

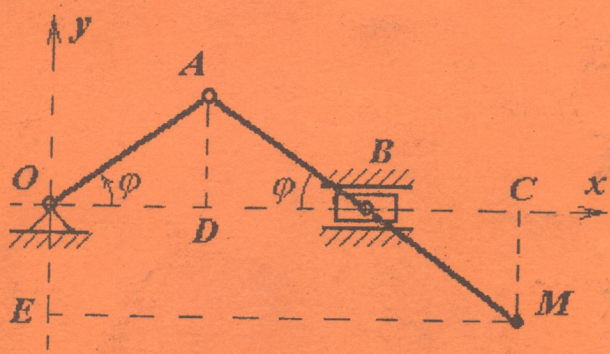
531.3 (075)

П77

В.О. Приятельчук, В.І. Риндюк, В.О. Федотов

### Теоретична механіка. Кінематика

Розрахунково-графічні та контрольні завдання



3782-15

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

НТБ ВНТУ



3782-15

531.3(075) П 77 2005

Приятельчук В.О. Теоретична механіка. Кіне

В.О. Приятельчук, В.І. Риндюк, В.О. Федотов

**Теоретична механіка. Кінематика**

Розрахунково-графічні та контрольні  
завдання

АБОНЕМЕНТ-2

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки "Будівництво"; "Інженерна механіка"; "Зварювання"; "Електромеханіка"; "Енергетика"; "Електромеханіка"; "Радіотехніка". Протокол № 10 від 27 травня 2004 р.

Вінниця ВНТУ 2005.

УДК 531 (075)

П 77

*Рецензенти:*

**В.Ф. Анісімов**, доктор технічних наук, професор

**І.О. Сивак**, доктор технічних наук, професор

**В.І. Савуляк**, кандидат технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О.**

П77 **Теоретична механіка. Кінематика.** Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 108с.

В посібнику приведені 9 завдань із розділу кінематика. Серед них три з кінематики точки, три з плоскопаралельного руху твердого тіла та завдання зі складного руху точки і тіла, сферичного руху тіла. Завдання з кінематики точки поставлені так, що потребують використання ПЕОМ. Кожне завдання має 300 варіантів з прикладом виконання.

Для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531 (075)



## Зміст

1	Порядок та основні вимоги до виконання роботи . . . . .	4
2	Розрахунково-графічні та контрольні завдання . . . . .	5
	К.1 Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями її руху . . . . .	5
	1.1 Приклад виконання завдання . . . . .	5
	К.2 Кінематичне дослідження руху точки плоского ме- ханізму . . . . .	16
	2.1 Приклад виконання завдання . . . . .	16
	К.3 Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла при поступальному та обертальному русі . . . . .	37
	3.1 Приклад виконання завдання . . . . .	43
	К.4 Кінематичний аналіз плоского механізму . . . . .	45
	4.1 Приклад виконання завдання . . . . .	45
	К.5 Визначення швидкостей і прискорень точок багато- ланкового плоского механізму . . . . .	54
	5.1 Приклад виконання завдання . . . . .	60
	К.6 Кінематичні характеристики тіла та його точок при сферичному русі . . . . .	68
	6.1 Приклад виконання завдання . . . . .	68
	К.7 Знаходження швидкості та прискорення точки в складному русі . . . . .	77
	7.1 Приклад виконання завдання . . . . .	83
	К.8 Визначення кутових швидкостей ланок планетар- ного редуктора з паралельними осями . . . . .	87
	8.1 Приклад виконання завдання . . . . .	87
	8.1.1 Розв'язання задачі способом Вілліса . . . . .	88
	8.1.2 Розв'язання задачі методом миттєвих центрів швидкостей . . . . .	96
	К.9 Визначення кутових швидкостей ланок планетар- ного редуктора з осями, що перетинаються . . . . .	97
	9.1 Приклад розв'язання задачі у випадку осей, що перетинаються . . . . .	97
	9.1.1 Розв'язання задачі графоаналітичним способом . . . . .	98
	9.1.2 Розв'язання задачі способом Вілліса . . . . .	100
	Література . . . . .	107

## 1 Порядок та основні вимоги до виконання роботи

З розділу “Кінематика” студенти виконують одну розрахунково-графічну або контрольну роботу задачі якої, для відповідного напрямку підготовки, вибирають з таблиці 1. Студенти заочної форми навчання вибирають варіант схеми (рисунок) за двома останніми цифрам залікової книжки (шифр) з таблиці 1, а дані для розрахунку – за останньою цифрою шифру з таблиць, що приведені в завданнях. Варіанти завдання для студентів денної форми навчання вказує викладач.

Таблиця 1

Вар	Шифр	Напрями підготовки					
		0902	0921	0922	0923	0905	0906 0907
1	01, 31, 61, 91	К.3,					
2	02, 32, 62, 92	К.5,	К.4,	К.3,	К.2,	К.1,	К.1,
...	.....	К.7,	К.6,	К.5,	К.3,	К.2,	К.2,
29	09, 39, 69, 99	К.8	К.7,	К.6,	К.7,	К.3,	К.3,
30	00, 30, 60, 90	К.9	К.8	К.7	К.8	К.7	К.7

Студенти денної форми навчання оформляють розрахунково-графічне завдання у відповідності до діючих стандартів ЄСКД(2.105 і 2.106 для текстових конструкторських документів та 2.104 – для основних надписів).

Студенти заочної форми навчання виконують завдання в зошитах. На титульній сторінці зошита вказується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, шифр, факультет, група і домашня адреса.

Розв'язання кожної задачі потрібно починати на розвороті зошита (з лівої сторінки), так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і приводиться коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунок) виконуються за допомогою креслярських приладів. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями. На кожній сторінці залишаються поля для зауважень рецензента. Якщо робота висилається на повторну перевірку (при виконанні її у другому зошиті) обов'язково прикладається незарахована робота.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу. Графік захисту планується деканатом.

## 2 Розрахунково-графічні та контрольні завдання

### К.1 Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями її руху

За заданими рівняннями руху точки знайти траєкторію, швидкість, прискорення з його складовими дотичним і нормальним прискоренням та радіус кривини траєкторії.

Побудувати траєкторію на рисунку, вказати на ній положення точки в початковий момент руху та в момент часу  $t = t_1$ . На рисунку траєкторії в момент часу  $t_1$  побудувати вектори швидкості і прискорення точки в відповідно вибраних масштабах.

Побудувати графіки залежностей швидкості від часу  $V(t)$  та прискорення від часу  $a(t)$ .

Рівняння руху точки  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  та значення моменту часу  $t_1$  знаходяться в таблицях 1.2a і 1.2б, а значення коефіцієнтів  $A, B, C, D, k$  та  $\varphi$  в таблицях 1.1a і 1.1б по відповідних варіантах. Розмірність координат - сантиметри, часу - секунди.

Таблиця 1.1a

Варі-ант	A	B	C	D	k
1	3	2	6	4	2π
2	7	4	2	9	3π
3	4	3	6	5	8π
4	6	5	4	2	4π
5	8	4	7	6	5π
6	5	7	3	4	6π
7	3	4	7	2	2π
8	5	3	6	3	4π
9	4	5	8	6	3π
0	2	6	9	8	2π

Таблиця 1.1б

Варі-ант	A	B	C	D	φ
	см				рад
1	70	20	35	25	πt
2	40	10	10	15	t <sup>2</sup>
3	50	25	10	30	2πt
4	64	16	30	18	πt <sup>2</sup>
5	80	40	36	50	2t
6	55	11	20	25	2πt <sup>2</sup>
7	65	13	18	20	2t
8	70	10	25	20	3t <sup>2</sup>
9	75	25	30	15	3πt
0	72	24	16	18	t <sup>3</sup>

### 1.1 Приклад виконання завдання

Дано: Точка рухається в площині згідно з функціями від часу

$$x = 4t - 1, \quad y = 2t^2 + 3 \quad (1.1)$$

Знайти траєкторію, швидкість, прискорення, дотичне і нормальне прискорення руху точки та радіус кривини траєкторії в момент часу  $t_1 = 1$  с.

Побудувати графік траєкторії, вказати інтервали руху на ній, відмітити початкове положення точки при  $t=0$  і в момент  $t = t_1$ ,

Таблиця 1.2а

Варіант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t, \text{ с}$
1	$x = -At^2 + C, \quad y = -Dt$	1
2	$x = A \cos^2\left(\frac{kt}{3}\right), \quad y = B \sin^2\left(\frac{kt}{3}\right)$	0,5
3	$x = -C \cos\left(\frac{kt^2}{3}\right), \quad y = D \sin\left(\frac{kt^2}{3}\right)$	0,3
4	$x = At + B, \quad y = -\frac{D}{t+1}$	2
5	$x = A \sin\left(\frac{kt}{3}\right), \quad y = -B \cos\left(\frac{kt}{3}\right) + C$	1
6	$x = At^2 + C, \quad y = -Bt$	2
7	$x = 3t^2 - t + C, \quad y = Dt^2 - \frac{D}{3}t - B$	1,5
8	$x = B \sin\left(\frac{kt^2}{6}\right), \quad y = A - C \cos\left(\frac{kt^2}{6}\right)$	4
9	$x = -\frac{A}{t+B}, \quad y = At + 2B$	2
10	$x = -D \cos\left(\frac{k}{3}t\right), \quad y = -C \sin\left(\frac{k}{3}t\right) - D$	1

Продовження таблиці 1.2а

Варіант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
11	$x = -At^2 + D, \quad y = -Bt$	1,5
12	$x = B \sin^2\left(\frac{k}{6}t\right), \quad y = -B \cos^2\left(\frac{k}{6}t\right)$	1
13	$x = D \cos\left(\frac{k}{3}t^2\right), \quad y = -D \sin\left(\frac{k}{3}t^2\right)$	1
14	$x = -At - C, \quad y = -\frac{A}{t+1}$	0,5
15	$x = B \cos\left(\frac{k}{3}t\right), \quad y = -D \sin\left(\frac{k}{3}t\right)$	2
16	$x = At, \quad y = Bt^2 - D$	1
17	$x = C \sin^2\left(\frac{k}{6}t\right) - D, \quad y = -A \cos^2\left(\frac{k}{6}t\right)$	1
18	$x = A + B \cos\left(\frac{k}{3}t\right), \quad y = C \sin\left(\frac{k}{3}t\right) + D$	1
19	$x = -Dt^2 - C, \quad y = At$	0,5
20	$x = B - Ct - At^2, \quad y = C - Ct - At^2$	1



Варіант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
21	$x = A \sin\left(\frac{k}{6} t^2\right) - B, \quad y = A \cos\left(\frac{k}{6} t^2\right) + C$	2
22	$x = B t^2 - D, \quad y = C t$	1
23	$x = A - A t^2 + t, \quad y = D - B t^2 + \frac{B}{C} t$	0,5
24	$x = -D \cos\left(\frac{k}{6} t^2\right) - C, \quad y = -A \sin\left(\frac{k}{6} t^2\right)$	2
25	$x = -A t, \quad y = -B t^2 - C$	1
26	$x = D \cos^2\left(\frac{k}{6} t\right) + C, \quad y = -D \sin^2\left(\frac{k}{6} t\right) - B$	1
27	$x = -C - B \sin\left(\frac{k}{6} t^2\right), \quad y = -B \cos\left(\frac{k}{6} t^2\right) + A$	1
28	$x = -D t^2 + A, \quad y = -C t$	1,5
29	$x = A t^2 + \frac{A}{B} t - C, \quad y = B t^2 + t + C$	1
30	$x = D \cos\left(\frac{k}{3} t^2\right) - A, \quad y = -D \sin\left(\frac{k}{3} t^2\right) + B$	0,5

Таблица 1.26

Вариант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
1	$x = D \cos \varphi + \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - (C + D \sin \varphi)^2},$ $y = \frac{A-B}{C} (C + D \sin \varphi) - C$	0,4
2	$x = B \varphi - A \sin \varphi,$ $y = B - A \cos \varphi$	0,2
3	$x = (A+B) \sin \varphi - C \sin \left( \frac{A+B}{B} \varphi \right),$ $y = (A+B) \cos \varphi - C \sin \left( \frac{A+B}{B} \varphi \right)$	0,3
4	$x = (A-B) \sin \varphi + C \sin \left( \frac{A-B}{B} \varphi \right),$ $y = A - (A-B) \cos \varphi + C \sin \left( \frac{A-B}{B} \varphi \right)$	0,7
5	$x = A e^{0,1 \varphi} \sin \varphi + B,$ $y = D + C e^{0,1 \varphi} \cos \varphi$	0,6
6	$x = e^{0,2 \varphi} (A \sin \varphi + C \cos \varphi),$ $y = B + D \varphi$	0,3
7	$x = A + B \sin 2 \varphi \cos \varphi,$ $y = D + C \sin 2 \varphi \sin \varphi$	1,2
8	$x = C \varphi + B \sin \varphi + \frac{D}{A} \sqrt{A^2 - (C + B \sin \varphi)^2},$ $y = \frac{A-B}{A} (C + B \cos \varphi)$	0,5
9	$x = A (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi),$ $y = A (-1 + \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)$	0,4
10	$x = \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - (2D \sin \varphi)^2},$ $y = 2 \frac{D}{A} (A - B) \sin \varphi$	1,3

Варіант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
11	$x = A + C \sin \varphi \cos 2 \varphi ,$ $y = D + B \sin \varphi \sin 2 \varphi$	0,25
12	$x = B + \frac{D}{2A} \sqrt{4A^2 - (C + B \sin \varphi)^2} ,$ $y = \left(1 - \frac{D}{2A}\right) (C + B \sin \varphi) - C$	0,4
13	$x = C \varphi - A \sin \varphi ,$ $y = C - A \cos \varphi$	1,5
14	$x = (A - B) \sin \varphi + C \sin \left(\frac{A - B}{A} \varphi\right) ,$ $y = A - (A - B) \cos \varphi + C \cos \left(\frac{A - B}{A} \varphi\right)$	0,35
15	$x = A + B \varphi ,$ $y = e^{0,1 \varphi} (C \sin \varphi + D \cos \varphi)$	0,75
16	$x = D (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) ,$ $y = D (-\varphi \sin \varphi - \cos \varphi + 1)$	0,65
17	$x = C + D \sin 4 \varphi \cos 2 \varphi ,$ $y = B + A \sin 4 \varphi \sin 2 \varphi$	0,3
18	$x = \frac{D}{A} \sqrt{A^2 - (C \sin 2 \varphi)^2} ,$ $y = \frac{C}{A} (2A - D) \sin 2 \varphi$	0,4
19	$x = B + A \sin \varphi \cos 2 \varphi ,$ $y = D + A \sin \varphi \sin 2 \varphi$	0,6
20	$x = (A + D) \sin 2 \varphi - C \sin \left(\frac{A + D}{D} 2 \varphi\right) ,$ $y = (A + D) \cos 2 \varphi - C \cos \left(\frac{A + D}{D} 2 \varphi\right)$	0,45

Продовження таблиці 1.2.6

Варіант	$x(t), y(t), \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$
21	$x = D e^{-0,2\varphi} \cos\varphi + C,$ $y = A - D e^{-0,2\varphi} \sin\varphi$	1,5
22	$x = C + A \sin 2\varphi \cos\varphi,$ $y = D + A \sin 2\varphi \sin\varphi$	0,25
23	$x = (B - D) \sin\varphi - C \sin\left(\frac{B - D}{D} \varphi\right),$ $y = B - (B - D) \cos\varphi - C \cos\left(\frac{B - D}{D} \varphi\right)$	1,4
24	$x = \frac{C}{A} \sqrt{A^2 - (2D \sin\varphi)^2},$ $y = 2 \frac{D}{A} (A - C) \sin\varphi$	0,65
25	$x = A\varphi + C,$ $y = e^{-0,3\varphi} (D \sin\varphi - B \cos\varphi)$	0,75
26	$x = (C + D) \sin\varphi - B \sin\left(\frac{C + D}{C} \varphi\right),$ $y = (C + D) \cos\varphi - B \cos\left(\frac{C + D}{C} \varphi\right)$	0,35
27	$x = 2B\varphi - D \sin 2\varphi,$ $y = B - D \cos 2\varphi$	0,8
28	$x = A + B e^{-0,3\varphi} \sin\varphi,$ $y = C - D e^{-0,3\varphi} \cos\varphi$	0,3
29	$x = C\varphi + D \sin\varphi + \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - (C + D \cos\varphi)^2},$ $y = \left(1 - \frac{B}{A}\right) (C + D \cos\varphi)$	0,5
30	$x = D + B \sin 2\varphi \cos 4\varphi,$ $y = A + C \sin 2\varphi \sin 4\varphi$	0,45

зобразити в ці моменти часу вектори швидкості і прискорення за їх складовими.

Побудувати графіки залежностей швидкості від часу  $V(t)$ , та прискорення від часу  $a(t)$ .

**Розв'язання.** Знайдемо траєкторію руху точки в аналітичному вигляді. Для цього з заданих рівнянь руху (1.1) вилучаємо параметр  $t$ .

$$t = (x + 1)/4, \quad y = (x + 1)^2/8 + 3,$$

або після спрощення:

$$y = (x^2 + 2x + 25)/8, \quad (1.2)$$

що і є траєкторією руху точки.

Знаходимо швидкість руху.

$$V_x = dx/dt = 4,$$

$$V_y = dy/dt = 4t, \quad (1.3)$$

$$V = (V_x^2 + V_y^2)^{0.5}.$$

Знаходимо прискорення точки.

$$a_x = dV_x/dt = 0,$$

$$a_y = dV_y/dt = 4, \quad (1.4)$$

$$a = (a_x^2 + a_y^2)^{0.5}.$$

Знаходимо дотичне, нормальне прискорення та радіус кривини траєкторії.

$$a_\tau = dV/dt = (V_x a_x + V_y a_y) / V,$$

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{0.5}, \quad (1.5)$$

$$\rho = V^2 / a_n.$$

За формулами (1.1), (1.3) - (1.5) розраховуємо значення координат  $x$  і  $y$ , швидкості  $V$  із складовими  $V_x$  та  $V_y$ , прискорення  $a$  із

складовими  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_r$ ,  $a_n$  і радіуса кривини  $\rho$  при значенні часу  $t = 0$ ,  $t = 0,5c$ , і т. д. через кожні півсекунди до  $t = 7c$ . Величини  $V_x$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  і  $a$  від часу не залежать і в будь-який момент вони рівні:  $V_x=4$ ,  $a_x=0$ ,  $a_y=4$ ,  $a = 4$ . Інші результати заносимо в таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

$t$	$x$	$y$	$V_y$	$V$	$a_r$	$a_n$	$\rho$
0	-1	3	0	4	0	4	4
0,5	1	3,5	2	4,47	1,79	3,58	5,59
1	3	5	4	5,66	2,83	2,83	11,3
1,5	5	7,5	6	7,21	3,33	2,22	23,4
2	7	11	8	8,84	3,58	1,79	44,7
2,5	9	15,5	10	10,8	3,71	1,49	78,1
3	11	21	12	12,8	3,79	1,26	126
3,5	13	27,5	14	14,6	3,85	1,1	193
4	15	35	16	16,5	3,88	0,97	280
4,5	17	43,5	18	18,4	3,91	0,87	352
5	19	53	20	20,4	3,92	0,78	530
5,5	21	63,5	22	22,4	3,94	0,72	699
6	23	75	24	24,3	3,95	0,68	900
6,5	27	101	28	28,3	3,96	0,57	1414
7	29	115,5	30	30,3	3,97	0,53	1733

За одержаними результатами будемо траєкторію руху точки на рис.1.1. Аналітичний вигляд траєкторії дає формула (1.2), що

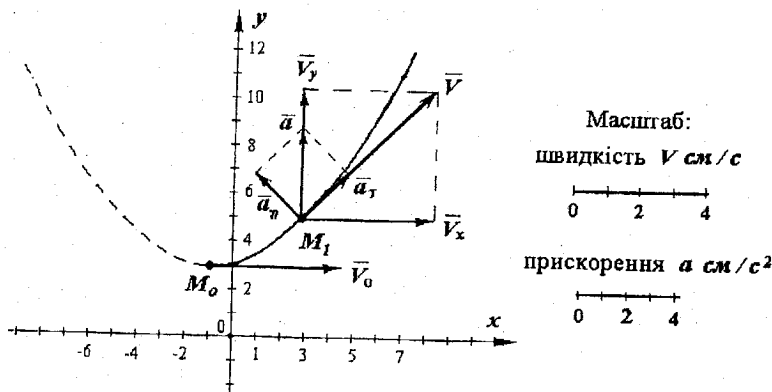


Рисунок 1.1

в сукупності із зображенням дає повне уявлення про лінію, по якій рухається точка. Це парабола, яка є симетричною до вертикальної прямої, що проходить через точку  $x = -1$  з мінімумом в точці  $(-1, 3)$ . Але точка  $M$  рухається тільки по правій вітці цієї параболи, тобто  $x > -1$ . В таблиці результатів при  $t = 0$  маємо:  $x = -1, y = 3$ . Це і є початкове положення точки  $M$  на траєкторії, яке помічаємо точкою  $M_0$ . При  $t = 1$  с маємо:  $x = 3, y = 5$ . Це відповідає положенню точки  $M$  на траєкторії в момент часу  $1$  с, що помічаємо точкою  $M_1$ . Точки  $M_0$  і  $M_1$  показуємо на рис.1.1.

Будуємо графіки залежностей швидкості від часу  $V(t)$  та прискорення від часу  $a(t)$  і показуємо їх на рисунках 1.2 і 1.3.

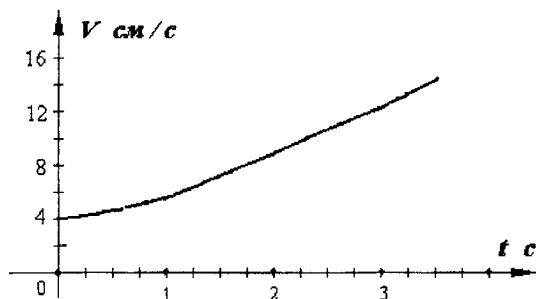


Рисунок 1.2

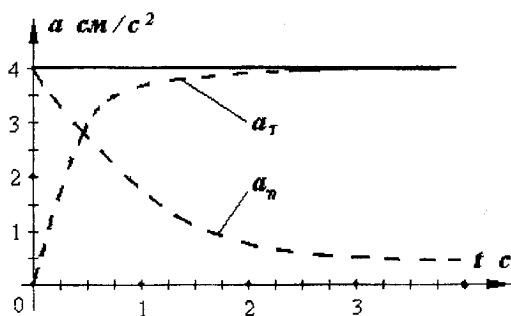


Рисунок 1.3

Детальніше уявлення про характер руху точки по траєкторії будемо мати тоді, коли в точках  $M_0$  і  $M_1$  на рис.1.1 покажемо вектори швидкостей і прискорень. В початковий момент руху, при  $t=0$ ,  $V_x=4, V_y=0, V=4$ . Це означає, що в точці  $M_0$  швидкість рухомої точки напрямлена паралельно осі  $Ox$ . В момент часу  $t=1$  с маємо:

$V_x = 4$ ,  $V_y = 4$ ,  $V = 5,66$ . Тоді в точці  $M_1$  на рис.1.1 вектор швидкості складає з віссю  $Ox$  кут  $45^\circ$ . Вектори швидкостей в точках  $M_0$  і  $M_1$  будуюмо в масштабі, що приводиться на рис. 1.1. Таким же чином, тільки у відповідному масштабі, будуюмо для точки  $M_1$  вектори прискорення.

Як видно з рис.1.2 швидкість точки на початку руху росте нелінійно. Через достатньо великий проміжок часу функція  $V(t)$  стає майже лінійною, тобто точка рухається рівноприскорено.

З рис.1.3 видно, що повне прискорення є сталою величиною, а дотичне і нормальне прискорення асимптотично наближаються до певних границь:  $a_\tau$  прямує до 4, а  $a_n$  до нуля. Що означає, що десь в безмежності точка рухається рівноприскорено і прямолінійно.

Відповідь: згідно із заданими рівняннями точка рухається по траєкторії, що є правою віткою параболи  $y = (x^2 + 2x + 25) / 8$ , в початковий момент часу знаходиться в точці  $(-1,3)$ , в момент часу  $1c$  в точці  $(1, 5)$  має швидкість  $V = 5,66 \text{ см/с}$  і прискорення  $a = 4 \text{ см/с}$ .

**Порада.** Одержання таблиці 1.3, побудову траєкторії, яка зображена на рис.1.1, та графіків  $a(t)$  і  $V(t)$ , що на рис.1.2 і 1.3, можна автоматизувати, якщо скористатись комп'ютером. Для цього потрібно скласти програму, яку умовно назовемо "парабола".

Програма "парабола".

$$X=4*t-1$$

$$Y=2*t^2+3$$

$$V_x=4$$

$$V_y=4*t$$

$$V=(V_x^2+V_y^2)^{0,5}$$

$$A_x=0$$

$$A_y=4$$

$$A=(A_x^2+A_y^2)^{0,5}$$

$$A_\tau=(V_x*A_x+V_y*A_y)/V$$

$$A_n=(A^2-A_\tau^2)^{0,5}$$

$$R=V^2/A_n$$

Час  $t$  задаємо як величину, що змінюється від  $t = 0$  до  $t = 7$  з кроком  $0,5$ .



## К.2 Кінематичне дослідження руху точки плоского механізму

На рис. 2.1 – 2.15 зображені схеми плоских механізмів, які складаються з одної або з декількох ланок. На одній із ланок вказано точку  $M$ . Виконати для точки  $M$  кінематичне дослідження руху, тобто вказати для неї рівняння руху, траєкторію, швидкість, прискорення із його складовими, радіус кривини траєкторії та шлях, пройдений точкою по траєкторії в залежності від часу.

Побудувати у вибраному масштабі в плоскій системі координат  $xOy$  траєкторію руху точки  $M$ , вказати її положення на траєкторії в початковий момент руху, позначивши  $M_0$ , та в момент часу  $t = t_1$ , позначивши  $M_1$ , відкласти для точок  $M_0$  та  $M_1$  вектори швидкостей і прискорень за їх складовими у зручно вибраних масштабах. Виконати аналіз руху точки, вказавши при цьому графіки залежностей швидкості від часу  $V=V(t)$ , прискорення від часу  $a=a(t)$ , пройденого по траєкторії шляху від часу  $S=S(t)$ .

Дані для розрахунків приводяться по варіантах в тридцяти таблицях, які містяться на рис. 2.1 – 2.15. Розміри ланок задані в сантиметрах, а час в секундах.

### 2.1 Приклад виконання завдання

На рис.2.16 зображено плоский механізм, де на продовженні шатуна  $AB$  знаходиться точка  $M$ . Кривоши  $OA$  здійснює обертання за законом  $\varphi = 2\pi t^2$ . Для точки  $M$  виконати кінематичне дослідження руху так, як це вимагається в умові розрахунково-графічного завдання.

В розрахунках взяти розміри:  $OA=AB=BM= 40$  см. Час  $t$  в секундах, прийняти, що  $t_1= 0,3$  с.

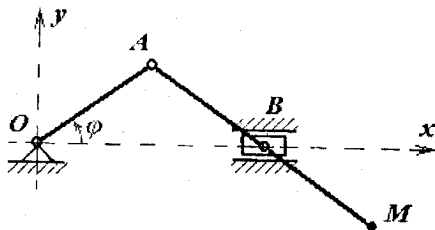


Рисунок 2.16

Розв'язання. Знайдемо координати точки  $M$  в залежності від кута  $\varphi$ .

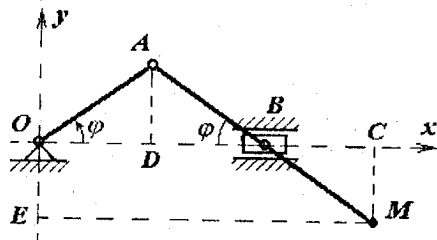


Рисунок 2.17

З рис.2.17 видно, що  $x = OD + DC$ , а  $y = -OE$ . Трикутник  $OAB$  рівнобедрений, тому  $OD = 40 \cos \varphi$ ,  $CD = 80 \cos \varphi$ ,  $OE = 40 \sin \varphi$ . Тоді координати точки  $M$  в залежності від кута  $\varphi$  будуть рівні :

$$x = 120 \cos \varphi, \quad y = -40 \sin \varphi$$

Підставимо замість  $\varphi$  його значення від  $t$  і одержимо параметричні рівняння руху точки  $M$ .

$$x = 120 \cos 2\pi t^2, \quad (2.1)$$

$$y = -40 \sin 2\pi t^2. \quad (2.2)$$

Знайдемо швидкість точки  $M$ .

$$V_x = \dot{x} = -480 \pi t \sin 2\pi t^2, \quad (2.3)$$

$$V_y = \dot{y} = -160 \pi t \cos 2\pi t^2, \quad (2.4)$$

$$V = (V_x^2 + V_y^2)^{0.5}. \quad (2.5)$$

Визначимо повне прискорення точки  $M$ .

$$a_x = \dot{V}_x = -480 \pi (\sin 2\pi t^2 + 4\pi t^2 \cos 2\pi t^2), \quad (2.6)$$

$$a_y = \dot{V}_y = -160 \pi (\cos 2\pi t^2 - 4\pi t^2 \sin 2\pi t^2), \quad (2.7)$$

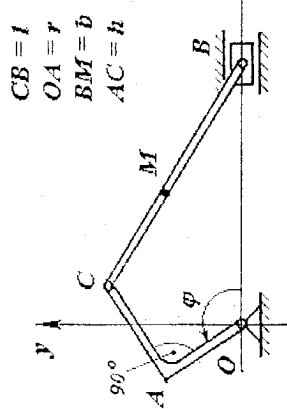
$$a = (a_x^2 + a_y^2)^{0.5}. \quad (2.8)$$

Дотичне та нормальне прискорення знайдемо за формулами

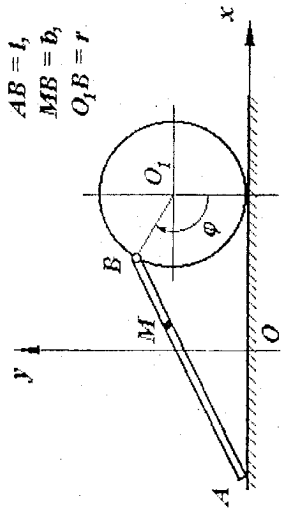
$$a_\tau = \dot{V} = (V_x a_x + V_y a_y) / V, \quad (2.9)$$

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{0.5}, \quad (2.10)$$

1



2



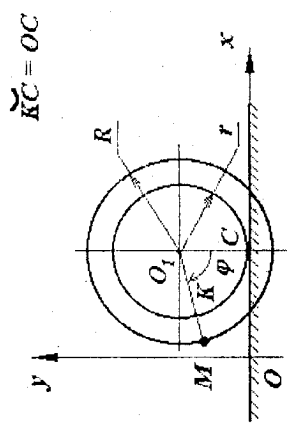
Вариант	$r$	$h$	$l$	$b$	$\Phi$	$t_1$
1	10	20	110	15	$\pi t$	0,8
2	20	15	100	25	$t^2$	0,4
3	30	25	80	15	$3\pi t$	0,5
4	40	18	90	20	$2\pi t^2$	0,9
5	15	12	70	35	$t^3$	0,6
6	20	10	75	45	$\pi t^3$	0,5
7	60	40	120	29	$5\pi t$	0,5
8	26	11	78	40	$\pi t^2$	0,3
9	32	15	97	34	$3t^2$	0,6
0	70	20	120	60	$2t$	0,7

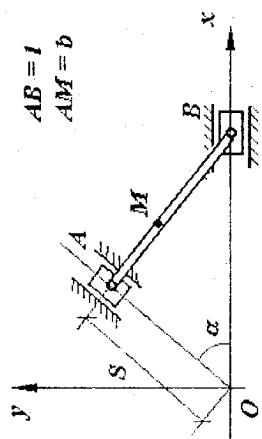
Вариант	$r$	$l$	$b$	$\Phi$	$t_1$
1	25	60	20	$2t^2$	0,25
2	42	85	40	$2\pi t^2$	0,50
3	28	90	60	$t^3$	0,60
4	38	100	10	$\pi t^3$	0,90
5	45	105	40	$5\pi t$	0,50
6	60	180	29	$t^2$	0,20
7	55	150	80	$\pi t^2$	0,45
8	80	200	36	$3t^2$	0,95
9	70	160	50	$2t$	0,75
0	36	90	40	$2\pi t$	0,55

РИСУНОК 2.1

3



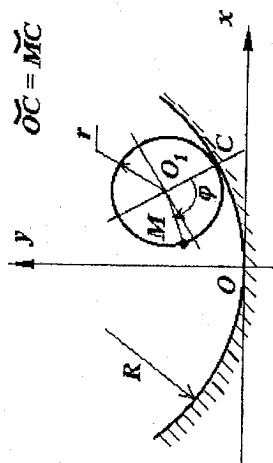
4



Вариант	$r$	$R$	$\varphi$	$t_1$	Вариант	$l$	$b$	$\alpha^\circ$	$S$	$t_1$
1	30	55	$\pi t^2$	1,00	1	50	23	32	$l \sin 2\pi t$	0,5
2	35	60	$0,5\pi t^2$	0,50	2	60	42	43	$l \cos \pi t$	0,7
3	40	48	$\pi t$	0,80	3	53	25	37	$l \cos \pi t^2$	1,0
4	45	58	$2\pi t$	0,60	4	64	32	29	$l \sin \pi t$	1,5
5	50	64	$\pi t^3$	0,35	5	72	40	50	$l \cos(\pi t/2)$	1,2
6	45	55	$3\pi t$	0,65	6	90	40	48	$l \sin(\pi t/2)$	2,0
7	40	48	$0,5\pi t$	0,75	7	78	38	62	$l \sin(3\pi t/4)$	0,9
8	35	50	$\pi t^2$	0,25	8	85	55	34	$l \cos(3\pi t/4)$	0,7
9	30	45	$t^3$	0,30	9	65	30	28	$l \sin t^3$	0,3
10	25	35	$t^4$	0,70	10	70	27	59	$l \cos t^3$	0,2

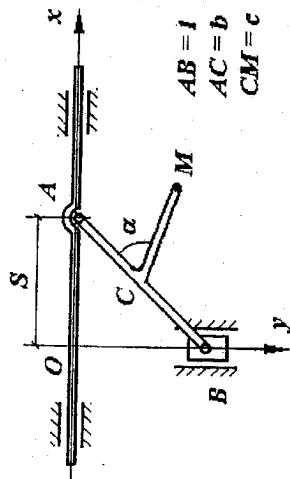
РИСУНОК 2.2

5



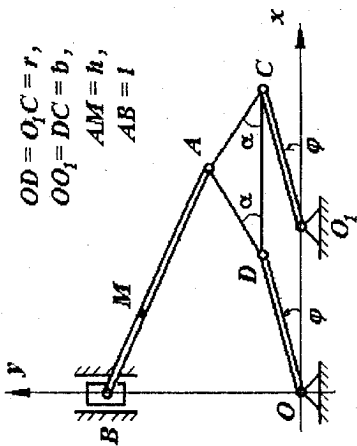
Вариант	R	r	$\varphi$	$t_1$
1	100	25	$2\pi t^3$	0,5
2	80	60	$\pi t^2$	0,7
3	90	30	$t$	0,6
4	64	8	$2t^3$	0,2
5	48	32	$3\pi t^3$	0,8
6	96	24	$\pi t^2$	0,3
7	38	20	$t^4$	0,4
8	60	15	$2t^2$	0,4
9	84	20	$\pi t$	0,3
10	72	16	$2\pi t$	0,7

6



Вариант	l	b	c	$\alpha^\circ$	S	$t_1$
1	49	25	5	35	$I \sin \pi t^2$	0,3
2	72	36	8	70	$I \cos \pi t^2$	0,6
3	68	38	6	26	$I \sin 2\pi t$	0,7
4	93	43	12	32	$I \cos 2\pi t$	0,9
5	45	20	4	44	$I \sin t$	1,3
6	52	38	20	61	$I \cos t$	0,5
7	64	28	7	23	$I \sin t^2$	1,1
8	85	40	9	80	$I \cos t^2$	0,7
9	39	12	4	28	$I \sin \pi t^3$	0,3
10	82	60	6	49	$I \cos \pi t^3$	0,4

7



Вариант

b

l

h

r

 $\alpha^\circ$  $\varphi$  $t_1$ 

Вариант

R

r

 $\varphi$  $t_1$ 

8

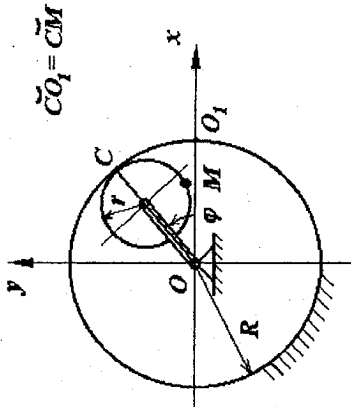
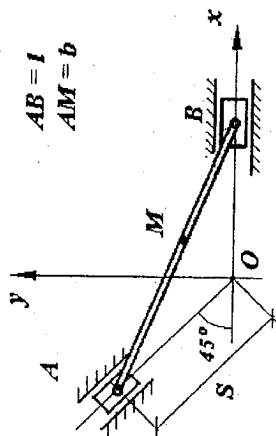
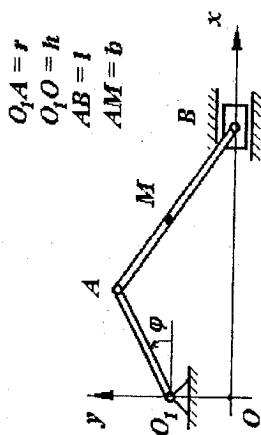


Рисунок 2.4

9



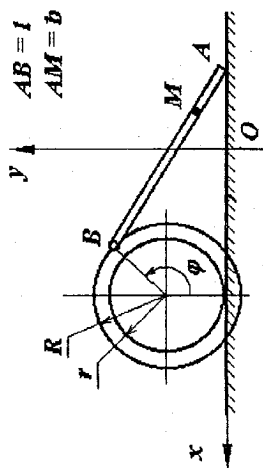
10



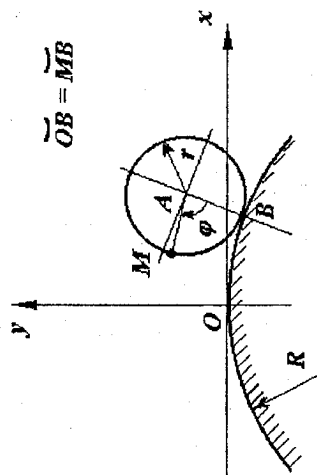
Вариант	$l$	$b$	$S$	$I_1$	Вариант	$r$	$I$	$h$	$b$	$\varphi$	$I_1$
1	95	30	$l \sin t^2$	0,85	1	25	75	5	20	$\pi t$	0,45
2	80	50	$l \sin 2\pi t$	0,55	2	20	80	6	22	$t^2$	0,65
3	60	32	$l \cos t^2$	0,64	3	35	85	7	24	$2\pi t$	1,20
4	70	45	$l \cos 2\pi t$	0,45	4	40	90	8	26	$2\pi t^2$	0,75
5	90	60	$l \sin \pi t$	0,25	5	45	95	9	28	$t^3$	0,55
6	85	32	$l \cos \pi t$	0,62	6	50	100	10	30	$\pi t^2$	0,75
7	63	28	$l \sin t^3$	0,73	7	45	105	9	50	$5\pi t$	0,65
8	72	56	$l \cos 3t$	0,52	8	40	110	8	55	$3t^2$	0,35
9	45	28	$l \sin 3\pi t$	0,35	9	35	115	7	80	$2t$	0,45
10	75	15	$l \cos 3\pi t$	0,65	10	30	120	6	60	$2t^3$	0,45

Рисунок 2.5

11



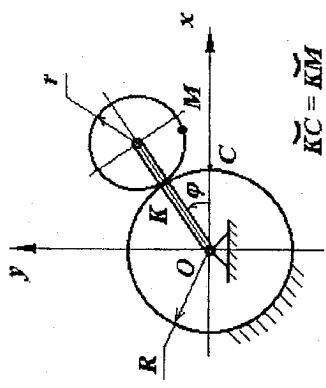
12



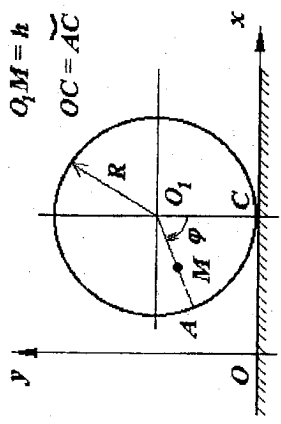
Вариант	R	r	l	b	$\varphi$	$t_1$	Вариант	R	r	$\varphi$	$t_1$
1	56	30	95	25	$\pi t^2$	0,50	1	120	50	$2t$	0,3
2	45	30	100	50	$t^2$	1,25	2	130	35	$2\pi t^2$	0,7
3	52	20	80	36	$\pi t$	0,55	3	90	20	$t^3$	0,4
4	36	32	90	30	$2\pi t$	0,95	4	100	25	$\pi t^2$	0,8
5	28	24	65	20	$t^3$	0,25	5	160	40	$5\pi t$	0,4
6	40	35	110	50	$\pi t^3$	0,75	6	145	28	$t^2$	0,6
7	60	30	120	45	$5\pi t$	0,60	7	180	45	$\pi t$	0,8
8	38	28	95	65	$\pi t^2$	0,65	8	100	20	$3t^2$	0,4
9	70	60	180	30	$3t$	1,30	9	80	15	$2t$	0,5
10	50	45	150	70	$2t^2$	0,60	10	120	30	$2\pi t$	0,6



13



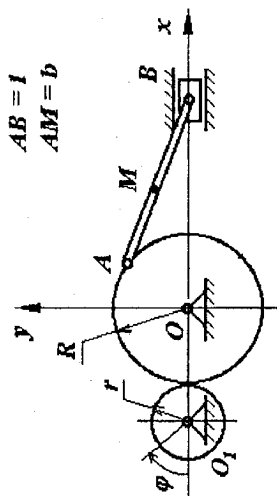
14



Вариант	R	r	$\varphi$	$t_1$	Вариант	R	h	$\varphi$	$t_1$
1	50	25	$\pi t$	0,25	1	110	36	$2t^2$	0,55
2	75	25	$\pi t^2$	0,50	2	100	95	$2\pi t^2$	0,35
3	64	16	$3\pi t$	0,20	3	120	75	$2t^3$	0,90
4	72	36	$2\pi t^2$	0,35	4	48	40	$\pi t^3$	0,70
5	70	35	$t^3$	0,90	5	160	73	$5\pi t$	0,58
6	80	20	$\pi t^3$	0,75	6	140	90	$t^2$	0,60
7	99	33	$5\pi t$	0,40	7	120	80	$\pi t^2$	0,45
8	84	21	$t^2$	0,65	8	100	85	$3t^2$	0,75
9	60	30	$3t^2$	0,45	9	96	80	$t$	0,64
10	90	18	$2t$	0,70	10	120	90	$2\pi t$	0,55

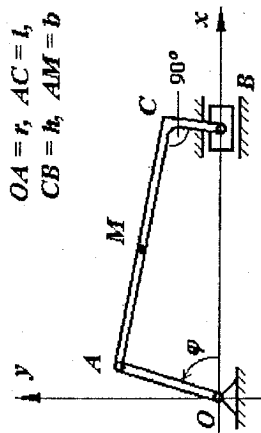
РИСУНОК 2.7

15



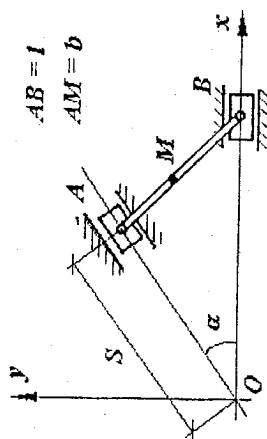
Вариант	$r$	$R$	$I$	$b$	$\varphi$	$t_1$
1	10	15	80	60	$\pi t$	0,15
2	12	18	72	30	$t^2$	1,20
3	15	40	100	25	$3\pi t$	0,65
4	11	25	80	40	$2\pi t^2$	0,80
5	16	20	110	50	$t^3$	0,95
6	14	28	85	20	$\pi t^3$	0,25
7	18	20	90	40	$5\pi t$	0,50
8	20	30	120	85	$\pi t^2$	0,16
9	15	18	95	60	$3t^2$	1,30
10	23	30	63	40	$2t$	0,75

16



Вариант	$r$	$I$	$h$	$b$	$\varphi$	$t_1$
1	15	73	4	60	$2t^2$	0,72
2	23	105	8	80	$2\pi t$	0,35
3	42	120	5	40	$t^3$	0,40
4	50	145	12	90	$\pi t^3$	0,55
5	40	110	7	50	$5\pi t$	0,20
6	25	85	6	40	$t^2$	0,75
7	18	68	11	60	$\pi t^2$	0,25
8	24	72	5	30	$3t^2$	0,60
9	16	95	4	40	$2t$	0,70
10	36	130	7	65	$2\pi t$	0,92

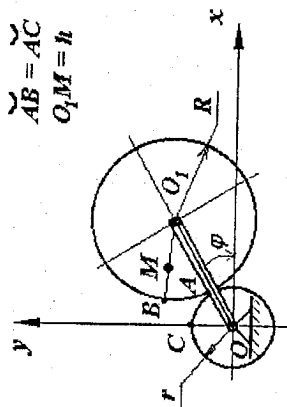
17



$$AB = l$$

$$AM = b$$

18

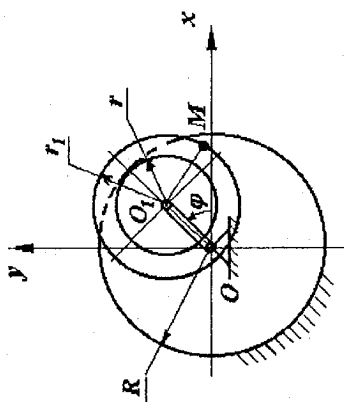


$$\sphericalangle AB = AC$$

$$O_1M = h$$

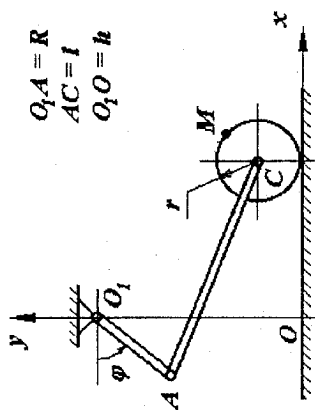
Вариант	$l$	$b$	$\alpha^\circ$	$S$	$t_1$	Вариант	$R$	$r$	$h$	$\varphi$	$t_1$
1	80	43	30	$l \sin \pi t$	0,25	1	40	10	25	$2t^2$	0,50
2	85	28	45	$l \cos t^2$	0,50	2	45	15	20	$2\pi t^2$	0,25
3	110	35	60	$l \cos 3\pi t$	0,40	3	48	12	24	$\pi t^2$	0,50
4	90	65	75	$l \sin 2\pi t^2$	0,60	4	64	16	32	$3t^2$	0,90
5	95	30	35	$l \sin t^3$	0,75	5	90	18	30	$2t$	0,20
6	100	75	50	$l \cos \pi t^3$	0,80	6	55	11	25	$t^2$	0,40
7	120	32	65	$l \sin 5\pi t$	0,12	7	48	8	40	$t^3$	0,75
8	130	46	85	$l \cos \pi t^2$	0,17	8	30	10	30	$\pi t^3$	0,35
9	125	64	36	$l \sin 3t^2$	0,75	9	64	16	20	$5\pi t$	0,50
10	115	70	48	$l \cos 2t$	0,85	10	70	14	30	$2\pi t$	0,65

19



Вариант	R	r	$F_1$	$\varphi$	$f_1$
1	80	10	15	$5\pi l$	0,50
2	72	18	20	$\pi l^2$	0,75
3	45	15	20	$3l^2$	1,20
4	80	16	26	$2l$	1,35
5	51	17	20	$l^3$	0,65
6	66	11	17	$\pi l^3$	0,35
7	48	12	18	$\pi l$	0,40
8	70	14	16	$l^2$	0,60
9	78	13	18	$3\pi l$	1,20
10	76	19	21	$2\pi l^2$	0,95

20



$$O_1A = R$$

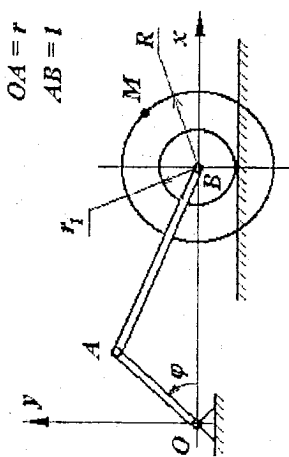
$$AC = l$$

$$O_1O = h$$

Вариант	R	r	l	h	$\varphi$	$f_1$
1	45	15	110	70	$2l^2$	0,75
2	40	20	120	90	$2\pi l^2$	0,50
3	50	25	140	60	$l^3$	0,40
4	60	30	105	70	$\pi l^3$	1,30
5	65	13	170	95	$5\pi l$	0,35
6	55	25	165	80	$l^2$	0,65
7	45	20	125	65	$\pi l^2$	0,25
8	60	30	100	70	$3l^2$	0,45
9	85	15	130	95	$2l$	0,60
10	90	35	180	99	$2\pi l$	0,70

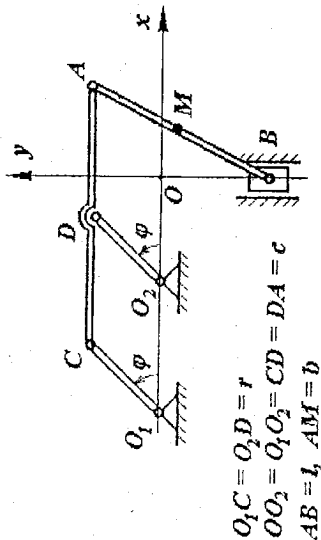
Рисунок 2.10

21



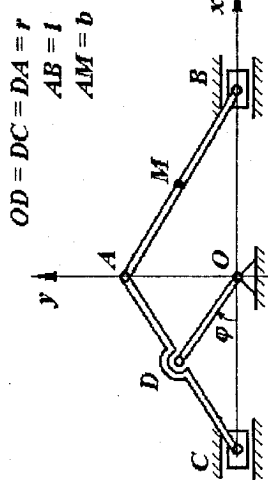
Вариант	$r$	$l$	$r_1$	$R$	$\varphi$	$t_1$
1	50	90	10	18	$\pi t^2$	0,70
2	40	100	8	17	$5\pi t$	0,45
3	80	120	16	20	$\pi t$	0,60
4	60	100	15	20	$2\pi t$	0,35
5	90	140	10	15	$t^3$	0,80
6	65	120	13	18	$\pi t^3$	0,90
7	84	160	21	26	$t^2$	0,40
8	55	100	11	16	$\pi t^2$	0,85
9	42	80	7	18	$3t$	0,75
10	90	150	12	24	$2t^2$	0,50

22

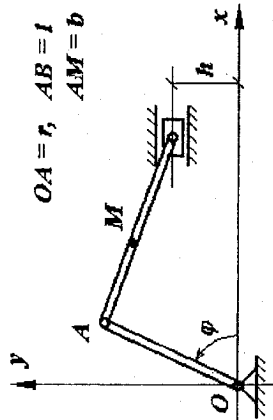


Вариант	$r$	$l$	$c$	$b$	$\varphi$	$t_1$
1	10	50	30	25	$2t$	0,4
2	20	70	40	30	$2\pi t^2$	0,6
3	30	90	60	40	$t^3$	0,9
4	35	65	30	20	$\pi t$	0,3
5	25	80	50	40	$5\pi t$	0,6
6	15	60	70	35	$t^2$	0,4
7	22	72	85	25	$\pi t^2$	0,3
8	23	80	45	30	$3t^2$	0,5
9	28	90	30	40	$2t^3$	0,7
10	36	85	48	45	$2\pi t$	0,8

23



24

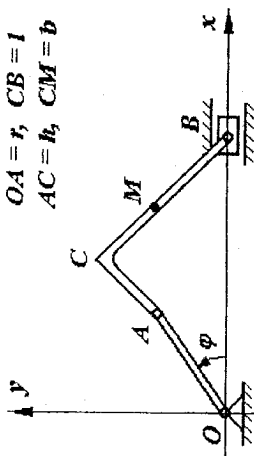


Вариант	$r$	$l$	$b$	$\varphi$	$t_1$	Вариант	$r$	$l$	$b$	$h$	$\varphi$	$t_1$
1	25	70	40	$5\pi t$	0,55	1	40	75	35	4	$2t^2$	0,5
2	30	85	20	$t^2$	0,65	2	35	90	40	7	$2\pi t^2$	0,7
3	35	90	25	$\pi t$	0,40	3	28	65	20	6	$t^3$	1,3
4	40	110	30	$2\pi t$	0,75	4	30	100	25	5	$\pi t^3$	0,6
5	35	100	60	$t^3$	0,80	5	36	85	60	8	$5\pi t$	0,4
6	30	95	70	$\pi t$	0,70	6	38	95	30	9	$t^2$	1,4
7	32	90	30	$\pi t^2$	0,50	7	25	80	45	6	$\pi t^2$	0,6
8	28	85	60	$\pi t^2$	0,45	8	30	90	38	4	$3t^2$	0,7
9	30	80	25	$3t$	0,65	9	38	87	29	5	$2t$	0,3
10	25	120	50	$2t^2$	0,85	10	25	96	43	7	$2\pi t$	0,4

25

$$OA = r, \quad CB = l$$

$$AC = h, \quad CM = b$$



Вариант

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

r

43

25

15

20

18

12

16

30

35

22

l

80

75

60

90

72

48

52

70

85

65

b

20

25

15

40

20

15

35

40

50

23

h

20

10

17

15

26

20

12

23

18

16

 $\varphi$  $\pi l$  $l^2$  $\pi l$  $2\pi l$  $l^3$  $\pi l$  $5\pi l$  $\pi l^2$  $3l$  $2l^2$  $t_1$ 

0,25

0,30

0,50

0,35

0,85

0,75

0,60

0,45

0,65

0,40

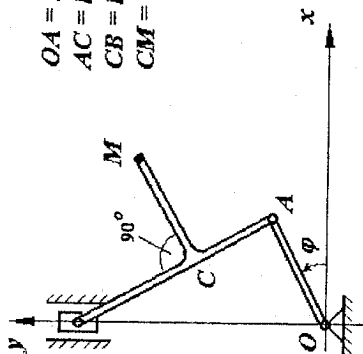
26

$$OA = r,$$

$$AC = h,$$

$$CB = l,$$

$$CM = b$$



Вариант

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

r

10

15

30

18

25

20

32

17

22

27

l

90

100

70

80

75

85

95

110

72

95

b

30

60

55

40

32

65

20

40

32

25

h

8

10

12

7

9

14

8

6

5

7

 $\varphi$  $2l^2$  $2\pi l$  $l^3$  $\pi l$  $5\pi l$  $l^2$  $\pi l^2$  $3l^2$  $2l$  $2\pi l$  $t_1$ 

0,40

0,80

0,90

0,65

0,55

0,45

0,50

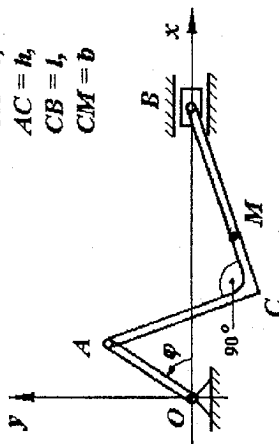
0,40

0,75

0,35

27

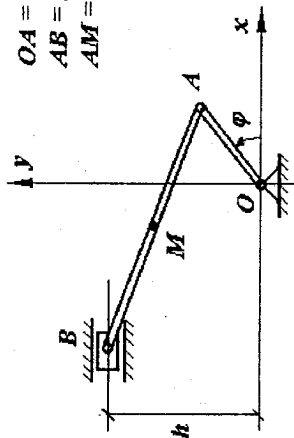
$$\begin{aligned} OA &= r, \\ AC &= h, \\ CB &= l, \\ CM &= b \end{aligned}$$



Вариант	$r$	$l$	$h$	$b$	$\varphi$	$t_1$
1	50	80	20	25	$\pi t$	0,75
2	40	72	25	18	$t^2$	0,43
3	30	65	15	45	$\pi t$	0,50
4	45	90	23	60	$2\pi t$	0,25
5	28	75	48	40	$t^3$	0,90
6	25	67	54	27	$\pi t^3$	0,60
7	32	85	39	45	$5\pi t$	0,30
8	36	90	40	28	$\pi t$	0,65
9	45	95	25	46	$3t$	0,35
10	37	85	60	35	$2t^2$	0,43

28

$$\begin{aligned} OA &= r, \\ AB &= l, \\ AM &= b \end{aligned}$$

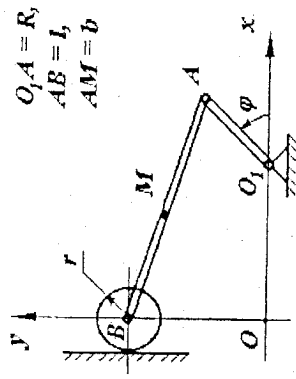


Вариант	$r$	$l$	$b$	$h$	$\varphi$	$t_1$
1	25	75	30	12	$t$	0,30
2	30	95	60	8	$2\pi t^2$	0,50
3	36	80	20	10	$5\pi t$	0,65
4	18	60	15	9	$\pi t^3$	0,35
5	14	72	18	11	$t^3$	0,95
6	15	80	60	7	$2t^2$	0,75
7	20	90	35	10	$\pi t^2$	0,60
8	25	60	30	5	$3t^2$	0,45
9	28	70	35	6	$2t$	0,40
10	40	99	80	10	$2\pi t$	0,90

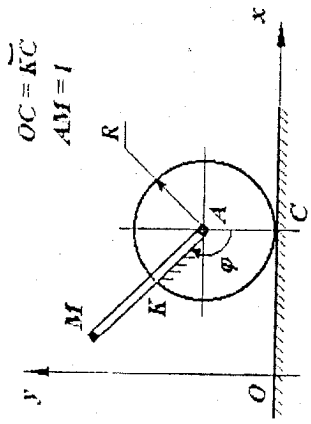
Рисунок 2.14



29



30



Вариант	R	r	l	b	$\varphi$	$t_1$	Вариант	R	l	$\varphi$	$t_1$
1	60	10	120	30	$\pi l$	0,65	1	25	43	$2l^2$	0,65
2	50	8	100	20	$l^2$	0,70	2	60	80	$\pi l$	0,70
3	40	5	100	45	$\pi l$	0,85	3	40	50	$l^3$	0,85
4	55	11	110	40	$2\pi l$	0,90	4	28	40	$\pi l^3$	0,75
5	70	14	140	50	$l^3$	0,80	5	32	38	$5\pi l$	0,60
6	45	9	120	40	$\pi l^2$	0,35	6	50	70	$l^2$	0,45
7	60	15	100	20	$5\pi l$	0,60	7	35	60	$2\pi l$	0,70
8	42	7	110	40	$\pi l^2$	0,50	8	22	40	$3l^2$	0,25
9	60	12	140	60	$3l$	0,70	9	15	45	$2l$	0,40
10	77	7	100	10	$2l$	0,65	10	46	72	$2\pi l$	0,75

Рисунок 2.15

А коли відома швидкість і нормальне прискорення, то радіус кривини і шлях, який пройде точка по траєкторії, будуть знайдені за формулами :

$$\rho = V^2 / a_n, \tag{2.12}$$

$$S = \int v dt. \tag{2.13}$$

За формулами (2.1) – (2.13) виконаємо розрахунок координат, швидкості, прискорень, радіуса кривини та пройденого шляху. Знайдемо інтервал часу, за який точка  $M$  здійснить замкнену траєкторію. Період синуса чи косинуса в параметричних рівняннях траєкторії (2.1) і (2.2) рівний  $2\pi$ . Тому з рівності  $2\pi t^2 = 2\pi$  маємо:  $t = 1$  с. Для того, щоб більш детально прослідкувати за зміною характеристик візьмемо інтервал часу від  $0$  до  $1,5$  с. При необхідності цей інтервал можна взяти і більшим.

Введемо за допомогою програми EXCEL в комп'ютер значення  $t$  з кроком  $0,1$  с, а для підрахунку координат, швидкості, прискорень, радіуса кривини і пройденого шляху формули (2.1) – (2.13), де змінний параметр  $t$  виражається через його електронну адресу. Інтеграл (2.13) є еліптичним, він не може бути знайденим в елементарних функціях, тому для його обчислення використовуємо один з найпростіших числових методів – метод прямокутників. Результати обчислень приводимо в табл. 2.1.

За результатами обчислень будуюмо траєкторію і показуємо її на рис.2.18.

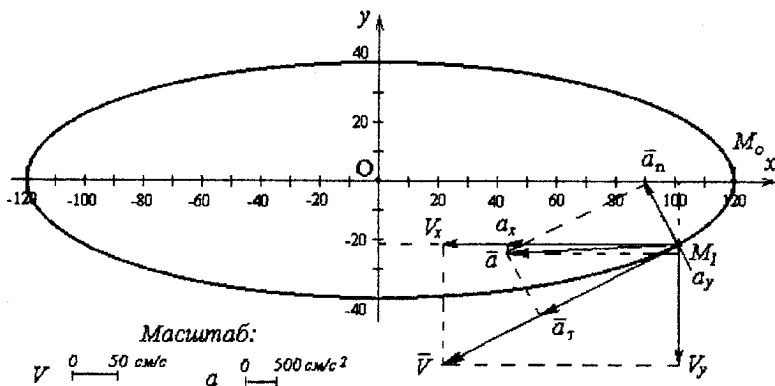


Рисунок 2.18

На траєкторії відмічаємо положення точки в початковий момент руху  $M_0$  і в момент  $t = 0,3$  с  $M_1$ .

Таблица 2.1

$t$	$x$	$y$	$V_x$	$V_y$	$V$	$ax$	$ay$	$a$	$at$	$an$	$\rho$	$S$
0	120	0	0	0	0	-47,33	-502,4	504,62	0	504,62	0	0
0,05	119,99	-0,63	-1,183	-25,12	25,145	-212,9	-502,1	545,38	511,55	189,09	3,3437	1,2572
0,1	119,76	-2,51	-9,459	-50,14	51,025	-519,7	-497,4	719,39	585,16	418,46	6,2218	3,8085
0,15	118,8	-5,63	-31,84	-74,61	81,118	-961,9	-477,4	1073,9	816,64	697,36	9,4359	7,8644
0,2	116,23	-9,94	-74,93	-97,33	122,83	-1521	-423,9	1578,6	1263,5	946,36	15,942	14,006
0,25	110,87	-15,3	-144,1	-116	185,04	-2151	-313,3	2173,4	1871,7	1104,8	30,993	23,258
<b>0,3</b>	<b>101,3</b>	<b>-21,4</b>	<b>-242</b>	<b>-127,3</b>	<b>273,6</b>	<b>-2766</b>	<b>-120,1</b>	<b>2768,2</b>	<b>2503,9</b>	<b>1180,3</b>	<b>63,411</b>	<b>36,937</b>
0,35	86,208	-27,8	-367	-126,3	388,09	-3224	176,8	3229,2	2991,3	1216,7	123,79	56,342
0,4	64,351	-33,8	-508,9	-107,8	520,15	-3328	582,76	3378,5	3134,9	1259,6	214,8	82,349
0,45	35,359	-38,2	-648,1	-66,62	651,54	-2835	1073	3031,1	2710,2	1357,3	312,77	114,93
0,5	0,9956	-40	-753,6	-0,2	753,6	-1512	1577,1	2184,7	1511,3	1577,5	360	152,61
0,55	-38,76	-37,9	-784,5	89,253	789,59	774,86	1968,8	2115,8	-547,35	2043,7	305,05	192,09
0,6	-76,38	-30,8	-697,5	191,88	723,36	3928,7	2071,8	4441,5	-3238,4	3039,7	172,14	228,25
0,65	-106	-18,8	-459,6	288,4	542,58	7484,8	1694,4	7674,2	-5439,3	5413,6	54,38	255,38
0,7	-119,8	-2,57	-67,89	350,95	357,46	10529	700,32	10553	-1312,2	10471	12,203	273,26
0,75	-110,9	15,24	430,7	348,38	553,97	11776	-887,9	11809	8597,4	8095,9	37,906	300,95
0,8	-76,68	30,77	927,5	256,82	962,39	9899	-2785	10283	8796,7	5326,1	173,9	349,07
0,85	-20,9	39,39	1262	74,389	1263,7	4155,2	-4402	6053,3	3888,9	4638,8	344,27	412,26
0,9	43,887	37,23	1263	-165,4	1273,3	-4846	-4941	6920,3	-4162,8	5528,3	293,27	475,92
0,95	97,979	23,09	826,7	-389,7	913,93	-14586	-3698	15048	-11617	9564,7	87,327	521,62
1	120	0,127	4,801	-502,4	502,42	-20866	-522,5	20872	323,09	20870	12,095	546,74
1,05	96,215	-23,9	-945,8	-423	1036	-19266	3754,7	19629	16055	11293	95,044	598,54
1,1	30,291	-38,7	-1604	-139,5	1610,3	-7778	7261,2	10641	7119,6	7907,7	327,91	679,06
1,15	-52,34	-36	-1560	251,99	1580	10533	7728,7	13064	-9165,6	9309,7	268,13	758,05
1,2	-111,4	-14,9	-673,5	559,52	875,6	26890	3850	27164	-18224	20145	38,059	801,83
1,25	-111,1	15,12	712,3	581,39	919,45	30188	-3263	30363	21324	21616	39,11	847,81
1,3	-44,77	37,11	1818	243,69	1834,1	14271	-9707	17259	12855	11517	292,1	939,51
1,35	52,166	36,02	1832	-294,8	1856	-14772	-10575	18167	-12905	12788	269,37	1032,3
1,4	116,04	10,19	537,5	-680,2	866,91	-38104	-3636	38277	-20773	32151	23,375	1075,7
1,45	96,443	-23,8	-1300	-585,5	1426,2	-35129	7490,8	35919	28957	21252	95,708	1147
1,5	0,86	-40	-2261	-5,401	2260,7	-1833	14194	14312	1799,2	14198	359,97	1260
1,55	-97,65	-23,2	-1358	633,66	1498,5	38559	9220,6	39646	-31042	24661	91,05	1334,9
1,6	-111,9	14,42	869,4	749,78	1148,1	48615	-5355	48910	33319	35805	36,812	1392,3
1,65	-21,66	39,34	2446	149,6	2450,6	11356	-16807	20283	10308	17468	343,79	1514,9
1,7	91,754	25,78	1651	-653	1775,8	-43357	-12137	45023	-35855	27231	115,8	1603,6
1,75	111,31	-14,9	-985,5	-815,5	1279,2	-57455	6754,8	57851	39959	41833	39,117	1667,6
1,8	8,7704	-39,9	-2706	-66,09	2706,5	-6238	20353	21288	5739,5	20500	357,33	1802,9
1,85	-105,4	-19,1	-1332	816,62	1562	56822	10755	57831	-42816	38875	62,761	1881

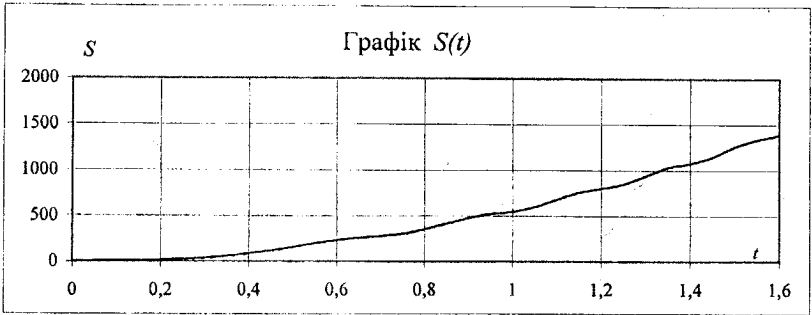


Рисунок 2.19

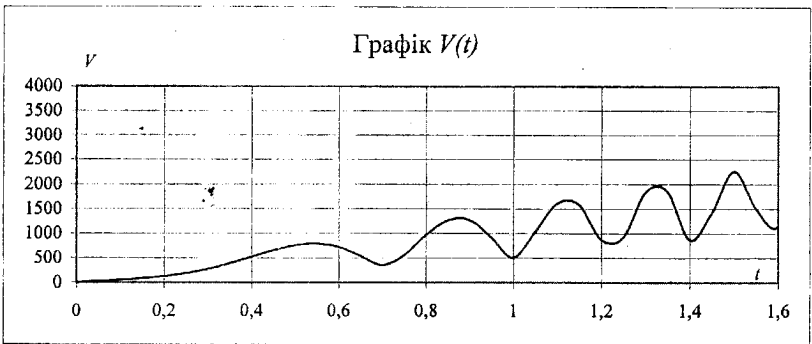


Рисунок 2.20

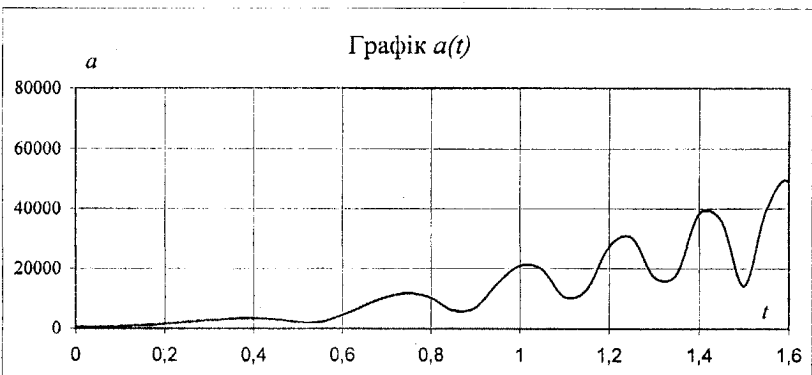


Рисунок 2.21

За даними, що приводяться в табл. 2.1 будують графіки залежностей  $S = S(t)$  на рис.2.19,  $V = V(t)$  на рис.2.20 і залежність  $a = a(t)$  на рис.2.21. Залежність  $S(t)$  є неточною, тому, що інтеграл шляху (2.13) визначався наближеним числовим методом, де точність залежить від кроку інтегрування. В цьому випадку вона рівна 0,05.

Графіки шляху, швидкості та прискорення від часу, як видно з відповідних рисунків, мають однакові масштаби по осі часу  $t$  і розташовані всі поряд один під одним. Це виконується для того, щоб було зручно аналізувати рух по траєкторії. Масштаби для осей шляху, швидкості та прискорення різні, але відповідають значенням табл. 2.1. Особливістю рис.2.18, де побудована траєкторія руху точки  $M$ , є те, що масштаби осей  $Ox$  і  $Oy$  є однаковими.

### К.3 Визначення швидкостей і прискорення точок твердого тіла при поступальному та обертовому русі

Механізм складається з трьох тіл: ступеневого шківів 2, тіла 1 та шківів 3 (рис. 3.1–3.5). Тіло 1 рухається за законом  $x = f(t)$ . Визначити при  $t_1 = 1c$  швидкість та прискорення точок  $A$  та  $M$ . Дані для розрахунку в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Варіант	$R_{2,м}$	$r_{2,м}$	$R_{3,м}$	$x=f(t),м$
1	0,1	0,05	0,3	$0,4t^2 + 0,3$
2	0,3	0,2	0,15	$0,5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$
3	0,4	0,3	0,1	$0,5t^3 + 0,33\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$
4	0,3	0,15	0,2	$0,6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	0,2	0,1	0,15	$0,6t^3$
6	0,3	0,15	0,2	$0,3t^2 - 0,4$
7	0,2	0,1	0,15	$0,2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)$
8	0,1	0,05	0,3	$4 \cos\frac{\pi}{3}t^2$
9	0,2	0,1	0,3	$5 \sin \pi t^2$
0	0,3	0,2	0,15	$0,7t^3 + 0,1$

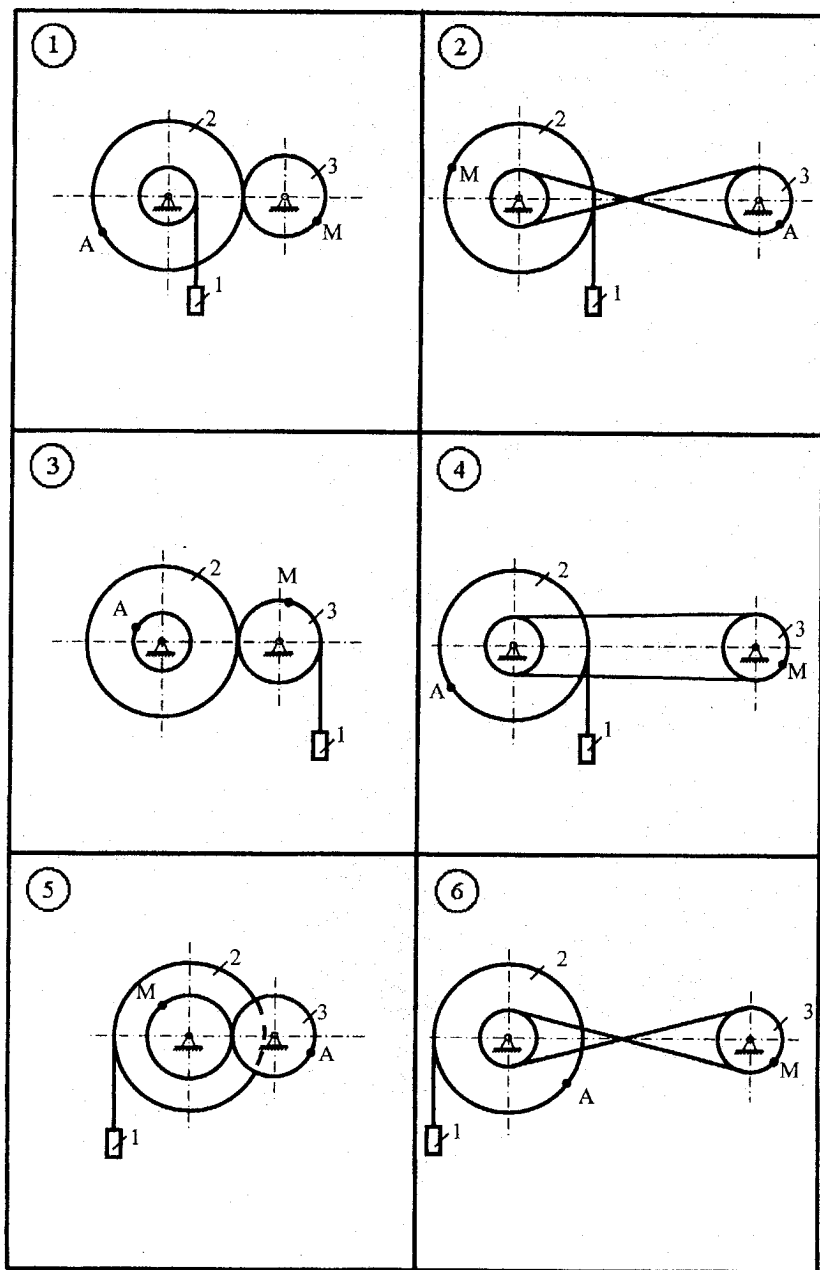


Рисунок 3.1

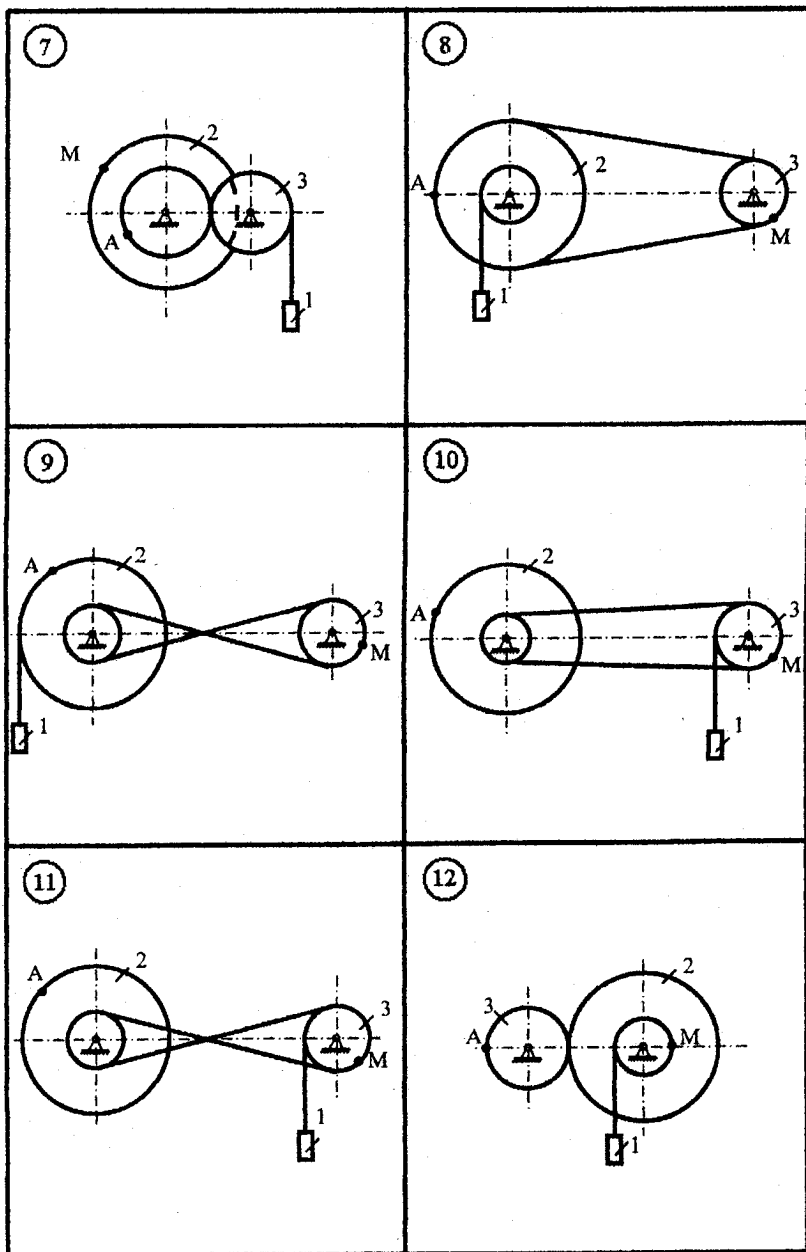


Рисунок 3.2



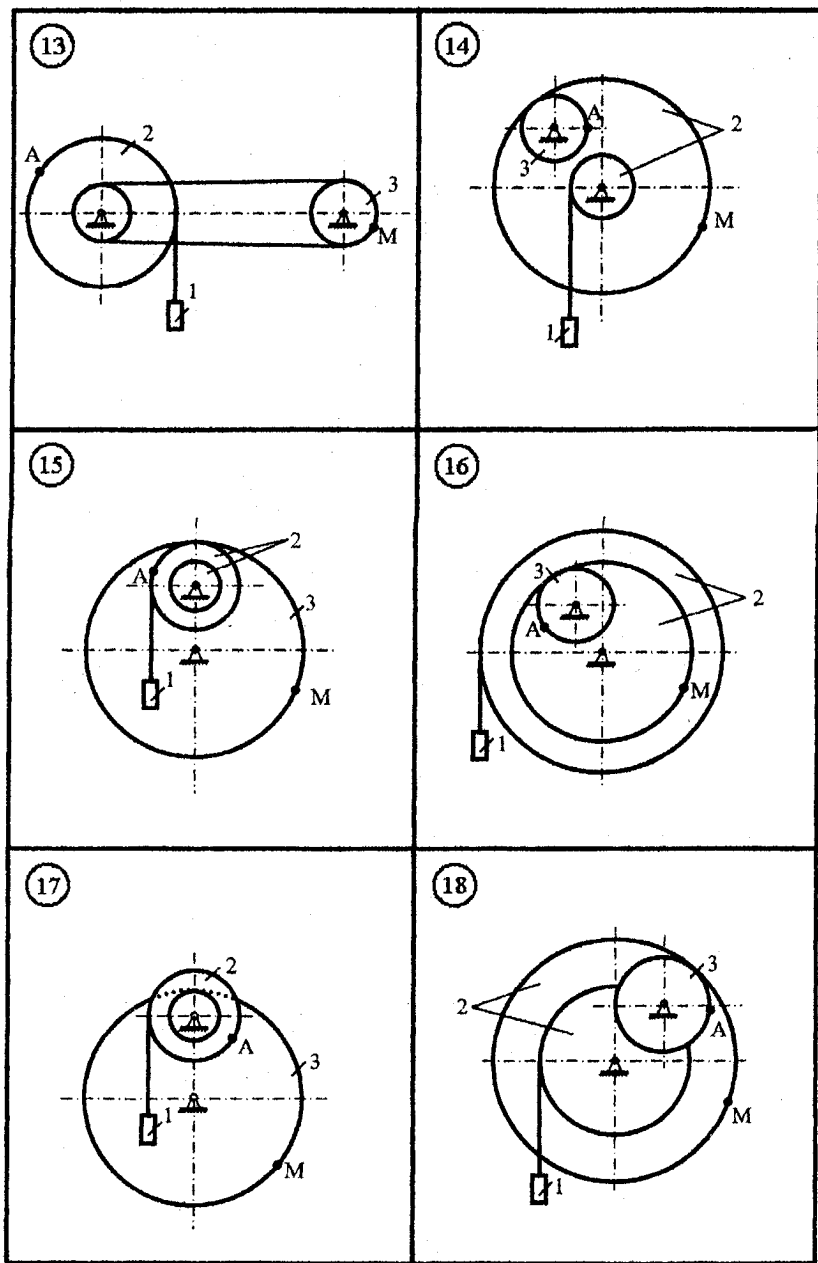


Рисунок 3.3

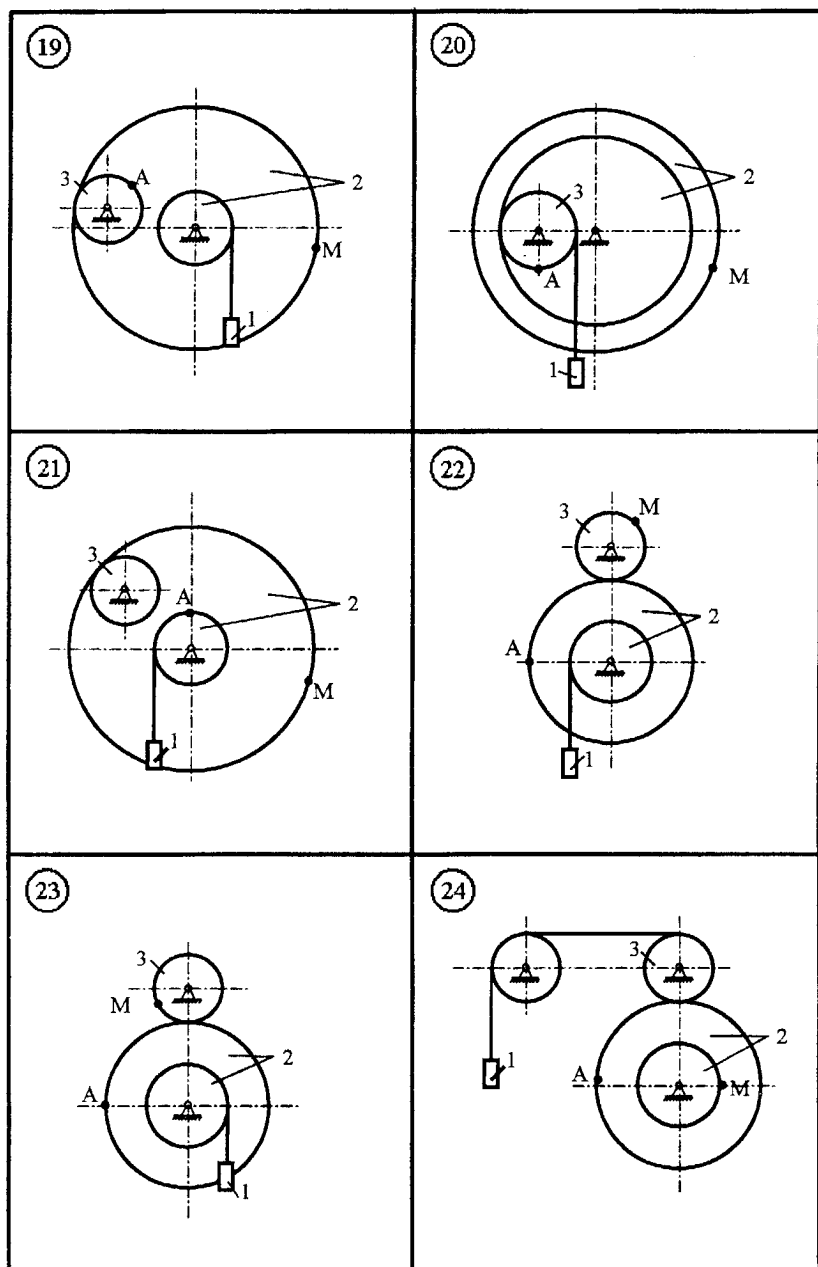


Рисунок 3.4

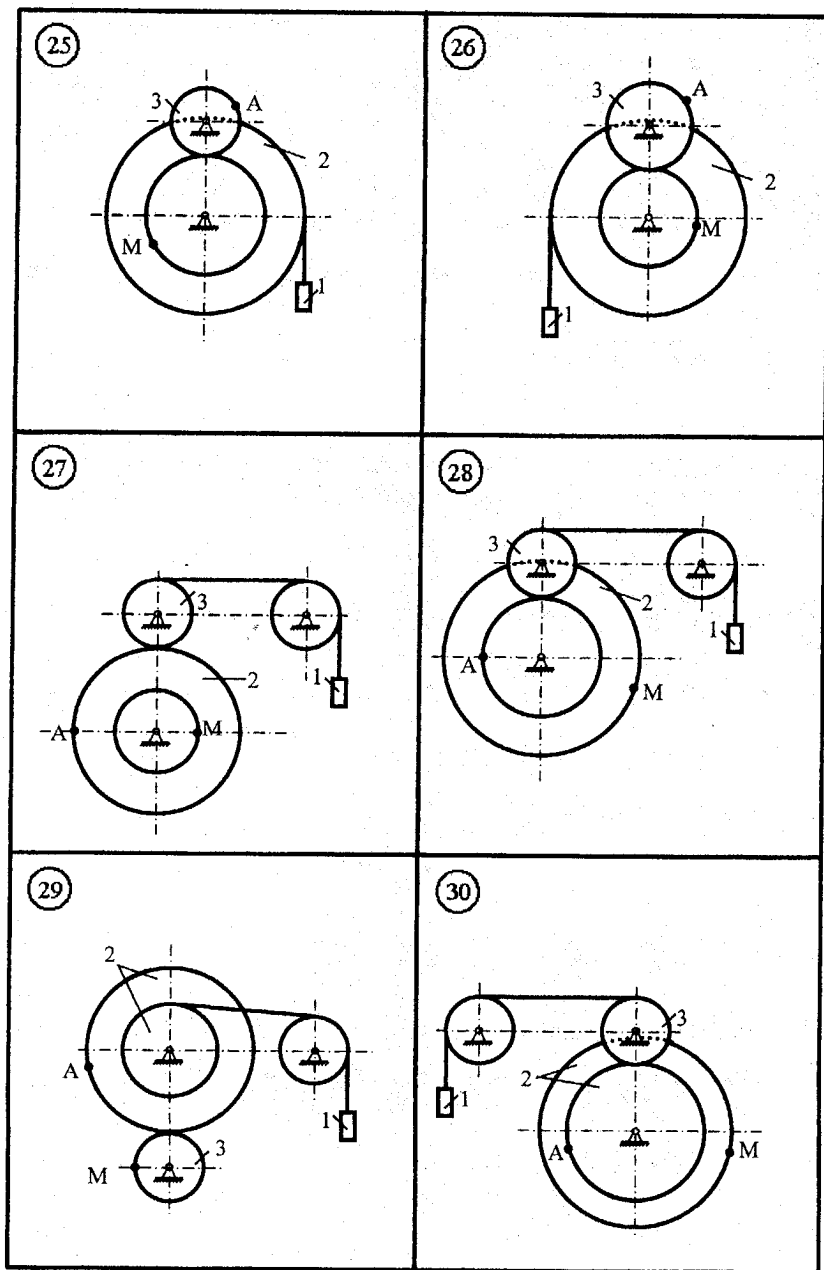


Рисунок 3.5

### 3.1 Приклад виконання завдання

Для механізму (рис. 3.6) знайти швидкість і прискорення точок А і М при  $t_1=1c$ , якщо тіло 2 рухається за законом  $\varphi_2=8t^2-3t^2$  ( $R_2=0,1m$ ;  $R_1=0,4m$ ;  $r_1=0,15m$ ).

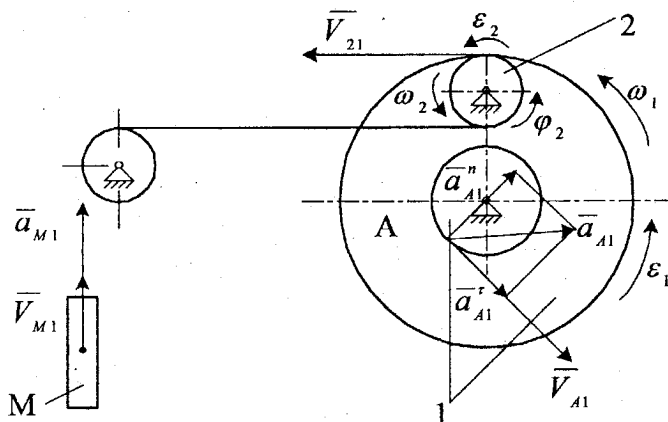


Рисунок 3.6

**Розв'язання.** Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення тіла 2

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = (24t^2 - 6t), \frac{1}{c}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = (48t - 6), \frac{1}{c^2}$$

При  $t_1=1c$

$$\omega_{21} = 24 - 6 = 18 \frac{1}{c},$$

$$\varepsilon_{21} = 48 - 6 = 42 \frac{1}{c^2}.$$

Знайдемо швидкість  $V_{21}$  точок контакту тіл 2 та 1

$$V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot R_1,$$

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = 0,25\omega_2.$$

Визначимо швидкість точки А

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 0,15 \cdot \omega_2 = 0,0375 \cdot \omega_2.$$

Прискорення точки А

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^r},$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_1} = \omega_1^2 r_1 = 9,375 \cdot \omega_2^2 \cdot 10^{-3} \frac{M}{c^2},$$

$$a_A^r = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 0,0375 \cdot \varepsilon_2 \frac{M}{c^2},$$

$$\text{де } \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,25 \cdot \varepsilon_2.$$

Величина прискорення точки А

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^r)^2}.$$

$$\text{При } t_1 = 1c; \quad V_{A1} = 0,0375 \cdot \omega_{21} = 0,0375 \cdot 18 = 0,675 \frac{M}{c},$$

$$a_{A1}^n = 9,375 \cdot \omega_{21}^2 \cdot 10^{-3} = 9,375 \cdot 18^2 \cdot 10^{-3} = 3,038 \frac{M}{c^2},$$

$$a_{A1}^r = 0,0375 \cdot \varepsilon_{21} = 0,0375 \cdot 42 = 1,575 \frac{M}{c^2},$$

$$a_{A1} = \sqrt{3,038^2 + 1,575^2} = 3,42 \frac{M}{c^2}.$$

Визначимо швидкість та прискорення тіла М, що переміщується поступально

$$V_M = V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = 0,1 \cdot \omega_2,$$

$$a_M = \frac{dV_M}{dt} = 0,1 \cdot \varepsilon_2.$$

При  $t_1 = 1c$

$$V_{M1} = 0,1 \cdot \omega_{21} = 1,8 \frac{M}{c},$$

$$a_{M1} = 0,1 \cdot \varepsilon_{21} = 4,2 \frac{M}{c^2}.$$

Показуємо на рис.3.6 вектори  $\overline{V_{A1}}, \overline{a_{A1}^n}, \overline{a_{A1}^r}, \overline{a_{A1}}, \overline{V_{M1}}, \overline{a_{M1}}$ .

## К.4 Кінематичний аналіз плоского механізму

Визначити для заданого положення механізму швидкість та прискорення точок А і В, кутову швидкість та кутове прискорення ланки АВ. Схеми механізмів приведені на рис.4.1 – 4.5, а дані для розрахунку приведені в табл. 4.1

### 4.1 Приклад виконання завдання

Для механізму, зображеного на рис. 4.6, знайти швидкість і прискорення точок А, В та кутову швидкість, кутове прискорення ланок АВ і ВС. Прийняти:  $OA = 0.3$  м;  $OA=OB$ ;  $BC = 0.5$  м;  $\omega = 5$  с<sup>-1</sup>;  $\epsilon = 3$  с<sup>-2</sup>.

**Розв'язання.** Визначимо швидкості точок А, В та кутові швидкості ланок АВ і СВ.

Таблиця 4.1

Варіант	г, м	l, м	$\omega$ , с <sup>-1</sup>	$\epsilon$ , с <sup>-2</sup>
1	0,1	0,6	1	2
2	0,3	0,4	1,2	3
3	0,2	0,3	1,5	2
4	0,1	0,3	1,8	3
5	0,3	0,2	1,0	2
6	0,1	0,8	1,1	3
7	0,2	0,3	1,2	2
8	0,3	0,6	1,3	3
9	0,2	0,4	1,4	2
0	0,1	0,6	1,5	3

Швидкість точки А направлена перпендикулярно до ланки ОА у напрямку кутової швидкості  $\omega$ .

$$V_A = \omega \cdot OA = 5 \cdot 0,3 = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

По лінії, яка перпендикулярна до ланки ВС, буде направлена швидкість точки В (лінія b-b, рис.4.6). Тоді миттєвий центр швидкостей ланки АВ буде в точці О.

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{BO}, \omega_{AB} = \omega = 5 \frac{1}{\text{с}}$$

Напрямок швидкості точки В визначається напрямком кутової швидкості  $\omega_{AB}$  (рис. 4.6).

$$V_B = V_A = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

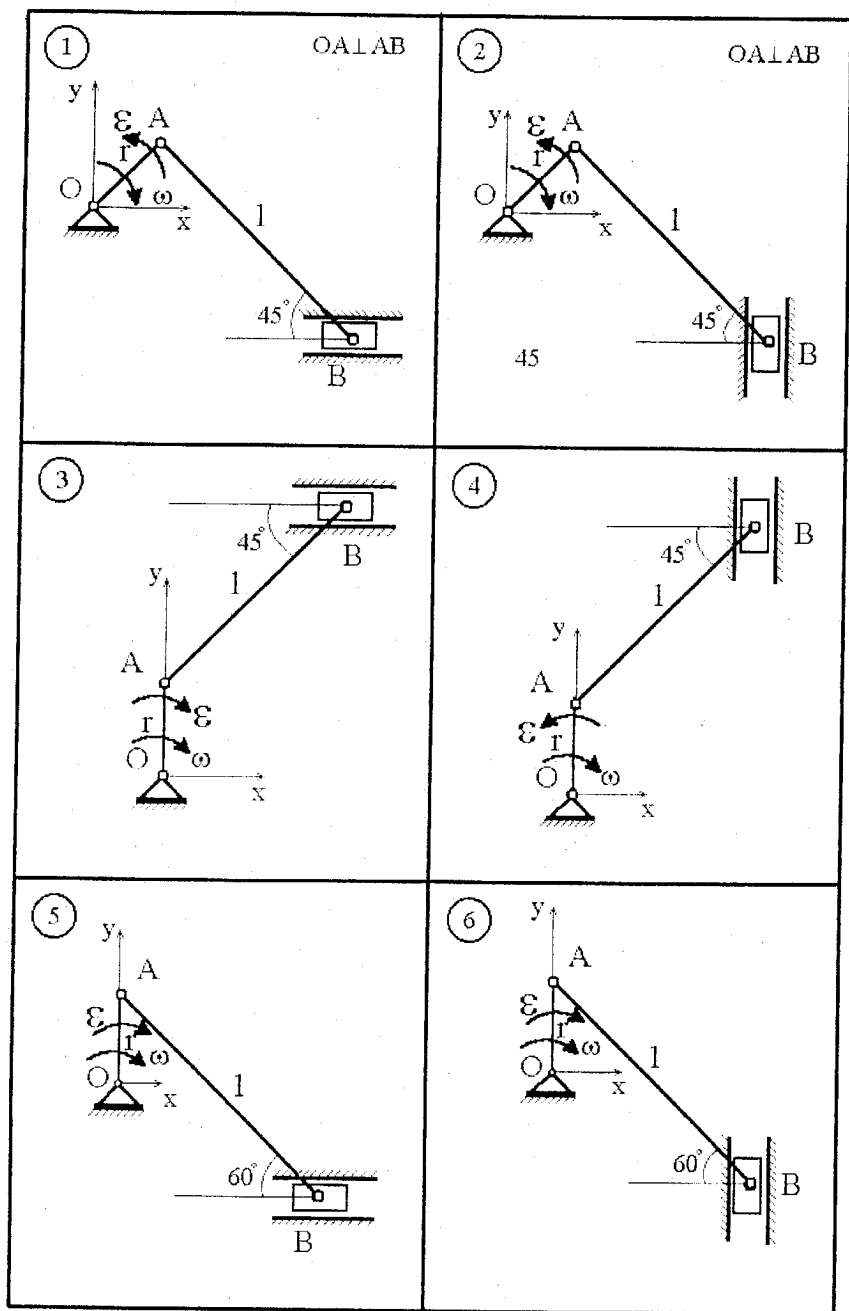


Рисунок 4.1

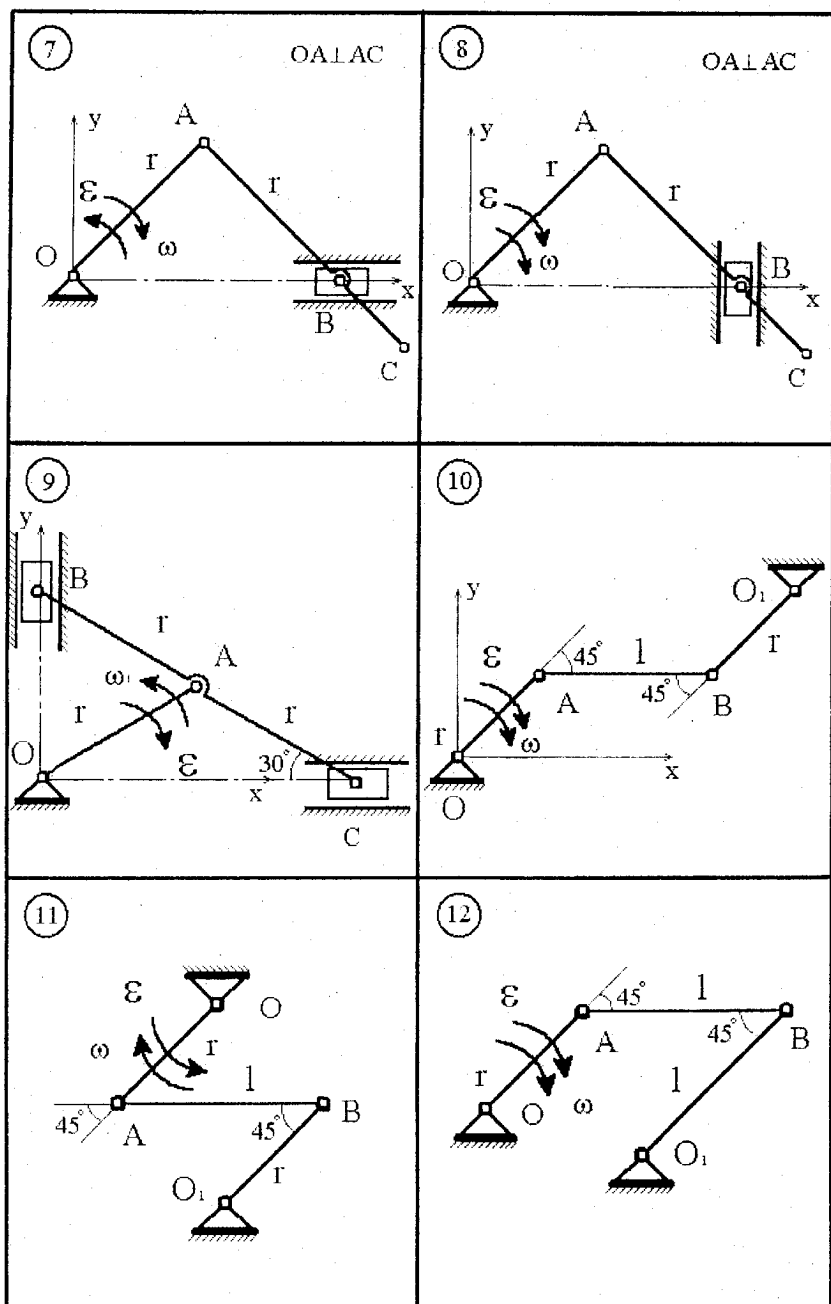
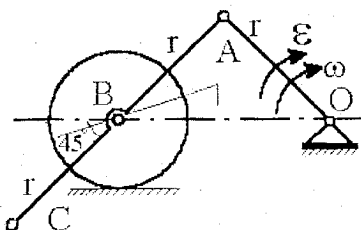


Рисунок 4.2



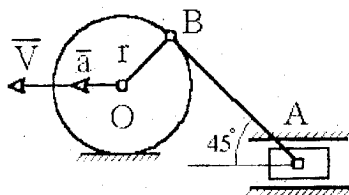
13



OALAC

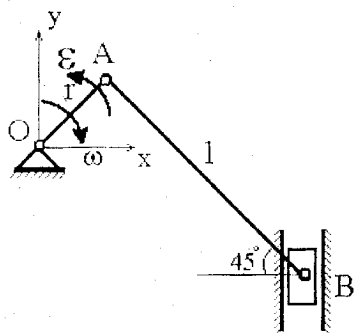
14

$V = 6 \text{ M/c}$   
OALAB



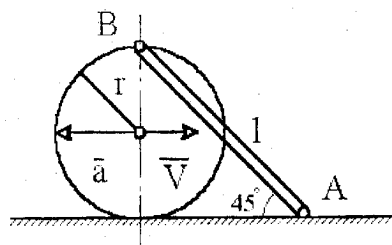
15

OALAB

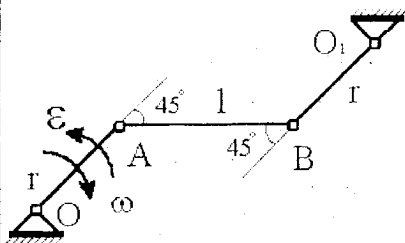


16

$V = 8 \text{ M/c}$   
 $a = 1 \text{ M/c}^2$



17



18

OALAB

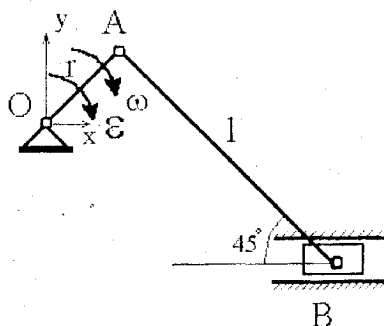


Рисунок 4.3

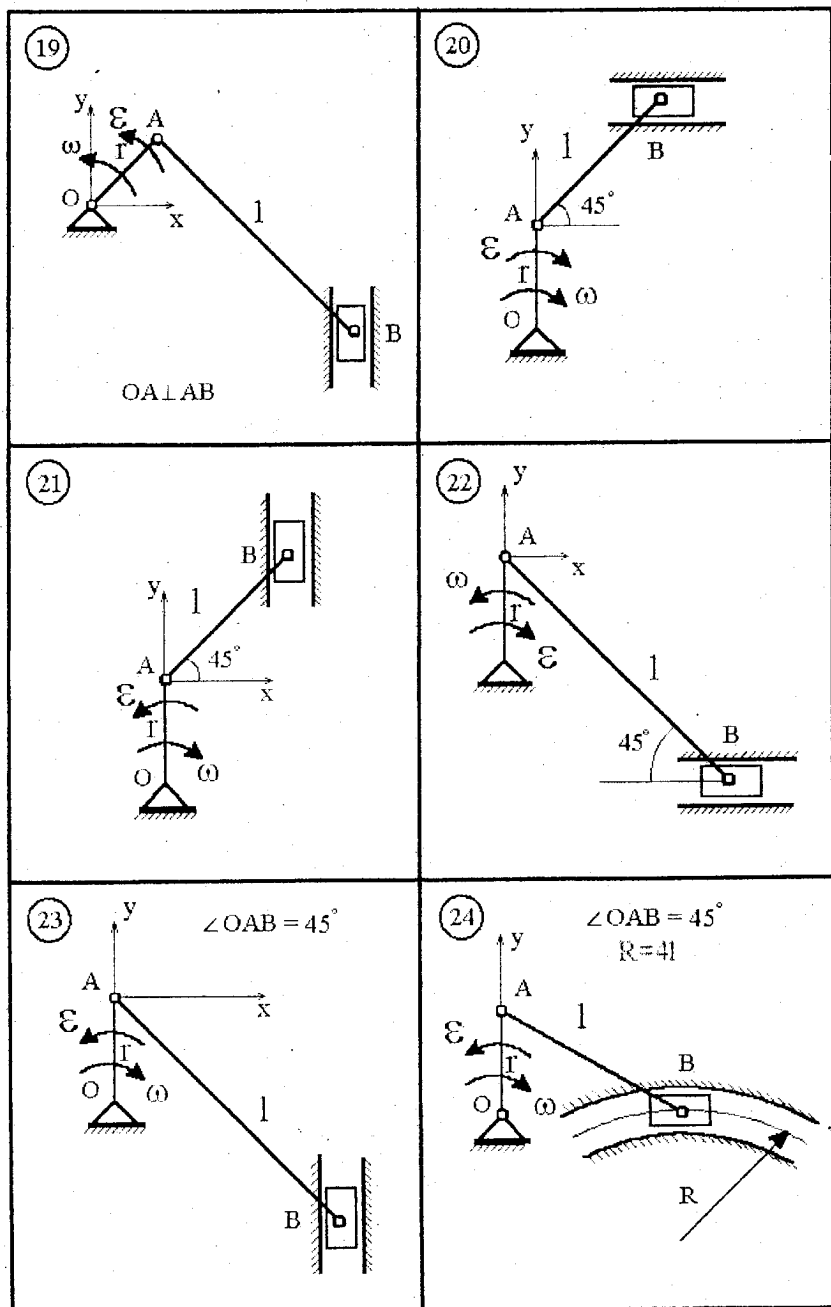


Рисунок 4.4

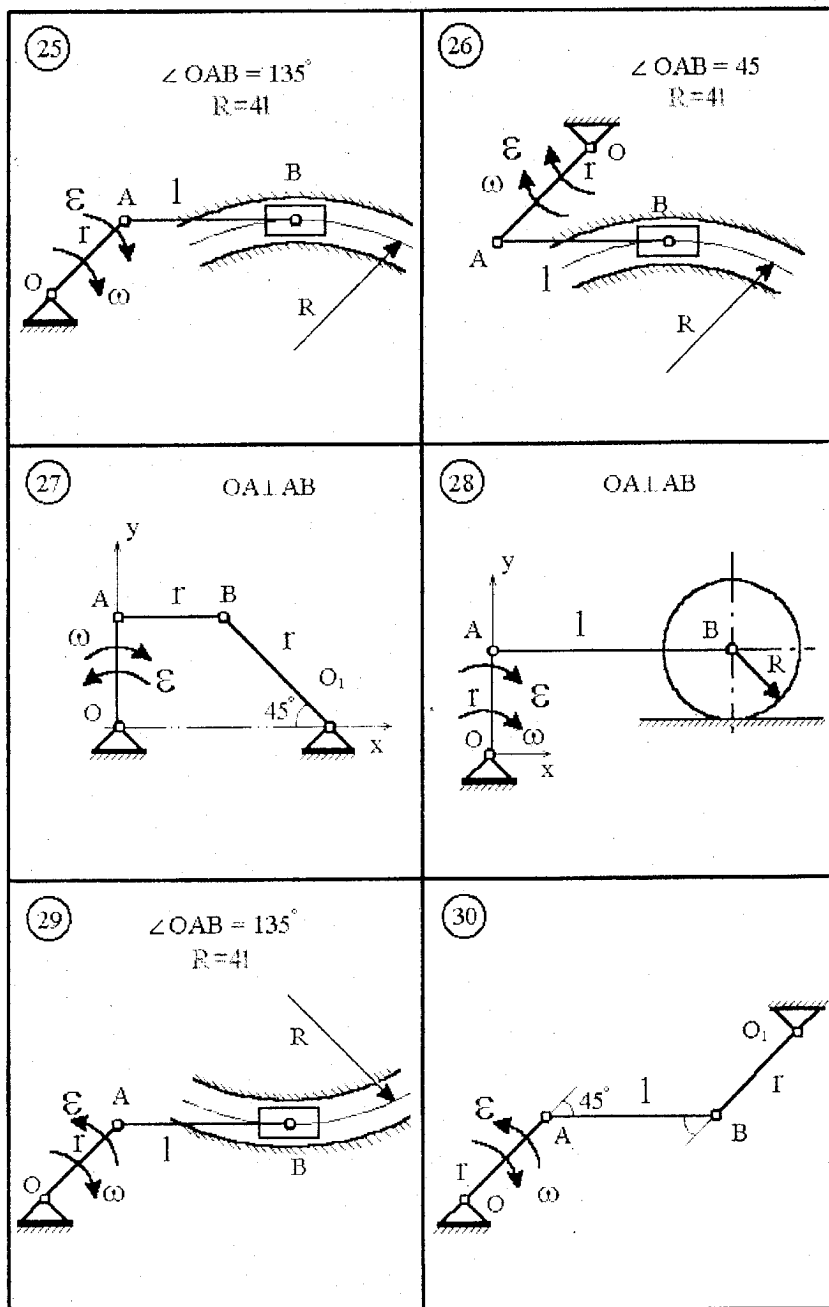


Рисунок 4.5

Кутова швидкість ланки BC

$$\omega_{CB} = \frac{V_B}{BC} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \frac{1}{c}.$$

Знайдемо тепер прискорення точок A, B та кутові прискорення ланок AB та BC.

Точка A належить тілу OA, що обертається навколо нерухомої осі. Тоді:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^r,$$

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 0,3 = 7,5 \frac{M}{c^2},$$

$$a_A^r = \varepsilon \cdot OA = 3 \cdot 0,3 = 0,9 \frac{M}{c^2},$$

$$a_A = \sqrt{a_A^{n^2} + a_A^{r^2}} = \sqrt{7,5^2 + 0,9^2} = 7,55 \frac{M}{c^2}.$$

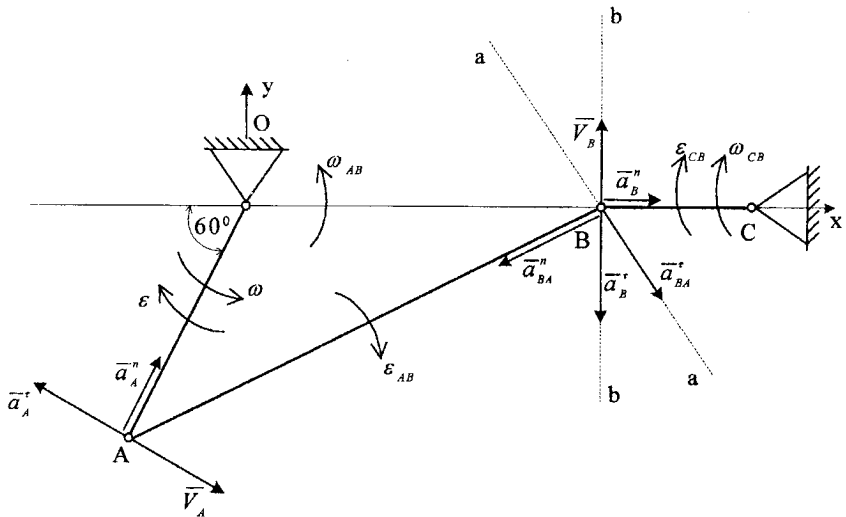


Рисунок 4.6

Прийемо точку A за полюс. Тоді розглядаючи рух ланки AB, запишемо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad (4.1)$$

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^r, \quad (4.2)$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 5^2 \cdot 0,6 = 15 \frac{M}{c}$$

$$\text{де } AB = 2 \cdot OA \cdot \cos 30^\circ = 0,52 \text{ м}$$

Прискорення  $\bar{a}_{BA}^n$  направлене по прямій АВ від точки В до полюса, а прискорення  $\bar{a}_{BA}^r$  - перпендикулярно до прямої АВ (лінія а-а, рис. 4.6). Оскільки точка В належить ланці ВС, то

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^r, \quad (4.3)$$

$$a_B^n = \omega_{CB} \cdot BC = 3^2 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення  $\bar{a}_{BA}^r$  направлене по прямій b-b.

Вираз (4.1), враховуючи (4.2) та (4.3), запишеться:

$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^r = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^r + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^r. \quad (4.4)$$

Спроектуємо векторне рівняння (4.4) на осі ОХ та ОУ.

Вісь ОХ:

$$a_B^n = a_A^n \cdot \cos 60^\circ - a_A^r \cdot \sin 60^\circ - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ + (\bar{a}_{BA}^r)_x. \quad (4.5)$$

Вісь ОУ:

$$(\bar{a}_{BA}^r)_y = a_A^n \cdot \sin 60^\circ + a_A^r \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^n \cdot \sin 30^\circ + (\bar{a}_{BA}^r)_y. \quad (4.6)$$

У формулах (4.5) та (4.6) дві невідомі величини  $\bar{a}_{BA}^r$  та  $\bar{a}_B^r$ .

$$(\bar{a}_{BA}^r)_x = a_B^n + a_B^r \cdot \sin 60^\circ + a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_A^n \cdot \cos 60^\circ = 4,5 + 0,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7,5 \cdot 0,5 = 14,52,$$

$$(\bar{a}_{BA}^r)_x = a_{BA}^r \cdot \cos 60^\circ = 14,52,$$

$$a_{BA}^r = \frac{14,52}{\cos 60^\circ} = 29,04 \frac{M}{c^2},$$

$$(\bar{a}_B^r)_y = a_A^n \cdot \sin 60^\circ + a_A^r \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^n \cdot \sin 30^\circ - a_{BA}^r \cdot \cos 30^\circ = 7,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,9 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{2} - 29,04 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -25,70,$$

$$a_B^r = 25,7 \frac{M}{c^2}.$$

Знаходимо кутові прискорення ланок АВ та ВС.

$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^r}{AB} = \frac{29,04}{0,52} = 55,85 \frac{1}{c^2},$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_B^r}{BC} = \frac{25,7}{0,5} = 51,4 \frac{1}{c^2}.$$

Напрямок кутових прискорень  $\varepsilon_{BA}$  та  $\varepsilon_{BC}$  визначаються напрямком векторів  $\vec{a}_{BA}^r$  і  $\vec{a}_B^r$ .

## К5 Визначення швидкостей і прискорень точок багатоланкового плоского механізму

На рис. 5.1 – 5.5 приводяться схеми багатоланкових плоских механізмів по варіантах від 1 до 30, де ведучою ланкою є кривошип  $O_1A$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Значення  $\omega$ , довжина кривошипа та інших ланок механізму задані в таблиці 5.1 по варіантах.

При заданому положенні механізму визначити:

1. Швидкості точок  $A, B, E, D$ , а також точки  $M$ , за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ).
2. Побудувати для заданого положення механізму план швидкостей.
3. Прискорення точок  $A, B, M$  а також положення миттєвого центра прискорень (МЦП) для ланки  $AB$ .

Таблиця 5.1

Варіант	$\omega$	$r_1$	$r_2$	$l_1$	$l_2$
	с/с	см			
1	5	15	40	30	50
2	8	12	30	25	40
3	4	18	50	35	30
4	3	20	25	40	30
5	6	16	35	24	50
6	9	10	45	20	60
7	5	14	30	40	35
8	4	12	36	28	40
9	6	10	35	25	55
0	8	16	40	30	35

Примітка. Графічні побудови виконуються в певному масштабі із збереженням даних умови задачі.

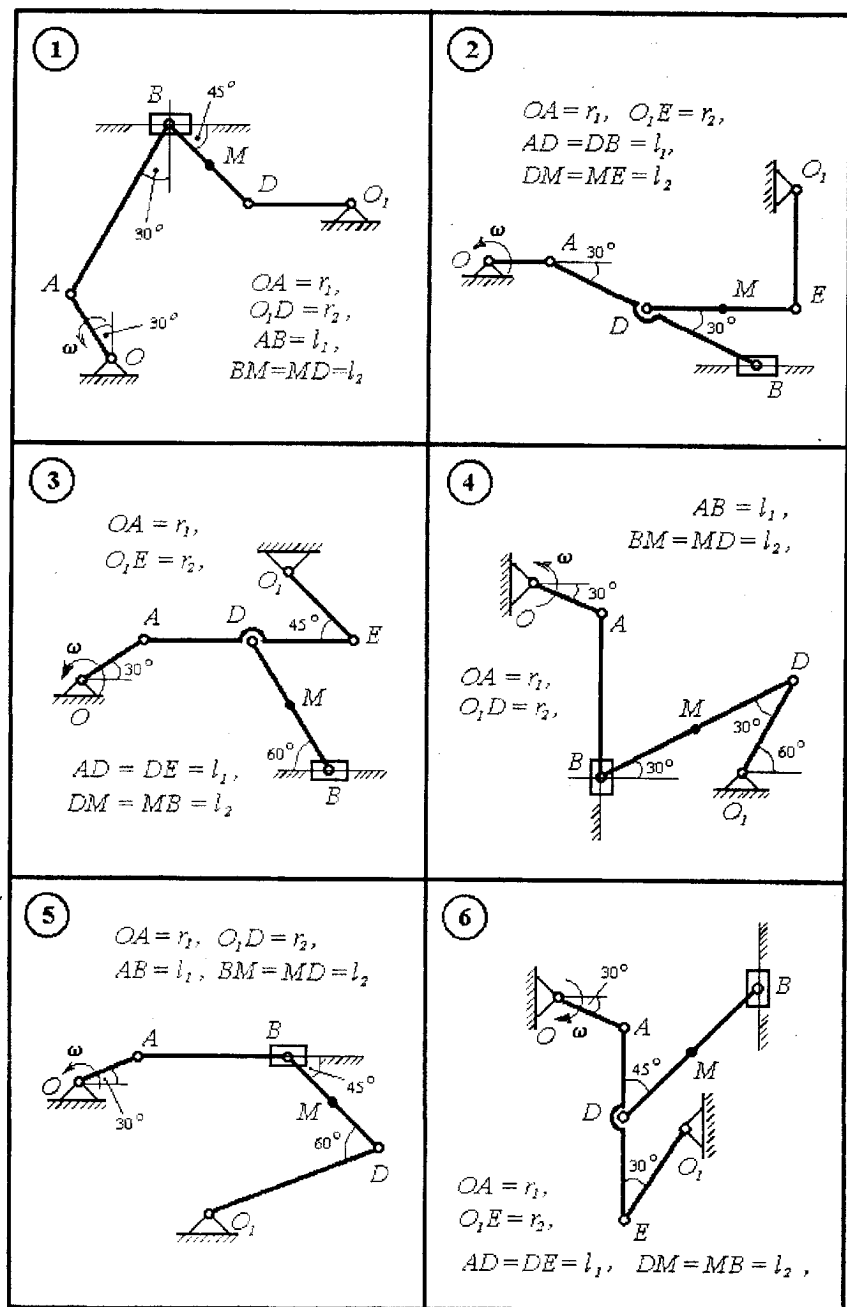
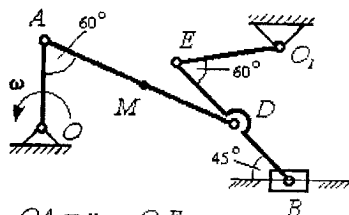


Рисунок 5.1

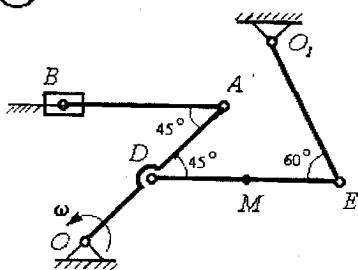


7



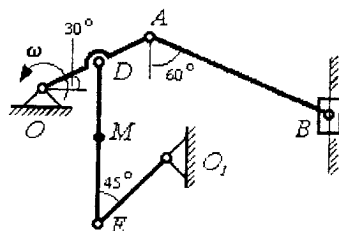
$$OA = r_1, \quad O_1E = r_2, \\ AM = MB = l_1, \quad DB = DE = l_2,$$

8



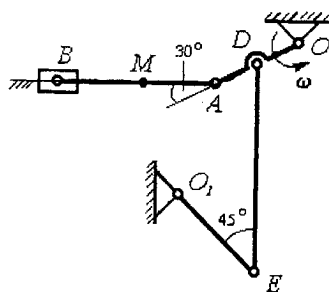
$$OD = DA = r_1, \quad O_1E = r_2, \\ AB = l_1, \quad DM = ME = l_2$$

9



$$OD = DA = r_1, \quad O_1E = r_2, \\ AB = l_1, \quad DM = ME = l_2$$

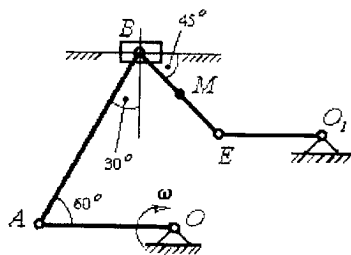
10



$$OD = DA = r_1, \quad O_1E = r_2, \\ AM = MB = l_1, \quad DE = l_2,$$

11

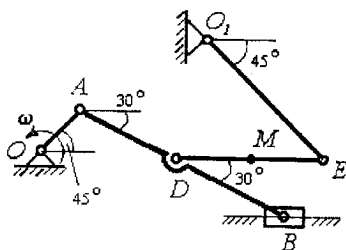
$$AB = l_1, \quad BM = ME = l_2$$



$$OA = r_1, \quad O_1E = r_2,$$

12

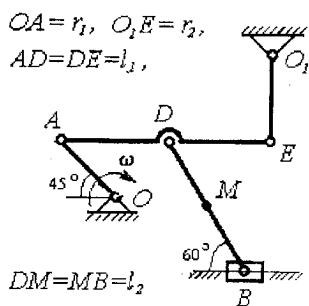
$$OA = r_1, \quad O_1E = r_2,$$



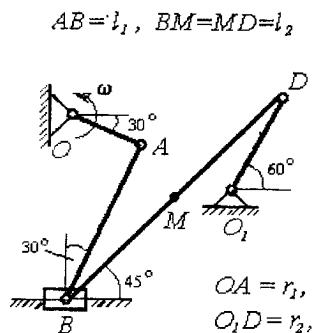
$$AD = DB = l_1, \quad DM = ME = l_2$$

Рисунок 5.2

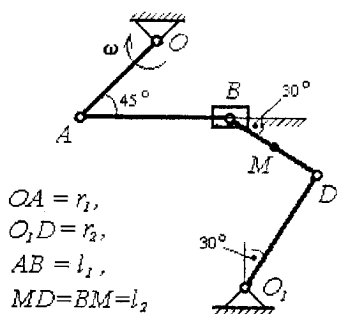
13



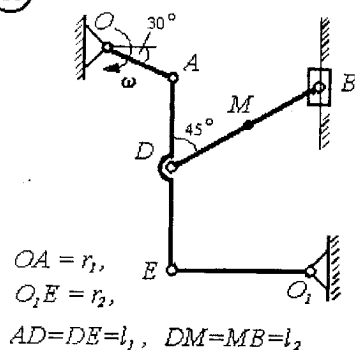
14



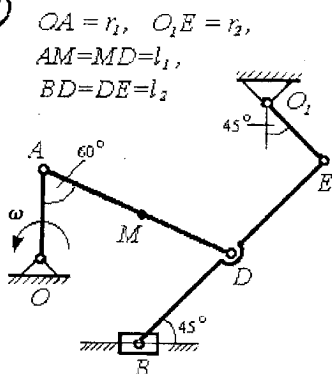
15



16



17



18

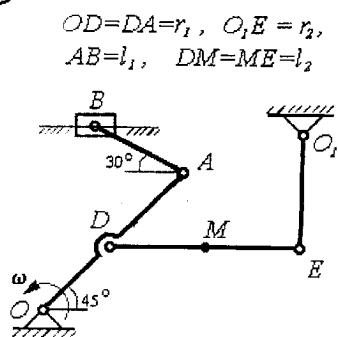
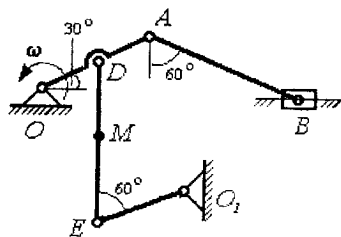


Рисунок 5.3

19

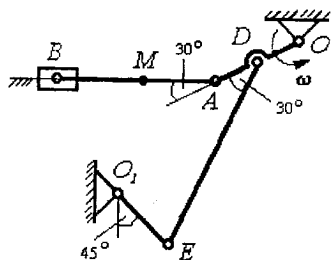
$$OD=DA=r_1, O_1E=r_2,$$



$$AB=l_1, DM=ME=l_2$$

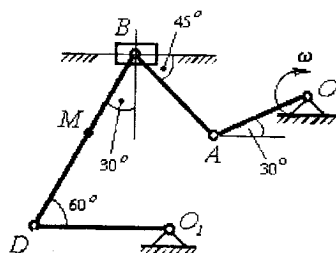
20

$$OD=DA=r_1, O_1E=r_2, \\ AM=MB=l_1, DE=l_2$$

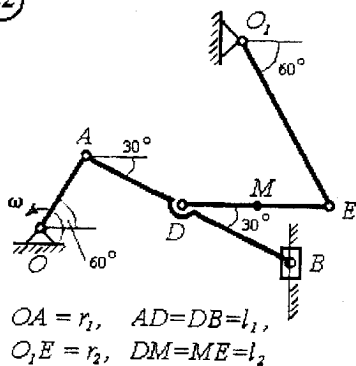


21

$$OA=r_1, O_1D=r_2, \\ AB=l_1, BM=MD=l_2$$



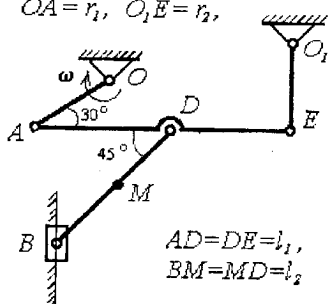
22



$$OA=r_1, AD=DB=l_1, \\ O_1E=r_2, DM=ME=l_2$$

23

$$OA=r_1, O_1E=r_2,$$



$$AD=DE=l_1, \\ BM=MD=l_2$$

24

$$OA=r_1, O_1E=r_2, \\ AB=l_1, BM=ME=l_2$$

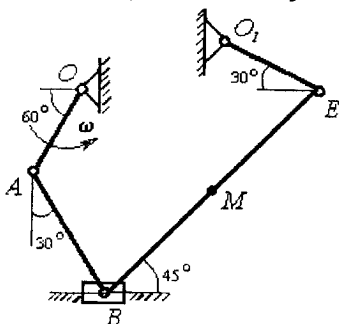
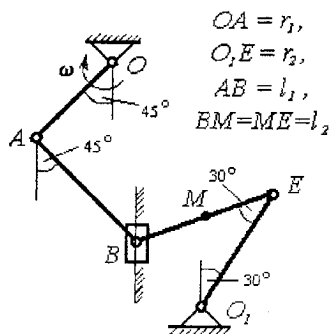
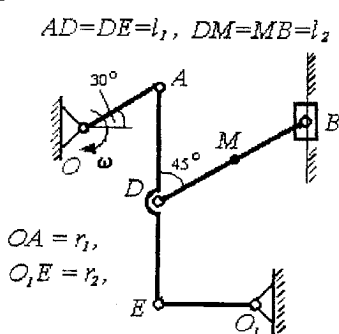


Рисунок 5.4

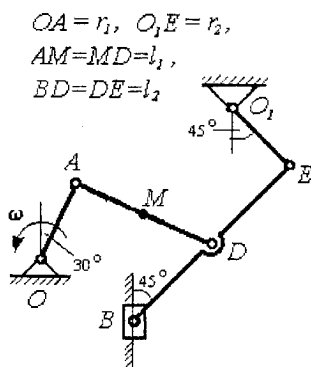
25



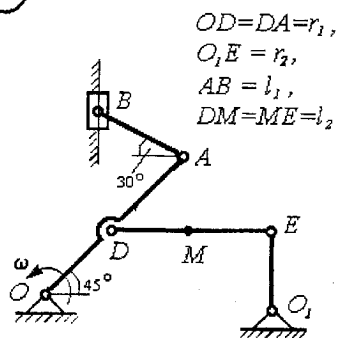
26



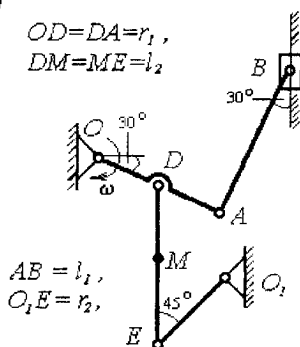
27



28



29



30

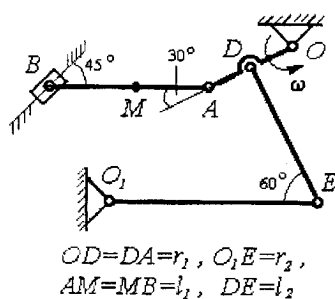


Рисунок 5.5

## 5.1 Приклад виконання завдання

Умова задачі. На рис. 5.6 зображено плоский багатоланковий механізм, в якого ведуча ланка  $O_1A = r_1 = 20\text{см}$  обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega = 5\text{с}^{-1}$  і приводить в рух ланки  $AD = DB = l_1 = 50\text{см}$ ,  $O_2B = r_2 = 40\text{см}$ ,  $DE = l_2 = 40\text{см}$ ,  $O_3E = r_3 = 25\text{см}$ ,  $BM = MD = 25\text{см}$ . Кути між ланками задані на рисунку.

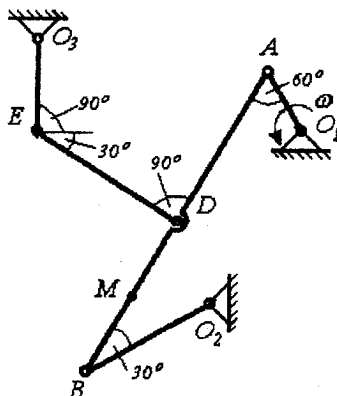


Рисунок 5.6

Визначити швидкості і прискорення точок механізму згідно умови викладеної в умові завдання К5 (пункт 5.1).

**Розв'язання.** Знайдемо швидкість точки  $A$ . Її модуль знайдемо добутком:  $V_A = \omega * O_1A = 5 * 20 = 100\text{ см/с}$ . Напрямок вектора  $\vec{V}_A$  перпендикулярний до кривошипа  $O_1A$ , що вкажемо на рис.5.7.

**Знаходження швидкостей за допомогою плана швидкостей.**

Побудова плану швидкостей базується на теоретичному положенні, що в плоско-паралельному русі (ППР) швидкість будь-якої точки тіла є геометричною сумою швидкості полюса і обертової швидкості цієї точки навколо полюса. В механізмі на рис.К5.6 ланка  $AB$  здійснює ППР, швидкість точки  $A$  відома, тому беремо її за полюс. Тоді

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (5.1)$$

Виконуємо побудову векторів згідно формули (5.1), на рис. 5.7. З довільної точки  $O$ , яка повинна знаходитись поряд зі схемою механізму, будуюмо в масштабі вектор швидкості  $\vec{V}_A$ , який перпендикулярний до кривошипа  $O_1A$  і цей вектор називаємо  $Oa$ . З точки  $O$

проводимо пряму, яка перпендикулярна до кривошипа  $O_2B$ , що відповідає напрямку швидкості  $\vec{V}_B$ . Щоб встановити де закінчується цей вектор з кінця вектора  $Oa$  точки  $a$  проводимо пряму, яка є перпендикулярною до ланки  $AB$  на схемі механізму. Перетин названих прямих дає точку  $b$ . Вектор  $Ob$  відповідає вектору швидкості  $\vec{V}_B$  в вибраному масштабі. Відрізок  $ab$  рівний обертовій швидкості точки  $B$  навколо полюса  $A$ . Для того, щоб знайти швидкість точки  $D$ , яка ділить ланку  $AB$  навпіл, ділимо відрізок  $ab$  точкою  $d$  також навпіл і з'єднуємо точку  $O$  і  $d$ . Вектор  $Od$  відповідає швидкості  $\vec{V}_D$ .

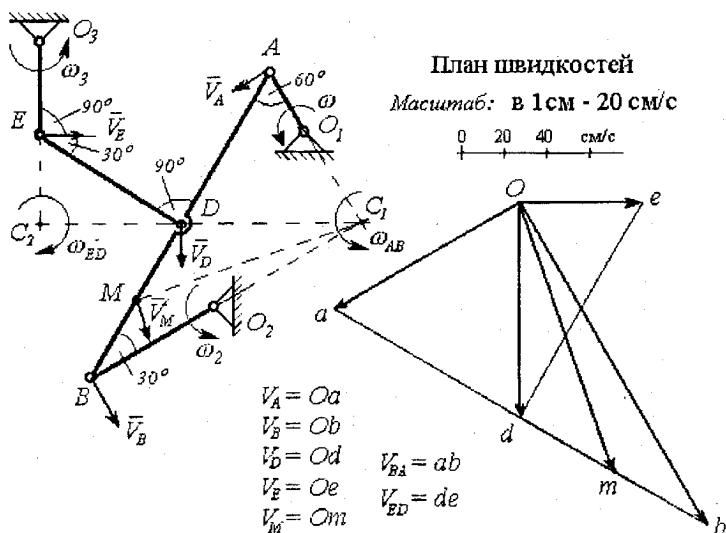


Рисунок 5.7

Знаходимо швидкість точки  $E$ . Для цього з точки  $O$  проводимо пряму перпендикулярну до кривошипа  $O_3E$ , а з точки  $d$  пряму перпендикулярну до ланки  $ED$ . Перетин цих прямих дає точку  $e$ . Вектор  $Oe$  рівний швидкості  $\vec{V}_E$ , а відрізок  $de$  є модулем обертової швидкості  $\vec{V}_{ED}$ , тобто обертової швидкості точки  $E$  навколо полюса  $D$ .

Для заходження швидкості точки  $M$ , яка лежить між точками  $D$  і  $B$  на схемі механізму, знаходимо точку  $m$  між точками  $d$  і  $b$ . При цьому повинно зберігатись співвідношення:  $DM/MB = dm/mb$ . З'єднуємо точки  $O$  і  $m$ . Вектор  $Om$  відповідає швидкості  $\vec{V}_M$ . Виміряємо довжини векторів швидкостей і переведемо їх через масштаб в одиниці швидкості. Результати графічних побудов такі:

$$\begin{aligned}
 V_B &= Od\ 20 = 8,8 \cdot 20 = 176 \text{ см/с}, \\
 V_D &= Od\ 20 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ см/с}, \\
 V_E &= Oe\ 20 = 2,9 \cdot 20 = 58 \text{ см/с}, \\
 V_M &= Om\ 20 = 6,7 \cdot 20 = 134 \text{ см/с}
 \end{aligned}$$

Кутові швидкості ланок знайдемо відношеннями

$$\begin{aligned}
 \omega_{AB} &= V_{B_A}/AB = ab/AB = 10 \cdot 20/100 = 2 \text{ с}^{-1}, \\
 \omega_2 &= V_B/O_2B = 176/40 = 4,4 \text{ с}^{-1}, \\
 \omega_{DE} &= V_{D_E}/ED = de/ED = 5,75 \cdot 20/40 = 2,875 \text{ с}^{-1}, \\
 \omega_3 &= V_E/O_3E = 55/25 = 2,2 \text{ с}^{-1}
 \end{aligned}$$

Діаграма, що побудована на векторах швидкостей поряд із схемою механізму на рис.5.7, є планом швидкостей. Для знаходження швидкості будь-якої точки механізму потрібно знайти відповідну точку на плані швидкостей, а потім з'єднати точку  $O$  з цією точкою. Перевівши через масштаб довжину вектора в одиниці швидкості, знайдемо швидкість відповідної точки.

### Визначення швидкостей за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ)

Для ланки  $AB$ , рис.5.7, МЦШ знайдемо на перетині перпендикулярів проведених до напрямків руху точок  $A$  і  $B$ . Це буде точка  $C_1$ . Навколо точки  $C_1$  ланка  $AB$  в даний момент виконує обертання з кутовою швидкістю  $\omega_{AB}$ . Тому запишемо співвідношення:

$$\omega_{AB} = V_A/C_1A = V_B/C_1B = V_D/C_1D = V_M/C_1M \quad (5.2)$$

З трикутника  $ABC_1$  одержуємо

$$\begin{aligned}
 C_1A &= AB \cdot \sin 30^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ см}, \\
 C_1B &= AB \cdot \cos 30^\circ = 100 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ см}, \\
 C_1D &= AD = 50 \text{ см}, \\
 C_1M &= ((C_1B)^2 + (BM)^2 - 2 C_1B \cdot BM \cos 30^\circ)^{0,5} = \\
 &= (7500 + 625 - 2 \cdot 86,6 \cdot 25 \cdot 0,866)^{0,5} = 66,14 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Після чого із співвідношення (5.2) знаходимо:

$$\begin{aligned}
 \omega_{AB} &= V_A/C_1A = 100/50 = 2 \text{ с}^{-1}, \\
 V_B &= \omega_{AB} \cdot C_1B = 2 \cdot 86,6 = 173,2 \text{ см/с}, \\
 V_D &= \omega_{AB} \cdot C_1D = 2 \cdot 50 = 100 \text{ см/с}, \\
 V_M &= \omega_{AB} \cdot C_1M = 2 \cdot 66,14 = 132,28 \text{ см/с}
 \end{aligned}$$

$$\omega_2 = V_B / O_2B = 173,2/40 = 4,33c^{-1}.$$

Знаходимо МЦШ для ланки  $ED$ . Це буде точка  $C_2$ , яка знаходиться на перетині перпендикулярів, що проведені до напрямків руху точок  $D$  і  $E$ . Для ланки  $ED$  записуємо :

$$\omega_{ED} = V_D / C_2D = V_E / C_2E \quad (5.3)$$

З трикутника  $EDC_2$  знаходимо відрізки

$$C_2E = ED \sin 30^\circ = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ см},$$

$$C_2D = ED \cos 30^\circ = 40 \cdot 0,866 = 34,36 \text{ см},$$

потім із співвідношення (5.3) знаходимо :

$$\omega_{ED} = V_D / C_2D = 100/34,36 = 2,9c^{-1},$$

$$V_E = \omega_{ED} C_2E = 2,9 \cdot 20 = 58 \text{ см/с}.$$

Якщо порівняти результати двох приведених методів визначення швидкостей, то видно, що значення швидкостей при користуванні МЦШ є більш точними. Неточність плану швидкостей обумовлена похибками графічних побудов. Наприклад, в першому випадку  $V_B = 176 \text{ см/с}$ , в другому  $V_B = 173,2 \text{ см/с}$ , що складає 1,6%.

#### Визначення прискорень.

Знаходимо прискорення точки  $A$ . Кутова швидкість кривошипа  $O_1A$  постійна,  $\omega = 5c^{-1}$ , тому повне прискорення точки  $A$  визначається тільки його нормальною складовою

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot O_1A = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення точки  $B$  визначимо через полюс  $A$ .

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \quad (5.4)$$

$$\text{де } \bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau, \quad \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

$$\text{Тому } \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (5.5)$$

Покажемо вектори, які містяться в формулі (5.5), на рис.5.8, де зображена тільки та частина механізму, що має необхідні ланки. Вектор  $a_A$ , нормальні складові  $a_B^n, a_{BA}^n$  мають цілком визначений напрямок: до відповідного центра обертання, а дотичні складові  $a_B^\tau$  і  $a_{BA}^\tau$  перпендикулярні до своїх нормалей і направлені в довільну сторону. Визначимо модулі нормальних складових.

$$a_B^n = \omega_2^2 O_2B = 4,33^2 \cdot 40 = 750 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = 2^2 \cdot 100 = 400 \text{ см/с}^2.$$



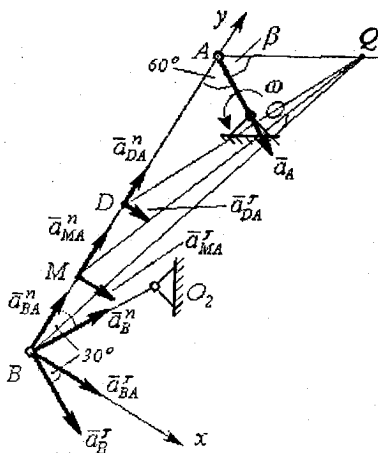


Рисунок 5.8

Для визначення дотичних складових проєктуємо векторне рівняння (5.5) на осі  $Bx$  і  $Bu$ , які проводимо на рис.5.8.

$$\text{на } Bx: \quad a_B^n \cdot \cos 30^\circ - a_B^\tau \cdot \sin 30^\circ = -a_A \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^n, \quad (5.6)$$

$$\text{на } Bu: \quad a_B^n \cdot \sin 30^\circ + a_B^\tau \cdot \cos 30^\circ = a_A \cdot \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau, \quad (5.7)$$

З рівняння (5.6) знаходимо  $a_B^\tau$

$$\begin{aligned} a_B^\tau &= (a_B^n \cdot \cos 30^\circ + a_A \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^n) / \sin 30^\circ = \\ &= (750 \cdot 0,866 + 500 \cdot 0,5 - 400) / 0,5 = 998,9 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

З рівняння (5.7) знаходимо  $a_{BA}^\tau$

$$\begin{aligned} a_{BA}^\tau &= a_B^n \cdot \sin 30^\circ + a_B^\tau \cdot \cos 30^\circ - a_A \cdot \sin 60^\circ = \\ &= 750 \cdot 0,5 + 998,9 \cdot 0,866 - 500 \cdot 0,866 = 807,2 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Прискорення точки  $B$  знайдемо теоремою Піфагора

$$a_B = ((a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2)^{0,5} = (750^2 + 998,9^2)^{0,5} = 1249,12 \text{ см/с}^2.$$

За відомим  $a_{BA}^\tau$  обчислимо  $\epsilon_{AB}$  – кутове прискорення ланки  $AB$ .

$$\varepsilon_{AB} = a_{BA}^r / AB = 807/100 = 8,07c^{-2}$$

Знайдемо прискорення точок  $D$  і  $M$ . Для цього скористаємось залежністю (5.4), запишемо її для цих точок.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^r, \quad (5.8)$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{DA}^n + \vec{a}_{DA}^r \quad (5.9)$$

Складові обертових прискорень рівні

$$\begin{aligned} a_{MA}^n &= \omega_{AB}^2 \cdot AM = 2^2 \cdot 75 = 150 \text{ см/с}^2, \\ a_{MA}^r &= \varepsilon_{AB} \cdot AM = 8,07 \cdot 75 = 605,25 \text{ см/с}^2, \\ a_{DA}^n &= \omega_{AB}^2 \cdot AD = 2^2 \cdot 50 = 200 \text{ см/с}^2, \\ a_{DA}^r &= \varepsilon_{AB} \cdot AD = 8,07 \cdot 50 = 403,5 \text{ см/с}^2 \end{aligned}$$

Проектуємо векторні рівняння (5.7) і (5.8) на осі  $Bx$  і  $By$ , що вказані на рис.5.8 і знаходимо величини проекцій.

$$\begin{aligned} a_{Mx} &= -a_A \cdot \cos 60^\circ + a_{MA}^n = -500 \cdot 0,5 + 150 = -100 \text{ см/с}^2, \\ a_{My} &= a_A \cdot \sin 60^\circ + a_{MA}^r = 500 \cdot 0,866 + 605,25 = 1038,25 \text{ см/с}^2, \\ a_{Dx} &= -a_A \cdot \cos 60^\circ + a_{DA}^n = -500 \cdot 0,5 + 200 = -50 \text{ см/с}^2, \\ a_{Dy} &= a_A \cdot \sin 60^\circ + a_{DA}^r = 500 \cdot 0,866 + 403,5 = 836,5 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Модулі прискорень точок  $D$  і  $M$  знайдемо за теоремою Піфагора

$$\begin{aligned} a_M &= ((a_{Mx})^2 + (a_{My})^2)^{0,5} = ((-100)^2 + (1038,25)^2)^{0,5} = 1048 \text{ см/с}^2, \\ a_D &= ((a_{Dx})^2 + (a_{Dy})^2)^{0,5} = ((-50)^2 + (836,5)^2)^{0,5} = 842,5 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Знайдемо положення миттєвого центра прискорень (МЦП) для ланки  $AB$ . За відомими  $a_{BA}^n$  і  $a_{BA}^r$  визначимо кут  $\beta$ , який складає обертове прискорення  $\vec{a}_{BA}$  з напрямком до полюса обертання т.  $A$ .

$$\operatorname{tg} \beta = a_{BA}^r / a_{BA}^n = \varepsilon_{AB} / \omega_{AB}^2 = 8,07/2^2 = 2,0175,$$

$$\text{Звідки } \beta = \operatorname{arctg}(2,0175) = 63^\circ 38'$$

Навколо центра  $A$  повернемо вектор  $\vec{a}_A$  в сторону напрямку вектора  $\vec{a}_{BA}^r$  на кут  $\beta$  і проведемо пряму, на якій відкладемо точку  $Q$ , так, щоб довжина відрізка  $AQ$  була рівна:

$$AQ = a_A / (\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^2)^{0,5} = 500 / (8,07^2 + 2^4)^{0,5} = 55,51 \text{ см}$$

Точка  $Q$  є миттєвим центром прискорень ланки  $AB$ . З'єднаємо точку  $Q$  з точками  $B$ ,  $M$  і  $D$ . Визначимо віддалі  $BQ$ ,  $MQ$  і  $DQ$  для чого скористаємось теоремою косинусів.

$$\gamma = 60^\circ + \beta = 60^\circ + 63^\circ 38' = 123^\circ 38', \quad \cos \gamma = -0,5524.$$

$$BQ = (AQ^2 + AB^2 - 2 \cdot AQ \cdot AB \cdot \cos \gamma)^{0,5} = (55,51^2 + 100^2 + 2 \cdot 55,51 \cdot 100 \cdot 0,5524)^{0,5} = 138,62 \text{ см},$$

$$MQ = (AQ^2 + AM^2 - 2 \cdot AQ \cdot AM \cdot \cos \gamma)^{0,5} = (55,51^2 + 75^2 + 2 \cdot 55,51 \cdot 75 \cdot 0,5524)^{0,5} = 115,35 \text{ см},$$

$$DQ = (AQ^2 + AD^2 - 2 \cdot AQ \cdot AD \cdot \cos \gamma)^{0,5} = (55,51^2 + 50^2 + 2 \cdot 55,51 \cdot 50 \cdot 0,5524)^{0,5} = 92,99 \text{ см}$$

Запишемо співвідношення між прискореннями точок ланки  $AB$  через МЦП (точку  $Q$ ).

$$a_A / AQ = a_B / BQ = a_M / MQ = a_D / DQ = (\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^2)^{0,5} = 9,0069$$

Звідки

$$a_B = 9,0069 \cdot BQ = 9,0069 \cdot 138,62 = 1248,49 \text{ см/с}^2,$$

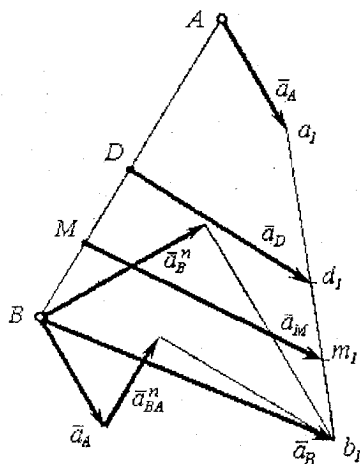
$$a_M = 9,0069 \cdot MQ = 9,0069 \cdot 115,35 = 1038,96 \text{ см/с}^2,$$

$$a_D = 9,0069 \cdot DQ = 9,0069 \cdot 91,72 = 837,58 \text{ см/с}^2.$$

Якщо порівняти величини прискорень знайдених аналітично за допомогою векторних рівнянь і величин одержаних через МЦП, то різниця досить мала. Найбільша абсолютна похибка має величина вектора  $\vec{a}_M$ . Вона складає 0,96%. Похибка в обчисленнях виникла за рахунок заокруглень в числових операціях.

**Графічний метод знаходження прискорень.** Цей метод вимагає точних графічних побудов із чітким збереженням масштаба.

Покажемо ланку  $AB$  на рис.5.9. З точки  $A$  відкладемо вектор  $\vec{a}_A$ . З точки  $B$  відкладемо послідовно, згідно векторної рівності (5.5), вектор  $\vec{a}_A$ , вектор  $\vec{a}_B^n$ , з кінця якого побудуємо вектор  $\vec{a}_{BA}^n$ . З кінців векторів  $\vec{a}_B^n$  і  $\vec{a}_{BA}^n$  проводимо перпендикуляри на перетині яких міститься кінець вектора  $\vec{a}_B$ . З'єднаємо кінці векторів  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_B$ . Помітимо одержаний відрізок точками  $a_1$  і  $b_1$ . Поділимо відрізок  $a_1 b_1$  точками  $m_1$  і  $d_1$  у тому ж відношенні, що точки  $M$  і  $D$  ділять відрізок  $AB$ . З'єднавши відповідно точки  $M$  і  $m_1$ ,  $D$  і  $d_1$ , одержи-



Масштаб прискорень: в 1 см - 100см/с<sup>2</sup>

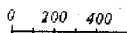


Рисунок 5.9

мо  $Mm_1 = a_M$ ,  $Dd_1 = a_D$ . Переведемо довжини відрізків через масштаб в одиниці прискорення і одержимо значення  $a_B$ ,  $a_M$  і  $a_D$ . Результати графічного розрахунку такі:

$$\begin{aligned} a_B &= Bb_1 \cdot 100 = 12,5 \cdot 100 = 1250 \text{ см/с}^2, \\ a_M &= Mm_1 \cdot 100 = 10,4 \cdot 100 = 1040 \text{ см/с}^2, \\ a_D &= Dd_1 \cdot 100 = 8,4 \cdot 100 = 840 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Порівняємо величини прискорень знайдені графічно з тими, що розраховані аналітично і знайдемо похибку. Найбільша абсолютна похибка для  $a_D - 2,42 \text{ см/с}^2$ , що складає 0,29% від  $842,5 \text{ см/с}^2$ .

Приведемо остаточні результати розрахунку швидкостей і прискорень виконаного завдання K5:

$$\begin{aligned} V_A &= 100 \text{ см/с}, & a_A &= 500 \text{ см/с}^2, \\ V_B &= 173,2 \text{ см/с}, & a_B &= 1249,12 \text{ см/с}^2, \\ V_D &= 100 \text{ см/с}, & a_D &= 842,5 \text{ см/с}^2, \\ V_M &= 132,26 \text{ см/с}, & a_M &= 1048 \text{ см/с}^2, \\ V_E &= 58 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

## К.6 Кінематичні характеристики тіла та його точок при сферичному русі

Тіло А котиться без ковзання по поверхні нерухомого тіла В (рис. 6.1-6.5), маючи нерухому точку О. Вісь  $o\eta$  тіла А обертається навколо нерухомої осі  $OZ$  і має при заданому положенні кутову швидкість  $\omega$  та прискорення  $\varepsilon$ .

Визначити кутову швидкість та кутове прискорення тіла А, швидкість та прискорення точки D тіла А для положення показаного на рисунку. Дані для розрахунку наведені в табл. 6.1

Таблиця 6.1

Варіант	$\omega$	$\varepsilon$	OC	CD
	$c^{-1}$	$c^{-2}$	м	м
1	3	1	0,35	0,10
2	4	2	0,45	0,15
3	5	3	0,55	0,20
4	2	-3	0,25	0,05
5	3	2	0,60	0,30
6	4	3	0,45	0,20
7	1	4	0,40	0,15
8	2	4	0,60	0,20
9	3	4	0,55	0,15
0	4	1	0,70	0,25

### 6.1 Приклад виконання завдання

Конічна шестерня котиться без ковзання по нерухомому конічному колесу (рис. 6.6). Дано :  $OC = 0,4$  м;  $\omega = 2$   $c^{-1}$ ;  $\varepsilon = 3$   $c^{-2}$ ;  $CD = 0,1$  м;  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ .

Визначити кутову швидкість і кутове прискорення шестерні А, швидкість та прискорення точки D для заданого положення тіла А.

Розв'язання: Миттєва вісь обертання  $O\Omega$  тіла А, що виконує сферичний рух, проходить через точку О та точку дотику тіл А і В (рис. 6.7)

Швидкість точки С при обертанні осі  $o\eta$  навколо осі  $OZ$

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{OC} \quad (6.1)$$

Якщо розглядати рух тіла А як обертальний навколо миттєвої осі  $O\Omega$ , то

$$\vec{v}_c = \vec{\omega}_1 \times \vec{OC} \quad (6.2)$$

Виходячи з (6.1) та (6.2), маємо:

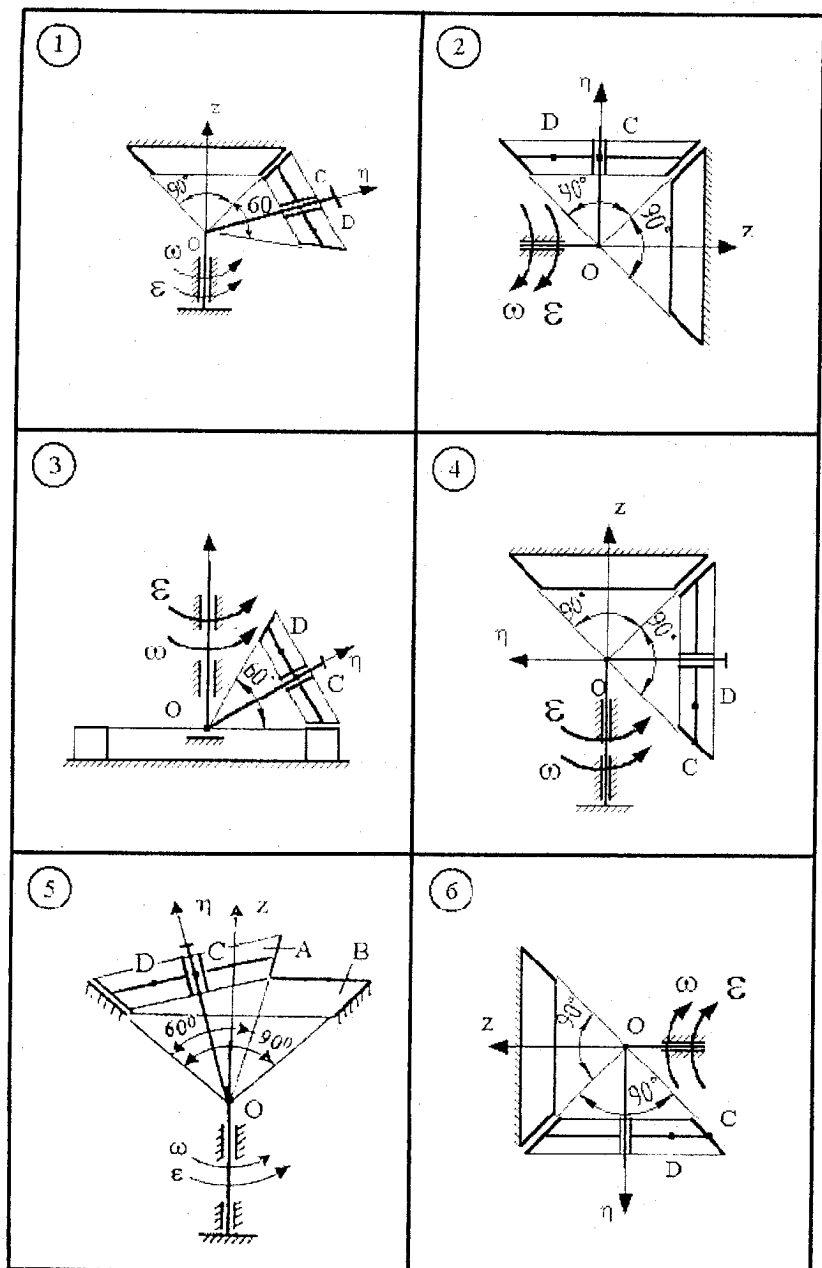


Рисунок 6.1

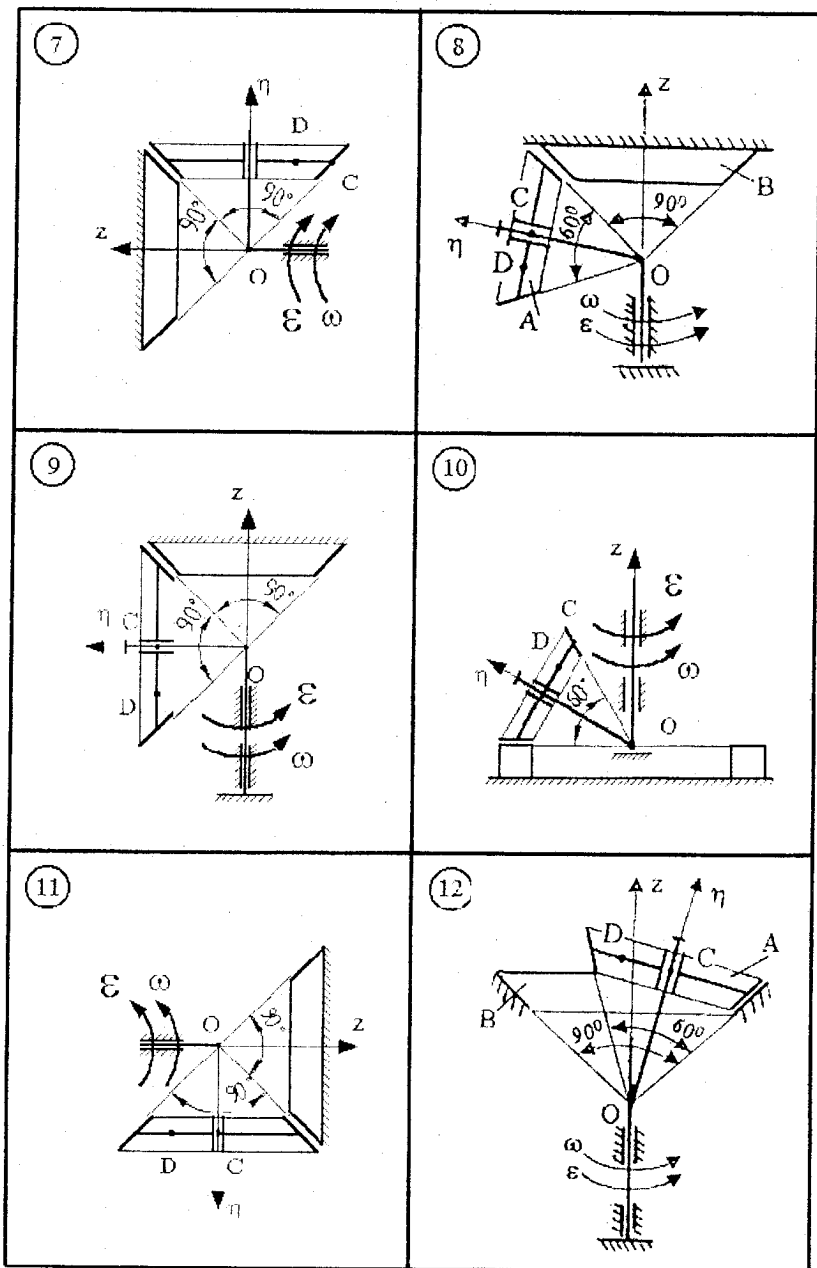


Рисунок 6.2

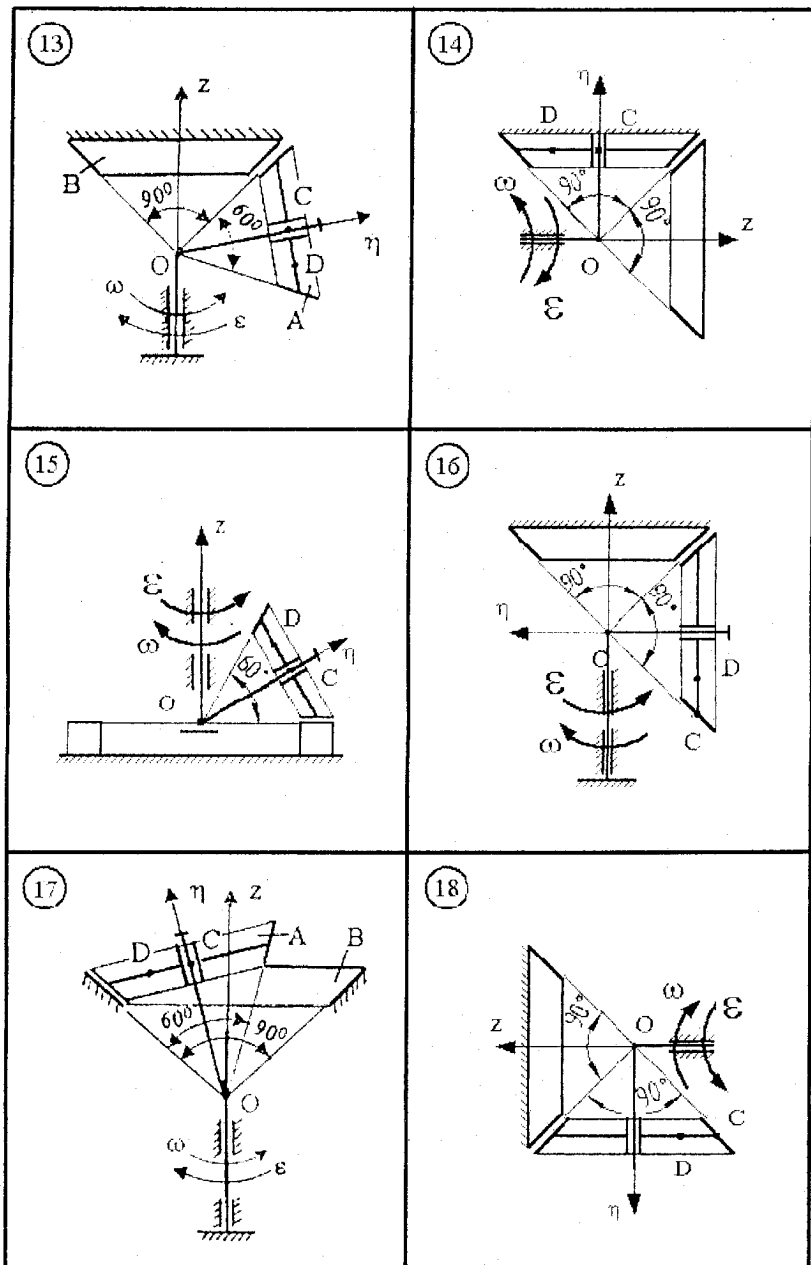
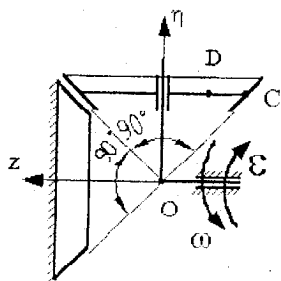


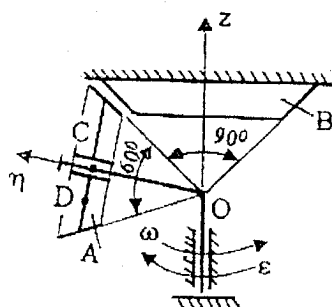
Рисунок 6.3



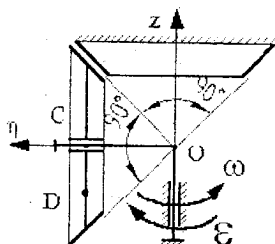
19



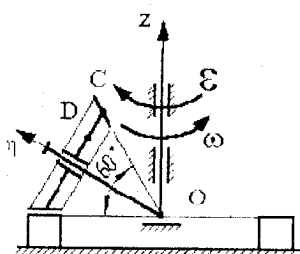
20



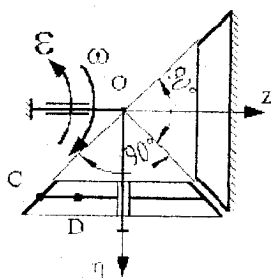
21



22



23



24

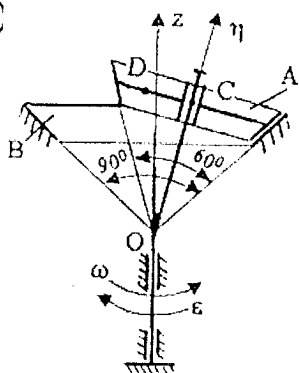


Рисунок 6.4

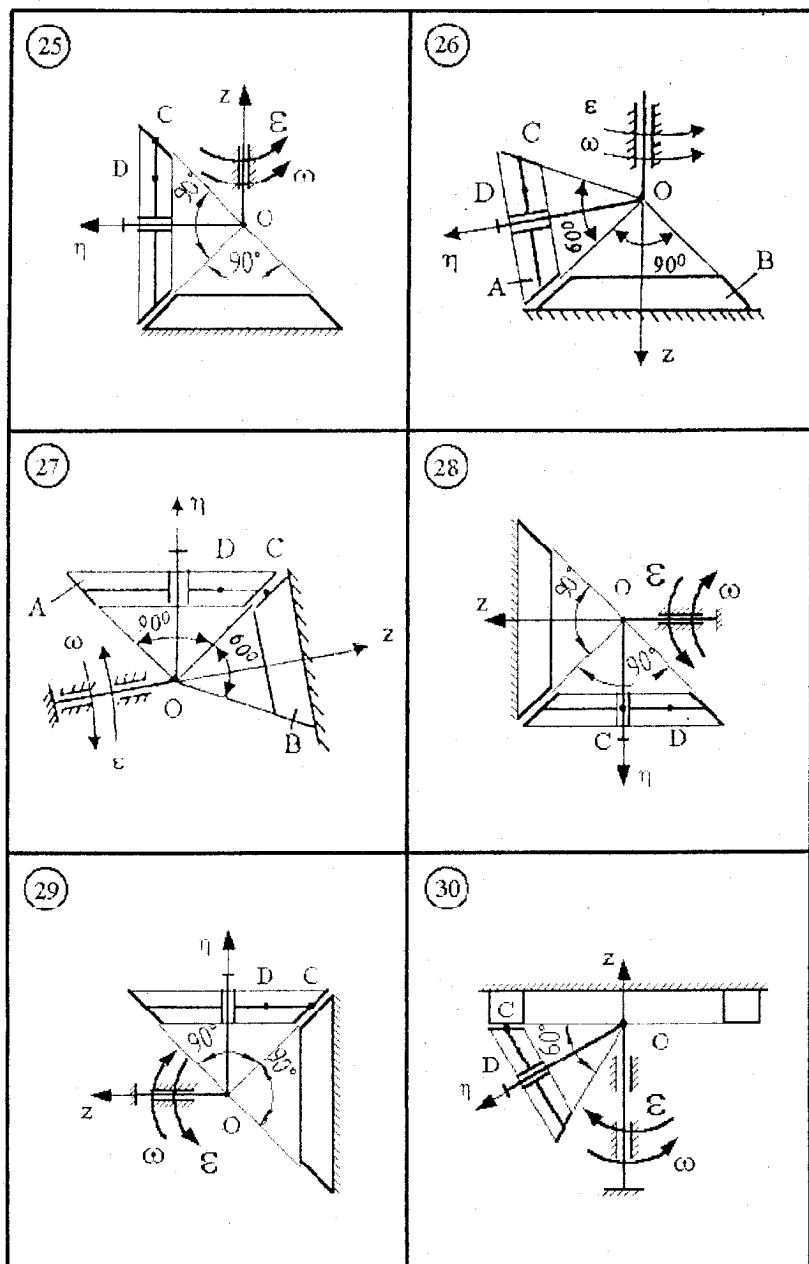


Рисунок 6.5

$$\omega \cdot OC \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \omega_1 \cdot OC \sin\frac{\beta}{2}.$$

Отже:

$$\omega_1 = \omega \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) / \sin\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad (6.3)$$

$$\omega_1 = 2 \sin\left(\frac{90^\circ + 60^\circ}{2}\right) / \sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = 3,86c^{-1}.$$

Кутові прискорення тіла А

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \cdot \bar{k}_\Omega),$$

де  $\bar{k}_\Omega$  - орт осі  $O\Omega$ , що змінює напрямок у просторі.

Отже,

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \bar{k}_\Omega + \omega_1 \frac{d\bar{k}_\Omega}{dt}, \quad (6.4)$$

$$\text{де } \frac{d\bar{k}_\Omega}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}_\Omega = \omega \cdot \bar{i} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ (рис.6.7).}$$

Тепер рівняння (6.4) набуває вигляду

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_1' + \bar{\varepsilon}_1'' \quad (6.5)$$

$$\text{де } \bar{\varepsilon}_1' = \varepsilon_1 \cdot \bar{k}_\Omega, \quad \bar{\varepsilon}_1'' = \omega \cdot \omega_1 \cdot \bar{k}_\Omega \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \bar{i}$$

Виходячи з (6.3), знаходимо модуль кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}_1'$  тіла А

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) / \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\varepsilon_1 = 3 \sin(45^\circ + 30^\circ) / \sin 30^\circ = 5,80c^{-2}.$$

Вектор  $\bar{\varepsilon}_1''$  має напрямок осі  $x$ , а його модуль

$$\varepsilon_1'' = \omega \cdot \omega_1 \sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 3,86 \sin 45^\circ = 5,46c^{-2}$$

Тепер рівняння (6.4) набуває вигляду

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_1' + \bar{\varepsilon}_1'' \quad (6.5)$$

$$\text{де } \bar{\varepsilon}_1' = \varepsilon_1 \cdot \bar{k}_\Omega, \quad \bar{\varepsilon}_1'' = \omega \cdot \omega_1 \cdot \bar{k}_\Omega \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \bar{i}$$

Виходячи з (6.3), знаходимо модуль кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}_1'$  тіла А

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) / \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\varepsilon_1 = 3 \sin(45^\circ + 30^\circ) / \sin 30^\circ = 5,80c^{-2}.$$

Вектор  $\bar{\varepsilon}_1''$  має напрямок осі  $x$ , а його модуль

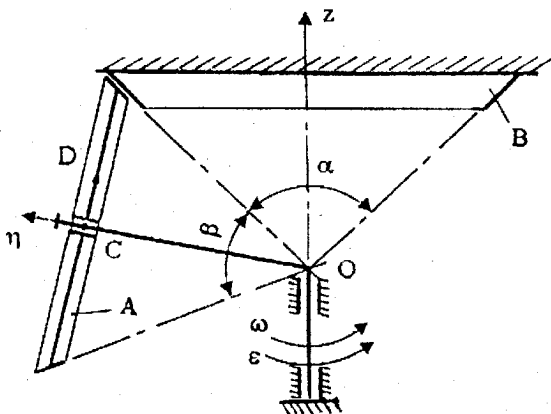


Рисунок 6.6

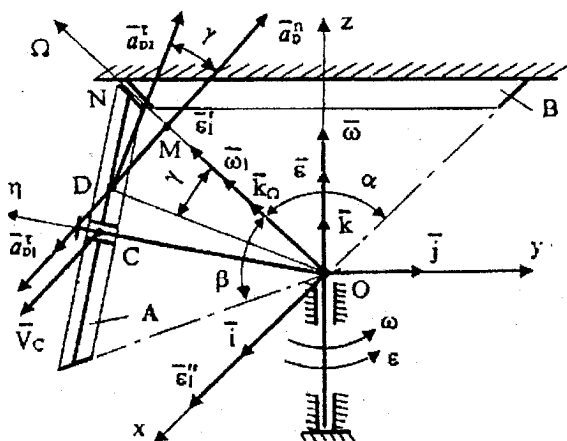


Рисунок 6.7

$$\bar{\epsilon}_1'' = \omega \cdot \omega_1 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 3,86 \sin 45^\circ = 5,46 c^{-2}$$

Оскільки вектори  $\bar{\epsilon}_1'$  та  $\bar{\epsilon}_1''$  взаємно перпендикулярні, тоді

$$\epsilon = \sqrt{(\epsilon_1')^2 + (\epsilon_1'')^2},$$

$$\epsilon = \sqrt{5,46^2 + 5,8^2} = 7,96 c^{-2}.$$

Швидкість точки D знаходимо, враховуючи, що тіло A обертається навколо миттєвої осі OQ.

$$\bar{v}_D = \bar{\omega}_1 \times \overline{OD}.$$

Модуль цієї швидкості

$$v_D = \omega_1 \cdot MD = 3,86 \cdot 0,11 = 0,44 \text{ м/с},$$

$$\text{де } MD = (OC \cdot \tan 30^\circ - CD) \sin 60^\circ = (0,4 \frac{1}{\sqrt{3}} - 0,1) \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,11 \text{ м}.$$

Прискорення точки D дорівнює векторній сумі нормального  $\overline{a}_D^n$  і дотичного  $\overline{a}_D^r$  прискорень:

$$\overline{a}_D = \overline{a}_D^n + \overline{a}_D^r \quad (6.6)$$

Нормальне прискорення

$$\overline{a}_D^n = \overline{\omega} \times \overline{v}_D \quad (6.7)$$

спрямовано перпендикулярно до миттєвої осі обертання  $O\Omega$  тіла A від точки D до точки M (рис 6.7).

Модуль нормального прискорення

$$a_D^n = \omega_1^2 \cdot MD = 3,86^2 \cdot 0,11 = 0,42 \text{ м/с}^2$$

Дотичне прискорення

$$\overline{a}_D^r = \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OM} = (\overline{\varepsilon}_1' + \overline{\varepsilon}_1'') \cdot \overline{OM}$$

$$\text{або } \overline{a}_D^{o\delta} = \overline{a}_{D1}^{o\delta} + \overline{a}_{D2}^{o\delta}, \quad (6.8)$$

$$\text{де } \overline{a}_{D1}^{o\delta} = \overline{\varepsilon}_1' \times \overline{OM}, \quad \overline{a}_{D2}^{o\delta} = \overline{\varepsilon}_1'' \times \overline{OM}.$$

Модулі складових дотичного прискорення точки D

$$a_{D1}^r = \varepsilon_1' \cdot MD = 5,8 \cdot 0,11 = 0,64 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{D2}^r = \varepsilon_1'' \cdot OD \sin 90^\circ = 5,46 \cdot 0,412 = 2,25 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{де } OD = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,1^2} = 0,412 \text{ м}.$$

Оскільки напрямки векторів  $\overline{\varepsilon}_1'$  та  $\overline{\omega}_1$  збігаються, напрямки  $\overline{a}_{D1}^r$  і  $\overline{v}_D$  також збігаються. Вектор  $\overline{a}_{D2}^r$  розташований в площині YOZ і спрямований перпендикулярно до OD в ту сторону, звідки поворот від вектора  $\overline{\varepsilon}_1''$  до вектора  $\overline{OM}$  видно проти годинникової стрілки на кут  $90^\circ$  (рис. 6.7).

Прискорення точки D (6.6) знаходимо як векторну суму складових (6.7) та (6.8):

$$\overline{a}_D = \overline{a}_D^n + \overline{a}_{D1}^r + \overline{a}_{D2}^r$$

Модуль прискорення точки D

$$a_D = \sqrt{(a_D^n)^2 + (a_{D1}^r)^2 + (a_{D2}^r)^2 - 2a_D^n \cdot a_{D2}^r \cos \gamma},$$

$$a_D = \sqrt{(0,42)^2 + (0,64)^2 + (2,25)^2 - 2 \cdot 0,42 \cdot 2,25 \cdot 0,962} = 1,96 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{де } \cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{DN^2}{OD^2} \sin^2 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{0,13^2}{0,412^2} \cdot \frac{3}{4}} = 0,962$$

$$DN = OC \tan 30^\circ - CD = \frac{0,4}{\sqrt{3}} - 0,1 = 0,13 \text{ м}.$$

## К.7 Знаходження швидкості та прискорення точки в складному русі

Умова завдання. На рис.7.1 – 7.5 по варіантах від 1 до 30 показано точку  $M$ , яка рухається по тілу, що виконує переміщення. Закони руху точки і тіла в залежності від часу задані функціями, які записані біля рисунків, а числові значення коефіцієнтів приведені таблицею 7.1 по варіантах.

Визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки  $M$  в складному русі для моменту часу, значення якого задано в таблиці 7.1 по варіантах.

Для бажаних більш детально дослідити процес складного руху точки побудувати графіки залежностей  $V = V(t)$  – абсолютної швидкості від часу та  $a = a(t)$  – абсолютного прискорення від часу.

Таблиця 7.1

№ Вар.	A	B	C	D	R	$k$	$t_1$
	см						с
1	28	12	16	12	15	2	0,5
2	14	8	12	6	12	1,5	1
3	15	4	9	2	8	1	0,4
4	10	4	8	6	6	2	0,3
5	8	5	14	10	10	1,5	2
6	16	11	6	8	14	3	0,6
7	12	2	9	5	10	1	0,5
8	7	5	12	4	8	2	0,8
9	14	10	6	5	12	1,5	1
0	9	6	5	2	4	1	0,4

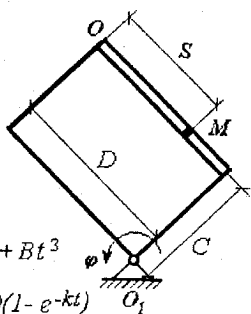
Примітка. Для зручності виконання завдання рівняння руху точки  $M$  і тіла потрібно записати із врахуванням значень коефіцієнтів таблиці 7.1.

Наприклад: для варіанта 15 біля рисунка вказано, що  
 $S = A + k t^2$ ,  $\varphi = B(1 - e^{-0,5t})$ ,

в таблиці 7.1 значення  $A, B, k$  задано по варіантах, наприклад, по варіанту 4:  $A = 10\text{см}$ ,  $B = 4\text{см}$ ,  $k = 2$ .

То рівняння руху будуть:  $S = 10 + 2 t^2$ ,  $\varphi = 8(1 - e^{-0,5t})$ .

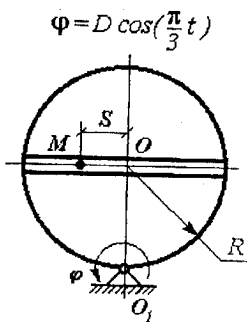
1



$$\varphi = A + Bt^3$$

$$S = D(1 - e^{-kt})$$

2



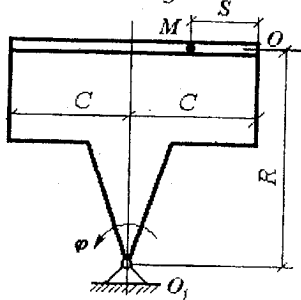
$$\varphi = D \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$S = A \sin\left(k \frac{\pi}{6}t\right)$$

3

$$S = At - Bt^k$$

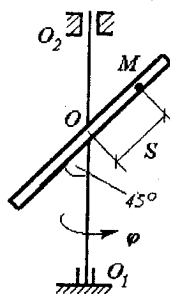
$$\varphi = D\pi \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$



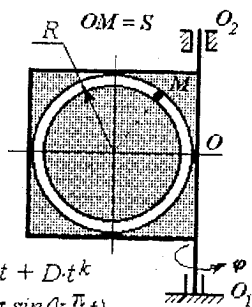
4

$$\varphi = A\pi \cos\left(k \frac{\pi}{3}t\right)$$

$$S = Bt + Dt^2$$



5



$$\varphi = At + Dt^k$$

$$S = R\pi \sin\left(k \frac{\pi}{4}t\right)$$

6

$$\varphi = R\pi e^{-kt}$$

$$S = A + Bt + Ct^2$$

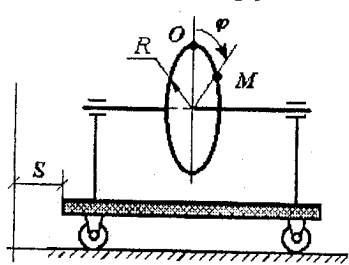
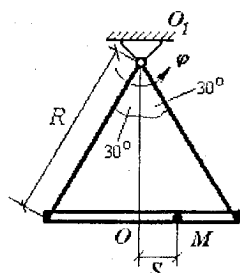


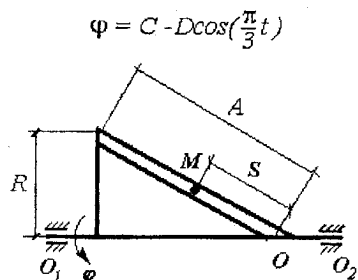
Рисунок 7.1

7



$$S = D\pi \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad \varphi = B + Ct^k$$

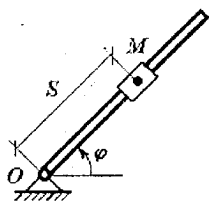
8



$$S = B(2 - e^{-kt})$$

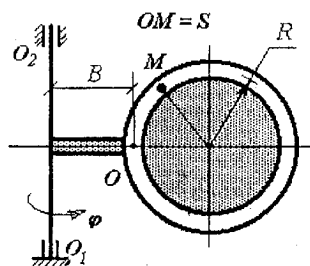
9

$$\varphi = D \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$



$$S = A + Be^{kt}$$

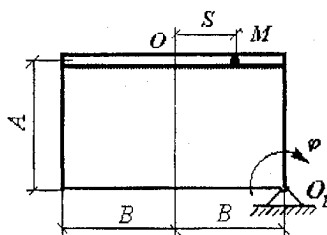
10



$$S = R\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \varphi = Ct + Dt^k$$

11

$$\varphi = C - D \cdot e^{-kt}$$

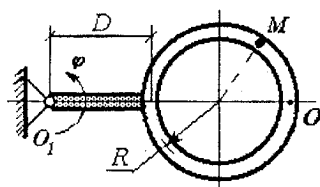


$$S = B(1 - \cos(k\frac{\pi}{6}t))$$

12

$$S = R\pi t^k$$

$$\varphi = A \cdot t + C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

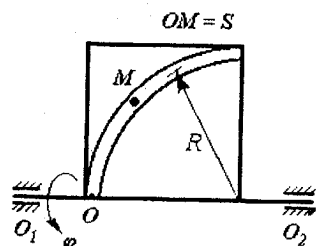


$$OM = S$$

Рисунок 7.2

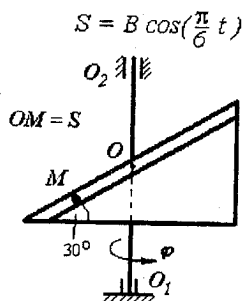


13



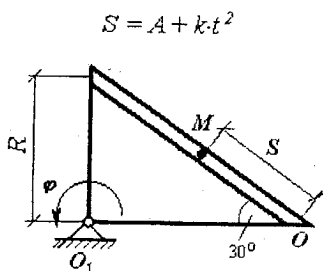
$$S = R\pi(1 - e^{-kt}), \quad \varphi = D - At^3$$

14



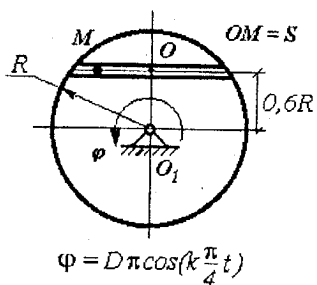
$$\varphi = At + Dt^k$$

15



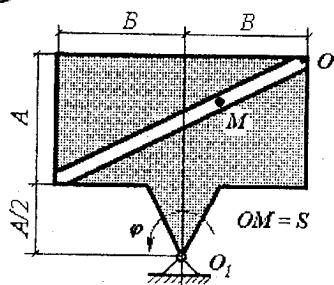
$$\varphi = B(1 - e^{-0.5t})$$

16



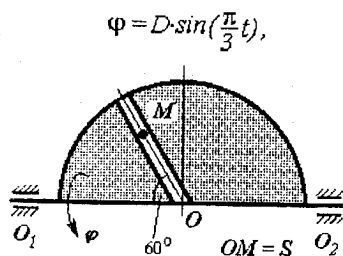
$$\varphi = D\pi\cos(k\frac{\pi}{4}t)$$

17



$$\varphi = Dt^3 - C, \quad S = 2B \cdot (1 - e^{-kt})$$

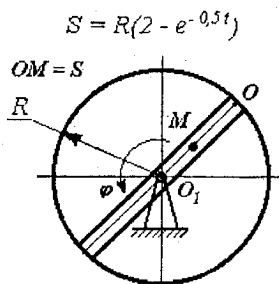
18



$$S = A \cdot t + Be^{kt}$$

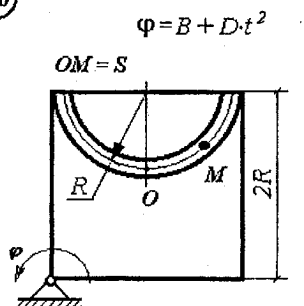
Рисунок 7.3

19



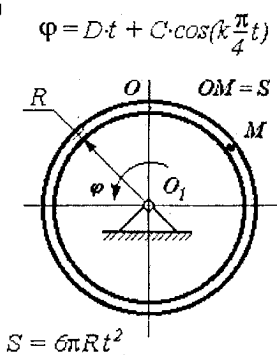
$$\varphi = At + Bt^2 + Ct^k$$

20



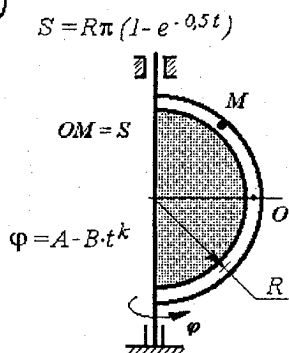
$$S = R \frac{\pi}{3} \cos(k \frac{\pi}{4} t)$$

21



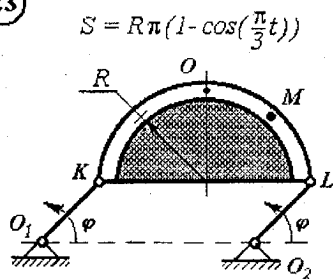
$$S = 6\pi R t^2$$

22



$$\varphi = A - B \cdot t^k$$

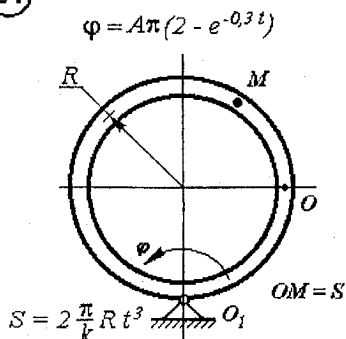
23



$$OM = S, O_1K = O_2L = A$$

$$\varphi = B - Dt^2$$

24

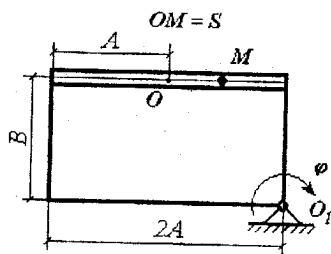


$$S = 2 \frac{\pi}{k} R t^3$$

$$OM = S$$

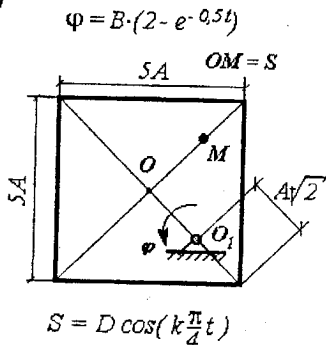
Рисунок 7.4

25



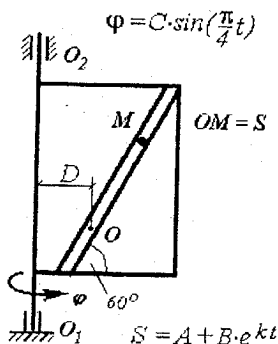
$$S = A \sin\left(k \frac{\pi}{\delta} t\right), \quad \varphi = B \cdot t + D \cdot t^2$$

26



$$S = D \cos\left(k \frac{\pi}{4} t\right)$$

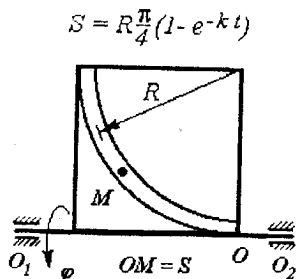
27



$$\varphi = C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

$$S = A + B \cdot e^{kt}$$

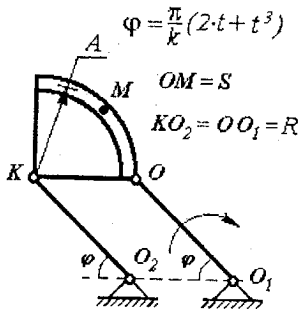
28



$$S = R \frac{\pi}{4} (1 - e^{-kt})$$

$$\varphi = A \cdot t + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

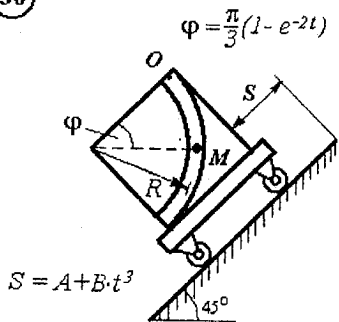
29



$$\varphi = \frac{\pi}{k} (2 \cdot t + t^3)$$

$$S = A \pi (2 - e^{-0.5t})$$

30



$$\varphi = \frac{\pi}{3} (1 - e^{-2t})$$

$$S = A + B \cdot t^3$$

Рисунок 7.5

## 7.1 Приклад виконання завдання

Умова задачі. Точка  $M$  рухається по меридіану сфери, яка обертається навколо вертикальної осі. Сфера і точка  $M$  показані на рис.7.6. Радіус сфери  $R = 20\text{см}$ . Рівняння обертового руху сфери  $\varphi = 5t + 4t^2$ , а рух точки по сфері задається залежністю  $O_1M = S = 10\pi \sin(1 - e^{-2t})\text{см}$ . Визначити абсолютну швидкість  $V$  і абсолютне прискорення  $a$  точки  $M$  для моменту часу  $t = 0,3\text{с}$ .

Побудувати графіки залежності  $V = V(t)$  – швидкості,  $a = a(t)$  – прискорення точки  $M$  при її русі по сфері, вибравши для спостереження руху достатній проміжок часу.

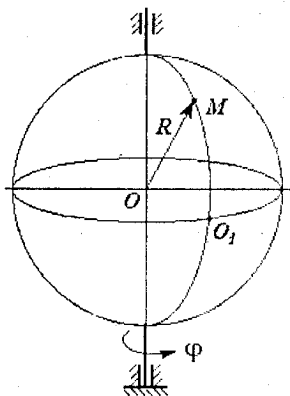


Рисунок 7.6

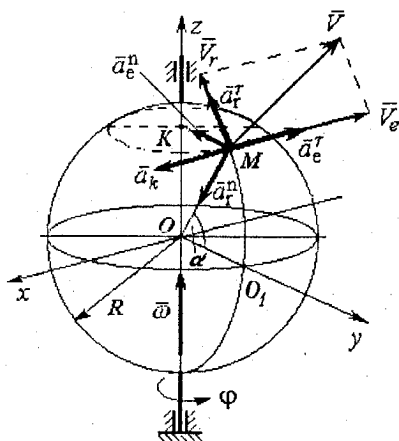


Рисунок 7.7

Розв'язання. Покажемо на рис.7.7 систему координат  $xyz$ , в якій будемо вести відлік руху і направляти вектори. Вісь  $Ox$  направляємо перпендикулярно до площини меридіана, де рухається точка, вісь  $Oy$  - в площині меридіана, а вісь  $Oz$  їм відповідно. Відносний рух точки  $M$  відбувається по меридіану і задається віддаллю по дузі радіуса  $R$  від точки  $O_1$ . Переносний рух точки  $M$  - це рух точки разом із сферою при її обертанні навколо вертикальної осі. В переносному русі точка  $M$  описує дугу радіусом  $KM$ .

Визачення абсолютної швидкості. В складному русі абсолютна швидкість знайдеться геометричною сумою

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (7.1)$$

На рис. 7.7 вектор  $\vec{V}_e$  направляємо в сторону обертання сфери, що відповідає напрямку протилежному до осі  $Ox$ , а вектор відносної швидкості  $\vec{V}_r$  по дотичній до дуги меридіана в площині  $yOz$ . В будь-який момент руху вектори  $\vec{V}_e$  і  $\vec{V}_r$  взаємно перпендикулярні. Знайдемо модулі цих векторів.

$$\begin{aligned} V_r &= (O_1M) = 10\pi e^{-2t}, \\ V_e &= \omega KM, \end{aligned} \quad (7.2)$$

Де  $\omega$  і  $KM$  потрібно знайти.  $KM = R \cos \alpha$ ,  $\alpha = O_1M/R = = 10\pi(1 - e^{-2t})/20 = \pi(1 - e^{-2t})/2$ ,  $\omega = (\dot{\varphi}) = 5t + 4t^2$ .

Тоді переносна швидкість рівна

$$V_e = 20(5t + 4t^2) \cos \alpha. \quad (7.3)$$

Модуль абсолютної швидкості знайдемо за теоремою Піфагора, тому що між  $\vec{V}_e$  і  $\vec{V}_r$  прямий кут.

$$V = ((V_r)^2 + (V_e)^2)^{0,5}. \quad (7.4)$$

**Визначення абсолютного прискорення.** Для знаходження прискорення точки в складному русі використовуємо теорему Коріоліса

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k. \quad (7.5)$$

В нашому випадку переносний і відносний рухи відбуваються по криволінійних траєкторіях, тому переносне і відносне прискорення мають складові:  $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r$ ,  $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^r$ , тоді формула (7.5) стає більш розширеною

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^r + \vec{a}_k. \quad (7.6)$$

На рис. 7.7 вкажемо напрямки векторів, які входять в (7.6). Нормальні складові  $\vec{a}_e^n$  і  $\vec{a}_r^n$  направляємо перпендикулярно до напрямків руху до центрів дуг. Вектор  $\vec{a}_e^n$  до точки  $O$ , а  $\vec{a}_r^n$  до центра  $K$ . Вектора дотичних складових  $\vec{a}_e^r$  і  $\vec{a}_r^r$  направляємо по дотичних до відповідних траєкторій:  $\vec{a}_e^r$  проти осі  $Ox$ , а  $\vec{a}_r^r$  в площині  $yOz$  перпендикулярно до радіуса  $OM$ . Для визначення напрямку вектора прискорення Коріоліса використовуємо його формулу в векторному вигляді  $\vec{a}_k = 2 \vec{\omega} \times \vec{V}_r$ , згідно з якою вектор  $\vec{a}_k$  направляється перпендикулярно до площини в якій розташовані вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{V}_r$ , у відповідності з правою винтовою системою відліку, тобто паралельно осі  $Ox$ . Для визначення напрямку вектора  $\vec{a}_k$  можна ще скористатись

Таблиця 7.2

$t$	$V_r$	$V_e$	$V$	$a_e^r$	$a_e^n$	$a_r^r$	$a_r^n$	$a_k$	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$a$
0	63	100	118	160	100	-126	197	0	-160	-297	-126	1E+05
0,05	57	107	121	158	99	-114	161	91	-67	-242	-136	81651
0,1	51	111	123	154	98	-103	132	167	13,9	-196	-136	56860
0,15	47	114	123	147	95	-93	108	228	81,4	-158	-128	47949
0,2	42	115	122	139	92	-84	88,6	275	136	-128	-117	48492
0,25	38	114	120	130	90	-76	72,5	309	178	-105	-104	53638
<b>0,3</b>	<b>34</b>	<b>112</b>	<b>118</b>	<b>122</b>	<b>87</b>	<b>-69</b>	<b>59,4</b>	<b>332</b>	<b>210</b>	<b>-87</b>	<b>-91</b>	<b>60120</b>
0,35	31	110	114	113	84	-62	48,6	346	233	-74	-78	65985
0,4	28	106	110	104	82	-56	39,8	352	248	-64	-67	70251
0,45	26	103	106	95	79	-51	32,6	352	257	-57	-57	72576
0,5	23	98	101	87	77	-46	26,7	348	261	-52	-48	73006
1	8,5	55	56	34	55	-17	3,61	216	182	-39	-7,1	34748
1,5	3,1	27	27	13	36	-6,3	0,49	106	93,4	-30	-1	9621
2	1,2	12	12	4,7	22	-2,3	0,07	48	43,6	-20	-0,1	2280
2,5	0,4	5,7	5,7	1,8	13	-0,8	0,01	21	19,3	-12	-0	510

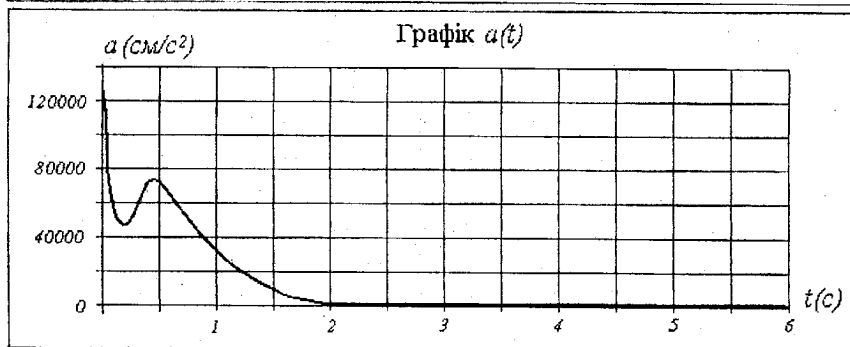
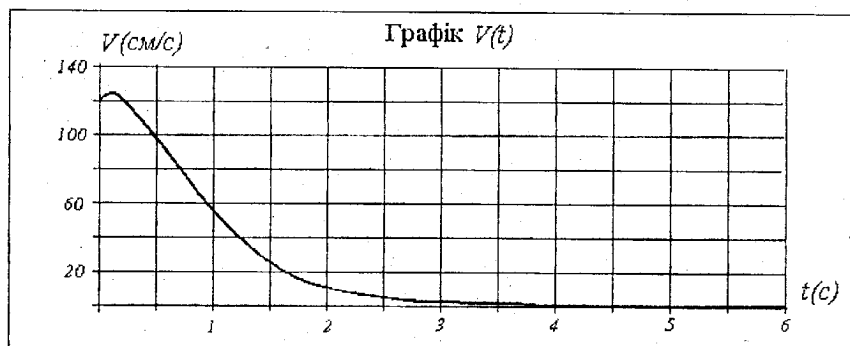


Рисунок 7.8

правилом Жуковського.

Знайдемо модулі вказаних векторів.

$$a_e^n = \omega^2 \cdot KM = (5+8t)^2 20 \cdot \cos \alpha, \quad (7.7)$$

$$a_e^r = \varepsilon \cdot KM = (\omega)^r \cdot KM = 160 \cdot \cos \alpha, \quad (7.8)$$

$$a_r^n = V_r^2 / R = 20\pi^2 e^{-4t}, \quad (7.9)$$

$$a_r^r = (V_r)^r = -40\pi e^{-2t}, \quad (7.10)$$

$$a_k = 2 \cdot \omega \cdot V_r \cdot \sin \alpha = 40\pi (5+8t) e^{-2t} \cdot \sin \alpha \quad (7.11)$$

Знайдемо проекції вектора абсолютного прискорення на координатні осі. Для цього потрібно всі вектора прискорень, які вказані на рисунку 7.7 спроектувати на певну вісь і взяти суму таких проекцій. Практично це виконується так: формулу (7.6) проєкуємо на осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ .

$$a_x = a_k - a_e^r,$$

$$a_y = -a_e^n - a_r^n \cos \alpha - a_r^r \sin \alpha,$$

$$a_z = a_r^r \cos \alpha - a_r^n \sin \alpha$$

Модуль вектора абсолютного прискорення буде рівний

$$a = ((a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2)^{0.5} \quad (7.12)$$

Для підрахунку значення  $V$  і  $a$  при  $t = t_1 = 0,3$  с потрібно це значення часу підставити в відповідні формули. Швидкість визначаємо формулами (7.2), (7.3) і (7.4), а прискорення - (7.7) - (7.12). Якщо нам потрібно провести більш детальний аналіз руху, одержати графіки  $V(t)$  і  $a(t)$ , то вказані формули вводимо в комп'ютер.

Приведемо частину результатів і графіки  $V(t)$  і  $a(t)$ , одержаних за допомогою програми EXCEL. Частина числових значень знаходиться в таблиці 7.2, де величини швидкості та прискорень при значенні  $t = 0,3$  с виділені курсивом, а графіки на рис.7.8. Графіки  $V(t)$  і  $a(t)$  розміщені один під одним, вісь часу має одну і ту ж шкалу. Це дає можливість детальніше аналізувати рух точки. Так наприклад, з рис.7.8 видно, що з часом абсолютна швидкість і абсолютне прискорення зменшуються і при  $t > 3$  с практично стають дуже малими. Це відбувається тому, що точка  $M$  асимптотично наближається до осі обертання, її радіус у переносному русі (на рис.7.8 відстань  $KM$ ) наближається до нуля, а кут  $\alpha$  до  $90^\circ$ . При потребі можна прослідкувати за зміною з часом положення точки на меридіані, чому рівні та як направлені складові переносного відносного чи абсолютно го прискорень.

## К.8 Визначення кутових швидкостей ланок планетарного редуктора з паралельними осями

Визначити кутові швидкості веденого вала II і сателітів редуктора. Схеми редукторів показані на рис.8.4-8.8, а необхідні для розрахунку величини приведені в табл. 8.1. Радіус  $r_3$  визначається геометрично згідно з варіантом завдання.

Таблиця 8.1

Варіант	Радіус, м			Кутова швидкість, рад/с	
	$r_1$	$r_2$	$r_4$	$\omega_1$	$\omega_1$
0	0,15	0,20	0,45	200	-10
1	0,30	0,35	0,60	100	20
2	0,35	0,45	0,70	300	10
3	0,35	0,40	0,65	100	40
4	0,45	0,50	0,95	-120	25
5	0,30	0,35	0,90	200	50
6	0,40	0,45	1,00	80	-20
7	0,45	0,50	1,2	10	-30
8	0,20	0,30	0,50	30	-350
9	0,50	0,60	1,2	130	-250

### 8.1 Приклад виконання завдання

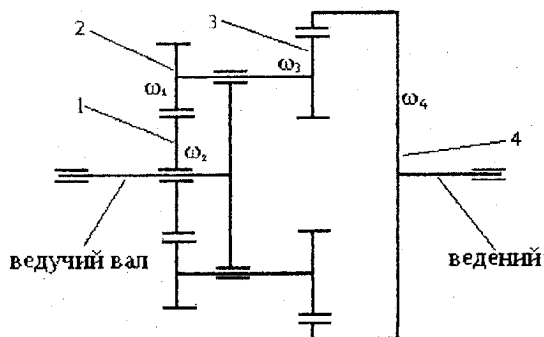


Рисунок 8.1



Визначити кутові швидкості веденого вала II і сателітів редуктора (рис.8.1). Геометричні розміри редуктора та кутова швидкість ведучого вала I -  $\omega_1$  і шестерні 1-  $\omega_1$  приведені в таблиці 8.2.

Таблиця 8.2

Радіус, м			Кутова швидкість, рад/с	
$r_1$	$r_2$	$r_4$	$\omega_1$	$\omega_1$
0,3	0,15	0,75	80	20

### 8.1.1 Розв'язання задачі способом Вілліса

Переносною кутовою швидкістю для кожного колеса є кутова швидкість ведучого валу  $\omega_0$ .

Відносну кутову швидкість коліс визначають як різницю абсолютних і переносних швидкостей:

$$\begin{aligned} \omega_{1r} &= \omega_1 - \omega_0, \\ \omega_{2r} &= \omega_2 - \omega_0, \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_{kr} &= \omega_k - \omega_0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

Ці відносні швидкості є кутовими швидкостями всіх коліс при умовній зупинці ведучого валу.

В цьому випадку між відносними кутовими швидкостями є такі ж співвідношення, як в зубчастих передачах з нерухомими осями обертання. Отже,

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_k - \omega_0} = (-1)^m \cdot i, \tag{8.2}$$

де  $m$  - кількість зовнішніх зачеплень між колесами 1 і  $k$ ;

$i$  - передаточне число від колеса 1 до колеса  $k$  у відносному русі (при зупинці водила).

Співвідношення (8.2) носить назву формули Вілліса.

Зауважимо, що в цю формулу входять алгебраїчні значення кутових швидкостей коліс; знак "+" приймаємо відповідним обертанням проти годинникової стрілки, а "-" - обертанням за годинниковою стрілкою. В формулу Вілліса замість  $\omega$  (с<sup>-1</sup>) може бути підставлено  $n$  (об/хв).

Використаємо формулу Вілліса до розв'язання даної задачі (рис. 8.2,а).

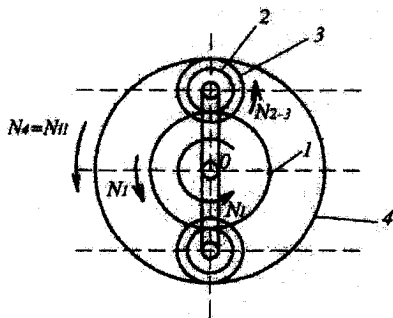


Рисунок 8.2,а

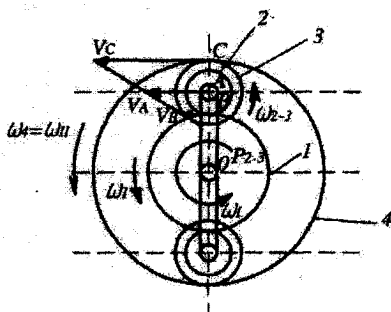


Рисунок 8.2,б

Оскільки колеса 1 і 2 знаходяться у зовнішньому зачепленні, а колеса 3 і 4 – у внутрішньому, і кутова швидкість ведучого валу дорівнює  $\omega_1$ , то:

$$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_4 - \omega_I} = (-1)^1 \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \quad (8.3)$$

Звідки:

$$\omega_4 = \omega_{II} = \omega_I - \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} (\omega_I - \omega_I) \quad (8.4)$$

Підставимо числові значення, знаходимо:

$$\omega_{II} = 80 - \frac{0,3 \cdot 0,3}{0,15 \cdot 0,75} (20 - 80) = 128 \text{ с}^{-1} \quad (8.5)$$

Знак "+" вказує на те, що вал II обертається в напрямку, протилежному напрямку руху годинникової стрілки.

Кутову швидкість  $\omega_{2-3}$  шестерні 2-3 визначимо з такого співвідношення:

$$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_{2-3} - \omega_I} = (-1)^1 \frac{r_2}{r_1} \quad (8.6)$$

навколо осі нерухомої шестерні.

*Диференціальною* називається передача, зображена на рис.8.2,б, якщо при ній шестерня не є нерухомою і може обертатися навколо своєї осі А незалежно від кривошипа АВ.

Розрахунок планерних і диференціальних передач можна проводити, якщо умовно всій нерухомій площині  $Ax_1y_1$  надати обертання з кутовою швидкістю  $\omega_{AB}$ , яка рівна за модулем і протилежна за напрямком АВ (метод зупинки або метод Вілліса).

Тоді кривошип АВ будемо вважати нерухомим, а будь-яка шестерня радіусу  $r_k$  буде мати кутову швидкість:

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB} \quad (8.7)$$

де  $\omega_k$  - абсолютна швидкість цієї шестерні по відношенню до осей  $Ax_1y_1$  (рис.8.3). При цьому осі всіх шестерень будуть нерухомі і залежність між  $\tilde{\omega}_k$  можна буде визначити або прирівнюючи швидкості точок зчеплення, або за формулою:

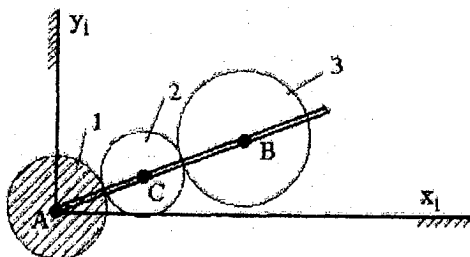


Рисунок 8.3

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega_2} &= -\frac{r_2}{r_1}, \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} &= -\frac{r_3}{r_2}, \\ \frac{\omega_1}{\omega_3} &= \frac{r_3}{r_1} = \frac{Z_3}{Z_1}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Отже, відношення кутових швидкостей крайніх шестерень в цій передачі обернено пропорційні їх радіусам (кількості зубців) і не залежить від радіусів проміжних (паразитних) шестерень.

З отриманих результатів маємо, що при рядовому зачепленні шестерень:

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{Z_n}{Z_1} \quad (8.9)$$

де  $k$  - кількість зовнішніх зачеплень (у випадку, зображеному на рис.8.2,а, є одне зовнішнє зачеплення; на рис.8.2,б - два зовнішніх зачеплення).

Передаточним числом зубчатої передачі називається величина  $i_{1n}$ , яка дорівнює відношенню кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (8.10)$$

Для рядової передачі значення  $i_{1n}$  отримуємо з правої частини формули (8.9).

*Планетарною* називається передача (рис.8.3), в якій шестерня 1 нерухома, а осі інших шестерень, які знаходяться в послідовному зачепленні, закріплені на кривошипі АВ, який обертається.

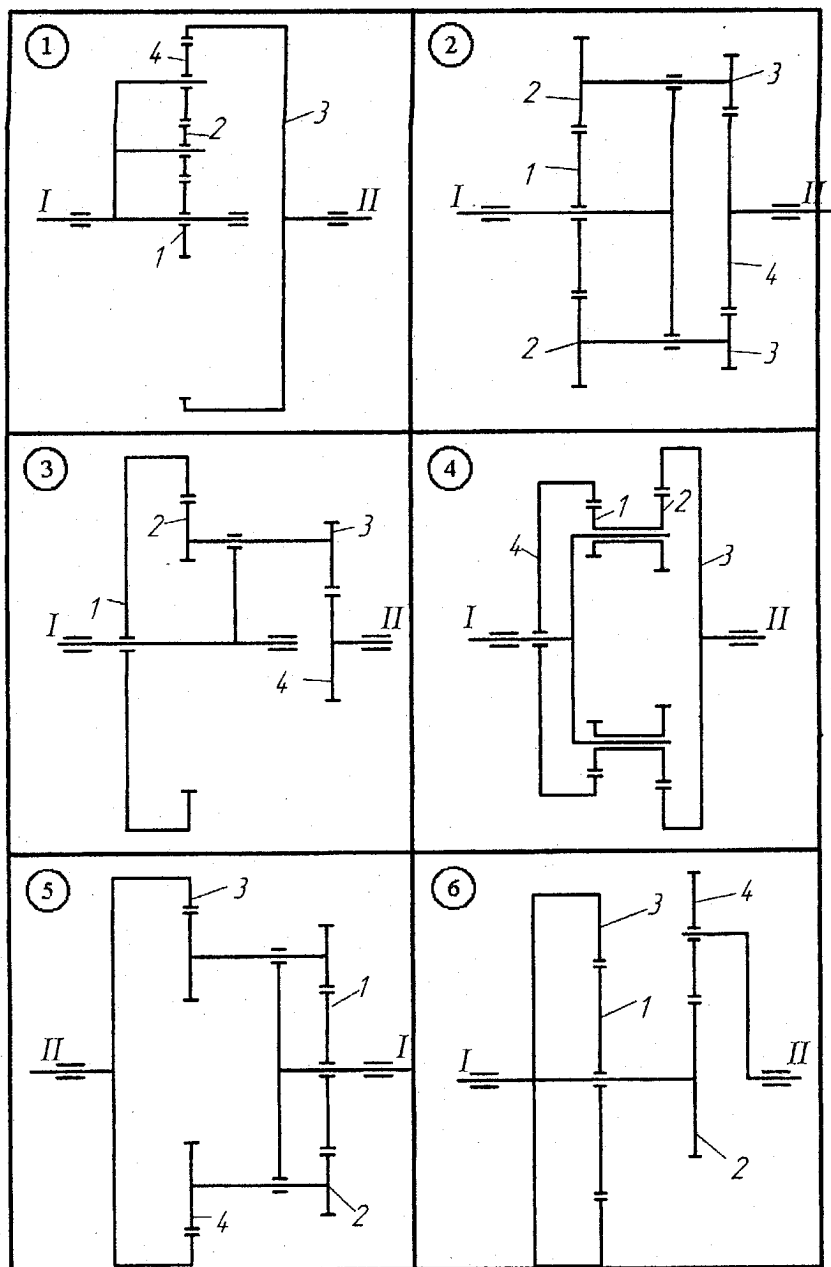


Рисунок 8.4

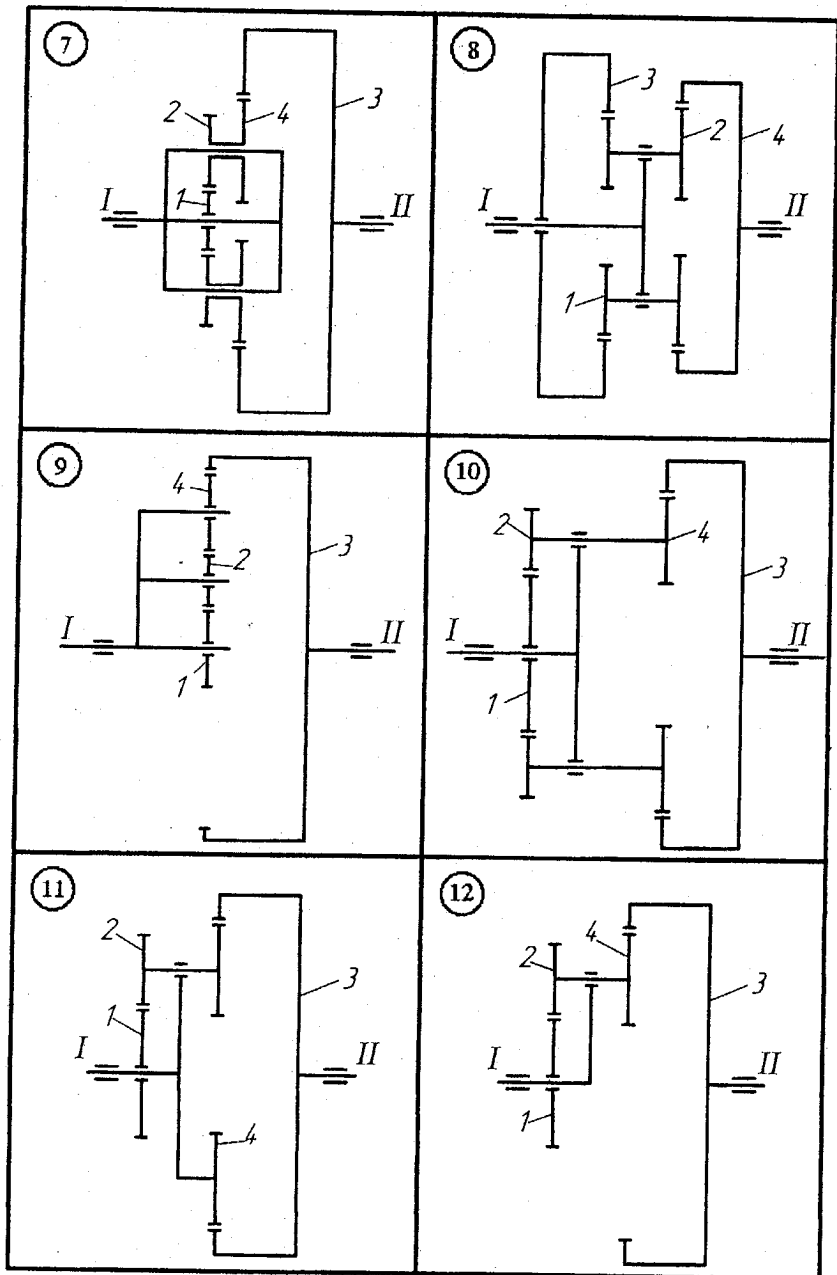


Рисунок 8.5

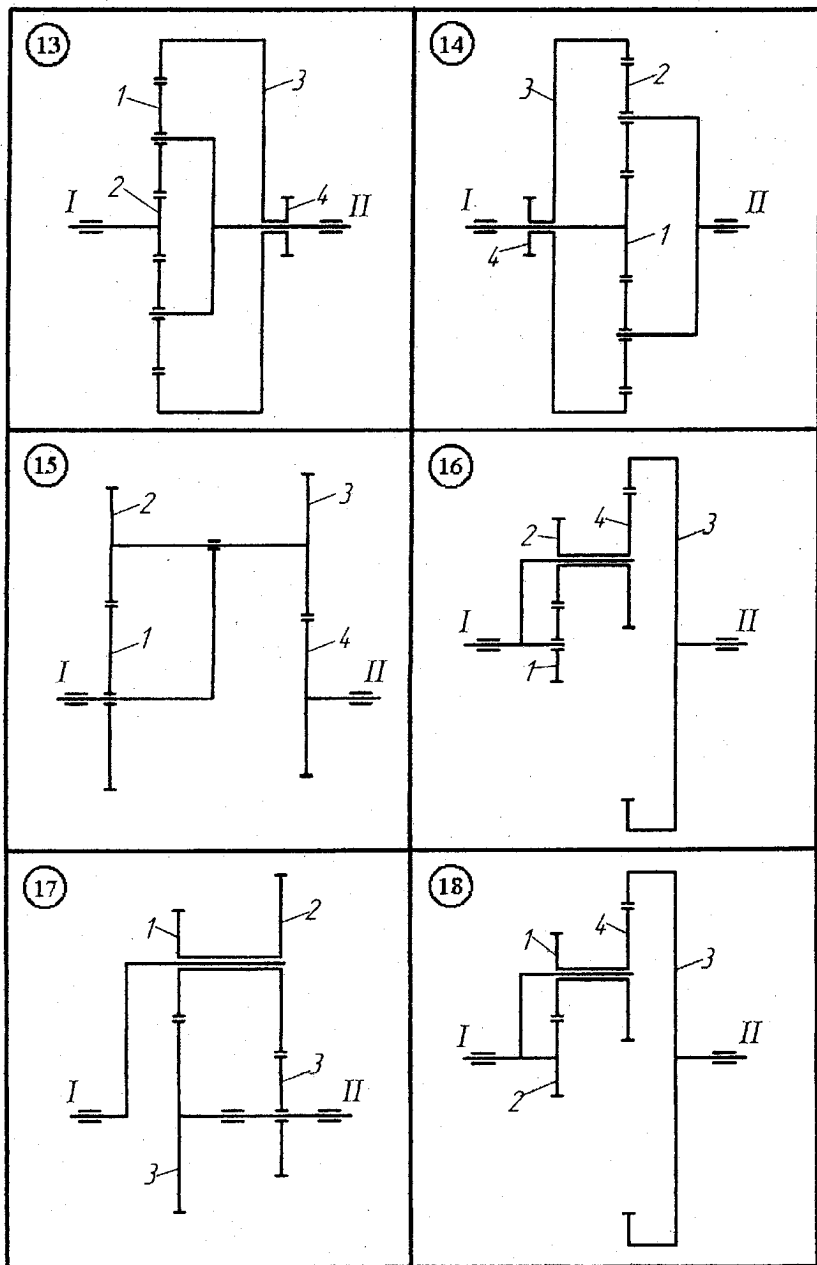


Рисунок 8.6

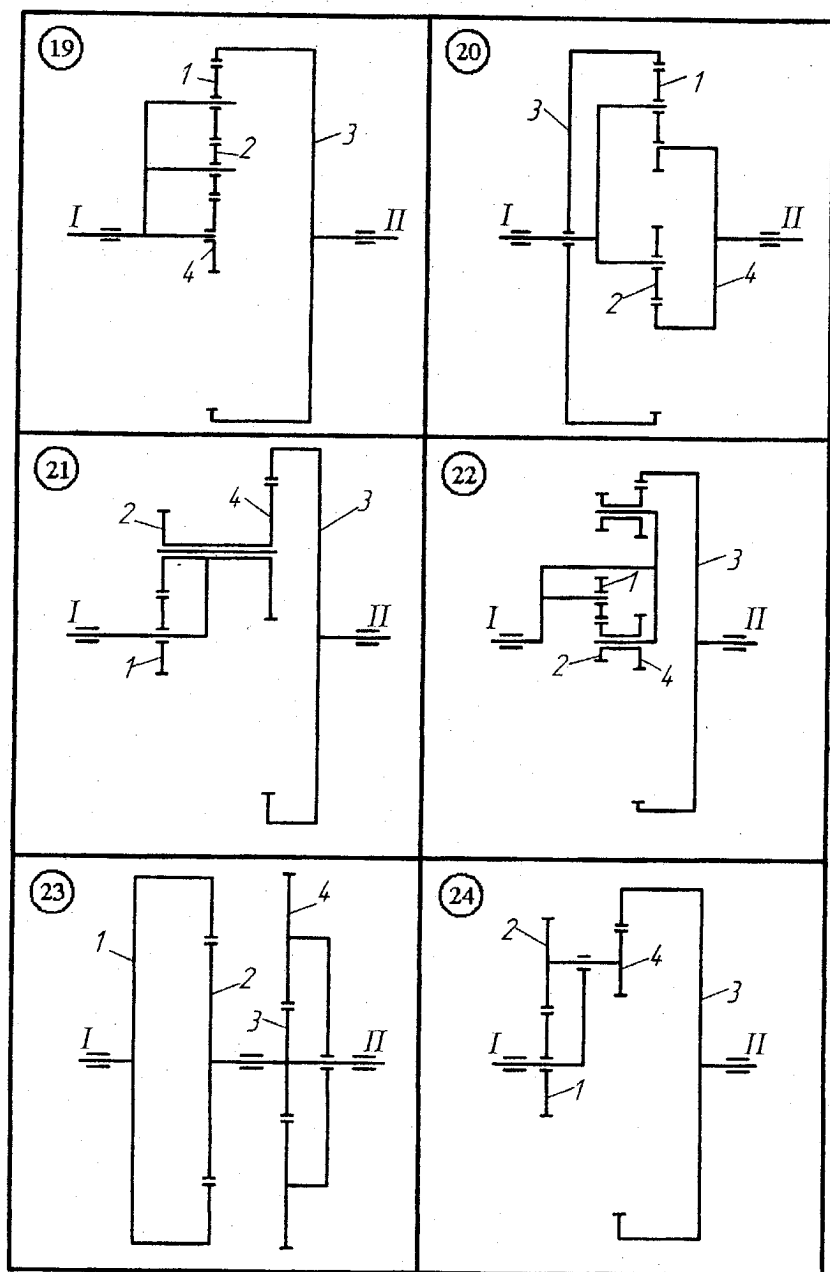


Рисунок 8.7

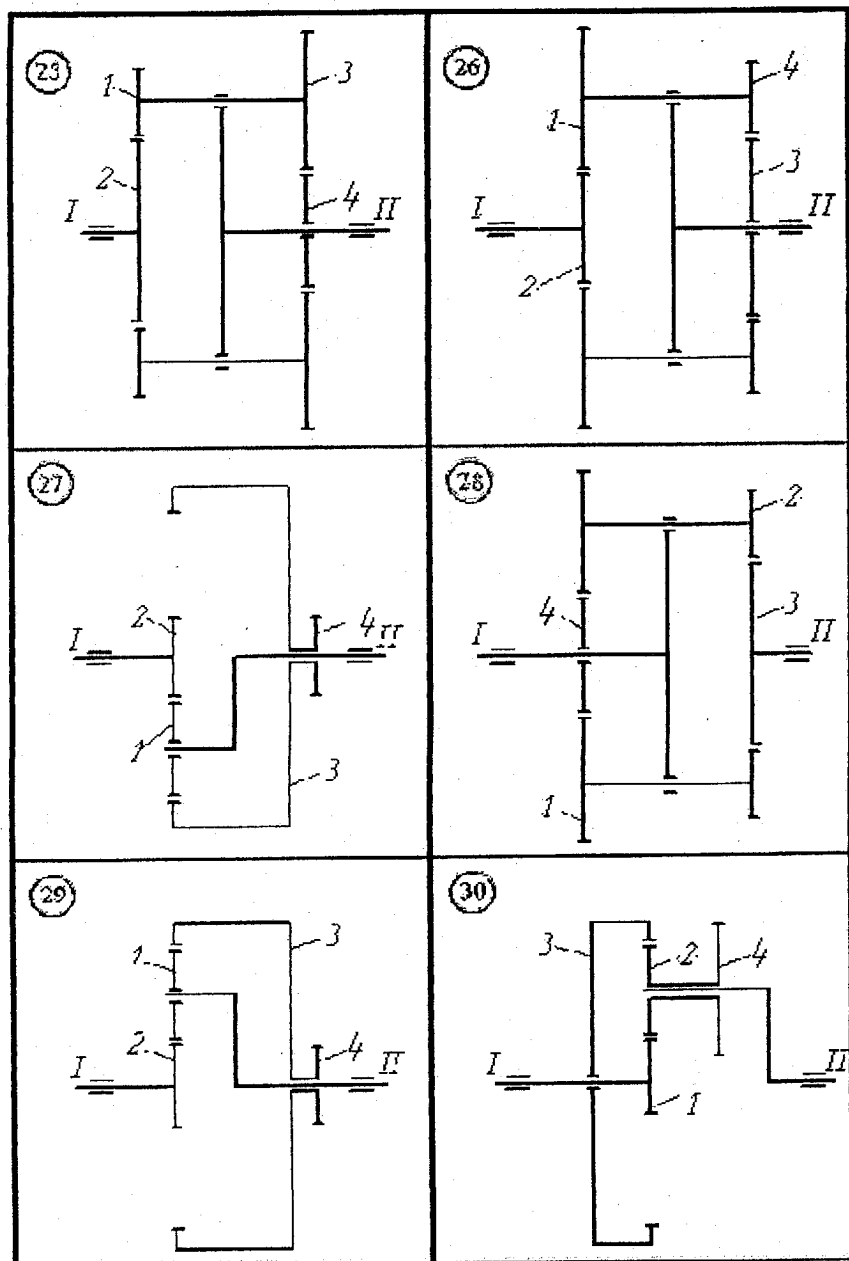


Рисунок 8.8



Звідки,

$$\omega_{2-3} = \omega_1 - \frac{r_1}{r_2}(\omega_1 - \omega_1) \quad (8.11)$$

Підставляючи числові значення, знаходимо:

$$\omega_{2-3} = 80 - \frac{0,3}{0,15}(20 - 80) = 200 \text{ с}^{-1}. \quad (8.12)$$

Обертання шестерень 2-3 також відбувається в напрямку, протилежному руху годинникової стрілки.

### 8.1.2 Розв'язання задачі методом миттєвих центрів швидкостей

За кутовими швидкостями ведучих ланок визначимо швидкість точки А, осі спарення шестерень і швидкість точки В дотику коліс 1 і 2 (рис.8.2,б):

$$\begin{aligned} V_A &= \omega_1 \cdot (r_1 + r_2) = 80 \cdot 0,45 = 36 \text{ м/с} \\ V_B &= \omega_1 \cdot r_1 = 20 \cdot 0,3 = 6 \text{ м/с} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Відкладемо вектори  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$  (рис.8.2,б), знайдемо миттєвий центр швидкостей шестерень 2-3:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2-3}A}{P_{2-3}B} &= \frac{V_A}{V_B} = \frac{36}{6} = 6. \\ P_{2-3}A &= 6 \cdot P_{2-3}B \end{aligned}$$

Оскільки  $P_{2-3}P_{2-3}B = r_2 = 0,15 \text{ м}$ , то:

$$P_{2-3}B = \frac{0,15}{5} = 0,03 \text{ м}; \quad P_{2-3}A = 0,18 \text{ м}; \quad P_{2-3}C = 0,48 \text{ м}.$$

Визначимо швидкість точки С:

$$\begin{aligned} \frac{V_C}{V_A} &= \frac{P_{2-3}C}{P_{2-3}A} = \frac{0,48}{0,18}, \\ V_C &= \frac{0,48}{0,18} V_A = \frac{0,48}{0,18} \cdot 36 = 96 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Швидкість шестерні 2-3 визначаємо за швидкістю точки А (або В і С):

$$\omega_{2-3} = \frac{V_A}{P_{2-3}A} = \frac{36}{0,18} = 200 \text{ с}^{-1}.$$

## К.9 Визначення кутових швидкостей лапок планетарного редуктора з осями, що перетинаються

Визначити кутові швидкості веденого вала II і сателітів редуктора. Схеми редукторів показані на рис. 9.3-9.7, а необхідні для розрахунку величини в табл. 8.1. радіус  $r_3$  визначається геометрично згідно з варіантом завдання. Якщо при побудові рисунка є зайві дані, то їх необхідно відкинути.

### 9.1 Приклад розв'язання задачі у випадку осей, що перетинаються

Редуктор з конічними колесами (рис.9.1). геометричні розміри редуктора та кутова швидкість ведучого вала I -  $\omega_1$  і шестерні 1-  $\omega_1$  приведені в таблиці 9.1.

Визначити кутові швидкості веденого вала II та шестерень редуктора з конічними колесами

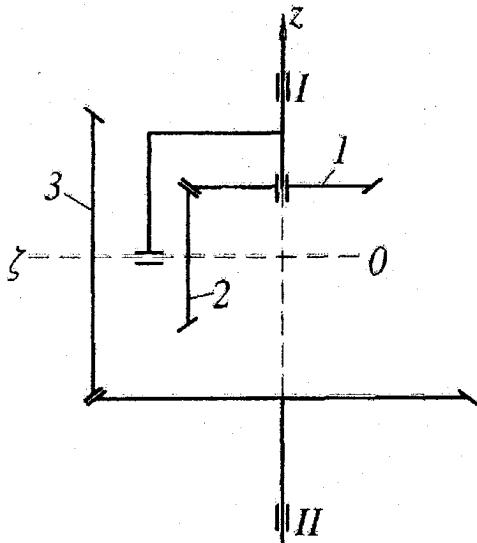


Рисунок 9.1

Таблиця 9.1

Радіус, м			Кутова швидкість, рад/с	
$r_1$	$r_2$	$r_3$	$\omega_1$	$\omega_2$
0,24	0,3	0,44	60	-40

### 9.1.1 Розв'язання задачі графоаналітичним способом

Рух блоку сателітів 2-3 може розглядатися як сукупність двох обертальних рухів (рух навколо горизонтальної вісі  $\zeta$  і вертикальної вісі  $z$ ). При цьому в якості переносного руху можна прийняти не тільки обертання водила навколо вісі  $Oz$  (з кутовою швидкістю  $\omega_1$ ), але і обертання колеса 1 або колеса 4. Отже,

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_C &= \bar{\omega}_I - \bar{\omega}_{IC}, \\ \bar{\omega}_C &= \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{1C}, \\ \bar{\omega}_C &= \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_{4C}.\end{aligned}\tag{9.1}$$

В цій формулі  $\bar{\omega}_{IC}$ ,  $\bar{\omega}_{1C}$ ,  $\bar{\omega}_{4C}$  - кутові швидкості сателітів відносно водила, колеса 1 і колеса 4 відповідно.

Зауважимо, що лінії дії складових вектора  $\bar{\omega}_C$  відомі. Кутові швидкості  $\bar{\omega}_I$ ,  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_4$  направлені по вісі  $Oz$  (рис. 9.2,а),  $\bar{\omega}_{IC}$  - по вісі  $O\zeta$ ;  $\bar{\omega}_{1C}$  і  $\bar{\omega}_{4C}$  - відповідно по лініям  $Oa$  і  $Ob$  (по миттєвих осях обертання у відносному русі).

З довільного полюса  $O_1$  (рис. 9.2,б) відкладемо вектор кутових швидкостей  $\bar{\omega}_I$  і  $\bar{\omega}_1$  паралельно вісі  $Oz$ , а вектори  $\bar{\omega}_{IC}$ ,  $\bar{\omega}_{1C}$ ,  $\bar{\omega}_{4C}$  - паралельно  $O\zeta$ ,  $Oa$ ,  $Ob$  відповідно.

Спроекувавши векторні вирази на вісі  $\zeta$  і  $z$ , отримаємо:

$$\begin{aligned}\omega_{C\zeta} &= \omega_{IC}; \quad \omega_{Cz} = \omega_1, \\ \omega_{C\zeta} &= \omega_{1C} \cdot \sin \alpha; \quad \omega_{Cz} = -\omega_1 + \omega_{1C} \cdot \cos \alpha, \\ \omega_{C\zeta} &= \omega_{4C} \cdot \cos \alpha; \quad \omega_{Cz} = \omega_4 - \omega_{4C} \cdot \sin \beta.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (9.2) знаходимо:

$$\begin{aligned}\omega_{C\zeta} &= (\omega_I + \omega_1) \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ \omega_{Cz} &= \omega_1, \\ \omega_4 &= \omega_I + (\omega_I + \omega_1) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.\end{aligned}\tag{9.3}$$

При розрахунку зауважимо, що:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{r_1}{r_2}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{r_3}{r_4}, \\ \omega_{II} &= \omega_4.\end{aligned}\tag{9.4}$$

Враховуючи вихідні данні, маємо:

$$\omega_{C\zeta} = (60 + 40) \cdot \frac{24}{30} = \frac{2400}{30} = 80\text{с}^{-1},$$

$$\omega_{CZ} = 60\text{с}^{-1},$$

$$\omega_4 = 60 + (60 + 40) \cdot \frac{24}{30} \cdot \frac{40}{44} = 60 + \frac{3200}{44} = 132,7\text{с}^{-1}.$$

Кутова швидкість сателіта 2-3:

$$\omega_C = \sqrt{\omega_{C\zeta}^2 + \omega_{CZ}^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100\text{с}^{-1}.$$

Зауважимо, що векторні рівняння (9.1) можуть бути розв'язані графічно. Для цього з довільного центра  $O_2$  (рис. 9.2,в) відкладемо у вибраному масштабі паралельно осі  $Oz$  вектори заданих швидкостей  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_4$ . Через кінець вектора  $\vec{\omega}_1$  проводимо пряму  $KL$ , паралельно  $O\zeta$  (лінії дії  $\vec{\omega}_{1C}$ ). Точка перетину цих прямих визначить кінець вектора  $\vec{\omega}_C$ , а також  $\vec{\omega}_{1C}$  і  $\vec{\omega}_{4C}$ .

Вимірюванням на кресленні знаходимо:

$$\omega_C = 100\text{с}^{-1}.$$

Напрямок  $\vec{\omega}_C$  визначає положення миттєвої осі обертання сателіта  $O\Omega$  (рис. 9.2,а).

Для визначення  $\omega_{II}$  розкладемо  $\omega_C$ , які паралельні  $Oz$  і  $O\zeta$ . Отримані вектори представляють собою  $\vec{\omega}_{II}(\vec{\omega}_4)$  і  $\vec{\omega}_{II}(\vec{\omega}_4)$ .

Вимірюванням на рисунку знаходимо:

$$\omega_{II} = 135\text{с}^{-1}.$$

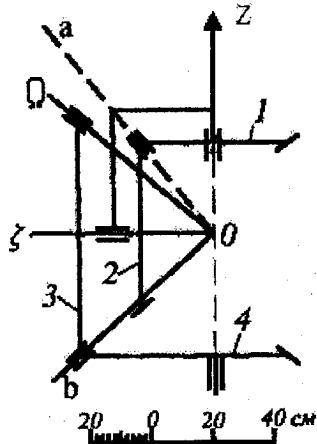


Рисунок 9.2,а

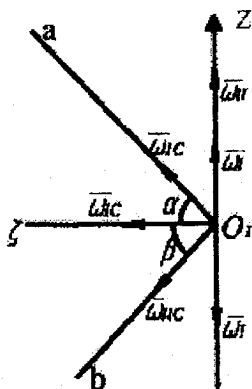


Рисунок 9.2,б

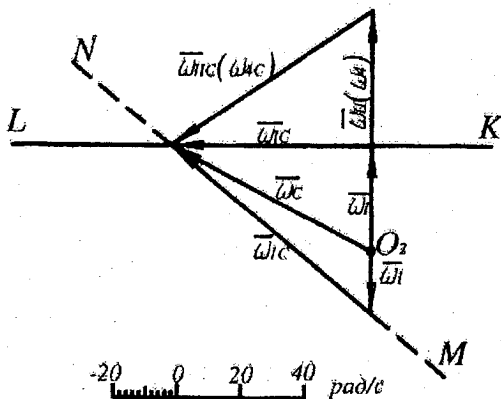


Рисунок 9.2,в

$$\omega_{2-3} = \frac{\pi \cdot n_{2-3}}{30}; \quad n_{2-3} = \frac{30 \cdot \omega_{2-3}}{\pi} = \frac{30 \cdot \frac{200\pi}{3}}{\pi} = 2000 \text{ об/хв.}$$

За швидкістю точки С визначаємо кутову швидкість колеса 4:

$$\omega_4 = \frac{V_C}{r_4} = \frac{98}{0,75} = 128 \text{ с}^{-1}$$

Звідки і визначаємо кутову швидкість вала II:

$$n_4 = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot \frac{128\pi}{3}}{\pi} = 1280 \text{ об/хв,}$$

$$n_{II} = n_4 = 1280 \text{ об/хв,}$$

$$\omega_{II} = \omega_4 = 128 \text{ с}^{-1}.$$

### 9.1.2 Розв'язання задачі способом Вілліса

Формулу 8.2 можна використати і для механізму з конічними колесами, тобто тоді, коли осі обертання коліс перетинаються. В цьому випадку необхідно врахувати:

1. Сателіти 2-3 беруть участь в обертаннях навколо осей, що перетинаються. Тому їх кутова швидкість відносно водила не може бути виражена алгебраїчною різницею між абсолютною і переносною кутовими швидкостями.

2. Знаки передаточного числа від одного колеса до другого в формулі Вілліса визначаються за такою умовою: "+", якщо дивитись зі сторони додатних напрямків осей, бачимо обертання відповідних коліс (при зупиненому водилі) в одному напрямку; "-", якщо бачимо обертання коліс, що відбуваються в різних напрямках.

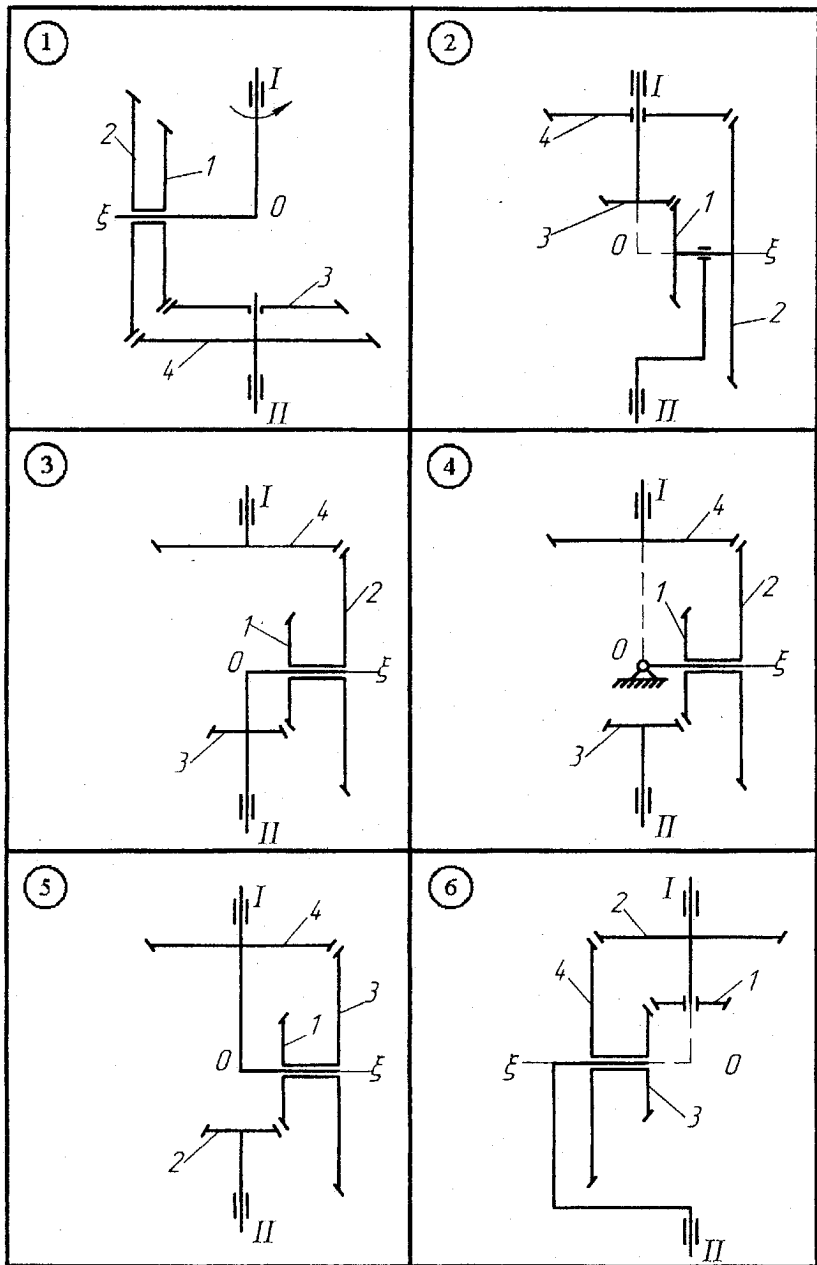


Рисунок 9.3

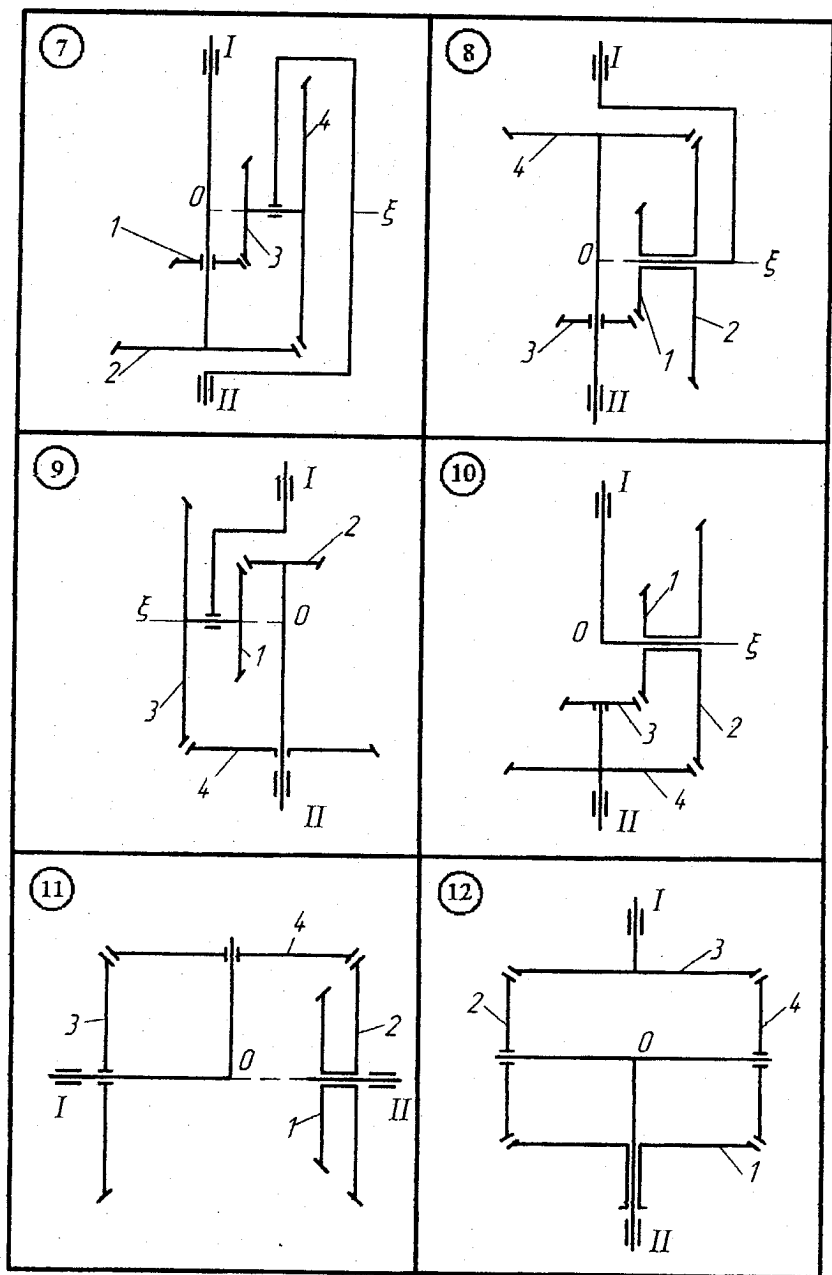


Рисунок 9.4

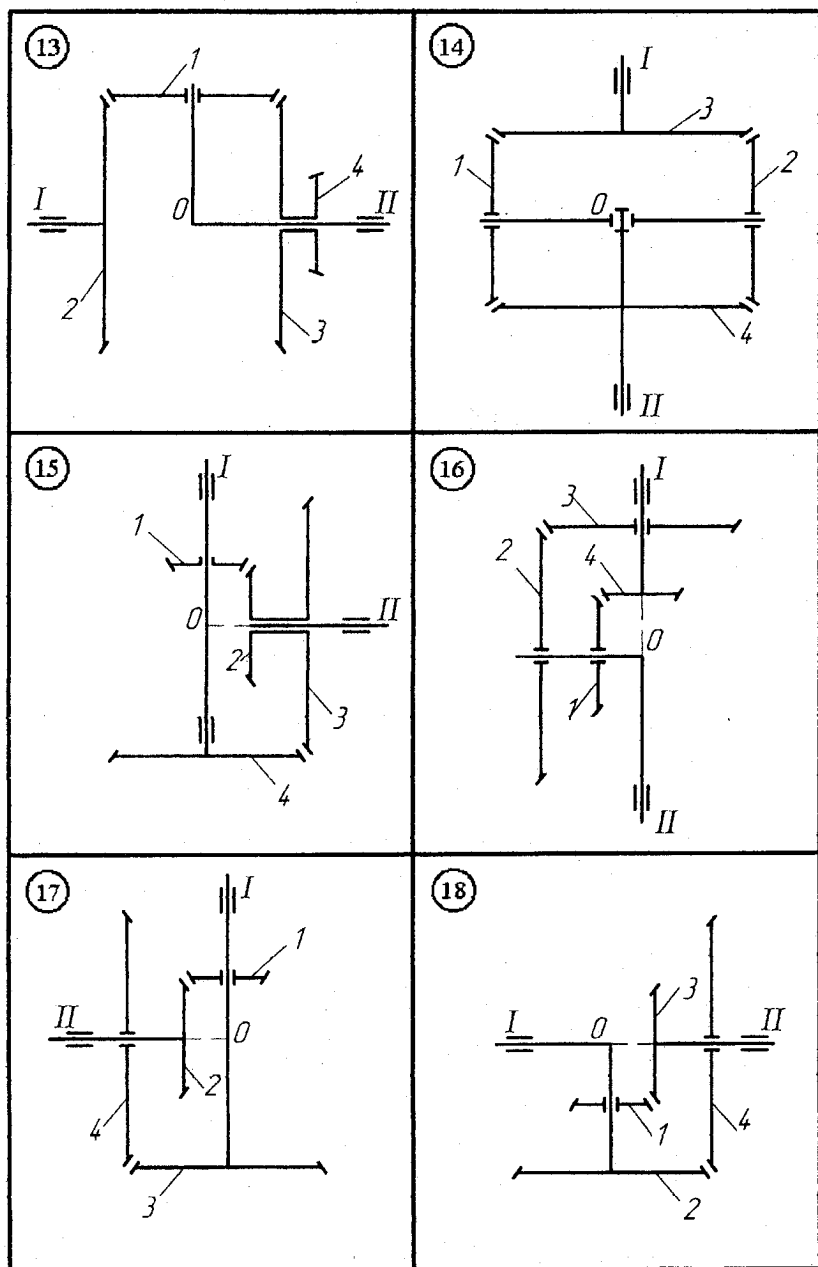


Рисунок 9.5



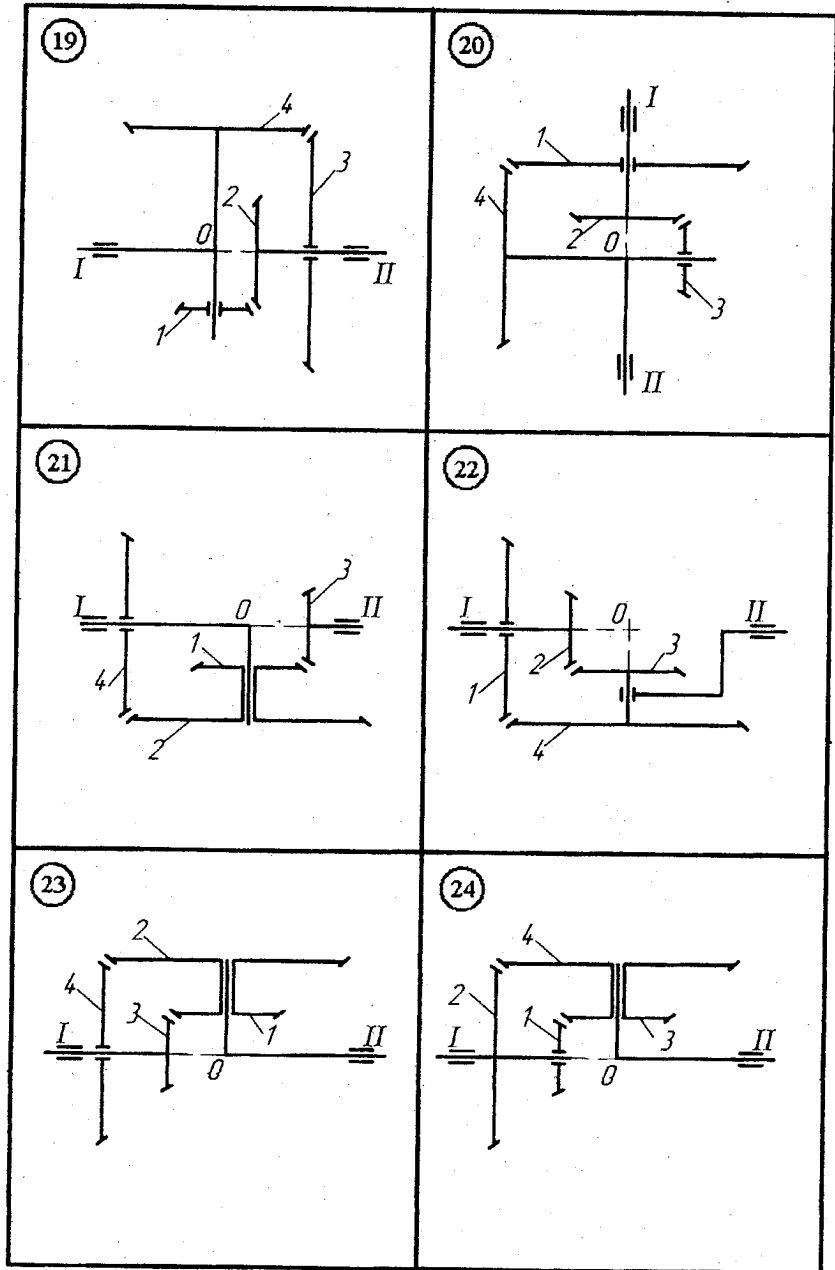


Рисунок 9.6

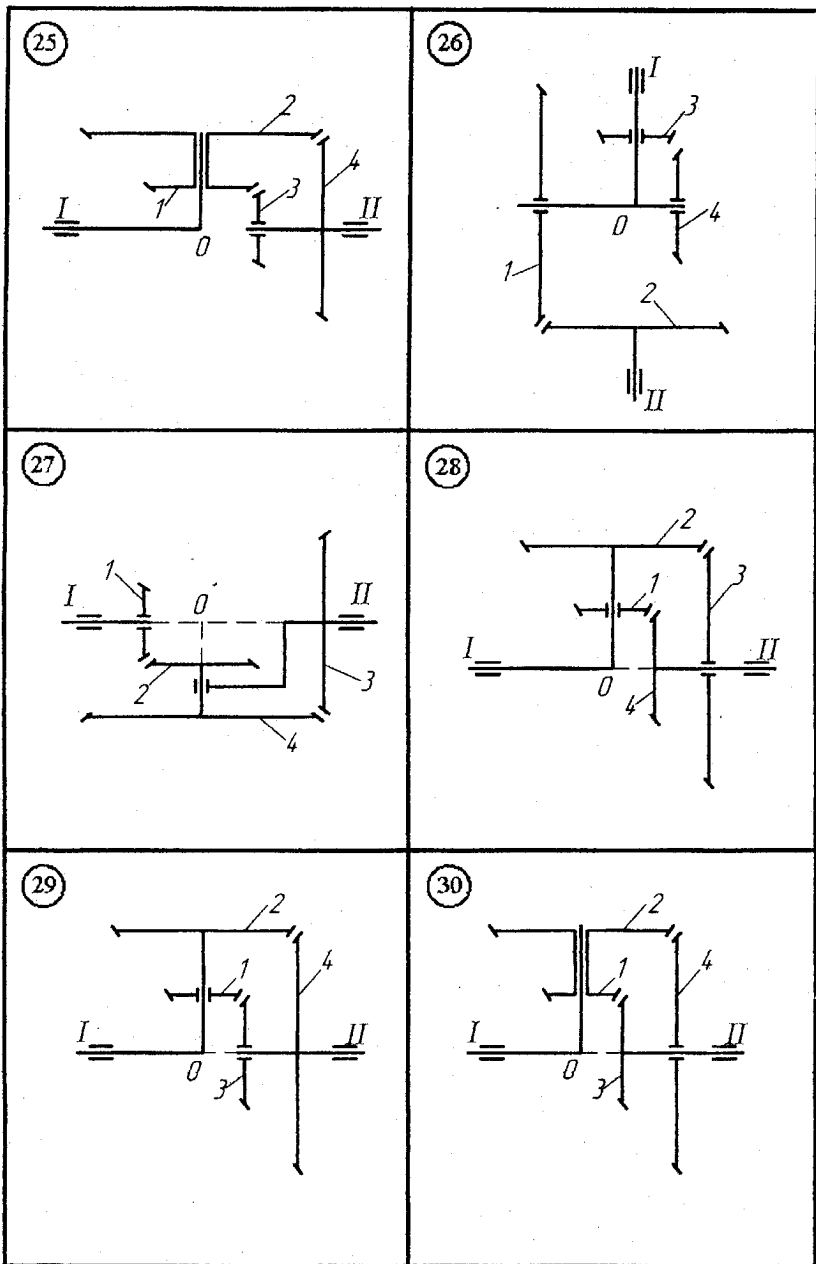


Рисунок 9.7

В даній задачі кутова швидкість водила дорівнює кутовій швидкості ведучого вала  $\omega_I$ . Кутова швидкість сателітів відносно водила позначена через  $\omega_{IC}$ . Тоді для коліс 1 і 2 маємо:

$$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_{IC}} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (9.5)$$

Для коліс 3 і 4:

$$\frac{\omega_{IC}}{\omega_4 - \omega_I} = \frac{r_4}{r_3} \quad (9.6)$$

Перемножимо (9.5) і (9.6), отримаємо:

$$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_4 - \omega_I} = -\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \quad (9.7)$$

Звідки,

$$\omega_{II} = \omega_4 = \omega_I - \frac{(\omega_1 - \omega_I)r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad (9.8)$$

Підставляючи в (9.8) числові значення, знаходимо  $\omega_{II} = 132,7 \text{ с}^{-1}$ .

Додатний знак у  $\omega_{II}$  показує, що відомий вал обертається в напрямку проти обертання годинникової стрілки (якщо дивитись зі сторони додатного напрямку осі Oz).

Для визначення кутової швидкості сателіта із (9.5) визначаємо спочатку його кутову швидкість відносно водила:

$$\omega_{IC} = -\frac{(\omega_1 - \omega_I)r_1}{r_2} \quad (9.9)$$

або

$$\omega_{IC} = 80 \text{ с}^{-1}$$

Абсолютна кутова швидкість сателіта:

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_I - \bar{\omega}_{IC} \quad (9.10)$$

причому вектор  $\bar{\omega}_I$  направлений по осі Oz, а  $\bar{\omega}_{IC}$  - по осі Oz.

Оскільки вектори  $\bar{\omega}_{IC}$  і  $\bar{\omega}_I$  взаємно перпендикулярні, то:

$$\omega_C = \sqrt{\omega_{IC}^2 + \omega_I^2} = 100 \text{ с}^{-1}$$

## Література

1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики. В 2-х томах / Наука. – М.: 1979. – т.1: Статика и кинематика. – 272с.
2. Методичні вказівки до дослідження кінематичного руху точки / Укладач В.О. Приятельчук. – Вінниця: ВПІ, 1992. – 32с.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. - 512с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов/ А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфзон и др. / Под ред. А.А. Яблонского. – 4-е изд. Перераб. и доп. - М.: ВШ, 1985. – 367с.
5. Федотов В.О., Грушко О.В. Збірник завдань для самостійної роботи з технічної механіки. Збірник завдань. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 111с.
6. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібник. – К.: Вища школа.: Веселка, 1999. – 351с.

*Навчальне видання*

Володимир Олексійович Приятьельчук

Володимир Іванович Риндюк

Валерій Олександрович Федотов

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА  
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено В.І. Риндюком

Редактор В.О. Дружиніна

Коректор З.В. Поліщук

Навчально методичний відділ ВНТУ  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК №746 від 25.12.2001  
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 1.12.2005 р.

Формат 29.7x42 ¼

Друк різнографічний

Тираж 100 прим.

Зам № 2005-202

Гарнітура Times New Roman

Папір офсетний

Ум.друк. арк. 6.0

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ