДФП), згідно з рис. 3.31, має вигляд

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad I_2 = C \frac{dU}{dt}; \quad I_3 = \frac{U}{R_1}; \quad U = U_1 - U_2,$$

звідки

$$I_1 = C \frac{d(U_1 - U_2)}{dt} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2},$$

або

$$C \frac{dU_1}{dt} - C \frac{dU_2}{dt} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}.$$

Після нескладних перетворень дістанемо

$$C \frac{dU_2}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_2 = C \frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{R_1}.$$

Розділивши всі члени рівняння на коефіцієнт при U_2 , одержимо

$$(T_2 p + 1) U_2 = (k_3 + k'_3 p) U_1, \quad (3.91)$$

де

$$T_2 = \frac{C}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}; \quad k_3 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad k'_3 = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Розглядаючи тиристорний підсилювач як ланку із запізненням, запишемо його рівняння у вигляді

$$U_n = k_{\tau,п} e^{-\tau p}.$$

Після розкладу в степеневий ряд функції $e^{-\tau p} = (1 + \tau p)^{-1} = \frac{1}{1 + \tau p}$,

дістанемо

$$U_d = k_{т.п} U_2 \frac{1}{1 + \tau p},$$

або

$$(1 + \tau p)U_d = k_{т.п} U_2, \quad (3.92)$$

де τ — запізнення; $k_{т.п}$ — коефіцієнт передачі.

Отже, рівняння всіх ланок слідкувальної системи можна записати у вигляді системи рівнянь:

- об'єкта

$$(T_1 p^2 + p)\beta = k_d U_d - f(t);$$

- зворотного зв'язку

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_0} \beta_1;$$

- датчика розузгодження

$$\gamma = \alpha(t) - \alpha_1; \quad (3.93)$$

- потенціометричного датчика

$$U_1 = k_2 \gamma;$$

- диференціувального пристрою

$$(T_2 p + 1)U_2 = (k_3 + k_3' p)U_1;$$

- тиристорного підсилювача

$$(\tau p + 1)U_d = k_{т.п} U_2.$$

Використовуючи вираз (3.82), записуємо рівняння слідкувальної системи в загальному вигляді:

$$[P(p) + Q(p)]\beta = P_1(p)S(p)f(t) + Q_{11}(p)P_2(p)\alpha(t),$$

де $P(p) = (T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)$ — добуток лівих частин усіх рівнянь ланок; $Q(p) = k_d \frac{1}{k_0} k_2 (k_3 + k_3' p) k_{т.п}$ — добуток правих частин усіх рівнянь; $P_1(p) = (T_2 p + 1)(\tau p + 1)$ — добуток усіх лівих частин рівнянь, крім об'єкта; $S(p) = 1$ — коефіцієнт при збуренні; $Q_{11}(p) = k_d k_2 \times (k_3 + k_3' p) k_{т.п}$ — добуток правих частин усіх рівнянь, крім рівняння

зворотного зв'язку; $P_2(p)$ — ліва частина рівняння зворотного зв'язку (в даному разі дорівнює одиниці).

Отже, рівняння динаміки слідкувальної системи можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} [(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + k_d \frac{1}{k_0} k_2 (k_3 + k'_3 p) k_{\tau, n}] \beta = \\ = k_d k_2 (k_3 + k'_3 p) k_{\tau, n} \alpha(t) + (T_2 p + 1)(\tau p + 1) f(t). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Поклавши $p = 0$, $f(t) < 0$, дістанемо рівняння статички системи

$$k_d \frac{1}{k_0} k_2 k_3 k_{\tau, n} \beta = k_d k_2 k_3 k_{\tau, n} \alpha(t) - f(t).$$

Визначивши $k_d k_2 k_3 k_{\tau, n} = k_1$ при сталих значеннях $f(t) = f_0$, $\alpha(t) = \alpha_0$, дістанемо рівняння статичного стану системи

$$\frac{k_1}{k_0} \beta_0 = k_1 \alpha_0 - f_0$$

або

$$\beta_0 = k_0 \alpha_0 - \frac{k_0}{k_1} f_0. \quad (3.95)$$

Звідси видно, що β_0 відстає від потрібного значення сигналу $k_0 \alpha_0$ на величину, що залежить від збурення f_0 . Величина $\frac{k_0 f_0}{k_1}$ є статичною помилкою даної слідкувальної системи. Вона обернено пропорційна добутку коефіцієнтів підсилення ланок. Принципово статична помилка може бути як зі знаком «мінус», так і зі знаком «плюс».

Передаточна функція за збуренням у даному разі матиме вигляд

$$\begin{aligned} W_f(p) &= \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_d \frac{1}{k_0} k_2 (k_3 + k'_3 p)}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}} = \\ &= \frac{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + \frac{k_1}{k_0}}, \end{aligned}$$

де $W_1^f(p) = 1$ — передаточна функція об'єкта за збуренням;
 $W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}$ — передаточна функція розімкнутої системи.

У даному разі амплітудно-фазова характеристика слідкувальної системи за збуренням

$$W_f(j\omega) = \frac{(-T_1\omega^2 + j\omega)(jT_2\omega + 1)(j\tau\omega + 1)}{(-T_1\omega^2 + j\omega)(jT_2\omega + 1)(j\tau\omega + 1) + k_1/k_0}.$$

Передаточну функцію даної системи за завданням після перетворень запишемо так:

$$\begin{aligned} W_y(p) &= \frac{W_{11}(p)}{1 + W(p)} = W_\alpha(p) = \frac{\frac{k_1}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}}{1 + \frac{k_1/k_0}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}} = \\ &= \frac{k_1}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + k_1/k_0}, \end{aligned}$$

де $W_{11}(p)$ — передаточна функція всіх ланок системи без зворотного зв'язку.

Відповідно до цього амплітудно-фазова характеристика даної слідкувальної системи за завданням матиме вигляд

$$W_\alpha(j\omega) = \frac{k_1}{(-T_1\omega^2 + j\omega)(jT_2\omega + 1)(j\tau\omega + 1) + k_1/k_0}.$$

На основі знайдених виразів за викладеними раніше методиками можна дістати всі необхідні частотні характеристики системи.

В даному разі рівняння помилки

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= W_\alpha(p)\alpha(t) - W_f(p)f(t) = \\ &= \frac{k_1}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)} \alpha(t) + \\ &+ \frac{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + k_1/k_0} f(t). \end{aligned}$$

3.12

Структурні схеми та їх перетворення

Під структурною схемою САК у теорії автоматичного керування розуміють графічне зображення математичної моделі системи у вигляді з'єднаних ланок, які відповідають функціональній схемі даної системи. При цьому кожна ланка структурної схеми зображується прямокутником, в якому відображуються у вигляді передаточних функцій, рівнянь динаміки або часової характеристики динамічні властивості даної ланки.

У деяких випадках ланки можна пронумерувати, а їх динамічні характеристики зобразити окремо. Вхідні і вихідні величини на структурних схемах можуть бути записані у вигляді зображень або їх оригіналів.

Ланки, які забезпечують алгебричне підсумовування (суматори) деяких величин, зображують у вигляді кола, поділеного на чотири рівні сектори. Якщо вхідні величини мають різний знак, то це відображується або знаком «мінус», або затушовуванням відповідного сектора (рис. 3.33).

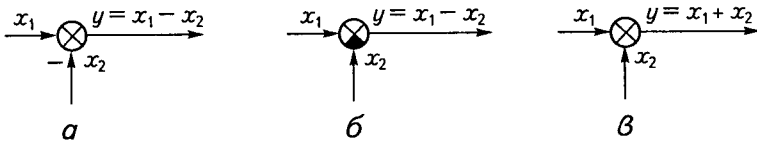


Рис. 3.33

Структурні схеми широко застосовуються в ТАК при дослідженнях і проектуванні. За їх допомогою легко простежити зв'язки між ланками, їх вплив, проходження сигналів у системі.

Ланки структурної схеми можуть відображати не тільки окремі елементи, а й їх об'єднання, а також частини системи, як було показано, наприклад, при виведенні рівняння слідкувальної електромеханічної системи.

За допомогою апарата передаточних функцій можливе також перетворення складних структурних схем на простіші, що в ряді випадків необхідно для знаходження відповідних рівнянь системи на основі відомих формул.

Правила перетворення структурних схем. Найпростіші перетворення структурних схем та їх окремих елементів було розглянуто раніше.

При послідовному з'єднанні ланок результуюча передаточна функція $W(p)$ ланок у загальному вигляді може бути визначена як добуток передаточних функцій $W_i(p)$ ланок:

$$W(p)_{\text{пс}} = \prod_{i=1}^n W_i(p), \quad (3.96)$$

а при паралельному — як їх сума:

$$W(p)_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (3.96a)$$

Передаточна функція ланки зі зворотним зв'язком (аналогічно група ланок, охоплених зворотним зв'язком, рис. 3.34, а) матиме вигляд

$$W^{\text{зв.з}}(p) = \frac{W_{\text{пр}}(p)}{1 \pm W_{\text{пр}}(p)W_{\text{зв.з}}(p)}, \quad (3.97)$$

де $W_{\text{пр}}(p)$ — передаточна функція прямого каналу, яка є передаточною функцією окремої ланки або групи послідовно з'єднаних ланок (тоді $W_{\text{пр}}(p) = W_1(p) \dots W_k(p)$), що охоплюються зворотним зв'язком (рис. 3.34, б).

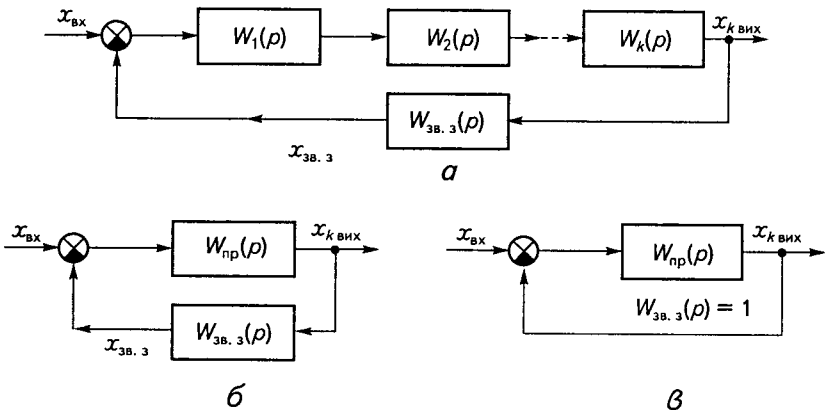


Рис. 3.34

Знак «плюс» відповідає від'ємному, а знак «мінус» — додатному зворотному зв'язкові; $W_{зв.з}(p)$ — передаточна функція самої ланки зворотного зв'язку; $W_{пр}(p)W_{зв.з}(p) = W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи, точніше, контура зворотного зв'язку, що містить ланки з передаточними функціями $W_{пр}(p)$ та $W_{зв.з}(p)$.

Отже, передаточна функція ланки (або групи ланок), охопленої зворотним зв'язком, є передаточною функцією прямого каналу, розділеною на $1 \pm$ передаточна функція розімкнутого контуру зворотного зв'язку. У випадку, коли розглядається головний зворотний зв'язок САР, цей контур є контуром розімкнутої САР. У цьому разі передаточна функція замкнутої системи (системи з головним зворотним зв'язком) записується у вигляді

$$W^{зв.з}(p) = \frac{W_{пр}(p)}{1 \pm W(p)}. \quad (3.98)$$

Якщо передаточна функція зворотного зв'язку $W_{зв.з}(p)$ дорівнює одиниці, то такий зворотний зв'язок називають *одиничним*, що зображується так, як на рис. 3.34, в.

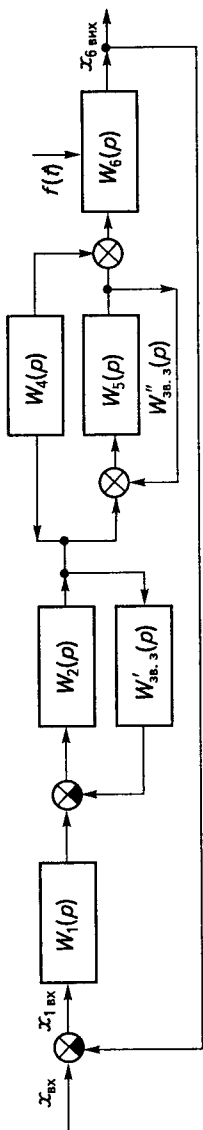
Передаточні функції прямого каналу і розімкнутої системи в цьому разі дорівнюють одна одній $W_{пр}(p) = W(p)$, і передаточна функція ланки зі зворотним зв'язком

$$W^{зв.з}(p) = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)}. \quad (3.99)$$

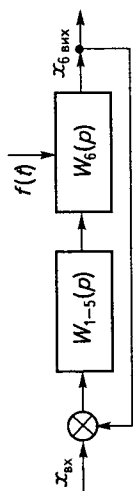
Знаючи правила перетворення структурних схем, можна досить просто розв'язати завдання перетворення одноконтурних і деяких багатоконтурних систем. При цьому під *одноконтурною* замкнутою системою розуміють систему, при розмиканні якої в довільній точці можна дістати ланцюжок ланок, в якому відсутні паралельно з'єднані ланки і ланки, охоплені зворотними зв'язками.

Багатоконтурною називають систему, яка має в своєму складі паралельно з'єднані ланки, а також ланки з місцевими зворотними зв'язками.

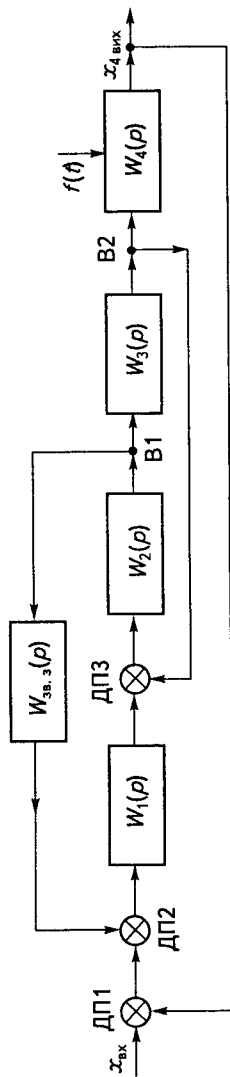
Як приклад розглянемо структурну схему, зображену на рис. 3.35, а. Ця схема є багатоконтурною і має в своєму складі ланки з місцевими зворотними зв'язками: ланку $W_2(p)$ з від'ємним інерційним зворотним зв'язком $W'_{зв.з}(p)$; ланку $W_5(p)$ з додатним одиничним



a



б



в

Рис. 3.35

зворотним зв'язком $W''_{зв.3}(p)$, а також паралельно з'єднані ланки $W_4(p)$ і $W_5(p)$. Об'єктом системи крування є ланка $W_6(p)$.

Спочатку проведемо перетворення ланок зі зворотними зв'язками:

$$W_{2,зв.3}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W''_{зв.3}(p)}; \quad W_{5,зв.3}(p) = \frac{W_5(p)}{1 - W_5(p)}.$$

Для паралельно з'єднаних ланок дістанемо

$$W_{4-5,зв.3}(p) = W_4(p) + W_{5,зв.3}(p).$$

Розглядаючи далі ланки як послідовно з'єднані, знаходимо їх передаточну функцію

$$\begin{aligned} W_{1-5}(p) &= W_1(p)W_{2,зв.3}(p)[W_4(p) + W_{5,зв.3}(p)] = \\ &= W_1(p)W_{2,зв.3}(p)W_{4-5,зв.3}(p). \end{aligned}$$

Відповідно спрощену структурну схему системи показано на рис. 3.35, б.

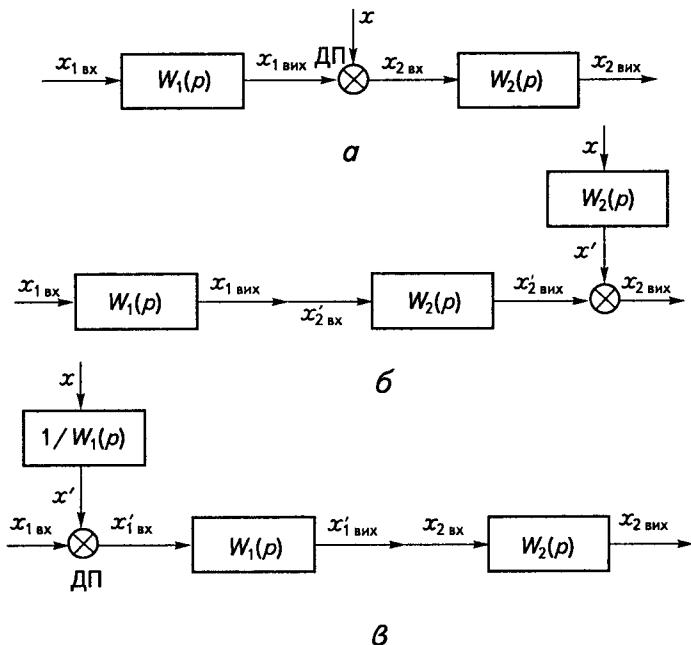
Розглянемо можливість перетворення структурної схеми, наведеної на рис. 3.35, в. Ця структурна схема має додатні зворотні зв'язки, кожний з яких охоплює по дві ланки. Одна з них входить також до контура іншого зворотного зв'язку. Такі структурні схеми називають *схемами з перехресними зворотними зв'язками*. Їх не можна перетворити за допомогою розглянутих вище формул. Тому їх треба перетворити таким чином, аби ліквідувати зв'язки, що перехреснюються.

Для перетворення структурних схем із перехресними зворотними зв'язками використовуються правила переносу додатних пристроїв (на схемі ДП1, ДП2, ДП3) та вузлів (позначених В1, В2).

Правила переносу додатних пристроїв і вузлів у схемі.

Загальний принцип переносу додатного пристрою або вузла в схемі полягає в тому, що при ліквідації явища перехреснування зворотних зв'язків вихідні величини ланок мають бути незмінними. Цей принцип добре ілюструють схеми переносу додатного пристрою ДП (рис. 3.36, а, б, в) і вузла В (рис. 3.37, а, б, в).

Так, на рис. 3.36, б показано перенос ДП вправо по ходу процесу. При цьому величина x не проходить крізь ланку $W_2(p)$, що має місце у вихідній схемі. Для того щоб процес у перетвореній схемі не змінився, необхідно ввести додаткову ланку $W_2(p)$ між точкою вводу сигналу x і ДП.

Рис. 3.36

Справді, якщо у вихідній схемі $x_{2 \text{ вих}} = W_2(p)x_{2 \text{ вх}} = W_2(p) \times (x_{1 \text{ вих}} + x)$, то в цьому разі $x_{2 \text{ вих}} = x'_{2 \text{ вих}} + x'$, де $x'_{2 \text{ вих}} = W_2(p)x_{1 \text{ вих}}$, $x' = W_2(p)x$, тому $x_{2 \text{ вих}} = W_2(p)x_{1 \text{ вих}} + W_2(p)x = W_2(p)(x_{1 \text{ вих}} + x)$ буде таким самим, як і у вихідній схемі.

Якщо ДП переміщується вліво (проти ходу процесу), то між точкою прикладання величини x і ДП потрібно ввести ланку, передаточна функція якої буде оберненою функцією ланки, через яку ДП переміщується вліво.

При цьому $x_{2 \text{ вих}} = W_2(p)x'_{1 \text{ вих}}$; $x'_{1 \text{ вих}} = W_1(p)x_{1 \text{ вх}} + \frac{1}{W_1(p)}x'$, звідки

$x_{2 \text{ вих}} = W_2(p)[W_1(p)x_{1 \text{ вх}} + x] = W_2(p)(x_{1 \text{ вих}} + x)$ дорівнює вихідній величині вихідної схеми.

Вихідну (а) і перетворені (б, в) схеми переміщення вузла В вліво та вправо відносно початкового положення показано на рис 3.37. При переміщенні вузла також необхідно ввести додаткові ланки, як показано на рис. 3.37, б, в. Справді, якщо вузол В переміщується

3.12. Структурні схеми та їх перетворення

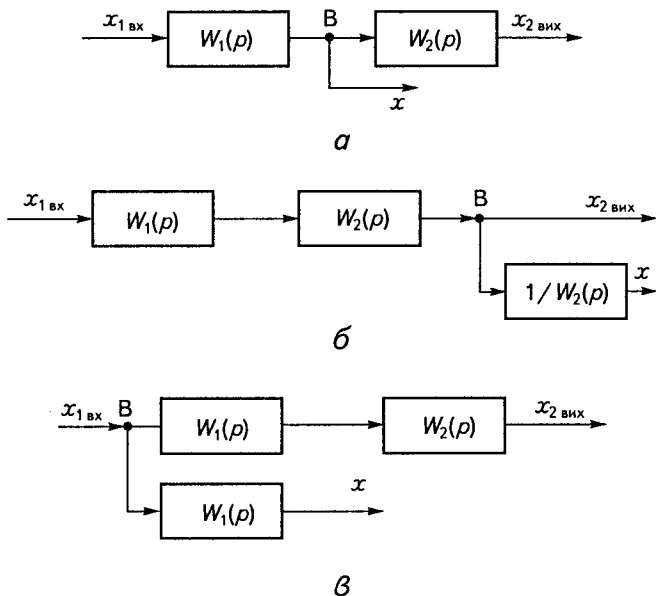


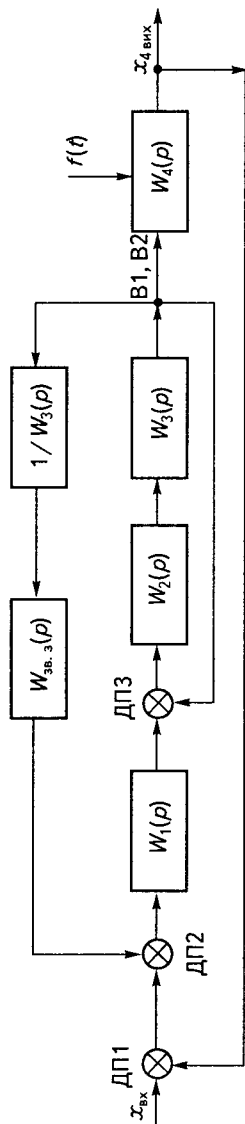
Рис. 3.37

вправо, то для того, щоб величина x не змінилася, необхідно ввести в ланцюг x ланку з передаточною функцією, оберненою передаточній функції ланки, через яку було переміщено цей вузол. Якщо вузол В переміщується ліво, треба ввести додаткову ланку з передаточною функцією, що дорівнює передаточній функції ланки, через яку переміщується цей вузол.

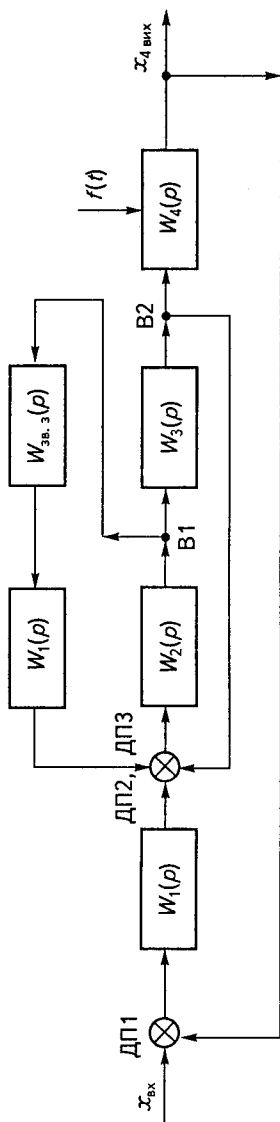
Розглянемо ще раз схему на рис. 3.35, в. Для ліквідації перехресних зворотних зв'язків можна перемістити додатний пристрій ДП2 вправо, об'єднавши його з ДП3, або вузол В1 вправо, об'єднавши його з вузлом В2. Можливе також перенесення вузла В2 ліво й об'єднання його з вузлом В1.

Перетворена схема з переносом вузла В1 вправо показана на рис. 3.38, а, а з переносом ДП2 вправо й об'єднанні його з ДП3 — на рис. 3.38, б.

Перехресчування зворотних зв'язків можна ліквідувати також перемістивши вузол В2 ліво й об'єднавши його з вузлом В1. В цьому разі в коло одиничного зворотного зв'язку треба ввести додаткову ланку з передаточною функцією $W_3(p)$.



a



б

Рис. 3.38

Ліквідувавши перехрещення зворотних зв'язків, нескладно спростити одержані структурні схеми за раніше викладеними правилами і наведеними формулами.

3.13

Графи та їх використання в теорії автоматичного керування

Загальні відомості про графи. Математичну модель системи автоматичного керування можна дістати також за допомогою орієнтованих графів.

У загальному випадку під графом розуміють деяку множину точок M , які називають *вершинами*, і множину непересічних кривих — *ребер* R , що відповідають умовам:

- кожне ребро R має рівно дві точки множини M , які є граничними точками ребра (ребро в цьому разі називають *незамкнутим*);
- замкнуте ребро має тільки одну точку з множини M (граничні точки збігаються);
- ребра R не мають інших спільних точок, окрім тих, які входять у множину M .

Якщо на ребрах вказано напрям переміщення, то відповідний граф називають *орієнтованим*, а ребро орієнтованого графа — *дугою*. Граничні точки ребра є вершинами. Вважають, що саме ребро R інцидентне кожній з вершин, а кожна вершина інцидентна цьому ребру.

У загальному вигляді граф позначається буквою G або (R, M) , де R — множина ребер; M — множина вершин.

Якщо якийсь граф $G_1 = f(M_1, R_1)$, де M_1 та R_1 входять до множин M і R , з яких складається граф G , то граф G_1 називають *підграфом* графа G (або підграфом G), який, своєю чергою, називають *надграфом* графа G_1 (або надграфом G_1).

Граф зі скінченною кількістю вершин і ребер називають *скінченним*. На кожній дузі є початкова і кінцева вершини.

Згідно з викладеним орієнтований граф є сукупністю множин вершин і дуг. Дуги називають паралельними, якщо вони мають спільні початкові і кінцеві вершини. З'єднання дуг, за якого кінцева

вершина кожної дуги є початковою вершиною для наступної дуги, називають *орієнтованим маршрутом*. Якщо кінцева вершина останньої дуги збігається з початковою вершиною першої, то такий маршрут називають *замкнутим*.

Орієнтований маршрут, в якому всі дуги різні, називають шляхом від початкової до кінцевої вершини (при незамкненому стані). Якщо цей маршрут замкнутий, то його називають контуром або орієнтованим циклом.

Основні властивості графів САК і методика їх побудови.

Граф системи автоматичного керування є орієнтованим графом, що має такі властивості:

- кожна дуга відображає ланку системи з відповідним математичним зображенням;
- якщо до вхідної (початкової) вершини деякої дуги приєднуються (входять в неї) кілька дуг, то відповідна вхідна змінна є сумою вихідних величин цих дуг. При одній приєднаній дузі змінна, що їй відповідає, є вхідною змінною наступної дуги (її вершини);
- якщо з кінцевої вершини виходять кілька дуг, то вхідна величина всіх дуг є однаковою.

Граф САК легко побудувати, якщо відома структурна схема системи. Якщо відомий граф, то нескладно побудувати структурну схему відповідної системи. Вершини графа зображуються колами.

При побудові графа за структурною схемою необхідно виконати такі перетворення.

1. Зобразити схему таким чином, щоб у суматорах усі вхідні величини мали знак плюс.
2. Кожний суматор замінити вершиною з вхідною величиною, що дорівнює вихідній вершині цього суматора.
3. Кожну ланку структурної схеми замінити дугою з оператором (передаточною функцією), який дорівнює оператору цієї ланки.
4. Кожній змінній, в тому числі й збуренню, поставити у відповідність свою вершину.
5. Додаткове зображення (якщо це потрібно) вершини однієї з дуг на загальному вході деякої дуги провести з урахуванням одиничної передаточної функції.

Деяку вихідну структурну схему слідкувальної САК показано на рис. 3.39, а, а змінену структурну схему згідно з п. 1 — наведено на рис. 3.39, б.

Кінцевий результат — відповідний граф САК, наведено на рис. 3.39, в.

При побудові графів можливе їх спрощення, яке досягається за рахунок того, що паралельні дуги можна замінити однією дугою з передаточною функцією, яка дорівнює сумі передаточних функцій цих дуг. Простий шлях (якщо немає не належних до нього дуг, інцидентних його проміжним вершинам) можна замінити дугою з передаточною функцією, що дорівнює добутку передаточних функцій дуг цього шляху.

Знаходження передаточної функції САК за допомогою формули Мейсона. Формула Мейсона використовується для спрощення графа та знаходження передаточної функції замкнутої системи автоматичного керування за відомим графом системи.

Формулу записують у вигляді

$$W(p)_{g,x} = \sum_{i=1}^m \frac{W_i(p) \Delta_i}{\Delta}, \quad (3.100)$$

де g — вхідна, а x — вихідна величини системи (графа); $W_i(p)$ — передаточна функція i -го простого шляху від вершини g до вершини x , що дорівнює добутку передаточних функцій дуг, які належать цьому шляху (контуру); m — кількість таких шляхів (для спрощення запису передаточних функцій далі не писатимемо знак оператора p); Δ — визначник графа.

Записується визначник графа у вигляді

$$\Delta = 1 - \sum W_{0j} + \sum_{j,k} W_{0j} W_{0k} - \sum_{j,k,l} W_{0j} W_{0k} W_{0l} \dots,$$

де W_{0j} — передаточна функція j -го простого контуру, яка дорівнює добутку передаточних функцій всіх дуг даного контуру. Перший член $\sum W_{0j}$ є сумою всіх подібних простих контурів. Другий член $\sum_{j,k} W_{0j} W_{0k}$ — сума пар контурів j та k , що не стикаються з іншими контурами (W_{0k} — результуюча передаточна функція контуру k , подібна до W_{0j}). Третя складова формули визначника $\sum_{j,k,l} W_{0j} W_{0k} W_{0l}$ — сума добутків передаточних функцій відповідних контурів; їх дода-

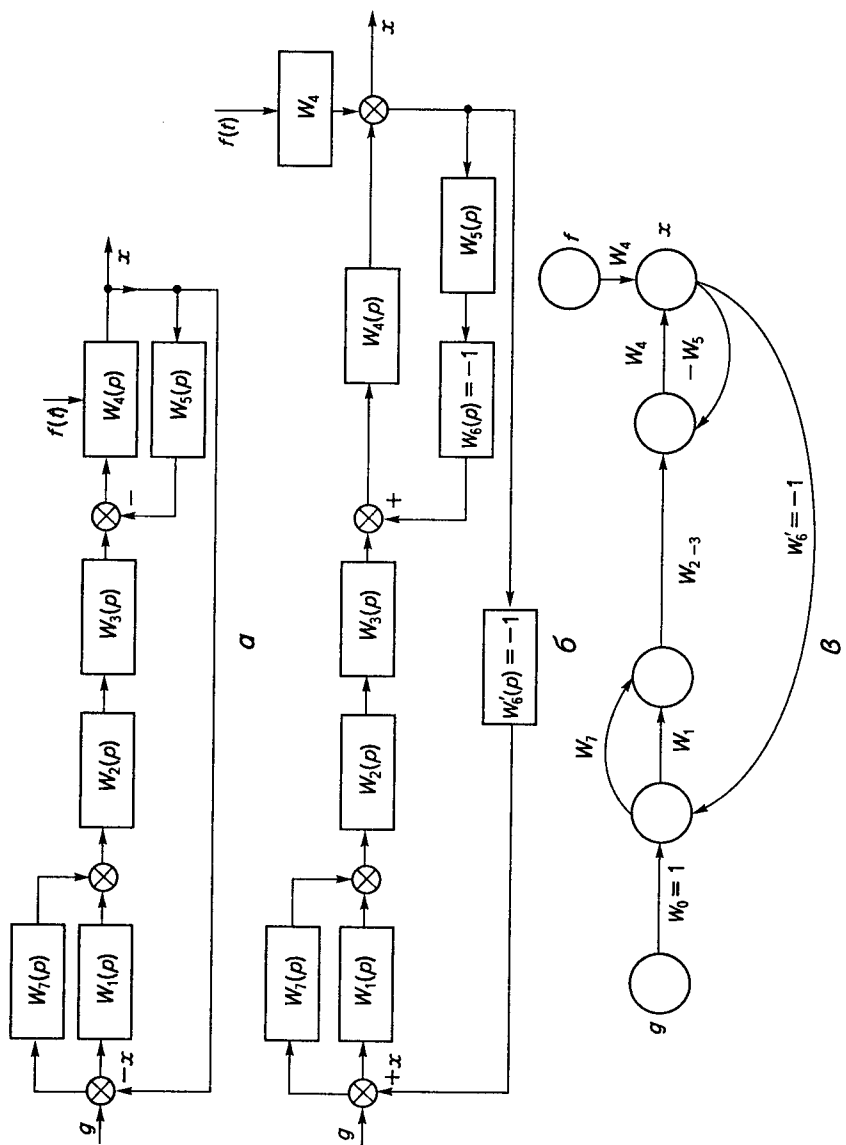


Рис. 3.39

ють по трійці контурів, що не стикаються. Аналогічно можна обчислювати й інші члени, якщо вони є в даному складному графі. При цьому треба мати на увазі, що контурами, що не стикаються, називають такі два контури, які не мають спільних дуг або вершин. Трійка, четвірка і так далі контурів вважається такою, що не стикається, якщо будь-яка пара контурів цієї трійки (четвірки і т. д.), своєю чергою, не стикається; Δ_i — детермінант підграфа, який можна дістати з головного (вихідного) графа при виключенні дуг і вершин i -го простого шляху, а також дуг і вершин, інцидентних цим вершинам.

Запишемо передаточну функцію системи автоматичного керування за завданням g згідно з формулою Мейсона відповідно до рис. 3.39 (при цьому вважатимемо $f = 0$). З рис. 3.39, σ видно, що від вершини g до вершини x є два (I і II) прості шляхи з такими передаточними функціями:

$$W^I = W_0 W_1 W_{2-3} W_4 = W_1 W_{2-3} W_4;$$

$$W^{II} = W_0 W_7 W_{2-3} W_4 = W_7 W_{2-3} W_4.$$

Крім цього, у вихідному графі є три контури (позначимо їх 1, 2, 3), передаточні функції яких

$$W^1 = W_1 W_{2-3} W_4 W'_6 = -W_1 W_{2-3} W_4;$$

$$W^2 = -W_4 W_5;$$

$$W^3 = W_7 W_{2-3} W_4 W'_6 = -W_7 W_{2-3} W_4.$$

Парі контурів, що не стикаються, граф не має, тому його визначник

$$\Delta = 1 - (W^1 + W^2 + W^3) = 1 + W_1 W_{2-3} W_4 + W_4 W_5 + W_7 W_{2-3} W_4.$$

Підграфи, які відповідають простим шляхам від вершини g до x , замкнутих контурів не мають, тому

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1.$$

Формула Мейсона в цьому разі матиме вигляд

$$W_{x,g} = \frac{W^I + W^{II}}{\Delta} = \frac{W_1 W_{2-3} W_4 + W_7 W_{2-3} W_4}{1 + W_1 W_{2-3} W_4 + W_4 W_5 + W_7 W_{2-3} W_4}.$$

Якщо потрібно знайти передаточну функцію за збуренням, то враховують, що $g = 0$. При цьому від вершини f до x маємо лише

один простий шлях $W^1 = W_4$. Відповідний підграф у цьому разі не має замкнутих контурів і його визначник дорівнює одиниці: $\Delta_1 = 1$.

Передаточна функція за Мейсоном матиме вигляд

$$W_{x,f} = \frac{W_4 \Delta_1}{\Delta} = \frac{W_4}{1 + W_1 W_{2-3} W_4 + W_4 W_5 + W_7 W_{2-3} W_4}.$$

3.14

Багатовимірні системи та метод змінних стану

Багатовимірні системи і загальні відомості про метод змінних стану. В САК у загальному випадку можна одночасно керувати кількома величинами. Як було зазначено раніше, такі системи називають *багатовимірними*.

Багатовимірні системи називають також системами багатозв'язного керування. Ці терміни переносять і на відповідні об'єкти (наприклад, *багатовимірний об'єкт*). Класичним прикладом багатовимірного об'єкта є паровий котел, в якому одночасно автоматично керують температурою і тиском пари.

Лінійними багатовимірними системами називають системи автоматичного керування, в яких усі елементи мають лінійні характеристики і їхні динамічні властивості описуються лінійними диференціальними рівняннями. Якщо коефіцієнти цих рівнянь незмінні, то таку систему називають *стаціонарною* (в протилежному разі — *нестабілізаційною*).

Рівняння багатовимірної системи в загальному випадку можна записати у вигляді системи рівнянь в операторній формі:

$$P_{11}(p)x_1 + \dots + P_{1n}(p)x_n = Q_{11}(p)u_1 + \dots + Q_{1m}(p)u_m + \\ + C_{11}(p)f_1 + \dots + C_{1k}(p)f_k;$$

$$P_{21}(p)x_1 + \dots + P_{2n}(p)x_n = Q_{21}(p)u_1 + \dots + Q_{2m}(p)u_m + \\ + C_{21}(p)f_1 + \dots + C_{2k}(p)f_k;$$

.....

$$P_{n1}(p)x_1 + \dots + P_{nn}(p)x_n = Q_{n1}(p)u_1 + \dots + Q_{nm}(p)u_m +$$

$$+ C_{nl}(p)f_1 + \dots + C_{nk}(p)f_k.$$

У компактнішій формі це рівняння можна записати так:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(p)x_j = \sum_{j=1}^m Q_{ij}(p)u_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}(p)f_j,$$

де $P_{ij}(p)$, $Q_{ij}(p)$, $C_{ij}(p)$ — поліноми від p зі сталими коефіцієнтами при відповідних регульованих змінних x_1, \dots, x_n ; u_1, \dots, u_m — керуючі сигнали; f_1, \dots, f_k — збурення.

Для багатовимірних систем найпоширенішою є матрична форма запису рівнянь, згідно з якою в даному разі введемо такі матриці:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}(p) & \dots & Q_{1m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{nl}(p) & \dots & Q_{nm}(p) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix};$$

$$A(p) = \begin{bmatrix} P_{11}(p) & \dots & P_{1n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{nl}(p) & \dots & P_{nn}(p) \end{bmatrix}; \quad C(p) = \begin{bmatrix} C_{11}(p) & \dots & C_{1k}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{nl}(p) & \dots & C_{nk}(p) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k \end{bmatrix}.$$

При цьому вихідну систему рівнянь багатовимірної системи можна записати у вигляді

$$A(p)\mathbf{x} = B(p)\mathbf{u} + C(p)\mathbf{f}.$$

□ **Приклад 3.4.** Деяка двовимірна система описується рівняннями

$$(T_1 p + 1)x_1 + (T_2 p + 1)x_2 = b_0 u_1 + b_1 u_2;$$

$$(T_3 p + a_1)x_1 + a_2 x_2 = b_2 u_2.$$

Записати рівняння цієї системи в матричній формі.

Розв'язання. Рівняння цієї системи в матричній формі матиме вигляд

$$A(p)\mathbf{x} = B(p)\mathbf{u},$$

де

$$A(p) = \begin{bmatrix} T_1 p + 1 & T_2 p + 1 \\ T_3 p + 1 & a_2 \end{bmatrix}; \quad B(p) = \begin{bmatrix} b_0 p & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Поведінку багатовимірних систем можна описувати також за допомогою передаточних функцій.

Передаточною функцією за деяким i -м параметром та k -м виходом називають відношення зображення за Лапласом $X_k(s)$ вихідного параметра x_k до зображення $U_i(s)$ вхідної величини u_i за нульових початкових умов. Згідно з цим

$$W_{ki}^u(s) = \frac{X_k(s)}{U_i(s)}.$$

Обчислити цю передаточну функцію можна, якщо знехтувати у вихідній системі рівнянь зображеннями всіх сигналів і параметрів керування, крім $U_i(s)$.

Аналогічно можна знайти також передаточну функцію за збуренням відповідно до цього виходу (параметра x_k):

$$W_{ki}^f(s) = \frac{X_k(s)}{F_i(s)}.$$

Для повного описання багатовимірних систем потрібно мати $n \times m$ передаточних функцій за керуванням і $n \times k$ передаточних функцій за збуренням, які в загальному вигляді можна записати як матриці:

$$W^u(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^u(s) & \dots & W_{1m}^u(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}^u(s) & \dots & W_{nm}^u(s) \end{bmatrix}; \quad W^f(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^f(s) & \dots & W_{1k}^f(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}^f(s) & \dots & W_{nk}^f(s) \end{bmatrix},$$

де $W^u(s)$ — матриця передаточних функцій за керуванням (або передаточна матриця); $W^f(s)$ — передаточна матриця за збуренням.

Зображення керованого параметра x через передаточні матриці матиме вигляд

$$X(s) = W^u(s)U(s) + W^f(s)F(s).$$

Розглянемо спосіб визначення передаточних матриць, що базуються на відомих співвідношеннях, які наведемо без доведення:

$$W^u(s) = A^{-1}(s)B(s); \quad W^f(s) = A^{-1}(s)C(s).$$

При нульових початкових умовах $A(p) = A(s)$; $B(p) = B(s)$; $C(p) = C(s)$.

Згідно з положеннями вищої алгебри обернену матрицю визначаємо так:

$$A^{-1}(s) = \frac{1}{|A(s)|} \begin{bmatrix} A_{11}(s) & \dots & A_{1n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}(s) & \dots & A_{mn}(s) \end{bmatrix}^T.$$

Знак t означає операцію транспонування.

Проілюструємо викладене за допомогою простого прикладу.

- **Приклад 3.5.** Маємо двовимірну систему, поведінка якої визначається двома диференціальними рівняннями

$$p^2 x_1 + p x_1 + x_2 = u_1 + f_1;$$

$$p x_1 + x_1 + p x_2 = u_2 + f_2.$$

Необхідно знайти передаточні матриці за керуванням u і збуренням f .

Розв'язання. Запишемо наведені вище рівняння в формі зображення Лапласа:

$$(s^2 + s) X_1(s) + X_2(s) = U_1(s) + F_1(s);$$

$$(s + 1) X_1(s) + s X_2(s) = U_2(s) + F_2(s).$$

Ця система в матричній формі матиме вигляд

$$A(s) \mathbf{X}(s) = B(s) \mathbf{U}(s) + C(s) \mathbf{F}(s),$$

де

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^2 + s & 1 \\ s + 1 & s \end{bmatrix}; \quad B(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці

$$|A(s)| = (s^2 + s)s - (s + 1) = s^2(s + 1) - (s + 1) = (s^2 - s)(s + 1).$$

Переставивши по діагоналі складові матриці $A(s)$ та змінивши знаки елементів із непарною сумою індексів, дістанемо

$$\begin{bmatrix} s & -(s + 1) \\ -1 & s^2 + s \end{bmatrix},$$

звідки знайдемо доповнення: $A_{11} = s$; $A_{12} = -(s + 1)$; $A_{21} = -1$; $A_{22} = s^2 + s$.

Оскільки $B(s)$ і $C(s)$ є одиничні матриці, то

$$W^u(s) = W^f(s) = A^{-1}(s) =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s^2-1)} \begin{bmatrix} s & -(s+1) \\ -1 & s^2+s \end{bmatrix}^T = \frac{1}{(s+1)(s^2-1)} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -(s+1) & s^2+s \end{bmatrix}.$$

У 1974 р. Г. Розенброк заклад основи методу автоматизованого проєктування САК, який з часом було вдосконалено і розвинуто іншими вченими. Цей метод дістав назву *методу змінних стану*.

Метод змінних стану дає можливість визначити залежність вихідних (керованих) параметрів багатовимірної системи x_1, x_2, \dots, x_r (в узагальненому вигляді x) від деяких змінних стану y_1, \dots, y_n (в узагальненому вигляді y) з урахуванням дії керуючих впливів u_1, \dots, u_m (в узагальненому вигляді u).

Отже, в узагальненому спрощеному вигляді рівняння стану можна записати так:

$$\dot{y} = Ay + Bu; \quad (3.101)$$

$$x = Cy,$$

де A, B, C — відповідно матриці стану, керування, виходу (вихідних координат).

Розглянемо принципи загальні положення даного напрямку теорії автоматичного керування.

Для описання динамічних процесів у системі автоматичного керування необхідно в загальному випадку встановити характер зміни в часовому просторі керованої величини x системи з параметрами $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ від збурень f_1, \dots, f_n (до складу збурень належать задавальні і керуючі функції $u(t)$).

Поширення дістав спосіб описання систем, що базується на диференціальних рівняннях і передаточних функціях, які застосовують в одновимірних системах.

У багатовимірній системі з n змінними x_1, \dots, x_n при дії в загальному випадку збурень f_1, \dots, f_n для описання системи необхідно мати систему n рівнянь вигляду

$$d_{11}(p)x_1 + d_{12}(p)x_2 + \dots + d_{1n}(p)x_n = f_1;$$

$$d_{21}(p)x_1 + d_{22}(p)x_2 + \dots + d_{2n}(p)x_n = f_2;$$

$$\dots$$

$$d_{m1}(p)x_1 + d_{m2}(p)x_2 + \dots + d_{mn}(p)x_n = f_n,$$

де $d_{ik}(p)$ — поліном від оператора $p = \frac{d}{dt}$.

У разі застосування перетворення Лапласа при ненульових початкових умовах ці поліноми є функцією деякої комплексної величини s і мали б записуватись у вигляді $d_{ik}(s)$. При нульових початкових умовах, як зазначалося раніше, поліноми можна записувати у вигляді $d_{ik}(p)$.

Перехід від рівнянь ланок конкретної системи і визначення системи рівнянь та їх коефіцієнтів вигляду $d_{ik}(p)$ для описання конкретної САК досить детально викладено раніше на конкретному прикладі застосування теореми Крамера.

У разі багатовимірних систем їх описання і дослідження значно ускладнюються. Тому для дослідження таких систем розроблено так званий *метод змінних стану*, який може застосовуватись також і для дослідження одновимірних систем.

Метод базується на тому, що для розв'язання диференціального рівняння n -го порядку, яке характеризує динамічні процеси в деякій системі автоматичного керування (рис. 3.40), необхідно знати n початкових значень регульованої величини x — її початкового значення $x(t_0) = x(0)$ та $n - 1$ похідних при $t = t_0$, а саме: $\dot{x}(t_0) = \dot{x}(0)$; $\ddot{x}(t_0) = \ddot{x}(0)$; ...; $x^{n-1}(t_0) = x^{n-1}(0)$.

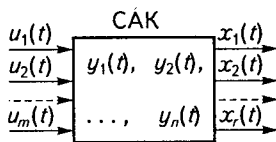


Рис. 3.40

Ці початкові умови визначають подальший рух системи.

Для характеристики внутрішнього стану системи вводять деякі абстрактні характеристики системи $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ з початковими умовами $y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)$, за допомогою яких з урахуванням вхідної дії $u(t)$ можна однозначно визначити динамічні процеси в системі.

Змінні $y_1(t), \dots, y_n(t)$ називають *змінними стану системи*.

У загальному вигляді деяка змінна стану $y_k(t)$ записується так:

$$y_k(t) = f_k[y_1(0) \dots y_n(0); u_1(t) \dots u_m(t)].$$

Стан системи в довільний момент часу t визначають за допомогою вектора стану $y(t)$, що є функцією змінних стану $y_k(t) (k = 1, \dots, n)$:

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T. \quad (3.102)$$

Множину всіх значень вектора стану $y(t)$ на деякому інтервалі зміни часу t називають *простором стану* або *фазовим простором*. Його можна розглядати як деякий n -вимірний абстрактний простір, що відповідає порядку диференціального рівняння системи.

Кінець вектора стану при русі в просторі стану має множину положень, яка називається *траєкторією вектора стану* або *фазовою траєкторією*. Кожна фіксована точка цього положення називається *зображуючою точкою*.

Фазовий простір, який відповідає рівнянню динаміки першого порядку, називають *одновимірним*. Його можна зобразити як пряму на деякій площині, а фазову траєкторію — як сукупність точок (відрізок) на цій прямій.

При $n = 2$ вектор стану є функцією двох змінних $y_1(t)$ і $y_2(t)$. Фазовий простір при цьому називають *двовимірним*. Він є площиною з координатами $y_1 - y_2$, а фазова траєкторія — крива на цій площині.

Тривимірний простір відповідає системам при $n = 3$.

Фазові траєкторії і простори стану одно-, дво- і тривимірних систем зображено на рис. 3.41, а—в.

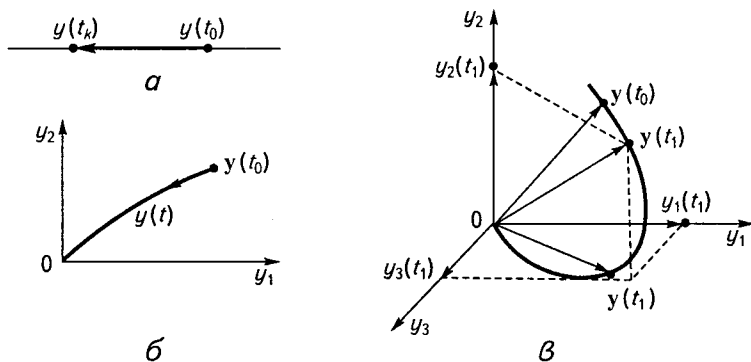


Рис. 3.41

При $n = 4$ матимемо чотиривимірний простір і т. д.

При застосуванні методу змінних стану виділяють *поняття простору керувань, простору виходів і простору збурень*. При цьому під простором керувань розуміють множину можливих значень $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$, під простором виходів — множину $x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)$, а під простором збурень — множину $f_1(t), f_2(t), \dots, f_l(t)$. Ці множини є координатами векторів: керувань в m -вимірному просторі $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$, виходів в r -вимірному просторі $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)]^T$ і збурень в l -вимірному просторі $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_l(t)]^T$.

Фізична суть змінних стану (які, як було вказано раніше, в загальному випадку можуть бути абстрактними величинами) залежить від вибору базису, при зміні якого можна змінити і змінні стану.

При дослідженні конкретних систем за змінні стану приймають деякі фізичні величини, які характеризують поведінку даної системи.

Рівняння стану. Якщо вважати, що похідна $dy_i(t)/dt = \dot{y}_i$ залежить тільки від поточного стану системи, то систему автоматичного керування можна описати системою диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші, згідно з якими похідні змінних стану залежать від значення змінних, часу і керувань $u_i(t)$.

Згідно з рис. 3.40 можна записати:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= \varphi_1[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t]; \\ \dot{y}_2(t) &= \varphi_2[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t]; \\ &\dots \dots \dots \quad (3.103) \\ \dot{y}_n(t) &= \varphi_n[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t].\end{aligned}$$

Знаючи змінні стану, знаходимо кожний з вихідних сигналів $x_i(t)$ як функцію $\gamma_i(t)$ змінних стану і керувань (входів):

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \gamma_1[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t]; \\ x_2(t) &= \gamma_2[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t]; \\ &\dots \dots \dots \quad (3.104) \\ x_n(t) &= \gamma_n[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t].\end{aligned}$$

Якщо рівняння (3.103), (3.104) вважати лінійними (лінеаризованими), а систему детермінованою, то ці рівняння однозначно визначають поведінку системи. Ці рівняння називають *рівняннями стану системи*. При зазначених вище умовах змінні стану і вихідні величини не залежать від моменту появи вхідного сигналу $u_i(t)$.

При цьому рівняння (3.103), (3.104) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) + \\ &\quad + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \dots + b_{1m}u_m(t); \\ \dot{y}_2(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \dots + a_{2n}y_n(t) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ b_{21} u_1(t) + b_{22} u_2(t) + \dots + b_{2m} u_m(t); \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_n(t) &= a_{n1} y_1(t) + a_{n2} y_2(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) + \\
 &+ b_{n1} u_1(t) + b_{n2} u_2(t) + \dots + b_{nm} u_m(t); \\
 x_1(t) &= c_{11} y_1(t) + c_{12} y_2(t) + \dots + c_{1n} y_n(t) + \\
 &+ d_{11} u_1(t) + d_{12} u_2(t) + \dots + d_{1m} u_m(t); \\
 x_2(t) &= c_{21} y_1(t) + c_{22} y_2(t) + \dots + c_{2n} y_n(t) + \\
 &+ d_{21} u_1(t) + d_{22} u_2(t) + \dots + d_{2m} u_m(t); \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 x_r(t) &= c_{r1} y_1(t) + c_{r2} y_2(t) + \dots + c_{rn} y_n(t) + \\
 &+ d_{r1} u_1(t) + d_{r2} u_2(t) + \dots + d_{rm} u_m(t),
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

де $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}$ — сталі коефіцієнти, знайдені при визначенні і перетворенні відповідних функцій φ_i, γ_i в рівняннях (3.103), (3.104).

Для складних об'єктів запис рівнянь вигляду (3.105), (3.106) та їх перетворення при дослідженні системи утруднені, тому значне поширення дістала раціональніша компактна векторно-матрична форма рівнянь стану. Згідно з цією формою рівняння стану можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{y}} &= A \mathbf{y}(t) + B \mathbf{u}(t); \\
 \mathbf{x} &= C \mathbf{y}(t) + D \mathbf{u}(t),
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

є матриця стану розмірністю $n \times n$, яка визначає вільні і вимушені рухи системи;

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

є матриця керування (матриця входу) розмірності $n \times m$, яка визначає взаємозалежність входу системи і змінних стану;

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ c_{r1} c_{r2} \dots c_{rn} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

є матриця вихідних координат (матриця виходу) розмірності $r \times n$, яка визначає характер взаємозв'язку вихідних величин зі змінними стану;

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} d_{12} \dots d_{1n} \\ d_{21} d_{22} \dots d_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ d_{r1} d_{r2} \dots d_{rn} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

є матриця розмірністю $r \times n$, що характеризує прямий зв'язок вихідних координат $x_i(t)$ з керуванням; визначає безпосередній вплив керування на різні складові вихідних координат; для багатьох систем $D = 0$.

Структурну схему багатовимірної системи, що відповідає наведеним рівнянням стану, подано на рис. 3.42. Подвійні лінії відображають матрично-векторний характер математичної моделі системи.

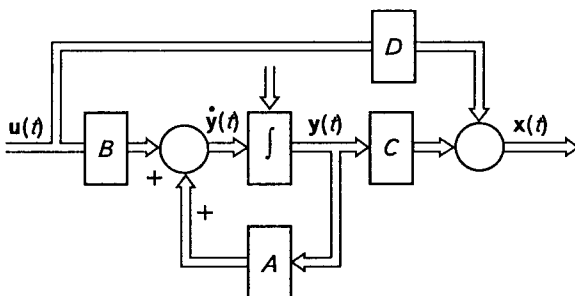


Рис. 3.42

Знаходження рівнянь стану і аналогових моделей систем. Розглянемо одновимірну систему, динаміка якої описана диференціальним рівнянням n -го порядку, зведеним до нормованого ви-

гляду, при якому коефіцієнт за найвищого порядку похідної від регульованої величини x дорівнює одиниці ($a_0 = 1$); $u(t)$ — вхідна величина. Отже, вихідне рівняння має вигляд

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = b_0 u(t). \quad (3.112)$$

Якщо початкові умови відомі, то, як вказувалося раніше, змінні стану можна записати так:

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t), \\ y_2(t) = \dot{x}(t) = \dot{y}_1(t), \\ y_3(t) = \ddot{x}(t) = \dot{y}_2(t), \\ \dots \dots \dots \\ y_n(t) = x^{(n-1)}(t) = \dot{y}_{n-1}(t). \end{cases} \quad (3.113)$$

З рівняння (3.112) знайдемо значення похідної найвищого порядку:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = -a_n x(t) - a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} - \dots - a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + b_0 u(t). \quad (3.114)$$

На основі рівнянь (3.113) і (3.114) можна дістати систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t); \\ \dot{y}_2(t) &= y_3(t); \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_n(t) &= -a_n y_1(t) - a_{n-1} y_2(t) - \dots - a_1 y_n(t) + b_0 u(t); \\ x(t) &= y_1(t). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Звідси знаходимо систему рівнянь стану (3.115) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1}(t) \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$x(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0][y_1(t)y_2(t)\dots y_n(t)]^T. \quad (3.116)$$

У векторній формі рівняння стану матимуть вигляд

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t); \quad (3.117)$$

$$x(t) = Cy(t),$$

а відповідні матриці —

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Матриця керування B розмірністю $n \times 1$ має вигляд

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad (3.119)$$

а матриця вихідних координат C розмірністю $1 \times n$ —

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]; \quad (3.120)$$

$$y(t) = [y_1(t)y_2(t)\dots y_n(t)]^T. \quad (3.121)$$

Схему аналогового моделювання одновимірної системи автоматичного керування, що відповідає рівнянням (3.115), наведено на рис. 3.43. У модель введено початкові умови змінних стану $y_n(0), \dots, y_1(0)$, а також значення коефіцієнтів a_1, \dots, a_n . Змінюючи вхідну величину $u(t)$ за допомогою даної аналогової моделі, можна дістати залежність $x(t)$.

Загальна методика розв'язання рівнянь стану. Однорідні рівняння. Однорідне рівняння стану (яке не враховує дію вхідних величин $u(t)$) є векторно-матричним рівнянням вигляду

$$\dot{y}(t) = Ay(t). \quad (3.122)$$

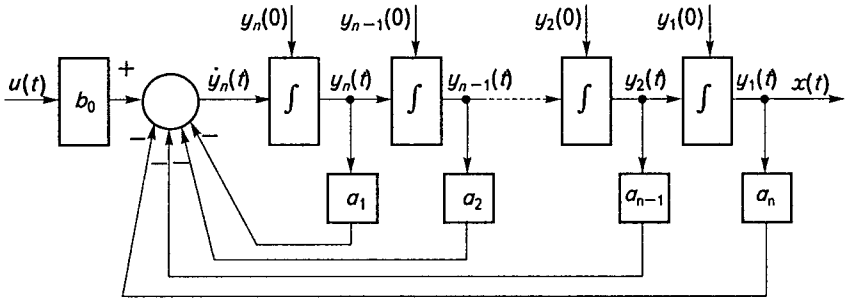


Рис. 3.43

Воно визначає вільні коливання системи. Позначимо початкові умови: $y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)$. Їхній вектор

$$y(0) = [y_1(0) y_2(0) \dots y_n(0)]^T.$$

Відповідне скалярне диференціальне однорідне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) \quad \text{або} \quad \frac{dy(t)}{y(t)} = a dt.$$

Зінтегрувавши обидві частини останнього виразу, дістанемо

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy(t)}{y(t)} = a \int_0^t dt$$

або

$$\ln \frac{y(t)}{y(0)} = at,$$

звідки

$$y(t) = e^{at} y(0).$$

Розклавши експоненціальну функцію e^{at} в степеневий ряд, одержимо

$$y(t) = e^{at} y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k y(0). \quad (3.123)$$

Для матричної функції e^{At} згідно з формулами матричного числення маємо

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k,$$

де A, I — відповідно динамічна й одинична матриці розмірності $n \times n$.
Згідно зі скалярним рівнянням (3.123)

$$y(t) = e^{At} y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^{k_1} y(0). \quad (3.124)$$

Здиференціювавши обидві частини цього рівняння, дістанемо

$$\dot{y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} y(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k_1!} (At)^k y(0), \quad (3.125)$$

де $k-1 = k_1$.

Підставляючи в ліву частину виразу (3.125) відповідне значення з (3.123), а в праву — з (3.124), бачимо, що вони тотожні, а це дає змогу стверджувати, що (3.124) — загальний розв'язок векторно-матричного рівняння.

Функцію e^{At} називають *перехідною функцією стану* або (часто) *фундаментальною матрицею*.

Отже, розв'язок однорідного векторно-матричного рівняння (3.122) матиме вигляд

$$y(t) = e^{At} y(0).$$

Для лінійних стаціонарних систем розв'язок однорідного рівняння через перехідну матрицю стану можна записати у вигляді

$$y(t) = e^{At} y(0). \quad (3.126)$$

Основні властивості перехідної матриці стану наведено без відповідних доказів.

1. Вимірність перехідної матриці стану дорівнює вимірності динамічної квадратної матриці A . Тому вона також є квадратною матрицею розмірності $n \times n$, а її складові — функціями часу.

2. При $t = 0$

$$e^{A0} = 1.$$

3. Перехідна матриця стану e^{At} є неособливою матрицею, а це можливо при умові, що $\det e^{At} \neq 0$.

4. Для перехідної матриці стану $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ лише тоді, коли $AB = BA$.

5. $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$.

6. $\frac{d}{dt} e^{At} = e^{At} = e^{At} A$.

$$7. \int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1} (e^{At} - I) = (e^{At} - I)A^{-1}.$$

Загальна методика розв'язання неоднорідних рівнянь.

Розглянемо це питання на прикладі стаціонарного векторно-матричного рівняння стану:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t) + B\mathbf{u}(t).$$

Початкові умови визначаються вектором початкових умов і рівнянням виходу:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C\mathbf{y}(t) + D\mathbf{u}(t).$$

Помноживши на e^{-At} обидві частини виразу $\dot{\mathbf{y}}(t)$, дістанемо

$$e^{-At} \dot{\mathbf{y}}(t) = e^{-At} A\mathbf{y}(t) + e^{-At} B\mathbf{u}(t),$$

або

$$e^{-At} \dot{\mathbf{y}}(t) - e^{-At} A\mathbf{y}(t) = e^{-At} B\mathbf{u}(t).$$

Згідно з властивостями матриці маємо

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -e^{-At} A = -Ae^{-At},$$

тому

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} \mathbf{y}(t)] = e^{-At} B\mathbf{u}(t).$$

Зінтегрувавши обидві частини цього виразу від 0 до t , матимемо

$$e^{-At} \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(0) = \int_0^t e^{-A\tau} B\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Враховуючи п'яту властивість матриці, дістаємо

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{y}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

або, з урахуванням четвертої властивості,

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Перша складова правої частини цього рівняння описує вільні рухи системи, зумовлені початковими умовами, а друга — рух системи, зумовлений вектором керування і реакцією системи з відповідними нульовими початковими умовами.

Якщо підставити $\mathbf{y}(t)$ у вираз $\dot{\mathbf{x}}(t)$, записаний вище, то

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}e^{At} \mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Реакція стаціонарної системи не залежить від моменту t_0 прикладання дії, тому можна записати розв'язок неоднорідного рівняння стану у вигляді

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{y}(t_0) + \int_0^t e^{A(t-t_0)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau;$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}e^{A(t-t_0)} \mathbf{y}(t_0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{A(t-t_0)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Ці вирази відповідають розв'язку скалярного рівняння першого порядку

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t).$$

яке має вигляд

$$y(t) = e^{a(t-t_0)} y(t_0) + \int_0^t e^{a(t-t_0)} Bu(\tau) d\tau.$$

Знайдені згідно з наведеною методикою рівняння стану та їх розв'язки можуть бути основою для дослідження поведінки САК у динамічних режимах. Цей процес зводиться до визначення перехідної матриці стану e^{At} . У даному разі це має важливе значення тому, що складові перехідної матриці стану відображують перехідну функцію системи і функцію ваги, які є основними динамічними характеристиками САК.

Аналіз виразу e^{At} потребує застосування окремих методів дослідження. За великих розмірностей n матриці єдиними практично можливими є методи, що базуються на використанні ЕОМ за допомогою спеціальних алгоритмів і програм, які наводяться в спеціальній літературі.

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть основні типові ланки САК.
2. Назвіть динамічні характеристики ланок і запишіть їх рівняння.
3. Від чого залежать динамічні властивості ланок другого порядку?
4. Що таке передаточна функція? Напишіть вираз передаточних функцій основних типових ланок.
5. Викладіть методику побудови амплітудно-фазової частотної характеристики ланки.
6. Назвіть основні частотні характеристики ланок. Наведіть приклад їх побудови для аперіодичної ланки першого порядку.
7. У чому полягає методика побудови результуючих частотних характеристик при послідовному і паралельному з'єднанні ланок?
8. Як дістати логарифмічні частотні характеристики? Вкажіть їхні переваги.
9. Назвіть особливості мінімально- і немінімально-фазових ланок.
10. Як визначити рівняння динаміки при послідовному з'єднанні ланок?
11. Запишіть рівняння динаміки САК стабілізації та поясніть значення його складових.
12. Запишіть рівняння динаміки САК слідувальної системи та поясніть значення його складових.
13. Як дістати рівняння динаміки САР за допомогою теореми Крамера?
14. Запишіть вирази передаточних функцій САР за збуренням і заданням.
15. Перелічіть основні правила перетворення одноконтурних структурних схем.
16. Сформулюйте правила переносу вузлів і додатних пристроїв у структурних схемах із перехресними зворотними зв'язками.
17. Що таке граф? Назвіть види графів, укажіть особливості їх використання в ТАК.
18. Запишіть і поясніть суть складових формули Мейсона для деякого найпростішого випадку.
19. У чому полягає суть методу змінних стану?
20. Напишіть рівняння стану в загальному вигляді.

4.1

Поняття стійкості САК

Під стійкістю системи в найзагальнішому випадку (або близьке до того) положення після зникнення дії факторів (збурень), які вивели систему зі стану початкової рівноваги. Стійкість системи є необхідною умовою можливості САК вирішувати поставлені перед нею завдання.

Найпростішим прикладом, що характеризує різні сторони поняття стійкості системи, може бути рис. 4.1.

Розглянемо рух кулі по деякому криволінійному шляху (рис. 4.1, *а*). Якщо куля переміщуватиметься зовнішніми силами із положення початкової рівноваги 0 в положення I, II або III, то після зникнення цих сил вона повернеться у початкове положення (або близьке до нього) залежно від сил тертя. При цьому можливі коливання кулі відносно початкового положення.

У випадку, що відповідає рис. 4.1, *б*, куля займає нестійке положення рівноваги 0. Досить незначного зміщення кулі відносно цього положення, і вона не зможе самостійно повернутися до початкового стану.

Обидва розглянуті варіанти поведінки кулі зображено на рис. 4.1, *в*. Залежно від початкового положення рівноваги і характеру дії зовнішніх сил у разі відхилень кулі в межах відрізка шляху 0 — I вона повертатиметься у положення 0. У разі виходу за межі цього відрізка повернення в початкове положення стає неможливим.

Для характеристики поведінки кулі в найзагальнішому випадку нелінійних систем використовується поняття *стійкості* «в малому», «в великому» і «в цілому» (для окремих видів нелінійностей її називають *абсолютною стійкістю*).

Система є стійкою «у великому», якщо визначено межі області можливих відхилень, в яких система повертається у початкове положення, і відомо, що початкові відхилення системи не виходять за межі цієї області. Система стійка «в малому», якщо межі області стійкості не визначені, а вказано лише факт її наявності. Система стійка «в цілому», якщо вона повертається у початкове положення рівноваги за будь-яких початкових відхилень (рис. 4.1, а).

Шлях кулі, зображений на рис. 4.1, б, відповідає стійкості «у великому», якщо початкові відхилення є тільки в межах 0 — I, і нестійкості «у великому», якщо початкові відхилення можливі в межах 0 — II. У цьому випадку система стійка «в малому» (на відрізку 0 — I) і нестійка «у великому» (на відрізку 0 — II).

Система, стійка «в цілому», завжди є стійкою «у великому» і «в малому». Система, стійка «у великому», є стійкою «в малому».

В теорії автоматичного керування розрізняють поняття незбуреної рівноваги (положення 0 на рис. 4.1, а) і збуреного стану, в яке переходить система у разі дії збурення і наступного його зникнення (положення II на рис. 4.1, а).

Крім відносно простого випадку початкового положення рівноваги, коли об'єкт (куля) нерухомий, можливі й складніші випадки, коли *незбурений стан системи* є рухом за деякою траєкторією (наприклад, у програмних САК). Такий стан системи називають *незбуреним рухом*. У разі дії на систему зовнішніх факторів виникають відхилення від початкового руху, і такий стан системи називають *збуреним рухом*.

Незбурений рух системи називають *стійким*, якщо після зняття зовнішніх сил збурений рух через деякий час увійде в задану область ε .

При цьому можна записати

$$\Delta x(t) \leq \varepsilon, \quad (4.1)$$

де $\Delta x(t)$ — відхилення координат збуреного руху.

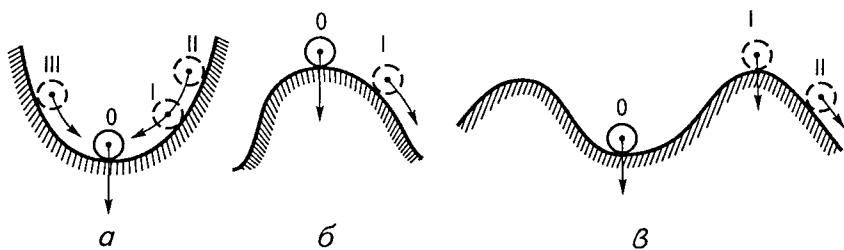


Рис. 4.1

4.2 Стійкість за Ляпуновим

У 1892 р. О. М. Ляпунов сформулював поняття стійкості, виходячи із того, що незбурений рух є деяким визначеним рухом системи, що підлягає дослідженню на стійкість. Він міг бути як усталений, так і не усталений. Згідно з цим визначення стійкості за Ляпуновим формулюється таким чином:

незбурений рух є стійким відносно змінних x_n , якщо за будь-якого довільно заданого додатного числа ε , яким би малим воно не було, можна вибрати друге додатне число $\delta(\varepsilon)$, таке, що за будь-яких збурень x_{i0} , що задовольняють умову

$\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 \leq \delta$, і за довільних $t \geq t_0$ виконуватиметься нерівність

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Практично стійкість незбуреного руху за Ляпуновим означає, що за досить малих початкових збурень збурений рух як завгодно мало відрізнятиметься від незбуреного. Якщо незбурений рух нестійкий, то збурений все більше відходить від нього в разі найменших початкових збурень.

Основні особливості визначення поняття стійкості за Ляпуновим полягали в тому, що стійкість розглядалася на нескінченному інтервалі часу, збурення були малими і діяли лише на початкові умови. В ТАК існує також поняття *асимптотичної стійкості*, під яким розуміють таку стійкість незбуреного руху, за якою збурений рух за досить малих початкових збурень прагне до незбуреного руху.

Теоретично умову асимптотичної стійкості можна записати у вигляді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\Delta x_i(t)] = 0. \quad (4.3)$$

Іноді умову стійкості технічних систем записують так:

$$\lim [\Delta x_i(t)] \leq \varepsilon, \quad (4.4)$$

де $\Delta x_i(t)$ — відхилення ординати неусталеного руху відносно відповідної ординати усталеного; ε — деяка довільно мала величина.

У найзагальнішому випадку відповідь на всі питання динаміки САК, у тому числі стійкості, можна дістати на основі аналізу харак-

теристики перехідного процесу, яку визначають у разі розв'язання диференціального рівняння замкнутої системи.

При виведенні рівняння замкнутої САК, як вказувалось раніше, в багатьох випадках використовується лінеаризація нелінійних залежностей за допомогою ряду Тейлора. Виведене таким чином рівняння називають рівнянням *першого наближення*.

4.3

Дослідження і аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння

Розглянемо лінійну САК стабілізації, рівняння динаміки якої в загальному випадку в операторній формі має вигляд

$$[P(p) + Q(p)]x(t) = P_1(p)S(p)f(t), \quad (4.5)$$

де $f(t)$ — функція збурення.

Після нескладних перетворень це рівняння можна записати так:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x &= \\ &= b_0 \frac{d^m f}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_m f, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ — коефіцієнти рівняння, що визначаються параметрами ланок системи (сталими часу та коефіцієнтами передач); x — регульований параметр.

Наведене рівняння замкнутої системи є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку ($n > m$). Його розв'язок згідно з відомим принципом суперпозиції

$$x = x_{\text{пер}} + x_0, \quad (4.7)$$

де $x_{\text{пер}}$ — перехідна складова, яка є загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0, \quad (4.8)$$

яке визначає рух системи після зникнення збурення і називається *рівнянням вільного руху*; x_0 — частковий розв'язок неоднорідного рівняння, який характеризує усталений стан системи (при $t = \infty$), залежить від параметрів системи та збурення f , але на стійкість системи не впливає.

Отже, стійкість лінійної системи залежить від розв'язку рівняння вільного руху (4.8)

$$x_{\text{пер}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (4.9)$$

де C_1, \dots, C_n — сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов; p_1, \dots, p_n — корені характеристичного рівняння, які визначаються параметрами ланок системи.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (4.10)$$

Отже, можна зробити такі висновки.

1. Стійкість лінійних САК не залежить від величини і вигляду збурень.

2. Стійкість лінійних систем визначається за коренями характеристичного рівняння, які залежать від параметрів системи.

Згідно з викладеним найзагальнішим методом аналізу стійкості є аналіз за коренями характеристичного рівняння.

Аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння замкнутої системи. Розглянемо розв'язок рівняння вільного руху залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння.

1. Нехай усі корені дійсні та від'ємні: $p_1 < 0, \dots, p_n < 0$. У цьому разі кожна складова розв'язку рівняння вільного руху (4.9) N_1, N_2, \dots, N_n є експонентою, яка при $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля (рис. 4.2, а). Перехідний процес у цьому разі буде затухаючим, а система — стійкою.

2. Нехай усі корені дійсні та від'ємні, крім кореня $p_k > 0$. Тоді всі складові розв'язку $x_{\text{пер}}$ будуть затухаючими, крім

$$N_k = C_k e^{p_k t} \rightarrow \infty, \quad (4.11)$$

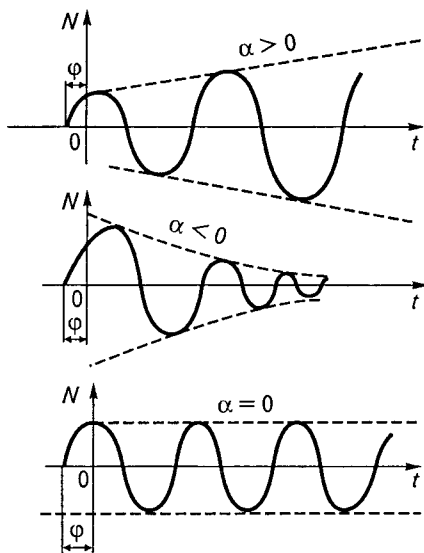
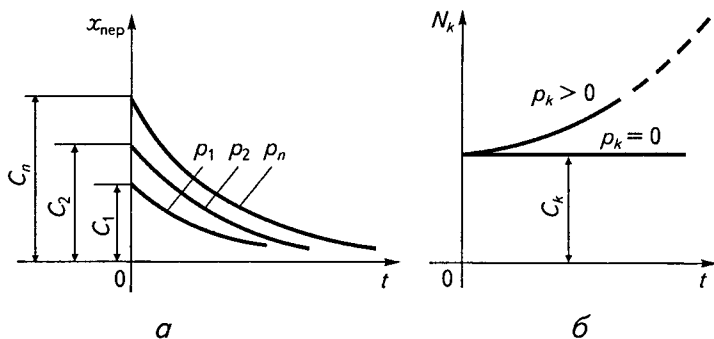
яка визначає нестійкість системи в даному випадку (рис. 4.2, б).

3. Нехай усі корені характеристичного рівняння дійсні та від'ємні, крім двох:

$$p_k = \alpha + j\beta; \quad p_{k+1} = \alpha - j\beta.$$

Сума складових розв'язку $x_{\text{пер}}$, що відповідає сумі цих коренів, матиме вигляд

$$N = N_k + N_{k+1} = C_k e^{(\alpha + j\beta)t} + C_{k+1} e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t} (C_k e^{j\beta t} + C_{k+1} e^{-j\beta t}).$$



б

Рис. 4.2

Замінивши показникову форму запису на тригонометричну, згідно з формулою Ейлера можна записати

$$\begin{aligned} e^{j\beta t} &= \cos\beta t + j \sin\beta t; \quad e^{-j\beta t} = \cos\beta t - j \sin\beta t; \\ N &= e^{\alpha t} [C_k (\cos\beta t + j \sin\beta t) + C_{k+1} (\cos\beta t - j \sin\beta t)] = \\ &= e^{\alpha t} [(C_k + C_{k+1}) \cos\beta t + j(C_k - C_{k+1}) \sin\beta t] = \\ &= e^{\alpha t} (A \cos\beta t + jB \sin\beta t); \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$N = e^{\alpha t} D \sin(\beta t + \varphi),$$

де $A = C_k + C_{k+1}$; $B = C_k - C_{k+1}$; $D = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \arctg \frac{A}{B}$.

Співмножник $D \sin(\beta t + \varphi)$ є синусоїдою з амплітудою D , зсунутою відносно початку координат на кут φ . У цьому разі характер зміни складової N перехідного процесу $x_{\text{неп}}$ визначається знаком величини α у співмножнику $e^{\alpha t}$ складової N .

Три графіки, які відповідають різним значенням α , зображено на рис. 4.2, в. Так, при $\alpha < 0$ і $t \rightarrow \infty$ $e^{-\alpha t} = \frac{1}{e^{\alpha t}} \rightarrow 0$, $N \rightarrow 0$ і система буде стійкою.

При $\alpha > 0$ і $t \rightarrow \infty$ $N \rightarrow \infty$, $x_{\text{неп}} \rightarrow \infty$ і система буде нестійкою.

При $\alpha = 0$ $N = D \sin(\beta t + \varphi)$ є складовою, яка зумовить коливання в системі зі сталою амплітудою D .

4. Якщо всі корені характеристичного рівняння замкнутої системи дійсні та від'ємні, а один із них $p_k = 0$, то $N_k = C_k$ буде сталою величиною (рис. 4.2, б).

Для зображення поведінки САК залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння замкнутої системи часто використовують комплексну площину коренів (рис. 4.3).

При цьому корені p_1 (дійсний, додатний), p_2, p_3 (комплексні з додатною дійсною частиною), які знаходяться у правій частині комплексної площини коренів, розділеній уявною віссю, відповідають нестійкій САК. Ці корені часто називають «правими коренями».

Корені, які знаходяться зліва від уявної вертикальної осі (дійсні, від'ємні p_4, p_5 , комплексні з від'ємною дійсною частиною p_6, p_7 — «ліві корені»), відповідають стійкій САК.

Отже, перехід коренів з лівої напівплощини в праву у разі зміни деяких параметрів системи, що зумовлює зміну знака коренів, стійку

систему може зробити нестійкою. Згідно з цим вертикальну (уявну) вісь у комплексній площині конів називають *межею стійкості*.

Відстань до уявної осі найменшого «лівого» кореня (за відсутності «правих» коренів або коренів, які знаходяться на уявній осі) характеризує *запас стійкості* системи.

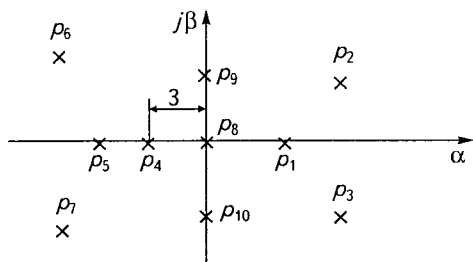


Рис. 4.3

Наявність нульового кореня p_8 або пари чисто уявних коренів p_9, p_{10} зумовлює особливий випадок поведінки системи — перебування її на межі стійкості.

При дослідженні рівняння першого наближення виникає принципове запитання: якою мірою результати, які можна дістати при цьому, відповідатимуть реальним нелінеаризованим системам?

Висновки дослідження цього принципового питання, відомі як теорема Ляпунова, наведено нижче без доведень.

Теорема 1

Якщо всі корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи є від'ємними або комплексними з від'ємною дійсною частиною, то збурений рух вихідної (нелінеаризованої) системи буде стійким незалежно від значення відкинутих при лінеаризації членів ряду Тейлора.

Теорема 2

Якщо серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи є додатні корені або комплексні корені з додатною дійсною частиною, то збурений рух вихідної системи буде нестійким незалежно від значення відкинутих при лінеаризації членів ряду Тейлора.

Теорема 3

Якщо серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи є нульові або чисто уявні, то для оцінки стійкості вихідної системи необхідно враховувати нелінійні складові ряду Тейлора, відкинуті при лінеаризації.

Наведені теореми є теоретичною основою можливої оцінки стійкості реальних (вихідних) систем за допомогою лінеаризованих рівнянь.

Свого часу існували відомі складнощі щодо знаходження коренів алгебраїчних рівнянь високого порядку. Тому було розроблено методи, що дають змогу досліджувати стійкість САК без знаходження коренів характеристичного рівняння. Ці методи дістали назву *критеріїв стійкості*.

Зараз у зв'язку із поширенням комп'ютерів і застосуванням численних прикладних програм труднощів у визначенні коренів практично не існує, проте критерії стійкості не втратили свого значення. Вони дають змогу не тільки визначити факт стійкості або нестійкості. Їх широко застосовують для визначення запасу стійкості, вирішення задач щодо підвищення якості систем та їх корекції, визначення амплітуди і частоти автоколиваний нелінійних систем тощо.

Існують два основні види критеріїв стійкості: алгебричні та частотні.

4.4

Алгебричні критерії стійкості

До алгебричних критеріїв стійкості належать критерії Рауса, Гурвіца, Вишнеградського, Ляпунова—Шіпара, до частотних — критерій Михайлова та його наслідок (друге формулювання критерію), критерій Найквіста, метод D-розбиття, логарифмічні критерії.

Алгебричні критерії дають змогу оцінювати стійкість за коефіцієнтами характеристичного рівняння замкнутої системи.

Як вказувалося раніше, характеристичне рівняння одноконтурної замкнутої системи

$$P(p) + Q(p) = 0.$$

Після перемноження співмножників, які входять до складу операторів $P(p) = P_1(p)P_2(p) \dots P_n(p)$; $Q(p) = Q_1(p)Q_2(p) \dots Q_n(p)$, та зведення подібних членів характеристичне рівняння замкнутої системи матиме вигляд

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (4.13)$$

Аналіз перехідних характеристик типових ланок першого і другого порядків свідчить, що для рівняння першого і другого порядків необхідною і достатньою умовами є додатне значення коефіцієнтів,

що зумовлюється від'ємними знаками дійсних коренів або дійсних частин комплексних коренів.

Для систем вищого порядку ($n \geq 3$), крім додатного знака коефіцієнтів характеристичного рівняння замкнутої системи, необхідно, щоб виконувалися й інші умови згідно з відповідними критеріями.

Критерій Рауса—Гурвіца. Англійський математик Е. Раус (1877 р.) і австрійський вчений А. Гурвіц (1895 р.) незалежно один від одного запропонували критерії, на основі яких стало можливим визначити умови стійкості лінійних САР, виходячи зі значень коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Е. Раус запропонував критерій у вигляді алгоритму, на основі якого можна скласти таблицю для оцінки стійкості системи. Критерій А. Гурвіца було представлено визначниками, які формуються за відповідними правилами. Кінцеві результати (умови стійкості) в обох критеріях однакові. Тому в ТАК для них часто використовується одна загальна назва — критерій Рауса—Гурвіца. Проте, враховуючи більшу простоту формування визначників, які визначають умови стійкості, на практиці частіше користуються критерієм Гурвіца.

Згідно з цим критерієм умови стійкості формулюються таким чином:

усі корені характеристичного рівняння $a_0 p^n + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$ матимуть від'ємні дійсні частини (або будуть дійсними від'ємними), якщо при додатному знаку всіх коефіцієнтів a_0, \dots, a_n будуть додатними головний визначник Гурвіца $\Delta_n > 0$ і його діагональні мінори $\Delta_{n-1} > 0, \dots, \Delta_2 > 0$.

Наведемо правило знаходження визначника Гурвіца.

1. По головній діагоналі записують коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_n .
2. Місця зверху від діагоналі заповнюють коефіцієнтами з більшим індексом, а знизу — з меншим.
3. За відсутності відповідного коефіцієнта ставлять нуль.
4. Діагональні мінори визначають із головного визначника Гурвіца викреслюванням відповідних стовпців і рядків.

Розглянемо конкретний приклад формулювання умов стійкості для системи п'ятого порядку.

- **Приклад 4.1.** Знайти головний визначник Гурвіца і його діагональні мінори для замкнутої системи з характеристичним рівнянням

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0.$$

Розв'язання. Головний визначник Гурвіца має вигляд

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}, \quad (4.14)$$

а діагональні мінори —

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Умовами стійкості в даному випадку є: $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_5 > 0$ і $\Delta_5 > 0$; $\Delta_4 > 0$; $\Delta_3 > 0$; $\Delta_2 > 0$.

У системі при $n = 3$ характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

а головний визначник Гурвіца —

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи його за елементами останнього стовпця, дістаємо

$$\Delta_3 = a_3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2.$$

Звідси можна зробити висновок: оскільки $a_3 > 0$, то Δ_3 може бути більше за нуль лише тоді, коли $\Delta_2 > 0$.

Отже, при $n = 3$ необхідною і достатньою умовою стійкості системи є $\Delta_2 > 0$ (звичайно, при $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_3 > 0$).

При $n = 4$ характеристичне рівняння замкнутої системи

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$$

а визначники Гурвіца —

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \Delta_3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 -$$

$$- a_0 a_3^2 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3.$$

З цього виразу випливає, що $\Delta_3 > 0$ можливе лише за умови $\Delta_2 > 0$. Крім того, якщо $\Delta_3 > 0$ і $a_4 > 0$, то Δ_4 обов'язково буде більше нуля.

Отже, для системи четвертого порядку необхідною і достатньою умовою стійкості системи є $\Delta_3 > 0$.

Інакше кажучи, для системи з $n = 4$ достатньо визначити лише знак визначника Δ_3 . Якщо $\Delta_3 > 0$, то в цьому разі обов'язково виконуватимуться необхідні за критерієм Гурвіца умови $\Delta_2 > 0$ і $\Delta_4 > 0$.

Критерій Гурвіца здебільшого використовується для систем з $n \leq 4$. При $n > 4$ обчислення стають дуже громіздкими.

Критерій стійкості Лъенара—Шіпара. Цей критерій розроблено в 1914 р. і розраховано для систем з відносно великим ступенем характеристичного рівняння ($n \geq 5$). Він по суті є варіацією критерію Гурвіца. Доведено, що за умови $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0$ при додатному значенні всіх визначників Гурвіца з індексами 3, 5, ... будуть додатними також усі визначники з індексами 2, 4, 6, ... Отже, при $\Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots$ визначники $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots$ обов'язково будуть додатними. Тому при $n = 5$ необхідне виконання умов $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0$, а при $n = 6$ — умов $\Delta_5 > 0, \Delta_3 > 0$.

Умовою знаходження системи на межі стійкості є рівність нуля відповідного визначника.

Загальна методика дослідження впливу параметрів системи на її стійкість за допомогою критеріїв Гурвіца та Лъенара—Шіпара. Дослідження впливу деякого параметра T_x на стійкість системи можна проводити в такій послідовності.

1. Згідно з викладеним, відповідно до ступеня характеристичного рівняння прийняти умови:

при $n = 3$ $\Delta_2 > 0$; при $n = 4$ $\Delta_3 > 0$; при $n = 5$ $\Delta_4 > 0, \Delta_2 > 0$; при $n = 6$ $\Delta_5 > 0, \Delta_3 > 0$.

2. Встановити функціональну залежність відповідного визначника або визначників (згідно з п. 1) і параметра T_x :

$$\Delta_x = f(T_x).$$

Наприклад, при $n = 5$ такими залежностями мають бути: $\Delta_4 = f(T_x)$ і $\Delta_2 = f(T_x)$.

3. З умов $\Delta_x = f(T_x) = 0$ визначити критичні значення T_x (значення T_x , за яких система знаходиться на межі стійкості), а також зони, в яких T_x відповідає стійкому або нестійкому стану системи.

4. У зоні «стійких значень» T_x встановити необхідний запас стійкості за параметром T_x і виділити зону рекомендованих значень цього параметра.

Знайдені значення параметра T_x за умовами стійкості надалі треба узгоджувати з вимогами якості перехідного процесу. Якщо параметр T_x входить до складу коефіцієнта a_n характеристичного рівняння і визначає статичну точність системи, то вимоги стійкості й якості мають узгоджуватися з вимогами статичної точності.

Для ілюстрації викладеної методики розглянемо рис. 4.4. Деяку залежність $\Delta_3 = f(T_x)$, що відповідає системі четвертого порядку, умовою стійкості якої є $\Delta_3 > 0$, зображено на рис. 4.4, а. Критичні значення параметрів T_{x1} і T_{x2} відповідають $\Delta_3 = 0$, і рекомендоване значення параметра T_x має перебувати в межах $T_{x1} - T_{x2}$.

Випадок, що відповідає системі п'ятого порядку ($n = 5$), наведено на рис. 4.4, б. У цьому разі умовою стійкості є $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Тому аналіз виконується із врахуванням взаємного розміщення кривих $\Delta_2 = f(T_x)$ і $\Delta_4 = f(T_x)$. У цьому випадку параметр T_x має знаходитися в межах $T_{x2} - T_{x3}$, де T_{x2} і T_{x3} — критичні значення параметра T_x .

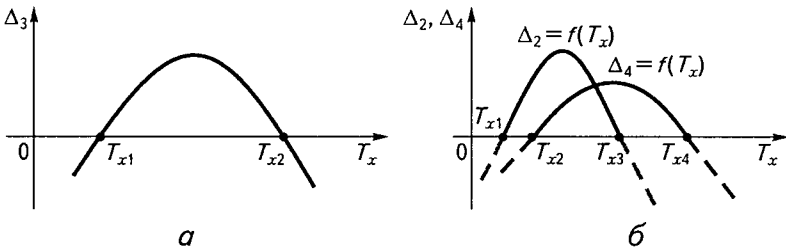


Рис. 4.4

Критерій Вишнеградського. Цей критерій розроблено в 1877 р. для систем автоматичного керування парових машин, які мали третій порядок рівнянь динаміки, чим обмежується область його використання. І. О. Вишнеградський звів характеристичне рівняння

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

яке має чотири коефіцієнти, до рівняння з двома коефіцієнтами X , Y , які дістали назву параметрів Вишнеградського. Для цього вихідне характеристичне рівняння спочатку було зведено до вигляду

$$p^3 + C_1 p^2 + C_2 p + C_3 = 0, \quad (4.15)$$

$$\text{де } C_1 = \frac{a_1}{a_0}; C_2 = \frac{a_2}{a_0}; C_3 = \frac{a_3}{a_0},$$

і для нього знайдено умови стійкості

$$C_1 C_2 - C_3 > 0. \quad (4.16)$$

Параметри X і Y було запропоновано у вигляді

$$X = \frac{C_1}{\sqrt[3]{C_3}}; Y = \frac{C_2}{\sqrt[3]{C_3^2}}, \quad (4.17)$$

звідки знайдено

$$C_1 = X\sqrt[3]{C_3}; C_2 = Y\sqrt[3]{C_3^2}.$$

Після підстановки значень C_1 і C_2 у вираз (4.16) дістанемо

$$X\sqrt[3]{C_3} Y\sqrt[3]{C_3^2} - C_3 > 0,$$

або

$$XY - 1 > 0,$$

або

$$XY > 1. \quad (4.18)$$

Останній вираз і є умовою стійкості (критерієм) Вишнеградського. Рівняння межі стійкості в площині параметрів X , Y має вигляд гіперболи (рис. 4.5):

$$XY = 1, \quad (4.19)$$

яку називають *гіперболою Вишнеградського*.

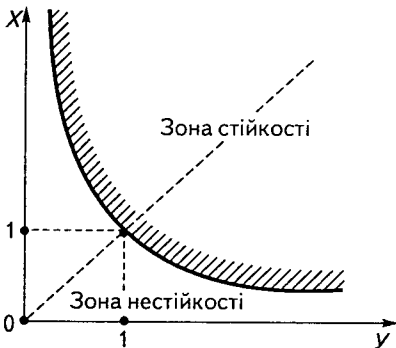


Рис. 4.5.

Праворуч від кривої міститься зона стійкості $XU > 1$, а ліворуч — зона нестійких режимів $XU < 1$.

На основі наведених формул можна дістати залежності між іншими параметрами, що входять до складу коефіцієнтів a_0, \dots, a_3 , і, отже, в неявному вигляді — в рівняння (4.18), (4.19). При цьому залежності між іншими параметрами, як правило, відрізняються від гіперболічного закону.

Приклад дослідження стійкості конкретних систем за допомогою алгебричних критеріїв стійкості. Дослідження проведемо для конкретної системи стабілізації напруги генератора постійного струму, рівняння якої було знайдено в гл. 3, а принципову і структурну схеми зображено на рис. 3.28 і 3.29.

Характеристичне рівняння системи стабілізації

$$T_r T_d p^3 + (T_r + T_d) p^2 + p + k_p = 0, \quad (4.20)$$

де коефіцієнт передачі (підсилення) розімкнутої системи

$$k_p = k_r k_{em} k_{ke} k_R,$$

k_r , k_{em} , $k_{ke} = 1/c_d$, k_R — коефіцієнти відповідно передачі генератора, електромагніту, демфера, резистора; c_d — стала демфера, яка залежить від характеристик масла і конфігурації поршня самого демфера (наприклад, від числа отворів у ньому та їхніх розмірів); $T_r = L_3/R_3$ — стала часу генератора постійного струму; L_3 , R_3 — індуктивність і активний опір обмотки збудження генератора; $T_d = m/c_d$ — стала часу масляного демфера; m — приведена маса рухомих елементів системи якоря електромагніту, поршня демфера, пружини, повзунка реостата.

Розглянемо методику дослідження основних питань стійкості за допомогою різних критеріїв стійкості для конкретних значень параметрів.

- **Приклад 4.2.** Нехай $T_r = 0,01$ с; $T_d = 0,03$ с; $k_p = 300$. Треба дослідити стійкість системи.

Розв'язання. За рівнянням (4.20) сформуємо головний визначник Гурвіца в загальному вигляді:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} T_r + T_d & k_p & 0 \\ T_r T_d & 1 & 0 \\ 0 & T_r + T_d & k_p \end{vmatrix}.$$

Для системи третього порядку, крім додатного знака коефіцієнтів, як зазначалося раніше, умовою стійкості є $\Delta_2 > 0$. Тому в даному разі умову стійкості можна записати так:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_r + T_d & k_p \\ T_r T_d & 1 \end{vmatrix} = T_r + T_d - T_r T_d k_p > 0. \quad (4.21)$$

Підставивши числові значення параметрів, дістанемо

$$\Delta_2 = 0,01 + 0,03 - 0,01 \cdot 0,03 \cdot 300 = 0,04 - 0,09 = -0,05 < 0,$$

що вказує на нестійкість системи.

Аналізуючи умову стійкості $\Delta_2 > 0$, бачимо, що в теоретичному плані стійкість даної системи можна досягти за рахунок:

- зменшення сталих часу T_r , T_d або однієї з них (тут треба врахувати, що добуток цих параметрів зменшуватиметься більшою мірою, ніж їхня сума);
- зменшення коефіцієнта передачі розімкнутої системи шляхом зменшення будь-якого коефіцієнта (або коефіцієнтів) передачі, що входять до складу k_p як співмножники;
- одночасної зміни в потрібному напрямку сталих часу і коефіцієнтів передачі.

Вибираючи варіант настроювання системи, насамперед слід врахувати ефективність і технічну зручність вибору і зміни регулюючого параметра системи. З принципової схеми САК і знайдених раніше рівнянь ланок випливає, що з технічної і теоретичної точок зору в даному разі найзручнішим буде зменшення коефіцієнта підсилення (передачі) розімкнутої системи і сталої часу демпфера за рахунок збільшення величини c_d . Так, зменшуючи кількість діючих («активних») отворів у площині поршня демпфера, можна збільшити величину c_d і зменшити сталу демпфера $T_d = m/c_d$. У разі збільшення c_d в потрібному напрямку змінюватиметься (зменшуватиметься) також і коефіцієнт підсилення відповідної ланки $k_d = 1/c_d$, а також величина коефіцієнта підсилення розімкнутої системи k_p .

Нехай параметр c_d збільшимо втричі. Знайдемо нові значення відповідних параметрів системи

$$T'_d = \frac{m}{3c_d} = T_d/3 = 0,03/3 = 0,01с;$$

$$k'_p = k_p/3 = 300/3 = 100; \quad T_r = 0,01с.$$

При цьому

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= T_r + T_d' - T_r T_d' k_p' = 0,01 + 0,01 - 0,01 \cdot 0,01 \cdot 100 = \\ &= 0,02 - 0,01 = 0,01 > 0.\end{aligned}$$

Система в даному разі є стійкою.

□ **Приклад 4.3.** Знайти критичне значення параметра k_p , якщо покласти $T_r = T_d = 0,01 \text{ с} = \text{const}$.

Розв'язання. Критичне значення параметра можна дістати за умови, що система перебуває на межі стійкості $\Delta_2 = 0$.

При цьому

$$(k_p)_{\text{кр}} = \frac{T_r + T_d}{T_r T_d} = \frac{0,01 + 0,01}{0,01 \cdot 0,01} = 200.$$

При $k_p > 200$ система стає нестійкою.

Цей результат підтверджує сформульоване раніше положення про протилежність вимог динаміки та статички.

Дійсно, чим більше коефіцієнт підсилення наблизитиметься до свого критичного значення, тим менший запас стійкості ($z_{\text{ст}}$) за даним параметром матиме система:

$$z_{\text{ст}} = (k_p)_{\text{кр}} - k_p.$$

Так, при $T_r = T_d = \text{const}$ і $k_p' = 100$ запас стійкості за параметром k_p становить

$$z_{\text{ст}} = 200 - 100 = 100.$$

Водночас статична помилка системи

$$\Delta = \frac{\Delta_x}{1 + k_p}$$

збільшиться майже втричі.

Приклад аналізу стійкості за допомогою критерію Вишнеградського. Визначимо, виходячи із умов знаходження системи на межі стійкості, критичне значення параметра k_p для САК напруги генератора, розглянутої раніше.

Для знаходження параметрів Вишнеградського визначимо коефіцієнти C_1, C_2, C_3 :

$$C_1 = \frac{T_r + T_d}{T_r T_d}; \quad C_2 = \frac{1}{T_r T_d}; \quad C_3 = \frac{k_p}{T_r T_d}.$$

Умова знаходження САК на межі стійкості така: $XY = 1$. Враховуючи, що $x = C_1 / \sqrt[3]{C_3}$, а $y = C_2 / \sqrt[3]{C_3^2}$, ця умова матиме вигляд

$$XY = \left(\frac{T_r + T_d}{T_r T_d} / \sqrt[3]{\frac{k_p}{T_r T_d}} \right) \left(\frac{1}{T_r T_d} / \sqrt[3]{\left(\frac{k_p}{T_r T_d} \right)^2} \right) = \frac{T_r + T_d}{T_r T_d k_p} = 1,$$

звідки

$$(k_p)_{\text{кр}} = \frac{T_r + T_d}{T_r T_d}$$

відповідає критичному значенню цього параметра, знайденому раніше за допомогою критерію Гурвіца.

4.5

Частотні критерії стійкості.

Критерій Михайлова

Критерій Михайлова, запропонований в 1938 р., є особливо високим порядком ($n \geq 5$).

Оцінка стійкості системи за даним критерієм виконується на основі характеристики (годографа) Михайлова, яка будується таким чином.

1. У характеристичному рівнянні замкнутої системи

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = L(p)$$

виконують підстановку $p = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$, після чого вираз годографа Михайлова дістають у вигляді

$$L(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n. \quad (4.22)$$

2. У виразі $L(j\omega)$ виділяють дві частини — дійсну $A(\omega)$ і уявну $B(\omega)$. У цьому разі годограф Михайлова набуває вигляду

$$L(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega), \quad (4.23)$$

де

$$A(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - a_{n-6}\omega^6 + \dots;$$

$$B(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$$

3. Задаючи значення ω в межах від 0 до $+\infty$, на комплексній площині в координатах $A(\omega)$, $B(\omega)$ будують годограф Михайлова, радіус-вектор $L(j\omega)$ якого при зміні ω від 0 до $+\infty$ обертається проти годинникової стрілки (рис. 4.6).

Оцінка стійкості системи здійснюється за виглядом і розміщенням кривої $L(j\omega)$ відносно квадрантів площини $A(\omega) - B(\omega)$.

Критерій стійкості Михайлова формулюється таким чином:

для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб радіус-вектор годографа Михайлова при зміні частоти від 0 до $+\infty$, почавши обертання з точки, яка лежить на дійсній осі праворуч від нуля, обертаючись проти годинникової стрілки і ніде не перетворюючись на нуль, пройшов послідовно n квадрантів комплексної площини, повернувшись на кут $\frac{\pi}{2} n$.

Приклади годографів Михайлова стійких і нестійких систем показано відповідно на рис. 4.7, а і б.

Характеристики на рис. 4.7, а відповідають системам з різними степенями n характеристичного рівняння. На рис. 4.7, б криві 1, 3 і 4 є характеристиками нестійких систем. Крива 2 — 2' відповідає нестійкій системі, оскільки не витримується принцип послідовності обходу квадрантів комплексної площини, а крива 2 — 2''' — стійкій системі при $n = 4$.

Умовою знаходження системи на межі стійкості є проходження годографа Михайлова через початок координат комплексної площини.

Запас стійкості системи може характеризувати відстань від точки перетину годографом Михайлова дійсної осі до початку координат у разі стійкої системи (відстань $0' - 0$ на рис. 4.7, б).

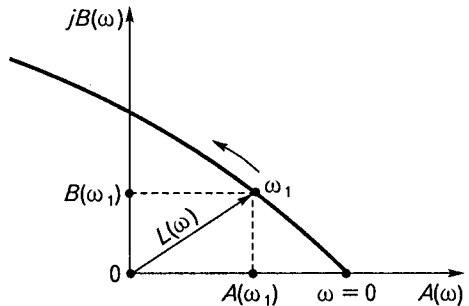


Рис. 4.6

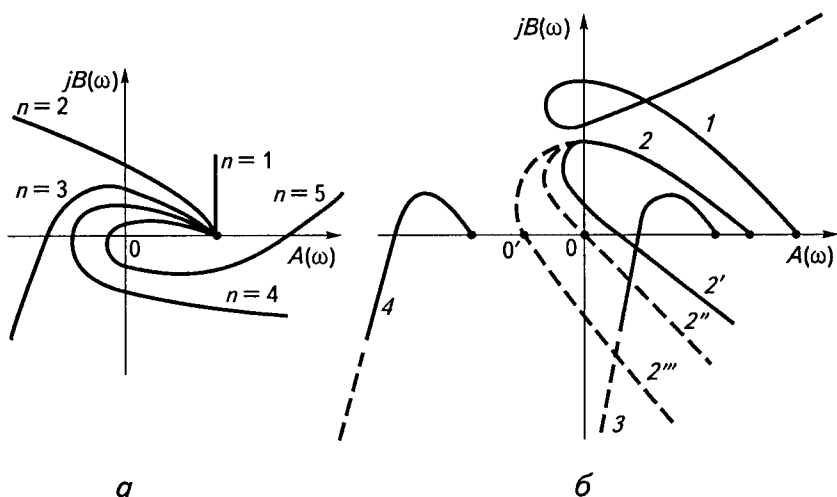


Рис. 4.7

Друге формулювання (наслідок) критерію Михайлова.

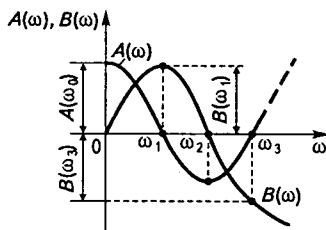
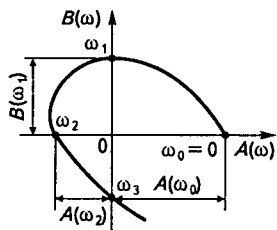
Перевага цього методу дослідження стійкості порівняно з основним формулюванням полягає в тому, що дає змогу визначити стійкість системи за взаємним розміщенням дійсної $A(\omega)$ і уявної $B(\omega)$ складових без побудови самого годографа Михайлова. Крім того, друге формулювання критерію Михайлова є зручнішим для знаходження запасу стійкості за деяким параметром.

Розглянемо особливості взаємного розміщення дійсної й уявної складових $A(\omega)$ і $B(\omega)$ для стійкої (рис. 4.8, а) і двох нестійких (рис. 4.8, б, в) систем.

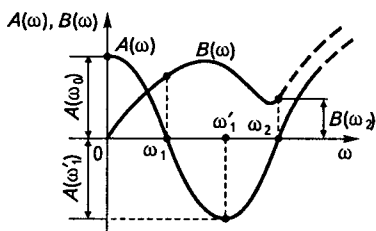
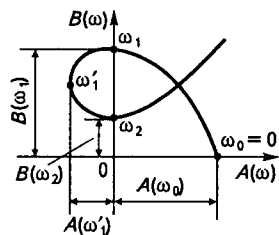
Характерною рисою стійких систем і їхня відмінність від нестійких є переміжний характер розміщення точок перетину осі ω дійсною $A(\omega)$ і уявною $B(\omega)$ складовими годографа Михайлова. Переміжний характер перетину характеристиками $A(\omega)$ і $B(\omega)$ осі ω на рис 4.8, б, в відсутній.

Як зазначалося раніше, при знаходженні системи на межі стійкості годограф Михайлова проходить через початок координат. У цьому разі розміщення $A(\omega)$ і $B(\omega)$ відповідає кривим I' і I'' на рис 4.8, г, які перетинаються в одній точці ω_2 на осі ω .

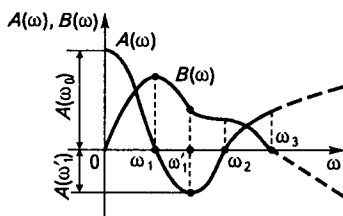
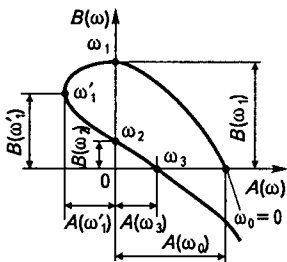
Якщо система стійка, то вигляд годографа Михайлова відповідає кривій 2 і кривим I' та I'' на рис 4.8, г. У цьому разі запас стійкості характеризує відстані між точками ω'_2 і ω_2 на осі ω .



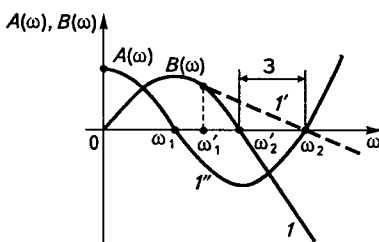
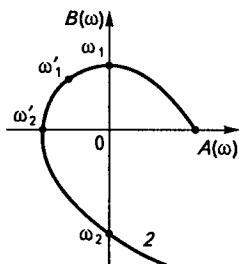
a



б



в



г

Рис. 4.8

Критичне значення певного параметра системи можна знайти з умови перетину характеристик $A(\omega)$ і $B(\omega)$ в одній точці на осі ω .

Частоту, за якої характеристики $A(\omega)$ і $B(\omega)$ перетинаються на осі ω , називають *критичною частотою*.

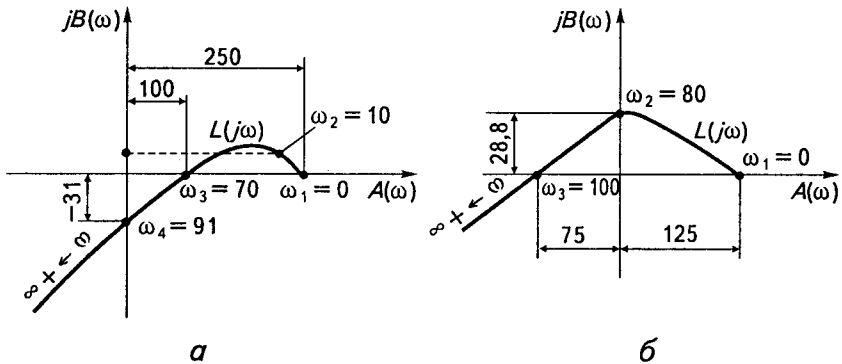


Рис. 4.9

Згідно з викладеним наслідок критерію Михайлова можна сформулювати таким чином:

для стійкості замкнутої системи корені поліномів дійсної $A(\omega)$ і уявної $B(\omega)$ частотних складових годографа Михайлова мають бути дійсними (мати точки перетину з віссю ω) і переміжними.

Приклад аналізу стійкості за допомогою критерію Михайлова. Визначимо стійкість розглянутої раніше САР стабілізації напруги генератора постійного струму.

Нехай значення параметрів системи такі: $T_r = 0,01$ с; $T_d = 0,02$ с; $k_p = 250$. Використаємо основне формулювання критерію Михайлова.

Після підстановки $p = j\omega$ в характеристичне рівняння

$$T_r T_d p^3 + (T_r + T_d) p^2 + p + k_p = 0, \quad (4.24)$$

дістанемо вираз годографа Михайлова для даної системи:

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= T_r T_d (j\omega)^3 + (T_r + T_d) (j\omega)^2 + j\omega + k_p = \\ &= A(\omega) + jB(\omega). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Дійсна і уявна складові після підстановки числових значень параметрів матимуть вигляд

$$A(\omega) = 250 - (0,01 + 0,02)\omega^2 = 250 - 0,03\omega^2;$$

$$B(\omega) = \omega - 0,01 \cdot 0,02 \cdot \omega^3 = \omega(1 - 0,0002\omega^2).$$

Для скорочення розрахунків під час побудови характеристики $L(j\omega)$ потрібно знайти точки перетину годографом Михайлова осей координат.

Координату точки перетину дійсної осі характеристикою $L(j\omega)$ знаходимо з умови $B(\omega) = 0$.

Обчислимо частоти відповідних точок:

$$B(\omega) = \omega(1 - 0,0002\omega^2) = 0;$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2, \omega_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{0,0002}} = \pm \sqrt{5000} \approx \pm 70.$$

Розглядатимемо лише частоти $\omega \geq 0$. При $\omega_1 = 0$ $A(0) = 250$, при $\omega_2 = +70$ $A(70) = 250 - 0,03 \cdot 70^2 \approx 100$.

Знайдемо координати точок перетину годографа Михайлова з вертикальною віссю з умови $A(\omega) = 0$. При цьому

$$\omega_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{250}{0,03}} = \pm 91.$$

Для розрахунків беремо $\omega_3 = +91$.

Ордината точки перетину $L(\omega)$ з вертикальною віссю

$$B(\omega_3) = 91(1 - 0,0002 \cdot 91^2) = 91(1 - 1,66) = -31.$$

Результати розрахунків наведено в табл. 4.1.

Годограф Михайлова, побудований за цими даними, відповідає нестійкій системі (рис 4.9, а).

Аналогічні дослідження виконаємо для значень параметрів:

$$T_r = T_n = 0,01 \text{ с}; \quad k_p = 125.$$

Зробимо розрахунки:

$$A(\omega) = 125 - (0,01 + 0,01)\omega^2 = 125 - 0,02\omega^2;$$

$$B(\omega) = \omega(1 - 0,01 \cdot 0,01\omega^2) = \omega(1 - 0,0001 \cdot \omega^2).$$

Результати обчислень наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.1

Частота	Складові годографа Михайлова	
ω	$A(\omega)$	$B(\omega)$
0	250	0
10	247	9,8
70	100	0
91	0	31
∞	$-\infty$	$-\infty$

Характеристика, що відповідає стійкій системі, показана на рис. 4.9, б.

Виконаємо дослідження стійкості, використовуючи наслідок критерія Михайлова.

Нехай значення параметрів такі: $T_r = 0,01$ с; $T_d = 0,02$ с; $k_p = 250$.

Побудовані за даними табл. 4.1 характеристики $A(\omega)$, $B(\omega)$ показано на рис. 4.11, а. Корені виразів $A(\omega)$, $B(\omega)$ є дійсними, але принцип перемежування коренів не виконується, що відповідає нестійкій системі.

Характеристики, знайдені при значеннях параметрів $T_r = 0,01$ с; $T_d = 0,01$ с; $k_p = 125$ і побудовані згідно з даними табл. 4.2, які відповідають стійкій системі, показано на рис. 4.10, б.

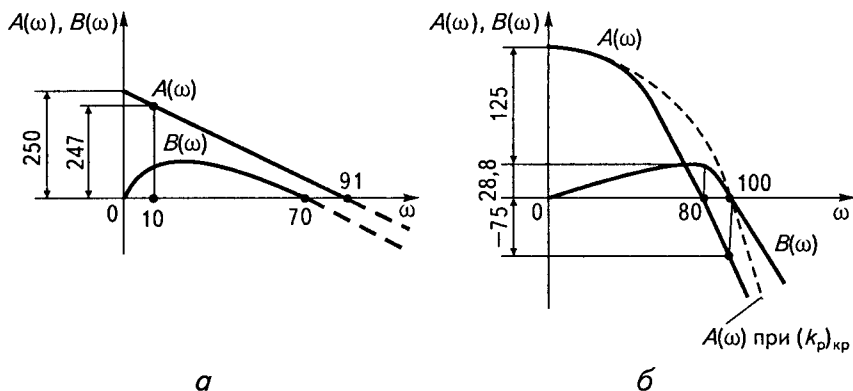


Рис. 4.10

4.5. Частотні критерії стійкості.
Критерій Михайлова

Знайдемо критичні значення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи $(k_p)_{кр}$ і запас стійкості при значеннях параметрів $T_r = T_d = 0,01$ с.

Враховавши вигляд частотних характеристик, запишемо складову годографа Михайлова

$$A(\omega) = k_p - (T_r + T_d)\omega^2.$$

Параметр k_p входить до виразу $A(\omega)$. Тому його критичне значення можна визначити з умови $A(\omega_{кр}) = 0$. З урахуванням числових значень сталих часу дістаємо

$$(k_p)_{кр} - 0,02 \cdot \omega_{кр}^2 = 0.$$

Критичне значення частоти знайдемо з умови $B(\omega_{кр}) = 0$, звідки $1 - T_r T_d \omega_{кр}^2 = 0$ або

$$\omega_{кр} = \pm \sqrt{\frac{1}{0,01 \cdot 0,01}} = 100.$$

Для розрахунків беремо $\omega_{кр} = +100$.

Таблиця 4.2

Частота	Складові годографа Михайлова	
ω	$A(\omega)$	$B(\omega)$
0	125	0
80	0	28,8
100	-75	0
∞	$-\infty$	$-\infty$

При даному значенні частоти обидві складові $A(\omega)$ і $B(\omega)$ перетинатимуться в одній точці на осі ω (рис. 4.10, б, штрихова лінія), тому

$$(k_p)_{кр} = 0,02 \cdot 100^2 = 200.$$

При $k_p = 125$, яке було прийняте у зроблених раніше розрахунках і відповідало стійкому стану системи, знайдемо запас стійкості системи:

$$z_{ст} = (k_p)_{кр} - k_p = 200 - 125 = 75.$$

4.6

Дослідження стійкості за допомогою побудови зон стійкості (метод D -розбиття)

При розробці САР важливо встановити вплив окремих параметрів (або параметра) на стійкість системи за фіксованих значень інших параметрів. При цьому необхідно встановити зони параметрів, у яких їхня зміна не призводить до нестійкої роботи системи.

Дане завдання можна вирішити за допомогою розглянутих вище критеріїв стійкості, але зі зростанням порядку системи рівнянь розрахунки різко ускладнюються.

Ю.Д. Соколов і Ю.І. Неймарк запропонували метод, який дає змогу знайти зазначену вище зону в площині одного або двох параметрів. Основу методу становить дослідження полінома $D(p)$, який відображує характеристичне рівняння замкнутої системи, зведене до вигляду, коли коефіцієнт a_0 у характеристичному рівнянні дорівнює одиниці:

$$D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (4.26)$$

Можна уявити деяке n -мірне середовище, по координатних осях якого розміщуються коефіцієнти характеристичного рівняння (або параметрів ланок системи). У цьому разі середовище називають *середовищем коефіцієнтів* (параметрів). Кожній точці такого середовища відповідає певне значення всіх n коефіцієнтів (параметрів), які визначають n коренів характеристичного рівняння.

При деякому значенні коефіцієнтів система може бути на межі стійкості (якщо корені нульові або чисто уявні). Тому відповідна точка в просторі параметрів у цьому разі має задовольняти рівняння

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n = 0.$$

Якщо змінювати параметри системи, то корені змінюватимуться і переміщуватимуться на комплексній площині коренів і за деяких значень параметрів (коефіцієнтів характеристичного рівняння) можуть переміститися з лівої частини площини коренів у праву, що призведе до нестійкої роботи системи, або, навпаки, переміститися з правої напівплощини коренів у ліву, в результаті чого нестійка система стане стійкою.

Отже, переміщення коренів зумовлено рухом відповідних точок в n -вимірному просторі параметрів (коефіцієнтів).

Для практичних цілей важливо встановити зони значень параметрів, які відповідають положенню коренів на межі стійкості, і зони значень параметрів, що відповідають стійким системам. Поділ простору коефіцієнтів (параметрів) на відповідні зони і є основною метою методу D -розбиття.

Так, нехай параметри, які нас цікавлять, входять до складу деяких коефіцієнтів рівняння. Якщо змінювати один з параметрів T_x , то змінюватимуться всі коефіцієнти, які є функціями цього параметра. Тоді кожному новому значенню T_x відповідатиме n нових коренів полінома $D(p) = 0$, положення яких у комплексній площині коренів залежить від числових значень параметра T_x і, як результат, — значень відповідних коефіцієнтів.

D -розбиття за одним параметром. Розглянемо методику побудови зони стійкості в площині комплексного параметра T_x .

1. Вихідне характеристичне рівняння $D(p) = 0$ представимо у вигляді $X(p) + T_x Y(p) = 0$.

2. Знаходимо величину досліджуваного параметра $T_x = -\frac{X(p)}{Y(p)}$.

3. Знаходимо комплексний вираз параметра T_x , використовуючи підстановку $p = j\omega$, і виділяємо його дійсну $A(\omega)$ і уявну $B(\omega)$ складові:

$$T_x = A(\omega) + jB(\omega);$$

T_x становить деяку криву в комплексній площині, яка відповідає уявним кореням характеристичного рівняння і є сукупністю параметрів T_x , за яких система перебуває на межі стійкості. Така характеристика називається *межею стійкості в площині параметра D* , або *кривою D -розбиття*.

4. В комплексній площині параметра D за правилом штриховки Неймарка знаходимо зону стійкості.

Правило штриховки формулюють так: *якщо рухатись по межі D -розбиття від значень $\omega = -\infty$ до значень $\omega = +\infty$, то зона стійкості розташовуватиметься зліва від межі стійкості* Це аналогічно тому, що в разі руху в комплексній площині коренів характеристичного рівняння уздовж вертикальної (уявної) осі, яка є межею стійкості в площині коренів, від $-\infty$ до $+\infty$, зона стійкості знаходитиметься зліва від вертикальної осі.

5. Задаючи запас стійкості в зоні, обмеженій кривою D -розбиття, виділимо на дійсній (горизонтальній) осі (бо параметр T_x є дійсною, фізично реальною величиною) необхідний робочий діапазон значень параметра T_x , який може бути рекомендовано при проектуванні і настрійованні відповідної системи.

- **Приклад 4.4.** Дослідити стійкість САР генератора постійного струму з характеристичним рівнянням

$$T_r T_d p^3 + (T_r + T_d) p^2 + p + k = 0$$

за методом D -розбиття відносно коефіцієнта підсилення розімкнutoї системи при $T_d = T_r = 0,01$ с.

Розв'язання. Для розв'язання поставленої задачі побудуємо меж стійкості в комплексній площині параметра k .

Із характеристичного рівняння знаходимо

$$k = -[T_r T_d p^3 + (T_r + T_d) p^2 + p].$$

Виконуючи підстановку $p = j\omega$, дістаємо

$$k = -[-T_r T_d j\omega^3 - (T_r + T_d)\omega^2 + j\omega] = A(\omega) + jB(\omega),$$

де

$$A(\omega) = (T_r + T_d)\omega^2 = 0,02\omega^2;$$

$$B(\omega) = T_r T_d \omega^3 - \omega = 0,0001\omega^3 - \omega.$$

Задаючи значення ω від $+\infty$ до $-\infty$, побудуємо криву D -розбиття.

Практично для цього слід знайти характерні точки, які відповідають переходам кривої D -розбиття через дійсну й уявну осі комплексної площини.

З формули для $A(\omega)$ видно, що $A(\omega)$ може дорівнювати нулю лише при $\omega = 0$. Інших точок перетину кривої D -розбиття з вертикальною віссю немає. Із виразу $B(\omega)$ можна знайти значення ω , при якому $B(\omega) = 0$, що відповідає переходу кривої D -розбиття через горизонтальну вісь. Відповідні значення ω знайдемо із виразу $B(\omega) = \omega(0,0001 \cdot \omega^2 - 1) = 0$, звідки

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{0,0001}} = \pm 100;$$

$$A(\omega_{100}) = 0,02 \cdot 100^2 = 200.$$

Знайдемо також відповідні точки при $0 < \omega < 100$ і $|\omega| > \pm 100$. Результати розрахунків для $A(\omega)$ і $B(\omega)$ наведено в табл. 4.3.

4.6. Дослідження стійкості за допомогою побудови зон стійкості (метод D -розбиття)

Таблиця 4.3

Частота	Складові параметра k	
	$A(\omega)$	$B(\omega)$
0	0	0
100	200	0
-100	200	0
10	2	-9,9
-10	2	9,9
120	288	52,8
-120	288	-52,8
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Характеристику D -розбиття, побудовану за даними табл. 4.3, показано на рис. 4.11.

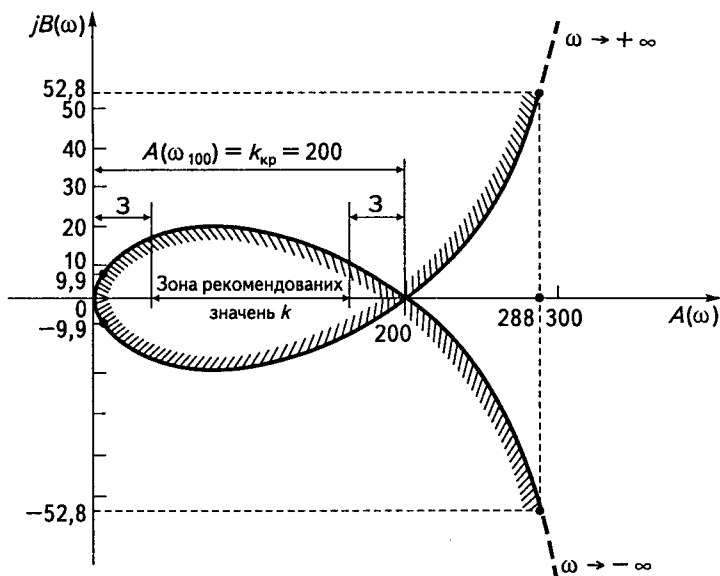


Рис. 4.11

Визначена за правилом штриховки зона стійкості знаходиться зліва від кривої D -розбиття. Виконані розрахунки дають змогу встановити критичні значення параметра: $k_{кр} = 200$. З урахуванням деякого запасу стійкості Z можна виділити зону рекомендованих значень коефіцієнта підсилення розімкнутої системи.

Значення k вибирають з точок, які лежать на дійсній осі $A(\omega)$, тому що усі інші точки відповідають комплексним величинам, а коефіцієнт k є реальною (дійсною) фізичною величиною.

Побудова межі стійкості в площині двох параметрів (D -розбиття за двома параметрами). У цьому випадку розв'язується задача аналізу впливу на стійкість системи деяких двох параметрів T_x і T_y . Вважатимемо, що ці параметри входять у характеристичне рівняння лінійно (відсутній добуток $T_x T_y$). Особливістю методу розбиття за двома параметрами є те, що простір двох параметрів — це дійсна площина $T_x - T_y$.

Вважатимемо, що характеристичне рівняння за необхідності дослідження впливу параметрів T_x і T_y у загальному випадку матиме вигляд

$$D(p, T_x, T_y) = 0. \quad (4.27)$$

Підставляючи $p = j\omega$ і виділяючи дійсну й уявну частини, дістанемо

$$D(j\omega, T_x, T_y) = A(\omega) + jB(\omega) = 0.$$

У цьому виразі $A(\omega)$ і $B(\omega)$ залежать не тільки від ω , а й від параметрів T_x і T_y . Для лінійних залежностей маємо

$$\begin{aligned} A(\omega) &= T_x P_1(\omega) + T_y Q_1(\omega) + R_1(\omega); \\ B(\omega) &= T_x P_2(\omega) + T_y Q_2(\omega) + R_2(\omega). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для деякого значення $\omega = \omega_k$ із рівняння (4.28) можна знайти значення T_{xk} і T_{yk} , за яких $A(\omega) = 0$ і $B(\omega) = 0$.

При цьому $j\omega_k$ буде коренем рівняння $D(p) = 0$.

У цьому разі деяка точка $N(T_{xk}, T_{yk})$ у площині $T_x - T_y$ лежить на межі, яка поділяє площину $T_x - T_y$ на зони стійкості та нестійкості за параметрами T_x, T_y . Як відомо, зоні стійкості відповідають «ліві» корені в площині коренів характеристичного рівняння $D(p) = 0$, а зоні нестійкості — «праві».

Розв'яжемо систему рівнянь (4.28) відносно T_x і T_y . Запишемо головний детермінант системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) Q_2(\omega) \end{vmatrix} = P_1(\omega) Q_2(\omega) - P_2(\omega) Q_1(\omega)$$

і часткові детермінанти Δ_x і Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -R_1(\omega) Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) Q_2(\omega) \end{vmatrix} = R_2(\omega) Q_1(\omega) - R_1(\omega) Q_2(\omega);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} P_1(\omega) - R_1(\omega) \\ P_2(\omega) - R_2(\omega) \end{vmatrix} = P_2(\omega) R_1(\omega) - P_1(\omega) R_2(\omega),$$

звідки $T_x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $T_y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. Величини $P_2(\omega)$, $Q_2(\omega)$, $R_2(\omega)$ входять до уявної складової $B(\omega)$ і є непарними функціями ω . Детермінанти Δ , Δ_x , Δ_y також непарні функції ω , тоді як величини T_x і T_y будуть парними функціями ω .

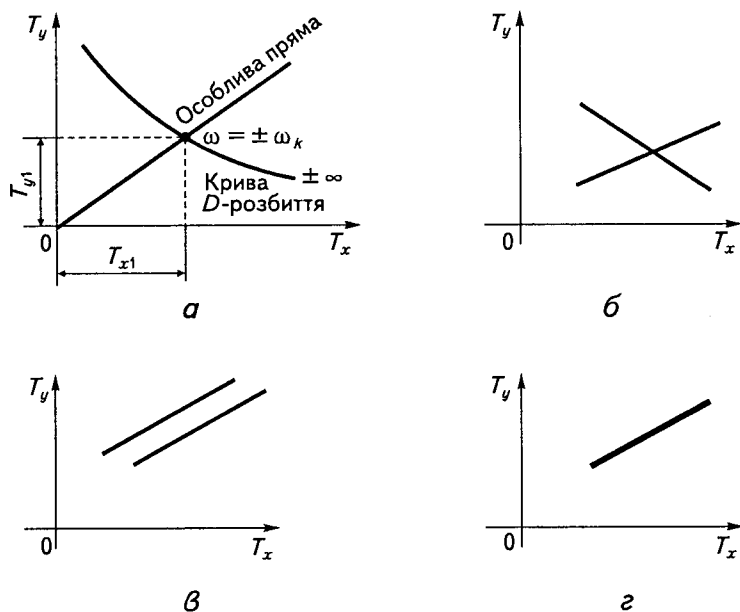
Задаючи значення ω в межах від $-\infty$ до $+\infty$, будуємо в площині $T_x - T_y$ деяку криву, яка є межею D -розбиття в площині параметрів $T_x - T_y$ (рис. 4.12, а). При побудові кривої D -розбиття і дослідженні стійкості за даним методом можливі три основні випадки.

1. Для частоти ω_k всі три детермінанти Δ , Δ_x , Δ_y не дорівнюють нулю. При цьому вирази T_x і T_y в площині параметрів $T_x - T_y$ є прямими, що перетинаються (рис. 4.12, б).

2. Якщо при $\omega = \omega_k$, $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, то вирази $T_x = f\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}\right)$ і $T_y = f\left(\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ не мають спільних розв'язків і відповідно спільних точок перетину в площині $T_x - T_y$. В цьому разі вони є паралельними прямими (рис. 4.12, в).

3. При $\omega = \omega_k$ всі три детермінанти Δ , Δ_x , Δ_y дорівнюють нулю, що відповідає невизначеності функцій T_x і T_y . При цьому одне із рівнянь системи (4.28) впливає з іншого, відрізняючись від нього на деякий сталий співмножник. Прямі в площині $T_x - T_y$ зливаються одна з одною (рис. 4.12, г) і при $\omega = \omega_k$ є деякою особливою прямою, рівняння якої

$$T_x P_1(\omega_k) + T_y Q_1(\omega_k) + R_1(\omega_k) = 0.$$

**Рис. 4.12**

Такі прямі дістають при $\omega = 0$ і $\omega = \infty$. При цьому хоча б один із параметрів T_x і T_y має входити до складу коефіцієнта a_0 при найбільшому степені похідної або до складу вільного члена рівняння a_n . Особливу пряму можна дістати при $\omega = 0$, привівнуючи нулю коефіцієнт a_0 , або при $\omega = \infty$, привівнуючи нулю коефіцієнт a_n .

Якщо коефіцієнти a_n і a_0 не залежать від T_x і T_y , то особливих прямих не буде. Особливих прямих може бути декілька, і всі їх треба знайти.

Отже, для знаходження особливих прямих потрібно:

- привівняти нулю коефіцієнти a_0 і a_n характеристичного рівняння, якщо вони залежать від параметрів T_x і T_y ;
- визначити значення ω , за яких одночасно дорівнюють нулю обидва детермінанти Δ і Δ_x , або Δ і Δ_y , і знайдені значення ω підставити в рівняння (4.28).

Якщо після даної підстановки дістанемо вираз, що дорівнює нулю, то цей випадок можна не розглядати, бо особлива пряма проходить у нескінченності.

Для виділення зон стійкості наведемо без доведення такі правила штриховки.

1. Якщо переміщуватись по кривій D -розбиття від точок $\omega = -\infty$ до точок $\omega = +\infty$ при $\Delta > 0$, то штриховку слід робити зліва від кривої, а при $\Delta < 0$ — справа. (Знак Δ змінюється при переході через особливу пряму в нескінченності, а також через нуль).

2. Крива D -розбиття при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ штрихується двічі: один раз при зміні ω від $-\infty$ до 0 , а другий — від 0 до $+\infty$. Оскільки в обох випадках крива штрихується зліва по ходу зміни ω , то вона має подвійну штриховку з одного боку — одну при прямому ході, а іншу — при оберненому, бо при переході ω через нуль детермінант Δ змінює свій знак.

3. Штриховка особливих прямих здійснюється за такими правилами:

якщо особлива пряма і крива D -розбиття зближуються асимптотично, то штриховка особливої прямої одинарна і спрямована до заштрихованого боку кривої D -розбиття (рис. 4.13, а);

якщо особлива пряма має спільну точку з кривою D -розбиття, але не перетинає її, то штриховка особливої прямої одинарна і поблизу спільної точки спрямована до заштрихованого боку кривої D -розбиття; в точках перетину з кривою D -розбиття штриховка особливої прямої не змінюється, бо не змінюється знак визначника Δ у цих точках (рис. 4.13, б);

якщо особлива пряма відповідає випадку $\Delta(\omega_k) = \Delta_x(\omega_k) = \Delta_y(\omega_k) = 0$ і в точці перетину її з кривою D -розбиття визначник Δ змінює знак, то штриховка особливої прямої подвійна і спрямована до заштрихованого боку кривої D -розбиття (рис. 4.13, в); якщо особлива пряма перетинає криву D -розбиття, але знак визначника Δ в точці перетину не змінюється, то особлива пряма не штрихується і на розподіл коренів не впливає (рис 4.13, г).

Кожна з особливих прямих штрихується незалежно від наявності точок її перетину з іншими особливими прямими.

За напрямом штриховки кривої D -розбиття і особливих прямих встановлюється область можливої стійкості системи. Для перевірки цього вибирають довільні значення $T_y = T_{y1}$ і $T_x = T_{x1}$ та підставляють їх у характеристичне рівняння замкнутої системи. Далі одним із відомих методів аналізують стійкість системи (визначають знаки коренів). Якщо один із коренів буде додатним, то САР є нестійкою і при-

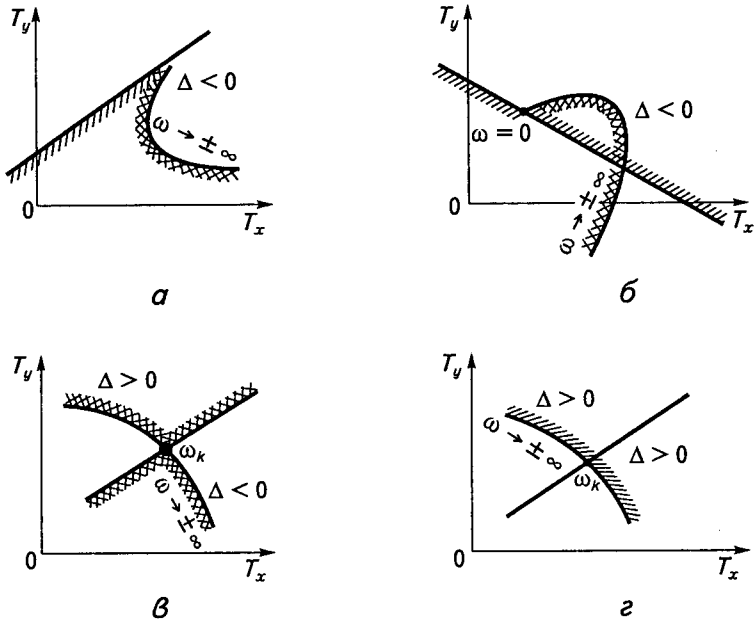


Рис. 4.13

вести її до стану стійкості зміною параметрів T_x і T_y неможливо. Якщо всі корені від'ємні, то дана зона дійсно є зоною стійкості.

Розглянемо числовий приклад аналізу стійкості системи за даним методом.

- **Приклад 4.5.** Нехай характеристичне рівняння замкнутої системи автоматичного керування має вигляд

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + \delta)T_3 p + 1 = 0. \quad (4.29)$$

Треба дослідити стійкість САР методом D -розбиття в площині параметрів T_2 і δ , якщо числові значення параметрів такі: $T_1 = 1,5$ с; $T_3 = 8,0$ с.

Розв'язання. Підставивши числові значення параметрів, після перетворень дістанемо

$$12T_2 p^3 + p^2(8T_2 + 12\delta) + 8\delta p + 1 = 0.$$

Після підстановки $p = j\omega$ маємо

4.6. Дослідження стійкості за допомогою побудови зон стійкості (метод D -розбиття)

$$D(j\omega, T_2, \delta) = A(\omega) + jB(\omega),$$

де

$$A(\omega) = -\omega^2(8T_2 + 12\delta) + 1 = P_1(\omega)T_2 + Q_1(\omega)\delta + R_1(\omega) = 0;$$

$$B(\omega) = -12T_2\omega^2 + 8\omega\delta = P_2(\omega)T_2 + Q_2(\omega)\delta + R_2(\omega) = 0;$$

$$P_1(\omega) = -8\omega^2; Q_1(\omega) = -12\omega^2; R_1(\omega) = 1;$$

$$P_2(\omega) = -12\omega^3; Q_2(\omega) = 8\omega; R_2(\omega) = 0.$$

Складемо потрібні детермінанти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8\omega^2 & -12\omega^2 \\ -12\omega^3 & 8\omega \end{vmatrix} = -64\omega^3 - 144\omega^5 = \\ = -16\omega^3(4 + 9\omega^2);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -12\omega^2 \\ 0 & 8\omega \end{vmatrix} = -8\omega;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8\omega^2 & -1 \\ -12\omega^3 & 0 \end{vmatrix} = -12\omega^3.$$

Знайдемо вирази T_2 і δ :

$$T_2 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-8\omega}{-16\omega^3(4 + 9\omega^2)}; \delta = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{4(4 + 9\omega^2)}.$$

Задаючи ω , знаходимо відповідні значення T_2 і δ (див. табл. 4.4).

Таблиця 4.4

ω	T_2	δ	ω	T_2	δ
0	∞	0,19	-0,6	0,19	0,1
$\pm \infty$	0	0	-0,4	0,57	0,14
± 1	0,04	0,06	-0,3	1,16	0,16

За даними табл. 4.4 на рис. 4.14 побудовано криву D -розбиття. Оскільки у вирази T_2 і δ частота входить у квадраті, то крива матиме один і той самий вигляд при значеннях $\omega > 0$ і $\omega < 0$ і згідно з правилами штриховки має бути заштрихована двічі.

Знайдемо особливі прямі з таких умов.

1. Вільний член характеристичного рівняння дорівнює нулю. Оскільки T_2 і δ не входять у вільний член характеристичного рівняння, то даний випадок можемо не розглядати.

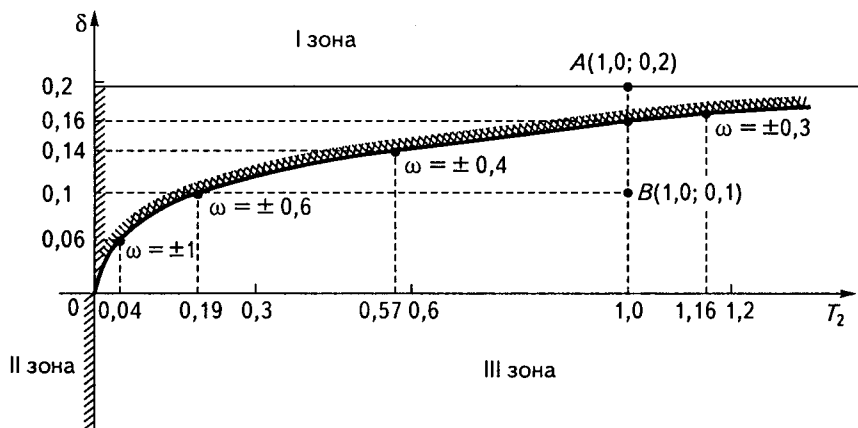


Рис. 4.14

2. Коефіцієнт при вищому члені характеристичного рівняння дорівнює нулю. Згідно з цим $12T_2 = 0$. На площині $T_2 - \delta$ це можливо лише для вертикальної осі, яка в даному разі і буде особливою прямою.

3. Попарно дорівнюють нулю Δ і Δ_x , Δ і Δ_y .

З виразів для визначників Δ , Δ_x і Δ_y випливає, що це можливо при $\omega = 0$. Підставляючи $\omega = 0$ в характеристичне рівняння, дістаємо $1 = 0$, тому даний випадок, як і перший, до уваги не береться.

Отже, у даному разі маємо особливу пряму, яка є вертикальною віссю.

Використовуючи правила штриховки особливих прямих і беручи до уваги зміну знака Δ при переході через $\omega = \infty$, зробимо штриховку вертикальної осі, яка в її додатній частині буде спрямована в бік I квадранта площини $T_2 - \delta$. При цьому спільно з кривою D -розбиття може бути виділена зона I. На рис. 4.14 показано також дві інші зони — II і III.

Оскільки в даному випадку характеристичне рівняння третього порядку, то для стійкості системи, тобто для встановлення областей стійкості в площині параметрів $T_2 - \delta$, треба мати три від'ємних корені в цій зоні.

Перевіримо кожен із зон на наявність від'ємних коренів (або комплексних коренів із від'ємною дійсною частиною).

Зоною, яка може претендувати на стійкість і в бік якої направлена штриховка кривої D -розбиття і особливої прямої, є зона I. Для пере-

вірки виконання умов стійкості візьмемо точку A в даній зоні, яка має координати $T_2 = 1$, $\delta = 0,2$.

Підставивши ці значення параметрів у характеристичне рівняння, дістанемо

$$12 \cdot 1p^3 + (8 \cdot 1 + 12 \cdot 0,2)p^2 + 8 \cdot 0,2p + 1 = 0$$

або

$$12p^3 + 10,4p^2 + 1,6p + 1 = 0.$$

Використаємо для аналізу критерій Гурвіца. Запишемо необхідну і достатню умову в загальному вигляді:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

або

$$\Delta_2 = 10,4 \cdot 1,6 - 12 \cdot 1 = 16,64 - 12 = 4,64 > 0$$

при

$$a_0 = 12; a_1 = 10,4; a_2 = 1,6; a_3 = 1.$$

Звідси неважко визначити, що при δ , які лежать вище прямої $\delta = 0,19$, система буде стійкою за будь-яких значень T_2 .

У зоні III значення δ мають відповідати точкам, які лежать нижче кривої D -розбиття. Розглянемо точку B з координатам $T_2 = 1$; $\delta = 0,1$. У цьому разі $\Delta_2 = 9,2 \cdot 0,8 - 12 \cdot 1 = -4,64 < 0$, що визначає нестійкість зони III.

У зоні II параметри T_2 і δ мають від'ємний знак, що суперечить фізичному значенню цих величин. Виходячи з чисто математичного розуміння питання, можна зробити висновок, що при $T_2 < 0$, $\delta_2 < 0$ коефіцієнти характеристичного рівняння матимуть різні знаки ($a_0 < 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_3 = 1 > 0$), що суперечить першій умові стійкості за Гурвіцом. Тому зона II до уваги не братиметься.

4.7

Критерій стійкості Найквіста

У 1932 р. американський вчений Найквіст розробив критерій стійкості для дослідження електронних підсилювачів зі зворотним зв'язком. Пізніше цей критерій було поширено й на інші системи зі зворотними зв'язками.

Особливістю критерію Найквіста є те, що він дає змогу:

- оцінювати динамічні властивості замкнених систем за частотними характеристиками відповідних розімкнутих систем;
- досліджувати динамічні властивості замкнутої системи за відсутності рівнянь динаміки системи або її окремих елементів.

У цьому разі достатньо мати експериментальні частотні характеристики системи або відповідних ланок, які можуть бути визначені на реальних елементах системи або на їхніх моделях.

За відсутності математичного описання ланок (або й системи в цілому) цей критерій є незамінним для дослідження динамічних процесів у системах регулювання. Водночас він дещо складніший за розглянуті раніше.

Розглянемо суть критерію Найквіста.

Нехай є деяка розімкнута система із n ланок. Її передаточна функція

$$W(p) = \frac{x_{n \text{ вих}}}{x_{1 \text{ вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_n(p)}{P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p)} = \frac{b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + \dots + b_k}{d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n}, \quad (4.30)$$

де $P_1(p), \dots, P_n(p), Q_1(p), \dots, Q_n(p)$ — відповідно оператори лівих і правих частин рівнянь динаміки ланок; $x_{n \text{ вих}}$ — вихідна величина останньої (n -ї) ланки; $x_{1 \text{ вх}}$ — вхідна величина першої ланки; $b_0, \dots, b_k, d_0, \dots, d_n$ — коефіцієнти рівнянь, які визначаються параметрами ланок.

Якщо замкнути розімкнуту систему за допомогою основного від'ємного зворотного зв'язку, то

$$x_{n \text{ вих}} = -x_{1 \text{ вх}}.$$

При цьому

$$W(p) = \frac{x_{n \text{ вих}}}{x_{1 \text{ вх}}} = -1, \quad (4.31)$$

звідки

$$W(p) + 1 = 0.$$

Даний вираз є характеристичним рівнянням замкнутої системи, записаним через передаточну функцію розімкнутої системи $W(p)$. Це можна довести такими перетвореннями:

$$W(p) + 1 = \frac{Q(p)}{P(p)} + 1 = \frac{Q(p) + P(p)}{P(p)} = 0$$

або

$$Q(p) + P(p) = 0.$$

Використавши вираз (4.30), запишемо

$$\frac{b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + \dots + b_k}{d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n} + 1 = \frac{Q(p)}{P(p)} + 1 = 0,$$

звідки

$$\frac{b_0 p^k + \dots + b_k + d_0 p^n + \dots + d_n}{d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n} = \frac{Q(p) + P(p)}{P(p)} = 0.$$

Записуючи чисельник у загальноприйнятій формі, дістаємо

$$\frac{Q(p) + P(p)}{P(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}{d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n} = W(p) + 1 = 0. \quad (4.32)$$

При цьому треба пам'ятати, що $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = P(p) + Q(p) = 0$ — характеристичне рівняння замкнутої системи, а $d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n = P(p) = 0$ — характеристичне рівняння розімкнутої системи.

Розглянемо два окремі випадки — стійкої і нестійкої розімкнутої систем — і сформулюємо умови, які мають задовольняти відповідні замкнуті системи.

Випагок стійкої розімкнутої системи. Нехай замкнута система зазнає гармонічних впливів, тому $p = j\omega$, і, виходячи з (4.32), запишемо

$$\begin{aligned} 1 + W(j\omega) &= \frac{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}{d_0 (j\omega)^n + d_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + d_n} = \\ &= \frac{F(j\omega)}{R(j\omega)} = N(j\omega), \end{aligned} \quad (4.33)$$

де $W(j\omega)$ — амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи: $F(j\omega)$, $R(j\omega)$, $N(j\omega)$ — частотні характеристики. Многочлени чисельника і знаменника можна подати у вигляді n співмножників $(j\omega - p_i)$ або $(j\omega - p'_i)$, де p_i , p'_i — корені характеристичного рівняння відповідно замкнутої системи для чисельника і розімкнутої — для знаменника. Отже, можна записати

$$\begin{aligned} 1 + W(j\omega) &= \frac{a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}{d_0(j\omega - p'_1)(j\omega - p'_2) \dots (j\omega - p'_n)} = \\ &= \frac{F(j\omega)}{R(j\omega)} = N(j\omega). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для стійкої розімкнутої системи всі корені p'_1, p'_2, \dots, p'_n є лівими, тобто розміщуються в лівій півплощині коренів (рис. 4.15). При цьому кожен із співмножників вигляду $(j\omega - p'_i)$ у разі зміни ω від 0 до $+\infty$

повернеться на кут $\pi/2$, а загальний кут повороту вектора $R(j\omega)$ дорівнюватиме $\theta_R = \frac{\pi}{2}n$.

Для стійкості замкнутої системи всі корені p_1, p_2, \dots, p_n характеристичного рівняння замкнутої системи також мають розміщуватися в лівій напівплощині. Вектор $F(j\omega)$ при зміні ω в діапазоні $0 < \omega < +\infty$ як добуток n

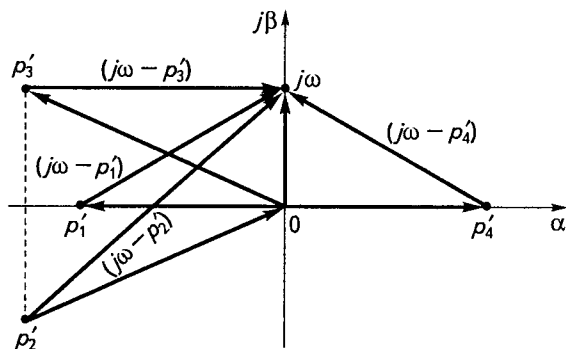


Рис. 4.15

співмножників вигляду $(j\omega - p_i)$ повернеться на кут $\theta_F = \frac{\pi}{2}n$.

Для результуючого кута θ_Σ повороту вектора $N(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ маємо

$$\theta_\Sigma = \theta_F - \theta_R = 0.$$

Для графічної інтерпретації цього висновку розглянемо рис. 4.16, де $W(j\omega)$, як вказувалося раніше, є амплітудно-фазовою частотною характеристикою розімкнутої системи.

Для того щоб побудувати вектор $1 + W(j\omega) = N(j\omega)$, на дійсній осі беремо точку C з координатами $(-1, j0)$ і будуємо відповідний вектор CN . Початок цього вектора лежить у точці C , а кінець, при зміні частоти від 0 до $+\infty$, обходить усі точки АФХ розімкнутої системи $W(j\omega)$. Отже, вектор CN дорівнює $W(j\omega) + 1$.

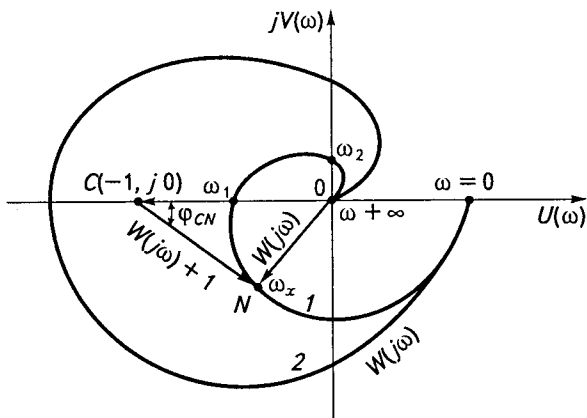


Рис. 4.16

Вважаючи, що повороту вектора CN , позначеного φ_{CN} , в напрямі кута обертання проти годинникової стрілки відповідає додатне значення кута обертання, а за годинниковою — від'ємне, дістанемо, що у разі зміни частоти від 0 до ω_x $\varphi_{CN} = -\varphi_1$. При зміні частоти від ω_x до ω_1 вектор CN повернеться на той самий кут, але проти годинникової стрілки. Тому результируючий кут обертання вектора CN в діапазоні зміни частоти від 0 до ω_1 дорівнюватиме нулю:

$$\varphi_{CN} = \varphi_1 - \varphi_1 = 0.$$

Так само переміщується вектор у діапазоні частот від ω_1 до ω_2 і від ω_2 до $+\infty$. Тому при обході всіх точок амплітудно-фазової частотної характеристики розімкнутої системи, позначеної на рис. 4.16 цифрою 1, результируючий кут обертання дорівнюватиме нулю. Це відповідає умові стійкості замкнутої системи, визначеної раніше. Якщо АФХ розімкнутої системи має вигляд характеристик 2, то умова стійкості замкнутої системи не виконується, оскільки $\varphi_{CN} \neq 0$. Це показує, що замкнута система не завжди є стійкою за стійкої розімкнутої

системи, і дає змогу сформулювати умови стійкості замкненої системи за умови стійкості розімкнутої:

якщо розімкнута система автоматичного керування є стійкою, то для стійкості замкненої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи не охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ при зміні частоти від 0 до $+\infty$.

Випадок нестійкої розімкнутої системи. Серед коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи мають бути корені (або один корінь, наприклад, p'_4), які лежать у правій півплощині коренів (див. рис. 4.15). Нехай таких коренів буде m .

При цьому кожний вектор-співмножник вигляду $(j\omega - p'_k)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ повернеться за годинниковою стрілкою на кут $\pi/2$, а загальний кут повороту всіх m векторів-співмножників буде $\frac{\pi}{2}m$.

Отже, із загальної кількості n векторів-співмножників, які відповідають розімкнутій системі і визначають кут обертання вектора $R(j\omega)$, ліворуч від вертикальної осі знаходитиметься $n - m$, а праворуч — m векторів-співмножників.

Обчислимо результуючий кут обертання вектора $R(j\omega)$:

$$\theta_R = \frac{\pi}{2}(n - m) - \frac{\pi}{2}m = \frac{\pi}{2}n - \pi m, \quad (4.35)$$

кут обертання вектора $F(j\omega)$:

$$\theta_F = \frac{\pi}{2}n$$

і результуючий кут обертання вектора $CN = N(j\omega) = W(j\omega + 1)$:

$$\theta_\Sigma = \theta_F - \theta_R = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}n + \pi m = \pi m. \quad (4.36)$$

Умова стійкості замкненої системи при цьому може бути сформульована таким чином:

якщо розімкнута система автоматичного керування є нестійкою, то для стійкості замкненої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи при зміні частоти від 0 до $+\infty$ охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ проти годинникової стрілки і поверталася на кут πm (m — кількість правих коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи).

Виходячи із обох розглянутих випадків поведінки розімкнутої системи, сформулюємо загальну умову стійкості замкнутої системи:

для стійкості замкнутої лінійної системи автоматичного керування необхідно і достатньо, щоб при русі точки N за амплітудно-фазовою частотною характеристикою розімкнутої системи у разі зміни ω від 0 до $+\infty$ вектор CN , початок якого лежить в точці C з координатами $(-1, j0)$, повернувся на кут

$$\varphi_{CN} = (n - n_1 + 2m) \frac{\pi}{2}, \quad (4.37)$$

де n, n_1 — відповідно степені характеристичних рівнянь замкнутої і розімкнутої систем; m — кількість прaviх коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи.

На практиці, як правило, $n = n_1$, і тому при $m = 0$ умова стійкості замкнутої системи матиме вигляд

$$\varphi_{CN} = 0. \quad (4.38)$$

Характеристики, які відповідають стійким розімкнутим системам, показано на рис. 4.17, *а, б, в*. Визначивши дійсний кут φ_{CN} на основі обходу точок характеристики у разі зміни ω від 0 до $+\infty$ і порівнюючи його значення з умовою стійкості замкнутої системи $\varphi_{CN} = 0$, встановимо, що для характеристик розімкнутої системи (*а, б*) замкнута система буде стійкою, а для характеристик *в* — нестійкою.

Якщо амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи проходить через саму точку C з координатами $(-1, j0)$, то замкнута система знаходитиметься на межі стійкості.

При використанні критерію Найквіста необхідно мати на увазі, що АФХ розімкннутих систем можуть бути значно складнішими, ніж ті, що розглянуті раніше.

АФХ 1 і 2, наведені на рис. 4.16, при зміні частоти від $-\infty$ до $+\infty$ становлять замкнутий контур (рис. 4.18), показаний суцільною лінією при $\omega > 0$ і штриховою при $\omega < 0$. Такий вигляд мають характеристики для статичних систем, у характеристичних рівняннях яких є вільні члени, що визначають дійсні значення АФХ при $\omega = 0$ (точку на дійсній осі при $\omega = 0$).

В астатичних розімкннутих системах з інтегрувальними ланками з передаточною функцією вигляду $W_i = k_i \frac{1}{p}$ АФХ не є замкнутим контуром, оскільки характеристичне рівняння розімкнутої системи має нульові корені.

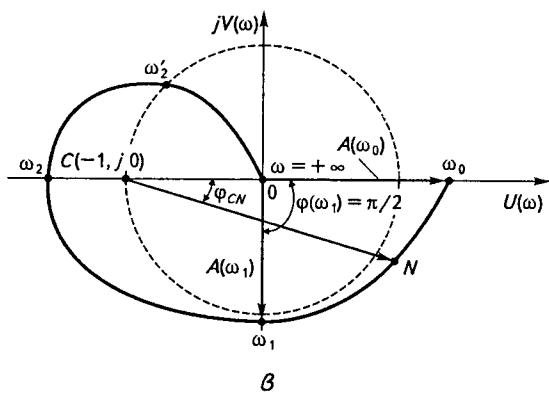
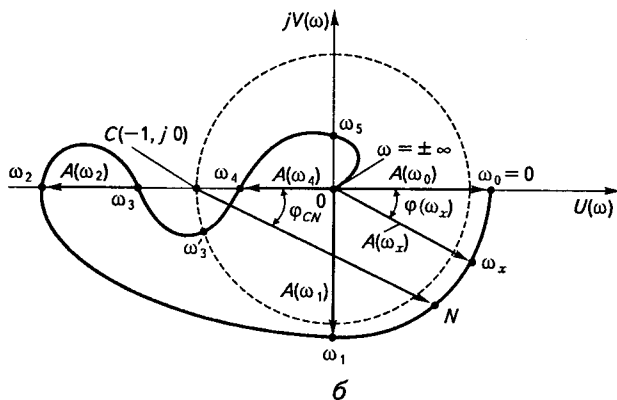
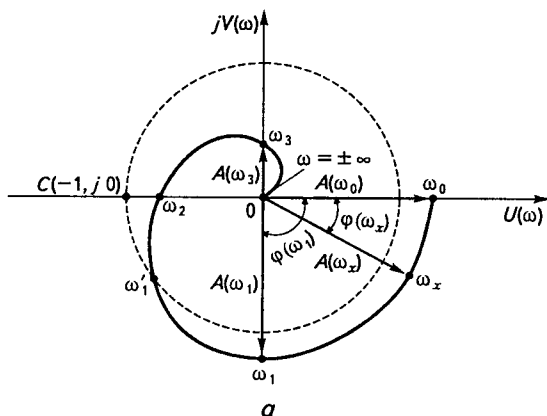


Рис. 4.17

Нехай, наприклад, система складається із двох аперіодичних ланок першого порядку зі сталими часу T_1 , T_2 і однієї інтегровальної ланки. Характеристичне рівняння розімкнутої системи в загальному випадку $P(p) = 0$, де $P(p) = P_1(p)P_2(p)P_3(p)$ є добутком поліномів лівих частин рівнянь ланок. Оскільки $P_3(p) = p$, характеристичне рівняння розімкнутої системи запишеться так:

$$\begin{aligned} P(p) &= (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p = \\ &= p[T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1] = 0. \end{aligned}$$

Отже, перший корінь є нульовим, тобто $p_1 = 0$. При двох інтегровальних ланках матимемо два нульові корені, бо

$$P(p) = p^2 [T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1] = 0.$$

Передаточна функція розімкнутої астатичної системи при одній інтегровальній ланці має вигляд

$$W(p) = \frac{Q(p)}{pP'(p)},$$

при двох —

$$W(p) = \frac{Q(p)}{p^2 P'(p)},$$

при k —

$$W(p) = \frac{Q(p)}{p^k P'(p)}.$$

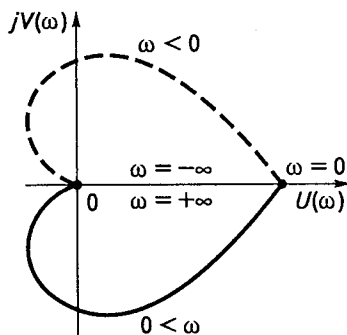


Рис. 4.18

Аналогічно амплітудно-фазова характеристика розімкнутих систем при одній інтегровальній ланці записується так:

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{j\omega P'(j\omega)} = -\frac{Q(j\omega)j}{\omega P'(j\omega)},$$

при двох —

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{(j\omega)^2 P'(j\omega)} = -\frac{Q(j\omega)}{\omega^2 P'(j\omega)}.$$

Побудовані АФХ астатичної системи при $k = 1$ у разі зміни ω від 0 до $+\infty$ і від 0 до $-\infty$ показано відповідно суцільною і штриховою лініями на рис. 4.19, а. При $\omega = 0$ характеристика має розрив, що

утруднює оцінку стійкості замкнутої системи. Вектор $j\omega$ у разі зміни частоти від $-\infty$ до $+\infty$ при переході через 0 стрибкоподібно змінює фазовий кут від $-\pi/2$ до $+\pi/2$, але в якому напрямі змінюється фазовий кут при переході через початок координат, визначити неможливо. Щоб усунути цю невизначеність для астатичної системи довільного порядку (з різним k), користуються такими правилами:

будують гілку АФХ розімкнутої системи у разі зміни частоти в межах $0 < \omega < +\infty$;

побудовану характеристику доповнюють дугою відповідного кута обертання нескінченно великого радіуса-вектора R характеристики, який дорівнює $\pi/2k$;

використовують критерій стійкості Найквіста у відповідному формулюванні.

Дві АФХ розімкнутих систем показано на рис. 4.19, б (криві 1 і 2). Характеристикою 1 точка $C(-1, j0)$ охоплюється за годинниковою

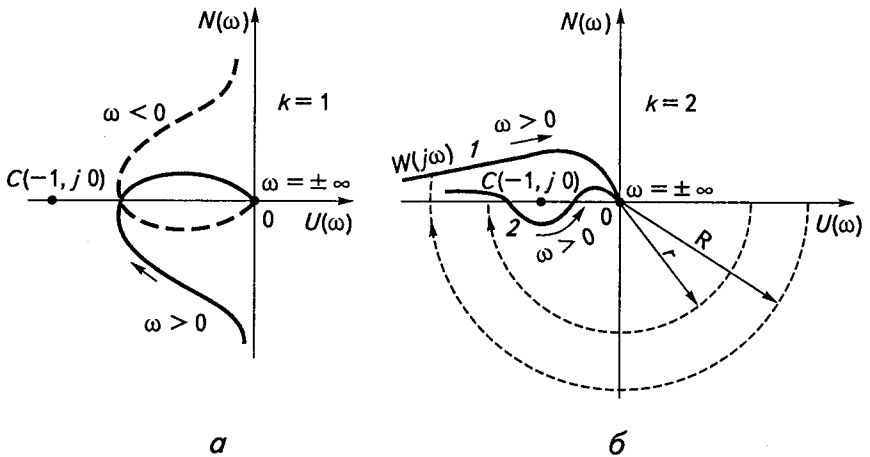


Рис. 4.19

стрілкою, а характеристикою 2 ця точка не охоплюється. Тому замкнута система, яка має характеристику 1 в розімкнутому стані, буде нестійкою, а характеристика 2 — стійкою.

Запас стійкості. Як зазначалося, при проходженні характеристики замкнутої системи через точку $C(-1, j0)$ замкнута система знаходиться на межі стійкості. Тому запас стійкості цієї системи

при використанні критерію Найквіста визначається деякою зоною довкола точки $C(-1, j0)$, через яку не повинна проходити АФХ розімкнутої системи.

Розрізняють запас стійкості за модулем (амплітудою) і за фазою. Дійсний запас стійкості замкнутої системи за модулем визначається деяким значенням h , на яке модуль $A(\omega)$ характеристики $W(j\omega)$ розімкнутої системи менший від одиниці. Його можна визначити по відрізьку на осі абсцис між точкою C і точкою перетину горизонтальної осі характеристикою $W(j\omega)$ розімкнутої системи (рис. 4.20).

Запас стійкості за фазою γ_3 визначається як різниця між кутом π і максимально допустимим кутом $\varphi(\omega_c)$ обертання вектора, при якому зберігається запас стійкості за модулем. Він визначається положенням вектора в точці перетину характеристики $W(j\omega)$ розімкнутої системи з колом одиничного радіуса ($R = 1$):

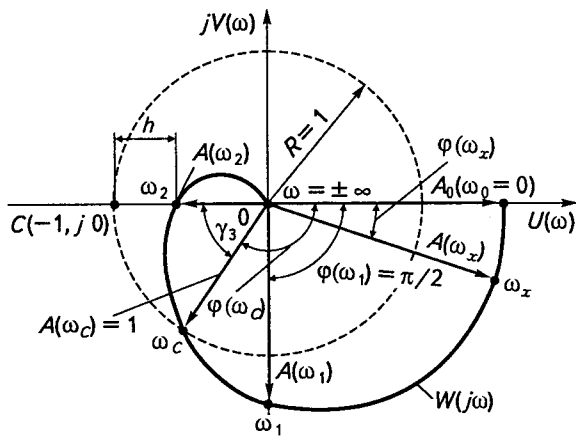
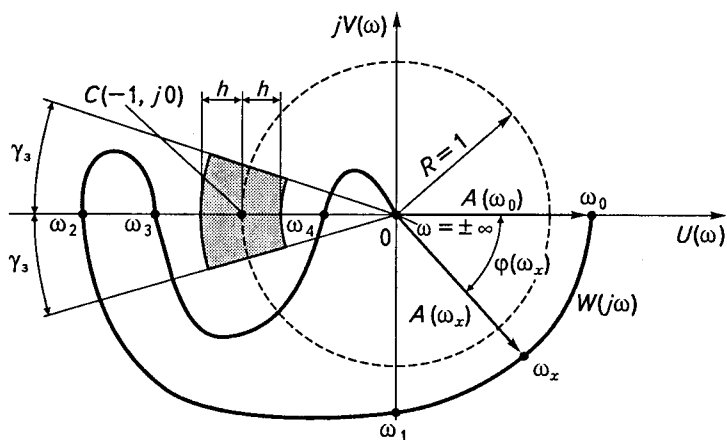


Рис. 4.20

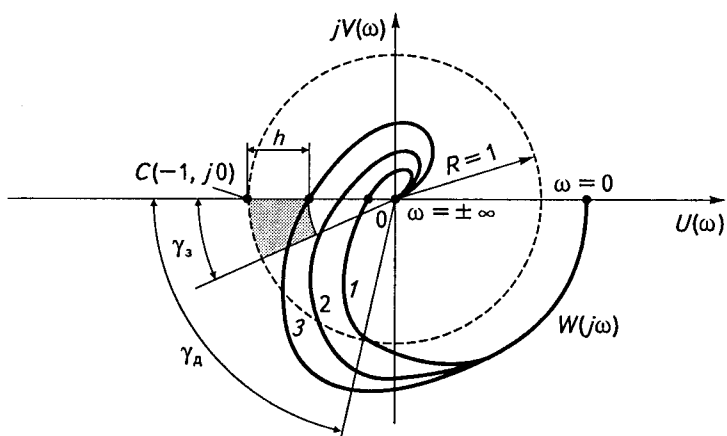
$$\gamma_3 = \pi - \varphi(\omega_c).$$

Запас стійкості може бути заданий у вигляді деякої зони навколо точки $C(-1, j0)$ (рис. 4.21, а, б).

При характеристиці 1 дійсний запас стійкості за фазою γ_d і за модулем $A_{д.з}(\omega) = 1 - A(\omega_1)$ значно більший, ніж мінімально допустимий γ_3 і h (рис. 4.21, б). При характеристиці 2 дійсний запас за фазою дорівнює заданому γ_3 . При характеристиці 3 не забезпечується заданий запас стійкості за модулем. Складнішу характеристику, в якій заданий запас стійкості знаходиться як праворуч, так і ліворуч від точки $C(-1, j0)$, наведено на рис. 4.21, а. Таким характеристикам відповідають САК із внутрішніми зворотними зв'язками.



а



б

Рис. 4. 21

4.8

Критерій Найквіста у логарифмічній формі

Відповідно до критерію Найквіста про стійкість замкнутої системи можна судити не тільки за АФХ розімкнутої системи, а й за взаємним розташуванням амплітудної і фазової частотних характеристик відповідної розімкнутої системи. Звичайно при цьому використовують логарифмічні характеристики — амплітудну $L(\omega)$ і фазову $\varphi(\omega)$, що пояснюється простотою їх побудови. Стосовно логарифмічних характеристик критерій стійкості Найквіста формулюється так:

якщо система стійка в розімкнутому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб логарифмічна амплітудна характеристика (ЛАХ) перетинала вісь абсцис раніше, ніж фазова характеристика в останній раз перетинає лінію $-\pi$, іншими словами, на частоті зрізу ω_3 , яка відповідає $L(\omega) = 0$, фаза за модулем має бути меншою за π ;

якщо система нестійка в розімкнутому стані і має k коренів у правій півплощині, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб при додатній ЛАХ кількість перетинів фазовою характеристикою рівня $-\pi$ знизу доверху була на $k/2$ раз більшою за кількість перетинів у зворотному напрямі.

Перше формулювання пояснюється характеристиками, наведеними на рис. 4.22. На цьому рисунку зображені ЛАХ $L(\omega)$ і чотири варіанти фазової характеристики $\varphi(\omega)$. Фазові характеристики 1 і 4 відповідають стійкій замкнутій системі, причому характеристика 4 відповідає АФХ на рис. 4.17, б. Якщо фазова характеристика має вигляд 2, то замкнута система перебуває на межі стійкості, а характеристика 3 відповідає нестійкій замкнутій системі.

Графіки характеристик, зображені на рис. 4.23, а, відповідають стійкій замкнутій системі при $k = 1$ (1/2 перетину), а на рис. 4.23, б — при $k = 2$ (один перетин).

Для використання критерію Найквіста в логарифмічній формі треба вміти будувати ЛАХ і ЛФХ (фазову) частотні характеристики.

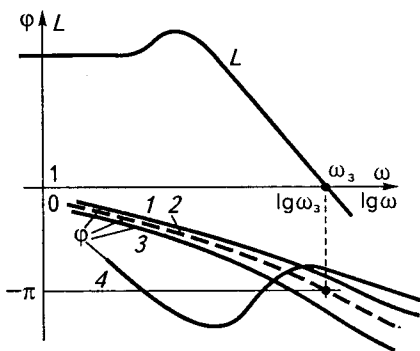


Рис. 4.22.

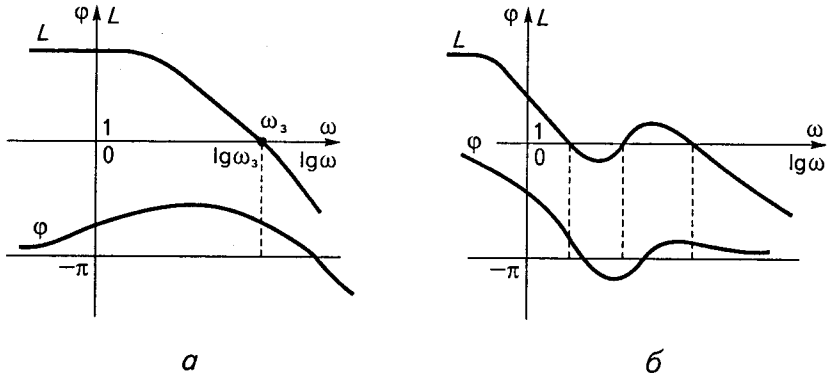


Рис. 4.23

При побудові ЛАХ розімкнутої системи немає сенсу знаходити амплітудну характеристику $A(\omega)$ системи і будувати залежність $20 \lg A(\omega)$ від $\lg(\omega)$. Якщо система зведена до одноконтурної, то вона складається з ланцюжка послідовно з'єднаних ланок, для яких справдливими є такі співвідношення:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega); \quad (4.39)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega), \quad (4.40)$$

де $L_i(\omega)$ і $\varphi_i(\omega)$ — відповідно ЛАХ і ЛФХ окремих ланок.

Отже, логарифмічні частотні характеристики розімкнутої системи можна отримати підсумовуванням ординат характеристик окремих ланок. Для побудови ЛАХ розімкнутої системи її передаточну функцію слід подати у вигляді добутку елементарних співмножників, порядок яких не перевищує другий, наприклад у вигляді

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4^2 p^2 + T_5 p + 1)}, \quad (4.41)$$

і скористатися таблицею логарифмічних частотних характеристик елементарних співмножників передаточних функцій (табл. 4.5).

ЛАХ розімкнутої системи зазвичай будують одразу без побудови ЛАХ окремих ланок. Для цього спочатку знаходять точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg k$, $\omega = 1$ ($\lg \omega = 0$), де k — коефіцієнт передачі ро-

зімкнутої системи. Потім через знайдену точку проводять пряму з нахилом $20(m-r)$ дБ/дек, де m — кількість диференціювальних ланок; r — кількість інтегрувальних ланок. Після цього на осі абсцис відкладають значення частот сполуки $\lg(1/T_i)$, де T_i — сталі часу елементарних співмножників. Для коливальної ланки це стала часу при p^2 . Поряд із значенням $\lg(1/T_i)$ на осі абсцис зручно вказувати значення частот $\omega_i = 1/T_i$. Потім пряму, яка проходить через точку $L(\omega) = 20 \lg k$, $\omega = 1$, продовжують до найменшої частоти сполуки. В точці з цією частотою змінюють нахил прямої лінії відповідно до типу елементарного співмножника, стала часу якого визначає цю частоту сполуки. Так само характеристика продовжується в бік зростання частоти, зазнаючи послідовні зміни на кожній частоті сполуки. За необхідності побудовану ЛАХ уточнюють шляхом урахування поправок для коливальних ланок.

ЛФХ визначається як сума фазових характеристик елементарних співмножників. Наприклад, для передаточної функції (4.41) розімкнутої системи фазова характеристика будується за рівнянням

$$\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctg T_1 \omega + \arctg T_2 \omega - \arctg T_3 \omega - \arctg \frac{T_5 \omega}{1 - T_4^2 \omega^2}.$$

Дослідження стійкості системи за критерієм Найквіста в логарифмічній формі виконується в такій послідовності.

1. Досліджувана система зводиться до одноконтурного вигляду.

2. Записується передаточна функція розімкнутої системи у вигляді добутку елементарних співмножників. Співмножники другого порядку вигляду $T_1^2 p^2 + T_2 p + 1$ або $\frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$ будуть елементарними, якщо виконується умова $T_2/2T_1 < 1$. Якщо ця умова не виконується, то співмножник другого порядку слід подати у вигляді добутку двох співмножників першого порядку:

$$\begin{aligned} T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 &= (T_A p + 1)(T_B p + 1); \\ \frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} &= \frac{1}{(T_A p + 1)(T_B p + 1)}, \end{aligned}$$

де

$$T_{A,B} = \frac{T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2}.$$

Для розкладання співмножників третього порядку $T_1^3 p^3 + T_2^2 p^2 + T_3 p + 1$ або $1/(T_1^3 p^3 + T_2^2 p^2 + T_3 p + 1)$ на елементарні треба будь-яким із відомих способів (наприклад, за формулами Кардана або способом наближеного розв'язку рівнянь високого порядку) визначити корені рівняння

$$T_1^3 p^3 + T_2^2 p^2 + T_3 p + 1 = 0.$$

Якщо корені рівняння дійсні та різні ($p_1 = -\lambda_1$; $p_2 = -\lambda_2$; $p_3 = -\lambda_3$), то співмножник третього порядку подається у вигляді трьох елементарних співмножників першого порядку:

$$T_1^3 p^3 + T_2^2 p^2 + T_3 p + 1 = \left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1\right) \left(\frac{1}{\lambda_2} p + 1\right) \left(\frac{1}{\lambda_3} p + 1\right);$$

$$\frac{1}{T_1^3 p^3 + T_2^2 p^2 + T_3 p + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1\right) \left(\frac{1}{\lambda_2} p + 1\right) \left(\frac{1}{\lambda_3} p + 1\right)}.$$

Якщо ж рівняння має один дійсний корінь $p_1 = -\lambda_1$ і два комплексних $p_2 = -\alpha + j\beta$; $p_3 = -\alpha - j\beta$, то співмножник третього порядку подається у вигляді добутку двох співмножників – першого і другого порядку:

$$T_1^3 p^3 + T_2^2 p^2 + T_3 p + 1 = \left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1\right) \left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} p^2 + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} p + 1\right);$$

$$\frac{1}{T_1^3 p^3 + T_2^2 p^2 + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1\right) \left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} p^2 + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} p + 1\right)}.$$

Аналогічно можна розкласти на елементарні також співмножники більш високих порядків. У цьому разі задача ускладнюється, оскільки виникає необхідність знаходити корені рівнянь більш високих порядків. Такі співмножники можна отримати у разі приведення складних багатоконтурних систем з перехресними зворотними зв'язками до одноконтурних. Тому для дослідження таких систем критерій Найквіста в логарифмічній формі, як правило, не застосовують.

3. Перевіряється стійкість розімкнутої системи на основі рекомендацій, наведених при викладенні методики дослідження стійкості критерієм Найквіста у звичайній формі. Якщо розімкнута система нестійка, то визначається кількість коренів у правій напівплощині. Оскільки попередньо передаточна функція розімкнутої системи подана у вигляді добутку елементарних співмножників, то при дослідженні стійкості розімкнутої системи ускладнень не виникає.

4. Будується ЛАХ розімкнутої системи за раніше викладеними правилами і за даними табл. 4.5.

5. Записується рівняння фазової характеристики у вигляді суми фазових характеристик елементарних співмножників, обчислюються значення $\varphi(\omega)$ за різних частот ω , будується фазова характеристика.

При розрахунках фазових характеристик для співмножників другого порядку досить часто припускаються помилок при визначенні кутів, які перевищують за абсолютною величиною 90° . Щоб уникнути можливих помилок, необхідно мати на увазі, що для коливальної ланки з передаточною функцією $1/(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)$ фазова характеристика розраховується за формулою

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

У разі збільшення частоти від 0 до $1/T_1$ значення $\varphi(\omega)$ змінюється від 0 до -90° . При частоті $\omega > 1/T_1$ вираз $T_2 \omega / (1 - T_1^2 \omega^2)$ стає від'ємним і

$$\varphi = +\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

У цьому разі значення кутів слід вибирати не в першій чверті (від 0 до $+90^\circ$), а в третій (від -90° до -180°). Наприклад, якщо

$$\frac{T_2 \omega}{T_1^2 \omega^2 - 1} = 0,364,$$

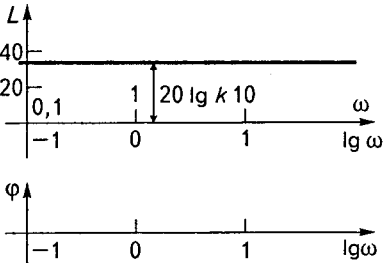
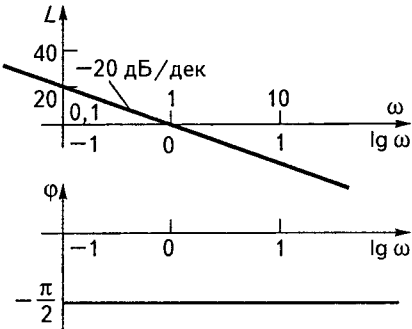
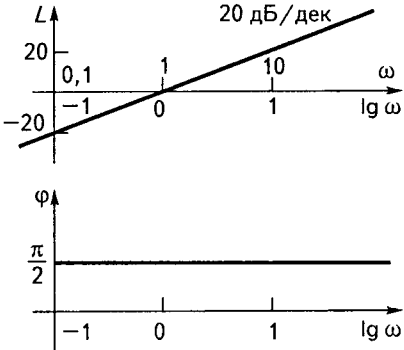
чому відповідає кут у першій чверті $\alpha = 20^\circ$, то $\varphi(\omega)$ слід визначати за формулою

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \alpha = -160^\circ.$$

Для співмножника $T_1^2 p^2 + T_2 p + 1$ фазова характеристика

$$\varphi(\omega) = +\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

Таблиця 4.5

Співмножник	ЛАХ і ЛФХ	Рівняння фазової характеристики
k		$\varphi(\omega) = 0$
$\frac{1}{p}$		$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$
p		$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

Співмножник	ЛАХ і ЛФХ	Рівняння фазової характеристики
$Tp + 1$	<p>The magnitude plot shows a slope of 20 дБ/дек starting at $\omega = 1/T$. The phase plot shows a phase shift from 0 to $\pi/4$.</p>	$\varphi(\omega) = \text{arctg } T\omega$
$\frac{1}{Tp + 1}$	<p>The magnitude plot shows a slope of -20 дБ/дек starting at $\omega = 1/T$. The phase plot shows a phase shift from 0 to $-\pi/4$.</p>	$\varphi(\omega) = -\text{arctg } T\omega$
$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1$ при $\frac{T_2}{2T_1} < 1$	<p>The magnitude plot shows a slope of 40 дБ/дек starting at $\omega = 1/T_1$. The phase plot shows a phase shift from 0 to $\pi/2$.</p>	$\varphi(\omega) = \text{arctg } \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}$
$\frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$ при $\frac{T_2}{2T_1} < 1$	<p>The magnitude plot shows a slope of -40 дБ/дек starting at $\omega = 1/T_1$. The phase plot shows a phase shift from 0 to $-\pi/2$.</p>	$\varphi(\omega) = -\text{arctg } \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}$

При $0 \leq \omega \leq 1/T_1$ значення кутів треба вибирати в першій чверті в інтервалі від 0 до $+90^\circ$, а при $\omega > 1/T_1$, коли

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{T_1^2 \omega^2 - 1},$$

— у другій чверті в межах від $+90^\circ$ до $+180^\circ$. Нехай $T_2 \omega / (T_1^2 \omega^2 - 1) = 0,364$, тоді $\varphi(\omega) = +180^\circ - 20^\circ = +160^\circ$.

Якщо ЛАХ і ЛФХ побудовано правильно, то граничне значення фазової характеристики при $\omega \rightarrow \infty$ має відповідати граничному нахилу амплітудної. Отже, якщо граничний нахил амплітудної характеристики $(n - m)20$ дБ/дек, то граничне значення фазової характеристики $(n - m)\frac{\pi}{2}$, де n, m — порядки поліномів відповідно знаменника і чисельника передаточної функції розімкнутої системи.

Наприклад, якщо граничний нахил ЛАХ дорівнює -60 дБ/дек, то граничне значення фазової характеристики має становити -270° .

6. За взаємним розташуванням ЛАХ і ЛФХ розімкнутої системи робиться висновок про стійкість замкнутої системи.

□ **Приклад 4.6.** Передаточна функція розімкнутої системи має вигляд

$$W(p) = W_A(p)W_B(p)W_C(p) = \frac{40(0,02p + 1)(0,1p + 1)(0,5p + 1)}{(0,04p^2 + 0,2p + 1)(2,5p + 1)(0,05p + 1)}.$$

Дослідити стійкість системи за допомогою критерію Найквіста в логарифмічній формі.

Розв'язання. Визначимо, чи є поліном другого порядку у знаменнику передаточної функції елементарним. Коренями поліному $0,04p^2 + 0,2p + 1$ є $p_{1,2} = -2,5 \pm j4,33$. Вони комплексні, тому співмножник $1/(0,04p^2 + 0,2p + 1)$ є елементарним і вираз передаточної функції розімкнутої системи залишається без змін. ЛАХ розімкнутої системи будуюмо у такій послідовності.

1. Через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg 40 = 32$ дБ, $\lg \omega = 0$ ($\omega = 1$) проводимо горизонтальну лінію (нахил 0), тому що розімкнута система не містить інтегровальних і диференціальних ланок (передаточна функція розімкнутої системи не містить співмножників p і $1/p$).

2. Розраховуємо логарифми частот сполуки:

$$\lg \omega_1 = \lg \frac{1}{0,02} = 1,7; \quad \lg \omega_2 = \lg \frac{1}{0,1} = 1;$$

$$\lg \omega_3 = \lg \frac{1}{0,5} = 0,3; \quad \lg \omega_4 = \lg \frac{1}{\sqrt{0,04}} = 0,7;$$

$$\lg \omega_5 = \lg \frac{1}{2,5} = -0,4; \quad \lg \omega_6 = \lg \frac{1}{0,05} = 1,3$$

і відкладаємо їх на осі абсцис.

3. Продовжуємо побудовану в п.1 пряму до найнижчої частоти сполуки $\omega_5 = 1/2,5$. Стала часу 2,5 належить елементарному співмножнику $1/(2,5p + 1)$, тому в точці зламу нахил ЛАХ змінюється на -20 дБ/дек і становить $0 + (-20) = -20$ дБ/дек. Лінія з нахилом -20 дБ/дек проводиться паралельно прямій, що з'єднує точку $L(\omega) = 20$ дБ на осі ординат з кінцем першої декади. На частоті $\omega_3 = 1/0,5$ відбувається другий злам характеристики. Її нахил становитиме $-20 + 20 = 0$ дБ/дек, бо стала часу 0,5 належить співмножнику $(0,5p + 1)$. Наступний злам відбувається на частоті $\omega_4 = 1/0,2$, яка визначається співмножником $1/(0,04p^2 + 0,2p + 1) = 1/(0,2^2 p^2 + 0,2p + 1)$, тому нахил характеристики змінюється на -40 дБ/дек і становить $0 + (-40) = -40$ дБ/дек.

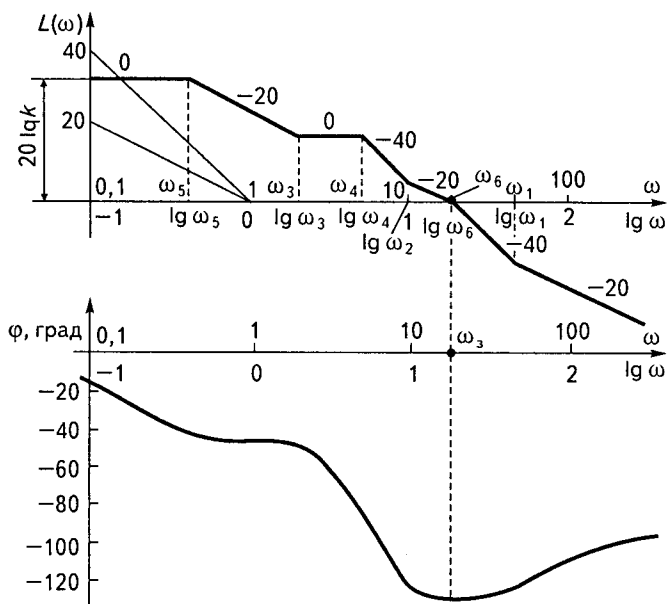


Рис. 4.24

Черговий злам відбувається на частоті $\omega_2 = 1/0,1$, яка визначається співмножником $(0,1p + 1)$, тому нахил характеристики змінюється на $+20$ дБ/дек і становить -20 дБ/дек. На частоті $\omega_6 = 1/0,05$ також відбувається злам і нахил характеристики становитиме -40 дБ/дек. На частоті $\omega_1 = 1/0,02$ відбувається останній злам і нахил характеристики становитиме $-40 + 20 = -20$ дБ/дек.

Побудовану характеристику $L(\omega)$ зображено на рис. 4.24.

4. Фазова характеристика розраховується за формулою

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 = \\ &= \arctg 0,02\omega + \arctg 0,1\omega + \arctg 0,5\omega - \arctg \frac{0,2\omega}{1 - 0,04\omega^2} - \\ &\quad - \arctg 2,5\omega - \arctg 0,05\omega. \end{aligned}$$

Результати розрахунків наведено в табл. 4.6, а характеристику $\varphi(\omega)$ — на рис. 4.24.

Таблиця 4.6

Параметри	Числові значення									
	0,1	0,4	1	2	5	10	20	50	100	200
φ_1°	0	1	2	3	6	12	22	45	64	76
φ_2°	1	2	6	12	27	45	64	79	85	87
φ_3°	3	11	27	45	69	79	85	88	89	90
φ_4°	-7	-9	-12	-26	-90	-147	-165	-176	-177	-179
φ_5°	-14	-45	-67	-78	-85	-86	-89	-90	-90	-90
φ_6°	0	-2	-3	-6	-12	-28	-41	-67	-78	-84
$\varphi = \sum \varphi_i$	-17	-42	-47	-50	-85	-125	-128	-120	-107	-100

Із побудованих характеристик визначаємо фазу на частоті зрізу: $\varphi(\omega_3) = -120^\circ$. Розімкнута система стійка, бо вона являє собою послідовне з'єднання стійких ланок. Тому на підставі формулювання критерію для систем, стійких у розімкнутому стані, робимо висновок, що замкнута система стійка.

4.9

Дослідження стійкості систем із запізненням

У ланках із запізненням вихідна величина з'являється через деякий проміжок часу τ після появи величини на вході ланки.

Передаточна функція і АФХ ланки із запізненням мають вигляд

$$W(p) = e^{-p\tau} \text{ і } W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}.$$

У системі автоматичного керування ланки із запізненням можуть входити в основне (пряме) коло послідовно з іншими ланками регулятора або входити в коло зворотного зв'язку (рис. 4.25, а, б), де $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи без урахування ланки із запізненням, а $W_3(p)$ — передаточна функція ланки із запізненням.

Передаточна функція розімкнутої системи з урахуванням запізнення (рис. 4.25, а)

$$W^\tau(p) = W_3(p)W(p) = W(p)e^{-\tau p}.$$

Якщо в системі є кілька ланок із запізненням (наприклад, τ_1 і τ_2), то

$$W^\tau(p) = W(p)e^{-p(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Отже, кілька ланок із різним запізненням можна замінити еквівалентною ланкою із запізненням $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Передаточна функція замкнутої системи за завданням $y(t)$ у цьому випадку матиме вигляд

$$W^y(p) = \frac{W(p)e^{-\tau p}}{1 + W(p)e^{-\tau p}}. \quad (4.42)$$

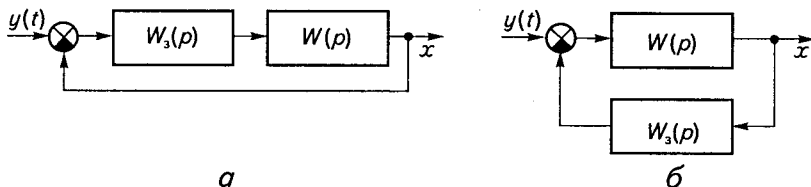


Рис. 4.25

Якщо ланка із запізненням входить до кола зворотного зв'язку (рис. 4.25, б), то передаточна функція за завданням

$$W^y(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)e^{-\tau p}}. \quad (4.43)$$

Згідно із виразами (4.42), (4.43), незалежно від місця знаходження ланки із запізненням, характеристичне рівняння замкнутої системи

$$1 + W(p)e^{-\tau p} = 0. \quad (4.44)$$

Це рівняння є трансцендентним і має нескінченну кількість коренів, які для стійкої системи мають розміщуватися у лівій площині коренів. Знаходження коренів у цьому випадку — трудомістке завдання, тому для аналізу стійкості таких систем найприйнятнішим є використання частотного критерію Найквіста.

Для зручності усю структурну схему лінійної САК із запізненням приведемо до вигляду двох послідовно з'єднаних ланок: однієї без запізнення з передаточною функцією $W_1(p)$, а іншої — із запізненням $W_3(p) = e^{-\tau p}$.

Якщо в передаточній функції розімкнутої системи

$$W(p) = W_1(p)e^{-\tau p}$$

покласти, що $\tau \rightarrow 0$, то можна дістати передаточну функцію так званої граничної системи $W_r(p)$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} W(p) = W_r(p),$$

де $W_r(p) = W_1(p)e^{-\tau p} = W_1(p)$.

Отже, під граничною розімкнутою системою розуміють систему, в якій запізнення зменшується до нуля і ланка з запізненням перетворюється на деяку безінерційну ланку з коефіцієнтом передачі, що дорівнює одиниці.

Згідно з викладеним вище, АФХ розімкнутої системи із запізненням має вигляд

$$W^\tau(j\omega) = W(j\omega)e^{-j\tau\omega}, \quad (4.45)$$

а АФХ граничної розімкнутої системи —

$$W_{\tau \rightarrow 0}^\tau(j\omega) = W_r(j\omega) = W_1(j\omega). \quad (4.46)$$

Запишемо АФХ розімкнутої системи з запізненням у показниковій формі:

$$W^\tau(j\omega) = A_1 e^{j\varphi(\omega)} e^{-j\tau(\omega)} = A_1 e^{j[\varphi(\omega) - \tau(\omega)]}, \quad (4.47)$$

де A_1 — вектор розімкнутої системи.

Із знайденого виразу $W^\tau(j\omega)$ випливає, що для побудови АФХ розімкнутої системи із запізненням слід побудувати характеристику граничної системи, яка в даному разі матиме вигляд $W_r(j\omega) = A_1 e^{j\varphi(\omega)}$, після чого повернути радіус-вектор граничної системи на один і той самий кут $\omega\tau$ за годинниковою стрілкою.

Деяка АФХ розімкнутої граничної системи $W_1(j\omega) = A_1 e^{j\varphi(\omega)}$ показана на рис. 4.26.

Якщо розімкнута система стійка, то $W_1(j\omega)$ не охоплює точку $C(-1, j0)$, тому відповідна замкнута система також буде стійкою.

Нехай кут між горизонтальною віссю і вектором $A_1(\omega) \in \varphi_1$ і відповідає деякій частоті ω_1 . Величина зсуву по куту, який характеризує запізнення для даної частоти, є $\omega_1\tau$. Оскільки запізнення на кут $\omega_1\tau$ визначає від'ємний знак цього кута, який відкладається за годинниковою стрілкою відносно початкового положення вектора $A_1(\omega_1)$, то неважко побудувати точку характеристики $W^\tau(j\omega)$ з урахуванням запізнення для частоти ω_1 . Аналогічно можна побудувати точку для

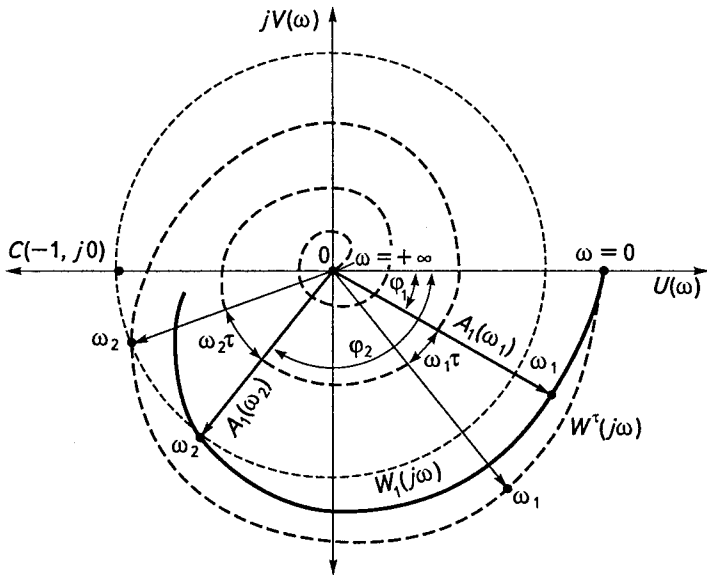


Рис. 4. 26

частоти ω_2 , при якій вектор граничної характеристики $A_1(\omega_2)$ дорівнює одиниці, а також й інші точки характеристики $W^\tau(j\omega)$ розімкнutoї системи.

З наведеного графіка бачимо, що зростання запізнення зменшує запас стійкості системи. Зі збільшенням частоти кут запізнення починає швидко зростати, бо модуль граничної характеристики при цьому зменшується. Це призводить до закручування характеристики $W^\tau(j\omega)$ навколо початку координат. Проте при деяких складних характеристиках $W(j\omega)$ можливі випадки, коли запізнення позитивно впливає на роботу системи. Змінюючи величину τ , можна знайти його критичне значення, при якому характеристика $W^\tau(j\omega)$ проходить через точку $C(-1, j0)$. Відповідну частоту при цьому називають *критичною*.

4.10

Структурно-нестійкі системи і коректувальні ланки

В усіх розглянутих раніше випадках стійкість (або нестійкість) системи залежала від значення параметрів ланок структурної схеми існуючої системи. Системи автоматичного керування, в яких стійкість залежить лише від значення параметрів ланок, називають *структурно-стійкими*. Але є такі САК, у яких досягти стійкості за рахунок зміни параметрів ланок принципово неможливо. Стійкість цих систем може бути досягнута лише у разі зміни структурної схеми.

Системи автоматичного керування, в яких стійкість не може бути досягнута за рахунок лише зміни параметрів, називають *структурно-нестійкими*.

Для пояснення викладеного розглянемо окремий приклад.

Нехай в САК є дві інтегрувальні ланки і одна аперіодична ланка першого порядку. Дістанемо характеристичне рівняння замкнutoї системи і дослідимо стійкість системи.

Запишемо передаточні функції ланок системи

$$W_1(p) = k_1 \frac{1}{p}; \quad W_2(p) = k_2 \frac{1}{p}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}$$

і характеристичне рівняння замкнутої системи в загальному вигляді

$$W(p) + 1 = 0,$$

де $W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

Після підстановки відповідних значень дістанемо

$$k_1 \frac{1}{p} k_2 \frac{1}{p} \frac{k_3}{T_3 p + 1} + 1 = 0;$$

$$(T_3 p + 1) p^2 + k_1 k_2 k_3 = 0;$$

$$T_3 p^3 + p^2 + k_\Sigma = 0,$$

де $k_\Sigma = k_1 k_2 k_3$ — коефіцієнт підсилення розімкнутої системи.

Характеристичне рівняння третього порядку в загальному вигляді

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

тому для цього випадку значення коефіцієнтів

$$a_0 = T_3; a_1 = 1; a_2 = 0; a_3 = k_\Sigma.$$

У даному разі не виконується перша умова Гурвіца про те, що всі коефіцієнти характеристичного рівняння замкнутої системи мають бути більшими за нуль, тому система буде нестійкою.

При цьому, як би ми не змінювали значення параметрів a_0, a_1, a_3 , дістати $a_2 > 0$ неможливо. Тому дана система є структурно-нестійкою.

На основі розглянутого прикладу можна зробити деякі узагальнення.

1. Зовнішньою ознакою структурно-нестійкої системи є відсутність (рівність нулю) в лінійному характеристичному рівнянні замкнутої системи деяких членів (коефіцієнтів).

2. Системи, які мають дві та більше інтегровальних ланок за умови, що інші ланки аперіодичні або безінерційні, є структурно-нестійкими.

3. Для досягнення стійкості необхідна зміна структурної схеми структурно-нестійкої системи.

Для зміни структурної схеми, як правило, використовуються коректувальні ланки. Вони бувають двох типів — паралельні та послідовні.

Паралельні коректувальні ланки. Як паралельні коректувальні ланки використовуються місцеві жорсткі від'ємні зворотні зв'язки.

Охопимо одну із інтегрувальних ланок розглянутої системи жорстким від'ємним зворотним зв'язком (рис. 4.27) і складемо рівняння (передаточну функцію) даної ланки з урахуванням введеного зворотного зв'язку.

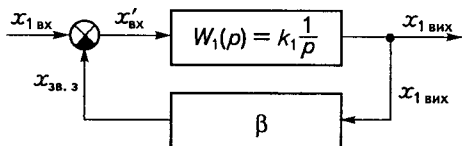


Рис. 4.27

Рівняння ланки до введення зворотного зв'язку

$$x_{1 \text{ вих}} = k_1 \frac{1}{p} x_{1 \text{ вх}}.$$

Знайдемо фактичне значення вхідної величини при введенні паралельної коректувальної ланки з коефіцієнтом зворотного зв'язку $\beta = x_{\text{зв.з}}/x_{1 \text{ вих}}$:

$$x'_{\text{вх}} = x_{1 \text{ вх}} - x_{\text{зв.з}} = x_{1 \text{ вх}} - \beta x_{1 \text{ вих}}.$$

Рівняння ланки з урахуванням зворотного зв'язку

$$x_{1 \text{ вих}} = k_1 \frac{1}{p} x'_{\text{вх}} = k_1 \frac{1}{p} (x_{1 \text{ вх}} - \beta x_{1 \text{ вих}})$$

або

$$x_{1 \text{ вих}} (p + \beta k_1) = k_1 x_{1 \text{ вх}}.$$

Позначивши $1/k_1\beta = T_1$, $1/\beta = k'_1$, після ділення всіх членів на βk_1 дістанемо рівняння інтегрувальної ланки, охопленої від'ємним зворотним зв'язком:

$$(T_1 p + 1)x_{1 \text{ вих}} = k'_1 x_{1 \text{ вх}}.$$

З цього виразу видно, що інтегрувальна ланка, охоплена від'ємним зворотним зв'язком, ек-

вівалентна стійкій аперіодичній ланці першого порядку. Зміну вигляду часової характеристики в цьому разі ілюструє рис. 4.28, де 1 — часова характеристика ланки до введення коректувальної ланки; 2 — після охоплення інтегрувальної ланки від'ємним зворотним зв'язком.

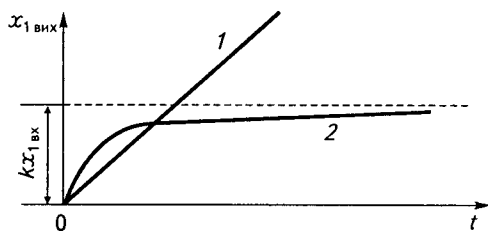


Рис. 4.28

Передаточна функція інтегрувальної ланки, охопленої зворотним від'ємним зв'язком,

$$W_1'(p) = \frac{k_1'}{T_1 p + 1}.$$

Характеристичне рівняння замкнутої системи з двома інтегрувальними ланками з урахуванням охоплення першої інтегрувальної ланки зворотним від'ємним зв'язком запишеться у вигляді

$$W_1'(p)W_2(p)W_3(p) + 1 = 0$$

чи

$$\frac{k_1'}{T_1 p + 1} \frac{k_2}{p} \frac{k_3}{T_3 p + 1} + 1 = 0,$$

або після перетворень

$$T_1 T_3 p^3 + (T_1 + T_3) p^2 + p + k_\Sigma = 0.$$

У цьому рівнянні всі коефіцієнти $a_0 = T_1 T_3$, $a_1 = T_1 + T_3$, $a_2 = 1$, $a_3 = k_\Sigma$ більші за нуль, тому скорегована система є *структурно-стійкою*.

Підкреслимо, що структурна стійкість системи не зумовлює її обов'язкову стійкість при всіх значеннях параметрів. Для визначення стійкості слід перевірити виконання необхідної другої умови за Гурвіцем, яка в даному разі має вигляд $\Delta_2 > 0$ (можна скористатися й іншими методами дослідження стійкості).

Послідовні коректувальні ланки. Послідовною коректувальною ланкою називають ланку, за допомогою якої на вхід наступної ланки подається величина, пропорційна швидкості зміни вихідної величини попередньої ланки.

Структурна схема системи, що розглядалася раніше, при введенні послідовної коректувальної ланки матиме вигляд, показаний на рис. 4.29.

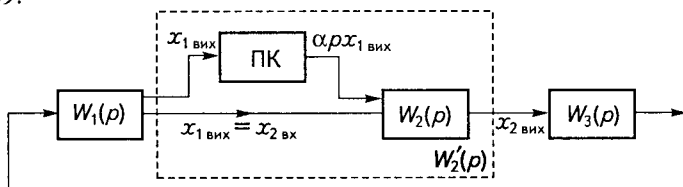


Рис. 4.29

Розглянемо, як зміниться передаточна функція інтегровальної ланки $W_2(p) = k_2 \frac{1}{p}$ з урахуванням підключення на її вході послідовної коректувальної ланки ПК.

Рівняння ланки $W_2(p)$ у даному разі матиме вигляд

$$x_{2\text{вих}} = k_2 \frac{1}{p} (x_{1\text{вих}} + \alpha p x_{1\text{вих}}) = k_2 \frac{1}{p} (1 + \alpha p) x_{1\text{вих}}.$$

Тут $x_{1\text{вих}} = x_{2\text{вх}}$, тому передаточну функцію ланки $W_2(p)$ після введення коректувальної ланки можна записати так:

$$W_2'(p) = \frac{x_{2\text{вих}}}{x_{2\text{вх}}} = k_2 \frac{1}{p} (1 + \alpha p) = W_2(p)(1 + \alpha p).$$

Характеристичне рівняння замкнутої САР з урахуванням ланки ПК

$$W_1(p)W_2'(p)W_3(p) + 1 = 0$$

чи

$$k_1 \frac{1}{p} k_2 \frac{1}{p} (1 + \alpha p) \frac{k_3}{T_3 p + 1} + 1 = 0,$$

або

$$k_1 k_2 k_3 (1 + \alpha p) + (T_3 p + 1) p^2 = 0,$$

$$T_3 p^3 + p^2 + k_1 k_2 k_3 \alpha p + k_1 k_2 k_3 = 0.$$

Отже, дана система завдяки введенню послідовної коректувальної ланки перетворилася на структурно-стійку систему.

Передаточна функція розімкнутої системи до введення послідовної коректувальної ланки мала вигляд

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p).$$

Після введення послідовної коректувальної ланки передаточна функція розімкнутої системи

$$\begin{aligned} W^*(p) &= W_1(p)W_2'(p)W_3(p) = \\ &= W_1(p)W_2(p)(1 + \alpha p)W_3(p) = W(p)(1 + \alpha p), \end{aligned} \quad (4.48)$$

де $W_2'(p)$ — передаточна функція ланки 2 з урахуванням коректування.

Відповідний вираз АФХ запишеться так:

$$W^k(j\omega) = W(j\omega)(1 + j\alpha\omega) = W(j\omega) + jW(\omega)\alpha\omega.$$

Тоді $W^k(j\omega)$ (вектор АФХ скорегованої системи) можна представити як суму двох векторів відповідної розімкнутої системи: до коректування $W(j\omega)$ і вектора $jW(\omega)\alpha\omega$, повернутого на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки (α — параметр послідовної коректувальної ланки). При цьому слід пам'ятати, що множенню вектора на j у комплексній площині відповідає поворот його на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки.

Вихідна АФХ розімкнутої системи $W(j\omega)$, яка охоплює точку $C(-1, j0)$, показана на рис. 4.30. Якщо розімкнута система є стійкою, то з урахуванням критерію Найквіста можна стверджувати, що замкнута система в цьому випадку буде нестійкою.

Розглянемо поведінку тієї ж системи після введення послідовної коректувальної ланки. На рисунку показано дві точки характеристики скорегованої розімкнутої системи $W^k(j\omega)$, що відповідають частотам ω_1 і ω_2 , знайдені на основі побудови векторів $W^k(\omega_1)$ та $W^k(\omega_2)$.

Встановивши відповідну величину α , дістанемо характеристику $W^k(j\omega)$ (показану на рисунку штрихом), яка не охоплюватиме точку $C(-1, j0)$ і відповідатиме стійкій замкнутій системі.

За допомогою коректувальних ланок можна не тільки перетворити структурно-нестійку систему на структурно-стійку, а й зробити її стійкою, а також змінювати величину запасу стійкості та інші динамічні характеристики САР.

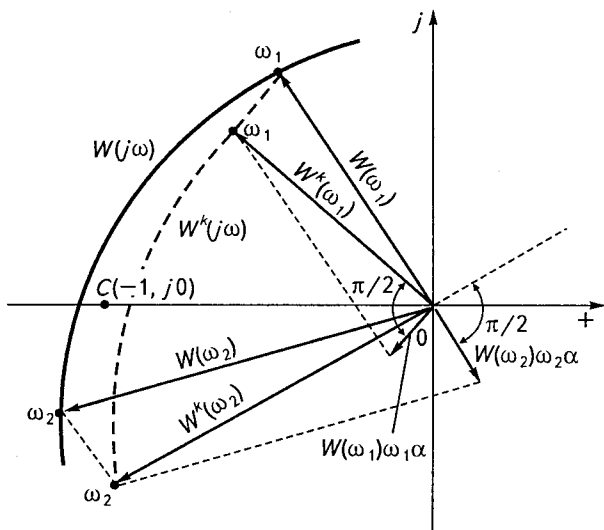


Рис. 4.30

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте поняття стійкості САР: «в цілому», «у великому» і «в малому».
2. Викладіть суть теореми Ляпунова і методу аналізу стійкості за рівняннями першого наближення.
3. Наведіть формули для доведення впливу вигляду коренів на стійкість САР.
4. Визначіть поняття запасу та межі стійкості.
5. Сформулюйте критерій стійкості Рауса—Гурвіца.
6. Що таке параметри Вишнеградського і який їхній вплив на стійкість системи?
7. Викладіть методику побудови годографа Михайлова.
8. Як визначити запас стійкості за допомогою критерію Михайлова?
9. Сформулюйте особливості методу D -розбиття і викладіть методику аналізу стійкості за його допомогою.
10. Сформулюйте загальну умову стійкості за методом Найквіста.
11. За якої умови буде стійкою замкнута система, якщо розімкнута система нестійка?
12. За якими ознаками можна визначити структурно-нестійку систему?
13. Що таке коректувальні ланки, їх основні види?
14. Нарисуйте схему введення послідовних і паралельних коректувальних ланок у систему.
15. Нарисуйте часову характеристику інтегральної ланки, охопленої паралельною коректувальною ланкою.
16. За яких коренів характеристичного рівняння замкнута САК буде на межі стійкості?
17. У чому полягає сенс критерію Льснара—Шіпара?
18. Сформулюйте умови знаходження САК на межі стійкості, які впливають із наслідку критерію Михайлова.
19. Які переваги мають логарифмічні частотні характеристики?

ЯКІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ І МЕТОДИ ЇХ ОЦІНКИ

5.1

Загальні відомості про якість САК

Розв'язання завдання автоматичного керування об'єктом залежить не тільки від стійкості САК, а й від інших показників, які в загальному випадку часто об'єднують єдиним поняттям — *якість системи керування*, що характерно лише для стійких систем. Якість системи оцінюється багатьма показниками, серед яких основними є: характер (вигляд) перехідного процесу, тривалість перехідного процесу, перерегулювання, точність (похибка) системи в усталеному режимі.

За характером перехідні процеси поділяють на монотонні, коливальні й аперіодичні з перерегулюванням.

Монотонними називають перехідні процеси, при яких відхилення регульованої величини x від усталеного значення x_0 плавно зменшується, без зміни знака похідної $\frac{dx}{dt}$ (рис. 5.1, а, криві 1 і 2). Окремим випадком монотонного процесу є аперіодичний.

Колівальними називають перехідні процеси, при яких у системі існують гармонічні коливання з деяким періодом T і амплітудою, що поступово зменшується (рис. 5.1, б).

Аперіодичними процесами з перерегулюванням називають перехідні процеси, за яких керована величина набуває усталеного значення після одного, двох або більше коливань з різними періодами (неперіодичні процеси) за наявності перерегулювання (рис. 5.1, в, криві 1 і 2).

Під *перерегулюванням* розуміють максимальне відхилення керованої величини в бік, протилежний початковому відхиленню від усталеного значення.

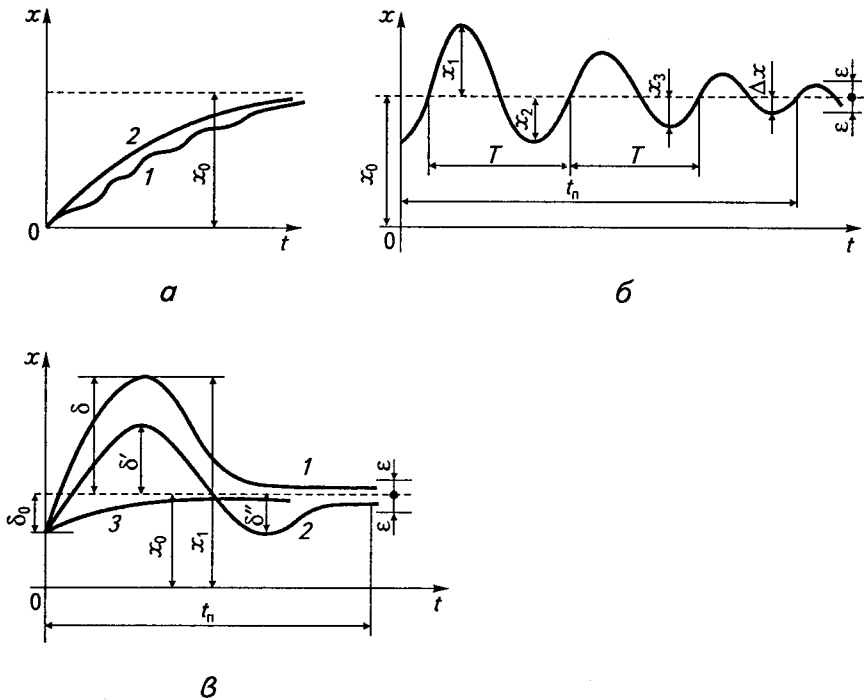


Рис. 5.1

За початкового відхилення δ_0 величина перерегулювання визначається як $\frac{x_1 - x_0}{x_0} = \frac{\delta}{x_0} = \sigma$ (рис. 5.1, в, крива 1) і δ'/x_0 (крива 2). При

цьому слід мати на увазі, що кривій 2 відповідають два екстремуми відхилень $\delta' > \delta''$ від заданого значення. Якщо в процесі регулювання значення регульованої величини залишається лише в одній зоні (зверху або знизу від усталеного значення), то перерегулювання відсутнє (крива 3) і перехідний процес такого вигляду вважають монотонним.

Тривалість (швидкодія) практично визначається часом t_n , за який відхилення Δx від заданого значення (рис 5.1, б) стане меншим за деяку достатньо малу величину ϵ (теоретично тривалість перехідного процесу $t_n = \infty$). Величина ϵ визначається вимогами до точності конкретної системи (процесу) і може дорівнювати від частки процента до 2...5 % і більше (для «грубих» систем).

Відхилення (похибка) Δx , яке виникає після закінчення перехідного процесу, називають *статичною помилкою (похибкою)*, а відхилення деякого значення регульованої величини у відповідний момент часу перехідного процесу від величини x_0 — *динамічною похибкою* $\Delta x(t)$.

Ступінь затухання перехідного процесу ψ є показником, що характеризує коливальні процеси. Її визначають за формулою

$$\psi(\%) = 100 \left(1 - \frac{x_2}{x_1} \right).$$

Чим більше значення ψ , тим швидше затухає перехідний процес.

Іноді для оцінки коливальних процесів використовують показник якості, який називають *логарифмічним декрементом* затухання. Він визначається як натуральний логарифм відношення амплітуд одного знака двох послідовних періодів (рис. 5.1, б):

$$d = \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Чим більшою є величина d , тим швидше затухає перехідний процес.

Оскільки межею стійкості в площині коренів є уявна вісь, на якій лежать нульові й суто уявні корені, то чим ближче до уявної осі знаходяться корені, тим менший запас стійкості має система. Для оцінки величини запасу стійкості використовують показник — *ступінь стійкості*, який визначається відстанню найближчого до уявної осі дійсного кореня або абсолютним значенням дійсної складової комплексного кореня.

Ступінь коливальності — показник, який визначається частотою власних коливань системи, що залежить від конструктивних особливостей об'єкта і системи керування в цілому. Як зазначалося раніше, наявність комплексних коренів у характеристичному рівнянні замкнутої системи зумовлює наявність складової коливального характеру в розв'язку рівняння вигляду

$$e^{\alpha t} D \sin(\beta t + \varphi),$$

де α, β — відповідно дійсна і уявна складові пари комплексних коренів $p_{k, k+1} = -\alpha \pm j\beta$.

Період коливань $T = \frac{2\pi}{\beta}$, число коливань за секунду $\nu = \beta/2\pi$.

Відношення уявної частини комплексного кореня до його дійсної частини μ називають *коливальністю перехідного процесу*. Чим більша величина μ , тим більше коливань в одиницю часу матиме дана система.

Ширина смуги пропускання — це показник якості САК у разі використання частотних характеристик, який визначається інтервалом частот, за яких амплітуда синусоїдального вхідного сигналу розімкнутої системи становить менше 30 %.

На логарифмічних амплітудно-частотних характеристиках смуга пропускання частот визначається частотами, для яких амплітуда більша за 3 дБ. Ширина смуги пропускання частот характеризує швидкодію системи і її фільтрувальні властивості.

Якість системи автоматичного керування насамперед визначається технологічними особливостями об'єкта. Так, у різних підйомних машинах, прокатних станах та в інших установках значної потужності, які мають великі моменти інерції, необхідною вимогою є забезпечення перехідного процесу, близького до аперіодичного з перерегулюванням не більш як 2...3 %. Виконання цієї вимоги призводить до збільшення тривалості перехідного процесу t_n .

Водночас у малоінерційних системах (обчислювальних, слідкуючих), де пріоритетним є вимога швидкодії системи (при заданій точності), бажано мати швидкозатухаючий коливальний процес.

5.2

Дослідження якості на основі рівняння незбурених коливань

Дослідження якості САК може виконуватись на основі розв'язання рівнянь замкнутої системи, а також за допомогою наближених методів оцінки якості.

Найзагальнішим методом є дослідження якості на основі розв'язання рівняння замкнутої системи. Як приклад розглянемо рівняння системи стабілізації

$$[P(p) + Q(p)]x = P_1(p)S(p)F(p),$$

яке після відповідних перетворень можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x &= \\ = b_0 \frac{d^m F}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} F}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dF}{dt} + b_m F. \end{aligned}$$

Дане рівняння є диференціальним лінійним неоднорідним рівнянням n -го порядку. Згідно з принципом суперпозиції його розв'язок можна подати як алгебричну суму загального $x_{\text{пер}}$ і часткового x_0 розв'язків:

$$x = x_{\text{пер}} + x_0.$$

Загальний розв'язок можна дістати на основі рівняння вільного руху

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0,$$

звідки

$$x_{\text{пер}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t},$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов; p_1, \dots, p_n — корені характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Вираз $x_{\text{пер}}$ залежно від коренів p_1, \dots, p_n було досліджено раніше при вивченні стійкості системи.

Частковий розв'язок x_0 знаходять при умові $t \rightarrow \infty$, коли вихідне рівняння набуває вигляду

$$a_n x_0 = b_m F,$$

звідки

$$x_0 = \frac{b_m}{a_n} F.$$

Побудована, як приклад, характеристика $x = f(t)$ (рис 5.2) є кривою процесу регулювання в замкнутій системі, яка визначається з рівності

$$x = x_{\text{пер}} + x_0 = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t} + \frac{b_m}{a_n} F.$$

З викладеного вище можна зробити висновок, що тривалість перехідного процесу t_n та інші показники якості визначаються загальним розв'язком вихідного рівняння $x_{\text{пер}}$ і залежать тільки від коренів характеристичного рівняння. Частковий розв'язок впливає лише на загальне значення регульованої величини і на величину помилок (похибок) системи. Тому при дослідженні якості САК на основі рівняння замкнутої системи часто обмежуються тільки аналізом величини $x_{\text{пер}}$ — вивчають поведінку системи залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння.

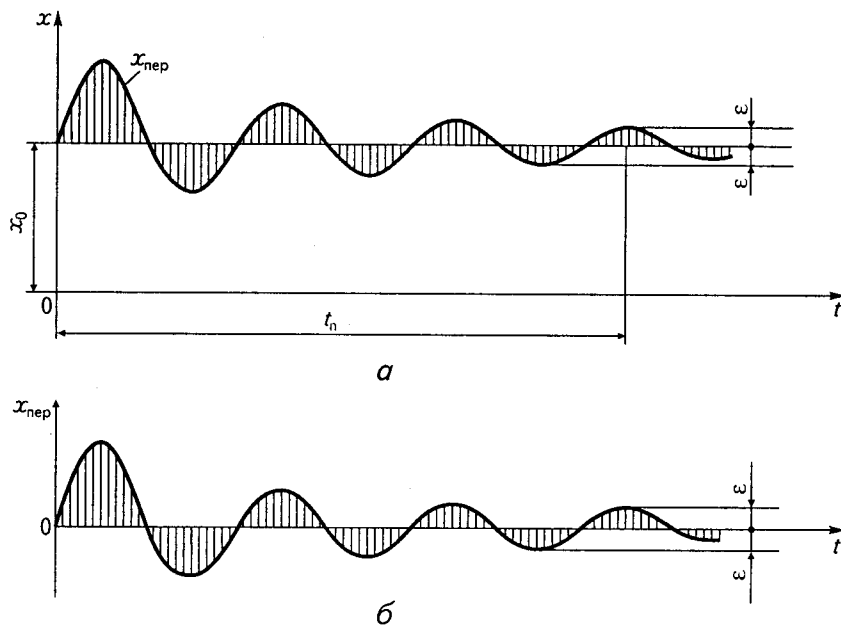


Рис. 5.2

Аналіз якості САК на основі розв'язання рівняння незбудурених коливань. Як приклад розглянемо систему другого порядку, рівняння незбудурених коливань якої

$$a_0 \frac{d^2 x_{\text{пер}}}{dt^2} + a_1 \frac{dx_{\text{пер}}}{dt} + a_2 x_{\text{пер}} = 0. \quad (5.1)$$

В операторній формі воно записується так:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x_{\text{пер}} = 0.$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{пер}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (5.2)$$

де $p_1 < 0$; $p_2 < 0$ — корені характеристичного рівняння

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0; \quad (5.3)$$

C_1, C_2 — сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами.

Нехай початкові умови (при $t = 0$) задані:

$$x_{\text{пер}}(0) = x_0; \quad x'_{\text{пер}}(0) = x_0 \text{ пер}.$$

Знайдемо їх значення з рівняння (5.2):

$$\begin{cases} x_{\text{пер}}(0) = C_1 + C_2; \\ x'_{\text{пер}}(0) = p_1 C_1 + p_2 C_2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Із системи рівнянь (5.4)

$$C_1 = x_{\text{пер}}(0) - C_2.$$

Підставляючи дане значення у вираз $x'_{\text{пер}}(0)$, дістаємо

$$x'_{\text{пер}}(0) = (x_{\text{пер}}(0) - C_2) p_1 + p_2 C_2,$$

звідки

$$x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0) p_1 = C_2 (p_2 - p_1),$$

або

$$C_2 = \frac{x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0) p_1}{p_2 - p_1} = \frac{x_{\text{пер}}(0) p_1 - x'_{\text{пер}}(0)}{p_1 - p_2};$$

$$C_1 = \frac{x_{\text{пер}}(0)(p_2 - p_1) - x'_{\text{пер}}(0) + x_{\text{пер}}(0) p_1}{p_2 - p_1} = \frac{x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0) p_2}{p_1 - p_2}.$$

Підставляючи знайдені значення C_1 і C_2 в рівняння незбурених коливань, одержуємо

$$x_{\text{пер}} = \frac{x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0) p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{x_{\text{пер}}(0) p_1 - x'_{\text{пер}}(0)}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (5.5)$$

Аналіз цього виразу дає змогу зробити принциповий висновок про те, що *якість лінійних САР залежить не тільки від вигляду коренів характеристичного рівняння, а й від початкових умов.* (При цьому треба пам'ятати, що стійкість лінійних САР залежить лише від коренів характеристичного рівняння, які своєю чергою залежать від значень параметрів ланок системи.)

Першу складову $x_{\text{пер}}$ в рівнянні (5.5) позначимо через A , а другу — B . Проаналізуємо вирази A і B при різних коренях p_1, p_2 і різних початкових умовах, побудувавши відповідні характеристики $A(t), B(t)$. При цьому слід мати на увазі, що корені характеристичного рівняння матимуть вигляд

$$p_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}; \quad p_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0},$$

звідки випливає, що за умови $a_1^2 > 4a_0a_2$ корені p_1, p_2 дійсні й різні, а за $a_1^2 < 4a_0a_2$ — корені комплексні.

Розглянемо окремі можливі випадки у разі дійсних від'ємних коренів $p_1 < 0; p_2 < 0$.

Нехай початкові умови будуть додатними: $x_{\text{пер}}(0) > 0; x'_{\text{пер}}(0) > 0$. Оскільки $|p_2| > |p_1|$, то чисельник і знаменник у виразі A більше нуля, а у виразі B чисельник менше нуля, а знаменник — більше нуля. Початкові значення $|A(0)| > |B(0)|$.

Відповідні залежності $A(t)$ і $B(t)$ показано на рис. 5.3, а, а результуюча величина $x_{\text{пер}} = A(t) + B(t)$ — на рис. 5.3, б. Із побудованого графіка видно, що $x_{\text{пер max}} = (a - b) > x(0)$. Отже, у цьому випадку в системі виникає перерегулювання.

Знайдемо екстремум функції $x_{\text{пер}}(t)$ з умови

$$\frac{dx_{\text{пер}}}{dt} = \frac{x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)p_2}{p_1 - p_2} p_1 e^{p_1 t} + \frac{x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)}{p_1 - p_2} p_2 e^{p_2 t} = 0,$$

звідки

$$[x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)p_2] p_1 e^{p_1 t} + [x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)] p_2 e^{p_2 t} = 0.$$

Розділивши обидві частини рівняння на $[x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)] p_2 e^{p_2 t}$, дістанемо

$$\frac{[x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)p_2] p_1}{[x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)] p_2} e^{(p_1 - p_2)t} + 1 = 0$$

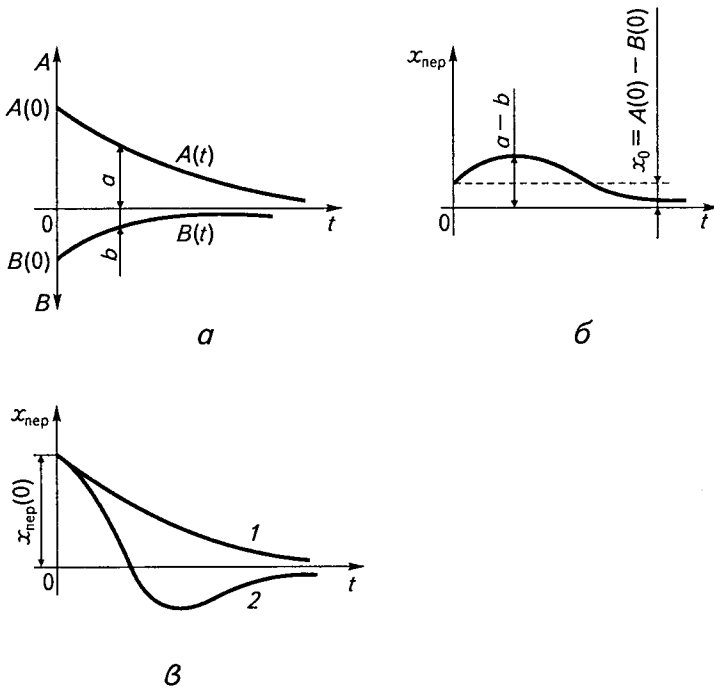


Рис. 5.3

або

$$e^{(p_1 - p_2)t} = \frac{[x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)]p_2}{[x_{\text{пер}}(0)p_2 - x'_{\text{пер}}(0)]p_1}.$$

Злогарифмувавши це рівняння, дістанемо значення часу t_m , яке відповідає екстремуму функції $x_{\text{пер}}(t)$:

$$t_m = \ln \frac{p_2 [x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)]}{p_1 [x_{\text{пер}}(0)p_2 - x'_{\text{пер}}(0)]} \frac{1}{p_1 - p_2}.$$

Підставивши відповідні числові значення t_m у вихідний вираз $x_{\text{пер}}(t)$, знайдемо його екстремальне значення $x_{\text{пер max}}(t_m)$.

Нехай $x_{\text{пер}}(0) > 0$, а $x'_{\text{пер}}(0) = 0$. З аналізу величин $A(t)$ і $B(t)$ випливає, що в цьому разі $A(t) = 0$; $B(t) < 0$. Оскільки $|p_2| > |p_1|$, то зникнен-

ня складової $x'_{\text{пер}}(0)$ більше вплине на величину $B(t)$, ніж на $A(t)$. Тому перехідний процес може не мати перерегулювання (рис. 5.3, *в*, крива 1).

Нехай $x_{\text{пер}}(0) > 0$ і $x'_{\text{пер}}(0) < 0$. Похідна від початкових умов із від'ємним знаком різною мірою впливає на вирази $A(t)$ і $B(t)$. У цьому разі можливе перерегулювання та зміщення перехідного процесу в зону від'ємних значень $x_{\text{пер}}(t)$ (рис. 5.3, *в*, крива 2).

Розглянемо випадок комплексних коренів з від'ємними дійсними частинами $p_1 = -\alpha + j\beta$ і $p_2 = -\alpha - j\beta$. При цьому

$$e^{p_1 t} = e^{-\alpha t} e^{j\beta t} = e^{-\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t);$$

$$e^{p_2 t} = e^{-\alpha t} (\cos \beta t - j \sin \beta t).$$

Підставивши знайдені значення у вираз $x_{\text{пер}}(t)$, дістанемо

$$\begin{aligned} x_{\text{пер}}(t) &= e^{-\alpha t} \left\{ \frac{x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)(-\alpha - j\beta)}{2j\beta} (\cos \beta t + j \sin \beta t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_{\text{пер}}(0)(-\alpha + j\beta) - x'_{\text{пер}}(0)}{2j\beta} (\cos \beta t - j \sin \beta t) \right\} = \\ &= e^{-\alpha t} \left\{ \frac{[x'_{\text{пер}}(0) + \alpha]x_{\text{пер}}(0)}{\beta} \sin \beta t + x_{\text{пер}}(0) \cos \beta t \right\} \end{aligned}$$

або

$$x_{\text{пер}}(t) = x(0)e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (5.6)$$

Перехідний процес є коливанням із затухаючою амплітудою, залежною від початкових умов: початкова фаза $\varphi_0 = \arctg \frac{\beta}{x'_{\text{пер}}(0) + \alpha}$,

амплітуда $A(0) = x(0)e^{-\alpha t}$.

Проведений аналіз і знайдені вирази $x_{\text{пер}}(t)$ показують, що за виглядом коренів і початковими умовами можна відповісти на всі основні питання про якість САР. Водночас викладена методика навіть для простого випадку — системи регулювання другого порядку — потребує аналізу досить складних виразів. Ці труднощі значно зростають за високих степенів рівняння, особливо у разі дослідження якості в умовах зміни параметрів ланок системи (зміна лише одного параметра системи призводить до зміни всіх n коренів характеристичного рівняння). У зв'язку з цим у ТАК велике поширення набули

різні наближені методи, які дають змогу мати відповіді на окремі питання про якість без розв'язання рівняння системи.

5.3

Наближені методи оцінки якості

Існують три основні види наближених методів оцінки якості: кореневі, інтегральні й частотні.

Кореневі методи оцінки якості. Крім розглянутого раніше методу аналізу якості за кривою незбурених коливань, який можна віднести до даного виду методів, до корневих належать такі методи: оцінки якості за розміщенням коренів на комплексній площині; за допомогою діаграм зон параметрів; за полюсами і нулями передаточної функції; методи корневих годографів, стандартних діаграм, процесів і коефіцієнтів.

Розглянемо, як приклади, окремі найхарактерніші методи.

Оцінка якості за розміщенням коренів на комплексній площині. Одним із методів цієї групи є метод оцінки якості за найменшим коренем — коренем, найближчим до вертикальної осі комплексної площини коренів.

Якщо найменший дійсний корінь системи $p_1 = -\alpha_1$ (рис. 5.4), то аперіодичний ступінь стійкості системи дорівнює h_1 .

Якщо найближче до вертикальної осі розмістяться пара комплексних коренів

$$p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta,$$

то ступінь стійкості називають коливальним і позначають $h = \alpha$. Коливаль-

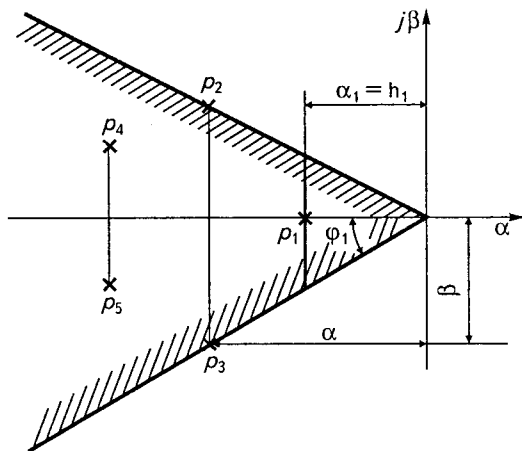


Рис. 5.4

ність системи в цьому разі $\mu = \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$. Як зазначалося раніше, за наявності комплексних коренів у розв'язку рівняння незбурених коливань системи з'являється складова вигляду

$$C_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \gamma).$$

Період коливань у цьому разі $T = 2\pi/\beta$. Амплітуда синусових коливань $C_2 e^{-\alpha t}$ має зсув за фазою відносно початку координат на кут γ .

За час, що відповідає одному періоду коливань T , нове значення амплітуди обчислюється за формулою

$$C_2 e^{-\alpha \left(t + \frac{2\pi}{\beta} \right)} = C_2 e^{-\alpha t} e^{-2\pi \frac{\alpha}{\beta}}.$$

Звідси випливає, що чим більша величина коливальності μ , тим довше загасатиме перехідний процес. При цьому ступінь стійкості ($h = \alpha$) зменшуватиметься.

Так, за аперіодичної стійкості складова перехідного процесу, яка відповідає найменшому дійсному кореню p_1 , дорівнює $C_1 e^{-h t}$. Тривалість затухання перехідного процесу до величини, що становить 5 % від початкового значення $x_0 = C_1$, яке умовно вважаємо таким, що відповідає закінченню перехідного процесу в даній системі, можна знайти з виразу

$$0,05x_0 = x_0 e^{-h t_n},$$

звідки $\ln 0,05 = -t_n h$, або $t_n = -\frac{\ln 0,05}{h} \approx 3/h$.

Отже, тривалість перехідного процесу обернено пропорційна ступеню стійкості. Звідси можна зробити висновок, що тривалість перехідного процесу прямо пропорційна ступеню затухання коливально-перехідного процесу, для якого $\mu = \beta/h$.

Якщо ставляться обмеження щодо тривалості (t_n) або коливальності (μ), то це приведе до необхідності розміщення всіх інших коренів у деякій зоні, обмеженій величиною h_1 і кутом $\varphi_1 = \arctg \mu_1$. При цьому всі інші складові (рис. 5.5, а) кривої перехідного процесу $x_k(t) = C_k e^{p_k t}$ (або $x_k(t) = C_{k1,2} e^{(\alpha \pm \beta j)t}$), що визначаються коренями, які лежать у межах даної зони, затухатимуть швидше. Показані на рисунку криві перехідних процесів відповідають від'ємним дійсним кореням

$$|p_1| = |p_1| < |p_2| < |p_3| < |p_4|.$$

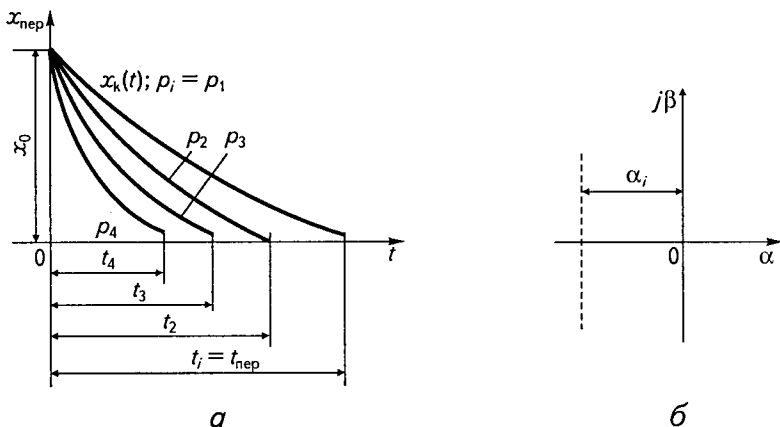


Рис. 5.5

Отже, чим менший корінь, тим довше затухає перехідний процес. Тому в деяких випадках можна задовольнитись дослідженнями за мінімальним коренем p_i , якому відповідає найдовший процес, що визначає тривалість перехідного процесу в усій системі ($t_i = t_{пер}$).

У зв'язку з викладеним виникає задача знаходження мінімального кореня. Для її розв'язання у 1941 р. І. М. Вознесенський запропонував такий метод.

1. Знаходять мінімальне значення кореня за умови, що за час t_n величина відхилення регульованої величини x від її початкового значення x_0 дорівнюватиме $m\%$.

Цю вимогу можна виконати, якщо найменша дійсна частина кореня характеристичного рівняння замкнутої системи не буде меншою за деяку величину α_i .

Оскільки всі інші складові перехідного процесу вигляду $C_k e^{p_k t}$ затухатимуть швидше, то рівняння системи зводиться до рівняння першого порядку

$$x = x_0 e^{\alpha_i t}.$$

Згідно з поставленою умовою $x = x_0 \cdot 0,01m$, тому можна записати

$$x_0 \cdot 0,01m = x_0 e^{\alpha_i t},$$

звідси дістанемо формулу мінімального кореня

$$\alpha_i = \frac{\ln 0,01m}{t}. \quad (5.7)$$

2. Перевіряють «мінімальність» знайденого за формулою (5.7) кореня α_i в умовах даної системи.

Для цього вертикальну вісь у комплексній площині коренів переміщують вліво на відстань α_i (рис. 5.5, б). У новій системі координат (після переміщення вертикальної осі) характеристичне рівняння замкнутої системи матиме вигляд

$$a_0(p - \alpha_i)^n + a_1(p - \alpha_i)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p - \alpha_i) + a_n = 0.$$

(У дане рівняння підставляють абсолютне значення величини мінімального кореня α_i .) Після розкриття дужок і зведення подібних членів дістаємо нове характеристичне рівняння того самого порядку, але за іншого значення коефіцієнтів

$$a'_0 p^n + a'_1 p^{n-1} + \dots + a'_{n-1} p + a_n = 0. \quad (5.8)$$

3. Якщо нова система з характеристичним рівнянням (5.8) буде нестійкою, то це означає, що визначений за заданими умовами якості системи мінімальний корінь в дійсності не є мінімальним. Тому в даній системі неможливо виконати поставлену умову (t_n , m %). В цьому разі можливі такі варіанти наступних дій: або погодитися з тим, що поставлену умову виконати неможливо, або змінити її відносно t_n і m і знайти відповідне нове значення мінімального кореня α_{i+1} і перевірити його мінімальність. На основі даного методу можна також визначити значення настроювальних параметрів системи для знаходження потрібних показників якості.

□ **Приклад 5.1.** Дослідити якість замкнутої системи, характеристичне рівняння якої

$$p^4 + 2p^3 + 11p^2 + 15p + 5(1+k) = 0,$$

за методом мінімального кореня знайти коефіцієнт підсилення розімкнутої системи k , при якому відхилення регульованої величини від заданого значення за час $\tau = 3,5$ с не перевищувало б 5 % ($m = 5$ %).

Розв'язання. Для виконання поставленої умови знайдемо необхідне значення мінімального кореня

$$\alpha_i = \frac{\ln 0,01m}{\tau} = \frac{\ln 0,05}{3,5} = \frac{\ln 5 - 2 \ln 10}{3,5} = \frac{1,6 - 4,6}{3,5} = -0,85.$$

Нове характеристичне рівняння після переміщення вертикальної осі вліво на величину $|\alpha_i| = 0,85$ матиме вигляд

$$(p - 0,85)^4 + 2(p - 0,85)^3 + 11(p - 0,85)^2 + 15(p - 0,85) + 5(1 + k) = 0$$

або після перетворень

$$p^4 - 1,56p^3 + 10,2p^2 - 1,84p - 0,26 + 5k = 0.$$

Наявність від'ємних коефіцієнтів згідно з критерієм Гурвіца означає нестійкість системи, що своєю чергою зумовлює неможливість виконання поставленої умови за будь-якого значення k .

Дослідимо дану систему за інших умов стосовно якості САР. Нехай допустима тривалість перехідного процесу $\tau = 20$ с при $m = 5\%$.

Обчислимо значення мінімального кореня

$$\alpha_i = \frac{\ln 0,05}{20} = -\frac{3,0}{20} = -0,15.$$

Характеристичне рівняння відповідної системи, яка враховує перенос вертикальної осі вліво на відстань $h = 0,15$, матиме вигляд

$$(p - 0,15)^4 + 2(p - 0,15)^3 + 11(p - 0,15)^2 + 15(p - 0,15) + 5(1 + k) = 0.$$

Після перетворень воно запишеться так:

$$p^4 + 1,4p^3 + 10,24p^2 + 11,8p + 3 + 5k = 0.$$

Для перевірки стійкості системи використаємо критерій Гурвіца. При $n = 4$ необхідна і достатня умова (крім додатного знака коефіцієнтів, що витримується в даному разі) $\Delta_3 > 0$.

Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1,4 & 11,8 & 0 & 0 \\ 1 & 10,24 & 3 + 5k & 0 \\ 0 & 1,4 & 11,8 & 0 \\ 0 & 1,0 & 10,24 & 3 + 5k \end{vmatrix},$$

звідки умова стійкості

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1,4 & 11,8 & 0 \\ 1,0 & 10,24 & 3 + 5k \\ 0 & 1,4 & 11,8 \end{vmatrix} = 1,4 \cdot 10,24 \cdot 11,8 - 1,4^2(3 + 5k) > 0$$

або $24,2 - 9,7k > 0$, або $k < 2,5$.

Цей результат означає, що при $k < 2,5$ за час $\tau = 20$ с можна одержати відхилення регульованої величини в САК, яке дорівнює 5% від початкового значення.

Аналіз якості за допомогою діаграм зон параметрів. Характерним прикладом цієї групи методів може бути розширена діаграма Вишнеградського (рис. 5.6), яка будується на основі розглянутої раніше діаграми (див. рис. 4.5).

На розширеній діаграмі виділяються чотири зони: I; II; III; IV, які відповідають різним виглядам коренів і їхньому розміщенню відносно вертикальної осі в комплексній площині коренів.

Зона IV, як відомо, задовольняє умову $XY < 1$. Її межею є рівнобічна гіпербола CD , рівняння якої $XY = 1$, де X, Y — параметри Вишнеградського. Цій зоні, яка є зоною нестійкого стану системи, відповідає наявність коренів з додатною дійсною частиною (або дійсних додатних) в характеристичному рівнянні замкнутої системи.

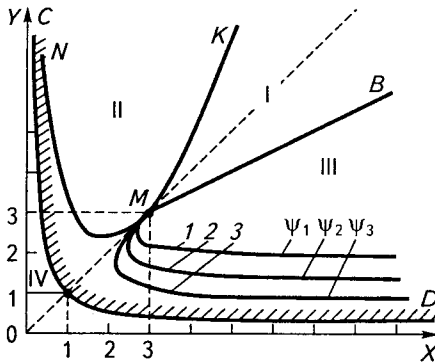


Рис. 5.6

Зони I, II, III у площині $X-Y$ є зонами стійкого стану системи, але їм відповідають різні види й розміщення коренів і, як результат, різний вигляд перехідних процесів.

Особливості розміщення коренів і вигляд перехідного процесу, що відповідає кожній зоні, показано на рис. 5.7. Розміщення в комплексній площині коренів наведено на рис. 5.7, а, б, в, а характеристики відповідних перехідних процесів — на рис. 5.7, a_1, b_1, v_1 .

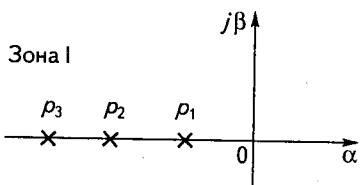
Можливі варіанти розміщення коренів, що відповідають нестійкій зоні IV, показано на рис. 5.7, г, д, е, є.

Зона I, межа якої KMB (див. рис. 5.6), є зоною аперіодичних процесів. Їй відповідають від'ємні дійсні корені характеристичного рівняння системи третього порядку p_1, p_2, p_3 (рис. 5.7, а, a_1). Умова знаходження коренів у даній зоні

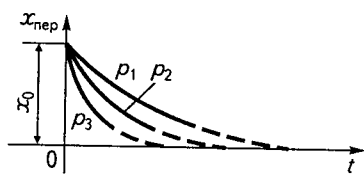
$$4(X^3 + Y^3) - 18XY - X^2Y^2 + 27 < 0,$$

де $X = \frac{C_1}{\sqrt[3]{C_3}}$; $Y = \frac{C_2}{\sqrt[3]{C_3^2}}$; C_1 і C_2 — коефіцієнти перетвореного характе-

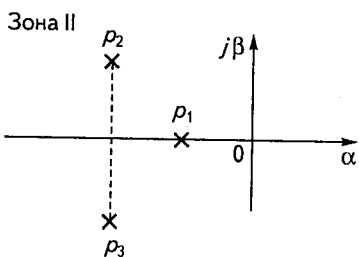
ристичного рівняння $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$. Після ділення всіх його коефіцієнтів на a_0 воно матиме вигляд



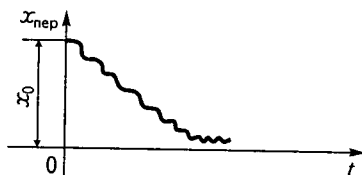
a



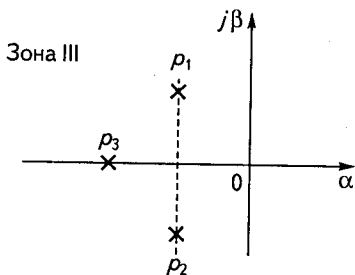
*a*₁



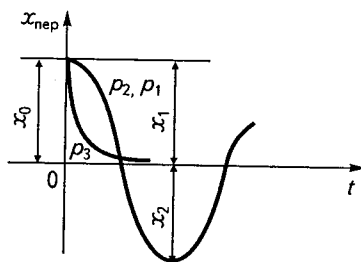
б



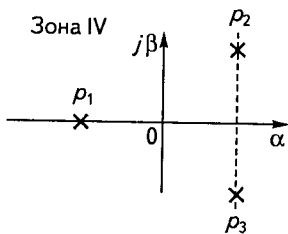
*б*₁



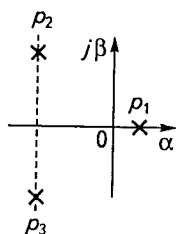
в



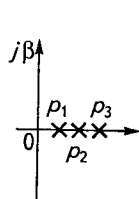
*в*₁



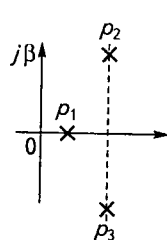
г



д



е



е

Рис. 5.7

$$p^3 + C_1 p^2 + C_2 p + C_3 = 0.$$

Зона II, межа якої *KMN*, відокремлює зону монотонних процесів (рис 5.7, б, б₁). Близчим до вертикальної осі є дійсний корінь p_1 .

Рівняння межі зони має вигляд

$$2X^3 - 9XY + 27 = 0.$$

Розміщення коренів і вигляд перехідного процесу в зоні III, межа якої *DMB*, показано на рис. 5.7, в, в₁. Оскільки дійсний корінь p_3 розміщується далі від вертикальної осі, характер перехідного процесу коливальний.

Умова знаходження коренів у зоні III

$$4(X^3 + Y^3) - 18XY - X^2Y^2 + 27 > 0.$$

Ступінь затухання перехідного процесу

$$\psi(\%) = 100 \left(1 - \frac{x_2}{x_1} \right).$$

Розширена діаграма Вишнеградського в зоні III може бути доповнена кривими однакового ступеня затухання перехідного процесу (1...3); при цьому $\psi_1 > \psi_2 > \psi_3$.

Для задовільної якості перехідного процесу вважають, що ψ має бути не менше 80 %. Це відповідає умові $x_2/x_1 \leq 0,2$.

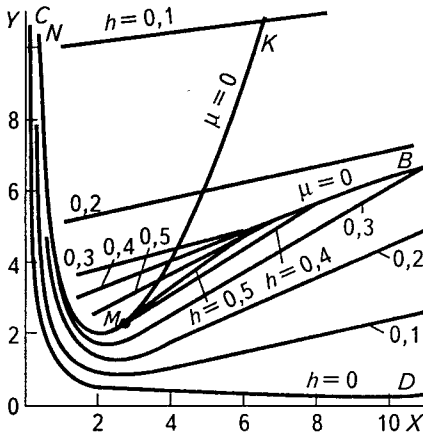


Рис. 5.8

Для переходу від параметрів Вишнеградського до параметрів відповідних ланок системи потрібні досить громіздкі розрахунки, для спрощення яких було побудовано спеціальні номограми.

Деякі дослідники діаграму Вишнеградського доповнили кривими однакового ступеня стійкості h (рис. 5.8) і однакового ступеня коливальності μ (рис. 5.9); $\mu = 0$ відповідає межі «аперіодичної» області, а $\mu = \infty$ — межі стійкості.

Як видно із діаграми, найбільший ступінь стійкості забезпечується в районі точки *M*, для якої

$h = 1$. Проте за кратності кореня швидкодія системи може бути значно меншою, ніж при трохи менших ступенях стійкості.

З погляду швидкодії системи рекомендовано ступінь стійкості обмежувати зверху і знизу лініями $h = 0,5$.

У технічній літературі існують також нормовані діаграми для систем вищих порядків.

Якщо система вищого порядку з достатньою точністю зводиться до системи з $n = 3$, то можна одержати наближені результати на основі діаграм Вишнеградського.

Метод оцінки якості за полюсами і нулями передаточної функції. Даний метод також належить до кореневих.

Розглянемо передаточну функцію замкнутої системи за збуренням:

$$W^f(p) = \frac{\Delta x}{\Delta f} = \frac{W_o^f(p)}{1 + W(p)},$$

де Δx , Δf — відповідно відхилення регульованої величини і збурення; $W_o^f(p)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням; $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

Звідси дістанемо

$$\Delta x = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \Delta f.$$

Враховуючи, що відхилення $\Delta x = x - x_0$ визначає перехідну складову загального розв'язку, запишемо

$$x_{\text{пер}}(t) = \frac{W_o^f(p)}{1 + W(p)} \Delta f.$$

Як відомо, характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд $1 + W(p) = 0$, тому знаменник передаточної функції можна подати як n співмножників:

$$a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

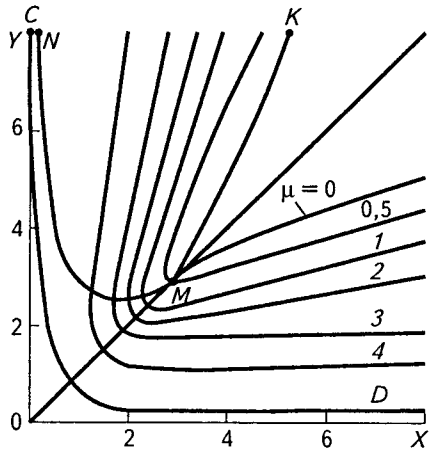


Рис. 5.9

де p_1, \dots, p_n — корені характеристичного рівняння замкнутої системи, які називають *полюсами передаточної функції*.

Чисельник передаточної функції аналогічно можна подати у вигляді m співмножників ($m < n$) виразу $kN(p)$, де k — коефіцієнт передачі об'єкта за збуренням, а $N(p)$ — многочлен вигляду

$$N(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m = b_0 (p - p'_1)(p - p'_2) \dots (p - p'_m),$$

де p'_1, p'_2, p'_3 — корені чисельника передаточної функції, які називають *нулями передаточної функції*.

Тоді згідно з викладеним

$$x_{\text{пер}}(t) = \frac{kb_0 (p - p'_1)(p - p'_2) \dots (p - p'_m)}{a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \Delta f.$$

Звідси випливає, що амплітуда перехідного процесу залежить від розміщення полюсів і нулів передаточної функції. Так, в ідеальному випадку при $p_1 = p'_1, p_1 = p'_2, \dots, p_n = p'_m$ (у разі $n = m$)

$$x_{\text{пер}}(t) = \frac{kb_0}{a_0} \Delta f.$$

При $\Delta f = \text{const}$ система еквівалентна безінерційній (підсилювальній) ланці.

На основі викладеного можна стверджувати, що для швидшого затухання перехідного процесу потрібно, щоб полюси і нулі передаточної функції розміщувалися ближче один до одного.

Методи кореневих годографів. Кореневим годографом називають характеристики в комплексній площині коренів характеристичного рівняння замкнутої системи, які дістають, поступово змінюючи деякі параметри від 0 до $+\infty$.

За допомогою кореневих годографів можна визначити взаємну залежність параметрів і коренів системи, тобто встановити, як впливає зміна параметра на величину і вигляд кореня, а отже, і на відповідні показники якості.

Існують різні методи побудови кореневих годографів. Крім кореневих годографів, у ТАК використовуються також так звані обернені методи, суть яких полягає в порівнянні коефіцієнтів дійсного рівняння системи з коефіцієнтами деякого еталонного рівняння. В результаті такого порівняння за розходженням значень коефіцієнтів рівнянь визначають якість реальної системи.

У загальному випадку рівняння лінійної замкнутої системи n -го порядку

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n)x = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m)f.$$

Дане рівняння замінюють деяким стандартним рівнянням на основі введення оператора $D = p/\omega_0$ ($\omega_0 = 1/T$; T — стала часу об'єкта) і ділення всіх коефіцієнтів рівняння на a_0 ; змінні x і f будуть функціями безрозмірного часу $\tau = \omega_0 t$ (t — реальний час).

Стандартне рівняння матиме вигляд

$$(D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1)x = (B_m D^m + B_{m-1} D^{m-1} + \dots + B_0)f,$$

де

$$A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n \omega_0}; \quad \dots; \quad A_1 = \frac{a_1}{a_n \omega_0^{n-1}};$$

$$B_m = \frac{b_m}{a_0 \omega_0^{n-m}}; \quad \dots; \quad B_0 = \frac{b_0}{a_n \omega_0^n}; \quad \omega_0^n = \frac{a_0}{b_n}.$$

Оскільки стандартна форма рівняння безрозмірна, то системи з однаковими показниками якості, за винятком тривалості процесу, можна досліджувати за одним і тим самим рівнянням.

Методи стандартних діаграм, процесів і коефіцієнтів. Типові збурення. Характерним прикладом методу нормованих діаграм для систем третього порядку є розширена діаграма Вишнеградського, розглянута раніше.

Стандартні процеси одержують у системі у разі дії деяких типових (стандартних) збурень. Рівняння системи при цьому записують у стандартній формі. Типові збурення використовують у теоретичних і експериментальних дослідженнях як деякі еталонні збурення, за якими визначається реакція системи і робляться відповідні висновки про її якість.

Існують такі основні типові збурення.

✓ *Одиничний кидок навантаження (одиничне збурення)* — це різке збільшення прийнятого за одиницю навантаження, що діє тривалий час. Його умовне позначення $l(t)$ (рис. 5.10, а). Різкий скид одиничного навантаження відповідає графіку на рис. 5.10, б.

✓ *Одиничний імпульс* — типове збурення вигляду короткочасної дії одиничного навантаження, яке визначається як $l'(t)$ (рис. 5.11, а).

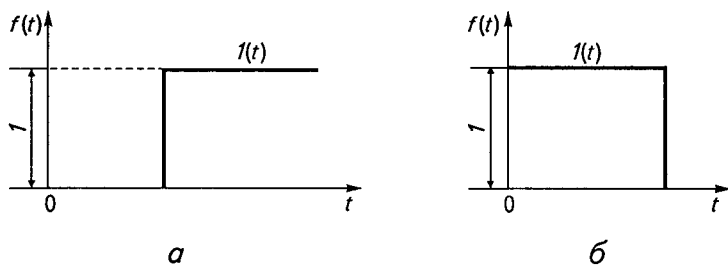


Рис. 5.10

✓ Гармонічні одиничні коливання є синусоїдальними коливаннями з амплітудою, прийнятою за одиницю (період коливань T — стала величина) (рис. 5.11, б). Такі типові збурення використовуються також при знаходженні частотних характеристик ланок.

Прикладом використання методів стандартних процесів може бути формула оптимального процесу, яку дістав В. В. Солодовніков:

$$x_{\text{опт}}(t) = \frac{1}{2} at^2 I(t) - a \left(t - \frac{\tau_{\text{опт}}}{2} \right)^2 I \left[t - \frac{\tau_{\text{опт}}}{2} \right] + \frac{1}{2} a (t - \tau_{\text{опт}})^2 I [t - \tau_{\text{опт}}],$$

де $a = d^2 x/dt^2$ — прискорення; $\tau_{\text{опт}}$ — безрозмірний час оптимального процесу.

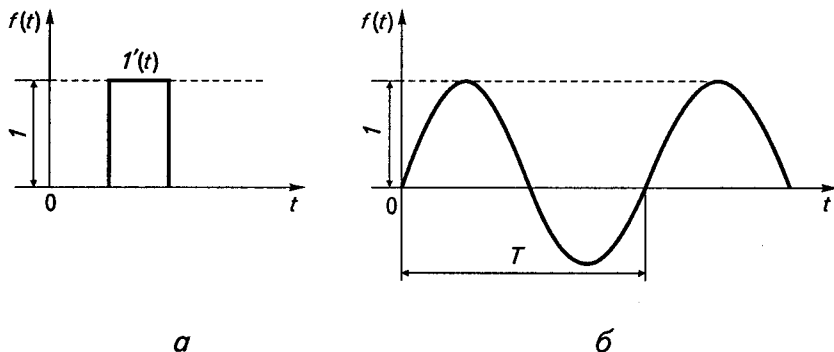


Рис. 5.11

Усталене значення регульованої величини $x_{\text{опт}}(\infty) = \frac{a\tau_{\text{опт}}^2}{4}$. Для оптимального процесу можна вважати, що відхилення після його завершення дорівнюватиме нулю, тому

$$x_{\text{опт}}(\infty) = u(0),$$

де $u(t)$ — керуюча дія; $u(0)$ — початкове значення керуючої дії.

Звідси

$$\tau_{\text{опт}} = 2\sqrt{\frac{u(0)}{a}}.$$

У даному випадку дослідження проводилося за умови дії на систему деякого стандартного, одиничного збурення (одиничного кидка навантаження).

Метод стандартних коефіцієнтів дає змогу вибрати параметри проекрованої системи таким чином, щоб дістати перехідний процес, що відповідає стандартній системі.

Процес у реальній системі буде тим ближче до процесу в стандартній системі, чим ближче реальні коефіцієнти до відповідних коефіцієнтів стандартної системи. Для практичного використання даного методу потрібні таблиці, розраховані для типових передаточних функцій, і перетворення передаточних функцій реальної системи до вигляду, найближчому (в ідеальному випадку — такому, що повністю збігається) до вигляду типової передаточної функції.

Так, при передаточній стандартній функції замкнутої системи вигляду

$$\Phi(D) = \frac{B_1 D + 1}{D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1}$$

найкращими за величиною перерегулювання ($\sigma \leq 10\%$) є коефіцієнти, які було знайдено з умови розподілу коренів за арифметичною прогресією (табл. 5.1).

Для передаточних функцій вигляду

$$\Phi(D) = \frac{B_2 D^2 + B_1 D + B_0}{D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1};$$

$$\Phi(D) = \frac{1}{D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1}$$

аналогічні таблиці наведено також у підручниках з теорії автоматичного керування.

Таблиця 5.1

Перший член прогресії коренів	Різниця прогресії	Характеристичне рівняння замкнутої системи $D^n + A_{n-1}D^{n-1} + \dots + A_1D + A_0 = 0$	Примітки
0,5	2	$D^2 + 2,5D + 1 = 0$	$\sigma < 10 \%$, процес у безрозмірному часі
0,183	1,517	$D^3 + 5,1D^2 + 6,3D + 1 = 0$	—
0,098	1,138	$D^4 + 7,2D^3 + 16D^2 + 12D + 1 = 0$	—
0,063	0,867	$D^5 + 9D^4 + 29D^3 + 38D^2 + 18D + 1 = 0$	—
0,039	0,717	$D^6 + 11D^5 + 43D^4 + 83D^3 + 73D^2 + 25D + 1 = 0$	—

Для об'єктивності оцінки розглянутих методів слід зазначити, що деякі з них не тільки наближені, а й потребують досить трудомістких розрахунків.

Інтегральні методи оцінки якості. Інтегральними називають методи, при яких показники якості оцінюються за інтегралом, що є функцією перехідного процесу відхилення регульованої величини від заданого значення (похибки) або незбуреної складової $x_{\text{пер}}(t)$ в розв'язку рівняння процесу регулювання

$$x(t) = x_{\text{пер}}(t) + x_0.$$

За допомогою інтегральних критеріїв оцінюють відхилення регульованої величини і швидкодію системи.

Для оцінки перехідних процесів без перерегулювання (рис. 5.12, а) використовують інтегральний критерій вигляду

$$I = \int_0^{\infty} x_{\text{пер}}(t) dt. \quad (5.9)$$

Він визначає площу, обмежену кривою $x_{\text{пер}}(t)$ за час перехідного процесу. Чим менша ця площа $S = \int_0^{\infty} x_{\text{пер}}(t) dt$, тим більша швидкодія

системи (за однакових початкових умов $x_{\text{неп}}(0)$). Тому параметри системи в даному випадку слід вибирати з умови

$$S = \min; \quad \frac{dS}{dA} = 0,$$

де A — настрювальний параметр системи.

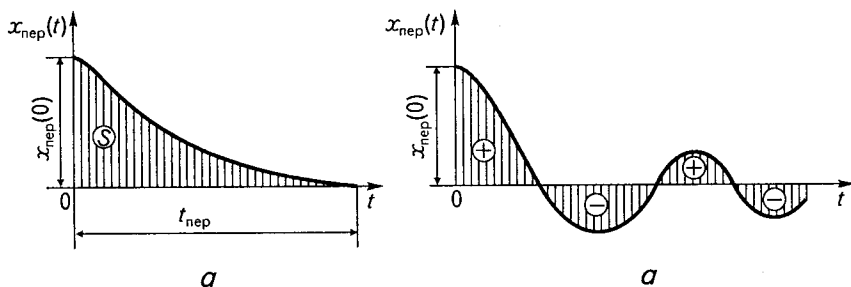


Рис. 5.12

Для розрахунку інтеграла (5.9) В. С. Кулебакін запропонував таку методику.

З рівняння незбурених коливань системи

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

знаходять величину

$$x = x_{\text{неп}} = -\frac{1}{a_n} \left(a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} \right),$$

яку підставляють у формулу (5.9):

$$\begin{aligned} I = S &= -\frac{1}{a_n} \int_0^{\infty} \left(a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{a_n} \left| a_0 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \right|. \end{aligned}$$

Оскільки значення похідних і самого $x = x_{\text{неп}}$ після закінчення перехідного процесу при $t = \infty$ дорівнюють нулю, можна дістати

$$S = \frac{1}{a_n} \left[a_0 \frac{d^{n-1} x(0)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x(0) \right].$$

Позначивши $\frac{d^{n-1} x(0)}{dt^{n-1}} = x^{n-1}(0)$ і так далі, дістанемо

$$S = \frac{1}{a_n} [a_0 x^{n-1}(0) + \dots + a_{n-1} x(0)]. \quad (5.10)$$

Із останньої формули випливає, що інтегральний критерій залежить від параметрів ланок системи, початкових умов і $(n-1)$ похідних від початкових умов.

Для перехідних процесів із перерегулюванням знайдений критерій не можна використовувати, бо мінімум інтеграла (площі) згідно з (5.10) відповідатиме гармонічним коливанням. Тому для оцінки якості коливальних процесів користуються квадратичним інтегралом, який враховує абсолютне значення «додатних» і «від'ємних» площин:

$$I_2 = S_2 = \int_0^{\infty} [x_{\text{неп}}(t)]^2 dt. \quad (5.11)$$

Існують різні методи обчислення квадратичного інтеграла. Розглянемо формулу, запропоновану А. А. Красовським:

$$I_2 = \int_0^{\infty} x_{\text{неп}}^2(t) dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} \times \\ \times (B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + B_1 \Delta_1 + B_0 \Delta_0) - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2}, \quad (5.12.)$$

де Δ — визначник n -го порядку, складений з коефіцієнтів a_n, \dots, a_1 лівої частини рівняння процесу регулювання — характеристичного рівняння замкнутої системи (або знаменника передаточної функції),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Визначники $\Delta_0, \dots, \Delta_m$, або в загальному випадку визначник Δ_k , можна дістати з основного визначника Δ заміною стовпця $m - k + 1$ стовпцем

$$\begin{array}{c} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

Наприклад, для знаходження визначника Δ_m у визначнику Δ слід замінити перший стовпець ($m - m + 1 = 1$), після чого дістанемо

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{n-1} & -a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-1} & -a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнти B_0, \dots, B_m визначають за формулами:

$$\begin{aligned} B_0 &= b_m^2; & B_1 &= b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-2}; \\ B_k &= b_{m-k}^2 - 2b_m b_{m-k+1} + \dots + 2(-1)^k b_m b_{m-2k}; & B_m &= b_0^2, \end{aligned}$$

де b_0, \dots, b_m — коефіцієнти правої частини рівняння замкнутої системи (або чисельника відповідної передаточної функції).

На основі розглянутих формул побудовано таблиці розрахунку квадратичного інтеграла як функції коефіцієнтів b_0, \dots, b_m і a_0, \dots, a_n при різних значеннях n (до $n = 10$). Для значення $n = 1 \dots 5$ такі дані наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Значення n	Значення квадратичного інтеграла
1	$b_0^2(2a_0a_1)$
2	$\frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2}$

Закінчення табл. 5.2

Значення n	Значення квадратичного інтеграла
3	$\frac{b_0^2 a_3 a_2 + (b_1^2 - 2b_2 b_0) a_3 a_0 + b_2^2 a_1 a_0}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}$
4	$\frac{b_0^2 (-a_2^2 a_1 + a_4 a_3 a_2) + (b_1^2 - 2b_2 b_0) a_4 a_3 a_0 + (b_2^2 - 2b_3 b_1)}{2a_4 a_0 (-a_4 a_1^2 - a_3^2 a_0 + a_1 a_2 a_3)}$
5	$\frac{1}{2\Delta_5} [b_0^2 m_0 + (b_1^2 - 2b_2 b_0) m_1 + (b_2^2 - 2b_3 b_1 - 2b_4 b_0) m_2 + (b_3^2 - 2b_4 b_2) m_3 + b_4^2 m_4],$

де $m_0 = \frac{1}{a_0} (a_2 m_1 - a_4 m_2)$; $m_1 = -a_5 a_2 + a_4 a_3$; $m_2 = -a_5 a_0 + a_4 a_1$;
 $m_3 = \frac{1}{a_5} (a_3 m_2 - a_1 m_1)$; $m_4 = \frac{1}{a_5} (a_3 m - a_1 m_2)$; $\Delta_5 = a_5 (a_4 m_4 - a_2 m_3 + a_0 m_2)$.

Крім розглянутих, відомі й інші види інтегральних оцінок (критерії).

- **Приклад 5.2.** Визначити коефіцієнт підсилення системи, який забезпечить мінімум квадратичної інтегральної оцінки при одиничному вхідному сигналі, якщо передаточна функція замкнутої системи після перетворень має вигляд

$$\Phi(p) = \frac{p^2 T_1 T_2 + p(T_1 + T_2) + 1}{p^3 T_1 T_2 + p^2(T_1 + T_2) + p + k},$$

де $T_1 = 0,01$ с; $T_2 = 0,03$ с.

Розв'язання. В даному разі $n = 3$. Знайдемо значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3 і b_0, b_1, b_2 :

$$b_0 = a_0 = T_1 T_2 = 0,01 \cdot 0,03 = 3 \cdot 10^{-4};$$

$$b_1 = a_1 = T_1 + T_2 = 0,01 + 0,03 = 4 \cdot 10^{-2};$$

$$b_2 = a_2 = 1; \quad a_3 = k.$$

З табл. 5.2 для $n = 3$ знаходимо

$$I_2 = \frac{b_0^2 a_0 a_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_2^2 a_2 a_3}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} =$$

$$= \frac{a_0 a_1 - k a_0 a_1^2 - a_0^2 k}{-k^2 2 a_0^2 + k 2 a_0 a_1} = \frac{a_1 - k(a_1^2 - a_0)}{2(k a_1 - k^2 a_0)}$$

Визначимо частинну похідну $\partial I_2 / \partial k$ і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial I_2}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{-k(a_1^2 - a_0)(a_1 - k a_0) - [k(a_1^2 - a_0) + a_1](a_1 - 2 a_0 k)}{k^2(a_1 - k a_0)^2} = 0$$

$$\text{або } k^2 a_0 (a_1^2 - a_0) + 2 a_0 a_1 k - a_1^2 = 0.$$

Підставивши числові значення коефіцієнтів, дістанемо квадратне рівняння

$$k^2 - 65,5k - 41 \cdot 10^2 = 0,$$

звідки знайдемо оптимальне значення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи: $k_{\text{онт}} \approx 37$.

Частотні методи оцінки якості САР. Частотні методи дослідження, які дістали найбільше поширення на практиці, базуються на математичній залежності характеристики перехідного процесу $x(t)$ від дійсної (суттєвої) частотної характеристики замкнутої системи за збуренням $u^f(\omega)$ (або за заданим сигналом). В основі доведення цієї залежності лежить відоме положення, що будь-яку періодичну обмежену дійсну функцію, яка має скінченну кількість розривів і екстремумів, можна розкласти в нескінченний ряд синусоїдальних функцій — ряд Фур'є.

При доведенні функціональної залежності

$$x(t) = f[U^f(\omega)]$$

виходять з того, що в системі діє збурення у вигляді одиничного кидка збурення $[t]$, яке розкладається в ряд Фур'є.

В результаті цього доведення і досить складних перетворень знайдено відому залежність

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U^f(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (5.13)$$

Дійсну частотну характеристику замкнутої системи за збуренням $U^f(\omega)$ знаходять з виразу відповідної передаточної функції замкнутої системи

$$W^f(p) = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)},$$

де $W_1^f(p)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням; $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

Після підстановки $p = j\omega$ у вираз $W^f(p)$ дістанемо амплітудно-фазову частотну характеристику замкнутої системи за збуренням:

$$W^f(j\omega) = jV^f(\omega) + U^f(\omega),$$

де $V^f(\omega)$, $U^f(\omega)$ — відповідно уявна і дійсна частотні характеристики замкнутої системи за збуренням. Останню з них і використовують у формулі (5.13).

Практично розгляд характеристики $U^f(\omega)$ обмежується зоною суттєвих частот ω_c .

Під зоною суттєвих частот розуміють зону зміни частоти ω від 0 до ω_c , в якій виконується умова

$$\left| \frac{U(0)}{U(\omega_c)} \right| \geq 10$$

(при $\omega > \omega_c$ ця умова не порушується).

В зоні суттєвих частот виконується апроксимація характеристики $U^f(\omega)$, яку замінюють рівнозначними фігурами $H(\omega)$ — трапеціями і трикутниками.

При заміні $U^f(\omega)$ в зоні суттєвих частот мають виконуватись такі правила.

1. Прямолінійні частини фігур $H(\omega)$ мають за можливості точно збігатися з кривою $U^f(\omega)$.

2. Всі n фігур (трапеції і трикутники) повинні мати однією зі своїх сторін вертикальну вісь.

3. Алгебрична сума площ усіх n фігур, якими замінюють характеристику $U^f(\omega)$, має дорівнювати площі, обмеженій характеристикою $U^f(\omega)$.

4. Кількість фігур n має бути за можливості меншою.

Після заміни $U^f(\omega)$ рівнозначними фігурами

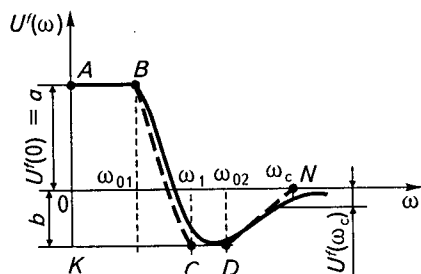
$$U^f(\omega) = \sum_{i=1}^n H_i(\omega),$$

обмежуючись розглядом інтеграла в зоні суттєвих частот, записуємо

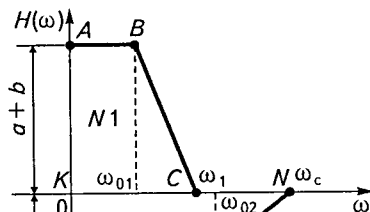
$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\omega_c} \frac{H_i(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (5.14)$$

Із формули (5.14) випливає, що ординату перехідного процесу $x(t_i)$ можна дістати як величину, пропорційну сумі площ (інтегралів) еквівалентних фігур.

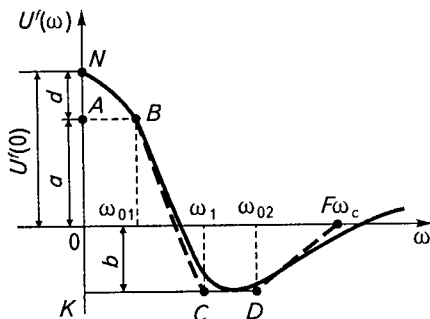
Деякі види характеристик $U^f(\omega)$ і фігури, які їх замінюють, показано на рис. 5.13, а—г.



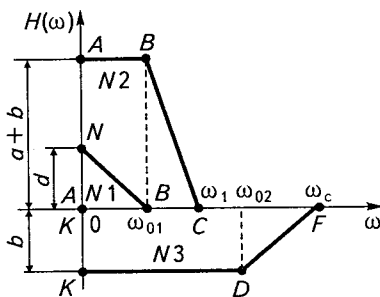
а



б



в



г

Рис. 5.13

Характеристику на рис. 5.13, а замінено трапеціями $N1$ і $N2$ (рис. 5.13, б). Загальна алгебрична сума площ обох фігур $\Sigma S = S_{N1} - S_{N2}$ дорівнює площі, обмеженій характеристикою $U^f(\omega)$ і горизонтальною віссю.

Характеристика $U^f(\omega)$, показана на рис. 5.13, в, апроксимується трьома фігурами: трикутником $N1$ і двома трапеціями $N2$ і $N3$ (рис. 5.13, г).

Загальну площу всіх трьох фігур обчислюємо за формулою

$$\Sigma S = S_{N1} + S_{N2} - S_{N3}.$$

Площа ΣS дорівнює площі, обмеженій характеристикою $U^f(\omega)$, тому що частина додатної площі трапеції $N2$ компенсується відповідною частиною від'ємної площі трапеції $N3$.

Метод одиничних трапецій і трикутників. Для зручності обчислення інтегралів різних фігур, якими можна замінити характеристики $U^f(\omega)$ різних реальних систем в ТАК, було введено поняття одиничних (типових) трапецій і трикутників, а також побудовано спеціальні таблиці, які дістали назву таблиць *h-функцій* (табл. 5.3 і 5.4). У цих таблицях наведено результати розрахунків інтегралів вигляду $\int_0^{\omega_1} \frac{h(t)}{\omega} \sin \omega t d\omega$, різних одиничних фігур. (Для одиничних фігур їх початкова висота h_0 і діапазон пропускання частот ω_1 дорівнюють одиниці.)

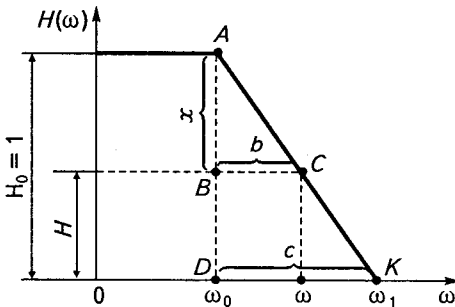


Рис 5.14

Розглянемо деяку трапецію (рис 5.14). Трапеція характеризується початковим значенням $H(\omega) = H_0$, коефіцієнтом нахилу її сторони $v = \omega_0/\omega_1$, а також інтервалом пропускання частоти ω_1 .

Розрахуємо перехідний процес для відповідної трапеції при $H(0) = H_0 = 1$:

$$\text{при } 0 < \omega < \omega_0 \quad H = H_0 = 1,$$

$$\text{при } \omega > \omega_1 \quad H = 0,$$

$$\text{при } \omega_0 < \omega < \omega_1 \quad H = 1 - \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0},$$

де ω — поточне значення частоти. (Останній вираз H дістали з урахуванням подібності трикутників ABC і ADK , на основі чого можна записати $x/1 = b/c = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0}$.)

Позначимо перехідну функцію одиничної трапеції $h_1(t)$.

Підставляючи відповідні значення $H(\omega)$ в формулу (5.14) та інтегруючи у певних межах, дістаємо

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{1 \cdot \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(1 - \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0}\right) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

Величина $\int_0^{\omega} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \text{Si } \omega t$ є інтегральним синусом. Величини Si інтегральних синусів, обчислені при відповідних значеннях ωt , наведено в таблицях. Маючи на увазі, що $\int \sin \omega t d\omega = -\frac{\cos \omega t}{t}$, запишемо

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega_1 t - \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega_0 t - \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega_1 - \omega_0} d\omega +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_0} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega_1 t + \frac{2}{\pi t} \frac{1}{\omega_1 - \omega_0} [\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t] +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_0} \sin \omega_1 t - \frac{2\omega_0}{\pi(\omega_1 - \omega_0)} \text{Si } \omega_0 t,$$

або

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si } \omega_1 t + \frac{1}{t(\omega_1 - \omega_0)} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_0} (\text{Si } \omega_1 t + \text{Si } \omega_0 t) \right].$$

Для одиничної трапеції $H_0 = 1$, $\omega_1 = 1$, $v = \omega_0$, тому

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Si } t + \frac{1(\cos t - \cos vt)}{(1-v)t} + \frac{v}{1-v} [\text{Si } t + \text{Si } vt] \right\}.$$

Цей вираз визначає характер залежності перехідної функції одиничної трапеції від двох величин:

$$h_1(t) = f(v, t).$$

τ	h-функції для трапеції								
	0,05	0,01	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,325	0,340	0,336	0,371	0,356	0,402	0,417	0,432	0,447
1,5	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,560	0,628	0,655	0,682	0,709	0,732	0,761	0,785	0,810
2,5	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943
3,0	0,792	0,828	0,863	0,895	0,928	0,958	0,986	1,013	1,038
3,5	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	0,050	1,074	1,095
4,0	0,898	0,937	0,974	1,008	1,039	1,06	1,090	1,110	1,127
4,5	0,923	0,960	0,998	1,029	1,057	1,084	1,104	1,120	1,129
5,0	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,117
5,5	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,096
6,0	0,945	0,981	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,943	0,980	1,009	1,029	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,945	0,978	1,006	1,024	1,034	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,945	0,980	1,005	1,021	1,027	1,027	1,020	1,005	0,989
8,0	0,951	0,983	1,007	1,020	1,024	1,021	1,011	0,998	0,982
8,5	0,956	0,989	1,010	1,021	1,024	1,018	1,007	0,993	0,978
9,0	0,966	0,996	1,016	1,025	1,025	1,017	1,006	0,992	0,978
9,5	0,972	1,004	1,020	1,028	1,026	1,018	1,006	0,993	0,982
10,0	0,980	1,009	1,021	1,030	1,027	1,018	1,005	0,994	0,985
10,5	0,985	1,013	1,025	1,031	1,026	1,016	1,004	0,994	0,989
11,0	0,988	1,015	1,028	1,030	1,024	1,013	1,002	0,993	0,990
11,5	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,998	0,991	0,991
12,0	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,998	0,990
12,5	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,998	0,990	0,986	0,989
13,0	0,980	1,012	1,019	1,015	1,004	0,993	0,986	0,984	0,989
13,5	0,990	1,011	1,016	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,989
14,0	0,990	1,010	1,015	1,008	0,997	0,987	0,983	0,985	0,991
14,5	0,990	1,011	1,014	1,008	0,996	0,986	0,984	0,987	0,994
15,0	0,993	1,012	1,014	1,006	0,995	0,987	0,986	0,991	0,998
15,5	0,995	1,013	1,014	1,006	0,995	0,989	0,989	0,995	1,002
16,0	0,998	1,05	1,014	1,006	0,995	0,990	0,992	0,999	1,007
16,5	0,999	1,016	1,015	1,005	0,996	0,992	0,995	1,002	1,009
17,0	1,001	1,016	1,014	1,005	0,996	0,993	0,998	1,005	1,011
17,5	1,002	1,016	1,013	1,003	0,995	0,994	0,999	1,007	1,011
18,0	1,002	1,015	1,012	1,002	0,994	0,994	1,000	1,007	1,010
18,5	1,001	1,014	1,010	1,000	0,993	0,994	1,001	1,007	1,009
19,0	1,002	1,013	1,008	0,998	0,992	0,994	1,001	1,006	1,006
19,5	1,001	1,012	1,006	0,996	0,991	0,994	1,001	1,005	1,004
20,0	1,001	1,011	1,004	0,995	0,991	0,994	1,001	1,004	1,001
20,5	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,995	1,001	1,003	0,000
21,0	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,996	1,002	1,003	0,999
21,5	1,003	1,010	1,002	0,994	0,992	0,999	1,004	1,003	0,998
22,0	1,004	1,011	1,002	0,994	0,994	1,000	1,005	1,004	0,998
22,5	1,005	1,011	1,002	0,995	0,995	1,002	1,006	1,004	0,998
23,0	1,006	1,011	1,002	0,995	0,997	1,003	1,006	1,004	0,998
23,5	1,006	1,011	1,002	0,995	0,998	1,004	1,006	1,003	0,998
24,0	1,006	1,010	1,001	0,995	0,998	1,005	1,006	1,002	0,998
24,5	1,006	1,009	1,00	0,995	0,999	1,005	1,005	1,000	0,997
25,0	1,006	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,004	0,999	0,996
25,5	1,006	1,007	0,998	0,994	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996
26,0	1,006	1,006	0,997	0,994	0,999	1,003	1,001	0,996	0,996

Таблиця 5.3

з коефіцієнтом нахилу ν										
0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,561	0,575	0,590	0,602
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
0,831	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,957	0,974	0,991	1,008	1,022
0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,051	1,120	1,133
1,061	1,081	1,100	1,116	1,131	1,143	1,154	1,162	1,169	1,175	1,177
1,115	1,132	1,145	1,158	1,165	1,170	1,174	1,174	1,174	1,176	1,177
1,141	1,151	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,150	1,141	1,132	1,119
1,138	1,141	1,141	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
1,117	1,114	1,107	1,097	1,084	1,069	1,053	1,036	1,119	1,003	0,987
1,090	1,076	1,064	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
1,051	1,036	1,020	1,001	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,914	0,907
1,018	1,001	0,982	0,965	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,904	0,905
0,992	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,909	0,911	0,917	0,926
0,974	0,956	0,944	0,931	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962
0,966	0,952	0,941	0,934	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,002
0,964	0,954	0,948	0,948	0,951	0,958	0,974	0,900	1,006	1,023	1,041
0,968	0,962	0,961	0,967	0,976	0,990	1,006	1,023	1,035	1,051	1,060
0,975	0,972	0,977	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,065	1,066
0,982	0,984	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
0,988	0,994	1,005	1,019	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
0,993	1,001	1,014	1,027	1,039	2,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
0,996	1,006	1,017	1,029	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
0,997	1,007	1,018	1,026	1,029	1,025	1,015	1,000	0,984	0,970	0,958
0,997	1,007	1,015	1,019	1,017	1,010	0,995	0,980	0,965	0,955	0,950
0,997	1,006	1,012	1,012	1,005	0,993	0,980	0,965	0,955	0,952	0,955
0,998	1,005	1,008	1,004	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,975
0,999	1,005	1,005	0,998	0,987	0,975	0,965	0,961	0,965	0,976	0,991
1,002	1,005	1,003	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
1,005	1,006	1,002	0,994	0,983	0,977	0,978	0,987	1,001	1,018	1,032
1,008	1,007	1,001	0,992	0,985	0,984	0,991	1,003	0,008	1,032	1,048
1,010	1,008	1,001	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,040	1,039
1,011	1,008	1,001	0,995	0,995	1,001	1,014	1,027	1,035	1,037	1,028
1,012	1,007	1,000	0,996	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,026	1,012
1,009	1,005	0,998	0,997	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,994
1,008	1,001	0,997	0,997	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,978
1,005	0,999	0,995	0,997	1,005	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,970	0,967
0,998	0,992	0,992	0,997	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
0,995	0,991	0,992	0,998	1,003	1,001	0,991	0,980	0,972	0,975	0,986
0,994	0,991	0,994	0,999	1,002	0,998	0,987	0,978	0,977	0,990	1,001
0,993	0,992	0,996	1,001	1,002	0,996	0,987	0,982	0,989	1,001	1,015
0,994	0,995	0,999	0,995	1,002	0,995	0,988	0,988	0,988	1,013	1,025
0,995	0,997	1,000	1,004	1,002	0,995	0,991	0,997	1,010	1,024	1,029
0,996	1,000	1,005	1,005	1,002	0,996	0,996	1,006	1,018	1,028	1,028
0,997	1,002	1,007	1,007	1,002	0,997	1,001	1,011	1,022	1,025	1,016
0,998	1,003	1,008	1,006	1,001	0,998	1,004	1,015	1,021	1,016	1,002
0,999	1,004	1,007	1,004	0,999	0,999	1,007	1,015	1,016	1,006	0,990
1,000	1,004	1,006	1,002	0,998	0,999	1,007	1,012	1,007	0,995	0,979
1,000	1,004	1,004	0,999	0,996	1,000	1,007	1,008	0,998	0,984	0,975
1,000	1,003	1,002	0,997	0,995	1,000	1,005	1,001	0,989	0,978	0,977
1,000	1,002	0,999	0,995	0,995	1,000	1,002	0,997	0,984	0,978	0,983

Таблиця 5.4

<i>h</i> -функції для трикутників					
τ	<i>h</i>	τ	<i>h</i>	τ	<i>h</i>
0,00	0,00000	0,62	0,195	4,2	0,868
0,01	0,00318	0,65	0,204	4,5	0,882
0,02	0,0063	0,67	0,211	4,7	0,898
0,03	0,0095	0,70	0,220	5,0	0,895
0,04	0,0127	0,72	0,226	5,4	0,901
0,05	0,0159	0,75	0,235	5,8	0,903
0,06	0,0191	0,80	0,25	6,0	0,903
0,07	0,022	0,82	0,256	7,0	0,904
0,08	0,0254	0,85	0,265	7,6	0,907
0,09	0,0286	0,87	0,271	8,0	0,911
0,10	0,0318	0,90	0,28	8,8	0,922
0,12	0,038	0,92	0,286	9,0	0,925
0,15	0,0477	0,95	0,295	10,0	0,939
0,17	0,054	0,97	0,301	11,0	0,947
0,20	0,064	1,00	0,310	12,0	0,950
0,22	0,07	1,2	0,367	14,0	0,951
0,30	0,095	1,5	0,449	15,0	0,956
0,32	0,10	1,7	0,50	16,0	0,961
0,35	0,11	2,0	0,571	17,0	0,965
0,37	0,12	2,2	0,615	18,0	0,966
0,40	0,127	2,5	0,674	19,0	0,966
0,42	0,133	2,7	0,709	20,0	0,967
0,45	0,142	3,0	0,755	30,0	0,980
0,47	0,149	3,2	0,811	40,0	0,984
0,50	0,158	3,5	0,815	100,0	0,994
0,52	0,164	3,7	0,830	120,0	0,995
0,60	0,189	4,0	0,856		

Для типового (одиничного) трикутника при $H(0) = 1$ і $\omega_1 = 1$ значення перехідної функції $h_1(t)$ дістанемо з виразу для одиничної трапеції, поклавши $\omega_0 = 0$, $\nu = 0$. Тоді матимемо

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \left(\text{Si } t + \frac{1 - \cos t}{t} \right).$$

Отже, перехідна функція для одиничного трикутника є функцією лише однієї величини — часу t :

$$h_1(t) = f(t).$$

Значення *h*-функції одиничних трапецій при різних ν і τ наведено в табл. 5.3, а для одиничних трикутників при різних τ — у табл. 5.4. У цих таблицях замість реального часу t взято так званий табличний час $\tau = \omega t$.

При користуванні таблицями для одиничних фігур задля обчислення ординат перехідного процесу, що відповідають деякому реаль-

ному моменту часу t_i і реальним фігурам, які апроксимують характеристику $U^f(\omega)$, слід дотримуватися такої методики.

1. Задаємо значення реального часу t_x , для якого знаходимо відповідне значення табличного часу:

$$\tau_x = \omega_{1p} t_x,$$

де ω_{1p} — частота пропускання реальної фігури $H(\omega)$.

2. Для реальних трапецій визначаємо нахил сторони реальної трапеції $v_p = \frac{\omega_{0p}}{\omega_{1p}}$ і за таблицями h -функцій типових трапецій з нахилом $v_r = v_p$ знаходимо відповідне значення $h_1(t_x)$.

3. Знайдені з таблиць значення $h_1(t_x)$ множимо на H_p відповідної реальної фігури і, як результат, дістаємо складову ординати реально-го перехідного процесу, що відповідає даній фігурі. Подібним чином проводимо розрахунки і для інших фігур:

$$x_1(t_x) = h_1(t_x)H_{1p} \text{ (для фігури } NI),$$

.....

$$x_n(t_x) = h_n(t_x)H_{np} \text{ (для фігури } n).$$

4. Результируючу ординату перехідного процесу знаходимо як алгебричну суму ординат усіх фігур для даного моменту часу:

$$x_{\Sigma}(t_x) = h_1(t_x) + \dots + h_n(t_x).$$

5. Аналогічно знаходимо ординати перехідного процесу і для інших моментів часу, після чого по точках будуємо характеристику $x(t)$.

Розглянемо конкретний приклад побудови характеристики перехідного процесу.

□ **Приклад 5.3.** Побудувати перехідну характеристику для системи з передаточною функцією за збуренням

$$W^f(p) = \frac{p + 3}{p^3 + 4,5p^2 + 14,5p + 20}.$$

Розв'язання. Амплітудно-фазова частотна характеристика за збуренням має вигляд

$$\begin{aligned} W^f(j\omega) &= \frac{j\omega + 3}{-j\omega^3 - 4,5\omega^2 + 14,5j\omega + 20} = \\ &= \frac{(j\omega + 3)[(20 - 4,5\omega^2) - j(14,5\omega - \omega^3)]}{(20 - 4,5\omega^2)^2 + (14,5\omega - \omega^3)^2} = U^f(\omega) + jV^f(\omega), \end{aligned}$$

а дійсна частотна характеристика —

$$U^f(\omega) = \frac{60 + \omega^2 - \omega^4}{(20 - 4,5\omega^2)^2 + (14,5\omega - \omega^3)^2}.$$

Знайдемо значення $U^f(\omega)$ при зміні частоти ω :

ω	0	1	2	3	4	5	7	9	10
$U^f(\omega)$	0,15	0,14	0,11	-0,02	-0,07	-0,05	-0,03	-0,013	-0,01

За цими даними побудуємо характеристику $U^f(\omega)$ (рис. 5.15, а). Суттєвою частотою вважаємо $\omega_c = 9$, для якої

$$\frac{U^f(0)}{U^f(\omega_c)} = 0,15/0,013 = 11,5 > 10.$$

Три еквівалентні фігури, якими апроксимується характеристика $U^f(\omega)$, показано на рис. 5.15, б. Параметри фігур:

$N1$ — трапеція $OACD$,

$$H_1 = 0,11 + 0,07 = 0,18; \quad \omega_{01} = 2,75;$$

$$\omega_{11} = 3,2; \quad \nu_1 = \frac{2,75}{3,2} = 0,85;$$

$N2$ — трапеція $OHEF$,

$$H_2 = -0,07; \quad \omega_{02} = 4,0;$$

$$\omega_{12} = 9; \quad \nu = \frac{4,0}{9,0} = 0,4;$$

$N3$ — трикутник ABC ,

$$H_3 = 0,04; \quad \omega_{13} = 2,75.$$

Побудуємо ординату перехідного процесу для реального моменту часу $t = 1$ с. Знайдемо табличний час для відповідних фігур:

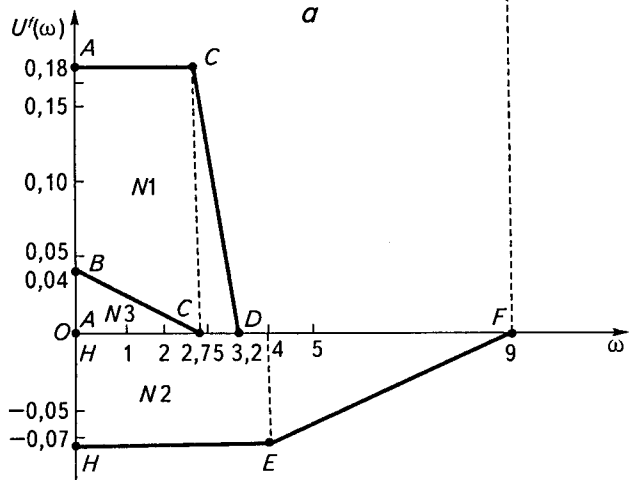
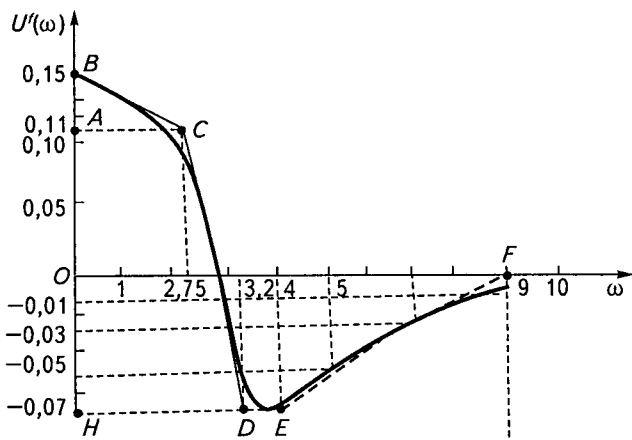
$$\tau_{N1} = \omega_{11}t = 3,2 \cdot 1 = 3,2;$$

$$\tau_{N2} = \omega_{12}t = 9,0;$$

$$\tau_{N3} = \omega_{13}t = 2,75.$$

За даними таблиць h -функцій за відповідними значеннями ν і τ (для трапецій) і величині τ (для трикутника) знайдемо значення h -функцій для фігур $N1$, $N2$, $N3$:

$$h(t)_{N1} = 1,16; \quad h(t)_{N2} = 0,99; \quad h(t)_{N3} = 0,71.$$



б

Рис. 5.15

Помноживши знайдені табличні значення $h(t)$ на ординати відповідних реальних фігур H , дістанемо ординати $x_i(t)$ відповідних фігур:

$$x_1(t) = h(t)_{N1} H_1 = 1,16 \cdot 0,18 = 0,21;$$

$$x_2(t) = h(t)_{N2} H_2 = -0,99 \cdot 0,07 = -0,07;$$

$$x_3(t) = h(t)_{N3} H_3 = 0,71 \cdot 0,04 = 0,03.$$

Врахувавши знак $x_2(t)$, знайдемо результуючу ординату перехідної характеристики при $t = 1$ с:

$$x_{\Sigma}(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 0,21 - 0,07 + 0,03 = 0,17.$$

Аналогічно можна дістати й інші ординати перехідного процесу при різних значеннях реального часу t і побудувати відповідну характеристику.

Наведена методика дає можливість побудувати перехідну характеристику за умови дії одиничного кидка навантаження $l(t)$ і дістати відповіді на основні питання якості про характер перехідного процесу, його тривалість, величину перерегулювання.

Проведені дослідження дають можливість робити деякі оцінки якості САР безпосередньо за виглядом дійсної частотної характеристики замкнутої системи за збуренням $U^f(\omega)$.

5.4

Чутливість САК

Під чутливістю САК розуміють її властивість реагувати на зміну параметрів, що зумовлюється зміною умов зовнішнього середовища, їх характеристик, старінням елементів системи тощо.

Зміна параметрів ланок веде до зміни коефіцієнтів характеристичного рівняння і, як наслідок, — величини знака і вигляду коренів і показників якості системи. Це може також призвести до втрати стійкості і роботоздатності системи.

Кількісна оцінка чутливості САК виконується за допомогою функції чутливості, яка є частинною похідною координати системи, або окремого показника якості по параметру системи, який змінюється (варіюється). Кількість функцій чутливості дорівнює кількості параметрів, які змінюються при роботі САК.

У загальному випадку функцію чутливості можна записати у вигляді

$$U_{ki} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial T_i} \right)_0,$$

де x_k — координата системи; T_i — змінний параметр.

Індекс 0 відповідає визначенню функції чутливості при початковому (номінальному) значенні параметрів системи.

Якщо $U_{ki} = 0$ (варіації параметрів відсутні й їх значення дорівнюють номінальному значенню), то систему називають *вихідною*. Рух такої системи (характер перехідних процесів) має назву *основного руху*.

Якщо $U_{ki} \neq 0$, то систему називають *варіаційною*, а її рух — *варіаційним рухом*.

Різниця між варіаційним і основним рухом системи — це *додатковий рух*. При цьому мають на увазі різницю ординат відповідного руху в одні й ті самі моменти часу.

Нехай рівняння вихідної нелінійної системи має вигляд

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n; T_1, \dots, T_m),$$

де x_1, \dots, x_n — координати; T_1, \dots, T_m — параметри системи.

При варіаційній зміні параметрів нове рівняння системи можна записати у вигляді n рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\tilde{x}_k}{dt} = f_k(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n; T_1 + \Delta T_1, \dots, T_m + \Delta T_m).$$

(У даному випадку вважаємо, що зміна параметрів системи не веде до зміни порядку системи n .)

Додатковий рух системи у загальному випадку матиме вигляд

$$\Delta x_k(t) = \tilde{x}_k(t) - x_k(t).$$

Якщо варіаційна координата \tilde{x}_k і координата вихідної системи диференційовані по параметру T_i ($i = 1, \dots, m$), то, розкладаючи додатковий рух у ряд Тейлора за прирощенням параметра при умові малих відхилень, дістаємо

$$\Delta x_k(t, \Delta T_1, \dots, \Delta T_m) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial x_k}{\partial T_i} \right)_0 \Delta T_i,$$

де $i = 1, \dots, m$.

Оскільки $\partial x_k / \partial T_i = U_{ki}$, то останній вираз можна записати у вигляді суми добутків функцій чутливості U_{ki} і прирощень параметрів:

$$\Delta x_k(t, \Delta T_1, \dots, \Delta T_m) = \sum_{k=1}^m U_{ki} \Delta T_i.$$

Маючи значення функцій чутливості за величиною варіацій параметрів, можна знайти перше наближення виразу додаткового руху.

Дослідження властивостей чутливості системи в цілому може виконуватися на основі рівнянь чутливості системи, для знаходження

яких необхідно здиференціювати всі n рівнянь першого порядку. При цьому лінійні рівняння чутливості системи в загальному випадку матимуть вигляд

$$\frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial T_i} \right) = \frac{dU_{ki}}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} U_{ik} + \frac{\partial f_k}{\partial T_i} \quad (k = 1, \dots, n).$$

На основі розв'язання рівнянь чутливості можна дістати функції чутливості U_{ik} для відповідних параметрів T_i .

Контрольні запитання та завдання

- Визначіть основні показники якості САК.
- Які показники характеризують коливальні перехідні процеси?
- Від яких факторів залежить якість САК?
- Чим і як визначаються статичні помилки в САК?
- Яким чином впливає розміщення коренів на комплексній площині коренів на характер перехідних процесів?
- Яким чином можна приблизно визначити тривалість перехідного процесу?
- Який вплив має розміщення нулів і полюсів передаточної функції на якість САК?
- Назвіть основні види типових збурень.
- Чим відрізняються інтегральні критерії оцінки аперіодичних і коливальних процесів?
- Який зв'язок існує між характером перехідного процесу та виглядом частотних характеристик системи?
- Яким чином використовують одиничні трапеції і трикутники для оцінки якості?
- Викладіть методику заміни дійсної частотної характеристики замкнутої системи за збуренням еквівалентними фігурами.
- Які особливості якості САК можна визначити за зовнішнім виглядом дійсної частотної характеристики замкнутої системи за збуренням?
- Дайте визначення чутливості САК і напишіть рівняння чутливості системи.
- Викладіть суть методу аналізу якості за найменшим коренем.
- Як визначити основні зони розміщення різних видів коренів за допомоги розширеної діаграми Вишнеградського?
- Роз'ясніть розміщення ліній рівних ступенів затухання перехідного процесу.
- Як розміщуються корені, що визначають різні види перехідного процесу, на комплексній площині?

6.1

Помилки в САР

Точність САР є одним із найважливіших показників якості систем, що має особливе значення для електромеханічних систем.

Залежно від виду технологічного процесу і особливостей об'єкта точність САР у багатьох випадках визначає якість продукції, експлуатаційну надійність, довговічність обладнання, безпеку обслуговування, техніко-економічні показники промислових установок (процесів).

Точність САР визначається величиною помилок (похибок). Залежно від режиму роботи системи існують два основних види помилок — статичні і динамічні.

Статична помилка системи $\Delta x_{\text{ст}}$ є відхилення усталеного значення регульованої величини $x^0(t)$, яке виникає після закінчення перехідного процесу $x(t)$, від заданого значення x_3 , коли всі параметри системи і збурення є сталими величинами:

$$\Delta x_{\text{ст}} = x_3 - x^0(t). \quad (6.1)$$

Перехідна динамічна помилка — це відхилення $\Delta x(t)$ дійсного значення регульованої величини від заданого під час перехідного процесу:

$$\Delta x(t) = x_3 - x(t). \quad (6.2)$$

Вона змінюється під час перехідного процесу. Статичні та перехідні динамічні помилки системи стабілізації показано на рис. 6.1, а, а слідкувальних (або програмних) систем — на рис. 6.1, б. Позначивши програму зміни регульованої величини $y(t)$, дістанемо перехідну динамічну помилку програмної (слідкувальної) системи:

$$\Delta x(t) = y(t) - x(t). \quad (6.3)$$

Відхилення регульованої величини від заданого значення після закінчення перехідного процесу $\Delta x^0(t)$ в процесі слідкування називають *усталею помилкою в режимі слідкування* (на рис. 6.1 Δx^0 — початкове розузгодження). Завдання замкнутих САР (стабілізації, слідкувальних, програмних) у загальному випадку полягає в забезпеченні такої зміни регульованої величини $x(t)$, за якої відхилення від

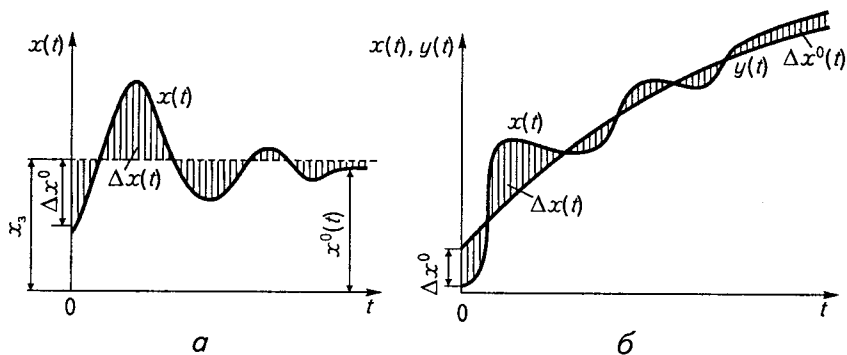


Рис. 6.1

потрібного значення не перевищувало б допустимих відхилень за технологічними умовами. Задля цього параметри і вид регулятора мають бути узгоджені з параметрами і динамічними характеристиками об'єкта.

Основними причинами виникнення помилок в САР є: вмикання САР (при появі початкового розузгодження); її переналагодження; зміна величини і виду збурення (збурень).

Відхилення в системі в разі вмикання або переналагодження виникають внаслідок інерційності об'єкта (системи). Найявністю початкового розузгодження, як правило, призводить до появи перерегулювання в системі.

Крім вказаних вище основних причин, помилки в САР можуть виникати також як результат зміни параметрів (про це детальніше викладено в п. 5.4).

Статичну помилку лінійної САР, на об'єкт якої діють збурення f_1, f_2, \dots, f_n , з урахуванням принципу суперпозиції можна визначити як суму помилок:

$$\Delta x_{\text{ст}} = \Delta x_{\text{ве}} + \Delta x_{\text{зе}} + \Delta f_1 + \dots + \Delta f_n, \quad (6.4)$$

де $\Delta x_{\text{ве}}$, $\Delta x_{\text{зе}}$ — статичні помилки вимірювального і задаючого елементів; $\Delta f_1, \dots, \Delta f_n$ — статичні помилки системи, спричинені відповідним збуренням.

Якщо $\Delta x_{\text{ст}} \neq 0$, то система є *статичною*, а при $\Delta x_{\text{ст}} = 0$ — *астатичною*.

Для слідкувальної (програмної) системи рівняння процесу регулювання, записане згідно з (3.82) у відхиленнях,

$$[P(p) + Q(p)]\Delta x(t) = S(p)P_1(p)\Delta f(t) + Q_{II}(p)P_2(p)\Delta y(t). \quad (6.5)$$

Помилку програмної системи за збуренням $\Delta f(t)$ знаходять за умови $\Delta y(t) = 0$. За тієї самої умови знаходять помилку і в системах стабілізації.

Помилку за заданим сигналом $\Delta y(t)$ визначають за умови $\Delta f(t) = 0$.

Помилки слідкувальної системи, записані через передаточні функції за збуренням і завданням, матимуть вигляд

$$\Delta x(t) = W^f(p)\Delta f(t) + W^y(p)\Delta y(t) \quad (6.6)$$

або

$$\Delta x(t) = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)}\Delta f(t) = \frac{W_{II}^y(p)}{1 + W(p)}\Delta y(t), \quad (6.7)$$

де $W_1^f(p)$, $W_{II}^y(p)$ — передаточні функції відповідно об'єкта за збуренням і системи за завданням; $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

Статичну помилку в цьому разі можна знайти при $t \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$):

$$\Delta x(t) = \Delta x_{\text{ст}} = \left. \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} \right|_{p=0} \Delta f(t) + \left. \frac{W_{II}^y(p)}{1 + W(p)} \right|_{p=0} \Delta y(t). \quad (6.8)$$

У слідкувальних (програмних) системах (рис. 6.2) звичайно досліджують величину розузгодження $\varepsilon(t)$ на виході вузла порівняння, яку в цьому разі називають *помилкою слідкування* (або просто помилкою):

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t). \quad (6.9)$$

Оскільки вузол порівняння ВП є безінерційною ланкою з коефіцієнтом передачі, що дорівнює одиниці, то передаточна функція слідкувальної системи за помилкою матиме вигляд

$$W^\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(t)}{y(t)} = \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (6.10)$$

Рівняння помилки в цьому разі запишеться так:

$$\varepsilon(t) = W^\varepsilon(p)y(t) = \frac{1}{1 + W(p)}y(t). \quad (6.11)$$

6.2

Типові режими роботи і знаходження помилок САР

Як видно з наведених вище виразів для помилок, і статична $\Delta x_{ст}$, і динамічна $\Delta x(t)$ помилки залежать від відповідних передаточних функцій, зовнішніх збурень і задаючих сигналів.

Типові режими роботи САР. За характером зовнішніх збурень розрізняють такі типові режими роботи САР.

1. Статичний режим — режим, за якого всі зовнішні дії на систему і всі координати системи не змінюються, тобто

$$f(t) = \text{const}; \quad y(t) = \text{const}. \quad (6.12)$$

2. Усталений динамічний режим — режим, за якого зовнішні дії на систему змінюються за деяким законом. Такі режими характерні для слідкувальних і програмних САР.

Залежно від характеру дії збурення існують відповідні закони зміни збурення:

1) дія (збурення) змінюється зі *сталюю швидкістю*:

$$df/dt = pf = v = \text{const} \quad \text{або} \quad dy/dt = py = v = \text{const}, \quad (6.13)$$

у цьому випадку $f = v/p = \text{const}$; $y = v/p = \text{const}$;

2) дія на систему змінюється зі *сталим прискоренням*:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = p^2 y = a = \text{const}, \quad (6.14)$$

при цьому $y = a/p^2$;

3) задаюча дія змінюється за гармонічним законом

$$y(t) = y_{\max} \sin \omega_k t, \quad (6.15)$$

де y_{\max} — амплітудне значення задаючого сигналу; ω_k — частота сигналу.

В усталеному динамічному режимі помилка слідкувальної (програмної) системи змінюватиметься з тією самою частотою, але зі зсувом за фазою φ :

$$\Delta x(t) = \Delta x_{\max} \sin(\omega_k t + \varphi).$$

Знаходження помилок САР. Для знаходження помилок САР (особливо слідкувальних і програмних САР, які діють в умовах зміни зовнішніх збурень і сигналів завдань) значне поширення дістав метод *коефіцієнтів помилок*. Цей метод базується на положенні, що функції зовнішніх збурень диференційовані й похідні збурень з часом зменшуються, а процес є затухаючим.

Нехай зображення відхилення регульованої величини від заданого (початкового) значення, яке є по суті помилкою системи стабілізації, має вигляд

$$\Delta x(p) = W^f(p) \Delta f(p) = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} \Delta f(p). \quad (6.16)$$

Розкладемо передаточну функцію в показниковий ряд Маклорена:

$$W^f(p) = C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \dots + \frac{C_n}{n!} p^n;$$

помилка при цьому запишеться у вигляді

$$\Delta x(p) = \left(C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \dots + \frac{C_n}{n!} p^n \right) \Delta f(p).$$

Переходячи до оригіналу помилки, дістаємо

$$\begin{aligned} \Delta x(t) = & C_0 \Delta f(t) + C_1 \frac{d\Delta f(t)}{dt} + \\ & + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 \Delta f(t)}{dt^2} + \dots + \frac{C_n}{n!} \frac{d^n \Delta f(t)}{dt^n}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

З цієї залежності видно, що помилка системи має кілька складових, які, крім першої $C_0 \Delta f(t)$, існують лише при зміні збурення. Коефіцієнти C_0, C_1, \dots, C_n називають *коефіцієнтами помилок*; C_0, C_1, C_2, C_3 — коефіцієнтами відповідно статичної і швидкісної помилок, помилок за прискоренням і ривком.

Для слідкувальної (програмної) системи величина розузгодження матиме вигляд

$$\varepsilon(t) = C_0 \Delta y(t) + C_1 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} + \dots + \frac{C_n}{n!} \frac{d^n \Delta y(t)}{dt^n}. \quad (6.18)$$

Коефіцієнти помилок можна обчислити за допомогою передаточної функції замкнутої системи діленням многочлена чисельника передаточної функції на многочлен знаменника.

Для системи стабілізації

$$W^f(p) = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Розглянемо методику визначення коефіцієнтів помилок на конкретному прикладі. Нехай на рис. 6.2 об'єкт $W_1(p)$ і регулятор $W_2(p)$ є аперіодичними ланками першого порядку:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

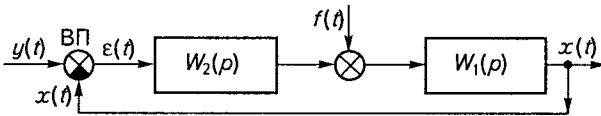


Рис. 6.2

Знайдемо передаточну функцію слідкувальної системи за розузгодженням (помилкою):

$$\begin{aligned} W^\varepsilon(p) &= \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_1 k_2} = \\ &= \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 + k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Розділимо многочлен чисельника на многочлен знаменника:

6.2. Типові режими роботи
і знаходження помилок САР

$$\frac{1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2}{1 + \frac{T_1 + T_2}{1 + k_1 k_2} p + \frac{T_1 T_2}{1 + k_1 k_2} p^2} \left| \begin{array}{l} (1 + k_1 k_2) + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2 \\ \frac{1}{1 + k_1 k_2} + \left(\frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{k_1 k_2} \right) p + \\ + \frac{1}{1 + k_1 k_2} \left(T_1 T_2 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) p^2 + \dots \end{array} \right.$$

$$\frac{(T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{k_1 k_2} \right) p + \left(T_1 T_2 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) p^2}{(T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{k_1 k_2} \right) p + \frac{T_1 T_2}{1 + k_1 k_2} (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{k_1 k_2} \right) p^3}$$

$$\frac{\left(T_1 T_2 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) p^2 - \frac{T_1 T_2}{1 + k_1 k_2} (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{k_1 k_2} \right) p^3}{\left(T_1 T_2 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) p^2 + \dots}$$

Згідно з викладеним знайдемо коефіцієнти помилок у даній системі:

- коефіцієнт статичної помилки

$$C_0 = \frac{1}{1 + k_1 k_2}$$

(система статична);

- коефіцієнт швидкісної помилки

$$C_1 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{k_1 k_2} \right);$$

- коефіцієнт помилки за прискоренням

$$C_2 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} \left(T_1 T_2 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right).$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів помилок у рівняння помилки і здиференціювавши функцію завдання $y(t)$, дістанемо відповідні складові помилки, за якими можна знайти її результуючу величину $\varepsilon(t)$.

6.3

**Основні шляхи підвищення точності керування.
Замикання системи**

Розглянемо найвідоміші напрями вирішення проблеми підвищення точності САР:

- 1) використання замкнутих САР і збільшення коефіцієнта підсилення регулятора (системи);
- 2) формування потрібних законів регулювання (введення астатизму регулювання за похідними);
- 3) використання спеціальних структур САР, які реалізують принципи керування, що забезпечують підвищення точності (комбіноване керування, системи зі змінною структурою);
- 4) реалізація принципів інваріантності;
- 5) використання різного виду коректувальних пристроїв.

Замикання САР і можливості підвищення точності. Як приклад розглянемо спрощену функціональну схему САР стабілізації (рис. 6.3), яка складається з об'єкта 1 і регулятора 2.

Рівняння замкнутої системи у відхиленнях має вигляд

$$[P(p) + Q(p)]\Delta x = S(p)P_1(p)\Delta f.$$

Нехай об'єкт — аперіодична ланка першого порядку, а регулятор — проста підсилювальна ланка. Тоді рівняння об'єкта і регулятора

$$(T_1 p + 1)x = k_1 f; \quad \mu = k_2 x.$$

При цьому $P(p) = (T_1 p + 1)$; $Q(p) = k_1 k_2$; $P_1(p) = 1$; $S(p) = k_0$ (де k_0 — передаточний коефіцієнт об'єкта за збуренням).

Знайдемо помилки, які з'являються в розімкнутій і замкнутих системах. Запишемо рівняння розімкнутої системи в загальному вигляді

$$P_1(p)\Delta x = Q_1(p)\Delta f.$$

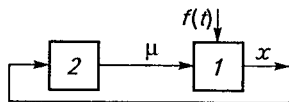


Рис. 6.3

Для наведеної на рис. 6.3 системи воно матиме вигляд

$$(T_1 p + 1)\Delta x = k_0 \Delta f,$$

звідки

$$\Delta x = \frac{k_0 \Delta f}{(T_1 p + 1)}.$$

Статична помилка цієї системи при $t \rightarrow \infty$ запишеться так:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{ст}} = k_0 \Delta f,$$

а розв'язок рівняння —

$$\Delta x = k_0 \Delta f (1 - e^{-t/T_1}).$$

При замиканні системи її рівняння матиме вигляд

$$(T_1 p + 1 + k_1 k_2) \Delta x = k_0 \Delta f,$$

звідки

$$\Delta x = \frac{k_0 \Delta f}{T_1 p + 1 + k_1 k_2}.$$

Визначимо статичну помилку замкнутої системи ($t \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$)

$$\Delta x = \Delta x_{\text{ст}} = \frac{k_0 \Delta f}{1 + k_1 k_2}$$

і розв'язок її рівняння

$$\Delta x = \frac{k_0 \Delta f}{1 + k_1 k_2} \left(1 - e^{-\frac{t(1 + k_1 k_2)}{T_1}} \right).$$

Порівняння знайдених значень статичних помилок і розв'язків рівнянь динаміки розімкнутої й замкнутої систем дозволяє зробити такі висновки.

1. Замикання САР дає змогу зменшити статичну помилку і сталу часу в $1 + k_1 k_2$ разів.

2. Графіки часових характеристик, наведених на рис. 6.4 (1 — розімкнута; 2 — замкнута система), показують, що замикання системи дає змогу зменшити також тривалість перехідного процесу в $1 + k_1 k_2$ разів.

3. Зі збільшенням коефіцієнта підсилення регулятора k_2 при замиканні системи можна зменшити її статичну помилку.

Замикання системи дозволяє також кардинально змінити динамічні властивості деяких об'єктів. Як вказувалося раніше, об'єкти з

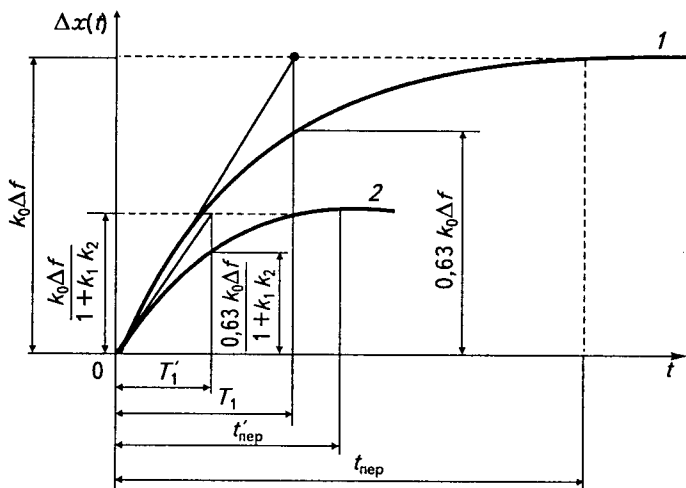


Рис. 6.4

від'ємним коефіцієнтом самовирівнювання, які мають нестійкі часові характеристики, без регулятора є нездатними до роботи.

Рівняння такого об'єкта можна записати у вигляді

$$(T_1 p - 1)\Delta x_{\text{вих}} = k_1 \Delta f.$$

Розв'язок його

$$\Delta x_{\text{вих}} = k_1 \Delta f (e^{-t/T_1} - 1) \rightarrow \infty$$

визначає нестійку роботу об'єкта без регулятора (в розімкнутій системі).

При введенні цього об'єкта в замкнуту систему з регулятором 2 (див. рис. 6.3), рівняння якого

$$(T_2 p + 1)\mu = k_2 \Delta x_{\text{вих}},$$

рівняння замкнутої системи матиме вигляд

$$[(T_1 p - 1)(T_2 p + 1) + k_1 k_2] \Delta x_{\text{вих}} = S(p) P_1(p) \Delta f,$$

де $S(p) = k_0$; $P_1(p) = T_2 p + 1$.

Позначивши $k_1 k_2 = k_\Sigma$, дістанемо характеристичне рівняння замкнутої системи:

$$T_1 T_2 p^2 + (T_1 - T_2) p + k_\Sigma - 1 = 0.$$

Умови стійкості системи такі: $T_1 > T_2$ і $k_{\Sigma} > 1$. Отже, нестійкий об'єкт за певного настроювання замкнутої системи може забезпечити її стійку роботу.

6.4

Типові закони регулювання.

Введення астатизму і регулювання за похідними

Розглянуті вище приклади показують, що об'єкти в замкнутій системі набувають нових динамічних й статичних властивостей і характеристик. Властивості замкнутих систем залежать не тільки від характеристик об'єкта і діючих збурень, а й від особливостей і характеристик регуляторів.

Регулятори поділяють за різними ознаками:

- за видом енергії, що використовується, — пневматичні, механічні, гідравлічні, електричні;
- за принципом керування — керування за відхиленням (помилкою), за збуренням, комбіновані;
- за характером передачі сигналів — неперервні, дискретні;
- за характером зв'язків між елементами системи — зі сталою та змінною структурами.

У ТАК однією з основних особливостей регулятора є можливість впливу на статичні й динамічні помилки САР, що залежить від характеристик регулятора, які визначаються його законом керування (регулювання).

Під *законом регулювання* розуміють залежність вихідної величини регулятора μ від його вхідної величини x за умови, що інерція самого регулятора не враховується (див. рис. 6.3):

$$\mu = f(x).$$

Залежно від вигляду функції $f(x)$ існують три основні принципові закони та відповідні їм типи регуляторів: *пропорційний*, який реалізується за допомогою пропорційного регулятора (П-регулятора); *інтегральний* (І-регулятора); *диференціальний* (Д-регулятора).

На практиці здебільшого використовують комбіновані закони регулювання, які об'єднують позитивні властивості вказаних вище принципів керування і відповідних регуляторів.

Розглянемо основні властивості і особливості названих регуляторів.

Пропорційний закон регулювання (P-регулятор). Це найпростіший закон керування. Він описується залежністю

$$\Delta u = k \Delta x. \quad (6.19)$$

Властивості P-регулятора і характер його дії вже розглядалися при дослідженні впливу замикання системи на її статичну помилку та часові характеристики.

До переваг P-регуляторів належать: простота і надійність, безінерційність, можливість зменшення статичної помилки і тривалості перехідного процесу.

Основні недоліки регуляторів: принципова неможливість впливу на динамічні похибки і неможливість повної ліквідації статичної помилки. Останнє визначається тим, що при різкому збільшенні коефіцієнта передачі розімкненої системи, яке необхідно для відповідного зменшення статичної помилки, система може стати нестійкою (для зменшення статичної помилки до нуля коефіцієнт передачі має дорівнювати нескінченності).

Інтегральний закон регулювання (I-регулятор). Інтегральний регулятор виконує регулювання за інтегральним законом

$$\Delta u = k \int_0^{\infty} dx dt. \quad (6.20)$$

В операторній формі він має вигляд

$$\Delta u = k \frac{1}{p} \Delta x. \quad (6.21)$$

Інтегрування вихідної величини об'єкта Δx в інтегральному регуляторі виконується за допомогою серводвигуна, що відповідає введенню в структурну схему САР інтегральної ланки (рис. 6.5) з передаточною функцією

$$W_i(p) = \frac{\Delta u}{\Delta x} = k_i \frac{1}{p}.$$

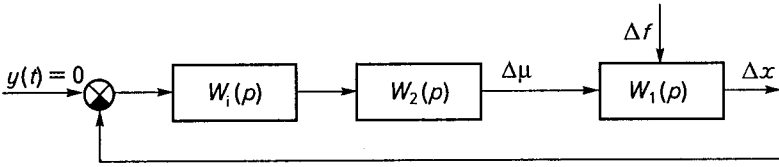


Рис. 6.5

Нехай передаточна функція замкнутої системи за збуренням до введення інтегрувальної ланки має вигляд

$$W^f(p) = \frac{\Delta x}{\Delta f} = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)},$$

де $W(p) = W_1(p)W_2(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи; $W_1^f(p)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням.

При цьому статична помилка

$$\Delta x_{\text{ст}} = \left. \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} \right|_{p=0} \quad \Delta f \neq 0$$

і система буде статичною.

Після введення інтегрувальної ланки передаточна функція розімкнутої системи

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_i(p) = W(p)k \frac{1}{p},$$

а статична помилка

$$\Delta x_{\text{ст}} = \left. \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)\frac{1}{p}} \right|_{p=0} \quad \Delta f = \left. \frac{W_1^f(p)p}{p + W(p)} \right|_{p=0} \quad \Delta f = 0.$$

Відсутність статичної помилки свідчить про те, що система після введення інтегрувальної ланки зі статичної перетворилася на астатичну.

При цьому треба мати на увазі, що інтегрувальну ланку (ланки) слід вводити в структурну схему так, як показано на рис. 6.5, — на

вхід об'єкта, точніше, до точки прикладання збурення, яке діє на об'єкт. Якщо інтегрувальну ланку ввести в САР після точки прикладання збурення (рис. 6.6), то, розглядаючи систему стабілізації [$y(t) = 0$], дістанемо передаточну функцію за збуренням з урахуванням введення інтегрувальної ланки з передаточною функцією $W_i(p) = k \frac{1}{p}$,

яка матиме вигляд

$$\begin{aligned} W^f(p) &= \frac{W_i(p)W_1(p)}{1 + W(p)W_i(p)} = \\ &= \frac{k \frac{1}{p} W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p) \frac{k}{p}} = \frac{kW_1(p)}{p + W_1(p)W_2(p)k}. \end{aligned}$$

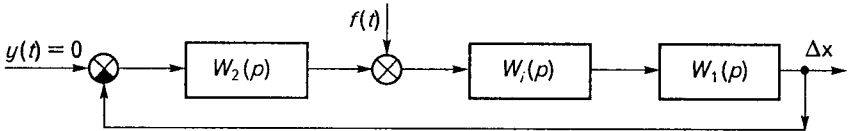


Рис. 6.6

Статичну помилку знайдемо за формулою

$$\Delta x_{cr} = W^f(p) \Delta f = \left| \frac{kW_1(p)}{p + W_1(p)W_2(p)k} \right|_{p=0} \Delta f = \frac{kW_1(0)\Delta f}{W_1(0)W_2(0)} \neq 0,$$

оскільки $W_1(0) \neq 0$; $W_2(0) \neq 0$.

Нерівність нулю Δx_{cr} свідчить про неможливість ліквідувати статичну помилку в разі неправильного введення інтегрувальної ланки між точкою прикладання збурення й об'єктом.

Введення інтегрувальної ланки задля ліквідації статичної помилки і перетворення статичної системи на астатичну називають *введенням астатизму* в систему.

За однієї інтегрувальної ланки кажуть про введення астатизму першого порядку, за двох — астатизму другого порядку і т. д. Введення астатизму другого і вищих порядків дає змогу ліквідувати динамічні (швидкісні) помилки, які виникають у системі в разі зміни зовнішніх збурень.

Проте слід пам'ятати, що введення в систему з аперіодичними і підсилювальними ланками двох і більше інтегровальних ланок призводить до структурної нестійкості системи.

Для усунення структурної нестійкості системи інтегровальну ланку охоплюють прямим зв'язком (рис. 6.7). Таку нову ланку називають *ізодромною інтегровальною*.

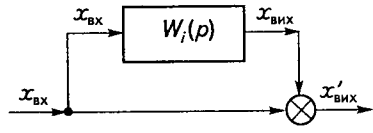


Рис. 6.7

Рівняння ізодромної ланки

$$x'_{\text{вих}} = x_{\text{вх}} + x_{\text{вих}}$$

Оскільки рівняння вихідної інтегровальної ланки $x_{\text{вих}} = k \frac{1}{p} x_{\text{вх}}$,

то вихідний сигнал

$$x'_{\text{вих}} = x_{\text{вх}} + k \frac{1}{p} x_{\text{вх}} = x_{\text{вх}} \left(1 + \frac{k}{p} \right) = \frac{p+k}{p} x_{\text{вх}}$$

Передаточна функція ізодромної інтегровальної ланки

$$W'_i(p) = \frac{p+k}{p}$$

Якщо характеристичне рівняння замкнутої системи у разі безінерційного регулятора з $k_i = k_2$ і об'єкта у вигляді аперіодичної ланки першого порядку з $k = k_1$ і $T = T_1$ має вигляд

$$1 + W(p) = 1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1} = T_1 p + 1 + k_{\Sigma} = 0,$$

то при введенні в систему двох інтегровальних ланок з коефіцієнтами передачі k_3 і k_4 характеристичне рівняння замкнутої системи запишеться так:

$$\begin{aligned} & 1 + W(p)W_3(p)W_4(p) = \\ & = 1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1} k_3 \frac{1}{p} k_4 \frac{1}{p} = T_1 p^3 + p^2 + k_{\Sigma} = 0. \end{aligned}$$

Відсутність складової $a_2 p$ в цьому рівнянні свідчить про те, що САР є структурно-нестійкою. Замінімо інтегровальну ланку з $k = k_4$ ізо-

дромною. У цьому разі вигляд характеристичного рівняння замкнутої системи відповідатиме структурно-стійкій системі:

$$1 + W(p)W_3(p)W_4'(p) = \\ = 1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1} \frac{k_3}{p} \frac{p + k_4}{p} = T_1 p^3 + p^2 + k_1 k_2 k_3 p + k_\Sigma = 0.$$

Отже, заміна інтегрувальної ланки ізодромною дає змогу структурно-нестійку систему перетворити на структурно-стійку.

Проаналізуємо вплив введення астатизму першого і другого порядків у САР за допомогою методу коефіцієнтів помилок.

Розглянемо слідкувальну систему з об'єктом у вигляді аперіодичної ланки першого порядку з передаточною функцією $W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$ і безінерційним регулятором з передаточною функцією $W_2(p) = k_2$.

Передаточна функція замкнутої системи за помилкою матиме вигляд

$$W^\epsilon(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1}} = \frac{T_1 p + 1}{T_1 p + 1 + k_\Sigma}.$$

Знайдемо коефіцієнти помилок. Розкладаючи передаточну функцію в ряд, розділимо чисельник на знаменник:

$$\frac{1 + T_1 p}{1 + \frac{T_1 p}{1 + k_\Sigma}} \left| \frac{(1 + k_\Sigma) + T_1 p}{\frac{1}{1 + k_\Sigma} + \frac{1 - \frac{1}{1 + k_\Sigma}}{1 + k_\Sigma} T_1 p} \right.$$

$$\frac{T_1 p \left(1 - \frac{1}{1 + k_\Sigma}\right)}{T_1 p \left(1 - \frac{1}{1 + k_\Sigma}\right)} \left. \right|$$

$$0$$

У цьому разі

$$W^\epsilon(p) = \frac{1}{1 + k_\Sigma} + \frac{\left(1 - \frac{1}{1 + k_\Sigma}\right) T_1 p}{1 + k_\Sigma} = C_0 + C_1 p,$$

де $C_0 = \frac{1}{1+k_\Sigma} \neq 0$; $C_1 = \left[\frac{k_\Sigma}{(1+k_\Sigma)^2} \right] T_1$. Коефіцієнт $C_0 \neq 0$, тому система є статичною.

Після введення в систему астатизму першого порядку за рахунок введення інтегрувальної ланки з передаточною функцією $W_i(p) = \frac{1}{p}$ передаточна функція матиме вигляд

$$W^e(p) = \frac{1}{1+W(p)\frac{1}{p}} = \frac{1}{1+\frac{k_1k_2}{T_1p+1}\frac{1}{p}} = \frac{T_1p^2+p}{T_1p^2+p+k_1k_2}; \quad k_1k_2 = k_\Sigma.$$

Знайдемо коефіцієнти помилок:

$$\frac{p+T_1p^2}{p+\frac{1}{k_\Sigma}p^2+\frac{T_1}{k_\Sigma}p^3} \left| \frac{k_\Sigma+p+T_1p^2}{\frac{1}{k_\Sigma}p+\frac{1}{k_\Sigma}\left(T_1-\frac{1}{k_\Sigma}\right)p^2} \right.,$$

а також передаточну функцію після розкладання в ряд у загальному вигляді

$$W^e(p) = C_0 + C_1p + C_2p^2 + \dots,$$

де $C_0 = 0$; $C_1 = 1/k_\Sigma$; $C_2 = (1/k_\Sigma)(T_1 - 1/k_\Sigma)$.

Отже, як зазначалося раніше, після введення в систему однієї інтегрувальної ланки (астатизму першого порядку) статична система перетворилася на астатичну ($C_0 = 0$). При цьому в системі залишилися помилки за швидкістю ($C_1 \neq 0$) і прискоренню ($C_2 \neq 0$). Для усунення швидкісної помилки необхідно ввести в систему астатизм другого порядку. Тоді при двох інтегрувальних ланках передаточна функція

$$W^e(p) = \frac{1}{1+W(p)\frac{k_3k_4}{p^2}} = \frac{T_1p^3+T_3}{T_1p^3+p^2+k_\Sigma},$$

звідки $C_0 = 0$; $C_1 = 0$; $\frac{C_2}{2} = \frac{T_1}{k_\Sigma}$.

Отже, статична і швидкісна помилки в системі відсутні. Але, як було показано раніше, при двох інтегровальних ланках система є структурно-нестійкою, тому наведені результати мають чисто теоретичне значення.

Знайдемо значення коефіцієнтів помилок у структурно-стійкій схемі з двома інтегровальними ланками, одна з яких є ізодромною.

Згідно з викладеним раніше маємо

$$W^e(p) = \frac{1}{1 + W(p)} \frac{k_3}{p} \frac{p + k_4}{p} = \frac{T_1 p^3 + p^2}{T_1 p^3 + p^2 + k_1 k_2 k_3 p + k_\Sigma},$$

де $k_\Sigma = k_1 k_2 k_3 k_4$;

$$\frac{p^2 + T_1 p^3}{p^2 + \frac{1}{k_4} p^3 + \frac{1}{k_\Sigma} p^4 + \dots} \left| \frac{k_\Sigma + k_1 k_2 k_3 p + p^2 + T_1 p^3}{\frac{1}{k_\Sigma} p^2 + \frac{1}{k_\Sigma} \left(T_1 - \frac{1}{k_4} \right) p^3} \right.$$

$$\left. \frac{\left(T_1 - \frac{1}{k_4} \right) p^3 - \dots}{\left(T_1 - \frac{1}{k_4} \right) p^3 + \dots} \right.$$

Оскільки $C_0 = 0$; $C_1 = 0$; $\frac{C_2}{2} = \frac{1}{k_\Sigma}$; $\frac{C_3}{6} = \frac{1}{k_\Sigma} \left(T_1 - \frac{1}{k_4} \right)$, то видно, що в

системі немає швидкісної помилки. Для усунення помилки за прискоренням ($C_2 = 0$) слід ввести в систему астатизм третього порядку, що можна зробити, якщо ввести ще одну ізодромну ланку.

Наведені результати досліджень свідчать про переваги інтегровальних регуляторів, які полягають у можливості усунення різних помилок і підвищенні статичної та динамічної точності системи.

Проте інтегровальні регулятори мають також суттєві недоліки. Так, порівнюючи пропорційний та інтегральний закони регулювання, бачимо, що за інтегрального закону регулювання дія регулятора проявляється лише через деякий час. Тому помилка, що виникла, усувається не одночасно з її появою. Це може призвести до небажаних коливань у системі, погіршення характеру перехідного процесу і навіть втрати стійкості системи. Крім того, усунення кількох дина-

мічних складових помилки потребує введення відповідної кількості інтегровальних ізодромних ланок, що підвищує складність системи.

Диференціальний закон регулювання (Δ -регулятор). За допомогою Δ -регулятора забезпечується подання на вхід об'єкта величини, пропорційної швидкості зміни вихідної величини (помилки):

$$\Delta\mu = k \frac{d\Delta x}{dt}, \quad (6.22)$$

або в операторній формі запису

$$\Delta\mu = kp\Delta x. \quad (6.23)$$

Диференціальний закон керування реалізується за допомогою диференціювальних ланок.

При появі в системі внаслідок відповідної дії збурень помилок за швидкістю, прискоренням, ривком для їх усунення на вхід об'єкта потрібно подати вхідні величини, пропорційні відповідному степеню похідних вихідної величини об'єкта (відхилення). Таке регулювання називають *регулюванням за похідними*.

Практично регулювання за похідними від помилки виводиться з того, що система має реагувати, крім самої помилки, також на тенденції її зміни (швидкість і знак зміни відхилення).

Розглянемо вплив введення похідних у схему, показаною на рис. 6.5. Передаточні функції ланок мають вигляд

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{p}.$$

Запишемо передаточну функцію розімкнутої системи

$$W(p) = \frac{k_\Sigma}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p},$$

де $k_\Sigma = k_1 k_2 k_3$, і передаточну функцію замкнутої системи за помилкою до введення похідної

$$\begin{aligned} W^\epsilon(p) &= \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_\Sigma} = \\ &= \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + k_\Sigma}. \end{aligned}$$

Знайдемо коефіцієнти помилок у результаті ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника

$$\frac{p + (T_1 + T_2) p^2 + T_1 T_2 p^3}{p + \frac{1}{k_\Sigma} p^2 + \frac{1}{k_\Sigma} (T_1 + T_2) p^3 + \frac{1}{k_\Sigma} T_1 T_2 p^4} = \frac{k_\Sigma + p + (T_1 + T_2) p^2 + T_1 T_2 p^3}{\frac{p}{k_\Sigma} + \frac{1}{k_\Sigma} \left[(T_1 + T_2) - \frac{1}{k_\Sigma} \right] p^2 + \left[\frac{T_1 T_2}{k_\Sigma} - 2 \frac{T_1 + T_2}{k_\Sigma^2} - \frac{1}{k_\Sigma^3} \right] p^3} + \frac{\left[(T_1 + T_2) - \frac{1}{k_\Sigma} \right] p^2 + \left[T_1 T_2 - \frac{1}{k_\Sigma} (T_1 + T_2) \right] p^3 + \dots}{\left[(T_1 + T_2) - \frac{1}{k_\Sigma} \right] p^2 + \frac{1}{k_\Sigma} \left[(T_1 + T_2) - \frac{1}{k_\Sigma} \right] p^3 + \dots}$$

звідки

$$C_0 = 0; C_1 = 1/k_\Sigma; C_2 = \frac{T_1 + T_2}{k_\Sigma} - \frac{1}{k_\Sigma^2}; C_3 = \frac{T_1 T_2}{k_\Sigma} - 2 \frac{T_1 + T_2}{k_\Sigma^2} - \frac{1}{k_\Sigma^3}.$$

Передаточну функцію вузла введення похідної $W^n(p)$ можна розглядати як результуючу передаточну функцію двох паралельно з'єднаних елементів — прямого зв'язку $W_{n.3}(p) = 1$ і самого диференціального елемента (ланки) — $W_n(p) = Tp$. Отже, можна записати

$$W^n(p) = W_{n.3}(p) + W_n(p) = 1 + Tp.$$

Запишемо передаточну функцію розімкнутої системи з урахуванням регулювання за похідної

$$W_n(p) = W(p)W^n(p) = \frac{k_\Sigma(1 + Tp)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

і передаточну функцію замкнутої системи за помилкою з урахуванням вузла введення похідної

$$W_n^c(p) = \frac{1}{1 + W_n(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_\Sigma(1 + Tp)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}} = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_\Sigma(Tp + 1)} = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + k_\Sigma T)p + 1 + k_\Sigma}.$$

Після ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника знайдемо значення коефіцієнтів помилок

$$C_0 = 0; C_1 = \frac{1}{k_\Sigma}; C_2 = \frac{T_1 + T_2}{k_\Sigma} - \frac{1}{k_\Sigma^2} - \frac{T_n}{k_\Sigma};$$

6.4. Типові закони регулювання.
Введення астатизму і регулювання за похідними

$$\frac{C_3}{6} = \frac{T_1 T_2}{k_\Sigma} - 2 \frac{T_1 + T_2 - T_n}{k_\Sigma^2} - \frac{1}{k_\Sigma^3} - \frac{T_n(T_1 + T_2 - T_n)}{k_\Sigma^2}.$$

Порівнюючи знайдені значення коефіцієнтів помилок з відповідними значеннями цих коефіцієнтів до введення в закон керування похідної, робимо висновки:

- 1) значення коефіцієнтів C_0 і C_1 не змінилося;
- 2) коефіцієнти C_2 і C_3 зменшилися;
- 3) зміною параметра T_n можна дістати $C_2 = 0$.

Якщо ввести в систему ще один вузол уведення похідної, то, змінюючи відповідним чином сталі часу диференціювальних ланок T_{n1} і T_{n2} , можна дістати $C_1 = C_2 = 0$.

Слід підкреслити, що в усіх наведених прикладах розглядалися ідеальні диференціювальні ланки.

Реальна диференціювальна ланка має передаточну функцію вигляду

$$W_{д.р}(p) = \frac{T_n p}{T_0 p + 1}.$$

Характеристики реальної диференціювальної ланки зі сталою часу T_n будуть тим ближче до характеристик ідеальної ланки зі сталою часу, чим більша нерівність $T_n > T_0$.

Перевагою регулювання за похідними є швидкодія і можливість зменшення швидкісних помилок.

Недоліки диференціальних законів керування та відповідних Д-регуляторів такі:

- 1) не можна усунути вплив сталих складових помилки;
- 2) в системах не забезпечується повна компенсація швидкісних помилок (бо ідеальне диференціювання принципово неможливе).

Враховуючи, що основні відносно прості закони регулювання в більшості випадків не можуть забезпечити потрібну статичну і динамічну точність, на практиці поширені складніші закони керування (регулювання) і відповідні регулятори.

Пропорційно-інтегральний закон регулювання (ПІ-регулятори). Цей закон записується у вигляді

$$\Delta u = k \int_0^t \Delta x dt + k_1 \Delta x, \quad (6.24)$$

в операторній формі —

$$\Delta\mu = k \frac{1}{p} \Delta x + k_1 \Delta x. \quad (6.25)$$

Інтегральна складова в системах з ПІ-регулятором забезпечує введення астатизму, а пропорційна — визначає швидкодію системи.

Якщо здиференціювати обидві частини виразу (6.25), то з рівності

$$p\Delta\mu = k\Delta x + k_1 p\Delta x$$

можна зробити висновок, що ПІ-регулятор забезпечує швидкість зміни вхідної величини об'єкта, яка пропорційна швидкості зміни величини на виході об'єкта, що зумовлює поліпшення динамічних властивостей САР.

Недоліком регуляторів даного типу є неможливість оперативно компенсувати швидкісні помилки.

Пропорційно-диференціальний закон регулювання (ПД-регулятори). Рівняння даного закону має вигляд

$$\Delta\mu = k\Delta x + k_1 p\Delta x. \quad (6.26)$$

Регулятор оперативно реагує не тільки на саму помилку, а й на швидкість її зміни. Якщо $p\Delta x > 0$, дія регулятора зростає, при $p\Delta x < 0$ — спадає, що допомагає стабілізувати коливання, які виникають у системі через інерційність об'єкта.

Особливість ПД-регулятора полягає в можливості мати значний сигнал на виході за незначної помилки, оскільки за досить малих величин помилки Δx швидкість її зміни $p\Delta x$ може бути великою. Недоліком ПД-регуляторів є неможливість повного усунення статичної помилки.

Пропорційно-інтегрально-диференціальний закон регулювання (ПІД-регулятори). Математичний вираз цього закону має три складові:

$$\Delta\mu = k\Delta x + k_1 \frac{1}{p} \Delta x + k_2 p\Delta x. \quad (6.27)$$

ПІД-регулятори найскладніші, проте вони об'єднують переваги всіх трьох розглянутих вище простих законів керування, забезпечуючи астатизм системи, оперативне реагування на відхилення та її по-

хідні. Крім розглянутих простих і складних законів керування, можливі й інші ще складніші закони керування, які можуть враховувати нелінійності і регулювання за збуренням.

6.5

Точність САР

в усталених динамічних режимах

Режим зміни збурення зі сталою швидкістю (похідною).

В цьому разі похідна збурення $df/dt = v = \text{const}$ або $pf = v$, звідки $f = v/p$.

Усталена статична помилка за збуренням

$$\Delta x_{\text{уст}} = W^f(p)f = \left. \frac{W_1^f(p) v}{1 + W(p) p} \right|_{p=0}.$$

При статичній системі $W_1^f(0) = k_0$; $W(0) = k_{\Sigma}$ і тоді

$$\Delta x_{\text{уст}} = \left. \frac{k_0 v}{1 + k_{\Sigma} p} \right|_{p=0} = \infty.$$

Звідси випливає, що в статичній системі при зміні збурення зі сталою швидкістю помилка системи неперервно збільшується. Для стабілізації помилки необхідно введення астатизму в дану систему за допомогою інтегрувальної ланки.

Розглянемо введення астатизму першого порядку. Нова передавальна функція розімкнутої системи матиме вигляд

$$W'(p) = \frac{1}{p} W(p).$$

При підключенні інтегрувальної ланки до точки прикладання збурення до об'єкта дістанемо передаточну функцію об'єкта за збуренням $W_1^f(p)$ при $p = 0$. В цьому разі $W_1^f(p) = k_0$. Тоді

$$\Delta x_{\text{уст}} = \left. \frac{k_0 v}{\left(1 + \frac{1}{p} k_{\Sigma}\right) p} \right|_{p=0} = \left. \frac{k_0 v}{p + k_{\Sigma}} \right|_{p=0} = \frac{k_0 v}{k_{\Sigma}} = \text{const}.$$

Відношення $\frac{v}{\Delta x_{уст}} = k_v$ називають *добротністю* системи за швидкістю. В розглянутому випадку $k_v = k_\Sigma / k_0$.

Фізичний сенс добротності системи полягає в тому, що вона дорівнює швидкості зміни збурення при усталеному відхиленні вхідної величини, яке дорівнює одиниці. Отже,

$$k_v = v \text{ (при } \Delta x_{уст} = 1 \text{)}.$$

Для слідкувальних (програмних) систем (рис. 6.8), де $W_{зв.з}(p)$ — передаточна функція основного зворотного зв'язку, значення помилки обчислюється за формулою

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t)W_{зв.з}(p). \quad (6.28)$$

Передаточна функція за помилкою при наявності інтегрувальної ланки має вигляд

$$W^\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(t)}{y(t)} = \frac{1}{1 + W(p)k \frac{1}{p}},$$

а усталене значення помилки при зміні збурення зі сталою швидкістю —

$$\varepsilon = \left. \frac{1}{1 + W(0) \frac{k}{p}} \frac{v}{p} \right|_{p=0} = \left. \frac{1}{p+k} v \right|_{p=0} = \frac{v}{k_\Sigma},$$

де $W(0)k = k_\Sigma$.

У даному разі добротність системи за швидкістю k_v дорівнює k_Σ .

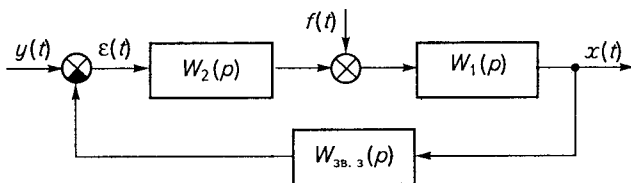


Рис. 6.8

Режим зміни збурення зі сталим прискоренням. За такого режиму $\frac{d^2 f}{dt^2} = a = \text{const}$ або $p^2 f = a$, звідки $f = a/p^2$. У статичній системі дістанемо

$$\Delta x_{\text{уст}} = \left| \frac{k_0}{1 + k_{\Sigma}} \frac{a}{p^2} \right|_{p=0} = \infty.$$

В астатичній системі з астатизмом другого порядку при підключенні інтегровувальних ланок до місця прикладання зовнішнього збурення передаточна функція розімкненої системи матиме вигляд

$$W'(p) = \frac{1}{p^2} W(p)$$

і тоді

$$\Delta x_{\text{уст}} = \left| \frac{W_i^f(p)}{1 + \frac{1}{p^2} W(p)} \frac{a}{p^2} \right|_{p=0} = \left| \frac{k_0}{p^2 + k_{\Sigma}} a \right|_{p=0} = \frac{k_0}{k_{\Sigma}} a,$$

де $\frac{a}{\Delta x_{\text{уст}}} = \frac{k_{\Sigma}}{k_0} = k_a$ — добротність системи за прискоренням, під якою розуміють прискорення, за якого $\Delta x_{\text{уст}} = 1$. При цьому $k_a = k_{\Sigma}$.

Якщо система має скінченне значення добротності за прискоренням, то добротність цієї системи за швидкістю дорівнює нескінченності, а усталене відхилення вихідної величини при збуренні, що змінюється зі сталою швидкістю, дорівнює нулю.

Отже,

$$\Delta x_{\text{уст}} = \left| \frac{k_0}{1 + \frac{1}{p^2} k_{\Sigma}} \frac{v}{p} \right|_{p=0} = 0.$$

6.6

**Підвищення точності САР
на основі принципу інваріантності**

Поняття *інваріантності* визначається так: САР є інваріантною відносно збурюючої дії, якщо після завершення перехідного процесу, зумовленого початковими умовами, регульована величина і помилка системи не залежать від цієї дії.

Оскільки

$$\Delta x(p) = W^f(p) \Delta f(p),$$

то система може бути інваріантною за умови

$$W^f(p) \Delta f(p) = 0.$$

Виконати цю умову можна різними способами, в зв'язку з чим розрізняють чотири форми інваріантності. Розглянемо кожен з них.

Перша форма інваріантності. Умова її виконання: $\Delta f(p) = 0$. Це означає відсутність дії збурення на об'єкт, і ясно, що ця форма інваріантності практичного значення не має.

Друга форма забезпечує інваріантність за рахунок виконання умови

$$W^f(p) = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} = 0.$$

У цьому разі інваріантність досягається за будь-якого значення (форма) збурення $\Delta f(p)$. Таку інваріантність визначають як *абсолютну*.

Досягти абсолютну інваріантність в принципі можливо д в о м а способами.

Перш и й з них полягає в тому, що, побудувавши окремий паралельний канал (або канали) передачі збурення (рис. 6.9), можна забезпечити рівність нулю чисельника передаточної функції замкнутої системи за збуренням, яку можна записати у вигляді

$$W^f(p) = \frac{\sum W_i^f(p)}{1 + W(p)},$$

де $\sum W_i^f(p)$ — сума передаточних функцій всіх каналів передачі збурення; $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

6.6. Підвищення точності САР
на основі принципу інваріантності

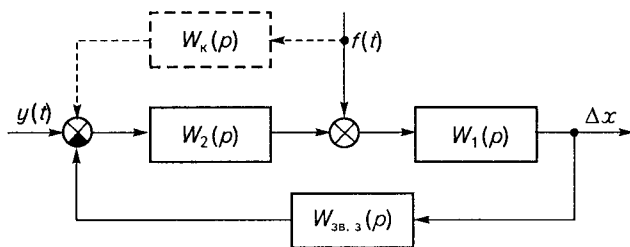


Рис. 6.9

При врахуванні лише одного (основного) каналу передачі збурення, згідно з рис. 6.9, запишемо

$$W^f(p) = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_{зв.з}(p)W_2(p)}$$

При передачі збурення двома каналами маємо

$$W^f(p) = \frac{\sum_{i=1}^2 W_i(p)}{1 + W(p)} = \frac{W_1(p) + W_k(p)W_2(p)W_1(p)}{1 + W(p)}$$

Умовою інваріантності в даному разі є вираз

$$W_1(p) + W_k(p)W_2(p)W_1(p) = 0,$$

звідки знаходимо значення передаточної функції паралельного каналу

$$W_k(p) = -\frac{1}{W_2(p)}$$

Ця форма інваріантності реалізується в класі комбінованих САР в яких використовуються обидва принципи автоматичного керування — за відхиленням (основний замкнутий контур з $W_{зв.з}(p)$) і за збуренням (компенсуючий канал з $W_k(p)$).

Другий спосіб забезпечення абсолютної інваріантності полягає у виконанні умови $W(p) + 1 = \infty$.

Для практичної реалізації цієї умови необхідно, щоб коефіцієнт підсилення розімкнутої системи k_{Σ} дорівнював нескінченності, а це

впливає з того, що $W(p) + 1$, як відомо, є лівою частиною характеристичного рівняння замкнутої системи. Тому можна записати

$$W(p) + 1 = P(p) + Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

при $t \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ і $W(0) + 1 \rightarrow a_n = f(k_\Sigma)$.

У той самий час відомо, що різке збільшення коефіцієнта підсилення системи k_Σ призводить до її нестійкої роботи. Тому досягнення інваріантності за рахунок забезпечення умови $k_\Sigma = \infty$ має чисто теоретичне значення.

Третя форма інваріантності має назву *часткової*. Запишемо

$$\Delta f(p) = \frac{A(p)}{B(p)}; \quad W^f(p) = \frac{Q(p)}{D(p)},$$

де $A(p)$, $B(p)$, $Q(p)$, $D(p)$ — деякі поліноми.

Згідно з умовою інваріантності можна записати

$$\Delta x(p) = W^f(p) \Delta f(p) = \frac{Q(p)A(p)}{D(p)B(p)} = 0. \quad (6.29)$$

При $W^f(p) \neq 0$ та $\Delta f(p) \neq 0$ виконання умови інваріантності можливе лише в окремому випадку за певних збурень (відповідних коренів).

Це можна пояснити так. Розкладемо поліноми $Q(p)$ і $B(p)$ на співмножники вигляду відповідно $(p - p_i)$ і $(p - p'_i)$, де p_i і p'_i — корені рівнянь $Q(p) = 0$ і $B(p) = 0$. Нехай кожний многочлен має по два корені: відповідно p_x, p_{x+1} і p'_x, p'_{x+1} .

Згідно з (6.29) можна записати

$$\Delta x(p) = \frac{Q(p)A(p)}{D(p)B(p)} = \frac{(p - p_x)(p - p_{x+1})A(p)}{D(p)(p - p'_x)(p - p'_{x+1})}.$$

Якщо можна забезпечити рівність коренів $p_x = p'_x$ поліномів чисельника і знаменника, то скорочуються відповідні співмножники і тоді помилка

$$\Delta x(p) = \frac{(p - p_{x+1})A(p)}{D(p)(p - p'_{x+1})}.$$

Якщо вважати, що корінь p_x зумовлює вплив основного збурення на вимушену складову $x_b(t)$ в розв'язку рівняння замкнутої системи

$$x(t) = x_{уст} + x_{н}(t), \quad (6.30)$$

де $x_{уст}$ — усталена складова, то за умови $p_x = p'_x$ вплив кореня p_x «компенсується» наявністю кореня p'_x . При цьому, якщо знехтувати впливом другого кореня p_{x+1} , можна вважати, що буде забезпечена наближена рівність нулю вимушеної складової $x_{н}(t) \approx 0$ і, отже, наявність самого перехідного процесу $x(t) \approx x_{уст}$. Система в цьому разі буде частково інваріантною (стосовно основного збурення). Якщо вплив інших факторів (збурень), які можуть діяти в системі, є відчутним, то система, інваріантна відносно основного збурення, яке умовно в розглянутому прикладі визначалося коренем p_x , не буде інваріантною стосовно інших збурень. У цьому разі може з'явитися вимушена складова в рівнянні (6.30), але вплив її буде відповідно меншим.

Четверта форма інваріантності забезпечується тим, що в систему вводиться додаткова компенсуюча дія, величина якої $f_k(p)$ і відповідна передаточна функція $W_k(p)$ мають бути підібрані так, щоб виконувалася умова

$$\Delta x(p) = W^f(p)\Delta f(p) - W_k^f(p)\Delta f_k(p) = 0.$$

Для виконання цієї умови передаточна функція компенсаційного каналу повинна мати вигляд

$$W_k^f(p) = \frac{W^f(p)\Delta f(p)}{\Delta f_k(p)}.$$

6.7

Підвищення якості в комбінованих САР і системах зі змінною структурою

Використання спеціальних структур і відповідних принципів керування є одним із важливих шляхів підвищення якості САР. Прикладом цього є розглянута раніше комбінована САР, яка дає змогу при такому самому значенні коефіцієнта підсилення розімкненої системи, що й у відповідній системі з керуванням за відхиленням, дістати значно меншу статичну помилку за рахунок дії розімкнутого компенсаційного каналу.

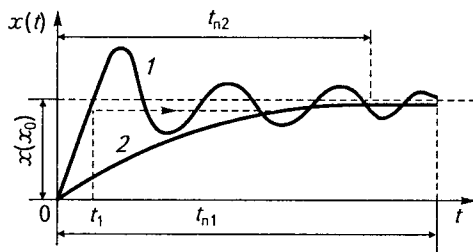
Застосовуючи принципи інваріантності в комбінованих САР, можна також зменшити динамічні помилки системи.

У системах зі змінною структурою (див. рис. 1.23) можна забезпечити перехід від однієї структури САР до іншої із зовсім відмінними, якіснішими динамічними характеристиками.

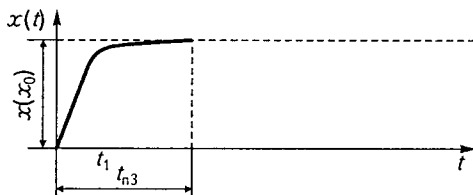
Не вдаючись у досить складні питання теорії систем зі змінною структурою, яку викладено в окремих монографіях, для висвітлення особливостей таких систем і їхніх можливостей розглянемо рис. 6.10, а, б, де 1 — часова характеристика, що відповідає початковому положенню перемикача П (див. рис. 1.23); 2 — часова характеристика, що відповідає новій структурі, перехід на яку відбувається в момент t_1 .

Якби САР працювала із незмінною структурою з характеристикою 1, то тривалість перехідного процесу дорівнювала б t_{n1} , а процес був би коливальним зі значними динамічними помилками. При роботі на характеристиці 2 процес був би аперіодичним тривалістю t_{n2} , яка не дуже відрізняється від t_{n1} .

При переході САР в момент t_1 з характеристики 1 на характеристику 2 завдяки зміні структури (рис. 6.10, б) усуваються динамічні помилки і різко зменшується тривалість перехідного процесу (до величини $t_{n3} \ll t_{n2} < t_{n1}$).



а



б

Рис. 6.10

6.8

Використання неединичних зворотних зв'язків і масштабування

У найпростішому випадку (рис. 6.11) при одиничному зворотному зв'язку помилку системи за завданням можна записати у вигляді

$$\Delta x(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \Delta y(p);$$

система працюватиме без помилки за умови $\Delta x(p) = \Delta y(p)$. Для виконання цієї умови в коло зворотного зв'язку слід ввести ланку з передаточною функцією $W_{зв.з}(p) \neq 1$. Тоді

$$\Delta x(p) = \frac{W(p)}{1 + W_{зв.з}(p)W(p)} \Delta y(p).$$

Для виконання умови $\Delta x(p) = \Delta y(p)$ треба, щоб

$$\frac{W(p)}{1 + W_{зв.з}(p)W(p)} = 1 \quad \text{або} \quad W(p) = 1 + W_{зв.з}(p)W(p),$$

звідки

$$W_{зв.з}(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)}.$$

Оскільки $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи, то $W(p)_{p=0} = W(0) = k_{\Sigma}$ і коефіцієнт зворотного зв'язку

$$k_{зв.з} = 1 - 1/k_{\Sigma}.$$

За цієї умови при безінерційній ланці зворотного зв'язку в статичній системі можна усунути статичну помилку. Технічна реалізація умови може бути виконана на основі рис. 6.12, де крім одиничного від'ємного зворотного зв'язку введено неединичний додатний зворотний зв'язок із коефіцієнтом передачі $k_{зв.з} = 1/k_{\Sigma}$. За сталого значення k_{Σ} така система працюватиме без статичної помилки.

Масштабування. В статичній системі за одиничного зворотного зв'язку маємо $\Delta x_{ст} = k_{\Sigma} \cdot \Delta y_{ст} / (1 + k_{\Sigma})$. Якщо змінити масштаб вхідної

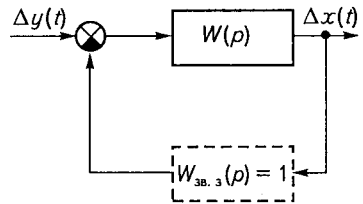
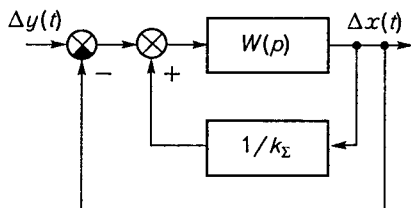
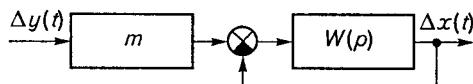


Рис. 6.11

**Рис. 6.12.**

дії у так, щоб виконувалася рівність $m\Delta y \frac{k_{\Sigma}}{1+k_{\Sigma}} = \Delta x$ і забезпечувалися умови роботи системи без статичної помилки $\Delta x = \Delta y$, то з рівності $m \frac{k_{\Sigma}}{1+k_{\Sigma}} = 1$ можна дістати необхідну величину масштабу m :

$$m = \frac{1+k_{\Sigma}}{k_{\Sigma}}.$$

**Рис. 6.13**

Якщо ввести таку ланку з передаточним коефіцієнтом m на вході в систему (рис. 6.13), то при $k_{\Sigma} = \text{const}$ можна усунути статичну помилку.

6.9

Технічна реалізація коректувальних пристроїв у схемах автоматизованого електропривода

Найпростішими і досить поширеними коректувальними пристроями у схемах автоматизованого електропривода є пасивні чотириполосники, побудовані на RC -елементах (резисторах та конденсаторах). У багатьох книгах з теорії автоматичного керування є спеціальні таблиці, які містять схеми пасивних коректувальних пристроїв, передаточні функції, логарифміч-

ні характеристики й формули для розрахунків параметрів, що відповідають цим пристроям. Схеми і характеристики деяких найживаніших коректувальних пристроїв подано в табл. 6.1.

Передаточні функції пасивних чотириполіусників, схеми яких подібні до наведених у табл. 6.1, найпростіше визначити таким чином. Опори ділянок кола слід записати в операторній формі, тобто прийняти для ємності $Z_C(p) = 1/Cp$, для активного опору $Z_R(p) = R$. Після цього електричне коло слід перетворити на еквівалентний Г-подібний чотириполіусник, схему якого показано на рис. 6.14.

Якщо припустити, що навантаження відсутнє, тобто знехтувати струмом вихідного кола коректувальної ланки порівняно зі струмом вхідного кола, то передаточну функцію можна визначити як відношення

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$$

- **Приклад 6.1.** Визначити передаточну функцію чотириполіусника, схему якого показано на рис. 6.15.

Розв'язання. Параметри еквівалентного Г-подібного чотириполіусника такі:

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{1}{C_1 p} = \frac{R_1 C_1 p + 1}{C_1 p}; \quad Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{C_2 p} = \frac{R_2 C_2 p + 1}{C_2 p}$$

Передаточна функція має вигляд

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{R_2 C_2 p + 1}{\frac{(R_1 + R_2) C_1 C_2}{C_1 + C_2} p + 1} = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1},$$

де

$$k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}; \quad T_1 = R_2 C_2; \quad T_2 = \frac{(R_1 + R_2) C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Пасивні чотириполіусники дешеві, надійні, мають досить велику різноманітність схем, у кожній з яких можна змінювати параметри в широкіх межах. Проте пасивні чотириполіусники послаблюють сиг-

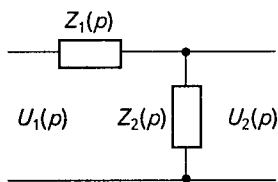


Рис. 6.14

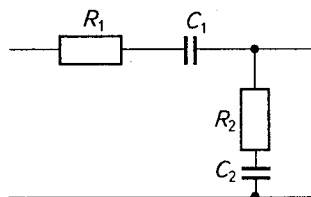
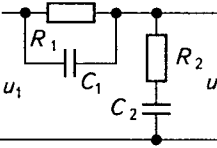
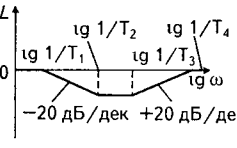
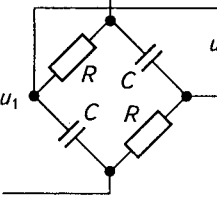
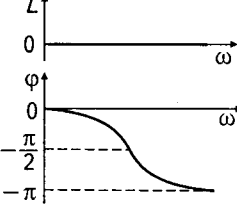


Рис. 6.15

Таблиця 6.1

Но- мер лан- ки	Схема кола	ЛАХ	Передаюча функція, формули для розрахунків параметрів
1			$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1};$ $k = T = RC$
2			$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1};$ $k = \frac{R_2}{R_2 + R_1}; T_1 = R_1 C;$ $T_2 = k T_1 = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$
3			$W(p) = \frac{kp(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)};$ $k = R_2 C_2; T_1 = R_1 C_2;$ $T_2 = R_1(C_1 + C_3);$ $T_3 = R_1 C_1$
4			$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}; T = RC$
5			$W(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1};$ $T_1 = (R_1 + R_2)C;$ $T_2 = R_2 C$

Но- мер лан- ки	Схема кола	ЛАХ	Передаточна функція, формули для розрахунків параметрів
6			$W(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)} = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{a_0 p^2 + a_1 p + 1};$ $a_0 = R_1 R_2 C_1 C_2;$ $a_1 = R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2;$ $T_2 = R_1 C_1; T_3 = R_2 C_2$
7			$W(p) = \frac{1 - Tp}{Tp + 1}; T = RC$

нал внаслідок втрат енергії в резисторах, крім того, на їхні характеристики істотно впливає опір навантаження. Тому в схемах автоматизованого електропривода частіше застосовуються коректувальні пристрої на базі операційних підсилювачів.

Визначаючи передаточну функцію кола з операційним підсилювачем, припускаємо, що коефіцієнт підсилення k і вхідний опір $R_{вх}$ приблизно дорівнюють нескінченності; підсилювач вважається безінерційним. Операційний підсилювач має інвертувальний та неінвертувальний входи. Якщо вхідна напруга подається на інвертувальний вхід, то вихідна змінює полярність. Це дає змогу створювати від'ємний зворотний зв'язок.

Схему коректувального кола з операційним підсилювачем показано на рис. 6.16.

З прийнятого припущення про те, що $R_{вх} \approx \infty$, впливає, що вхідний струм $I_{вх}$ дорівнює нулю, тому струм зворотного зв'язку I_2 дорівнює струму I_1 . Напруга на інвертувальному вході операційного підсилювача $U_{вх}$ дорівнює нулю. Це пояснюється тим, що при

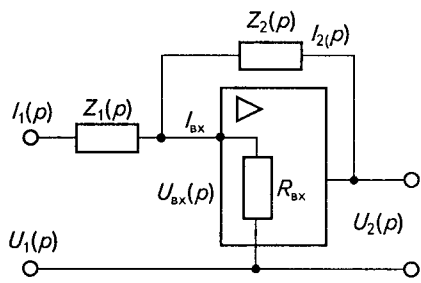


Рис. 6.16

$k = \infty$ будь-яке відхилення $U_{вк}$ від нульового значення було б нескінченно підсилене, передане через коло зворотного зв'язку на вхід підсилювача і, будучи інвертованим відносно напруги $U_{вк}$, скомпенсувало б її. За цих умов досить просто визначити передаточну функцію кола з операційним підсилювачем. Для схеми (рис. 6.16)

$$U_{вк} = U_1(p) - I_1(p)Z_1(p);$$

$$U_{вк}(p) - U_2(p) = I_2(p)Z_2(p),$$

але, якщо врахувати, що $U_{вк} = 0$, $I_1 = I_2$, то

$$U_1(p) = I_1(p)Z_1(p) \quad \text{і} \quad U_2(p) = -I_2(p)Z_2(p).$$

Звідси передаточна функція матиме вигляд

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}, \quad (6.31)$$

де $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ — повні опори в операторній формі.

Із виразу (6.31) випливає, що вибір відповідних значень $Z_1(p)$ і $Z_2(p)$ надає можливість на базі операційного підсилювача створити різноманітні типи регуляторів (коректувальних пристроїв).

Пропорційний регулятор (П-регулятор). Схему регулятора показано на рис 6.17, а. Його передаточна функція має вигляд

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{R_2}{R_1} = -k.$$

Інтегральний регулятор (І-регулятор). Схему регулятора показано на рис 6.17, б. Вважаючи, що $Z_1(p) = R$; $Z_2(p) = 1/Cp$, передаточну функцію дістанемо з (6.31):

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{1/Cp}{R} = -\frac{1}{RCp} = -\frac{1}{Tp},$$

де $T = RC$ — стала інтегрування.

Пропорційно-інтегральний регулятор (ПІ-регулятор). Схему регулятора показано на рис. 6.17, в. Для цієї схеми

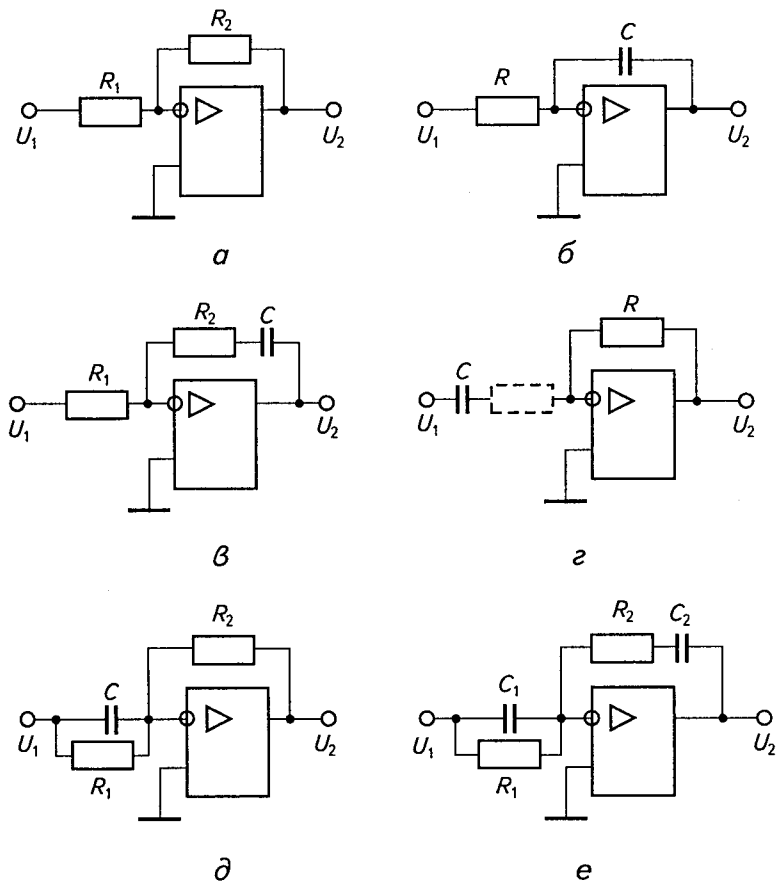


Рис. 6.17

$$Z_1(p) = R_1; \quad Z_2(p) = R_2 + 1/Cp = \frac{R_2 Cp + 1}{Cp}.$$

Тому передаточна функція

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{R_2 Cp + 1}{CR_1 p} = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{CR_1 p}\right) = -\left(k_n + \frac{1}{T_i p}\right),$$

де $k_n = R_2/R_1$ — коефіцієнт передачі пропорційної складової;
 $T_i = CR_1$ — стала інтегрування.

Диференціальний регулятор (Д-регулятор). Схему регулятора показано на рис 6.17, з. Для цієї схеми

$$Z_1(p) = 1/Cp; \quad Z_2(p) = R,$$

тому

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -RCp = -T_d p,$$

де $T_d = RC$.

Розглянута схема не забезпечує якісне диференціювання, оскільки вона має властивість підсилювати височастотні перешкоди, які є у вхідному сигналі. Струм перешкоди можна дещо обмежити, якщо послідовно з конденсатором C увімкнути резистор із невеликим опором (на рис. 6.17, з цей резистор зображено штриховою лінією).

Високоякісний Д-регулятор можна дістати, якщо в коло зворотного зв'язку увімкнути інтегратор. Схему такого регулятора зображено на рис. 6.18. Підсилювач $DA2$, який працює в режимі інвертора, призначений для збереження від'ємного знака зворотного зв'язку.

Передаточна функція регулятора має вигляд

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} R_5 Cp.$$

Поклавши $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, дістанемо

$$W(p) = -R_5 Cp = -T_d p,$$

де $T_d = R_5 C$.

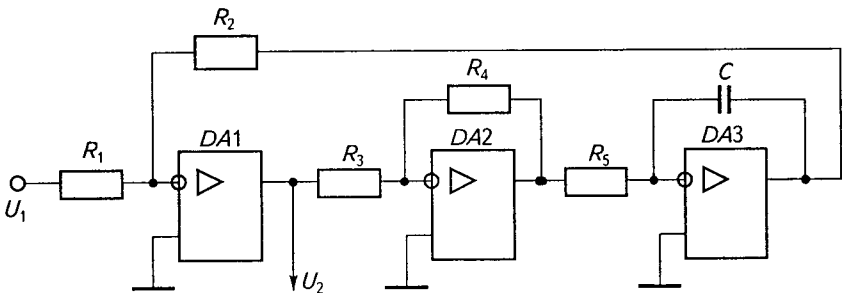


Рис. 6.18

Пропорційно-диференціальний регулятор (ПД-регулятор). Схему такого регулятора показано на рис. 6.17, д. Для неї

$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{Cp} R_1}{\frac{1}{Cp} + R_1} = \frac{R_1}{R_1 Cp + 1}; \quad Z_2(p) = R_2,$$

тому

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{R_2(R_1 Cp + 1)}{R_1} = -\left(\frac{R_2}{R_1} + R_2 Cp\right) = -(k_n + T_d p),$$

де

$$k_n = R_2/R_1; \quad T_d = R_2 C.$$

Пропорційно-інтегрально-диференціальний регулятор (ПІД-регулятор). Схему регулятора показано на рис. 6.17, е. Для неї

$$Z_1(p) = \frac{R_1}{R_1 C_1 p + 1}; \quad Z_2(p) = R_2 + 1/C_2 p = \frac{R_2 C_2 p + 1}{C_2 p},$$

а передаточна функція

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{(R_2 C_2 p + 1)(R_1 C_1 p + 1)}{R_1 C_2 p} = \\ &= -\left(\frac{R_2 C_2 + R_1 C_1}{R_1 C_2} + R_2 C_1 p + \frac{1}{R_1 C_2 p}\right) = -(k_n + T_d p + 1/T_i p), \end{aligned}$$

де

$$k_n = (R_2 C_2 + R_1 C_1)/R_1 C_2; \quad T_d = R_2 C_1; \quad T_i = R_1 C_2.$$

Коректувальні пристрої на базі операційних підсилювачів мають такі позитивні властивості, як незалежність коефіцієнта передачі від розкиду параметрів внаслідок стабілізуючої дії від'ємного зворотного зв'язку, малий вхідний струм схеми, що забезпечує близький до холостого ходу режим роботи пристрою, ввімкненого до входу операційного підсилювача.

Комбіновані регулятори (ПІ, ПД, ПІД) звичайно дістають за рахунок паралельного з'єднання відповідних простих регуляторів (П, І,

Д). Для підсилювання вихідних сигналів цих регуляторів використовується додатковий операційний підсилювач. Схема в такому разі дещо ускладнюється, але в ній забезпечується можливість незалежного регулювання складових вихідного сигналу комбінованого регулятора.

6.10

Способи підвищення запасу стійкості

Способи підвищення запасу стійкості, або *демпфування*, досить різноманітні. В деяких випадках для цього достатньо, не змінюючи структуру системи, змінити коефіцієнт передачі прямого кола, коефіцієнти зворотних зв'язків або, якщо це можливо, сталі часу елементів САР. Поширенішим способом демпфування є введення в САР додаткових коректувальних ланок. Їх можна вмикати послідовно в пряме коло системи, паралельно окремим ланкам, або охоплювати зворотним зв'язком одну або кілька ланок САР. При цьому динамічні властивості лінійних систем можна зробити однаковими, тобто для коректувального пристрою одного виду можна підібрати еквівалентний коректувальний пристрій іншого виду. Найпростіше простежити вплив на частотні характеристики і, отже, на динамічні властивості САР послідовних коректувальних ланок, тому саме для них розглядатимуться способи підвищення запасу стійкості.

Додаткові ланки змінюють частотні характеристики САР, тому їх вплив на зміну запасу стійкості можна простежити за допомогою будь-якого частотного критерію стійкості. Найзручнішим для цієї мети є критерій стійкості Найквіста в логарифмічній формі.

Існують чотири основні способи змінювання частотних характеристик. Розглянемо кожний з них.

Демпфування з придушенням високих частот. Якщо передаточна функція розімкнутої статичної системи становить добуток передаточних функцій мінімально-фазових ланок (безінерційних, аперіодичних, коливальних, форсувальних), то достатній запас стійкості можна забезпечити, увімкнувши послідовно в коло регулювання аперіодичну ланку з великою сталою часу T_0 і коефіцієнтом передачі $k = 1$ (див., наприклад, ланку № 4 в табл. 6.1). Передаточна функція такої ланки

$$W_k(p) = \frac{1}{T_0 p + 1}. \quad (6.32)$$

Розглянемо дію цієї ланки на прикладі статичної системи, передаточна функція якої в розімкненому стані має вигляд

$$W_1(p) = \frac{K(\tau_1 p + 1) \dots (\tau_m p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)}, \quad (6.33)$$

де $n > m$.

Логарифмічну амплітудну характеристику $L_1(\omega)$ і логарифмічну фазову характеристику $\varphi_1(\omega)$ показано на рис. 6.19, а. Система нестійка, бо на частоті зрізу ω_{31} зсув за фазою $\varphi_1(\omega_{31})$ менше $-\pi$.

Початкова частина ЛАХ статичної системи має нахил 0 дБ/дек і проходить на рівні $20 \lg K$. Тому за будь-яких значень сталих часу передаточної функції (6.33) завжди можна вказати таку частоту ω_n , що для всіх частот $\omega < \omega_n$ значення $L_1(\omega)$ дуже мало відрізнятиметься від $20 \lg K$, а значення $\varphi(\omega)$ — від нуля. Якщо тепер вибрати сталу часу T_0 передаточної функції (6.32) такою, щоб частота зрізу ω_{32} нової ЛАХ $L_2(\omega)$ була меншою за ω_n , то в результаті дістанемо стійку систему з достатнім запасом стійкості. Це пояснюється тим, що передаточну функцію розімкнутої системи з коректувальною ланкою наближено, але з досить великою точністю можна подати у вигляді

$$W_2(p) = \frac{K}{T_0 p + 1},$$

оскільки частоти сполучення, які відповідають решті сталих часу передаточної функції (6.33), знаходяться значно правіше від частоти зрізу ω_{32} , визначають тільки високочастотні частини ЛАХ і ЛФХ і практично не впливають на стійкість системи.

Отже, ефект демпфування досягається за рахунок того, що введення великої сталої часу T_0 робить решту сталих часу відносно малими.

Запас стійкості не зміниться й при збільшенні K , якщо одночасно збільшувати T_0 і залишати незмінним співвідношення

$$K/T_0 = \omega_{32} = \text{const.}$$

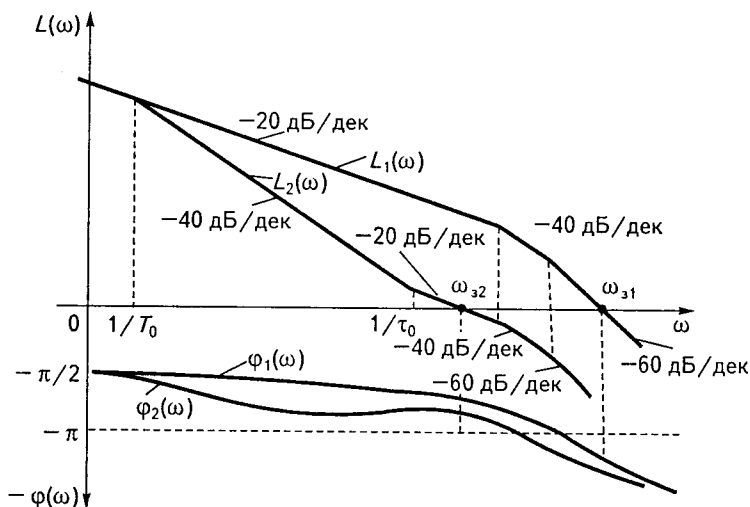
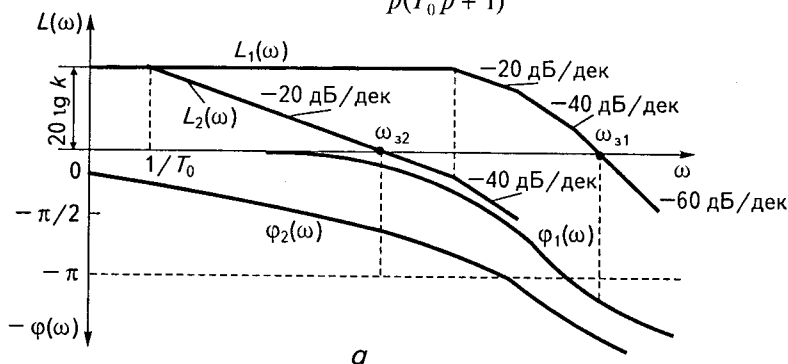
Для демпфування астатичних систем першого порядку, що складаються з мінімально-фазових ланок, можна використати інтегродиференціальну ланку з передаточною функцією

$$W_k(p) = \frac{\tau_0 p + 1}{T_0 p + 1},$$

де $T_0 > \tau_0$ (див. табл. 6.1, ланку № 5).

За досить великих T_0 і τ_0 передаточна функція розімкнутої системи

$$W(p) \approx \frac{k(\tau_0 p + 1)}{p(T_0 p + 1)},$$



б

Рис. 6.19

оскільки і в цьому випадку рештою сталих часу можна знехтувати.

Логарифмічні характеристики, що ілюструють розглянутий випадок, зображено на рис. 6.19, б.

Перевагою наведеного способу демпфування є те, що додаткова ланка з великою сталою часу T_0 є фільтром низьких частот і послаблює вплив на систему високочастотних перешкод, недоліком — істотне зменшення швидкодії системи. Тому демпфування з придуршенням високих частот використовується лише в разі, коли з урахуванням умов роботи системи зниження швидкодії є допустимим.

Демпфування з підняттям високих частот. Стійкість і потрібний запас стійкості забезпечуються за рахунок розширення смуги пропускання розімкнутої системи при введенні послідовно в коло регулювання форсувальної ланки з передаточною функцією $W_k(p) = T_k p + 1$. Ця ланка створює додатний зсув за фазою $\varphi_k(\omega) = \arctg \omega T_k$, який у зоні високих частот наближається до 90° . Крім того, ланка збільшує здатність системи пропускати високочастотний сигнал, бо модуль частотної передаточної функції ланки $A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_k^2}$ зростає при збільшенні частоти.

Вплив форсувальної ланки на запас стійкості системи пояснюється логарифмічними частотними характеристиками розімкнутої системи, показаними на рис. 6.20. Тут $L_1(\omega)$ і $\varphi_1(\omega)$ — логарифмічні характеристики вихідної системи. Якщо вибрати сталу часу коректу-

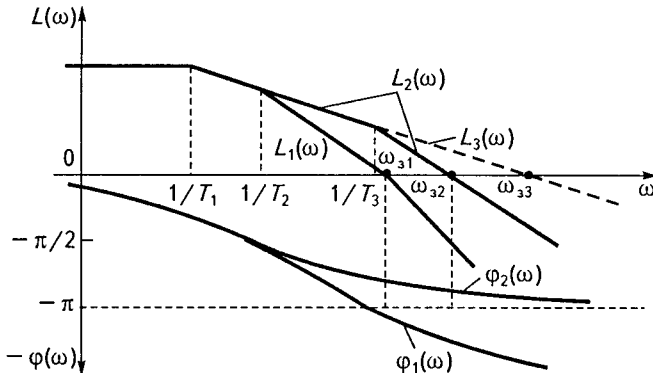


Рис. 6.20

вальної форсувальної ланки $T_k = T_2$, то ЛАХ і ЛФХ зміняться і матимуть вигляд $L_2(\omega)$ і $\varphi_2(\omega)$. Смуга пропускання системи розшириться і одночасно підійметься фазова характеристика, що приведе до збільшення запасу стійкості.

Якщо вплив однієї форсувальної ланки на підвищення запасу стійкості буде недостатнім, то можна ввести ще одну ланку. Наприклад, якщо в розглянутому випадку ввести дві коректувальні ланки із загальною передаточною функцією $W_k(p) = (T_{k1}p + 1)(T_{k2}p + 1)$, де $T_{k1} = T_2$ і $T_{k2} = T_3$, то ЛАХ матиме вигляд $L_3(\omega)$ і перетне вісь частот з нахилом -20 дБ/дек. Це, звичайно, забезпечить прийнятний запас стійкості.

При розгляді цього способу демпфування зроблено припущення, що використання ідеальних форсувальних ланок, які насправді не можна фізично реалізувати, можливе. Практично використовуються реальні форсувальні ланки, наприклад ланка № 2 з табл. 6.1. Передаточна функція такої ланки

$$W_k(p) = \frac{k_k(\tau_k p + 1)}{T_k p + 1},$$

причому $k_k < 1$ і $\tau_k \gg T_k$, а фазова характеристика

$$\varphi_k(\omega) = \text{arctg } \tau_k \omega - \text{arctg } T_k \omega,$$

тому стала часу T_k обмежує діапазон частот, на яких зберігається додатний зсув за фазою. Проте, якщо вибрати $\tau_k \gg T_k$, то вплив T_k на частотах, близьких до частоти зрізу, буде незначним.

Оскільки коефіцієнт передачі коректувальної ланки менше одиниці, слід вживати заходів для збільшення коефіцієнта передачі розімкнутої системи в $1/k_k$ разів. Можна також використати ПД-регулятор на базі операційного підсилювача (див. рис. 6.17, *d*).

Замість послідовних форсувальних ланок можна використовувати еквівалентні за впливом місцеві від'ємні зворотні зв'язки, які містять аперіодичні ланки.

Розглянутий спосіб підвищення запасу стійкості теоретично є універсальним і дає бажаний результат практично за будь-якої передаточної функції вихідної системи, включаючи системи з немінімально-фазовими ланками. Крім того, одночасно зі збільшенням запасу стійкості підвищується швидкодія системи. Проте практичне застосування цього способу значно обмежується, бо при розширенні

смуги пропускання системи зростає вплив високочастотних перешкод.

Демпфування з придушенням середніх частот. Ефект демпфування досягається за рахунок послідовного ввімкнення інтегро-диференціовальної ланки з передаточною функцією

$$W_k(p) = \frac{(\tau_{1k} p + 1)(\tau_{2k} p + 1)}{(T_{1k} p + 1)(T_{2k} p + 1)}. \quad (6.34)$$

Схему такої ланки подано в табл. 6.1 (ланка № 6).

Вплив ланки № 6 на запас стійкості можна пояснити, розглянувши логарифмічні характеристики на рис. 6.21. ЛАХ розімкнутої вихідної системи позначено $L_1(\omega)$. Сталі часу ланок, що зумовлюють зміни нахилів ЛАХ, позначено T_1, T_2, T_3 . Якщо вибрати сталі часу інтегродиференціовальної ланки з умов $\tau_{1k} = \tau_{2k} = T_2, T_{2k} = T_3, T_{1k} = T_2^2/T_3$, то після її введення в коло регулювання логарифмічні характеристики матимуть вигляд $L_2(\omega)$ і $\varphi_2(\omega)$. Нахил ЛАХ на частоті зрізу становить -20 дБ/дек, що забезпечує прийнятний запас стійкості.

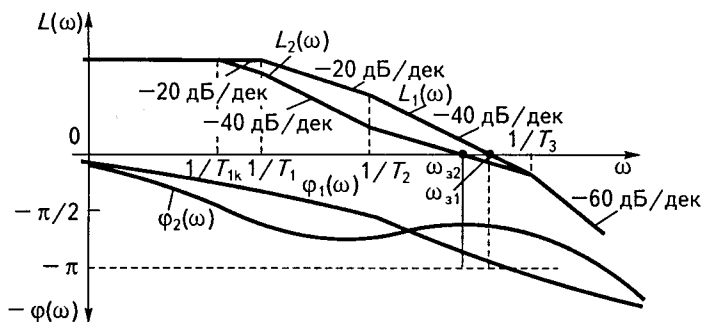


Рис. 6.21

При демпфуванні з придушенням середніх частот швидкодія системи зменшується, але не істотно. Цей вид демпфування є найпоширенішим.

Демпфування з введенням від'ємних зсувів за фазою.

Цей вид демпфування дає добрі результати за наявності в системі консервативної ланки або коливальної ланки з малим затуханням.

Для демпфування у пряме коло системи вводиться немінімально-фазова ланка, наприклад, з передаточною функцією

$$W_k(p) = \frac{1 - Tp}{Tp + 1}$$

(ланка № 7 з табл. 6.1). Ланка № 7 не впливає на амплітудно-частотну характеристику, бо $A_k(\omega) = 1$, але створює від'ємний зсув за фазою

$$\varphi_k(\omega) = \arctg(-\omega T) - \arctg \omega T = -2 \arctg \omega T.$$

Виходячи з того, що коректувальна ланка є немінімально-фазовою, її вплив на властивості системи зручніше розглянути, користуючись не логарифмічними, а звичайними амплітудно-фазовими характеристиками розімкнутої системи. Припустимо, що передаточна функція розімкнутої системи

$$W_1(p) = \frac{R(p)}{p(T^2 p^2 + 1)Q_0(p)},$$

де $R(p)$, $Q_0(p)$ — поліноми, корені яких мають від'ємні дійсні частини, тобто до складу системи входять консервативна та інтегровальна ланки.

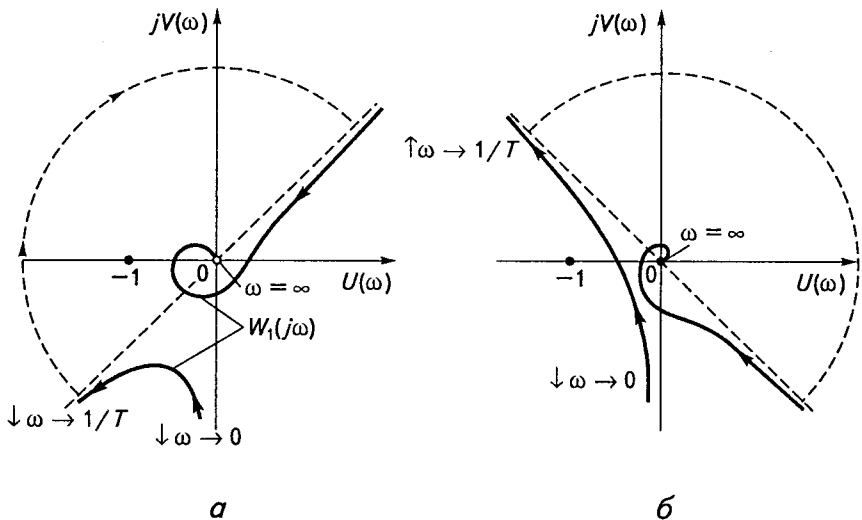


Рис. 6.22

Амплітудно-фазову характеристику розімкнутої системи $W_1(j\omega)$ показано на рис. 6.22, а. При $\omega = 0$ і $\omega = \pm 1/T$ модуль $W(j\omega)$ прямує до нескінченності, а аргумент на частоті $\pm 1/T$ стрибком дістає приріст -180° , тому розриви АФХ доповнюються півколами нескінченного радіуса у напрямі ходу стрілки годинника.

АФХ розімкнутої системи охоплює точку з координатами $(-1, j0)$, отже, замкнута система нестійка. Додавання від'ємного зсуву за фазою (див. табл. 6.1, ланку № 7) призводить до «закручування» АФХ за ходом стрілки годинника (рис. 6. 22, б). У результаті АФХ розімкнутої системи не охоплюватиме точку $(-1, j0)$ і замкнута система буде стійкою.

Розглянуті способи демпфування є основними, але вони лише якісно ілюструють ідеї, які можна застосовувати для підвищення запасу стійкості. Ці способи можуть поєднуватися залежно від частотних характеристик вихідної системи. Наприклад, може виникнути потреба поєднати придушення середніх частот і підняття високих, підсилення високих частот і придушення окремої їх зони тощо.

6.11

Синтез коректувальних пристроїв методом ЛАХ

Одним з найефективніших інженерних методів синтезу систем автоматичного керування є метод, в основу якого покладено використання ЛАХ розімкнутої системи. Ідея методу ґрунтується на тому, що для стійких мінімально-фазових систем існує однозначний зв'язок між перехідною характеристикою замкнутої системи і виглядом ЛАХ відповідної розімкнутої системи. Виходячи з бажаного вигляду перехідного процесу, будують ЛАХ, яка відповідає такому процесу (бажану ЛАХ). Далі, знаючи вигляд бажаної ЛАХ, до неї наближують ЛАХ вихідної системи, запроваджуючи різні коректувальні пристрої.

Будь-яка САР з електроприводом складається з незмінної частини, до якої належить об'єкт регулювання, електродвигун, силовий керований перетворювач, а також елементи головного зворотного зв'язку та порівняння. Об'єкт регулювання вважається відомим при

проектуванні САР, двигун і перетворювач вибирають, виходячи з технологічних характеристик об'єкта. Природно, що ці елементи не підлягають зміні при корекції динамічних властивостей САР. Незмінними звичайно вважаються також елементи, що забезпечують потрібну точність роботи системи в усталеному режимі — підсилювач, а в астатичній системі — інтегровальний елемент. Елементи САР, що не змінюються, визначають ЛАХ вихідної (нескоректованої) системи.

Бажану ЛАХ, яка визначає потрібну якість САР, умовно поділяють на три частини: низькочастотну $L_{н.ч.}(\omega)$, середньочастотну $L_{с.ч.}(\omega)$ і високочастотну $L_{в.ч.}(\omega)$. Можливий вигляд бажаної ЛАХ показано на рис. 6.23.

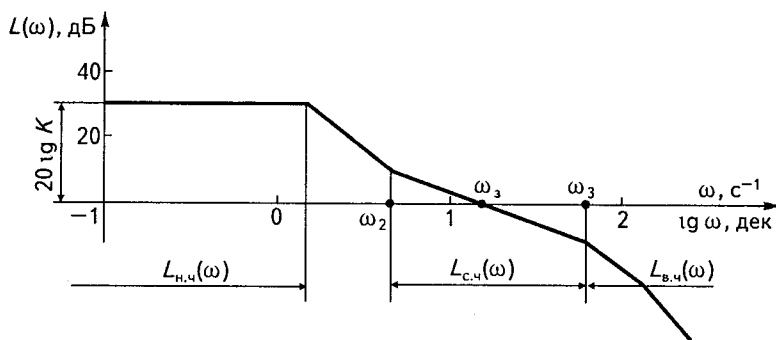


Рис. 6.23

До *низькочастотної* частини ЛАХ належить ділянка характеристики, нахил якої не змінюється при $\omega \rightarrow 0$. Вона проходить через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K$, $\lg \omega = 0$, де K — коефіцієнт передачі розімкнутої системи, і має нахил 0 дБ/дек для статичних систем, -20 дБ/дек — для астатичних систем першого порядку і -40 дБ/дек — для астатичних систем другого порядку. ЛАХ на рис. 6.23 відповідає астатичній системі.

Низькочастотна частина ЛАХ визначається коефіцієнтом передачі розімкнутої системи K і порядком астатизму, отже, вона характеризує точність роботи системи в усталених режимах. Якщо до незмінюваної частини системи належать елементи, що забезпечують

потрібну точність роботи САР в усталеному режимі, то низькочастотні частини бажаної ЛАХ і ЛАХ вихідної системи збігаються.

До *середньочастотної* частини належить ділянка ЛАХ з однако-вим нахилом, що проходить через частоту зрізу ω_3 . Ця частина ЛАХ є найважливішою, бо вона переважно визначає якість перехідних процесів Основними параметрами, які характеризують середньочастотну частину, є її нахил і частота зрізу. Для задовільної якості перехідних процесів замкнутої системи необхідно, щоб нахил ЛАХ на частоті зрізу дорівнював -20 дБ/дек. Якщо нахил ЛАХ на частоті зрізу становить -40 дБ/дек, то перехідний процес має велике перерегулювання, а при нахилі -60 дБ/дек система, як правило, буде нестійкою. Частота зрізу ω_3 визначає швидкодію САР. Швидкодія зростає при збільшенні ω_3 .

Високочастотна частина ЛАХ $L_{в.ч.}(\omega)$ знаходиться в зоні від'ємних децибелів, тому майже не позначається на якості перехідного процесу і впливає лише на його початок. Власне кажучи, краще мати якомога більший нахил асимптот високочастотної частини, бо це зменшує вплив високочастотних перешкод. У деяких випадках високочастотну частину ЛАХ взагалі не беруть до уваги.

Для побудови бажаної ЛАХ, виходячи із заданих вимог до якості перехідних процесів, використовуються різні методи. Розглянемо найпоширеніші з них.

Метод Соловйнікова. Розглянемо цей метод стосовно астатичної системи першого порядку, в якій низькочастотні асимптоти з нахилом -20 дБ/дек вихідної $L_n(\omega)$ і бажаної ЛАХ $L_6(\omega)$ збігаються і проходять через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K$, $\lg \omega = 0$ (рис. 6.24).

Вихідними даними для побудови бажаної ЛАХ є час регулювання t_p і перерегулювання σ . Можуть бути заданими також максимальне прискорення a_{\max} та початкове розузгодження вихідної координати x_0 .

Бажану ЛАХ $L_6(\omega)$ будують у такій послідовності.

1. Вибирають частоту зрізу, виходячи з умови

$$\omega_{31} \leq \omega_3 \leq \omega_{32},$$

де ω_{31} — мінімальне значення частоти зрізу, за якого час регулювання не перевищує заданий; ω_{32} — максимальне значення частоти

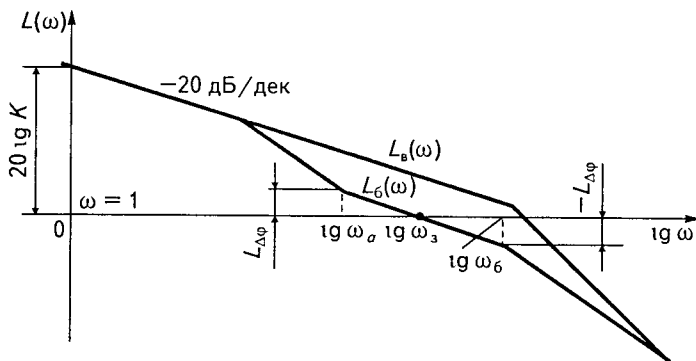


Рис. 6.24

зрізу, яке визначають, виходячи із заданого максимального прискорення a_{\max} регульованої координати та її початкового розузгодження x_0 .

Значення ω_{31} визначають за номограмою (рис. 6.25) у такому порядку.

Виходячи із заданого значення σ за графіком $\sigma(U_{\max})$ визначають відповідне значення U_{\max} . Потім за цим значенням (U_{\max}) за графіком $t_p(U_{\max})$ знаходять π/ω_3 . Цю величину порівнюють із заданим значенням t_p і зі знайденого рівняння визначають

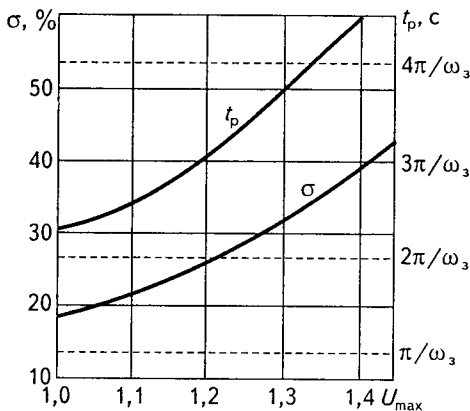


Рис. 6.25

$$\omega_{31} = \pi/t_p.$$

Частоту ω_{32} обчислюють за формулою

$$\omega_{32} = \sqrt{\frac{a_{\max}}{x_0}}.$$

Якщо $\omega_{31} > \omega_{32}$, то слід вибирати $\omega_3 \leq \omega_{32}$. Якщо значення a_{\max} і x_0 не задані, то $\omega_3 \geq \omega_{31}$.

2. Після визначення частоти зрізу будують середньочастотну асимптоту бажаної ЛАХ, яка проходить через частоту зрізу з нахилом -20 дБ/дек.

3. Виходячи зі знайденого значення U_{\max} , за графіком (рис. 6.26) визначають $L_{\Delta\varphi}$ і $\Delta\varphi_{\min}$.

Після цього сполучають середньочастотну асимптоту з низькочастотною так, щоб в інтервалі частот, для якого

$$0 \leq L_6(\omega) \leq L_{\Delta\varphi}, \quad (6.35)$$

надлишок фази був більшим або дорівнював мінімальному надлишку:

$$\Delta\varphi \geq \Delta\varphi_{\min}. \quad (6.36)$$

Сполучення здійснюють асимптоту з нахилом -40 або -60 дБ/дек для астатичних систем першого порядку і -60 дБ/дек — для систем другого порядку. Надлишок фази за частоти ω_a можна визначити за такою наближеною формулою:

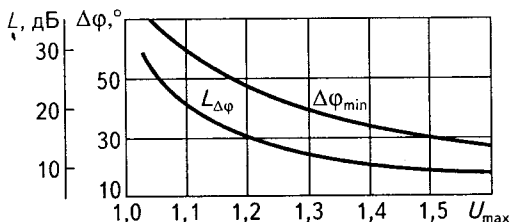


Рис. 6.26

$$\Delta\varphi_a = \pi - \nu \frac{\pi}{2} - \left(m \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\omega_a} \right) + \left(l \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^l \frac{\omega_i}{\omega_a} \right),$$

де ν — порядок астатизму; ω_i — частоти сполуки бажаної ЛАХ, які містяться ліворуч від ω_a , m і l — кількість частот сполуки, на яких нахил бажаної ЛАХ змінюється відповідно на -20 або $+20$ дБ/дек.

Надлишок фази $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega)$, де $\varphi(\omega) < 0$, перевіряють лише для тієї частоти ω_a (див. рис. 6.24), для якої $L_6(\omega) = L_{\Delta\varphi}$. Частоті ω_a може відповідати точка сполуки асимптот або точка на одній із цих асимптот.

Задоволення умов (6.35) і (6.36) означає, що бажаній ЛАХ відповідає типова частотна характеристика $U(\omega)$, у якій $|U_{\min}| = U_{\max} - 1$, і для якої складено використані раніше залежності $\sigma(U_{\max})$ і $t_p(U_{\max})$, наведені на рис. 6.25.

Якщо на частоті ω_a надлишок фази $\Delta\varphi_a < \Delta\varphi_{\min}$, то асимптоту сполуки необхідно зсунути вліво або зменшити її нахил; якщо $\Delta\varphi_a > \Delta\varphi_{\min}$, то асимптоту слід зсунути вправо або збільшити її на-

хил. Отже, потрібне положення асимптоти сполуки відшукується методом спроб. При цьому різниця $\Delta\varphi_a - \Delta\varphi_{\min}$ має не перевищувати кількох градусів.

4. Середньочастотну асимптоту сполучають із високочастотною так, щоб в інтервалі частот, для якого

$$0 \geq L_{\phi}(\omega) \geq L_{\Delta\varphi},$$

надлишок фази становив $\Delta\varphi \geq \Delta\varphi_{\min}$.

Надлишок фази досить перевірити за частоти ω_{ϕ} (див. рис. 6.24) за такою наближеною формулою:

$$\Delta\varphi_{\phi} = \pi - \frac{\pi}{4} q_{\text{сер}} - \sum_{i=1}^r \frac{\omega_{\phi}}{\omega_i},$$

де $q_{\text{сер}}$ — відносний нахил середньочастотної асимптоти (при нахилі -20 дБ/дек $q_{\text{сер}} = 2$); r — кількість частот сполуки бажаної ЛАХ, що перевищують частоту зрізу ω_3 ; ω_i — частоти сполуки бажаної ЛАХ, що перевищують ω_3 .

Якщо $\Delta\varphi < \Delta\varphi_{\min}$, то асимптоту сполуки треба зсунути вправо або зменшити її нахил, якщо $\Delta\varphi > \Delta\varphi_{\min}$ — то зсунути вліво або збільшити нахил. Різниця $\Delta\varphi - \Delta\varphi_{\min}$ не повинна перевищувати кількох градусів.

При сполученні середньочастотної частини ЛАХ з низькочастотною та високочастотною слід прагнути, щоб бажана ЛАХ якомога менше відрізнялася від ЛАХ вихідної системи. Це спрощує корекцію.

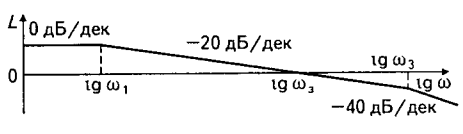
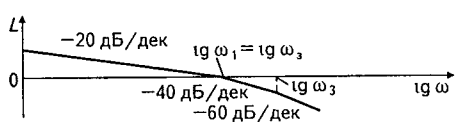
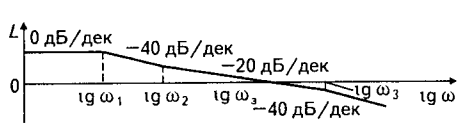
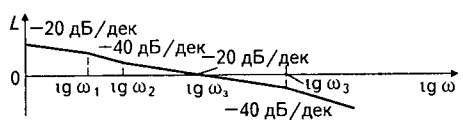
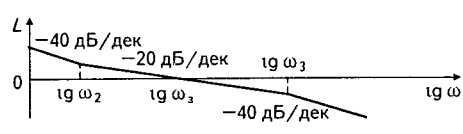
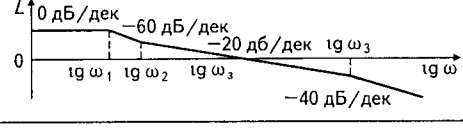
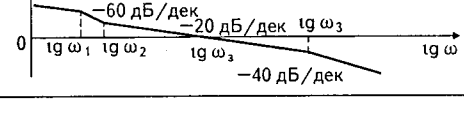
Метод Санковського — Сігалова. В основу цього методу покладено дев'ять типів бажаних ЛАХ розімкнутої системи (табл. 6.2).

Тип ЛАХ вибирається залежно від вимог до САР, що синтезується. Ці вимоги є вихідними даними для синтезу. До них належать: $(dg/dt)_{\max}$, $(d^2g/dt^2)_{\max}$ — максимальне значення швидкості та прискорення зміни завдання; t — час регулювання; σ — перерегулювання.

При виборі типу ЛАХ рекомендується керуватися такими положеннями:

1) якщо завдання змінюється з великим прискоренням, а рівень переходу незначний, слід вибирати ЛАХ типу 1 для статичних систем і типу 2 — для астатичних;

Таблиця 6.2

Тип ЛАХ	Передаточна функція	Асимптотична ЛАХ	Частота зрізу
1	$\frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		$k\omega_1$
2	$\frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		k
3	$\frac{k(\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1^2}{\omega_2}$
4	$\frac{k(\tau_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1}{\omega_2}$
5	$\frac{k(\tau_2 p + 1)}{p^2(T_3 p + 1)}$		$\frac{k}{\omega_2}$
6	$\frac{k(\tau_2 p + 1)^2}{(T_1 p + 1)^2(T_3 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1^3}{\omega_2^2}$
7	$\frac{k(\tau_2 p + 1)^2}{p(T_1 p + 1)^2(T_3 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1^2}{\omega_2^2}$

Закінчення табл. 6.2

Тип ЛАХ	Передавальна функція	Асимптотична ЛАХ	Частота зрізу
8	$\frac{k(\tau_2 p + 1)^2}{p^2(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1}{\omega_2^2}$
9	$\frac{k(\tau_2 p + 1)^2}{p^3(T_3 p + 1)}$		$\frac{k}{\omega_2^2}$

2) якщо прискорення, з яким змінюється завдання, незначне, а рівень перешкод досить значний, слід вибрати ЛАХ типів 3, 4 або 5;

3) при великих прискореннях зміни завдання і значному рівні перешкод треба вибрати ЛАХ типів 6, 7, 8 або 9.

Після того як тип бажаної ЛАХ вибрано і, виходячи з вимог до якості САР в усталеному режимі, визначено її низькочастотну частину, для побудови решти частин бажаної ЛАХ використовують дані табл. 6.2 і такі співвідношення:

частота зрізу

$$\omega_3 = c/t_p; \quad (6.37)$$

запас стійкості за фазою

$$\Delta\varphi^\circ = 73 - \sigma, \quad (6.38)$$

де $c = 9$ при $\Delta\varphi = 30^\circ$; $c = 8$ при $\Delta\varphi = 45^\circ$ і $c = 7$ при $\Delta\varphi = 60^\circ$.

Формули (6.37) і (6.38) дають похибку, що не перевищує 0,05 ... 0,1 при $60^\circ > \Delta\varphi > 30^\circ$.

При розрахунках можна користуватися й такими співвідношеннями:

$$\omega_2/\omega_3 \approx \frac{2}{2(l-1)}; \quad (6.39)$$

$$\omega_3 \sum_{i=3}^n \frac{1}{\omega_i} = \frac{a}{2}; \quad (6.40)$$

$$a = \pi/2 - \Delta\varphi, \quad (6.41)$$

де $l = 2$ або $l = 3$ при нахилі асимптоти -40 або -60 дБ/дек, що сполучає середньо- та низькочастотні частини ЛАХ.

Значення a (у радіанах) визначають, виходячи з припущення, що $\omega_3/\omega_i \ll 1$ при $i = 3, 4, \dots$ та $\omega_3/\omega_i \gg 1$.

□ **Приклад 6.2.** Передаточна функція розімкнутої незмінюваної частини системи, що складається з об'єкта регулювання, двигуна та перетворювача з підсумовуючим підсилювачем, має вигляд

$$W_n(p) = \frac{50}{p(0,005p + 1)(0,2p + 1)}. \quad (6.42)$$

Вибрати та побудувати бажану ЛАХ, виходячи з таких показників якості: $\sigma \leq 20\%$; $t_p \leq 0,3$ с. Вважати, що завдання змінюється повільно, а рівень перешкод значний.

Розв'язання. ЛАХ незмінюваної (вихідної) частини системи побудовано на рис 6.27. Низькочастотна частина ЛАХ проходить через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg 50 = 34$ дБ, $\omega = 1$ і має нахил -20 дБ/дек.

Відповідно до викладених раніше рекомендацій вибираємо бажану ЛАХ типу 4 з табл. 6.2. За формулою (6.38) визначаємо необхідне значення запасу стійкості за фазою

$$\Delta\varphi = 73 - \sigma = 73 - 20 = 53^\circ$$

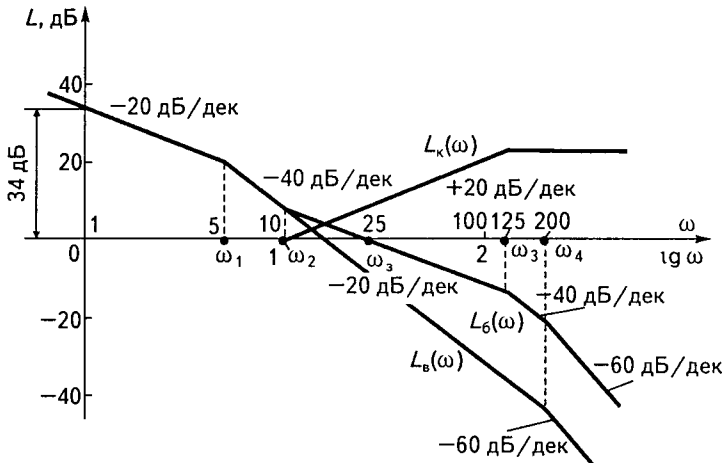


Рис. 6.27

і, прийнявши $c = 7,5$, за формулою (6.37) знаходимо частоту зрізу

$$\omega_s = c/t_p = 7,5/0,3 = 25 \text{ с}^{-1}.$$

Прийmemo, що частота сполюки ω_1 створюється сталою часу 0,2 с незмінюваної частини системи, тобто $\omega_1 = 1/0,2 = 5 \text{ с}^{-1}$. Тоді за формулою з табл. 6.2 визначимо частоту

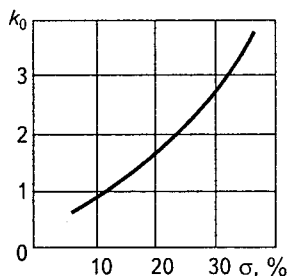
$$\omega_2 = k\omega_1/\omega_s = 50 \cdot 5/25 = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Знаходимо сталу

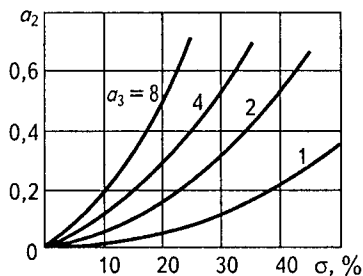
$$a = \pi/2 - \Delta\varphi = 3,14/2 - 53/57,3 = 0,65 \text{ рад.}$$

Прийmemo, що стала часу 0,005 с незмінюваної частини системи створює частоту сполюки $\omega_4 = 1/0,005 = 200 \text{ с}^{-1}$, і за формулою (6.40) визначимо частоту сполюки

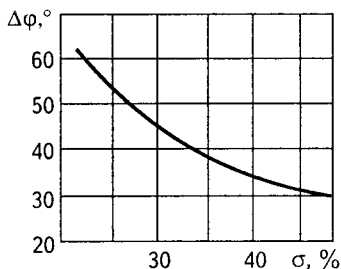
$$\omega_3 \frac{1}{\omega_3} + \omega_4 \frac{1}{\omega_4} = \frac{a}{2}; \quad \omega_3 = \frac{1}{\frac{a}{2\omega_3} - \frac{1}{\omega_4}} = \frac{1}{\frac{0,65}{2 \cdot 25} - \frac{1}{200}} = 125 \text{ с}^{-1}.$$



а



б



в

Рис. 6.28

Для перевірки розрахунків обчислимо ліву і праву частини наближеної рівності (6.39):

$$\omega_2/\omega_3 = 10/25 = 0,4; \quad \frac{a}{2(l-1)} = \frac{0,65}{2} = 0,325.$$

Можна вважати, що наближена рівність (6.39) задовольняється.

Останню асимптоту високочастотної частини бажаної ЛАХ проводимо паралельно високочастотній частині ЛАХ вихідної системи, тобто з нахилом -60 дБ/дек.

Побудовану бажану ЛАХ $L_6(\omega)$ показано на рис. 6.27.

Спрощена побудова бажаної ЛАХ. Вихідними даними для побудови $L_6(\omega)$ є час регулювання t_p та перерегулювання σ . Частота зрізу бажаної ЛАХ обчислюється за формулою

$$\omega_3 \approx k_0 \pi / t_p,$$

де k_0 — коефіцієнт, що визначається за графіком на рис. 6.28, a залежно від перерегулювання.

Через частоту зрізу ω_3 проводять середньочастотну асимптоту бажаної ЛАХ з нахилом -20 дБ/дек. Частоти ω_2 і ω_3 , що обмежують середньочастотну асимптоту ліворуч і праворуч, вибирають, виходячи з таких наближених рівностей:

$$\omega_2 \approx \omega_3^2 / \omega_3; \quad \omega_3 \approx (2 \dots 4) \omega_3.$$

Перерегулювання σ визначається за графіками на рис. 6.28, b залежно від коефіцієнтів a_2 і a_3 , що визначають довжину середньочастотної частини ЛАХ: $a_2 = \omega_2/\omega_3$, $a_3 = \omega_3/\omega_3$. Запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ визначається за графіком на рис. 6.28, v залежно від перерегулювання.

Синтез послідовної коректувальної ланки. Послідовна коректувальна ланка вводиться в основний контур регулювання системи (рис. 6.29) і звичайно є пасивним чотириполюсником або регу-

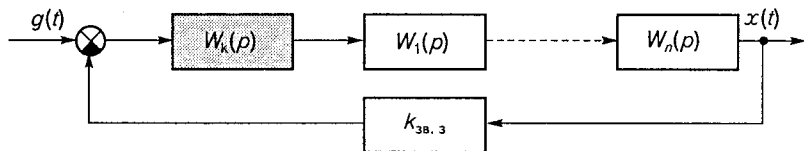


Рис. 6.29

лятором на базі операційного підсилювача. По можливості ланку слід вводити ближче до входу системи, де сигнали мають найменшу потужність.

Передаточна функція вихідної розімкнутої системи

$$W_b(p) = W_1(p)W_2(p) \dots W_n(p)k_{зв.з}$$

після введення коректувальної ланки матиме вигляд

$$W_6(p) = W_k(p)W_1(p)W_2(p) \dots W_n(p)k_{зв.з} = W_k(p)W_b(p).$$

Після переходу до логарифмічних характеристик дістанемо

$$L_6(\omega) = L_k(\omega) + L_b(\omega),$$

звідки

$$L_k(\omega) = L_6(\omega) - L_b(\omega). \quad (6.43)$$

Цей вираз визначає такий порядок синтезу послідовної коректувальної ланки:

- 1) виходячи із заданої структури системи і параметрів її ланок, будують ЛАХ вихідної розімкнутої системи $L_b(\omega)$;
- 2) за заданими показниками якості будують бажану ЛАХ $L_6(\omega)$;
- 3) визначають ЛАХ коректувальної ланки $L_k(\omega)$ як різницю $L_6(\omega) - L_b(\omega)$;
- 4) за ЛАХ коректувальної ланки $L_k(\omega)$ визначають її передаточну функцію, схему та її параметри.

- **Приклад 6.3.** ЛАХ вихідної системи $L_b(\omega)$ і бажану ЛАХ побудовано на рис. 6.27 (див. приклад 6.2). Побудувати ЛАХ послідовної коректувальної ланки $L_k(\omega)$, вибрати її схему і знайти параметри.

Розв'язання. ЛАХ коректувальної ланки $L_k(\omega)$ на рис. 6.27 визначено як різницю $L_6(\omega) - L_b(\omega)$. За виглядом $L_k(\omega)$ з табл. 6.1 вибираємо схему коректувальної ланки (ланка № 2) і записуємо її передаточну функцію

$$W_k(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}. \quad (6.44)$$

Порівнюючи ЛАХ коректувальної ланки з табл. 6.1 і побудовану на рис. 6.27, визначаємо

$$T_1 = 1/\omega_2 = 1/10 = 0,1 \text{ с}; \quad T_2 = 1/\omega_3 = 1/125 = 0,008 \text{ с}.$$

Обчислюємо параметри R_1 , R_2 , C схеми коректувальної ланки за допомогою формул з табл. 6.1. Незалежних співвідношень для розрахунку параметрів — два, невідомих параметрів — три, тому, задавши один із них, можна знайти решту.

Приймаємо $C = 2 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$. Тоді

$$R_1 = T_1/C = 0,1/2 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 50 \text{ кОм}.$$

Далі, оскільки $k = T_2/T_1 = 0,08$ і

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

то

$$R_2 = \frac{kR_1}{1-k} = \frac{0,08 \cdot 5 \cdot 10^4}{1-0,08} = 4348 \text{ Ом}.$$

Вибираємо номінали резисторів $R_1 = 51 \text{ кОм}$; $R_2 = 4,3 \text{ кОм}$.

Вибрана коректувальна ланка є пасивним чотирьохполосником з коефіцієнтом передачі, меншим за одиницю ($k = 0,08$). Для збереження незмінним коефіцієнта передачі розімкнутої системи необхідно застосувати додатковий підсилювач, коефіцієнт підсилення якого k_n задовольняє умову

$$kk_n = 1,$$

звідки

$$k_n = 1/k = 1/0,08 = 12,5.$$

Якщо є можливість збільшити в 12,5 раза коефіцієнт підсилення підсилювача вихідної системи, то додатковий підсилювач не потрібен.

Коректувальну ланку, синтез якої виконано, можна також реалізувати на базі операційного підсилювача, використавши схему, зображену на рис. 6.30.

Дійсно, згідно з виразом (6.31) передаточна функція цієї схеми

$$W(p) = -\frac{R_{зв.з}}{\frac{1}{Cp} R_1 + R_2} = -\frac{R_{зв.з}}{R_1 + R_2} \frac{R_1 Cp + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cp + 1} = -k_1 \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$$

збігається з передаточною функцією (6.44). Різниця полягає лише в тому, що коефіцієнт передачі k має різні значення. Відповідно до $L_x(\omega)$

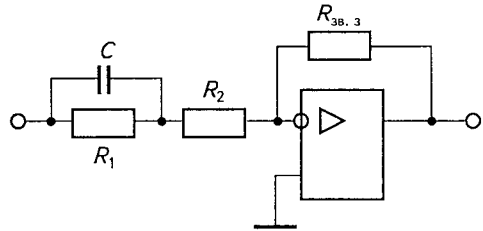


Рис. 6.30

на рис. 6.27 коефіцієнт передачі коректувальної ланки має дорівнювати одиниці, тому в схемі, зображеній на рис. 6.30, слід прийняти $R_{зв.з} = R_1 + R_2$. Решта параметрів схеми такі самі, як і параметри розглянутого раніше пасивного чотириполюсника.

Зауваження. При побудові схеми слід враховувати, що операційний підсилювач змінює полярність вхідного сигналу. Для поновлення полярності послідовно з коректувальною ланкою вмикають пропорційний регулятор (див. рис. 6.17, а) з коефіцієнтом передачі $k = 1$, тобто при $R_1 = R_2$.

Синтез паралельної коректувальної ланки. Паралельні коректувальні ланки вводяться у вигляді зворотних зв'язків, які охоплюють одну або кілька ланок вихідної системи (рис. 6.31). Термін «паралельна коректувальна ланка» тут не зовсім точний, бо коректувальна ланка вмикається не паралельно ланкам системи, а створює від'ємний зворотний зв'язок. Проте цей термін звичайно використовується в багатьох книгах з теорії автоматичного керування.

Передаточну функцію вихідної розімкнутої системи запишемо у вигляді

$$W_B(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)k_{зв.з} = W_{ок}(p)W_{неок}(p),$$

де $W_{ок}(p)$ — передаточна функція частини системи, що охоплюється паралельною коректувальною ланкою; $W_{неок}(p)$ — передаточна функція решти частин розімкнутої системи.

Для структурної схеми (рис. 6.31)

$$W_{ок}(p) = W_1(p); \quad W_{неок}(p) = W_2(p)W_3(p)k_{зв.з}.$$

Після введення коректувальної ланки передаточна функція бажаної розімкнутої системи

$$W_6(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)k_{зв.з}}{1 + W_k(p)W_1(p)} = \frac{W_B(p)}{1 + W_k(p)W_{ок}(p)}. \quad (6.45)$$

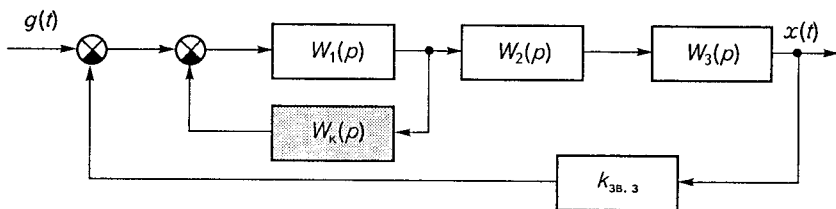


Рис. 6.31

Після переходу до логарифмічних характеристик дістанемо

$$L_6(\omega) = L_b(\omega) - 20 \lg |1 + W_k(j\omega)W_{ox}(j\omega)|. \quad (6.46)$$

Основна складність синтезу паралельної коректувальної ланки зумовлена наявністю одиниці у знаменнику передаточної функції (6.45). Для подолання цього іноді розглядається тільки інтервал частот, у якому

$$|W_k(j\omega)W_{ox}(j\omega)| \gg 1, \quad (6.47)$$

тобто одиницю в знаменнику передаточної функції (6.45) взагалі не враховують. Проте нерівність (6.47) звичайно виконується тільки для високих частот і не зберігається на низьких частотах.

Розглянемо досить точний метод синтезу, який дає змогу враховувати одиницю в знаменнику передаточної функції (6.45). Введемо такі позначення:

$$W_{12}(p) = W_k(p)W_{ox}(p); \quad (6.48)$$

$$W_{11}(p) = 1 + W_k(p)W_{ox}(p) = 1 + W_{12}(p) \quad (6.49)$$

і відповідно

$$L_{12}(\omega) = 20 \lg |W_k(j\omega)W_{ox}(j\omega)| = L_k(\omega) + L_{ox}(\omega);$$

$$L_{11}(\omega) = 20 \lg |1 + W_k(j\omega)W_{ox}(j\omega)|.$$

За формулою (6.46) побудуємо ЛАХ $L_{11}(\omega)$, віднявши $L_6(\omega)$ від $L_b(\omega)$. Залишається перейти від $L_{11}(\omega)$ до $L_{12}(\omega)$. Цей перехід можна здійснити так. Виходячи з вигляду $L_{11}(\omega)$, визначаємо $W_{11}(p)$ і відповідно до виразу (6.49) знаходимо передаточну функцію

$$W_{12}(p) = W_{11}(p) - 1,$$

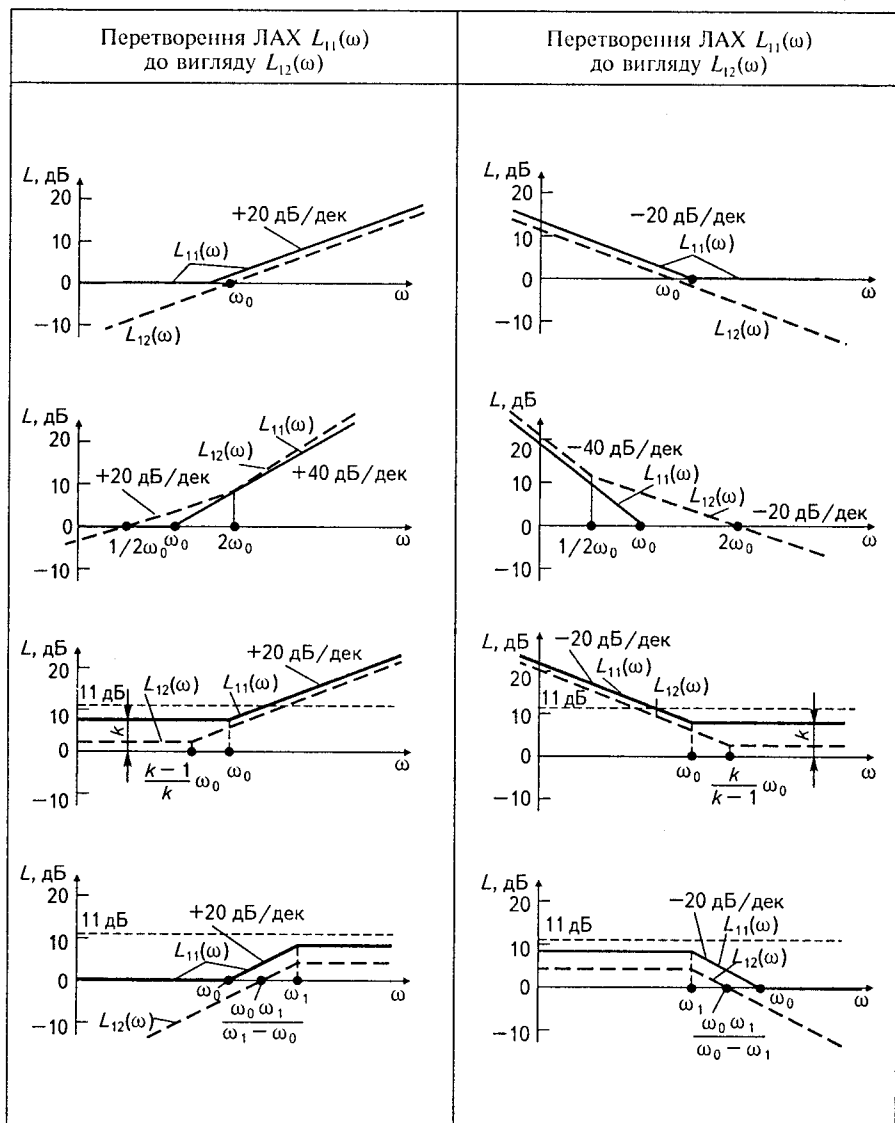
за якою будуємо ЛАХ $L_{12}(\omega)$.

ЛАХ $L_{11}(\omega)$, які здебільшого трапляються під час синтезу коректувальних ланок, та ЛАХ $L_{12}(\omega)$, що їм відповідають, наведено в табл. 6.3.

Отже, можна запропонувати такий порядок синтезу паралельної коректувальної ланки.

1. За заданою структурною схемою і параметрами її ланок будується ЛАХ вихідної розімкнутої системи $L_b(\omega)$.
2. За заданими показниками якості будується бажана ЛАХ $L_6(\omega)$.

Таблиця 6.3



3. Визначається ЛАХ $L_{11}(\omega)$ відніманням бажаної ЛАХ $L_6(\omega)$ від ЛАХ вихідної системи $L_b(\omega)$:

$$L_{11}(\omega) = L_b(\omega) - L_6(\omega).$$

Ця ЛАХ відповідає знаменнику передаточної функції (6.45).

4. За виглядом ЛАХ $L_{11}(\omega)$ будується ЛАХ $L_{12}(\omega)$ знаменника передаточної функції (6.45) без одиниці. У діапазоні частот, де виконується умова $L_{11}(\omega) > 11$ дБ, ЛАХ $L_{11}(\omega)$ і $L_{12}(\omega)$ збігаються з точністю до 3 дБ. Якщо вважати цю точність достатньою, то перехід від $L_{11}(\omega)$ до $L_{12}(\omega)$ при $L_{11}(\omega) > 11$ дБ не потребує ніяких перетворень. Для переходу від $L_{11}(\omega)$ до $L_{12}(\omega)$ у діапазоні частот, де $L_{11}(\omega) < 11$ дБ, слід користуватися даними табл. 6.3.

Після побудови $L_{12}(\omega)$ необхідно перевірити стійкість внутрішнього контуру системи, який створюється ланками з передаточною функцією $W_{ox}(p)$ і коректувальною ланкою. Висновок про стійкість внутрішнього контуру можна зробити лише за виглядом $L_{12}(\omega)$.

5. Вибирається місце введення коректувальної ланки і будується $L_{ox}(\omega)$. Як правило, коректувальною ланкою доцільно охоплювати частину системи, яка має великий коефіцієнт підсилення.

6. Визначається ЛАХ коректувальної ланки $L_k(\omega)$ як різниця характеристик $L_{12}(\omega)$ і $L_{ox}(\omega)$:

$$L_k(\omega) = L_{12}(\omega) - L_{ox}(\omega).$$

7. За виглядом ЛАХ коректувальної ланки визначається її передаточна функція, вибирається схема і обчислюються її параметри.

□ **Приклад 6.4.** ЛАХ вихідної системи $L_4(\omega)$ і бажану ЛАХ $L_6(\omega)$ показано на рис. 6.32. Побудувати ЛАХ паралельної коректувальної ланки, вибрати її схему та розрахувати параметри за умови, що коректувальна ланка охоплює ланку, ЛАХ якої має вигляд $L_{ox}(\omega)$.

Розв'язання. Всі характеристики, пов'язані з побудовою $L_k(\omega)$, зображено на рис. 6.32. Спочатку будуюмо характеристику $L_{11}(\omega) = L_b(\omega) - L_6(\omega)$ (суцільна лінія), потім за виглядом $L_{11}(\omega)$ і даними табл. 6.3 — характеристику $L_{12}(\omega)$ (штрихова лінія). ЛАХ коректувальної ланки $L_k(\omega)$ визначаємо як різницю $L_{12}(\omega) - L_{ox}(\omega)$. Характеристиці $L_k(\omega)$ відповідає ланка з передаточною функцією

$$W_k(p) = \frac{k\tau p}{\tau p + 1}. \quad (6.50)$$

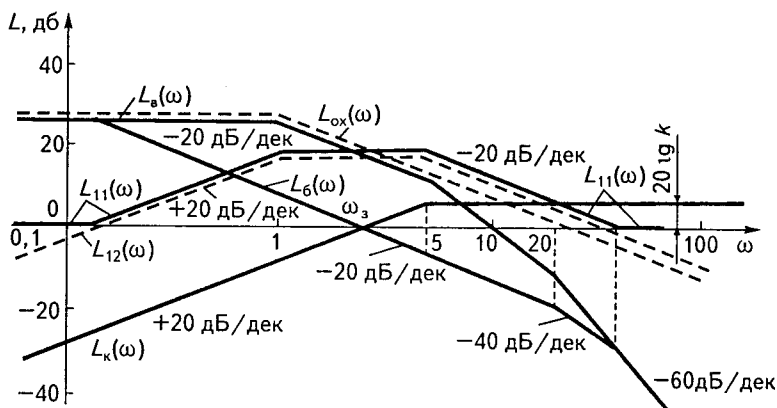


Рис. 6.32

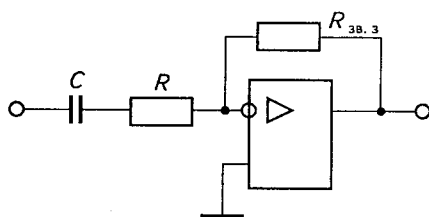


Рис. 6.33

Параметри передаточної функції $\tau = 1/5 = 0,2$ с; $20 \lg k = 6$; $k = 2$ визначено за характеристикою $L_k(\omega)$, зображеною на рис. 6.32.

Передаточну функцію (6.50) має коректувальна ланка, схему якої наведено на рис. 6.33.

Справді, відповідно до виразу (6.31) передаточна функція цієї ланки має вигляд

$$W_k(p) = -\frac{R_{зв.з}}{1/Cp + R} = -\frac{R_{зв.з}}{R} \frac{RCp}{RCp + 1} = -\frac{k\tau p}{\tau p + 1}, \quad (6.51)$$

де $\tau = RC$; $k = R_{зв.з}/R$.

Прийнявши $C = 10$ мкФ = 10^{-5} Ф, визначаємо

$$R = \tau/C = 0,2/10^{-5} = 2 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 20 \text{ кОм};$$

$$R_{зв.з} = kR = 2 \cdot 2 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 40 \text{ кОм}.$$

Дивись також зауваження до прикладу 6.3.

Синтез кількох коректувальних ланок для однієї САР. За допомогою ЛАХ можна синтезувати не тільки одну, а й кілька коректувальних ланок для однієї схеми. Нехай, наприклад, ЛАХ вихідної системи $L_b(\omega)$ та бажана ЛАХ $L_б(\omega)$ мають вигляд, зображений на рис. 6.34.

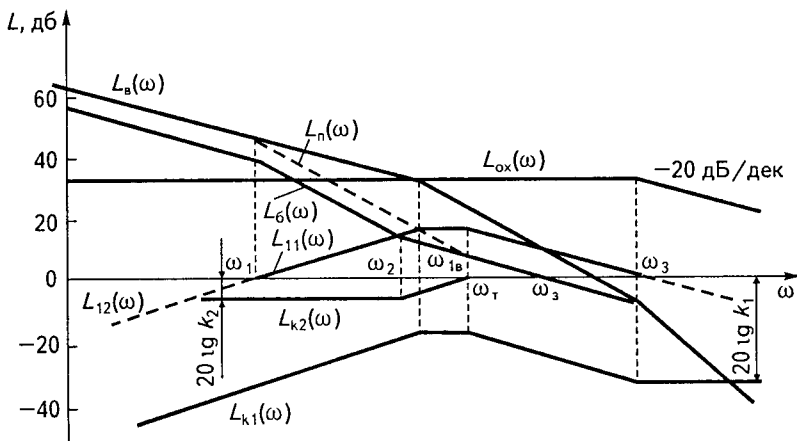


Рис. 6.34

Для переходу від $L_b(\omega)$ до $L_6(\omega)$ застосуємо дві коректувальні ланки. Введемо деяку проміжну ЛАХ $L_n(\omega)$ і вважатимемо, що перша коректувальна ланка забезпечує перехід від $L_b(\omega)$ до $L_n(\omega)$, а друга — від $L_n(\omega)$ до $L_6(\omega)$. Виходячи з того, що вигляд проміжної ЛАХ $L_n(\omega)$ визначає складність коректувальних ланок, при її побудові слід максимально використовувати частоти сполуки вихідної та бажаної ЛАХ, тобто $L_n(\omega)$ побудувати так, аби вона якомога менше відрізнялася від $L_b(\omega)$ і $L_6(\omega)$.

ЛАХ $L_n(\omega)$, зображена на рис. 6.34, для частот $\omega < \omega_1$ збігається з $L_b(\omega)$, в інтервалі частот від ω_1 до ω_τ має нахил -40 дБ/дек і на вищих частотах збігається з $L_6(\omega)$.

Перехід від $L_b(\omega)$ до $L_n(\omega)$ здійснюється за рахунок введення паралельної коректувальної ланки. Вважаємо, що коректувальна ланка охоплює ланку вихідної системи зі сталою часу $1/\omega_3$. ЛАХ цієї ланки має вигляд $L_{ox}(\omega)$. Віднімаючи $L_n(\omega)$ від $L_b(\omega)$, дістаємо $L_{11}(\omega)$ і за її виглядом будуємо $L_{12}(\omega)$. Віднімаючи $L_{ox}(\omega)$ від побудованої $L_{12}(\omega)$, визначаємо ЛАХ паралельної коректувальної ланки $L_{k1}(\omega)$.

Характеристиці $L_{k1}(\omega)$ відповідає передаточна функція

$$W_{k1}(p) = \frac{k_1 p(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (6.52)$$

де

$$T_1 = 1/\omega_{1b}; \quad T_2 = 1/\omega_\tau; \quad T_3 = 1/\omega_3.$$

Для реалізації паралельної коректувальної ланки можна використати пасивний чотириполюсник (див. табл. 6.1, ланку № 3).

Для переходу від $L_n(\omega)$ до $L_6(\omega)$ використаємо послідовну коректувальну ланку. ЛАХ $L_{k2}(\omega)$ цієї ланки визначимо як різницю бажаної $L_6(\omega)$ і проміжної $L_n(\omega)$ ЛАХ. Характеристиці $L_{k2}(\omega)$ відповідає передаточна функція

$$W_{k2}(p) = \frac{k_2(\tau_1 p + 1)}{\tau_2 p + 1}, \quad (6.53)$$

де $\tau_1 = 1/\omega_2$; $\tau_2 = 1/\omega_1$. Для реалізації цієї ланки можна також використати пасивний чотириполюсник (див. табл. 6.1, ланку № 2).

При синтезі коректувальних ланок можна вибрати й іншу черговість їх введення, тобто перехід від $L_6(\omega)$ до $L_n(\omega)$ здійснити за рахунок введення послідовної коректувальної ланки, а перехід від $L_n(\omega)$ до $L_6(\omega)$ — паралельної.

Ідею використання проміжної ЛАХ можна застосувати також для синтезу двох паралельних коректувальних ланок.

6.12

Послідовна корекція з підпорядкованим регулюванням координат

Послідовна корекція з підпорядкованим регулюванням координат за нашого часу є найпоширенішим видом корекції тиристорних електроприводів постійного і змінного струму.

САР з послідовною корекцією становить багатоконтурну систему, кількість контурів якої дорівнює кількості регульованих параметрів. У електроприводах постійного струму такими параметрами можуть бути: напруга перетворювача, струм якірного кола, швидкість обертання вала електродвигуна, кутове або лінійне переміщення органів робочої машини тощо. Головним регульованим параметром є параметр, який визначає ціль автоматичного регулювання. В системі стабілізації швидкості таким параметром є швидкість, в системах позиціонування — кутові або лінійні переміщення тощо. Решта параметрів підпорядковані головному параметру, крім

того, вони підпорядковані також один одному. Наприклад, у системі тиристорний перетворювач — двигун постійного струму параметр напруги перетворювача підпорядкований параметру струму головного кола, струм — параметру швидкості електродвигуна, параметр швидкості — параметру кутового переміщення. Тому системи з послідовною корекцією називають також *системами підпорядкованого регулювання* (СПР).

Структурну схему триконтурної СПР показано на рис. 6.35. Об'єкт регулювання поділено на три частини: $W_{o1}(p)$, $W_{o2}(p)$, $W_{o3}(p)$. Вихідною величиною кожної з них є один з регульованих параметрів x_1 , x_2 , x_3 . Кожна частина об'єкта регулювання має одну (іноді дві) «велику» сталу часу, яка компенсується дією відповідного регулятора. Тому кількість регуляторів дорівнює кількості «великих» сталих часу об'єкта регулювання. Регулятори вмикаються послідовно (каскадно). Кожний регулятор контролює один із регульованих параметрів, тому вони називаються *регуляторами струму, швидкості, положення* тощо.

Внутрішній (перший) контур складається з відповідної частини об'єкта регулювання $W_{o1}(p)$ і регулятора $W_{p1}(p)$, на вхід якого, крім сигналу зворотного зв'язку x_1 , подається сигнал завдання x_{13} від регулятора $W_{p2}(p)$ другого контуру. Цей контур є зовнішнім відносно першого. Об'єктом регулювання другого контуру є перший (внутрішній) контур та частина об'єкта регулювання $W_{o2}(p)$. Другий контур є складовою об'єкта регулювання третього контуру.

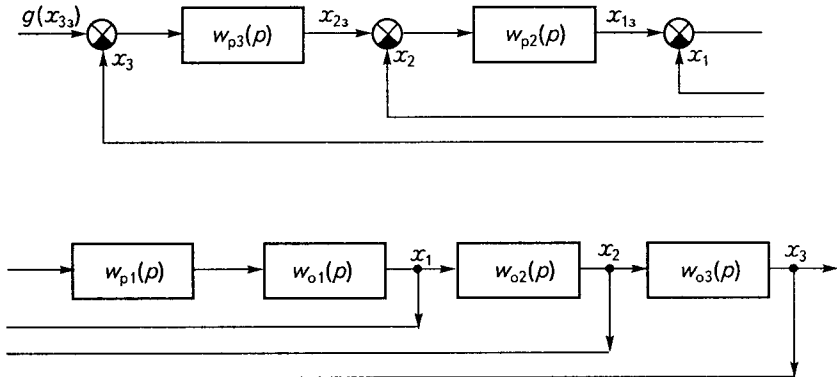


Рис. 6.35

У загальному випадку багатоконтурної системи будь-який з i -х контурів, крім першого й останнього, є зовнішнім (керуючим) відносно $(i - 1)$ -го контуру і внутрішнім (підпорядкованим) відносно $(i + 1)$ -го контуру. Такий контур складається з двох ланок — регулятора з передаточною функцією $W_{pi}(p)$ і об'єкта регулювання з передаточною функцією

$$W'_{oi}(p) = W_{oi}(p)W_{zi-1}(p), \quad (6.54)$$

де $W_{zi-1}(p)$ — передаточна функція замкнутого $(i - 1)$ -го контуру.

Передаточна функція розімкнутого i -го контуру

$$W_i(p) = W_{pi}(p)W'_{oi}(p), \quad (6.55)$$

замкнутого —

$$W_{zi}(p) = \frac{W_i(p)}{1 + W_i(p)}. \quad (6.56)$$

Регулятори багатоконтурної СПР розраховуються за умови послідовної оптимізації контурів системи, починаючи з внутрішнього (першого) і закінчуючи зовнішнім (останнім).

Передаточну функцію об'єкта регулювання будь-якого контуру можна подати у вигляді

$$W_o(p) = \frac{W_{o.k}(p)}{T_{\mu}p + 1}, \quad (6.57)$$

де $W_{o.k}(p)$ — частина передаточної функції об'єкта, до якої входить «велика» стала часу, що компенсується регулятором; T_{μ} — сума «малих» сталих часу, що не компенсується регулятором.

Великі сталі часу визначають швидкодію контуру, малі — високочастотну частину ЛАХ і майже не впливають на якість перехідних процесів. Наприклад, якщо складовою об'єкта регулювання є тиристорний перетворювач, передаточна функція якого

$$W_{т.п}(p) = \frac{k_{т.п} e^{-\tau p}}{\tau_{\phi} p + 1}, \quad (6.58)$$

де $k_{т.п}$ — коефіцієнт підсилення тиристорного перетворювача за напругою; τ — середньостатистичне чисте запізнення системи керування тиристорами; τ_{ϕ} — стала часу фільтра на вході перетворювача, то

$$W_{\tau.n}(p) = \frac{k_{\tau.n}}{(\tau_{\phi}p + 1)(\tau p + 1)} = \frac{k_{\tau.n}}{\tau_{\phi}\tau p^2 + (\tau_{\phi} + \tau)p + 1}, \quad (6.59)$$

де враховано, що

$$e^{-\tau p} \approx \frac{1}{\tau p + 1}.$$

Оскільки τ_{ϕ} і τ є малими сталими, то добуток $\tau_{\phi}\tau \approx 0$ і дві аперіодичні ланки можна наближено замінити однією зі сталою часу, що дорівнює сумі двох малих сталих часу, тобто

$$W_{\tau.n}(p) = \frac{k_{\tau.n}}{(\tau_{\phi} + \tau)p + 1} = \frac{k_{\tau.n}}{T_{\mu}p + 1}, \quad (6.60)$$

де $T_{\mu} = \tau_{\phi} + \tau$.

Величина T_{μ} для реальних систем електропривода становить від 0,005 до 0,01 с.

При настроюванні контуру на *технічний (модульний) оптимум* передаточна функція регулятора вибирається так, аби передаточна функція замкнутого контуру становила передаточну функцію коливальної ланки:

$$W_3(p) = \frac{1}{aT_{\mu}^2 p^2 + aT_{\mu} p + 1}. \quad (6.61)$$

де $a = 2$. При цьому коефіцієнт затухання $\xi = a/2\sqrt{a} = \sqrt{2}/2 = 0,707$ і перерегулювання $\sigma = 4,3\%$, що відповідає оптимальному за швидкістю перехідному процесу (час регулювання становить $4,1 T_{\mu}$).

Настроювання на технічний оптимум не є оптимальним у повному розумінні ні за швидкістю, яку можна збільшити, зменшуючи значення a , ні за перерегулюванням, яке можна зменшити, збільшуючи значення a , тобто знижуючи швидкість. Проте таке настроювання в більшості випадків одночасно задовольняє вимоги щодо швидкості та перерегулювання, тобто в певному розумінні його можна вважати оптимальним.

Передаточна функція замкнутого контуру має вигляд (6.61), якщо передаточна функція розімкнутого контуру визначається так:

$$W(p) = \frac{1}{aT_{\mu} p(T_{\mu} p + 1)}. \quad (6.62)$$

З іншого боку, передаточна функція розімкнутого контуру має вигляд

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{W_p(p)W_{o.k.}(p)}{T_\mu p + 1}, \quad (6.63)$$

де $W_p(p)$, $W_o(p)$ — передаточні функції регулятора й об'єкта.

Для визначення передаточної функції регулятора порівнюємо вирази (6.62) та (6.63) і знайдемо

$$W_p(p) = \frac{1}{W_{o.k.}(p)aT_\mu p} \quad (6.64)$$

або при $a = 2$

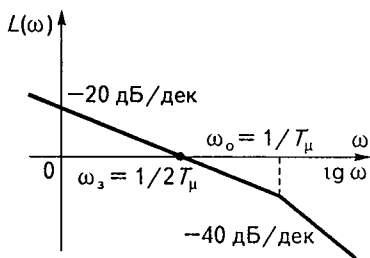
$$W_p(p) = \frac{1}{W_{o.k.}(p)2T_\mu p}. \quad (6.65)$$

ЛАХ розімкнутого контуру при настроюванні на технічний оптимум зображено на рис. 6.36, а. Вона побудована за передаточною функцією (6.62) при $a = 2$. Низько- та середньочастотні частини ЛАХ мають нахил -20 дБ/дек, при частотах вище ω_0 нахил характеристики становить -40 дБ/дек. Частота зрізу цієї характеристики

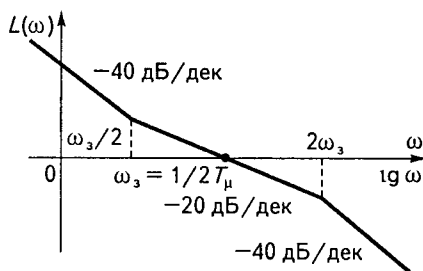
$$\omega_3 = 1/2T_\mu,$$

а частота сполюки

$$\omega_0 = 1/T_\mu.$$



а



б

Рис. 6.36

□ **Приклад 6.5.** Структурну схему тиристорного електропривода постійного струму наведено на рис. 6.37, де $W_{p,ш}(p)$, $W_{p,c}(p)$ — відповідно передаточні функції регуляторів швидкості і струму; $k_{т,п}$ — коефіцієнт підсилення тиристорного перетворювача за напругою; T_{μ} — еквівалентна стала часу тиристорного перетворювача; $R_{я}$ — активний опір силового кола; c — стала двигуна (добуток конструктивної сталі на номінальний магнітний потік); $T_{я}$ — електромагнітна стала силового кола; $T_{м}$ — електромеханічна стала електропривода; k_c , $k_{ш}$ — відповід-

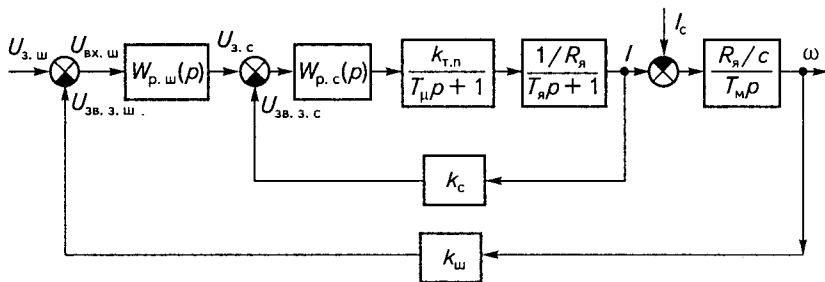


Рис. 6.37

но коефіцієнти зворотних зв'язків за струмом і швидкістю. Визначити передаточні функції регуляторів при налаштуванні системи на технічний оптимум. Стала часу T_{μ} — мала (некомпенсована). Компенсації підлягають великі сталі часу $T_{я}$ і $T_{м}$.

Розв'язання. Почнемо з внутрішнього контуру (контуру струму). Запишемо передаточну функцію об'єкта контуру струму

$$W_{o,c}(p) = \frac{k_c k_{т,п} / R_{я}}{(T_{\mu}p + 1)(T_{я}p + 1)} \quad (6.66)$$

і передаточну функцію частини об'єкта, що компенсується регулятором струму,

$$W_{o,k,c}(p) = \frac{k_{т,п} k_c}{R_{я}(T_{я}p + 1)}. \quad (6.67)$$

Тоді, згідно з виразом (6.65),

$$W_{p,c}(p) = \frac{R_{я}(T_{я}p + 1)}{k_{т,п} k_c 2T_{\mu}p} = \frac{T_{я}p + 1}{T_i p}, \quad (6.68)$$

де $T_i = k_{т,п} k_c 2T_{\mu} / R_{я}$.

Передаточна функція розімкнутого оптимізованого контуру струму

$$W_c(p) = W_{p.c}(p) \frac{k_{\tau п}}{T_{\mu} p + 1} \frac{1/R_{я}}{T_{я} p + 1} k_c = \frac{1}{2T_{\mu} p (T_{\mu} p + 1)}, \quad (6.69)$$

а замкнутого

$$W_{з.с}(p) = \frac{W_c(p)/k_c}{1 + W_c(p)} = \frac{1/k_c}{2T_{\mu}^2 p^2 + 2T_{\mu} p + 1}. \quad (6.70)$$

Член $2T_{\mu}^2 p^2$ можна відкинути, оскільки він містить добуток малих сталих часу, близький до нуля. Тоді

$$W_{з.с}(p) = \frac{1/k_c}{2T_{\mu} p + 1}. \quad (6.71)$$

Знаходимо передаточну функцію об'єкта контуру швидкості

$$W_{o.ш}(p) = \frac{1/k_c}{2T_{\mu} p + 1} \frac{R_{я}/c}{T_{м} p} k_{ш}$$

і передаточну функцію частини об'єкта, що компенсується регулятором швидкості,

$$W_{o.к.ш}(p) = \frac{R_{я} k_{ш}}{k_c c T_{м} p}.$$

Передаточна функція регулятора швидкості, згідно з виразом (6.65) і з урахуванням того, що мала стала часу контуру швидкості становить $2T_{\mu}$, матиме вигляд

$$W_{p.ш}(p) = \frac{k_c c T_{м}}{R_{я} k_{ш} 2(2T_{\mu}) p} = \frac{k_c c T_{м}}{4T_{\mu} R_{я} k_{ш}} = k_{p.ш}. \quad (6.72)$$

Отже, згідно з виразами (6.68) і (6.72), при настроюванні контурів на технічний оптимум дістаємо пропорційно-інтегральний регулятор струму і пропорційний регулятор швидкості.

У разі настроювання на технічний оптимум забезпечується добра якість перехідних процесів, проте статична точність системи за наявності зовнішніх збурень у багатьох випадках виявляється недостатньою. Розглянемо, наприклад, структурну схему, наведену на рис. 6.37. Для цієї схеми

$$u_{вх.ш} = u_{з.ш} - u_{зв.з.ш}.$$

Якщо врахувати, що

$$u_{вх.ш} = \frac{u_{3,c}}{W_{р.ш}(p)} = \frac{u_{3,c}}{k_{р.ш}}$$

і

$$u_{зв.з.ш} = k_{ш} \omega,$$

то

$$u_{3,ш} = k_{ш} \omega + u_{3,c}/k_{р.ш}.$$

Регулятор струму є пропорційно-інтегральним, тому в усталеному режимі

$$u_{3,c} = u_{зв.з.ш} = I k_c,$$

тоді

$$u_{3,ш} = k_{ш} \omega + I k_c / k_{р.ш},$$

звідки

$$\omega = \frac{u_{3,ш}}{k_{ш}} - \frac{I k_c}{k_{р.ш} k_{ш}}.$$

Враховуючи вираз (6.72) для $k_{р.ш}$, це рівняння можна записати у вигляді

$$\omega = \frac{u_{3,ш}}{k_{ш}} - I \frac{R_{я}}{c} \frac{4T_{\mu}}{T_{м}}. \quad (6.73)$$

Звідси випливає, що відхилення швидкості в статичному режимі, зумовлене змінюванням струму I (навантаження на валу двигуна), визначається другою складовою цього рівняння, тобто

$$\Delta \omega_{ш} = I \frac{R_{я}}{c} \frac{4T_{\mu}}{T_{м}}.$$

Статичне падіння швидкості в розімкнутій системі обчислюється за формулою

$$\Delta \omega_{ш,р} = I R_{я} / c,$$

тому

$$\Delta \omega_{ш} = \Delta \omega_{ш,р} \frac{4T_{\mu}}{T_{м}}.$$

Отже, падіння швидкості в системі підпорядкованого регулювання з пропорційним регулятором швидкості буде меншим, ніж у ро-

зімкнутій системі тільки за умови $T_m > 4T_\mu$. Для більшості електроприводів ця умова виконується, тобто точність роботи замкнутої системи в установленому режимі вища, ніж розімкнутої. Проте для багатьох електроприводів точність роботи СПР з пропорційним регулятором швидкості виявляється недостатньою. Для усунення цього недоліку використовують настроювання на *симетричний оптимум*.

По суті настроювання на симетричний оптимум можна здійснити, якщо в контур, настроєний на технічний оптимум, ввести послідовно пропорційно-інтегральну ланку, передаточна функція якої $(4T_\mu p + 1)/4T_\mu p$. Тоді передаточна функція розімкнутого контуру матиме вигляд

$$W(p) = \frac{4T_\mu p + 1}{4T_\mu p} \frac{1}{2T_\mu p(T_\mu p + 1)}. \quad (6.74)$$

Відповідну ЛАХ показано на рис. 6.36, б. Ця характеристика симетрична відносно частоти зрізу $\omega_3 = 1/2T_\mu$, звідси і назва «симетричний оптимум».

У разі настроювання на симетричний оптимум статична похибка відсутня, але якість перехідних процесів у разі відпрацювання ступінчастої входної дії значно гірша порівняно з настроюванням на технічний оптимум. Передаточній функції (6.74) відповідає відносно невеликий запас за фазою $\Delta\varphi = 37^\circ$. Перерегулювання збільшується до 43 %, тобто якість перехідного процесу незадовільна. Проте перерегулювання досить просто знизити до 8 %, якщо застосувати в каналі «завдання» фільтр із передаточною функцією

$$W_\phi(p) = 1/(4T_\mu p + 1).$$

Добрі результати дає також застосування задавача інтенсивності, який перетворює ступінчастий входний сигнал на такий, що змінюється лінійно залежно від часу.

Наведемо *п е р е в а г и* СПР, які забезпечують їм широке застосування в електроприводах постійного і змінного струму.

1. Незмінність структури для об'єктів керування з різними параметрами регулювання.

2. Простота визначення передаточних функцій регуляторів.

3. Простота та зручність налагоджування.

4. Прості й зручні способи розрахунку і настроювання контурів СПР, що дає змогу навіть за значних похибок визначення динаміч-

них параметрів об'єкта дістати цілком роботоздатну систему керування електроприводом.

5. Можливість і простота обмеження будь-якого з регульованих параметрів на потрібному рівні. Кожний з контурів СПР виконує завдання стабілізації одного з параметрів. Вхідним сигналом кожного внутрішнього контуру є вихідний сигнал регулятора відповідного зовнішнього контуру. Тому для обмеження параметра, регульованого даним контуром, достатньо обмежити вихідний сигнал регулятора зовнішнього контуру.

Проте слід зауважити, що в системах підпорядкованого керування можна забезпечити потрібну якість перехідних процесів, але при настроюванні системи на технічний оптимум неможливо впливати на величину статизму, оскільки він визначається відхиленням вихідної величини в розімкнутій системі та співвідношенням сталих часу системи. У разі настроювання на симетричний оптимум статизм відсутній, але динамічне падіння регульованої величини при ступінчастому збуренні приблизно таке саме, як і в системі, настроєній на технічний оптимум. Неможливість зменшення статизму (при настроюванні на технічний оптимум) і динамічного відхилення регульованої величини є загальним недоліком систем підпорядкованого керування. Ця обставина ускладнює застосування систем підпорядкованого керування для електроприводів з великим діапазоном регулювання вихідної величини та підвищеними вимогами до її стабілізації.

6.13

Модальне керування

Суть модального керування полягає в забезпеченні бажаного розміщення полюсів замкнутої системи, яка складається з лінійного об'єкта і регулятора, причому регулятор виконано у вигляді набору жорстких пропорційних зворотних зв'язків за кожною зі змінних стану об'єкта. Походження назви «модальне керування» пояснюється тим, що полюсам замкнутої системи відповідають складові вільного руху системи, які іноді називаються *модами*.

За умови, що є повна інформація про вектор стану об'єкта керування, регулятор виконується у вигляді набору пропорційних зв'яз-

ків за кожною координатою об'єкта. Коефіцієнти зворотних зв'язків вибирають так, аби полюси замкнутої системи займали заздалегідь вибране положення, за якого характеристичне рівняння замкнутої системи відповідає певній стандартній формі порядку n :

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 \omega_0 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega_0^{n-1} p + a_n \omega_0^n, \quad (6.75)$$

де ω_0 — модуль n -кратного дійсного кореня. Цей параметр визначає реальний час перебігу перехідних процесів у разі переведення системи з одного стану в інший. Вибір частоти ω_0 , що визначає швидкість системи, в загальному випадку достатньо складна задача. Значимо тільки, що чим більше значення ω_0 , тим менший, за інших однакових умов, час перехідних процесів.

Застосовуються різні способи бажаного розміщення коренів характеристичного рівняння. Один із них полягає в тому, що всі корені вважаються однаковими, дійсними та від'ємними. Приймається, що модуль коренів дорівнює ω_0 . У цьому разі характеристичне рівняння n -го порядку має вигляд бінома Ньютона:

$$D(p) = (p + \omega_0)^n. \quad (6.76)$$

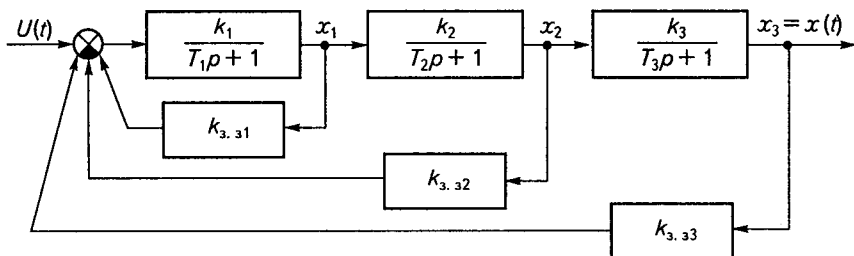
Стандартні форми, що відповідають цьому рівнянню, дістали назву *біномінальних*. Значення коефіцієнтів біномінальної форми до восьмого порядку включно наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

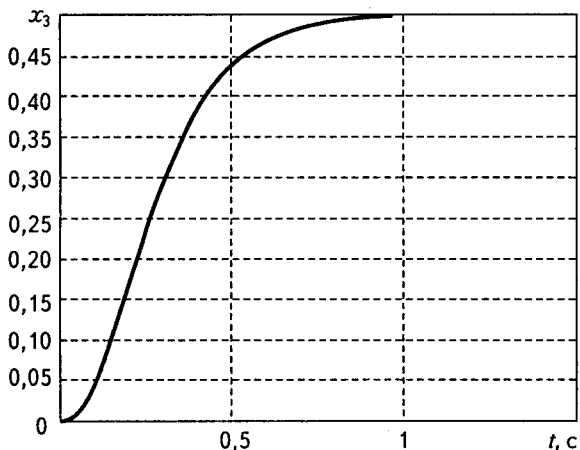
Порядок характеристичного рівняння	Коефіцієнти біномінальної форми								
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1	—	—	—	—	—	—	—
2	1	2	1	—	—	—	—	—	—
3	1	3	3	1	—	—	—	—	—
4	1	4	6	4	1	—	—	—	—
5	1	5	10	10	5	1	—	—	—
6	1	6	15	20	15	6	1	—	—
7	1	7	21	35	35	21	7	1	—
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Перехідні процеси в системі, характеристичне рівняння якої має вигляд (6.76), зумовлені ступінчастою зміною вхідної (задаючої) дії, є аперіодичними і не мають перерегулювання.

- **Приклад 6.6.** Структурну схему системи подано на рис. 6.38, а. Параметри схеми: $T_1 = 1$ с; $T_2 = 0,5$ с; $T_3 = 0,2$ с; $k_1 = 50$; $k_2 = 2$; $k_3 = 0,5$. Визначити коефіцієнти жорстких зворотних зв'язків $k_{3,31}$; $k_{3,32}$; $k_{3,33}$, що забезпечують перехідний процес без перерегулювання. При розрахунку прийняти $\omega_0 = 10$.



а



б

Рис. 6.38

Розв'язання. Характеристичне рівняння замкнутої системи.

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3 + k_1 k_{3.3.1} T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3 + k_1 k_{3.3.1} T_2 + k_1 k_{3.3.1} T_3 + k_1 k_2 k_{3.3.2} T_3) p + 1 + k_1 k_{3.3.1} + k_1 k_2 k_{3.3.2} + k_1 k_2 k_3 k_{3.3.3} = 0.$$

Підставимо значення параметрів та зробимо коефіцієнт при p^3 рівним одиниці, тоді

$$p^3 + (8 + 50k_{3.3.1})p^2 + (17 + 350k_{3.3.1} + 200k_{3.3.2})p + 10 + 500k_{3.3.1} + 1000k_{3.3.2} + 500k_{3.3.3} = 0.$$

Біноміальна форма рівняння третього порядку має вигляд

$$p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3 = 0.$$

Порівнявши коефіцієнти при однакових степенях p і прийнявши $\omega_0 = 10$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 8 + 50k_{3.3.1} &= 30; \\ 17 + 350k_{3.3.1} + 200k_{3.3.2} &= 300; \\ 10 + 500k_{3.3.1} + 1000k_{3.3.2} + 500k_{3.3.3} &= 1000, \end{aligned}$$

звідки визначимо $k_{3.3.1} = 0,44$; $k_{3.3.2} = 0,645$; $k_{3.3.3} = 0,25$.

Перехідний процес у системі з визначеними параметрами коефіцієнтів зворотних зв'язків, зумовлений одиничною ступінчастою вхідною дією, зображено на рис. 6.38, б.

Інший бажаний розподіл коренів характеристичного рівняння замкнутої системи на комплексній площині p є розподіл Баттерворта. Корені розміщуються на півколі з радіусом ω_0 у лівій півплощині комплексної площини коренів. Кут між уявною віссю та лінією, проведеною через найближчий до неї корінь і точку перетину уявної та дійсної осей, дорівнює половині кута між сусідніми коренями. Значення коефіцієнтів характеристичного рівняння у формі Баттерворта подано в табл. 6.5.

Час перехідних процесів, що відповідають характеристичному рівнянню у формі Баттерворта, за ступінчастої вхідної дії менший порівняно з біноміальною формою, але у разі зростання порядку характеристичного рівняння за даного значення ω_0 коливальність дещо підвищується. Якщо застосувати форму Баттерворта для системи другого порядку, то отримаємо характеристичне рівняння з коефіцієнтом демпфування $\sqrt{2}/2$, що відповідає настроюванню на модульний оптимум.

Таблиця 6.5

Порядок характеристичного рівняння	Коефіцієнти форми Баттерворта								
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1	—	—	—	—	—	—	—
2	1	1,4	1	—	—	—	—	—	—
3	1	2	2	1	—	—	—	—	—
4	1	2,6	3,4	2,6	1	—	—	—	—
5	1	3,24	5,24	5,24	3,24	1	—	—	—
6	1	3,86	7,46	9,13	7,46	3,86	1	—	—
7	1	4,5	10,1	14,6	14,6	10,1	4,5	1	—
8	1	5,18	13,14	21,24	25,69	21,24	13,14	5,18	1

Коефіцієнти жорстких пропорційних зворотних зв'язків забезпечують керування усіма n коренями характеристичного рівняння, якщо ці зв'язки здійснюються за усіма n змінними стану. У цьому разі n коефіцієнтів характеристичного рівняння залежить від n коефіцієнтів зворотних зв'язків, тобто маємо n рівнянь для визначення величин n зворотних зв'язків. Проте в більшості реальних задач можливо вимірювати та реалізувати зворотні зв'язки тільки за частиною змінних стану. У цьому разі для здійснення принципу модального керування до жорстких зворотних зв'язків додаються диференціальні (гнучкі) зв'язки.

Наприклад, якщо в системі n -го порядку вимірюються тільки r змінних стану, то необхідно додати $n - r$ гнучких зв'язків. Тоді загальна кількість коефіцієнтів жорстких і гнучких зворотних зв'язків дорівнюватиме кількості коефіцієнтів характеристичного рівняння, що дає змогу визначити ці коефіцієнти та реалізувати принцип модального керування.

6.14

Керованість і спостережуваність

Керованість — одне з основних понять теорії керування, що характеризує можливість переведення керованої системи в заданий стан за допомогою керуючих дій. Система вважається керованою, якщо існує така керуюча дія $u(t)$, що забезпечує переведення системи з довільного початкового стану x_0 в довільний стан x_d протягом скінченного часу.

Точніше визначення керованості сформулював Р. Калман на прикладі лінійної стаціонарної системи, що описується рівнянням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (6.77)$$

де A — матриця системи вимірності $n \times n$; B — матриця входу вимірності $n \times m$; $x(t)$ — вектор змінних стану; $u(t)$ — вектор зовнішніх дій.

Рівняння (6.77) доповнюють рівнянням зв'язку між вектором змінних стану $x(t)$ й вектором вихідних вимірюваних параметрів системи $y(t)$:

$$y(t) = Cx(t). \quad (6.78)$$

У цьому рівнянні C — матриця виходу вимірності $r \times n$, де r — кількість вимірюваних змінних.

Система називається *цілком або повністю керованою*, якщо для будь-яких моментів часу t_0 і t_1 , де $t_1 > t_0$, і будь-яких заданих станів x_0 і x_1 існує керуюча дія $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), що переводить початковий стан $x(t_0) = x_0$ у кінцевий $x(t_1) = x_1$.

Умову повної керованості дає теорема Калмана: *лінійна n -вимірна система, що описується рівнянням (6.77), повністю керована тоді й тільки тоді, коли блочна матриця*

$$K = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] \quad (6.79)$$

вимірності $n \times nt$ має ранг, що дорівнює n , тобто

$$\text{rank } K = n. \quad (6.80)$$

Нагадаємо, що ранг матриці дорівнює найвищому порядку мінорів матриці, що не дорівнюють нулю.

Матриця K називається *матрицею керованості*. Вона складається з стовпців матриці B та добутків матриць $AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$.

Дослідимо керованість об'єкта на такому простому прикладі. Розглянемо об'єкт другого порядку, що описується рівняннями

$$dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2;$$

$$dx_2/dt = a_{22}x_2 + b_{22}u_2.$$

Матриці, що відповідають рівнянню (6.77), мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix},$$

а їхній добуток

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12} \cdot 0 & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} + a_{22} \cdot 0 & 0 \cdot b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матриця керованості записується так:

$$K = [B : AB] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & b_{22} & 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

При $b_{22} \neq 0$ ранг матриці $K = 2$, тому об'єкт повністю керований. Якщо $b_{22} = 0$, то ранг матриці $K = 1$ й об'єкт не повністю керований, а керований лише за однією координатою.

Розглянемо тепер поняття *спостережуваності* і *відновлюваності*. Система називається *цілком* або *повністю спостережуваною*, якщо існує таке t_1 ($t < t_1 < \infty$), що за відомою інформацією про вихід $y(t)$ і вхід $u(t)$ системи для інтервалу $t \leq \tau \leq t_1$ можна визначити всі координати вектора змінних стану системи $x(t)$.

Проблема спостережуваності виникає в зв'язку з тим, що при синтезі систем зі зворотними зв'язками керування визначається як функція змінних стану. В загальному випадку ці змінні є абстрактними величинами і їх не можна вимірювати. Піддається вимірюванню (спостереженню) вектор $y(t)$, координатами якого є вихідні величини, і вектор керуючої дії $u(t)$. Вихідні величини функціонально пов'язані зі змінними стану, тому для реалізації керування зі зворотним зв'язком виникає завдання визначення змінних стану за значеннями $y(t)$, що вимірюються.

З поняттям спостережуваності безпосередньо пов'язане поняття відновлюваності. Система називається цілком або повністю відновлюваною, якщо існує таке t_0 ($-\infty < t_0 < t$), що за відомою інформацією про вихід $y(t)$ та вхід $u(t)$ системи для інтервалу $t_0 \leq \tau \leq t$ можна визначити всі координати вектора змінних стану системи $x(t)$.

Для стаціонарних систем з повної спостережуваності випливає повна відновлюваність і навпаки, тому ці поняття можна не розрізняти.

Для лінійної стаціонарної системи, що описується рівняннями (6.77) і (6.78), критерій повної спостережуваності (відновлюваності) формулюється так: система повністю спостережувана (відновлювана) тоді й тільки тоді, коли ранг матриці спостережуваності вимірності $n \times n$

$$H = [C^T; A^T C^T; \dots; (A^T)^{n-1} C^T] \quad (6.81)$$

дорівнює n . Це необхідна і достатня умова повної спостережуваності Калмана.

Якщо ранг матриці H менше n , то система не повністю спостережувана: якщо ранг дорівнює нулю — повністю неспостережувана.

Відновлене значення вектора змінних стану називається його оцінкою. Пристрій, що забезпечує знаходження оцінки за вимірюваними векторами керування $u(\tau)$ і вихідних параметрів $y(\tau)$ для інтервалу $t_0 \leq \tau \leq t$, називається спостерігачем.

Для спостерігача вектори керування $u(t)$ і вихідної змінної $y(t)$ є вихідними змінними.

Спостерігачем повного порядку для системи, що описується рівняннями (6.77) і (6.78), називається пристрій, рівняння якого

$$\hat{\dot{x}} = F\hat{x} + Gy + Hu, \quad (6.82)$$

якщо при $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ справедлива рівність

$$\hat{x}(t) = x(t), \quad t \geq t_0$$

для всіх $y(t)$, $t \geq t_0$.

У рівнянні (6.82) F , G , H — матриці, а знаком « $\hat{}$ » позначено оцінку вектора змінних стану.

Пристрій, що описується рівнянням (6.82), є спостерігачем повного порядку, оскільки його порядок збігається з порядком вихідної системи. Якщо спостерігач описується рівнянням, порядок якого

нижче за порядок вихідної системи, то він називається *спостерігачем зниженого порядку*.

Визначимо матриці F , G , H . Для цього з рівняння (6.77) відніме-мо рівняння (6.82) й після підстановки $y(t)$ згідно з рівнянням (6.78) дістанемо

$$\dot{x} - \hat{\dot{x}} = (A - GC)x - F\hat{x} + (B - H)u.$$

З цього рівняння випливає, що якщо $x(t) = \hat{x}(t)$ для всіх $t \geq t_0$ і $u(t)$, $t \geq t_0$, то

$$F = A - GC; \quad H = B.$$

Матриця G дорівнює L , де L — довільна матриця, яка називається *матрицею коефіцієнтів підсилення*.

Після підстановки знайдених значень матриць у рівняння (6.82) рівняння спостерігача матиме вигляд

$$\hat{\dot{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu \quad (6.83)$$

або

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}). \quad (6.84)$$

З останнього рівняння випливає, що математична модель спостерігача складається з моделі вихідної системи $Ax + Bu$ і додаткового доданка, пропорційного різниці між вихідною змінною y та її оцінкою $\hat{y} = C\hat{x}$. Структурну схему спостерігача, що відповідає рівнянню (6.84), наведено на рис. 6.39.

Спостерігач відновлює повну інформацію про вектор стану об'єкта керування, що надає можливість при проектуванні систем автоматичного керування використовувати метод *модального керування*.

Цей метод можна використати для визначення параметрів матриці L коефіцієнтів спостерігача, що описується рівнянням (6.84). З рівняння (6.83) випливає, що стійкість та якість перехідних процесів спостерігача ви-

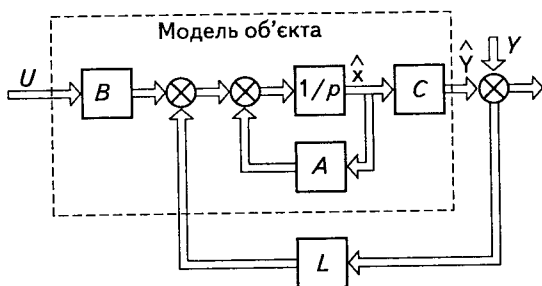


Рис. 6.39

значається матрицею $A - LC$, де матриці A і C відомі. Характеристичне рівняння матриці $A - LC$ є характеристичним рівнянням спостерігача, а її власні значення — коренями характеристичного рівняння. Тому, визначивши характеристичне рівняння матриці $A - LC$ і порівнявши його до стандартної форми (6.75), коефіцієнти якої вибирають, виходячи з бажаного розміщення коренів на комплексній площині p , знаходимо параметри матриці L .

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть основні причини появи помилок у САР.
2. Наведіть рівняння помилок у слідкувальних системах і системах стабілізації.
3. Як знайти коефіцієнти помилок у лінійних САР?
4. Яким чином впливає замикання системи на її якість?
5. Перелічіть основні шляхи підвищення точності САР.
6. Порівняйте часові характеристики розімкнутої і замкнутої систем.
7. Що розуміють під законом керування?
8. Які особливості і який вигляд має пропорційний закон керування?
9. Які недоліки має інтегральний регулятор?
10. Які переваги має ПІ-регулятор?
11. Напишіть формулу пропорційно-інтегрально-диференціального закону керування і визначіть роль кожної складової.
12. Що таке «добротність» системи?
13. Сформулюйте принцип інваріантності.
14. Які існують форми інваріантності?
15. Як забезпечити абсолютну інваріантність у системі?
16. Яким чином можна підвищити якість у системах зі змінною структурою?
17. Як підвищується якість у комбінованих САР?
18. Яким чином впливають неодиначні зворотні зв'язки на якість?
19. Як визначити передаточну функцію пасивного чотириполюсника?
20. Як визначити передаточну функцію кола з операційним підсилювачем?
21. Наведіть схеми П-, І-, ПІ-, Д-, ПІД- і ПІД-регуляторів, побудованих на операційних підсилювачах.
22. Схарактеризуйте суть таких методів підвищення запасу стійкості: демпфування з придушенням високих частот, демпфування з підняттям високих частот, демпфування з придушенням середніх частот, демпфування з введенням від'ємних зсувів за фазою.
23. На чому ґрунтується ідея методу синтезу коректувальних пристроїв за допомогою ЛАХ?

24. Як побудувати бажану ЛАХ за методом Солодовнікова?
25. Наведіть спрощену методику побудови бажаної ЛАХ.
26. Як виконується синтез послідовної коректувальної ланки?
27. Як виконується синтез паралельної коректувальної ланки?
28. Як можна виконати синтез кількох коректувальних ланок для однієї САР?
29. Наведіть структурну схему системи підпорядкованого регулювання і поясніть принцип її побудови.
30. Як визначити передаточну функцію регулятора при настроюванні контуру на технічний і симетричний оптимуми?
31. У чому полягає суть методу модального керування?
32. Дайте визначення поняттям «керуваність» і «спостережуваність».
33. Сформулюйте умову повної керуваності.
34. Що таке спостерігач? Яким рівнянням описується спостерігач повного порядку?

7.1

Уявлення про випадкові процеси

У попередніх главах припускалося, що дії, прикладені до САК, є *детермінованими*, тобто становлять цілком визначені функції часу. Практично ж САК часто працюють в умовах, коли зовнішні дії мають *випадковий* характер. Як приклади таких дій можна навести опір руху електромеханічних об'єктів, коливання напруги живлення джерел енергопостачання електроприводів, випадкові перешкоди в регуляторах і вимірювальних пристроях тощо. В слідкувальних системах часто випадковою є також задаюча дія.

САК, що працюють в умовах випадкових збурень, можна проектувати, виходячи тільки з максимального можливих значень цих збурень. Проте, якщо ймовірність появи максимального значення збурення незначна, то до САК ставитимуться явно жорсткіші вимоги порівняно з тими, які впливають з реальних умов експлуатації. Значно кращі результати дає використання спеціальних методів, які враховують випадковий характер збурень і надають можливість визначити деяку усереднену поведінку системи.

Перед розглядом поведінки САК, яка перебуває під дією випадкових збурень, наведемо деякі необхідні відомості про випадкові величини, випадкові процеси та їхні ймовірнісні характеристики.

Випадковою називається величина, значення якої визначається неконтрольованими причинами і тому не може бути точно передбаченою. Якщо випадкова величина може набувати окремих значень лише зі скінченної множини її можливих значень, то вона називається *дискретною випадковою* величиною. Якщо ж випадкова величина може набувати усіх значень у певному заданому інтервалі, то вона називається *безперервною випадковою* величиною. Ймовірність того, що безперервна випадкова величина набуде конкретного, за-

здаlegідь визначеного значення, нескінченно мала, тобто ймовірність події $p = 0$.

Найважливішими ймовірнісними характеристиками безперервних випадкових величин є функція розподілу, щільність розподілу, математичне очікування, дисперсія.

Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X називається функція

$$F(x) = p(X < x),$$

яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X має значення, менше за x . Ймовірність того, що безперервна випадкова величина потрапить у деякий проміжок $x_1 < X < x_2$, визначається різницею функцій розподілу, тобто

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Похідна від функції розподілу

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (7.1)$$

називається щільністю розподілу, або диференціальною функцією розподілу.

Математичне очікування, або середнє значення безперервної випадкової величини, яке визначається за множиною її можливих значень, виражається через щільність розподілу за формулою

$$m_x = M\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x) dx, \quad (7.2)$$

а середнє значення квадрата безперервної випадкової величини —

$$M\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx. \quad (7.3)$$

У формулах (7.2) і (7.3) $M\{\cdot\}$ — символ усереднення.

Дисперсія D_x , яка характеризує розкид випадкових значень безперервної випадкової величини навколо її середнього значення, визначається як різниця середнього значення квадрата і квадрата середнього значення:

$$D_x = M\{x^2\} - m_x^2, \quad (7.4)$$

а середньоквадратичне відхилення — як квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{D_x}. \quad (7.5)$$

Випадкова величина X , що змінюється в часі t , становить випадковий процес. Інакше кажучи, *випадковий процес* — це функція часу, значення якої в кожний момент часу є випадковою величиною. Отже, випадковий процес $X(t)$ — це сукупність множини можливих кривих $x(t)$, кожна з яких становить лише окремі реалізації випадкового процесу $X(t)$. Можливі графіки випадкових процесів зображено на рис. 7.1.

Ймовірність того, що процес відбуватиметься за якою-небудь певною заздалегідь заданою кривою, нескінченно мала. Можливий характер перебігу випадкового процесу оцінюється ймовірнісними характеристиками, подібними до характеристик безперервної випадкової величини.

У кожний окремий момент часу $t_1, t_2, t_3 \dots$ (рис. 7.1, а) можна розглядати випадкові величини $X(t_1), X(t_2), X(t_3), \dots$, кожна з яких має свою функцію розподілу. Для випадкової величини $X(t_1)$ функція розподілу має вигляд

$$F_1(x, t_1) = p\{X(t_1) < x\}.$$

Функція $F(x, t)$ називається *одновимірною функцією розподілу* ймовірностей випадкового процесу $X(t)$. Частинна похідна від неї

$$w_1(x, t) = \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x}$$

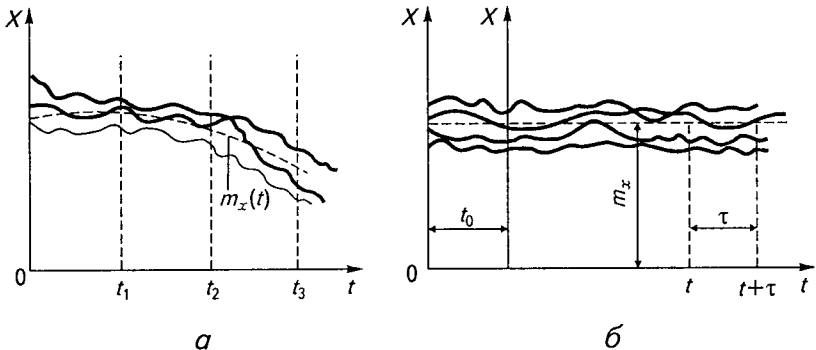


Рис. 7.1

називається *одновимірною щільністю розподілу*.

Функції $F_1(x, t)$ і $w_1(x, t)$ є найпростішими характеристиками випадкового процесу. Більш повну характеристику випадкового процесу дає *двовимірна функція розподілу*

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p\{X(t_1) < x_1; X(t_2) < x_2\},$$

яка дорівнює ймовірності того, що при t_1 значення випадкового процесу менше за x_1 , а при t_2 — менше за x_2 .

Частинна похідна

$$w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

називається *двовимірною щільністю розподілу*.

Аналогічно можна визначити також багатовимірні функцію й щільність розподілу.

Випадкові процеси можуть бути стаціонарними або нестаціонарними. Якщо ймовірнісні характеристики випадкового процесу не залежать від вибору моменту часу t , тобто інваріантні відносно початку відліку, то випадковий процес називається *стаціонарним*, у протилежному разі — *нестационарним*. Графік випадкового стаціонарного процесу зображено на рис. 7.1, б.

Ймовірнісні характеристики стаціонарного процесу не змінюються протягом часу, тобто

$$F(x, t) = F(x);$$

$$w(x, t) = w(x).$$

Стаціонарні випадкові процеси мають дуже важливу властивість, яка називається *ергодичною*. Суть цієї властивості така: будь-яке середнє за множиною з ймовірністю «одиниця» (практично достовірно) дорівнює відповідному середньому за часом, тобто

$$x_{\text{сеп}} = \bar{x}; (x^2)_{\text{сеп}} = \bar{x}^2$$

і т. д., де ризикою позначено усереднення за часом. Далі користуватимемося загальним символом усереднення $M\{\cdot\}$, яким позначатимемо усереднення за множиною або за часом, тобто

$$M\{x\} = x_{\text{сеп}} = \bar{x}; M\{x^2\} = (x^2)_{\text{сеп}} = \bar{x}^2.$$

При викладенні наступного матеріалу розглядатимемо лише стаціонарні випадкові процеси.

Замість терміна *випадковий* вживають також терміни *стохастичний* або *ймовірнісний*.

7.2

Характеристики стаціонарних випадкових процесів

До основних характеристик стаціонарних випадкових процесів належать математичне очікування, дисперсія, кореляційні функції.

Математичне очікування визначає середнє значення випадкового процесу за множиною:

$$m_x = M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x) dx. \quad (7.6)$$

Якщо врахувати ергодичну властивість, то

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (7.7)$$

Дисперсія

$$\begin{aligned} D_x &= M\{[x(t) - m_x]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w_1(x) dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x(t)]^2 dt = M\{x^2\} - (M\{x\})^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

характеризує міру розкиду значень випадкового процесу стосовно його середнього значення і дорівнює різниці середнього значення квадрата процесу і квадрата середнього значення процесу. Квадратний корінь із дисперсії визначає середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (7.9)$$

Кореляційна функція (або, що те саме, автокореляційна) характеризує ступінь залежності (кореляції) між значеннями процесу, віддаленими один від одного на час τ , тобто оцінює швидкість змінювання випадкового процесу протягом часу. Вона становить середнє значення добутку випадкових процесів $x(t)$ і $x(t + \tau)$ і визначається за формулою

$$R_x(\tau) = M\{x(t)x(t + \tau)\}. \quad (7.10)$$

Для стаціонарного випадкового процесу на підставі ергодичної властивості кореляційну функцію можна визначити як середнє за часом:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt. \quad (7.11)$$

Кореляційна функція стаціонарного процесу має такі властивості.

1. Кореляційна функція є парною функцією зсуву τ . Замінивши у виразі (7.10) t на $t - \tau$, дістанемо

$$R_x(\tau) = M\{x(t - \tau)x(t)\} = R_x(-\tau).$$

2. При $\tau = 0$

$$R_x(0) = M\{x^2(t)\}, \quad (7.12)$$

тобто початкове значення кореляційної функції дорівнює середньому значенню квадрата випадкового процесу. Крім того, з виразів (7.12) і (7.8) випливає, що

$$R_x(0) = D_x + m_x^2. \quad (7.13)$$

Випадковий процес, середнє значення якого дорівнює нулю, називається *центрованим*. Для такого процесу

$$R_x(0) = D_x.$$

3. Значення кореляційної функції при $\tau = 0$ є найбільшим:

$$R_x(0) \geq R_x(\tau). \quad (7.14)$$

Щоб довести цю нерівність, розглянемо очевидну нерівність

$$[x(t) - x(t + \tau)]^2 \geq 0,$$

з якої

$$x^2(t) + x^2(t + \tau) \geq 2x(t)x(t + \tau).$$

Візьмемо середнє за часом від правої та лівої частин останньої нерівності. Тоді, з урахуванням виразів (7.12) і (7.10), дістанемо

$$M\{x^2(t) + x^2(t + \tau)\} = 2M\{x^2(t)\} = 2R_x(0);$$

$$2M\{x(t)x(t + \tau)\} = 2R_x(\tau),$$

звідки

$$R_x(0) \geq R_x(\tau).$$

4. При $\tau \rightarrow \infty$ кореляційна функція дорівнює квадрату середнього значення випадкового процесу

$$R_x(\infty) = m_x^2. \quad (7.15)$$

Для центрованого випадкового процесу

$$R_x(\infty) = 0.$$

5. Значення кореляційної функції звичайно зменшується при збільшенні τ , оскільки зв'язок між віддаленими значеннями x , як правило, слабшає.

Для стаціонарного випадкового процесу кореляційна функція становить універсальну характеристику. Обчислити її досить просто, якщо мати експериментально зняті криві, тобто окремі реалізації випадкового процесу. Одну з таких реалізацій зображено на рис. 7.2. Для неї, згідно з виразом (7.11),

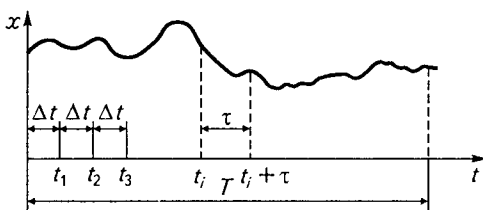


Рис. 7.2

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &\approx \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} x(t)x(t + \tau)dt \approx \\ &\approx \frac{1}{T - \tau} \sum x(t_i)x(t_i + \tau)\Delta t. \end{aligned}$$

Чим більше час T і чим більше експериментально знятих кривих, тим точніше можна визначити кореляційну функцію.

За відомою кореляційною функцією можна знайти такі ймовірнісні характеристики:

- середнє значення випадкового процесу

$$m_x = \sqrt{R_x(\infty)};$$

- середнє значення квадрата випадкового процесу

$$M\{x^2(t)\} = R_x(0);$$

- дисперсію

$$D_x = R_x(0) - R_x(\infty);$$

- середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{R_x(0) - R_x(\infty)}.$$

Кореляційна функція має певний сенс також для детермінованих обмежених процесів. Як приклад визначимо кореляційну функцію для постійної та гармонічної дії.

- **Приклад 7.1.** Визначити кореляційну функцію постійної дії $x(t) = a$.

Розв'язання. За формулою (7.11) дістанемо

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T aadt = a^2.$$

- **Приклад 7.2.** Визначити кореляційну функцію гармонічної дії $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$.

Розв'язання. За формулою (7.11)

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \tau) + \varphi] dt. \quad (7.16)$$

У підінтегральному виразі добуток синусів замінимо різницею косинусів

$$\sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \tau) + \varphi] = \frac{\cos \omega \tau - \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)}{2}$$

і зробимо деякі перетворення першої частини виразу (7.16):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \frac{\cos \omega \tau}{2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2 \cos \omega \tau}{4T} t \Big|_{-T}^T = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau.$$

Вираз

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 [-\cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)] dt$$

обчислимо таким чином. Оскільки підінтегральний вираз є періодичним з періодом повторення π/ω , то інтеграл можна подати у вигляді суми інтегралів з періодами від $(k-1)\pi/\omega$ до $k\pi/\omega$, де $k = \pm 1; \pm 2; \dots$

При $k = 1$

$$-\frac{a^2\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\varphi) dt = 0.$$

Для будь-якого k дістанемо інтеграл косинуса за цілий період, який дорівнює нулю. Отже,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 [-\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\varphi)] dt = 0$$

і остаточно

$$R_x(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega\tau.$$

Кореляційні функції більшості стаціонарних випадкових процесів можна подати у вигляді лінійних комбінацій кореляційних функцій трьох типів:

$$R_{x_1}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}; \quad (7.17)$$

$$R_{x_2}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau; \quad (7.18)$$

$$R_{x_3}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \sin \omega_0 \tau). \quad (7.19)$$

Графіки цих кореляційних функцій зображено на рис. 7.3.

Для оцінки статистичного зв'язку між двома випадковими процесами $X(t)$ і $Y(t)$ застосовується поняття *взаємної кореляційної функції* $R_{xy}(\tau)$, яка визначається за формулою

$$R_{xy}(\tau) = M\{x(t)y(t+\tau)\}. \quad (7.20)$$

Замінивши t на $t - \tau$, дістанемо

$$R_{xy}(\tau) = M\{x(t-\tau)y(t)\} = M\{y(t)x(t-\tau)\} = R_{yx}(-\tau),$$

тобто взаємна кореляційна функція у разі зміни знака зсуву τ змінює порядок своїх індексів.

При $\tau = 0$

$$R_{xy}(0) = M\{x(t)y(t)\},$$

тобто початкове значення взаємної кореляційної функції дорівнює середньому значенню добутку випадкових процесів.

7.3. Спектральна щільність
стаціонарних випадкових процесів

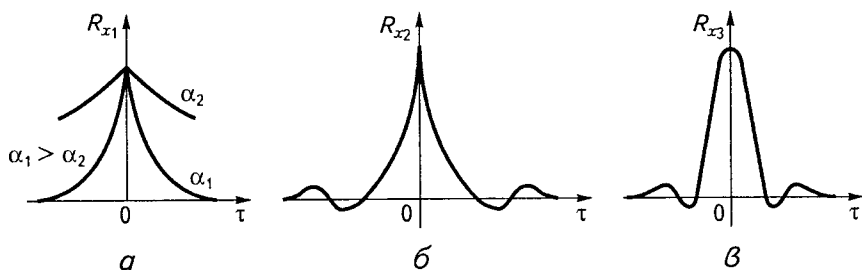


Рис. 7.3

Якщо середні значення процесів m_x і m_y відрізняються від нуля, то

$$R_{xy}(\infty) = m_x m_y.$$

Для не зв'язаних один з одним випадкових процесів

$$R_{xy}(\tau) = 0.$$

Цим пояснюється такий вираз: *процеси корелюють або не корелюють, що означає, чи є між ними статистичний (імовірнісний) зв'язок, чи немає.*

7.3

Спектральна щільність стаціонарних випадкових процесів

Поняття про спектральну щільність пов'язано з розкладом кривої стаціонарного випадкового процесу на гармонічні складові.

Спектральна щільність $S_x(\omega)$ — це частотна функція, яка характеризує спектральний (частотний) склад процесу. Вона є частотною характеристикою для середніх значень квадратів амплітуд гармонік, на які розкладається випадковий процес.

Спектральна щільність дає можливість використовувати частотні характеристики САК для дослідження якості процесу регулювання у разі випадкових дій.

Формально спектральну щільність можна визначити як зображення Фур'є кореляційної функції

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.21)$$

Згідно зі зворотним перетворенням Фур'є

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.22)$$

Замінивши в (7.21) τ на $-\tau$, ω на $-\omega$ і врахувавши парність кореляційної функції $R_x(\tau)$, дістанемо

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega),$$

тобто спектральна щільність є парною функцією частоти.

Оскільки спектральна щільність і кореляційна функція є парними дійсними функціями, формули (7.21) і (7.22) іноді можна подати у простішому вигляді:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \quad (7.23)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (7.24)$$

Зв'язок між $S_x(\omega)$ і $R_x(\tau)$ такий, що чим ширше графік кореляційної функції $R_x(\tau)$, тим вузчий графік спектральної щільності і навпаки.

Взаємна спектральна щільність двох статистично зв'язаних випадкових стаціонарних процесів визначається за формулою

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.25)$$

при цьому

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.26)$$

Спектральні щільності випадкових процесів, кореляційні функції яких мають вигляд (7.17)—(7.19), визначаються відповідно за формулами

7.3. Спектральна щільність
стаціонарних випадкових процесів

$$S_{x_1}(\omega) = D_x \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2};$$

$$S_{x_2}(\omega) = D_x \frac{2\alpha(\beta^2 + \omega^2)}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4};$$

$$S_{x_3}(\omega) = D_x \frac{(\alpha + \gamma\omega_0)\beta^2 + (\alpha - \gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4},$$

де $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$.

Графіки спектральних щільностей $S_{x_1}(\omega)$ і $S_{x_2}(\omega)$ зображено на рис. 7.4. Крива 2 на рис. 7.4, б відповідає меншим значенням β і більшим значенням α порівняно з кривою 1.

Випадковий процес, який має однакові значення спектральної щільності для будь-яких частот від $-\infty$ до $+\infty$, називається *білим шумом*. Усі частоти для білого шуму однаково ймовірні, спектральна щільність і кореляційна функція матимуть вигляд

$$S_x(\omega) = N = \text{const},$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} N \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\tau = N \delta(\tau),$$

де $\delta(\tau)$ — дельта-функція. Отже, кореляційна функція білого шуму $R_x(\tau)$ дорівнює нулю для всіх $\tau \neq 0$, тобто становить імпульсну функцію.

Випадковий процес зі сталою спектральною щільністю фізично нереальний, оскільки йому відповідають нескінченно великі диспер-

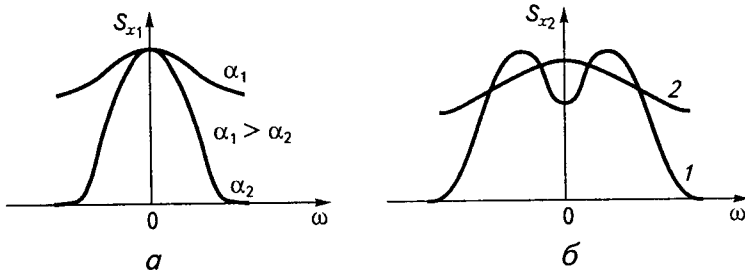


Рис. 7.4

сія та середній квадрат ($D_x = (x^2)_{\text{ср}} = R_x(0) \rightarrow \infty$) і, отже, нескінченно велика потужність.

Щоб отримати фізично реальний процес, розглянемо поняття білого шуму з обмеженою спектральною щільністю

$$S_x = N \text{ при } |\omega| < \omega_c;$$

$$S_x = 0 \text{ при } |\omega| > \omega_c,$$

де ω_c — смуга частот для спектральної щільності. Кореляційна функція такого процесу

$$R_x(\tau) = \frac{N}{\pi\tau} \sin \omega_c \tau.$$

При розрахунку слідкувальних систем із випадковим вхідним сигналом часто вважають, що вхідний сигнал (кутова швидкість задавальної осі) змінюється згідно з графіком (рис. 7.5), який вважається типовим. Швидкість зберігає стале значення протягом деяких інтервалів часу та стрибкоподібно переходить від одного значення швидкості до іншого.

Для такого сигналу математичне очікування

$$m_\Omega = \Omega_{\text{ср}} = 0,$$

а середній квадрат швидкості — дисперсії

$$(\Omega^2)_{\text{ср}} = D_\Omega \neq 0,$$

де

$$D_\Omega = M\{\Omega(t)\Omega(t + \tau)\}.$$

Кореляційна функція визначається за формулою

$$R_\Omega(\tau) = D_\Omega e^{-\mu|\tau|},$$

де μ — середня кількість змін швидкості упродовж однієї секунди.

Спектральна щільність

$$S_\Omega(\omega) = \frac{2\mu D_\Omega}{\mu^2 + \omega^2}.$$

Формулу спектральної щільності записано для кутової швидкості. Це дає змогу застосовувати цей вираз для обчислення динамічної похибки слідкувальної системи.

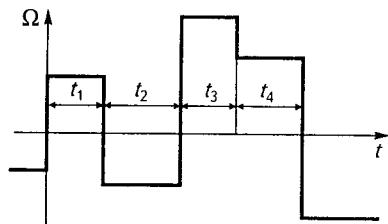


Рис. 7.5

7.4 Проходження стаціонарного випадкового сигналу через лінійну САК

Якість системи, до якої прикладено випадкові дії, не можна повністю охарактеризувати показниками, за якими оцінюють якість систем за детермінованих дій. Зокрема, такі показники, як похибка відпрацювання завдання та тривалість перехідного процесу втрачають сенс.

Розглянемо лінійну систему з вихідним сигналом $x(t)$, до якої прикладено вхідну дію $g(t)$. Якщо $g(t)$ є випадковою функцією, то й вихідний сигнал $x(t)$, і похибка $\epsilon(t) = g(t) - x(t)$ також будуть випадковими функціями. Якість роботи динамічної системи у разі випадкових дій звичайно оцінюється середньоквадратичним відхиленням

$$M\{\epsilon^2(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \epsilon^2(t) dt, \quad (7.27)$$

тобто середнім значенням квадрата похибки.

Згідно з виразами (7.12) і (7.22)

$$M\{\epsilon^2(t)\} = R_\epsilon(0) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} S_\epsilon(\omega) d\omega, \quad (7.28)$$

тобто середньоквадратичне відхилення визначається кореляційною функцією або спектральною щільністю похибки $\epsilon(t)$. Проте звичайно відомими є статистичні характеристики (кореляційна функція та спектральна щільність) вхідного сигналу, а не самої похибки. Тому необхідно визначити статистичні характеристики вихідного сигналу за відомими характеристиками вхідного.

Нехай вхідний сигнал $g(t)$ з відомими кореляційною функцією $R_g(\tau)$ та спектральною щільністю $S_g(\omega)$ подається на вхід лінійної системи з частотною характеристикою $W(j\omega)$. У цьому разі взаємна спектральна щільність вихідної та вхідної величин дорівнює добутку спектральної щільності вхідної величини й частотної характеристики системи

$$S_{xg}(\omega) = S_g(\omega)W(j\omega), \quad (7.29)$$

а спектральна щільність вихідної величини — добутку квадрата модуля частотної характеристики системи та спектральної щільності вхідної дії

$$S_x(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_g(\omega). \quad (7.30)$$

Знаючи спектральні щільності, за формулами (7.22) або (7.24) визначаємо кореляційні функції $R_{xg}(\tau)$ і $R_x(\tau)$.

Як приклад розглянемо реакцію динамічної системи на вхідну дію $g(t)$ типу білого шуму, спектральна щільність якого $S_g(\omega) = 1$. Згідно з виразом (7.29) дістаємо

$$S_{xg}(\omega) = W(j\omega)$$

і, використовуючи (7.26), знаходимо

$$R_{xg}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = w(\tau).$$

Отже, якщо на лінійну систему діє сигнал типу білого шуму, то взаємна спектральна щільність вихідної і вхідної величин дорівнює частотній характеристиці системи, а взаємна кореляційна функція — імпульсній перехідній характеристиці.

Часто розглядається випадковий процес, який не має постійної складової (центрований). Для такого процесу $m_x = 0$ і

$$D_x = M\{x^2(t)\} = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

або, з урахуванням (7.30),

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega. \quad (7.31)$$

Ця формула є основою для дослідження випадкових процесів у САК. При її використанні доводиться мати справу з підінтегральним виразом

$$\frac{|C(j\omega)|^2}{|B(j\omega)|^2}, \quad (7.32)$$

де $C(j\omega)$ і $B(j\omega)$ — поліноми від комплексної змінної $j\omega$.

7.5. Розрахунок точності САК
за середньоквадратичною похибкою

Вважатимемо, що найвищий ступінь знаменника дорівнює n . Тоді в реальній системі найвищий ступінь чисельника буде не вищий за $n - 1$. Для зручності інтегрування вираз (7.32) подають у вигляді

$$\frac{|C(j\omega)|^2}{|B(j\omega)|^2} = \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)},$$

де

$$B(j\omega) = b_0(j\omega)^n + b_1(j\omega)^{n-1} + \dots + b_n;$$
$$C(j\omega) = c_0(j\omega)^{n-1} + c_1(j\omega)^{n-2} + \dots + c_{n-1}.$$

Отже, обчислення дисперсії за формулою (7.31) можна звести до визначення інтеграла

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)} d\omega.$$

Інтеграли такого вигляду обчислено і подано в літературі з теорії автоматичного керування.

7.5

Розрахунок точності САК за середньоквадратичною похибкою

Якщо на вхід САК (рис. 7.6, а) надходить випадковий стаціонарний вхідний сигнал, то середньоквадратичне значення похибки згідно з виразами (7.28) і (7.30) визначається за формулою

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega, \quad (7.33)$$

де $W_\varepsilon(j\omega) = \frac{1}{1 + W(j\omega)}$ — комплексна частотна функція системи відносно похибки.

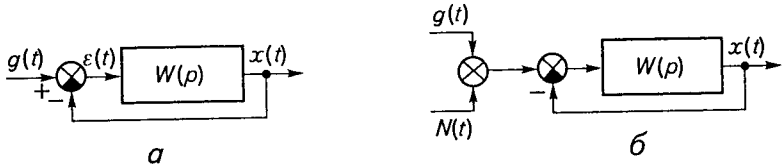


Рис. 7.6

Вираз (7.33) надає можливість визначити середній квадрат похибки системи за відомою спектральною щільністю вхідного сигналу.

□ **Приклад 7.3.** Передаточна функція розімкнутої слідкувальної системи

$$W(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}.$$

На вхід системи надходить стаціонарний випадковий сигнал $g(t)$, спектральна щільність якого

$$S_g(\omega) = D_g \frac{2\mu}{\mu^2 + \omega^2}.$$

Треба визначити середньоквадратичну похибку.

Розв'язання. Записуємо передаточну функцію системи відносно похибки:

$$W_r(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{Tp^2 + p}{Tp^2 + p + K}.$$

Середньоквадратична похибка обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} M\{\varepsilon^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_r(j\omega)|^2 \frac{D_g 2\mu}{\mu^2 + \omega^2} d\omega = \\ &= 2\mu D_g \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu^2 + \omega^2} \left| \frac{T(j\omega)^2 + j\omega}{T(j\omega)^2 + j\omega + K} \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Запишемо підінтегральний вираз у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{|T(j\omega)^2 + j\omega|^2}{|[T(j\omega)^2 + j\omega + K](j\omega + \mu)|^2} = \\ &= \frac{|T(j\omega)^2 + j\omega|^2}{|T(j\omega)^3 + (T\mu + 1)(j\omega)^2 + (\mu + K)j\omega + K\mu|^2} = \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)}, \end{aligned}$$

де

$$C(j\omega) = c_0(j\omega)^2 + c_1(j\omega) + c_2;$$

$$B(j\omega) = b_0(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2j\omega + b_3;$$

$$c_0 = T; c_1 = 1; c_2 = 0; b_0 = T; b_1 = T\mu + 1; b_2 = \mu + K; b_3 = K\mu.$$

Запишемо вираз для середньоквадратичної похибки

$$M\{\epsilon^2(t)\} = 2\mu D_g \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)} d\omega = 2\mu D_g I_3.$$

Інтеграл I_3 є табличним:

$$I_3 = \frac{c_2^2 b_0 b_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) b_0 b_3 + c_0^2 b_2 b_3}{2b_0 b_3 (-b_0 b_3 + b_1 b_2)}.$$

Підставивши значення коефіцієнтів, дістанемо

$$I_3 = \frac{1 + T(\mu + K)}{2(T\mu^2 + \mu + K)}$$

і

$$M\{\epsilon^2(t)\} = \frac{\mu D_g (1 + T\mu + TK)}{T\mu^2 + \mu + K}.$$

Розглянемо випадок, коли на вхід слідкувальної системи надходять задаюча дія $g(t)$ і перешкода $N(t)$, причому $g(t)$ і $N(t)$ — випадкові стаціонарні функції, спектральні щільності яких $S_g(\omega)$ і $S_N(\omega)$ відомі. Структурну схему САК для цього випадку показано на рис. 7.6, б.

Середньоквадратична похибка

$$M\{\epsilon^2(t)\} = M\{\epsilon_g^2(t)\} + M\{\epsilon_N^2(t)\} \quad (7.34)$$

у цьому разі є сумою двох складових. Перша з них зумовлена неточним відтворенням вхідного сигналу, а друга — перешкодою.

Призначенням слідкувальної системи є відтворення вхідного (корисного) сигналу $g(t)$. В ідеальному випадку бажана величина $x_0(t)$ на виході системи дорівнює корисному сигналу $g(t)$. Похибка $\epsilon(t)$ системи становить відхилення дійсного значення вихідної величини від бажаного:

$$\epsilon(t) = x_0(t) - x(t).$$

Структурну схему, з якої видно, як створюється відхилення, показано на рис. 7.7, а, де

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

Перетворимо цю структурну схему до вигляду, зображеного на рис. 7.7, б, в. За структурною схемою на рис. 7.7, в запишемо передавальну функцію відносно похибки, що утворюється перешкодою,

$$W_N(p) = W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}$$

і відносно корисного сигналу

$$W_g(p) = 1 - W_3(p) = \frac{1}{1 + W(p)}.$$

Якщо вхідний сигнал і перешкода некорельовані, то середньоквадратична похибка, згідно з (7.31) і (7.34), обчислюється за формулою

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_g(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_N(j\omega)|^2 S_N(\omega) d\omega. \quad (7.35)$$

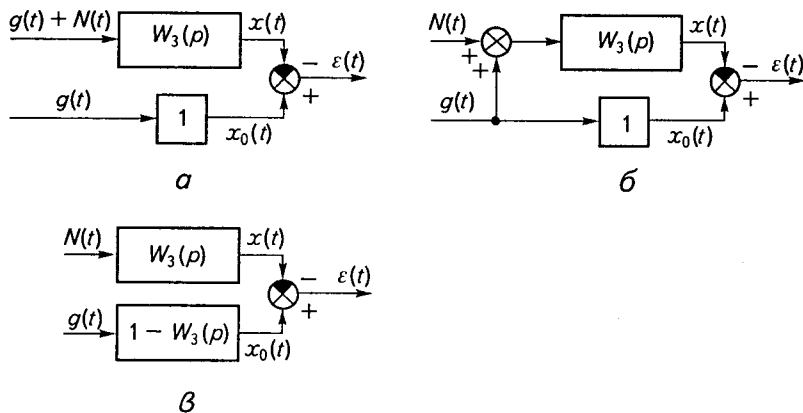


Рис. 7.7

Якщо корисний сигнал і перешкода корельовані, то середньоквадратична похибка визначається за складнішою формулою:

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [|W_g(j\omega)|^2 S_g(\omega) + W_g(-j\omega) S_{gN}(\omega) \times \quad (7.36) \\ \times W_N(j\omega) + W_g(j\omega) S_{Ng}(\omega) W_N(-j\omega) + |W_N(j\omega)|^2 S_N(\omega)] d\omega,$$

де $S_{gN}(\omega)$, $S_{Ng}(\omega)$ — взаємні спектральні щільності корисного сигналу та перешкоди.

7.6

Синтез лінійних САК за мінімумом середньоквадратичної похибки

Задача синтезу систем, що працюють при випадкових діях, звичайно розв'язується за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки.

У найпростішому випадку структурна схема та частина її параметрів вважаються заданими, а характеристики зовнішніх дій — відомими. Задача полягає у визначенні невідомих параметрів, які забезпечують мінімум середньоквадратичної похибки.

Для розв'язання задачі знаходимо передусім аналітичний вираз середньоквадратичної похибки $M\{\varepsilon^2(t)\}$, використовуючи, наприклад, табличні інтеграли I_n . В результаті дістаємо середній квадрат похибки як функцію невідомих параметрів

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots).$$

Цю функцію необхідно дослідити на мінімум у просторі невідомих параметрів і визначити параметри $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, які забезпечують мінімум функції f .

Складніше визначити передаточну функцію замкнутої системи $W_{zm}(p)$, яка забезпечує мінімум середньоквадратичної похибки. Цю задачу розв'язав Н. Вінер за таких умов:

- на вхід системи надходять два сигнали — корисний $g(t)$ і перешкода $N(t)$;

- обидва сигнали є випадковими процесами з відомими ймовірнісними характеристиками;
- шукана оптимальна система є лінійною;
- критерій якості — мінімум середньоквадратичної похибки.

Розв'язок цієї задачі дає такий вираз комплексної передаточної функції замкнутої системи:

$$W_{zm}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{x_0m}(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.37)$$

У цьому виразі $\psi(j\omega)\psi(-j\omega) = |\psi(j\omega)|^2 = S_m(\omega)$ — спектральна щільність вхідного сигналу $m(t) = g(t) + N(t)$; $S_{x_0m}(\omega)$ — взаємна спектральна щільність бажаного значення вихідного $x_0(t)$ і вхідного $m(t)$ сигналів.

В окремому випадку, коли $x_0(t) = g(t)$,

$$S_{x_0m}(\omega) = S_{gm}(\omega) = S_g(\omega) + S_{gN}(\omega).$$

У цьому разі передаточну функцію $W_{zm}(j\omega)$ можна подати у простішому вигляді:

$$W_{zm}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)}, \quad (7.38)$$

де

$$B(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{x_0m}(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Функцію $B(j\omega)$ можна визначити й без інтегрування. Запишемо розклад виразу $S_{x_0m}(\omega)/\psi(-j\omega)$ на прості дроби:

$$\frac{S_{x_0m}(\omega)}{\psi(-j\omega)} = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{\omega - \eta_i} + \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{\omega + \alpha_i} + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{c_i}{\omega - \gamma_i}.$$

У цьому виразі η_i — полюси $S_{x_0m}(\omega)$, що розміщуються у верхній півплощині комплексної площини коренів, тобто мають додатну уявну частину; $(-\alpha_i)$ — полюси $S_{x_0m}(\omega)$, що лежать у нижній півплощині; γ_i — нулі функції $\psi(-j\omega)$. Ці нулі містяться у нижній півплощині, оскільки нулі, розміщені у верхній півплощині, належать функції $\psi(j\omega)$.

Із записаного розкладу візьмемо тільки ту суму, яка містить полюси у верхній півплощині. Це й буде $B(j\omega)$, тобто

$$B(j\omega) = \sum_{\omega=1}^q \frac{a_i}{\omega - \eta_i}.$$

Знаменник функції $W_{zm}(j\omega)$ можна знайти за спектральною щільністю $S_m(\omega)$.

Теоретичний мінімум середньоквадратичної похибки при реалізації бажаної передаточної функції замкнутої системи

$$M\{\varepsilon^2 t\}_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_g(\omega) - |B(j\omega)|^2\} d\omega.$$

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть основні характеристики безперервних випадкових величин.
2. Що таке випадковий процес? Який випадковий процес називається стаціонарним?
3. Назвіть ймовірнісні характеристики стаціонарного випадкового процесу та наведіть формули для їхнього визначення.
4. Які властивості має кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу?
5. Що таке ергодична властивість?
6. Що таке спектральна щільність? Який зв'язок існує між спектральною щільністю та кореляційною функцією?
7. Як визначити статистичні характеристики вихідного сигналу лінійної САК за відомими характеристиками вхідного сигналу?
8. Як визначити середньоквадратичну похибку слідкувальної системи, на вхід якої надходить стаціонарний випадковий сигнал із відомою спектральною щільністю?
9. Як визначити середньоквадратичну похибку за умови, що на вхід системи надходить задавальна дія і перешкода?
10. Наведіть формулу для знаходження комплексної частотної функції замкнутої системи, що забезпечує мінімум середньоквадратичної похибки, і дайте пояснення щодо її застосування.

8.1
Загальні відомості

Нелінійними називаються САК, математичне описання яких не задовольняє умови лінійності. Появляють ці умови у тому, що при зміні зовнішньої дії на ланку або систему в α разів характер перехідного процесу не змінюється, а змінюється лише масштаб вихідної величини в α разів. Крім того, реакція ланки або системи на декілька одночасно прикладених дій дорівнює сумі реакцій на кожну з цих дій, прикладених окремо. Якщо САК містить хоча б одну нелінійну ланку, то в цілому вона є нелінійною.

Нелінійні ланки описуються нелінійними рівняннями. Ознакою нелінійних рівнянь є залежність коефіцієнтів рівнянь від координат системи або їхніх похідних, а також наявність у рівняннях добутків деяких координат чи їхніх похідних.

Усі реальні системи автоматичного керування електроприводами нелінійні. Пояснюється це тим, що основним елементом електропривода є електрична машина, яка містить кола з феромагнітними матеріалами. Рівняння, що описують динамічні процеси в електричній машині, нелінійні, бо індуктивність є функцією струму, ЕРС внаслідок насичення магнітної системи нелінійно залежить від струму збудження, опір обмоток якоря та збудження залежить від температури тощо. Крім того, в електроприводах використовуються підсилювачі з насиченням, елементи механічних передач із люфтами і сухим тертям та інші нелінійні елементи.

Теорію лінійних САК можна застосовувати для аналізу та синтезу реальних систем електропривода лише за досить малих відхилень від режиму, що досліджується. В цьому разі реальна нелінійна система лінеаризується методами, викладеними в гл. 2. Проте існує значна кількість САК, у яких нелінійні ланки застосовуються з метою забез-

печення таких властивостей, що неможливо досягти в лінійних системах. До таких ланок належать релейні елементи і логічні перемикаючі пристрої, які дають змогу змінювати структуру САК залежно від деяких її координат, ланки із зоною нечутливості, підсилювачі з насиченням, що забезпечують обмеження координат, тощо.

Задачі аналізу та синтезу нелінійних САК набагато складніші за аналогічні задачі для лінійних систем. Це пояснюється великою різноманітністю та складністю динамічних процесів у нелінійних системах. Стійкість нелінійних систем на відміну від лінійних залежить від величини та місця прикладання зовнішньої дії, характер перехідного процесу змінюється при змінюванні величини зовнішньої дії, в нелінійних системах спостерігаються режими, які не існують в лінійних системах, зокрема режим автоколивань. Усе це потребує застосування спеціальних точних і наближених методів аналізу та синтезу нелінійних систем.

8.2

Типові нелінійності

Нелінійні ланки САК дуже різноманітні. Нелінійні характеристики деяких із них за обмеженого діапазону зміни вхідного сигналу майже не відрізняються від лінійних. Такі нелінійності називають *слабкими*, або *несуттєвими*. Після лінеаризації цих нелінійностей САК зводять до лінійних і для їх дослідження використовують методи теорії лінійних САК. Проте є нелінійні елементи, характеристики яких не можна замінити лінійними. Вони надають САК якісно нових властивостей і, як правило, описуються розривними або близькими до них функціями. Такі нелінійності називають *суттєвими*.

Характеристики суттєво нелінійних елементів часто ідеалізують, тобто реальну нелінійну характеристику замінюють кількома лінійними ділянками, кожна з яких описується своїм рівнянням. У точках переходу від однієї ділянки до іншої спостерігається розрив похідної, тобто похідна має різні значення при підході до точки розриву зліва і справа. Якщо ідеалізувати суттєво нелінійні характеристики, то їх можна звести до обмеженої кількості типових. Розглянемо найпоширеніші з них. При цьому вважатимемо, що нелінійності безінерційні,

тобто не створюють суттєвого запізнення. Такі нелінійності описуються звичайними функціональними залежностями між вхідною і вихідною змінними, які називаються *статичними характеристиками безінерційних нелінійних ланок*. У загальному випадку вони мають вигляд

$$u = \varphi(\epsilon),$$

де u, ϵ — вихідна і вхідна змінні; φ — нелінійна функція.

Характеристика із зоною нечутливості. Такі характеристики (рис. 8.1, а) мають елементи, в яких вихідний сигнал відсутній при змінюванні вхідного сигналу в деякому інтервалі, звичайно праворуч і ліворуч від нуля. Цей інтервал називається *зоною нечутливості*.

Характеристика на рис. 8.1, а кусково-лінійна. Математично кожна лінійна ділянка описується окремо

$$u = \begin{cases} k(\epsilon + c) & \text{при } \epsilon < -c; \\ 0 & \text{при } -c \leq \epsilon \leq c; \\ k(\epsilon - c) & \text{при } \epsilon > c, \end{cases} \quad (8.1)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Зона нечутливості для цієї характеристики становить $2c$.

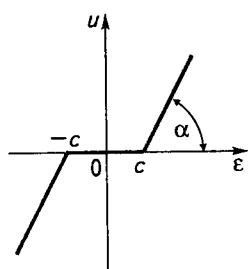
Рівняннями характеристики із зоною нечутливості можна описати залежність швидкості ω двигуна постійного струму з незалежним збудженням від напруги на якорі $U_{\text{я}}$ за умови, що до вала двигуна прикладено реактивний момент статичного навантаження M_c . Зона нечутливості зумовлена тим, що швидкість двигуна дорівнює нулю, якщо його момент M менший за момент статичного навантаження. Момент двигуна пропорційний струму якоря: $M = kI_{\text{я}}$. Струм якоря за швидкості, що дорівнює нулю, обчислюється за формулою

$$I_{\text{я}} = U_{\text{я}} / R_{\text{я.д}},$$

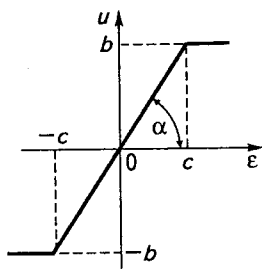
де $R_{\text{я.д}}$ — опір якорного кола двигуна.

Двигун починає обертатися при $M = M_c$, тобто при $kI_{\text{я}} = M_c$, тому для характеристики $\omega = f(U_{\text{я}})$ половина зони нечутливості

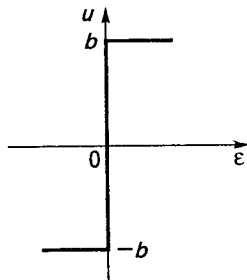
$$c = U_{\text{я}} = \frac{M_c}{k} R_{\text{я.д}}.$$



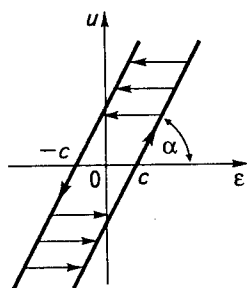
a



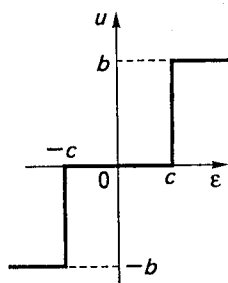
б



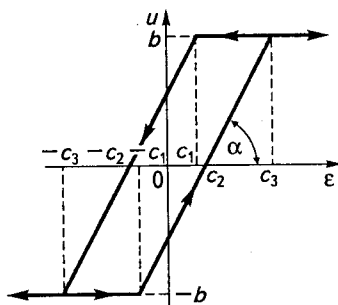
в



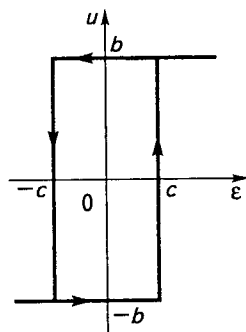
г



д



е



є

Рис. 8.1

Пропорційна частина характеристики описується рівнянням

$$\omega = \frac{1}{k} \left(U_{я} \pm \frac{M_c}{k} R_{я.д} \right),$$

де знак «мінус» відповідає додатній напрузі на якорі, «плюс» — від'ємній.

Наявність зони нечутливості знижує чутливість системи, бо система не реагує на сигнали, модуль яких менше c . Тому вона часто є небажаною. Але іноді зону нечутливості вводять навмисно, коли необхідно усунути підвищену чутливість системи до перешкод.

Характеристика із зоною насичення. Вигляд цієї характеристики зображено на рис. 8.1, б. За малих вхідних сигналів вихідний сигнал пропорційний вхідному, за великих — настає насичення, тобто вихідний сигнал сягає максимального рівня і далі не змінюється.

Математично характеристика описується так:

$$u = \begin{cases} -b & \text{при } \varepsilon < -c; \\ k\varepsilon & \text{при } -c \leq \varepsilon \leq c; \\ b & \text{при } \varepsilon > c. \end{cases} \quad (8.2)$$

Рівняннями характеристики із зоною насичення можна описати залежності вихідної величини від вхідної для більшості типів підсилювачів, тиристорних перетворювачів та інших елементів електропривода.

Релейна характеристика. Ця характеристика (рис. 8.1, в) відрізняється стрибкоподібним змінюванням вихідного сигналу при переході вхідного сигналу через деякий рівень. Для ідеального реле цей рівень дорівнює нулю, тобто для стрибкоподібного змінювання вихідного сигналу достатньо змінити знак вхідного сигналу.

Математично характеристика ідеального реле описується так:

$$u = \begin{cases} -b & \text{при } \varepsilon < 0; \\ b & \text{при } \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

або

$$u = b \operatorname{sign} \varepsilon.$$

Неоднозначні характеристики (характеристики з люфтом або мертвим ходом). Особливістю цих характеристик є залежність вихідної величини не тільки від вхідної величини в даний момент ча-

су, а й від напрямку її змінювання (зростає вона чи зменшується). Тому для математичного описування таких характеристик використовуються не тільки самі вхідні сигнали, а й їхні похідні, знак яких відповідає напрямку змінювання вхідного сигналу.

Неоднозначну характеристику зображено на рис. 8.1, з. Математично вона описується рівністю

$$u = \begin{cases} k(\varepsilon - c) & \text{при } d\varepsilon/dt > 0; \\ k(\varepsilon + c) & \text{при } d\varepsilon/dt < 0; \\ \text{const} & \text{при } |k\varepsilon - u| < c \end{cases} \quad (8.4)$$

або

$$u = k(\varepsilon - c \operatorname{sign} d\varepsilon(dt));$$

$$u = \text{const при } |k\varepsilon - u| < c.$$

Комбіновані нелінійні характеристики. Ці характеристики поєднують властивості кількох типових нелінійностей. Характеристика, зображена на рис 8.1, д, поєднує властивості характеристики із зоною нечутливості та релейної і математично описується так:

$$u = \begin{cases} -b & \text{при } \varepsilon < -c; \\ 0 & \text{при } -c \leq \varepsilon \leq c; \\ b & \text{при } \varepsilon > c. \end{cases} \quad (8.5)$$

Характеристика, наведена на рис. 8.1, е, поєднує властивості неоднозначної і характеристики із зоною насичення. Її математичний опис має вигляд

$$\left. \begin{array}{l} -b \quad \text{при } \varepsilon < -c_1; \\ k(\varepsilon - c_2) \text{ при } -c_1 \leq \varepsilon \leq c_3; \\ b \quad \text{при } \varepsilon > c_3; \end{array} \right\} \frac{d\varepsilon}{dt} > 0;$$

$$\left. \begin{array}{l} b \quad \text{при } \varepsilon > c_1; \\ k(\varepsilon + c_2) \text{ при } c_3 \leq \varepsilon \leq c_1; \\ -b \quad \text{при } \varepsilon < -c_3. \end{array} \right\} \frac{d\varepsilon}{dt} < 0. \quad (8.6)$$

Характеристику реального релейного елемента зображено на рис. 8.1, є. Вона поєднує властивості ідеальної релейної та неоднозначної характеристик і математично описується так:

$$\left. \begin{array}{l} -b \text{ при } \varepsilon < c; \\ b \text{ при } \varepsilon > c; \end{array} \right\} \frac{d\varepsilon}{dt} > 0; \quad (8.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} b \text{ при } \varepsilon > -c; \\ -b \text{ при } \varepsilon < -c; \end{array} \right\} \frac{d\varepsilon}{dt} < 0.$$

Є й інші комбіновані нелінійні характеристики, які складаються з лінійних ділянок.

8.3

Математичні моделі нелінійних систем

За математичного описування нелінійних систем несуттєві нелінійності лінеаризують, а суттєві звичайно спрощують, зводячи їх до типових. У цьому разі математична модель нелінійної САК становить структурну схему, що складається з лінійних (лінеаризованих) ланок і ланок з типовими суттєво нелінійними характеристиками.

Більшість методів дослідження нелінійних САК орієнтовано на структурні схеми, що складаються з однієї безінерційної нелінійної ланки і лінійної частини з передаточною функцією $W_n(p)$. Зовнішні дії переносяться на вхід нелінійної ланки, яка зображується функцією $u = \varphi(\varepsilon)$ або $u = \varphi(\varepsilon, p\varepsilon)$ для неоднозначних характеристик. Структурна схема в цьому разі називається *найпростішою*. Її вигляд зображено на рис. 8.2.

До найпростішої структурної схеми можна звести структурну схему будь-якої замкнутої нелінійної САК з однією нелінійною ланкою. Нехай, наприклад, структурна схема нелінійної САК має вигляд, зображений на рис. 8.3, а. Для зведення її до найпростішої переносимо суматор 1 через ланку $W_1(p)$, вузол 2 — через ланку $W_4(p)$, а ланки $W_3(p), W_4(p), W_5(p)$ замінюємо однією ланкою 4. Тоді дістанемо структурну схему (рис 8.3, б). Подальші перетворення полягають у заміні

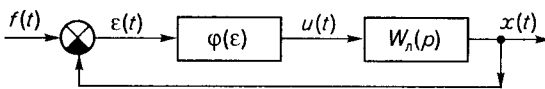
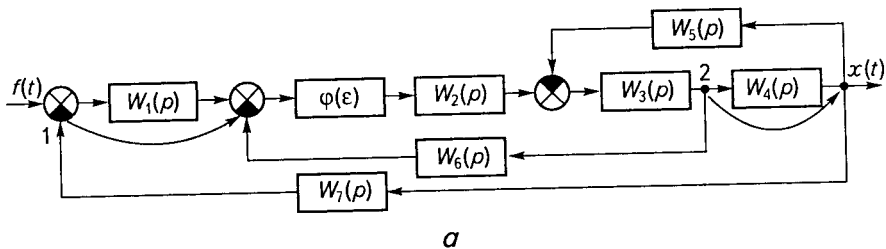
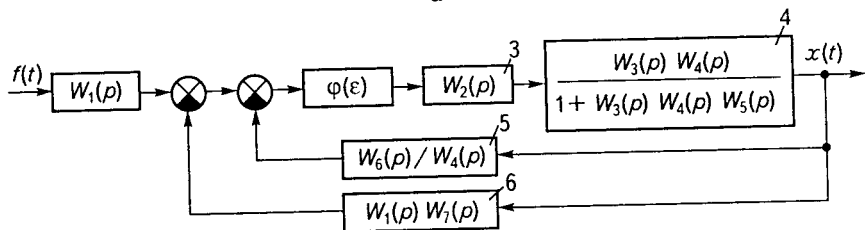


Рис. 8.2

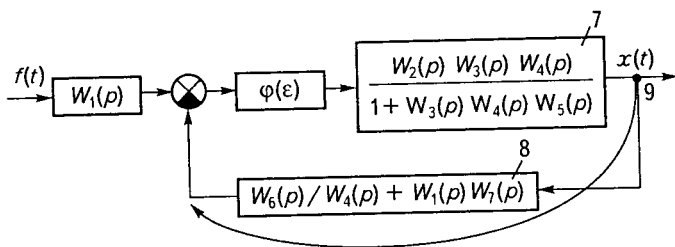
ні послідовно з'єднаних ланок 3 і 4 однією ланкою 7 і паралельно з'єднаних ланок 5 і 6 однією ланкою 8 (рис. 8.3, в). На останньому етапі пере-



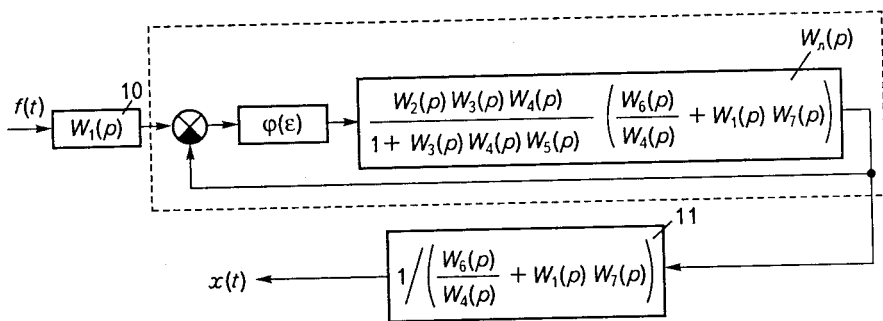
a



б



в



z

Рис. 8.3

творення переносимо вузол 9 через ланку 8. В результаті дістанемо структурну схему, зображену на рис. 8.3, з.

На вході та виході найпростішої структурної схеми (на рис. 8.3 з її обведено штриховою лінією) є лінійні ланки 10 і 11. Проте вони не впливають на стійкість і вільні динамічні режими замкнутого контуру, до складу якого належить нелінійна ланка.

До найпростішої можна звести структурні схеми, що містять кілька безінерційних нелінійних ланок, з'єднаних послідовно, паралельно або у вигляді ланки, охопленої зворотним зв'язком. Для цього треба замінити ці ланки однією (див. гл. 3, п. 3.12).

Рівняння динаміки найпростішої нелінійної САК можна дістати за структурною схемою, наведеною на рис. 8.2. Рівняння нелінійної ланки з урахуванням неоднозначних нелінійностей запишемо у вигляді

$$u(t) = \varphi[\varepsilon(t)]. \quad (8.8)$$

Переходячи до зображень Лапласа за нульових початкових умов, дістанемо зображення рівняння лінійної частини

$$X(s) = W_n(s)U(s) \quad (8.9)$$

і нелінійної ланки

$$U(s) = L\{\varphi[\varepsilon(t)]\} = \int_0^{\infty} \varphi[\varepsilon(t)]e^{-st} dt. \quad (8.10)$$

Умова замикання системи

$$\varepsilon(t) = f(t) - x(t) \quad (8.11)$$

або

$$E(s) = F(s) - X(s). \quad (8.12)$$

Замінивши $\varepsilon(t)$ в (8.10) його значенням за формулою (8.11) і підставивши знайдене значення $U(s)$ в (8.9), дістанемо зображення рівняння відносно вихідної величини

$$X(s) = W_n(s)L\{\varphi[f(t) - x(t)]\}. \quad (8.13)$$

Зображення рівняння відносно похибки можна дістати з (8.12), якщо $X(s)$ визначити за формулою (8.9) і замінити $U(s)$ відповідно до виразу (8.10). Тоді

$$E(s) = F(s) - W_n(s)L\{\varphi[\varepsilon(t)]\}. \quad (8.14)$$

Використовуючи теореми лінійності та згортання перетворення Лапласа, перейдемо від зображень (8.13) і (8.14) до оригіналів:

$$x(t) = \int_0^t w_n(t - \tau) \varphi[f(\tau) - x(\tau)] d\tau; \quad (8.15)$$

$$\varepsilon(t) = f(t) - \int_0^t w_n(t - \tau) \varphi[\varepsilon(\tau)] d\tau. \quad (8.16)$$

Інтегральні рівняння (8.15) і (8.16) є нелінійними. Загальних методів розв'язування таких рівнянь не існує. Розроблюються і широко застосовуються різні методи дослідження нелінійних САК, які мають не загальний характер, а орієнтовані на певний клас нелінійностей або на певні структури САК. Значно розширює можливості аналізу та синтезу нелінійних САК застосування персональних комп'ютерів і сучасного математичного забезпечення.

- **Приклад 8.1.** Дати математичне описання слідкувального електропривода постійного струму, функціональну схему якого зображено на рис. 8.4. Вхідним сигналом є кут повороту керуючої осі КВ. Цей сигнал задається ззовні і може змінюватися за довільним законом $\theta_{\text{вх}}(t)$. Вихідним сигналом є кут повороту $\theta_{\text{вих}}$ виконавчої осі ВВ об'єкта керування ОК. Кут розбіжності керуючої і виконавчої осей вимірюється парою сельсинів BC і BE , перетворюється фазочутливим випрямлячем UB у пропорційну йому напругу, підсилюється підсилювачем A і подається на вхід безінерційного тиристорного перетворювача UM , від якого живиться якірне коло двигуна M із незалежним збудженням (LM — обмотка збудження двигуна). Двигун з'єднується з об'єктом керування за допомогою редуктора q .

Розв'язання. Вважаємо, що всі елементи електропривода є лінійними, крім редуктора, який має люфт. Запишемо рівняння лінійних елементів електропривода:

вимірювальний пристрій

$$\theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вих}} = \delta;$$

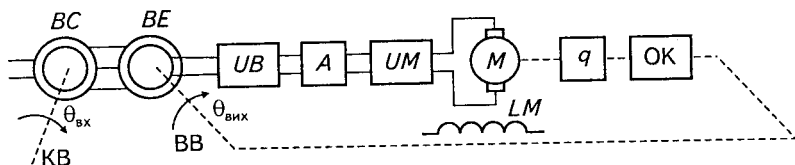


Рис. 8.4

фазочутливий підсилювач UB

$$\delta k_{\phi, n} = u_{\phi, n};$$

підсилювач напруги A

$$u_{\phi, n} k_n = u_n;$$

тиристорний перетворювач UM

$$u_n k_{т.п} = u_d.$$

У цих рівняннях $k_{\phi, n}$, k_n , $k_{т.п}$ — коефіцієнти передачі фазочутливого підсилювача, підсилювача напруги і тиристорного перетворювача; $u_{\phi, n}$, u_n , u_d — їхні вихідні напруги.

Двигун постійного струму з незалежним збудженням описується рівняннями

$$L_n di_n/dt + r_n i_n + c\omega = u_d; \quad (8.17)$$

$$M - M_c = Jd\omega/dt; \quad (8.18)$$

$$c\omega = e_d; \quad (8.19)$$

$$ci_n = M, \quad (8.20)$$

де L_n , r_n — індуктивність і активний опір якірною кола; i_n , e_d , ω — струм якоря, ЕРС і швидкість двигуна; c — коефіцієнт пропорційності між ЕРС і швидкістю, а також між моментом і струмом якоря за незмінного потоку збудження; M_c — момент статичного навантаження, приведений до вала двигуна; J — сумарний момент інерції електропривода, приведений до вала двигуна.

Рівняння (8.17) складено за другим законом Кірхгофа для кола якоря, а рівняння (8.18) становить закон рівноваги моментів на валу двигуна.

Рівняння (8.17), враховуючи (8.19), запишемо у такому вигляді:

$$\frac{L_n}{r_n} \frac{di_n}{dt} + i_n = \frac{1}{r_n} (u_d - e_d), \quad (8.21)$$

а рівняння (8.18), з урахуванням (8.20),

$$\frac{Jr_n}{c^2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{r_n}{c} (i_n - i_c), \quad (8.22)$$

де $i_c = M_c/c$.

Вводячи електромагнітну $T_n = L_n/r_n$ і електромеханічну $T_m = Jr_n/c^2$ сталі часу і використовуючи оператор $p = d/dt$, запишемо рівняння (8.21) і (8.22) у вигляді

$$(T_{я} p + 1) i_{я} = \frac{1}{r_{я}} (u_d - e_{я}); \quad (8.23)$$

$$T_{м} p \omega = \frac{r_{я}}{c} (i_{я} - i_c). \quad (8.24)$$

Редуктор із люфтом описується рівнянням

$$\theta_{вих} = \frac{1}{q} \int \omega dt \quad (8.25)$$

або

$$\theta_{вих} = \omega / qp \quad (8.26)$$

(q — передаточне число редуктора) і рівняннями (8.4) неоднозначної нелінійної характеристики (рис. 8.1, ε). У цих рівняннях $u = \theta_{вих}$ і $\varepsilon = \theta_{вих1}$ — кути повороту вихідної і вхідної осей редуктора; $2c = 2c_n$ — величина люфта. З урахуванням таких позначень рівняння (8.4) матимуть вигляд

$$\theta_{вих} = \begin{cases} \theta_{вих1} - c_n & \text{при } p\theta_{вих1} > 0; \\ \theta_{вих1} + c_n & \text{при } p\theta_{вих1} < 0; \\ \text{const} & \text{при } |\theta_{вих1} - \theta_{вих}| < c_n. \end{cases} \quad (8.27)$$

Отже, за наявності люфта швидкість вихідного вала об'єкта керування під час зміни напрямку обертання дорівнює нулю, тобто при коливаннях об'єкт періодично зупиняється на час, необхідний для вибирання люфту в редукторі.

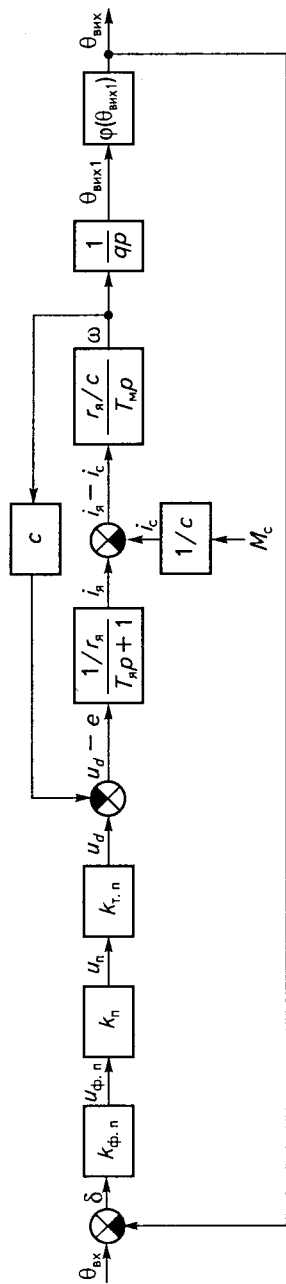
Рівнянням, що описують елементи слідувального електропривода, відповідає структурна схема, зображена на рис. 8.5, *а*. Цю схему можна звести до найпростішої. Порядок зведення поданий на рис. 8.5, *б—д*. При перетвореннях структурної схеми вважається, що $M_c = 0$. У цьому разі ланки, що описують двигун, замінюються однією ланкою з передаточною функцією

$$W_d(p) = \frac{k_d}{T_{я} T_{м} p^2 + T_{м} p + 1},$$

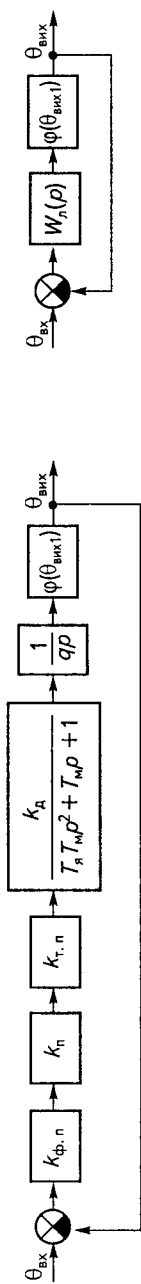
($k_d = 1/c$ — коефіцієнт передачі двигуна) і структурна схема матиме вигляд, показаний на рис. 8.5, *б*.

Визначивши передаточну функцію лінійної частини системи

$$W_n(p) = \frac{k_{ф.п} k_{п} k_{т.п} k_d}{qp(T_{я} T_{м} p^2 + T_{м} p + 1)},$$

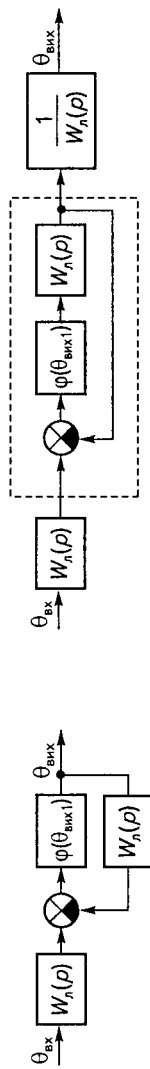


a



б

в



д

е

дістанемо структурну схему, наведену на рис. 8.5, в. Після перенесення суматора через ланку $W_n(p)$ матимемо структурну схему, зображену на рис. 8.5, г, а після перенесення вузла через ланку $W_n(p)$ — схему, зображену на рис. 8.5, д.

Виконане математичне описання можна вважати задовільним, якщо момент інерції об'єкта керування J_0 , приведений до вала двигуна, становить незначну частину загального моменту інерції електропривода. Якщо ця умова не виконується, то слід враховувати, що електромеханічні сталі часу $T_{м0}$ (при вибиранні зазору) і $T_{м1}$ (при вибраному зазори) неоднакові. Значення $T_{м0}$ менше за $T_{м1}$ на величину $J_0 r_n / c^2$.

8.4 *Стійкість та особливості динаміки нелінійних систем*

На відміну від лінійних систем стійкість нелінійних залежить не тільки від власних параметрів системи, а й від величини зовнішніх дій та місця їх прикладання. Тому не можна розглядати стійкість або нестійкість нелінійної системи взагалі, а розглядати лише стійкість або нестійкість різних режимів роботи системи при різних за величиною діях.

Специфічним динамічним режимом нелінійних систем є режим автоколивань. Цей режим неможливий у лінійних системах.

Автоколивання — це стійкі незгасаючі періодичні коливання, що виникають у нелінійних системах за відсутності зовнішніх періодичних дій. Амплітуда і частота автоколивань визначаються лише власними параметрами системи.

Основні особливості динаміки нелінійних систем можна розглянути на прикладі системи другого порядку, використавши найпростіший варіант простору станів, а саме — двовимірний простір або площину станів (фазову площину). За координати фазової площини приймають відхилення x вихідної величини від її значення, що відповідає усталеному режиму системи, і похідну $y = dx/dt$ цього відхилення. Усталеному режиму системи другого порядку відповідає початок координат. Якщо будь-яка дія виводить систему з усталеного режиму, то зображуюча точка опиняється у довільному місці фазової площини. Під час перехідного процесу змінюється вихідна величина x та її похідна y , тому зображуюча точка рухається у фазовій площині

по *фазовій траєкторії*. Початкове положення зображуючої точки відповідає початковим умовам вільного руху системи. Сукупність фазових траєкторій, що відповідають різним початковим станам системи, називається *фазовим портретом*. Фазовий портрет дає повне уявлення про динаміку системи.

Динаміка системи другого порядку описується рівнянням

$$d^2x/dt^2 = f(x, dx/dt), \quad (8.28)$$

де f — нелінійна функція.

Враховуючи, що $dx/dt = y$, рівняння (8.28) записуємо у вигляді двох рівнянь:

$$dx/dt = y, \quad (8.29)$$

$$dy/dt = f(x, y). \quad (8.30)$$

Виключимо з цих рівнянь час, розділивши рівняння (8.30) на (8.29). Тоді дістанемо рівняння першого порядку

$$dy/dx = f(x, y)/y, \quad (8.31)$$

розв'язок якого $y(x)$ дає рівняння фазової траєкторії.

Зв'язок між перехідним процесом $x(t)$ і фазовою траєкторією $y(x)$ пояснюється графіками для затухаючого коливального процесу (рис. 8.6). Однаковими літерами a, b, \dots, f позначено точки на графіку перехідного процесу (рис. 8.6, *a*) і фазовій траєкторії (рис. 8.6, *б*),

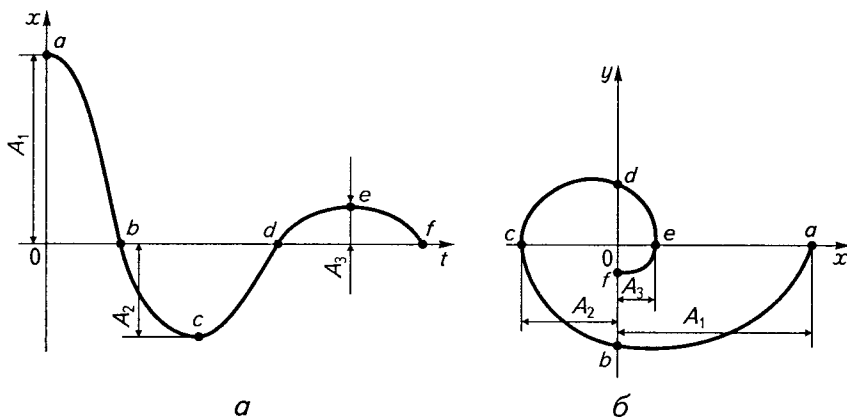


Рис. 8.6

що відповідають однаковим станам системи. Напрямок руху зображуючої точки при зростанні часу показано стрілкою.

Фазові траєкторії мають такі властивості. У верхній півплощині фазової площини $y = dx/dt > 0$, тому зображуюча точка рухається у бік зростання x (зліва направо), у нижній півплощині, де $y < 0$ — у бік зменшення x (справа наліво). У точці перетину фазової траєкторії з віссю x $y = 0$, тому згідно з (8.31) $dy/dx = \infty$. Звідси випливає, що дотична до фазової траєкторії у точці її перетину з віссю x перпендикулярна до цієї осі.

Рівняння (8.31) однозначно визначає дотичну до фазової траєкторії в усіх точках, крім тих, для яких одночасно виконуються умови

$$f(x, y) = dy/dt = 0 \quad \text{і} \quad y = dx/dt = 0.$$

У цих точках $dy/dx = 0/0$, тобто не існує певного напрямку дотичної до фазової траєкторії, і, отже, з них може виходити багато фазових траєкторій. Такі точки називають *особливими*. В них похідні фазових координат дорівнюють нулю, тому особливі точки є точками рівноваги системи.

Метод фазової площини розроблено для дослідження нелінійних систем, проте багато особливостей поведінки систем і відповідні фазові портрети доцільно спочатку розглянути на прикладі лінійної системи другого порядку.

Вільний рух лінійної системи другого порядку описується рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0.$$

Розв'язки цього рівняння для різних видів коренів характеристичного рівняння

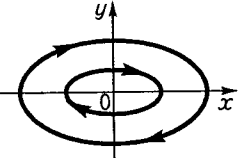
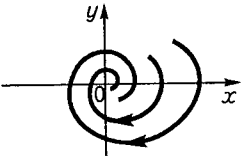
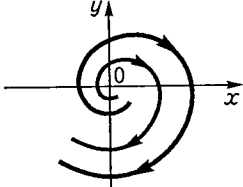
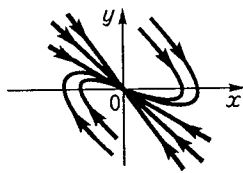
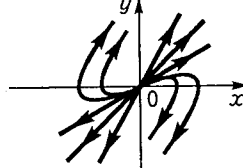
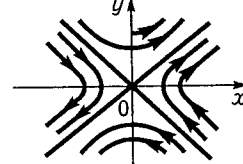
$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0,$$

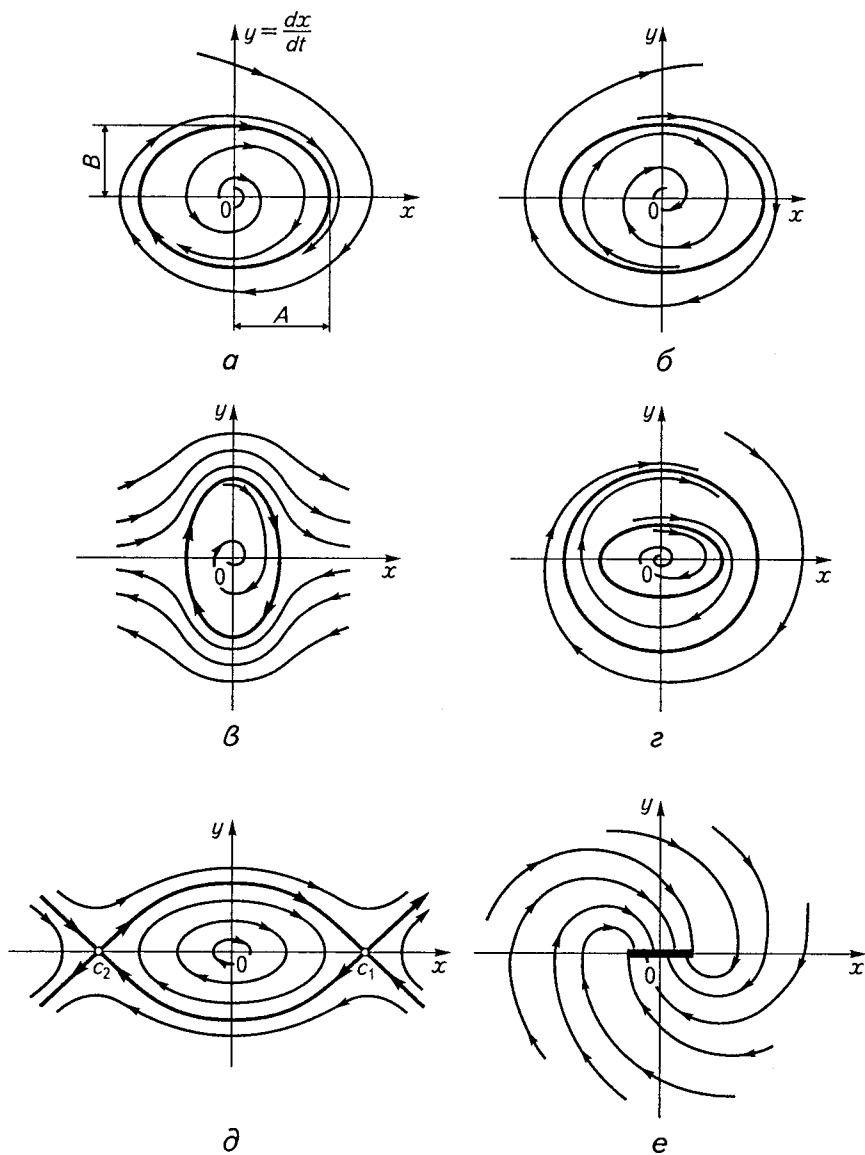
функції $y = dx/dt$ і фазові траєкторії $y(x)$, а також назви особливих точок подано в табл. 8.1.

Фазові портрети, подібні наведеним у табл. 8.1, властиві й нелінійним системам із несуттєвими нелінійностями. Суттєві нелінійності зумовлюють те, що фазові портрети можуть стати якісно іншими. Приклади фазових портретів, властивих тільки нелінійним системам, зображено на рис. 8.7.

Корені характеристичного рівняння	Розв'язок $x(t)$
Уявні $p_{1,2} = \pm j\beta$	$x = A \sin(\beta t + \varphi), \beta = \sqrt{a_2}$
Комплексні з від'ємною дійсною частиною $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$	$x = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\alpha = a_1/2; \beta = \sqrt{a_2 - (a_1/2)^2}$
Комплексні з додатною дійсною частиною $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$x = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$
Дійсні від'ємні $p_1 = -\alpha_1; p_2 = -\alpha_2$	$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$
Дійсні додатні $p_1 = \alpha_1; p_2 = \alpha_2$	$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$
Дійсні різних знаків $p_1 = \alpha_1; p_2 = -\alpha_2$	$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$

Таблиця 8.1

Похідна $y = dx/dt$	Фазовий портрет	Особлива точка
$y = \beta A \cos(\beta t + \varphi)$		Центр
$y = \gamma A e^{-\omega t} \cos(\beta t + \varphi + \delta)$ $\gamma = \sqrt{a_2}; \delta = \arctg \frac{\alpha}{\beta}$		Стійкий фокус
$y = \gamma A e^{\omega t} \cos(\beta t + \varphi + \delta),$		Нестійкий фокус
$y = -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t} -$ $-\alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t}$		Стійкий вузол
$y = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} +$ $+\alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$		Нестійкий вузол
$y = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} -$ $-\alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t}$		Сідло

**Рис. 8.7**

Фазовий портрет, зображений на рис. 8.7, а, характеризує динаміку системи, нестійкої у малому (особлива точка — *нестійкий фокус*). Усталеним режимом цієї системи є автоколивання. Прикладом такої системи може бути система, лінійний аналог якої за малих відхилень нестійкий. У системі спостерігається розбіжний коливальний процес, проте внаслідок насичення окремих елементів системи амплітуда коливань не зростає нескінченно, а встановлюється на деякому незмінному рівні, тобто в системі виникає режим автоколивань. Такому режиму відповідає замкнута траєкторія на фазовій площині. Ця траєкторія називається *стійким граничним циклом*.

Стійкий граничний цикл становить найважливіший для ТАК тип *особливих ліній* на фазовій площині. Фазові траєкторії, що починаються всередині й зовні стійкого граничного циклу, з часом асимптотично наближаються до нього.

Якщо фазові траєкторії, близькі до граничного циклу, з часом віддаляються від нього, то граничний цикл буде нестійким. Приклад фазового портрета з *нестійким граничним циклом* наведено на рис. 8.7, б. Він відповідає системі, стійкій у малому і нестійкій у великому. Нестійкий граничний цикл визначає межу початкових умов, до якої система зберігає стійкість. Він також становить особливу лінію на фазовій площині.

Нестійкий граничний цикл може розділяти якісно різні перехідні процеси, наприклад затухаючий коливальний і розбіжний аперіодичний. Відповідний фазовий портрет зображено на рис. 8.7, в.

Система може мати кілька граничних циклів, що відповідають одній і тій самій особливій точці. У цьому разі стійкі і нестійкі цикли чергуються (рис. 8.7, г). Системи з таким фазовим портретом є системами з жорстким режимом збудження коливань. Для виникнення коливань, що відповідають стійкому циклу, необхідно таке початкове відхилення, за якого зображуюча точка буде поза межами нестійкого циклу. За менших відхилень коливання згасають.

Фазовий портрет на рис. 8.7, д відповідає випадку, коли за малих відхилень нелінійна система поводить себе як лінійна, що перебуває на межі стійкості (характеристичне рівняння має уявні корені). За великих відхилень стійкість системи порушується, і перехідний процес, а також фазові траєкторії, що йому відповідають, стають зовсім іншими. Крім особливої точки O типу *центра* з'являються два *сідла* C_1 і C_2 . Лінія, що проходить через особливі точки типу *сідла* і розділяє фазову площину на зони, які відповідають якісно різним перехідним процесам, називається *сепаратрисою*.

У системах із зоною нечутливості або з сухим тертям з'являється зона застою, а на фазовій площині замість особливої точки — *особлива лінія*. Фазовий портрет, що відповідає неасимптотично стійкій системі, зображено на рис. 8.7, е.

Отже, динамічні процеси у нелінійних системах суттєво відрізняються від процесів у лінійних: значно ширше трактується поняття про стійкість, у тій самій системі залежно від початкових відхилень можуть спостерігатися якісно різні перехідні процеси тощо. В цілому за своїми властивостями нелінійні системи значно багатші за лінійні.

8.5

Дослідження нелінійних систем методом фазової площини

Метод фазової площини належить до точних методів дослідження нелінійних систем. Найповніше цей метод розроблено для систем другого порядку. Сукупність фазових траєкторій (фазовий портрет), що відповідають різним початковим положенням зображуючої точки, як указувалося раніше, дає повне уявлення про динаміку нелінійної системи. Тому дослідження нелінійних систем методом фазової площини по суті зводиться до побудови фазового портрета й аналізу за його допомогою динамічних режимів системи.

Як зазначалося раніше, рівняння фазової траєкторії $y = f(x)$ є розв'язком рівняння (8.31) першого порядку. Спосіб розв'язування цього рівняння залежить від типу характеристики нелінійної ланки. Загальним методом розв'язування є чисельне інтегрування за допомогою ЕОМ. Для кусково-лінійних нелінійних характеристик у деяких випадках розв'язок рівняння (8.31) може бути знайдено аналітично для окремих лінійних ділянок нелінійної характеристики. Кожна лінійна ділянка нелінійної характеристики описується своїм рівнянням вигляду (8.31) і, отже, для кожної ділянки отримуємо різні рівняння фазових траєкторій. При цьому на фазовому портреті з'являться так звані *лінії перемикання*, що розділяють фазову площину на зони з різними фазовими траєкторіями.

Якщо нелінійну систему зведено до найпростішої (див. рис 8.2, *a*) і розглядається вільний рух системи ($f(t) = 0$), то $\varepsilon(t) = -x(t)$, $d\varepsilon/dt = -dx/dt$ і рівняння ліній перемикання визначаються безпосередньо за математичним описанням нелінійної ланки. Так, для нелінійних характеристик на рис 8.1, *a*, *б*, *д* рівняння ліній перемикання мають вигляд $x_1 = c$; $x_2 = -c$; для характеристики на рис. 8.1, *в* — $x = 0$; для характеристики на рис. 8.1, *г* — $y = 0$; для характеристики на рис. 8.1, *e* є чотири лінії перемикання: $x_1 = -c_1$, $x_2 = c_3$ при $y > 0$ і $x_3 = c_1$, $x_4 = -c_3$ при $y < 0$; для характеристики на рис 8.1, *є* — дві лінії перемикання: $x_1 = c$ при $y > 0$ і $x_2 = -c$ при $y < 0$.

Якщо на фазовій площині є лінії перемикання, то при розрахунку фазових траєкторій початкові значення x і y для кожної ділянки визначаються через їх кінцеві значення на попередній ділянці.

Фазові траєкторії можна побудувати й не розв'язуючи рівняння (8.31), якщо скористатися методом ізоклін.

Ізокліни (лінії однакового нахилу) — це лінії, вздовж яких похідна dy/dx має сталі значення. Через те, що $dy/dx = C = \text{const}$, ізокліна становить геометричне місце точок з однаковим кутом нахилу дотичних до фазових траєкторій, що проходять через ці точки. Кут α нахилу дотичних до осі абсцис визначається зі співвідношення $\text{tg}\alpha = C$.

Рівняння ізокліни знаходять з рівняння (8.31), якщо прийняти $dy/dx = C$, тобто

$$f(x, y)/y = C. \quad (8.32)$$

Це рівняння є алгебричним. Надаючи C різних значень від $-\infty$ до $+\infty$, побудуємо сім'ю ізоклін, використавши яку, легко дістати фазові траєкторії за будь-яких початкових умов (будь-якому початковому положенні зображуючої точки).

Сім'ю ізоклін наведено на рис 8.8. Стрілками на кожній ізокліні показано кути нахилу дотичних до фазових траєкторій. Очевидно, що вісь абсцис ($y = 0$) відповідає ізокліні $C = \pm\infty$ і куту $\alpha = \pm\pi/2$. Для побудови фазової траєкторії слід задати початкові умови (вихідні координати зображуючої точки). Потім через точку M_0 провести дві лінії. Нахил першої має збігатися з нахилом стрілки на ізокліні C_1 , другої — з нахилом, що відповідає суміжній ізокліні C_2 . Вважаємо, що точка M_1 лежить майже посередині відрізка, що відтинається на ізокліні C_2 лініями, проведеними з точки M_0 . Аналогічно відшуковуються точки M_2, M_3, \dots і будується фазова траєкторія.

За фазовим портретом нелінійної системи можна зробити не тільки якісну оцінку її динаміки (стійка система чи ні, коливальний

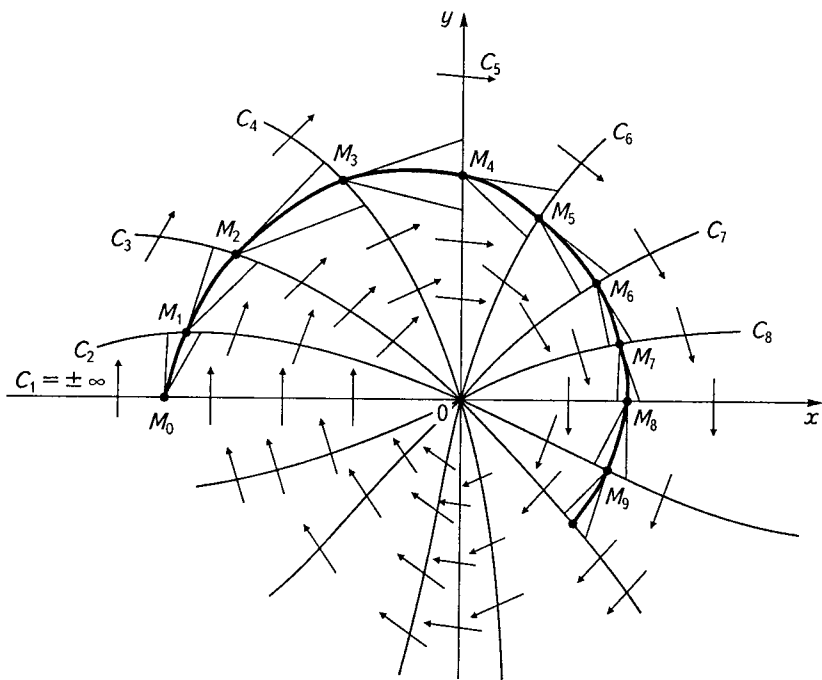


Рис. 8.8

або аперіодичний перехідний процес, чи є автоколивання тощо), а й визначити кількісні показники якості перехідних процесів. На фазовій площині час у явному вигляді відсутній, але наближено швидкодію системи можна оцінити, виходячи з величини $y = dx/dt$, яка становить швидкість зміни вихідної змінної. Час переміщення зображуючої точки з одного положення M_1 в інше, досить близьке, M_2 можна наближено знайти за формулою

$$\Delta t = \Delta x / y_{\text{сеп}},$$

де Δx і $y_{\text{сеп}}$ визначаються для окремих ділянок фазової траєкторії так, як показано на рис. 8.9.

За фазовим портретом на рис. 8.9 можна знайти також величину перегулювання σ (%):

$$\sigma = \frac{OB}{OA} 100,$$

де OA — початкове (максимальне) відхилення вихідної величини від усталеного значення; OB — відхилення через час, що дорівнює половині періоду коливань.

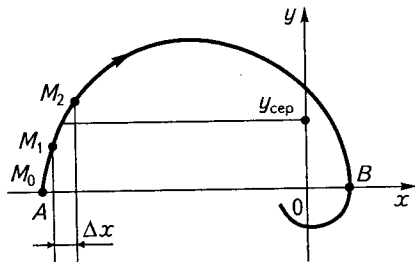


Рис. 8.9

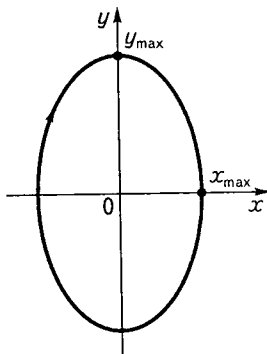


Рис. 8.10

За граничним циклом на фазовому портреті можна визначити амплітуду та частоту автоколивань. Якщо реальний граничний цикл наближено замінити еквівалентним еліпсом з напівосями x_{\max} і y_{\max} (рис. 8.10), то параметри автоколивань можна визначити за такими формулами:

амплітуда

$$A = x_{\max};$$

частота

$$\omega_a = y_{\max} / x_{\max};$$

період

$$T = 2\pi / \omega_a.$$

- **Приклад 8.2.** Методом фазової площини виконати дослідження слідувального електропривода, функціональну схему якого показано на рис. 8.4. Вважати, що вимірювальний, перетворювальний і підсилювальний елементи описуються однією нелінійною функцією $u_n = \varphi(\epsilon)$, де $\epsilon = \theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вих}}$; u_n — напруга на якорі двигуна; електромагнітна стала двигуна T_n дорівнює нулю і люфта в редукторі немає.

Розв'язання. Якщо прийняти, що $T_n = 0$, то передаточна функція двигуна

$$W_n(p) = \frac{\Delta\omega_n(p)}{\Delta u_n(p)} = \frac{k_d}{T_m p + 1},$$

де k_d — коефіцієнт передачі двигуна; T_m — електромеханічна стала часу електропривода.

Редуктор, вхідною величиною якого є швидкість ω_d , а вихідною — кут повороту $\theta_{\text{вих}}$, описується передаточною функцією

$$W_p(p) = \frac{\Delta\theta_{\text{вих}}(p)}{\Delta\omega_d(p)} = \frac{q}{p},$$

де q — передаточне число редуктора.

Структурну схему електропривода показано на рис. 8.11. Її зображено у вигляді, зручному для математичного описання — системою рівнянь у нормальній формі Коші:

$$dx_1/dt = -\frac{1}{T_m} x_1 + \frac{\varphi(\varepsilon)k_d}{T_m}; \quad (8.33)$$

$$dx_2/dt = qx_1. \quad (8.34)$$

Ці рівняння складені за умови, що $\Delta\theta_{\text{вих}} = 0$, оскільки досліджується вільний рух системи.

Для побудови фазової траєкторії $y = f(x)$ необхідно розв'язати систему рівнянь (8.33), (8.34) і визначити $x = x_2$ і dx_2/dt . Розрахунки для двох типів нелінійних характеристик $\varphi(\varepsilon)$ виконуємо на ЕОМ.

Перший випадок. Характеристика $\varphi(\varepsilon)$ має вигляд характеристики із зоною насичення (див. рис. 8.1, б). Стандартну програму розв'язування системи рівнянь слід доповнити умовами:

1) якщо $|x_2| < c$, то $\varphi(\varepsilon) = -k_n x_2$, де k_n — коефіцієнт передачі перетворювально-підсилювального пристрою на лінійній частині характеристики;

2) якщо $x_2 > c$, то рівняння (8.33) має вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_m} x_1 - \frac{k_n k_d c}{T_m}; \quad (8.35)$$

3) якщо $x_2 < -c$, то рівняння (8.33) має вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_m} x_1 + \frac{k_n k_d c}{T_m}. \quad (8.36)$$

Розрахунок фазової траєкторії виконано для таких параметрів електропривода: $T_m = 0,1$ с; $k_d = 1,5$ 1/В · с; $k_n = 400$; $c = 0,5$ рад; $q = 0,1$. Початкові умови: $t = 0$; $x_2 = -1$ рад; $x_1 = 0$.

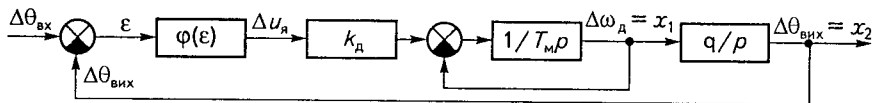


Рис. 8.11

Результат розрахунку подано у вигляді фазової траєкторії на рис. 8.12. Ця траєкторія має вигляд спіралі, що стягується до початку координат. Отже, система стійка і перехідний процес має вигляд затухоаючих коливань, перерегулювання σ дорівнює 43 %.

Другий випадок. Характеристика $\varphi(\epsilon)$ має вигляд характеристики реального релейного елемента (рис. 8.1, ϵ). У цьому разі стандартну програму розв'язування системи рівнянь слід доповнити умовами:

1) якщо $x_1 < 0$ і $x_2 \geq -c$ або $x_1 > 0$ і $x_2 \geq c$, то

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_M} x_1 - \frac{bk_A}{T_M};$$

2) якщо $x_1 < 0$ і $x_2 < -c$ або $x_1 > 0$ і $x_2 < c$, то

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_M} + \frac{bk_A}{T_M}.$$

Ці умови записано з урахуванням рівнянь (8.7), якщо $d\epsilon/dt = -x_1$ і $\epsilon = -x_2$. Розрахунок виконано для тих самих умов, що й у попередньому випадку, крім того, прийнято $b = 100$ В, $c = 0,25$ рад.

Розраховану фазову траєкторію наведено на рис. 8.13. Фазовий портрет має стійкий граничний цикл, отже, усталеним режимом системи є режим автоколивань з амплітудою $A = 0,39$ рад, частотою $\omega_a \approx 21$ с⁻¹ і періодом $T \approx 0,3$ с.

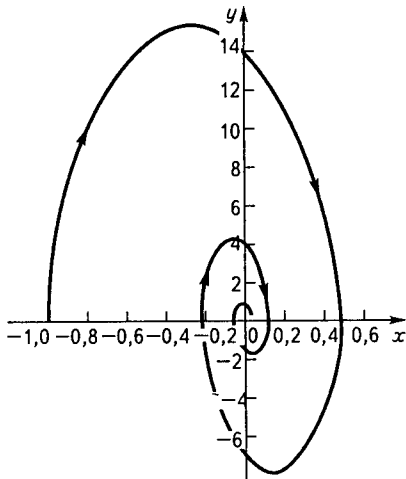


Рис. 8.12

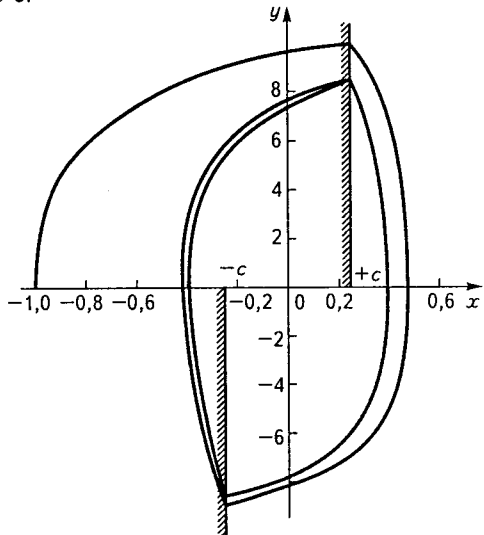


Рис. 8.13

8.6

Метод Ляпунова

Теореми першого методу Ляпунова сформульовані в гл. 4, п. 4.1 Вони надають можливість використувати методи лінійної теорії для дослідження реальних нелінійних систем. Природно, що цей висновок справедливий тільки для систем, що містять несуттєві нелінійності. Для систем із суттєвими нелінійностями перший метод Ляпунова застосовувати не можна.

Перш ніж сформулювати теореми другого (прямого) методу Ляпунова введемо такі поняття.

Функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *знакосталою* в деякій зоні, якщо вона зберігає один і той самий знак в усіх точках цієї зони навколо початку координат, за винятком деяких точок, в яких вона дорівнює нулю. Знакостала функція, що дорівнює нулю тільки в початку координат, називається *знаковизначеною* (безумовно-додатною або безумовно-від'ємною). Функція називається *знакозмінною*, якщо вона в деякій зоні навколо початку координат може мати різні знаки.

Рівняння вільного руху системи подаються в нормальній формі Коші

$$dx_k/dt = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.37)$$

де x_k — змінні стану (координати) системи.

Будь-яку функцію $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що тотожно перетворюється на нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, називаємо *функцією Ляпунова*. Повна похідна за часом від цієї функції має вигляд

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}. \quad (8.38)$$

Після цих попередніх зауважень сформулюємо теорему Ляпунова про стійкість нелінійних систем: *система, що описується рівняннями (8.37), стійка, якщо можна знайти таку знаковизначену функцію Ляпунова V , повна похідна якої dV/dt відповідно до рівнянь системи знакостала і має знак, протилежний знаку функції V , або тотожно дорівнює нулю. Якщо похідна dV/dt знаковизначена, то система асимптотично стійка.*

Теоремі Ляпунова можна дати досить наочну геометричну інтерпретацію. Візьмемо, наприклад, знаковизначену додатну функцію

$V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і надаватимемо їй сталі значення $V = 0, C_1, C_2, \dots$, що збільшуються. Кожному рівнянню $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$ відповідає замкнута поверхня у n -вимірному просторі станів даної системи. Поверхня, що відповідає значенню C_i , цілком перебуває всередині поверхні C_{i+1} , якщо $C_{i+1} > C_i$. Ці поверхні зображено на рис. 8.14. Для наочності простір прийнято тривимірним. Якщо зображуюча точка в

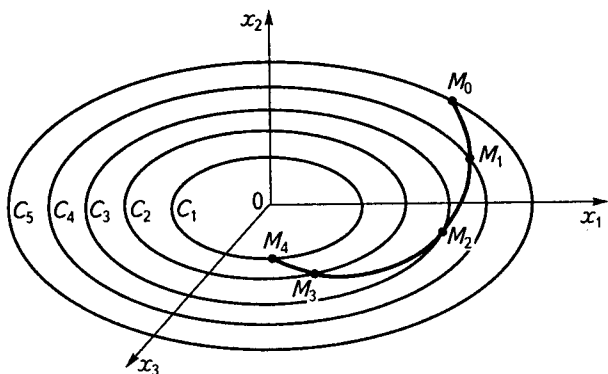


Рис. 8.14

просторі станів рухається так, що переходить з поверхні, яка відповідає більшому C_i , на поверхню з меншим C_i , тобто наближується до початку координат, то система стійка. Але якщо зображуюча точка рухається таким чином, то визначено-додатна функція V зменшується з часом, тобто її повна похідна dV/dt буде від'ємною. Отже, для стійкої системи функція V і її повна похідна мають протилежні знаки.

Дослідження стійкості методом Ляпунова проводять у такому порядку.

1. Записують рівняння вільного руху системи в нормальній формі Коші.
2. Вибирають функцію Ляпунова.
3. Визначають похідну dV/dt за формулою (8.38), в якій похідні dx_k/dt замінюють функціями $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто дістають похідну dV/dt як функцію координат системи і її параметрів.
4. Визначають межі зміни координат системи і її параметрів, у яких похідна dV/dt залишається знаковизначеною, тобто знаходять умови стійкості.

Складність застосування прямого методу Ляпунова полягає в тому, що немає загальних рекомендацій щодо визначення функції Ляпунова. Для заданих у формі (8.37) нелінійних рівнянь системи можна вибрати кілька різних віріантів функції V , оскільки необхідною умовою є тільки знаковизначеність функції V і її похідної. За різних варіантів функції V отримують різні умови стійкості тієї самої системи. Теорема Ляпунова дає достатні умови стійкості, тобто при їх виконанні система обов'язково буде стійкою, але ці умови можуть не охоплювати всю зону стійкості системи. Невиконання умов теореми Ляпунова для вибраної функції V ще не доводить нестійкість системи, бо, власне кажучи, невідомо, чи є інші функції V , для яких умови теореми виконуються.

Для попередньо лінеаризованої нелінійної системи О.М. Ляпунов запропонував знаходити функцію V у вигляді квадратичної форми з невизначеними коефіцієнтами:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l. \quad (8.39)$$

Коефіцієнти a_{kl} визначають з умови

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = -A \sum_{r=1}^n x_r^2, \quad (8.40)$$

де A — будь-яка стала величина. Для цього з виразу (8.39) знаходять частинні похідні dV/dx , а похідні dx_j/dt беруть з лінеаризованих рівнянь руху вигляду (8.37). Ці похідні підставляють у формулу (8.40), прирівнюють коефіцієнти при однакових членах $x_k x_l$ у лівій і правій частинах і дістають систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_{kl} .

Для нелінійних систем, що містять одну безінерційну нелінійність $\varphi(\epsilon)$, А. І. Лур'є запропонував вибирати функцію V у вигляді

$$V = D + A \int_0^{\epsilon} \varphi(\epsilon) d\epsilon, \quad (8.41)$$

де D — квадратична форма координат системи; A — сталие число.

- **Приклад 8.3.** Визначити умови стійкості системи, структурну схему якої наведено на рис. 8.11 (див. приклад 8.2), за умови, що нелінійність $\varphi(\epsilon)$ є непарною однозначною.

Розв'язання. Враховуючи, що $\varepsilon = -x_2$, запишемо рівняння (8.33), (8.34) у вигляді

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_m} x_1 - \frac{\varphi(x_2)k_d}{T_m}; \quad \frac{dx_2}{dt} = qx_1.$$

Функцію Ляпунова візьмемо знаковизначеною додатною у формі Лур'є:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + A \int_0^{x_2} \varphi(x_2) dx_2.$$

Знайдемо повну похідну цієї функції

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = x_1 \left(-\frac{1}{T_m} x_1 - \frac{\varphi(x_2)k_d}{T_m} \right) + A\varphi(x_2)qx_1 = \\ &= -\frac{1}{T_m} x_1^2 - \frac{k_d}{T_m} \varphi(x_2)x_1 + Aq\varphi(x_2)x_1. \end{aligned}$$

Прийнявши $A = k_d/T_m q$, дістанемо

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{T_m} x_1^2 < 0.$$

Знак похідної dV/dt протилежний знаку функції V , отже, система асимптотично стійка за таких обмежень на вигляд нелінійної характеристики $\varphi(x_2)$, які було прийнято при дослідженні стійкості:

- 1) характеристика має бути непарною, тобто при $\varepsilon = -x_2$ $\varphi(\varepsilon) = -\varphi(x_2)$;
- 2) характеристика повинна розміщуватися в першому та третьому квадрантах, щоб інтеграл $\int_0^{x_2} \varphi(x_2) dx_2$ був додатним.

Крім теореми про стійкість, О. М. Ляпунов сформулював теорему, що дає достатні умови нестійкості нелінійної системи. Якщо при заданих у вигляді (8.37) рівняннях системи похідна від якої-небудь функції Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ буде знаковизначеною, причому сама функція V в якій-небудь зоні, що примикає до початку координат, матиме знак, однаковий зі знаком похідної, то система нестійка.

8.7

Абсолютна стійкість.**Критерій В.-М. Пóпова**

Абсолютна стійкість означає асимптотичну стійкість нелінійної системи у цілому (тобто відносно всього простору станів системи) за умови, що задано не конкретну нелінійність, а деякий клас нелінійностей M . Поняття абсолютної стійкості можна застосувати до класу стаціонарних нелінійностей, яким є множина $M[k_1, k_2]$ усіх кусково-безперервних функцій, графіки яких знаходяться в секторі $S[k_1, k_2]$ між лініями $u = k_1 \varepsilon$ і $u = k_2 \varepsilon$ (рис. 8.15). Ці нелінійності мають задовольняти такі умови:

$\varphi(\varepsilon)$ — безперервна функція;

$\varphi(0) = 0$; $\varepsilon\varphi(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon \neq 0$;

$k_1 \leq \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k_2$ при $\varepsilon \neq 0$;

$$\int_0^{\pm\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \pm\infty.$$

Абсолютна стійкість означає стійкість у цілому для всіх нелінійностей заданого класу.

Одним із критеріїв абсолютної стійкості є критерій В.-М. Пóпова.

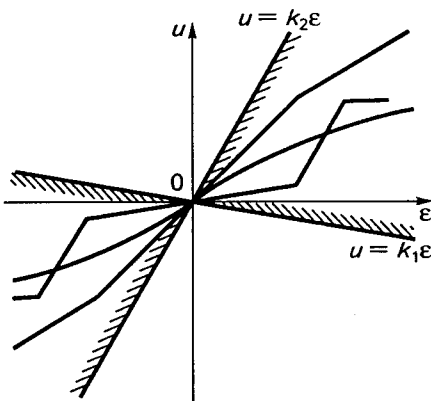


Рис. 8.15

У практичних задачах цей критерій найчастіше застосовується до однозначних нелінійностей, характеристики яких містяться в секторі $S[0, k]$. У цьому випадку для абсолютної стійкості нелінійної системи, зведеної до найпростішої, тобто для такої, що складається з нелінійної ланки $\varphi(\varepsilon)$ і лінійної частини з передаточною функцією $W_n(p)$, достатньо, щоб для деякого дійсного числа q ($-\infty < q < \infty$) і всіх дійсних ω , у тому числі $\omega = \pm\infty$, виконувалась така нерівність

$$\operatorname{Re}\{(1 + jq\omega)W_n(j\omega)\} + \frac{1}{k} > 0 \quad (8.42)$$

і лінійна система, в якій нелінійну ланку замінено лінійною $u = c\varepsilon$, де $c \leq k$, була стійкою.

Частотну характеристику лінійної частини системи подамо у вигляді

$$W_n(j\omega) = U_n(\omega) + jV_n(\omega),$$

підставимо значення $W_n(j\omega)$ у перший доданок нерівності (8.42) і виділимо дійсну частину

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{(1 + jq\omega)[U_n(\omega) + jV_n(\omega)]\} &= \\ = \operatorname{Re}[U_n(\omega) + jq\omega U_n(\omega) + jV_n(\omega) - q\omega V_n(\omega)] &= \\ = U_n(\omega) - q\omega V_n(\omega). \end{aligned}$$

З урахуванням цього виразу нерівність (8.42) запишемо у вигляді

$$U_n(\omega) - q\omega V_n(\omega) + 1/k > 0$$

або

$$X - qY + 1/k > 0, \quad (8.43)$$

де

$$X = U_n(\omega) = \operatorname{Re}[W_n(j\omega)];$$

$$Y = \omega V_n(\omega) = \omega \operatorname{Im}[W_n(j\omega)].$$

Рівняння (8.43) є рівнянням прямої, що проходить у площині X, Y через точку з абсцисою $-1/k$ на дійсній осі X і має кутовий коефіцієнт $1/q$. Ця лінія називається *прямою Попова*.

Введемо поняття *видозміненої (модифікованої) частотної характеристики* лінійної частини системи або *кривої Попова*. Вираз цієї характеристики

$$W_n^*(j\omega) = U_n(\omega) + j\omega V_n(\omega)$$

відрізняється від звичайної амплітудно-фазової характеристики $W_n(j\omega)$ тільки тим, що уявна частина множиться на ω . Якщо прийняти, що n — порядок полінома знаменника передаточної функції $W_n(p)$, а m — порядок полінома чисельника, то при $n - m > 1$ видозмінена характеристика $W_n^*(j\omega)$ має такий самий вигляд, що й характеристика $W_n(j\omega)$, лише масштаб уявної частини змінюється у

ω разів, а при $n - m = 1$ характеристика $W_n^*(j\omega)$ при $\omega = \infty$ закінчується на від'ємній частині уявної осі.

Після введення поняття про пряму і криву Пóпова сформулюємо умови виконання нерівності (8.42) або умови абсолютної стійкості: *нелінійна система абсолютно стійка, якщо в площині $W_n^*(j\omega) = X + jY$ можна провести пряму Пóпова так, щоб крива Пóпова була праворуч від неї.*

Для однозначних нелінійних характеристик $-\infty < q < +\infty$, тобто пряму Пóпова можна проводити з будь-яким кутовим коефіцієнтом — як додатним, так і від'ємним. Для неоднозначних характеристик із від'ємним гістерезисом (рис. 8.16, а) $0 \leq q \leq \infty$ і кутовий коефіцієнт прямої Пóпова має бути додатним, а для неоднозначних характеристик із додатним гістерезисом (рис. 8.16, б) $-\infty < q < 0$ і кутовий коефіцієнт прямої Пóпова має бути від'ємним.

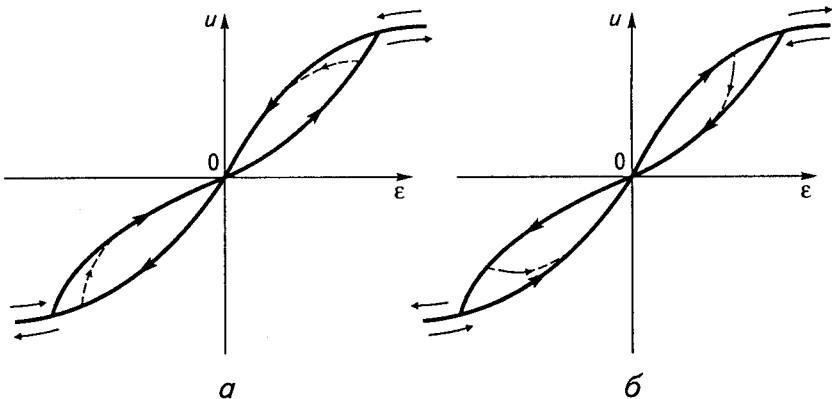


Рис. 8.16

Для визначення абсолютної стійкості нелінійної системи необхідно побудувати видозмінену частотну характеристику $W_n^*(j\omega)$ лінійної частини системи, визначити k з умови $0 \leq \varphi(\epsilon)/\epsilon \leq k$ і через точку з координатами $(-1/k, j0)$ провести пряму з кутовим коефіцієнтом, що визначається типом нелінійності, так, щоб характеристика $W_n^*(j\omega)$ знаходилася праворуч від неї (рис. 8.17). Якщо таку пряму провести не можна, то абсолютна стійкість у досліджуваній системі неможлива (рис. 8.18).

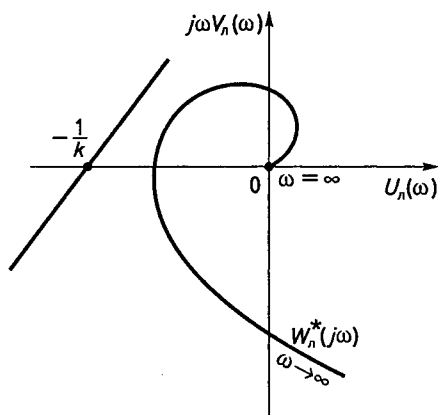


Рис. 8.17

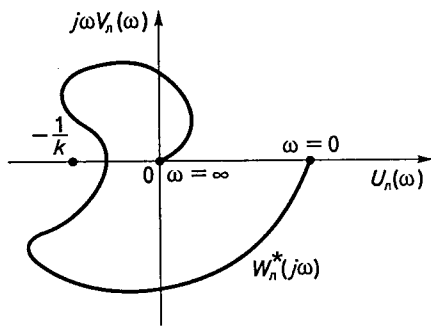


Рис. 8.18

Таке формулювання критерію абсолютної стійкості є справедливим для систем зі стійкою лінійною частиною. Проте цей критерій можна використовувати також і тоді, коли лінійна частина системи нестійка. У цьому разі лінеаризована система, яку дістають при заміні нелінійного елемента $\varphi(\varepsilon)$ лінійним $k\varepsilon$, за досить малих k буде нестійкою. Якщо існують такі значення k_ϕ , для яких при $\varphi(\varepsilon)/\varepsilon \geq k_\phi$ лінеаризована система стійка, то для використання критерію Пóпова належність характеристики нелінійного елемента сектора $S [0, k]$ треба замінити належністю сектора $S [k_\phi, k]$, тобто прийняти

$$k_\phi < \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} < k.$$

Крім того, слід виконати еквівалентні перетворення вихідної лінійної системи (рис. 8.19, а) так, як зображено на рис. 8.19, б. Ланка з коефіцієнтом передачі -1 показує, що зворотний зв'язок у системі є від'ємним. У схему введено дві фіктивні ланки з коефіцієнтами передачі k_ϕ . Схема залишається еквівалентною вихідній, бо вихідні сигнали фіктивних ланок взаємно компенсуються на вході лінійної частини системи. Перевіримо, чи існує таке значення $k_\phi < k$, за якого лінійна частина системи, охоплена жорстким від'ємним зворотним зв'язком, буде стійкою. Якщо таке значення k_ϕ не існує, то відповідь на запитання про абсолютну стійкість однозначна — абсолютна стійкість системи неможлива.

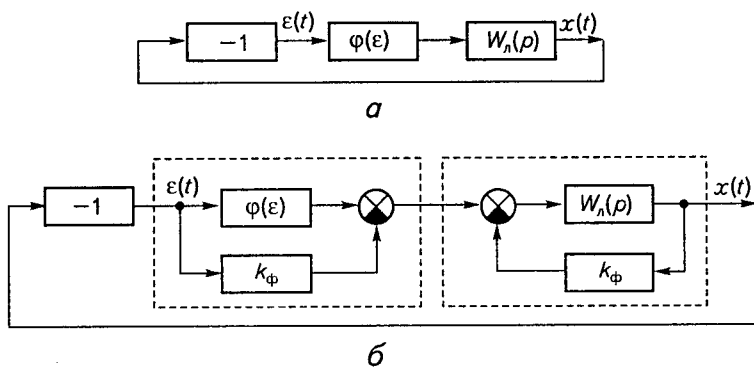


Рис. 8.19

Вважаємо, що значення k_Φ , за якого забезпечується стійкість лінійної частини системи, існує. Тоді після перетворення структурної схеми дістанемо лінійну частину системи з передаточною функцією

$$W_{л.\Phi}(p) = \frac{W_n(p)}{1 + k_\Phi W_n(p)} \quad (8.44)$$

і нелінійну ланку з характеристикою

$$\varphi_\Phi(\epsilon) = \varphi(\epsilon) - k_\Phi \epsilon.$$

Оскільки

$$\frac{\varphi_\Phi(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{\varphi(\epsilon)}{\epsilon} - k_\Phi,$$

то з нерівності

$$0 \leq \varphi(\epsilon)/\epsilon \leq k$$

впливає нерівність

$$0 \leq \varphi_\Phi(\epsilon)/\epsilon \leq k - k_\Phi,$$

тобто характеристика перетвореної нелінійної ланки належить сектору $S [0, k - k_\Phi]$. У цьому разі нерівність (8.42) має вигляд

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega)W_{л.\Phi}(j\omega)] + \frac{1}{k - k_\Phi} > 0 \quad (8.45)$$

і критерій абсолютної стійкості формулюється так: система абсолютно стійка, якщо через точку з координатами $(-1/(k - k_\Phi), j0)$ можна

провести пряму Пóпова так, щоб видозмінена характеристика перетвореної лінійної частини $W_{л,ф}^*(j\omega)$ знаходилась праворуч від неї.

Аналогічно можна розглянути випадок, коли характеристика нелінійної ланки належить довільному сектору $S [k_1, k_2]$ (див. рис. 8.15). Цей варіант також можна звести до нелінійної характеристики, що належить сектору $S [0, k]$, якщо прийняти $k_\phi = k_1$. Тоді характеристика перетвореної нелінійної ланки

$$\varphi_{пер}(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) - k_1 \varepsilon$$

знаходитиметься в секторі $S [0, k_2 - k_1]$, а лінійна частина матиме передаточну функцію

$$W_{л.пер}(p) = \frac{W_{л}(p)}{1 + k_1 W_{л}(p)}. \quad (8.46)$$

Критерій Пóпова можна поширити також на системи, в яких передаточна функція лінійної частини $W_{л}(p)$ має кілька чисто уявних або нульових полюсів, причому решта полюсів — ліві. У цьому разі формулювання критерію стійкості збігається з формулюванням критерію для системи зі стійкою лінійною частиною, але доповнюється такими двома умовами:

- має забезпечуватися *гранична стійкість*, тобто стійкість лінійної системи з передаточною функцією $k W_{л}(p)$ при $k \rightarrow 0$;
- характеристика нелінійної ланки не повинна дотикатися до осі абсцис, тобто має розташовуватися в секторі $S [\delta, k]$, де δ — нескінченно мала величина.

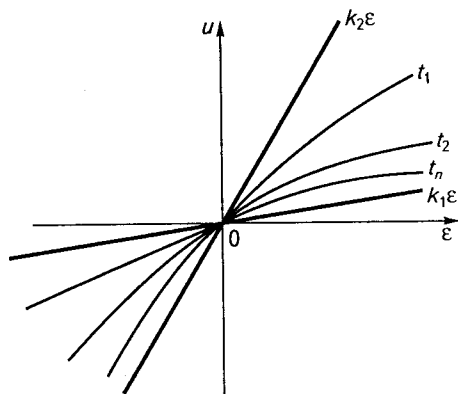


Рис. 8.20

Критерій Пóпова можна поширити також і на випадок нестационарної нелінійної характеристики $\varphi(\varepsilon, t)$. Якщо прийняти, що ця характеристика знаходиться в секторі $S [k_1, k_2]$ за будь-якого t (рис. 8.20), тобто

$$k_1 < \frac{\varphi(\varepsilon, t)}{\varepsilon} < k_2; \varphi(0, t) = 0,$$

то цей випадок можна звести до варіанта зі стаціонарною лінійною характеристикою, що лежить у секторі $S [k_1, k_2]$. Відмінність полягає в тому, що умова абсолютної стійкості для нестаціонарної нелінійної характеристики має вигляд нерівності (8.45), в якій слід прийняти $q = 0$, тобто

$$\operatorname{Re} [W_{\text{л.пер}}(j\omega)] + \frac{1}{k_2 - k_1} > 0. \quad (8.47)$$

Для перевірки цієї нерівності треба побудувати звичайну, а не відоміну характеристику $W_{\text{л.пер}}(j\omega)$. Крім того, пряму Попова слід проводити через точку з координатами $(-1/(k_2 - k_1), j0)$ паралельно уявній осі, тому що при $q = 0$ і $k = k_2 - k_1$ рівняння прямої Попова

$$X = -\frac{1}{k_2 - k_1}.$$

Все раніше розглянуте має відношення до абсолютної стійкості стану рівноваги системи в точці $x = 0$. Проте критерій Попова можна застосувати також для дослідження абсолютної стійкості будь-яких динамічних процесів. Якщо характеристика нелінійної ланки знаходиться в секторі $S [k_1, k_2]$, то похідна нелінійної характеристики має належати тому самому сектору $S [k_1, k_2]$, тобто

$$k_1 < \frac{\partial \varphi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} < k_2.$$

Стійкість динамічних процесів перевіряється так само, як і для нестаціонарної нелінійності.

Отже, критерій Попова дає достатні, але не необхідні умови стійкості. Тому визначена за цим критерієм зона стійкості може виявитися більш «вузькою», ніж дійсна, і, як наслідок цього, до регулятора ставитимуться необґрунтовано жорсткі вимоги.

8.8

Метод точкового перетворення

Для оцінки динаміки нелінійних систем, зокрема для виявлення факту існування автоколивань і визначення їхніх параметрів, можна застосувати метод точкових перетворень, розвинутий в теорії автоматичного керування О.О. Анд-

роновим. Ідея цього методу досить проста. Нехай, наприклад, фазовий портрет деякої нелінійної системи має вигляд, зображений на рис. 8.21. Припустимо, що в деякий момент часу зображуюча точка займає положення $x_0^{(1)}$ на додатній півосі $0x$. Після обходу навколо початку координат зображуюча точка займе нове положення $x_1^{(1)}$. Якщо точка займала положення $x_0^{(2)}$, то після обходу початку координат відстанемо нову точку $x_1^{(2)}$ і т. д. Оскільки через кожну точку півосі $0x$ можна провести одну й тільки одну фазову траєкторію, то обходу зображуючої точки навколо початку координат відповідає перехід кожної точки півосі $0x$ у деяку іншу точку тієї самої півосі. Інакше кажучи, відбувається точкове перетворення півосі $0x$ саму в себе. Це перетворення описується функцією $x_1 = f(x_0)$, графік якої називається *діаграмою точкового перетворення*.

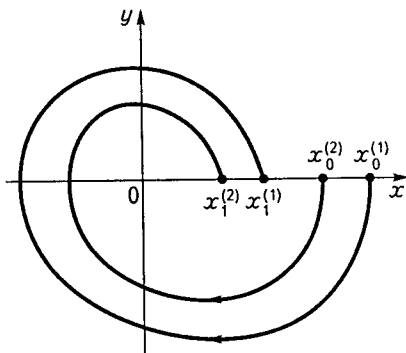


Рис. 8.21

Діаграма точкового перетворення дає змогу досліджувати характер можливих динамічних режимів у системі. Нехай, наприклад, графік функції $x_1 = f(x_0)$ має вигляд, зображений на рис. 8.22. На ньому проведено бісектрису кута, яка відповідає функції $x_1 = x_0$. Очевидно, що точки перетину функцій $x_1 = f(x_0)$ і $x_1 = x_0$ відповідають замкнутим фазовим траєкторіям (граничним циклам) на фазовій площині, тому що початкові і кінцеві положення зображуючої точки після обходу початку координат збігаються. Частинам кривої $x_1 = f(x_0)$, які знаходяться нижче бісектриси, відповідають спіральні фазові траєкторії, що наближуються до початку координат, оскільки наступна координата зображуючої точки

відповідає функції $x_1 = x_0$. Очевидно, що точки перетину функцій $x_1 = f(x_0)$ і $x_1 = x_0$ відповідають замкнутим фазовим траєкторіям (граничним циклам) на фазовій площині, тому що початкові і кінцеві положення зображуючої точки після обходу початку координат збігаються. Частинам кривої $x_1 = f(x_0)$, які знаходяться нижче бісектриси, відповідають спіральні фазові траєкторії, що наближуються до початку координат, оскільки наступна координата зображуючої точки

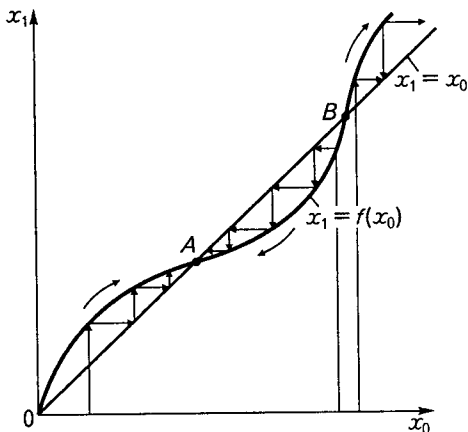


Рис. 8.22

менша за попередню. Аналогічно частинам кривої $x_1 = f(x_0)$, які містяться вище бісектриси, відповідають спіральні фазові траєкторії, що віддаляються від початку координат.

Крива $x_1 = f(x_0)$ і бісектриса на рис. 8.22 мають дві точки перетину A і B , тобто фазовий портрет має два граничних цикли. Наявності автоколивань у системі відповідає стійкий граничний цикл. Аналізуючи діаграму точкового перетворення, можна виявити, що стійкому граничному циклу відповідає така точка перетину кривої $x_1 = f(x_0)$ з бісектрисою, в якій крива $x_1 = f(x_0)$ має менший нахил до осі абсцис, ніж пряма $x_1 = x_0$, а нестійкому — більший. Отже, точка A відповідає стійкому граничному циклу, тобто наявності автоколивань у системі, а точка B — нестійкому. Якщо крива $x_1 = f(x_0)$ і пряма $x_1 = x_0$ не мають точки перетину, то граничного циклу не існує і автоколивання в системі неможливі.

Точкові перетворення не обов'язково здійснювати відносно додатної півосі осі абсцис. Якщо на фазовій площині є лінії перемикання, то доцільніше виконувати перетворення точок якої-небудь лінії перемикання. Якщо фазовий портрет симетричний відносно якої-небудь осі координат, то достатньо виконати точкове перетворення для половини оберту зображуючої точки навколо початку координат, тобто перетворити точки півосей або ліній перемикання на додатній півплощині у відповідні точки ліній перемикання або півосей на від'ємній півплощині.

Метод точкових перетворень можна використовувати для визначення впливу зміни параметрів системи на характер перехідних процесів. Нехай, наприклад, при різних значеннях якого-небудь параметра системи дістанемо діаграми точкових перетворень, що зображені на рис. 8.23.

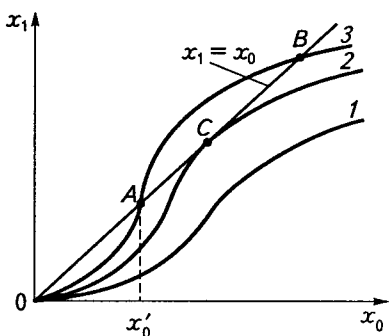


Рис. 8.23

Діаграма 1 відповідає системі, стійкої у цілому, діаграма 3 — системі, стійкої у малому, в якій за достатньо великого відхилення ($x_0 > x'_0$) виникають автоколивання (точка A відповідає нестійкому граничному циклу, точка B — стійкому). Діаграма 2 дотикається до бісектриси в точці C . Вона відповідає значенням параметрів, за яких система перебуває на межі між якісно різними динамічними властивостями. Такі значення параметрів називаються *бифуркаційними*.

8.9 Метод гармонічної лінеаризації

На відміну від розглянутих раніше точних методів дослідження нелінійних систем *метод гармонічної лінеаризації (гармонічного балансу)* є принципово наближеним. Ідеєю цього методу в 1934 р. запропонували М.М. Крилов і М.М. Боголюбов. До дослідження систем автоматичного керування цей метод застосували Л.С. Гольдфарб і Є.П. Попов.

Метод гармонічної лінеаризації використовується для дослідження автоколивань у нелінійних системах високого порядку, а також для оцінки якості перехідних процесів.

Для пояснення суті гармонічної лінеаризації розглянемо проходження гармонічного сигналу

$$\varepsilon = a \sin \omega t \quad (8.48)$$

через нелінійну ланку (рис. 8.24). На виході нелінійної ланки в загальному випадку створюється періодичний сигнал

$$u = \varphi(a \sin \omega t),$$

який можна розкласти в ряд Фур'є:

$$u = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t); \quad (8.49)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) d(\omega t); \quad (8.50)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \sin k\omega t d(\omega t); \quad (8.51)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \cos k\omega t d(\omega t). \quad (8.52)$$

Прийнявши $A_0 = 0$, що справедливо для нелінійних характеристик, симетричних відносно початку координат, вираз (8.49) запишемо у вигляді

$$u = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + \text{вищі гармоніки}. \quad (8.53)$$

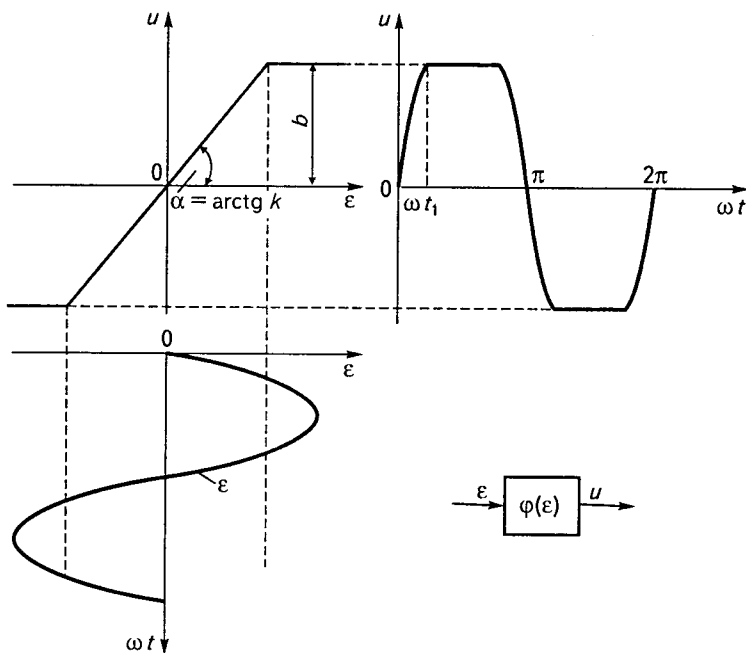


Рис. 8.24

Якщо врахувати, що з (8.48) випливає

$$\sin \omega t = \varepsilon/a; \quad \cos \omega t = p\varepsilon/a\omega,$$

то вираз (8.53) можна записати у вигляді

$$u = \frac{A_1}{a} \varepsilon + \frac{B_1}{a} \frac{p\varepsilon}{\omega} + \text{вищі гармоніки}$$

або

$$u = k_r \varepsilon + \frac{k_r'}{\omega} p\varepsilon + \text{вищі гармоніки}, \quad (8.54)$$

де $k_r = A_1/a$ і $k_r' = B_1/a$ — коефіцієнти гармонічної лінеаризації. Ці коефіцієнти згідно з виразами (8.51) і (8.52) є функціями амплітуди a . Отже, нелінійна функція $u = \varphi(\varepsilon)$ при $\varepsilon = a \sin \omega t$ замінюється виразом (8.54), який з точністю до вищих гармонік є лінійним. Ця операція і називається гармонічною лінеаризацією.

Гармонічна лінеаризація по суті є наближеною. Вона ґрунтується на таких припущеннях:

- у системі існують автоколивання;
- коливання на вході нелінійної ланки є синусоїдальними, тобто лінійна частина системи виконує функції фільтра основної гармоніки; це припущення прийнято називати *гіпотезою фільтра*.

Виходячи з цих припущень, розглянемо нелінійну систему, що складається з лінійної частини $W_n(p)$ і нелінійної ланки $\varphi(\varepsilon)$ (рис. 8.25). При дослідженні автоколивань приймається $f(t) = 0$. Тоді, якщо прийняті припущення є справедливими, сигнал на виході лінійної частини системи буде гармонічним:

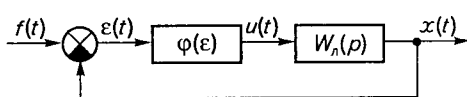


Рис. 8.25

$$x = x_0 + A \sin \omega_a t,$$

де A і ω_a — амплітуда і частота автоколивань; x_0 — постійна складова, що з'являється у разі, коли характеристика нелінійної ланки несиметрична відносно початку координат, тобто спостерігається ефект випрямлення вхідного гармонічного сигналу. Для симетричних характеристик нелінійної ланки $x_0 = 0$. Такий самий сигнал, але з протилежним знаком або з фазовим зсувом π надходить на вхід нелінійної ланки. На її виході, а отже, на вході лінійної частини системи згідно з виразом (8.49) будуть сигнали не тільки основної гармоніки ($k = 1$), а й решти кратних гармонік. Для лінійних систем справедливим є принцип накладення, тому можна розглядати дію кожної гармоніки на лінійну частину незалежно від інших. Внаслідок цього на виході системи утворюються періодичні коливання, які містять той самий спектр частот, що й сигнал на вході лінійної частини. Проте амплітуди кожної з гармонік будуть різними згідно з амплітудно-частотною характеристикою лінійної частини системи.

Розглянемо амплітудно-частотну характеристику, зображену на рис. 8.26. З характеристики видно, що амплітуда першої гармоніки значно перевищує амплітуди інших

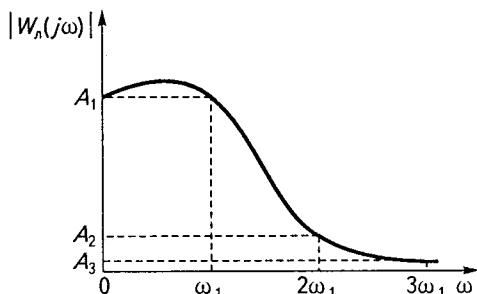


Рис. 8.26

гармонік, тобто лінійна частина системи виконує функцію фільтра нижніх частот (гіпотеза фільтра підтверджується). У цьому разі вищими гармоніками можна знехтувати і вважати, що коливання на виході лінійної частини, а отже, і на вході нелінійної ланки є гармонічними. Тоді рівняння (8.54) нелінійної ланки буде лінійним:

$$u = k_r \varepsilon + \frac{k_r'}{\omega} p\varepsilon. \quad (8.55)$$

Цьому рівнянню відповідає передаточна функція

$$W_{\text{нл}}(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_r + \frac{k_r'}{\omega} p. \quad (8.56)$$

Передаточна функція $W_{\text{нл}}(p)$ є передаточною функцією еквівалентної лінійної ланки або *гармонічною передаточною функцією* нелінійної ланки.

Для непарних однозначних нелінійних характеристик розклад у ряд Фур'є не має косинусів, тобто $B_1 = 0$ і $k_r' = 0$, тому передаточна функція гранично спрощується:

$$W_{\text{нл}}(p) = k_r. \quad (8.57)$$

Коефіцієнт k_r визначає гармонічну складову вихідного сигналу, яка збігається за фазою з вхідним сигналом, а коефіцієнт k_r' — складову, що зсунута за фазою на кут $\pi/2$.

Коефіцієнт k_r' не дорівнює нулю, якщо характеристика нелінійної ланки є неоднозначною. Для неоднозначних характеристик із від'ємним гістерезисом (див. рис. 8.1, *г*, *е*, *є*) коефіцієнт k_r' від'ємний, тобто визначає складову вихідного сигналу, що запізнюється за фазою на кут $\pi/2$. Пояснюється це тим, що у разі зміни знака вхідного сигналу вихідний сигнал переходить з однієї вітки нелінійної характеристики на іншу і тим самим створює запізнювання вихідного сигналу відносно вхідного.

Розглянемо випадок, коли гармонічний сигнал на вході нелінійної ланки містить постійну складову, тобто

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a \sin \omega t. \quad (8.58)$$

Це можливо, якщо до системи прикладена постійна зовнішня дія або якщо характеристика нелінійної ланки несиметрична відносно початку координат.

Із виразу (8.58) випливає

$$a \sin \omega t = \varepsilon - \varepsilon_0;$$

$$\sin \omega t = (\varepsilon - \varepsilon_0)/a;$$

$$\cos \omega t = \frac{p(\varepsilon - \varepsilon_0)}{a\omega},$$

тому вираз (8.49) для першої гармоніки

$$\begin{aligned} u &= A_0 + A_1 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{a} + B_1 \frac{p(\varepsilon - \varepsilon_0)}{a\omega} = \\ &= A_0 + \left(\frac{A_1}{a} + \frac{B_1 p}{a\omega} \right) (\varepsilon - \varepsilon_0) = \\ &= k_{r0} \varepsilon_0 + \left(k_r + k'_r \frac{p}{\omega} \right) (\varepsilon - \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (8.59)$$

Вираз (8.59), крім коефіцієнтів k_r і k'_r , містить коефіцієнт $k_{r0} = A_0/\varepsilon_0$, який є коефіцієнтом передачі постійної складової.

Рівняння (8.59) лінійне. Йому відповідає структурна схема, зображена на рис. 8.27, а. Схема має дві паралельні ланки. Ланка з передаточною функцією k_{r0} передає постійну складову, а з передаточною функцією $k_r + k'_r p/\omega$ пропускає тільки синусоїдальну складову вхідного сигналу. Вихідний сигнал u становить суму постійної складової $\varepsilon_0 k_{r0}$ і синусоїдального сигналу:

$$(k_r + k'_r p/\omega) a \sin \omega t = (k_r + k'_r p/\omega) (\varepsilon - \varepsilon_0).$$

Якщо причиною виникнення постійної складової є не зовнішня дія, а несиметричність характеристики нелінійної ланки відносно початку координат (ефект випрямлення), то нелінійну ланку не можна подавати у вигляді структурної схеми, зображеної на рис. 8.27, а, бо в цьому разі постійна складова A_0 на виході нелінійної ланки не дорівнює нулю навіть при $\varepsilon_0 = 0$, тобто коефіцієнт k_{r0} не має сенсу. У цьому разі нелінійну ланку слід подавати у вигляді структурної схеми, наведеної на рис. 8.27, б, де постійна складова A_0 розглядається як деяка зовнішня дія.

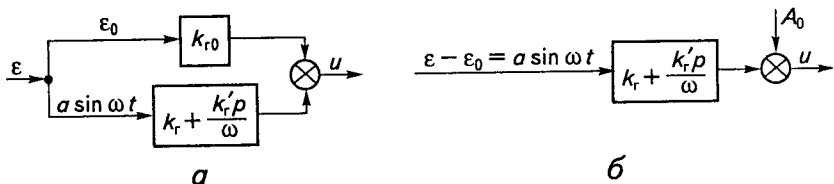


Рис. 8.27

Постійну складову та коефіцієнти гармонічної лінеаризації можна визначити за формулами (8.50), (8.51) і (8.52).

- **Приклад 8.4.** Визначити коефіцієнти гармонічної лінеаризації для нелінійної ланки, яка має характеристику із зоною насичення (див. рис. 8.24).

Розв'язання. Сигнал на виході ланки $\varphi(a \sin \omega t)$ є непарною періодичною функцією, тому ряд Фур'є не має косинусів і вільного члена, тобто $A_0 = 0$ і $B_1 = 0$, отже, $k_{r0} = 0$ і $k'_r = 0$.

Визначимо коефіцієнт $k_r = A_1/a$. При обчисленні коефіцієнта A_1 за формулою (8.51) скористаємося тим, що інтеграл від 0 до 2π можна дістати як чотири інтеграли від 0 до $\pi/2$, тобто

$$k_r = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \varphi(a \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t). \quad (8.60)$$

Нелінійна функція $\varphi(a \sin \omega t)$ згідно з рис. 8.24 в інтервалі від 0 до ωt_1 має вигляд

$$\varphi(a \sin \omega t) = ka \sin \omega t,$$

а в інтервалі від ωt_1 до $\pi/2$ —

$$\varphi(a \sin \omega t) = b.$$

Тому інтеграл (8.60) можна подати у вигляді суми двох інтегралів

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{4}{\pi a} \int_0^{\omega t_1} ka \sin \omega t \sin \omega t d(\omega t) + \frac{4}{\pi a} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} b \sin \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{4k}{\pi} \int_0^{\omega t_1} \sin^2 \omega t d(\omega t) + \frac{4b}{\pi a} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} \sin \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{4k}{\pi} \left(\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^{\omega t_1} - \frac{4b}{\pi a} \cos \omega t \Big|_{\omega t_1}^{\pi/2}. \end{aligned}$$

При обчисленні інтегралів враховуємо, що згідно з графіком функції $\varphi(a \sin \omega t)$ на рис. 8.24

$$\omega t_1 = \arcsin \frac{b}{ak}.$$

Крім того, виконаємо такі заміни:

$$\sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \sqrt{1 - \sin^2 \omega t},$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}.$$

Тоді дістанемо

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{4k}{\pi} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{ak} - \frac{1}{2} \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right) + \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} = \\ &= \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{ak} + \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right). \end{aligned}$$

Цей вираз справедливий при $a > b/k$. При $a < b/k$, коли зона насичення не досягається, $k_r = k$.

Графік залежності коефіцієнта k_r від амплітуди a подано на рис. 8.28, а.

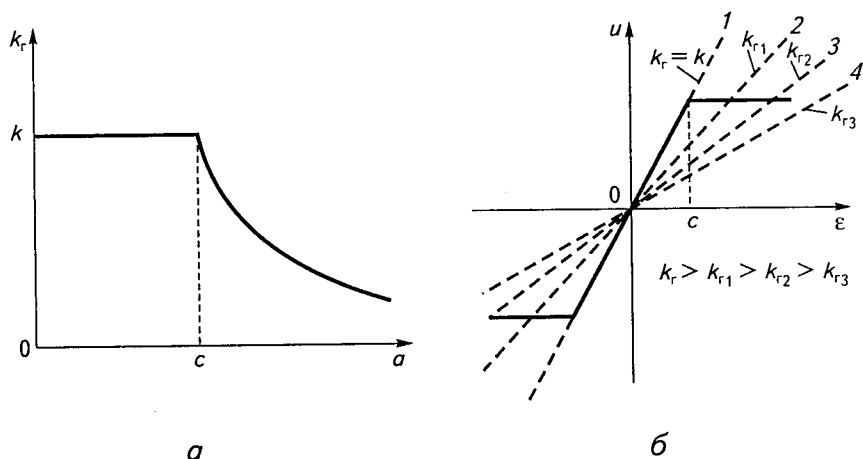


Рис. 8.28

При виконанні гармонічної лінеаризації, звичайно, немає необхідності визначати коефіцієнти k_r і k'_r . Для типових нелінійностей їхні значення можна знайти у більшості підручників з теорії автоматичного керування. Формули для визначення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації типових нелінійних ланок подано також у табл. 8.2.

Отже, гармонічна лінеаризація надає можливість описувати суттєво нелінійні ланки лінійними рівняннями. Проте слід мати на увазі, що гармонічна лінеаризація нелінійних залежностей принципово відрізняється від звичайної лінеаризації, яку було розглянуто раніше

Таблиця 8.2

Рисунок, на якому наведено характеристику нелінійної ланки	Коефіцієнт гармонічної лінеаризації	
	k_r	k'_r
8.1, а	$k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right)$ при $a > c$	0
8.1, б	$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{ak} + \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right)$ при $a > b/k$	0
8.1, в	$4b/\pi a$	0
8.1, г	$\frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2c}{a} \right) + 2 \left(1 - \frac{2c}{a} \right) \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{a} \right)} \right]$ при $a > c$	$-\frac{4kc}{\pi a} \left(1 - \frac{c}{a} \right)$ при $a > c$
8.1, д	$\frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ при $a > c$	0
8.1, е	$\frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{c_3}{a} + \frac{c_3}{a} \sqrt{1 - \frac{c_3^2}{a^2}} + \arcsin \frac{c_1}{a} + \frac{c_1}{a} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{a^2}} \right)$ при $a > c_3$	$-\frac{k(c_3^2 - c_1^2)}{\pi a^2}$ при $a > c_3$
8.1, є	$\frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ при $a > c$	$-\frac{4bc}{\pi a^2}$ при $a > c$

(див. гл. 2, п. 2.6). Коли виконується звичайна лінеаризація, то нелінійна характеристика поблизу точки лінеаризації замінюється прямою лінією, яка має сталий коефіцієнт нахилу k , що не залежить від вхідної та вихідної величин ланки. Якщо виконується гармонічна лінеаризація, то нелінійна характеристика замінюється прямою лінією з коефіцієнтом нахилу k_r , величина якого залежить від амплітуди вхідного сигналу. Наприклад, з графіка $k_r(a)$ (рис. 8.28, а) видно, що при $a < c$ коефіцієнт $k_r = k$ і лінеаризована характеристика збігаються з лінійною частиною характеристики ланки з насиченням (характеристика 1 на рис. 8.28, б). Якщо амплітуда зростає, то коефіцієнт k_r зменшується і лінеаризована характеристика набуває ви-

гляду характеристик 2, 3 і т. д. При $a \rightarrow \infty$ коефіцієнт k_r прямує до нуля. Пояснюється це тим, що при зростанні амплітуди вхідного сигналу амплітуда вихідного сигналу внаслідок насичення залишається незмінною, тобто коефіцієнт передачі ланки безперервно зменшується.

Отже, гармонічна лінеаризація замінює нелінійну ланку не на звичайну лінійну ланку, а на таку, коефіцієнт передачі якої є функцією амплітуди (а в загальному випадку й частоти) вхідного сигналу. Тільки для режиму автоколивань, коли $a = A = \text{const}$ і $\omega = \omega_a = \text{const}$ (A і ω_a — амплітуда і частота автоколивань), коефіцієнти гармонічної лінеаризації є сталими величинами. Ця істотна особливість лінеаризованих ланок з коефіцієнтами k_r і k'_r є тією важливою обставиною, яка надає можливість використовувати методи лінійної теорії для дослідження суттєво нелінійних систем автоматичного керування.

8.10

Дослідження автоколивань методом гармонічної лінеаризації

Розглянемо спочатку випадок, коли зовнішня дія $f(t) = 0$ і характеристика нелінійної ланки симетрична відносно початку координат. Постійна складова в цьому разі відсутня і автоколивання мають вигляд

$$x = A \sin \omega_a t.$$

Після гармонічної лінеаризації структурна схема системи матиме вигляд, зображений на рис. 8.29. Приймаючи

$$W_n(p) = \frac{R(p)}{Q(p)};$$

$$W_{nl}(A) = k_r + \frac{k'_r}{\omega_a} p,$$

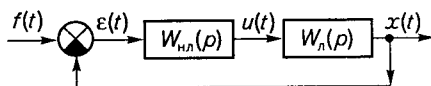


Рис. 8.29

запишемо диференціальне рівняння системи у вигляді

$$\left[Q(p) + R(p) \left(k_r + \frac{k'_r p}{\omega_a} \right) \right] x(t) = 0. \quad (8.61)$$

Коефіцієнти k_r і k'_r у загальному випадку залежать від амплітуди і частоти ω_a автоколивань. Для режиму автоколивань, коли $A = \text{const}$ і $\omega_a = \text{const}$, рівняння (8.61) є лінійним зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (8.61) у вигляді $x = A \sin \omega_a t$ можливий лише тоді, коли характеристичне рівняння замкнутої системи

$$Q(p) + R(p) \left(k_r + \frac{k'_r p}{\omega_a} \right) = 0 \quad (8.62)$$

має пару суто уявних коренів $p_{1,2} = \pm j\omega$ за умови, що решта коренів мають від'ємні дійсні частини. При цьому лінійна частина системи повинна бути стійкою або нейтральною, тобто поліном $Q(p)$ може мати корені з від'ємними дійсними частинами або нульові корені і не повинен мати коренів з додатними дійсними частинами або чисто уявних коренів. Перелічені умови відповідають знаходженню гармонічно лінеаризованої системи на межі стійкості. Тому при визначенні періодичного розв'язку, тобто частоти ω_a і амплітуди A автоколивань, можна користуватися відомими критеріями стійкості лінійних систем, прийнявши, що в режимі автоколивань система перебуває на межі стійкості, яка відповідає незатухаючим коливанням.

Так, умова знаходження системи на межі стійкості за критерієм Гурвіца

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad (8.63)$$

де Δ_{n-1} — передостанній мінор визначника Гурвіца.

За критерієм Найквіста ця умова має вигляд

$$W_{нл}(j\omega)W_{л}(j\omega) = -1. \quad (8.64)$$

За критерієм Михайлова межа коливальної стійкості відповідає проходженню годографа вектора Михайлова через початок координат комплексної площини, тобто

$$D(j\omega) = 0. \quad (8.65)$$

У рівняння (8.63), (8.64) і (8.65) входять коефіцієнти k_r і k'_r , які є функціями амплітуди або амплітуди і частоти. Тому використання цих рівнянь дає змогу знайти значення амплітуди та частоти.

Вибір критерію стійкості для визначення A і ω_a залежить від типу нелінійності та конкретної схеми системи. Наприклад, якщо лінеаризована передаточна функція нелінійної ланки $W_{нл}(p)$ дорівнює k_r , причому k_r є функцією тільки амплітуди, то для визначення параме-

трів автоколивань доцільно застосувати критерій Найквіста в логарифмічній формі. У цьому разі ЛАХ залежить від k_r і, отже, від амплітуди A , а ЛФХ визначається лише передаточною функцією лінійної частини системи $W_{л}(p)$ і не залежить від $W_{нл}(p)$.

Для визначення амплітуди автоколивань достатньо побудувати серію характеристик $L(\omega)$ для різних значень A . Ці характеристики будуть паралельними одна одній (рис. 8.30). Шуканим значенням амплітуди A буде таке, за якого на частоті зрізу $\varphi(\omega) = -\pi$. Для характеристик на рис. 8.30 $A = A_3$, $\omega_a = \omega_{з3}$.

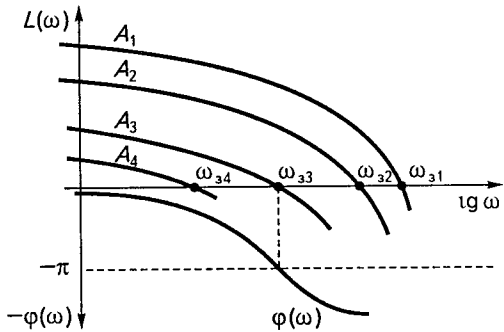


Рис. 8.30

Найповніше розроблено методи визначення частоти й амплітуди автоколивань, в основу яких покладено критерії Найквіста (метод Гольдфарба) і Михайлова (метод Попова).

Метод Гольдфарба. За цим методом можна визначити параметри автоколивань для систем з одним нелінійним елементом, коефіцієнти гармонічної лінеаризації якого є функціями лише амплітуди. У цьому разі рівняння (8.64) записується так:

$$W_{нл}(A)W_{л}(j\omega) = -1. \quad (8.66)$$

Це рівняння розв'язується графічно. Якщо його подати у вигляді

$$W_{л}(j\omega) = -1/W_{нл}(A), \quad (8.67)$$

то очевидно, що для його розв'язання необхідно побудувати дві характеристики: АФХ лінійної частини системи $W_{л}(j\omega)$ і від'ємну обернену характеристику нелінійної ланки $-1/W_{нл}(A)$. Характеристики необхідно будувати в тій самій системі координат, і масштаби на осях координат мають бути однаковими. Якщо побудовані криві не перетинаються, то розв'язку рівняння (8.66) не існує і автоколивання у системі відсутні. Якщо ж ці криві перетинаються (рис. 8.31, а), то рівняння (8.66) має розв'язок і автоколивання можливі.

Стійкість або нестійкість автоколивань можна досліджувати, аналізуючи точки перетину M і N , яким відповідають граничні цикли на

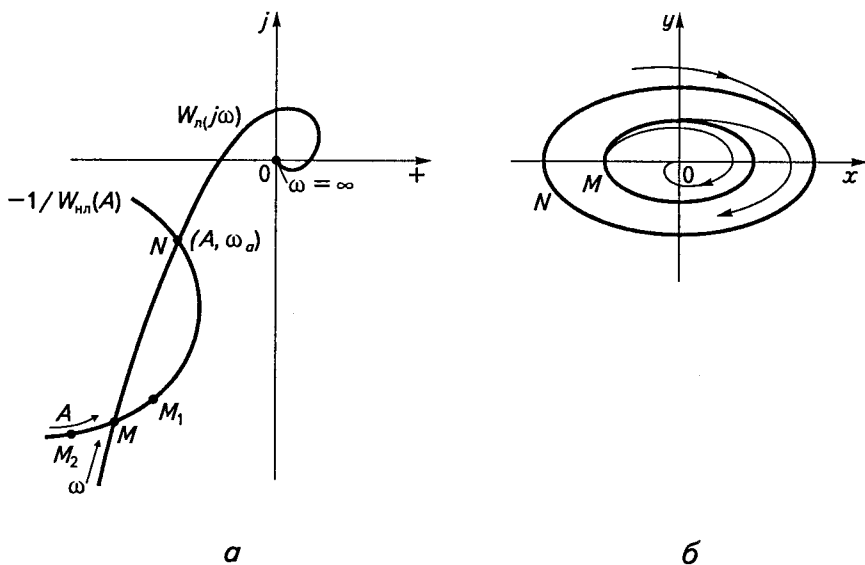


Рис. 8.31

фазовій площині (рис. 8.31, б). Цикл M має меншу амплітуду, цикл N — більшу.

Для перевірки стійкості граничних циклів можна скористатися критерієм Найквіста. Лінійна система перебуває на межі стійкості, якщо АФХ розімкнутої системи проходить через критичну точку з координатами $(-1, j0)$, тобто рівняння, що відповідає незатухаючим коливанням,

$$1 + W(j\omega) = 0.$$

Для нелінійної системи це рівняння має вигляд

$$1 + W_l(j\omega)W_{nl}(A) = 0,$$

тому критичними точками для АФХ будуть точки $-1/W_{nl}(A)$, які належать від'ємній зворотній характеристиці нелінійної ланки. Охоплення чи неохоплення цих точок амплітудно-фазовою характеристикою свідчатиме про стійкість або нестійкість руху, що відповідає граничному циклу.

Розглянемо граничний цикл, що відповідає точці перетину M . Припустимо, що амплітуда трохи більша, ніж у точці M , і значення

функції $-1/W_{\text{нл}}(A)$ визначається точкою M_1 . АФХ лінійної частини охоплює цю точку, отже, рух нестійкий і амплітуда зростатиме. Якщо амплітуда стане трохи меншою, ніж у точці M (точка M_2), то АФХ не охоплюватиме цю точку, рух буде стійким, амплітуда зменшуватиметься. Це означає, що граничний цикл M нестійкий, оскільки в обох випадках фазові траєкторії віддаляються від нього. Якщо так само розглянути точку N , то можна дійти висновку, що вона відповідає стійкому граничному циклові. Отже, можна сформулювати таке правило визначення стійкості коливань: *якщо точка на кривій $-1/W_{\text{нл}}(A)$, що відповідає зростаючій амплітуді, не охоплюється АФХ лінійної частини системи, то коливання стійкі, а якщо охоплюється — то нестійкі*. За цим правилом точка M відповідає нестійким коливанням, а точка N — стійким. Знайшовши точку N , визначимо параметри автоколивань: амплітуду A (за характеристикою нелінійного елемента) і частоту ω_a (за АФХ лінійної частини системи). Після знаходження параметрів автоколивань слід перевірити гіпотезу фільтра (див. п. 8.9).

Якщо характеристики $W_n(j\omega)$ і $-1/W_{\text{нл}}(A)$ не перетинаються, то автоколивання неможливі, а система може бути стійкою або нестійкою. Якщо АФХ лінійної частини не охоплює характеристику нелінійного елемента, то система стійка, якщо охоплює — нестійка.

Використовуючи графіки $W_n(j\omega)$ і $-1/W_{\text{нл}}(A)$, досліджуємо вплив на частоту і амплітуду можливих автоколивань параметрів нелінійної ланки і лінійної частини системи. Зміна параметрів лінійної частини деформує частотну характеристику $W_n(j\omega)$, а нелінійної ланки — характеристику $-1/W_{\text{нл}}(A)$.

- **Приклад 8.5.** Визначити методом Гольдфарба амплітуду та частоту автоколивань вихідної координати слідкувального електропривода, розглянутого в прикладі 8.2. Структурну схему системи зображено на рис. 8.11. Параметри електропривода: $k_d = 1,5 \text{ 1/V} \cdot \text{с}$; $T_m = 0,1 \text{ с}$; $q = 0,1$. Характеристика $\varphi(\epsilon)$ є характеристикою реального релейного елемента (див. рис. 8.1, ϵ) з такими параметрами $b = 100 \text{ В}$; $c = 0,25 \text{ рад}$.

Розв'язання. Передаточна функція лінійної частини системи відповідно до структурної схеми, наведеної на рис. 8.11,

$$W_n(p) = \frac{k_d q}{p(T_m p + 1)} = \frac{0,15}{p(0,1p + 1)}$$

Передаточна функція гармонічно лінеаризованого нелінійного елемента

$$W_{\text{нл}}(A) = k_r + k'_r \frac{p}{\omega},$$

де згідно з табл. 8.2

$$k_r = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}};$$

$$k'_r = -\frac{4bc}{\pi A^2}.$$

Підставивши $p = j\omega$ в передаточну функцію, дістанемо

$$W_{\text{нл}}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2} = \frac{4bc}{\pi A^2} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \right);$$

$$-\frac{1}{W_{\text{нл}}(A)} = -\frac{\pi c}{4b} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right);$$

$$\begin{aligned} W_n(j\omega) &= \frac{k_n q}{j\omega(j\omega T_m + 1)} = \frac{k_n q T_m}{T_m^2 \omega^2 + 1} - j \frac{k_n q}{T_m^2 \omega^3 + \omega} = \\ &= U_n(\omega) + jV_n(\omega). \end{aligned}$$

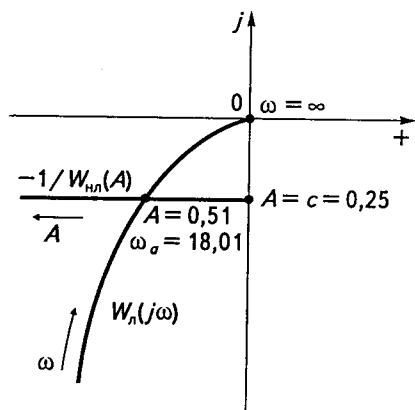


Рис. 8.32

Графіки функцій $-1/W_{\text{нл}}(A)$ і $W_n(j\omega)$ зображено на рис. 8.32. Уявна частина характеристики $-1/W_{\text{нл}}(A)$ не залежить від амплітуди, тому характеристика проходить паралельно осі абсцис. При $A = c = 0,25$

$$-1/W_{\text{нл}}(A) = -j \frac{\pi c}{4b}.$$

У точці перетину характеристик $-1/W_{\text{нл}}(A)$ і $W_n(j\omega)$ їхні уявні частини однакові, тобто

$$jV_n(\omega_\sigma) = j \frac{\pi c}{4b}$$

або

$$\frac{k_n q}{T_m^2 \omega_\sigma^3 + \omega_\sigma} = \frac{\pi c}{4b},$$

звідки

$$T_m^2 \omega_\sigma^3 + \omega_\sigma = 4bk_n q / \pi c.$$

(8.68)

Після підстановки значень параметрів дістанемо рівняння

$$0,01\omega_a^3 + \omega_a - 76,4 = 0,$$

розв'язавши яке визначимо частоту автоколивань. Це рівняння має один дійсний додатний корінь 18,01, отже, $\omega_a = 18,01 \text{ с}^{-1}$.

Амплітуду автоколивань A визначимо з умови, що при $\omega = \omega_a$ дійсні частини характеристик $-1/W_{\text{нл}}(A)$ і $W_n(j\omega)$ однакові, тобто

$$-\frac{\pi c}{4b} \sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} = -\frac{k_d q T_m}{T_m^2 \omega_a^2 + 1}.$$

Після підстановки значень параметрів дістанемо рівняння

$$0,00196\sqrt{16A^2 - 1} = 0,00353,$$

звідки $A = 0,51$ рад.

Коливання в системі стійкі, оскільки при зростанні амплітуди точки на характеристиці $-1/W_{\text{нл}}(A)$ кривою $W_n(j\omega)$ не охоплюються.

Для перевірки умови фільтра не обов'язково будувати амплітудно-частотну характеристику лінійної частини. Достатньо визначити модуль характеристики

$$|W_n(j\omega)| = \sqrt{U_n^2(\omega) + V_n^2(\omega)}$$

при $\omega = \omega_a = 18,01 \text{ с}^{-1}$ і $\omega = 3\omega_a = 54,03 \text{ с}^{-1}$.

Найближчою вищою гармонікою є третя, оскільки характеристика нелінійного елемента симетрична відносно початку координат і, отже, парні гармоніки відсутні.

При $\omega = \omega_a = 18,01 \text{ с}^{-1}$ $|W_n(j\omega_a)| = 0,00404$, а при $\omega = 3\omega_a$ $|W_n(j3\omega_a)| = 0,000505$.

Амплітуда третьої гармоніки становить 12,5 % від амплітуди першої гармоніки, тому результат розрахунку є наближеним. Його точність можна оцінити, порівнявши з результатами прикладу 8.2.

Знайдені значення A і ω_a — це амплітуда і частота коливань на вході нелінійної ланки. Частота автоколивань однакова для всіх координат систем, включаючи $\theta_{\text{вих}}$ (див. рис. 8.12). Амплітуда коливань вихідної координати згідно зі структурною схемою також дорівнює амплітуді сигналу на вході нелінійної ланки, тому що $\Delta\theta_{\text{вих}}(t) = -\varepsilon(t)$. Отже, частота і амплітуда коливань вихідної координати дорівнюють відповідно $18,01 \text{ с}^{-1}$ і $0,51$ рад.

Метод Гольдфарба можна поширити й на випадок, коли система має кілька нелінійних ланок. Нехай, наприклад, структурна схема системи має вигляд, зображений на рис. 8.33, де передаточні функції

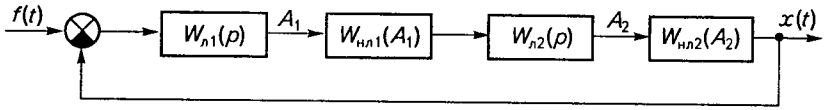


Рис. 8.33

$W_{нл1}(A_1)$ і $W_{нл2}(A_2)$ нелінійних ланок залежать лише від амплітуд A_1 і A_2 сигналів на їх входах.

Відповідно до структурної схеми

$$A_2 = A_1 |W_{л1}(A_1)| |W_{л2}(j\omega)|.$$

Звідси випливає, що амплітуда A_2 залежить від амплітуди A_1 і частоти ω , тобто $A_2 = A_2(A_1, \omega)$. У цьому разі рівняння (8.66) набуває вигляду

$$W_{л1}(j\omega)W_{нл1}(A_1)W_{л2}(j\omega)W_{нл2}(A_1, \omega) = -1. \quad (8.69)$$

Позначивши

$$W_{л1}(j\omega)W_{л2}(j\omega) = W_{л}(j\omega)$$

і

$$W_{нл1}(A_1)W_{нл2}(A_1, \omega) = W_{нл}(A_1, \omega),$$

з (8.69) дістанемо рівняння

$$W_{л}(j\omega) = -1/W_{нл}(A_1, \omega), \quad (8.70)$$

яке відрізняється від (8.67) тим, що $W_{нл}$ є функцією двох параметрів A_1 і ω .

Рівняння (8.70), як і (8.67), можна розв'язати графічно. Проте розв'язування ускладнюється, оскільки $W_{нл1}(A_1, \omega)$ залежить від двох параметрів. Тому крім характеристики $W_{л}(j\omega)$ слід побудувати сім'ю характеристик $-1/W_{нл1}(A)$ для різних частот ω_i (рис. 8.34, а) або сім'ю характеристик $-1/W_{нл1}(j\omega)$ для різних значень амплітуди A_i (рис. 8.34, б). Параметри можливих автоколивань визначаються точками перетину тих кривих, у яких збігаються точки з однаковими частотами.

Таким самим методом можна дослідити систему з одним нелінійним елементом, лінеаризована передаточна функція $W_{нл}(A, \omega)$ якого залежить від амплітуди та частоти.

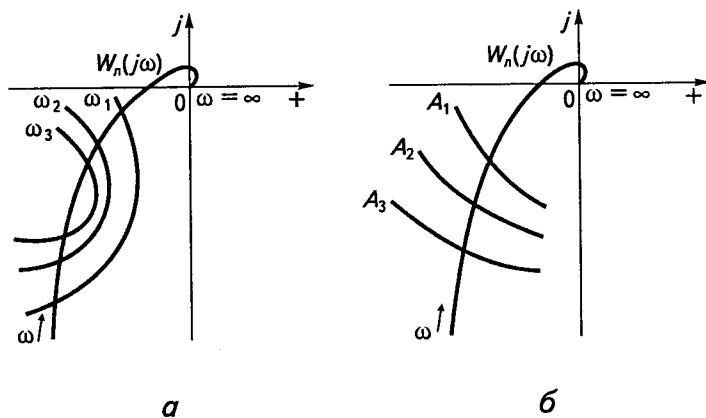


Рис. 8.34

Метод Попова. В основу цього методу покладено критерій Михайлова, що дає змогу досліджувати системи з нелінійними ланками, лінеаризовані передаточні функції яких $W_{нл}(j\omega, A)$ залежать не тільки від амплітуди, а й від частоти. Крім того, цим методом можна досліджувати нелінійні системи з кількома нелійними ланками, що розділяються лінійними інерційними ланками (див. рис. 8.33).

Розглянемо структурну схему, наведену на рис. 8.29. Приймаючи, що $W_n(p) = R(p)/Q(p)$ і $W_{нл} = W_{нл}(A, p)$, визначимо передаточну функцію замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{\frac{R(p)}{Q(p)} W_{нл}(A, p)}{1 + \frac{R(p)}{Q(p)} W_{нл}(A, p)} = \frac{R(p) W_{нл}(A, p)}{Q(p) + R(p) W_{нл}(A, p)} \quad (8.71)$$

і запишемо характеристичний поліном

$$D(p) = Q(p) + R(p) W_{нл}(A, p). \quad (8.72)$$

Межа коливальної стійкості визначається умовою (8.65), тобто

$$Q(j\omega) + R(j\omega) W_{нл}(A, j\omega) = 0. \quad (8.73)$$

Виділивши у виразі (8.73) дійсну і уявну частини, дістанемо

$$X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0. \quad (8.74)$$

Ця рівність можлива, якщо дійсна і уявна частини дорівнюють нулю, тому рівняння (8.74) можна записати у вигляді двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} X(A, \omega) = 0; \\ Y(A, \omega) = 0. \end{cases} \quad (8.75)$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо параметри автоколивань A і ω_a . Амплітуда і частота є додатними дійсними числами. Тому якщо в результаті розв'язування рівнянь (8.75) обидва невідомих будуть додатними дійсними числами, то автоколивання можливі. Якщо ж будь-яке невідоме буде від'ємним або уявним, то автоколивань у системі не існує.

Якщо вирази для коефіцієнтів гармонічної лінеаризації k_r і k'_r нескладні і лінійна частина системи має невисокий порядок, то системі рівнянь можна розв'язати аналітично і визначити A і ω_a в явному вигляді.

Після визначення параметрів автоколивань необхідно перевірити їхню стійкість за допомогою нерівності

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_a \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_a - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_a \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_a > 0. \quad (8.76)$$

В цьому виразі частинні похідні обчислюються для режиму автоколивань, тобто після визначення частинних похідних від дійсної та уявної частин $D(j\omega)$ замість A і ω_a треба підставити їхні значення. Якщо при цьому нерівність (8.76) виконується, то автоколивання стійкі, в противному разі — нестійкі.

- **Приклад 8.6.** Визначити методом Попова частоту і амплітуду автоколивань вихідної осі слідкувального електропривода, розглянутого в прикладі 8.5.

Розв'язання. Передаточна функція лінійної частини системи

$$W_n(p) = \frac{k_d q}{p(T_m p + 1)} = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

а гармонічно лінеаризованої нелінійної ланки

$$W_{\text{нл}}(A, p) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega}.$$

Характеристичний поліном згідно з формулою (8.72) запишемо так:

$$D(p) = T_m p^2 + p + k_n q \left(\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega} \right).$$

Підставивши в цей вираз $p = j\omega$, визначимо дійсну і уявну частини полінома $D(j\omega)$ і складемо систему рівнянь вигляду (8.75):

$$D(j\omega) = -T_m \omega^2 + j\omega + k_n q \left(\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2} \right);$$

$$X(A, \omega) = -T_m \omega^2 + \frac{4k_n q b}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - c^2} = 0; \quad (8.77)$$

$$Y(A, \omega) = \omega - \frac{4k_n q b c}{\pi A^2} = 0. \quad (8.78)$$

З виразу (8.78) визначимо

$$A^2 = \frac{4k_n q b c}{\pi \omega} \quad (8.79)$$

і підставимо в (8.77). Після перетворень дістанемо рівняння

$$T_m^2 \omega^3 + \omega - 4k_n q b / \pi c = 0,$$

яке збігається з (8.68), знайденим у прикладі 8.5 при розв'язуванні задачі методом Гольдфарба. Розв'язок цього рівняння дає частоту автоколивань $\omega_a = 18,01 \text{ с}^{-1}$. Амплітуду автоколивань визначимо з виразу (8.79) при $\omega = 18,01 \text{ с}^{-1}$:

$$A = \sqrt{\frac{4k_n q b c}{\pi \omega}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,5 \cdot 0,1 \cdot 100 \cdot 0,25}{\pi \cdot 18,01}} = 0,51.$$

Стійкість знайденого періодичного розв'язку перевіримо за допомогою нерівності (8.76). Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial X}{\partial A} = \frac{4k_n q b}{\pi} \frac{2c^2 - A^2}{A^3 \sqrt{A^2 - c^2}}; \quad \frac{\partial X}{\partial \omega} = -2T_m \omega;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = \frac{8k_n q b c}{\pi A^3}; \quad \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 1.$$

При $A = 0,51$ і $\omega = 18,01$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_a = -43,73; \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_a = -3,602; \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_a = 72,02; \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_a = 1.$$

Умова (8.76)

$$(-43,73) \cdot 1 - (-3,602) \cdot 72,02 = 215,7 > 0$$

виконується, отже, автоколивання в системі існують.

Параметри коливань вихідної осі визначають так само, як і в прикладі 8.5.

Якщо вирази для коефіцієнтів гармонічної лінеаризації досить складні, а лінійна частина системи має високий порядок, то розв'язок системи рівнянь (8.75) можна знайти графоаналітичним способом. При цьому X і Y розглядають як прямокутні координати і будують годографи вектора Михайлова $D(j\omega)$, змінюючи частоту у межах $0 < \omega < \infty$ для різних значень амплітуди A . Годограф вектора Михайлова, що проходить через початок координат комплексної площини, задовольняє системі рівнянь (8.75). Значення частоти, за якого годограф проходить через початок координат, дорівнює частоті автоколивань, а амплітуда A , для якої побудовано цей годограф, — амплітуда автоколивань.

Практично для визначення A і ω_a немає потреби будувати сім'ю годографів для великої кількості амплітуд. Звичайно достатньо побудувати два годографи для таких амплітуд A_1 і A_2 , щоб один із годографів охоплював, а інший не охоплював початок координат (рис. 8.35).

Значення A і ω_a визначаються з криволінійного чотирикутника (за умови, що $A_1 > A_2$) за формулами

$$A = A_2 + \frac{bO}{ab}(A_1 - A_2);$$

$$\omega_a = \omega_1 + \frac{cO}{cd}(\omega_2 - \omega_1).$$

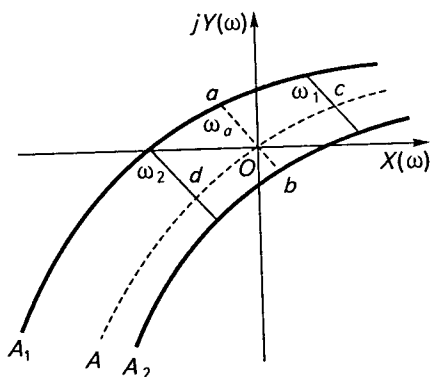


Рис. 8.35

Стійкість автоколивань перевіряється так. Якщо за додатного приросту амплітуди годограф вектора Михайлова відповідає стійкій системі, то й автоколивання стійкі.

Системи з нелінійними елементами, що мають несиметричні характеристики. Структурна схема системи у цьому разі має вигляд, зображений на рис. 8.36 (структуру нелінійної ланки подано відповідно до рис. 8.27, б). У спектрі вихідного сигналу нелінійного елемента навіть за відсутності зовнішньої дії ($f(t) = 0$) буде постійна складова A_0 , яку зображено на структурній схемі у вигляді зовнішньої дії. Величина A_0 визначається за формулою (8.50).

Рівняння для постійної складової у цьому разі

$$X_0 = A_0 W_n(0) = -\varepsilon_0$$

або

$$\varepsilon_0 = -A_0 W_n(0). \quad (8.80)$$

Для гармонічної складової залишається справедливою передаточна функція (8.71) і умова (8.73). Різниця полягає у тому, що в зв'язку з наявністю постійної складової значення A_0 , k_r і k'_r будуть функціями трьох параметрів: $\varepsilon_0 = -x_0$, A і ω , тобто рівняння (8.75) матимуть вигляд

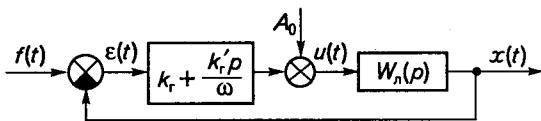


Рис. 8.36

$$X(A, \omega, \varepsilon_0) = 0; \quad (8.81)$$

$$Y(A, \omega, \varepsilon_0) = 0, \quad (8.82)$$

а рівняння (8.80) —

$$\varepsilon_0 = -A_0(A, \omega, \varepsilon_0) W_n(0). \quad (8.83)$$

Отже, для визначення трьох невідомих A , ω , ε_0 є система трьох рівнянь (8.81), (8.82), (8.83).

Системи з постійною зовнішньою дією. Якщо у довільній точці нелінійної системи прикладено постійну зовнішню дію F_0 , то на вході нелінійної ланки з'явиться постійна складова. Якщо характеристика нелінійного елемента симетрична відносно початку координат (непарна характеристика), то внаслідок гармонічної лінеаризації нелінійний елемент можна описати рівнянням (8.59), у якому коефіцієнти k_{r0} , k_r і k'_r є функціями трьох параметрів A , ω , ε_0 .

Для постійної складової справедливим є рівняння

$$\varepsilon_0 = W_{30}(0) F_0, \quad (8.84)$$

де

$$W_{30}(0) = \frac{W_{F_0}(0)}{1 + k_{r0}(A, \omega, \varepsilon_0)W_n(0)};$$

$W_{F_0}(0)$ — передаточна функція частини системи між точками прикладання сигналів ε_0 і F_0 .

Для гармонічної складової система рівнянь повністю збігається з (8.81), (8.82). Отже, і в цьому разі для визначення трьох невідомих A , ω , ε_0 є три рівняння (8.81), (8.82) і (8.84).

Якщо характеристика нелінійної ланки несиметрична, то рівняння (8.84) слід замінити рівнянням

$$\varepsilon_0 = -W_n(0)A_0(A, \omega, \varepsilon_0) + W_{F_0}(0)F_0. \quad (8.85)$$

Вимушені рухи, зумовлені гармонічними вхідними сигналами. При гармонічних вхідних сигналах можливі два варіанти поведінки системи. У першому припускається, що автоколивання в системі відсутні, тобто вони або принципово неможливі, або зовнішні дії такі, що режим автоколивань не виникає. У цьому разі для аналізу динаміки системи можна користуватися гармонічно лінеаризованими передаточними функціями нелінійних ланок.

Якщо ж у системі існують автоколивання і до неї прикладена зовнішня гармонічна дія, то або відбудеться «захоплювання», тобто автоколивання будуть придушені і в системі встановиться рух з частотою зовнішньої дії, або одночасно існуватимуть два види рухів: автоколивання і вимушені коливання.

Розглянемо спочатку вимушені рухи за відсутності автоколивань. Нехай структурна схема системи має вигляд, зображений на рис. 8.29, причому гармонічно лінеаризована передаточна функція $W_{нл}(A)$ нелінійної ланки є функцією тільки амплітуди A . Вхідний сигнал $f(t) = A_0 \sin \omega_0 t$, де A_0 , ω_0 — амплітуда і частота зовнішньої гармонічної дії.

Відповідно до структурної схеми, зображеної на рис. 8.29, сигнал на вході нелінійної ланки

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1 + W_{нл}(A)W_n(p)} f(t). \quad (8.86)$$

Складність визначення вимушеного руху $\varepsilon(t)$ за рівнянням (8.86) полягає в тому, що для його визначення треба знати передаточну функцію $W_{нл}(A)$, а вона, своєю чергою, залежить від A , де $A = |\varepsilon|$.

Розглянемо один із можливих графічних способів розв'язування рівняння (8.86). Задаючи різні значення амплітуди A і використовуючи формулу гармонічної лінеаризації конкретного нелінійного елемента, за формулою (8.86) при $p = j\omega_0$ розраховуємо залежність $|\varepsilon| = f_1(A)$ (рис. 8.37). Точка перетину графіка цієї залежності з бісектрисою $|\varepsilon| = A$ визначає амплітуду вимушених коливань A_b .

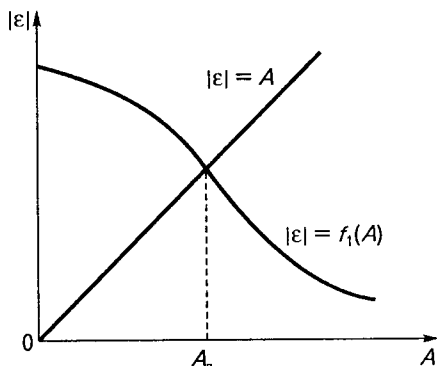


Рис. 8.37

Фазу сигналу ε можна знайти так само, як і для лінійних систем, попередньо визначивши $W_{\text{нл}}(A)$ при $A = A_b$. Тоді

$$\frac{1}{1 + W_{\text{нл}}(A_b)W_{\text{л}}(j\omega_0)} = U(\omega_0) + jV(\omega_0)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{V(\omega_0)}{U(\omega_0)}.$$

Отже, сигнал ε визначається повністю:

$$\varepsilon(t) = A_b \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Розглянемо тепер вимушені рухи в системі з автоколиваннями. Нехай, як і раніше, структурна схема системи має вигляд, зображений на рис. 8.29, причому

$$W_{\text{л}}(p) = R_1(p)/Q_1(p);$$

$$W_{\text{нл}} = W_{\text{нл}}(A_\varepsilon, p) = R_2(A_\varepsilon, p)/Q_2(A_\varepsilon, p),$$

де A_ε — амплітуда вимушених коливань, яку треба визначити.

Зовнішня дія має вигляд $f(t) = A_0 \sin \omega_0 t$. Знаходимо розв'язок для $\varepsilon(t)$ у формі

$$\varepsilon(t) = A_\varepsilon \sin(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon). \quad (8.87)$$

Подамо зовнішню дію $f(t)$ у такому вигляді:

$$f(t) = A_0 \sin \omega_0 t = A_0 \sin [(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon) + \varphi_\varepsilon] =$$

$$= A_0 \sin(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon) \cos \varphi_\varepsilon + A_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon) \sin \varphi_\varepsilon. \quad (8.88)$$

З рівняння (8.87) дістанемо

$$\sin(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon) = \varepsilon(t)/A_\varepsilon. \quad (8.89)$$

Здиференціювавши (8.89), визначимо

$$\cos(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon) = p\varepsilon/A_\varepsilon\omega_0. \quad (8.90)$$

Підставимо значення $\sin(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon)$ і $\cos(\omega_0 t - \varphi_\varepsilon)$ в (8.88), тоді

$$f(t) = (A_0 \cos \varphi_\varepsilon) \varepsilon(t)/A_\varepsilon + (A_0 \sin \varphi_\varepsilon) p\varepsilon/A_\varepsilon\omega_0. \quad (8.91)$$

Згідно зі структурною схемою, наведеною на рис. 8.29,

$$\frac{\varepsilon(t)}{f(t)} = \frac{1}{1 + W_{\text{л}}(p)W_{\text{нл}}(A_\varepsilon, p)} = \frac{Q_1(p)Q_2(A_\varepsilon, p)}{Q_1(p)Q_2(A_\varepsilon, p) + R_1(p)R_2(A_\varepsilon, p)},$$

звідки

$$\varepsilon(t) [Q_1(p)Q_2(A_\varepsilon, p) + R_1(p)R_2(A_\varepsilon, p)] - f(t)Q_1(p)Q_2(A_\varepsilon, p) = 0. \quad (8.92)$$

Після підстановки в це рівняння значення $f(t)$ за формулою (8.91) отримаємо

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) \left\{ R_1(p)R_2(A_\varepsilon, p) + Q_1(p)Q_2(A_\varepsilon, p) \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{A_0 \cos \varphi_\varepsilon}{A_\varepsilon} - \frac{pA_0 \sin \varphi_\varepsilon}{A_\varepsilon\omega_0} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Рівняння (8.93) є однорідним диференціальним рівнянням, коефіцієнти якого залежать від невідомих величин A_ε і φ_ε , а також відомих величин A_0 , ω_0 і параметрів системи.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} D(A_\varepsilon, p) = R_1(p)R_2(A_\varepsilon, p) + Q_1(p)Q_2(A_\varepsilon, p) \\ \times \left[1 - \frac{A_0 \cos \varphi_\varepsilon}{A_\varepsilon} - \frac{pA_0 \sin \varphi_\varepsilon}{A_\varepsilon\omega_0} \right] = 0. \end{aligned}$$

У системі встановлюються коливання з частотою ω_0 , якщо це рівняння справедливе при $p = j\omega_0$, тобто якщо виконується умова

$$R_1(j\omega_0)R_2(A_\varepsilon, j\omega_0) + Q_1(j\omega_0)Q_2(A_\varepsilon, j\omega_0) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{A_0 \cos \varphi_\epsilon}{A_\epsilon} - j \frac{A_0 \sin \varphi_\epsilon}{A_\epsilon} \right] = 0. \quad (8.94)$$

Рівність (8.94) можлива, якщо дорівнюють нулю її дійсна і уявна частини. Тому, подавши цю рівність у вигляді

$$X(A_0, \omega_0, A_\epsilon, \varphi_\epsilon) + jY(A_0, \omega_0, A_\epsilon, \varphi_\epsilon) = 0,$$

дістанемо два рівняння з двома невідомими A_ϵ і φ_ϵ :

$$X(A_0, \omega_0, A_\epsilon, \varphi_\epsilon) = 0; \quad (8.95)$$

$$Y(A_0, \omega_0, A_\epsilon, \varphi_\epsilon) = 0. \quad (8.96)$$

Якщо система рівнянь (8.95) і (8.96) має дійсні додатні розв'язки, то умови захоплення виконуються і автоколивання у системі будуть придушені.

З рівнянь (8.95) і (8.96) можна знайти залежності A_ϵ і φ_ϵ від амплітуди A_0 і частоти ω_0 вхідного сигналу, а також від параметрів системи. Найбільший інтерес становить залежність мінімального значення амплітуди $A_{0 \min}$, за якого ще виконується умова захоплення, від частоти ω_0 . Залежність $A_{0 \min} = f(\omega_0)$ називається *пороговою частотною характеристикою*.

Умови захоплення дають змогу визначити, якими зовнішніми діями можна придушити небажані автоколивання і вибрати такі з них, за яких у системі встановлюються вимушені коливання з допустимими амплітудою і частотою.

Контрольні запитання та завдання

1. Що розуміють під нелінійною системою? У чому полягає принципова різниця між лінійними і нелінійними системами?
2. Перелічіть основні типові нелінійні характеристики і наведіть їх математичний опис.
3. Яка структурна схема нелінійної системи називається найпростішою? Як привести до найпростішої структурну схему будь-якої замкнутої нелінійної САК, що містить одну нелінійну ланку?
4. Дайте визначення таким поняттям: фазовий простір, зображуюча точка, фазова траєкторія.
5. Що таке автоколивання?
6. Як побудувати фазовий портрет нелінійної системи другого порядку?

7. Вкажіть типи особливих ліній на фазовій площині.
8. Як за фазовим портретом нелінійної системи можна визначити показники якості перехідних процесів?
9. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість нелінійних систем і наведіть її геометричну інтерпретацію.
10. Як дослідити стійкість нелінійної системи методом Ляпунова?
11. Дайте визначення поняттю абсолютна стійкість.
12. Сформулюйте умови абсолютної стійкості та поясніть, як визначити абсолютну стійкість за методом Попова.
13. У чому полягає суть точкового перетворення Андронова?
14. Що означає гармонічна лінеаризація нелінійних характеристик і як вона виконується? У чому полягає принципова різниця між гармонічною і звичайною лінеаризаціями несуттєвих нелінійностей?
15. Який вигляд мають гармонічно лінеаризовані передаточні функції нелінійних ланок з однозначними непарними характеристиками, з неоднозначними непарними характеристиками, з характеристиками, несиметричними відносно початку координат?
16. Як визначити параметри автоколивань методом Гольдфарба?
17. Яким чином можна поширити метод Гольдфарба на випадок, коли в системі є дві нелінійні ланки, розділені інерційними лінійними ланками?
18. Як дослідити стійкість і автоколивання нелінійної системи методом Попова?
19. Скільки параметрів треба визначити при дослідженні автоколивань у системі з нелінійним елементом, що має несиметричну характеристику? Як скласти рівняння для визначення цих параметрів?
20. Як визначити параметри автоколивань у нелінійних системах із постійною зовнішньою дією?
21. Як визначити параметри вимушених коливань у нелінійних системах?

ОЦІНКА ЯКОСТІ, КОРЕКЦІЯ І СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

9.1

Оцінка якості нелінійних САК

Для оцінки якості перехідних процесів у нелінійних САК можна використовувати показники, аналогічні показникам якості лінійних систем, а саме тривалість перехідного процесу (тривалість регулювання), перерегулювання або максимальне відхилення в перехідний період, коливальність перехідного процесу. Особливість нелінійних систем виявляється в тому, що показники якості залежать від величини зовнішньої дії. Тому для повної оцінки якості необхідно виконати розрахунки перехідних процесів для всіх можливих реальних значень вхідних сигналів і збуджуючих дій. Крім того, важливим є визначення умов виникнення автоколивань і обчислення їхніх параметрів.

Наближену, але досить точну оцінку якості нелінійної системи можна дістати без розрахунків перехідних процесів. Для цього, зокрема, використовується показник коливальності.

Розглянемо нелінійну систему, структурна схема якої зведена до найпростішої (див. рис. 8.2). Вона складається з лінійної частини, що має частотну передаточну функцію $W_n(j\omega)$, і нелінійної ланки з нелінійною статичною характеристикою $\varphi(\varepsilon)$. Застосувавши гармонічну лінеаризацію, запишемо передаточну функцію нелінійної ланки у вигляді

$$W_{нл}(a) = k_r(a) + jk_r'(a).$$

Як і у лінійних системах, показником коливальності для гармонічно лінеаризованої системи є максимальне значення ординати амплітудної характеристики замкнутої системи M_{\max} за початкової ординати, що дорівнює одиниці, тобто

$$M = |W_3(j\omega, \alpha)|_{\max},$$

де $W_3(j\omega, \alpha)$ — частотна передаточна функція замкнутої системи.

При гармонічній лінеаризації використовуються так звані нормовані коефіцієнти $k_r(\alpha)$ і $k_r'(\alpha)$, де $\alpha = a/c$ — відносна амплітуда; c — характерне значення ϵ на статичній характеристиці нелінійної ланки (див. рис. 8.1).

Значення нормованих коефіцієнтів гармонічної лінеаризації для типових нелінійних ланок, статичні характеристики яких зображено на рис. 8.1, визначаються за такими формулами:

характеристика із зоною нечутливості (див. рис. 8.1, а)

$$k_r(\alpha) = 0 \quad \text{при } \alpha < 1;$$

$$\left\{ k_r(\alpha) = k_n \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \right] \quad \text{при } \alpha \geq 1; \right.$$

$$k_n = \text{tg } \alpha; \quad (9.1)$$

характеристика із зоною насичення (див. рис. 8.1, б)

$$k_r(\alpha) = k_n \quad \text{при } \alpha < 1;$$

$$\left\{ k_r(\alpha) = k_n \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \quad \text{при } \alpha \geq 1; \right.$$

$$k_n = \text{tg } \alpha; \quad (9.2)$$

релейна характеристика (див. рис. 8.1, в)

$$\begin{cases} k_r(\alpha) = k_n/\alpha; \\ k_n = 4b/\pi; \end{cases} \quad (9.3)$$

характеристика з люфтом (див. рис. 8.1, г)

$$\left\{ \begin{aligned} k_r(\alpha) &= \frac{k_n}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2}{\alpha} \right) + 2 \left(1 - \frac{2}{\alpha} \right) \frac{\sqrt{\alpha - 1}}{\alpha} \right]; \\ k_r'(\alpha) &= -\frac{4k_n}{\pi} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}; \\ k_n &= \text{tg } \alpha; \end{aligned} \right. \quad (9.4)$$

релейна характеристика із зоною нечутливості (див. рис. 8.1, д)

$$\begin{cases} k_r(\alpha) = 0 & \text{при } \alpha < 1; \\ k_r'(\alpha) = k_n \frac{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} & \text{при } \alpha \geq 1; \\ k_n = 2b/\pi c & \text{при } \alpha \geq 1; \end{cases} \quad (9.5)$$

характеристика реального релейного елемента (див. рис. 8.1, е)

$$\begin{cases} k_r(\alpha) = k_n \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2}; \\ k_r'(\alpha) = -k_n/\alpha^2; \\ k_n = 4b/\pi c. \end{cases} \quad (9.6)$$

Передаточна функція нелінійної ланки при використанні нормованих коефіцієнтів гармонічної лінеаризації

$$W_{нл}(\alpha) = k_r(\alpha) + jk_r'(\alpha). \quad (9.7)$$

Відповідно до структурної схеми, наведеної на рис. 8.2, запишемо

$$W_3(j\omega, \alpha) = \frac{W_n(j\omega)W_{нл}(\alpha)}{1 + W_n(j\omega)W_{нл}(\alpha)}.$$

Якщо ввести поняття оберненої передаточної функції нелінійної ланки

$$Z(\alpha) = 1/W_{нл}(\alpha), \quad (9.8)$$

то вираз для $W_3(j\omega, \alpha)$ можна записати так:

$$W_3(j\omega, \alpha) = \frac{W_n(j\omega)}{Z(\alpha) + W_n(j\omega)}.$$

Передаточні функції $W_n(j\omega)$ і $Z(\alpha)$ подамо у вигляді суми дійсної та уявної частин:

$$\begin{aligned} W_n(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega); \\ Z(\alpha) &= r + jr'(\alpha). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Тоді показник коливальності M запишемо у вигляді

$$M = |W_3(j\omega, \alpha)| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(r + U)^2 + (r' + V)^2}}.$$

Піднесемо в квадрат ліву і праву частини цієї рівності:

$$M^2(r + U)^2 + M^2(r' + V)^2 = U^2 + V^2;$$

$$(M^2 - 1)U^2 + (M^2 - 1)V^2 + M^2r^2 + 2M^2rU + M^2r'^2 + 2M^2r'V = 0.$$

Поділимо всі члени останньої рівності на $M^2 - 1$, а також додамо і віднімемо член $M^4/(M^2 - 1)^2$. Тоді після деяких математичних перетворень дістанемо

$$\left(U + \frac{rM^2}{M^2 - 1}\right)^2 + \left(V + \frac{r'M^2}{M^2 - 1}\right)^2 = \frac{(r^2 + r'r)M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (9.10)$$

або

$$(U - U_0)^2 + (V - V_0)^2 = R^2. \quad (9.11)$$

Звідси випливає, що для заданих сталих значень M і α рівнянню (9.11) у комплексній площині відповідає коло з радіусом R і координатами центра (U_0, jV_0) . Координати центра і радіуса дістають безпосередньо з порівняння виразів (9.10) і (9.11). Їх можна також знайти як функції нормованих коефіцієнтів гармонічної лінеаризації, визначивши r і r' через k і k'_r за допомогою виразів (9.7), (9.8) і (9.9). У результаті

$$U_0 = -\frac{rM^2}{M^2 - 1} = -\frac{k_r}{k_r^2 + k_r'^2} \frac{M^2}{M^2 - 1};$$

$$V_0 = -\frac{r'M^2}{M^2 - 1} = -\frac{k_r'}{k_r^2 + k_r'^2} \frac{M^2}{M^2 - 1};$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2} \frac{M}{M^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{k_r^2 + k_r'^2}} \frac{M}{M^2 - 1}.$$

Якщо прийняти показник коливальності незмінним ($M = \text{const}$), то для різних значень відносної амплітуди дістанемо сім'ю кіл. Заборонена зона, що відповідає бажаному показнику коливальності, створюється лініями, дотичними до цих кіл (рис. 9.1, а).

У найпростішому випадку, коли нелінійна характеристика однозначна і симетрична відносно початку координат (непарна), кое-

фіцієнт k_r' дорівнює нулю, отже, $r' = 0$ і $V_0 = 0$. Тоді радіус кола, що відповідає $M = \text{const}$, обчислюється за формулою

$$R = \frac{1}{k_r} \frac{M}{M^2 - 1},$$

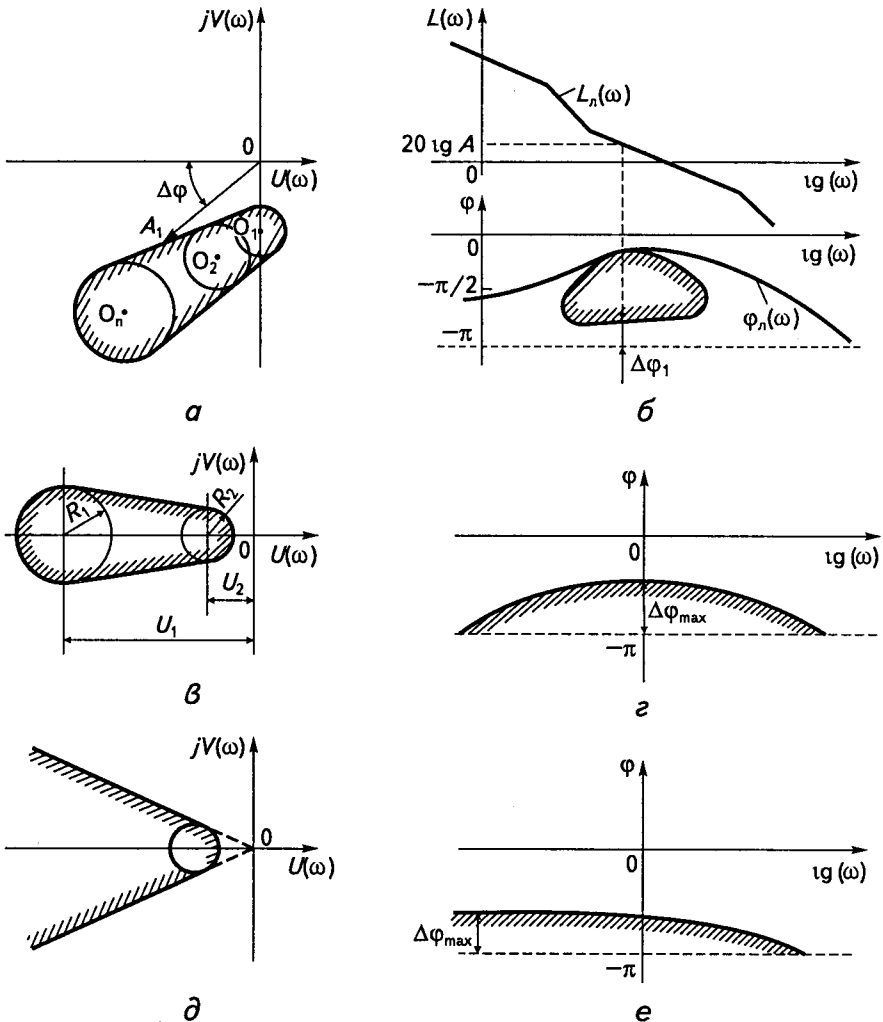


Рис. 9.1

а координатами центра є (U_0, j_0) , де

$$U_0 = -\frac{1}{k_r} \frac{M^2}{M^2 - 1}.$$

Для визначення показника коливальності необхідно на площині $U(\omega), jV(\omega)$ побудувати АФХ лінійної частини $W_n(j\omega)$ і заборонені зони для різних $M = \text{const}$. Показник коливальності визначається величиною M тієї забороненої зони, до якої дотикається характеристика $W_n(j\omega)$, не заходячи всередину зони. Нелінійні властивості системи виявляються в розширенні та зміщенні заборонених зон для $M = \text{const}$ порівняно з лінійними системами за рахунок змінювання коефіцієнтів гармонічної лінеаризації у разі зміни амплітуди коливань на вході нелінійної ланки.

При використанні логарифмічних характеристик будуються заборонені зони для ЛФХ лінійної частини системи. Для цього спочатку будується ЛАХ лінійної частини системи $L_n(\omega)$ і заборонена зона для бажаного показника коливальності M в площині $U(\omega), jV(\omega)$. Потім задають яке-небудь значення амплітуди $A(\omega)$ і, користуючись межею забороненої зони в площині $U(\omega), jV(\omega)$, визначають запас за фазою $\Delta\varphi$, що відповідає амплітуді $A(\omega)$. За амплітудою $A(\omega)$ визначають логарифмічну амплітуду $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ і для неї на графіку $\varphi(\omega)$ відкладають значення запасу за фазою $\Delta\varphi$. Послідовність побудови однієї точки забороненої зони для ЛФХ, що відповідає амплітуді A_1 , показано на рис. 9.1, а і б. Для забезпечення заданого показника коливальності ЛФХ не повинна заходити у заборонену зону.

Якщо нелінійна характеристика однозначна і непарно-симетрична, то побудова забороненої зони в комплексній і логарифмічній площинах істотно спрощується. Нехай при змінюванні амплітуди коефіцієнт $k_r(\alpha)$ змінюється в межах від $k_{r \min}(\alpha)$ до $k_{r \max}(\alpha)$. Тоді, для того щоб дістати заборонену зону, достатньо побудувати кола з радіусами

$$R_1 = \frac{1}{k_{r \min}} \frac{M^2}{M^2 - 1}; \quad R_2 = \frac{1}{k_{r \max}} \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

і центрами в точках $(U_1, j0)$ і $(U_2, j0)$, де

$$U_1 = -\frac{1}{k_{r \min}} \frac{M^2}{M^2 - 1}; \quad U_2 = -\frac{1}{k_{r \max}} \frac{M^2}{M^2 - 1},$$

а потім провести загальні дотичні до цих кіл (рис. 9.1, в).

Якщо коефіцієнт гармонічної лінеаризації змінюється в межах $0 \leq k_r(\alpha) \leq k_{r \max}(\alpha)$, то заборонена зона буде незамкнутою, оскільки при $k_r(\alpha) = 0$ $U_0 = \infty$ і $R = \infty$. Вона обмежується дугою кола, що відповідає $k_{r \max}$, і проведеними до неї дотичними через початок координат (рис. 9.1, д).

Заборонені зони для ЛФХ, що відповідають розглянутим випадкам, наведено на рис. 9.1, з і е. Для цих нелінійностей максимальний запас за фазою $\Delta\varphi_{\max}$ не залежить від значення відносної амплітуди α і становить

$$\Delta\varphi_{\max} = \arcsin \frac{1}{M}, \quad (9.12)$$

тобто визначається лише показником коливальності.

Для побудови заборонених зон на логарифмічній площині для однозначних парно-симетричних нелінійностей зручно користуватися кривими, наведеним на рис. 9.2, що зображують залежність запасу за фазою $\Delta\varphi$ від модуля в децибелах для різних значень показника коливальності.

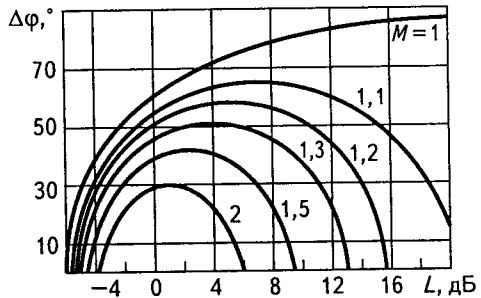


Рис. 9.2

Розглянута методика оцінки якості дає змогу визначити показник коливальності нелінійної системи. Її доцільно використовувати при синтезі лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах (див. п. 9.3). Більш повне уявлення про динаміку нелінійної системи дає діаграма якості Є. П. Попова. Для пояснення її суті розглянемо коливальний перехідний процес, який у першому наближенні можна описати збіжною або розбіжною синусоїдами.

У лінійних системах збіжний коливальний перехідний процес описується рівнянням $x = A_0 e^{-\xi t} \sin \omega t$, де $-\xi \pm j\omega$ — пара комплексно-спряжених коренів, що визначають основну частину перехідного процесу. Для нелінійної системи, яка задовольняє умову фільтра, можна вважати, що сигнал на вході нелінійної ланки становить

$$\varepsilon = A \sin \omega t = A \sin \varphi, \quad (9.13)$$

причому показник затухання ξ і частота ω повільно змінюються з часом так, що

$$dA/dt = A\xi; \quad d\varphi/dt = \omega. \quad (9.14)$$

Оскільки змінними є A і φ , то з (9.13) дістанемо

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\omega \cos \omega t + \frac{dA}{dt} \sin \omega t,$$

або з урахуванням (9.14)

$$d\varepsilon/dt = p\varepsilon = A\omega \cos \varphi + A\xi \sin \varphi. \quad (9.15)$$

З виразу (9.15) визначимо

$$\cos \varphi = \frac{p\varepsilon}{A\omega} - \frac{\xi \sin \varphi}{\omega},$$

але оскільки з (9.13) маємо

$$\sin \varphi = \varepsilon/A, \quad (9.16)$$

то

$$\cos \varphi = \frac{p\varepsilon}{A\omega} - \frac{\xi\varepsilon}{A\omega} = (p - \xi) \frac{\varepsilon}{A\omega}. \quad (9.17)$$

Згідно з виразом (8.53) сигнал на виході нелінійної ланки обчислюється за формулою

$$u = A_1 \sin \varphi + B_1 \cos \varphi,$$

або, якщо ввести коефіцієнти гармонічної лінеаризації k_r і k'_r ,

$$u = k_r A \sin \varphi + k'_r A \cos \varphi,$$

і з урахуванням (9.16) і (9.17)

$$u = F(\varepsilon, p\varepsilon) = \left(k_r + k'_r \frac{p - \xi}{\omega} \right) \varepsilon,$$

де

$$k_r = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(\sin \varphi, A\omega \cos \varphi + A\xi \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi;$$

$$k'_r = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi, A\omega \cos \varphi + A\xi \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

З останніх виразів видно, що коефіцієнти гармонічної лінеаризації і передаточна функція нелінійної ланки

$$W_{нл}(A, \omega, \xi) = k_r + k_r' \frac{p - \xi}{\omega} \quad (9.18)$$

залежать від трьох невідомих параметрів A , ω , ξ .

Розглянемо нелінійну систему, структурну схему якої наведено на рис. 8.29, прийнявши $W_n(p) = R(p)/Q(p)$ і $W_{нл}(A, \omega, \xi)$ відповідно до виразу (9.18).

Характеристичне рівняння у цьому разі

$$D(p) = Q(p) + R(p) \left(k_r + k_r' \frac{p - \xi}{\omega} \right) = 0.$$

Оскільки припускається, що процес збіжний або розбіжний коливальний, то справедливою буде підстановка $p = \xi + j\omega$, причому ξ і ω — не сталі величини, а функції, які повільно змінюються. В цьому разі комплексне характеристичне рівняння матиме вигляд

$$D(j\omega, \xi, A) = Q(\xi + j\omega) + R(\xi + j\omega)(k_r + jk_r') = 0. \quad (9.19)$$

У рівняння (9.19) входять три невідомі величини ξ , ω і A (від A залежать коефіцієнти k_r і k_r'). Якщо прирівняти нулю дійсну і уявну частини рівняння (9.19), то дістанемо два рівняння, з яких знаходимо залежності $\xi = \xi(A)$ і $\omega = \omega(A)$. Потім, використовуючи рівняння (9.14) за початкових умов $t = 0$, $A = A_0$, $\varphi = \varphi_0$, знаходимо

$$t = \int_{A_0}^A \frac{dA}{A\xi(A)}; \quad (9.20)$$

$$\varphi = \int_0^t \omega(A) dt + \varphi_0. \quad (9.21)$$

З виразу (9.20) визначаємо $A(t)$, а з виразу (9.21) після підстановки $A(t)$ в $\omega(A) = \varphi(t)$. Отже, можна знайти змінну $\varepsilon = A(t) \sin \varphi(t)$, яка визначає якість перехідного процесу.

Якість перехідних процесів можна оцінити без аналітичного розв'язування, якщо скористатися діаграмою якості Попова. Припустимо, що серед параметрів системи є один, що змінюється. Звичайно — це коефіцієнт підсилення розімкнутої системи K . Тоді рівняння (9.19) можна подати у вигляді

$$D(j\omega, \xi, A, K) = X(\omega, \xi, A, K) + jY(\omega, \xi, A, K)$$

і, прирівнявши до нуля дійсну і уявну частини, отримати систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} X(\omega, \xi, A, K) = 0; \\ Y(\omega, \xi, A, K) = 0. \end{cases} \quad (9.22)$$

Розв'язавши систему рівнянь (9.22) відносно ω і ξ , дістанемо

$$\xi = f_1(K, A); \quad \omega = f_2(K, A).$$

Прийнявши $\xi = \text{const}$ і $\omega = \text{const}$, на площині параметрів K, A побудуємо лінії однакових значень ω і ξ (рис. 9.3, а і б), які називають *діаграмами якості*.

При $\xi = 0$ затухання відсутнє. Це відповідає автоколиванням. Тому лінія $\xi = 0$ розділяє діаграму якості на дві зони — із затухаючими (зона $\xi < 0$) та розбіжними (зона $\xi > 0$) коливаннями.

За діаграмою якості можна визначити умови виникнення автоколивань у системі та знайти їхні параметри. Наприклад, якщо змінюється параметр $K = K_1 < K_M$, то за будь-яких початкових умов за амплітудою ($A = A_0$) автоколивання неможливі і перехідний процес затухає. Дійсно, за початкових умов $A = A'_0$ або $A = A''_0$ стан системи визначається точками A' або A'' (рис. 9.3, а), які відповідають харак-

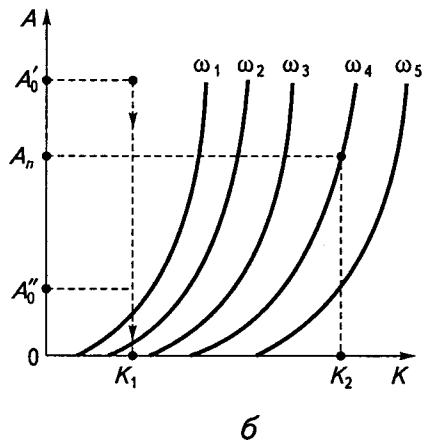
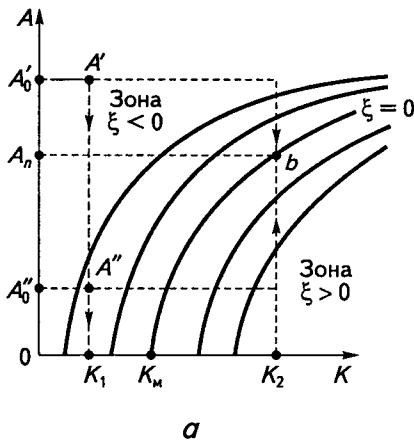


Рис. 9.3

теристикам з $\xi < 0$. Якщо коливання затухають, то точка, що визначає стан системи, переміщується в зоні характеристик $\xi < 0$ і амплітуда зменшується до $A = 0$. Частота при цьому відповідно до рис. 9.3, б змінюється від початкової ω_0 до $\omega_2 < \omega < \omega_3$. Якщо ж змінюється параметр $K = K_2 > K_M$, то за початкового значення амплітуди A'_0 коливання затухають, а при A''_0 — стають розбіжними, тобто в обох випадках точка, що визначає стан системи, потрапляє в точку b на характеристиці $\xi = 0$ і в системі встановлюються автоколивання з амплітудою A_n . Частота автоколивань визначається за діаграмою, наведеною на рис. 9.3, б і становить ω_4 .

Точно визначити показники якості можна розрахувавши перехідні процеси для різних вхідних і збурюючих дій. Ці розрахунки виконуються на ЕОМ, причому істотне значення має спосіб введення в ЕОМ інформації стосовно нелінійності.

Нелінійні характеристики можна задавати трьома способами: аналітичним, графічним і табличним.

Якщо нелінійність задано аналітично, то в робочу частину програми безпосередньо вводиться аналітична залежність, що апроксимує нелінійність. При графічному або табличному способах в ЕОМ вводиться таблиця дискретних значень нелінійної залежності, а проміжні значення обчислюються за допомогою різних методів інтерполяції.

9.2

Загальні відомості про методи синтезу коректувальних пристроїв у нелінійних системах

У загальному розумінні синтез — це процес розробки САК, у ході якого за заданими показниками якості визначають оптимальний варіант структури системи та параметри її ланок. Синтез у такій загальній постановці є досить складною задачею і може мати багато розв'язків.

Синтез нелінійних систем автоматичного керування електроприводами здебільшого не має такого загального характеру. Звичайно, частина елементів електропривода (електродвигун, перетворювач та інші елементи силового кола) визначається вимогами до виробничо-

го механізму (потрібна потужність, момент, швидкість тощо) і становить незмінювану частину системи. Синтез у цьому разі зводиться до розрахунку параметрів коректувальних пристроїв (змінюваної частини системи), які додатково вводяться в систему для забезпечення потрібних показників якості.

Корекція нелінійних систем має свої особливості порівняно з корекцією лінійних систем. Зокрема характер перехідних процесів нелінійних систем визначається не тільки їх структурою і параметрами, а й початковими умовами, а також місцем прикладання, величиною і формою зовнішніх дій. Прийнятними для роботи в реальних умовах є два стани нелінійних систем: статичний усталений режим і автоколивання.

Під час корекції нелінійних систем часто виникає задача підвищення частоти і зниження амплітуди автоколивань або повного їх усунення. Цю задачу в деяких випадках можна розв'язати за допомогою зміни параметрів лінійної частини (див. гл. 8, п. 8.10), а також за рахунок введення лінійних коректувальних пристроїв, що змінюють у бажаному напрямку передаточну функцію лінійної частини системи.

Коректувальні пристрої в нелінійних системах можуть бути *лінійними* або *нелінійними*. Визначення виду, місця введення в систему і параметрів коректувального пристрою становить задачу синтезу.

Можливості нелінійної корекції набагато більші, ніж лінійної, бо самі лінійні системи є окремим випадком нелінійних. Одним з найбільш очевидних випадків, коли доцільно застосовувати нелінійні коректувальні ланки, є компенсація небажаних нелінійностей. Справді, в багатьох нелінійних системах можуть бути такі нелінійності, як зони нечутливості, обмеження, сухе тертя тощо. Ці нелінійності часто роблять неможливим забезпечення потрібних показників якості системи, тому виникає необхідність компенсувати їх спеціально підібраними нелінійностями.

Іншим способом усунення негативного впливу нелінійностей є так звана вібраційна лінеаризація. Її суть полягає у згладжуванні нелінійностей за допомогою високочастотного сигналу.

Можливості нелінійної корекції далеко не вичерпуються компенсацією небажаних нелінійностей. У багатьох випадках нелінійну корекцію застосовують для того, щоб дістати потрібні нелінійні закони регулювання, що значно розширює її вплив на динаміку системи.

Є. П. Попов надав таку класифікацію нелінійних законів регулювання: функціональні, логічні, оптимізуючі, параметричні.

- *Функціональним нелінійним* називається закон регулювання, за якого регульовальна дія на об'єкт має вигляд нелінійної функції від відхилення регульованої величини. Нелінійне формування функціонального закону регулювання може бути пов'язане не тільки зі зміною параметрів системи, а й зі зміною структури.

- *Логічні нелінійні закони* реалізуються не функціональними пристроями, а відносно складними, логічними, які функціонують згідно із закладеним у них критерієм.

- *Оптимізуючі нелінійні закони* призначені для забезпечення оптимальних процесів регулювання. Методи оптимізації систем передбачають, як правило, застосування нелінійних законів керування.

- *Параметричні нелінійні закони регулювання* є нелійними функціями деяких координат, в яких задається параметрична програма.

Зараз розробляються і широко застосовуються в інженерній практиці різні методи синтезу, з допомогою яких розв'язуються окремі, хоч і досить поширені задачі синтезу коректувальних пристроїв нелінійних систем.

Це — методи компенсації нелінійностей, лінеаризація нелінійних систем високочастотним сигналом, застосування лінійних і нелінійних коректувальних пристроїв для забезпечення потрібних показників якості та ін. Далі розглядатимемо методи синтезу, що найчастіше застосовуються у проектуванні систем керування електроприладами.

9.3

Синтез лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах методом ЛАХ

Найдоцільніше використовувати ЛАХ при синтезі лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах, якщо внаслідок корекції необхідно забезпечити затухаючий перехідний процес із заданим показником коливальності. Най-

простіше задача синтезу розв'язується в системах з мінімально-фазовими лінійними ланками і однозначними статичними нелінійностями. При цьому слід враховувати, що у разі використання лінійних коректувальних пристроїв забезпечення певного значення показника коливальності M або необхідного запасу за фазою $\Delta\varphi$ буде можливим лише для нелінійностей, в яких нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації змінюється в межах $0 \leq k_r(\alpha) \leq k_{r \min}(\alpha)$. До таких належать нелінійності, що мають характеристики із зоною нечутливості (див. рис. 8.1, а), зоною насичення (див. рис. 8.1, б), релейну характеристику із зоною нечутливості (див. рис. 8.1, д) і деякі інші. Якщо нелінійність у системі така, що нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації змінюється в межах $k_{r \min}(\alpha) \leq k_r(\alpha) \leq \infty$ або $0 \leq k_r(\alpha) \leq \infty$, то за рахунок лінійної корекції не можна дістати затухаючий перехідний процес. Так, якщо в замкнутому контурі нелінійної системи є ланка з ідеальною релейною характеристикою, для якої $0 \leq k_r(\alpha) \leq \infty$, то в системі вище другого порядку завжди встановлюються автоколивання.

Порядок синтезу лінійних коректувальних ланок у нелінійних системах зберігається таким самим, як і в лінійних, хоча нелінійні ланки зумовлюють деякі особливості побудови логарифмічних характеристик.

Перш ніж будувати характеристики, виконується гармонічна лінеаризація нелінійної ланки. При цьому слід скористатися приведеними нормованими коефіцієнтами гармонічної лінеаризації, тобто коефіцієнти гармонічної лінеаризації слід подати у вигляді

$$k_r(\alpha) = k_n k_{r,n}(\alpha),$$

де $k_n = \text{const}$ — коефіцієнт передачі нелінійної ланки, що визначається за формулами, наведеними в п. 9.1 для різних видів нелінійних характеристик; $k_{r,n}(\alpha)$ — приведений нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації.

Коефіцієнт k_n при побудові ЛАХ відносять до лінійної частини системи і передаточну функцію розімкнутої системи записують так:

$$W(p, \alpha) = k_n k_{r,n}(\alpha) W_{л}(p) = k_{r,n}(\alpha) W_{л,n}(p),$$

де $W_{л,n}(p)$ — передаточна функція приведеної лінійної частини.

Приведення коефіцієнта гармонічної лінеаризації здійснюється за умови $k_{r,n \max}(\alpha) = 1$. В цьому разі значно спрощується побудова забороненої зони для ЛФХ при синтезі коректувальної ланки.

Синтез лінійної коректувальної ланки виконується в такій послідовності.

1. Будується асимптотична ЛАХ приведеної лінійної частини вихідної системи за передаточною функцією $W_{л.п}(p) = k_n W_n(p)$.

2. Будується бажана ЛАХ приведеної лінійної частини згідно з рекомендаціями теорії лінійних систем. При бажанні можна вибрати типові ЛАХ 3 або 4 з табл. 6.2. ЛАХ 5 і 8, що відповідають системам з астатизмом другого порядку, вибрати не рекомендується. Справді, якщо нелінійна характеристика така, що $0 \leq k_r(\alpha) \leq \infty$, то заборонена зона для ЛФХ має вигляд, зображений на рис. 9.1, е. В той самий час фазова характеристика астатичних систем другого порядку при зменшуванні частоти наближується до $\varphi = -\pi$, тому не можна забезпечити потрібний запас за фазою за будь-яких значень показника коливальності $M < \infty$.

З теорії лінійних систем відомо, що достатній запас за фазою забезпечується в разі, якщо нахил бажаної ЛАХ на частоті зрізу становитиме -20 дБ/дек і довжина середньочастотної частини ЛАХ h дорівнюватиме $\omega_3/\omega_2 \approx 10$. Збільшення довжини $h_1 = \omega_2/\omega_1$ частини ЛАХ з нахилом -40 дБ/дек, що міститься ліворуч від частоти зрізу, зменшує запас за фазою. Тому на величину h_1 накладаються обмеження.

При виборі значень h і h_1 рекомендується користуватися $h, h_1(M)$ -кривими залежності h і h_1 від показника коливальності. Для типових ЛАХ 3 і 4 (див. гл. 6, табл. 6.2) це криві 3 і 4, наведені на рис. 9.4.

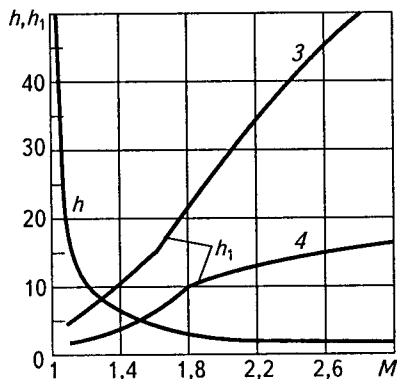


Рис. 9.4

Низькочастотна частина бажаної ЛАХ визначається згідно з вимогами щодо точності роботи системи в усталених режимах. Вона має проходити через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K, \lg \omega = 0$, де K — коефіцієнт передачі розімкнутої системи. Для нелінійних систем $K = k_n k_n$.

3. Виходячи з бажаної ЛАХ і ЛАХ вихідної системи, визначається ЛАХ коректувальної ланки, вибирається її схема й обчислюються параметри методами, викладеними в теорії лінійних систем (див. гл. 6, п. 6.11).

4. Перевіряються результати синтезу. Для цього будується ЛФХ скорегованої системи і заборонена зона, що відповідає бажаному показнику коливальності M . ЛФХ скорегованої системи не повинна заходити в заборонену зону.

- **Приклад 9.1.** Виконати синтез послідовної коректувальної ланки і визначити коефіцієнт підсилення підсилювача слідкувальної системи, структурну схему якої подано на рис. 9.5, *a*. У системі є інерційний підсилювач зі сталою часу $T_n = 0,01$ с і нелінійною статичною характеристикою з насиченням. Параметри характеристики: $c = 0,5$ рад; $b = 100$ В. Підсилювач на структурній схемі подано у вигляді безінерційної нелінійної ланки $\varphi(\varepsilon)$ і аперіодичної ланки з передаточною функцією $k_n/(T_n p + 1)$. Двигун із редуктором описується передаточною функцією

$$W_d(p) = \frac{k_d}{p(T_m p + 1)}$$

з такими параметрами: $k_d = 0,15$ 1/В · с; $T_m = 0,1$ с.

Вимоги до скорегованої системи: усталена похибка за відсутності моменту навантаження має не перевищувати $\varepsilon_{\max} = 0,002$ рад за максимальної швидкості змінювання задаючої дії $d\theta_{\text{нх}}/dt = 0,2$ 1/с і прискоренні $d^2\theta_{\text{нх}}/dt^2 = 0,1$ 1/с². Показник коливальності має не перевищувати 1,5.

Розв'язання. Спочатку визначимо коефіцієнт передачі розімкненої системи, що забезпечує потрібну точність роботи в усталеному режимі:

$$K = \frac{d\theta_{\text{нх}}/dt}{\varepsilon_{\max}} = \frac{0,2}{0,002} = 100 \text{ 1/с.}$$

Оскільки

$$K = k_n k_n k_d,$$

де k_n — коефіцієнт передачі нелінійної ланки на лінійній частині характеристики

$$k_n = \frac{b}{c} = \frac{100}{0,5} = 200 \text{ В/рад,}$$

то потрібний коефіцієнт підсилення підсилювача

$$k_n = \frac{K}{k_n k_d} = \frac{100}{200 \cdot 0,15} \approx 3,4.$$

Побудуємо тепер ЛАХ приведеної лінійної частини вихідної системи. Попередньо запишемо передаточну функцію розімкненої системи, яка після гармонічної лінеаризації матиме вигляд

$$W(p, \alpha) = W_n(p)k_{г.н}(\alpha),$$

де $W_n(p)$ — передаточна функція приведеної лінійної частини системи

$$W_n(p) = \frac{k_n k_n k_d}{p(T_n p + 1)(T_m p + 1)} = \frac{K}{p(T_n p + 1)(T_m p + 1)}; \quad (9.23)$$

$k_{г.н}(\alpha)$ — приведений нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації.

Для нелінійної ланки з насиченням згідно з (9.2)

$$k_{г.н}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\alpha} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right).$$

ЛАХ вихідної системи $L_{\text{вих}}(\omega)$ будемо за передаточною функцією (9.23). Низькочастотна частина ЛАХ проходить з нахилом -20 дБ/дек через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 100 = 40$ дБ; $\lg \omega = 0$. Знаходимо частоти сполуки асимптот

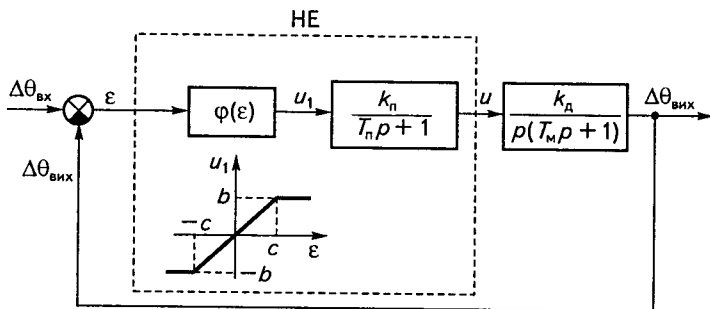
$$\omega_3 = 1/T_m = 1/0,1 = 10 \text{ с}^{-1}; \quad \lg \omega_3 = 1;$$

$$\omega_2 = 1/T_n = 1/0,01 = 100 \text{ с}^{-1}; \quad \lg \omega_2 = 2.$$

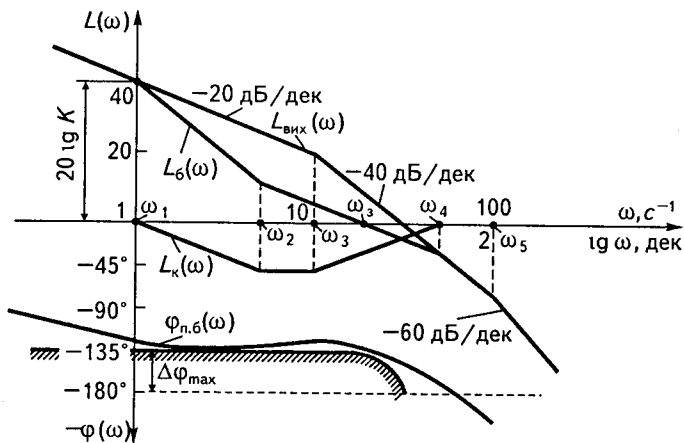
На кожній частоті сполуки нахил ЛАХ змінюється на -20 дБ/дек. Побудовану за наведеними даними ЛАХ вихідної системи $L_{\text{вих}}(\omega)$ зображено на рис. 9.5, б.

Бажану ЛАХ $L_6(\omega)$ будемо так. Вибираємо $L_6(\omega)$ за типом 4 (див. гл. 6, табл. 6.2). Для спрощення коректувальної ланки прагнутимемо суміщати $L_6(\omega)$ і $L_{\text{вих}}(\omega)$ там, де це можливо. Високочастотну частину $L_6(\omega)$ закінчимо ділянкою з нахилом -60 дБ/дек, сумістивши її з високочастотною частиною $L_{\text{вих}}(\omega)$. Ця частина ЛАХ міститься в зоні від'ємних децибелів ($L(\omega_3) = -20$ дБ) і практично не впливає на якість перехідного процесу. Для вибору довжини h середньочастотної частини ЛАХ з нахилом -20 дБ/дек і h_1 з нахилом -40 дБ/дек використаємо криві h, h_1 (див. рис. 9.4). Для одного з можливих варіантів корекції можна прийняти $h = \omega_4/\omega_2 = 10$ і $h_1 = \omega_2/\omega_1 = 5$ при частотах сполуки $\omega_4 = 50 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = \omega_4/10 = 5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = \omega_2/5 = 1 \text{ с}^{-1}$. Згідно з кривими h, h_1 при $h = 10$ показник коливальності M дорівнює 1,2, а при $h_1 = 5$ за кривою 4 — 1,5. Отже, бажаній ЛАХ $L_6(\omega)$ відповідає показник коливальності $1,2 < M < 1,5$, тобто вимоги до скорегованої системи задовольняються.

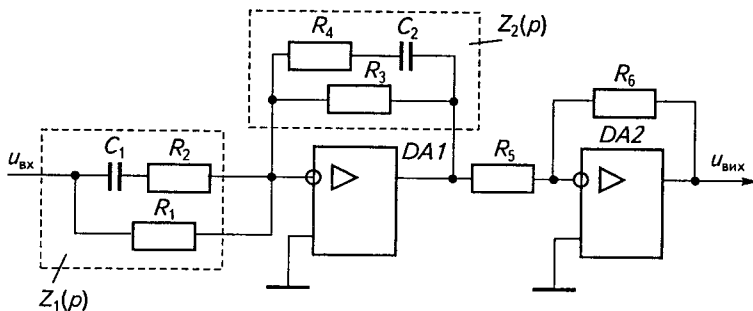
ЛАХ коректувальної ланки $L_k(\omega)$ визначається як різниця $L_6(\omega) - L_{\text{вих}}(\omega)$. За ЛАХ $L_k(\omega)$ з таблиці пасивних коректувальних ла-



а



б



в

Рис. 9.5

9.3. Синтез лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах методом ЛАХ

нок (див. гл. 6, табл. 6.1) визначаємо передаточну функцію коректувальної ланки

$$W_k(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad (9.24)$$

де $T_1 = 1/\omega_1 = 1$ с; $T_2 = 1/\omega_2 = 0,2$ с; $T_3 = 1/\omega_3 = 0,1$ с; $T_4 = 1/\omega_4 = 0,02$ с. Передаточну функцію (9.24) можна реалізувати на операційному підсилювачі *DA1* (рис. 9.5, а).

Згідно з (6.31) передаточна функція операційного підсилювача

$$W_{DA1}(p) = -Z_2(p)/Z_1(p).$$

Коефіцієнт підсилення операційного підсилювача *DA2* дорівнює одиниці ($R_5 = R_6$). Він призначений тільки для зміни полярності вхідної напруги. Тому передаточна функція коректувальної ланки записується у вигляді

$$W_k(p) = -Z_2(p)/Z_1(p),$$

але оскільки

$$Z_1(p) = \frac{R_1(R_2 C_1 p + 1)}{(R_1 + R_2)C_1 p + 1};$$

$$Z_2(p) = \frac{R_3(R_4 C_2 p + 1)}{(R_3 + R_4)C_2 p + 1},$$

то

$$W_k(p) = \frac{R_3(R_4 C_2 p + 1)[(R_1 + R_2)C_1 p + 1]}{R_1[(R_3 + R_4)C_2 p + 1](R_2 C_1 p + 1)}. \quad (9.25)$$

Порівнявши вирази (9.24) і (9.25), дістанемо такі співвідношення для обчислення параметрів схеми:

$$T_1 = (R_3 + R_4)C_2; \quad T_2 = R_4 C_2; \quad T_3 = (R_1 + R_2)C_1; \quad T_4 = R_2 C_1.$$

Крім того, оскільки при $\omega = 0$ і $\omega = \infty$ коефіцієнт передачі коректувальної ланки має дорівнювати одиниці, що впливає з вигляду $L_k(\omega)$, слід прийняти $R_1 = R_3$.

Вибираємо $C_1 = 1$ мкФ, тоді

$$R_2 = T_4/C_1 = 0,02/10^{-6} = 2 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 20 \text{ кОм};$$

$$R_1 = T_3/C_1 - R_2 = 0,1/10^{-6} - 2 \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 80 \text{ кОм};$$

$$R_3 = R_1 = 80 \text{ кОм};$$

$$C_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_3} = \frac{1 - 0,2}{8 \cdot 10^4} = 10^{-5} \Phi = 10 \text{ мкФ};$$

$$R_4 = T_2 / C_2 = 0,2 / 10^{-5} = 2 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 20 \text{ кОм}.$$

Для перевірки результатів синтезу побудуємо ЛФХ приведеної лінійної частини $\varphi_{н.б}(\omega)$ скорегованої системи і заборонену зону для неї, що відповідає показнику коливальності $M = 1,5$.

Передаточна функція приведеної лінійної частини скорегованої системи за умови, що $T_3 = T_m$ матиме вигляд

$$W_{н.б}(p) = \frac{K(T_2 p + 1)}{p(T_n p + 1)(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)}.$$

Фазова характеристика $\varphi_{н.б}(\omega)$ (рис. 9.5, б) визначається за формулою

$$\varphi_{н.б}(\omega) = -90^\circ - \arctg T_n \omega - \arctg T_1 \omega - \arctg T_4 \omega + \arctg T_2 \omega.$$

Для побудови забороненої зони знаходимо $\Delta\varphi_{\max}$ за формулою (9.12):

$$\Delta\varphi_{\max} = \arcsin \frac{1}{M} = \arcsin \frac{1}{1,5} = 42^\circ,$$

а криволінійну ділянку межі забороненої зони будемо за допомогою графіків, наведених на рис. 9.2.

Взаємне розташування характеристики $\varphi_{н.б}(\omega)$ і забороненої зони (лінія зі штриховкою) свідчить, що корекція в системі забезпечує збіжний перехідний процес, якість якого відповідає показнику коливальності $M = 1,5$.

9.4

Корекція релейних систем

за рахунок утворення ковзних режимів

У системах з двопозиційними реальними релейними елементами єдиною можливою усталеною незбуреним режимом є режим автоколиваний. Точність таких систем в усталеному режимі визначається відхиленням середнього значення вихідної величини при змінюванні збурення і амплітудою автоколивань відносно цього середнього значення.

Залежність амплітуди автоколивань від їх частоти визначається амплітудною частотною характеристикою безперервної частини системи, яка звичайно має обмежену смугу пропускання, тобто є фільтром нижніх частот. Тому за рахунок підвищення частоти автоколивань можна істотно зменшити їх амплітуду і, отже, підвищити точність роботи релейної системи.

Одним із способів підвищення частоти автоколивань є створення так званого *ковзного режиму*. Для пояснення його суті розглянемо систему, структурну схему якої наведено на рис. 9.6, а. Спочатку розглянемо систему без урахування гнучкого зворотного зв'язку $k_{зв.зр}$. Вільний рух системи при $g(t) = 0$ описується рівняннями

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = -x(t); \\ u(t) = \varphi(\varepsilon); \\ T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = ku(t). \end{cases} \quad (9.26)$$

Виключивши проміжні змінні, дістанемо

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k\varphi(x). \quad (9.27)$$

Побудуємо фазовий портрет системи, використовуючи методику, викладену в гл. 8, п. 8.4. Приймаючи $y = dx/dt$, рівняння (9.27) подано у вигляді двох рівнянь:

$$\begin{cases} y = dx/dt; \\ T \frac{dy}{dt} + y = -k\varphi(x), \end{cases} \quad (9.28)$$

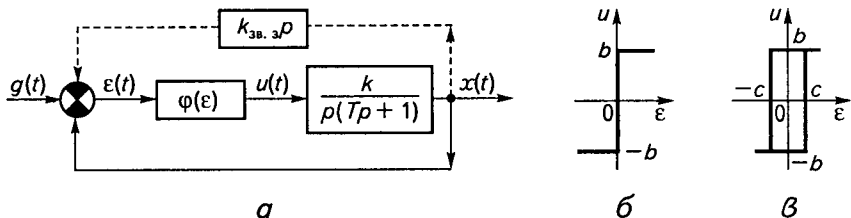


Рис. 9.6

а потім у вигляді одного диференціального рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 + k \frac{\varphi(x)}{y} \right). \quad (9.29)$$

Розв'язок цього рівняння, тобто вигляд фазових траєкторій, залежить від типу нелінійності $\varphi(\epsilon)$. Спочатку вважатимемо, що характеристика нелінійного елемента має вигляд, зображений на рис. 9.6, б, тобто функція $\varphi(\epsilon)$ може набувати тільки двох значень: $\varphi(\epsilon) = b$ при $\epsilon > 0$ і $\varphi(\epsilon) = -b$ при $\epsilon < 0$. На фазовій площині буде лінія перемикання, рівняння якої $x = 0$. Оскільки $x = -\epsilon$, то ліворуч від лінії перемикання розв'язок рівняння фазових траєкторій буде розв'язком рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 + \frac{kb}{y} \right), \quad (9.30)$$

а праворуч —

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 - \frac{kb}{y} \right). \quad (9.31)$$

Розв'язавши рівняння (9.30) і (9.31), дістанемо рівняння фазових траєкторій:

ліворуч від лінії перемикання

$$x = -kbT \ln |y - kb| - Ty + C_1, \quad (9.32)$$

праворуч

$$x = kbT \ln |y + kb| - Ty + C_2, \quad (9.33)$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування, що визначаються початковими умовами. Задавши початкові умови x_0, y_0 , дістанемо

$$C_1 = x_0 + kbT \ln |y_0 - kb| + Ty_0;$$

$$C_2 = x_0 - kbT \ln |y_0 + kb| + Ty_0.$$

Фазові траєкторії, побудовані за рівняннями (9.32) і (9.33), зображено на рис. 9.7, а. Лінію перемикання позначено штриховкою.

Фазовий портрет системи на рис. 9.7, а відповідає затухаючому перехідному процесу і стійкій у цілому системі. Теоретично в такій

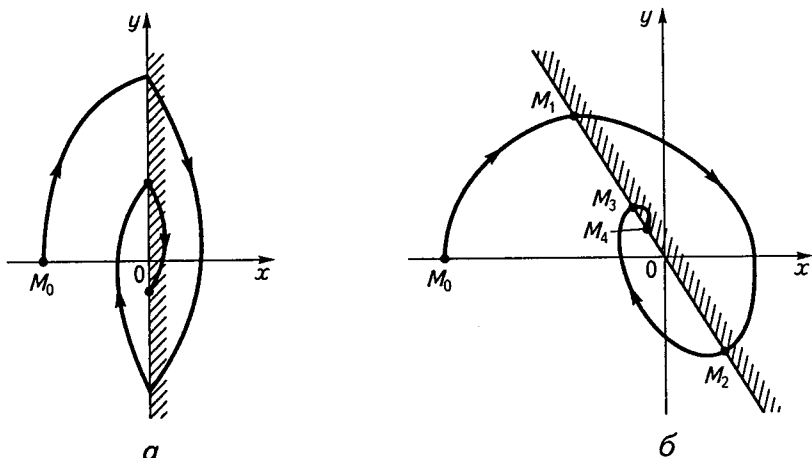


Рис. 9.7

системі в стані, що відповідає початку координат фазової площини, мають існувати автоколивання нескінченно малої амплітуди з нескінченно великою частотою.

Розглянемо, як зміниться фазовий портрет системи, якщо охопити її гнучким від'ємним зворотним зв'язком з передаточною функцією $k_{зв.з}p$ (див. рис. 9.6, а). У цьому разі перше рівняння системи (9.26) матиме вигляд

$$\varepsilon(t) = -x(t) - k_{зв.з} \frac{dx}{dt},$$

а диференціальне рівняння фазових траєкторій —

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 + \frac{k\varphi(x + k_{зв.з}y)}{y} \right). \quad (9.34)$$

Оскільки $\varphi(\varepsilon) = -\varphi(x + k_{зв.з}y)$, як і у попередньому випадку, може набувати тільки двох значень $+b$ і $-b$, то рівняння фазових траєкторій (9.32) і (9.33) не змінюються. Змінюється тільки лінія перемикання. Справді, перемикання відбувається при $\varepsilon = -x - k_{зв.з}y = 0$, тому рівняння лінії перемикання

$$x = -k_{зв.з}y. \quad (9.35)$$

Розглянемо рух зображуючої точки по фазовій траєкторії з початкового стану, що визначається точкою M_0 (рис. 9.7, б), тобто за початкових умов $x_0 \neq 0, y_0 = 0$. Початкова точка M_0 міститься ліворуч від лінії перемикання, тому рухатиметься по траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), до перетину з лінією перемикання в точці M_1 . У цій точці реле перемикається, причому координата x зберігає попередній знак, а знак сигналу на вході релейного елемента змінюється за рахунок дії гнучкого зворотного зв'язку $k_{зв.з}p$. Від точки M_1 до точки M_2 фазова траєкторія визначається рівнянням (9.33), а від точки M_2 до M_3 — рівнянням (9.32).

Нахил лінії перемикання залежить від величини $k_{зв.з}$. За досить великого значення $k_{зв.з}$ може виявитися, що лінія перемикання буде близькою до ділянки фазової траєкторії між точками M_3 і M_4 . У точці M_4 реле перемикається, після чого зображуюча точка повинна переміщуватися по траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), але це спричинює збільшення результуючого сигналу на вході релейного елемента та його нове перемикання і т. д. Отже, зображуюча точка, досягнувши точки M_4 , безперервно переходить з траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), на траєкторію, що визначається рівнянням (9.33), і назад, неначе ковзаючи вздовж лінії перемикання й асимптотично наближуючись до точки рівноваги, що є початком координат фазової площини. Тому режим, що виникає після точки M_4 , називається *ковзним*.

Ковзний режим можливий на ділянці, де фазові траєкторії, що визначаються рівнянням (9.33), проходять нижче лінії перемикання. Початок цієї ділянки — це точка, в якій дотична до фазової траєкторії (9.33) збігається з лінією перемикання. Аналогічна ділянка є в четвертому квадранті при $x > 0$. Її початок — точка, в якій дотична до фазової траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), збігається з лінією перемикання.

Знайдемо координати точок, що визначають кінці ділянки, на якій виникає ковзний режим. Для цього з (9.35) обчислимо похідну

$$dy/dx = -1/k_{зв.з}$$

і підставимо її в (9.34), прийнявши $\varphi(x + k_{зв.з}y) = -b$ для фазової траєкторії праворуч від лінії перемикання і $\varphi(x + k_{зв.з}y) = b$ — ліворуч. Тоді дістанемо

$$-\frac{1}{k_{зв.з}} = -\frac{1}{T} \left(1 \mp \frac{kb}{y} \right),$$

звідки знайдемо шукані координати

$$\begin{cases} y = \pm \frac{kk_{зв.з} bT}{k_{зв.з} - T}; \\ x = \mp \frac{kk_{зв.з}^2 bT}{k_{зв.з} - T}. \end{cases} \quad (9.36)$$

У цих рівняннях верхній знак визначає координати лівого кінця ділянки ковзного режиму, нижній — координати правого кінця. Для лівого кінця $y > 0$, тому ковзний режим можливий лише за умови $k_{зв.з} > T$.

З порівняння фазових траєкторій, зображених на рис. 9.7, *a* і *б*, випливає, що введення гнучкого коректувального зворотного зв'язку істотно впливає на характер перехідного процесу. Коливальність перехідного процесу зменшується, причому кількість коливань стає скінченною, оскільки на лінії перемикання з'являється ділянка ковзного режиму. Зображуюча точка, потрапивши на цю ділянку, рухається до початку координат по траєкторії $y = -1/k_{зв.з}x$, якій відповідає аперіодичний перехідний процес

$$x = x_{поч} e^{-t/k_{зв.з}}. \quad (9.37)$$

Отже, спочатку коливальний перехідний процес закінчується аперіодичною ділянкою. Можливий перехідний процес і без коливань, якщо початкові умови такі, що при першому ж перетинанні з лінією перемикання фазова траєкторія потрапляє на ділянку ковзного режиму.

З рівняння (9.37) видно, що на ділянці ковзного режиму в системі з ідеальним релейним елементом координати змінюються за лінійними законами і нелінійну систему можна наближено вважати лінійною системою першого порядку.

Розглянемо тепер систему з реальним релейним елементом, характеристики якого зображено на рис. 9.6, *в*. Функція $\phi(\epsilon)$ і в цьому разі може набувати тільки двох значень $+b$ і $-b$, тому рівняння фазових траєкторій залишаються попередніми — (9.32) і (9.33), а змінюються лише рівняння ліній перемикання. Вони матимуть вигляд $x = c$ при $y > 0$; $x = -c$ при $y < 0$.

Фазовий портрет системи без коректувального зворотного зв'язку зображено на рис. 9.8, *a*. На цьому портреті є стійкий граничний цикл, тобто усталеним режимом системи є режим автоколивань.

Після введення коректувального зворотного зв'язку з передаточною функцією $k_{зв.з}$ рівняння фазових траєкторій не змінюються, а рівняння ліній перемикання стають такими:

$$x = c - k_{зв.з}y \text{ при } y > 0; \quad (9.38)$$

$$x = -c - k_{зв.з}y \text{ при } y < 0. \quad (9.39)$$

Фазовий портрет системи зі зворотним зв'язком зображено на рис. 9.8, б. За досить сильного зворотного зв'язку також виникає ковзний режим. Зображуюча точка рухається по траєкторіях (9.32) і (9.33) між лінією перемикання (9.38) і продовженням лінії перемикання (9.39). Перехідний процес закінчується встановленням автоколивань.

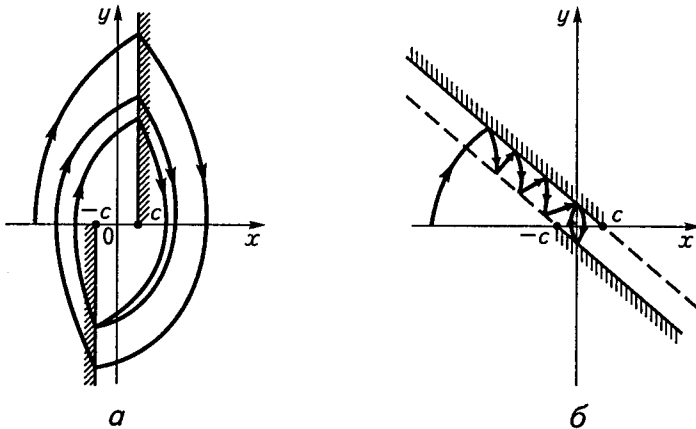


Рис. 9.8

Фізично ковзний режим полягає в перемиканні реле з великою частотою, що зумовлює зменшення амплітуди автоколивань, тобто поліпшує динамічні властивості системи. При збільшенні $k_{зв.з}$ амплітуда автоколивань зменшується до величини, що визначається шириною петлі характеристики релейного елемента.

9.5

Нелінійні коректувальні ланки

Як зазначалося раніше, можливості нелінійних коректувальних ланок значно перевищують можливості лінійних. Нелінійну корекцію можна здійснювати нелінійним змінюванням коефіцієнтів передачі ланок системи, використанням псевдолінійних ланок, ланок з додатним гістерезисом та іншими способами. За допомогою нелінійних коректувальних пристроїв можна розв'язувати також задачу компенсації негативного впливу небажаних нелінійностей.

Недоліком нелінійної корекції є її «вужча спеціалізація» відносно зовнішніх дій. Нелінійна корекція, що є ефективною для певного класу зовнішніх дій, може стати некорисною або навіть шкідливою при інших діях або режимах роботи системи.

Нелінійне змінювання коефіцієнта передачі системи.

Коефіцієнт передачі розімкнутої системи визначають, виходячи з потрібної точності роботи системи в усталених режимах. Проте його величина істотно впливає і на якість перехідного процесу. В лінійних системах у разі збільшення коефіцієнта передачі звичайно погіршується якість перехідних процесів — зростає коливальність, збільшується перерегулювання, зменшується запас стійкості. Зберегти потрібну точність роботи системи в усталеному режимі й водночас забезпечити прийнятну якість перехідного процесу можна за рахунок нелінійного змінювання коефіцієнта передачі. Для цього слід зберегти потрібну для забезпечення заданої точності величину коефіцієнта передачі при розузгодженнях, які не перевищують допустиму похибку в усталеному режимі. За більших розузгоджень коефіцієнт передачі можна змінювати нелінійно, якщо це забезпечує підвищення якості перехідного процесу.

Розглянемо можливість підвищення швидкодії системи при збереженні прийнятної якості перехідного процесу за рахунок нелінійного змінювання коефіцієнта передачі. В лінійних системах час перехідного процесу $t_n = k_0 \pi / \omega_s$ залежить від частоти зрізу ЛАХ розімкнутої системи. Таке саме співвідношення можна прийняти і для гармонічно лінеаризованих нелінійних систем.

Структурну схему системи після гармонічної лінеаризації можна подати у вигляді, зображеному на рис. 9.9, а, де $k_{r_n}(\alpha)$ — приведений

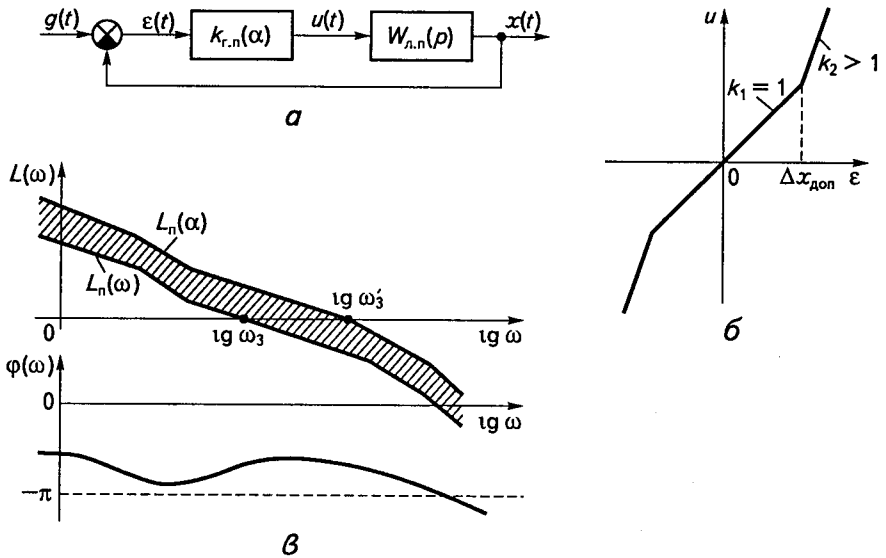


Рис. 9.9

нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації; $W_{л,н}(p)$ — передаточна функція приведенної лінійної частини.

Припустимо, що статична характеристика нелінійної ланки має вигляд, поданий на рис. 9.9, б. Для цієї ланки коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються такими залежностями:

$$k_r(\alpha) = k_n k_{r,n}(\alpha); \quad k_n = k_1; \quad \alpha = \Delta x / \Delta x_{\text{доп}};$$

$$k_r(\alpha) = 1 \quad \text{при} \quad \alpha \leq 1; \quad (9.40)$$

$$k_{r,n}(\alpha) = k_2/k_1 - \frac{2}{\pi} (k_2/k_1 - 1) \left(\arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \quad \text{при} \quad \alpha \geq 1.$$

Для збереження точності роботи системи в усталеному режимі статичну характеристику нелінійної ланки при відхиленнях вихідної величини, що не перевищує $\Delta x_{\text{доп}}$, залишаємо лінійною з коефіцієнтом передачі

$$k_r(\alpha) = k_n k_{r,n}(\alpha) = k_1 = 1.$$

При відхиленнях вихідної величини, що перевищують $\Delta x_{\text{доп}}$, коефіцієнт передачі нелінійної ланки зростає згідно з виразом (9.40) і прямує до k_2/k_1 .

ЛАХ гармонічно лінеаризованої розімкнутої системи

$$L(\omega, \alpha) = L_n(\omega) + L_n(\alpha),$$

де $L_n(\omega)$ — ЛАХ приведеної лінійної частини; $L_n(\alpha)$ — ЛАХ приведеної коректувальної нелінійної ланки.

ЛАХ $L_n(\omega) = 20 \lg |W_{\text{л.н}}(j\omega)|$ залишається незмінною за будь-яких розузгодженнях, що не перевищують $|x_{\text{доп}}|$ оскільки $k_r(\alpha) = 1 = \text{const}$. ЛАХ $L_n(\alpha)$ змінюється залежно від змінювання відносної амплітуди $\alpha = \Delta x / \Delta x_{\text{доп}}$ під час перехідного процесу, тобто може розміщуватися у заштрихованій зоні, зображеній на рис. 9.9, в, яка зверху обмежується ЛАХ, що відповідає максимально можливому значенню α . Частота зрізу при цьому може змінюватися в межах $\omega_3 < \omega < \omega'_3$.

Збільшення частоти зрізу спричинює підвищення швидкодії. Водночас через те, що $k_r(\alpha)$ для однозначних нелінійностей є дійсною величиною, нелінійна коректувальна ланка не впливає на ЛФХ системи. Тому під час перехідного процесу при збільшенні ω_3 зменшуватиметься запас стійкості за фазою і зростатиме коливальність. Це обмежує допустиме нелінійне зростання коефіцієнта передачі.

Очевидно, що підвищення швидкодії можливе тільки у разі використання нелінійностей, для яких $k_r(\alpha) > 1$ за відхилень вихідної величини, що перевищують допустиму усталену похибку.

Крім розглянутої нелінійної ланки з коефіцієнтами $k_1 = 1$ і $k_2 > k_1$, можна використовувати ланки зі степеневими статичними характеристиками $u = k\varepsilon^2$, $u = k\varepsilon^3$ та ін.

Псевдолінійні коректувальні пристрої. Нелінійні коректувальні пристрої, еквівалентні АФХ яких не залежать від амплітуди вхідного сигналу, а є функціями тільки частоти, називаються *псевдолінійними*. Особливістю цих пристроїв є відсутність жорсткого зв'язку між амплітудною і фазовою характеристиками, що дає змогу формувати ці характеристики незалежно. Це своєю чергою відкриває широкі можливості корекції САК за рахунок змінювання її частотних характеристик у бажаному напрямі.

Одну з можливих структурних схем псевдолінійного коректувального пристрою зображено на рис. 9.10. Вона складається з двох каналів. Верхній (амплітудний) канал призначений для формування амплітудної характеристики. Він складається з лінійного елемента 1 з

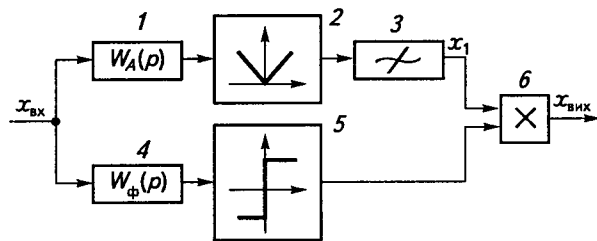


Рис. 9.10

передаточною функцією $W_A(p)$, ланки 2, що виділяє модуль сигналу (в електричних схемах це звичайно двопівперіодний випрямляч), і фільтра 3. Амплітуда сигналу на виході ланки $W_A(p)$ визначається її амплітудною

частотною характеристикою. Цей сигнал випрямляється та фільтрується і таким чином виключається інформація про фазу сигналу. Отже, на вході блока перемножування 6 формується випрямлений сигнал x_1 , величина якого визначається амплітудною частотною характеристикою ланки $W_A(p)$.

Нижній (фазовий) канал формує фазову характеристику. Він складається з лінійної ланки 4 з передаточною функцією $W_Ф(p)$ та ідеального релейного елемента 5. Фаза сигналу на виході ланки 4 визначається її фазовою частотною характеристикою. Релейний елемент 5 перемикається під час переходу сигналу через нуль, тобто він реагує на фазу сигналу. Амплітуда сигналу на виході релейного елемента не залежить від амплітуди вхідного сигналу, оскільки може мати лише два фіксовані рівні.

Вихідний сигнал коректувального пристрою $x_{вих}$ утворюється в результаті перемножування вихідних сигналів амплітудного і фазового каналів. Якщо вибрати лінійні ланки з відповідними передаточними функціями $W_A(p)$ і $W_Ф(p)$, то можна реалізувати коректувальний пристрій з бажаними амплітудною і фазовою характеристиками, які можна змінювати незалежно одну від одної. Наприклад, якщо необхідно знизити амплітуду на високих частотах і одночасно створити випередження за фазою, то в амплітудний канал слід ввести ланку, що послаблює високі частоти, наприклад аперіодичну з передаточною функцією

$$W_A(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

а у фазовий канал — елемент, що створює випередження за фазою, наприклад інтегродиференціальну ланку з передаточною функцією

$$W_{\Phi}(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1},$$

де $T_1 > T_2$.

Нелінійні коректувальні пристрої з додатним гістерезисом (з двозначними випереджаючими статичними характеристиками). Нові можливості корекції динамічних властивостей САК відкриває застосування штучно створених нелінійних ланок з додатним гістерезисом. На відміну від нелінійностей з від'ємним гістерезисом у гармонічній передаточній функції

$$W_{н.л}(p) = k_r + \frac{k'_r}{\omega} p$$

коефіцієнт гармонічної лінеаризації k'_r завжди додатний, тобто він визначає складову, що випереджає за фазою вхідний сигнал на кут $\pi/2$. Це пояснюється тим, що при зростанні вхідної величини ($d\varepsilon/dt > 0$) вихідна величина змінюється відповідно до лівої вітки статичної характеристики нелінійної ланки, а при зменшенні ($d\varepsilon/dt < 0$) — відповідно до правої вітки (рис. 9.11). Запишемо коефіцієнти гармонічної лінеаризації такої ланки (при $a > c$):

$$k_r = \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}};$$

$$k'_r = 4bc/\pi a^2$$

і гармонічну передаточну функцію

$$W_{н.л}(p) = \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} + \frac{4bc}{\pi a^2} \frac{p}{\omega}$$

або

$$W_{н.л}(j\omega) = \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} + j \frac{4bc}{\pi a^2}.$$

Амплітудна характеристика цієї ланки

$$|W_{н.л}(j\omega)| = 4b/\pi a$$

не залежить від частоти вхідного сигналу, а є функцією лише його амплітуди.

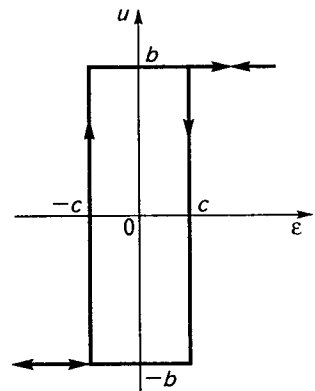


Рис. 9.11

Фазова характеристика

$$\varphi_{н.л}(a) = \arctg \sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2}},$$

тобто релейний елемент із додатним гістерезисом створює випередження за фазою на всіх частотах, яке зменшується при зростанні амплітуди a . Якщо вибрати ширину петлі гістерезису $2c$, яка дорівнює двом амплітудам $2a$, то ланка створюватиме випередження за фазою $\pi/2$ за будь-яких частот.

Отже, нелінійні ланки з додатним гістерезисом є еквівалентними диференціювальним лінійним ланкам. Їх можна застосовувати для корекції динамічних властивостей систем за рахунок введення похідної.

9.6

Компенсація впливу нелінійностей

Нелінійні ланки можуть погіршувати якість систем, зокрема спричинювати низькочастотні коливання з великою амплітудою. Корекція систем у таких випадках може здійснюватися за рахунок компенсації небажаних нелінійностей.

Застосування компенсувальних нелінійностей. Одним із способів компенсації нелінійних статичних характеристик є вмикання нелінійної ланки, яка має спеціально підібрану характеристику. Ця ланка вмикається послідовно (рис. 9.12, *а*) або паралельно з нелінійністю, що компенсується (рис. 9.12, *б*), а також у вигляді зворотного зв'язку (рис. 9.12, *в*).

Мета компенсації полягає у визначенні такої статичної характеристики нелінійної коректувальної ланки φ_k , аби сукупна статична характеристика вихідної ланки φ_1 і коректувальної φ_k була лінійною $\varphi_л$.

Розглянемо спочатку послідовне з'єднання компенсувальної нелінійності, яка має статичну характеристику

$$x_3 = \varphi_k(x_2), \quad (9.41)$$

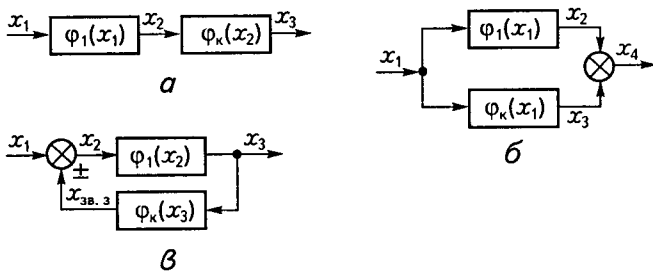


Рис. 9.12

і нелінійної ланки, статична характеристика якої

$$x_2 = \varphi_1(x_1) \tag{9.42}$$

відома.

Сукупна статична характеристика двох ланок має бути лінійною:

$$x_3 = \varphi_n(x_1) = k_0 x_1, \tag{9.43}$$

де $k_0 = \text{const}$.

Якщо нелінійність $\varphi_1(x_1)$ задано аналітично, то для визначення $\varphi_k(x_2)$ необхідно розв'язати нелінійне рівняння (9.42) відносно x_1 , тобто знайти зворотню нелінійну функцію $x_1 = \varphi_1^{-1}(x_2)$ і підставити її значення в умову лінійності (9.43):

$$x_3 = k_0 x_1 = k_0 \varphi_1^{-1}(x_2). \tag{9.44}$$

З порівняння виразів (9.41) і (9.44) видно, що статичну характеристику компенсувальної нелінійної ланки можна записати в аналітичному вигляді

$$\varphi_k(x_2) = k_0 \varphi_1^{-1}(x_2).$$

Якщо статичну характеристику $\varphi_1(x_1)$ не задано аналітично, то характеристику $\varphi_k(x_2)$ можна визначити графічно. Припустимо, що характеристика $x_2 = \varphi_1(x_1)$ має вигляд, зображений на рис. 9.13, а. На цьому самому рисунку наведено бажану лінійну характеристику $x_3 = \varphi_n(x_1)$. Масштаби величин x_1, x_2, x_3 мають бути однаковими.

Характеристика $\varphi_k(x_2)$ компенсувальної нелінійності будується таким чином. Беруть довільне значення x'_1 і за характеристиками $\varphi_1(x_1)$ і $\varphi_n(x_1)$ знаходять відповідні значення x'_2 і x'_3 . Ці значення ви-

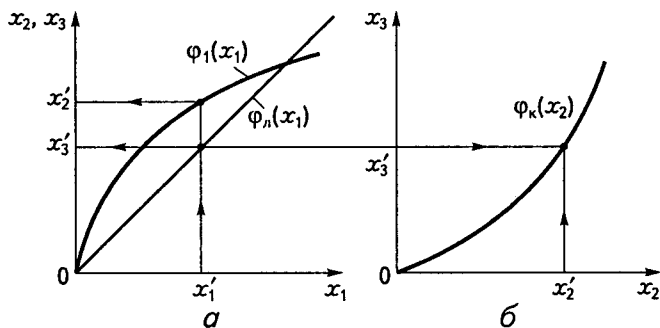


Рис. 9.13

значають точку статичної характеристики $x_3 = \varphi_k(x_2)$ в системі координат (x_2, x_3) , наведеної на рис. 9.13, б. Якщо вибрати невеликий крок змінювання x_1 , можна досить точно побудувати шукану характеристику $\varphi_k(x_2)$.

При виборі способу компенсації слід мати на увазі, що не кожен нелінійність можна скомпенсувати за рахунок послідовної коректимальної ланки. Компенсація можлива лише у разі, коли компенсована нелінійність має взаємно однозначну відповідність значень вхідної і вихідної величин. Наприклад, для статичної характеристики з насиченням (рис. 9.14) немає однозначної відповідності зворотної функції $x_1 = \varphi^{-1}(x_2)$ при $x_2 = x_{2\max}$ і вона взагалі не існує при $x_2 > x_{2\max}$. Не мають однозначної відповідності зворотні функції також для характеристик із зоною нечутливості, всіх релейних і будь-яких неоднозначних характеристик. Нелінійності з такими статичними характеристиками не можна скомпенсувати за рахунок послідовного введення компенсуювальних нелінійностей.

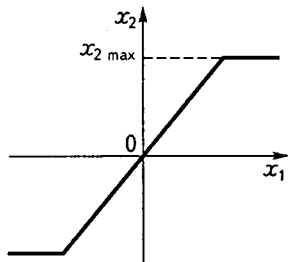


Рис. 9.14

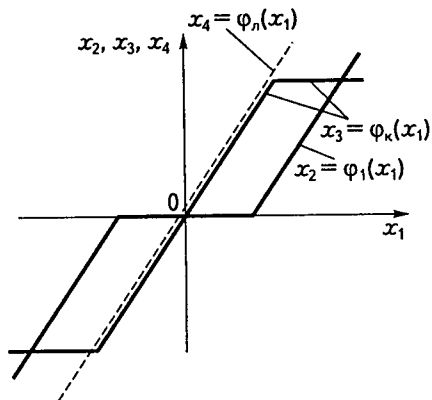
Більші можливості дає паралельне введення компенсуювальних нелінійностей (див. рис. 9.12, б). Умова лінійності сукупної характеристики

$$x_4 = x_2 + x_3 = \varphi_1(x_1) + \varphi_k(x_1) = \varphi_n(x_1) = k_0 x_1,$$

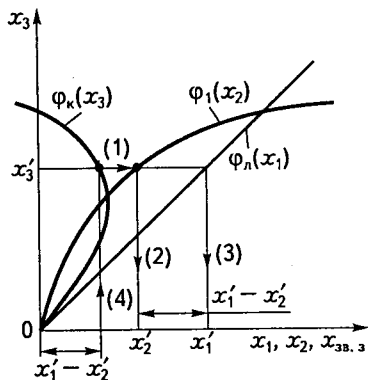
звідки

$$\varphi_k(x_1) = \varphi_n(x_1) - \varphi_1(x_1). \quad (9.45)$$

Отже, для визначення характеристики $\varphi_k(x_1)$ досить відняти характеристику нелінійності, що компенсується, від бажаної характеристики лінійної ланки $\varphi_n(x_1)$. Це можна зробити аналітично або графічно. Побудову характеристики $\varphi_k(x_1)$, що компенсує нелінійність $\varphi_l(x_1)$ із зоною нечутливості, показано на рис. 9.15, а. Для будь-яких x_1 виконується умова $x_2 + x_3 = x_4$.



а



б

Рис. 9.15

Небажану нелінійність можна також скомпенсувати за рахунок нелінійних жорстких додатних або від'ємних зворотних зв'язків (див. рис. 9.12, в).

Статичну характеристику $x_{зв.з} = \varphi_k(x_3)$ можна визначити таким чином. Відповідно до структурної схеми, наведеної на рис 9.12, в, маємо

$$x_3 = \varphi_l(x_2) = \varphi_l(x_1 \pm x_{зв.з}), \quad (9.46)$$

але

$$x_{зв.з} = \varphi_k(x_3), \quad (9.47)$$

тому

$$x_3 = \varphi_l[x_1 \pm \varphi_k(x_3)]. \quad (9.48)$$

Розв'язавши нелінійну функцію (9.48) відносно аргументу, визначимо зворотну функцію

$$x_1 \pm \varphi_k(x_3) = \varphi_l^{-1}(x_3), \quad (9.49)$$

звідки

$$x_1 = \varphi_1^{-1}(x_3) \mp \varphi_k(x_3). \quad (9.50)$$

Прийнявши рівняння бажаної лінійної характеристики у вигляді

$$x_3 = \varphi_l(x_1) = k_0 x_1 \quad (9.51)$$

і підставивши значення $x_1 = x_3/k_0$ в (9.50), дістанемо

$$x_3/k_0 = \varphi_1^{-1}(x_3) \mp \varphi_k(x_3),$$

звідки знайдемо статичну характеристику компенсувальної нелінійності

$$\varphi_k(x_3) = \pm \varphi_1^{-1}(x_3) \mp x_3/k_0. \quad (9.52)$$

Тут верхні знаки відповідають додатному зворотному зв'язку, нижні — від'ємному.

Компенсація за рахунок зворотного зв'язку можлива за таких самих вимог до статичної характеристики нелінійності, що компенсується, відносно взаємно однозначної відповідності значень вхідної і вихідної величин, як і у разі компенсації послідовною коректувальною ланкою.

Статичну характеристику $\varphi_k(x_3)$ можна визначити аналітично за формулою (9.52) або побудувати графічно.

Послідовність графічної побудови характеристики $\varphi_k(x_3)$ нелінійної ланки, що використовується у вигляді від'ємного зворотного зв'язку, наведено на рис. 9.15, б. Послідовність побудови однієї точки шуканої характеристики подано цифрами у дужках і стрілками. Для вибраного значення x'_3 за характеристиками $\varphi_1(x_2)$ і $\varphi_l(x_1)$ знаходимо значення x'_2 і x'_1 , потім визначаємо $x'_{зв.з} = x'_1 - x'_2$ і знаходимо точку характеристики $x_{зв.з} = \varphi_k(x_3)$. Приймаючи ряд значень x_3 , визначаємо інші точки характеристики $\varphi_k(x_3)$ і будуємо її.

Якщо нелінійність зумовлена характеристикою об'єкта керування, то вмикати компенсувальну нелінійність розглянутими способами, як правило, неможливо. У цьому разі використовується модель об'єкта. Система лінеаризується за рахунок вмикання паралельно об'єкту компенсувальної нелінійності і ланки $W_{об.м}(p)$, що є моделлю лінійної частини об'єкта (рис. 9.16, а). Нелінійність об'єкта можна також скомпенсувати за допомогою від'ємного зворотного зв'язку, що охоплює попередні лінійні елементи $W_1(p)$ і становить модель компенсувальної нелінійності φ_k і об'єкта $W_{об.м}(p)$ (рис. 9.16, б).

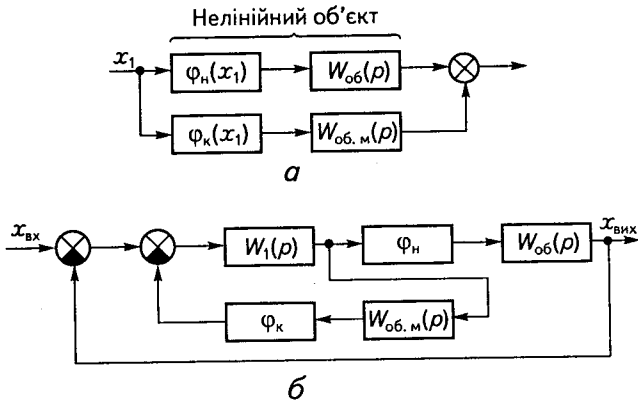


Рис. 9.16

Вібраційна компенсація нелінійностей. Ефективним способом придушення низькочастотних автоколивань є вібраційна лінеаризація. Ідея такої лінеаризації полягає у створенні високочастотних коливань на вході нелінійної ланки. Вібраційна лінеаризація є найпоширенішим способом лінеаризації релейних систем.

Суть вібраційної лінеаризації можна пояснити так. Нехай на вхід нелінійної ланки (рис. 9.17, а) подається сигнал $x_0(t)$, що повільно змінюється, і високочастотний сигнал $x_-(t)$ із нульовим середнім значенням. Частота f_1 сигналу $x_-(t)$ має бути досить високою, щоб функцію $x_0(t)$ вважати сталою протягом періоду $T_1 = 1/f_1$.

Сигнал на вході нелінійної ланки обчислюється за формулою

$$\varepsilon(t) = x_0(t) + x_-(t).$$

Вихідний сигнал $x(t)$ нелінійної ланки можна подати у вигляді суми середньої складової $x_{\text{ср}}(x_0)$, що повільно змінюється, і високочастотної коливальної функції $\varphi_1(x_-)$, тобто

$$x(t) = \varphi[x_0(t) + x_-(t)] = x_{\text{ср}}(x_0) + \varphi_1(x_-). \quad (9.53)$$

Процес вібраційної лінеаризації ілюструється графіками на рис. 9.17, б, де показано побудову вихідного сигналу $x(t)$ нелінійного елемента, що має характеристику ідеального реле $x(t) = \varphi(\varepsilon)$, при надходженні на його вхід високочастотного сигналу $x_-(t)$ і суми двох сигналів $x_-(t)$ і $x_0(t)$ за умови, що протягом кількох періодів коливань $x_-(t)$ сигнал $x_0(t)$ сталий.

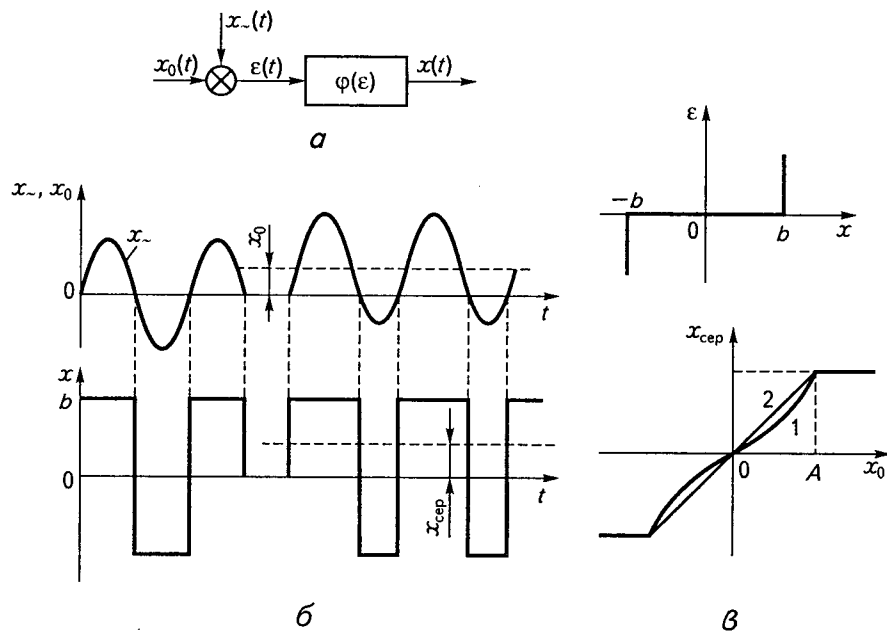


Рис. 9.17

При $x_0 = \text{const}$ середнє значення $x_{\text{ср}}$ вихідного сигналу нелінійного елемента за період T_1 височастотного коректувального сигналу обчислюється так:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{T_1} \int_{t - T_1/2}^{t + T_1/2} \varphi[x_0(t) + x_-(t)] dt.$$

Підінтегральна функція становить прямокутні коливання, симетричні при $x_0 = 0$ і несиметричні при $x_0 \neq 0$. При $x_0 = 0$ середнє значення вихідного сигналу $x_{\text{ср}}$ дорівнює нулю.

Визначимо $x_{\text{ср}}$ за умови, що коректувальний сигнал синусоїдальний: $x_-(t) = A \sin \omega t$ і $x_0 = \text{const}$ (рис. 9.18, а). Реле перемикається при $x_-(t) + x_0 = 0$, тобто при

$$\begin{aligned} \omega_1 t &= -\arcsin A/x_0; \\ \omega_2 t &= \pi + \arcsin A/x_0; \\ \omega_3 t &= 2\pi - \arcsin A/x_0. \end{aligned}$$

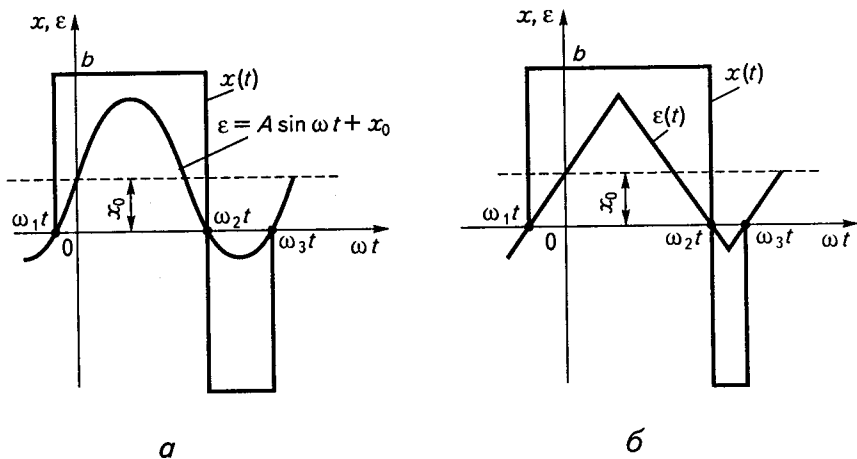


Рис. 9.18

Знайдемо середнє значення за період

$$\begin{aligned}
 x_{\text{сеп}} &= \frac{(\omega_2 t - \omega_1 t)b - (\omega_3 t - \omega_2 t)b}{2\pi} = \\
 &= \frac{2b \arcsin A/x_0}{\pi} \approx k_{\varphi} x_0.
 \end{aligned}$$

Розглянемо тепер випадок, коли коректувальний сигнал має вигляд трикутних імпульсів з такою самою амплітудою A і частотою ω , що й розглянутий синусоїдальний сигнал (рис. 9.18, б). Тоді при зростанні сигналу

$$x_-(t) = \frac{2A}{\pi} \omega t,$$

а у разі його спадання

$$x_-(t) = -\frac{2A}{\pi} \omega t + 2A.$$

Визначимо моменти перемикання реле з умови $x_-(t) + x_0 = 0$:

$$\omega_1 t = -x_0 \pi / 2A;$$

$$\omega_2 t = x_0 \pi / 2A + \pi;$$

$$\omega_3 t = -x_0 \pi / 2A + 2\pi.$$

Середнє значення за період становить

$$x_{\text{сєр}} = bx_0/A = k_{\phi}x_0.$$

Графіки залежностей $x_{\text{сєр}}(x_0)$ для синусоїдального (крива 1) і трикутного (крива 2) коректувальних сигналів зображено на рис. 9.17, в. З цих графіків видно, що для трикутного коректувального сигналу $x_{\text{сєр}}$ є лінійною функцією x_0 при $|x_0| \leq A$. Для синусоїдального сигналу функцію $x_{\text{сєр}}(x_0)$ з певним наближенням також можна вважати лінійною при $|x_0| \leq A$.

Лінійність зберігається в межах амплітуди A компенсувального сигналу. Отже, при збільшенні амплітуди A розширюється зона лінійності релейного елемента, але зменшується коефіцієнт підсилення k_{ϕ} лінеаризованого елемента.

Вихідний сигнал нелінійного елемента, як видно з формули (9.53), має дві складові і подається на вхід лінійної частини системи. За досить великої частоти компенсувального сигналу лінійна частина системи внаслідок своєї інерційності практично не пропускає сигнал $\phi_1(x_-)$, тобто в результаті вібраційної лінеаризації релейний елемент можна розглядати як лінійну ланку з коефіцієнтом передачі k_{ϕ} .

Для того щоб дістати високочастотні коливання, що здійснюють вібраційну лінеаризацію, можна використовувати зовнішній генератор періодичних коливань. Крім того, можливе використання і власних коливань (автоколивань) системи. У цьому разі необхідно вжити спеціальних заходів для підвищення частоти автоколивань, зокрема перейти до ковзного режиму.

Перевагами використання зовнішнього генератора є можливість досить простими засобами змінювати частоту і амплітуду коливань у широких межах, а недоліком — ускладнення за рахунок додаткового вузла.

Вібраційну лінеаризацію можна також розглядати як процес широтно-імпульсної модуляції, причому релейний елемент є модулятором, $x_-(t)$ — сигналом несучої частоти, $x_0(t)$ — модулюючим сигналом. Отже, для процесу вібраційної лінеаризації справедливою буде відома умова неспотвореної передачі низькочастотного сигналу релейним елементом

$$f_-/f_0 \geq 3,$$

де f_- і f_0 — частоти відповідно коректувального і вхідного сигналів.

Контрольні запитання та завдання

1. Якими показниками оцінюється якість нелінійних систем?
2. Як визначити показник коливальності нелінійної системи? Чому при цьому слід користуватися нормованими коефіцієнтами гармонічної лінеаризації?
3. Як оцінити якість перехідних процесів за допомогою діаграми якості Попова?
4. Які засоби використовують для корекції нелінійних САК?
5. Викладіть порядок синтезу лінійного коректувального пристрою в нелінійній системі методом логарифмічних частотних характеристик.
6. Що таке ковзний режим у релейних системах і за яких умов він виникає?
7. Схарактеризуйте нелінійні коректувальні ланки. У чому їх переваги і недоліки порівняно з лінійними?
8. Як впливає нелінійне змінювання коефіцієнта передачі на динаміку системи?
9. У чому полягає основна особливість псевдолінійних коректувальних ланок?
10. Які можливості корекції динаміки САК дає застосування нелінійних коректувальних пристроїв з додатним гістерезисом?
11. Поясніть призначення, способи введення і розрахунок характеристик компенсувальних нелінійностей.
12. Викладіть ідею вібраційної лінеаризації. У який спосіб її можна реалізувати?
13. Що розуміють під синтезом нелінійних САК?

10.1

Уявлення про дискретні системи. Класифікація дискретних систем

Система автоматичного керування називається *дискретною*, якщо до її складу входить хоча б одна ланка дискретної дії. Ланка дискретної дії (дискретний елемент) — це ланка, вихідна величина якої змінюється дискретно, тобто стрибкоподібно, навіть при плавному змінюванні вхідної величини.

Дискретний елемент перетворює безперервні сигнали на дискретні. Це перетворення здійснюється за рахунок квантування сигналів за рівнем, часом або рівнем і часом.

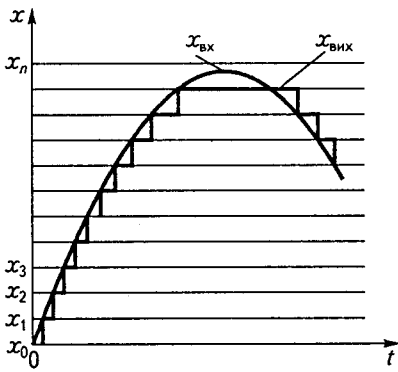
Квантування за рівнем полягає в перетворенні безперервного сигналу $x_{\text{вх}}$ у ступінчастий $x_{\text{вих}}$ з фіксованими рівнями ступенів — дискретними рівнями $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис. 10.1, а). У найпростішому випадку квантування за рівнем здійснюється релейним елементом, вихідна величина якого може набувати скінченну кількість фіксованих рівнів — звичайно два ($+b$ і $-b$) або три ($+b, 0, -b$).

Квантування за часом є перетворенням безперервного вхідного сигналу $x_{\text{вх}}$ ступінчастий $x_{\text{вих}}$ за рахунок фіксації рівнів вхідного сигналу в дискретні моменти часу $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ (рис. 10.1, б) або на послідовність імпульсів, параметри яких (амплітуда, ширина, частота та ін.) визначаються величиною вхідного сигналу в дискретні моменти часу. Період дискретності T_0 може бути сталим або змінним.

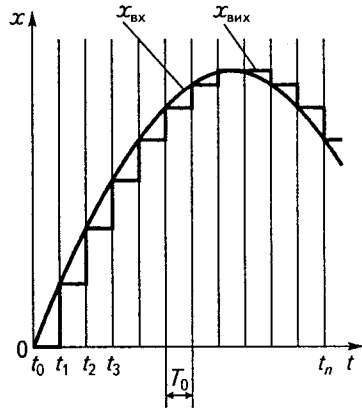
Внаслідок одночасного квантування за рівнем і часом вихідний сигнал змінюється дискретно у фіксовані моменти часу $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ і може набувати лише значень, що визначаються дискретними рівнями $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис. 10.1, в)

Залежно від виду квантування дискретні системи бувають трьох типів: *релейні* (квантування за рівнем), *імпульсні* (квантування за часом), *цифрові* (квантування за рівнем і часом).

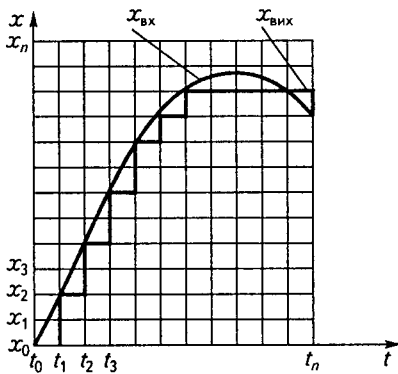
10.1. Уявлення про дискретні системи.
Класифікація дискретних систем



а



б



в

Рис. 10.1

Релейні системи можна не виділяти в окремий тип дискретних систем, а розглядати їх як нелінійні безперервні САК з нелінійністю релейного типу. Дослідження таких систем виконується методами, викладеними в гл. 8 та 9, тому в даній главі розглядатимуться тільки імпульсні та цифрові САК.

10.2

Класифікація імпульсних САК за видами модуляції

Внаслідок квантування за часом в імпульсних САК інформація між двома або більше елементами передається послідовністю імпульсів. Така послідовність містить корисну інформацію лише в тому разі, якщо вона промодульована яким-небудь сигналом. Функцію модуляції в імпульсних САК виконують імпульсні елементи (модулятори), які перетворюють безперервні сигнали у послідовність імпульсів, один з параметрів яких (модульований параметр) змінюється за законом змінювання вхідного безперервного сигналу (модулюючого сигналу).

Основними параметрами послідовності імпульсів є амплітуда (висота) A , тривалість (ширина) $T_i = \gamma T_0$, період повторення T_0 і положення імпульсу αT_0 всередині періоду T_0 (часовий зсув або фаза імпульсу). Залежно від того, який з параметрів послідовності імпульсів змінюється при змінюванні модулюючого (вхідного) сигналу, розрізняють такі види імпульсної модуляції: амплітудно-імпульсну (АІМ), широтно-імпульсну (ШІМ) і часово-імпульсну (ЧАІМ). Часово-імпульсна модуляція, своєю чергою, поділяється на два види: фазоімпульсну (ФІМ) і частотно-імпульсну (ЧІМ).

Крім того, розрізняють два роди модуляції залежно від того, чи змінюється модульований параметр протягом часу існування імпульсу. Якщо модульований параметр не змінюється, то імпульсна модуляція належить до *першого роду* (ІМ I), якщо ж модульований параметр змінюється відповідно до поточного значення модулюючого сигналу, то до *другого роду* (ІМ II). Залежно від виду і роду імпульсної модуляції імпульсні елементи підрозділяються на *амплітудні, широтні і часові першого або другого роду*.

Суть різних видів модуляції ілюструє рис. 10.2.

Під час амплітудно-імпульсної модуляції першого роду (АІМ I) вхідний безперервний сигнал $x_{\text{вх}}$ (рис. 10.2, а) перетворюється в послідовність імпульсів $x_{\text{вих}}$ (рис. 10.2, б) з періодом повторення T_0 . Тривалість імпульсів γT_0 стала, а амплітуда A пропорційна значенню вхідного сигналу в моменти виникнення імпульсів (моменти квантування).

10.2. Класифікація імпульсних САК за видами модуляції

Під час амплітудно-імпульсної модуляції другого роду (АІМ II) амплітуда імпульсів змінюється протягом часу їх існування відповідно до змінювання вхідного сигналу (рис. 10.2, в).

Під час широтно-імпульсної модуляції першого роду (ШІМ I) амплітуда A і період повторення T_0 залишаються незмінними, а ширина імпульсів γT_0 змінюється пропорційно значенням вхідного сигналу в моменти квантування (рис. 10.2, з).

Під час фазоімпульсної модуляції (ФІМ I) амплітуда і ширина вихідних імпульсів залишаються сталими, а змінюється зсув за часом (фаза) αT_0 відносно моментів квантування $0, T_0, 2T_0, \dots$ відповідно до значення вхідного сигналу в ці моменти (рис. 10.2, д).

Залежно від виду і роду модуляції імпульсні САК бувають трьох типів: амплітудно-імпульсні (АІС), широтно-імпульсні (ШІС) і часово-імпульсні (ЧАІС).

Імпульсні САК різних типів, особливо амплітудно-імпульсні та широтно-імпульсні, набули досить значного поширення в автоматизованих електроприводах.

Інформація про вхідний сигнал з виходу імпульсного елемента надходить лише в дискретні моменти часу, тому в імпульсних САК відбувається деяка втрата інформації та їхня точність у загальному випадку нижча порівняно з точністю безперервних систем. Проте перервний характер

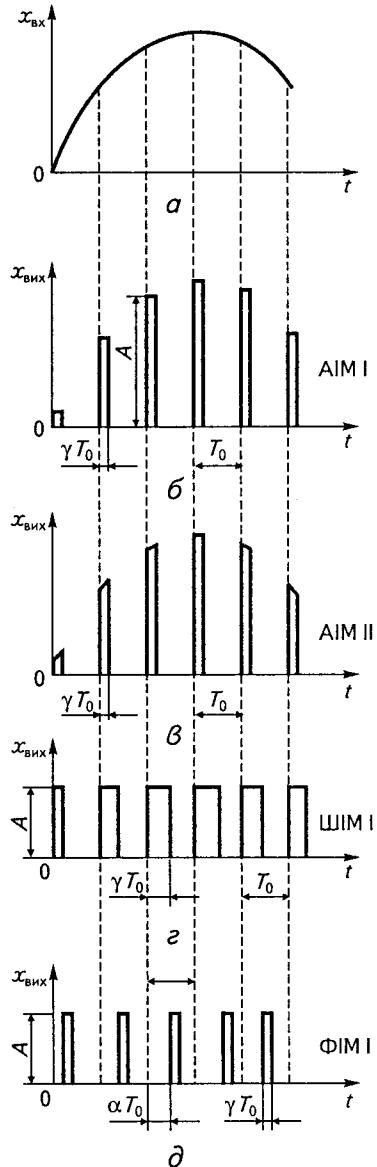


Рис. 10.2

передачі сигналів між деякими елементами системи зумовлює і низку переваг імпульсних САК.

1. Можливість багатоточкового керування, тобто використання однієї імпульсної САК для керування процесами в кількох однотипних об'єктах за рахунок того, що ці об'єкти по черзі підключаються до одного керуючого пристрою. Це зумовлено тим, що система керування одним із об'єктів замкнута лише незначну частину періоду квантування, і тому решту часу можна використати для керування іншими об'єктами.

2. Можливість використання одного каналу зв'язку для різних САК з об'єктами, віддаленими від імпульсних керуючих пристроїв. Це реалізується за рахунок почергового з'єднання об'єктів та керуючих пристроїв за час періоду квантування.

3. Підвищена захищеність від перешкод. Зумовлена вона тим, що інформація передається у вигляді коротких імпульсів, більшу частину періоду квантування САК залишається розімкнутою і не сприймає перешкод.

Імпульсну систему можна вважати безперервною, в якій з частотою квантування відбувається розмикання контуру регулювання. Якщо частота квантування значно перевищує смугу пропускання безперервної частини системи, то САК у цілому практично не реагує на кожний окремий імпульс і поводить себе як безперервна система, що сприймає тільки низькочастотний модулюючий сигнал. Для дослідження таких імпульсних САК можна користуватися всіма методами аналізу і синтезу безперервних систем. Наприклад, у системах керування електроприводами широко застосовуються напівпровідникові перетворювачі для живлення силових кіл електродвигунів. За принципом дії ці перетворюючі є імпульсними (використовуються фазоімпульсна і широтно-імпульсна модуляції), однак частота квантування настільки висока, що в цілому такі системи електропривода розглядаються як безперервні.

Якщо частота квантування не досить висока порівняно зі смугою пропускання безперервної частини системи, то система встигає реагувати на кожний окремий імпульс, і наявність квантування істотно впливає на динаміку системи. Для дослідження таких систем вже не можна користуватися методами, розробленими для безперервних систем, бо необхідно враховувати дискретний характер сигналів. Для цього застосовується спеціальний математичний апарат, що оперує з

поняттями решітчастих функцій, різницевих рівнянь і дискретного перетворення Лапласа.

Імпульсні системи бувають *лінійними* і *нелінійними*. Імпульсна система є лінійною, якщо безперервна частина системи та імпульсний елемент описуються лінійними рівняннями. Імпульсний елемент, що здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію, звичайно описується лінійними різницевиими рівняннями, тому системи з АІМ можуть бути лінійними. Процес широтно-імпульсної та часово-імпульсної модуляції описується нелінійними рівняннями, що зумовлено незалежністю амплітуди вихідних імпульсів від величини вхідного сигналу, тому системи з ІШМ і ЧАІМ є принципово нелінійними.

Основна увага в даній главі приділена лінійним системам з АІМ.

10.3

Математичне описання імпульсного елемента систем з АІМ

Імпульсний елемент у системах з АІМ перетворює безперервний вхідний сигнал у послідовність імпульсів, ширина і частота повторення яких сталі, а амплітуда пропорційна величині вхідного сигналу в моменти квантування.

Імпульсний елемент характеризується такими параметрами:
коефіцієнт передачі

$$k_i = A/x_{\text{вх}},$$

де A — висота (амплітуда) вихідного імпульсу в черговому періоді повторення імпульсів; $x_{\text{вх}}$ — величина сигналу на вході імпульсного елемента на початку того самого періоду повторення імпульсів;
період повторення імпульсів T_0 , або частота

$$\omega_0 = 2\pi/T_0;$$

тривалість імпульсів $\tau = \gamma T_0$ або відносна тривалість $\gamma = \tau/T_0$;
форма імпульсу — прямокутна, трикутна, експоненціальна, синусоїдальна тощо;

статична характеристика — залежність модульованого параметра A від вхідного модулюючого сигналу $x_{\text{вх}}$; для лінійних систем $k_i = \text{const}$ і $A = k_i x_{\text{вх}}$.

При математичному описуванні реальний імпульсний елемент подається у вигляді послідовного з'єднання *найпростішого імпульсно-го елемента 1 і формувального кола (формувача імпульсів) 2* (рис. 10.3).

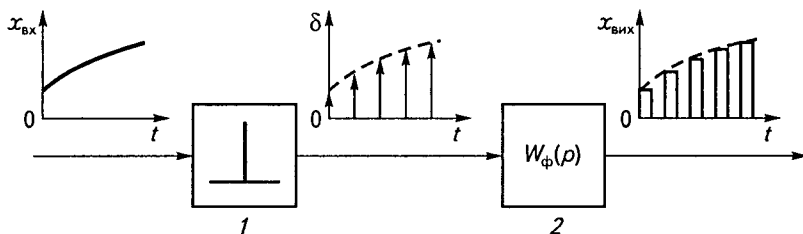


Рис. 10.3

Найпростіший імпульсний елемент перетворює безперервний вхідний сигнал на імпульси з нескінченно малою тривалістю і нескінченно великою амплітудою, площі яких пропорційні вхідному сигналу в моменти квантування, тобто вихідними сигналами цього елемента будуть δ -імпульси, площі яких не дорівнюють одиниці, а є мірою вхідного сигналу в моменти квантування. δ -Імпульси на рис. 10.3 умовно зображені стрілками, довжина яких відповідає площі імпульсів. Найпростіший імпульсний елемент називається також *ідеальним імпульсним елементом*, або δ -імпульсним елементом, а його вихідний сигнал — *ідеальною імпульсною функцією*.

Формувач перетворює δ -імпульси на вході на реальні імпульси. Реакція ланки на одиничні δ -імпульси становить імпульсну перехідну, або вагову функцію $w(t)$. Зображенням Лапласа вагової функції є передаточна функція

$$W_{\phi}(s) = L\{w_{\phi}(t)\}. \quad (10.1)$$

Оскільки на вхід формувача подаються δ -імпульси, його вихідні імпульси є ваговими функціями. Тому для визначення передаточної функції формувача достатньо знайти зображення Лапласа функції, що описує форму реального вихідного імпульсу.

Нехай, наприклад, вихідний сигнал реального імпульсного елемента є послідовністю одиничних прямокутних імпульсів, ширина яких $T_i = \gamma T_0$. Вагова функція формувача $w_{\phi}(t)$ становить прямокутний імпульс, який можна подати у вигляді різниці додатної і від'ємної ступінчастих функцій, зсунутих на час γT_0 (рис. 10.4), тобто

$$w_{\phi}(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T_0).$$

Звідси згідно з (10.1)

$$\begin{aligned} W_{\phi}(s) &= L\{1(t) - 1(t - \gamma T_0)\} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-\gamma T_0 s}}{s} = \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

При $\gamma = 1$ сигнал на виході імпульсного елемента зберігається протягом усього періоду T_0 повторення імпульсів. Такий імпульсний елемент називається *екстраполятором з фіксацією на період*, або *екстраполятором нульового порядку*.

Передаточна функція формувача при $\gamma = 1$

$$W_{\phi}(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}. \quad (10.3)$$

Якщо тривалість імпульсу значно менша, ніж період повторення ($\gamma \ll 1$), то передаточну функцію формувача можна подати у вигляді

$$W_{\phi}(s) = \gamma T_0. \quad (10.4)$$

Справді, розклавши чисельник виразу (10.2) в ряд Маклорена поблизу точки $\gamma = 0$, дістанемо

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\gamma T_0 s} &= \\ &= 1 - \left[1 - \gamma T_0 s + \frac{(-\gamma T_0 s)^2}{2!} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Якщо $\gamma \ll 1$, то ряд швидко збігається і можна обмежитися першими двома членами, тобто

$$1 - e^{-\gamma T_0 s} \approx \gamma T_0 s,$$

звідки безпосередньо дістаємо вираз (10.4).

Для прямокутного імпульсу, що має амплітуду k_i ,

$$W_{\phi}(s) = k_i \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s}. \quad (10.5)$$

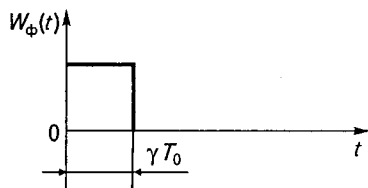
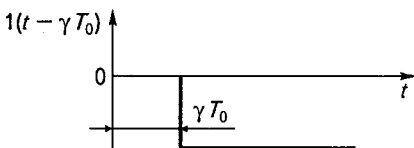
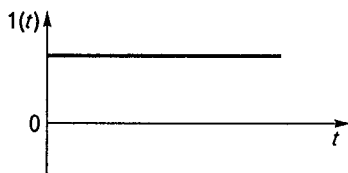


Рис. 10.4

Якщо $\gamma \ll 1$, то

$$W_{\Phi}(s) = k_i \gamma T_0. \quad (10.6)$$

- **Приклад 10.1.** Імпульси на виході реального імпульсного елемента мають трикутну форму (рис. 10.5, а). Визначити передаточну функцію формувача.

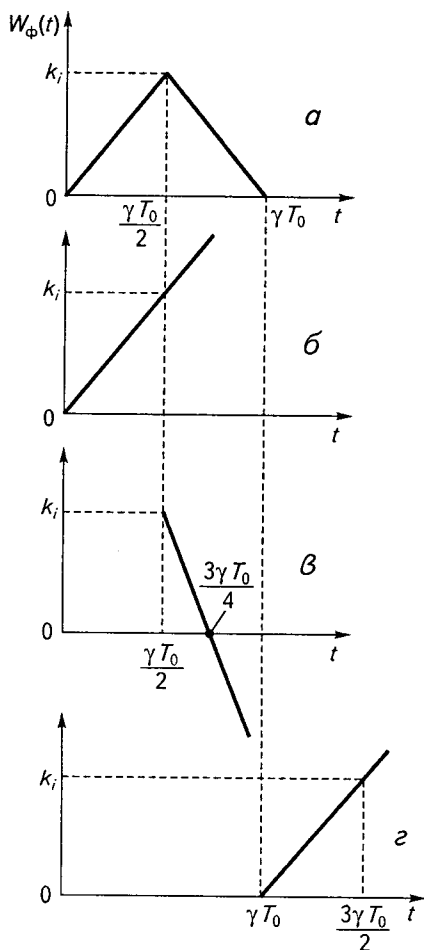


Рис. 10.5

Розв'язання. Вихідний сигнал формувача можна подати у вигляді суми трьох сигналів, графіки яких зображено на рис. 10.5, б–г. Отже,

$$w_{\Phi}(t) = \frac{2k_i}{\gamma T_0} t - \frac{4k_i}{\gamma T_0} t \cdot 1\left(t - \frac{\gamma T_0}{2}\right) + \frac{2k_i}{\gamma T_0} t \cdot 1(t - \gamma T_0).$$

Звідси

$$\begin{aligned} W_{\Phi}(s) = L\{w_{\Phi}(t)\} &= \frac{2k_i}{\gamma T_0} \frac{1}{s^2} - \frac{4k_i}{\gamma T_0} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{\gamma T_0 s}{2}} + \\ &+ \frac{2k_i}{\gamma T_0} \frac{1}{s^2} e^{-\gamma T_0 s} = k_i \frac{2\left(1 - e^{-\frac{\gamma T_0 s}{2}}\right)^2}{\gamma T_0 s^2}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Під час аналізу імпульсних систем часто замість реального часу t використовується відносний час $\bar{t} = t/T_0$. У цьому разі час вимірюється кількістю періодів повторення імпульсів T_0 . Відносний період повторення імпульсів \bar{T}_0 дорівнює одиниці.

Введемо позначення

$$L\{w(\bar{t})\} = \int_0^{\infty} e^{-q\bar{t}} w(\bar{t}) d\bar{t} = W(q),$$

де $q = T_0 s$ — комплексна змінна перетворення Лапласа у відносному часі.

Визначимо співвідношення між $W(q)$ і $W(s)$.

За теоремою про зміну масштабу

$$L\{w(\bar{t} T_0)\} = \frac{1}{T_0} W\left(\frac{q}{T_0}\right),$$

але оскільки $\bar{t} T_0 = t$, то

$$L\{w(\bar{t} T_0)\} = L\{w(t)\} = W(s).$$

Тому для одержання зображення $W(q)$ функції $w(\bar{t})$ у відносному масштабі часу необхідно в зображенні $W(q)$ функції $w(t)$ аргумент s замінити на q/T_0 , а саме зображення поділити на T_0 .

- **Приклад 10.2.** Визначити передаточну функцію $W_{\Phi}(q)$ формувача, передаточну функцію якого $W_{\Phi}(s)$ визначено в прикладі 10.1.

Розв'язання. Замінивши у формулі (10.7) аргумент s на q/T_0 і поділивши $W_\Phi(s)$ на T_0 , дістанемо

$$W_\Phi(q) = \frac{1}{T_0} k_i \frac{2 \left(1 - e^{-\frac{\gamma T_0 q}{2T_0}} \right)^2}{\gamma T_0 \frac{q^2}{T_0^2}} = k_i \frac{2 \left(1 - e^{-\frac{\gamma q}{2}} \right)^2}{\gamma q^2}.$$

10.4

Математичний апарат для дослідження імпульсних САК

Решітчасті функції. Вихідний сигнал імпульсного елемента визначається величиною вхідного сигналу тільки в дискретні моменти часу на початку кожного періоду повторення імпульсів і надалі не залежить від змінювання вхідного сигналу до початку наступного періоду повторення. Тому достатньо знати значення вхідного сигналу лише в дискретні моменти часу, тобто в моменти nT_0 , де n — ціле число. На підставі цього безперервну функцію на вході імпульсного елемента можна замінити так званою решітчастою функцією. *Решітчастою* називається функція дискретного аргументу, значення якої визначені в дискретні моменти часу $t = nT_0$. Між цими моментами функція дорівнює нулю.

Решітчасту функцію звичайно позначають $f[nT_0]$ або, якщо перейти до відносного часу, $f[n]$. Заміна безперервної функції решітчастою

$$f[nT_0] = f(t)|_{t = nT_0}$$

або

$$f[n] = f(\bar{t})|_{\bar{t} = n}$$

пояснюється на рис. 10.6.

Використовується також поняття *зміщеної решітчастої функції*. Аргумент цієї функції $t = nT_0 + \Delta t$, тобто дискретні значення функції вибираються для моментів часу, зміщених на Δt відносно nT_0 . Зміщення $\Delta t = \text{const}$ може бути додатним або від'ємним за умови, що

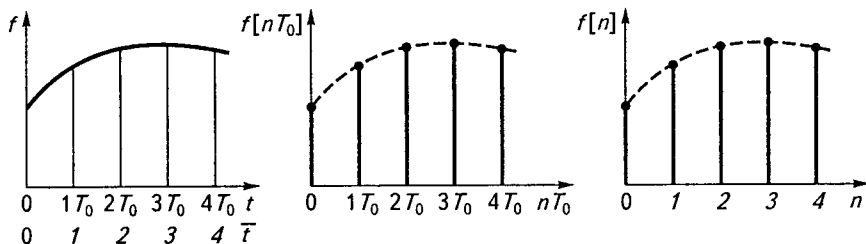


Рис. 10.6

$|\Delta t| < T_0$. Зміщена решітчаста функція позначається $f[nT_0, \Delta t]$ або, при використанні відносного часу, — $f[n, \epsilon]$, де $\epsilon = \Delta t/T_0$ — відносне зміщення. Надалі вважатимемо, що у решітчастій функції $f[n, \epsilon]$ аргумент $n \geq 0$ і параметр $\epsilon > 0$. Якщо необхідно розглянути функцію $f[n, \epsilon_0]$ з від'ємним параметром $\epsilon_0 < 0$, то дискретний час можна подати у вигляді $[(n-1) + (1 + \epsilon_0)]T_0 = [(n-1) + \epsilon]T_0$. Тоді решітчасту функцію можна записати у вигляді $f[(n-1), \epsilon]$, де $\epsilon = 1 + \epsilon_0$.

Різниці решітчастих функцій та різниці рівняння.

Різниці решітчастих функцій є аналогами похідних безперервних функцій.

Різниця першого порядку (перша різниця) решітчастої функції $f[n]$

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]. \quad (10.8)$$

Аналогія між першою різницею і першою похідною пояснюється тим, що перша різниця, як і перша похідна, по суті дорівнює відношенню приросту функції до приросту аргументу $\Delta f[n]/\Delta n$, але через те, що $\Delta n = (n+1) - n = 1$, перша різниця дорівнює $\Delta f[n]$.

Різниця другого порядку (друга різниця) обчислюється за формулою

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] \quad (10.9)$$

або, якщо розкрити перші різниці за формулою (10.8),

$$\Delta^2 f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]. \quad (10.10)$$

Різниця k-го порядку має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta^k f[n] &= \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n] = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f[n+k-i], \end{aligned} \quad (10.11)$$

де $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ — коефіцієнти бінома Ньютона.

Різниці, що визначаються виразами (10.8) — (10.11), називаються *прямими*. Є також *зворотні* різниці:

перша

$$\nabla f[n] = f[n] - f[n-1]; \quad (10.12)$$

друга

$$\begin{aligned} \nabla^2 f[n] &= \nabla f[n] - \nabla f[n-1] = \\ &= f[n] - 2f[n-1] + f[n-2]; \end{aligned} \quad (10.13)$$

k -го порядку

$$\begin{aligned} \nabla^k f[n] &= \nabla^{k-1} f[n] - \nabla^{k-1} f[n-1] = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f[n-i]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Аналогами інтеграла безперервної функції в межах від 0 до t для решітчастої функції $f[n]$ є неповна сума

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{i=1}^n f[n-i] \quad (10.15)$$

і повна

$$\sigma_0[n] = \sigma[n] + f[n] = \sum_{m=0}^n f[m] = \sum_{i=0}^n f[n-i]. \quad (10.16)$$

У повній сумі, на відміну від неповної, значення $f[n]$ в момент часу $t = nT_0$ також бере участь у формуванні результату.

Аналогами диференціальних рівнянь є *різницеві рівняння (рівняння у кінцевих різницях)*. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами при використанні прямих різниць мають вигляд

$$b_0 \Delta^m y[n] + b_1 \Delta^{m-1} y[n] + \dots + b_m y[n] = f[n], \quad (10.17)$$

де $f[n]$, $y[n]$ — відповідно задана і шукана решітчасті функції.

Якщо $f[n] \equiv 0$, то рівняння (10.17) називається *однорідним*.

Враховуючи вираз (10.11), рівняння (10.17) можна записати у вигляді рекурентного рівняння через повні значення решітчастих функцій:

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n], \quad (10.18)$$

де

$$a_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} b_i C_{m-i}^{k-i};$$

$$C_{m-i}^{k-i} = \frac{(m-i)!}{(k-i)!(m-k)!}.$$

Для розв'язування різницевих рівнянь мають задаватися початкові умови у вигляді значень шуканої функції $y[n]$ та її різниць від першої до різниці $(m-1)$ -го порядку, якщо рівняння подано у вигляді (10.17), або у вигляді значень цієї функції в точках $y[0], y[1], \dots, y[m-1]$ для рівняння типу (10.18).

Різницеві рівняння вигляду (10.17) можна розглядати як рекурентні співвідношення, які дають змогу обчислювати значення $y[n]$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ для заданих початкових умов, а рівняння вигляду (10.18) — значення $y[n+m]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Наприклад, якщо задано різницеве рівняння третього порядку

$$a_0 y[n+3] + a_1 y[n+2] + a_2 y[n+1] + a_3 y[n] = f[n]$$

і відомі функції $f[n]$ та початкові умови $y[0], y[1]$ і $y[2]$, то дискретні значення функції обчислюються так:

при $n = 0$

$$a_0 y[3] + a_1 y[2] + a_2 y[1] + a_3 y[0] = f[0]$$

і

$$y[3] = (f[0] - a_1 y[2] - a_2 y[1] - a_3 y[0]) / a_0;$$

при $n = 1$

$$a_0 y[4] + a_1 y[3] + a_2 y[2] + a_3 y[1] = f[1]$$

і

$$y[4] = (f[1] - a_1 y[3] - a_2 y[2] - a_3 y[1]) / a_0$$

і т. д.

Різницеві рівняння можна розв'язувати також класичним і операторним методами, аналогічними методам розв'язування диференціальних рівнянь. З операторних методів найпоширенішим є метод, що ґрунтується на використанні z -перетворення.

Основи z -перетворення. Дискретну функцію $f[nT_0]$, якщо вважати, що $f = 0$ при $t < 0$, можна аналітично записати так:

$$f[nT_0] = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_0), \quad (10.19)$$

де $f(t)$ — породжуюча безперервна функція; $\delta(t - nT_0)$ — зміщена на час nT_0 дельта-функція.

Перетворення Лапласа від функції (10.19) має вигляд

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_0^{\infty} f(nT_0) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_0) \right] e^{-st} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t - nT_0) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT_0] e^{-nT_0 s}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Це перетворення називається *дискретним перетворенням Лапласа*. У символічній формі воно записується так:

$$F^*(s) = D\{f[nT_0]\}.$$

Якщо аргументом безперервної функції є відносний час $\bar{t} = t/T_0$, то формула дискретного перетворення

$$F^*(q) = D\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-qn}, \quad (10.21)$$

де $q = sT_0$ — комплексне число, що називається *параметром дискретного перетворення Лапласа*.

Дискретне перетворення для зміщених решітчастих функцій

$$F^*(q, \varepsilon) = D\{f[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] e^{-qn}. \quad (10.22)$$

Зображення $F^*(s)$ і $F^*(q)$ є трансцендентними функціями від s і q , що робить неможливим застосування звичайних методів аналізу в площині s або q для дослідження імпульсних систем. Прийнятнішим є так зване *z-перетворення*. Формули *z-перетворення* випливають з формул (10.21) і (10.22), якщо виконати підстановку $e^q = z$:

$$F(z) = Z\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}; \quad (10.23)$$

$$F(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon}\{f[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] z^{-n}. \quad (10.24)$$

Формули *z-перетворення* можна записати також для безперервної породжуючої функції у вигляді

$$\begin{cases} F(z) = Z\{f(t)\}, t = nT_0, \\ F(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{f(t)\}, t = (n + \varepsilon)T_0, \end{cases} \quad (10.25)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$

□ **Приклад 10.3.** Визначити z -перетворення одиничної решітчастої функції $f[n] = 1[n]$.

Розв'язання. За формулою (10.23)

$$\begin{aligned} F(z) = Z\{1[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} 1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \\ &= z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Сума цієї геометричної прогресії

$$Z\{1[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (10.26)$$

z -Перетворення деяких функцій подано в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Безперервна породжуюча функція $f(t)$	Решітчаста функція $f[n]$	Перетворення Лапласа $F(s)$	z -Перетворення $F(z)$	Модифіковане z -перетворення $F(z, \varepsilon)$
$1(t)$	$1[n]$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z - 1}$	$\frac{z}{z - 1}$
t	nT_0	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z - 1)^2}$	$\frac{T_0 z}{(z - 1)^2} + \frac{\varepsilon T_0 z}{z - 1}$
$\frac{1}{2} t^2$	$\frac{1}{2} (nT_0)^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_0^2 z (z + 1)}{2(z - 1)^3}$	$\frac{T_0^2 (z + 1)}{2(z - 1)^3} + \frac{T_0^2 z \varepsilon}{(z - 1)^2} + \frac{(\varepsilon T_0)^2 z}{2(z - 1)}$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{(nT_0)^3}{3!}$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{T_0^3 z (z^2 + 4z + 1)}{3!(z - 1)^4}$	$\frac{T_0^3 z}{3!} \left[\frac{\varepsilon^3}{z - 1} + \frac{3\varepsilon^2}{(z - 1)^2} + \frac{3\varepsilon(z + 1)}{(z - 1)^3} + \frac{z^2 + 4z + 1}{(z - 1)^4} \right]$

Закінчення табл. 10.1

Безперервна породжуюча функція $f(t)$	Решітчаста функція $f[n]$	Перетворення Лапласа $F(s)$	z -Перетворення $F(z)$	Модифіковане z -перетворення $F(z, \epsilon)$
e^{-at}	e^{-anT_0}	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\frac{z}{z - d}, d = e^{-\alpha T_0}$	$\frac{zd^\epsilon}{z - d}, d = e^{-\alpha T_0}$
$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-anT_0}$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$\frac{(1 - d)z}{(z - 1)(z - d)}, d = e^{-\alpha T_0}$	$\frac{z}{z - 1} - \frac{zd^\epsilon}{z - d}, d = e^{-\alpha T_0}$
$\sin \beta t$	$\sin \beta nT_0$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}$	$\frac{z^2 \sin \epsilon \beta T_0 + z \sin \gamma \beta T_0}{z^2 - 2z \cos \beta T_0 + 1}, \gamma = 1 - \epsilon$

Розглянемо основні властивості z -перетворення стосовно незмішених решітчастих функцій. Ці ж властивості є справедливими також для змішених функцій $f[n, \epsilon]$, крім випадків, для яких буде зроблено застереження.

1. *Властивість лінійності.* Зображення лінійної комбінації решітчастих функцій дорівнює такій самій лінійній комбінації їх зображень. Отже, якщо решітчаста функція має вигляд

$$f[n] = \sum_{v=1}^N C_v f_v[n], \quad (10.27)$$

то її зображення

$$F(z) = \sum_{v=1}^N C_v F_v(z). \quad (10.28)$$

2. *Запізнювання і випередження (зсув за часом на ціле число періодів).* Для решітчастої функції, зсунутої праворуч (запізнюючої) на m періодів,

$$Z\{f[n - m]\} = z^{-m}F(z), \quad (10.29)$$

де $F(z)$ — зображення функції $f[n]$.

Для решітчастої функції, зсунутої ліворуч (випереджуючої) на m періодів,

$$Z\{f[n+m]\} = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f[k] z^{-k} \right]. \quad (10.30)$$

Якщо $f[n] = 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$, то

$$Z\{f[n+m]\} = z^m F(z). \quad (10.31)$$

3. Множення оригіналу на експоненту $e^{\lambda n T_0}$. Зображення незміщеної решітчастої функції

$$Z\{e^{\lambda n T_0} f[n]\} = F\left(\frac{z}{d}\right), \quad (10.32)$$

де $d = e^{\lambda T_0}$, а зміщеної

$$Z\{e^{\lambda n T_0} f[n, \varepsilon]\} = d^\varepsilon F\left(\frac{z}{d}, \varepsilon\right). \quad (10.33)$$

4. Зображення різниць (аналог зображення похідної). Для різниці k -го порядку маємо

$$Z\{\Delta^k f[n]\} = (z-1)^k F(z) - z \sum_{\nu=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-\nu} \Delta^\nu f[0], \quad (10.34)$$

звідки для першої різниці ($k=1, \nu=0$)

$$Z\{\Delta f[n]\} = (z-1)F(z) - zf[0],$$

для другої

$$Z\{\Delta^2 f[n]\} = (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f[0] - z\Delta f[0].$$

Якщо початкові умови нульові, тобто при $n=0$ функція $f[n]$ та її різниці до $(k-1)$ -ї включно дорівнюють нулю, то

$$Z\{\Delta^k f[n]\} = (z-1)^k F(z). \quad (10.35)$$

5. Зображення суми (аналог зображення інтеграла). Зображення суми

$$Z\left\{\sum_{m=0}^{n-1} f[m]\right\} = Z\{\sigma[n]\} = \frac{F(z)}{z-1}. \quad (10.36)$$

6. Початкове значення решітчастої функції. При $n = 0$

$$f[0] = \lim_{n \rightarrow 0} f[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (10.37)$$

7. Кінцеве значення решітчастої функції. При $n = \infty$ значення решітчастої функції обчислюється за формулою

$$f[\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (10.38)$$

8. Згортка решітчастих функцій. Якщо

$$Z\{f_1[n]\} = F_1(z) \text{ і } Z\{f_2[n]\} = F_2(z),$$

то

$$\begin{aligned} F_1(z)F_2(z) &= Z\left\{\sum_{v=0}^n f_1[v]f_2[n-v]\right\} = \\ &= Z\left\{\sum_{v=0}^n f_1[n-v]f_2[v]\right\}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

9. Зображення функції $F(s) = F_1(e^{sT_0})F_2(s)$:

$$Z\{F(s)\} = F_1(z)Z\{F_2(s)\}. \quad (10.40)$$

10. Розв'язування різницевих рівнянь. Послідовність розв'язування різницевих рівнянь методом z -перетворення аналогічна послідовності розв'язування диференціальних рівнянь при використанні перетворення Лапласа безперервних функцій. Спочатку треба перейти від різницевих рівнянь відносно оригіналів до алгебричних рівнянь відносно їх z -зображень, потім визначити z -зображення шуканої функції, розв'язавши знайдене алгебричне рівняння, і нарешті перейти від z -зображення до оригіналу — шуканої решітчастої функції.

Нехай, наприклад, різницеве рівняння має вигляд (10.18)

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n].$$

Розв'яжемо це рівняння за початкових умов $y[0] = y_0, y[1] = y_1, \dots, y[m-1] = y_{m-1}$.

За функцією-оригіналом $f[n]$ визначимо $F(z) = Z\{f[n]\}$. Позначимо $Y(z) = Z\{y[n]\}$, потім, з урахуванням виразу (10.30), визначимо z -перетворення лівої частини рівняння (9.18) і подамо його у вигляді

$$A(z)Y(z) = F(z) + M_n(z), \quad (10.41)$$

де $A(z) = a_0 Z^m + a_1 Z^{m-1} + \dots + a_m$ — характеристичний поліном; $M(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$ — поліном, коефіцієнти якого залежать від початкових умов. Для нульових початкових умов $y_0 = y_1 = \dots = y_{m-1} = 0$ $M_n(z) = 0$.

З виразу (10.41) знаходимо зображення шуканої функції

$$Y(z) = \frac{F(z)}{A(z)} + \frac{M_n(z)}{A(z)}$$

і переходимо до оригіналу

$$y[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{F(z)}{A(z)} + \frac{M_n(z)}{A(z)} \right\}.$$

Для переходу до оригіналу зображення доцільно подати у вигляді суми простих дробів, для яких оригінали можна знайти в таблицях z -перетворень функцій часу (див. табл. 10.1), і записати оригінал $y[n]$ як суму оригіналів, що відповідають простим дробам.

Значення функції $y[n]$ в дискретних точках можна обчислити без знаходження аналітичного виразу для неї, якщо розкласти зображення $Y(z)$ в ряд Лорана:

$$Y(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots \quad (10.42)$$

Справді, з формули (10.23) дістаємо

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n} = y[0] + y[1] z^{-1} + y[2] z^{-2} + \dots \quad (10.43)$$

З порівняння рядів (10.42) і (10.43) випливає, що $y[0] = c_0$, $y[1] = c_1$, $y[2] = c_2$ і т. д.

Найзручнішим способом розкладання в ряд Лорана дрібнораціональних функцій є ділення чисельника на знаменник.

□ **Приклад 10.4.** За відомим z -перетворенням

$$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

визначити оригінал $y[n]$.

Розв'язання. Розкладемо $Y(z)$ на суму простих дробів. Для цього визначимо корені рівняння $z^2 - 0,7z + 0,1 = 0$. Маємо $z_1 = 0,5$ і $z_2 = 0,2$, тоді

$$Y(z) = \frac{3z}{(z - 0,5)(z - 0,2)} = 10 \left(\frac{z}{z - 0,5} - \frac{z}{z - 0,2} \right).$$

З табл. 10.1 знаходимо, що доданку $z/(z - 0,5)$ відповідає оригінал $e^{-\omega T_0}$, де $e^{-\alpha T_0} = d = z_1 = 0,5$, тобто оригінал має вигляд $0,5^n$. Аналогічно доданку $z/(z - 0,2)$ відповідає оригінал $0,2^n$. Отже, шукана решітчаста функція має вигляд

$$y[n] = 10(0,5^n - 0,2^n).$$

Звідси знайдемо дискретні значення функції $y[n]$; $y[0] = 0$; $y[1] = 3$; $y[2] = 2,1$; $y[3] = 1,17$ і т. д.

Визначимо тепер дискретні значення функції $y[n]$, розклавши зображення $Y(z)$ в ряд Лорана діленням чисельника на знаменник:

$$\begin{array}{r} \frac{3z}{3z - 2,1 + 0,3z^{-1}} \quad \left| \begin{array}{l} z^2 - 0,7z + 0,1 \\ \hline 3z^{-1} + 2,1z^{-2} + 1,17z^{-3} + \dots \end{array} \right. \\ \underline{2,1 - 0,3z^{-1}} \\ 2,1 - 1,47z^{-1} + 0,21z^{-2} \\ \underline{1,17z^{-1} - 0,21z^{-2}} \\ 1,17z^{-1} - 0,819z^{-2} + 0,117z^{-3} \end{array}$$

Отже,

$$Y(z) = 0 + 3z^{-1} + 2,1z^{-2} + 1,17z^{-3} + \dots,$$

тобто $y[0] = 0$; $y[1] = 3$; $y[2] = 2,1$; $y[3] = 1,17$.

10.5

Передаточна функція розімкненої імпульсної системи

Під час дослідження імпульсних систем зовнішня дія переноситься на вхід імпульсного елемента за правилом перенесення суматорів у безперервних системах, реальний імпульсний елемент подається у вигляді послідовного з'єднання ідеального імпульсного елемента і формувача (див. п.10.3). Отже, структурна схема зводиться до вигляду, зображеного на рис. 10.7, а, де

$W_{\phi}(p), W_{6n}(p)$ — передаточні функції формувача і безперервної частини системи.

Формувач об'єднується з безперервною частиною системи в одну приведену безперервну частину з передаточною функцією

$$W_n(p) = W_{\phi}(p)W_{6n}(p).$$

Структурна схема такої розімкнутої імпульсної системи має вигляд, зображений на рис. 10.7, б. Зірочка в індексі означає, що сигнал дискретний, тобто становить послідовність миттєвих імпульсів.

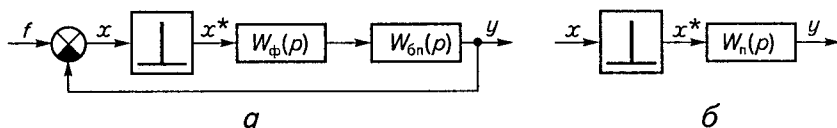


Рис. 10.7

Щоб визначити дискретну передаточну функцію розімкнутої системи, що складається з послідовно з'єднаних імпульсного елемента і безперервної частини, треба знайти передаточну функцію приведенної безперервної частини, а потім її z -зображення:

$$W(z) = Z\{W_n(p)\}. \quad (10.44)$$

При нульових початкових умовах передаточні функції $W(p)$ і $W(s)$ формально збігаються і $Z\{W(s)\} = Z\{W(p)\}$, тому надалі при виконанні z -перетворень використовуватимемо співвідношення $q = pT_0$ і $z = e^q = e^{pT_0}$.

Передаточна функція $W_n(p)$ залежить від форми імпульсів на виході імпульсного елемента через те, що $W_n(p) = W_{\phi}(p)W_{6n}(p)$, а $W_{\phi}(p)$ визначається формою імпульсів. Найчастіше використовуються імпульсні елементи, що генерують короткі прямокутні імпульси, висота яких дорівнює значенню $x[n]$, а тривалість становить γT_0 (див. рис. 10.4), де $\gamma < 1$. У цьому разі передаточна функція формувача визначається формулою (10.2), а передаточна функція приведенної безперервної частини — формулою

$$W_n(p) = \frac{1 - e^{-\gamma T_0 p}}{p} W_{6n}(p).$$

Тоді згідно з (10.44) і (10.40)

$$\begin{aligned}
 W(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma T_0 p}}{p} W_{\text{гн}}(p) \right\} = \\
 &= (1 - z^{-\gamma}) Z \left\{ \frac{W_{\text{гн}}(p)}{p} \right\} = \frac{z^\gamma - 1}{z^\gamma} Z \left\{ \frac{W_{\text{гн}}(p)}{p} \right\}.
 \end{aligned} \tag{10.45}$$

Вираз (10.45) можна подати і так:

$$W(z) = Z \left\{ \frac{W_{\text{гн}}(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z_\epsilon \left\{ \frac{W_{\text{гн}}(p)}{p} \right\},$$

де $\epsilon = 1 - \gamma$.

При $\gamma = 1$, коли імпульсний елемент є екстраполятором нульового порядку, вираз (10.45) матиме вигляд

$$W(z) = \frac{z - 1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{гн}}(p)}{p} \right\}. \tag{10.46}$$

За умови, що $\gamma \ll 1$, вираз (10.45) спрощується:

$$W(z) = Z \{ \gamma T_0 W_{\text{гн}}(p) \} = \gamma T_0 Z \{ W_{\text{гн}}(p) \}. \tag{10.47}$$

Для зміщеної решітчастої функції маємо

$$W(z, \epsilon) = \gamma T_0 Z_\epsilon \{ W_{\text{гн}}(p) \}. \tag{10.48}$$

Під час визначення дискретної передаточної функції розімкненої системи слід враховувати відмінність у визначенні дискретних і безперервних передаточних функцій послідовно з'єднаних ланок. Для безперервних систем передаточна функція послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку передаточних функцій цих ланок. Для імпульсних систем з одним імпульсним елементом на вході це правило не є справедливим, тобто

$$W(z) \neq \prod_{i=1}^k W_i(z). \tag{10.49}$$

Для визначення дискретної передаточної функції $W(z)$ необхідно спочатку знайти

$$W(p) = \prod_{i=1}^k W_i(p),$$

а потім здійснити z -перетворення

$$W(z) = Z \left\{ \prod_{i=1}^k W_i(p) \right\}. \quad (10.50)$$

Проте в тому разі, коли кожна з послідовно з'єднаних ланок має на вході свій імпульсний елемент, загальну передаточну функцію можна знайти як добуток дискретних передаточних функцій, визначених для кожної ланки з власним імпульсним елементом, тобто

$$W(z) = \prod_{i=1}^k Z\{W_{ni}(p)\}, \quad (10.51)$$

де $W_{ni}(p)$ — передаточна функція дискретного фільтра, тобто добуток передаточних функцій ланки і формувача імпульсного елемента цієї ланки.

При паралельному з'єднанні ланок дискретну передаточну функцію $W(z)$ можна визначити як суму дискретних передаточних функцій, що знайдені для кожної ланки окремо:

$$W(z) = \sum_{i=1}^k W_i(z). \quad (10.52)$$

- **Приклад 10.5.** Визначити дискретну передаточну функцію $W(z)$ розімкнутої імпульсної системи, якщо передаточна функція безперервної частини

$$W_{\text{гн}}(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

а імпульсний елемент генерує короткі прямокутні імпульси ($\gamma \ll 1$) з періодом повторення T_0 . При розрахунку прийняти: $T_0 = 1$ с; $T_1 = 1$ с; $T_2 = 0,5$ с; $k_1 = 100$ с⁻¹; $\gamma = 0,01$.

Розв'язання. Згідно з виразом (10.47)

$$W(z) = \gamma T_0 Z \left\{ \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \right\}.$$

Передаточну функцію $W_{\text{гн}}(p)$ подамо у вигляді суми простих дробів. Рівняння $p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)$ має один нульовий корінь $p_1 = 0$ і два дійсні: $p_2 = -1/T_1$; $p_3 = -1/T_2$, тому

$$\frac{k_1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{k_1 R(p)}{p Q(p)} = k_1 \left(\frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 1/T_1} + \frac{A_3}{p + 1/T_2} \right),$$

де

$$A_1 = \frac{R(0)}{Q(0)} = 1;$$

$$A_2 = \frac{R(p_1)}{p \left. \frac{dQ(p)}{dp} \right|_{p=p_1}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = -2;$$

$$A_3 = \frac{R(p_2)}{p \left. \frac{dQ(p)}{dp} \right|_{p=p_2}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 1.$$

Отже,

$$W(z) = k_1 \gamma T_0 Z \left\{ \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 1/T_1} + \frac{A_3}{p + 1/T_2} \right\} = Z \left\{ \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p+2} \right\}.$$

За даними табл. 10.1 і з урахуванням властивості лінійності дістаємо

$$W(z) = \left(\frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-d_1} + \frac{z}{z-d_2} \right),$$

де

$$d_1 = e^{-T_0/T_1} = e^{-1} = 0,368;$$

$$d_2 = e^{-T_0/T_2} = e^{-2} = 0,135.$$

Після виконання необхідних перетворень остаточно маємо

$$W(z) = \frac{0,399z^2 + 0,147z}{z^3 - 1,503z^2 + 0,553z - 0,05}.$$

10.6

Передаточна функція замкнутої імпульсної системи

Розглянемо імпульсну систему, структурну схему якої наведено на рис. 10.7, а. Вважатимемо, що передаточну функцію розімкнутої системи визначено і в загальному випадку ($\epsilon \neq 0$) вона становить $W(z, \epsilon)$. Тоді z -зображення вихідної величини

$$Y(z, \epsilon) = X(z, 0)W(z, \epsilon). \quad (10.53)$$

Зображення похибки прийнято у вигляді $X(z, 0)$, тому що імпульсний елемент реагує на похибку тільки в дискретні моменти часу $t = nT_0$, тобто при $\varepsilon = 0$.

Зображення похибки можна подати як різницю зображень задальної дії $F(z, 0)$ і вихідної величини $Y(z, 0)$:

$$X(z, 0) = F(z, 0) - Y(z, 0).$$

Через те, що $Y(z, 0) = X(z, 0)W(z, 0)$, маємо

$$X(z, 0) = F(z, 0) - X(z, 0)W(z, 0)$$

i

$$X(z, 0) = \frac{F(z, 0)}{1 + W(z, 0)}. \quad (10.54)$$

Підставивши (10.54) у (10.53), дістанемо

$$Y(z, \varepsilon) = \frac{F(z, 0)W(z, \varepsilon)}{1 + W(z, 0)},$$

звідки знайдемо передаточну функцію замкнутої системи

$$W_3(z) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{F(z, 0)} = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + W(z, 0)}. \quad (10.55)$$

Для незмішених дискретних функцій

$$W_3(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}. \quad (10.56)$$

Передаточна функція замкнутої системи за похибкою записується так:

$$W_x(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{1 + W(z)}. \quad (10.57)$$

Передаточні функції $W(z)$, $W_3(z)$, $W_x(z)$ можуть використовуватися для оцінки стійкості та якості імпульсних систем.

Формулами (10.55)—(10.57) можна користуватися лише у разі, коли вагова функція дорівнює нулю в момент $t = 0$. Для цього в системах з нескінченно короткими імпульсами у вигляді δ -функцій потрібно, щоб степінь полінома чисельника передаточної функції безперервної частини $W_{\text{бн}}(p)$ був меншим степеня полінома знаменника

принаймні на два. Якщо степінь полінома знаменника дорівнює степеню полінома чисельника або більший від нього лише на одиницю, то передаточна функція $W(z, \varepsilon)$ має розрив при $\varepsilon = 0$, тобто $W(z, +0) \neq W(z, -0)$. В таких випадках у дискретних передаточних функціях замкнутих систем необхідно використовувати функцію $W(z, -0)$ або функцію $z^{-1}W(z, 1)$, що їй дорівнює.

В усіх інших випадках $W(z, -0) = z^{-1}W(z, 1) = W(z, +0)$.

Отже, для замкнутої системи з одиничним зворотним зв'язком (див. рис. 10.7, а) за будь-яких умов справедливими є формули

$$W_3(z) = \frac{W(z)}{1 + z^{-1}W(z, 1)} \quad (10.58)$$

і

$$W_3(z, \varepsilon) = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}W(z, 1)}. \quad (10.59)$$

Якщо зворотний зв'язок не одиничний (рис. 10.8), то

$$W_3(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1W_2(z)}$$

$$W_3(z, \varepsilon) = \frac{W_1(z, \varepsilon)}{1 + W_1W_2(z)},$$

де

$$W_1(z) = Z\{W_1(p)\};$$

$$W_1W_2(z) = Z\{W_1(p)W_2(p)\}.$$

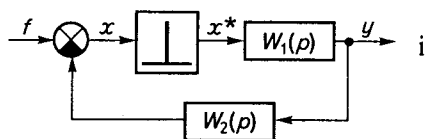


Рис. 10.8

10.7

Частотні характеристики імпульсних систем

Частотні характеристики імпульсних систем можна дістати за дискретними передаточними функціями за допомогою підстановки $z = e^{j\omega T_0}$, яка аналогічна підстановці $p = j\omega$ для частотних характеристик безперервних систем, тому що $z = e^q = e^{pT_0}$. Дуже часто при побудові частотних характеристик ко-

ристуються відносною частотою $\bar{\omega} = \omega T_0$, тобто підстановкою $z = e^{j\bar{\omega}}$.

За аналогією з безперервними системами амплітудно-фазові частотні характеристики імпульсних розімкнутої і замкнутої систем визначаються за формулами

$$W^*(j\bar{\omega}) = A^*(\bar{\omega}) e^{j\varphi^*(\bar{\omega})}; \quad (10.60)$$

$$W_3^*(j\bar{\omega}) = A_3^*(\bar{\omega}) e^{j\varphi_3^*(\bar{\omega})}, \quad (10.61)$$

де $A^*(\bar{\omega})$, $A_3^*(\bar{\omega})$ — амплітудно-частотні характеристики розімкнутої і замкнутої систем; $\varphi^*(\bar{\omega})$, $\varphi_3^*(\bar{\omega})$ — фазові.

Через те, що $z = e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}$, частотні характеристики імпульсних систем на відміну від безперервних є періодичними функціями частоти. При $\omega = 2\pi/T_0$ відносна частота $\bar{\omega}$ дорівнює 2π , тому частотні характеристики імпульсних систем повторюються з частотою $\bar{\omega}_0$, тобто частотні функції та їхні характеристики повністю визначаються змінуванням відносної частоти $\bar{\omega}$ в інтервалі $-\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi$ або $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$.

Частотні характеристики імпульсних систем, як і безперервних, визначають реакцію на гармонічні дії і застосовуються для дослідження стійкості та якості систем.

Розглянемо як приклад побудову амплітудної частотної характеристики розімкнутої імпульсної системи, що складається з імпульсного елемента і безперервної частини з передаточною функцією $K/(Tp + 1)$ (рис. 10.9). Імпульсний елемент генерує короткі прямокутні імпульси тривалістю γT_0 , де $\gamma \ll 1$.

Дискретна передаточна функція згідно з (10.47)

$$W(z) = \gamma T_0 Z \left\{ \frac{K}{Tp + 1} \right\} = \gamma \frac{T_0 K}{T} Z \left\{ \frac{1}{p + 1/T} \right\}.$$

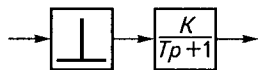


Рис. 10.9

Згідно з табл. 10.1

$$W(z) = \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{z}{z - d},$$

де $d = e^{-T_0/T}$.

Виконаємо підстановку $z = e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}$ та звільнимся від уявного числа в знаменнику, тоді дістанемо

$$W(e^{j\bar{\omega}}) = \gamma \frac{T_0 K}{T} \frac{\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega} - d} = \gamma \frac{T_0 K}{T} \frac{1 - d \cos \bar{\omega} - jd \sin \bar{\omega}}{1 - 2d \cos \bar{\omega} + d^2}.$$

Виділивши дійсну й уявну частини

$$W(e^{j\bar{\omega}}) = U(\bar{\omega}) + jV(\bar{\omega}) = \\ = \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{1 - d \cos \bar{\omega}}{1 - 2d \cos \bar{\omega} + d^2} - j \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{d \sin \bar{\omega}}{1 - 2d \cos \bar{\omega} + d^2},$$

визначимо амплітудно-частотну характеристику

$$A(\bar{\omega}) = \sqrt{U^2(\bar{\omega}) + V^2(\bar{\omega})} = \\ = \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{1}{\sqrt{1 - 2d \cos \bar{\omega} + d^2}}. \quad (10.62)$$

Амплітудно-частотні характеристики, побудовані за формулою (10.62), зображено на рис. 10.10. Під час розрахунку характеристик прийнято такі значення параметрів: $K = 400$; $T = 1$ с; $\gamma = 0,05$, причому для характеристики на рис. 10.10, а прийнято $T_0 = 0,05$ с, а на

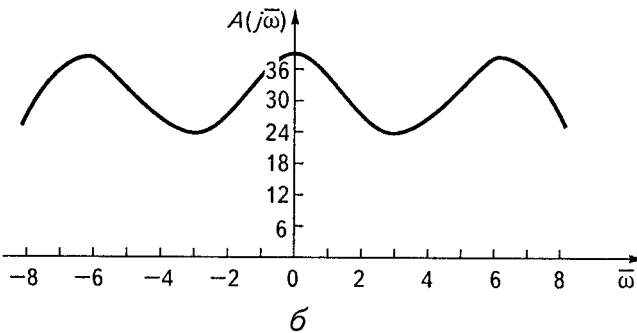
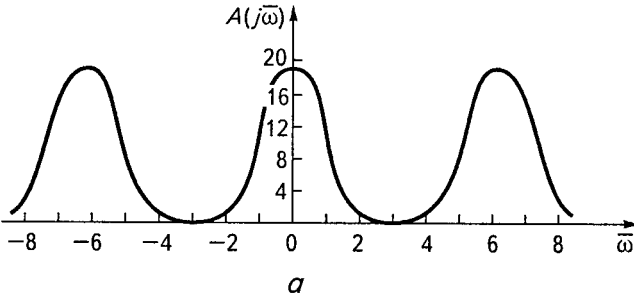


Рис. 10.10

рис. 10.10, б — $T_0 = 1,5$ с, тобто в першому випадку частота квантування перевищує смугу пропускання безперервної частини системи, а в другому — перебуває у цій смузі.

У граничному випадку, коли частота квантування нескінченно велика — $\omega_0 \rightarrow \infty$ ($T_0 \rightarrow 0$), вхідний гармонічний сигнал сприймається системою як безперервний і частотні характеристики імпульсної системи збігаються з частотними характеристиками безперервної частини системи. Те саме відбувається і тоді, коли частота квантування досить висока, але не нескінченно велика, тобто характеристики імпульсної системи є характеристиками безперервної частини системи, що періодично повторюються з частотою $\bar{\omega} = 2\pi$ (рис. 10.10, а). Отже, за досить великої частоти квантування імпульсна система еквівалентна безперервній. Кількісно умови еквівалентності визначаються такими нерівностями:

$$\begin{cases} \omega_0 \geq 2\omega_{\text{бп}}; \\ \omega_f \leq \omega_0 - \omega_{\text{бп}}, \end{cases} \quad (10.63)$$

де $\omega_{\text{бп}}$ — смуга пропускання безперервної частини системи; ω_f — найбільша частота вхідної дії.

Якщо умови (10.63) виконуються, то ефект квантування за часом можна не враховувати і розглядати імпульсну систему як безперервну. Ці умови становлять відому теорему Котельникова—Шеннона про умови неспотвореної передачі безперервного сигналу скінченною кількістю його дискретних значень стосовно систем з амплітудно-імпульсною модуляцією. Якщо умови (10.63) не виконуються, то частотна характеристика імпульсної системи істотно відрізняється від характеристики безперервної частини системи (рис. 10.10, б). У цьому разі властивості безперервної системи відрізнятимуться від властивостей імпульсної, що має таку саму безперервну частину. Під час дослідження таких систем не можна не враховувати ефект квантування, зокрема для математичного описання систем слід користуватися дискретними передаточними функціями.

Частотні характеристики імпульсної системи можна визначати не тільки за передаточною функцією, а й побудувати графічно за відомою АФХ безперервної частини. Методика побудови базується на зв'язку АФХ імпульсної і безперервної систем, що визначається виразом

$$W^*(j\bar{\omega}) = k_i \sum_{r=-\infty}^{+\infty} W_{\text{бп}}[j(\bar{\omega} + 2\pi r)], \quad (10.64)$$

справедливим для систем з амплітудно-імпульсною модуляцією при $\gamma \rightarrow 0$.

Для переходу від характеристики $W_{6n}(j\omega)$ до $W_{6n}(j\bar{\omega})$ достатньо визначити відносну частоту $\bar{\omega}_i = \omega_i T_0$ і замість абсолютної частоти ω_i на криву $W_{6n}(j\omega)$ нанести значення $\bar{\omega}_i$ (рис. 10.11, а). Щоб мати можливість урахувати від'ємні значення r у виразі (10.64), криву $W_{6n}(j\bar{\omega})$ слід доповнити частиною, що відповідає від'ємним частотам. Цю частину характеристики, симетричну відносно дійсної осі, зображено на рис. 10.11, а штриховою лінією.

Для побудови АФХ дискретної системи вибирають ряд значень $\bar{\omega}_i \leq \pi$ і позначають на частотній характеристиці $W(j\bar{\omega})$ точки, що відповідають частотам $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_i - 2\pi, \bar{\omega}_i - 4\pi, \dots, \bar{\omega}_i + 2\pi, \bar{\omega}_i + 4\pi, \dots$. Сума векторів, проведених з початку координат до цих точок, визначає вектор характеристики $W^*(j\bar{\omega})$ без урахування коефіцієнта передачі імпульсного елемента k_i . Для врахування k_i достатньо змінити масштаб на осях координат для $W^*(j\bar{\omega})$ у k_i разів порівняно з масштабом для $W(j\omega)$.

За досить великих частот $\bar{\omega}$ модуль частотної характеристики $|W^*(j\bar{\omega})| \rightarrow 0$, тому в сумі рівності (10.64) можна обмежитися незначною кількістю доданків, наприклад двома, тобто вважати, що

$$W^*(j\bar{\omega}) = k_i \{W_{6n}(j\bar{\omega}) + W_{6n}[j(\bar{\omega} - 2\pi)]\}. \quad (10.65)$$

Згідно з виразом (10.65) характеристику $W^*(j\bar{\omega})$ побудувати досить просто. З кожної точки $\bar{\omega} < \pi$ частотної характеристики $W_{6n}(j\bar{\omega})$ як із

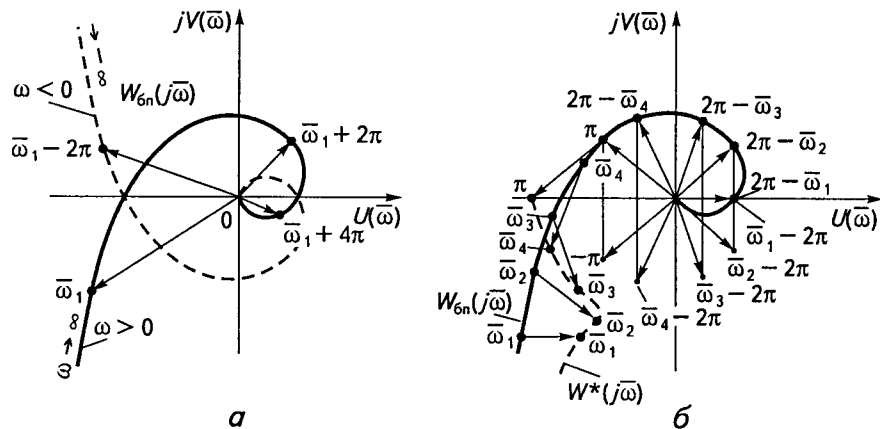


Рис. 10.11

початку координат проводять вектори $W_{\text{вн}} [j(\bar{\omega} - 2\pi)]$. Кінці цих векторів визначають частотну характеристику $W^*(j\bar{\omega})$, масштаб якої повинен враховувати коефіцієнт k_1 . Порядок побудови характеристики $W^*(j\bar{\omega})$ наведено на рис. 10,11, б.

Під час побудови частотних характеристик імпульсних систем відносно частоту достатньо змінювати в межах від 0 до π , а при побудові характеристик безперервних систем частоту змінюють від 0 до ∞ . Це створює певні незручності при застосуванні методів, розроблених для безперервних систем (зокрема методів, що базуються на використанні АФХ), при дослідженні дискретних систем. Тому для побудови частотних характеристик часто використовують так зване білінійне w -перетворення дискретних передаточних функцій. Під час w -перетворення в дискретних передаточних функціях аргумент z замінюється аргументом w за допомогою підстановки

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (10.66)$$

Зв'язок аргументу w з частотою ω можна виразити так. З (10.66) випливає

$$w = \frac{z-1}{z+1},$$

але через те, що $z = e^{j\omega T_0}$, отримаємо

$$w = \frac{e^{j\omega T_0} - 1}{e^{j\omega T_0} + 1}.$$

Поділивши чисельник і знаменник цього виразу на $e^{j\frac{\omega}{2}T_0}$, дістанемо

$$w = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}T_0} - e^{-j\frac{\omega}{2}T_0}}{e^{j\frac{\omega}{2}T_0} + e^{-j\frac{\omega}{2}T_0}}.$$

Згідно з формулою Ейлера для комплексних чисел маємо

$$w = j \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} = j \bar{\lambda}. \quad (10.67)$$

Величина

$$\bar{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} = \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2} \quad (10.68)$$

називається *відносною псевдочастотою*. Зв'язок між частотою ω і відносною псевдочастотою $\bar{\lambda}$ визначається виразами

$$\omega = \frac{2}{T_0} \arctg \bar{\lambda}; \bar{\omega} = 2 \arctg \bar{\lambda}, \quad (10.69)$$

з яких випливає, що змінюванню частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π відповідає змінювання псевдочастоти від 0 до ∞ .

Під час побудови частотних характеристик зручніше користуватися *абсолютною псевдочастотою*

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} = \frac{2\bar{\lambda}}{T_0}.$$

За малих частот $\operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} \approx \frac{\omega T_0}{2}$ і $\lambda = \omega$. Тому за умови $\omega T_0 < 2$ в розрахунках псевдочастоту можна замінити дійсною коловою частотою ω .

Під час побудови частотних характеристик відносно псевдочастоти за дискретною передаточною функцією спочатку від аргументу z переходять до аргументу w , здійснивши w -перетворення за формулою (10.66), а потім виконують підстановку $w = j\lambda$ або $w = jT_0\lambda/2$ і дістають комплексну частотну функцію

$$W(j\lambda) = A(\lambda)e^{j\varphi(\lambda)} = U(\lambda) + jV(\lambda),$$

за якою будують АФХ або логарифмічні амплітудну і фазову характеристики.

Логарифмічні характеристики визначаються за формулами, подібними до формул для безперервних систем, тобто

$$L(\lambda) = 20 \lg A(\lambda)$$

і

$$\varphi(\lambda) = \arctg \frac{V(\lambda)}{U(\lambda)}.$$

Так само, як і для безперервних систем, $L(\lambda)$ вимірюється в децибелах, $\varphi(\lambda)$ — у градусах або радіанах, $\lg \lambda$ — у декадах.

Логарифмічні частотні характеристики імпульсних систем будувати складніше порівняно з безперервними. Це зумовлено тим, що при послідовному з'єднанні безперервних ланок без імпульсних елементів дискретна передаточна функція не дорівнює добутку дискретних передаточних функцій окремих ланок і вираз $W(j\lambda)$ звичайно є

сумою дробів. Тому перед побудовою характеристик комплексну функцію спочатку треба привести до зручного для логарифмування вигляду, тобто подати її як дріб, що містить у чисельнику і знаменнику елементарні співмножники вигляду $K, j\lambda, Tj\lambda + 1$ і $T^2(j\lambda)^2 + 2\xi Tj\lambda + 1$. Після цього будують асимптотичну ЛАХ дискретної системи так само, як і для безперервних систем. ЛФХ визначається як сума фазових характеристик, що відповідають елементарним співмножникам чисельника і знаменника передаточної функції.

Оскільки частотна характеристика розімкнутої системи має скінченне значення при $\bar{\omega} = \pi$, що відповідає $\lambda = \infty$, при $\lambda \rightarrow \infty$ ЛАХ прямує до сталої величини, а ЛФХ — до значення $\varphi(\lambda) = 0$ або $\varphi(\lambda) = -180^\circ$.

Застосування псевдочастоти і логарифмічних характеристик дає змогу досліджувати стійкість і якість перехідних процесів імпульсних систем, а також виконувати синтез коректувальних пристроїв методами, розробленими для безперервних систем.

10.8

Стійкість імпульсних систем

Подібно до безперервних систем лінійна імпульсна система буде стійкою, якщо всі полюси передаточної функції замкнутої системи $W_3^*(p)$ (корені характеристичного рівняння) знаходяться в лівій півплощині комплексної площини p . Межею стійкості є уявна вісь (рис. 10.12, а). Оскільки під час дослідження імпульсних систем звичайно застосовується z -перетворення, необхідно визначити межу стійкості на площині z . Виходячи з того, що $z = e^{pT_0}$ і рівняння $p = j\omega$ відповідає уявній осі на площині p , тобто межі стійкості на цій площині, межу стійкості на площині z можна визначити так. Підставивши $p = j\omega$, знаходимо вираз

$$z = e^{j\omega T_0} = \cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0,$$

який становить рівняння кола одиничного радіуса. Це коло і є межею стійкості (рис. 10.12, б). Зона стійкості лежатиме в середині цього кола. Справді, якщо $p = -\alpha \pm j\beta$, то

$$z = e^{(-\alpha \pm j\beta) T_0} = e^{-\alpha T_0} e^{\pm j\beta T_0} = |z| e^{\pm j\beta T_0};$$

крім того, $|z| < 1$, бо $|z| = e^{-\alpha T_0}$.

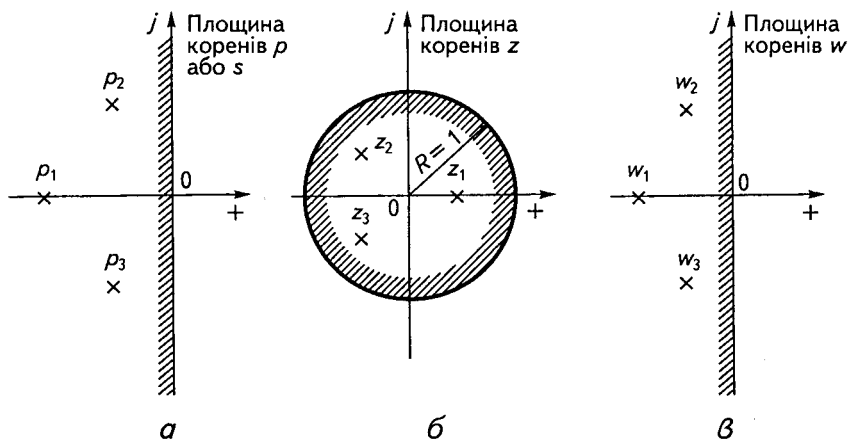


Рис. 10.12

Отже, стійкість імпульсної системи можна досліджувати, визначивши корені характеристичного рівняння замкнутої системи $D(z) = 0$. Імпульсна система стійка, якщо модулі всіх коренів характеристичного рівняння замкнутої системи менші за одиницю. Якщо модуль хоча б одного кореня перевищує одиницю, то система нестійка; при $|z| = 1$ система перебуває на межі стійкості.

Для дослідження стійкості імпульсних систем використовуються критерії, за допомогою яких можна оцінювати стійкість за коефіцієнтами характеристичного рівняння або за частотними характеристиками.

Алгебричні критерії стійкості. Ці критерії було розроблено стосовно безперервних систем. Вони дають змогу визначити, чи всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині комплексної площини коренів. Застосувати ці критерії безпосередньо для дослідження імпульсних систем неможливо. Справді, характеристичне рівняння імпульсної системи можна подати у вигляді

$$D(z) = a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_{l-1} z + a_l = 0 \quad (10.70)$$

або

$$D^*(p) = a_0 e^{lpT_0} + a_1 e^{(l-1)pT_0} + \dots + a_{l-1} e^{pT_0} + a_l = 0. \quad (10.71)$$

Для рівняння (10.70) умовою стійкості є розміщення всіх коренів у середині кола одиничного радіуса в площині коренів z , а не в лівій

півплощині. Для рівняння (10.71) умовою стійкості залишається розміщення всіх коренів p_i у лівій півплощині коренів p . Проте критерії стійкості застосовуються лише до характеристичних рівнянь у вигляді поліномів, а рівняння (10.71) є трансцендентним. Щоб застосувати відомі алгебричні критерії стійкості безперервних систем для дослідження імпульсних систем, необхідно виконати w -перетворення, яке полягає в заміні комплексної змінної z в рівнянні (10.70) на комплексну змінну w за допомогою формули $z = (1 + w)/(1 - w)$. Внаслідок цього перетворення утворюється поліноміальне рівняння

$$D(w) = 0. \quad (10.72)$$

Зоною стійкості для його коренів буде ліва півплощина коренів w (рис. 10.12, *в*). До цього рівняння можна застосувати всі алгебричні критерії стійкості — Вишнеградського, Гурвіца і Рауса, оскільки умова стійкості для рівняння (10.72) збігається з умовами стійкості безперервних систем.

Наприклад, для використання критерію Гурвіца необхідно визначити передаточну функцію замкненої системи $W_3(z) = Q(z)/D(z)$ і записати характеристичне рівняння $D(z) = 0$. Потім у цьому рівнянні треба виконати підстановку $z = (1 + w)/(1 - w)$, тоді

$$D(w) = a_0 \frac{(1 + w)^l}{(1 - w)^l} + a_1 \frac{(1 + w)^{l-1}}{(1 - w)^{l-1}} + \dots + a_l = 0.$$

Після приведення цього виразу до загального знаменника дістанемо нове характеристичне рівняння того самого порядку:

$$D'(w) = a'_0 w^l + a'_1 w^{l-1} + \dots + a'_l = 0, \quad (10.73)$$

де a'_i — коефіцієнти, що є комбінаціями доданків і сум коефіцієнтів a_i .

Згідно з критерієм Гурвіца для стійкості імпульсної системи необхідно і достатньо, щоб при $a'_0 > 0$ визначник Гурвіца і всі його діагональні мінори були додатними:

$$\Delta_l > 0; \quad \Delta_{l-1} > 0; \quad \dots; \quad \Delta_1 > 0.$$

- **Приклад 10.6.** Визначити за критерієм Гурвіца стійкість системи, характеристичне рівняння якої

$$25z^3 - 5z^2 - 10z - 1 = 0.$$

Розв'язання. Виконаємо w -перетворення:

$$25\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 - 5\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - 10\frac{1+w}{1-w} - 1 = \\ = \frac{20w^3 + 90w^2 + 80w + 10}{(1-w)^3} = 0.$$

Перетворене характеристичне рівняння має вигляд

$$a'_0 w^3 + a'_1 w^2 + a'_2 w + a'_3 = \\ = 20w^3 + 90w^2 + 80w + 10 = 0.$$

Згідно з критерієм Гурвіца система стійка, оскільки $a'_0 > 0$; $a'_1 > 0$; $a'_2 > 0$; $a'_3 > 0$ і

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_3 \\ a'_0 & a'_2 \end{vmatrix} = a'_1 a'_2 - a'_0 a'_3 = 7000 > 0.$$

Частотні критерії стійкості. Оцінка стійкості імпульсних систем можлива також за частотними критеріями, подібними до критеріїв Михайлова і Найквіста для безперервних систем.

Аналог критерію Михайлова. Під час дослідження стійкості за критерієм Михайлова використовується характеристичне рівняння замкнутої системи $D(z) = 0$ і виконується підстановка $z = e^{j\bar{\omega}}$. Через те, що $e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}$, після цієї підстановки рівняння (10.70) матиме вигляд

$$D(e^{j\bar{\omega}}) = a_0 \cos l\bar{\omega} + ja_0 \sin l\bar{\omega} + a_1 \cos(l-1)\bar{\omega} + \\ + ja_1 \sin(l-1)\bar{\omega} + \dots + a_{l-1} \cos \bar{\omega} + ja_{l-1} \sin \bar{\omega} + a_l = \quad (10.74) \\ = X(\bar{\omega}) + jY(\bar{\omega}),$$

де

$$X(\bar{\omega}) = a_0 \cos l\bar{\omega} + a_1 \cos(l-1)\bar{\omega} + \dots + a_{l-1} \cos \bar{\omega} + a_l;$$

$$Y(\bar{\omega}) = a_0 \sin l\bar{\omega} + a_1 \sin(l-1)\bar{\omega} + \dots + a_{l-1} \sin \bar{\omega}.$$

Змінюючи частоту $\bar{\omega}$ від 0 до π , за формулою (10.74) на комплексній площині будуюмо криву — аналог годографа вектора Михайлова. За виглядом цього годографа робимо висновок про стійкість системи.

Формулювання цього критерію таке:

імпульсна система автоматичного керування стійка, якщо годограф вектора $D(e^{j\bar{\omega}})$ при змінюванні частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π починається на додатній дійсній півосі при $\bar{\omega} = 0$ і обходить у додатному напрямі (проти ходу стрілки годинника) по-

слідовно 2/ квадрантів, ніде не перетворюючись у нуль (тут l — порядок характеристичного рівняння).

Годограф вектора $D(e^{j\bar{\omega}})$ стійкої системи третього порядку зображено на рис. 10.13. На відміну від безперервних систем годограф не прямує до нескінченності, а закінчується на дійсній осі. Крім того, годограф проходить вдвоє більше квадрантів.

Якщо годограф $D(e^{j\bar{\omega}})$ проходить через початок координат, то система перебуває на межі стійкості.

Враховуючи, що при $\bar{\omega} = 0$ $D(e^{j\bar{\omega}}) = D(1)$, а при $\bar{\omega} = \pi$ $D(e^{j\bar{\omega}}) = D(-1)$, можна сформулювати такі необхідні умови стійкості:

- 1) для системи непарного порядку $D(1) > 0$ і $D(-1) < 0$;
- 2) для системи парного порядку $D(1) > 0$ і $D(-1) > 0$.

При дослідженні стійкості, перш ніж будувати годограф вектора $D(e^{j\bar{\omega}})$, доцільно перевірити, чи виконуються ці досить прості умови. Якщо вони не виконуються, то система нестійка і годограф можна не будувати.

Аналог критерію Найквіста. Подібно до безперервних систем для дослідження стійкості замкнутих імпульсних систем можна використовувати АФХ розімкнутих систем.

Аналог критерію Найквіста стосовно імпульсних систем формулюється так:

1) якщо система стійка в розімкнутому стані або нейтральна, тобто має нульові полюси p_i , то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи при змінюванні відносної частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π не охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ і не проходила через неї;

2) якщо система нестійка в розімкнутому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи при змінюванні частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ $k/2$ разів, де k — кількість коренів характеристичного рівняння безперервної частини розімкнутої системи, що мають додатну дійсну частину, або, що те саме, кількість коренів z , характеристичного рівняння розімкнутої імпульсної системи, модулі яких більші за одиницю.

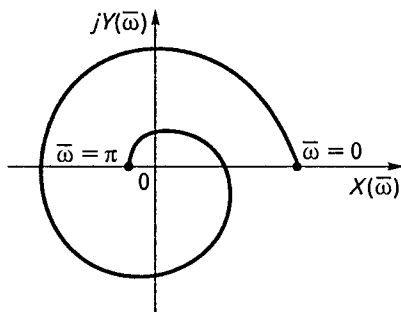


Рис. 10.13

Отже, під час дослідження стійкості за критерієм Найквіста передусім треба перевірити стійкість розімкнутої системи і, якщо вона нестійка, визначити кількість коренів p_i з додатною дійсною частиною. Це зробити неважко, оскільки висновок про стійкість розімкнутої імпульсної системи можна робити на підставі перевірки стійкості її безперервної частини.

АФХ розімкнутої стійкої імпульсної системи, що відповідають стійкій (крива 1) і нестійкій (крива 2) замкнутим імпульсним системам, зображено на рис. 10.14, а. АФХ розімкнутих систем стійкої (крива 1) і нестійкої (крива 2) в замкнутому стані при $k = 2$ наведено на рис. 10.14, б.

Як бачимо, формулювання критерію Найквіста для імпульсних систем залишається таким самим, як і для безперервних. Відмінність полягає в тому, що АФХ імпульсних систем при $\bar{\omega} = \pi$ закінчуються на дійсній осі, а не стягуються в початок координат.

Особливістю також є залежність АФХ імпульсної системи від періоду квантування T_0 імпульсного елемента. Це неважко виявити, проаналізувавши побудову АФХ імпульсної системи за АФХ безперервної системи (див. рис. 10.11, б).

Введення імпульсного елемента в деяких випадках може бути засобом стабілізації нестійких замкнутих безперервних систем. Період квантування у цьому разі рекомендується вибирати з умови

$$T_0 \geq \pi/\omega_d, \quad (10.75)$$

де ω_d — частота, за якої АФХ безперервної частини розімкнутої системи перетинає додатну уявну піввісь.

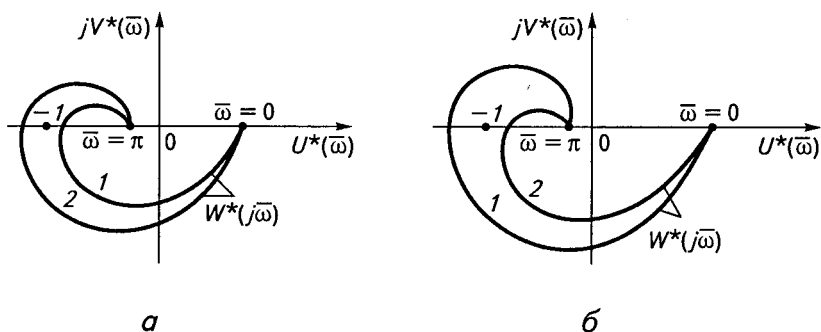


Рис. 10.14

Відповідно до критерію Найквіста стійкість замкнутої системи можна визначати не тільки за АФХ розімкнутої системи, а й за логарифмічними характеристиками — амплітудною $L(\lambda)$ і фазовою $\varphi(\lambda)$. Для цього попередньо треба виконати w -перетворення і перейти до псевдочастоти λ , застосувавши підстановку $w = j \operatorname{tg} \frac{T_0}{2} \lambda = j \bar{\lambda}$.

Стосовно логарифмічних характеристик критерій Найквіста формулюється так:

1) якщо система стійка або нейтральна в розімкнутому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб на частоті зрізу $\bar{\lambda}_3$, що відповідає $L(\bar{\lambda}) = 0$, фаза за модулем була менша π ;

2) якщо система нестійка в розімкнутому стані і характеристичне рівняння має k коренів z_i , модулі яких перевищують одиницю, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб при $L(\bar{\lambda}) > 0$ кількість перетинів фазовою характеристикою рівня $-\pi$ знизу вгору була в $k/2$ разів більшою за кількість перетинів у протилежному напрямі.

□ **Приклад 10.7.** Дослідити стійкість замкнутої імпульсної САК за допомогою логарифмічних характеристик і визначити запаси стійкості за фазою й амплітудою, якщо передаточна функція системи в розімкнутому стані має вигляд

$$W(z) = \frac{10z(z^2 + 1,2z + 0,11)}{(z - 1)(z - 0,135)(z - 0,5)}.$$

Розв'язання. Поліуси передаточної функції розімкнутої системи $z_1 = 1$; $z_2 = 0,135$; $z_3 = 0,5$, тому розімкнута система нейтральна і для дослідження стійкості замкнутої системи застосовується перше формулювання критерію Найквіста в логарифмічній формі.

Для побудови логарифмічних характеристик спочатку подамо чисельник передаточної функції $W(z)$ у вигляді добутку елементарних співмножників

$$W(z) = \frac{10z(z + 1,1)(z + 0,1)}{(z - 1)(z - 0,135)(z - 0,5)},$$

а потім виконаємо w -перетворення, зробивши підстановку $z = (1 + w)/(1 - w)$. Після спрощень дістанемо

$$W(w) = \frac{10(1 + w)(2,1 - 0,1w)(0,9w + 1,1)}{2w(1,135w + 0,865)(1,5w + 0,5)}.$$

Подамо передаточну функцію $W(w)$ у вигляді, зручному для побудови логарифмічних характеристик:

$$W(w) = \frac{26,7(w + 1)(1 - 0,0457w)(0,82w + 1)}{w(1,312w + 1)(3w + 1)}$$

Виконаємо підстановку $w = j\bar{\lambda}$:

$$W(j\bar{\lambda}) = \frac{26,7(j\bar{\lambda} + 1)(1 - 0,0457j\bar{\lambda})(0,82j\bar{\lambda} + 1)}{j\bar{\lambda}(1,312j\bar{\lambda} + 1)(3j\bar{\lambda} + 1)}$$

і побудуємо ЛАХ $L(\bar{\lambda})$ і ЛФХ $\varphi(\bar{\lambda})$.

Методика побудови $L(\bar{\lambda})$ така сама, як і методика побудови асимптотичних ЛАХ безперервних систем. Низькочастотна (початкова) частина ЛАХ проходить через точку з координатами $L(\bar{\lambda}) = 20 \lg 26,7 = 28,5$ дБ, $\lg \bar{\lambda} = 0$ з нахилом -20 дБ/дек, оскільки передаточна функція має співмножник $1/j\bar{\lambda}$. Логарифми частот сполуки

$$\lg \bar{\lambda}_1 = \lg(1/0,045) = 1,32; \quad \lg \bar{\lambda}_2 = \lg(1/0,82) = 0,09;$$

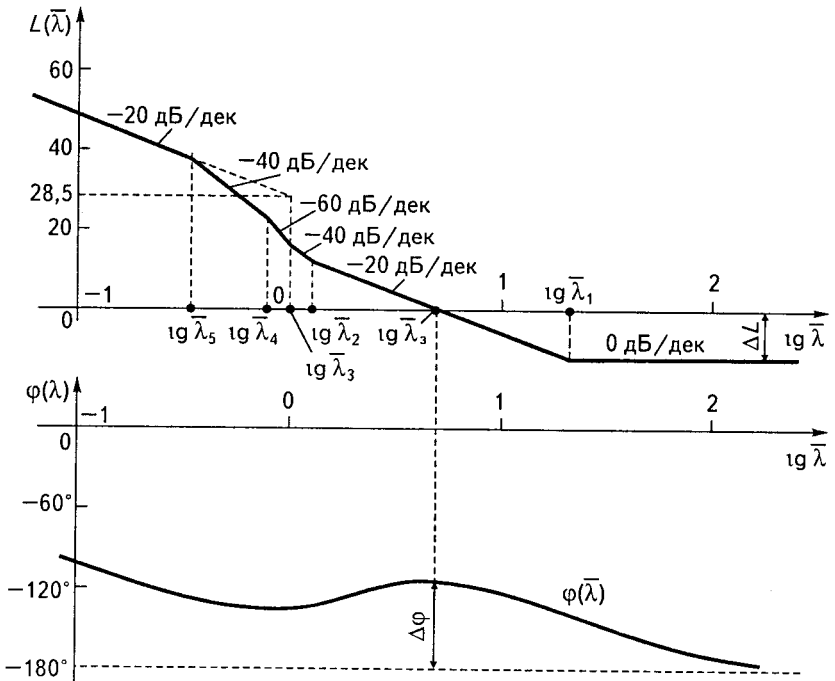


Рис. 10.15

$$\lg \bar{\lambda}_3 = \lg 1 = 0; \quad \lg \bar{\lambda}_4 = \lg (1/1,312) = -0,12;$$

$$\lg \bar{\lambda}_5 = \lg (1/3) = -0,48.$$

Фазова характеристика розраховується за формулою

$$\varphi(\bar{\lambda}) = -\pi/2 + \operatorname{arctg} \bar{\lambda} - \operatorname{arctg} 0,0457 \bar{\lambda} + \operatorname{arctg} 0,82 \bar{\lambda} - \\ - \operatorname{arctg} 1,312 \bar{\lambda} - \operatorname{arctg} 3 \bar{\lambda}.$$

Побудовані ЛАХ і ЛФХ зображено на рис. 10.15.

Система регулювання на псевдочастоті зрізу $\bar{\lambda}_c = 5$ ($\lg \bar{\lambda}_c = 0,7$) має запас стійкості за фазою $\Delta\varphi = 64^\circ$. Запас стійкості за амплітудою $\Delta L = 11$ дБ.

10.9

Якість імпульсних систем

Якість імпульсних систем оцінюється точністю роботи в усталеному режимі та характером перехідних процесів при типових вхідних і збурюючих діях.

Усталену похибку в загальному випадку можна визначити таким самим способом, як і в безперервних системах, тобто знайти зображення похибки і перейти до її усталеного значення. Зображення похибки визначається з виразу передаточної функції (10.57) замкнутої системи відносно похибки

$$X(z) = W_x(z)F(z). \quad (10.76)$$

Усталене значення похибки згідно з формулою (10.38) для кінцевого значення оригіналу (решітчастої функції)

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_x(z)F(z). \quad (10.77)$$

За цією формулою можна знайти усталену похибку за будь-якої форми вхідного сигналу $f[n]$. Проте її можна застосовувати тільки у разі, коли існує межа в правій частині. Межа не існує, якщо, наприклад, усталена похибка є гармонічною функцією.

Імпульсна система, в якій усталена похибка за будь-якого зовнішнього сигналу дорівнює нулю, називається *астатичною* відносно цього сигналу. В протилежному разі система називається *статичною*.

Системи, астатичні щодо ступінчастого сигналу, називаються *системами з астатизмом першого порядку*. Системи, астатичні щодо сигналу, що змінюється зі сталою швидкістю, називаються *системами з астатизмом другого порядку* і т. д.

Точність імпульсної системи в усталеному режимі можна оцінювати за коефіцієнтами похибок, які становлять коефіцієнти C_0, C_1, C_2, \dots розкладання передаточної функції за похибкою $W_x(z)$ в ряд Маклорена за степенями p . Ці коефіцієнти визначаються за формулою

$$C_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k W_x^*(p)}{dp^k} \right]_{p=0}, \quad (10.78)$$

де

$$W_x^*(p) = W_x(z) \Big|_{z=e^{T_0 p}}.$$

Величини, обернені коефіцієнтам похибок, так само як і для безперервних систем, називаються *добротностями*. Наприклад, добротність за швидкістю

$$k_v = 1/C_1, \quad (10.79)$$

добротність за прискоренням

$$k_a = 1/C_2 \quad (10.80)$$

і т. д.

□ **Приклад 10.8.** Передаточна функція розімкнутої імпульсної системи

$$W(z) = \frac{0,25z^2 - 0,275z}{z^2 - 1,9z + 0,9}.$$

Визначити перші два коефіцієнти похибок C_0 і C_1 при $T_0 = 0,1$ с.

Розв'язання. Запишемо передаточну функцію замкнутої системи відносно похибки

$$W_x(z) = \frac{1}{1 + W(z)} = \frac{z^2 - 1,9z + 0,9}{1,25z^2 - 2,175z + 0,9}.$$

Для визначення коефіцієнта похибки C_0 в цей вираз підставимо $z = 1$, що відповідає $p = 0$. Тоді

$$C_0 = W_x(1) = 0.$$

Для визначення коефіцієнта C_1 здиференціюємо передаточну функцію $W_x(e^{pT_0})$:

$$\begin{aligned} \frac{dW_x(e^{pT_0})}{dp} &= \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{2T_0p} - 1,9e^{T_0p} + 0,9}{1,25e^{2T_0p} - 2,175e^{T_0p} + 0,9} \right) = \\ &= \frac{0,2T_0e^{3T_0p} - 0,45T_0e^{2T_0p} + 0,2475T_0e^{T_0p}}{(1,25e^{2T_0p} - 2,175e^{T_0p} + 0,9)^2} = \\ &= \frac{0,2T_0z^3 - 0,45T_0z^2 + 0,2475T_0z}{(1,25z^2 - 2,175z + 0,9)^2}. \end{aligned}$$

Підставивши в цей вираз $z = 1$ і $T_0 = 0,1$ с, дістанемо

$$C_1 = 0,4 \text{ с.}$$

Якість перехідних процесів імпульсних систем оцінюється такими самими показниками, як і безперервних. Найважливішими з них є тривалість перехідного процесу і максимальне відхилення регульованої величини від усталеного значення. Ці показники можна визначити розв'язуванням різницевого рівняння, що описує динаміку системи.

Методи розв'язування різницевих рівнянь розглянуто в п. 10.4. Зокрема для розрахунку перехідної характеристики, тобто реакції системи на одиничну ступінчасту дію за нульових початкових умов, зручно застосовувати z -перетворення. В цьому разі зображення вхідної величини

$$F(z) = \frac{z}{z-1}, \quad (10.81)$$

а зображення вихідної

$$Y(z) = F(z)W_3(z) = \frac{z}{z-1}W_3(z). \quad (10.82)$$

Переходячи від зображення (10.82) до оригіналу, знаходимо шукану решітчасту функцію $y[n]$. Якість перехідного процесу визначається за графіком безперервної функції $y[t]$, що відповідає решітчастій функції $y[n]$.

Якість перехідного процесу можна оцінювати також за полюсами і нулями передаточної функції, не розв'язуючи різницевого рівняння. Якщо нулі відсутні, то полюси повністю визначають перехідний процес у системі. Кожному кореню характеристичного рівняння відпо-

відає складова перехідного процесу вигляду $C_i z^n$. Характер перехідного процесу кожної складової залежить від кореня z_i . Відомо, що для стійкої системи модулі всіх коренів мають бути меншими за одиницю. При цьому додатному дійсному кореню відповідає експоненціально затухаюча послідовність δ -імпульсів, від'ємному дійсному — знакозмінна затухаюча послідовність, комплексним — коливальна затухаюча послідовність (рис. 10.16).

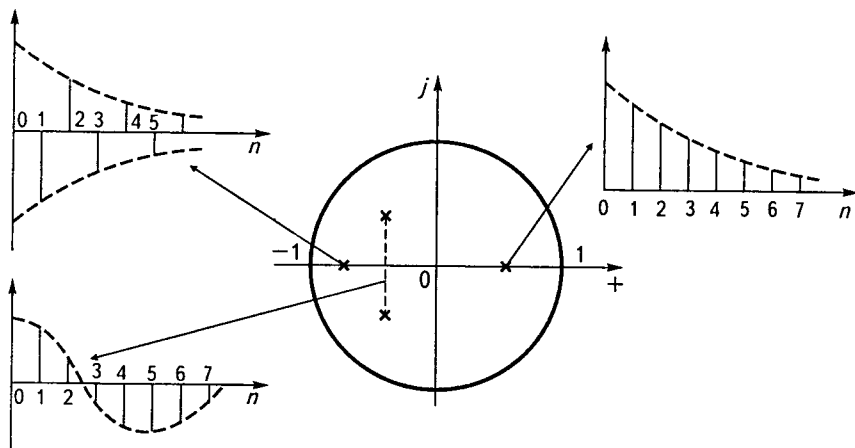


Рис. 10.16

Коло одиничного радіуса на площині z є відображенням уявної осі на площині p . Якщо корінь p є дійсним від'ємним ($p = -\alpha$), то корінь $z = e^{pT_0} = e^{-\alpha T_0}$ буде дійсним додатним, тобто від'ємна дійсна піввісь площини p відображується у відрізок додатної півосі площини z всередині кола одиничного радіуса. Парі комплексно-спряжених коренів у лівій напівплощині площини p відповідає пара комплексно-спряжених коренів усередині кола одиничного радіуса або два дійсних корені на від'ємній дійсній півосі площини z . Справді, якщо $p = -\alpha \pm j\beta$, то $z = e^{-\alpha T_0} e^{\pm j\beta T_0}$, тобто в загальному випадку дістаємо комплексні корені на площині z . Проте, якщо $\beta T_0 = \pi$ або $\beta T_0 = (2n + 1)\pi$, то $e^{j\beta T_0} = -1$, тобто корені потрапляють на від'ємну дійсну піввісь.

Найбільш істотно на перехідний процес впливають корені, розміщені найближче до уявної осі площини p . Це саме можна сказати

про корені, розміщені ближче, ніж інші, до кола одиничного радіуса площини z . Такі корені називаються *домінуючими*.

Якщо система має пару домінуючих комплексно-спряжених коренів $z_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, а решта коренів міститься поблизу від початку координат, то час досягнення першого максимуму і перерегулювання визначаються за такими формулами:

$$t_{\max} \approx T_0 [\pi/2\theta - (M + 1) + N + b]; \quad (10.83)$$

$$\sigma_{\max} \approx k |z_1|^{1+b+\pi/2\theta}, \quad (10.84)$$

де $\theta = \operatorname{arctg} \beta T_0$; M — кількість нулів передаточної функції; N — кількість полюсів; b — додатне число ($b < 1$), при якому вираз у квадратних дужках у формулі (10.83) дорівнює цілому числу; $k = \cos b\theta + (\operatorname{cosec} \theta / |z_1| - \operatorname{ctg} \theta) \sin b\theta$; $z_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ — модуль домінуючого кореня.

Якість імпульсних систем можна характеризувати також непрямыми оцінками, подібними до критеріїв якості безперервних систем. Цими оцінками є ступені стійкості η і коливальності μ , а також інтегральні оцінки якості.

Ступінь стійкості η визначається абсолютною величиною дійсної частини найближчого до уявної осі комплексної площини p кореня $p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ характеристичного рівняння замкнутої системи

$$D^*(p) = a_0 e^{T_0 p} + a_1 e^{(l-1)T_0 p} + \dots + a_{l-1} e^{T_0 p} + a_l = 0,$$

тобто

$$\eta = |\alpha|_{\min}.$$

Якщо перейти до відносного часу, тобто ввести змінну $q = T_0 p$ (комплексну змінну перетворення Лапласа у відносному часі), то характеристичне рівняння матиме вигляд

$$D^*(q) = a_0 e^{q} + a_1 e^{(l-1)q} + \dots + a_{l-1} e^q + a_l = 0$$

і ступінь стійкості обчислюватиметься за формулою

$$\bar{\eta} = |T_0 \alpha|_{\min}.$$

Тривалість перехідного процесу, вимірювана кількістю періодів квантування, і абсолютна тривалість визначається через ступінь стійкості:

$$n_n \leq 3/\bar{\eta},$$

$$t_n \leq 3T_0/\bar{\eta} = 3/\eta.$$

Цікаво зазначити, що в імпульсних системах теоретично можлива реалізація нескінченно великого ступеня стійкості. Ступінь стійкості η дорівнює нескінченності тільки у разі, коли всі корені характеристичного рівняння $D^*(p) = 0$ мають нескінченно велику від'ємну дійсну частину, а це означає, що всі корені характеристичного рівняння $D(z) = 0$ повинні дорівнювати нулю. Якщо характеристичне рівняння має вигляд (10.70), то всі корені дорівнюють нулю тільки за умови, що

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{l-1} = a_l = 0. \quad (10.85)$$

У системах із нескінченно великим ступенем стійкості перехідний процес при одиничній ступінчастій дії має скінченну тривалість (закінчується протягом скінченної кількості періодів квантування). Умова (10.85) називається *умовою скінченної тривалості перехідного процесу*.

Дійсно, якщо для передаточної функції замкнутої системи

$$W_3(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_{l-1} z + a_l}$$

виконується умова (10.85), то

$$\begin{aligned} W_3(z) &= \frac{b_0}{a_0} z^{-(l-m)} + \frac{b_1}{a_0} z^{-(l-m+1)} + \dots \\ &\dots + \frac{b_{m-1}}{a_0} z^{-(l-1)} + \frac{b_m}{a_0} z^{-l}. \end{aligned}$$

Імпульсна перехідна характеристика, що є оригіналом зображення $W_3(z)$, визначається за формулою

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{b_0}{a_0} \delta[n - (l - m)] + \frac{b_1}{a_0} \delta[n - (l - m + 1)] + \dots \\ &\dots + \frac{b_{m-1}}{a_0} \delta[n - (l - 1)] + \frac{b_m}{a_0} \delta[n - l], \end{aligned}$$

де $\delta[n]$ — дельта-функція.

З цього виразу бачимо, що імпульсна перехідна характеристика складається зі скінченної кількості імпульсів, яка не перевищує степеня знаменника передаточної функції. Однак практична реалізація

умов скінченної тривалості перехідних процесів у багатьох випадках ускладнена.

Ступінь коливальності μ є непрямою оцінкою коливальності системи. Для стійких імпульсних систем він визначається як абсолютна величина максимального відношення уявної та дійсної частин коренів характеристичного рівняння $D^*(p) = 0$ або $D^*(q) = 0$, тобто

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|_{\max}.$$

Непрямими оцінками, що враховують не тільки тривалість процесу, а і його відхилення від усталеного значення протягом перехідного процесу, є інтегральні оцінки якості.

Найпростішою є лінійна інтегральна оцінка

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (y[\infty] - y[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon[n], \quad (10.86)$$

де $y[\infty]$ — усталене значення вихідної величини.

Ця оцінка придатна тільки для неколивальних процесів.

Ширше застосування знайшла квадратична інтегральна оцінка

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (y[\infty] - y[n])^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^2[n]. \quad (10.87)$$

Найкращою є та імпульсна система, для якої інтегральні оцінки мінімальні. Значення параметрів системи, що відповідають мінімальним оцінкам, називаються *оптимальними за якістю перехідного процесу*.

10.10

Корекція імпульсних систем

Загальна мета корекції імпульсних систем полягає у забезпеченні стійкості, заданої точності роботи в усталеному режимі та задовільної якості перехідних процесів.

Корекцію можна здійснювати за рахунок змінювання параметрів системи без зміни її структури або за рахунок введення додаткових

коректувальних кіл. Своєю чергою, коректувальні кола можуть бути безперервними або дискретними.

Найпростішим способом корекції є змінювання коефіцієнта підсилення розімкнутої системи, який впливає практично на всі властивості системи.

Значення коефіцієнтів підсилення K , при яких система зберігає стійкість, можна визначити за будь-яким критерієм стійкості, якщо використати умови, за яких система перебуває на межі стійкості.

□ **Приклад 10.9.** Передаточна функція розімкнутої системи

$$W(z) = \frac{0,5Kz}{z^2 - 1,2z + 0,25}$$

Визначити, при яких значеннях коефіцієнта K імпульсна система стійка у замкнутому стані.

Розв'язання. Характеристичне рівняння замкнутої системи

$$D(z) = z^2 - 1,2z + 0,25 + 0,5Kz = z^2 + (0,5K - 1,2)z + 0,25 = 0.$$

Виконаємо w -перетворення

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + (0,5K - 1,2)\frac{1+w}{1-w} + 0,25 = 0$$

і визначимо характеристичне рівняння

$$(2,45 - 0,5K)w^2 + 1,5w + 0,5K + 0,05 = 0.$$

Згідно з критерієм Гурвіца система другого порядку стійка, якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння будуть додатними, тобто

$$2,45 - 0,5K > 0;$$

$$1,5 > 0;$$

$$0,5K + 0,05 > 0.$$

Останні дві умови виконуються при будь-яких додатних значеннях K . З першої умови отримаємо $K < 4,9$, тобто імпульсна система стійка лише при $K < 4,9$.

Коефіцієнт підсилення K розімкнутої системи, що забезпечує бажаний показник коливальності M , можна визначити так. Записується передаточна функція розімкнутої системи

$$W(z) = KW_0(z)$$

і на комплексній площині будується амплітудно-фазова характеристика $W_0^*(j\bar{\omega})$ за допомогою підстановки $z = e^{j\bar{\omega}}$ для діапазону частот $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ (рис. 10.17). Після цього з початку координат проводиться пряма OA під кутом $\varphi = \arcsin(1/M)$ до від'ємної дійсної півосі і будувється коло радіусом CP з центром C на від'ємній дійсній півосі так, щоб воно було дотичним одночасно до амплітудно-фазової характеристики $W_0^*(j\bar{\omega})$ і прямої OA .

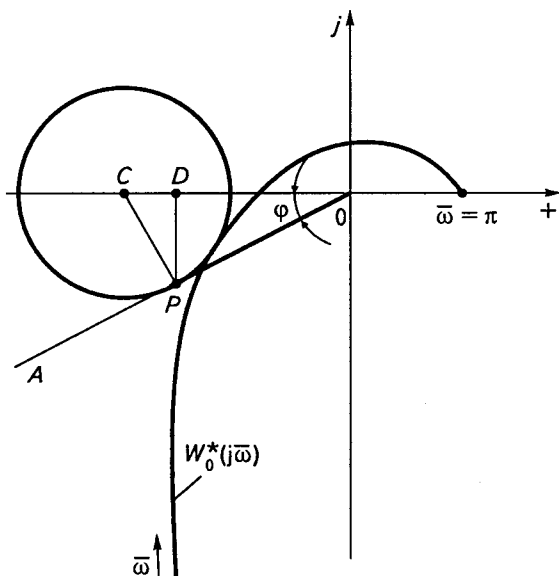


Рис. 10.17

Потрібне значення коефіцієнта підсилення

$$K = \frac{M^2/(M^2 - 1)}{OC} = \frac{1}{OD}.$$

Корекція імпульсної системи за рахунок введення коректувальних пристроїв полягає в змінюванні частотних характеристик системи з метою максимального їх наближення до бажаних. Коректувальні пристрої можуть бути безперервними або дискретними.

Безперервний коректувальний пристрій можна вводити послідовно з ланками незмінюваної частини системи, паралельно деяким з

них, а також у вигляді зворотного зв'язку, що охоплює всю систему або частину її ланок.

Визначення параметрів послідовного коректувального пристрою становить у загальному випадку досить складну задачу, тому що передаточна функція коректувального пристрою під час розрахунку включається в передаточну функцію приведеної безперервної частини. У найпростіших випадках при досить високій частоті квантування і великій інерційності безперервної частини системи, коли виконується умова (10.63), імпульсну систему можна замінити безперервною, динаміка якої близька до імпульсної. У цьому разі згідно з виразом (10.64) при $r = 0$ і $\gamma \rightarrow 0$.

$$W_6(j\bar{\omega}) = k_i W_\kappa(j\bar{\omega}) W_{6n}(j\bar{\omega}) \quad (10.88)$$

або

$$W_6(q) = k_i W_\kappa(q) W_{6n}(q),$$

де $W_6(j\bar{\omega})$, $W_\kappa(j\bar{\omega})$, $W_{6n}(j\bar{\omega})$ — частотні характеристики: бажана, коректувального пристрою, безперервної частини вихідної системи; k_i — коефіцієнт передачі імпульсного елемента.

З урахуванням тривалості імпульсів ($\gamma \neq 0$) вираз (10.88) матиме вигляд

$$W_6(j\bar{\omega}) = k_i W_\kappa(j\bar{\omega}) W_{6n}(j\bar{\omega}) e^{-j\bar{\omega}\gamma/2} \quad (10.89)$$

або

$$W_6(q) = k_i W_\kappa(q) W_{6n}(q) e^{-q\gamma/2}.$$

Структурну схему еквівалентної безперервної системи з послідовним коректувальним пристроєм зображено на рис. 10.18.

Після заміни імпульсної системи безперервною синтез послідов-

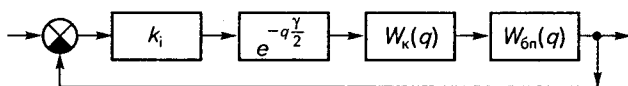


Рис. 10.18

ного коректувального пристрою можна виконати методами, розробленими для безперервних систем, зокрема методом логарифмічних частотних характеристик.

Розглянемо тепер коректувальний пристрій, що вмикається паралельно безперервній частині системи (рис. 10.19, а). Якщо перенести вузол через ланку $W_\phi(q)$, то дістанемо структурну схему, наве-

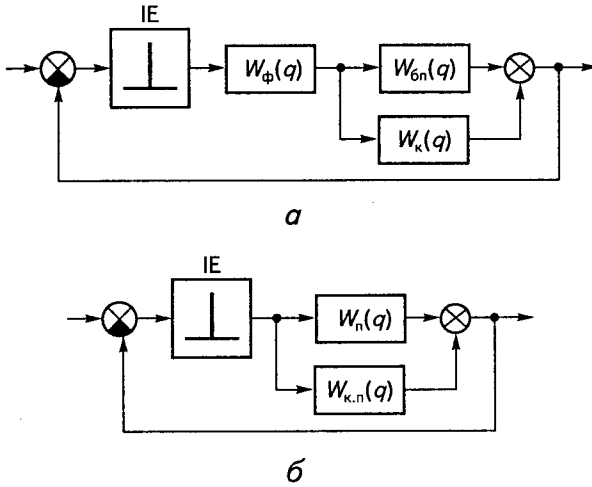


Рис. 10.19

дену на рис. 10.19, б, де $W_n(q)$ — передаточна функція приведеної безперервної частини; $W_{к.п}(q)$ — передаточна функція приведеного паралельного коректувального кола. Тоді передаточна функція розімкнutoї імпульсної системи матиме вигляд

$$W_6^*(q) = W_n^*(q) + W_{к.п}^*(q),$$

а бажана частотна функція

$$W_6^*(j\bar{\omega}) = W_n^*(j\bar{\omega}) + W_{к.п}^*(j\bar{\omega}). \quad (10.90)$$

З виразу (10.90) можна визначити частотну характеристику паралельного коректувального кола, якщо відома бажана частотна характеристика $W_6^*(j\bar{\omega})$:

$$W_{к.п}^*(j\bar{\omega}) = W_6^*(j\bar{\omega}) - W_n^*(j\bar{\omega}).$$

Після цього за виглядом знайденої частотної характеристики визначається передаточна функція $W_{к.п}^*(q)$, схема коректувальної ланки та її параметри.

Коректувальні ланки імпульсної дії вводяться після імпульсного елемента. Найчастіше коректувальні ланки — це цифрові коректувальні пристрої (цифрові регулятори). Синтез цифрових регуляторів розглядатиметься в п. 10.12.

10.11

**Цифрові системи
автоматичного керування**

Цифровою системою автоматичного керування називається система, у замкнутому контурі якої є хоча б один пристрій, що перетворює безперервні сигнали в цифрові коди і виконує математичні операції над цими кодами. У контурі цифрової системи цифровий регулятор виконує властиві йому математичні операції і видає результат у дискретні моменти часу $t = T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$. В інтервалах між цими моментами на виході регулятора зберігається те значення, яке було на початку інтервалу. Тому на виході регулятора існує не безперервна функція $x(t)$, а відповідна ступінчаста $x(nT_0)$, тобто здійснюється квантування за часом (рис. 10.20). Крім того, відбувається квантування за рівнем, оскільки внаслідок цифрової подачі інформації вихідний сигнал може набувати тільки певних фіксованих рівнів, що відрізняються один від одного на величину q . Ця величина відповідає одиниці молодшого розряду цифрового регулятора, тобто безперервний сигнал $x(t)$ подається у вигляді

$$x(t) = x^*(nT_0) + \sigma,$$

де $|\sigma| < q$, а $x^*(nT_0)$ містить ціле число рівнів q .

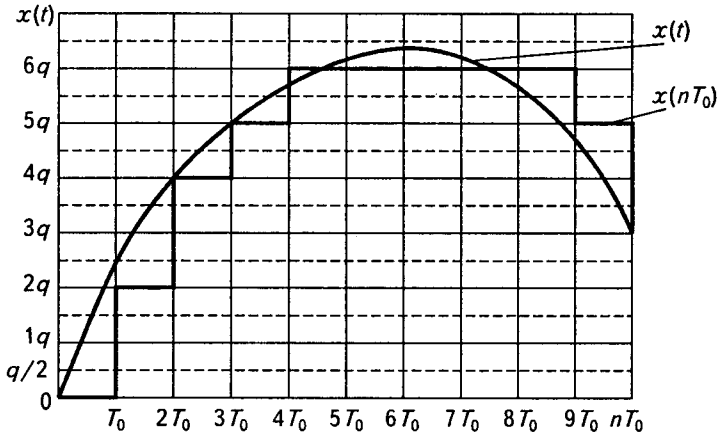


Рис. 10.20

Отже, в цифрових системах сигнал квантується за часом і рівнем. Квантування за часом робить цифрову систему *дискретною*, а квантування за рівнем — *нелінійною*. Однак при малому q впливом квантування за рівнем на динаміку системи можна знехтувати, тобто покласти $q = 0$. У цьому разі для дослідження цифрових систем можна застосувати математичний апарат дослідження лінійних імпульсних систем з амплітудно-імпульсною модуляцією: дискретне z -перетворення і різнищеві рівняння.

Спрощену структурну схему цифрової системи подано на рис. 10.21. Безперервний сигнал похибки $\varepsilon(t)$ імпульсним елементом ІЕ1 перетворюється в решітчасту цифрову функцію $\varepsilon[n]$ і надходить на вхід ЦОМ, яку подано у вигляді передаточної функції $D(z)$. Вихідний сигнал ЦОМ імпульсним елементом ІЕ2 і формувачем імпульсів $W_\phi(p)$ перетворюється в ступінчастий сигнал. Безперервну частину системи подано ланкою з передаточною функцією $W_{\text{бн}}(p)$.

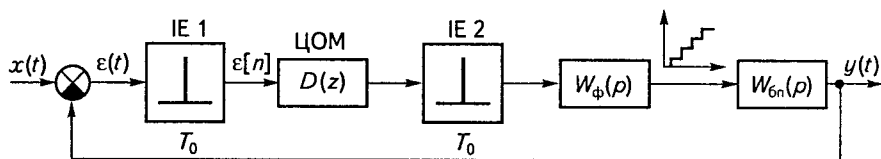


Рис. 10.21

На виході формувача імпульсів протягом усього періоду квантування T_0 зберігається попереднє значення сигналу, тому формувач є фіксатором нульового порядку. Його передаточна функція

$$W_\phi(p) = \frac{1 - e^{-T_0 p}}{p}$$

або, через те, що $e^{T_0 p} = z$,

$$W_\phi(p) = \frac{z - 1}{z p}.$$

Передаточна функція приведеної безперервної частини системи визначається за формулою

$$W_{\text{н}}(p) = W_\phi(p)W_{\text{бн}}(p) = \frac{z - 1}{z} \frac{W_{\text{бн}}(p)}{p}, \quad (10.91)$$

а її дискретна передаточна функція

$$W_n(z) = Z\{W_n(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_{6n}(p)}{p}\right\}. \quad (10.92)$$

Якщо в каналі керування є затримка часу τ , то вираз (10.92) запишеться у вигляді

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_{6n}(p)}{p} e^{-\tau p}\right\}. \quad (10.93)$$

Розглянемо як приклад структурну схему, наведену на рис. 10.22. Таку схему має двоконтурна система стабілізації швидкості ω двигуна постійного струму, яка складається з аналогового контуру струму і цифрового контуру швидкості. Контур струму настроєно на технічний оптимум і в структурній схемі подано наближено аперіодичною

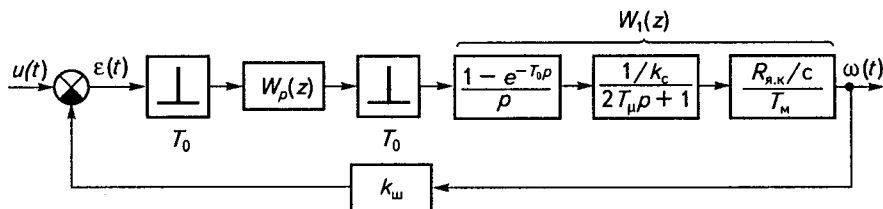


Рис. 10.22

ланкою з передаточною функцією $1/k_c(2T_\mu p + 1)$. До цифрового контуру належить дискретний регулятор на базі мікро-ЕОМ. Операції, що виконуються регулятором, описуються передаточною функцією $W_p(z)$. Цифроаналоговий перетворювач подано у вигляді ідеального імпульсного елемента з періодом квантування T_0 і фіксатора нульового порядку з передаточною функцією $(1 - e^{-T_0 p})/p$.

Дискретна передаточна функція приведеної безперервної частини системи відповідно до виразу (10.92)

$$W_1(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{R_{я,к}}{k_c c T_m p^2 (2T_\mu p + 1)}\right\} = \frac{k_1(z-1)}{z} Z\left\{\frac{1}{p^2(Tp + 1)}\right\},$$

де $k_1 = R_{я,к}/k_c c T_m$; $T = 2T_\mu$.

Подамо вираз у останніх дужках у вигляді суми простих дробів і використаємо дані таблиці z -перетворень (див. табл. 10.1). Тоді дістанемо

$$\frac{1}{p^2(Tp+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T^2}{Tp+1}$$

і

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{k_1(z-1)}{z} \left[\frac{T_0z}{(z-1)^2} - \frac{Tz}{z-1} + \frac{Tz}{z-d} \right] = \\ &= \frac{k_1[(T_0 - T + dT)z - T_0d + T(1-d)]}{(z-1)(z-d)}, \end{aligned}$$

де $d = e^{-T_0/T}$.

Прийнявши, що дискретна передаточна функція регулятора

$$W_p(z) = \frac{c_0z + c_1}{z-1},$$

запишемо дискретну передаточну функцію розімкнутої системи

$$\begin{aligned} W(z) &= W_p(z)W_1(z)k_w = \\ &= \frac{k_1k_w(c_0z + c_1)[(T_0 - T + dT)z - T_0d + T(1-d)]}{(z-1)^2(z-d)}. \end{aligned} \quad (10.94)$$

Передаточна функція замкнутої системи

$$\begin{aligned} W_3(z) &= \frac{W_p(z)W_1(z)}{1+W(z)} = \\ &= \frac{k_1(c_0z + c_1)[(T_0 - T + dT)z - T_0d + T(1-d)]}{(z-1)^2(z-d) + (c_0z + c_1)k_1k_w[(T_0 - T + dT)z - T_0d + T(1-d)]}, \end{aligned}$$

а в загальному випадку

$$W_3(z) = P(z)/Q(z),$$

де $P(z)$, $Q(z)$ — поліноми від z .

Визначивши передаточні функції $W(z)$ і $W_3(z)$, дослідимо стійкість цифрової системи і визначимо якість перехідних процесів. При цьому застосовуються всі методи дослідження імпульсних систем.

10.12

**Синтез цифрових
коректувальних пристроїв
методом ЛАХ**

При розробці цифрових систем зручно використувати метод синтезу, що базується на логарифмічних частотних характеристиках. Передаточна функція розімкненої цифрової системи становить добуток дискретних передаточних функцій приведеної безперервної частини $W_n(z)$ і цифрового регулятора $D(z)$. Якщо перейти до логарифмічних характеристик, які найзручніше будувати як функції абсолютної псевдочастоти

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2},$$

то

$$L(\lambda) = L_D(\lambda) + L_n(\lambda), \quad (10.95)$$

де $L(\lambda)$, $L_D(\lambda)$, $L_n(\lambda)$ — амплітудні логарифмічні характеристики розімкненої системи, цифрового регулятора і приведеної безперервної частини системи.

Якщо бажану ЛАХ $L(\lambda)$, побудовану за заданими показниками якості, і ЛАХ $L_n(\lambda)$ вважати відомими, то ЛАХ цифрового регулятора

$$L_D(\lambda) = L(\lambda) - L_n(\lambda). \quad (10.96)$$

Розглянемо детальніше методику побудови логарифмічних характеристик приведеної безперервної частини з фіксатором нульового порядку. Раніше було доведено (див. п. 10.7), що за умови $\omega T_0 < 2$ абсолютна псевдочастотна λ практично збігається з частотою ω , тому для низьких частот ($\omega < 2/T_0$) побудова ЛАХ і ЛФХ дискретної системи зводиться по суті до побудови відповідних характеристик вихідної безперервної частини системи з передаточною функцією $W_{\text{бн}}(p)$.

Розглянемо це положення на такому прикладі. Нехай передаточна функція безперервної частини системи

$$W_{\text{бн}}(p) = \frac{K}{Tp + 1}, \quad (10.97)$$

причому період квантування T_0 вибрано таким, що частота сполуки $1/T$ менша $2/T_0$. Це припущення зводиться до того, що злам асимп-

точничної ЛАХ, який відповідає передаточній функції (10.97), міститься в низькочастотній зоні, де справедлива нерівність $\omega < 2/T_0$.

Відповідно до виразу (10.92) запишемо дискретну передаточну функцію приведенної безперервної частини

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p(Tp+1)} \right\}$$

або, якщо використати дані табл. 10.1,

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} \frac{K(1-d)z}{(z-1)(z-d)} = \frac{K(1-d)}{z-d}, \quad (10.98)$$

де $d = e^{-T_0/T}$.

Виконаємо w -перетворення, підставивши $z = (1+w)/(1-w)$,

$$W_n(w) = (1-w) \frac{K(1-d)}{1-d+w(1+d)} = (1-w) \frac{K}{1+w \frac{1+d}{1-d}},$$

і перейдемо до абсолютної псевдочастоти, замінивши w на $j \frac{T_0}{2} \lambda$.

Тоді дістанемо

$$W_n(j\lambda) = \left(1 - j \frac{T_0}{2} \lambda \right) \frac{K}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T}}.$$

При виконанні останнього перетворення використано формули Ейлера:

$$\begin{aligned} \frac{1+d}{1-d} &= \frac{1+e^{-T_0/T}}{1-e^{-T_0/T}} = \frac{e^{T_0/2T} e^{-T_0/2T} + e^{-T_0/2T} e^{-T_0/2T}}{e^{T_0/2T} e^{-T_0/2T} - e^{-T_0/2T} e^{-T_0/2T}} = \\ &= \frac{e^{T_0/2T} + e^{-T_0/2T}}{e^{T_0/2T} - e^{-T_0/2T}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{T_0}{2T}}{\operatorname{sh} \frac{T_0}{2T}} = \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T}. \end{aligned}$$

Оскільки було прийнято $1/T < 2T_0$, тобто $T > 0,5T_0$, то маємо

$$\operatorname{cth} \frac{T_0}{2T} = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{T_0}{2T}} \approx \frac{2T}{T_0}.$$

У цьому разі

$$W_n(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \frac{K}{1 + j\lambda T}. \quad (10.99)$$

Якщо порівняти цей вираз із звичайною частотною функцією безперервної частини системи

$$W_{\text{бн}}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T},$$

то стане очевидним, що в низькочастотній зоні характеристики $W_n(j\lambda)$ і $W_{\text{бн}}(j\omega)$ повністю збігаються. Вплив додаткового співмножника $\left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right)$ при побудові ЛАХ у низькочастотній зоні можна не враховувати, оскільки $\omega T_0 < 2$ і $T > 0,5 T_0$.

Розглянемо інший приклад. Нехай

$$W_{\text{бн}}(p) = \frac{K(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)} \quad (10.100)$$

і $T_1 > 0,5 T_0$; $T_2 > 0,5 T_0$, тобто злами ЛАХ містяться в низькочастотній зоні.

Дискретна передаточна функція приведеної безперервної частини

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K(T_2 p + 1)}{p^2(T_1 p + 1)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^2} + \frac{K(T_2 - T_1)}{p(T_1 p + 1)} \right\} = \\ &= K \left[\frac{T_0}{z-1} + \frac{(T_2 - T_1)(1-d)}{z-d} \right]. \end{aligned}$$

Виконаємо w -перетворення

$$W_n(w) = K(1-w) \left[\frac{T_0}{2w} + \frac{T_2 - T_1}{1 + w \frac{1+d}{1-d}} \right]$$

і перейдемо до частотної функції

$$\begin{aligned} W_n(j\lambda) &= K \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \left[\frac{1}{j\lambda} + \frac{T_2 - T_1}{1 + j\lambda T_1} \right] = \\ &= \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \frac{K(1 + j\lambda T_2)}{j\lambda(1 + j\lambda T_1)}. \end{aligned} \quad (10.101)$$

І в цьому разі, якщо порівняти вирази (10.100) і (10.101), можна зробити висновок, що в низькочастотній зоні частотні характеристики $W_{6n}(j\omega)$ і $W_n(j\lambda)$ збігаються.

ЛАХ, побудовані за формулами (10.99) і (10.101), зображено на рис. 10.23. Штриховою лінією для порівняння подано ЛАХ $L(\omega)$, побудовані відповідно до передаточних функцій безперервної частини системи (10.97) і (10.100).

Розглянемо тепер більш загальний випадок. Припустимо, що передаточна функція безперервної частини системи має вигляд

$$W_{6n}(p) = \frac{K(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1) \dots (\tau_m p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)}, \quad (10.102)$$

причому, як і раніше, всі злами асимптотичної ЛАХ містяться в низькочастотній зоні, для якої $\omega T_0 < 2$.

Розкладемо (10.102) на суму простих дробів:

$$W_{6n}(p) = \frac{K}{p} + K \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{T_i p + 1}, \quad (10.103)$$

де N_i — коефіцієнти розкладу.

Дискретна передаточна функція з урахуванням фіксатора нульового порядку

$$\begin{aligned} W_n(z) &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{6n}(p)}{p} \right\} = \\ &= K \left[\frac{T_0}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{N_i(1-d_i)}{z-d_i} \right]. \end{aligned} \quad (10.104)$$

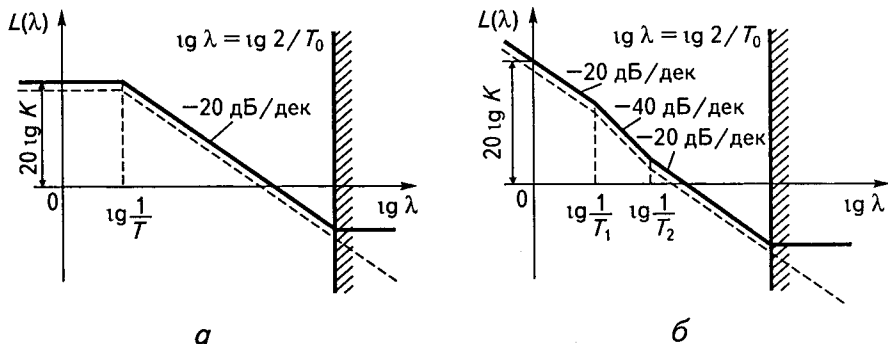


Рис. 10.23

Виконаємо w -перетворення і перейдемо до частотної функції

$$W_n(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \left[\frac{K}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2} \operatorname{cth} \frac{T_0}{2T_i}} \right]$$

або, через те що $T_i > 0,5T_0$,

$$W_n(j\lambda) \approx \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \left[\frac{K}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{1 + j\lambda T_i} \right]. \quad (10.105)$$

Порівнявши цей вираз із (10.103), можна зробити висновок, що частотні передаточні функції $W_{6n}(j\omega)$ і $W_n(j\lambda)$ у низькочастотній зоні збігаються. Висновок залишається справедливим і в разі, якщо безперервна частина системи містить коливальні ланки з передаточною функцією $1/(T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1)$ за умови, що $T_1 \gg 0,5T_0$.

Розглянемо тепер побудову логарифмічних характеристик у зоні високих частот (при $\omega > 2/T_0$). Якщо сталі часу передаточної функції $W_{6n}(p)$ такі, що всі злами асимптотичної ЛАХ лежать ліворуч від частоти $\omega = 2/T_0$ і при частоті $2/T_0$ ЛАХ має нахил $-20v$ дБ/дек, то високочастотна частина ЛАХ апроксимується інтегральною ланкою $W_u(p) = \omega_{0,u}/p^v$, де $\omega_{0,u}$ — базова частота високочастотної частини ЛАХ, яка визначається як частота перетину її першої асимптоти з віссю частоти (рис. 10.24). Нехай, наприклад, низькочастотна частина ЛАХ на частоті λ/T_0 має нахил -60 дБ/дек. Тоді

$$W_u(p) = \frac{\omega_{0,u}}{p^3} \quad (10.106)$$

і

$$W_u(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{\omega_{0,u}}{p^4} \right\} \quad (10.107)$$

або за даними табл. 10.1

$$W_u(z) = \frac{\omega_{0,u} T_0^3 (z^2 + 4z + 1)}{6(z-1)^3}.$$

Виконавши w -перетворення, дістанемо

$$W_u(w) = \omega_{0,u} T_0^3 \frac{(1-w) \left(1 - \frac{w^2}{3}\right)}{8w^3}.$$

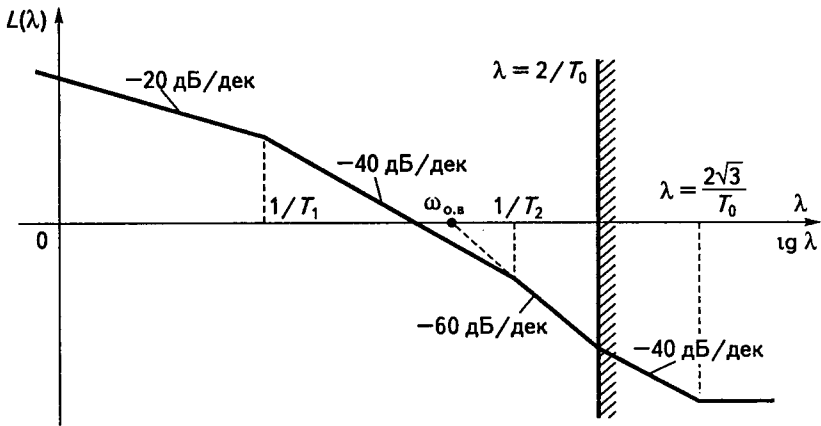


Рис. 10.24

Перейдемо до частотної функції

$$\begin{aligned}
 W_{\text{в}}(j\lambda) &= \omega_{0,\text{в}} \frac{(1 - j\lambda T_0/2) \left[1 - (j\lambda)^2 \frac{T_0^2}{12} \right]}{(j\lambda)^3} = \\
 &= \frac{\omega_{0,\text{в}} (1 - j\lambda T_0/2) \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right) \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right)}{(j\lambda)^3}.
 \end{aligned} \tag{10.108}$$

Високочастотну частину ЛАХ, побудовану за виразом (10.108), зображено на рис. 10.24 праворуч від лінії $\lambda = 2/T_0$.

Фазова характеристика, що відповідає ЛАХ на рис. 10.24, обчислюється за формулою

$$\varphi(\lambda) = -\pi/2 - \arctg T_1 \lambda - \arctg T_2 \lambda - \arctg \frac{T_0}{2} \lambda.$$

Збіг ЛАХ для дискретної передаточної функції та передаточної функції безперервної частини системи в зоні низьких частот дає можливість синтезувати коректувальні пристрої (цифрові регулятори) відомими методами синтезу коректувальних пристроїв безперервних систем і використовувати розроблені для них номограми, графіки і таблиці.

Внаслідок синтезу методом ЛАХ знаходимо ЛАХ коректувально-го пристрою $L_k(\lambda)$ і за її виглядом визначаємо комплексну частотну функцію $W_k(j\lambda)$. Після цього виконуємо підстановку

$$j\lambda = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1},$$

визначаємо дискретну передаточну функцію $W_k(z)$ та різницеве рівняння корекції, що реалізується цифровим регулятором.

- **Приклад 10.10.** Виконати синтез цифрового регулятора системи автоматичного регулювання, структурну схему якої подано на рис. 10.22. Параметри системи: $R_{н.к} = 0,1 \text{ Ом}$; $c = 2 \text{ В} \cdot \text{с/рад}$; $T_m = 1 \text{ с}$; $T_u = 0,01 \text{ с}$; $k_c = 0,1 \text{ Ом}$; $k_w = 0,1 \text{ В} \cdot \text{с/рад}$. Вимоги до показників якості системи: добротність за швидкістю $k_v = 50 \text{ с}^{-1}$, час регулювання $t_p = 0,5 \text{ с}$, перерегулювання $\sigma \leq 25 \%$.

Розв'язання. Передаточна функція безперервної частини системи

$$W_{\text{бн}}(p) = \frac{R_{н.к} k_w / k_c c T_m}{p(2T_u p + 1)} = \frac{K}{p(T_1 p + 1)} = \frac{0,5}{p(0,02 p + 1)}.$$

Вибираємо період квантування так, щоб злам асимптотичної ЛАХ був ліворуч від частоти $\omega = 2/T_0$. Частота зламу ЛАХ безперервної частини системи становить $\omega_1 = 1/T_1 = 1/0,02 = 50 \text{ с}^{-1}$. Приймаємо $T_0 = 0,01 \text{ с}$ (умова $T > 0,5T_0$ виконується). У низькочастотній зоні $\omega \approx \lambda$. Знаходимо абсолютну псевдочастоту зламу асимптотичної ЛАХ:

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \text{tg} \frac{\omega_1 T_0}{2} = \frac{2}{0,01} \text{tg} \frac{50 \cdot 0,01}{2} = 51,06 \text{ с}^{-1},$$

тобто похибка становить усього $\approx 2 \%$.

Через те, що високочастотна частина ЛАХ практично не впливає на якість перехідних процесів, під час синтезу коректувальної ланки можна обмежитися спрощеною побудовою ЛАХ приведеної безперервної частини системи:

$$W_n(j\lambda) = \frac{\left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) 0,5}{j\lambda (0,02 j\lambda + 1)}.$$

Побудовану характеристику $L_n(\lambda)$ зображено на рис. 10.25.

Бажану ЛАХ побудуємо за методикою, що застосовується для безперервних систем (див. п. 6.11). Виходячи із заданої добротності системи за швидкістю, низькочастотну частину ЛАХ $L_6(\lambda)$ проводимо через точку з координатами $\lg \lambda = 0$, $L_6(\lambda) = 20 \lg k_v = 34 \text{ дБ}$ з нахилом

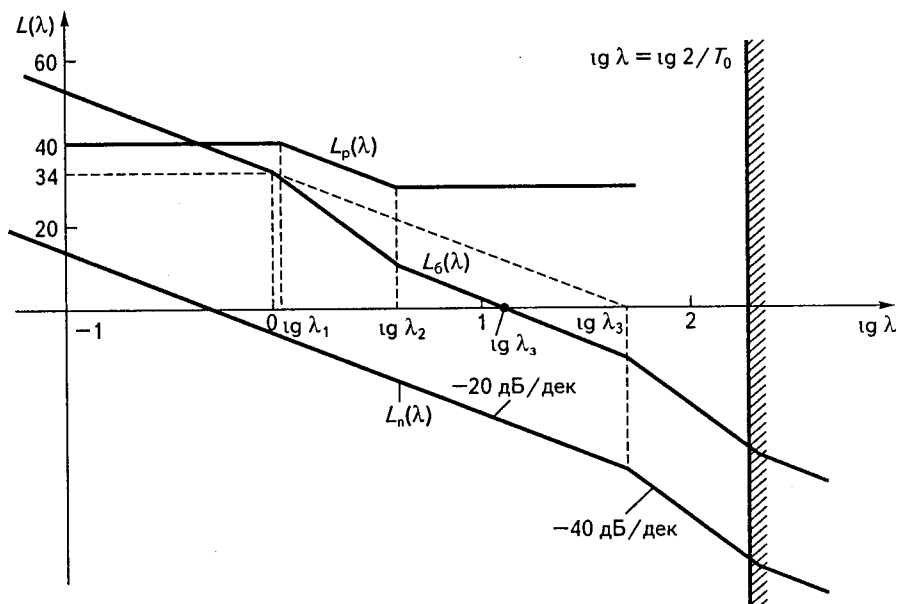


Рис. 10.25

-20 дБ/дек. Виходячи із заданого часу регулювання $t_p = 0,5$ с і перерегулювання $\sigma \leq 25\%$, визначимо частоту зрізу

$$\lambda_3 = \frac{k_0 \pi}{t_p} = \frac{2\pi}{0,5} = 12,5 \text{ с}^{-1},$$

де $k_0 = 2$ — коефіцієнт, що визначається за графіком $k_0 = f(\sigma)$ (див. рис. 6.28).

Середньочастотну частину $L_6(\lambda)$ проводимо через точку з координатами $L(\lambda) = 0$, $\lg \lambda_3$ із нахилом -20 дБ/дек і сполучаємо її з низькочастотною частиною $L_n(\lambda)$ лінією з нахилом -40 дБ/дек.

Виходячи з типу бажаної ЛАХ, частоти сполучення середньочастотної частини з низькочастотною і високочастотною частинами визначаємо з умов

$$\lambda_3/\lambda_2 \approx 10; 2 < \lambda_2/\lambda_3 < 4.$$

Високочастотну частину характеристики $L_6(\lambda)$ проводимо паралельно характеристиці $L_n(\lambda)$.

ЛАХ цифрового регулятора $L_p(\lambda)$ визначається як різниця $L_6(\lambda) - L_n(\lambda)$. За виглядом ЛАХ $L_p(\lambda)$ знаходимо комплексно-частотну функцію

$$W_p(j\lambda) = \frac{100(j\tau_2\lambda + 1)}{j\tau_1\lambda + 1} = \frac{100(j0,25\lambda + 1)}{j0,91\lambda + 1},$$

в якій $\lg \lambda_1 = 0,04$; $\lambda_1 = 1,1 \text{ c}^{-1}$; $\tau_1 = 0,91 \text{ c}$; $\lg \lambda_2 = 0,6$; $\lambda_2 = 4 \text{ c}^{-1}$; $\tau_2 = 0,25 \text{ c}$ визначено за характеристикою $L_p(\lambda)$ (рис. 10.25).

Виконавши підстановку

$$j\lambda = \frac{z - 1}{T_0 z + 1},$$

дістанемо

$$W_p(z) = \frac{1100z - 900}{37,4z - 35,4}.$$

Цей вираз зведемо до вигляду, зручному для складання різницевого рівняння

$$W_p(z) = \frac{U_p(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{29,4z - 24,1}{z - 0,95} = \frac{29,4 - 24,1z^{-1}}{1 - 0,95z^{-1}}.$$

Введемо співмножник z^{-1} , що забезпечує виконання програми корекції на мікро-ЕОМ у реальному масштабі часу,

$$\frac{U_p(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{29,4z^{-1} - 24,1z^{-2}}{1 - 0,95z^{-1}}$$

і запишемо різницеве рівняння корекції

$$u_p[nT_0] = 0,95u_p[(n-1)T_0] + 29,4\varepsilon[(n-1)T_0] - 24,1\varepsilon[(n-2)T_0].$$

У цьому рівнянні $u_p[nT_0]$ — число, що подається на ЦАП, увімкнений на виході цифрового регулятора; $\varepsilon[nT_0]$ — число на виході АЦП, що перетворює різницю сигналів завдання і зворотного зв'язку за швидкістю в цифровий код.

Під час обчислення $u_p[nT_0]$ приймається, що $u_p[nT_0] = 0$ при $n \leq 0$ і функція $\varepsilon[nT_0]$ прикладається в момент $n = 0$. Тоді $u_p[nT_0]$ обчислюємо у такій послідовності: в кінці першого такту $n = 1$ і $u_p[1T_0] = 29,4\varepsilon[0]$, в кінці другого такту $n = 2$ і $u_p[2T_0] = 0,95u_p[1T_0] + 29,4\varepsilon[1T_0] - 24,1\varepsilon[0]$ і т. д.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягають основні відмінності дискретних систем від безперервних?
2. Дайте класифікацію імпульсних САК за видами модуляції.
3. Вкажіть основні переваги імпульсних систем над безперервними.
4. Що таке імпульсний елемент і якими параметрами він характеризується?
5. Як подається реальний імпульсний елемент при математичному описанні імпульсних систем?
6. Що таке екстраполятор нульового порядку?
7. Дайте визначення решітчастої функції. Чим вона відрізняється від безперервної?
8. Поясніть поняття «зміщена решітчаста функція».
9. Наведіть форми запису і методи розв'язування лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
10. Наведіть основні формули дискретного перетворення Лапласа.
11. Що таке z -перетворення? Чому воно придатніше для дослідження імпульсних систем, аніж дискретне перетворення Лапласа?
12. Вкажіть основні властивості z -перетворення.
13. Наведіть послідовність розв'язування різницевих рівнянь на основі z -перетворення.
14. Як визначається передаточна функція розімкнутої і замкнутої імпульсних систем?
15. Як побудувати АФХ розімкнутої імпульсної системи і як за нею визначити стійкість замкнутої системи?
16. За яких умов імпульсна і безперервна системи будуть еквівалентними?
17. Як побудувати АФХ імпульсної системи за відомою АФХ безперервної частини?
18. У чому суть w -перетворення і як воно застосовується для розрахунку імпульсних систем?
19. Як побудувати логарифмічні характеристики імпульсних систем? Що таке псевдочастота?
20. Як визначити стійкість імпульсної системи за коренями характеристичного рівняння, що дістають внаслідок застосування z -перетворення?
21. Як досліджується стійкість імпульсної системи за критерієм Гурвіца?
22. Сформулюйте критерій Михайлова для імпульсних систем. Який вигляд має годограф вектора Михайлова для стійкої і нестійкої імпульсних систем третього порядку?
23. Сформулюйте критерій Найквіста для імпульсних систем. Наведіть відповідні характеристики.
24. Як оцінюється точність роботи імпульсної системи в усталеному режимі?
25. Якими показниками характеризується якість перехідних процесів імпульсних систем?

26. Розкрийте суть корекції імпульсних систем. Якими способами вона виконується?
27. Які типи коректувальних пристроїв застосовуються в імпульсних системах?
28. Дайте визначення цифрової системи автоматичного керування.
29. Як здійснюється математичне описання цифрових систем?
30. У чому полягає особливість побудови логарифмічних характеристик цифрових систем у низькочастотній і високочастотній зонах?
31. Поясніть методику синтезу коректувального пристрою в цифрових системах за допомогою ЛАХ.

11.1

Завдання оптимального керування

Слово «оптимальний» у широкому розумінні означає «найкращий» відповідно до деякого критерію ефективності. Система автоматичного керування називається *оптимальною*, якщо в ній забезпечується найкраще значення основного показника якості роботи. Цей показник називається *критерієм оптимальності*.

Використання методів теорії оптимального керування є одним із найперспективніших способів підвищення якості САК, що проектуються. Теорія оптимального керування — це розділ теорії автоматичного керування, де досліджуються властивості траєкторій динамічних систем, що є оптимальними за певним критерієм (мінімум часу переходу з одного стану в інший, максимально можлива точність виконання завдання керування, мінімум витрат енергії тощо) при дотриманні численних обмежень.

Вимоги, що ставляться до системи, можна пов'язати з досягненням екстремуму (звичайно мінімуму) деякої величини I — показника якості роботи системи або критерію оптимальності. Наприклад, критерієм оптимальності при досягненні максимальної точності системи може бути мінімум середньої квадратичної похибки регулювання, що виражається інтегралом

$$I = \int_0^{t_1} x^2(t) dt, \quad (11.1)$$

де $x(t)$ — відхилення регульованої величини від бажаного значення. Величина I є функціоналом, тобто числом, що залежить від вигляду функції $x(t)$.

Здебільшого критерій оптимальності приймається у вигляді квадратичного функціонала від кількох функцій

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(t) dt, \quad (11.2)$$

де a_i — задані вагові коефіцієнти; t_0, t_1 — час початку і закінчення роботи об'єкта.

У загальному випадку критерій оптимальності залежить від стану системи, що визначається векторами регульованих координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, керуючих дій (керувань) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, задаючих дій $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_l)$, збурень $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_\mu)$ і часу t , тому його можна записати у вигляді

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{g}, \mathbf{f}, t) dt = \min. \quad (11.3)$$

У теорії оптимального керування розглядаються методи, які дають змогу визначити оптимальне керування \mathbf{u} , за допомогою якого об'єкт керування переводиться з одного стану в інші так, що при цьому мінімізується функціонал I , дотримуються обмеження на координати і керування, а рівняння динаміки об'єкта і характеристики зовнішніх дій у процесі керування не змінюються.

Обмеження, що накладаються на регульовані координати (змінні стану) і керування, здебільшого подаються у вигляді нерівностей

$$|x_i(t)| \leq x_{i \max}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (11.4)$$

$$|u_k(t)| \leq u_{k \max}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (11.5)$$

де $x_{i \max}$ — максимально допустимі значення змінних стану; $u_{k \max}$ — максимально допустимі значення керувань, що відображають обмежені ресурси керування.

Розглянемо постановку задачі оптимального керування. Нехай динамічні властивості об'єкта керування описуються рівняннями

$$dx_i/dt = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, f_1, f_2, \dots, f_\mu, t) \quad (11.6)$$

або у векторній формі

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, t), \quad (11.7)$$

якість системи оцінюється функціоналом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (11.8)$$

а обмеження в загальній формі подано у вигляді системи нерівностей

$$v_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq v_{s \max}, \quad (11.9)$$

де v_s — задані функціонали змінних стану і керувань.

Початкові та кінцеві стани об'єкта характеризуються точками в просторі станів, тобто векторами $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ і $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$, або деякими зонами простору станів $q_0(\mathbf{x})$ і $q_1(\mathbf{x})$. У цьому разі задача оптимального керування формулюється так: для об'єкта керування, що описується рівнянням (11.7), необхідно знайти таке керування \mathbf{u} , яке у разі дотримання обмежень (11.9) переводить об'єкт з початкового стану у кінцевий так, що при цьому функціонал (11.8) набуває мінімуму.

Керування, що задовольняє ці вимоги, називається *оптимальним*.

Початкові та кінцеві точки фазової траєкторії об'єкта можуть бути фіксованими у n -вимірному просторі координат або залишатися вільними у певному розумінні. Час процесу також може бути фіксованим (за винятком задач про максимальну швидкодію) або вільним.

Оптимальне керування може визначатися в параметричній формі

$$u_j = u_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (11.10)$$

або в непараметричній

$$u_j = u_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (11.11)$$

Розв'язок у вигляді (11.10) відповідає програмному керуванню залежно від часу, а у вигляді (11.11) — керуванню залежно від змінних стану, що реалізується за допомогою зворотних зв'язків за цими змінними.

Найпростішу форму оптимізуючий функціонал набуває в задачах оптимізації систем за критерієм максимальної швидкодії. Цьому випадку відповідає $\varphi_0 = 1$ і функціонал (11.3) $I = t_1 - t_0$, а критерієм оптимальності стає умова $t_1 - t_0 = \min$.

Визначення функції, для якої функціонал набуває мінімуму, це задача варіаційного числення. Методи варіаційного числення можна умовно розділити на класичні і сучасні.

До *класичних* належать методи, що базуються на рівняннях Ейлера, Якобі, Вейерштраса.

До сучасних належить принцип максимуму Понтрягіна і метод динамічного програмування Р. Беллмана.

Класичні методи доцільно застосовувати в задачах, що не мають обмежень, тобто коли розглядаються малі відхилення змінних стану і керувань від усталених значень.

Сучасні методи розроблено саме для розв'язування задач оптимального керування. Вони надають можливість враховувати обмеження керувань і змінних стану, оперують із широким класом функцій керування, пристосовані для використання обчислювальної техніки.

11.2

Методи класичного варіаційного числення

Первинним поняттям варіаційного числення є поняття функціонала. Змінна величина, значення якої визначається вибором однієї або кількох функцій, називається *функціоналом*. У класичному варіаційному численні основним об'єктом дослідження є функціонал стандартного вигляду

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[x(t), \dot{x}(t), t] dt, \quad (11.12)$$

причому припускається, що функція $\varphi_0(x, \dot{x}, t)$ безперервна і має безперервні частинні похідні за всіма змінними до другого порядку включно.

Визначення екстремалі, тобто функції $x(t)$, що мінімізує функціонал (11.12), зводиться до розв'язування рівняння

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (11.13)$$

при заданих граничних умовах

$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_1) = x_1. \quad (11.14)$$

Рівняння (11.13) називається *рівнянням Ейлера* і становить першу необхідну умову екстремуму.

Якщо x_0 і x_1 є заданими числами, то задача, що розглядається, називається *варіаційною задачею із закріпленими граничними точками*.

Безперервно диференційовані функції $x(t)$, які визначені на інтервалі $[t_0, t_1]$ і задовольняють умови (11.14), називаються *допустимими функціями*.

Виходячи з того, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}}, \end{aligned}$$

рівняння Ейлера (11.13) можна записати у розгорнутому вигляді:

$$-\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0. \quad (11.15)$$

Розв'язки цього рівняння $x(t, C_1, C_2)$ називаються *екстремалами*. Вони містять дві сталі C_1 і C_2 , які визначаються граничними умовами (11.14).

З рівняння Ейлера випливає необхідна умова екстремуму, але вона не дає можливості визначити максимуму чи мінімуму набуває функціонал. Відповідь на це запитання дає теорема Лежандра (*друга необхідна умова екстремуму*): функціонал (11.12) набуває мінімуму, якщо виконується умова

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} > 0 \quad (11.16)$$

і максимуму, якщо

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} < 0. \quad (11.17)$$

Цю задачу можна узагальнити також на випадок, коли підінтегральна функція функціонала (11.12) залежить від кількох функцій однієї змінної t , тобто функціонал має вигляд

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) dt. \quad (11.18)$$

У цьому разі, змінюючи одну з функцій $x_i(t)$ і залишаючи інші незмінними, дістаємо функціонал вигляду (11.12), що залежить тільки від однієї функції $x_i(t)$. Ця функція, що дає екстремум функціоналу, має задовольняти рівняння Ейлера (11.13). Такі рівняння можна скласти для кожної функції $x_i(t)$ і дістати систему диференціальних рівнянь Ейлера, що визначають сім'ю екстремалів даної варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_n} \right) = 0. \end{cases} \quad (11.19)$$

Підінтегральна функція функціонала може мати не тільки першу, а й другу похідну. В цьому разі функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), t] dt, \quad (11.20)$$

причому передбачається, що функція φ_0 є диференційованою необхідну кількість разів.

Граничні умови записуються у вигляді

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}. \quad (11.21)$$

Екстремаллю функціонала (11.20) є розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} \right) = 0, \quad (11.22)$$

яке називається *рівнянням Ейлера—Пуассона*. Воно є рівнянням четвертого порядку. Його розв'язок $x(t, C_1, C_2, C_3, C_4)$ має чотири сталі, які визначаються граничними умовами (11.21).

Варіаційна задача узагальнюється також на випадок, коли підінтегральна функція містить похідні вищих порядків, тобто функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(l)}, t) dt \quad (11.23)$$

при заданих граничних умовах $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}$, ..., $x^{(l-1)}(t_0) = x_0^{(l-1)}$, $x(t_1) = x_1$, $\dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}$, ..., $x^{(l-1)}(t_1) = x_1^{(l-1)}$.

У цьому разі екстремаль є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} \right) - \dots + (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x^{(l)}} \right) = 0. \quad (11.24)$$

Якщо функціонал (11.23) містить кілька функцій $x_i(t)$, то дістаємо систему рівнянь вигляду (11.24).

Можуть бути й складніші задачі, в яких граничні точки (t_0, x_0) , (t_1, x_1) не фіксовані, а можуть рухатися по траєкторіях

$$x_1 = \rho_1(t);$$

$$x_0 = \rho_0(t).$$

Дві довільні сталі C_1 і C_2 , що входять у загальний розв'язок рівняння Ейлера, визначаються не з граничних умов, а з так званих умов *трансверсальності*:

$$\left[\varphi_0 + \left(\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right] \Bigg|_{t=t_1} = 0; \quad (11.25)$$

$$\left[\varphi_0 + \left(\frac{d\rho_0}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right] \Bigg|_{t=t_0} = 0. \quad (11.26)$$

Положення кінців екстремалі (точки t_0 і t_1) можна знайти як точки перетину екстремалі з кривими $x_0 = \rho_0(t)$ і $x_1 = \rho_1(t)$.

На практиці трапляються задачі про знаходження екстремуму функціонала при додаткових умовах, що накладаються на функції, у класі яких відшукується екстремум. Такі задачі називаються *задачами про умовний екстремум* (зв'язаний екстремум). Нехай задано функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, \dot{x}, t) dt \quad (11.27)$$

(x — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта) і додаткові рівняння, що називаються *рівняннями зв'язку*:

$$v_j(x, \dot{x}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad m \leq n. \quad (11.28)$$

Необхідно знайти функцію $x(t)$, що мінімізує функціонал (11.27) за умови (11.28).

Подібні задачі характерні для систем автоматичного керування, тому що звичайно задаються функціонал і рівняння динаміки керованого об'єкта, які і є рівняннями зв'язку. Такі задачі розв'язують зведенням їх до задач на безумовний екстремум.

Існує таке правило: для того щоб знайти екстремум функціонала (11.27) за умови (11.28), необхідно ввести допоміжну функцію

$$\Phi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) v_j(x, \dot{x}, t), \quad (11.29)$$

де $\lambda_j(t)$ — поки що невідомі функції (невизначені множники Лагранжа), і шукати звичайними методами екстремум функціонала

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt. \quad (11.30)$$

Для функції Φ складаються n рівнянь Ейлера, аналогічних рівнянням (11.19),

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_n} \right) = 0. \end{cases} \quad (11.31)$$

Ця система доповнюється заданими рівняннями зв'язку (11.28). Отже, маємо n рівнянь Ейлера і m рівнянь зв'язку. Цих рівнянь достатньо для визначення $n + m$ невідомих функцій x_1, x_2, \dots, x_n і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, якщо відомі граничні умови.

Якщо функціонал (11.27) має також вищі похідні, то система рівнянь Ейлера (11.31) замінюється системою рівнянь Ейлера—Пуассона вигляду (11.24).

Під час проектування оптимальних систем керування електроприводами часто трапляються випадки, коли необхідно визначити екстремум функціонала

$$I_1 = \int_0^t \varphi_1(x, \dot{x}, u) dt \quad (11.32)$$

за умови, що інші функціонали, які є рівняннями зв'язків, повинні мати задані значення

$$I_i = \int_0^t \varphi_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) dt = L_i, \quad i = 2, 3, \dots, k. \quad (11.33)$$

Подібні задачі називаються *ізопериметричними*. Вони зводяться до задач на умовний екстремум. У цьому разі відшукується екстремум функціонала

$$I = \int_0^t (\varphi_1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i) dt = \int_0^t \Phi dt, \quad (11.34)$$

де λ_i — довільні сталі множники Лагранжа, що визначаються з умов $I_i = L_i$. Екстремаль функціонала I є розв'язком рівняння Ейлера.

- **Приклад 11.1.** Розв'язати задачу оптимального керування електро-двигуном постійного струму з незалежним збудженням, який відпрацьовує кутове переміщення θ за мінімальний час T при обмеженні нагрівання двигуна, що визначається струмом якоря.

Розв'язання. Кількість теплоти, що виділяється в якорі двигуна,

$$Q = \int_0^T Ri^2 dt, \quad (11.35)$$

де R — опір якорного кола; i — струм якоря.

Кутове переміщення

$$\theta_0 = \int_0^T \omega dt, \quad (11.36)$$

де ω — кутова швидкість двигуна.

Розглядувану задачу можна сформулювати як ізопериметричну: знайти екстремаль функціонала

$$I_1 = \int_0^T dt = \min \quad (11.37)$$

за наявності рівнянь зв'язку

$$I_2 = \int_0^T Ri^2 dt \leq Q_{\text{дон}}; \quad (11.38)$$

$$I_3 = \int_0^T \omega dt = \theta_0. \quad (11.39)$$

Для розв'язування цієї задачі необхідно знайти екстремаль функціонала (11.34):

$$I = \int_0^T \Phi dt = \int_0^T (\varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3) dt. \quad (11.40)$$

Оскільки $\varphi_1 = 1$, що випливає із порівняння функціоналів (11.32) і (11.37), $\varphi_2 = Ri^2$ і $\varphi_3 = \omega$, то

$$I = \int_0^T \Phi dt = \int_0^T (1 + \lambda_2 Ri^2 + \lambda_3 \omega) dt. \quad (11.41)$$

Прийнявши, що момент статичного навантаження M_c дорівнює нулю і магнітний потік збудження незмінний, визначимо струм якоря i через швидкість ω за рівнянням руху електропривода

$$J \frac{d\omega}{dt} = M \quad (11.42)$$

і залежністю між моментом і струмом якоря двигуна

$$M = ci. \quad (11.43)$$

У цих рівняннях J — приведений до вала двигуна момент інерції електропривода; c — сталий коефіцієнт.

З рівнянь (11.42) і (11.43) дістанемо

$$i = \frac{J}{c} \frac{d\omega}{dt} \quad (11.44)$$

і запишемо функціонал (11.41) у вигляді

$$I = \int_0^T (1 + \lambda_3 \omega + \lambda_2 k \dot{\omega}^2) dt, \quad (11.45)$$

де

$$k = \frac{J^2 R}{c^2}.$$

Рівняння Ейлера (11.13) для функціонала (11.45)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\omega}} \right) = \lambda_3 - 2\lambda_2 k \dot{\omega} = 0$$

або

$$1 - 2\lambda_0 k \dot{\omega} = 0,$$

де $\lambda_0 = \lambda_2 / \lambda_3$. Звідси

$$\ddot{\omega} = 1 / 2\lambda_0 k. \quad (11.46)$$

Розв'язавши (11.46), дістанемо рівняння екстремалі

$$\omega = \frac{1}{4\lambda_0 k} t^2 + C_1 t + C_2, \quad (11.47)$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування.

Використавши рівняння (11.44), визначимо струм якоря

$$i = \frac{J}{c} \frac{1}{2\lambda_0 k} t + \frac{J}{c} C_1. \quad (11.48)$$

Отже, оптимальне за швидкодією керування двигуном, що відпрацьовує задане переміщення, має здійснюватися за параболічним законом змінювання швидкості та лінійним законом змінювання струму.

Сталі інтегрування C_1 і C_2 , а також сталі множники λ_2 і λ_3 або їх співвідношення $\lambda_0 = \lambda_2/\lambda_3$ визначаються з граничних умов $\omega(0) = 0$, $\omega(T) = 0$ і рівнянь зв'язку (11.38), (11.39).

З умови $\omega(0) = 0$ і рівняння (11.47) дістаємо $C_2 = 0$, а з умови $\omega(T) = 0$ і того самого рівняння визначаємо

$$C_1 = -\frac{T}{4\lambda_0 k}.$$

Підставивши значення C_1 і C_2 в рівняння (11.47) і (11.48), знайдемо

$$\omega = \frac{1}{4\lambda_0 k} t^2 - \frac{T}{4\lambda_0 k} t; \quad (11.49)$$

$$i = \frac{J}{c} \frac{1}{2\lambda_0 k} t - \frac{JT}{4\lambda_0 ck}. \quad (11.50)$$

Підставимо в рівняння зв'язку (11.38) $i(t)$ з формули (11.50), тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^T R \left(\frac{J^2}{c^2} \frac{1}{4\lambda_0^2 k^2} t^2 - 2 \frac{J^2}{c^2} \frac{T}{8\lambda_0^2 k^2} t + \frac{J^2}{c^2} \frac{T^2}{16\lambda_0^2 k^2} \right) dt = \\ & = \frac{RJ^2}{4c^2\lambda_0^2 k^2} \int_0^T \left(t^2 - Tt + \frac{T^2}{4} \right) dt = \frac{RJ^2 T^3}{48c^2\lambda_0^2 k^2} = Q_{\text{дон}}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\lambda_0^2 = \frac{RJ^2 T^3}{48Q_{\text{дон}} c^2 k^2}. \quad (11.51)$$

З рівняння зв'язку (11.39) після підстановки в нього $\omega(t)$ за формулою (11.49) дістанемо

$$\frac{1}{4\lambda_0 k} \int_0^T (t^2 - Tt) dt = -\frac{T^3}{24\lambda_0 k} = 0_0,$$

звідки

$$\lambda_0 = -\frac{T^3}{24k\theta_0} \quad (11.52)$$

і

$$\lambda_0^2 = \frac{T^6}{24^2 k^2 \theta_0^2}. \quad (11.53)$$

Порівнявши вирази (11.51) і (11.53), визначимо мінімальний час переміщення T , тобто значення функціонала (11.37)

$$T = \sqrt[3]{\frac{12\theta_0^2 R J^2}{c^2 Q_{\text{доп}}}}. \quad (11.54)$$

Підставивши значення T в (11.52), дістанемо

$$\lambda_0 = -\frac{R J^2 \theta_0}{2 Q_{\text{доп}} c^2 k}. \quad (11.55)$$

Значення λ_0 і T підставимо у вирази (11.49) і (11.50) і остаточно визначимо рівняння швидкості і струму якоря електродвигуна при оптимальному керуванні.

Керування двигуном здійснюється зміною напруги якорного кола. Закон оптимального програмного керування $u_n(t)$ можна знайти з виразу

$$u_2 = iR + c\omega, \quad (11.56)$$

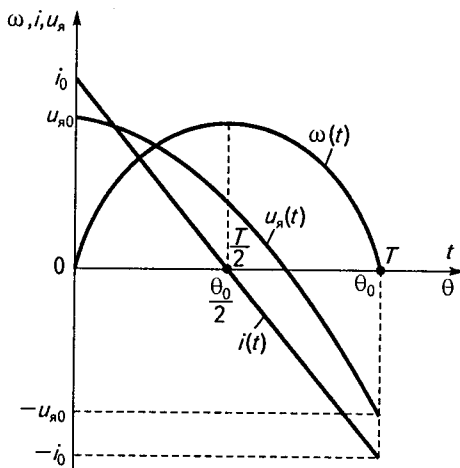


Рис. 11.1

якщо знехтувати індуктивністю якорного кола. У цьому разі для визначення $u_n(t)$ достатньо в рівняння (11.56) підставити знайдені функції $i(t)$ і $\omega(t)$. Оскільки $i(t)$ є лінійною функцією часу, а $\omega(t)$ — параболічною, то $u_n(t)$ також змінюватиметься за параболічним законом. Графіки змінювання швидкості, струму і напруги на якорі двигуна подано на рис. 11.1.

Для визначення закону оптимального керування як функції змінних стану θ і ω , що реалізується за допомогою зворотних зв'язків, необхідно з рівнянь $i(t)$ і $\omega(t)$ вилучити час і знайдене значення $i(t)$ підставити в рівняння (11.56).

Остаточно залежність $u_n(\omega, \theta)$ має такий вигляд:

$$u_n(\omega, \theta) = \left\{ \sqrt{\frac{RQ_{\text{доп}}}{0_0} \left(\sqrt[3]{\frac{9Q_{\text{доп}}c^2}{40_0RJ}} - 2\omega \right)} \right\} \text{sign}(\theta_0 - 2\omega) + c\omega.$$

11.3

Принцип максимуму

Подальшим розвитком класичного варіаційного числення і його узагальненням на випадки, коли оптимальні керування обмежені і становлять кусково-безперервні функції з точками розриву першого роду, кількість яких невідома, є метод, який називається *принципом максимуму*. Розроблено цей метод у 1956 р. Л. С. Понтрягіним та його школою.

Принцип максимуму є необхідною і достатньою ознакою оптимальності процесу лише для лінійних об'єктів. У загальному випадку для нелінійних об'єктів він є тільки необхідним. Це означає, що принцип максимуму дає можливість визначити не оптимальне керування, а деяку звужену групу допустимих керувань. Оптимальне керування, якщо воно взагалі існує, належатиме саме до цієї групи.

Розглянемо суть застосування принципу максимуму. Нехай динаміка об'єкта керування описується рівняннями

$$\begin{aligned} dx_i/dt &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11.57)$$

або у векторній формі

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (11.58)$$

де \mathbf{x} — n -вимірний вектор змінних стану (координат системи); \mathbf{u} — m -вимірний вектор керувань. Крім того, вважатимемо, що керування \mathbf{u} належить до деякої замкнутої множини Ω

$$\mathbf{u}(t) \in \Omega,$$

тобто керування $u_1(t), \dots, u_m(t)$ для кожного t набувають значень із множини Ω .

Керування, що становлять кусково-безперервні функції і набувають значень із множини Ω , називаються *допустимими*.

Крім рівнянь динаміки об'єкта задається функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (11.59)$$

Задача полягає в тому, щоб серед допустимих керувань, що переводять об'єкт, який описується рівнянням (11.58), з початкового стану $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}$ в кінцевий $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)}$, знайти таке, для якого функціонал (11.59) набуває екстремуму.

Для зручності розв'язування задачі вводиться додаткова штучна змінна стану x_0 , для якої

$$dx_0/dt = \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (11.60)$$

а також допоміжні функції $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, що визначаються лінійними однорідними рівняннями

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \psi_j \frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)}{\partial x_i}, \quad (11.61)$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

Приєднавши рівняння (11.60) до системи (11.57), дістанемо систему з $(n + 1)$ рівнянь

$$dx_i/dt = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad (11.62)$$

$$i = 0, 1, \dots, n,$$

права частина яких не залежить від x_0 .

Рівняння (11.62) у векторній формі має вигляд

$$d\tilde{\mathbf{x}}/dt = \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}). \quad (11.63)$$

Тут на відміну від рівняння (11.58) вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ та його похідна $\tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ є $(n + 1)$ -вимірними. Ця різниця позначається значком \sim .

Якщо тепер ввести допоміжну функцію \tilde{H} (функцію Гамільтона) у вигляді

$$\begin{aligned} & \tilde{H}(\psi_0, \dots, \psi_n, x_0, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \\ & = \sum_{j=0}^n \psi_j \varphi_j(\psi_0, \dots, \psi_n, x_0, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \end{aligned} \quad (11.64)$$

то рівняння (11.61) і (11.62) можна об'єднати в одну систему, що відома в механіці як система Гамільтона:

$$dx_i/dt = \partial \tilde{H} / \partial \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (11.65)$$

$$d\psi_i/dt = -\partial \tilde{H} / \partial x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (11.66)$$

Рівняння (11.65) — це рівняння об'єкта, а (11.66) — спряжені рівняння.

Після цих попередніх зауважень сформулюємо принцип максимуму:

для того щоб керування $\mathbf{u}(t)$ і траєкторія $\mathbf{x}(t)$, що йому відповідає, були оптимальними, необхідно існування такої ненульової безперервної $(l+1)$ -вимірної вектор-функції $\psi(t)$, складові якої задовольняють рівняння (11.65), (11.66), щоб за будь-якого t у заданому інтервалі $t_0 \leq t \leq t_1$ величина \tilde{H} як функція керувань $\mathbf{u}(t)$ у заданій зоні їх допустимих значень досягала максимуму:

$$\tilde{H} = \tilde{M}(\psi_0, \dots, \psi_n, x_0, \dots, x_n), \quad (11.67)$$

причому $\psi_0 = \text{const}$ і $\tilde{M} = \text{const}(\psi_0 \leq 0$ і $\tilde{M} = 0)$.

Оскільки функція \tilde{H} становить скалярний добуток вектора швидкості зображуючої точки $\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ і вектора ψ , то принципу максимуму можна дати таке геометричне пояснення. Нехай вихідному і кінцевому станам системи відповідають зображуючі точки $\mathbf{x}(t_0)$ та $\mathbf{x}(t_1)$ у просторі станів (рис. 11.2). Кожній точці простору станів відповідає певна оптимальна траєкторія та мінімальний час переходу в кінцеву точку $\mathbf{x}(t_1)$. Навколо цієї точки можна побудувати поверхню, що є геометричним місцем точок з однаковим мінімальним часом переходу t_n у цю точку. Такі поверхні називаються *ізохронами*. Очевидно, що оптимальна за швидкістю траєкторія з початкової у кінцеву точку повинна бути настільки максимально близькою до нормалей до ізохрон, наскільки це дозволяють обмеження, що накладаються на змінні стану і керування. Математично ця умова саме і вимагає максимуму скалярного добутку вектора швидкості $\dot{\mathbf{x}}$ на вектор ψ , зворотний градієнтові часу переходу в кінцеву точку.

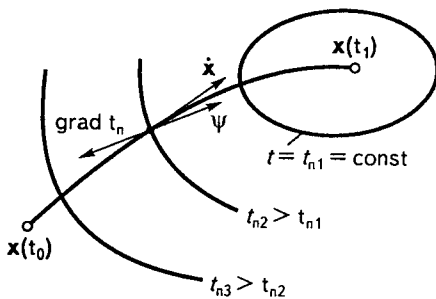


Рис. 11.2

В найпростішому випадку оптимальності (оптимальності за швидкодією), коли час t_1 не фіксований, а підінтегральна функція в (11.59) $\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ тотожно дорівнює одиниці, функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 = \min. \quad (11.68)$$

Функція Гамільтона \tilde{H} у цьому разі визначається за формулою

$$\tilde{H} = \psi_0 + H,$$

де

$$H = \sum_{j=1}^n \psi_j \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m).$$

Штучні величини з нульовими індексами не потрібні, і система рівнянь Гамільтона матиме вигляд

$$dx_i/dt = \partial H/\partial \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (11.69)$$

$$d\psi_i/dt = -\partial H/\partial x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.70)$$

Оскільки $\psi_0 = \text{const}$, то максимум \tilde{H} реалізується одночасно з максимумом функції H , а з вимоги $\psi_0 \leq 0$ відповідно до принципу максимуму випливає, що максимум $H \geq 0$, тобто $M \geq 0$.

Отже, принцип максимуму для систем, оптимальних за швидкодією, можна сформулювати так:

необхідно існування такої ненульової безперервної n -вимірної вектор-функції $\psi(t)$, складові якої задовольняють рівняння (11.69), (11.70), щоб для всіх t у заданому інтервалі $t_0 \leq t \leq t_1$ величина H як функція керувань $\mathbf{u}(t)$ у заданій зоні їх допустимих значень досягала максимуму

$$H = M(\psi_1, \dots, \psi_n, x_1, \dots, x_n),$$

причому величина M стала у часі і $M \geq 0$.

Розглянемо застосування принципу максимуму для окремого випадку оптимального за швидкодією керування лінійними об'єктами, що описуються рівнянням

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (11.71)$$

де $\mathbf{x}(t)$ — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта; $\mathbf{u}(t)$ — m -вимірний вектор керувань; A, B — матриці сталих коефіцієнтів вимірності $n \times n$ і $n \times m$.

У розгорнутому вигляді рівняння (11.71) мають вигляд

$$dx_i/dt = \varphi_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{l=1}^m b_{il} u_l, \quad (11.72)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

тому функція Гамільтона

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{l=1}^m b_{il} u_l \right] \quad (11.73)$$

або у векторній формі

$$H = (\psi, A\mathbf{x}) + (\psi, B\mathbf{u}). \quad (11.74)$$

За принципом максимуму оптимальне керування надає максимум функції H при обмеженнях \mathbf{u} . Але щоб функція H набула максимуму при зміні \mathbf{u} , достатньо, щоб другий доданок у виразі (11.73) або (11.74) був максимальним, тобто

$$\begin{aligned} (\psi, B\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^n \left[\psi_i \sum_{l=1}^m b_{il} u_l \right] = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{l=1}^m b_{il} \psi_i u_l \right] = \\ &= \sum_{l=1}^m \left[\sum_{i=1}^n b_{il} \psi_i u_l \right] = \max. \end{aligned} \quad (11.75)$$

При $m = 1$ і обмеженні $|u(t)| \leq u_{\max}$ умова (11.75) має вигляд

$$\sigma_1(t) u(t) = \max_{|u(t)| \leq u_{\max}} \sigma_1(t) u,$$

де

$$\sigma_1(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i b_{i1}.$$

Умовою екстремуму будь-якої гладкої функції, яку задано у відкритій зоні змінювання її аргументу, є рівність нулю її похідної. Якщо функцію задано в замкнутій зоні, то вона може набувати екстремуму всередині зони або на її межах. У розглядуваному випадку функція $\sigma_1 u$ є лінійною відносно u , тобто її похідна не залежить від u .

Оскільки u не має обмеження, то не існує значення u , при якому досягається екстремум. Якщо функція H розглядається у замкнутому інтервалі $[-u_{\max}, +u_{\max}]$ змінювання u , то вона набуває максимуму на межах інтервалу (рис. 11.3). Отже, функція H досягає максимуму при

$$u = u_{\max} \operatorname{sign} \frac{\partial H}{\partial u} = u_{\max} \operatorname{sign} \sigma_1.$$

Цей вираз є справедливим для будь-якого моменту часу, тому оптимальне керування

$$u(t) = u_{\max} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_{i1} \psi_i.$$

У загальному випадку при $m > 1$ кожна складова вектора керування $\mathbf{u}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ змінюється в межах зони керування незалежно від решти складових і має набувати максимального значення. Очевидно, що умова (11.75) виконуватиметься, якщо керування

$$u_l = u_{l \max} \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^n b_{il} \psi_i \right], \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (11.76)$$

З цього виразу випливає, що керування в лінійних системах, оптимальних за швидкодією, має бути релейним.

Розв'язування задачі максимальної швидкодії за принципом максимуму виконується в такому порядку.

1. Записуються рівняння динаміки об'єкта у вигляді (11.57).

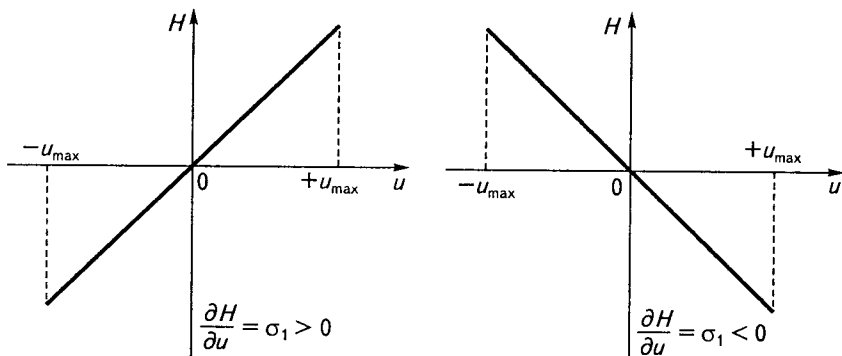


Рис. 11.3

2. Складається функція Гамільтона, що дорівнює скалярному добутку векторів φ і ψ , тобто

$$H = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \dots + \varphi_n \psi_n.$$

3. Відшукуються частинні похідні функції H за u_i , які визначають екстремум функції H . Якщо H лінійно залежить від u_i , то частинна похідна $\partial H / \partial u_i$ є функцією однієї або кількох складових вектора ψ . При цьому для досягнення додатного максимуму H необхідно, щоб $u_i = +u_{i \max}$ при $\psi_i(t) > 0$ і $u_i = -u_{i \max}$ при $\psi_i(t) < 0$, тобто

$$u_i = u_{i \max} \operatorname{sign} \psi_i(t).$$

Отже, керуюча дія повинна скачком набувати значення $+u_{i \max}$ або $-u_{i \max}$.

Якщо залежність H від u_i нелінійна, то частинна похідна $\partial H / \partial u_i$ прирівнюється нулю та із знайденого виразу визначається u_i , при якому H набуває екстремуму.

4. Визначаються допоміжні функції ψ_i , для чого складається і розв'язується система рівнянь вигляду (11.70).

5. Для замкнених систем визначається керування як функція змінних стану об'єкта $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$.

Складність аналітичного розв'язування задачі оптимального керування в тому, що загальна кількість невідомих параметрів становить $(2n + 1)$: n змінних стану x_i , n функцій ψ_i і загальний час керування $T = t_1 - t_0$. Для їхнього визначення необхідно мати $2n$ граничних умов, а також умову для визначення T . Проте звичайно початкові та кінцеві значення задаються для змінних x_i , а для функцій ψ_i вони не задаються. Прямих способів розв'язування таких задач немає — більшість із них можна розв'язувати числовими методами.

Один з можливих підходів до розв'язання задачі такий. Беруть довільні початкові значення ψ_i , тобто довільний вектор $\psi(t_0)$, розв'язують рівняння (11.69), (11.70) і визначають функції $x_i(t)$, $\psi_i(t)$. Потім при $t = t_1$ перевіряють, чи виконується умова $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)}$. Якщо вона не виконується, то беруть нове значення $\psi(t_0)$ і для нього визначають $\mathbf{x}(t_1)$ і т. д. Отже, шукане оптимальне керування визначають методом послідовних наближень. Процедура триває доти, доки не буде знай-

дено такий вектор $\psi(t_0)$, для якого умова $x(t_1) = x^{(1)}$ виконуватиметься з прийнятною точністю.

Аналітичний розв'язок можна знайти тільки для відносно простих задач.

- **Приклад 11.2.** Визначити закон змінювання струму якоря двигуна постійного струму з незалежним збудженням, що забезпечує відпрацювання кутового переміщення θ_0 протягом мінімального часу T при обмеженні струму якоря $|i| \leq i_{\max}$ і статичному моменті $M_c = 0$.

Розв'язання. Рівняння, що описують динаміку двигуна,

$$d\omega/dt = ci/J; \quad d\theta/dt = \omega,$$

де ω — кутова швидкість двигуна; c — сталий коефіцієнт; J — момент інерції електропривода.

Прийmemo такі позначення змінних стану і керування: $\omega = x_1$, $\theta = x_2$, $i = u$. Тоді рівняння двигуна

$$\begin{cases} dx_1/dt = \varphi_1 = cu/J, \\ dx_2/dt = \varphi_2 = x_1 \end{cases} \quad (11.77)$$

при початкових умовах $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ і кінцевих значеннях змінних стану $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = \theta_0$.

Введемо дві допоміжні функції часу ψ_1 і ψ_2 і складемо функцію Гамільтона для системи рівнянь (11.77):

$$H = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 = \frac{c}{J} \psi_1 u + \psi_2 x_1.$$

З умови максимуму цієї функції по u визначимо оптимальне керування

$$u = i_{\max} \operatorname{sign} \psi_1, \quad (11.78)$$

тому що функція H лінійно залежить від u .

Складемо спряжену систему рівнянь для допоміжних функцій ψ_1 і ψ_2 вигляду (11.70):

$$\begin{cases} d\psi_1/dt = -\partial H/\partial x_1 = -\psi_2, \\ d\psi_2/dt = -\partial H/\partial x_2 = 0. \end{cases} \quad (11.79)$$

Позначимо поки що невідомі початкові умови для допоміжних функцій так: $\psi_1(0) = C_1$, $\psi_2(0) = C_2$. Тоді розв'язок системи рівнянь (11.79) матиме вигляд

$$\psi_1 = C_1 - C_2 t; \quad \psi_2 = C_2$$

і відповідно до (11.78)

$$u = i_{\max} \operatorname{sign} (C_1 - C_2 t).$$

Функція $\psi_1(t)$ на інтервалі $(0, T)$ змінює знак не більше одного разу. Позначимо момент змінювання знака t_1 . Тоді

$$u(t) = \begin{cases} i_{\max} & \text{при } t < t_1, \\ -i_{\max} & \text{при } t \geq t_1. \end{cases}$$

Визначимо момент перемикання t_1 . Для цього використовуємо перше рівняння системи (11.77). На першій ділянці при $t < t_1$ значення $u = i_{\max}$, тому

$$dx_1/dt = ci_{\max}/J.$$

Розв'язок цього рівняння при початкових умовах $x_1(0) = 0$

$$x_1 = \frac{c}{J} i_{\max} t.$$

При $t = t_1$ швидкість у кінці першої ділянки

$$x_1(t_1) = \frac{c}{J} i_{\max} t_1.$$

На другій ділянці при $t \geq t_1$ значення $u = -i_{\max}$, тому

$$dx_1/dt = -ci_{\max}/J.$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_1 = -\frac{c}{J} i_{\max} t + C_3.$$

Сталу інтегрування C_3 визначимо з умови, що функція $x_1(t)$ при $t = t_1$ не зазнає розриву і на другій ділянці $x_1(t_1) = ci_{\max}t_1/J$. Тоді

$$C_3 = \frac{2c}{J} i_{\max} t_1$$

і

$$x_1 = -\frac{c}{J} i_{\max} t + \frac{2c}{J} i_{\max} t_1.$$

При $t = T$ $x_1(T) = 0$, тобто

$$0 = -\frac{c}{J} i_{\max} T + \frac{2c}{J} i_{\max} t_1,$$

звідки

$$t_1 = T/2.$$

Час T визначимо з умови, що при $t = T$ кутове переміщення дорівнює θ_0 . Тоді з другого рівняння системи (11.77) маємо

$$x_2 = \int_0^T x_1(t) dt = \theta_0$$

або

$$\int_0^{T/2} \frac{c}{J} i_{\max} t dt + \int_0^{T/2} \left(-\frac{c}{J} i_{\max} t + \frac{2c}{J} i_{\max} t_1 \right) dt = \theta_0,$$

звідки

$$T = 2 \sqrt{\frac{J\theta_0}{c i_{\max}}}.$$

Позначивши струм якоря i і швидкість ω , запишемо закони змінювання струму і швидкості під час відпрацювання двигуном заданого переміщення:

$$i(t) = \begin{cases} +i_{\max} & \text{при } t < T/2, \\ -i_{\max} & \text{при } T/2 < t \leq T; \end{cases}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{c}{J} i_{\max} t & \text{при } t < T/2, \\ \frac{c}{J} i_{\max} (T - t) & \text{при } T/2 < t \leq T. \end{cases}$$

Закон змінювання напруги на якорі визначимо з рівняння $u_{\text{я}} = iR + c\omega$. Цей закон має вигляд

$$u_{\text{я}}(t) = \begin{cases} i_{\max} R + \frac{c^2}{J} i_{\max} t & \text{при } t < T/2, \\ -i_{\max} R + \frac{c^2}{J} (T - t) & \text{при } T/2 < t \leq T. \end{cases}$$

Графіки змінювання струму, швидкості і напруги на якорі двигуна наведено на рис. 11.4.

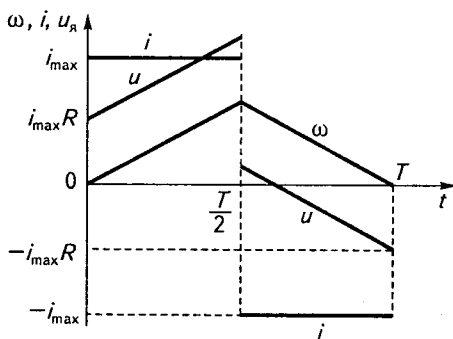


Рис. 11.4

11.4

Теорема про n інтервалів

Одна з окремих, але досить важливих задач оптимальної швидкодії розв'язана в 1953 р. у працях А. А. Фельдбаума незалежно від праць Л. С. Понтрягіна. А. А. Фельдбаум довів таку теорему:

для об'єктів, що описуються лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = u(t),$$

корені характеристичного рівняння якого є дійсними від'ємними або нульовими, а $|u(t)| \leq u_{\max}$ оптимальне керування має не більше, ніж n інтервалів максимального значення $\pm u_{\max}$ і $n - 1$ моментів перемикання.

Ця теорема дістала назву *теорема про n інтервалів*. Згідно з нею оптимальне керування за наявності обмеження керуючого сигналу складається з n інтервалів, у кожному з яких керуючий сигнал досягає свого максимального значення, тобто час перебігу оптимального процесу $x(t)$ поділяється на n інтервалів, у кожному з яких процес описується рівнянням

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = \sigma u_{\max}, \quad (11.80)$$

де $\sigma = \pm 1$, і не змінюється протягом кожного інтервалу. В кінці кожного інтервалу знак керуючого сигналу змінюється. Цей висновок повністю збігається з результатом, який дістали для лінійних систем за принципом максимуму Понтрягіна.

Теорема про n інтервалів може поширюватися також на випадок, коли обмеження накладаються не тільки на керування u , а й на змінні стану системи. У цьому разі кількість інтервалів оптимального керування збільшується, бо крім інтервалів, у яких максимального значення набуває керування, додаються ще й інтервали, коли обмежені змінні стану системи мають свої граничні значення.

Сама по собі теорема про n інтервалів не визначає правила вибору знака керування на першому інтервалі та способів визначення тривалості інтервалів або моментів перемикання.

У багатьох випадках знак керуючого сигналу на початку процесу визначається потрібним напрямком змінювання вихідного сигналу x .

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли об'єкт описується рівняннями

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2, \\ dx_2/dt = u. \end{cases} \quad (11.81)$$

Необхідно визначити оптимальне керування u , що переводить об'єкт з довільного початкового стану $x_1(0), x_2(0)$ в стан спокою $x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 0$ протягом мінімального часу при обмеженні $|u| \leq 1$. Рівняння (11.83) лінійні, тому оптимальне за швидкодією керування u може набувати тільки двох значень: $u = +1$ і $u = -1$. Розглядувана система є системою другого порядку, тому згідно з теоремою про n інтервалів у ній має відбуватися одне перемикання.

Для розв'язування задачі синтезу оптимального керування побудуємо фазові траєкторії об'єкта. Для цього з рівнянь (11.81) вилучимо час, поділивши перше рівняння на друге:

$$dx_1/dx_2 = x_2/u. \quad (11.82)$$

Керування u може набувати лише двох значень $+1$ і -1 , тому рівняння (11.82) подамо у вигляді

$$\begin{cases} dx_1/dx_2 = x_2 \text{ при } u = +1, \\ dx_1/dx_2 = -x_2 \text{ при } u = -1. \end{cases} \quad (11.83)$$

Зінтегрувавши ці рівняння, дістанемо рівняння фазових траєкторій:

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + C \text{ при } u = +1; \quad (11.84)$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + C \text{ при } u = -1. \quad (11.85)$$

Фазові траєкторії становлять дві сім'ї парабол (рис. 11.5). При $C = 0$ параболи описуються рівняннями

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 \text{ і } x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 \quad (11.86)$$

і проходять через початок координат, який відповідає кінцевому стану об'єкта $x_1 = 0, x_2 = 0$. Частини цих парабол, по яких зображуюча точка приходить у початок координат, утворюють лінію перемикання L_1 . Позначимо частину цієї лінії при $u = +1$ через L_1^+ , а при $u = -1$ — через L_1^- . Отже, на останньому інтервалі оптимального процесу зо-

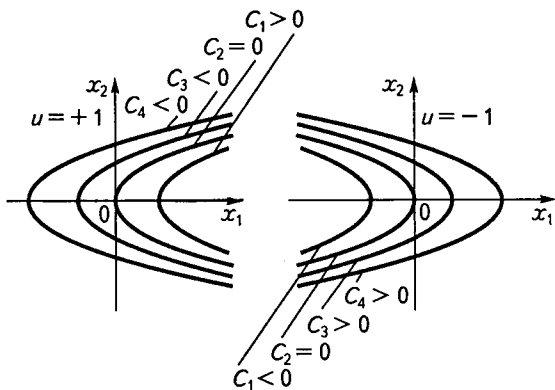


Рис. 11.5

зображуюча точка потрапляє у початок координат по лінії L_1^+ або L_1^- (рис. 11.6).

Лінія L_1 розділяє фазову площину на дві зони D_1 і D_2 . Якщо в початковий момент часу зображуюча точка знаходиться в зоні D_1 (наприклад, точка M_1), то на першому інтервалі слід прийняти $u = -1$. Тоді зображуюча точка рухатиметься по параболі, що описується рівнянням (11.85), і проходить через точку M_1 . У момент часу, коли зображуюча точка потрапляє в положення N_1 , необхідно змінити керування на $u = +1$. Після цього зображуюча точка рухатиметься в початок координат по параболі N_1O . Крива M_1N_1O є оптимальною траєкторією, що відповідає початковому стану $x_1(0), x_2(0)$.

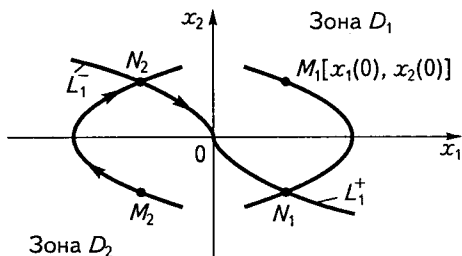


Рис. 11.6

Якщо в початковий момент часу зображуюча точка знаходиться у зоні D_2 і має положення M_2 , то необхідно прийняти $u = +1$. У цьому разі оптимальна траєкторія має вигляд M_2N_2O . В точці N_2 керування перемикається на $u = -1$.

Рівняння лінії перемикавання згідно з (11.86) можна подати у вигляді

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| = 0. \quad (11.87)$$

Відповідно до цього рівняння оптимальне керування

$$u = -1 \operatorname{sign} \sigma_1, \quad (11.88)$$

де $\sigma_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$.

Функціональну схему, що реалізує оптимальний закон керування, подано на рис. 11.7. Нелінійний елемент НЕ формує функцію $F(x_2) = \frac{1}{2}x_2|x_2|$. Перемикання здійснюється релейним елементом РЕ, сигнал на виході якого $u = -1 \operatorname{sign} \sigma_1$.

Розглянемо випадок, коли об'єкт керування описується лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, яке можна подати у вигляді n рівнянь першого порядку:

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.89)$$

Вважатимемо, що керуючий орган один, тобто керування скалярне, і обмеження керування дорівнює одиниці: $|u| \leq 1$. Тоді рівняння (11.89) можна записати у вигляді двох рівнянь

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i \quad \text{при } u = +1 \quad (11.90)$$

і

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \quad \text{при } u = -1. \quad (11.91)$$

Крім того, приймаємо, що шукане оптимальне керування має протягом мінімального часу переводити зображуючу точку з довільного початкового стану в кінцевий, яким вважається початок координат простору станів. Ця задача про повернення зображуючої точки

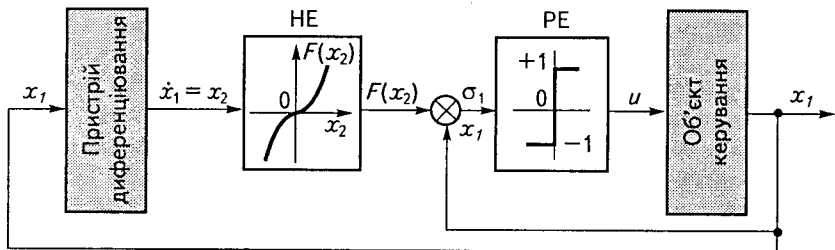


Рис. 11.7

в початок координат простору станів протягом мінімального часу відповідає поверненню об'єкта у вихідний усталений стан, відносно якого змінні стану набули деякого відхилення x_1, x_2, \dots, x_n під дією збурень, прикладених до об'єкта. Змінні x_1, x_2, \dots, x_n можна також розглядати як відхилення (або похибки) відносно нового усталеного стану. Отже, якщо об'єкт перебуває в заданому стані, то завжди $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Рівнянню (11.90) відповідає одна сім'я траєкторій у просторі станів, а рівнянню (11.91) — інша. Позначимо їх відповідно L^+ і L^- . У сім'ях траєкторій L^+ і L^- існує по одній траєкторії, яка проходить через початок координат. Вітки цих траєкторій, що закінчуються в початку координат, становлять півтраєкторії L_1^+ і L_1^- . Об'єднаємо їх в одну траєкторію L_1 . Очевидно, що зображуюча точка може потрапити в початок координат обов'язково по лінії L_1 , що відповідає останньому інтервалу оптимального процесу.

Протягом оптимального процесу знаки керуючої дії на сусідніх інтервалах чергуються, тому кінці множини півтраєкторій передостаннього інтервалу L_2^- належать півтраєкторії L_1^+ , а кінці L_2^+ — півтраєкторії L_1^- . Сукупності півтраєкторій L_2^+ і L_2^- утворюють дві поверхні, кожна з яких за межу має криву L_1 . Обидві поверхні стикуються по лінії L_1 і створюють поверхню L_2 , рухаючись якою зображуюча точка потрапляє на лінію L_1 і по ній — в початок координат. Продовжуючи цю побудову, дістанемо поверхні L_3, L_4, \dots, L_n .

Для об'єктів з дійсними від'ємними коренями характеристичного рівняння процес синтезу полягає в знаходженні поверхні L_{n-1} , яка розділяє простір станів на дві зони, в одній з яких зображуюча точка рухається траєкторіями, що відповідають рівнянню (11.90), а в іншій — рівнянню (11.91). При цьому, якщо початкова точка перебуває в зоні L_n^+ простору станів, то в кінці першого інтервалу зображуюча точка потрапляє в зону L_{n-1}^- , де керування перемикається. Надалі зображуюча точка, рухаючись по поверхні L_{n-1}^- , потрапляє на поверхню L_{n-2}^+ , де керування знову перемикається. Врешті-решт зображуюча точка потрапляє на поверхню L_2 і після останнього перемикання по лінії L_1 — у початок координат.

Поверхні, що розглядаються, описуються трансцендентними рівняннями, тому задача синтезу (визначення поверхні перемикання L_{n-1}) розв'язується в замкнутому вигляді лише для систем другого і третього порядку. Для систем вищого порядку можна знайти частинний розв'язок або обмежитися керуванням, близьким до оптимального.

11.5

Динамічне програмування

Метод динамічного програмування розроблено американським математиком Р. Беллманом на початку 50-х років. Цей метод дає можливість розв'язувати задачі оптимального керування, тобто є одним із способів розв'язування варіаційних задач. Крім того, за допомогою динамічного програмування можна розв'язувати задачі, що за своєю природою є дискретними (не перетвореними з відповідних безперервних задач). Це має велике значення для найрізноманітніших галузей техніки та економіки, пов'язаних із дискретними процесами виробництва.

Метод динамічного програмування базується на *принципі оптимальності*:

будь-яка кінцева ділянка оптимальної траєкторії є також оптимальною траєкторією, тобто оптимальна стратегія не залежить від попереднього стану системи, а визначається лише її станом у момент часу, що розглядається.

Нехай, наприклад, відома оптимальна траєкторія, що переводить систему, яка описується рівняннями

$$\begin{cases} dx_1/dt = \varphi_1(x_1, x_2, u, t), \\ dx_2/dt = \varphi_2(x_1, x_2, u, t), \end{cases} \quad (11.92)$$

зі стану $x_1(t_0), x_2(t_0)$ в стан $x_1(t_1), x_2(t_1)$. Цю траєкторію зображено на рис 11.8. Їй відповідає мінімум функціонала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, x_2, u) dt, \quad (11.93)$$

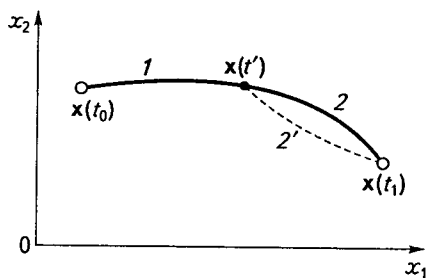


Рис. 11.8

де $u(x_1, x_2, t)$ — відоме оптимальне керування.

Поділимо оптимальну траєкторію на дві ділянки 1 і 2. Принцип оптимальності встановлює: якщо вся траєкторія оптимальна, то й ділянка 2 також оптимальна.

Обґрунтування принципу оптимальності досить очевидне. Припустимо, що ділянка 2 не оптимальна. Тоді має існувати інша

ділянка 2', що починається в точці $x_1(t')$, $x_2(t')$, на якій функціонал (11.93) набуває меншого значення, ніж на ділянці 2. В цьому разі значення функціонала на траєкторії 1 – 2' буде меншим, ніж на траєкторії 1 – 2, тобто траєкторія 1 – 2 не оптимальна, що суперечить вихідному припущенню про те, що траєкторія 1 – 2 оптимальна.

Принцип оптимальності дає можливість покрокової організації процесу відшукування оптимального керування, починаючи, наприклад, з останнього кроку. Це істотно спрощує задачу оптимізації, тому що можна оптимізувати керування на кожному кроці окремо.

Формальним записом принципу оптимальності є *функціональне рівняння Беллмана*. Зокрема для системи другого порядку (11.92) воно має вигляд

$$S[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] = \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt + S[x_1(t_0 + \Delta t), x_2(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t] \right\}. \quad (11.94)$$

У цьому рівнянні використано такі позначення для функціонала на оптимальних траєкторіях:

$$S[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] = \min_u \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt; \quad (11.95)$$

$$\begin{aligned} S[x_1(t_0 + \Delta t), x_2(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t] = \\ = \min_u \int_{t_0 + \Delta t}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt. \end{aligned} \quad (11.96)$$

Граничне значення S при $t = t_1$ дорівнює нулю.

Функціональне рівняння Беллмана дає по суті рекурентні співвідношення для розв'язування задач оптимізації числовим методом.

Розглянемо процедуру застосування рівняння Беллмана для відшукування оптимального керування на такому простому прикладі. Нехай динаміка об'єкта описується рівнянням першого порядку

$$dx/dt = f_1(x, u), \quad (11.97)$$

де x — єдина координата об'єкта; u — єдина керуюча дія, яка має обмеження $|u| \leq u_{\max}$. Відомі початкові умови $x(t_0) = x_0$ і функціонал, що мінімізується,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u) dt. \quad (11.98)$$

Поділимо інтервал часу $t_1 - t_0$ на m рівних частин тривалістю $\Delta t = (t_1 - t_0)/m$. Тоді рівняння (11.97) можна записати в скінченних різницях

$$\frac{x[(k+1)\Delta t] - x(k\Delta t)}{\Delta t} = f_1[x(k\Delta t), u(k\Delta t)]$$

або

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k), \quad (11.99)$$

де

$$f(x_k, u_k) = f_1(x_k, u_k)\Delta t,$$

а інтеграл (11.98) замінити сумою:

$$I = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_0[x(k\Delta t), u(k\Delta t)]\Delta t = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_k, u_k). \quad (11.100)$$

Задача тепер полягає у визначенні послідовності дискретних значень керуючої дії u_0, u_1, \dots, u_{m-1} для кожного Δt , що мінімізують суму (11.100) при умові (11.99) й обмеженні $|u| \leq u_{\max}$. Сформульована задача є задачею знаходження мінімуму складної функції багатьох змінних. Метод динамічного програмування дає можливість звести цю задачу до простішої — до послідовної мінімізації деяких функцій лише однієї змінної.

Розв'язування задачі зручно починати з кінця процесу, тобто з моменту часу $t = t_1$, і просуватися до його початку $t = t_0$, оскільки при $t = t_1$ функціонал дорівнює нулю.

На початку останнього етапу процес характеризується значеннями координати x_{m-1} і керуючої дії u_{m-1} . Згідно з принципом оптимальності керування u_{m-1} не залежить від попереднього стану системи, а визначається лише значенням x_{m-1} і метою керування. На останньому кроці траєкторії від t_{m-1} до $t_m = t_1$ вибір керуючої дії u_{m-1} впливає лише на останній доданок суми (11.100)

$$I_{m-1} = \varphi(x_{m-1}, u_{m-1}). \quad (11.101)$$

Оптимальне керування u_{m-1} на $m-1$ -му кроці повинно мінімізувати величину I_{m-1} . Позначимо мінімальну величину функціонала I_{m-1} через S_{m-1} . З виразу (11.101) видно, що S_{m-1} залежить від x_{m-1} , тобто від стану системи в момент t_{m-1} . Тому можна записати

$$S_{m-1}(x_{m-1}) = \min_{u_{m-1}} I_{m-1} = \min_{u_{m-1}} [\varphi(x_{m-1}, u_{m-1})].$$

Для визначення S_{m-1} потрібно мінімізувати I_{m-1} лише за однією змінною u_{m-1} . Виконавши цей процес, знайдемо значення S_{m-1} і відповідні їм оптимальні керування u_{m-1} як функції змінної x_{m-1} . Значення S_{m-1} і u_{m-1} для різних x_{m-1} необхідно занести до пам'яті ЕОМ перш ніж переходити до наступних етапів розв'язування.

Переходимо тепер до передостанньої ділянки часу від t_{m-2} до t_m . Для неї матимемо

$$\begin{aligned} S_{m-2}(x_{m-2}) &= \min_{u_{m-2}} I_{m-2} = \\ &= \min_{u_{m-2}} [\varphi(x_{m-2}, u_{m-2})] + S_{m-1}(x_{m-1}). \end{aligned} \quad (11.102)$$

З урахуванням (11.99) запишемо

$$x_{m-1} = x_{m-2} + f(x_{m-2}, u_{m-2}),$$

тоді з (11.102) дістанемо

$$\begin{aligned} S_{m-2}(x_{m-2}) &= \min_{u_{m-2}} \{ \varphi(x_{m-2}, u_{m-2}) + \\ &+ S_{m-1}[x_{m-2} + f(x_{m-2}, u_{m-2})] \}. \end{aligned}$$

Мінімізація тут виконується також за однією змінною u_{m-2} і при цьому визначається оптимальне значення керування u_{m-2} та мінімум функції I_{m-2} , що дорівнює S_{m-2} . Для кожного фіксованого x_{m-2} знайдено оптимальне значення u_{m-2} мінімізує всю величину S_{m-2} , а не лише її перший доданок. При цьому для кожного u_{m-2} за формулою (11.99) обчислюється координата x_{m-1} , знайдена на попередньому кроці. Внаслідок мінімізації I_{m-2} дістанемо залежності $S_{m-2}(x_{m-2})$ і $u_{m-2}(x_{m-2})$, які заносяться до пам'яті ЕОМ.

Аналогічно виконуючи переходи до чергових кроків, записуємо рекурентну формулу

$$\begin{aligned} S_{m-k}(x_{m-k}) &= \min_{u_{m-k}} \{ \varphi(x_{m-k}, u_{m-k}) + \\ &+ S_{m-(k-1)}[x_{m-k} + f(x_{m-k}, u_{m-k})] \}. \end{aligned} \quad (11.103)$$

За цією формулою можна визначити оптимальне значення функціонала на будь-якому кроці.

Обчислюючи за формулою (11.103) S_{m-k} послідовно для $k = 1, 2, \dots, m$, визначаємо, нарешті, $u(0)$, тобто керуючу дію, яка необхідна в початковий момент часу. Одночасно з визначенням $u(0)$ дістаємо також $S(0)$, тобто мінімальне значення функціонала при оптимальному керуванні.

Розглянуту процедуру можна застосувати також у загальному випадку, коли об'єкт керування описується рівнянням

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

а функціонал, що мінімізується, має вигляд

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt.$$

Розв'язування починаємо з кінцевого моменту $t = t_1$. Визначаємо і запам'ятовуємо оптимальне значення керування $\mathbf{u}(m-1)$ на початку останнього інтервалу для кожного можливого дискретного значення $\mathbf{x}(m-1)$ в границях обмежень на змінні стану системи. Одночасно запам'ятовуємо відповідний приріст $S(m-1)$ функціонала, що мінімізується. Потім переходимо до передостаннього $(m-2)$ -го кроку і визначаємо мінімум функціонала $S(m-2)$ за два останніх кроки і відповідне оптимальне значення $\mathbf{u}(m-2)$ як функцію $\mathbf{x}(m-2)$. Мінімальне значення $S(m-2)$ для конкретного значення $\mathbf{x}(m-2)$ знаходимо варіюванням $\mathbf{u}(m-2)$. При цьому для кожного $\mathbf{u}(m-2)$ спочатку визначаємо приріст функціонала за другий крок і значення $\mathbf{x}(m-1)$ в кінці другого кроку. Після цього, використовуючи раніше знайдену залежність $S(m-1)$ від $\mathbf{x}(m-1)$, визначаємо повний приріст функціонала $S(m-2)$ за два кроки. Переходячи далі до початку $(m-3)$ -го кроку і т. д., нарешті потрапляємо в початкову точку $\mathbf{x}(t_0)$, визначивши при цьому оптимальне керування $\mathbf{u}(t)$, сам оптимальний процес $\mathbf{x}(t)$ і сумарну величину критерію оптимальності.

Описана процедура лише в найпростіших випадках дає можливість знайти розв'язок в аналітичній формі. У загальному випадку метод динамічного програмування слід розглядати як метод складання програми для числового розв'язування задач за допомогою ЕОМ.

Метод динамічного програмування можна використовувати також без подання задачі оптимального керування в дискретній формі. Для цього застосовується *диференціальне рівняння Беллмана*

$$-\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}} \left\{ \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\}, \quad (11.104)$$

де \mathbf{x} — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта; \mathbf{u} — m -вимірний вектор керування.

Якщо система стаціонарна, то S не залежить від t , тобто $\partial S/\partial t = 0$, і рівняння (11.104) матиме вигляд

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right\} = 0. \quad (11.105)$$

Якщо прийняти $\varphi = 1$, то від загальної задачі можна перейти до задачі про максимальну швидкодію. Рівняння (11.104) у цьому разі

$$-\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\}.$$

Для стаціонарної системи $\partial S/\partial t = 0$ і

$$\min_{\mathbf{u}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -1.$$

Якщо ввести функцію $V(\mathbf{x}) = -S(\mathbf{x})$, яку називають *твірною*, то

$$\max_{\mathbf{u}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 1.$$

Це рівняння є рівнянням Беллмана в задачі про максимальну швидкодію.

Якщо відомо, що оптимальне керування належить множині U або подібні обмеження взагалі відсутні, то рівняння (11.105) можна подати як сукупність рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{cases} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_k} = 0, \end{cases} \quad (11.106)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Отже, щоб розв'язати задачу оптимального керування, необхідно розв'язати систему (11.106) з $m + 1$ рівнянь у частинних похідних. У найпростішому випадку для системи першого порядку, що має одну керуючу дію, рівняння Беллмана мають вигляд

$$\begin{cases} \varphi_0(x, u) + \frac{\partial S(x)}{\partial x} \varphi(x, u) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_0(x, u)}{\partial u} + \frac{\partial S(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(x, u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (11.107)$$

□ **Приклад 11.3.** Для об'єкта, що описується рівнянням

$$dx/dt = ax + bu = \varphi(x, u)$$

знайти оптимальне керування u , при якому мінімізується функціонал

$$I = \int_0^{\infty} (c_1 x^2 + c_2 u^2) dt = \int_0^{\infty} \varphi_0(x, u) dt.$$

Розв'язання. Рівняння (11.107) мають вигляд

$$c_1 x^2 + c_2 u^2 + (ax + bu) \frac{\partial S}{\partial x} = 0;$$

$$2c_2 u + b \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Вилучивши з цих рівнянь $\partial S/\partial x$, дістанемо

$$c_2 bu^2 + 2ac_2 ux - bc_1 x^2 = 0,$$

звідки визначимо керування u як функцію x

$$u = -x \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{c_1}{c_2}} \right) = -kx.$$

Розв'язок з мінусом перед коренем відкидаємо як такий, що не відповідає вимогам стійкості.

Отже, шуканий оптимальний закон керування є лінійним.

11.6

Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів

Методика синтезу оптимального керування $u(x)$ для відомого об'єкта при заданих критерії оптимальності та обмеженнях називається аналітичним конструюванням регуляторів.

Одним із методів аналітичного конструювання регуляторів, що базується на застосуванні методу динамічного програмування для певного класу систем, є метод Льютова.

Розглянемо об'єкт керування, що описується лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

і має одну керуючу дію u .

Треба визначити оптимальне керування $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що мінімізує функціонал

$$I = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + c_0 u^2 \right) dt, \quad (11.108)$$

де $c_i \geq 0$; $c_0 > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, при переведенні системи з початкового стану $x(0) = x_0$ в кінцевий $x(\infty) = 0$.

Для цієї задачі рівняння (11.104) має вигляд

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_u \left\{ \varphi_0(\mathbf{x}, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, u) \right\},$$

де

$$\varphi_0 = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + c_0 u^2;$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u.$$

Введемо твірну функцію $V = -S$. Для стаціонарного об'єкта функція S залежить лише від початкового положення зображуючої точки в просторі станів, тому

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

і

$$\min_u \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + c_0 u^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \right) \right\} = 0. \quad (11.109)$$

Якщо прийняти, що керування u не має обмежень, то вираз (11.109) набуває мінімуму в точці, де похідна дорівнює нулю, тобто

$$2c_0 u - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

і

$$u = \frac{1}{2c_0} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (11.110)$$

Підставивши знайдене значення u у вираз (11.109), дістанемо рівняння для визначення твірної функції

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \frac{1}{4c_0} \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \frac{b_i}{2c_0} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \frac{1}{4c_0} \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \quad (11.111)$$

Рівняння (11.111) є нелінійним рівнянням у частинних похідних відносно функції V . Розв'язок цього рівняння відшукується у вигляді квадратичної форми від змінних стану системи, тобто

$$V = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n (-m_{kr} x_k x_r).$$

Якщо прийняти, що $m_{kr} = m_{rk}$, то частинні похідні V матимуть вигляд

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -2 \sum_{k=1}^n m_{ik} x_k. \quad (11.112)$$

Підставивши ці похідні в (11.111), дістанемо рівняння

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ik} a_{ij} x_k x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 - \frac{1}{c_0} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_i m_{ik} x_k \right)^2 = 0. \quad (11.113)$$

Цей вираз становить квадратичну форму змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Він тотожно дорівнюватиме нулю за умови, що всі його коефіцієнти дорівнюють нулю. Тому, прирівнявши нулю сукупність коефіцієнтів при добутках $x_k x_i$ і врахувавши, що $x_i x_k = x_k x_i$, дістанемо систему з $n(n+1)/2$ алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів m_{ik} :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (m_{ik} a_{ij} + m_{ij} a_{ik}) - \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n b_i m_{ik} \sum_{i=1}^n b_i m_{ij} = 0 \quad (j \neq k), \\ 2 \sum_{i=1}^n m_{ik} a_{ik} + c_k - \frac{1}{c_0} \left(\sum_{i=1}^n b_i m_{ik} \right)^2 = 0 \quad (j = k). \end{cases} \quad (11.114)$$

Ці рівняння є алгебричними рівняннями Ріккати.

Визначивши коефіцієнти m_{ik} і використавши вирази (11.110) і (11.112), знайдемо оптимальне керування

$$u = -\frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n d_k x_k, \quad (11.115)$$

де

$$d_k = \sum_{i=1}^n b_i m_{ik},$$

або

$$u = -\sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

В останньому виразі a_i є коефіцієнтами зворотних зв'язків за змінними стану системи.

Отже, регулятор лінійний і для оптимального керування необхідно мати зворотні зв'язки за всіма змінними стану системи, оскільки всі коефіцієнти a_i не дорівнюють нулю.

□ **Приклад 11.4.** Передаточна функція об'єкта

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1)} = \frac{x(p)}{u(p)}.$$

Скласти рівняння Ріккати для визначення коефіцієнтів квадратичної форми твірної функції.

Розв'язання. Рівняння динаміки об'єкта

$$T_1^2 \frac{d^3 x}{dt^3} + 2\xi T_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = Ku$$

запишемо у формі Коші, прийнявши $x_1 = x$; $x_2 = dx/dt$; $x_3 = d^2 x/dt^2$.

Повна форма рівнянь така:

$$dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 u;$$

$$dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 u;$$

$$dx_3/dt = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 u.$$

У розглядуваному прикладі ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2; \\ dx_2/dt &= x_3; \\ dx_3/dt &= -\frac{1}{T_1^2} x_2 - \frac{2\xi}{T_1} x_3 + \frac{K}{T_1^2} u, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{13} = b_1 = a_{21} = a_{22} = b_2 = a_{31} = 0; \quad a_{12} = a_{23} = 1; \\ a_{32} = -1/T_1^2; \quad a_{33} = -2\xi/T_1; \quad b_3 = K/T_1^2. \end{aligned}$$

Візьмемо оптимізуючий функціонал у формі

$$I = \int_0^{\infty} (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + c_0 u^2) dt,$$

тоді рівняння (11.111) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} (a_{32} x_2 + a_{33} x_3) - \\ - c_1 x_1^2 - c_2 x_2^2 - c_3 x_3^2 + \frac{b_3^2}{4c_0} \left(\frac{\partial V}{\partial x_3} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (11.116)$$

Запишемо функцію V при $m_{kr} = m_{rk}$ в квадратичній формі:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) &= -(m_{11} x_1^2 + m_{21} x_1 x_2 + m_{31} x_1 x_3 + m_{12} x_1 x_2 + \\ &+ m_{22} x_2^2 + m_{32} x_2 x_3 + m_{13} x_1 x_3 + m_{23} x_2 x_3 + m_{33} x_3^2) = \\ &= -[m_{11} x_1^2 + m_{22} x_2^2 + m_{33} x_3^2 + 2(m_{12} x_1 x_2 + m_{13} x_1 x_3 + m_{23} x_2 x_3)]. \end{aligned}$$

Частинні похідні функції V мають вигляд

$$\begin{aligned} \partial V/\partial x_1 &= -2(m_{11} x_1 + m_{12} x_2 + m_{13} x_3); \\ \partial V/\partial x_2 &= -2(m_{12} x_1 + m_{22} x_2 + m_{23} x_3); \\ \partial V/\partial x_3 &= -2(m_{13} x_1 + m_{23} x_2 + m_{33} x_3). \end{aligned}$$

Підставивши ці похідні у вираз (11.116) і прирівнявши нулю суми коефіцієнтів при однакових $x_k x_i$, дістанемо систему з шести рівнянь Ріккати для визначення параметрів m_{rk} квадратичної форми функції:

для x_1^2

$$c_1 - b_3^2 m_{13}^2 / c_0 = 0;$$

для x_2^2

$$c_2 + 2m_{12} + 2m_{23} a_{32} - b_3^2 m_{23}^2 / c_0 = 0;$$

для x_3^2

$$c_3 + 2m_{23} + 2m_{33} a_{33} - b_3^2 m_{33}^2 / c_0 = 0;$$

11.7. Застосування методу динамічного програмування для синтезу дискретних (цифрових) регуляторів

для $x_1 x_2$

$$m_{11} + m_{13}a_{32} - b_3^2 m_{13} m_{23} / c_0 = 0;$$

для $x_1 x_3$

$$m_{12} + m_{13}a_{33} - b_3^2 m_{13} m_{33} / c_0 = 0;$$

для $x_2 x_3$

$$m_{13} + m_{22} + m_{33}a_{32} + m_{23}a_{33} - b_3^2 m_{33} / c_0 = 0.$$

Вагові константи c_i і c_0 функціонала (11.108) визначаємо, виходячи з максимально допустимих значень змінних стану системи і керуючих дій під час перехідного процесу:

$$c_i = \left(\frac{1}{x_{i \max}} \right)^2; \quad c_0 = \left(\frac{1}{u_{\max}} \right)^2.$$

У цьому разі функціонал матиме вигляд

$$I = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_{i \max}} \right)^2 + \left(\frac{u}{u_{\max}} \right)^2 \right] dt.$$

Розроблено й інші методи аналітичного конструювання регуляторів. Зокрема, метод О. А. Красовського відрізняється складнішими обмеженнями керування та змінних стану системи, а також і тим, що оптимізуючий функціонал не містить керування. Такий підхід дає змогу визначити оптимальне керування в замкнутій аналітичній формі для задач високої розмірності.

11.7

Застосування методу динамічного програмування для синтезу дискретних (цифрових) регуляторів

Розглянемо об'єкт керування, збурений рух якого описується системою різницевих рівнянь

$$\Delta x_i [n] = \varphi_i(x, u) = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j [n] + b_i u [n], \quad (11.117)$$
$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Якість перехідних процесів оцінюється функціоналом

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k c_i x_i^2[n] + c_0 u^2[n] \right), \quad (11.118)$$

де c_i, c_0 — вагові коефіцієнти.

Потрібно знайти рівняння регулятора $u[n] = \psi(x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n])$, при якому функціонал (11.118) набуває мінімального значення і забезпечується повернення об'єкта в стан, що відповідає початку координат простору станів ($x[\infty] = 0$).

За аналогією з безперервними системами рівняння Беллмана для дискретних систем також можна дістати за допомогою принципу оптимальності. Це рівняння матиме вигляд

$$\min_u \left\{ W(x[n], u[n]) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \Delta x_i[n] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i[n] \Delta x_j[n] \right\} = 0, \quad (11.119)$$

де $W(x[n], u[n])$ — функція під знаком суми $\sum_{n=0}^{\infty}$ функціонала (11.118);

S — мінімум функціонала (11.118) за керуванням u .

Використовуючи функціонал у вигляді (11.118) і рівняння об'єкта (11.117), рівняння (11.119) можна подати у вигляді

$$\min_u \left[\sum_{i=1}^k c_i x_i^2 + c_0 u^2 + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_i(x, u) \varphi_j(x, u) \right] = 0. \quad (11.120)$$

Визначивши похідну по u від цього виразу, дістанемо співвідношення для визначення рівняння цифрового регулятора

$$2c_0 u + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i(x, u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial [\varphi_i(x, u) \varphi_j(x, u)]}{\partial u} = 0. \quad (11.121)$$

Розглянемо застосування цих виразів на прикладі систем першого і другого порядків.

Нехай об'єкт описується рівнянням

$$\Delta x[n] = ax[n] + bu[n],$$

а функціонал — формулою

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 x^2[n] + c_0 u^2[n]).$$

Тоді рівняння Беллмана згідно з (11.120) матиме вигляд

$$\min_u \left[c_1 x^2 + c_0 u^2 + \frac{\partial S(x)}{\partial x} (ax + bu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} (ax + bu)^2 \right] = 0. \quad (11.122)$$

Визначивши похідну по u , дістанемо

$$2c_0 u + b \frac{\partial S(x)}{\partial x} + abx \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} + b^2 u \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} = 0,$$

звідки

$$u = - \frac{b \frac{\partial S(x)}{\partial x} + abx \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}}{2c_0 + b^2 \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}}.$$

Підставивши значення u у формулу (11.122), одержимо

$$c_1 x^2 + ax \frac{\partial S(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 x^2 \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} - \frac{\left(b \frac{\partial S(x)}{\partial x} + abx \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \right)^2}{4 \left(c_0 + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \right)} = 0. \quad (11.123)$$

Функцію $S(x)$ відшукаємо у вигляді квадратичної форми $S(x) = mx^2$. Для визначення коефіцієнта m складаємо рівняння Ріккати. Для цього підставляємо значення $\partial S(x)/\partial x = 2mx$ і $\partial^2 S(x)/\partial x^2 = 2m$ у вираз (11.123), а потім прирівнюємо нулю суму всіх коефіцієнтів при x^2 .

Після знаходження коефіцієнта m керування u записуємо у вигляді

$$u[n] = -\frac{bm + abm}{c_0 + b^2m} x[n].$$

Для об'єкта другого порядку, що описується рівняннями

$$x_1[n+1] = x_2[n] + b_1 u[n];$$

$$x_2[n+1] = ax_1[n] + b_2 u[n],$$

і функціонала

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 x_1^2[n] + c_2 x_2^2[n] + c_0 u^2[n])$$

рівняння Беллмана має вигляд

$$\begin{aligned} \min_u \left[c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_0 u^2 + \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_1} (x_2 + b_1 u - x_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_2} (ax_1 + b_2 u - x_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} (x_2 + b_1 u - x_1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_2 + b_1 u - x_1)(ax_1 + b_2 u - x_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} (ax_1 + b_2 u - x_2)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Дістанемо вираз для визначення рівняння цифрового регулятора:

$$\begin{aligned} 2c_0 u + b_1 \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_2} + b_1 (x_2 + b_1 u - \\ - x_1) \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} (b_2 x_2 + ab_1 x_1 - b_1 x_2 - b_2 x_1 + \\ + 2b_1 b_2 u) \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + b_2 (ax_1 - x_2 + b_2 u) \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (11.124)$$

Функцію S відшукуємо в квадратичній формі

$$S(x_1, x_2) = m_{11}x_1^2 + 2m_{12}x_1x_2 + m_{22}x_2^2.$$

Коефіцієнти m_{11}, m_{12}, m_{22} визначаємо з системи трьох рівнянь Ріккати, після чого з виразу (11.124) знаходимо керування u як функцію x_1 і x_2 .

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте задачу оптимального керування і поясніть, що таке критерій оптимальності.
2. Поясніть суть методів класичного варіаційного числення.
3. Що таке функціонал?
4. Наведіть рівняння Ейлера і рівняння Ейлера—Пуассона. Поясніть їхню суть.
5. Які задачі називаються ізопериметричними?
6. У чому полягає суть методу синтезу оптимальної системи із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна?
7. Сформулюйте принцип максимуму Понтрягіна для систем, що є оптимальними за швидкодією.
8. Яка послідовність розв'язування задачі максимальної швидкодії із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна?
9. Сформулюйте теорему про n інтервалів. Поясніть методику визначення моментів перемикання керуючої дії.
10. Поясніть суть методу динамічного програмування.
11. Як визначити закон оптимального керування за методом динамічного програмування?
12. Що таке аналітичне конструювання регуляторів?
13. Поясніть суть методу аналітичного конструювання регуляторів, запропонованого О. М. Лютим.
14. Як скласти рівняння Ріккати, якщо відома передаточна функція об'єкта?
15. У чому полягає особливість застосування методу динамічного програмування для синтезу дискретних (цифрових) регуляторів?
16. Визначіть рівняння цифрового регулятора для системи другого порядку, застосувавши метод динамічного програмування.

12.1

Загальні відомості про адаптивні САК

Системи автоматичного керування, розроблені згідно з припущенням, що властивості об'єкта та зовнішні збурення відомі і не змінюються упродовж експлуатації, забезпечують потрібні показники якості лише у разі, якщо відхилення параметрів об'єкта і збурень від розрахункових значень неістотні. Проте в багатьох випадках параметри об'єкта та зовнішні збурення змінюються у досить значних межах, крім того, інформація про властивості об'єкта та зовнішні збурення взагалі може бути неповною. Тому САК, які розробляються за заданими характеристиками об'єкта і збурень, а також мають незмінну структуру й параметри, у більшості випадків не забезпечують оптимальних режимів функціонування. Ще більші складності виникають під час проектування систем, що працюють за неповної інформації про властивості об'єкта та зовнішні збурення.

Вихід із цих ускладнень полягає в розробці регуляторів, властивості яких змінюються так, щоб при змінюванні параметрів об'єкта та зовнішніх дій якість системи зберігалася, тобто властивості регуляторів мають пристосовуватися (адаптуватися) до цих змін. Системи з такими регуляторами називаються *адаптивними (самонастроювальними)*. Отже, адаптивна САК — це система, яка здатна в процесі виконання основного завдання керування за рахунок змінювання параметрів і структури регулятора поповнювати нестачу інформації про об'єкт керування і, діючи на його зовнішні збурення, поліпшувати якість свого функціонування.

Розглянемо одномірний об'єкт, що описується рівнянням у векторно-матричній формі

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \psi(t)\mathbf{f}, \quad (12.1)$$

де \mathbf{u} — керуюча дія; \mathbf{f} — збурення; $A(t)$ — матриця системи розмірності $n \times n$; $B(t)$, $\psi(t)$ — матриці-стовпці $1 \times n$, причому всі або окремі компоненти матриць задані неточно або змінюються з часом, тобто є так званими невизначеними параметрами. Причина невизначеності параметрів може бути різною: наближені відомості про математичну модель об'єкта, розкид параметрів у межах технологічних допусків, змінювання параметрів унаслідок «старіння» тощо.

Звичайно параметри об'єкта змінюються повільніше, ніж змінні стану, тому інтервал роботи об'єкта $[t_0, t_1]$ можна розділити на підінтервали, протягом яких параметри об'єкта можна вважати незмінними. Тоді, позначивши невизначений параметр $a_i(t)$ для підінтервалу, дістанемо

$$a_i(t) = \text{const} = a_i(R\bar{T}); R\bar{T} \leq t \leq (R+1)\bar{T}; R = 1, 2, \dots, N, \quad (12.2)$$

де $\bar{T} = (t_1 - t_0)/N$ — інтервал квазістаціонарності параметрів.

Гіпотеза квазістаціонарності передбачає, що час затухання перехідних процесів по кожній із змінних стану t_{in} значно менший, ніж інтервал квазістаціонарності. Згідно з цією гіпотезою процеси в об'єкті керування поділяються на «швидкі» (змінювання змінних стану) і «повільні» (змінювання параметрів).

Для синтезу квазістаціонарних систем можна користуватися будь-якою з відомих процедур, у тому числі процедурою синтезу оптимальних регуляторів. Але, виходячи з того, що параметри об'єкта насправді змінюються і вважаються сталими тільки протягом інтервалу квазістаціонарності, задачу синтезу необхідно розв'язувати автоматично безпосередньо в процесі роботи об'єкта, не відстаючи від темпу змінювання параметрів об'єкта. Отже, алгоритм регулятора повинен змінюватися під час роботи системи, пристосовуючись (адаптуючись, самонастроюючись) протягом часу \bar{T} до параметрів об'єкта, що змінюються, так, щоб якість роботи системи залишалася незмінною.

За такого підходу до побудови адаптивної системи передусім необхідно розв'язати задачу ідентифікації (визначення) параметрів об'єкта керування.

Системи з ідентифікаційним алгоритмом називаються *параметрично адаптивними*.

Недоліком алгоритму ідентифікації є те, що він недостатньо пов'язаний з метою керування, хоча й призначений для її досягнення.

Безпосередньо з мети керування впливає, що раціональнішим є пошук законів змінювання параметрів регулятора. При цьому параметри регулятора повинні змінюватися залежно від значення критерію якості роботи системи. Такі алгоритми називаються *прямими алгоритмами адаптивного керування*. Системи, в яких використовуються ці алгоритми, називаються *функціонально адаптивними системами керування*.

Пристрій, що реалізує алгоритм адаптації, називається *адаптером*.

Особливість структури адаптивних систем полягає в тому, що, порівняно зі звичайними неадаптивними системами, вони мають додатковий контур — *контур адаптації* (самонастроювання), призначений для переробки інформації про умови роботи, що змінюються, і наступної дії на регулятор основного контуру керування.

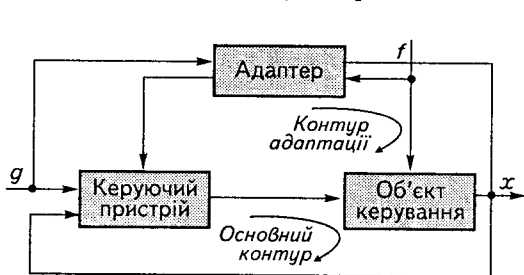


Рис. 12.1

Функціональну схему адаптивної системи наведено на рис. 12.1. Контур, що складається з керуючого пристрою і об'єкта керування, є основним контуром системи і становить звичайну неадаптивну САК. Адаптер у загальному випадку одержує інформацію про вхідну дію g , збурення f , вихідну величину x і діє на керуючий пристрій основного контуру.

Отже, адаптивна САК, крім основного контуру, має контур адаптації. Для цього контуру об'єктом керування є вся основна САК.

Адаптивні системи звичайно поділяють на два класи: параметричні і непараметричні.

У *параметричних системах* структура керуючого пристрою залишається незмінною, а адаптація здійснюється за рахунок змінювання (підстроювання) значень параметрів для наближення їх до оптимальної настройки. Такі системи називаються також *самонастроювальними*.

У *непараметричних системах* адаптація здійснюється за рахунок змінювання структури (алгоритму функціонування) керуючого пристрою. Такі системи називаються також *самоорганізуючими*.

12.2

Системи екстремального керування

Історично першими адаптивними системами були системи екстремального керування.

Системою екстремального керування називається система, в якій автоматично відшукується та підтримується режим роботи, що характеризується максимально (мінімально) можливим значенням показника якості. Цей показник називається також *показником екстремуму* або *цільовою функцією*. В загальному випадку в процесі екстремального керування визначається екстремум статичної характеристики нелінійного нестационарного інерційного об'єкта, на який діють збурення, що змінюють положення екстремуму в просторі керуючих дій.

Якщо статична характеристика об'єкта має екстремум

$$I = f(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (12.3)$$

де I — показник екстремуму; u_i — керуючі параметри, то система екстремального керування має виводити й утримувати робочу точку в глобальному екстремумі.

Об'єкти екстремального керування можна класифікувати за такими ознаками:

- кількість керуючих (оптимізуючих) параметрів;
- кількість екстремумів характеристики об'єкта;
- обсяг апріорної інформації про об'єкт;
- інерційність об'єкта.

Якщо в об'єкті всього один керуючий параметр ($m = 1$), то об'єкт називається *однопараметричним*, якщо $m > 1$, — то *багатопараметричним*.

У найпростішому випадку об'єкт екстремального керування є однопараметричним, однокрестимальним, а його статична характеристика (12.3) — безперервною і безперервно диференційованою функцією.

Інерційність об'єкта часто не враховують, оскільки головним у системах екстремального керування є відслідковування дрейфу екстремуму статичної характеристики об'єкта. Тому екстремальні системи часто називають *статичними самонастроювальними*.

Розглянемо однопараметричний об'єкт, характеристика якого $I = f(u)$ має екстремум, причому координати екстремуму змінюються

(дрейфують) у часі. Якщо значення керуючого параметра $u = u^*$, при якому досягається екстремум, є фіксованим, тобто відбувається лише вертикальний дрейф статичної характеристики (рис. 12.2, а), або змінюється за наперед відомим законом, то можна застосувати систему стабілізації або систему програмного керування. Якщо крім вертикального дрейфу відбувається й горизонтальний (рис. 12.2, б), причому закон цього дрейфу заздалегідь не відомий, то системи стабілізації або програмного керування не можуть забезпечити автоматичне утримання екстремуму. В цьому разі слід застосовувати систему екстремального керування, що забезпечує такі змінювання керуючих параметрів, за яких відбувається рух системи до екстремуму й утримання її в точці екстремуму.

Прикладом однопараметричного об'єкта системи екстремального керування може бути коливальний LC -контур. Завдання системи полягає в автоматичному настроюванні цього контуру в резонанс із частотою f напруги, прикладеної до контуру. Контур настроюється за рахунок змінювання ємності конденсатора C . Ознакою такого настроювання є максимум напруги U на резонансному контурі (рис. 12.3).

Іншим прикладом екстремального об'єкта може бути котел теплових електричних станцій. У топку котла подається повітря, кількість якого дещо перевищує теоретично необхідну для повного згоряння палива. Відношення цих кількостей називається коефіцієнтом надлишку повітря $\alpha_{\text{н}}$. Правильність вибору цього коефіцієнта визна-

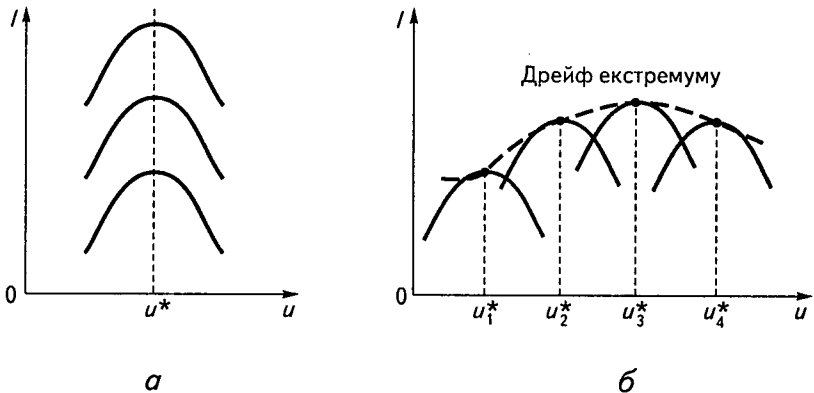


Рис. 12.2

чає економічність використання палива. Основним збуренням для котла є змінювання споживання пари. Залежності ККД котла η від коефіцієнта надлишку повітря α_n мають екстремуми для різних витрат пари D (рис. 12.3). Завданням системи екстремального керування є змінювання подачі повітря в топку таким чином, щоб ККД котла мав максимально можливе за даних умов значення.

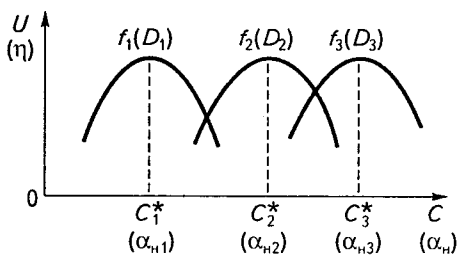


Рис. 12.3

Розглянемо методи (принципи) пошуків екстремуму в одно- і багатопараметричних екстремальних системах.

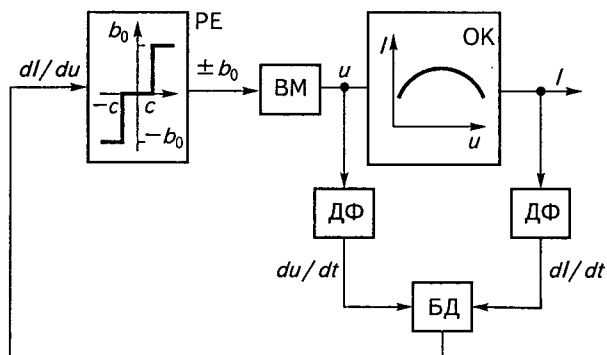
Метод вимірювання похідної. Цей метод ґрунтується на тому, що похідна dI/du змінює свій знак під час проходження через екстремум. Напрямок руху до екстремуму визначається знаком похідної, а ознакою наявності екстремуму є те, що похідна дорівнює нулю.

Для визначення похідної dI/du можна вимірювати похідні dI/dt і du/dt , а потім ділити першу похідну на другу, тобто

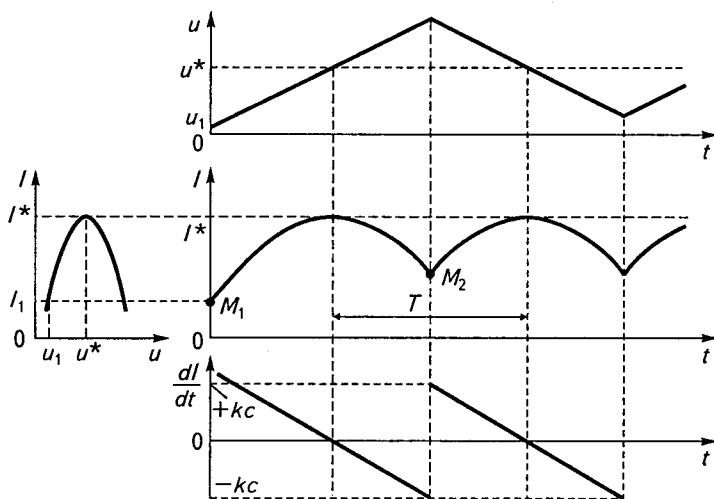
$$dI/du = \frac{dI/dt}{du/dt}. \quad (12.4)$$

Функціональну схему системи, в якій реалізується цей метод пошуків екстремуму, наведено на рис. 12.4, а. Вона складається з двох диференціаторів ДФ, блока ділення БД, що визначає похідну dI/du , і релейного елемента РЕ, що дає знак похідної. Залежно від знака похідної виконавчий механізм ВМ забезпечує рух об'єкта керування ОК у бік екстремуму. Під час проходження через екстремум знак похідної змінюється, релейний елемент перемикається і виконавчий механізм реверсується, що забезпечує повернення системи до точки екстремуму.

Часові діаграми, що відповідають цьому методу пошуків екстремуму, подано на рис. 12.4, б. Вважатимемо, що початковий стан об'єкта характеризується точкою M_1 , що міститься ліворуч від екстремуму. В цьому разі $dI/du > 0$, на вхід виконавчого механізму подається сигнал $+b_0$ і сигнал u змінюватиметься зі сталою швидкістю. По-



а



б

Рис. 12.4

казник якості I спочатку збільшуватиметься, а після точки екстремуму — зменшуватиметься. Похідна dl/du перед точкою екстремуму додатна, в точці екстремуму дорівнює нулю, а після точки екстремуму-

му стає від'ємною. Внаслідок наявності зони нечутливості в релейному елементі похідна dI/dt залишається від'ємною до точки M_2 . При $dI/dt = -kc$, де $1/k = du/dt$, релейний елемент перемикається і змінює знак сигналу на вході виконавчого механізму. Після цього змінна u зменшуватиметься зі сталою швидкістю, а показник якості I знову збільшуватиметься, доки не перейде точку екстремуму, і т. д. У системі встановлюються автоколивання з періодом повторення T . Рух системи поблизу точки екстремуму називається *рисканням*.

Метод запам'ятовування екстремуму. Цей метод полягає у використанні різниці між поточним і екстремальним значеннями показника якості для знаходження моменту реверсу системи. Екстремальне значення показника якості визначається запам'ятовуючим пристроєм, який увімкнено так, що на його вхід надходять тільки додатні (при пошуках максимуму) або тільки від'ємні (при пошуках мінімуму) прирости показника якості.

Функціональну схему системи, в якій реалізується метод запам'ятовування екстремуму (максимуму), зображено на рис. 12. 5. Вихідна величина I об'єкта керування ОК подається на вхід запам'ятовуючого пристрою ЗП, який фіксує лише додатні прирости I . Для формування керуючої дії використовується різниця $I - I_{zn}$, що визначається елементом порівняння ЕП. Статичну характеристику об'єкта й часові діаграми, що відповідають пошукам максимуму, подано на рис. 12.6.

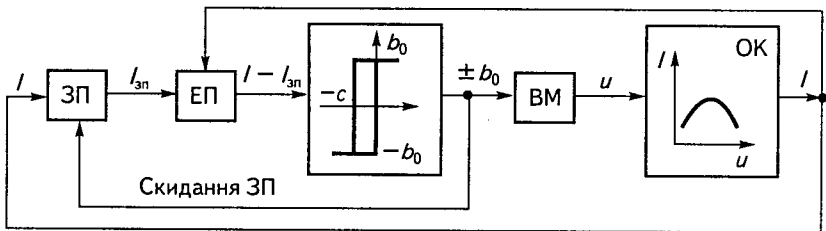


Рис. 12.5

Припустимо, що в момент часу t_1 стан об'єкта характеризується параметрами I_1, u_1 (рис. 12.6, а), які відповідають точці M_1 (рис. 12.6, б), і екстремальний регулятор увімкнено так, що значення керуючої дії збільшується, тобто система віддаляється від точки екстремуму.

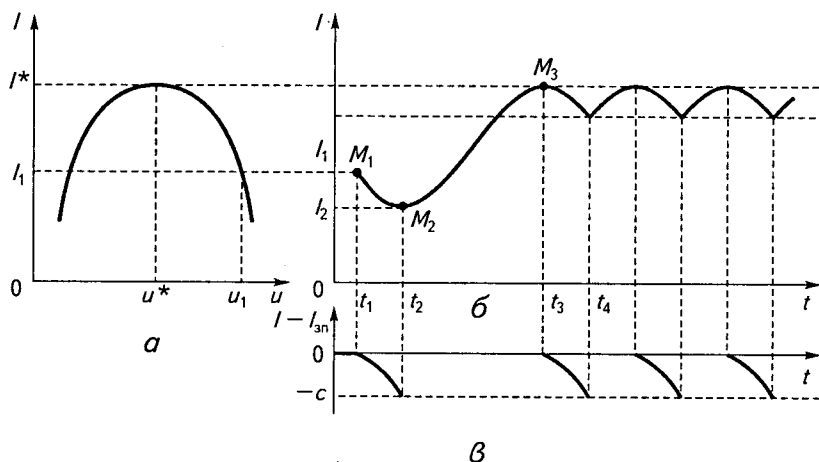


Рис. 12.6

Оскільки значення I зменшується, сигнал на виході запам'ятовуючого пристрою не змінюється, тому абсолютна величина різниці сигналів $I - I_{zn}$ на вході релейного елемента РЕ збільшується (рис. 12.6, в). У момент часу t_2 ця різниця набуває значення $|c|$, релейний елемент перемикається, виконавчий механізм ВМ реверсується, керуюча дія u починає зменшуватися, тобто після точки M_2 (рис. 12.6, б) система починає рух у бік максимуму. При цьому значення I_1 , що було запам'ятоване в ЗП в момент t_1 , скидається і ЗП запам'ятовує значення I_2 .

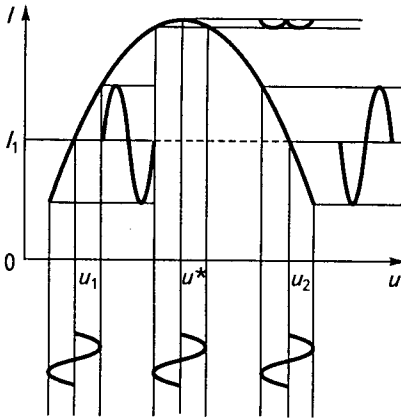
Під час руху системи в бік максимуму ЗП запам'ятовує значення I , тому $I = I_{zn} = 0$. Після досягнення максимуму (точка M_3) керуюча дія u продовжує зменшуватися, внаслідок чого I також зменшується, а I_{zn} не змінюється. Тому абсолютна величина різниці $I - I_{zn}$ збільшується, і в момент t_4 релейний елемент спрацьовує, виконавчий механізм реверсується і знову починається рух системи в бік максимуму. Цей процес триває безперервно, і в системі встановлюються автоколивання поблизу екстремуму регульованої величини. Амплітуда автоколивань визначається зоною нечутливості релейного елемента.

Метод періодичного пошукового сигналу. Для визначення похідної використовуються вимушені гармонічні коливання, що подаються на об'єкт керування від спеціального генератора. На підставі аналізу реакції об'єкта на ці коливання визначаються абсо-

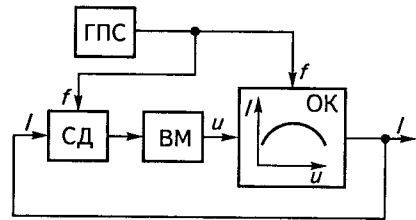
лютна величина і знак похідної dI/du . Нехай, наприклад, стан об'єкта з екстремальною характеристикою визначається параметрами I_1, u_1 (рис. 12.7, а). Змінюватимемо u поблизу u_1 за синусоїдальним законом. Якщо амплітуда коливань мала, то вихідна величина об'єкта також змінюватиметься за синусоїдальним законом, при цьому фази вхідних і вихідних коливань збігатимуться для всіх значень $u_1 < u^*$. Якщо ж стан об'єкта визначається параметрами I_1, u_2 , то на виході об'єкта встановлюються коливання, зсунуті на 180° відносно вхідних. Отже, за зсувом фаз можна визначити напрямок руху системи до екстремуму.

Функціональну схему системи, в якій реалізується описаний метод пошуків екстремуму, зображено на рис. 12.7, б. Вона складається з об'єкта керування ОК, виконавчого механізму ВМ, синхронного детектора (фазового дискримінатора) СД і генератора пошукових сигналів ГПС. Синхронний детектор містить пристрій, що перемножує, та фільтр. Після перемноження сигналів I і f та виділення постійної складової утворюється сигнал, абсолютна величина якого пропорційна похідній dI/du , а знак вказує напрямок необхідної зміни керуючої дії.

Пошуковий сигнал є модулюючим відносно основного сигналу u , тому системи такого типу називаються *екстремальними системами з модулюючою дією*.



а



б

Рис. 12.7

В автоколивальних нелінійних системах можна замість зовнішнього пошукового сигналу використовувати автоколивання.

Розглянуті методи пошуків екстремуму стосуються однопараметричних об'єктів. Якщо показник екстремуму є функцією кількох керуючих параметрів $I(u_1, u_2, \dots, u_m)$, то необхідною умовою досягнення екстремуму є рівність нулю частинних похідних показника якості за усіма керуючими параметрами:

$$\partial I / \partial u_1 = 0; \quad \partial I / \partial u_2 = 0; \quad \dots; \quad \partial I / \partial u_m = 0. \quad (12.5)$$

Методи пошуків екстремуму поділяються на два види: детерміновані та випадкові.

Детерміновані методи пошуків екстремуму. До цих методів належать методи градієнта, найбільш швидкого спуску, Гаусса—Зейделя.

Метод градієнта. Градієнтом скалярної функції $I(u_1, u_2, \dots, u_m)$ називається вектор з координатами $\partial I / \partial u_1, \partial I / \partial u_2, \dots, \partial I / \partial u_m$, тобто

$$\text{grad } I = \mathbf{k}_1 \partial I / \partial u_1 + \mathbf{k}_2 \partial I / \partial u_2 + \dots + \mathbf{k}_m \partial I / \partial u_m, \quad (12.6)$$

де $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m$ — одиничні вектори, напрямки яких збігаються з напрямками осей u_1, u_2, \dots, u_m .

Цей вектор спрямований у бік найбільшого зростання функції I . В точці екстремуму

$$\text{grad } I = 0.$$

Метод градієнта реалізується на основі дискретної або безперервної дії контуру адаптації. В першому випадку визначаються всі компоненти градієнта $\partial I / \partial u_i$, а приріст параметрів Δu_i на кожному кроці вибирається пропорційним цим компонентам.

Аналітично метод градієнта в цьому випадку можна подати у вигляді

$$\begin{cases} u_i^{k+1} = u_i^k + c \left(\frac{\partial I}{\partial u_i} \right)_{u^k}, \\ \Delta u_i = c \frac{\partial I}{\partial u_i}, \\ \Delta \mathbf{u} = c \text{ grad } I, \end{cases} \quad (12.7)$$

де k — номер кроку; c — деякий сталий або змінний параметр, що визначає величину кроку.

При безперервній дії контуру адаптації метод градієнта полягає в тому, що швидкості змінювання параметрів u_i приймаються пропорційними відповідним компонентам миттєвого значення градієнта, тобто

$$du_i/dt = c \partial I / \partial u_i. \quad (12.8)$$

Залежності (12.7) і (12.8) використовуються для формування робочих сигналів екстремальної системи, що забезпечують рух до екстремуму вихідної величини I .

Розглянемо, наприклад, систему екстремального керування, структурну схему якої наведено на рис. 12.8. Показник екстремуму є функцією двох керуючих параметрів u_1 і u_2 .

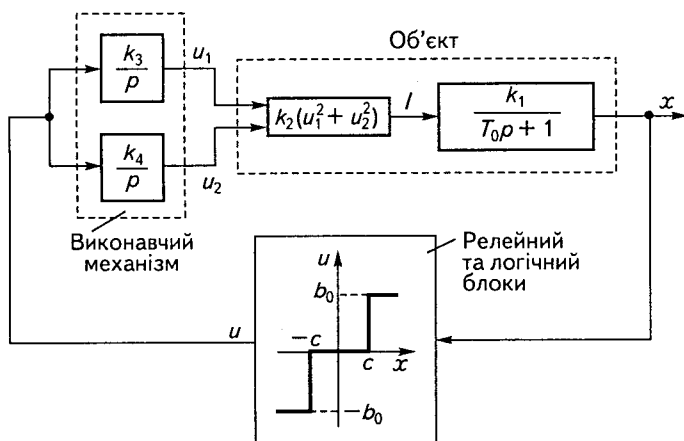


Рис. 12.8

Рівняння об'єкта і виконавчого механізму

$$T_0 dx/dt + x = k_1 I; \quad (12.9)$$

$$I = k_2 (u_1^2 + u_2^2); \quad (12.10)$$

$$du_1/dt = k_3 u; \quad (12.11)$$

$$du_2/dt = k_4 u; \quad (12.12)$$

а проекції градієнта функції I на напрямки осей u_1, u_2

$$\partial I / \partial u_1 = 2k_2 u_1;$$

$$\partial I / \partial u_2 = 2k_2 u_2.$$

Використовуючи вираз (12.8) з урахуванням (12.11) і (12.12), дістанемо

$$du_1 / dt = -2k_2 k_3 u_1; \quad (12.13)$$

$$du_2 / dt = -2k_2 k_4 u_2. \quad (12.14)$$

У цих виразах знак мінус береться тому, що рух відбувається в бік зменшення градієнта.

Для визначення процесу наближення координати x до екстремуму спочатку знайдемо закони змінювання керуючих параметрів u_1 і u_2 . Для цього розв'яжемо рівняння (12.13) і (12.14) за початкових умов $t = 0, u_1 = u_{10}, u_2 = u_{20}$:

$$u_1 = u_{10} e^{-2k_2 k_3 t};$$

$$u_2 = u_{20} e^{-2k_2 k_4 t}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння об'єкта (12.9) і (12.10), дістанемо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} T_0 dx/dt + x = \\ = k_1 k_2 (u_{10}^2 e^{-4k_2 k_3 t} + u_{20}^2 e^{-4k_2 k_4 t}), \end{aligned} \quad (12.15)$$

розв'язком якого за початкових умов $t = 0, x = x_0 = k_1 k_2 (u_{10}^2 + u_{20}^2)$ є шуканий закон змінювання координати x у процесі наближення системи до екстремуму.

Перевагою методу градієнта є відносно швидкий вихід системи в зону екстремуму та мала амплітуда ривкання, недоліком — необхідність безперервного визначення компонентів градієнта.

Метод найшвидшого спуску. За цим методом напрямком градієнта визначається в початковій точці, а потім відбувається рух у цьому напрямку доти, доки похідна вздовж цього напрямку dI/dl не дорівнюватиме нулю. Потім знов визначається напрямок градієнта й відбувається рух за новим напрямком до наступного нульового значення похідної і т. д.

Метод найшвидшого спуску характеризується відносно малим часом досягнення екстремуму при великих кроках на початковому етапі пошуків.

□ **Приклад 12.1.** Задано показник екстремуму

$$I = u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2. \quad (12.16)$$

Визначити мінімум функції $I(u_1, u_2)$ методом найшвидшого спуску з початкової точки $u_{10} = 4; u_{20} = 6$.

Розв'язання. Функції $I(u_1, u_2)$ відповідає сім'я еліпсів (рис. 12.9) для різних $I = \text{const}$. Початковий стан визначається точкою M_1 .

Знайдемо напрямок градієнта в початковій точці. Частинні похідні для цієї точки мають вигляд

$$\begin{cases} \partial I / \partial u_1 = 2u_{10} + u_{20} = 14, \\ \partial I / \partial u_2 = 2u_{20} + u_{10} = 16. \end{cases} \quad (2.17)$$

Оскільки відшукується мінімум функції I , то рухатимемося у напрямку, зворотному до градієнта, і визначимо координати u_{11}, u_{21} наступної точки:

$$\begin{cases} u_{11} = u_{10} - l(\partial I / \partial u_1) = 4 - l \cdot 14, \\ u_{21} = u_{20} - l(\partial I / \partial u_2) = 6 - l \cdot 16. \end{cases} \quad (12.18)$$

Тут l — поки що невідомий крок переходу з точки (u_{10}, u_{20}) в точку (u_{11}, u_{21}) .

Для визначення кроку l підставимо знайдені значення u_{11} і u_{21} у вираз (12.16). Тоді дістанемо

$$\begin{aligned} I &= (4 - 14l)^2 + (6 - 16l)^2 + \\ &+ (4 - 14l)(6 - 16l) = \\ &= 676l^2 - 452l + 76 \end{aligned}$$

і прирівняємо до нуля похідну dI/dl . Тоді дістанемо

$$\partial I / \partial l = 1352l - 452 = 0,$$

звідки $l = 0,33$.

Підставивши знайдене значення l у вираз (12.18), визначимо координати u_{11} і u_{21} : $u_{11} = -0,68, u_{21} = 0,65$ (точка M_{12} на рис. 12.9).

Виконавши аналогічні обчислення для наступного кроку за умови, що вихідним ста-

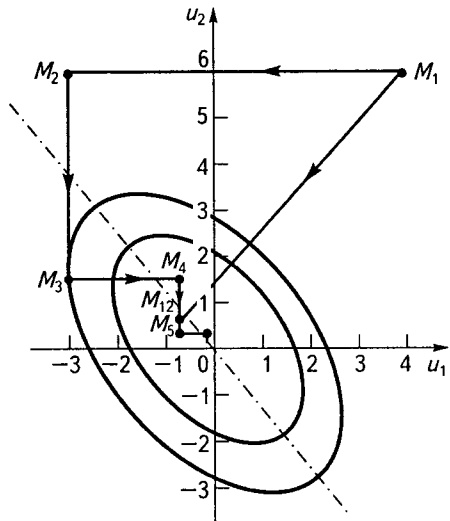


Рис. 12.9

ном системи є стан, у який вона прийшла в кінці першого кроку, дістанемо $u_{12} = 0,0229$; $u_{22} = 0,0362$.

Отже, практично за два кроки система опиняється в точці, досить близькій до точки мінімуму.

Метод Гаусса-Зейделя. За цим методом рух уздовж кожної координати відбувається по чергово. Спочатку здійснюється рух уздовж координати u_1 , а решта координат u_2, u_3, \dots залишаються незмінними. Цей рух триває доти, доки похідна функції I по координаті u_1 не дорівнюватиме нулю, тобто $\partial I / \partial u_1 = 0$. З останньої умови визначається u_1 . Після цього значення u_1 і решта координат, крім u_2 , залишаються незмінними, а координата u_2 змінюється доти, доки не буде виконана умова $\partial I / \partial u_2 = 0$. З цієї умови визначається u_2 . Потім u_2 і решта координат, крім u_3 , залишаються незмінними, а змінюється координата u_3 і т. д. У такий спосіб визначаються частинні екстремуми по всіх координатах. Після цього виконується повторний цикл зміни координат по чергово, починаючи з u_1 . Процес пошуків триває доти, доки всі частинні похідні не дорівнюватимуть нулю (практично доти, доки всі похідні не будуть меншими за поріг чутливості системи).

□ **Приклад 12.2.** Показник екстремуму

$$I = u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2$$

є функцією координат u_1 і u_2 . Описати процес пошуків екстремуму методом Гаусса—Зейделя, якщо початковому стану об'єкта відповідають значення $u_1 = 4, u_2 = 6$.

Розв'язання. Початковий стан об'єкта визначається точкою M_1 , зображеною на рис. 12.9. Починаємо пошуки, змінюючи координату u_1 при $u_2 = 6$. Тоді

$$I(u_1, 6) = u_1^2 + 36 + 6u_1.$$

Визначимо частинну похідну функції $I(u_1, 6)$ по u_1 та прирівняємо її до нуля:

$$\partial I(u_1, 6) / \partial u_1 = 2u_1 + 6 = 0,$$

звідки для першого частинного екстремуму $u_1 = -3$. Йому відповідає точка M_2 з координатами $u_1 = -3, u_2 = 6$ (рис. 12.9).

Вважаючи параметр $u_1 = -3$ незмінним, змінюватимемо координату u_2 . Функція $I(-3, u_2)$ запишеться у вигляді

$$I(-3, u_2) = 9 + u_2^2 - 3u_2,$$

а її частинна похідна по u_2 —

$$\partial I(-3, u_2)/\partial u_2 = 2u_2 - 3 = 0,$$

звідки $u_2 = 1,5$.

Цьому значенню координати u_2 відповідає точка M_3 , зображена на рис. 12.9.

Повторюємо обчислення для координати u_1 , прийнявши $u_2 = 1,5$:

$$I(u_1; 1,5) = u_1^2 + 2,25 + 1,5u_1;$$

$$\partial I(u_1; 1,5)/\partial u_1 = 2u_1 + 1,5;$$

$$u_1 = -0,75,$$

і дістаємо точку M_4 , зображену на рис. 12.9.

Наступний цикл:

$$I(-0,75; u_2) = 0,5625 + u_2^2 - 0,75u_2;$$

$$\partial I(-0,75; u_2)/\partial u_2 = 2u_2 - 0,75 = 0;$$

$$u_2 = 0,375.$$

Цьому циклу відповідає точка M_5 .

Отже, пошукові рухи становлять ламану лінію, що складається із взаємно перпендикулярних відрізків. Точки зламу є точками дотику цих відрізків до кривих $I(u_1, u_2) = \text{const}$.

Метод почергового змінювання параметрів зручний тим, що для його реалізації можна застосовувати відомі типи однопараметричних екстремальних систем, якщо додати пристрій, що перемикає канали параметрів u_1, u_2, \dots, u_m . Проте, як видно з рис. 12.9, система рухається до екстремуму аж ніяк не найкоротшим шляхом.

Методи випадкових пошуків екстремуму. До цих методів належать методи випадкових сліпих пошуків, статистичного градієнта та статистичного найшвидшого спуску.

Метод випадкових сліпих пошуків. Суть методу полягає в пошуках екстремуму за рахунок випадкового змінювання параметрів u_i . У початковому стані системи дається випадковий приріст координат u_i і визначається приріст функції I . Якщо приріст від'ємний (при пошуках максимуму), то система повертається у вихідний стан і робиться наступний пробний крок. Так повторюється доти, доки не дістанемо додатний приріст. Тоді система переводиться в цей новий стан, з якого виконуються нові випадкові кроки.

Метод статистичного градієнта. Цей метод полягає в тому, що з вихідного стану системи робиться кілька пробних випадко-

вих кроків і для кожного з них визначається приріст функції I . За цими приростами, як за складовими вектора, визначається напрям найінтенсивнішого змінювання функції I . В цьому напрямі виконується робочий крок, а потім цикл пошуків повторюється.

Метод статистичного найшвидшого спуску. Початок пошуків такий самий, як і в разі застосування попереднього методу, але після визначення напрямку робиться не один крок, а рух відбувається доти, доки не зміниться знак приросту I .

Під час випадкових пошуків немає потреби визначати залежності I від кожної координати u_i окремо. Це особливо важливо при великій кількості координат, оскільки при збільшенні їх кількості, на відміну від розглянутих детермінованих методів пошуків, процедура пошуків не ускладнюється. Доведено, що при $u_i > 3$ випадкові пошуки перевершують детерміновані за швидкістю досягнення екстремуму.

Іншою перевагою методу випадкових пошуків є можливість відшукати глобальний екстремум (мінімум мінімумом або максимум максимумом при пошуках відповідно мінімуму або максимуму) за наявності кількох екстремумів, а також наявності особливих точок, для яких $I = 0$. Детерміновані методи, що базуються на пошуках точки з нульовим градієнтом, у цих випадках непридатні, тому що система може припинити пошуки на будь-якому локальному екстремумі або в особливій точці.

У деяких випадках найефективніше об'єднувати різні методи пошуків. Зокрема, на початку пошуків далеко від точки екстремуму можна застосувати метод найшвидшого спуску, а поблизу екстремуму перейти до градієнтного методу. За наявності кількох екстремумів методом градієнта визначається і запам'ятовується локальний екстремум. Потім здійснюється крок у випадковому напрямку, методом градієнта відшукується новий локальний екстремум і порівнюється з раніше знайденим. Коли визначені всі локальні екстремуми, знаходять глобальний. Кількість циклів пошуків вибирається заздалегідь, виходячи з даних про кількість екстремумів та їхнє взаємне розміщення.

12.3

Динаміка екстремальних систем

До екстремальних систем ставляться вимоги стійкості (збіжності процесу пошуків у зоні екстремуму), точності (забезпечення заданого відхилення показника якості від екстремального значення в усталеному режимі) і швидкодії (мінімального часу пошуків екстремуму). Крім того, динаміка екстремальних систем характеризується ще й такими специфічними показниками: витрати на ризикання, період ризикання, зона пошуків на вході й виході об'єкта, час виходу в точку екстремуму.

Визначимо ці показники для екстремальної системи, що діє за принципом вимірювання похідної dI/du (див. рис. 12.4, а). Вважатимемо, що всі елементи системи безінерційні. Релейний елемент розглядатимемо як ідеальне трипозиційне реле із зоною нечутливості $2c$.

Якщо прийняти, що статична характеристика об'єкта $I = f(u)$ має вигляд параболи, і умовно перенести початок координат у точку екстремуму (див. рис. 12.4, б), то нелінійна частина об'єкта описуватиметься рівнянням

$$I = -k_1 u^2. \quad (12.19)$$

Припустимо, що вихідний сигнал виконавчого механізму змінюється лінійно при постійному вхідному сигналі, тобто

$$u = \pm k_2 t, \quad (12.20)$$

де знак «+» відповідає інтервалові часу, коли $du/dt > 0$, а знак «-» — інтервалові часу, коли $du/dt < 0$. У цьому разі

$$I = -k_1 k_2^2 t^2. \quad (12.21)$$

В режимі усталених коливань максимальне відхилення (амплітуда ризикання) показника якості від екстремального значення одержуємо з виразу (12.21) при $t = T/2$:

$$\Delta I = -k_1 k_2^2 T^2 / 4. \quad (12.22)$$

Визначимо тепер похідну dI/du .

Запишемо похідну показника якості за часом

$$dI/du = -2k_1 k_2^2 t$$

і похідну вихідного сигналу виконавчого механізму

$$du/dt = \pm k_2.$$

Тоді

$$dI/du = \frac{dI/dt}{du/dt} = \pm 2k_1 k_2 t.$$

Перемикання релейного елемента відбувається при $dI/du = \pm c$ і $t = T/2$, якщо вести відлік часу від початку координат, умовно перенесеного в точку екстремуму. Тому

$$2k_1 k_2 T/2 = c,$$

звідки

$$T = c/k_1 k_2,$$

тобто період рискання залежить від зони нечутливості релейного елемента, а також визначається параметрами виконавчого механізму та екстремальної характеристики об'єкта.

Середнє за період рискання значення відхилення показника якості називається *втратою на рискання* D :

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (-k_1 k_2^2 t^2) dt = -\frac{k_1 k_2^2 T^2}{12}. \quad (12.23)$$

З порівняння виразів (12.22) і (12.23) випливає, що амплітуда рискання в три рази перевищує втрату на рискання, тобто

$$\Delta I = 3D.$$

Системи з періодичним пошуковим сигналом (див. рис. 12.7) в усталеному режимі працюють поблизу екстремуму. Якщо вважати всі ланки схеми на рис. 12.7, б безінерційними, то сигнал на вході ланки з екстремальною характеристикою обчислюється за формулою

$$u = U + a_n \sin \omega_n t, \quad (12.24)$$

де U — основний (керуючий) сигнал; a_n , ω_n — амплітуда і частота пошукового сигналу.

Підставивши значення u у вираз (12.19), дістанемо

$$I = -k_1 (U + a_n \sin \omega_n t)^2 = -k_1 U^2 - 2k_1 U a_n \sin \omega_n t - k_1 a_n^2 \sin^2 \omega_n t. \quad (12.25)$$

Якщо система перебуває поблизу екстремуму, то $U \approx 0$ і

$$I = -k_1 a_n^2 \sin^2 \omega_n t = -k_1 a_n^2 (1 - \cos 2\omega_n t)/2, \quad (12.26)$$

тобто амплітуда рискання на виході системи, що залежить від додаткового пошукового сигналу, буде такою:

$$\Delta I = -k_1 a_n^2.$$

З виразу (12.26) видно, що коливання показника якості відбуваються з подвійною частотою, при цьому втрату на рискання знаходимо за формулою

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{k_1 a_n^2}{2} \right) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k_1 a_n^2}{2} \cos 2\omega_n t dt. \quad (12.27)$$

Другий інтеграл у цьому виразі є визначеним інтегралом косинуса протягом цілого числа періодів і, отже, дорівнює нулю, тому

$$D = -k_1 a_n^2 / 2. \quad (12.28)$$

Отже, в системах із періодичним пошуковим сигналом втрата на рискання в два рази менша за амплітуду рискання:

$$D = \Delta I / 2.$$

Для зменшення втрат на рискання слід знижувати амплітуду пошукового сигналу. Можливість зменшення амплітуди визначається рівнем перешкод, тому що пошуковий сигнал має чітко виділятися на їхньому фоні. Якщо проаналізувати спектр перешкод на виході системи, можна визначити ділянку спектра з найменшими амплітудами перешкод. Це дає змогу вибрати частоту і амплітуду пошукового сигналу так, аби забезпечити мінімальну втрату на рискання при досить надійній роботі системи.

Розглянуті показники динаміки відповідають ідеальному випадку, коли всі елементи системи вважаються безінерційними, а статична характеристика об'єкта — стаціонарною, тобто такою, що не змінюється протягом часу.

Розглянемо вплив інерційності об'єкта на процес пошуків екстремуму на прикладі системи, функціональну схему якої наведено на рис. 12.4, а. Припустимо, що об'єкт можна подати у вигляді двох ла-

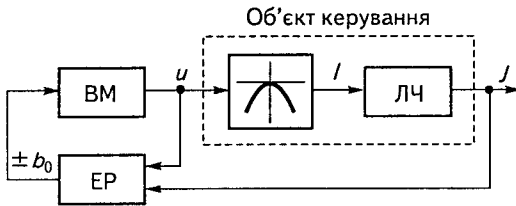


Рис. 12.10

нок — безінерційної нелінійної з екстремальною характеристикою та інерційної лінійної. Функціональну схему системи в цьому разі подано на рис. 12.10, де ЛЧ — лінійна частина об'єкта, ЕР — екстремальний регулятор, по-

добний до регулятора в схемі на рис. 12.4, а.

Рівняння окремих ланок системи мають такий вигляд: для лінійної частини об'єкта

$$T_1 dJ/dt + J = k_1 I, \quad (12.29)$$

де T_1 — стала часу інерційної частини об'єкта; для нелінійної частини об'єкта

$$I = -k_2 u^2; \quad (12.30)$$

для виконавчого механізму

$$du/dt = k_3 b; \quad (12.31)$$

для екстремального регулятора

$$b = F(J, u) = \begin{cases} +b_0 & \text{при } dJ/du > c, \\ -b_0 & \text{при } dJ/du < -c, \end{cases} \quad (12.32)$$

де c — зона нечутливості екстремального регулятора.

Підставивши значення I за формулою (12.30) в рівняння (12.29), дістанемо

$$T_1 dJ/dt + J = -k_1 k_2 u^2$$

або

$$T_1 \frac{dJ}{du} \frac{du}{dt} + J = -k_1 k_2 u^2. \quad (12.33)$$

Замінивши в цьому рівнянні похідну du/dt її значенням за формулою (12.31), одержимо

$$k_3 T_1 b \frac{dJ}{du} + J = -k_1 k_2 u^2.$$

Враховуючи, що $b = \pm b_0$, подамо це рівняння у вигляді

$$dJ/du \pm \alpha J = \pm \beta u^2, \quad (12.34)$$

де

$$\alpha = \frac{1}{k_3 T_1 b_0}; \quad \beta = \frac{k_1 k_2}{k_3 T_1 b_0}.$$

Розв'язок рівняння (12.34) $J = f(u)$ становить фазову траєкторію об'єкта у площині координат u, J . Для безінерційного об'єкта $J = k_1 I$, тому фазова траєкторія при $k_1 = 1$ збігається зі статичною характеристикою об'єкта (12.30). Для інерційного об'єкта

$$J = C e^{-\alpha u} - \frac{\beta}{\alpha} u^2 + \frac{2\beta}{\alpha^2} u - \frac{2\beta}{\alpha^3}, \quad (12.35)$$

де стала інтегрування C визначається з початкових умов: при $t = 0$ $J = J_0$ і $u = u_0$,

$$C = \left(J_0 \frac{\beta}{\alpha} u_0^2 - \frac{2\beta}{\alpha^2} u_0 + \frac{2\beta}{\alpha^3} \right) e^{\alpha u_0}. \quad (12.36)$$

Фазову траєкторію, побудовану за рівнянням (12.35), зображено на рис. 12.11. На початку руху $dJ/du > 0$, змінна u зменшується, похідна dJ/du стає від'ємною і при $dJ/du < -c$ виконавчий механізм перемикається (реверсується). Рівняння фазової траєкторії (12.35) залишається незмінним, але через те, що після перемикання $b = -b_0$, коефіцієнти α і β змінюють знак. Крім того, при визначенні сталої інтегрування C за формулою (12.36) приймаються нові початкові умови u_{01}, J_{01} . Фазова траєкторія прямує до граничного циклу, зображеного на рис. 12.11 безперервною лінією. Цей цикл називається *граничним циклом рискання*. Отже, система набуває усталеного режиму, коли рискання поблизу екстремуму відбувається за петлеподібною характеристикою, але самого екстремуму система ніколи не досягає.

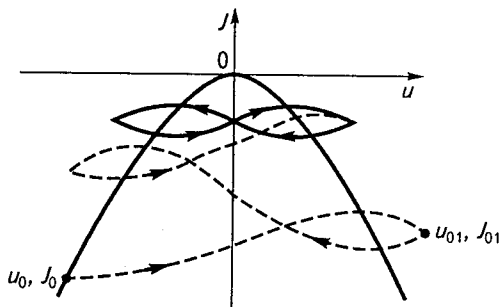


Рис. 12.11

12.4

Ідентифікація об'єктів керування

Розглянемо одновимірний стаціонарний об'єкт з невідомими параметрами, що описується рівнянням

$$\begin{aligned} a_0 \frac{dx^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + x = \\ = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u, \end{aligned} \quad (12.37)$$

де $x(t)$ — вихідна координата системи; $u(t)$ — відома (вимірювана) керуюча дія; a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) і b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) — невідомі параметри, причому $n > m$.

Метою ідентифікації є визначення невідомих параметрів a_i й b_j .

Відомі різні методи ідентифікації, зокрема частотний і метод моделі, що настроюється.

За частотного методу дія $u(t)$ становить випробувальну гармонічну дію

$$u(t) = \sum_{k=1}^n B_k \sin \omega_k t, \quad (12.38)$$

де B_k і ω_k — відомі амплітуда і частота гармонічних складових випробувальної дії, необхідні для визначення значень частотних характеристик об'єкта за частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Якщо на вхід лінійного об'єкта подається гармонічна дія, виражена формулою (12.38), то вихідний сигнал $x(t)$ також є сумою гармонік:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n B_k A(\omega_k) \sin[\omega_k t + \varphi(\omega_k)], \quad (12.39)$$

де $A(\omega_k)$, $\varphi(\omega_k)$ — значення амплітудної й фазової частотних характеристик за частоти ω_k .

Згідно з рівнянням (12.37) передаточна функція об'єкта

$$W_0(p) = \frac{x(t)}{u(t)} = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + 1}.$$

Виконавши підстановку $p = j\omega$, перейдемо до комплексної частотної передаточної функції

$$W_0(j\omega) = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (12.40)$$

з якої дістанемо

$$\begin{aligned} U_R(\omega) + jV_R(\omega) &= U(\omega)U_Q(\omega) + \\ &+ jU(\omega)V_Q(\omega) + jV(\omega)U_Q(\omega) - V(\omega)V_Q(\omega). \end{aligned}$$

Порівнявши дійсні та уявні частини цього виразу, отримаємо два рівняння

$$\begin{cases} U_R(\omega) = U(\omega)U_Q(\omega) - V(\omega)V_Q(\omega), \\ V_R(\omega) = U(\omega)V_Q(\omega) + V(\omega)U_Q(\omega). \end{cases} \quad (12.41)$$

Якщо для n частот від ω_1 до ω_n експериментально визначити значення $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$, то з рівнянь (12.41) дістанемо $2n$ лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} U_R(\omega_k) = U(\omega_k)U_Q(\omega_k) - V(\omega_k)V_Q(\omega_k), \\ V_R(\omega_k) = U(\omega_k)V_Q(\omega_k) + V(\omega_k)U_Q(\omega_k) \end{cases} \quad (12.42)$$

для відшукування невідомих параметрів a_i ($i = 0, 1, \dots, k$) і b_j ($j = 0, 1, \dots, m$).

Експериментально $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$ визначаємо так. На вхід об'єкта подаємо пробну дію $u(t) = 1 \sin \omega_1 t$. Після закінчення перехідного процесу на виході об'єкта дістаємо усталений сигнал $x(t) = A(\omega_1) \times \sin [\omega_1 t + \varphi(\omega_1)]$. Амплітуда і фаза цього сигналу пов'язані з дійсною та уявною частотними характеристиками об'єкта співвідношеннями

$$U(\omega_1) = A(\omega_1) \cos \varphi(\omega_1);$$

$$V(\omega_1) = A(\omega_1) \sin \varphi(\omega_1).$$

Сигнал з виходу об'єкта подаємо на фільтр Фур'є, який здійснює множення $x(t)$ на $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ та усереднення за ціле число періодів. Отже, на виході фільтра дістаємо

$$U(\omega_1) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_1 t dt;$$

$$V(\omega_1) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_1 t dt.$$

Аналогічно визначаємо $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$ для всіх n частот.

- **Приклад 12.3.** Об'єкт другого порядку описується передаточною функцією

$$W_0(p) = \frac{b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + 1},$$

параметри b_1 , a_0 , a_1 якої невідомі. Для частот пробного сигналу $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ і $\omega_2 = 10 \text{ с}^{-1}$ експериментально визначено значення дійсної та уявної частотних характеристик

$$U(1) = 21,2; \quad U(10) = -2,12; \quad V(1) = -4,7; \quad V(10) = -0,47.$$

За цими даними знайти параметри передаточної функції об'єкта.

Розв'язання. Для заданої передаточної функції об'єкта $U_R(\omega) = b_1$; $V_R(\omega) = 0$; $U_Q(\omega) = -a_0 \omega^2 + 1$; $V_Q(\omega) = a_1 \omega$, тому система рівнянь (12.42) для частот ω_1 і ω_2 матиме вигляд

$$b_1 = U(\omega_1)(1 - a_0 \omega_1^2) - V(\omega_1) a_1 \omega_1; \quad 0 = U(\omega_1) a_1 \omega_1 + V(\omega_1)(1 - a_0 \omega_1^2);$$

$$b_1 = U(\omega_2)(1 - a_0 \omega_2^2) - V(\omega_2) a_1 \omega_2; \quad 0 = U(\omega_2) a_1 \omega_2 + V(\omega_2)(1 - a_0 \omega_2^2)$$

або після підстановки числових значень

$$b_1 = 21,2(1 - a_0) + 4,7a_1; \tag{12.43}$$

$$0 = 21,2 a_1 - 4,7(1 - a_0); \tag{12.44}$$

$$b_1 = -2,12(1 - 100a_0) + 4,7a_1; \tag{12.45}$$

$$0 = -2,12a_1 - 0,47(1 - 100a_0). \tag{12.46}$$

Рівняння (12.44) і (12.46) не залежать від b_1 . Розв'язавши їх, знайдемо $a_0 = 0,1$; $a_1 = 0,2$. Підставивши ці значення в будь-яке рівняння (12.43) або (12.45), визначимо $b_1 = 20$.

Розглянемо тепер суть ідентифікації за допомогою моделі, що на-
строюється. Нехай передаточна функція об'єкта

$$W_0(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1}.$$

Динаміка об'єкта при вхідній дії $u(t)$ описується рівнянням

$$a_0 p^3 x + a_1 p^2 x + a_2 p x + x = b_0 p^2 u + b_1 p u + b_2 u. \tag{12.47}$$

Подамо вихідний сигнал об'єкта $x(t)$ на вхід ланки з передаточною функцією $W_1(p) = \beta_0 p^3 + \beta_1 p^2 + \beta_2 p + 1$, а вхідний сигнал $u(t)$ — на вхід ланки з передаточною функцією $W_2(p) = \beta_3 p^2 + \beta_4 p + \beta_5$.

Пристрої з передаточними функціями $W_1(p)$ і $W_2(p)$ утворюють модель об'єкта, параметри якої β_i можна змінювати (настроювати). Структурну схему з моделлю, що настроюється, зображено на рис. 12.12.

Якби параметри передаточної функції $W_1(p)$ дорівнювали параметрам знаменника передаточної функції $W_0(p)$, тобто $\beta_0 = a_0$, $\beta_1 = a_1$, $\beta_2 = a_2$, а параметри передаточної функції $W_2(p)$ — параметрам чисельника $W_0(p)$, тобто $\beta_3 = b_0$, $\beta_4 = b_1$, $\beta_5 = b_2$, то згідно з рівнянням (12.47) різниця вихідних сигналів $\varepsilon(t)$ ланок $W_1(p)$ і $W_2(p)$ дорівнювала б нулю. Якщо коефіцієнти не однакові, то різниця цих сигналів утворює сигнал похибки

$$\varepsilon(t) = \beta_0 dx^3/dt^3 + \beta_1 d^2 x/dt^2 + \beta_2 dx/dt + x - \beta_3 d^2 u/dt^2 - \beta_4 du/dt - \beta_5 u,$$

який залежить від параметрів моделі β_i і невідомих параметрів об'єкта.

Критерій якості ідентифікації візьмемо у вигляді функції

$$I = \varepsilon^2(t), \quad (12.48)$$

яка набуває екстремум-мінімум (дорівнює нулю) за рівності параметрів моделі й об'єкта. Використовуючи для пошуків екстремуму функції (12.48) метод градієнта, згідно з виразом (12.8) дістанемо рівняння

$$\frac{d\beta_0}{dt} = c \frac{\partial I}{\partial \beta_0} = 2c\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_0} = 2c\varepsilon \frac{d^3 x}{dt^3};$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = c \frac{\partial I}{\partial \beta_1} = 2c\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_1} = 2c\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2};$$

.....

$$\frac{d\beta_4}{dt} = c \frac{\partial I}{\partial \beta_4} = 2c\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_4} = 2c\varepsilon \frac{du}{dt};$$

$$\frac{d\beta_5}{dt} = c \frac{\partial I}{\partial \beta_5} = 2c\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_5} = 2c\varepsilon u,$$

де c — стале від'ємне число, якщо відшукується мінімум.

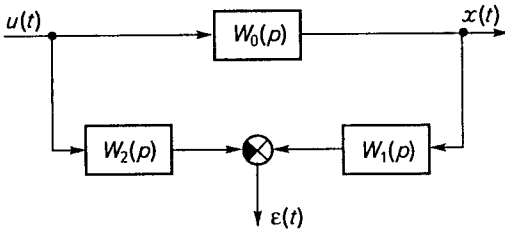


Рис. 12.12

Розв'язком цих рівнянь є шукані змінювання параметрів β_i , що настроюються.

Цей метод досить простий за своєю суттю, але його технічна реалізація дуже складна, оскільки потрібно обчислювати похідні вхідних і вихідних сигналів об'єкта (передаточні функції $W_1(p)$ та $W_2(p)$ фізично

не реалізовані). Тому доцільнішим є інший підхід до ідентифікації за допомогою моделі, що настроюється. За такого підходу отримання вихідного сигналу моделі не пов'язане з ланками, що фізично не реалізуються.

Запишемо передаточну функцію об'єкта у вигляді

$$W_0(p) = \frac{x(t)}{u(t)} = \frac{b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}. \quad (12.49)$$

Поділимо чисельник і знаменник передаточної функції на поліном $(n-1)$ -го степеня вигляду $(p + \lambda_2)(p + \lambda_3) \dots (p + \lambda_n)$, всі корені якого відомі від'ємні числа $-\lambda_2, -\lambda_3, \dots, -\lambda_n$. Розкладемо чисельник і знаменник на суми простих дробів і подамо передаточну функцію об'єкта у вигляді

$$W_0(p) = \frac{x(t)}{u(t)} = \frac{\alpha_n + \frac{\alpha_{n+1}}{p + \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{p + \lambda_n}}{p - \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{p + \lambda_2} - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_n}}, \quad (12.50)$$

звідки безпосередньо випливає

$$\begin{aligned} px - \alpha_0 x - \frac{\alpha_1}{p + \lambda_2} x - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_n} x &= \\ = \alpha_n u + \frac{\alpha_{n+1}}{p + \lambda_2} u + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{p + \lambda_n} u. \end{aligned} \quad (12.51)$$

Додамо і віднімемо з лівої частини (12.51) вираз $\lambda_1 x(p)$, де λ_1 — додатне число. Дістанемо

$$(p + \lambda_1)x = \left(\alpha_0 + \lambda_1 + \frac{\alpha_1}{p + \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_n} \right)x + \left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n+1}}{p + \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{p + \lambda_n} \right)u,$$

звідки

$$x = \frac{1}{p + \lambda_1} \left[(\alpha_0 + \lambda_1)x + \frac{\alpha_1}{p + \lambda_2}x + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_n}x + \alpha_n u + \frac{\alpha_{n+1}}{p + \lambda_2}u + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{p + \lambda_n}u \right]. \quad (12.52)$$

Подібно до (12.52) приймемо рівняння моделі у вигляді

$$x_m = \frac{1}{p + \lambda_1} \left[(\beta_0 + \lambda_1)x + \frac{\beta_1}{p + \lambda_2}x + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{p + \lambda_n}x + \beta_n u + \frac{\beta_{n+1}}{p + \lambda_2}u + \dots + \frac{\beta_{2n-1}}{p + \lambda_n}u \right]. \quad (12.53)$$

Позначивши

$$z_i = \frac{1}{p + \lambda_{i+1}}x \quad (12.54)$$

і

$$v_i = \frac{1}{p + \lambda_{i+1}}u, \quad (12.55)$$

вираз (12.53) подамо так:

$$x_m = \frac{1}{p + \lambda_1} [(\beta_0 + \lambda_1)x + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_{n-1} z_{n-1} + \beta_n u + \beta_{n+1} v_1 + \dots + \beta_{2n-1} v_{n-1}]. \quad (12.56)$$

Віднявши (12.52) від (12.56), визначимо похибку ідентифікації

$$\varepsilon = x_m - x = \frac{1}{p + \lambda_1} \left[(\beta_0 - \alpha_0)x + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \alpha_i)z_i + (\beta_n - \alpha_n)u + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_{n+1} - \alpha_{n+i})v_i \right]. \quad (12.57)$$

Прийнявши, як і у попередньому випадку, критерій якості ідентифікації $I = \varepsilon^2(t)$ і використавши метод градієнта, запишемо рівняння, що визначають алгоритм настроювання параметрів моделі,

$$\frac{d\beta_i}{dt} = 2c\varepsilon z_i, \quad (12.58)$$

де $i = 0, 1, \dots, n-1$; $z_0 = x$;

$$\frac{d\beta_{n+i}}{dt} = 2c\varepsilon v_i, \quad (12.59)$$

де $i = 0, 1, \dots, n-1$; $v_0 = u$.

Структурну схему, що відповідає розглянутому методу ідентифікації, зображено на рис. 12.13. Її побудовано за виразами (12.53), (12.54), (12.55), (12.58), (12.59). Для спрощення подано схему настроювання тільки одного параметра β_1 .

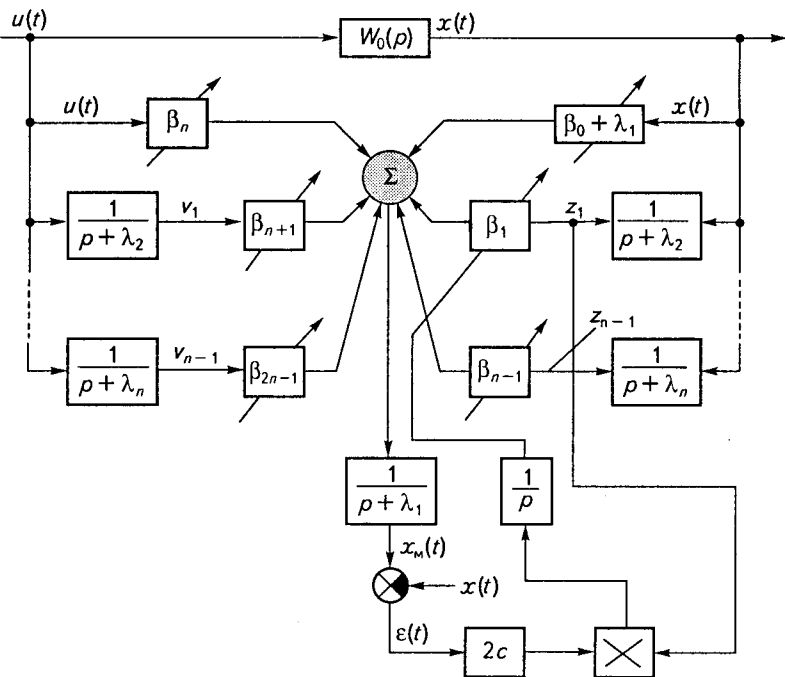


Рис. 12.13

12.5

Принципи побудови безпошукових адаптивних систем

Адаптивні системи, що забезпечують стабілізацію або слідування, у більшості випадків можна будувати як безпошукові. Безпошукові системи можуть мати розімкнутий або замкнутий контури адаптації.

В системах із розімкнутим контуром адаптація здійснюється за наперед розробленими програмами на підставі апріорної інформації. Вони також називаються *системами з жорсткою адаптацією* або *програмними адаптивними системами*.

У безпошукових адаптивних системах із замкнутим контуром адаптації самонастроювання здійснюється за принципом підтримання на оптимальному рівні передаточних функцій, часових або частотних характеристик.

Загальну функціональну схему безпошукової адаптивної системи наведено на рис. 12.14. На вхід системи подається задаюча дія g , до об'єкта керування прикладено зовнішню дію (збурення) f і недоступне для вимірювання параметричне збурення q (відхилення параметрів об'єкта від їхніх номінальних значень). Об'єкт керування і регулятор утворюють основний контур системи. На вхід блока датчиків надходить уся доступна для вимірювання інформація. Еталонна модель задає бажаний вектор x_m змінних стану об'єкта. В аналізаторах I_1 і I_2 обчислюється поточне та задане значення цільової функції I і I_3 . Блок порівняння визначає різницю цих функцій $\Delta I = I_3 - I$. В блоці настроювання за величиною ΔI та іншою необхідною інформацією виробляються закони змінювання вектора \mathbf{r} , який своєю чергою має змінювати параметри регулятора, щоб звести ΔI до нуля або достатньо малої величини.

У більшості випадків мірою якості I є деякі величини або функції, що характеризують динамічні властивості системи. За виглядом динамічних характеристик, що використовуються при формуванні I , безпошукові адаптивні системи поділяються на три класи:

- з інформацією про частотні характеристики;
- з інформацією про часові характеристики;
- з моделлю.

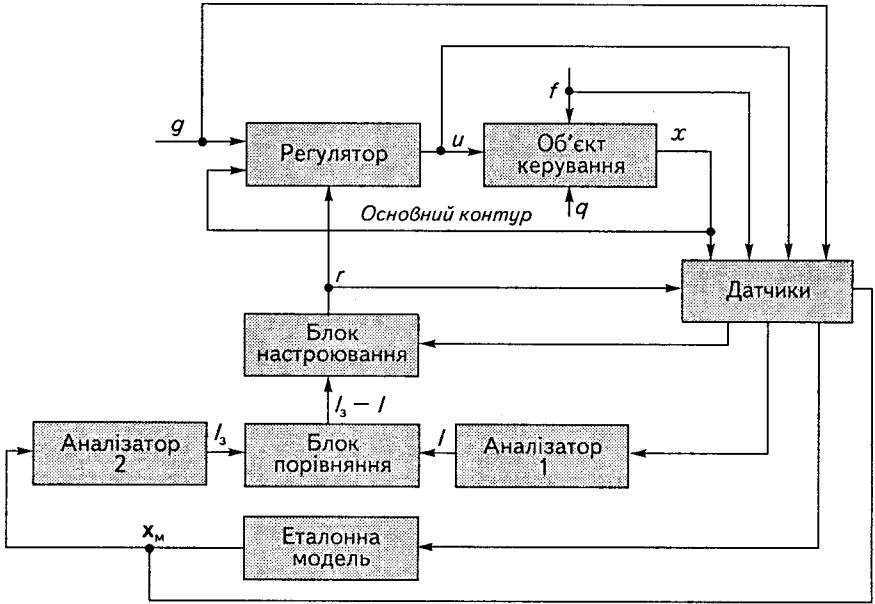


Рис. 12.14

В системах з інформацією про частотні характеристики вимірюється амплітудно-частотна $A(\omega)$ або фазочастотна $\varphi(\omega)$ характеристики системи або одного об'єкта в достатній кількості точок ω_i . Можуть використовуватися також дійсна $U(\omega)$ або уявна $V(\omega)$ частотні характеристики. Застосовуючи інформацію про $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ або $U(\omega)$, $V(\omega)$, налаштовують параметри регулятора так, щоб частотні характеристики i , отже, перехідні процеси, відповідали бажаним. Звичайно, необхідно, щоб частотні характеристики основного контуру системи залишалися незмінними при змінюванні параметрів об'єкта.

Необхідність контролювати одночасно дві частотні характеристики $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ або $U(\omega)$ і $V(\omega)$ виникає лише в немінімально-фазових системах. У мінімально-фазових системах достатньо стабілізувати одну з них.

Одну з можливих функціональних схем системи, де для самонастроювання використовується амплітудно-частотна характеристика $A(\omega)$, наведено на рис. 12.15. Розглянемо стабілізацію однієї точки амплітудно-частотної характеристики. Генератор пробних сигналів виробляє частоту $\omega_{пр}$, що подається на вхід фільтра I . Амплітудно-ча-

12.5. Принципи побудови
безпошукових адаптивних систем

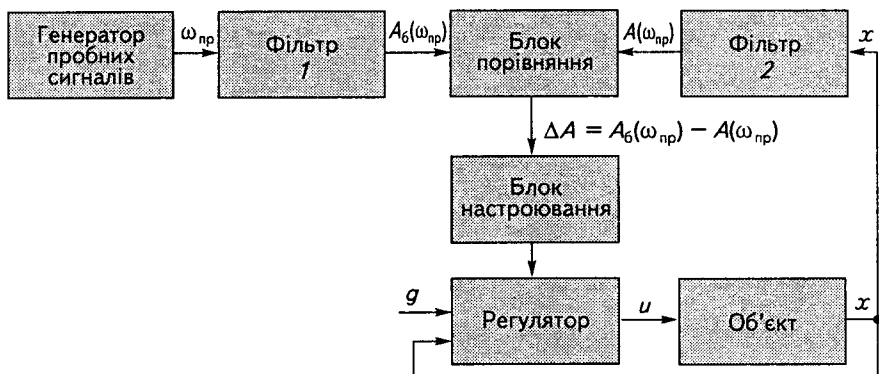


Рис. 12.15

стотна характеристика $A_g(\omega)$ цього фільтра відповідає бажаній характеристиці замкнутої системи, що настроюється. Вузкосмуговий фільтр 2 настроєний на частоту $\omega_{пр}$ і виділяє амплітуду коливальної складової вихідної величини x на частоті $\omega_{пр}$. Блок порівняння визначає відхилення амплітуди від бажаного значення $\Delta A(\omega_{пр}) = A_g(\omega_{пр}) - A(\omega_{пр})$. Блок настроювання змінює параметри регулятора так, щоб усунути відхилення амплітуди або звести його до допустимого мінімуму.

Для нестационарних об'єктів класична частотна характеристика, точно кажучи, втрачає сенс. Тому розглянутий принцип побудови систем є справедливим тільки за досить повільного змінювання параметрів об'єкта, тобто для квазістационарних режимів.

Самонастроювальну систему з інформацією про часові характеристики можна побудувати так. В аналізаторі 2 (див. рис. 12.14) обчислюється оптимальна імпульсна перехідна функція системи, а в аналізаторі 1 — дійсна. Блок порівняння визначає різницю цих функцій, яка використовується для настроювання параметрів регулятора. Для побудови таких систем застосовуються цифрові обчислювальні пристрої.

Практичне застосування набули простіші аналогові системи, незважаючи на їхні порівняно обмежені можливості адаптації. Розглянемо одну з таких систем.

Функціональну схему самонастроювальної системи з інформацією стосовно процесів на межі стійкості подано на рис. 12.16. Подібну систему можна застосовувати для керування нестационарними об'єктами, якщо необхідно підтримувати коефіцієнт підсилення на

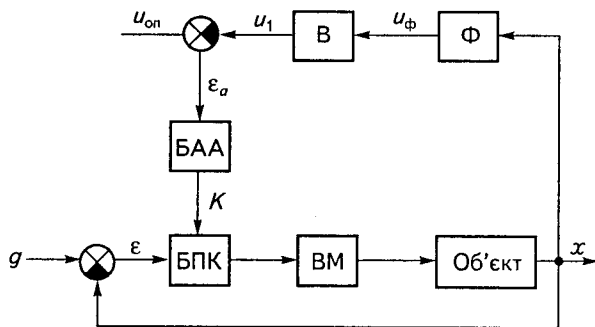


Рис. 12.16

максимальному рівні, допустимому за умов стійкості лінеаризованої системи. Розглянемо роботу цієї схеми. Нехай у початковий момент часу система перебуває в зоні стійкості, й автоколивання відсутні. Тоді напруги u_{ϕ} на виході фільтра, що настроєний на частоту автоколивань, і u_1 на виході випрямляча V дорівнюють нулю. Опорна напруга $u_{он}$ надходить на вхід блока алгоритму адаптації БАА, що керує блоком перестроювального коефіцієнта БПК. Блок БАА має інтегральну ланку, тому коефіцієнт K збільшуватиметься доти, доки система не вийде на межу стійкості й у неї виникнуть автоколивання. Збільшення коефіцієнта K припиниться, коли сигнал на вході блока БАА $\varepsilon_a = u_{он} - u_1$ дорівнюватиме нулю. Допустима амплітуда автоколивань задається величиною опорної напруги $u_{он}$.

Алгоритм адаптації, що реалізуються в блоці БАА, звичайно має вигляд

$$K = a_1 \int \varepsilon_a dt + a_2 \varepsilon_a + K_0,$$

де $K_0 = \text{const}$.

12.6

Адаптивні спостерігачі

Розглянемо об'єкт, передаточна функція якого має вигляд (12.49) або (12.50). Позначимо вимірювану вихідну величину об'єкта через y і рівняння (12.51) запишемо так:

$$\begin{aligned}
 py(p) = & \alpha_0 y(p) + \frac{\alpha_1}{p + \lambda_2} y(p) + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_n} y(p) + \\
 & + \alpha_n u(p) + \frac{\alpha_{n+1}}{p + \lambda_2} u(p) + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{p + \lambda_n} u(p).
 \end{aligned}
 \tag{12.60}$$

Прийmemo, що

$$y(p) = x_1(p); \quad (12.61)$$

$$x_2(p) = \frac{\alpha_1}{p + \lambda_2} y(p) + \frac{\alpha_{n+1}}{p + \lambda_2} u(p); \quad (12.62)$$

$$x_3(p) = \frac{\alpha_2}{p + \lambda_3} y(p) + \frac{\alpha_{n+2}}{p + \lambda_3} u(p); \quad (12.63)$$

.....

$$x_n(p) = \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_n} y(p) + \frac{\alpha_{2n-1}}{p + \lambda_n} u(p), \quad (12.64)$$

тоді рівняння (12.60) у формі Коші матимуть вигляд

$$\begin{cases} dx_1/dt = \alpha_0 x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \alpha_n u, \\ dx_2/dt = \alpha_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \alpha_{n+1} u, \\ dx_3/dt = \alpha_2 x_1 - \lambda_3 x_3 + \alpha_{n+2} u, \\ \dots \\ dx_n/dt = \alpha_{n-1} x_1 - \lambda_n x_n + \alpha_{2n-1} u, \end{cases} \quad (12.65)$$

або в матричній формі —

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & : & 1 & & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & : & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & : & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & : & 0 & 0 & \dots & -\lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+2} \\ \dots \\ \alpha_{2n-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (12.66)$$

Це рівняння можна записати у компактнішій формі, якщо застосувати блочну матрицю:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} : & \mathbf{h}^\top \\ \alpha^{(1)} & : \dots \\ : & -\Lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} + \alpha^{(2)} \mathbf{u}, \quad (12.67)$$

де \mathbf{x} — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта, причому $x_1 = y$ — вимірювана змінна, решта змінних невимірювані; $\alpha^{(1)} = [\alpha_0,$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]^T$; $\alpha^{(2)} = [\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n-1}]^T$; $\mathbf{h}^T = [1, 1, \dots, 1]$; $\Lambda = \text{diag}[\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n]$ — діагональна матриця, тобто матриця, всі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю; $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ — задані додатні числа.

Якщо врахувати, що змінна $y = x_1$ вимірювана, то рівняння (12.67) можна подати у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\bar{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & : & \mathbf{h}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\alpha}^{(1)} & : & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \bar{\alpha}^{(2)} \end{bmatrix} u, \quad (12.68)$$

де \bar{x} — $(n-1)$ -вимірний вектор, компонентами якого є невимірювані змінні x_2, x_3, \dots, x_n ;

$$\bar{x} = [x_2, x_3, \dots, x_n]^T;$$

$$\bar{\alpha}^{(1)} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]^T;$$

$$\bar{\alpha}^{(2)} = [\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n-1}]^T.$$

Рівняння (12.68) можна подати у вигляді двох рівнянь:

$$\dot{y} = \alpha_0 y + \mathbf{h}^T \bar{x} + \alpha_n u; \quad (12.69)$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\alpha}^{(1)} y - \Lambda \bar{x} + \bar{\alpha}^{(2)} u. \quad (12.70)$$

Із рівняння (12.70) випливають такі зображення Лапласа:

$$sX_2(s) = \alpha_1 Y(s) - \lambda_2 X_2(s) + \alpha_{n+1} U(s);$$

$$sX_3(s) = \alpha_2 Y(s) - \lambda_3 X_3(s) + \alpha_{n+2} U(s);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$sX_n(s) = \alpha_{n-1} Y(s) - \lambda_n X_n(s) + \alpha_{2n-1} U(s),$$

звідки

$$\begin{cases} X_2(s) = \frac{\alpha_1}{s + \lambda_2} Y(s) + \frac{\alpha_{n+1}}{s + \lambda_2} U(s), \\ X_3(s) = \frac{\alpha_2}{s + \lambda_3} Y(s) + \frac{\alpha_{n+2}}{s + \lambda_3} U(s), \\ \dots \dots \dots \\ X_n(s) = \frac{\alpha_{n-1}}{s + \lambda_n} Y(s) + \frac{\alpha_{2n-1}}{s + \lambda_n} U(s). \end{cases} \quad (12.71)$$

Оскільки

$$\mathbf{h}^T \bar{\mathbf{x}} = x_2 + x_3 + \dots + x_n,$$

то зображення рівняння (12.69) матиме вигляд

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left\{ \alpha_0 Y(s) + \alpha_n U(s) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\alpha_i}{s + \lambda_{i+1}} Y(s) + \frac{\alpha_{n+i}}{s + \lambda_{i+1}} U(s) \right] \right\}. \quad (12.72)$$

Структурну схему об'єкта, побудовану за виразом (12.72), наведено на рис. 12.17.

Враховуючи, що зображення рівняння (12.70) можна подати у вигляді (12.71), і використовуючи теорему згортання (теорему Бореля), запишемо розв'язок рівняння за початкових умов $\mathbf{x}(0)$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(t) = e^{-\Lambda t} \bar{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \bar{\alpha}^{(1)} e^{-\Lambda(t-\tau)} y(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \bar{\alpha}^{(2)} e^{-\Lambda(t-\tau)} u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (12.73)$$

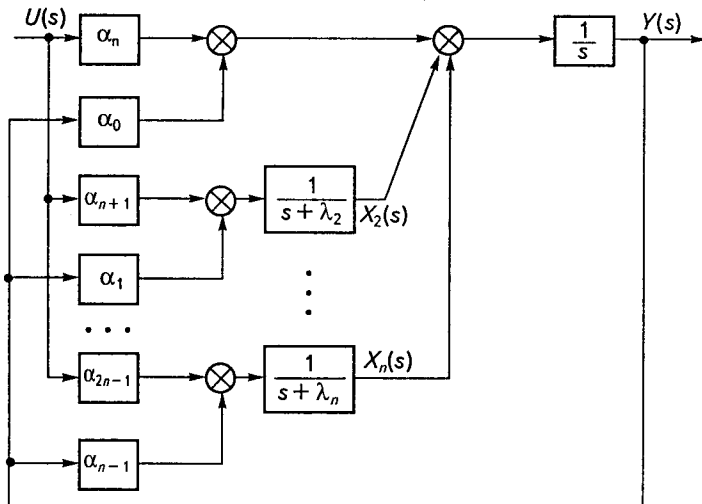


Рис. 12.17

Підставимо цей вираз у (12.69), тоді

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \alpha_0 y + \mathbf{h}^T e^{-\Lambda t} \bar{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \mathbf{h}^T - \bar{\alpha}^{(1)} e^{-\Lambda(t-\tau)} y(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \mathbf{h}^T - \bar{\alpha}^{(2)} e^{-\Lambda(t-\tau)} u(\tau) d\tau + \alpha_n u. \end{aligned} \quad (12.74)$$

Структурну схему, наведену на рис. 12.17, можна подати у вигляді, зображеному на рис. 12.18, якщо ввести вектори \mathbf{z} і \mathbf{v} з компонентами z_1, z_2, \dots, z_{n-1} і v_1, v_2, \dots, v_{n-1} . Беручи початкові умови $\mathbf{z}(0) = \mathbf{v}(0) = 0$ і використовуючи теорему згортання, дістанемо

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t \mathbf{h}^T e^{-\Lambda(t-\tau)} u(\tau) d\tau; \quad (12.75)$$

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t \mathbf{h}^T e^{-\Lambda(t-\tau)} y(\tau) d\tau. \quad (12.76)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \alpha_0 y + \int_0^t \mathbf{h}^T - \bar{\alpha}^{(1)} e^{-\Lambda(t-\tau)} y(\tau) d\tau + \alpha_n u + \\ & + \int_0^t \mathbf{h}^T - \bar{\alpha}^{(2)} e^{-\Lambda(t-\tau)} u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (12.77)$$

Вирази (12.74) і (12.77) відрізняються лише членом $\rho(t) = \mathbf{h}^T e^{-\Lambda t} \bar{\mathbf{x}}(0)$, тому якщо в схемі на рис. 12.18 додати зображення $\rho(s)$, то схеми на рис. 12.17 і 12.18 будуть повністю еквівалентними.

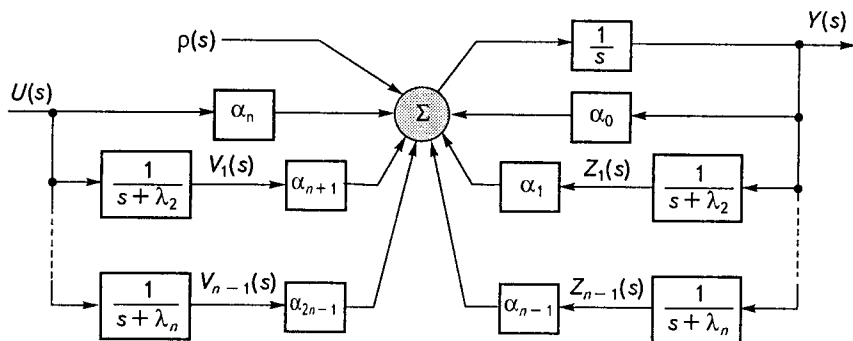


Рис. 12.18

Рівняння, що описують структурну схему на рис 12.18, мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} dy/dt = \alpha_0 y + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_{n-1} z_{n-1} + \\ + \alpha_{n+1} v_1 + \alpha_{n+2} v_2 + \dots + \alpha_{2n-1} v_{n-1} + \alpha_n u + \rho, \\ dz_1/dt = y - \lambda_2 z_1, \\ dz_2/dt = y - \lambda_3 z_2, \\ \dots \dots \dots \\ dz_{n-1}/dt = y - \lambda_n z_{n-1}, \\ dv_1/dt = u - \lambda_2 v_1, \\ dv_2/dt = u - \lambda_3 v_2, \\ \dots \dots \dots \\ dv_{n-1}/dt = u - \lambda_n v_{n-1}. \end{array} \right. \quad (12.78)$$

Ці рівняння точно описують невідомий об'єкт, поданий рівняннями (12.65). Проте цих рівнянь на $n-1$ більше, тому рівняння (12.78) називають *немінімальною реалізацією невідомого об'єкта*.

Рівняння (12.78) можна подати в матричній формі

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \bar{\alpha}^{(1)\top} & \bar{\alpha}^{(2)\top} \\ \mathbf{h} & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_n \\ 0 \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho, \quad (12.79)$$

де $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_{n-1}]^\top$; $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]^\top$; $\mathbf{h} = [1, 1, \dots, 1]^\top$;
 $\bar{\alpha}^{(1)\top} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]$; $\bar{\alpha}^{(2)\top} = [\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n-1}]$;
 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n]$.

Для визначення векторів $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ невідомих параметрів об'єкта і вектора $\mathbf{x}(t)$ змінних стану використаємо модель, що настроюється. Структурну схему такої моделі наведено на рис. 12.19.

Рівняння, котрі описують модель, що настроюється, за аналогією з рівнянням (12.79) запишемо у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_m \\ \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \lambda_1 & \bar{\beta}^{(1)\top} & \bar{\beta}^{(2)\top} \\ h & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_n - \lambda_1 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \quad (12.80)$$

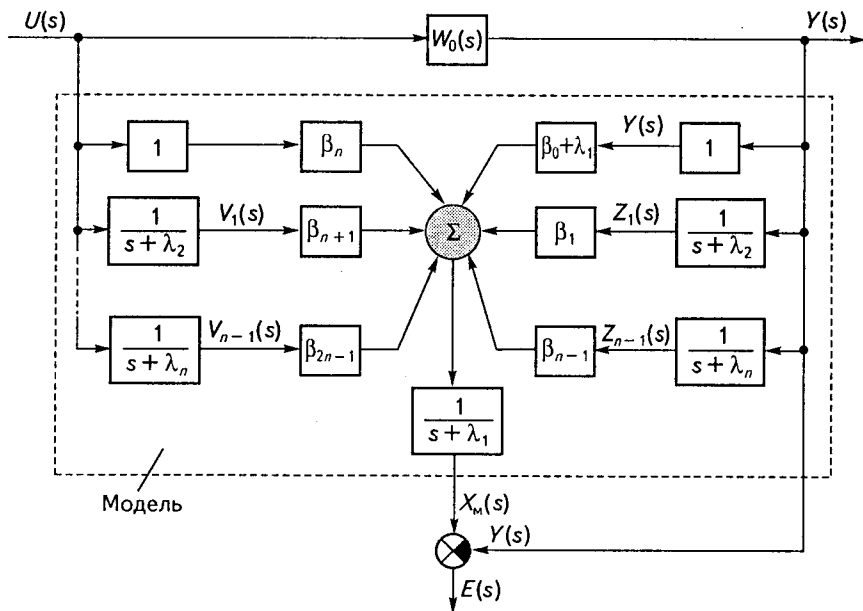


Рис.12.19

де $\beta_0(t)$; $\beta_n(t)$; $\bar{\beta}^{(1)} = [\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_{n-1}(t)]^T$; $\bar{\beta}^{(2)} = [\beta_{n+1}(t), \beta_{n+2}(t), \dots, \beta_{2n-1}(t)]^T$ — параметри, що настраюються.

Алгоритм настроювання параметрів моделі описується рівняннями (12.58), (12.59).

Збіжність процесу настроювання

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{(1)} = \alpha^{(1)}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{(2)} = \alpha^{(2)} \quad (12.81)$$

і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

можна довести, використовуючи другий (прямий) метод Ляпунова. Протягом збіжності процесу настроювання стають відомими вектори $\alpha^{(1)}$ і $\alpha^{(2)}$ об'єкта.

Спостерігач, тобто пристрій, що забезпечує відновлення значення вектора $\bar{x}(t)$, який складається з невимірюваних компонент вектора $x(t)$, за вимірюваннями керування $u(t)$ й вихідної величини об'єкта $y(t)$, можна реалізувати таким чином. Рівняння (12.71) подамо у вигляді

$$\bar{X}_i(s) = \frac{\alpha_{i-1}}{s + \lambda_i} Y(s) + \frac{\alpha_{n+i-1}}{s + \lambda_i} U(s)$$

або з урахуванням (12.80)

$$\bar{X}_i(s) = \frac{\beta_{i-1}}{s + \lambda_i} Y(s) + \frac{\beta_{n+i-1}}{s + \lambda_i} U(s).$$

Тоді, беручи до уваги (12.75) і (12.76), записуємо

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{i=2}^n \beta_{i-1} z_{i-1}(t) + \sum_{i=2}^n \beta_{n+i} v_{i-1}(t). \quad (12.82)$$

З цього виразу випливає, що компоненти шуканого вектора $\bar{x}(t)$ можна визначити, вимірюючи змінні стану $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$ моделі, що настроюється, і таким чином реалізувати адаптивний спостерігач.

Розглянута система є системою адаптивного керування ідентифікацією за допомогою моделі, що настроюється.

12.7

Адаптивні системи з еталонною моделлю

В адаптивних системах з еталонною моделлю бажаний рух об'єкта (мета керування) задається моделлю, що є зразком або еталоном для об'єкта і тому називається *еталонною моделлю*. Модель становить стаціонарну динамічну ланку з відомими параметрами, на вхід якої подають такі самі дії, що й на вхід об'єкта керування. Модель вибирається заздалегідь згідно з ап'іорною інформацією про вхідні дії. Завданням системи є настроювання параметрів основного контура під параметри еталонної моделі.

Функціональну схему одновимірної адаптивної системи з еталонною моделлю наведено на рис 12.20. Різниця вихідних сигналів об'єкта й моделі подається на вхід адаптивного регулятора і змінює його параметри так, щоб передаточна функція об'єкта з регулятором збігалася з передаточною функцією моделі. У цьому разі вихідні сигнали моделі й об'єкта збігаються і $\epsilon = 0$.

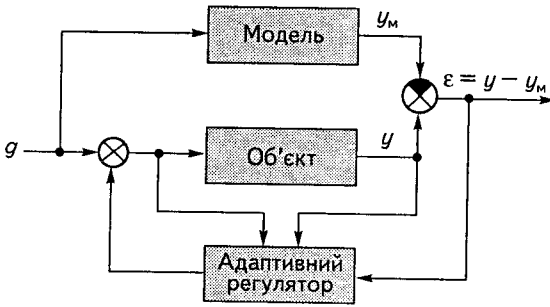


Рис. 12.20

Розглянемо випадок, коли об'єкт має передаточну функцію

$$W_0(p) = \frac{1}{p + a(t)}$$

і охоплений жорстким зворотним зв'язком (рис. 12.21).

Параметр об'єкта $a(t)$ є функцією часу. Завданням контура самонастроювання є зміна

коефіцієнта k у колі зворотного зв'язку для забезпечення мінімального розузгодження між вихідними сигналами об'єкта $y(t)$ і моделі $y_m(t)$ при змінюванні параметра об'єкта $a(t)$.

Вважатимемо, що змінний параметр об'єкта

$$a(t) = a_0 + \Delta a(t),$$

де $a_0 = \text{const}$, а настроюваний коефіцієнт зворотного зв'язку

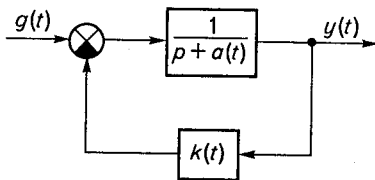


Рис. 12.21

$$k(t) = k_0 \Delta k(t).$$

У цьому разі передаточна функція основного контура (об'єкта, охопленого зворотним зв'язком) записується так:

$$W(p) = \frac{1}{p + a_0 + k_0 + \Delta a(t) + \Delta k(t)}.$$

Передаточну функцію моделі візьмемо у вигляді

$$W_m(p) = \frac{1}{p + b},$$

де $b = a_0 + k_0 = \text{const}$

Диференціальні рівняння, що описують рух основного контура системи й моделі,

$$dy/dt + [b + \Delta a(t) + \Delta k(t)]y = g(t); \quad (12.83)$$

$$dy_m/dt + by_m = g(t). \quad (12.84)$$

Віднявши (12.84) від (12.83) та беручи до уваги, що $\varepsilon = y - y_m$ та $d\varepsilon/dt = dy/dt - dy_m/dt$, дістанемо рівняння відносно похибки розузгодження $\varepsilon(t)$:

$$d\varepsilon/dt + b\varepsilon = -[\Delta a(t) + \Delta k(t)]y. \quad (12.85)$$

Якщо ε розглядати як координатне розузгодження рухів системи та еталонної моделі, то величину

$$\gamma = \Delta a(t) + \Delta k(t) \quad (12.86)$$

можна вважати параметричним розузгодженням. При $\gamma = 0$ і $b > 0$ розузгодження ε асимптотично прямує до нуля.

Вважатимемо, що самонастроювання здійснюється виконавчим пристроєм, який змінює коефіцієнт k . Якщо припустити, що виконавчий пристрій є інтегрувальною ланкою, то

$$d\Delta k(t)/dt = \psi(t), \quad (12.87)$$

де $\psi(t)$ — шуканий закон керування в контурі самонастроювання.

Рівняння (12.85) запишемо у вигляді

$$d\varepsilon/dt = -b\varepsilon - \gamma y. \quad (12.88)$$

Тоді, здиференціювавши (12.86), з урахуванням (12.87) дістанемо

$$d\gamma/dt = d\Delta a(t)/dt + \psi(t). \quad (12.89)$$

Невідомий закон керування $\psi(t)$ можна визначити з умов здійснення бажаного руху зображуючої точки по площині ε, γ за рівняннями (12.88) і (12.89).

Скористаємося для цього прямим методом Ляпунова. Візьмемо визначено-додатну функцію

$$V = c\varepsilon^2 + \gamma^2,$$

де $c > 0$. Крім того, вважатимемо об'єкт квазістаціонарним, тобто приймемо, що параметри об'єкта за час перестроювання коефіцієнта k не змінюються і, отже, $d\Delta a(t)/dt = 0$. Тоді повна похідна функції Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 2c\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + 2\gamma \frac{d\gamma}{dt} \quad (12.90)$$

або, якщо врахувати рівняння (12.88) і (12.89), то

$$dV/dt = -2c\varepsilon^2 b - 2c\varepsilon\gamma u + 2\gamma\psi(t). \quad (12.91)$$

Якщо прийняти

$$\psi(t) = c\varepsilon u,$$

де ψ — алгоритм самонастроювання, то похідна функції Ляпунова

$$dV/dt = -2c\varepsilon^2 b$$

є недодатною функцією для визначено-додатної функції V . Тому нульовий розв'язок $\varepsilon = 0$, $\gamma = 0$ системи рівнянь (12.88), (12.89) є стійким.

Отже, закон змінювання коефіцієнта зворотного зв'язку в основному контурі набуває такого вигляду:

$$k(\varepsilon) = k_0 + \Delta k(t),$$

де

$$d\Delta k(t)/dt = c\varepsilon u.$$

Структурну схему цієї адаптивної системи з еталонною моделлю зображено на рис. 12.22.

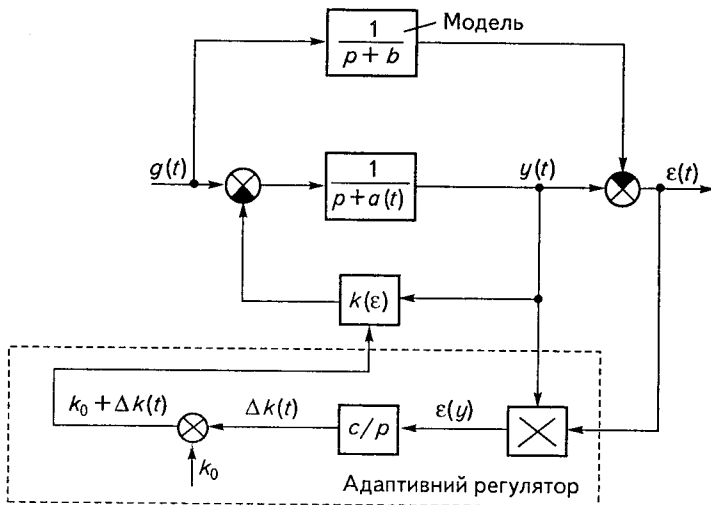


Рис. 12.22

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення адаптивної системи автоматичного керування. Чим вона відрізняється від звичайної?
2. У чому полягає гіпотеза квазістаціонарності?
3. Дайте визначення екстремальної системи.
4. Назвіть методи (принципи) пошуків екстремуму в одно- і багатопараметричних екстремальних системах.
5. Якими показниками характеризується динаміка екстремальних систем?
6. Що таке втрата на рискання?
7. Як впливає інерційність об'єкта на процес пошуків екстремуму?
8. Назвіть мету ідентифікації об'єктів керування.
9. У чому полягає частотний метод ідентифікації?
10. Поясніть суть ідентифікації за допомогою моделі, що настроюється.
11. Поясніть принципи побудови безпошукових адаптивних систем.
12. Наведіть структурну схему системи з адаптивним спостерігачем і поясніть принцип її дії.
13. Яким чином задається бажаний рух в адаптивних системах з еталонною моделлю?
14. Наведіть функціональну схему одновимірної адаптивної системи з еталонною моделлю і поясніть принцип її дії.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высш. шк., 1989. — 263 с.
- Архангельский В. И., Богаенко И. Н., Грабовский Г. Г., Рюшин Н. А.* Системы фаззи-управления. — К.: Техніка, 1997. — 208 с.
- Архангельский В. И., Богаенко И. Н., Грабовский Г. Г., Рюшин Н. А.* Нейронные сети в системах автоматизации. — К.: Техніка, 1999. — 364 с.
- Башарин А. В., Новиков В. А., Соколовский Г. Г.* Управление электроприборами. — Л.: Энергоиздат, 1982. — 392 с.
- Башарин А. В., Постников Ю. В.* Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 512 с.
- Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. — 3-е изд., испр. — М.: Физматгиз, 1975. — 768 с.
- Бесекерский В. А.* Цифровые автоматические системы. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
- Власов К. П.* Специальный курс по теории автоматического управления. — Х.: Харьк. политехн. ин-т, 1974. — 198 с.
- Гарнов В. К., Рабинович В. Б., Вишневецкий Л. М.* Унифицированные системы авторегулирования электроприводов в металлургии. — М.: Металлургия, 1977. — 190 с.
- Грубов В. И., Ивахненко А. Г., Мандровский Б. Ю.* Промышленная кибернетика. — К.: Наук. думка, 1966. — 447 с.
- Зайцев Г. Ф., Костюк В. И., Чинаев П. И.* Основы автоматического управления и регулирования. — К.: Техніка, 1975. — 496 с.
- Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ. — К.: Наук. думка, 1986. — 581 с.
- Клепиков В. Б., Палис Ф., Клепиков А. В., Глебов О. Д.* FUZZY-регулятор для устранения в машинах и механизмах аномального проскальзывания

средствами электропривода / Вестник НТУ «ХПИ». Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика. — 2000. — Вып. 10. — С. 421—424.

Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М.: Наука, 1973. — 358 с.

Крутько П. Д. Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. — М.: Сов. радио, 1967. — 438 с.

Куропаткин П. В. Теория автоматического управления. — М.: Высш. шк., 1973. — 528 с.

Макаров И. М., Менский Б. М. Линейные автоматические системы. — М.: Машиностроение, 1977. — 464 с.

Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980. — 534 с.

Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. — М.: Наука, 1966. — 390 с.

Пальтов И. П. Качество процессов и синтез корректирующих устройств в нелинейных автоматических системах. — М.: Наука, 1975. — 368 с.

Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1988. — 256 с.

Попович М. Г., Лозинський О. Ю., Клепиков В. Б. та ін. Електромеханічні системи автоматичного керування та електроприводи. — К.: Либідь, 2005. — 680 с.

Прикладные нечетные системы / Под ред. Т. Тэрано. — М.: Мир, 1993. — 386 с.

Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В. А. Бесекерского. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

Скворцов Г. В. Синтез корректирующих устройств судовых следящих систем. — Л.: Судостроение, 1968. — 252 с.

Суевалов Л. Ф. Справочник по расчетам судовых автоматических систем. — Л.: Судостроение, 1977. — 376 с.

Теория автоматического управления: В 2 ч. — 2-е изд. — Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. 1. 367 с.

Теория автоматического управления: В 2 ч. — 2-е изд. — Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. 2. 504 с.

Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1964. — 703 с.

Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977. — 560 с.

Юревич Е. И. Теория автоматического управления. — 2-е изд. — Л.: Энергия, 1975. — 416 с.

Передмова	3
Глава 1. Загальні відомості про системи автоматичного керування	6
1.1. Основні поняття	6
1.2. Короткі історичні відомості про розвиток автоматичної теорії автоматичного керування та кібернетики	8
1.3. Система автоматичного керування та її елементи	15
1.4. Система автоматичного регулювання.	17
1.5. Принципи автоматичного керування. Комбіновані системи автоматичного керування.	19
1.6. Види систем автоматичного керування	21
1.7. Основні загальні відомості про елементи САК та їхні особливості. Класифікація елементів.	41
1.8. Зворотні зв'язки в системах автоматичного регулювання.	44
<i>Контрольні запитання та завдання</i>	49
Глава 2. Основні завдання й особливості теорії автоматичного керування	51
2.1. Теорія автоматичного керування і регулювання	51
2.2. Статика систем автоматичного регулювання. Умови статичної рівноваги і статичні характеристики ланок.	53
2.3. Статична похибка і коефіцієнт передачі (підсилення)	57
2.4. Форми запису рівнянь статички	60
2.5. Динаміка систем автоматичного регулювання. Завдання й особливості загальної методики дослідження	61
2.6. Лінеаризація нелінійних рівнянь. Приклади	63
2.7. Форми запису рівнянь динаміки. Приклади складання рівнянь ланок.	66
2.8. Коефіцієнт самовирівнювання та його вплив на характер перехідних процесів	69
2.9. Рівняння машини-двигуна з одним ступенем свободи.	71
<i>Контрольні запитання та завдання</i>	74
Глава 3. Математичне описання лінійних неперервних систем автоматичного керування	75
3.1. Типові елементи (ланки) систем автоматичного керування	75
3.2. Приклад складання рівняння тиристорного перетворювача (підсилювача) як ланки із запізненням	86
3.3. Передаточні функції та частотні характеристики	89
3.4. Передаточні функції та частотні характеристики типових ланок. Приклади побудови. Загальні відомості про частотні характеристики	90
3.5. Рівняння динаміки, передаточні функції і амплітудно-фазові частотні характеристики груп ланок при різному їх з'єднанні	95

3.6.	Логарифмічні частотні характеристики	99
3.7.	Мінімально- та немінімально-фазові ланки	116
3.8.	Рівняння, передаточні функції та частотні характеристики систем автоматичного керування	117
3.9.	Приклад знаходження рівняння динаміки системи стабілізації напруги генератора постійного струму	124
3.10.	Рівняння і передаточні функції автоматичних слідкувальних (програмних) систем	132
3.11.	Приклад знаходження рівняння динаміки слідкувальної системи	136
3.12.	Структурні схеми та їх перетворення	143
3.13.	Графи та їх використання в теорії автоматичного керування	151
3.14.	Багатовимірні системи та метод змінних стану	156
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	<i>172</i>
Глава 4.	Стійкість неперервних лінійних системи автоматичного керування	173
4.1.	Поняття стійкості САК	173
4.2.	Стійкість за Ляпуновим	175
4.3.	Дослідження і аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння	176
4.4.	Алгебричні критерії стійкості	181
4.5.	Частотні критерії стійкості. Критерій Михайлова	190
4.6.	Дослідження стійкості за допомогою побудови зон стійкості (метод <i>D</i> -розбиття)	198
4.7.	Критерій стійкості Найквіста	209
4.8.	Критерій Найквіста у логарифмічній формі	221
4.9.	Дослідження стійкості систем із запізненням	231
4.10.	Структурно-нестійкі системи і коректувальні ланки	234
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	<i>240</i>
Глава 5.	Якість лінійних неперервних систем автоматичного керування і методи їх оцінки.	241
5.1.	Загальні відомості про якість САК	241
5.2.	Дослідження якості на основі рівняння незбурених коливань	244
5.3.	Наближені методи оцінки якості	251
5.4.	Чутливість САК.	280
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	<i>282</i>
Глава 6.	Підвищення якості та синтез лінійних систем автоматичного регулювання	283
6.1.	Помилки в САР.	283
6.2.	Типові режими роботи і знаходження помилок САР	286
6.3.	Основні шляхи підвищення точності керування. Замикання системи	290
6.4.	Типові закони регулювання. Введення астатизму і регулювання за похідними	293

6.5.	Точність САР в усталених динамічних режимах	305
6.6.	Підвищення точності САР на основі принципу інваріантності	308
6.7.	Підвищення якості в комбінованих САР і системах зі змінною структурою	311
6.8.	Використання неединичних зворотних зв'язків і масштабування	313
6.9.	Технічна реалізація коректувальних пристроїв у схемах автоматизованого електропривода	314
6.10.	Способи підвищення запасу стійкості	322
6.11.	Синтез коректувальних пристроїв методом ЛАХ	329
6.12.	Послідовна корекція з підпорядкованим регулюванням координат	348
6.13.	Модальне керування	357
6.14.	Керованість і спостережуваність <i>Контрольні запитання та завдання</i>	362 366
Глава 7.	Випадкові процеси в системах автоматичного керування	368
7.1.	Уявлення про випадкові процеси	368
7.2.	Характеристики стаціонарних випадкових процесів	372
7.3.	Спектральна щільність стаціонарних випадкових процесів	377
7.4.	Проходження стаціонарного випадкового сигналу через лінійну САК	381
7.5.	Розрахунок точності САК за середньоквадратичною похибкою	383
7.6.	Синтез лінійних САК за мінімумом середньоквадратичної похибки	387
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	389
Глава 8.	Нелінійні системи автоматичного керування	390
8.1.	Загальні відомості	390
8.2.	Типові нелінійності	391
8.3.	Математичні моделі нелінійних систем	396
8.4.	Стійкість та особливості динаміки нелінійних систем	403
8.5.	Дослідження нелінійних систем методом фазової площини	410
8.6.	Метод Ляпунова	416
8.7.	Абсолютна стійкість. Критерій В.-М. Пóпова	420
8.8.	Метод точкового перетворення	426
8.9.	Метод гармонічної лінеаризації	429
8.10.	Дослідження автоколивань методом гармонічної лінеаризації.	437
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	453
Глава 9.	Оцінка якості, корекція і синтез нелінійних систем автоматичного керування	455
9.1.	Оцінка якості нелінійних САК	455
9.2.	Загальні відомості про методи синтезу коректувальних пристроїв у нелінійних системах	465

9.3.	Синтез лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах методом ЛАХ	467
9.4.	Корекція релейних систем за рахунок утворення ковзних режимів	474
9.5.	Нелінійні коректувальні ланки	481
9.6.	Компенсація впливу нелінійностей	486
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	<i>495</i>
Глава 10.	Дискретні системи автоматичного керування	496
10.1.	Уявлення про дискретні системи. Класифікація дискретних систем	496
10.2.	Класифікація імпульсних САК за видами модуляції	498
10.3.	Математичне описання імпульсного елемента систем з АІМ	501
10.4.	Математичний апарат для дослідження імпульсних САК	506
10.5.	Передаточна функція розімкнутої імпульсної системи	516
10.6.	Передаточна функція замкнутої імпульсної системи	520
10.7.	Частотні характеристики імпульсних систем	522
10.8.	Стійкість імпульсних систем	529
10.9.	Якість імпульсних систем	537
10.10.	Корекція імпульсних систем.	543
10.11.	Цифрові системи автоматичного керування	548
10.12.	Синтез цифрових коректувальних пристроїв методом ЛАХ	552
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	<i>561</i>
Глава 11.	Оптимальні системи автоматичного керування	563
11.1.	Завдання оптимального керування.	563
11.2.	Методи класичного варіаційного числення	566
11.3.	Принцип максимуму	575
11.4.	Теорема про n інтервалів	585
11.5.	Динамічне програмування	590
11.6.	Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів	596
11.7.	Застосування методу динамічного програмування для синтезу дискретних (цифрових) регуляторів	601
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	<i>605</i>
Глава 12.	Адаптивні системи автоматичного керування	606
12.1.	Загальні відомості про адаптивні САК	606
12.2.	Системи екстремального керування	609
12.3.	Динаміка екстремальних систем	623
12.4.	Ідентифікація об'єктів керування	628
12.5.	Принципи побудови безпошукових адаптивних систем.	635
12.6.	Адаптивні спостерігачі	638
12.7.	Адаптивні системи з еталонною моделлю	645
	<i>Контрольні запитання та завдання</i>	<i>649</i>
	<i>Список рекомендованої літератури</i>	<i>650</i>

Навчальне видання

Попович Микола Гаврилович
Ковальчук Олександр Васильович

ТЕОРІЯ
АВТОМАТИЧНОГО
КЕРУВАННЯ

Художній редактор *О. Г. Григiр*
Технічний редактор *Т. О. Щур*
Коректори *Л. Ф. Іванова, А. І. Бараз, А. В. Бородавко*
Комп'ютерна верстка *О. В. Кузьменка*

Підп. до друку 30.11.06. Формат 60 x 84/16. Папір офс. Гарн. Таймс.
Друк. офсет. Умов.-друк. арк. 38,13. Обл.-вид. арк. 36,00. Тираж 5400 пр.
Вид. № 4369. Зам. № 6-724.

Видавництво «Либідь»
01004 Київ 4, вул. Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію № 404 від 06.04.2001

Віддруковано на ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика».
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4

