Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

О.М. Роїк, Р.Г. Тадевосян

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 1
МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ, ОБЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ, ТЕОРІЯ МНОЖИН

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів бакалаврського напрямку 6.0804 – "Комп'ютерні науки" спеціальностей 7.080404 – "Інтелектуальні системи прийняття рішень" та 7.080403 – "Програмне забезпечення автоматизованих систем" денної та заочної форм навчання. Протокол N 2 від "_25_" _вересня_ 2000 р.

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 519.85
Р65

Рецензенти:

В.М. Міхалевич, доктор технічних наук, професор
Н.Р. Кондратенко, кандидат технічних наук, доцент
Л.В.Крупельницький, кандидат технічних наук

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Роїк О.М., Тадевосян Р.Г.

Р65 **Основи дискретної математики. Ч1. Метод математичної індукції, обчислення висловлень, теорія множин.** Навчальний посібник. - Вінниця: ВДТУ, 2002.- 111 с.

У посібнику розглядаються метод математичної індукції, обчислення висловлень і теорія множин, що є одними із складових дисципліни “Основи дискретної математики”. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програми до дисциплін “Математичні методи дослідження операцій”.

УДК 519.85

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник є першою частиною курсу лекцій з дисципліни "Основи дискретної математики", що містить у собі як класичні розділи, так і ті, що отримали розвиток в останні роки. Даний посібник присвячений по суті побудові сучасної математичної мови – математичній логіці і теорії множин. Сюди входять такі розділи як: метод математичної індукції, комбінаторика і нерівність Коші-Буняковського, алгебра висловлювань і її застосування до аналізу електричних кіл, загальна теорія множин і теорія бінарних предикатів. Посібник буде корисним усім, у тому числі і студентам, хто бажає або кому необхідно познайомитися з усім курсом дискретної математики або з деякими її додатками.

Для закріплення знань під час вивчення теоретичного матеріалу навчальний посібник містить варіанти практичних задач з розв'язаними прикладами по темах, яким присвячена перша частина курсу лекцій з дисципліни "Основи дискретної математики". Наведені у посібнику задачі пропонується використовувати під час складання завдань для контрольних робіт і індивідуальних домашніх завдань для студентів усіх форм навчання. Крім того, їх можна використовувати під час проведення практичних занять зі студентами очної форми та заочної форм навчання.

1 МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ (ММІ)

1.1 Формулювання методу математичної індукції. Доведення рівностей

Дискретна математика – це цикл математичних наук, що вивчають властивості кінцевих множин. В даний час ці науки бурхливо розвиваються, що визначається трьома дуже важливими факторами:

1) розвитком комп'ютерної техніки і комп'ютерних наук, що базуються, а власне кажучи, є продовженням дискретної математики;

2) запитами різних прикладних наук – теорії керування, економіки, оптимізації і багатьох, багатьох інших;

3) логікою внутрішнього розвитку цих наук, тобто появою нових розділів, глибоких цікавих проблем, розвитком методів їхнього розв'язання.

Усе це і визначило той факт, що різні розділи дискретної математики усе наполегливіше впроваджуються не тільки в університети, але й у технічні й економічні і навіть у гуманітарні вузи.

ММІ лежить в основі доведення великого числа теорем у різних розділах дискретної математики. Підкреслюючи цю обставину, ми і почнемо виклад курсу з цього методу. Наведемо кілька формулювань ММІ. Усі вони рівнозначні, але доведення цього факту через його складність ми опустимо, щоб відразу ж не залякати читача труднощами технічного порядку.

Буквою N надалі ми будемо позначати множину натуральних чисел

$$N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}.$$

N^0 – розширена множина натуральних чисел, тобто

$$N^0 = \{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}.$$

Нехай $P(n)$ позначає деяку властивість натуральних чисел.

Теорема (Стандартний метод математичної індукції). Нехай властивість P вірна для $n=1$ і нехай з істинності P для $n=k$ випливає його істинність для $n=k+1$. Тоді властивість P вірна для кожного $n \in N$.

Приклад. Довести, що

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1.1)$$

Доведення. Метод математичної індукції здійснюють за такою схемою.

1. Базис індукції. Перевіримо рівність для $n=1$. Ліва частина (ЛЧ)=1, права частина (ПЧ) $=\frac{1\cdot 2}{2}=1$. Рівність для $n=1$, тобто базис індукції, виконується.

2. Індуктивне припущення. Вважаємо рівність (1.1) вірною для $n=k$, тобто припустимо, що

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}. \qquad (1.2)$$

3. Індуктивний перехід. Доведемо рівність (1.1) для $n=k+1$, тобто доведемо, що

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Дійсно, застосовуючи індуктивне припущення маємо

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1),$$

звідси $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, що і було потрібно довести. Таким чином на, підставі методу математичної індукції рівність (1.1) вірна для кожного n.

Символом $n!$ позначається добуток $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$, де $n\in N$. Наприклад, $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$. За визначенням вважають, що $0!=1$.

Приклад. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1. \qquad (1.3)$$

Доведення. 1. *Базис індукції.* Перевіримо твердження (1.3) для $n=1$. ЛЧ$=1\cdot 1!=1$, ПЧ$=(1+1)!-1=2!-1=1$. Базис індукції доведений.

2. Індуктивне твердження. Припустимо, що (1.3) вірне для $n=l$, тобто припустимо, що:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+l\cdot l!=(l+1)!-1. \qquad (1.4)$$

3. Індуктивний перехід. Доведемо (1.3) для $n=l+1$, застосовуючи (1.4), тобто доведемо, що

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+l\cdot l!+(l+1)(l+1)!=(l+2)!-1.$$

Дійсно $(1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+l\cdot l!)+(l+1)(l+1)!=(l+1)!-1+(l+1)(l+1)!=$
$=(l+1)!(l+2)-1=(l+2)!-1$.

Приклад 3. Довести, що для кожного $n\in N$

$$4^n+15n-1 \text{ ділиться на 9.} \tag{1.5}$$

Доведення. *1. Базис індукції.* Перевіримо (1.5) для $n=1$. ЛЧ=4+15-1=18 ділиться на 9.

2. Індуктивне припущення: Припустимо, що (1.5) виконується для $n=m$, тобто

$$4^m+15m-1 \text{ ділиться на 9.} \tag{1.6}$$

3. Індуктивний перехід. Доведемо (1.5) для $n=m+1$, використовуючи (1.6), тобто доведемо, що $4^{m+1}+15(m+1)-1$ ділиться на 9.

$$4^{m+1}+15(m+1)-1=4\cdot 4^m+15m+15-1$$
$$=(4^m+15m-1)+(3\cdot 4^m+15).$$

Перша дужка ділиться на 9 за індуктивним припущенням. Залишилося довести, що друга складова ділиться на 9, тобто треба довести, що 4^m+5 ділиться на 3. Це твердження доведемо методом математичної індукції, тобто застосовуючи *"індукцію в індукції"*. Для *m=1* 4+5=9 ділиться на 3. Припустимо, що 4^k+5 ділиться на 3. Доведемо, що $4^{k+1}+5$ ділиться на 3, але $4^{k+1}+5=4\cdot 4^k+5=(4^k+5)+3\cdot 4^k$. Перша складова ділиться на три за індуктивним припущенням, а друга – очевидно. Таким чином, ми довели, що 4^m+5 ділиться на 3, а значить і $4^n+15n-1$ ділиться на 9.

Сформулюємо кілька тверджень, еквівалентних методу математичної індукції.

Теорема. Нехай множина $A\subseteq N$ має такі властивості.

1. $1\in A$.
2. Для кожного $k\in N$, якщо $k\in A$, то $k+1\in A$.

Тоді $A=N$.

Теорема (Зворотний метод математичної індукції). Нехай властивість $P(N)$ виконується для $N=1$. З того, що вона вірна для кожного $k<n$ випливає, що $P(N)$ вірна для N. Значить $P(N)$ вірна для будь-якого натурального N.

Зауваження. У загальному випадку індуктивний процес не зобов'язаний починатися з 1. Базисом індукції може бути будь-як ціле число *a*.

Теорема. Нехай властивість $P(N)$ виконується для $N = A$. З цього для кожного $k \geq a$ випливає істинність для $k+1$. Значить $P(N)$ істинно для будь-якого цілого $n \geq a$.

1.2 Доведення нерівностей методом математичної індукції. Нерівність Коші

Приклад 1. $2^n > n$ для будь-якого $n \in N$.

Доведення. Для $N=1$ це очевидно. Припустимо, що $2^k > k$. Доведемо, що $2^{k+1} > k+1$. Дійсно, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k > k+1$, оскільки $2^k > k$ за індуктивним припущенням, а $2^k > 1$ є очевидною нерівністю.

Приклад 1. $2^n > n^2$ для будь-якого натурального $n \geq 5$.

Доведення. Для $n=5$ маємо вірну нерівність $32 > 25$. Припустимо, що дана нерівність вірна і для $n = k \geq 5$, тобто $2^k > k^2$. Доведемо, що $2^{k+1} > (k+1)^2$. Ця нерівність рівносильна $2^k + 2^k > k^2 + 2k + 1$. Якщо ми доведемо, що $2^k > 2k+1$ $(k \geq 5)$, то буде доведена і вихідна нерівність.

Нерівність $2^k > 2k+1$ $(k \geq 5)$ доведемо індукцією *(індукція в індукції)*. Для $k = 5$ маємо очевидну нерівність $32 > 11$. Припустимо, нерівність вірна і для $k = m$, тобто $2^m > 2m+1$. Доведемо дану нерівність для $k = m+1$, тобто доведемо, що $2^{m+1} > 2(m+1)+1 = 2m+3$ або $2^m + 2^m > 2m+1+2$. Очевидно, що ця нерівність вірна в силу індуктивного припущення.

Теорема (Нерівність Коші-Буняковського). Для будь-яких чисел $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

Доведення. Для $n=1$ нерівність $(a_1b_1)^2 \leq a_1^2b_1^2$ вірна. Нехай

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_k^2)(b_1^2 + \ldots + b_k^2).$$

Доведемо, що

$$(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1})^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2)(b_1^2 + \ldots b_k^2 + b_{k+1}^2).$$

Перепишемо цю нерівність, частково розкривши дужки:

$$\begin{aligned}(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \leq \\ \leq (a_1^2 + \ldots + a_k^2)(b_1^2 + \ldots + b_k^2) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 + \\ + a_{k+1}^2(b_1^2 + \ldots + b_k^2) + b_{k+1}^2(a_1^2 + \ldots + a_k^2).\end{aligned}$$

Легко помітити, що для того, щоб довести цю нерівність, досить довести, що

$$2a_{k+1}b_{k+1}\left(a_1b_1+\ldots+a_kb_k\right)\le a_{k-1}{}^2\left(b_1{}^2+\ldots+b_k{}^2\right)+b_{k+1}{}^2\left(a_1{}^2+\ldots+a_k{}^2\right).$$

Перенесемо всі доданки в одну сторону і згрупувавши їх, отримаємо очевидну нерівність

$$\left(a_{k+1}b_1-a_1b_{k+1}\right)^2+\left(a_{k+1}b_2-a_2b_{k+1}\right)^2+\ldots+\left(a_{k+1}b_k-a_kb_{k+1}\right)^2\ge 0.$$

Нерівність Коші - Буняковського доведена.

Визначення. Число $\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)/n$ називається *середнім арифметичним* чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, а якщо числа $a_1\ge 0,\ldots,a_n\ge 0$, то число $\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{1/n}$ називається *середнім геометричним* чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Теорема. (Нерівність Коші). Нехай $a_1\ge 0,\ldots,a_n\ge 0$, тоді

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)/n\ge\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{1/n}. \tag{1.7}$$

Доведення. *Крок перший.* Спочатку за індукцією доведемо цю нерівність для натуральних чисел виду $n=2^m$. Для $m=1$ треба довести, що $\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2}$. Ця нерівність еквівалентна $a_1-2\sqrt{a_1a_2}+a_2\ge 0$, тобто $\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\ge 0$. Остання нерівність вірна, а значить вірна і перша, оскільки вони рівносильні. Припустимо, що дана нерівність вірна для $m=k$, тобто

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}\ge\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2^k}\right)^{1/2^k}. \tag{1.8}$$

Доведемо нерівність (1.8) для $m=k+1$, тобто доведемо, що

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\ge\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}}.$$

Дійсно

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\geq\frac{\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2^k}\right)^{1/2^k}+\left(a_{2^k+1}\cdot a_{2^k+2}\cdot\ldots\cdot a_{2^{k+1}}\right)^{1/2^k}}{2}\geq$$
$$\geq\sqrt{\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2^k}\right)^{1/2^k}\cdot\left(a_{2^k+1}\cdot a_{2^k+2}\cdot\ldots\cdot a_{2^{k+1}}\right)^{1/2^k}}=\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}}.$$

Отже, ми довели нерівність Коші, коли кількість чисел у середніх є степінь двійки. А як бути з іншими? Для них ми доведемо нерівність Коші, застосовуючи ще одну модифікацію індукції – *"індукцію вниз"*. Припустимо, що нерівність Коші вірна для $n=k$, тобто

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)/k\geq\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\right)^{1/k},\qquad(1.9)$$

і доведемо цю нерівність для $n=k-1$. Для цього в нерівності Коші покладемо, що $a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1}/(k-1)$. Тоді (1.9) буде мати вигляд

$$\frac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}\right)+\dfrac{a_1+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}{k}\geq\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{1/k}.$$

Після елементарних алгебраїчних перетворень маємо

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\geq\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\right)^{1/k}\cdot\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{1/k}$$

Скоротимо нерівність на другий множник правої частини:

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1/k}\geq\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\right)^{1/k}.$$

І, нарешті, піднесемо обидві частини нерівності до степеня $\frac{k}{k-1}$:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\geq\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\right)^{1/k-1}.$$

Таким чином нерівність Коші доведена.

ВАРІНТИ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ І ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ (МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ)

Доведення рівностей методами математичної індукції

1. Довести, що сума перших n непарних натуральних чисел дорівнює n^2.

1.Довести, що сума квадратів n перших натуральних чисел дорівнює $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Довести, що для будь-якого $n \in N$

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

4. Довести, що для будь-якого $n \in N$

а) $-1+3-5+\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$;

б) $1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. Довести, що сума кубів n перших чисел натурального ряду дорівнює $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

6. Довести, що при кожному натуральному n справедлива рівність

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

7. Довести, що для будь-якого $n \in N$ справедлива рівність

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

8. Довести, що для будь-якого $n \in N$

а) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

9. Довести, що для будь-якого натурального n

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

10. Довести, що для будь-яких $n, p \in N$ має місце рівність

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p(p+1) + \ldots + n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}.$$

11. Довести, що для будь-якого $n \in N$

а) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 4}$;

б) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+...+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

12. Довести, що для $x\neq 1$ і $n\in N$ справедливі тотожності

а) $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$;

б) $x+2x^2+...+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

13. Довести, що для будь-якого $n\in N$ справедлива рівність $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$.

14. Довести, що $k+k\cdot k\,!+(k+1)(k+1)\,!+...+n\cdot n\,!=(n+1)\,!$, де $n,k\in N$ і $n\geq k$.

15. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$(n+1)(n+2)...(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3...(2n-1)$.

16. Довести, що для будь-якого натурального n

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+...+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

17. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}.$$

18. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}.$$

19. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

20. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

21. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

22. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

23. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

24. Довести, що для будь-якого $n\in N$

$$\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\frac{1}{7n+1}=1 .$$

25. Довести, що для будь-якого $n \in N$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) .$$

26. Довести, що для будь-якого $n \in N$

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)} .$$

27. Довести, що при будь-якому натуральному n

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

28. Довести, що для кожного $n \in N$ справедливі рівності:

а) $1+3+6+10+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

б) $2+7+14+\ldots+\left(n^2+2n-1\right)=\frac{n\left(2n^2+9n+1\right)}{6}$.

29. Довести справедливість рівностей:

а) $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2^{1-n}+2(n-1)$;

б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$, де n – будь-яке натуральне число.

30. Довести, що для будь-яких $a, n \in N$

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)} .$$

31. Довести, що для будь-яких $a, n \in N$

$$\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=\frac{(a-1)\left(2^n-1\right)}{2^n}+n .$$

32. Довести, що для кожного $n \in N$ $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

33. Довести, що для будь-якого $n \in N$ і будь-якого $x \in \mathrm{R}$ справедлива рівність

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\cdot\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!} .$$

34. Довести справедливість рівності

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$ для будь-якого $n \in N^0$ і $|x| \neq 1$.

35. Довести, що для будь-якого $n \in N^0$

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$$, де $|x| \neq 1$.

36. Довести, що сума членів кожного горизонтального рядка даної таблиці дорівнює квадрату кількості чисел у ній:

1
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

37. Довести справедливість рівностей, де a_i – *i-й* член ряду Фібоначі:

а) $a_{n+1}=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+1$;

б) $a_0+a_2+\ldots+a_{2n}-(a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1})=a_{2n-1}-1$;

в) $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}\pm 1$;

г) $a_{n+p-1}=a_{n-1}\cdot a_{p-1}+a_n\cdot a_p$;

д) $a_{2k+1}=a_k^2+a_{k+1}^2$.

38. Дано: $a_{n+1}=a_1\cdot a_n-a_0\cdot a_{n-1}; a_0=2; a_1=3$. Довести: $a_n=2^n+1$.

39. Дана послідовність натуральних чисел U_n, для якої $U_1=1$ і $U_k=U_{k-1}+k$. Довести: $U_n+U_{n+1}=(n+1)^2$.

40. а) Послідовність чисел $a,b; a_1,b_1; a_2,b_2;\ldots; a_n,b_n;\ldots$ задається за законом

$$a_1=\frac{a+b}{2}; a_2=\frac{a_1+b_1}{2};\ldots$$

$$b_1=\frac{a_1+b}{2}; b_2=\frac{a_2+b_1}{2};\ldots$$

Довести: $a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$; $b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)$.

б) Числа послідовності $a_0, a_1,\ldots,a_n$ визначаються такими умовами:

$a_0=a, a_1=b, a_{k+1}=\frac{a_k+a_{k-1}}{2}$. Довести: $a_n=\frac{a+2b}{3}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{b-a}{3\cdot 2^{n-1}}$.

41. а) Послідовність задана рекурентною формулою

$a_n=2a_{n-1}\cos x-a_{n-2}$; $n\geq 3$.

Знайти загальний член, якщо $a_1=1, a_2=2\cos x$.

б) Послідовність задана рекурентною формулою

$a_n = a_{n-1} \cdot \cos x + \cos(n-1)x$, $n \ge 2$.

Знайти загальний член, якщо $a_1 = 1$.

42. Довести формулу n-го члена арифметичної прогресії $a_n = a + d(n-1)$, де a – перший член, d – різниця арифметичної прогресії.

43. Довести формулу суми перших n членів арифметичної прогресії $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

44. Довести формулу n-го члена геометричної прогресії $a_n = a \cdot q^{n-1}$, де a – перший член, q – знаменник геометричної прогресії.

45. Довести формулу суми n перших членів геометричної прогресії $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, де a – перший член, q – знаменник геометричної прогресії.

46. Довести, що для будь-яких $m, n, k \in N$ існує число $a \in N$ таке, що $\left(\sqrt{m+n} - \sqrt{m}\right)^k = \sqrt{a + n^k} - \sqrt{a}$.

47. Довести тотожність

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) = 1 + x^2 + \ldots + x^{2^n - 1}.$$

48. Довести:

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n) + x(1-x^2)\ldots(1-x^n) + x^2(1-x^3)\ldots(1-x^n) + \ldots + x^k(1-x^{k+1})\ldots(1-x^n) + \ldots + x^{n-1}(1-x^n) + x^n = 1$$

49. Довести тотожність

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{a_1+1}{a_1 a_2} + \frac{(a_1+1)(a_2+1)}{a_1 a_2 a_3} + \ldots + \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} = \frac{(a_1+1)\ldots(a_{n+1}+1)}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}},$$

де $a_i \ne 0, i = 1,2,3,\ldots,n,n+1$.

50. Дано: $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = a$, $A_2 = m - \frac{a}{m-1}$, $A_3 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}}$,

$A_4 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}}}, \ldots,$ $A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}$, $(m \ne 1; \alpha \ne \beta; k > 1)$. Довести, що

$$A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}.$$

51. Довести, що для $n = 2k - 1$, де $k \in N$ вірна рівність

$$1+\frac{n-1}{n-2}+\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}+\ldots+\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-2)(n-4)\ldots 1}=n.$$

52. Довести, що якщо $\sin\alpha \neq 0$, то для будь-якого $n \in N$ справедлива тотожність $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\ldots\cos 2^n\alpha=\dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

53. Довести, що для кожного $n \in N$ справедлива формула
$$b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a^2+\ldots+ba^{n-2}+a^{n-1}\right).$$

54. Довести, що $3+33+333+\ldots+\underbrace{3\ldots3}_{n}=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$.

55. Довести, що для будь-яких чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)+$$
$$+2a_2(a_3+a_4+\ldots+a_n)+\ldots+2a_{n-2}(a_{n-1}+a_n)+2a_{n-1}a_n.$$

Задачі на подільність чисел

1. Довести, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

2. Довести, що для будь-якого $n \in Z$:

а) n^3+5n ділиться на 6;

б) n^3+11n ділиться на 6;

в) $n^4+6n^3+11n^2+6n$ ділиться на 24;

г) $n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$ ділиться на 24.

3. Довести, що для будь-якого $n \in N^0$ справедливі твердження:

а) 7^n+3n-1 ділиться на 9;

б) $4^n+15n-1$ ділиться на 9;

в) $3^{2n-2}-8n-9$ ділиться на 16;

г) $2^{n+2}\times 3^n+5n-4$ ділиться на 25;

д) $3^{2n+1}+40n-67$ ділиться на 64;

е) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ ділиться на 11;

ж) $7\times 5^{2n}+12\times 6^n$ ділиться на 19;

з) $5^{2-n}+26\times 5^n+8^{2n+1}$ ділиться на 59;

і) $11^{6n+3}+1$ ділиться на 148;

к) $2^{2n+1}+1$ ділиться на 3;

л) $5^{n+3}+11^{3n+1}$ ділиться на 17;

м) $10^{n-2}+18n+8$ ділиться на 27.

4. Довести, що для кожного $n \in N^0$ справедливі твердження:

а) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ ділиться на 57;

б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ ділиться на 133;

в) $2^{5n+3}+5^n\times 3^{n+2}$ ділиться на 17;

г) $2^{n+5}\times 3^{4n}+5^{3n+1}$ ділиться на 37;

д) $3^{3n+2}+5\times 2^{3n+1}$ ділиться на 19;

е) $3^{2n+2} \times 5^{2n} - 3^{3n+2} \times 2^{2n}$ ділиться на 1053;

ж) $2^{2n+2}-1$ ділиться на 3;

з) $7^{2n+2}-1$ ділиться на 48;

и) $5^{n+4}\times 2^{n+1}-125$ ділиться на 45;

к) $9^{n+2}-18n-27$ ділиться на 18;

л) $5^{2n+3}+3^{n+3}\times 2^{n}$ ділиться на 19;

м) $7^{2n+2}-4^{2n+2}$ ділиться на 33.

5. Довести, що для будь-яких $m=2k$ і $n=2L$, де $k\in Z$, $L\in N^{0}$ справедливі твердження:

а) m^3+20m ділиться на 48;

б) $20^n+16^n-3^n-1$ ділиться на 323.

6. Довести, що при кожному $n\in N$ справедливі твердження:

а) $2n^3+3n^2+7n$ ділиться на 6;

б) $n^2(n^4-1)$ ділиться на 60.

7. Довести, що для того, щоб число 9^n-1 поділялося на 10^k, досить умови: $n=10^k$, де $k\in N$ і $k>1$.

8. Довести, що для кожного $a\in Z$ a^7-a ділиться на 42.

9. Довести, що число $a^{4n}-a$ ділиться на 30 для будь-якого цілого a і цілому невід'ємному n.

10. Довести, що число, що складається з 3^n одиниць, ділиться на 3^n.

11. Довести малу теорему Ферма: для будь-якого цілого a і простого p a^p-a ділиться на p; якщо a і p – взаємно прості, то $a^{p-1}-1$ ділиться на p.

12. Знаючи, що число $(p-1)!+1$ ділиться на p тоді і тільки тоді, коли p – просте число , довести, що для $0\le n\le p-1$ $n!(p-(n+1))!+(-1)^n$ ділиться на p тоді і тільки тоді, коли p – число просте.

13. Довести, що якщо число $A_k=7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ складене з k сімок, то A_k-Ap ділиться на 34300 для n і p, не менших 2.

14. Довести, що для будь-якого $n=4k$, де $k\in N$: $7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^n$ ділиться на 100.

Доведення нерівностей

1. Довести, що для $a\ge -1$ і для будь-якого $n\in N$ справедлива нерівність (нерівність Бернуллі) $(1+a)^n \ge 1+na$.

2. Довести, що для будь-яких числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедлива нерівність $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|$.

3. Довести, що для кожного $n\in N$, $n\ge 2$ має місце нерівність

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n)!^2}$$

4. Довести, що при кожному натуральному n справедлива нерівність

$$\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} \le n .$$

5. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – додатні числа, причому $x_1x_2\ldots x_n=1$. Довести, що $x_1+x_2+\ldots+x_n \ge n$.

6. Довести нерівність $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$, де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – позитивні числа.

7. Довести нерівність $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}>1$, $n\in N$.

8. При яких натуральних значеннях n вірні нерівності:

а) $n^2>n+1$; б) $n^2>2n+4$; в) $2n^2>-\frac{1}{2}n+11$; г) $3n^2>4,7n+5$; д) $n^2>-1,2n+7$; е) $1,5n^2>0,5n+4,2$; ж) $n^2>7n-2$; з) $4n^2>-n+9$; і) $2n^2>-2n+14$; к) $n^2>3n-2$; л) $3n^2>8n-5$; м) $\frac{1}{3}n^2>\frac{2}{3}n+1$; н) $6n^2>8n+4$; о) $5,3n^2>14-2n$; п) $3n+15<4n^2$; р) $19-4n<2n^2$; с) $\frac{2}{5}n^2>3n+5$; т) $2,5n^2>-n+9,1$; у) $4,3n^2>9n-3$; ф) $5n^2>12n+17$.

9. Знайти всі натуральні значення n, при яких справедливі нерівності:

а) $n^3>n^2+n+1$; б) $n^3>2n^2-3n+7$; в) $2n^3>n^2+4n-1$; г) $9n^3>9n^2+n+2$; д) $5n^3>3n^2+11$; е) $\frac{4}{5}n^3>\frac{1}{3}n^2+2n+4$; ж) $3n^3>3n^2-n+8$; з) $4,5n^3>2n^2+15$; і) $2n^3>1,3n^2+7$; к) $n^3>7n^2-n$; л) $3n^2+2<n^3$; м) $14n+8<3n^3$; н) $5n^2-n-12<2n^3$; о) $\frac{1}{2}n^2+17<4n^3$; п) $7n^2+2n+5<2,5n^3$; р) $3n^2-4n+6<n^3$; с) $16-5n^2<2n^3$; т) $3n+7n^2<1,5n^3$; у) $12-n^2<2,1n^3$; ф) $\frac{2}{7}n^2+n+5<n^3$.

10. Знайти всі натуральні значення n, для яких вірними є нерівності: а) $2^n>n^2$; б) $2^n\ge n+1$; в) $2^n>4n^2+1$; г) $2^n>n^2+4n+5$; д) $2^n>2n+1$; е) $2^n>5n^2+n$; ж) $2^n>n^2+7$; з) $2^n>4n+3$; і) $2^n>n^2+2n+6$; к) $2^n>3n+11$; л) $2^n>17n+4$; м) $2^n>2n^2+n+3$; н) $3^n\ge 2(n+1)^n$; о) $3^n>2^n+7n$; п) $3^n>n^2+8$; р) $3^n>2^n+12$; с) $n^4<4^n$; т) $2^n+7n^2<4^n$; у) $2^n+n+2<4^n$; ф) $5^n\ge 5n^3+2$.

11. Розв'язати нерівності на множині натуральних чисел:

а) $2^{n^2}\ge 4^n+n$; б) $2^{n^2}>n^n$; в) $3^n n<4^n$; г) $2^n n<3^n$; д) $2^n n^2\le 4^n$; е) $2^n n!$; ж) $e^n<n!$; з) $n^2<n!$; і) $n^2+7n<n!$; к) $n^n>n!$; л) $4^n<(2n)!$; м) $2^{n^2}>n!$; н) $3^n<n!$; о) $2^n+3^n<n!$.

12. Довести справедливість нерівностей для всіх натуральних n>1:

а) $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$; б) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$;

в) $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$; г) $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}>(n+1)!$.

13. Доведіть, що якщо a>b і a,b – позитивні числа, то $a^n>b^n$.

14. Довести нерівність $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}} < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

15. Довести, що для кожного $n \in N$ справедлива нерівність

$2 \le (1+\frac{1}{n})^n < 3$.

16. Довести, що для будь-якого цілого $n > 6$:

а) $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$; б) $\left(\frac{n}{e}\right)^n > n! > n\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Різні задачі

1. Довести, що для кожного $n \in N$ число $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$ є натуральним.

2. Довести, що будь-яке натуральне число m>8 можна представити у вигляді $m=3k+5L$, де $k, L \in N$.

3. Довести, що при будь-якому натуральному $n > 1$ число $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7.

4. Довести, що для кожного $n \in N$ число $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ буде цілим.

5. Довести, що при будь-якому цілому a і цілому невід'ємному n числа a й a^{4n+1} закінчуються однієї і тією же цифрою.

6. Дано n купюр однакової вартості, серед яких є одна фальшива, і яка відрізняється за вагою. Довести, що якщо $n \le 3^k$, то досить k зважувань на чашкових терезах, щоб знайти фальшиву монету.

7. Довести, що функція $T_n(x)=\cos(n \times \arccos x)$ на відрізку [-1;1] збігається з деяким багаточленом степеня n, де n – невід'ємне ціле число.

8. Довести, що число підмножин кінцевої n-елементної множини дорівнює 2^n.

9. Довести, що для всіх $m \ge 2$ $n(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m)=n(X_1)+n(X_2)+\ldots+n(X_m)$, де $X_i \cap X_j=\varnothing$ для $i \ne j$, X_i – скінченна множина для кожного $i=1,\ldots,m$...

10. Довести, що для всіх $s \ge 2$ $n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s)=n(X_1) \times n(X_2) \times \ldots \times n(X_s)$, де X_i – скінченна множина, що складається з $n(X_i)$ елементів, для кожного $i=1,\ldots,s$.

11. Довести, що сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого n - косинуса дорівнює $\pi(n-2)$.

12. Довести, що число діагоналей будь-якого опуклого n-косинця дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$.

13. Довести, що n різних крапок, що лежать на прямій, ділять її на $n+1$ інтервалів (з який два інтервали нескінченні).

14. Кінці відрізка AB занумеровані цифрами 1 і 2. Відрізок AB розбивають на частини точками $A_1, A_2, \dots A_m$ і ставлять у відповідності кожній з цих точок одну з цифр 1 чи 2. Довести, що число отриманих відрізків, кінці яких мають різні номери, непарне.

15. Нехай на відрізку AB узяті n точок і ці точки і точки A і B занумеровані цифрами 1 і 2, причому точка A отримала 1, а точка В – номер 2. Позначимо через r число відрізків, лівий кінець яких отримав номер 1, а правий – номер 2, а через s – число відрізків, у яких лівий кінець отримав номер 2, а правий – номер 1 (вважаємо, шо точка A лежить ліворуч від B). Доведіть, що $r - s = 1$.

16. На площині проведені n прямих. Доведіть, що області, на які ці прямі розбивають площину, можна пофарбувати білою і чорною фарбою так, що сусідні області (тобто області, що мають хоча б одне загальне ребро) будуть мати різний колір (розфарбування з такою властивістю називають правильним).

17. На площині дані n кіл. Доведіть, що області, на які вони розбивають площину, можна правильно розфарбувати у білий і чорний колір.

18. Нехай пари чисел $(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots$ утворюються за законом: $a_1 = \dfrac{a+b}{2}; b_1 = \dfrac{a_1+b}{2}; a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}; b_2 = \dfrac{a_2+b_1}{2}; \dots$.

Довести, що $a_n = a + \dfrac{2}{3}(b-a)\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)$, $b_n = a + \dfrac{2}{3}(b-a)\left(1 + \dfrac{1}{2\times 4^n}\right)$.

19. Довести справедливість тотожності

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\dots+\frac{(a+1)(b+1)\dots(s+1)(p+1)}{abc\dots spq}=$$
$$=\frac{(a+1)(b+1)\dots(p+1)(q+1)}{abc\dots pq}.$$

23. Нехай $\dfrac{q}{1-q}(1-z)+\dfrac{q^2}{1-q^2}(1-z)(1-qz)+\dots+\dfrac{q^n}{1-q^n}(1-z)(1-qz)\dots$

$\dots(1-q^{n-1}z)=F_n(z)$. Довести тотожність

$1+F_n(z)-F_n(qz)= (1-qz)(1-q^2z)\dots(1-q^nz)$.

24. Довести тотожності:

а) $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x(x+1)\dots(x+q)=\frac{1}{q+2}n(n+1)\dots(n+q+1)$;

б) $\displaystyle\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x(x+1)\dots(x+q)}=\frac{1}{q}\left\{\frac{1}{q!}-\frac{1}{(n+1))n+2)\dots(n+q)}\right\}$.

2 АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

2.1 Основні поняття. Логічні операції

Алгебра висловлень є початковим розділом такої важливої дисципліни, як математична логіка, що складає значну частину дискретної математики. Математична логіка разом з теорією множин є фундаментом, на якому побудована вся сучасна математика. З прикладної точки зору математична логіка дає основу для побудови мов програмування, відіграє важливу роль під час побудови баз даних, баз знань і взагалі у всіх питаннях, зв'язаних зі штучним інтелектом. Із загальноосвітньої точки зору математична логіка становить інтерес тим, що вона дозволяє вивчати загальні логічні закони, які ми постійно застосовуємо під час міркувань і дискусій (закон подвійного заперечення, закон протиріччя, закон виключеного третього та ін.). Таким чином, математична логіка може служити хорошим інструментом для тих, хто бажає навчитися точному аналітичному мисленню. Тепер перейдемо до фактичного викладення матеріалу.

Під *висловленням* розуміють пропозицію людської мови, про яку можна сказати, істинна вона або хибна. Пізніше стане ясно, чому тут говориться не про визначення, а про поняття висловлення. А надалі в нас з'явиться можливість дати точне визначення висловлення. Висловлення позначаються великими буквами латинського алфавіту, можливо з індексами: $A, B, X, Y, C_1, A_4, \ldots$. Якщо висловлення A є істинним то пишуть A=1, інакше пишуть A=0.

Приклади.

1. A = "два помножити на два дорівнює сім" = 0
2. В = "два плюс два дорівнює 4" = 1
3. С = "сніг білий" = 1
4. *Д*= "якщо сьогодні середа, то завтра буде четвер" = 1
5. X = "якщо два плюси два дорівнює п'яти, то три плюси два дорівнює десяти" = ?
6. Y = "якщо після четверга буде п'ятниця, то після п'ятниці буде неділя" = ?
7. Z = "якщо 1+1=3, то після четверга буде субота" = ?

Як не дивно, приклади 5, 6, 7 також є висловленнями. Подумайте, істинні вони чи хибні. Після побудови відповідного математичного формалізму на ці питання вже буде відповісти легко.

Існують пропозиції мови, що свідомо не є висловленнями. Наприклад: "Ти підеш у кіно?", "Відійди від дошки!" і т.п. Однак є припущення, що по своїй структурі дуже схожі з висловленнями, але такими не є. Це надалі приведе нас до необхідності дати суворе визначення висловлення. Розглянемо такий приклад. Візьмемо два листи паперу, пронумеруємо їх як №1 і №2. На першому листі напишемо висловлення "На другому листі написана неправда", а на другому листі напишемо висловлення "На першому листі написана істина". На перший погляд звичайне висловлення, нічим не відрізняється від багатьох подібних, однак ...! Поставте собі запитання, істинне воно чи хибне, і Ви побачите, що кожне з цих припущень призводить до протиріччя, тобто про нього не можна сказати, істинне воно чи хибне. Такі ситуації в математиці і семантиці називаються логічними парадоксами. Таким чином, пропозиції, за формою схожі на висловлення, такими не є.

З простих висловлень можна отримувати більш складні за допомогою так званих логічних зв'язувань логічних операцій.

1. З висловлення A можна отримати висловлення "хибність, що A". Наприклад, нехай $A=$"$2\cdot 2=5$", тоді отримаємо висловлення "хибно, що A".

Визначення. Висловлення "хибність, що A" називається *запереченням* A и позначається як $\overline{A}$ (або $\sim A$, або $\neg A$). Задається дія заперечення за допомогою *таблиці істинності*:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

2. З висловлень A, B можна утворити висловлення "A і B". Наприклад, "$2\cdot 2=4$ і $5+3=9$"

Визначення. Висловлення "A і B" називається *кон'юнкцією* висловлень A і B. Кон'юнкція має багато позначень: $A\wedge B$, $A\& B$, $A\cdot B$, AB. Кон'юнкція задається за допомогою таблиці істинності:

A	B	$A\wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Оскільки результат кон'юнкції схожий на результат звичайного множення чисел 0 і 1, цю операцію часто називають *логічним множенням*.

3. З висловлень A, B можна утворити висловлення "A або B". Наприклад, "$2\cdot 2=4$ або $5+3=9$".

Визначення. Висловлення "A або B" називається *диз'юнкцією* висловлень A и B і позначається $A\vee B$. Диз'юнкція задається за допомогою таблиці істинності:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. З висловлень A, B можна утворити таке висловлення: "A тоді і тільки тоді, коли B". Наприклад, трикутник є рівностороннім тоді і тільки тоді, коли всі його кути рівні між собою. Синонімами служать фрази: "A у тому і тільки у тому випадку, коли B", "A необхідно і досить для того, щоб виконувалося B", "A рівносильно B", "A еквівалентно B".

Визначення. Висловлення "A рівносильне B" називається *еквівалентністю* висловлень A і B і позначається як $A \leftrightarrow B$, $A \sim B$, $A \Leftrightarrow B$. Еквівалентність задається таблицею істинності:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. З висловлень A, B можна утворити висловлення "якщо A, то B". Наприклад, якщо дві прямі паралельні третій, то вони паралельні між собою. Синонімами служать такі фрази: "з A випливає B", "B є наслідком A", "A тягне B", "A достатня умова для B", "B необхідна умова для A" і т.п.

Визначення. Висловлення "якщо A, то B" називається *імплікацією* висловлень A, B і позначається як $A \to B$, $A \Rightarrow B$. У цій ситуації висловлення A називається *посилкою*, а B – *висновком*. Задається імплікація таблицею істинності:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Зробимо два зауваження, що можуть прояснити суть таблиці істинності для імплікації і, можливо, допоможуть краще її запам'ятати:

1) якщо посилка помилкова, то імплікація завжди істинна незалежно від висновку, тобто $0 \to B = 1$;

2) якщо висновок істинний, то імплікація також істинна, незалежно від посилки, тобто $A \to 1 = 1$.

Наведемо приклад висловлення, обчислимо всі можливі значення його істинності, залежно від значень істинності його складових і запишемо всі отримані дані в таблицю. Нехай $F(A,B,C) = (A \vee B) \leftrightarrow (C \to \overline{A})$.

$$F(0,0,0) = (0 \vee 0) \leftrightarrow (0 \to \overline{0}) = 0 \leftrightarrow (0 \to 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0;$$
$$F(0,0,1) = (0 \vee 0) \leftrightarrow (1 \to \overline{0}) = 0 \leftrightarrow (1 \to 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0;$$
$$F(0,1,0) = (0 \vee 1) \leftrightarrow (0 \to \overline{0}) = 1 \leftrightarrow (0 \to 1) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$F(0,1,1) = (0 \vee 1) \leftrightarrow (1 \to \overline{0}) = 1 \leftrightarrow (1 \to 1) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$F(1,0,0) = (1 \vee 0) \leftrightarrow (0 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (0 \to 0) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$F(1,0,1) = (1 \vee 0) \leftrightarrow (1 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (1 \to 0) = 1 \leftrightarrow 0 = 0;$$
$$F(1,1,0) = (1 \vee 1) \leftrightarrow (0 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (0 \to 0) = 1 \leftrightarrow 1 = 1;$$
$$F(1,1,1) = (1 \vee 1) \leftrightarrow (1 \to \overline{1}) = 1 \leftrightarrow (1 \to 0) = 1 \leftrightarrow 0 = 0.$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Питання

1) Всі значення істинності A, B і C ми перебрали?

2) Чому ці набори істинності ми розташували саме в такому порядку, а не в іншому?

3) Що таке таблиця істинності?

На всі ці питання ми відповімо у наступному підрозділі, однак було б непогано продумати це самостійно.

2.2 Визначення висловлення. Таблиця істинності висловлень

У цьому підрозділі ми дамо точне визначення висловлення, реалізуючи ту ідею, що висловленням є вираз, що отримується з простіших висловлень за допомогою логічних операцій. Визначимо також поняття таблиці істинності і наведемо кілька прикладів побудови таблиць.

Визначення. Змінна A, що приймає два значення – *0* або *1*, називається *логічною* (або *булевою*) змінною.

Позначатися логічні змінні будуть великими латинськими буквами з індексами або без них: $A, B, X, Y, A_2, C_3, \ldots$.

Визначення. (Індуктивне визначення висловлення).

1. Кожна логічна змінна є *висловленням*. Такі висловлення ми будемо називати найпростішими.

2. Якщо A, B є висловленнями, то вирази $\overline{A}, (A \wedge B), (A \vee B), (A \leftrightarrow B), (A \to B)$ – теж є висловленнями.

3. Інших немає.

Задача. Продумайте, яка роль третього пункту визначення.

Наведемо приклади виразів, деякі з яких є висловленнями, а деякі – ні. Перш ніж прочитати відповіді, продумайте їх самостійно.

$$A \vee B \to C\,;\, ((A \vee B) \leftrightarrow C)\,;\, \overline{A \to B}\,;\, A \to B\,;\, (((A \leftrightarrow B) \vee C) \to (B \to \overline{A})).$$

Перше "*висловлення*" таким не є, оскільки тут не вистачає дужок, а якщо ми уважно прочитаємо п. 2 визначення, то помітимо, що кожна операція $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ вимагає пари дужок – лівої і правої. З цього виразу можна зробити два висловлення: $((A \vee B) \to C)$ і $(A \vee (B \to C))$, що істотно відрізняються один від одного, як ми побачимо трохи пізніше. Другий вираз є висловленням. Третій вираз є висловленням. Здавалося б, це не так, оскільки немає дужок для імплікації. Однак тут дужками служить заперечення. Четвертий вираз не є висловленням, оскільки він стане таким, якщо поставити зовнішні дужки, тобто $(A \to B)$. Нарешті, п'ятий вираз є висловленням. Цими прикладами хотілося б підкреслити дві обставини:

1) роль дужок – вони відіграють значну роль при правильній побудові висловлень і вказують порядок виконання операцій (так само, як в арифметиці і алгебрі);

2) якщо правильно розставити всі дужки, то висловлення стають дуже громіздкими і їх важко читати. Для того, щоб усунути цю "*неприємність*", прийняті твердження про силу "*зв'язування*" логічних операцій.

Правило. Якщо висловлення сконструйоване з однотипних операцій, то вони виконуються в порядку їх проходження. Наприклад

$$A \to B \to C \to D = (((A \to B) \to C) \to D).$$

Правило. Зовнішні дужки не ставляться. Значить $A \to B$ або вираз $A \leftrightarrow (B \wedge C)$ є висловленнями.

Правило. Кон'юнкція зв'язує сильніше, ніж диз'юнкція, тобто $A \vee B \wedge C = A \vee (B \wedge C)$.

Правило. Диз'юнкція зв'язує сильніше, ніж імплікація, тобто $A \wedge B \vee C \to D = ((A \wedge B) \vee C) \to D$.

Правило. Імплікація зв'язує сильніше, ніж еквівалентність, тобто $A \leftrightarrow B \to C = A \leftrightarrow (B \to C)$.

Наведена серія правил дозволяє виписувати багато висловлень взагалі без дужок. Вони відновлюються однозначно. Наприклад

$$\begin{aligned}
&A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow C \leftrightarrow \overline{A} \vee B \to C \cdot \overline{A} \vee B \to A = \\
&= A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow \overline{A} \vee B \to ((C \cdot \overline{A}) \vee B) \to A = \\
&= A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \to ((C \cdot \overline{A}) \vee B) \to A = \\
&= (A \to \overline{B \vee C}) \leftrightarrow ((\overline{A} \vee B) \to ((C \cdot \overline{A}) \vee B)) \to A = \\
&= ((A \to \overline{B \vee C}) \leftrightarrow ((\overline{A} \vee B) \to ((C \cdot \overline{A}) \vee B)) \to A).
\end{aligned}$$

Однак, надалі ми будемо дотримувати принципу "розумної достатності". Тобто будемо ставити дужки стільки разів, щоб вирази легко читалися, однак не так багато, щоб заплутатися в них. У кожному конкретному випадку буде ясно, що ми розуміємо під принципом розумної достатності.

Якщо висловлення F побудоване з логічних змінних $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то ми будемо позначати це так: $F = F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Перша основна задача, що при цьому виникає, це обчислити значення істинності F, коли змінним $A_1, A_2, \ldots, A_n$ задаються конкретні значення $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. У цьому випадку ми пишемо: значення F дорівнює $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, де α_i приймають значення 0 або 1. Приклад був наведений у 1.1, тому зараз ми поставимо інше питання – на якій кількості наборів взагалі треба знаходити значення $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Іншими словами – скільки існує наборів довжини n з 0 і 1.

Теорема. Наборів довжини n з 0 і 1 існує 2^n.

Доведення. Позначимо цю кількість I_n і доведемо, що $I_n = 2^n$.

Нехай $n=1$. Наборів довжини 1 з 0 і 1 існує 2: (0) і (1), тому $I_1 = 2^1$. *Базис індукції* закладений.

Індуктивне припущення. Припустимо, що $I_k = 2^k$.

Індуктивний перехід. Доведемо, що $I_{k+1} = 2^{k+1}$. Дійсно, розглянемо будь-який набір з 0 і 1 довжини k, скажімо $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Тоді з нього можна отримати рівно два набори довжини $k+1$, а саме $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,0)$ і $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,1)$. Виходить, наборів довжини $k+1$ у два рази більше, ніж наборів довжини k, тобто $I_{k+1} = 2 \cdot I_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Теорема доведена.

Існує загальноприйнятий порядок виписування наборів довжини n з 0 і 1. Починається цей список з нульового набору – (0,0,..,0,0). Кожен наступний набір виходить з попереднього додаванням 1 у двійковій арифметиці. Закінчується список одиничним набором – (1,1,..,1,1). Тим, хто забув або не знає двійкової арифметики, наведемо необхідні і найпростіші рівності: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=10.

Визначення. Для висловлення $F(A_1, A_2,..., A_n)$ таблиця істинності має вигляд:

A_1	A_2	...	A_{n-1}	A_n	$F(A_1, A_2,..., A_{n-1}, A_n)$
0	0	...	0	0	$F(0,0,...,0,0)$
0	0	...	0	1	$F(0,0,...,0,1)$
...	...	...	...	...	...
α_1	α_2	...	α_{n-1}	α_n	$F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1},\alpha_n)$
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	0	$F(1,1,...,1,0)$
1	1	...	1	1	$F(1,1,...,1,1)$

По суті справи, приклад таблиці істинності був приведений у підрозділі 1.1. Тут же ми лише дали необхідні позначення і теоретичні обґрунтування. Надалі нам неодноразово знадобиться будувати таблиці істинності.

2.3 Рівносильні висловлення. Основні логічні тотожності

Визначення. Висловлення $F(A_1, A_2,..., A_n)$ і $G(A_1, A_2,..., A_n)$ називаються *рівносильними* (або просто *рівними*), якщо для будь-яких наборів $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ має місце рівність

$$F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = G(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).$$

Позначимо $F(A_1, A_2,..., A_n) = G(A_1, A_2,..., A_n)$. Іншими словами, два висловлення рівні, якщо в них збігаються таблиці істинності.

Приклади.

1) $A \leftrightarrow 0 = \overline{A}$.

Доведення

A	$A \leftrightarrow 0$	$\overline{A}$
0	1	1
1	0	0

2) $A \to B = \overline{A} \vee B$.

Доведення

A	B	$A \to B$	$\overline{A} \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

3) $A \to (B \to C) = A \cdot B \to C$.

Доведення

A	B	C	$A \to (B \to C)$	$A \cdot B \to C$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Наведемо список основних логічних рівностей, що називаються логічними тотожностями. Деякі з них доведемо. Інші рекомендуємо перевірити самостійно.

Основні логічні тотожності:

1) $A \vee A = A$ – ідемпотентність диз'юнкції;
2) $A \wedge A = A$ – ідемпотентність кон'юнкції;
3) $A \vee B = B \vee A$ – комутативність диз'юнкції;
4) $A \wedge B = B \wedge A$ – комутативність кон'юнкції;

5) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ – асоціативність диз'юнкції;

6) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ – асоціативність кон'юнкції;

7) $A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C$ – дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції;

8) $A \vee (B \cdot C) = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$ – дистрибутивність диз'юнкції щодо кон'юнкції.

Доведення

A	B	C	$A \vee (B \cdot C)$	$(A \vee B) \cdot (A \vee C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

9) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ – перший закон Моргана.

Доведення

A	B	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

10) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ – другий закон Моргана.

Доведення

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

11) $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.

12) $A \cdot \overline{A} = 0$ – закон протиріччя.

13) $A \vee \overline{A} = 1$ – закон виключення третіх.

14) $A \to B = \overline{A} \vee B$.

15) $A \to B = \overline{B} \to A$.

16) $A \leftrightarrow B = AB \vee \overline{A} \cdot \overline{B} = (A \to B)(B \to A)$.

Доведення

A	B	$A \to B$	$AB \vee \overline{A} \cdot \overline{B}$	$(A \to B)(B \to A)$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Тотожності, що містять константи:

17) $A \vee 0 = A$.

18) $A \vee 1 = 1$.

19) $A \wedge 0 = 0$.

20) $A \wedge 1 = A$.

21) $A \to 1 = 1$.

22) $1 \to A = A$.

23) $0 \to A = 1$.

24) $A \to 0 = \overline{A}$.

25) $A \leftrightarrow 1 = A$.

26) $A \leftrightarrow 0 = \overline{A}$.

2.4 Диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ)

В даному підрозділі ми доведемо, що всі висловлення за допомогою логічних тотожностей можна привести до деякого однакового стандартного вигляду, в якому вони найбільше ефективно піддаються дослідженню.

Визначення. Нехай F – висловлення і $\alpha \in \{0;1\}$.

$$F^{a} = \begin{cases} F, \textit{ якщо } a = 1 \\ \overline{F}, \textit{ якщо } a = 0. \end{cases}$$

Визначення. $A^{a} = 1$ у тому і тільки в тому випадку, коли $A = \alpha$.

Доведення. Досить побудувати таблицю істинності для A^{a}:

A	α	A^{α}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

З таблиці безпосередньо видно, що $A^{\alpha}=1$ на тих і тільки тих наборах, де $A=\alpha$.

Визначення доведене.

Визначення. Кон'юнкція логічних змінних або їх заперечень називається *елементарною кон'юнкцією.* Загальний вигляд елементарної кон'юнкції

$$A_1^{\alpha_1}\cdot A_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot A_n^{\alpha_n}.$$

Наприклад $A\cdot B, \overline{A}\cdot B, \overline{AC}, A\vee\overline{C}, \overline{B}\cdot C$. Передостання формула не є елементарною кон'юнкцією, тому що заперечення розташоване не над змінною, а над більш складним виразом. Остання формула не є елементарною кон'юнкцією, тому що в ній присутня диз'юнкція, тоді як елементарні кон'юнкції можуть містити лише кон'юнкції і заперечення над логічними змінними. Всі інші приклади є елементарними кон'юнкціями.

Визначення. Висловлення називається *диз'юнктивною нормальною формою,* якщо воно є диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій. Загальний вигляд ДНФ

$$K_1\vee K_2\vee\ldots\vee K_m,$$

де кожна K_i, у свою чергу, є елементарною кон'юнкцією.

Наприклад:

1) $AB\vee C$;
2) $A\cdot(B\vee C)$;
3) $\overline{A}$;
4) $A\vee\overline{B}$;
5) $\overline{A\vee C}$;
6) $\overline{A}\cdot C$;
7) $A\overline{B}C\vee B\overline{C}\vee\overline{A}$.

Друге висловлення не є ДНФ, оскільки в ДНФ помножуються лише змінні або їх заперечення. П'яте висловлення не є ДНФ, оскільки в ДНФ заперечення може розташовуватися лише над змінними. Інші висловлення є диз'юнктивними нормальними формами.

Теорема. Будь-яке висловлення рівносильне диз'юнктивній нормальній формі (говорять ще так: "БУДЬ-ЯКЕ висловлення зводиться до ДНФ").

Доведення. Доведення будемо здійснювати методом математичної індукції за кількістю логічних операцій, що входять у висловлення F. З тотожностей $M \to N = \overline{M} \vee N, M \leftrightarrow N = M \cdot N \vee \overline{M} \cdot \overline{N}$ у F можна позбутися від всіх імплікацій і еквівалентностей, що входять в F. Наприклад, нехай

$$F = (A \to B) \leftrightarrow (B \vee C).$$

Тоді $F = (\overline{A} \vee B) \leftrightarrow (B \vee C) = (\overline{A} \vee B) \cdot (B \vee C) \vee \overline{\overline{A} \vee B} \cdot \overline{B \vee C}$. В результаті отримали висловлення, рівносильне F, що не містить "$\to$" і "$\leftrightarrow$". Надалі будемо вважати, що висловлення F побудоване з логічних змінних і операцій $\vee, \wedge, \overline{\ }$. Через n позначимо кількість операцій, що входять у F.

Нехай $n = 0$, тоді висловлення F, виходячи з визначення, може бути лише найпростішим або висловленням логічної змінної A_i. Очевидно, що це висловлення є ДНФ.

Припустимо, що твердження про зведення до ДНФ доведено для усіх висловлень з числом логічних операцій $n \le k$. Доведемо тепер його для висловлення F, що містить $n = k + 1$ логічних операцій. Знову ж, випливаючи з визначення висловлення і тієї обставини, що в F немає імплікацій і еквівалентностей, F опишемо одним з трьох видів:

$$F = F_1 \vee F_2 \text{ , або } F = F_1 \wedge F_2 \text{, або } F = \overline{F_1} .$$

У перших двох випадках на висловлення F_1 і F_2 у сумі припадає k логічних операцій і виходить, що кожне з них містить $\le k$ операцій. У третьому випадку F_1 містить рівно k логічних операцій. В усіх випадках F_1 і F_2 за індуктивним припущенням зводяться до ДНФ, тому можна вважати, що $F_1 = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l, F_2 = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_m$, де K_i і P_j – елементарні кон'юнкції. У першому випадку

$$F = F_1 \vee F_2 = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l \vee P_1 \vee \ldots \vee P_m ,$$

тобто F є диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій, а значить ДНФ.

У другому випадку

$$F = F_1 \cdot F_2 = (K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l)(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_m) =$$
$$= K_1 \cdot P_1 \vee K_1 \cdot P_2 \vee \ldots \vee K_1 \cdot P_m \vee K_2 \cdot P_1 \vee \ldots \vee K_l \cdot P_m .$$

Оскільки добуток елементарних кон'юнкцій є елементарною кон'юнкцією, то і в другому випадку F приводиться до ДНФ.

Залишилося довести звідність до ДНФ у третьому випадку, тобто коли $F = \overline{K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l}$.

Для спрощення викладень будемо вважати, що $l=2$ і кожна елементарна кон'юнкція є добутком двох логічних змінних, чи їх заперечення, тобто $F = \overline{A^a \cdot B^b \vee C^c \cdot D^d}$.

Під час доведення того, що F зводиться до ДНФ, нам доведеться скористатися рівністю, яку рекомендується довести самостійно.

$$\overline{A}^a = A^{\overline{a}}.$$

Отже $F = \overline{A^a \cdot B^b \vee C^c \cdot D^d} = \overline{A^a \cdot B^b} \cdot \overline{C^c \cdot D^d} = \left(\overline{A}^a \vee \overline{B}^b\right)\left(\overline{C}^c \vee \overline{D}^d\right) =$

$$= \overline{A}^a \cdot \overline{C}^c \vee \overline{B}^b \cdot \overline{C}^c \vee \overline{A}^a \cdot \overline{D}^d \vee \overline{B}^b \cdot \overline{D}^d ,$$

тобто і в останньому, третьому випадку F зводиться до ДНФ. Таким чином, теорема доведена.

Приклад. Звести до ДНФ висловлення

$$F = \left(AB \to \overline{C}\right) \leftrightarrow \left(C \to B\overline{A}\right).$$

Розв'язання.

$$F = \left(\overline{AB} \vee \overline{C}\right) \leftrightarrow \left(\overline{C} \vee \overline{A}B\right) = \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \leftrightarrow \left(\overline{C} \vee \overline{A} \cdot B\right) =$$

$$= \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{C} \vee \overline{A} \cdot B\right) \vee \left(\overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}}\right) \cdot \left(\overline{\overline{C} \vee \overline{A} \cdot B}\right) =$$

$$= \overline{A}\overline{C} \vee \overline{B}\overline{C} \vee \overline{C}\overline{C} \vee \overline{A}\overline{A}B \vee \overline{B}\overline{A}B \vee \overline{C}\overline{A}B \vee \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}\left(\overline{\overline{A}} \vee \overline{B}\right) =$$

$$= \overline{A}\overline{C} \vee \overline{B}\overline{C} \vee \overline{C} \vee \overline{A}B \vee 0 \cdot \overline{A} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee ABC\left(A \vee \overline{B}\right) =$$

$$= \overline{A}\,\overline{C} \vee \overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}B \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{C} \vee ABC = \overline{C}\left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{A}B \vee 1\right) \vee \overline{A}B \vee ABC =$$

$$= C \vee B\left(\overline{A} \vee A\right)\left(\overline{A} \vee C\right) = \overline{C} \vee \overline{A}B \vee BC = \overline{C} \vee B \vee \overline{A}B = B \vee \overline{C} \text{ – ДНФ.}$$

Відзначимо, що доведення теореми носить конструктивний характер. У ньому зазначена послідовність дій *(алгоритм)*, які необхідно робити з висловленням, щоб звести його до ДНФ:

1) застосовуючи формули $M \to N = \overline{M} \vee N$, $M \leftrightarrow N = M \cdot N \vee \overline{M}\,\overline{N}$, звільняємося в F від імплікацій і еквівалентностей;

2) використовуючи закони Моргана і закон подвійного заперечення, домагаємося того, щоб заперечення знаходилися лише над логічними змінними;

3) використовуючи дистрибутивні закони, *"розкриваємо"* дужки і зводимо висловлення до ДНФ;

4) використовуючи закони протиріччя і виключеного третього, а також логічні тотожності, що містять константи, на кожному етапі і наприкінці максимально спрощуємо вирази, що виходять.

Приклад. Звести до ДНФ висловлення
$$F = (A \leftrightarrow BC) \to (\overline{B} \leftrightarrow A).$$

Розв'язання.

$$F = \left(A \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{BC}\right) \to \left(\overline{B} \cdot A \vee \overline{\overline{B}} \cdot \overline{A}\right) = \overline{ABC \vee \overline{A} \cdot \left(\overline{B} \vee \overline{C}\right)} \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$
$$= \overline{ABC \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A}\overline{C}} \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B = \overline{ABC} \cdot \overline{\overline{A}\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}\overline{C}} \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$
$$= \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)\left(A \vee B\right)\left(A \vee C\right) \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$
$$= \left(\overline{A}B \vee A\overline{B} \vee \overline{C}A \vee \overline{C}B\right)\left(A \vee C\right) \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$
$$= \overline{A}BC \vee \overline{B}AA \vee \overline{B}AC \vee \overline{C}AA \vee \overline{C}BA \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$
$$= \overline{A}BC \vee A\overline{B} \vee A\overline{B}C \vee A\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$
$$= \overline{A}B(C \vee 1) \vee A\overline{B}(1 \vee C) \vee A\overline{C}(1 \vee B) = \overline{A}B \vee A\overline{B} \vee A\overline{C}.$$

Зауваження. Вводячи поняття елементарної диз'юнкції кон'юнктивної нормальної форми, можна побудувати аналогічну теорію для КНФ. Пропонуємо розгорнути цю теорію самостійно.

2.5 Побудова висловлень по таблиці істинності. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми (ДДНФ)

Найперша задача, яку ми навчилися розв'язувати, вивчаючи алгебру висловлень, – це побудова по висловленню його таблиці істинності. Чи можна вирішити зворотну задачу – побудувати висловлення по таблиці істинності?

Визначення. Нехай $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – деяка множина логічних змінних. Елементарна кон'юнкція, в яку входять усі логічні змінні, називається *повною елементарною кон'юнкцією* щодо множини X.

Приклад. Нехай $X = \{A, B, C\}$. Розглянемо такі елементарні кон'юнкції: $A, A\overline{B}, ABC, B\overline{C}, B\overline{A}C, \overline{ABC}$. Лише третя, п'ята, шоста елементарні кон'юнкції є повними відносно X.

Визначення. Нехай $F = A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot A_n^{a_n}$ є повною елементарною кон'юнкцією щодо множини $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Тоді F містить у таблиці істинності лише одну одиницю, причому на наборі $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. І навпаки, якщо в таблиці істинності висловлення F є лише одна одиниця на наборі $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то F є повною елементарною кон'юнкцією, причому

$$F = A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot A_n^{a_n}.$$

Доведення. Згадаємо співвідношення: $A^a = 1$ у тому і тільки в тому випадку, коли $A = a$. Отже, нехай $A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot A_n^{a_n} = 1$, звідки випливає, що для будь-якого $i = 1,\ldots,n$ $A_i^{a_i} = 1$, а це значить, що $A_i = a_i$. Отже, ми довели, що повна елементарна кон'юнкція дорівнює 1 лише на одному наборі $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$.

Доведемо від зворотного. Нехай $F(A_1, A_2,\ldots, A_n) = 1$ лише на одному наборі значень $A_i = a_i, i = 1,\ldots,n$, але за доведеним вище цю ж властивість має і повна елементарна кон'юнкція $A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot A_n^{a_n}$. Значить

$$F(A_1, A_2,\ldots, A_n) = A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot A_n^{a_n}.$$

Визначення доведене.

Визначення. Нехай $F(A_1, A_2,\ldots, A_n)$ – висловлення. Позначимо через $I(F)$ множину всіх наборів $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$, на яких $F(a_1, a_2,\ldots, a_n) = 1$. $I(F)$ називається *множиною істинності* висловлення F. Можна записати, що $I(F) = \{(a_1, a_2,\ldots, a_n) | F(a_1, a_2,\ldots, a_n) = 1\}$.

Приклад. Складемо таблицю істинності для F:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Виходить, $I(F) = \{(0,0,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$. Відзначимо, що множина $I(F)$ цілком визначає таблицю істинності для висловлення F, тому що на інших наборах, що не входять у $I(F)$, $F = 0$.

Теорема. Якщо $F = M \vee N$, то $I(F) = I(M) \cup I(N)$.

Доведення. Щоб довести рівність двох множин, треба довести, що вони складаються з тих самих наборів. Візьмемо набір

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(F),$$

звідки $F(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$. Отже, $M(a_1, a_2, ..., a_n) \vee N(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$. За визначенням $M(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ або диз'юнкції $N(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$, тобто $(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(M)$ або $(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(N)$. Це і означає, що

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(M) \vee I(N).$$

Тепер доведемо зворотне. Нехай $(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(M) \vee I(N)$. За визначенням об'єднання $(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(M)$ або $(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(N)$, тобто $M(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ або $N(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$. Тобто $F(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$. Отже, $(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(F)$. Теорема доведена.

Визначення. Диз'юнктивна нормальна форма називається *досконалою* (ДДНФ), якщо всі складові її елементарної кон'юнкції є повними.

Приклади. Нехай $X = \{A, B, C\}$.

1. $AB \vee B\overline{C}A \vee \overline{B}$;
2. $AB\overline{C}$;
3. $A\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}\overline{B}$;
4. $\overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Друга і четверта ДНФ є ЗДНФ, а перша і третя – ні.

Теорема. Нехай $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ – висловлення, що не є тотожно хибним, тобто $I(F) \neq 0$, тоді

$$F(A_1, A_2, ..., A_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, ..., a_n) \in I(F)} A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \cdot ... \cdot A_n^{a_n}$$

Доведення. Нехай $I(F) = \{\overline{a^1}, \overline{a^2}, ..., \overline{a^l}\}$, де $\overline{a^i} = (a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i)$. Розглянемо висловлення

$$F_{\overline{a^i}} = A_1^{a_1^i} \cdot A_2^{a_2^i} \cdot ... \cdot A_n^{a_n^i}, \qquad i = 1, ..., l.$$

Кожне таке висловлення є повною елементарною кон'юнкцією, у якій в таблиці істинності знаходиться одна 1 на наборі $(a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i)$, тобто $I(F_{\overline{a^i}}) = \{(a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i)\}$, отже,

$$I(F) = I(F_{\overline{a^1}}) \cup I(F_{\overline{a^2}}) \cup ... \cup I(F_{\overline{a^l}})$$

Відповідно до теореми $F = F_{\overline{a^1}} \vee F_{\overline{a^2}} \vee \dots \vee F_{\overline{a^l}}$, тобто

$$F = \bigvee_{\overline{a^l} \in I(F)} A_1^{a_1^l} \cdot A_2^{a_2^l} \cdot \dots \cdot A_n^{a_n^l}.$$

Ця теорема і відповідає на запитання, як по таблиці істинності будуються висловлення.

Приклад.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F = A^0 \cdot B^0 \cdot C^0 \vee A^0 \cdot B^1 \cdot C^0 \vee A^0 \cdot B^1 \cdot C^1 \vee A^1 \cdot B^1 \cdot C^1 =$$
$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot B \cdot C \vee A \cdot B \cdot C.$$

Отриману ДДНФ можна спростити, звівши її до більш простої ДНФ:

$$F = \left(\overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C}\right) \vee \left(\overline{A}BC \vee ABC\right) = \overline{A}\overline{C}\left(\overline{B} \vee B\right) \vee BC\left(\overline{A} \vee A\right) = \overline{A}\overline{C} \vee BC.$$

2.6 Застосування алгебри висловлень у задачах дослідження електричних двополюсників

Застосування логіки до електричних схем основане на декількох простих угодах.

1. Якщо по колу C протікає струм, то ми будемо писати $C=1$; якщо ж по C струм не йде, то $C=0$.

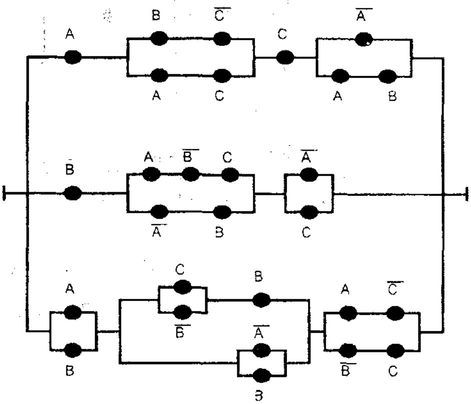
2. Якщо коло C складається з двох послідовно підключених перемикачів A і B, то по C протікає струм тільки в тому випадку, коли включені A і B, тобто $C=1$ тільки тоді, коли $A=1$ і $B=1$: $C = 1 \leftrightarrow A = 1 \; і \; B = 1$.

Однак такими ж властивостями характеризується і кон'юнкція. Значить послідовне з'єднання перемикачів описується кон'юнкцією $C = A \cdot B$.

3. Аналогічно паралельне з'єднання перемикачів моделюється диз'юнкцією: $C = A \vee B$

4. Через $\overline{A}$ позначається перемикач, що включений тільки в тому випадку, коли перемикач A виключений.

Не даючи строгого визначення, що таке паралельно-послідовний двополюсник, наведемо приклад такого об'єкта:

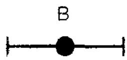


Опишемо даний двополюсник формулою алгебри висловлень:

$$F = A\left(B\overline{C} \vee AC\right)\cdot C\left(\overline{A} \vee AB\right) \vee B\left(A\overline{B}C \vee \overline{A}B\right)\left(\overline{A} \vee C\right) \vee$$
$$\vee \left(A \vee B\right)\left(\left(C \vee \overline{B}\right)\cdot B \vee \left(\overline{A} \vee B\right)\right)\cdot\left(A\overline{C} \vee \overline{B}C\right).$$

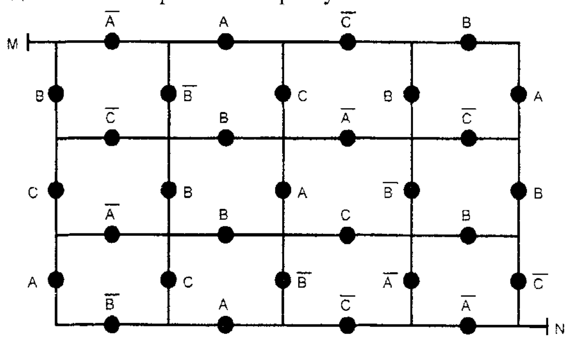
Спростивши висловлення F, побудуємо схему, що відповідає цьому більш простому висловленню. Побудована схема буде функціонувати так само, як і вихідна, але буде реалізована більш просто:

$$F = \left(AB\overline{C} \vee AC\right)\left(C\overline{A} \vee CAB\right) \vee \overline{A}B\left(\overline{A} \vee C\right) \vee$$
$$\vee \left(A \vee B\right)\left(BC \vee B \vee \overline{A}\right)\left(A\overline{C} \vee \overline{B}C\right) =$$
$$= ABC \vee \overline{A}B \vee \overline{A}BC \vee \left(A \vee B\right)\left(B \vee \overline{A}\right)\left(A\overline{C} \vee \overline{B}C\right) =$$
$$= BC\left(A \vee \overline{A}\right) \vee \overline{A}B \vee \left(AB \vee B \vee \overline{A}B\right)\left(A\overline{C} \vee \overline{B}C\right) =$$
$$= BC \vee \overline{A}B \vee B\left(A\overline{C} \vee \overline{B}C\right) = BC \vee \overline{A}B \vee BA\overline{C} =$$
$$= B\left(C \vee \overline{A} \vee A\overline{C}\right) = B\left(C \vee \left(\overline{A} \vee A\right)\left(\overline{A} \vee C\right)\right) =$$
$$= B\left(C \vee \overline{A} \vee \overline{C}\right) = B.$$

Таким чином, вихідна схема рівносильна схемі: 

Виявляється, що отримані результати дозволяють досліджувати і спрощувати і довільні двополюсники.

Приклад. Нижче зображено мережу.



Позначимо наведену мережу символом $S(A,\ B,\ C)$.

1. Нехай $A=0, B=0, C=0$. Безпосередньо видно, що немає шляху з M в N, що проходить ребрами $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$, тому $S(0,0,0)=0$.

2. Покладемо, $A=0$, $B=0$, $C=1$. Перевірка показує, що немає шляху з M у N ребрами $\overline{A},\overline{B},C$, тому $S(0,0,1)=0$.

3. $a=0$, $b=1$, $c=0$. Є шлях з M в N. Умовно його можна позначити так: $B \to \overline{C} \to B \to \overline{A} \downarrow \overline{B} \downarrow \overline{A} \to \overline{A}$. Тому $S(0,1,0)=1$.

4. $a=0$, $b=1$, $c=1$. Є шлях з M в N: $B \downarrow C \to \overline{A} \to B \to C \downarrow \overline{A} \to \overline{A}$. Тому $S(0,1,1)=1$.

5. $a=1, b=0, c=0$. Немає шляху з M в N, тобто S (1, 0, 0)=0.

6. $a=1$, $b=0$, $c=1$. $S(1,\ 0,\ 1)=0$.

7. $a=1$, $b=1$, $c=0$. $S\ (1,\ 1,\ 0)=0$.

8. $a=1$, $b=1$, $c=1$. $S\ (1,\ 1,\ 1)=0$.

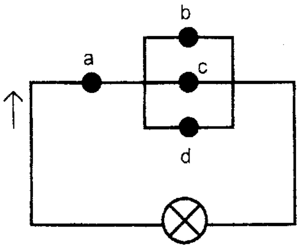
Мережі S відповідає таблиця істинності:

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

При цьому $S = \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC = \overline{A}B\left(\overline{C} \vee C\right) = \overline{A}B$. Тобто вихідна мережа S рівносильна двополюснику 

Розглянемо приклад голосування. Нехай є комісія, що складається з чотирьох чоловік *a, b, c, d. a* – голова комісії. Пропозиція вважається прийнятою, якщо за неї проголосувало більшість, але голова має таку перевагу: якщо він проголосував *"проти"*, то пропозиція не приймається, якщо проголосував *"за"*, то досить, щоб ще хтось один підтримав цю пропозицію. Сконструювати схему, в якій сигнал би запалювався, якщо пропозиція прийнята, і не запалювався в іншому випадку. Позначимо цю схему через *F(a, b, c, d)* і побудуємо для неї таблицю істинності:

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1



З таблиці істинності випливає, що

$$F = a\bar{b}\bar{c}d \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee a\bar{b}cd \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee ab\bar{c}d \vee abc\bar{d} \vee abcd =$$
$$= a\bar{b}\bar{c}d \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee abc = a\bar{b}\bar{c}d \vee a\bar{b}c \vee ab =$$
$$= a\bar{b}\bar{c}d \vee a\left(\bar{b}c \vee b\right) = a\bar{b}\bar{c}d \vee a\left(\bar{b} \vee b\right)\left(c \vee b\right) =$$
$$= a\bar{b}\bar{c}d \vee ac \vee ab = a\left(\bar{b}\bar{c}d \vee b\right) \vee ac = a\left(\bar{b} \vee b\right)\left(\bar{c}d \vee b\right) \vee ac = a\bar{c}d \vee ab \vee ac$$
$$= a\left(\bar{c}d \vee c\right) \vee ab = a\left(\bar{c} \vee c\right)\left(d \vee c\right) \vee ab = ad \vee ab \vee ac = a\left(b \vee c \vee d\right).$$

За результатами перетворень будуємо схему голосування, що наведена на рисунку вище.

ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ І ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ (АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ)

Формалізація висловлень

Запишіть символічно такі складні пропозиції, вживаючи букви для позначення простих компонентів пропозиції.

Приклад 1. Якщо посилка істинна, а висновок помилковий, то імлікація помилкова.

Розв'язання. Нехай A = "посилка істинна", B = "висновок не істинний", C = "імплікація помилкова". Тоді дану пропозицію символічно можна записати у вигляді $A \wedge B \to C$.

Приклад 2. Якщо коло, що складається з двох паралельно підключених перемикачів A і B, то по C протікає струм у тому і тільки в тому випадку, коли включений перемикач A або включений перемикач B.

Розв'язання. Нехай X= "коло, що складається з двох паралельно підключених перемикачів A і B, Y = "по С протікає струм", Z ="включений A", V = "включений B". Тоді дану пропозицію символічно можна записати у вигляді $X \to (Y \leftrightarrow Z \vee V)$.

1. Три це просте число, а чотири є складене число.
2. Йде дощ чи хтось не виключив душ.
3. Якщо йде дощ, то вулиці мокрі.
4. Іван сяде, і він чи Сергій будуть чекати.
5. Іван сяде і буде чекати чи Сергій буде чекати.
6. Я поїду на автобусі чи на таксі.
7. Ні Північ, ні Південь не перемогли в громадянській війні.
8. Людину не підкуплять лестощі, якщо розум у людини є.
9. Якщо вчитель їсть стоячи, то учні їдять на ходу.
10. Якщо не можеш визнати похвал заслуженими, то вважай їх лестощами.
11. Якщо буде гарна погода, то я подзвоню друзям, і ми поїдемо до моря.
12. Якщо я втомився чи голодний, то я не можу займатися.
13. Натуральне число n ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа n ділиться на 3.
14. Якщо ранком буде злива, то я залишуся в будинку, чи змушений буду взяти таксі.
15. Сьогодні наша команда не виграла і, отже, не вийшла у фінал.
16. Якщо я сьогодні встану і піду на заняття, моя мама буде задоволена, а якщо я не встану, то мама не буде задоволена.
17. Якщо він хоче досягти мети, він повинен багато знати і бути щасливим.
18. Сьогодні ясно, отже, сьогодні не йде ні дощ, ні сніг.
19. Учора було похмуро, а сьогодні тепло і ясно.

20. Якщо сьогодні хмарно, виходить, завтра буде дощ, чи вітер розжене хмари.

21. Ти успішно складеш іспит тоді і тільки тоді, коли добре підготуєшся; якщо ти не складеш іспит успішно, то позбавишся стипендії.

22. Математичні зведення можуть застосовуватися вміло і бути корисними тільки в тому випадку, якщо вони засвоєні творчо.

23. Якщо в запалі пристрасті розум сумнівається, то коли пристрасть остигне, він засудить твій вчинок.

24. Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю, то система рівнянь визначена, тобто має єдине рішення.

25. Другом можна вважати того і тільки того, хто щасливий, якщо щасливий його друг, і сумний, якщо той сумний.

26. Якщо я успішно закінчу школу і піду в інститут, то я зможу здати екзамен з математики тоді і тільки тоді, коли я буду багато займатися чи викладач буде поблажливий.

27. Ти зрозумієш цю тему, якщо прийдеш сьогодні на заняття, або прочитаєш підручник, інакше тобі зможе допомогти друг тоді і тільки тоді, коли зрозуміє цю тему сам.

28. Якщо "Пірати" чи "Щенята" програють і "Велетні" виграють, то "Ведмеді" втратять перше місце і, крім того, я програю парі.

29. Якщо робітники адміністрації вперті, то страйк буде урегульований тоді і тільки тоді, коли уряд доможеться судової заборони, але війська не будуть відправлені на завод.

30. Хліб вціліє тоді і тільки тоді, коли будуть вириті іригаційні канави; якщо хліб не вціліє то фермери збанкрутують і залишать ферми.

31. Я піду додому, чи залишуся тут і вип'ю скляночку, я не піду додому, отже, я залишуся і вип'ю.

32. Заробітна плата зросте тільки, якщо буде інфляція, якщо буде інфляція, то збільшиться вартість життя; заробітна плата зросте, отже, збільшиться вартість життя.

33. Якщо 2 – просте число, то це найменше просте число, якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є просте число; число 1 не є просте число, отже, 2 – просте число.

34. Ігор перевтомився, чи хворий, якщо він перевтомився, то він дратується; він не дратується, отже, він хворий.

35. Якщо завтра буде холодно, я надягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений; завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, отже, я не надягну тепле пальто.

36. Якщо результат скачок буде вирішений наперед чи в казино будуть орудувати шулери, то доходи від туризму впадуть, і місто постраждає; якщо доходи від туризму впадуть, поліція буде задоволена; поліція ніколи не буває задоволена, отже, результат скачок не вирішений наперед.

37. Якщо "Доджери" виграють, то Лос-Анджелес буде тріумфувати, а якщо виграє "Уайт-Сокс", то тріумфувати буде Чикаго; або виграють "До-

джери", або "Уайт-Сокс", однак якщо виграють "Доджери", то Чикаго не буде тріумфувати, а якщо виграє "Уайт-Сокс", то не буде тріумфувати Лос-Анджелес; отже, Чикаго буде тріумфувати тоді і тільки тоді, коли не буде тріумфувати Лос-Анджелес.

38. Коля і Дмитрик одного віку, чи старший Коля за Дмитрика; якщо Коля і Дмитрик одного віку, то Інна і Дмитрик не одного віку, якщо Коля старший за Дмитрика, то Дмитрик старший за Мишка, отже, Інна і Дмитрик не одного віку, чи Дмитрик старший за Мишка.

39. Якщо 6 – складене число, то 12 – складене число, якщо 12 – складене число, то існує просте число, більше, ніж 12; якщо існує просте число, більше, ніж 12, то існує складене число, більше 12; якщо 6 ділиться на 2, то 6 – складене число; число 12 – складене, отже, 6 – складене число.

40. Якщо я поїду автобусом, а автобус спізниться, то я пропущу призначене побачення, якщо я пропущу призначене побачення і почну засмучуватися, то мені не слід їхати додому; якщо я не одержу цю роботу, то я почну засмучуватися і мені варто поїхати додому, отже, якщо я поїду автобусом і автобус спізниться, то я одержу цю роботу.

41. Якщо Сміт переможе на виборах, він буде задоволений, а якщо він буде задоволений, то він поганий борець у передвиборній кампанії, але якщо він провалиться на виборах, то втратить довіру партії; він поганий борець, якщо він утратить довіру партії, і, якщо він поганий борець у передвиборній кампанії, йому варто вийти з партії; Сміт переможе на виборах, чи провалиться, отже, йому потрібно вийти з партії.

42. Контракт буде виконаний тоді і тільки тоді, коли будинок буде закінчений у лютому, якщо будинок буде закінчений у лютому, то ми можемо переїжджати 1-го березня, якщо ми не зможемо переїхати 1-го березня, то ми повинні внести квартирну плату за березень; якщо контракт не буде виконаний, то ми повинні внести квартирну плату за березень, але ми не будемо вносити квартирну плату за березень.

43. Книга буде видана тоді і тільки тоді, коли закінчить роботу рецензент, якщо книга буде видана до встановленого терміну, то всі примірники будуть швидко розкуплені й автори будуть задоволені. Якщо ж рецензент не закінчить роботу до встановленого терміну, отже, автори не будуть задоволені.

44. Ми закінчимо ремонт, якщо ми знайдемо придатні шпалери, і нам вистачить грошей на їхню купівлю, на дорогі шпалери нам не вистачить грошей, а придатні не коштують дешево, отже, ми не закінчимо ремонт.

45. Я запам'ятаю дослівно цю інформацію тоді і тільки тоді, коли прочитаю її чи неодноразово почую. Якщо я запам'ятаю цю інформацію дослівно, то я зможу передати її другу і він виконає завдання шефа і, отже, отримає велику суму грошей. Друг не виконав завдання шефа, отже, невірно, що я або прочитав, або неодноразово почув цю інформацію, або я не зміг передати її другу.

Таблиці істинності висловлень

Приклад. Побудувати таблицю істинності для висловлення

$$A \vee \overline{C} \to \overline{B \leftrightarrow A}.$$

Розв'язання. Нехай $F(A,B,C) = A \vee \overline{C} \to \overline{B \leftrightarrow A}$. Заповнимо стовпець таблиці, що відповідає $\overline{C}$, користаючись тим, що $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$.

A	B	C	$\overline{C}$	$A \vee \overline{C}$	$B \leftrightarrow A$	$\overline{B \leftrightarrow A}$	F
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

Потім, на основі стовпців A і $\overline{C}$ заповнимо стовпець $A \vee \overline{C}$, користаючись тим, що $0 \vee 1 = 1$, $0 \vee 0 = 0$, $1 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$. На основі стовпців B і A заповнимо стовпець $B \leftrightarrow A$, використовуючи правило: $0 \leftrightarrow 0 = 1$, $0 \leftrightarrow 1 = 0$, $1 \leftrightarrow 0 = 1$, $1 \leftrightarrow 1 = 1$. Заповнимо стовпець $\overline{B \leftrightarrow A}$, причому будемо ставити в рядку 1, якщо в тому ж рядку стовпця $B \leftrightarrow A$ стоїть 0, і навпаки. Нарешті, заповнимо останній стовпець, використовуючи дані стовпців $A \vee \overline{C}$ і $\overline{B \leftrightarrow A}$ і знаючи, що $1 \to 0 = 0$, а в інших випадках імплікація істинна.

Побудуйте таблиці істинності для таких висловлень.

1. $\overline{A} \vee B \to B \to AB$;
2. $A \wedge \overline{B} \leftrightarrow A \vee B$;
3. $AC \to A \vee \overline{CA}$;
4. $\overline{B} \to CB \vee (\overline{C} \to B)$;
5. $\overline{C \vee \overline{C}A} \leftrightarrow \overline{A}$;
6. $\overline{AB} \vee A \to B \vee \overline{A}$;
7. $BA \vee (\overline{A} \leftrightarrow B \to A)$;

8. $\overline{B}C \leftrightarrow \overline{CB \to B \vee \overline{C}}$;

9. $AC \leftrightarrow A \vee C \to \overline{AC}$;

10. $\overline{\overline{A} \vee B} \leftrightarrow B \to AB$;

11. $AC \vee A \to \overline{C \to A} \vee \overline{C}$;

12. $CB \vee \overline{B}C \to \overline{CB} \vee \overline{C}$;

13. $B\overline{A} \leftrightarrow AB \vee \overline{A \to AB}$;

14. $CB \vee \overline{\overline{B}C \to B \vee C} \leftrightarrow C$;

15. $AB \vee B \to \overline{A\overline{B} \leftrightarrow \overline{A} \to B\overline{A}}$;

16. $B\overline{C} \vee \overline{\overline{B} \to CB \leftrightarrow B}$;

17. $\overline{\overline{\overline{AB}} \vee A \leftrightarrow B} \vee \overline{A}$;

18. $\overline{\overline{A \wedge \overline{B}} \leftrightarrow A \vee \overline{BA}}$;

19. $\overline{A \vee \overline{C}A} \leftrightarrow \overline{\overline{A}C \to C}$;

20. $\overline{A} \vee B \to (B \to \overline{AB})$;

21. $\overline{AB} \vee (CBA \to \overline{A\overline{C} \leftrightarrow BC}) \wedge \overline{A}CB \vee A$;

22. $(ABC \leftrightarrow \overline{AB \vee CB}) \vee C \to AB \to \overline{B}C$;

23. $CB \vee \overline{AB \to (\overline{BC}A \leftrightarrow AB)} \to CA \vee \overline{A}$;

24. $B\overline{DE} \vee DE \to B\overline{E} \to \overline{D \vee BD \leftrightarrow B\overline{E}D}$;

25. $\overline{AB} \vee (\overline{CBA} \leftrightarrow \overline{A\overline{C} \to AC}) \wedge \overline{BC}A$;

26. $CA \vee \overline{CAB \to (\overline{B}A \leftrightarrow CB)} \leftrightarrow CA \vee B\overline{A}$;

27. $C\overline{B} \vee AB \to \overline{B\overline{AC} \leftrightarrow BC \to A\overline{C}} \vee BA$;

28. $BA \vee CAB \vee \overline{\overline{A \to BC} \leftrightarrow (AB \vee C) \to CB}$;

29. $(A\overline{BC} \leftrightarrow BC \vee \overline{A \to B})A \vee \overline{BC \to A}$;

30. $(\overline{DC} \vee \overline{BD} \to \overline{(DB \leftrightarrow DC)} \vee DB \to C$;

31. $DA \to (AD \leftrightarrow \overline{D \vee AC})A \vee \overline{DC \to AC}$;

32. $(DC \vee \overline{C \to DB})B \vee \overline{DC \leftrightarrow C \vee BC} \to B$;

33. $\overline{AB} \to BC \vee (\overline{AC \leftrightarrow B\overline{C}} \wedge B) \to A \vee B\overline{C}$;

34. $BC \vee \overline{AB} \vee (AB \to \overline{B}C) \vee \overline{\overline{AC \leftrightarrow CB} \wedge AB}$;

35. $A\overline{BC \vee AC} \to \overline{(AB \leftrightarrow C) \vee AC} \vee B \to CA$;

36. $\overline{AB \vee CA} \to \overline{ACD \vee C} \wedge (AD \leftrightarrow AB \vee \overline{B})$;

37. $\overline{AC \leftrightarrow B} \vee (CD \to \overline{D \wedge AC})A \leftrightarrow BD \vee \overline{D}$;

38. $XYZ \vee XZ \to (\overline{X \vee YW} \leftrightarrow WY) \wedge YX \vee Z\overline{W}$;

39. $\overline{B}F \vee (\overline{DF \to DC} \vee F) \wedge DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DF}$;

40. $A \vee \overline{BC} \leftrightarrow (AC \vee \overline{BD \to C}) \wedge D\overline{C} \vee ABC;$

41. $\overline{D}C \to \overline{B \vee E} \vee \overline{DE \leftrightarrow B} \to DB \wedge (C \vee \overline{D});$

42. $FB \vee \overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F} \to (E \vee FB);$

43. $SDG \vee (S \to \overline{DG}) \vee T \leftrightarrow \overline{STD \vee G} \to S\overline{D};$

44. $\overline{AB \to A} \to \overline{ACD \vee C} \wedge (A \to \overline{ACD \vee \overline{C}});$

45. $X\overline{W} \vee (Y \to XYW) \leftrightarrow \overline{ZX \wedge W \to X} \vee Z;$

46. $\overline{SK \vee T \to L} \wedge (ST \leftrightarrow L) \to \overline{S\overline{L} \vee TSL} \wedge K;$

47. $\overline{AB \vee D} \wedge CD \to BC \wedge \overline{(AB \leftrightarrow C) \vee DC};$

48. $S\overline{D}G \vee S \to \overline{DG}) \vee T \to \overline{STD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D};$

49. $FB \vee (\overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F}) \to (E \vee FB);$

50. $\overline{D}C \to (\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \leftrightarrow B}) \to DB \wedge (C \vee \overline{D});$

51. $(A \vee \overline{BC} \leftrightarrow AC \vee \overline{BD \to C}) \wedge D\overline{C} \vee ABC;$

52. $X(YZ \vee XZ \to \overline{X \vee YW} \leftrightarrow WY) \wedge YX \vee Z\overline{W};$

53. $(\overline{DF \to DC} \vee B)F \vee DBC \leftrightarrow \overline{\overline{\overline{C}} \vee DF} \to B;$

54. $S \vee \overline{DG}(S \vee \overline{DG}) \to T \to \overline{ST \vee G} \leftrightarrow S\overline{D} \vee S;$

55. $(X\overline{W} \vee Y \to XYW \leftrightarrow \overline{ZXW \to X}) \wedge Z;$

56. $\overline{AB \to A} \to (\overline{ACD \vee C} \wedge A \to \overline{ABD \vee \overline{\overline{C}}});$

57. $\overline{ST \vee K \leftrightarrow KL}(ST \leftrightarrow L \to \overline{S\overline{L} \vee TSL}) \wedge \overline{K};$

58. $\overline{A \vee BD} \wedge C \to (BC \wedge \overline{AB \leftrightarrow C \vee DA} \vee A);$

59. $ED \to \overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow (\overline{FEB \to F} \to E \vee \overline{FB});$

60. $\overline{D}A(\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \to B}) \to DB \leftrightarrow \overline{(A \vee \overline{D}E)};$

61. $(\overline{YZ} \vee X\overline{Z} \leftrightarrow \overline{X \vee YW} \to \overline{WY}) \leftrightarrow Y \vee Z\overline{YW};$

62. $\overline{B \to CA} \to A\overline{D} \wedge (\overline{D \leftrightarrow AB} \vee \overline{B}) \leftrightarrow CB \vee \overline{CD};$

63. $\overline{A\overline{C} \vee B} \to (\overline{CD} \to \overline{\overline{\overline{D}} \wedge BC}) \leftrightarrow BAD \vee \overline{AD};$

64. $XW\overline{Z} \vee \overline{XZ} \leftrightarrow (\overline{X \vee ZW} \to \overline{W}X) \wedge \overline{ZX \vee Z\overline{W}};$

65. $F \vee (A \wedge \overline{DA} \to \overline{A \vee DF}) \leftrightarrow AF \vee A \to \overline{DF};$

66. $A \vee \overline{\overline{B}C} \leftrightarrow (\overline{C \vee D \to AC}) \leftrightarrow \overline{D\overline{C} \vee AB \leftrightarrow C};$

67. $X \vee (\overline{YZ \vee XZ} \to \overline{YX \vee W} \to \overline{WY})YX \leftrightarrow Z\overline{W};$

68. $AB \vee \overline{E\overline{D} \to EA} \leftrightarrow \overline{AEB \vee A} \to (E \vee AB);$

69. $S \wedge \overline{DG \vee (S \to TS \leftrightarrow DG)} \vee T \wedge \overline{STD \vee G} \to S\overline{D};$

70. $\overline{SB \to SC} \to \overline{SCD \vee C} \wedge (S \to \overline{SCD \vee \overline{C}}).$

Диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ)

Приклад. Звести до ДНФ висловлення

$$F = (\overline{A}B \to C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}).$$

Розв′язання.

$$F = (\overline{\overline{A}B} \vee C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) = (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B} \vee C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) =$$
$$(A \vee \overline{B} \vee C \vee A) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) = (A \vee \overline{B} \vee C) \leftrightarrow (\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) =$$
$$= (A \vee \overline{B} \vee C)(\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) \vee \overline{A \vee \overline{B} \vee C} \wedge \overline{\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{B}} =$$
$$= A\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{C} \vee C\overline{C} \vee A\overline{A} \vee \overline{B}\,\overline{A} \vee C\overline{A} \vee A\overline{B} \vee \overline{B}\,\overline{B} \vee$$
$$\vee C\overline{B} \vee \overline{A}B\overline{C} \cdot CAB = A\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{A} \vee C\overline{A} \vee A\overline{B} \vee \overline{B} \vee \overline{C}B \vee 0 =$$
$$= A\overline{C} \vee C\overline{A} \vee \overline{B}.$$

Звести до ДНФ такі висловлення.

1. $\overline{AB} \vee (CBA \to \overline{A\overline{C} \leftrightarrow BC}) \wedge \overline{A}CB \vee A;$
2. $BA \vee CAB \vee \overline{\overline{A \to BC} \leftrightarrow (AB \vee C) \to CB};$
3. $(A\overline{BC} \leftrightarrow BC \vee \overline{A \to B})A \vee \overline{BC \to A};$
4. $(\overline{DC \vee BD} \to \overline{(DB \leftrightarrow DC)} \vee DB \to C;$
5. $DA \to (AD \leftrightarrow \overline{D \vee AC})A \vee \overline{DC \to AC};$
6. $(DC \vee \overline{C \to DB})B \vee D\overline{C \leftrightarrow C \vee BC} \to B;$
7. $\overline{AB} \to BC \vee (\overline{AC \leftrightarrow B\overline{C}} \wedge B) \to A \vee B\overline{C};$
8. $\overline{BC \vee AB} \vee (AB \to \overline{B}C) \vee \overline{\overline{AC \leftrightarrow CB} \wedge AB};$
9. $A\overline{BC \vee AC} \to \overline{(AB \leftrightarrow C) \vee AC} \vee B \to CA;$
10. $\overline{AB \vee CA} \to \overline{ACB \vee C} \wedge (AC \leftrightarrow AB \vee \overline{B});$
11. $XYZ \vee XZ \to (\overline{X \vee YZ} \leftrightarrow ZY) \wedge YX \vee Z\overline{X};$
12. $\overline{B}C \vee (\overline{DB \to DC} \vee B) \wedge DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DB};$
13. $A \vee \overline{BC} \leftrightarrow (AC \vee \overline{BA \to C}) \wedge B\overline{C} \vee ABC;$
14. $\overline{D}C \to \overline{B \vee C} \vee \overline{DC \leftrightarrow B} \to DB \wedge (C \vee \overline{D});$
15. $FB \vee \overline{E\overline{B} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F} \to (E \vee FB);$
16. $SDG \vee (S \to \overline{DG}) \vee G \leftrightarrow \overline{SGD \vee G} \to S\overline{D};$
17. $\overline{AB \to A} \to \overline{ACB \vee C} \wedge (A \to \overline{ACB \vee \overline{C}});$

18. $\overline{SK \vee T \to K} \wedge (ST \leftrightarrow K) \to \overline{S\overline{K} \vee TSK} \wedge K;$

19. $\overline{AB \vee C} \wedge CB \to BC \wedge \overline{(AB \leftrightarrow C) \vee AC};$

20. $(S\overline{D}G \vee S \to \overline{DG}) \vee D \to \overline{SD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D};$

21. $FB \vee (\overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F}) \to (E \vee FB);$

22. $\overline{D}C \to (\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \leftrightarrow B}) \to DB \wedge (C \vee \overline{D});$

23. $(A \vee \overline{BC} \leftrightarrow AC \vee \overline{BD \to C}) \wedge D\overline{C} \vee ABC;$

24. $X\overline{W} \vee (Y \to XYW) \leftrightarrow \overline{ZX \wedge W \to X} \vee Z;$

25. $C\overline{B} \vee AB \to \overline{B\overline{AC} \leftrightarrow BC \to A\overline{C}} \vee BA;$

26. $(ABC \leftrightarrow \overline{AB \vee CB}) \vee C \to AB \to \overline{B}C;$

27. $CB \vee \overline{AB \to (\overline{BC}A \leftrightarrow AB)} \to CA \vee \overline{A};$

28. $B\overline{DE} \vee DE \to B\overline{E} \to \overline{D} \vee \overline{BD \leftrightarrow B\overline{E}D};$

29. $\overline{AB} \vee (\overline{CBA} \leftrightarrow \overline{A\overline{C} \to AC}) \wedge \overline{BC}A;$

30. $CA \vee \overline{CAB \to (\overline{B}A \leftrightarrow CB)} \leftrightarrow CA \vee B\overline{A};$

31. $\overline{AC \leftrightarrow B} \vee (CD \to \overline{D \wedge AC})A \leftrightarrow BD \vee \overline{D};$

32. $X(YZ \vee XZ \to \overline{X \vee YW} \leftrightarrow WY) \wedge YX \vee Z\overline{W};$

33. $(\overline{DF \to DC} \vee B)F \vee DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DF} \to B;$

34. $S \vee \overline{DG}(S \vee \overline{DG}) \to T \to \overline{ST \vee G} \leftrightarrow S\overline{D} \vee S;$

35. $(X\overline{W} \vee Y \to XYW \leftrightarrow \overline{ZXW \to X}) \wedge Z;$

36. $\overline{AB \to A} \to (\overline{ACD \vee C} \wedge A \to \overline{ABD \vee \overline{C}});$

37. $\overline{ST \vee K \leftrightarrow KL}(ST \leftrightarrow L \to \overline{S\overline{L} \vee TSL}) \wedge \overline{K};$

38. $\overline{A \vee BD} \wedge C \to (BC \wedge \overline{AB \leftrightarrow C \vee DA} \vee A);$

39. $ED \to \overline{E\overline{D} \to EF} \leftrightarrow (\overline{FEB \to F} \to E \vee \overline{FB});$

40. $\overline{D}A(\overline{B \vee E} \vee \overline{DE \to B}) \to DB \leftrightarrow \overline{(A \vee \overline{DE})};$

41. $(\overline{YZ} \vee X\overline{Z} \leftrightarrow \overline{X \vee YW} \to \overline{WY}) \leftrightarrow Y \vee \overline{ZYW};$

42. $\overline{B \to CA} \to A\overline{D} \wedge (D \leftrightarrow \overline{AB \vee \overline{B}}) \leftrightarrow CB \vee \overline{CD};$

43. $\overline{A\overline{C} \vee B} \to (\overline{CD} \to \overline{\overline{D} \wedge BC}) \leftrightarrow BAD \vee \overline{AD};$

44. $XY\overline{Z} \vee \overline{XZ} \leftrightarrow (\overline{X \vee YW} \to \overline{W}Y) \wedge \overline{YX \vee Z\overline{W}};$

45. $F \vee (A \wedge \overline{DA} \to \overline{A \vee DF}) \leftrightarrow AF \vee A \to \overline{D}\,\overline{F};$

46. $A \vee \overline{\overline{B}C} \leftrightarrow (\overline{C \vee D \to AC}) \leftrightarrow \overline{D\overline{C} \vee AB \leftrightarrow C};$

47. $X \vee (\overline{YZ \vee XZ} \to \overline{YX \vee W} \to \overline{WY})YX \leftrightarrow Z\overline{W};$

48. $AB \vee \overline{E\overline{D} \to EA} \leftrightarrow \overline{AEB \vee A} \to (E \vee AB);$

49. $S \wedge \overline{DG \vee (S \to TS \leftrightarrow DG)} \vee T \wedge \overline{STD \vee G} \to S\overline{D}$;

50. $\overline{SB \to SC} \to \overline{SCD \vee C} \wedge (S \to \overline{SCD \vee \overline{C}})$;

51. $YZ \to WX \vee (\overline{WX \leftrightarrow Z} \vee XZ \to YW) \leftrightarrow YX \vee WY$;

52. $(A \vee D \vee C)ABD \leftrightarrow \overline{DC \to A\overline{C \vee B}} \to ABCD$;

53. $S \vee D \to \overline{FE \leftrightarrow D \to \overline{S}} \wedge (ES \vee DF \leftrightarrow ESF) \leftrightarrow \overline{SD}$;

54. $WE \vee \overline{RT} \to \overline{ERT} \wedge TW \leftrightarrow ET \to (TW \to \overline{EWT(W \vee R)})$;

55. $ASDF \vee \overline{FD \to SF(ASD \vee D\overline{S}) \leftrightarrow SF \vee \overline{\overline{D}}} \vee SA \leftrightarrow F$;

56. $ZVX \leftrightarrow \overline{CX} \to CZ \vee CVZ \to \overline{ZX \vee \overline{\overline{CVZ}}} \wedge (ZCX \vee V \to Z)$;

57. $LH \to \overline{JG \vee HG \leftrightarrow GJL \to \overline{H}} \wedge (LHJ \to GH\overline{L})$;

58. $\overline{PI \vee OU \leftrightarrow IU \to \overline{OP} \leftrightarrow (IO \vee IP \vee IU \vee OPU) \leftrightarrow UIP} \vee \overline{O}$;

59. $\overline{NM \vee KL \vee N \leftrightarrow LN} \wedge (NK \vee ML \to NMKL)\overline{MNLK} \vee N$;

60. $ASDF \vee \overline{A \to S \to F\overline{DA}(SA \leftrightarrow DFA) \vee F} \leftrightarrow SDF \to (\overline{A \vee \overline{S}})$;

61. $XC \leftrightarrow \overline{CZ \to VX \vee XZV} \leftrightarrow (Z \vee XC \vee \overline{VX}) \wedge ZXV\overline{C}$;

62. $RTE \vee \overline{WT(E \vee R \vee WT\overline{R}) \wedge RT \to E \leftrightarrow W\overline{ER}} \leftrightarrow RT \vee E$;

63. $(ASDF \to D \to F \to \overline{ASDF}) \leftrightarrow A \to DF \leftrightarrow D$;

64. $L\overline{H \leftrightarrow KJ} \leftrightarrow \overline{KH} \to HLJ \to J \vee L \vee K(HJ \vee LK \vee \overline{HJ})$;

65. $O \vee U \vee \overline{PIO} \leftrightarrow UP \to P \leftrightarrow (U \vee OI \vee \overline{IO \vee U \leftrightarrow PU \to UOP})$;

66. $ABC \vee \overline{DC \to AB \leftrightarrow CD\overline{A}(D \vee A)} \leftrightarrow (DC \vee A(\overline{A} \vee B))$;

67. $Z \leftrightarrow C \to CX \leftrightarrow \overline{ZCV \vee X\overline{C} \vee CVX \leftrightarrow Z \wedge XC} \to CV \vee Z$;

68. $T \to \overline{ER(W \leftrightarrow \overline{R \vee \overline{E}(ERT \vee W \to WT)})} \leftrightarrow WER \vee ERT \vee WRT$;

69. $KLM \vee \overline{N \to K} \wedge M \vee N(\overline{KL} \to N \leftrightarrow MK \vee KLN) \leftrightarrow N$.

Досконалі диз'юнктивні нормальні форми (ДДНФ)

Звести дані висловлення до ДДНФ, по можливості спростити.

Приклад. Звести до ДДНФ висловлення $F = \overline{A \vee B \to AC}$. По можливості спростити її.

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності висловлення F.

Висловлення, зведене до ДДНФ має вигляд

$$F=A^0B^1C^0 \vee A^0B^1C^1 \vee A^1B^0C^0 \vee A^1B^1C^0 = \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}\overline{C} \vee AB\overline{C}.$$

A	B	C	$A \vee B$	AC	$A \vee B \to AC$	F
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Отриману ДДНФ можна спростити до більш простої ДНФ.

$$F = \overline{A}B(\overline{C} \vee C) \vee A\overline{C}(\overline{B} \vee B) = \overline{A}B \cdot 1 \vee A\overline{C} \cdot 1 = \overline{A}B \vee A\overline{C}.$$

Звести до ДНФ такі висловлення.

1. $\overline{AB \vee CA} \to \overline{A \vee C} \wedge (AD \leftrightarrow AB \vee \overline{B});$
2. $XYZ \vee XZ \to (\overline{X \vee Y} \leftrightarrow XY) \wedge YX \vee Z\overline{\overline{X}};$
3. $\overline{B}C \vee (\overline{DB \to DC} \vee B) \wedge DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DB};$
4. $A \vee \overline{BC} \leftrightarrow (AC \vee \overline{B \to C}) \wedge B\overline{C} \vee ABC;$
5. $FB \vee \overline{E\overline{B} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F} \to (E \vee FB);$
6. $\overline{AD \to A} \to \overline{ACD \vee C} \wedge (A \to \overline{ACD \vee \overline{C}});$
7. $\overline{S \vee T \to L} \wedge (ST \leftrightarrow L) \to \overline{S\overline{L} \vee TSL};$
8. $\overline{CB \vee D} \wedge CD \to BC \wedge \overline{(DB \leftrightarrow C)} \vee \overline{DC};$
9. $(S\overline{D}G \vee S \to \overline{DG}) \vee G \to \overline{SD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D};$
10. $FB \vee (\overline{E\overline{B} \to EF} \leftrightarrow \overline{FEB \vee F}) \to (E \vee FB);$
11. $(A \vee \overline{BC} \leftrightarrow AC \vee \overline{BA \to C}) \wedge A\overline{C} \vee ABC;$
12. $X\overline{W} \vee (Z \to XW) \leftrightarrow \overline{ZX \wedge W \to X} \vee Z;$
13. $CA \vee \overline{CAB \to (\overline{B}A \leftrightarrow CB)} \leftrightarrow CA \vee B\overline{A};$
14. $\overline{AC \leftrightarrow D} \vee (CD \to \overline{D \wedge AC})A \leftrightarrow AD \vee \overline{D};$
15. $(\overline{DF \to DC} \vee C)F \vee DBC \leftrightarrow \overline{\overline{C} \vee DB} \to B;$
16. $S \vee \overline{DG}(S \vee \overline{DG}) \to S \to \overline{SD \vee G} \leftrightarrow S\overline{D} \vee S;$
17. $(X\overline{W} \vee Y \to XYW \leftrightarrow \overline{XW \to X}) \wedge Y;$

18. $\overline{AB \to A} \to (\overline{ACD \vee C} \wedge A \to \overline{ABD \vee \overline{C}});$

19. $\overline{ST \vee K \leftrightarrow KL}(ST \leftrightarrow L \to \overline{S\overline{L} \vee TSL}) \wedge \overline{K};$

20. $(\overline{YZ} \vee X\overline{Z} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{YW} \to \overline{WY}) \leftrightarrow Y \vee Z\overline{YW};$

21. $\overline{B \to CA} \to A\overline{D} \wedge (\overline{D \leftrightarrow AB} \vee \overline{B}) \leftrightarrow CB \vee \overline{CD};$

22. $\overline{A\overline{C} \vee B} \to (\overline{CD} \to \overline{\overline{D} \wedge BC}) \leftrightarrow BAD \vee \overline{AD};$

23. $XY\overline{Z} \vee \overline{XZ} \leftrightarrow (\overline{X \vee YW} \to \overline{W}Y) \wedge \overline{YX \vee Z\overline{W}};$

24. $F \vee (A \wedge \overline{DA} \to \overline{A \vee DF}) \leftrightarrow AF \vee A \to \overline{DF};$

25. $AB \vee \overline{E\overline{D} \to EA} \leftrightarrow \overline{AEB \vee A} \to (E \vee AB);$

26. $S \wedge \overline{DG \vee (S \to TS \leftrightarrow DG)} \vee T \wedge \overline{STD \vee G} \to S\overline{D};$

27. $\overline{SB \to SC} \to \overline{SCD \vee C} \wedge (S \to \overline{SCD \vee \overline{C}});$

28. $YZ \to WX \vee (\overline{WX \leftrightarrow Z} \vee XZ \to YW) \leftrightarrow YX \vee WY;$

29. $(A \vee D \vee C)ABD \leftrightarrow \overline{DC \to \overline{AC \vee B}} \to ABCD;$

30. $S \vee D \to \overline{FE \leftrightarrow D \to \overline{S}} \wedge (ES \vee DF \leftrightarrow ESF) \leftrightarrow \overline{SD}.$

Побудова ДДНФ для висловлень, заданих таблицями істинності

Звести дані висловлення до ДДНФ і по можливості спростити.

1.

X	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

5.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

6.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

7.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

8.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

9.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

10.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

11.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

12.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

13.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

14.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

15.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

16.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

17.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

18.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

19.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

20.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

21.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

22.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

23.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

24.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

25.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

26.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

27.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

28.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

29.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

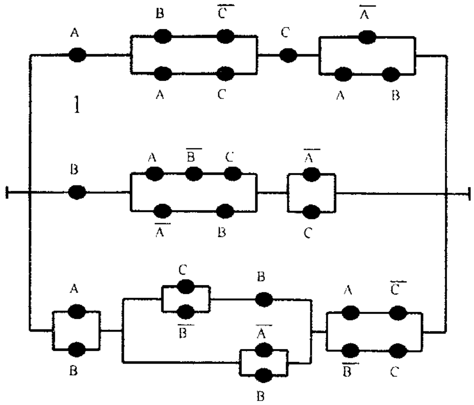
30.

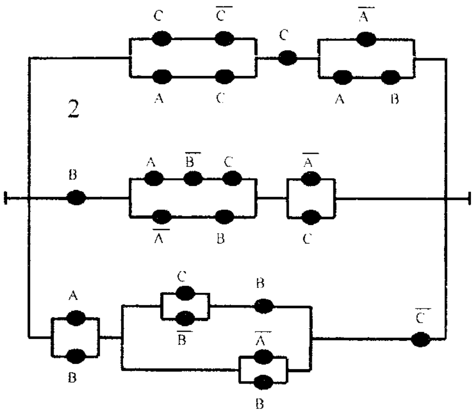
x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

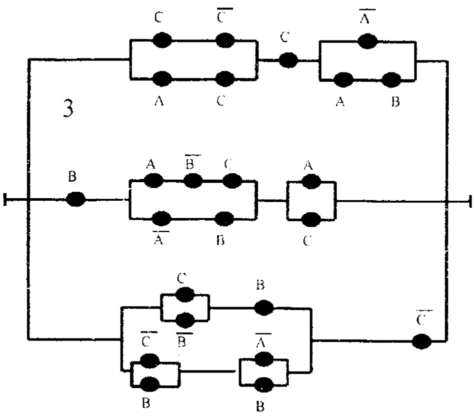
Застосування алгебри висловлень для дослідження мереж

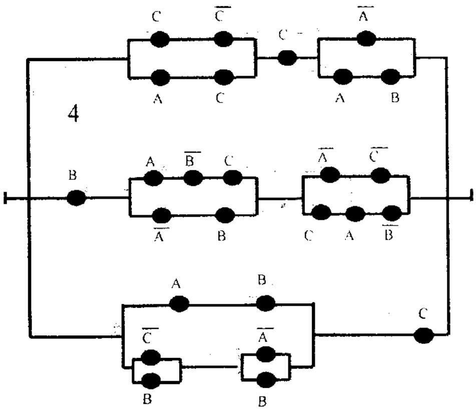
Спростити такі послідовно-паралельні двополюсники.

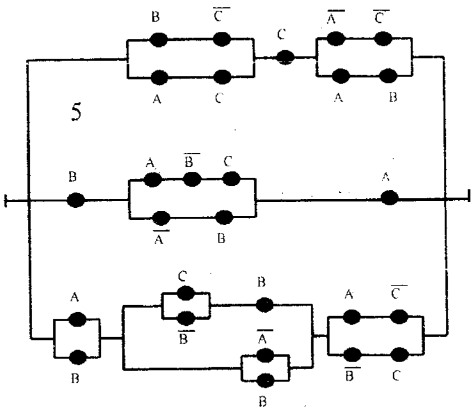
1.

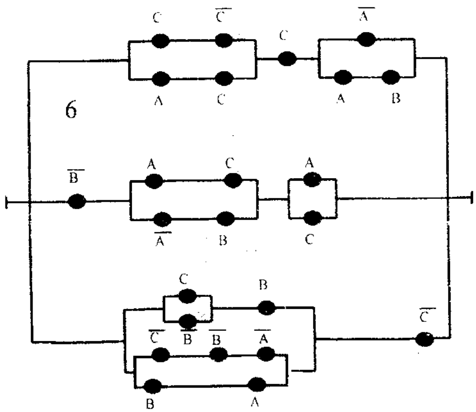




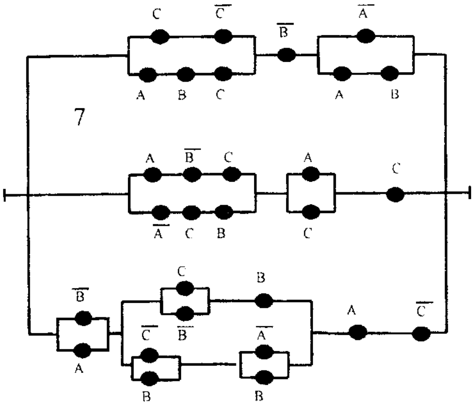



4

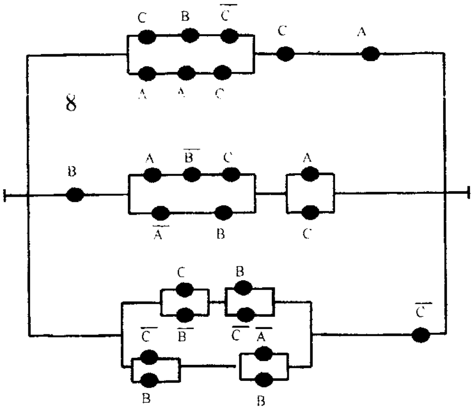

5


6

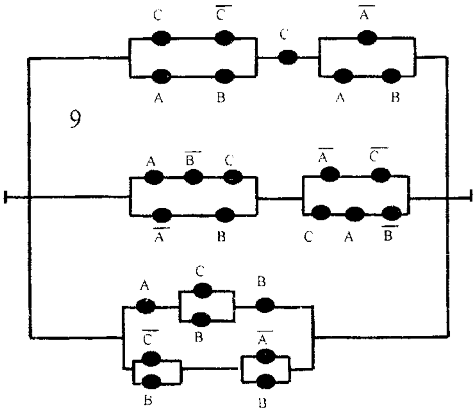
7

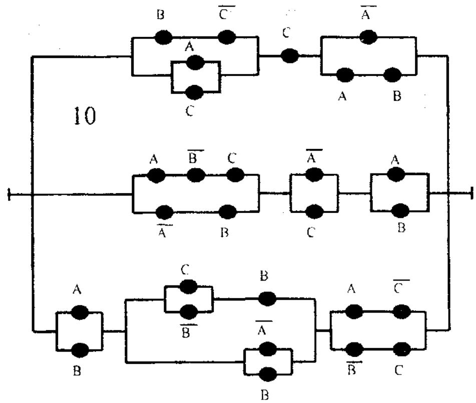


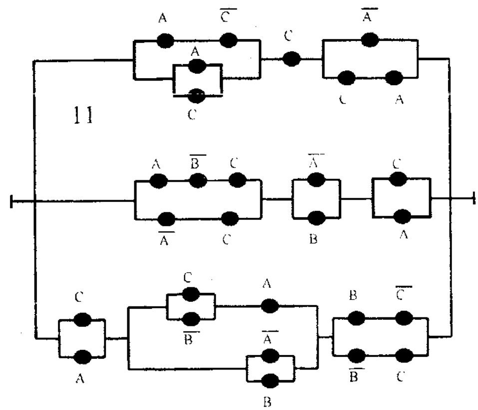
8

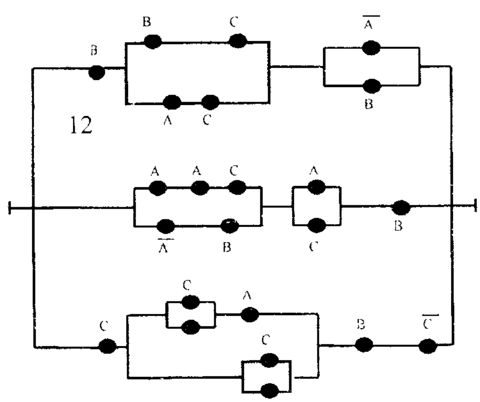


9

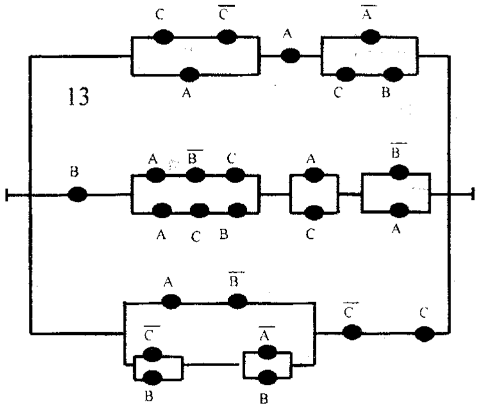



10

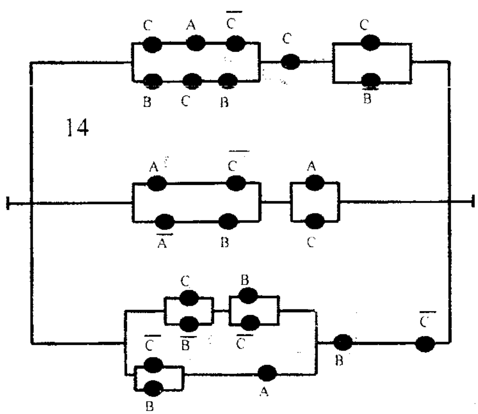

11


12

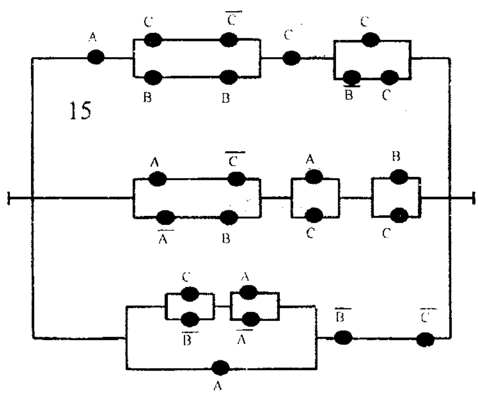
13



14



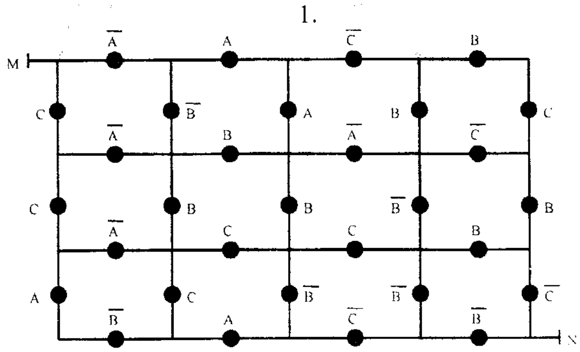
15



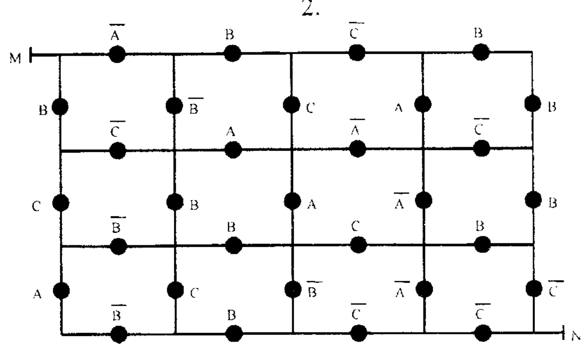
Дослідження довільних двополюсників

Спростити такі довільні двополюсники.

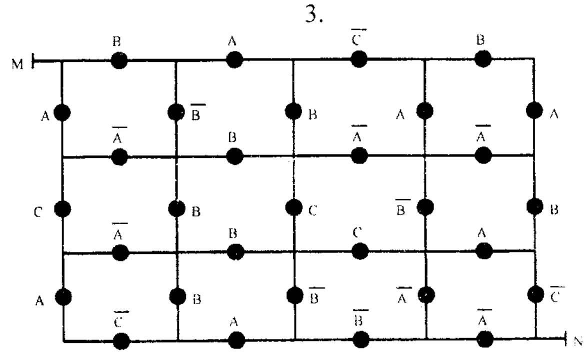
1.



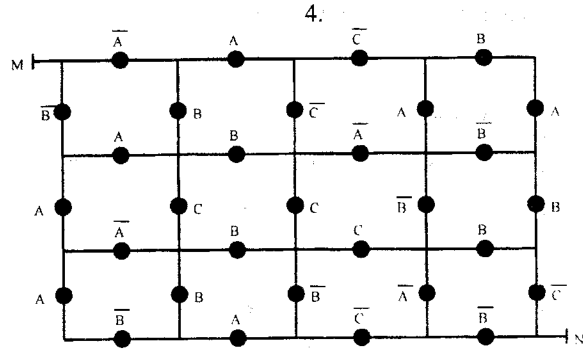
2.



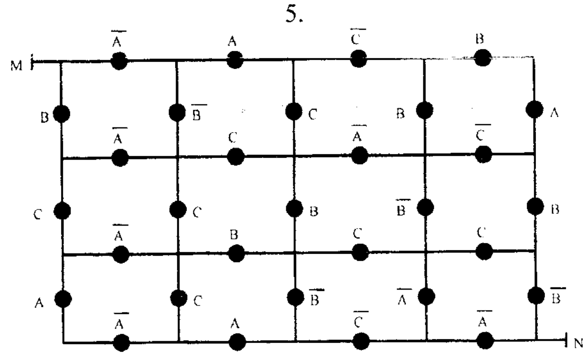
3.



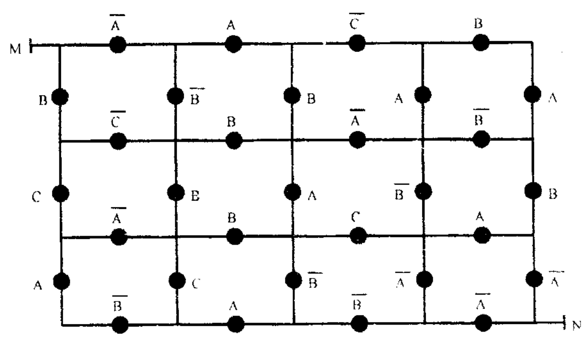
4.



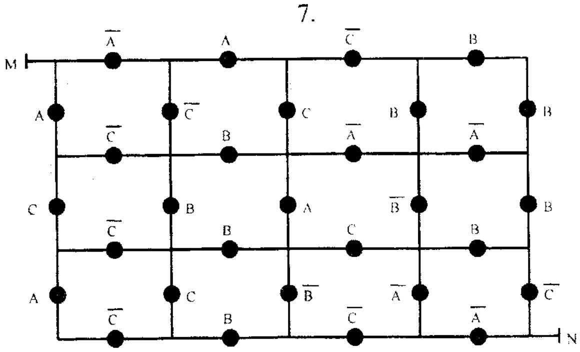
5.



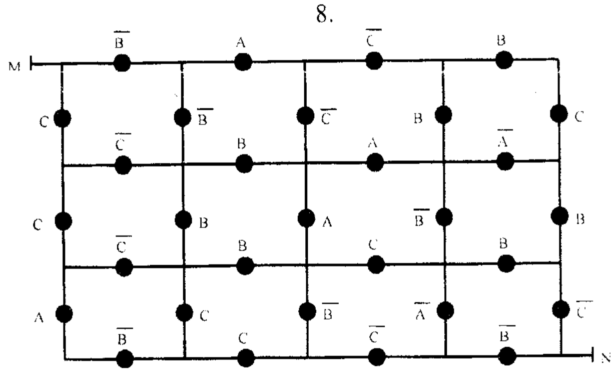
6.



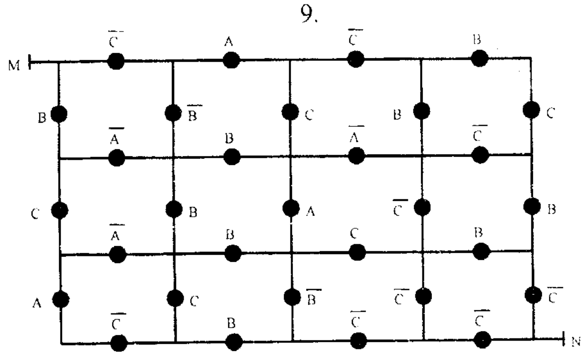
7.


M
N
$\bar{A}$ A $\bar{C}$ B
A $\bar{C}$ C B B
$\bar{C}$ B $\bar{A}$ $\bar{A}$
C B A $\bar{B}$ B
$\bar{C}$ B C B
A C $\bar{B}$ $\bar{A}$ $\bar{C}$
$\bar{C}$ B $\bar{C}$ $\bar{A}$

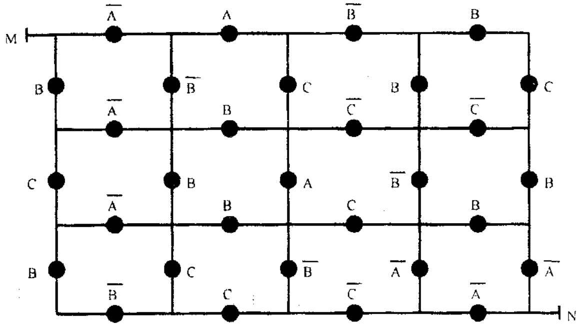
8.


M
N
$\bar{B}$ A $\bar{C}$ B
C $\bar{B}$ $\bar{C}$ B C
$\bar{C}$ B A $\bar{A}$
C B A $\bar{B}$ B
$\bar{C}$ B C B
A C $\bar{B}$ $\bar{A}$ $\bar{C}$
$\bar{B}$ C $\bar{C}$ $\bar{B}$

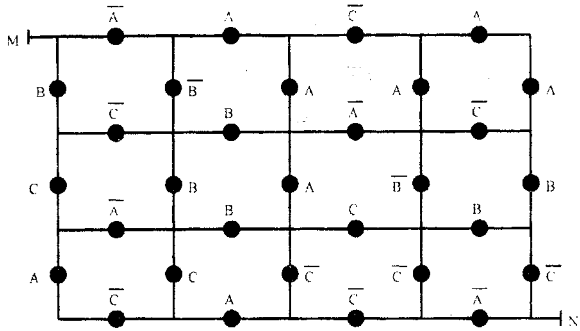
9.


M
N
$\bar{C}$ A $\bar{C}$ B
B $\bar{B}$ C B C
$\bar{A}$ B $\bar{A}$ $\bar{C}$
C B A $\bar{C}$ B
$\bar{A}$ B C B
A C $\bar{B}$ $\bar{C}$ $\bar{C}$
$\bar{C}$ B $\bar{C}$ $\bar{C}$

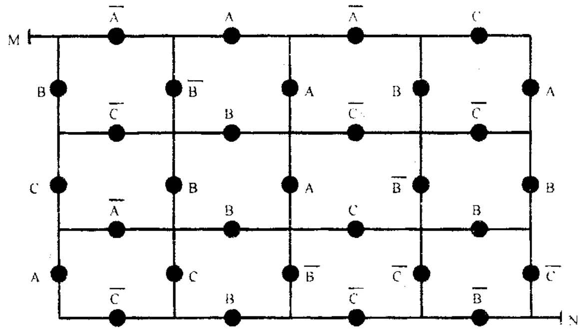
10.



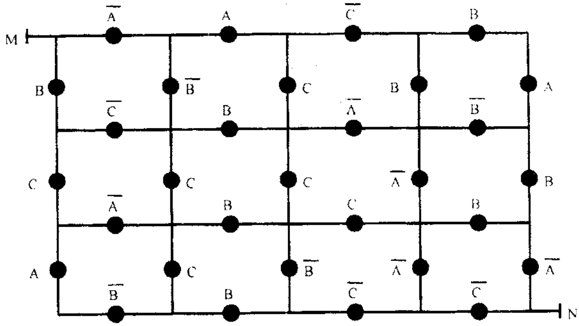
11.



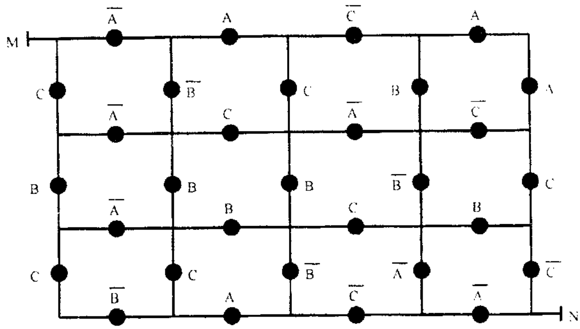
12.



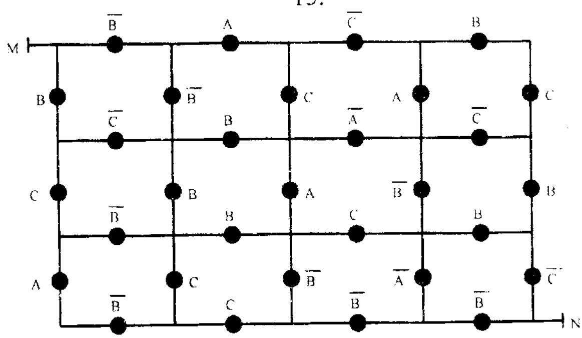
13.



14.



15.



Задачі на голосування

Приклад. Голосують три чоловіки A, B, C. Пропозиція приймається більшістю голосів, причому B – голова, що володіє правом вето, тобто Якщо він голосує «проти», то пропозиція не приймається.

Розв'язання. Усі можливі варіанти голосування цих людей зведемо в наступну таблицю, у якій той факт, що відповідна людина (A, B або C) проголосувала «проти», будемо позначати нулем у відповідній клітинці й одиницею, – якщо «за».

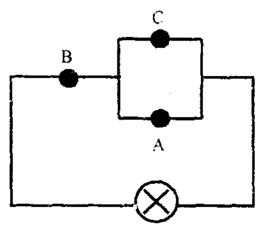
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

У стовпці F будемо ставити "0" у рядках, що відповідають варіантам голосування, при яких пропозиція не приймається і "1" у рядках, що відповідають варіантам голосування, при яких пропозиція приймається. Тому що B – голова, що володіє правом вето, то якщо в деякому рядку B=0, то і F=0 у цьому рядку. Якщо в деякому рядку B=1, тобто голова – "за", то і F=1 у цьому рядку в тому і тільки в тому випадку, коли хоча б ще одна людина проголосувала "за", тобто A=1 або (і) C=1.

Дану таблицю можна розглядати як таблицю істинності деякого висловлення F, ДДНФ якого легко по цій таблиці побудувати: $F= A^0B^1C^1 \vee A^1B^1C^0 \vee A^1B^1C^1 = \overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee ABC$. Отриману ДДНФ можна спростити:

$$F = \overline{A}BC \vee AB(\overline{C} \vee C) = \overline{A}BC \vee AB = B(\overline{A}C \vee A) = B(C \vee A).$$

Дане висловлення описує схему, у якій спалахує лампочка, якщо пропозиція прийнята:



Скласти схеми результатів голосування для таких задач.

1. Голосують три чоловіки A, B, C. Пропозиція приймається більшістю голосів.

2. Голосують три чоловіки A, B, C. Пропозиція приймається більшістю голосів, причому A – голова, що має право вето, тобто якщо він голосує "проти", то пропозиція не приймається.

3. Голосують три чоловіки A, B, C. Пропозиція приймається більшістю голосів, причому C – голова, що має право вето, тобто якщо він голосує "проти", то пропозиція не приймається.

4. Голосують три чоловіки A, B, C. Пропозиція приймається більшістю голосів, причому виконуються такі умови:

а) якщо C голосує "за", то B голосує "проти";

б) C голосує "проти" тоді і тільки тоді, коли B голосує "за";

в) якщо C голосує "за" чи B голосує "за", то A голосує "проти";

г) A і B – коаліція, тобто голосують однаково, а C їм суперечить;

д) C підозрює A і B у коаліції, тобто якщо A і B голосують однаково, то C їм суперечить;

е) якщо C голосує "за", то A голосує "за" тоді і тільки тоді, коли B голосує "проти";

ж) якщо B голосує "за", то C голосує "проти" тоді і тільки тоді, коли A голосує "проти";

з) A чи B голосують "проти" тоді і тільки тоді, коли C голосує "за";

и) C і A голосують "за" тоді і тільки тоді, коли B голосує "проти";

к) якщо A голосує "за" чи B голосує "проти", то C голосує "за".

5. Голосують три чоловіки A, B, C. Пропозиція приймається більшістю голосів, причому A має право вето. Крім того, виконуються такі умови:

а) якщо B голосує "за", то C голосує "проти";

б) B голосує "проти" тоді і тільки тоді, коли C голосує "за";

в) якщо C голосує "за" чи A голосує "за", то B голосує "проти";

г) A і C – коаліція, тобто голосують однаково, а B їм суперечить;

д) A підозрює C і B у коаліції, тобто якщо C і B голосують однаково, то A їм суперечить;

е) якщо A голосує "за", то C голосує "за" тоді і тільки тоді, коли B голосує "проти";

ж) якщо C голосує "за", то A голосує "проти" тоді і тільки тоді, коли B голосує "проти";

з) B чи C голосують "проти" тоді і тільки тоді, коли A голосує "за";

и) C і B голосують "за" тоді і тільки тоді, коли A голосує "проти";

к) якщо B голосує "за" чи C голосує "проти", то A голосує "за".

6. Голосують чотири чоловіки A, B, C, D. Пропозиція приймається більшістю голосів. Якщо голоси розділилися порівну, то пропозиція приймається, якщо A голосує "за".

7. Голосують чотири чоловіки A, B, C, D. Пропозиція приймається більшістю голосів. Якщо голоси розділилися порівну, то пропозиція приймається, якщо B голосує "за".

8. Голосують чотири чоловіки A, B, C, D. Пропозиція приймається більшістю голосів. Якщо голоси розділилися порівну, то пропозиція приймається, якщо C голосує "за".

9. Голосують чотири чоловіки A, B, C, D. Пропозиція приймається більшістю голосів. Якщо голоси розділилися порівну, то пропозиція приймається, якщо D голосує "за".

10. Голосують чотири чоловіки A, B, C, D. A має право вето. Пропозиція приймається, якщо за нього проголосувало не менше половини.

11. Голосують чотири чоловіки A, B, C, D. Пропозиція приймається більшістю голосів. Якщо голоси розділилися порівну, то пропозиція приймається, якщо A голосує "за", причому виконуються такі умови:

а) якщо B і C голосують "за", то A і D голосують однаково;
б) якщо A голосує "за", то B чи C голосує "за" тоді і тільки тоді, коли D голосує "проти";
в) якщо C голосує "за", то A чи B голосує "за";
г) якщо B голосує "проти", то A і D голосують "за";
д) якщо B і C один одному суперечать, то C і D голосують однаково;
е) якщо A голосує "за" чи C голосує "проти", то B голосує "за" тоді і тільки тоді, коли D голосує "за";
ж) якщо A голосує "за", то B голосує "проти", якщо A голосує "про ти", то B – "за", якщо B голосує "за", то C – "проти", якщо C голосує "проти", то D – "за";
з) якщо хтось голосує "за", то інші голосують "проти";
і) виконується схема "попарного протиріччя"; тобто якщо двоє про голосували "за", то інші двоє – "проти;
к) виконується схема "кругової поруки", тобто якщо A голосує "за", то B – "за", якщо B голосує "за", то C – "за", якщо C голосує "за", то D – "за", якщо D голосує "за", то A – "за".

12. Голосують чотири чоловіки A, B, C, D. A – голова; якщо він голосує "проти", то рішення не приймається, якщо голоси розділилися нарівно, то рішення приймається, коли A голосує "за". В всіх інших випадках рішення приймається більшістю голосів, причому виконуються такі умови:

а) якщо A і C голосують "за", то B і D голосують однаково;
б) якщо C голосує "за", то A чи D голосують "за" тоді і тільки тоді, коли B голосує "проти";
в) якщо D голосує "за", то A чи C голосують "за";
г) якщо C голосує "проти", то B і D голосують "за";
д) якщо A і C один одному суперечать, то A і D голосують однаково.

3 ТЕОРІЯ МНОЖИН

3.1 Основні визначення, термінологія, поняття множини

Одним з фундаментальних понять математики, що визначається, є поняття *множини*. Можна сказати, що множина – це будь-яка сукупність визначених об'єктів (елементів). Якщо x входить в A, то ми говоримо, що x є *елементом* множини A і позначаємо це як $x \in A$. Інакше говоримо, що x не є елементом множини A і пишемо $x \notin A$ або $\overline{x \in A}$. Останнє визначення підкреслює той факт, що висловлювання "$\overline{x \in A}$" є запереченням висловлювання "$x \in A$".

Приклади:

M_1 - множина всіх натуральних чисел N;

M_2 - множина всіх натуральних чисел ≤ 100;

M_3 - множина всіх розв'язків рівняння $\sin x=0$;

M_4 - множина всіх чисел виду $\pi /2 \pm k\pi,\ k \in N$;

M_5 - множина всіх дійсних чисел (R);

M_6 - футбольна команда "Арарат";

M_7 - множина усіх футбольних команд вищої ліги.

Способи задання множин. Щоб задати множину треба визначити які елементи їй належать. Це можна зробити різними способами:

- *перерахуванням* (списком елементів) - $A = \{a, b, c, \dots , d\}$;
- *процедурою, що породжує*;
- *характеристичним предикатом* (*описом* властивостей елементів).

Списком можна задавати лише скінченні множини $A = \{a,b,c,d\}$

Процедура, що породжує, описує спосіб визначення елементів множини із вже отриманих елементів або з інших об'єктів.

Приклади.

1. $M4$ - множина всіх чисел типу $\pi /2 \pm k\pi$.

2. Для множини M_2^n = 1,2,4,8,16 … процедура що породжує, визначається за індуктивним (рекурсивним) правилом:

а) $1 \in M_2^n$;

в) якщо $m \in M_2^n$, то $2m \in M_2^n$.

3. Множина M_Π. Нехай є процедура обчислення цифр розкладання числа π у нескінченний десятковий дріб: $\pi = 3{,}1415926539\dots$. Обчислюючи цей дріб утворюємо послідовність тризначних цифр розкладу.

Широко розповсюдженою процедурою, що породжує, є утворення множини з інших множин за допомогою операцій над множинами, що розглядаються нижче.

Задання множин описанням властивостей її елементів, є одним із найвживаніших. Такий спосіб застосовується, наприклад, під час задання множин M_2 - M_5. Коли властивості елементів можуть бути описані деяким виразом $P(x)$, що означає "x має властивість $P(x)$", множина задається за виразом $M=\{x \mid P(x)\}$, який читається як "M – це множина x, що характеризується властивістю P".

Приклади.

1. $B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$. Дана множина містить два числа: – 1 і 2.

2. $C=\{x \mid x - \textit{натуральне}\}$. C є множина всіх натуральних чисел.

3. $M_2^n=\{x \mid x=2k\},\ k \in N_0$.

Визначення. Множина A називається *підмножиною* B, якщо для будь-якого x ($x \in A \to x \in B$).

Визначення. $A \subseteq B$ (нестроге включення). Іншими словами, символ "$A \subseteq B$" є скорочення для висловлювання $(x \in A \to x \in B)$.

Теорема. Для будь-яких множин A, B і C вірним є таке:

$$\text{а) } A \subseteq A\ ;\ \text{б) } A \subseteq B \text{ і } B \subseteq C \to A \subseteq C.$$

Доведення. Для доведення спочатку треба переконатися в істинності висловлювання $(x \in A \to x \in A)$, однак воно очевидне, оскільки є імплікацією, де посилка і висновок збігаються. Потім треба переконатися в істинності висловлювання

$$"(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in C)\ \to (x \in A \to x \in C)".$$

Позначимо: "$x \in A$" через U, "$x \in B$" через V, "$x \in C$" через Z. Тоді треба переконатися в істинності висловлювання

$$F=(U \to V) \wedge (V \to Z) \to (U \to Z).$$

Спростимо це висловлювання

$$F=(U \to V) \wedge (V \to Z) \to (U \to Z) = (\overline{U} \cdot \overline{V} \vee \overline{U} \cdot \overline{Z} \vee VZ) \to (\overline{U} \vee \overline{Z}) =$$
$$= \overline{\overline{U}\,\overline{V} \vee \overline{U}Z \vee VZ} \vee \overline{U} \vee Z = (U \vee V)(U \vee \overline{Z})(\overline{V} \vee \overline{Z}) \vee \overline{U} \vee Z =$$
$$= (U \vee VU \vee U\overline{Z} \vee V\overline{Z})(\overline{V} \vee \overline{Z}) \vee \overline{U} \vee Z = (U \vee V\overline{Z})(\overline{V} \vee \overline{Z}) \vee \overline{U} \vee Z =$$
$$= U\overline{V} \vee U\overline{Z} \vee V\overline{Z} \vee \overline{U} \vee Z = (U\overline{V} \vee \overline{U}) \vee (U\overline{Z} \vee Z) \vee V\overline{Z} =$$
$$= \overline{V} \vee \overline{U} \vee U \vee Z \vee V\overline{Z} = 1.$$

У загальному випадку теорема інтуїтивно очевидна, однак якщо ми, крім очевидності, прагнемо ще і до строгості, то необхідно здійснювати непрості логічні обчислення. Ця теорема є непоганою вправою з алгебри висловлювань.

Визначення. Множини A і B називаються *рівними*, якщо вони складаються з тих самих елементів ($a=в$). Іншими словами позначення $a= в$ є скороченням для висловлювання

$$(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Якщо множина A є скінченною і складається з елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, то пишемо

$$A=\{A_1, A_2, ..., A_N\}.$$

Іноді подібне визначення поширюється і на деякі нескінченні множини. Так,

$$N=\{1,2,3,..., N,...\},$$
$$Z=\{..., -n,..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}.$$

Питання. Чи можна подібним чином записати множину Q раціональних чисел?

Повернімося до визначення рівності множин.

Приклади.

1. $\{a, b, c, d\} = \{c, d, a, b\}$.
2. $\{a, b, c, d\} \neq \{a, c, b\}$.
3. $\{x|x^2-3x+2=0\} = \{1,2\}$.

Теорема. Для будь-яких множин A і B $A=B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Доведення. Доведення цього факту основане на тому, що еквівалентність $X \leftrightarrow Y$ рівносильна кон'юнкції двох імплікацій $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow X)$. Таким чином, для того, щоб довести рівність множин A і B, треба довести два включення: $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, що часто використовується для доведення теоретико-множинних рівностей.

Визначення. $A \subset B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $A \neq B$.

Теорема. Для будь-яких множин A, B, C, якщо $A \subseteq B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$. Довести самостійно.

Визначення. Множина називається *порожньою*, якщо вона не містить жодного елемента, тобто x не належить цій множині (для кожного x). Позначення: $\varnothing$.

Поняття "точно задати множину" - дуже важливе поняття в математиці. Мова множин - це універсальна мова математики. Будь-яке математичне твердження можна сформулювати як твердження про деяке співвідношення між множинами: рівності, не порожності, не належності і т.п. Тому аналіз способів задання множин пов'язаний з аналізом строгості математичних тверджень взагалі, тобто з обговоренням основ математики. У чому труднощі задачі задання множин? Одна із основних труднощів полягає в тому, що навіть із множин, точний опис яких не викликає сумнівів, за допомогою цілком законних способів можна сконструювати описи множин, що призводять до протиріч - "парадоксів теорії множин". Це пояснюється тим, що поняття елемента і множини досить умовні. Той самий об'єкт в одній ситуації може виступати як елемент, а в іншій – як множина. Наприклад, "множина всіх множин". Вона повинна містити всі мислимі множини. Проте вона сама утримується в множині своїх підмножин як елемент. В зв'язку з цим виникає така задача. Чи існує об'єкт X, такий, що $X \in X$? Цікавою є також і множина $X = \{\varnothing\}$, оскільки $\varnothing \in X$ і $\varnothing \subseteq X$ одночасно.

3.2 Операції об'єднання і перерізу множин

Визначення. *Об'єднанням* двох множин A і B називається множина

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Іншими словами, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (теоретико-множинній операції об'єднання відповідає логічна операція *"або"*).

Приклад. Нехай $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, тоді

$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$.

Теорема. Нехай A, B і C – довільні множини. Тоді:

а) $A \cup A = A$ – *ідемпотентність* об'єднання;

б) $A \cup B = B \cup A$ – *комутативність* об'єднання;

в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - *асоціативність* об'єднання;

г) $A \cup \varnothing = A$.

Доведення.

а) Візьмемо

$x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A \leftrightarrow x \in A$.

Під час останнього переходу ми скористалися ідемпотентністю диз'юнкції. Таким чином, ідемпотентність об'єднання в теорії множин є наслідком ідемпотентності диз'юнкції в алгебрі висловлювань.

б) Візьмемо

$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in A \cup x \in B \leftrightarrow x \in B \cup A$.

Ми довели, що $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$. Отже, $A \cup B = B \cup A$.

в) Візьмемо

$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

(асоціативність диз'юнкції).

Ми довели, що $x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

Отже, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

г) Візьмемо

$x \in A \cup \varnothing \leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \leftrightarrow x \in A$,

оскільки висловлювання $x \in \varnothing$ тотожно хибне. Отже, $A \cup \varnothing = A$.

Теорема. Нехай A і B – довільні множини, тоді:

а) $A \subseteq A \cup B$;

б) $A = A \cup B \leftrightarrow B \subseteq A$.

Доведення.

а) Візьмемо

$x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$

(властивість імплікації) $\rightarrow x \in A \cup B$. Отже, $A \subseteq A \cup B$.

б) Нехай $A = A \cup B$. Доведемо, що $B \subseteq A$. Візьмемо

$x \in B \rightarrow x \in A \cup B \rightarrow x \in A$.

Отже, ми довели, що $x \in B \rightarrow x \in A$, тобто $B \subseteq A$.

Тепер нехай $B \subseteq A$. Щоб довести рівність $A = A \cup B$, треба довести два включення: $A \subseteq A \cup B$ і $A \cup B \subseteq A$.

Першим включенням є пункт а).

Доведемо друге включення. Візьмемо

$x \in A \cup B \rightarrow x \in A \vee x \in B \rightarrow x \in A \vee x \in A$,

оскільки $B \subseteq A$, $\rightarrow x \in A$. Отже, $A \cup B \subseteq A$. Теорема доведена.

Визначення. *Перерізом* множин A і B називається множина

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Приклад. Нехай $A=\{1,2,4,7,8,9\}$, а $B=\{1,3,5,7,8,10\}$.

Тоді $A \cap B = \{1,7,8\}$.

Теорема. Нехай A, B, C – довільні множини, тоді:

а) $A \cap A = A$ - *ідемпотентність* перерізу;

б) $A \cap B = B \cap A$ - *комутативність* перерізу;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$- *асоціативність* перерізу;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Доведення.

а) Візьмемо

$x \in A \cap A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \leftrightarrow x \in A$.

Отже, $A \cap A = A$.

б) Візьмемо

$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A$.

Отже, $A \cap B = B \cap A$.

в) Візьмемо

$x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C \leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$.

Отже, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

г) $x \in A \cap \varnothing \leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing \leftrightarrow x \in \varnothing$, оскільки $x \in \varnothing$ – тотожно хибне висловлювання.

Теорема. Нехай A, B – довільні множини. Тоді:

а) $A \cap B \subseteq A$;

б) $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$.

Доведення.

а) Візьмемо

$x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A$,

тобто $A \cap B \subseteq A$.

б) Нехай $A \cap B \subseteq A$.

Візьмемо

$x \in A \rightarrow x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in B$,

тобто $A \subseteq B$. Тепер нехай $A \subseteq B$. Включення $A \cap B \subseteq A$ вже доведене.

Доведемо включення в іншу сторону.

Візьмемо

$x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B$,

оскільки $A \subseteq B$, $\rightarrow x \in A \cap B$.

Отже, $A \subseteq A \cap B$, тому $A = A \cap B$.

Теорема (дистрибутивні закони). Нехай A, B, C – довільні множини, тоді:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивність перерізу щодо об'єднання;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивність об'єднання щодо перерізу.

Доведення.

а) Візьмемо

$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

б) Пропонується довести самостійно.

3.3 Різниця множин, доповнення

Визначення. *Різницею* множин називається множина

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Приклад. Нехай $A=\{1,3,4,7,8,9,10\}$, $B=\{2,3,4,5,6,7\}$. $A\setminus B=\{1,8,9,10\}$, $B\setminus A=\{2,5,6\}$.

Теорема. Нехай A, B, C – довільні множини, тоді:

а) $A \setminus A = \varnothing$;

б) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$;

в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Доведення.

а) Візьмемо $x \in A \setminus A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$ – тотожно хибне висловлювання. Воно рівносильно іншому тотожно хибному висловленню $x \in \varnothing$, а тому $A \setminus A = \varnothing$.

б) Нехай $A \setminus B = \varnothing$. Візьмемо $x \in A$. Оскільки $A \setminus B = \varnothing$, то $x \notin A \setminus B$ і виходить, що $x \in B$, тобто $A \subseteq B$.

Тепер нехай $A \subseteq B$.

Візьмемо $x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \rightarrow x \in B \wedge x \notin B \rightarrow x \in \varnothing$, тобто $A \setminus B = \varnothing$.

в) Візьмемо

$x \in (A \cup B) \setminus C \leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

г) Візьмемо

$x \in A \setminus (B \bigcup C) \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cup C} \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \vee x \in C} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge x \notin C \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$.

Теорема (закони Моргана).

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus B)$;

б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$.

Доведення.

а) Візьмемо

$x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

б) Візьмемо

$x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cap C} \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \wedge x \in C} \leftrightarrow$

$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Множину U назвемо *"універсальною"*, якщо її елементами є всі множини які є його підмножинами. Поняття абсолютної універсальної множини, тобто множини, для якої істинне висловлювання *"для будь-якого x* $x \in U$ ", незважаючи на зовнішню його простоту, призводить до так званих теоретико-множинних парадоксів. Тому поняття *"універсальної множини"* у нас буде залежати від кола задач, що ми розглядаємо. Досить часто під універсальною множиною розуміють множину R – множину дійсних чисел або множину комплексних чисел. Можливі й інші приклади. Завжди в контексті необхідно обумовити, що ми розуміємо під універсальною множиною U.

Визначення. Нехай U – універсальна множина і $A \subseteq U$. *Доповненням* A в U або просто доповненням A називається множина $\overline{A} = U \setminus A = \{x | x \in A\}$.

Приклад. Якщо U – множина дійсних чисел і A –множина раціональних чисел, то $\overline{A}$ – множина ірраціональних чисел.

Теорема.

а) $\overline{\varnothing} = U$;

б) $\overline{U} = \varnothing$;

в) $\overline{\overline{A}} = A$.

Довести самостійно.

Теорема (закони Моргана для доповнень).

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доведення.

а) Візьмемо

$x \in \overline{A \cup B} \leftrightarrow x \notin A \cup B \leftrightarrow \overline{x \notin A \cup B} \leftrightarrow \overline{x \notin A \vee x \notin B} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \leftrightarrow x \notin \overline{A} \wedge x \notin \overline{B} \leftrightarrow x \notin \overline{A} \cap \overline{B}$.

Необхідно уважно стежити за тим, яка риска означає заперечення, а яка – теоретико-множинне доповнення.

б) Візьмемо

$x \in \overline{A \cap B} \leftrightarrow \overline{x \in A \cap B} \leftrightarrow \overline{x \in A \wedge x \in B} \leftrightarrow \overline{x \in A} \vee \overline{x \in B} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Отже, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3.4 Декартові добутки

Під *упорядкованою парою* $(a;\ b)$ розуміють двоелементну множину, що складається з елементів a і b, в якій зафіксований порядок розташування елементів. Відзначимо дві характерні властивості упорядкованих пар:

1) $(a;b) \neq (b;a)$, якщо $a \neq b$;

2) $(a;b) = (x;y) \leftrightarrow a = x \wedge b = y$.

Можна дати і строге визначення упорядкованої пари, але в цьому випадку, здобуваючи строгість, воно втрачає наочність.

Визначення. *Упорядкованою парою* називається множина $(a;\ b) = \{\{a\};\ \{a, b\}\}$.

Теорема. Якщо $(A;\ B)=(X;\ Y)$, то $A=X$, $B=Y$.

Доведення.

З $(a;\ b)=(x;\ y)$ випливає $\{\{a\};\{a;\ b\}\}=\{\{x\};\{x;\ y\}\}$.

Рівність двох двоелементних множин можлива лише при рівності складових їхніх елементів. Тут можливі два випадки:

1) $\{a\}=\{x\}$, $\{a;\ b\}=\{x;\ y\}$;

2) $\{a\}=\{x, y\}$, $\{a;\ b\}=\{x\}$.

В першому випадку з рівності $\{a\}=\{x\}$ випливає $a=x$, а з другої рівності $\{a;b\} = \{x;y\}$ і того, що $a=x$, випливає $b=y$, що і треба було довести.

В другому випадку з рівності $\{a\}=\{x, y\}$ випливає $a=x=y$, а з рівності $\{a;\ b\}=\{x\}$ випливає $x=a=b$. Зокрема, $a=x$ і $b=y$.

Теорема доведена.

Індуктивно визначимо упорядкований набір довжини n.

Визначення.

1) $(a;\ b)=\{\{a\};\{a;\ b\}\}$;

2) $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})=((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1})$.

Упорядковані набори довжини n називаються також *упорядкованими n-ками*, *векторами*, *кортежами*.

Теорема.

$(a_1;\ldots;a_n) = (b_1;\ldots;b_n) \rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Доведення.

Індукція по n. Для $n=2$ це є теорема 2. Припустимо, що твердження вірне і для $n=k$, тобто припустимо, що з рівності $(a_1;a_2;\ldots;a_k) = (b_1;b_2;\ldots;b_k)$ випливає $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k$.

Доведемо теорему для $n=k+1$.

Нехай $(a_1;a_2;...;a_k;a_{k+1})=(b_1;b_2;...;b_k;b_{k+1})$. Це можна переписати за визначенням таким чином: $((a_1;a_2;...;a_k);a_{k+1})=((b_1;b_2;...;b_k);b_{k+1})$.

З рівності пар випливає $(a_1;a_2;...;a_k)=(b_1;b_2;...;b_k)$ і $a_{k+1}=b_{k+1}$. Тоді, за індуктивним припущенням маємо

$$a_1=b_1, a_2=b_2, ..., a_k=b_k, a_{k+1}=b_{k+1}.$$

Визначення. *Декартовим добутком* множин називається множина

$$A\times B=\{(a;b)|a\in A, b\in B\}.$$

Приклад.

Нехай $A=\{1;2\}$, $B=\{a, b, c\}$, тоді

$A\times B=\{(1;a);(1;b);(1;c);(2;a);(2;b);(2;c)\}$,

а $B\times A=\{(a;1);(b;1);(c;1);(a;2);(b;2);(c;2)\}$.

Очевидно, що взагалі кажучи, $B\times A\neq B\times A$.

Вправи.

1) Довести, що $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$.

2) Довести, що $A\times B=B\times A\to A=B\vee A=\varnothing\vee B= =\varnothing$.

Визначення.

а) $A_1\times A_2\times ...\times A_n=\{(a_1;a_2;...;a_n)|a_1\in A_1, a_2\in A_2, ..., a_n\in A_n\}$ - *декартовий добуток n* множин;

б) $A^n=A\times A\times ...\times A$ - (n *співмножників*) - *n-а декартова степінь* множини A;

в) $A^1=A$.

Встановимо зв'язок між декартовими добутками і раніше введеними теоретико-множинними операціями.

Теорема. Нехай A, B, C – довільні множини, тоді

а) $A\times(A\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$;

б) $A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$;

в) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

Доведення.

а) Візьмемо

$$(x,y)\in A\times(B\cup C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\leftrightarrow(x;y)\in A\times B\vee(x;y)\in A\times C\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(x;y)\in(A\times B)\cup(A\times C).$$

Отже,

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

б) Візьмемо
$(x;y)\in A\times(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cap C\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\in C\leftrightarrow$
$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)\leftrightarrow(x;y)\in A\times B\wedge(x;y)\in A\times C\leftrightarrow$
$\leftrightarrow(x;y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$.

Отже,
$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

в) Візьмемо
$(x;y)\in A\times(B\setminus C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\setminus C\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\leftrightarrow$
$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C)\rightarrow(x;y)\in A\times B\wedge(x;y)\notin A\times C\leftrightarrow$
$\leftrightarrow(x;y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$.

Оскільки в ланцюгу перетворень не скрізь розміщені еквівалентності, а в одному місці розташована усього 1 імплікація, ми довели включення $A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)$. Необхідно довести включення в іншу сторону.

Візьмемо
$(x;y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)\leftrightarrow(x;y)\in A\times B\wedge(x;y)\notin A\times C\leftrightarrow$
$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge\overline{x\in A\wedge y\in C}\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge(x\notin A\wedge y\notin C)\leftrightarrow$
$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge x\notin A\vee x\in A\vee y\in B\wedge y\notin C\leftrightarrow$
$\leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\setminus C\leftrightarrow(x;y)\in A\times(B\setminus C)$.

Отже,
$(A\times B)\setminus(A\times C)=A\times(B\setminus C)$.

Теорема. Якщо множина A складається з m елементів, а B – з n елементів, тоді $A\times B$ складається з $m\times n$ елементів.

Доведення.

Доводимо за індукцією по числу *n-елементів* множини B.

Для $n=1$ маємо $B=\{b_0\}$, тому $A\times B=\{(a;b_0)|a\in A\}$, тобто $A\times B$ має $m=m\times 1$ елементів.

Припустимо, що теорема вірна для $n=k$. Нехай тепер B складається з $n+1$ елементів, тобто

$$B=\{b_1;b_2;...;b_k;b_{k+1};\}=B'\cup\{b_{k+1}\},$$

де

$$B'=\{b_1;b_2;...;b_k\}.$$

Тоді $A\times B=A\times(B'\cup\{b_{k+1}\})=A\times B'\cup A\times\{b_{k+1}\}$.

Перша множина $A\times B'$ складається з $m\times k$ елементів за індуктивним припущенням, друга множина $A\times\{b_{k+1}\}$ складається з m елементів, як відзначалося в базисі індукції. Крім того, $A\times B'\cap A\times\{b_{k-1}\}=\varnothing$, оскільки $B'\cap\{b_{k+1}\}=\varnothing$. Тому множина $A\times B$ складається з $mk+m=m(k+1)$ елементів, що і треба було довести.

3.5 Предикати

Визначення.

а) Множина $P\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ називається *n-місним предикатом* (*відношенням*) між елементами множини $A1, A2, \ldots, An$;

б) Якщо $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in P$, то ми говоримо, що відношення P істинне на наборі $(a1, a2, \ldots, an)$ і позначаємо $P(a1, a2, \ldots, an)=1$ або просто $P(a1, a2, \ldots, an)$. Якщо ж $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\notin P$, то ми говоримо, що P хибне на наборі $(a1, a2, \ldots, an)$ і пишемо $P(a1, a2, \ldots, an)=0$ або $\overline{P}(a1, a2, \ldots, an)=1$.

Визначення. Нехай $P\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ – *n-місний* предикат.

а) Для $n=1$ $P\subseteq A_1$ називається *одномісним* або предикатом *властивості*, визначеної на множині A_1;

б) для $n=2$ P називається *двомісним* предикатом або *бінарним* предикатом або просто *відношенням*;

в) якщо $P\subseteq A^2$, то P називається *відношенням між елементами* множини A.

Приклади.

1) Нехай $A_1=Z$. Властивість $P(x)\subseteq Z$ визначається умовою:

$P(x)=1\leftrightarrow x$ – парне число, тоді $P=\{\ldots;-4;-2;0;2;4;\ldots\}$.

2) $A_1=R, P\subseteq R$ визначається умовою: $P(x)=1\leftrightarrow x$ – ірраціональне число. Тоді $P(\sqrt{2})=P(e)=P(\pi)=1$, а $P(0)=P(1)=P\left(-\frac{1}{3}\right)=0$.

3) A_1 – множина усіх людей, $P(x)\subseteq A_1$ визначимо так: $P(x)=1\leftrightarrow x$ – чоловік.

4) A_1 – множина трикутників на площині, $P(x)=1\leftrightarrow x$ – рівносторонній трикутник.

Список прикладів підібраний таким чином, щоб стало ясно, що одномісні предикати або властивості притаманні елементам найдовільніших множин.

Приклади відношень. Нехай

1) $P_1\subseteq Z\times Z$ визначається умовою: $P_1(x,y)=1\leftrightarrow x-y$ ділиться на 3;

2) $P_2\subseteq Z\times Z$ визначається умовою: $P_1(x,y)=1\leftrightarrow x+y$ ділиться на 3;

3) $P_3\subseteq R\times R, P_3(x,y)=1\leftrightarrow x-y$ – раціональне число.

Очевидно, що $P_3(1;4)=P_3(\sqrt{2}+2;\sqrt{2})=P_3(e;e-1)=1$.

Очевидно також, що $P_3(1;\sqrt{2})=P_3(1;e)=P_3(1;\pi)=0$.

Менш очевидно, що $P_3(\sqrt{2};\pi)=P_3(e;\pi)=0$.

4) $P_4 \subseteq R\times R, P_4(x,y)=1 \leftrightarrow x+y$ - раціональне число.

$P_4(\sqrt{2};1-\sqrt{2})=P_4(1;3)=1, P_4(\sqrt{2};\sqrt{3})=P_4(\sqrt{2};e)=0$.

5) $P_5 \subseteq A\times A$, де A – множина людей. $P_5(x;y)=1 \leftrightarrow x$ – чоловік y.

6) $P_6 \subseteq A\times A, P_6(x;y)=1 \leftrightarrow x$ – брат y.

7) $P_7 \subseteq F\times F$, де F – множина трикутників, $P_7(x;y)=1 \leftrightarrow x$ – подібний y.

Надалі ми будемо вивчати, як правило, одно і двомісні предикати.

На множині всіх бінарних предикатів можна визначити дві корисні операції.

Визначення. Нехай $P \subseteq A\times B$ – бінарний предикат. Тоді предикат $P^{-1} \subseteq B\times A$ називається *оберненим* до P, якщо для будь-яких $x\in A$ і $y\in B$

$$P(x,y)=1 \leftrightarrow P^{-1}(y,x)=1.$$

Позначимо через $I_A \subseteq A\times A$ такий бінарний предикат

$$I_A(x,y)=1 \leftrightarrow x=y.$$

I_A називається *діагональним* відношенням або *відношенням* рівності або просто *рівністю на множині A*. Очевидно, що $I_A^{-1}=I_A$.

Визначення. Нехай $P\subseteq A\times B, Q\subseteq B\times C$ – бінарні предикати, тоді предикат $P\circ Q \subseteq A\times C$ визначається такою умовою: для будь-яких $x\in A, z\in C$ $(P\circ Q)(x,z)=1 \leftrightarrow$ існує $y\in B$ таке, що

$$P(x,y)=1 \wedge Q(y,z)=1.$$

$P\circ Q$ називається *суперпозицією* предикатів P и Q.

Приклад 1.

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{x, y, t\}$;

$P=\{(1;a);(1;c);(2;b);(2;c);(3;a)\}\subseteq A\times B$;

$Q=\{(a;x);(a;y);(b;y);(b;z);(c;x);(c;z)\}$;

$P\circ Q=\{(1;x);(1;y);(1;z);(2;x);(2;y);(2;z);(3;x);(3;y)\}=A\times C\setminus\{(3;Z)\}$.

Приклад 2.

$A=\{a, b, c, d\}$;

$P=\{(a;a);(a;b);(a;d);(c;a);(c;b);(d;a)\}$,

тоді $P^{-1}=\{(a;a);(b;a);(d;a);(a;c);(b;c);(a;d)\}$.

Обчислимо $P \cap P^{-1}, P \circ P^{-1}, P^{-1} \circ P$:

а) $P \cap P^{-1} = \{(a; a);(a; d)\}$;

б) $P \circ P^{-1} = \{(a; a);(a; c);(a; d);(c; a);(c; c);(c; d);(d; a);(d; c); (d; d)\}$;

в) $P^{-1} \circ P = \{(a; a);(a; b);(a; d);(b; a);(b; b);(b; d);(d; a);(d; b); (d; d)\}$.

Безпосередньо видно, що $P \circ P^{-1} \neq P^{-1} \circ P$, тобто операція суперпозиції, не є комутативною.

Теорема. Нехай $P \subseteq A \times B$, тоді

а) $I_A \circ P = P$;

б) $P \circ I_B = P$.

Доведення.

а) Візьмемо $(x;y) \in I_A \circ P \rightarrow$ існує $z \in A$ $(x;z) \in I_A \wedge (z;y) \in P$. Але $(x;z) \in I_A$ тягне $x = z$ і виходить, що $(x;y) \in P$, тобто $I_A \circ P \subseteq P$. Тепер візьмемо $(x;y) \in P$. Тоді можна написати, що $(x;x) \in I_A \wedge (x;y) \in P$, тобто існує таке $z \in (z = x)$, що $(x;z) \in I_A \wedge (z;y) \in P$. Значить $(x;y) \in I_A \circ P$.

Аналогічно доводиться пункт б).

Теорема. Нехай $P \subseteq A \times B$ і $Q \subseteq B \times C$, тоді $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$.

Доведення.

Візьмемо

$(z;x) \in (P \circ Q)^{-1} \leftrightarrow (x;z) \in P \circ Q \leftrightarrow$

існує $y \in B$, таке, що

$(x;y) \in P \wedge (y;z) \in Q \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (y;x) \in P^{-1} \wedge (z;y) \in Q^{-1} \leftrightarrow (z;x) \in Q^{-1} \circ P^{-1}$.

Теорема. Нехай $P \subseteq A \times B, Q \subseteq B \times C, R \subseteq C \times D$.

Тоді $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ – асоціативність суперпозиції.

Доведення.

Візьмемо $(x;t) \in (P \circ Q) \circ R \leftrightarrow$ існує $z \in C$, таке, що $(x;z) \in (P \circ Q) \circ R \leftrightarrow$ існує $y \in B$, таке, що

$(x;y) \in P \wedge (y;z) \in Q \wedge (z;t) \in R \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x;y) \in P \wedge (y;t) \in Q \circ R \leftrightarrow (x;t) \in P \circ (Q \circ R)$.

Виходить, що $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$.

3.6 Відношення еквівалентності

Визначення. Відношення $P \subseteq A \times A$ називається *відношенням еквівалентності*, якщо виконуються три аксіоми:

а) для кожного $x \in A$ $P(x,x)=1$ – *рефлексивність*;

б) для будь-яких $x,y \in A$ $P(x,y)=1 \rightarrow P(y,x)=1$ – *симетричність*;

в) для будь-яких $x,y,z \in A$ $P(x,y)=1 \wedge P(y,z)=1 \rightarrow P(y,z)=1$ – *транзитивність*.

Приклад 1.

$A=Z$, $P \subseteq Z \times Z$ визначається умовою: $P(x,y)=1 \leftrightarrow x-y$ ділиться на *3*. Перевірка виконується для всіх трьох аксіом.

а) $x-x=0$ ділиться на *3*, отже, $P(x,x)=1$.

б) Нехай $P(x,y)=1$, тобто $x-y$ ділиться на *3* і $y-x=-(x-y)$ також ділиться на *3*, виходить, що $P(x,y)=1 \rightarrow P(y,x)=1$.

в) Нехай $P(x,y)=1$, $P(y,z)=1$, отже, $x-y$ ділиться на *3* і $y-z$ ділиться на *3*. Тоді $(x-y)+(y-z)=x-z$ теж ділиться на *3*, тобто $P(x,z)=1$.

Приклад 2.

Нехай $Q \subseteq Z \times Z$ визначається такою умовою: $Q(x,y=1) \leftrightarrow x+y$ ділиться на *3*. Дане відношення не є відношенням еквівалентності, оскільки порушується вже перша аксіома – рефлексивність, тобто не для кожного $x \in Z$ $x+x$ ділиться на *3* (досить узяти $x=2$). Відзначимо, до речі, що інші дві аксіоми – симетричність і транзитивність – виконуються. Перевірте це самостійно.

Приклад 3.

$P_1 \subseteq R \times R$ визначається умовою $P_1(x,y)=1 \leftrightarrow x-y \in Q$.

а) Оскільки для кожного $x \in R$ $x-x=0 \in Q$, виходить, що $P_1(x,x)=1$.

б) Нехай $P_1(x,x)=1$, тобто $x-y \in Q$, виходить, $y-x \in Q$, тобто $P_1(y,x)=1$. Симетричність виконується.

в) Нехай $P_1(x,y)=1$ і $P(y,z)=1$. Виходить, що $x-y \in Q$ і $y-z \in Q$. Отже, $(x-y)+(y-z)=x-z \in Q$, а тому $P_1(x,z)=1$. Транзитивність виконується.

Приклад 4.

Нехай A – множина чоловіків, $P \subseteq A \times A$ визначається умовою $P(x,y)=1 \leftrightarrow x$ – брат y. Якщо домовитися, що чоловік сам собі є братом, то P є відношенням еквівалентності, оскільки симетричність і транзитивність виконується очевидним чином.

Якщо домовиться для відношення еквівалентності P замість $P(x,y)=1$ писати $x \sim y$, то аксіоми цього відношення перепишуться простішим і звичайним чином:

а) для кожного $x \in A$ $x \sim x$;

б) для будь-яких $x,y \in A$ $x \sim y \rightarrow y \sim x$;

в) для будь-яких $x,y,z \in A$ $x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z$.

Задача. Доведіть, що наведені нижче умови рівнозначні таким відношенням: а) $I_A \subseteq P$; б) $P^{-1} \subseteq P$; в) $P \circ P \subseteq P$.

Визначення. Нехай задана система множин A_i $(i \in I)$, тоді:

а) $\bigcup A_i$ $(i \in I) = \{x / \exists\, i \in I : x \in A_i\}$;

б) $\bigcap A_i$ $(i \in I) = \{x / \forall\, i \in I : x \in A_i\}$.

Очевидно, що об'єднання і перетинання кінцевого числа множин, наприклад, *n* є часткою випадкових визначень, коли індексна множина $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Визначення. Система множин A_i, $(i \in I)$ називається *розбиттям множини* A, якщо

а) $\bigcup A_i$ $(i \in I) = A$;

б) для будь-яких $i, j \in I$ $(A_i \bigcap A_j \neq \varnothing \to A_i = A_j)$.

Іншими словами, різні множини із системи A_i не перетинаються.

Визначення. Нехай $P \subseteq A^2$ – відношення еквівалентності на A. *Класом еквівалентності*, породженим елементом $a \in A$, називається множина $[a] = \{x \in A / x \sim a\}$.

Теорема. Якщо P – відношення еквівалентності на A, то множини класів еквівалентності утворять розбиття A.

Доведення. Доведемо спочатку, що $\bigcup [a](a \in A) = A$. Оскільки $[a] \subseteq A$ для кожного $a \in A$, то включення $\bigcup [a](a \in A) \subseteq A$ очевидне. Візьмемо $b \in A$. Оскільки $b \sim b$, то $b \in [b]$ і виходить, що $b \in \bigcup [a](a \in A)$, тобто $A \subseteq \bigcup [a](a \in A)$. Значить і $A = \bigcup [a](a \in A)$. Нехай $[a] \bigcap [b] \neq \varnothing$, значить існує і $x \in [a] \bigcap [b]$, тобто $x \sim a$ і $x \sim b$. По транзитивності $a \sim b$. Тепер доведемо, що $[a] = [b]$. Візьмемо $x \in [a] \to$ $x \sim a \to x \sim b \to x \in [b]$. Якщо ж $x \in [b]$ $\to x \sim b \to x \sim a \to x \in [a]$. Таким чином, $[a] = [b]$.

Отже, ми довели, що будь-яке відношення еквівалентності на множині A породжує природним чином розбивку A на класи еквівалентності, тобто має місце і обернене твердження.

Теорема. Нехай система множин A_i, $(i \in I)$ утворить розбиття множини A. З відношення $P(x, y) = 1 \leftrightarrow$ існує таке i, що $x, y \in A_i$ є відношенням еквівалентності на A. Причому елементи розбивки є класом еквівалентності.

Доведення. Перевіримо виконання всіх трьох аксіом – рефлексивності, симетричності, транзитивності.

Рефлексивність. Нехай $a \in A$, тоді $a \in A_i$ для деякого $i \in I$. Тоді можна записати: $a, a \in A_i$, тобто $P(a, a) = 1$.

Симетричність. Нехай $P(a, b) = 1$, тобто існує $i \in I$, таке, що $a, b \in A_i$, тоді і $b, a \in A_i$. Виходить, що $P(b, a) = 1$.

Транзитивність. Нехай $P(b,a)=1$ і $P(b,c)=1$, виходить, існують такі i і j, що $a,b \in A_i$ і $b,c \in A_j$. Однак тоді $b \in A_i \cap A_j$, тобто $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. За визначенням розбивки $A_i = A_j$, виходить, $a,b,c \in A_i$, тобто $P(a,c)=1$.

Теорема доведена.

3.7 Відношення порядку

Визначення. Відношення $P \subseteq A^2$ називається *відношенням порядку* на множині A, якщо виконані такі умови:

а) для кожного $x \in A$ $P(x,x)=1$ (рефлексивність);

б) для будь-яких $x,y,z \in A$, якщо $P(x,y)=1$ і $P(y,z)=1$, то $P(x,z)=1$ (транзитивність);

в) для будь-яких $x,y \in A$, якщо $P(x,y)=1$ і $P(y,x)=1$, то $x=y$ (антисиметричність).

Якщо P – відношення часткового порядку, то замість $P(x,y)=1$ прийнято писати $x \leq y$. Тоді умови а), б), в) матимуть вигляд:

а) $x \leq x$;

б) $x \leq y$ і $y \leq z$ тягне $x \leq z$;

в) $x \leq y$ і $y \leq x$ тягне $x = y$.

Якщо на множині A задане відношення часткового порядку, то воно називається *частково упорядкованою множиною* і позначається $(A\ :\ \leq)$.

Приклади.

1. На множині N, Z, Q, R заданий природний порядок, що ви вивчали ще в школі. Ми його так і будемо називати – природний порядок – і позначати, як звичайно, ≤.

2. Нехай A – довільна множина і $P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$ – множина усіх підмножин множини A. На $P(A)$ визначене відношення порядку такою умовою: $X \leq Y$ тоді і тільки тоді, коли $X \subseteq Y$. Очевидно, що виконуються такі умови:

а) $X \subseteq X$;

б) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \rightarrow X \subseteq Z$;

в) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \rightarrow X = Y$.

Тобто відношення включення підмножин є відношення часткового порядку. Цей приклад має принципову відмінність від природних порядків, розглянутих у першому прикладі. У першому прикладі будь-які два числа порівнянні за величиною, тобто має місце: для будь-яких x, y $x \leq y \vee y \leq x$.

У другому прикладі ситуація інша. Нехай $A=\{a,b,c\}$, $X=\{a,b\}\subseteq A$, $Y=\{b,c\}\subseteq A$. Ми не можемо стверджувати, що $X\subseteq Y$, але не можемо також стверджувати, що $Y\subseteq X$, тобто X і Y є непорівнянними. Наявність у деяких упорядкованих множинах непорівнянних елементів і дало підставу внести термін частково упорядкованої множини.

3. Нехай

$$A=\{0,1\}^n=\{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\,|\,\alpha_i=0\vee\alpha_i=1\}.$$

Визначимо: $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i\le\beta_i$ $\forall\, i=1,2,...,n$.

Перевірте самостійно, що це відношення є відношенням часткового порядку, і що в цій упорядкованій множині є попарно непорівнянні елементи (набори).

4. На тій самій множині можна задати різні відношення порядку. Наприклад, на множині N крім природного порядку можна задати таке відношення:

$m\le n$ тільки в тому випадку, коли n ділиться на m, тобто існує $x\in N$, таке, що $n=m\cdot x$. Доведемо, що дане відношення на N є відношенням часткового порядку.

а) $m\le m$, оскільки m ділиться на m $(m=m\cdot 1)$;

б) Нехай $m\le l$ і $l\le n$, тоді $l=m\cdot x$ і $n=l\cdot y$, де $x,y\in N$, отже, $n=m\cdot(x,y)$, тобто n ділиться на m і $m\le n$;

в) Нехай $m\le n$ і $n\le m$, тоді $n=m\cdot x$ і $m=n\cdot y$. Звідси випливає, що $n=n\cdot(x\cdot y)$, і тому $x\cdot y=1$, а добуток двох натуральних чисел дорівнює 1 тільки в тому випадку, коли $x=y=1$, звідси $n=m\cdot 1$, тобто $n=m$. Отже, всі три властивості – рефлексивність, транзитивність, антисиметричність – частковим порядком виконуються. Виходить, відношення подільності на N є відношенням часткового порядку. Це відношення відрізняється від природного порядку. Наприклад, $3\le 5$, але невірно, що $3\prec 5$, оскільки п'ять не ділиться на три.

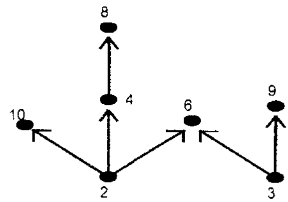
5. Скінченні упорядковані множини зручно зображувати за допомогою схем. Проілюструємо це двома прикладами.

Нехай $A=\{2,3,4,6,8,9,10\}$.

Якщо на A розглянути природний порядок, то одержимо схему

$$2\to3\to4\to6\to8\to9\to10.$$

Ми проводимо стрілку від a до b, якщо $a\le b$. Стрілку ж від 2 до 4 ми не проводимо тому, що існування її гарантується стрілками від 2 до 3, від 3 до 4 і транзитивністю. Тепер на тій же множині A розглянемо відношення подільності і отримаємо таку схему



Таким чином можна отримати різні схеми на одній і тій же множині A.

Поряд із звичайним частковим порядком вивчаються строгі частково-упорядковані множини.

Визначення. Множина $(A;<)$ називається *строго частково-упорядкованою*, якщо виконуються умови:

а) для будь-якого $x \in A$ невірно, що $x < x$ (антирефлексивність);

б) для будь-яких $x, y, z \in A$ з $x < y$ і $y < z$ випливає, що $x < z$ (транзитивність);

в) для будь-яких $x, y \in A$ не можуть одночасно виконуватися співвідношення $x < y$ і $y < x$.

Будь-яке відношення часткового порядку природним чином породжує відношення строгого порядку.

Теорема. Якщо $x \le y$ є відношення часткового порядку, то відношення $x < y \leftrightarrow (x \le y \wedge x \ne y)$ є відношенням строгого порядку на A.

Доведення.

а) Висловлення $(x \le x \wedge x \ne x)$ помилкове, оскільки помилкове друге твердження кон'юнкції $x \ne x$ і виходить, що помилкове $x < x$.

б) Нехай $x < y$ і $y < z$, це означає істинність висловлення

$$x \le y \wedge x \ne y \wedge y \le z \wedge y \ne z.$$

З першого і третього членів цієї кон'юнкції випливає $x \le z$. Лишається довести, що $x \ne z$. Допустимо, що $x = z$. Тоді отримаємо $x \le y \wedge y \le x$, тобто $x = y$, але за умови $x \ne y$. Це протиріччя і доводить, що $x < z$.

в) Припустимо, що виконується кон'юнкція $(x < y \wedge y < x)$, тобто $(x \le y \wedge x \ne y \wedge y \le x \wedge y \ne x)$. Однак перший і третій член кон'юнкції тягнуть $x = y$. Це протиріччя. Значить співвідношення $x < y$ і $y < x$ не можуть виконуватися одночасно. Теорема доведена.

Вірним є і обернене твердження.

Будь-який строгий частковий порядок породжує природним чином просто частковий порядок.

Теорема. Якщо на A задане відношення строгого порядку $<$, то відношення $x \le y \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$ є відношенням часткового порядку.

Доведення. Перевіримо виконання всіх трьох умов, що визначають відношення часткового порядку.

а) $(x < y \vee x = x)$ – істинна диз'юнкція, оскільки істинний її другий член $x = x$, оскільки $x \le x$.

б) Нехай $x \le y \wedge y \le z$. Це значить, що

$(x < y \vee x = y) \cdot (y < z \vee y = z)$,

що рівносильно

$(x < y \wedge y < z) \vee (x < y \wedge y = z) \vee \vee (x = y \wedge y < z) \vee (x = y \wedge y = z)$.

Звідси випливає: $(x < z) \vee (x < z) \vee (x < z) \vee (x = z)$, тобто $x < z \vee x = z$, що і означає $x \le z$.

в) Нехай $(x \le y \wedge y \le x)$, тоді

$(x < y \vee x = y) \wedge (y < x \vee y = x)$.

Це рівносильно

$(x < y \wedge y < x) \vee (x = y \wedge y < x) \vee$

$\vee (x < y \wedge y = x) \vee (x = y \wedge y = x)$.

Перший, другий і третій члени цієї диз'юнкції помилкові. Перший за властивістю в) (визначення строгого порядку), другий і третій за властивістю а). Залишається рівність $x = y$. Теорема доведена.

3.8 Лінійно-упорядковані множини. Лексикографічний порядок

Як відзначалося в попередньому розділі, частково-упорядкованими є множини, в яких будь-які два елементи порівнянні, і є множини, де існують непорівнянні елементи. Це розходження підкреслюється таким визначенням.

Визначення. Частково-упорядкована множина $(A; \le)$ називається *лінійно-упорядкованою*, якщо виконується умова:

$$\forall x, y \in A \quad x \le y \vee y \le x .$$

Для строгого порядку ця умова приймає вигляд:

$$\forall x, y \in A \quad x < y \vee x = y \vee y < x .$$

Основною метою цього розділу є вивчення так званих лексикографічних порядків, які останнім часом знаходять застосування в інформатиці й у різних розділах математичного моделювання.

Визначення. Нехай $(A;\leq)$ і $(B;\leq)$ – лінійно-упорядковані множини. Визначимо на $A\times B$ бінарне відношення таким чином:

$$(a_1,b_1)\subseteq(a_2,b_2)\leftrightarrow(a_1<a_2)\vee(a_1=a_2\wedge b_1\leq b_2).$$

Вищевказане відношення називають *відношенням лексикографічного порядку*.

Теорема. Якщо $(A;\leq)$ і $(B;\leq)$ – лінійно-упорядковані множини, тоді множина $(A\times B;\subseteq)$ також лінійно упорядкована.

Доведення. Перевіримо виконання всіх чотирьох умов лінійної упорядкованості.

а) Рефлексивність. Очевидно, що $(a,b)\subseteq(a,b)$, оскільки виконується друга умова диз'юнкції у визначенні лексикографічного порядку, тобто

$$a=a\wedge b\leq b.$$

б) Транзитивність. Нехай $(a_1,b_1)\subseteq(a_2,b_2)$ і $(a_2,b_2)\subseteq(a_3,b_3)$. Якщо $a_1<a_2$, то $a_1<a_3$ і $(a_1,b_1)\subseteq(a_3,b_3)$, якщо ж $a_2<a_3$, то $a_1<a_3$, і знову $(a_1,b_1)\subseteq(a_3,b_3)$. Тепер нехай $a_1=a_2=a_3$, тоді $b_1\leq b_2$ і $b_2\leq b_3$, отже, $b_1\leq b_3$ і $(a_1,b_1)\leq(a_3,b_3)$, що і доводить транзитивність.

в) Антисиметричність. Нехай $(a_1,b_1)\leq(a_2,b_2)$ і $(a_2,b_2)\leq(a_1,b_1)$. З визначення лексикографічного порядку отримаємо $a_1\leq a_2$ і $a_2\leq a_1$, тобто $a_1=a_2$. З другої складової диз'юнкції у визначенні лексикографічного порядку отримаємо тепер $b_1\leq b_2$ і $b_2\leq b_1$. Отже, $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.

г) Порівнянність будь-яких двох елементів множини $A\times B$. Нехай $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$. Оскільки A – лінійно-упорядкована множина, то для елементів $a_1,a_2\in A$ виконується одна з умов:

$$a_1<a_2\text{ , тоді }(a_1,b_1)\subseteq(a_2,b_2);$$
$$a_2<a_1\text{ , тоді }(a_2,b_2)\subseteq(a_1,b_1);$$

Якщо $a_1=a_2$, то для елементів $b_1,b_2\in B$ можливе одне з двох:

$$b_1\leq b_2\text{ , тоді }(a_1,b_1)\subseteq(a_2,b_2);$$
$$b_2\leq b_1\text{ , тоді }(a_2,b_2)\subseteq(a_1,b_1).$$

Таким чином, порівнянність, а разом з нею і вся теорема, доведена.

Таким чином, якщо $(A;\leq)$ – лінійно-упорядкована множина, то на множині A^2 природним чином також виникає лінійний порядок – лексикографічний. По індукції лексикографічний порядок визначається на множині A^n і по індукції ж доводиться, що цей порядок – лінійний.

Проілюструємо вищевикладені конструкції прикладом.

Нехай $A=\{1,2,3\}$.

Розташуємо в лексикографічному порядку зростання елементи множини A^3:

$$(1,1,1)\subset(1,1,2)\subset(1,1,3)\subset\subset(1,2,1)\subset(1,2,2)\subset(1,2,3)\subset\subset(1,3,1)\subset(1,3,2)\subset(1,3,3)\subset$$
$$\subset(2,1,1)\subset(2,1,2)\subset(2,1,3)\subset\subset(2,2,1)\subset(2,2,2)\subset(2,2,3)\subset$$
$$\subset(2,3,1)\subset(2,3,2)\subset(2,3,3)\subset$$
$$\subset(3,1,1)\subset(3,1,2)\subset(3,1,3)\subset\subset(3,2,1)\subset(3,2,2)\subset(3,2,3)\subset\subset(3,3,1)\subset(3,3,2)\subset(3,3,3).$$

3.9 Екстремальні елементи в частково-упорядкованих множинах

Визначення.

а) Нехай $(A;\leq)$ – частково-упорядкована множина. Елемент $a\in A$ називається *максимальним* елементом множини A, якщо не існує $b\in A$, такого, що $b>0$. Іноді це визначення можна зустріти в такому формулюванні: для будь-якого $b\in A$

$$b\geq a\to b=a.$$

б) Елемент $a\in A$ називається *мінімальним* елементом множини A, якщо не існує елемента $b\in A$, такого, що $b<a$ або для кожного $b\in A$

$$b\leq a\to b=a.$$

Максимальні і мінімальні елементи в частково-упорядкованих множинах можуть існувати, а можуть і не існувати, їх може бути трохи, як показують нижчеподані приклади.

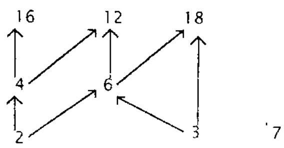
Приклад 1. $(R;\leq)$ – множина чисел з природним порядком. У цій множині немає ні максимального, ні мінімального елементів.

Приклад 2. У множині $[0,1]$ є максимальний елемент $a=1$ і мінімальний елемент $b=0$. У множині $(0,1]$ є максимальний, але немає мінімального елемента, а в множині $[0,1)$ є мінімальний, але немає максимального елемента.

Приклад 3. Розглянемо частково-упорядковану множину

$$A=(\{2,3,4,6,7,12,16,18\};\leq),$$

де $\leq$ – відношення подільності. Для наочності побудуємо діаграму цієї множини:



Тут 2, 3, 7 є мінімальними елементами, а 7, 12, 16, 18 – максимальними.

Задача 1. Наведіть множину, що має нескінченно багато максимальних елементів.

Задача 2. Наведіть множину, що має нескінченно багато максимальних і нескінченно багато мінімальних елементів.

Визначення. Нехай $(A;\leq)$ – частково-упорядкована множина.

а) Елемент $a \in A$ називається *найбільшим* елементом A, якщо для кожного $b \in A$ $a \geq b$.

б) Елемент $a \in A$ називається *найменшим* елементом A, якщо для кожного $b \in A$ $a \leq b$.

Наступна теорема показує, що поняття максимального і найбільшого елементів істотно відрізняються одне від одного (мінімальний і найменший елементи – аналогічно).

Теорема. Якщо в частково-упорядкованій множині $(A;\leq)$ є найбільший елемент, то він єдиний.

Доведення. Нехай a і b – найбільші елементи в $(A;\leq)$, тоді для кожного $x \in A$ $a \geq x$, зокрема, $a \geq b$. Аналогічно $b \leq a$. Отже, $a = b$.

Зауваження. Аналогічне вірно для найменших елементів.

Теорема. Якщо $(A;\leq)$ – лінійно-упорядкована множина і a – максимальний елемент, то a є найбільшим, а значить і єдиним максимальним елементом.

Доведення. Оскільки a – максимальний елемент, то не існує $b \in A$, такого, що $b > a$. З іншого боку, оскільки $(A;\leq)$ лінійно-упорядкована, то виконується альтернатива $b > a \vee b \leq a$, тому $a \geq b$, де b – довільний елемент A.

Теорема доведена.

Визначення. Нехай $(A;\leq)$ – частково-упорядкована множина і $B \subseteq A$.

а) Елемент $a \in A$ називається *верхньою границею множини* B, якщо для кожного $x \in B$ $a \geq x$. Позначення верхньої границі: $a \geq B$.

б) Найменша з усіх верхніх границь множини B, якщо вона існує, називається *точною верхньою границею* і позначається: $a = \boldsymbol{sup}\, B$.

в) Елемент $a \in A$ називається *нижньою границею множини B*, якщо для кожного $x \in B$ $a \leq x$. Позначення нижньої границі: $a \leq B$.

г) Найбільша з усіх нижніх границь множини B, якщо вона існує, називається *точною нижньою границею* і позначається: $a = \boldsymbol{inf}\, B$.

Приклад. Розглянемо $(R;\leq)$ і $(0;1) \subseteq R$. Числа $2,\ 1,\ \sqrt{3},\ 1000$ є верхніми границями множини $(0;1)$, $1 = \boldsymbol{sup}(0;1)$. Числа $0, -1, -\frac{1}{2}, -\sqrt{5}$ є нижніми границями множини $(0;1)$, $0 = \boldsymbol{inf}(0;1)$.

3.10 Відображення

Визначення. Відношення $F \subseteq A \times B$ називається *функціональним*, якщо виконується умова однозначності: для будь-яких $(a;b_1)$ і $(a;b_2)$, якщо $(a;b_1),(a;b_2) \in F$, то $b_1 = b_2$.

Функціональні відношення називаються відображеннями, функціями, відповідностями. Для відображення $F \subseteq A \times B$ використовують запис $F : A \to B$. Про деякі інші визначення відображення буде сказано нижче.

Задачі.

1. Знайти усі функціональні відношення порядку.
2. Знайти усі функціональні відношення строгого порядку.
3. Знайти усі функціональні відношення строгого лінійного порядку.
4. Знайти усі функціональні відношення еквівалентності.

Відзначимо, що, незважаючи на удавану складність, усі ці задачі розв'язуються дуже просто. Наприклад, у першій і четвертій задачах відповіддю є відношення рівності на A: $I_A \subseteq A \times A$, що визначається умовою: $(a,b) \in I_A$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

Визначення. Нехай $F : A \to B$, тоді множина A називається *областю відправлення* F, а B – *областю прибуття* відображення F. Якщо пари $(a;b) \in F$, то пишемо $F(a) = b$. У цій рівності елемент $b \in B$ називається *образом елемента* a, а елемент $a \in A$ - *прообразом елемента* b.

Визначення. Нехай $F : A \to B$.

а) Множина $\{x \in A| : \text{існує } y \in B, \text{ таке, що } F(x) = y\}$ називається *областю визначення* F і позначається $D(F)$;

б) Множина $\{y \in B| : \text{існує } x \in A, \text{ таке, що } F(x) = y\}$ називається *областю значень* F і позначається $V(F)$.

Визначення. Відображення $F : A \to B$ і $G : C \to D$ називаються *рівними*, якщо:

1) $D(F)=D(G)$;

2) для кожного $x \in D(F)$ $F(x)=G(x)$.

Визначення. Нехай $F: A \to B$.

а) Якщо $X \subseteq A$, то множина $F(X)=\{F(x) | x \in X\} \subseteq V(F)$ називається *образом множини X* при відображенні F;

б) якщо $Y \subseteq B$, то $F^{-1}(Y)=\{x \in D(F) | F(x) \in Y\}$ називається *прообразом множини Y* при відображенні F.

Теорема. Нехай $F: A \to B$ і $X, Y \subseteq A$, тоді $F(X \cup Y)=F(X) \cup F(Y)$.

Доведення. Нехай $b \in F(X \cup Y)$. Це значить, що існує $a \in X \cup Y$ таке, що $F(a)=b$. Якщо $a \in X$, то $F(a)=b \in F(X)$, отже, $b \in F(X) \cup F(Y)$. Аналогічно розглядається випадок $a \in Y$.

Отже ми довели, що $F(X \cup Y) \subseteq F(X) \cup F(Y)$.

Тепер нехай $b \in F(X) \cup F(Y)$. Візьмемо для визначеності $b \in F(X)$, звідки виходить, що існує $a \in X$ таке, що $F(a)=b$. З того, що $a \in X$ випливає $a \in X \cup Y$, тобто виходить, що $b \in F(X \cup Y)$. Аналогічно розглядається випадок $b \in F(Y)$.

Отже $F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$, а тому і $F(X \cup Y)=F(X) \cup F(Y)$.

Теорема. Нехай $F: A \to B$ і $X, Y \subseteq B$.

Тоді $F^{-1}(X \cup Y)=F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y)$ (Словами: *прообраз об'єднання дорівнює об'єднанню прообразів*).

Доведення. Візьмемо $a \in F^{-1}(X \cup Y)$. Це значить, що $F(a) \in X \cup Y$, тобто $F(a) \in X$ або $F(a) \in Y$. Якщо $F(a) \in X$, то за визначенням прообразу $a \in F^{-1}(X)$ виходить, що $a \in F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y)$. Аналогічно, якщо $F(a) \in Y$, то $a \in F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y)$. Таким чином ми довели, що

$$F^{-1}(X \cup Y) \subseteq F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y).$$

Доведемо включення в іншу сторону. Візьмемо $a \in F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y)$, виходить, $a \in F^{-1}(X)$ або $F(a) \in Y$. Якщо $a \in F^{-1}(X)$, то $F(a) \in X$, отже, $F(a) \in X \cup Y$, тому $a \in F^{-1}(X \cup Y)$. Аналогічно розглядається випадок $a \in F^{-1}(Y)$. Виходить, що $F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y) \subseteq F^{-1}(X \cup Y)$. Два доведених включення дають необхідну рівність

$$F^{-1}(X \cup Y)=F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y).$$

Теорема доведена.

Теорема. Нехай $F : A \to B$ і $X, Y \subseteq A$, тоді $F(X \cap Y) \subseteq F(X) \cap F(Y)$.

Доведення. Візьмемо $b \in F(X \cap Y)$. За визначенням образу множини це значить, що існує $a \in X \cap Y$ таке, що $F(a) = b$. З того, що $a \in X \cap Y$, випливає, що $a \in X, a \in Y$ і виходить, що $F(a) = b \in F(X)$ і $F(a) = b \in F(Y)$, тобто $b \in F(X) \cap F(Y)$. Ми довели, що

$$F(X \cap Y) \subseteq F(X) \cap F(Y).$$

Наведемо приклад, який показує, що обернене включення, а значить і рівність тут не виконується. Візьмемо $F(x) = x^2 : R \to \cup R_+ \cup \{0\}$. Як множину X візьмемо $X = [-1;0]$, $Y = [0;1]$. Очевидно, що $F(X) = [0;1]$, $F(Y) = [0;1]$, а значить і $F(X) \cap F(Y) = [0;1]$. Далі, $[-1;0] \cap [0;1] = \{0\}$, тому $F(X \cap Y) = F(\{0\}) = \{0\}$. При цьому ясно, що $F(X) \cap F(Y) \not\subset F(X \cap Y)$.

Теорема. Нехай $F : A \to B$ і $X, Y \subseteq B$.

Тоді $F^{-1}(X \cap Y) = F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y)$.

Доведення. Нехай $a \in F^{-1}(X \cap Y)$, тобто $F(a) = b \in X \cap Y$ і виходить, що $b \in X, b \in Y$, а тому $a \in F^{-1}(X), a \in F^{-1}(Y)$ і $a \in F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y)$.

Отже, $F^{-1}(X \cap Y) \subseteq F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y)$.

Тепер візьмемо $a \in F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y)$, звідси $a \in F^{-1}(X), a \in F^{-1}(Y)$ і виходить, що $F(a) \in X$ і $F(a) \in Y$, тобто $F(a) \in X \cap Y$, отже, $a \in F^{-1}(X \cap Y)$. Тому $F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y) \subseteq F^{-1}(X \cap Y)$. Отже, отримані включення доводять рівність $F^{-1}(X \cap Y) = F^{-1}(X) \cap F^{-1}(Y)$.

Визначення. Нехай $F : A \to B$ і $G : B \to C$. *Суперпозицією* відображень G і F називається відображення $G \circ F : A \to C$, що визначається такими умовами:

1) $D(G \circ F) = A$;

2) $V(G \circ F) = C$;

3) для кожного $x \in D(G \circ F)$ $(G \circ F)(x) = G(F(x))$.

Суперпозиція відображень називається ще *композицією*, або *функціональним добутком* відображень G і F, або складною функцією $G(F(x))$.

Теорема. З $F : A \to B$, $G : B \to C$, $H : G \to D$ випливає, що $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$ (асоціативність суперпозиції).

Доведення. Легко помітити, що композиція відображень є окремий випадок добутку бінарних відносин. Оскільки для добутку бінарних відносин асоціативний закон виконується, то і для композиції відображень він теж виконується.

Визначення. Нехай $F : A \to B$.

1) Відображення F називаються *взаємно однозначними*, якщо для будь-яких a_1, a_2 $a_1 \neq a_2 \Rightarrow F(a_1) \neq F(a_2)$. Іншими словами, різні елементи з області визначення мають різні образи. Позначення $F: A \xrightarrow{1-1} B$.

Такі відображення називаються ще *вкладеннями*.

2) Відображення $F: A \to B$ називається *відображенням "на"*, якщо для кожного $b \in B$ існує $a \in A$ таке, що $F(a) = b$, тобто для кожного $b \in B$ мається в A його прообраз. Позначення $F: A \xrightarrow[на]{} B$;

3) Відображення $F: A \to B$, що є одночасно і взаємно однозначними і *"на"*, називається *бієкцією* і позначається $F: A \xrightarrow[на]{1-1} B$.

Приклад 1. Якщо $F(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, то $F(x): R \to R$ є бієкцією.

Приклад 2. Якщо $F(x) = \boldsymbol{sin}\, x$, то $F(x): R \to R$ не є взаємно однозначним і не є відображенням *"на"*. Якщо ж записати для $F(x) = \boldsymbol{sin}\, x$, $F(x): R \to [-1;1]$, то це відображення стає уже відображенням *"на"*, хоча не є взаємно однозначним. Якщо ж записати, що $F(x): \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$, то це відображення є бієкцією.

Приклад 3. Нехай $F(x) = x^2$.

$F(x): R \to R$ не є взаємно однозначним і не є *"на"*.

$F(x): [0;\infty) \to R$ є взаємно однозначним, але не є *"на"*.

$F(x): R \to [0;\infty)$ є відображенням *"на"*, але не взаємно однозначне.

$F(x): [0;\infty) \to [0;\infty)$ є бієкцією.

Наведені приклади відображень $F: A \to B_x$ показують, що в цьому записі велику роль відіграє не тільки структура операції F, але також множини A і B.

Визначення. Нехай $F: A \to B$, причому $D(F) = A$, $M \subseteq A$. *Звуженням відображення* F на множину M називається відображення $F/_M$, що визначене умовами:

1) $D(F/_M) = M$;

2) для кожного $x \in M$ $F/_M(x) = F(x)$.

Визначення.

1) Нехай $F: A \to B$ – бієкція. *Оберненим відображенням* F^{-1} до відображення F називається відображення, що визначається умовами:

а) $D(F^{-1}) = V(F) = B$;

б) $V(F^{-1}) = D(F) = A$;

в) для кожного $x \in A$ $F(x) = y \Leftrightarrow x = F^{-1}(y)$.

2) Відображення $I_A : A \to A$ визначається такими умовами:

а) $D(I_A) = V(I_A) = A$;

б) для кожного $x \in A \quad I_A(x) = x$.

I_A називається *одиничним* або *тотожним* відображенням на A.

Для введених у даному визначенні понять виконуються властивості, що ми сформулюємо і доведемо в такій теоремі.

Теорема. Нехай $F : A \to B$ – бієкція, тоді:

1) F^{-1} теж бієкція;

2) $F \circ F^{-1} = I_B$;

3) $F^{-1} \circ F = I_A$;

4) $I_B \circ F = F$;

5) $F \circ I_A = F$;

6) $\left(F^{-1}\right)^{-1} = F$.

Доведення.

1. Доведемо, що F^{-1} взаємнооднозначно.

Нехай $F^{-1}(y_1) = F^{-1}(y_2) = x$, тоді $F(x) = y_1$, $F(x) = y_2$, однак за визначенням відображення, образ y будь-якого аргументу x при F визначений однозначно (властивість однозначності відображень). Тому $y_1 = y_2$. Доведемо, що F^{-1} відображає B *"на"* A. Нехай $x \in A$, $F(x) = y$, тоді за визначенням $F^{-1}(y) = x$, тобто будь-який елемент з A має прообраз при F^{-1}.

2. Якщо довільний елемент $y \in B$ і нехай $F^{-1}(y) = x$, тоді $F(x) = y$, тобто $F\left(F^{-1}(y)\right) = y$, тобто для кожного $y \in B$ $F\left(F^{-1}(y)\right) = I_B(y)$, виходить, $F \circ F^{-1} = I_B$.

3. Аналогічно 2.

4. Нехай $x \in A$ і $F(x) = y \in B$, $I_B(y) = y$ або $I_B(F(x)) = F(x)$ тоді для кожного $x \in A$, виходить, що $I_B \circ F = F$.

5. Аналогічно 4.

6. $D(F) = A, V(F) = B$. Отже, $D\left(F^{-1}\right) = B, V\left(F^{-1}\right) = A$.

Отже, $D\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = A, V\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = B$,

тобто $D\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = D(F), V\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = V(F)$.

Візьмемо $x \in A$ і нехай $F(x) = y$, тоді $F^{-1}(y) = x$ і знову, застосовуючи визначення оберненого відображення, отримаємо $(F^{-1})^{-1}(x)=y$, тобто для кожного $x \in A$ $(F^{-1})^{-1}(x)=F(x)$, тому $(F^{-1})^{-1}=F$.

Приклади обернених відображень.

1. $\boldsymbol{sin}\,x\big|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ є бієкцією між замкнутими проміжками $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $[-1;1]$. $\boldsymbol{arcsin}\,x$ бієктивно відображає $[-1;1]$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\boldsymbol{tg}\,x\big|_{\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}$ бієктивно відображає відкритий проміжок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ на R. Функція $\boldsymbol{arctg}\,x$ є бієкцією між R і $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. $x^2\,|_{[0;\infty)}$ є бієкцією множини $[0;\infty)$ на себе. Обернена функція $\sqrt{x}$ є також бієкцією множини $[0;\infty)$ на себе.

Теорема. Нехай $F : A \to B$ і $G : B \to C$ – бієкції, тоді:

1) відображення $G \circ F : A \to C$ є бієкцією;

2) $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Доведення.

1) Доведемо, що $G \circ F$ є відображення *"на"*. Візьмемо елемент $c \in C$. Оскільки G є відображення *"на"*, то існує $b \in B$ таке, що $G(b)=c$. У свою чергу, оскільки F є відображення *"на"*, то існує $a \in A$, таке, що $F(a)=b$, тому $(G \circ F)(a)=G(F(a))=G(b)=c$, тобто $G \circ F$ є відображення *"на"*. Доведемо, що $G \circ F$ є взаємно-однозначним. Візьмемо $a_1, a_2 \in A$ і $a_1 \neq a_2$, тоді $F(a_1)=b_1, F(a_2)=b_2$ й $b_1 \neq b_2$ у силу взаємної однозначності F. Оскільки G взаємно-однозначно, то $G(b_1) \neq G(b_2)$, тому $G(F(a_1)) \neq G(F(a_2))$, тобто $G \circ F$ взаємно-однозначно, а тому є бієкцією.

2) $G \circ F$ відображає множину A на множині C. Виходить, що $(G \circ F)^{-1}$ відображає C на A, тобто $D\left((G \circ F)^{-1}\right)=C$. G^{-1} відображає C на B, F^{-1} відображає B на A і тому $F^{-1} \circ G^{-1}$ відображає C на A, тобто $D\left(F^{-1} \circ G^{-1}\right)=C$.

Візьмемо $z \in G$ і нехай $x=(G \circ F)^{-1}(z)$. Тоді $(G \circ F)(x)=z$. Нехай $x_1=\left(F^{-1} \circ G^{-1}\right)(z)$, тобто $x_1=F^{-1}\left(G^{-1}(z)\right)$, звідси $F(x_1)=F\left(F^{-1}\left(G^{-1}(z)\right)\right)$, тобто $F(x_1)=G^{-1}(z)$, а звідси $G(F(x_1))=G\left(G^{-1}(z)\right)=z$. Таким чином, $(G \circ F)(x_1)=z$. Але відображення $G \circ F$ є взаємно-однозначним, тому з рівності $(G \circ F)(x)=(G \circ F)(x_1)$ випливає рівність $x=x_1$. Ми довели, що для кожного $z \in G$ $(G \circ F)^{-1}(z)=\left(F^{-1} \circ G^{-1}\right)(z)$, тобто $(G \circ F)^{-1}=F^{-1} \circ G^{-1}$.

Теорема доведена.

На закінчення, визначимо на множині відображень теоретико-множинні операції.

Визначення.

а) Нехай $F_1 : A_1 \to B, F_2 : A_2 \to B$. Відображення F_1 і F_2 називаються *погодженими*, якщо для кожного $x \in D(F_1) \cap D(F_2)$ $F_1(x) = F_2(x)$.

б) Нехай дане сімейство відображень $F_i : A_i \to B$ $(i \in I)$. Сімейство F_i $(i \in I)$ називається *погодженим*, якщо відображення F_i попарно погоджені, тобто для будь-яких $i, j \in I$ і для будь-якого $x \in D(F_i) \cap D(F_j)$

$$F_i(x) = F_j(x).$$

Відзначимо, що якщо області визначення $D(F_i)$ попарно не перетинаються, то сімейство відображень F_i $(i \in I)$ погоджене.

Визначення.

а) Нехай $F_1 : A_1 \to B, F_2 : A_2 \to B$ – погоджені відображення. Тоді відображення $F_1 \cup F_2$ визначається умовами:

1) $D(F_1 \cup F_2) = D(F_1) \cup D(F_2)$;

2) для будь-якого $x \in D(F_1 \cup F_2)$

$$(F_1 \cup F_2)(x) = \begin{cases} F_1(x), \text{ якщо } x \in D(F_1) \\ F_2(x), \text{ якщо } x \in D(F_2) \end{cases}.$$

Відображення $F_1 \cap F_2$ визначається умовами:

1) $D(F_1 \cap F_2) = D(F_1) \cap D(F_2)$;

2) для кожного $x \in D(F_1 \cap F_2)$ $(F_1 \cap F_2)(x) = F_1(x)$.

Погодженість гарантує коректність визначень $F_1 \cup F_2$ і $F_1 \cap F_2$.

б) Нехай $F_i : A_i \to B$ $(i \in I)$ – сімейство погоджених відображень, тоді $\bigcup_{i \in I} F_i$ є відображення, обумовлене умовами:

1) $D\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} D(F_i)$;

2) для кожного $x \in D\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right)$ $\left(\bigcup F_i\right)(x) = F_{i_0}(x)$, якщо $x \in D(F_{i_0})$.

Відображення $\bigcap_{i \in I} F_i$ визначається умовами:

- $D\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I} D(F_i)$;

- для кожного $x \in D\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)$ $\bigcap_{i\in I} F_i(x) = F_{i_0}(x)$, де i_0 – довільний індекс.

Звідси знову ж, погодженість гарантує коректність цих визначень.

Приклад.

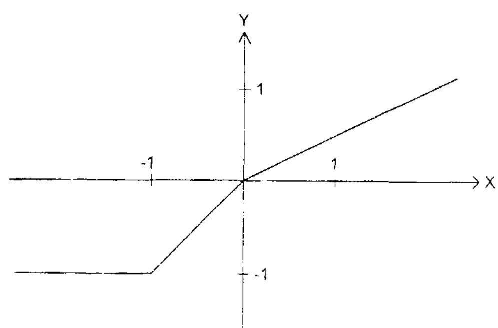
Нехай $F_1(x) = (-1)\big|_{(-\infty;-1]}$, $F_2(x) = x\big|_{(-1;0]}$, $F_3(x) = \frac{1}{2}x\Big|_{[0;\infty)}$.

Відзначимо, що F_1 і F_2 погоджено, оскільки $(-\infty;-1]\cap(-1;0] = \varnothing$, F_1 і F_3 погоджені, оскільки $(-\infty;-1]\cap[0;\infty) = \varnothing$ й F_2 і F_3 погоджені, оскільки $(-1;0]\cap[0;\infty) = \{0\}$ і $F_2(0) = x\,|_{x=0} = 0$, $F_3(0) = \frac{1}{2}x\,|_{x=0} = 0$. Отже, сімейство відображень F_1, F_2, F_3 погоджено.

Побудуємо графік відображення $F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Відзначимо, що

$$D(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = (-\infty;-1]\cup(-1;0]\cup[0;\infty) = R,$$

тобто відображення $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ усюди визначене.



ВАРІАНТИ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ І ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ (ТЕОРІЯ МНОЖИН)

Обчислення множин

Обчислити зазначену множину, якщо
U={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14},
A={1;2;3;4;7;9},
B={3;4;5;6;11;12;13},
C={2;3;4;7;8;12;13;14},
D={1;7;14}.

Приклад. Нехай U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A={1, 2, 3, 4, 5}, B={2, 4, 6, 8}, C={1, 3, 5, 7}, D={1, 2, 4, 5, 7, 8}.
Знайти (D \ A)∩ (B∪C)∪(C\D).

Розв'язання. D \ A ={7, 8}, B∪C={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8},

(D \ A)∩(B∪C)={7, 8}∩{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}={7, 8},
C \ D={2, 3, 4, 8},
(D \ A)∩(B∪C)∪(C&D)={7, 8}∪{2, 3, 4, 8}={2, 3, 4, 7, 8}.

Варіанти індивідуальних завдань:

1.$(A\cup B)\cap(D\setminus C)$;	30.$(A\setminus B)\cap(C\setminus D)$;
2.$((A\cap\overline{C})\cap D)\cup(B\cup\overline{A})$;	31.$(A\setminus B\setminus\overline{C})\cup D$;
3.$(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}})\cup(\overline{C}\cap D)$;	32.$(\overline{A\cup D})\setminus(B\setminus C)$;
4.$(A\setminus D)\cup(B\cap C)$;	33.$(A-C)\cup(B\cup D)$;
5.$(A\cup C)\cup(\overline{B}\setminus C)$;	34.$(A\cap B)\setminus(\overline{C\cup D})$;
6.$(((A\cup B)\cup C)\cap(B\cup\overline{A}))$;	35.$(\overline{B\cup C})\cap(\overline{A\cup D})\cap\overline{A}$;
7.$((A\cap B)\cup C)\cup D$;	36.$((A-B)\cup D)\setminus(C\cup D)$;
8.$(\overline{A}\cup B)\cup(B\cup D)$;	37.$((A\cap\overline{C})\cap D)\cup\overline{B}$;
9.$(A\cup\overline{B})\cap(C\setminus D)$;	38.$((A\setminus B)\cup(\overline{B\cap D}))\setminus C$;
10.$((\overline{A\cap\overline{D}})\cup(B\cup C))\cap\overline{A}$;	39.$((A\setminus B)\cup(\overline{C\cap A})\cup(D\cup\overline{B})$;
11.$(A\cap B)\cup(\overline{\overline{C}\cap D})$;	40.$(\overline{A}\cup B)\cup(B\cap C)$;
12.$(A\cap B)\cup(\overline{D}\setminus C)$;	41.$(A\cup\overline{D})\cap(\overline{B\cup C})$;
13.$((\overline{B\cap D})\setminus(C\cup D))\cup\overline{A}$;	42.$\overline{(A\cup B)\cup(\overline{B\cap C})}\cup(\overline{A}\cup D)$;
14.$(\overline{A\cup D})\cap(B\cup C)$;	43.$(F\cup B)\cup(D\setminus\overline{C})$;
15.$((A\setminus C)\setminus(B\to D))\cup A$;	44.$(\overline{B}\cup C)\cup(D\setminus A)$;
16.$(\overline{\overline{A}\cup B})\cup(\overline{C}\cap\overline{D})$;	45.$(A\cap D)\cap(B\cap\overline{\overline{C}})$;
17.$(A\cap B)\cup(C\cap\overline{\overline{D}})$;	46.$(B\cap(\overline{D\cap C}))\cup A$;

18. $(A\cap B)\cap(A\setminus\overline{\overline{(C\cap D)}})$;	47. $(A\cup(B\cup C))\cap\overline{D}$;
19. $((A\cap B)\cup\overline{(C\cap D)})\cap\overline{A}$;	48. $((B\cup D)\cap A)\cup\overline{C}$;
20. $\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(\overline{C}\cap\overline{D})}$;	49. $((A\cup C)\setminus(B\cap D))\cup\overline{(A\cap D)}$;
21. $(B\cup C)\cup(C\cap(A\setminus\overline{D}))$;	50. $((A\cup D)\cup C)\cup B$;
22. $\overline{((B\cap C)\cup\overline{D})}\cap(A\cap D)$;	51. $((A\setminus\overline{C})\cap(B\cap D))\cup D$;
23. $\overline{(A\cup B)}\cup(A\cap D)\cup\overline{(\overline{A}\cup\overline{C})}$;	52. $(A\cap B)\setminus(C\cup(D\cup\overline{A}))$;
24. $((A\cup B)\cap(C\cup D))\cup(\overline{A}\cap B)$;	53. $(A\setminus D)\cup(\overline{B}\cup C)$;
25. $((A\cap B)\cup C)\cup\overline{\overline{(D\cap A)}}$;	54. $(C\cup(\overline{A}\cup B))\setminus(A\cap D)$;
26. $\overline{(\overline{C}\cap A)}\cap(B\cup D)$;	55. $((A\setminus B)\cup C)\cap\overline{\overline{D}}$;
27. $((\overline{\overline{A\cup B}})\cup(C\cap D))\cup(A\cap B)$;	56. $A\cap(D\cup(\overline{\overline{B}}\cap C))$;
28. $(A\cup\overline{(\overline{B}\cup A)})\cup(D\cap\overline{C})$;	57. $(A\setminus D)\cap(B\cap(C\cup\overline{A}))$;
29. $(D\cup C)\cup(A\cap B)\cup\overline{D}$;	58. $(A\cup B)\cup\overline{(C\cap\overline{\overline{D}})}$.

Визначення множин

Нехай U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A={1, 2, 3, 4, 5, 9}, B={2,4,6,8}, C={1, 3, 5, 7}, D={1, 2, 4, 5, 7, 8, 9}. Необхідно визначити через відомі множини A, B, C, D наступні множини або довести, що це зробити неможливо.

Приклад. Нехай U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A={1, 2, 3, 4, 5}, B={2, 4, 6, 8}, C={1, 3, 5, 7}, D={1, 2, 4, 5, 7, 8}. Визначити через відомі множини A, B, C, D множину {1,5}.

Розв'язання

$A\cap C=\{1, 3, 5\}$, $C\setminus D=\{3\}$,

$(A\cap C)\setminus(C\setminus D)=\{1, 3, 5\}\setminus\{3\}=\{1, 5\}$.

Варіанти індивідуальних завдань:

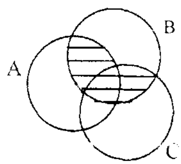
1.{5; 6; 3; 4; 7; 1; 8};	16.{1; 4; 8; 5; 2; 9; 3; 6; 7};
2.{7; 1; 4; 3; 8; 5; 9; 6};	17.{8; 4; 2; 7; 1; 3};
3.{9; 8; 6; 4};	18.{6; 7; 9; 3; 5; 1; 2; 4};
4.{5; 7; 1; 6};	19.{1; 9; 6; 4; 7; 5; 8; 2};
5.{3; 1; 6; 2; 7};	20.{3; 4; 1; 7; 8; 9; 5};
6.{8; 6; 1; 2; 3; 7; 9; 5};	21.{5; 8; 1; 2; 7; 4};
7.{2; 9; 7; 1; 6};	22.{7; 9; 4; 5; 6; 1; 2};
8.{1; 9; 2; 7};	23.{1; 6; 8; 4; 5; 3; 2; 1};
9.{3; 1; 2; 6; 7; 9; 4};	24.{5; 6; 2; 3; 7; 8; 4};

10.{1; 2; 6};	25.{4; 1; 8; 5; 7};
11.{4; 7; 3; 6};	26.{3; 6; 5; 7; 8};
12.{2; 6};	27.{3; 4; 1; 5; 2};
13.{5; 8; 4; 6; 3};	28.{6; 9; 3; 7; 1};
14.{3; 8; 5; 9; 7; 6; 4; 1};	29.{2; 3; 7; 6; 8};
15.{7; 9; 8; 1; 5; 6};	30.{4; 1; 2; 3; 5; 9}.

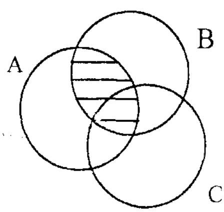
Кола Ейлера (Діаграми Венна)

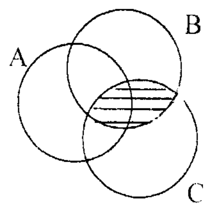
Визначити через дані множини зафарбовану область.

Приклад 1. Виразити через множини *A*, *B* і *C* множину *E*, якій відповідає заштрихована область.



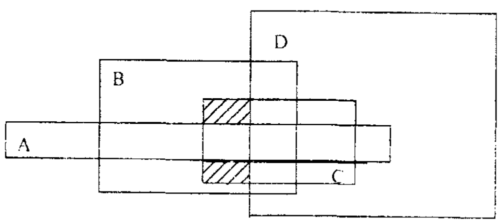
Розв'язання. Оскільки заштрихована множина на лівому рисунку відповідає множині $A \cap B$, а множина на правому рисунку відповідає множині $B \cap C$, то множина *E* є об'єднанням цих множин.





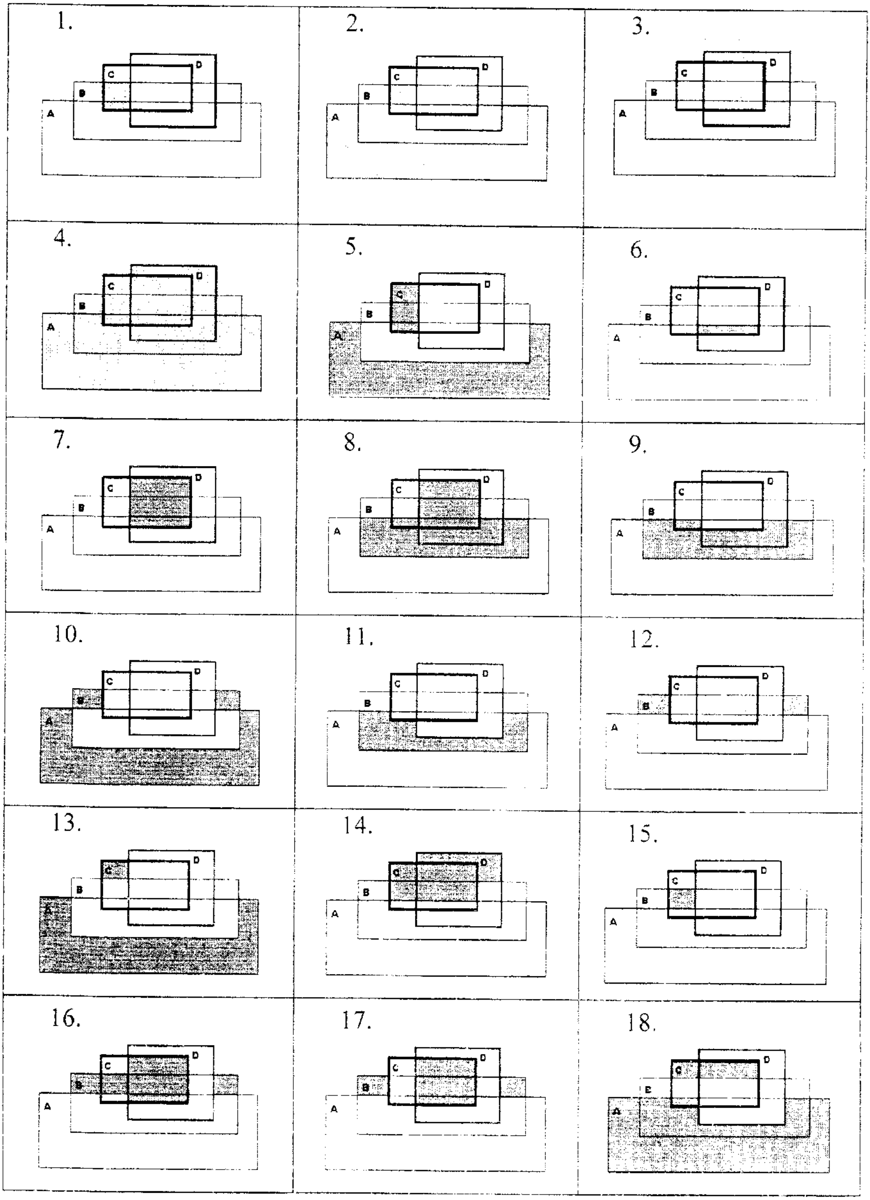
Тобто $E=(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

Приклад 2. Визначити через множини *A*, *B*, *C*, *D* множину *E*, якій відповідає заштрихована область.

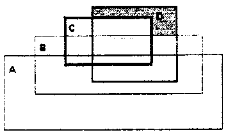


Розв'язання. E=(A\C) \ D. За визначенням
$X \setminus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X))$.

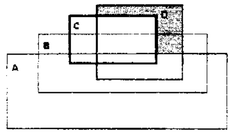
Варіанти індивідуальних завдань:



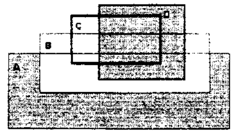
19.



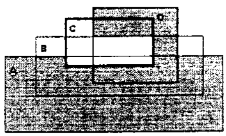
20.



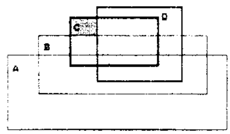
21.



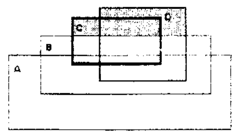
22.



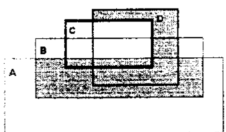
23.



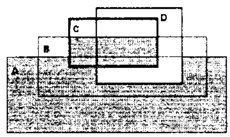
24.



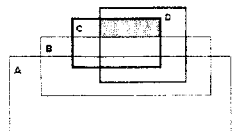
25.



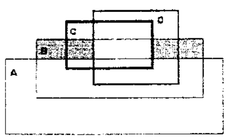
26.



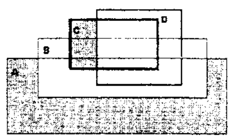
27.



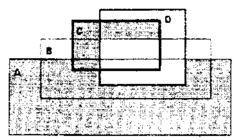
28.



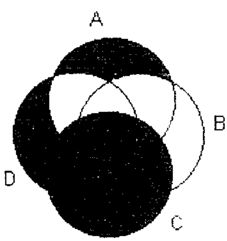
29.



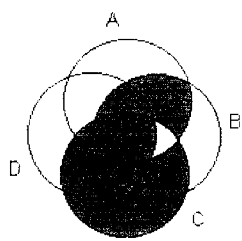
30.



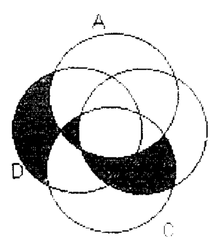
31.



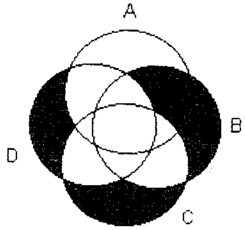
32.



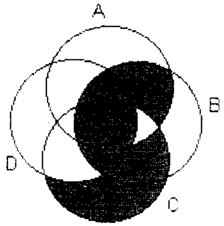
33.



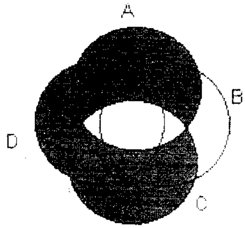
34.



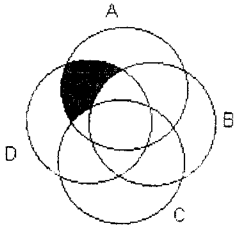
35.



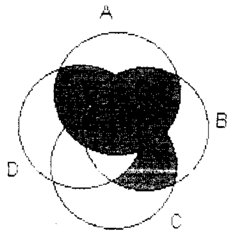
36.



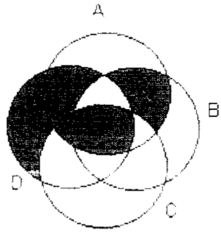
37.



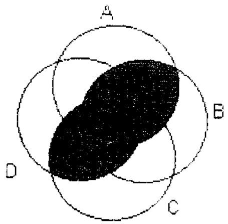
38.



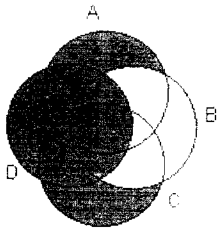
39.



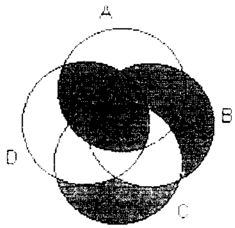
40.



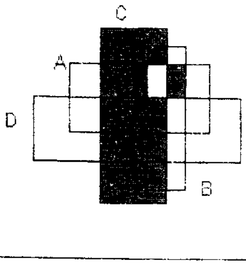
41.



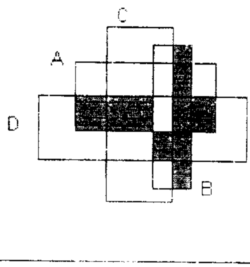
42.



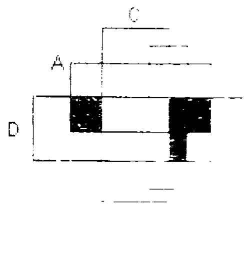
43.



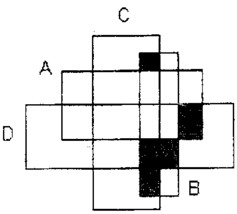
44.



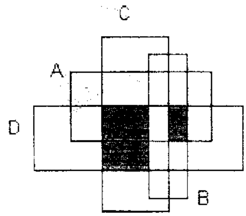
45.



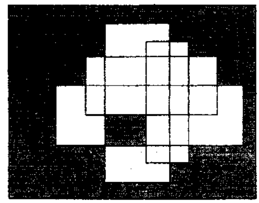
46.



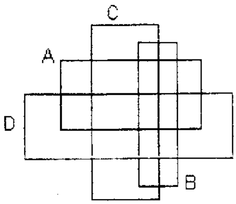
47.



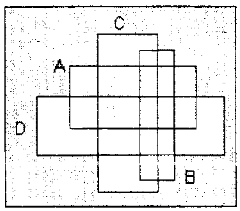
48.



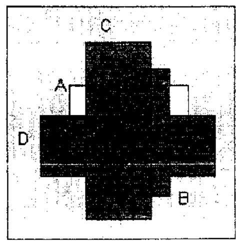
49.



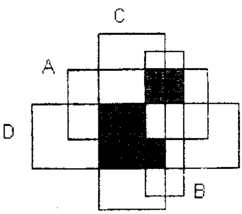
50.



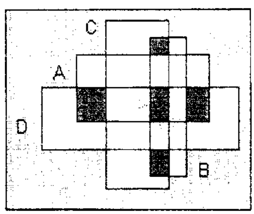
51.



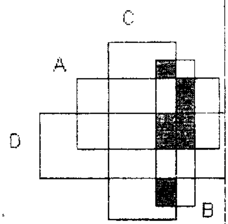
52.



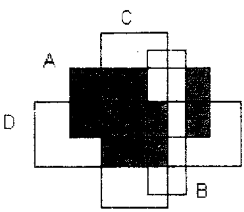
53.



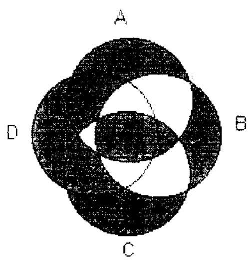
54.



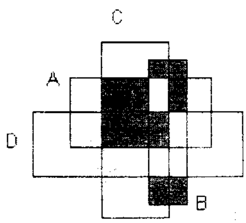
55.



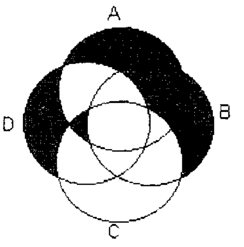
56.



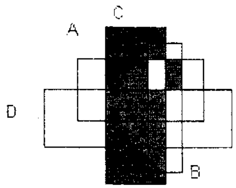
57.



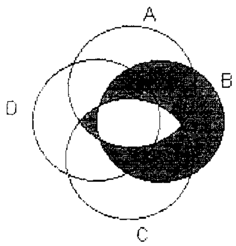
58.



59.



60.



Доведення теоретико-множинних тотожностей і тверджень

Довести такі тотожності:

$A \cup A = A \cap A = A$;

$A \cap B = B \cap A$;

$A \cup B = B \cup A$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;

$(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;

$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;

$A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

Довести, що:

$A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq C$;

$A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ і $A \subseteq C$;

$(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;

$A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;

$A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;
$A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;
$A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$;
$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

Предикати. Опис властивостей у явному вигляді

Записати властивість P шляхом перерахування його елементів, якщо $P \subseteq A$, $A=\{-3;-2,5;-1;0;1,2;1,5;e;\pi\}$.

Приклад. Записати властивість P шляхом перерахування його елементів, якщо $P \subseteq A$, $A=\{-3; -2; -1; 0; 4; 16\}$, $P=\{x: x \geq x^3\}$.

Розв'язання. Очевидно, що нерівність $x \geq x^3$ не може виконуватися для позитивних чисел, більших 1. У той же час для чисел 0; -1 і від'ємних чисел, менших -1, воно виконується. Тому, $P=\{-3; -2; -1; 0\}$.

Варіанти індивідуальних завдань:

1. $P = \{x: x \geq 2\}$;
2. $P = \{x: x < x^2\}$;
3. $P = \{x: x^2+2x-3=0\}$;
4. $P = \{x: \ln x = 1\}$;
5. $P = \{x: x \geq \sqrt{2}\}$;
6. $P = \{x: 6 \leq x\}$;
7. $P = \{x: 3x > 4\}$;
8. $P = \{x: (x-1,2)/(2x-3) \geq 0\}$;
9. $P = \{x: \sin x = 0\}$;
10. $P = \{x: x (Z\}$;
11. $P = \{y$: y – ірраціональне число$\}$;
12. $P = \{y: y (N\}$;
13. $P = \{y: \cos y = 0\}$;
14. $P = \{y: \sin y \leq 0\}$;
15. $P = \{y: \ln y = 2\}$;
16. $P = \{z: z > \sqrt{9}\}$;
17. $P = \{z: z \geq 3\}$;
18. $P = \{z: z \leq 2z^3\}$;
19. $P = \{x: x^2 + 4x-5=0\}$;
20. $P = \{x: x \in R\}$;
21. $P = \{x: (x+1)^3=0\}$;
22. $P = \{x: 3x^3+2x-6 \leq 0\}$;
23. $P = \{x: 2x^2 = 18\}$;
24. $P = \{z: (z-2)/(2z-4) \leq 0\}$;
25. $P = \{x: \sqrt{x} > 0\}$;
26. $P = \{x: 7x < 0\}$;

27. P = {z: $z>z^2$};
28. P = {z: $z^2+1>½$};
29. P = {x: 8<x};
30. P = {x: $2x^2+8x-3<0$}.

Опис відношень у явному вигляді

Записати відношення P шляхом перерахування його елементів, якщо $P \subseteq A \times B$.

Приклад. Записати відношення P шляхом перерахування його елементів, якщо $P \subseteq A \times B$, A=Z, B={-2; -1; 0; 1; 2}, P={(x, y): $|x| \le \frac{y}{2}$ }.

Розв'язання. Оскільки $y \in B$, то $\frac{y}{2} \in \{-1;\ -1/2;\ 0;\ 1/2;\ -1\}$. Якщо $\frac{y}{2}<0$, то немає таких x, що $|x| \le \frac{y}{2}$. Якщо $\frac{y}{2} \in \{0;\ 1/2\}$, то в нерівності $|x| \le \frac{y}{2}$ відносно x одне ціле рішення x=0. Якщо $\frac{y}{2}$=1, то з того, що $|x| \le 1$ випливає, що x=1 і x=0. Таким чином, P={(0; 0); (0; 1); (1; 1)}.

Варіанти індивідуальних завдань:

1. P = {(x, y): x≤y}, A=B={1; 2; 3; 6; 8; 9;72};
2. P = {(x, y): x ≥ y}, A={1; 2; 3}, B=N;
3. P = {(x, y): $x^2+y^2=1$}, A=B={-1; 2; ¼; -1; 1;0};
4. P = {(x, y): x =-y}, A={-1;2;0;4}, B=Z;
5. P = {(x, y): 1/x=y}, A={1; -½; 0; 3; 4; -5}, B={1; 0; 2; -¼ };
6. P = {(x, y): 2x ≥ ¼ y}, A ={-1; 2; 0; 5; -2}, B={0; 1; 2; -3};
7. P = {(x, y): y = x/2}, A={½;-½;1;0}, B=R;
8. P = {(x, y): y ≥-x}, A∈N, B={0;-2; $\sqrt{2}/2$;1;-1};
9. P = {(x, y): $x^2+1=y$}, A=B= {0;1;3; ½;4;-1};
10. P = {(x, y): 1+2y=x}, A={1;2;3;5;8}, B={-2;-4; 1};
11. P = {(x, y): $2x^2/3 \le y$}, A={0; -2; ⅛; 4}, B={5;7; ½};
12. P = {(x, y): $2x+x^2=-y$}, A={-1; 0; 3; 8}, B=Z;
13. P = {(x, y): $(x-1)^2=y$}, A={4;0;2;3}, B=N;
14. P = {(x, y): x≤y}, A=B={0; -1; 1; 2; 8; 4; 3; -2};
15. P = {(x, z): x^2 =z}, A∈N, B={0; -1; 1; 2; 8; 4; 3;-2};
16. P = {(x, z): ½z=x}, A={0;-1;1;-2;4}, B={1; 4; 3; 0;-2};
17. P = {(x, y): $x \le y^2$}, A={2; 4; 8; 16}, B={0; 1;-1; 2;4};
18. P = {(x, y): $\sqrt{2x} \ge y$}, A=B={-1; 0; 1; 3; 8; $\sqrt{2}$; ½; 4};
19. P = {(x, y): x ≤ y}, A={-1; -2; 0; 4; 8}, B=N;
20. P = {(x, y): $x^2/2=-y$}, A={1; 2; 3; 4; 5}, B={-1; -2; 3; 4};
21. P = {(x, y): $-x \le y^2$}, A={0;1;2;4;-1}, B={1;2;5;4;0};
22. P = {(x, y): $x^2+y^2=2$}, A={-2; -8; 1; 4}, B={0;2;1;4};

23.P = {(x, y): 2x = -y}, A={0; 8; 2; 1}, B={-1;0;2;-3;1};
24.P = {(x, y): $x\sqrt{x}$=y}, A={2;-2;1;0;4}, B={-1;2;0;4;-2};
25.P = {(x, y): $\sqrt{y}$<x}, A=N, B={4;0;-1;8;2;1};
26.P = {(x, y): x=1/y}, A={0; 1; 8; 3; 6}, B={4;0;1;-2;3};
27.P = {(x, y): $\sqrt{x}$>2y}, A={-2;1;8;0;3}, B=Z;
28.P = {(x, y): $4x^2 = y$}, A=B={4;0;1;-1;2;3};
29.P = {(x, y): $x^2-8 \le y$}, A={0;1;2;-3;-2;}, B={-1;-2; 2;1;3};
30.P = {(x, y): $x \ge 3y^2$}, A={1;2;3;0;6}, B={1;3;8;-9}.

Обернені предикати. Суперпозиція і перерізи предикатів

Знайти R^{-1}, $R\circ R$, $R\circ R^{-1}$, $R^{-1}\circ R$, $R\cap R^{-1}$.

Приклад. Знайти R^{-1}, $R\circ R$, $R\circ R^{-1}$, $R^{-1}\circ R$, $R\cap R^{-1}$, якщо $R\subseteq N$,
$R=\{(x,y): x=yn,\ n\in N\}$.

Розв'язання. $R^{-1}=\{(x, y): y=xn,\ n\in Z\}$.

$R\circ R\ (x, y)=1 \Leftrightarrow \exists\ z\in N\ R(x,z)=1 \wedge R(z, y)=1 \Leftrightarrow \exists\ z\in N\ x=nz,\ z=my,\ n,\ m\in N$ $\Leftrightarrow x=n_1y,\ n_1\in N\ (n_1=nm)$. Виходить, що $R\circ R=R$.

$R\circ R^{-1}\ (x, y)=1 \Leftrightarrow \exists\ z\in N\ R(x,z)=1 \wedge R^{-1}(z, y)=1 \Leftrightarrow \exists\ z\in N\ x=nz,\ y=mz,\ n,$ $m\in N$. Таким z для будь-яких x, y можна взяти 1. Виходить, що $R\circ R^{-1}=N$.

$R^{-1}\circ R\ (x, y)=1 \Leftrightarrow \exists\ z\in N\ R^{-1}(x, z)=1 \wedge R(z, y)=1 \Leftrightarrow \exists\ z\in N\ z=xn,\ z=ym,\ n,$ $m\in N$. Таким z для будь-яких x,y можна взяти xy. Тобто $R^{-1}\circ R=N$.

$R\cap R^{-1}=\{(x, y): x=y\}$.

Варіанти індивідуальних завдань:

1. R = {(x, y): x, y ∈ N, x ≥ y};
2. R = {(x, y): x, y ∈ N, x ≤ y};
3. R = {(x, y): x, y ∈ R, x + y ≤ 0};
4. R = {(x, y): x, y ∈R, 2x ≥3y};
5. R = {(x, y): x, y ∈[-π/2;π/2], y ≥ sin x};
6. R = {(x, y): x, y ∈ R, y ≤ x};
7. R = {(x, y): x, y ∈ R, $y = 2x^2$};
8. R = {(x, y): x, y ∈ N, $x=2y^2$};
9. R = {(x, y): x, y ∈ Z, x + y >2};
10. R = {(x, y): x, y ∈ Z, x – y ≥3};
11. R = {(x, y): x, y ∈ R, y = ln x};
12. R = {(x, y): x, y ∈ Z, $y \le x^2$};
13. R = {(x, y): x, y ∈ N, $x^2 + y > 4$};
14. R = {(x, y): x, y ∈ Z, y = 2x};
15. R = {(x, y): x, y ∈ R, y ≤ 0};
16. R = {(x, y): x, y ∈ [-π;π], $y = \sin x^2$};
17. R = {(x, y): x, y ∈ [-π/2;π], y = cos x};

18. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = \log_4 16\}$;
19. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y + x^2 = 0\}$;
20. $R = \{(x, y): x, y \in Z, yx \geq 3\}$;
21. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = x^3\}$;
22. $R = \{(x, y): x, y \in R, 2x - y \geq 2\}$;
23. $R = \{(x, y): x, y \in N, 3y \geq x^2\}$;
24. $R = \{(x, y): x, y \in R, x \geq y\}$;
25. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y = x^2\}$;
26. $R = \{(x, y): x, y \in Z, x + 2y = 0\}$;
27. $R = \{(x, y): x, y \in N, x \leq 3y\}$;
28. $R = \{(x, y): x, y \in R, y = -x\}$;
29. $R = \{(x, y): x, y \in N, x = \frac{1}{2}\sqrt{y}\}$;
30. $R = \{(x, y): x, y \in Z, y = 2x - 4x^2 + 1\}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гильберт Д., Бернойс П. Основания математики. – М.: Наука, 1979.
2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. школа, 1986.
3. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
4. Мендельсон Н. Введение в математическую логику. – М.: Мир, 1974.
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979.

Навчальне видання

О.М. Роїк,
Р.Г. Тадевосян

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 1

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ, ОБЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ, ТЕОРІЯ МНОЖИН

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор С.А.Малішевська

ВДТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ

Підписано до друку 20.09.2002 р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7х42 $1/4$ Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 4,6
Тираж 75 прим.
Зам. № [illegible]

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ